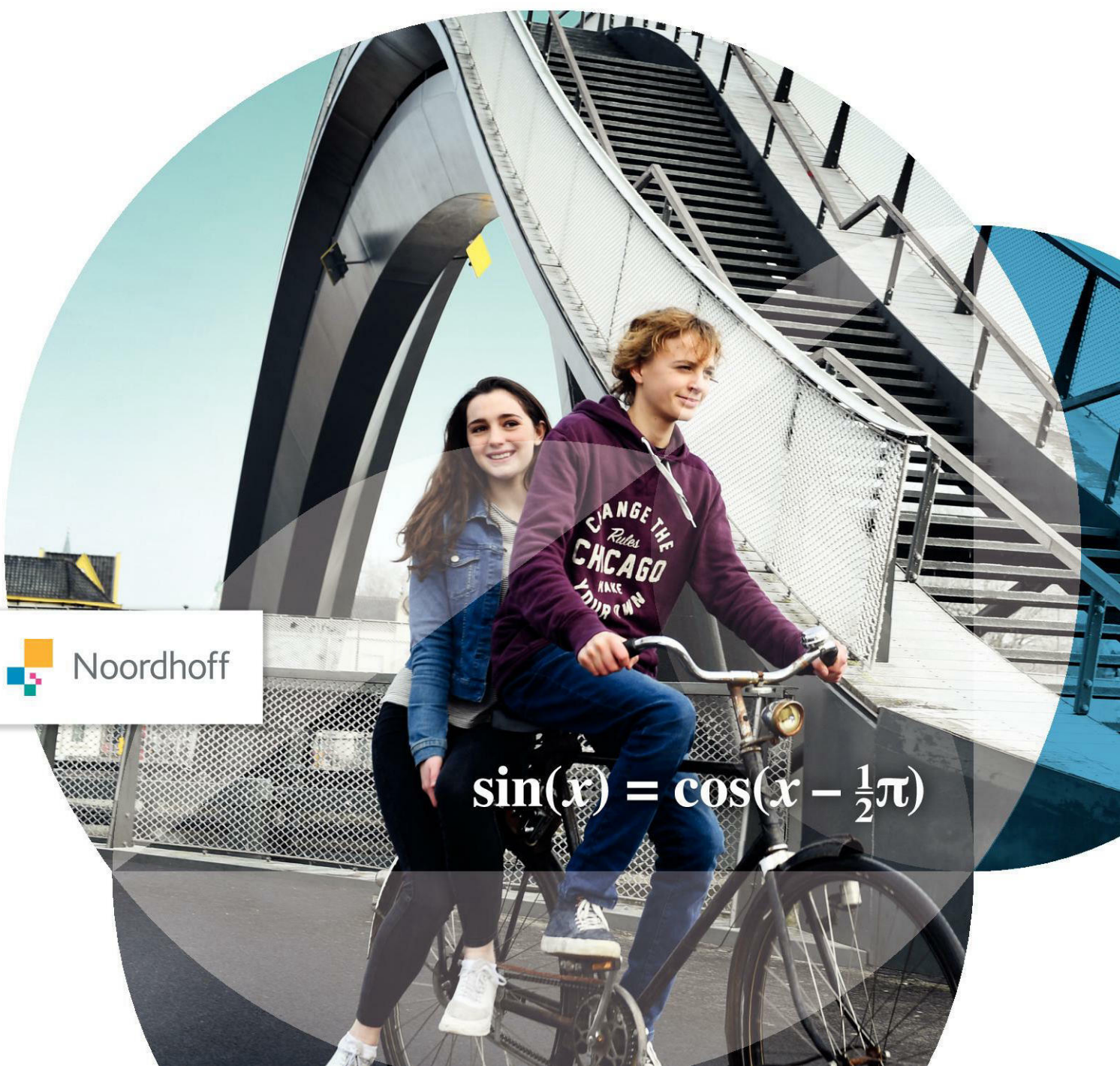


MODERNE WISKUNDE

A



Noordhoff

$$\sin(x) = \cos(x - \tfrac{1}{2}\pi)$$

12e editie

Moderne Wiskunde

Uitwerkingen bij havo A deel 2

Ontwerp omslag G2K Designers, Groningen/Amsterdam
Ontwerp binnenwerk Ebel Kuipers, Sappemeer
Technisch tekenwerk Integra Software services Pvt. Ltd., India

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB
Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleen.

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 20

© 2020 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsenauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-89261-6

12e editie

Moderne Wiskunde

Uitwerkingen bij havo A deel 2

Jos Baars
Gerard van Proosdij
Rindert Reijenga
Geertrui Schaberg
Greetje Smeenk – van Broekhoven

- H7 Statistische verwerking (met ICT) 6
- H7 Statistische verwerking (zonder ICT) 35
- H8 Grafieken en veranderingen 56

Vaardigheden 4 85

- H9 Lineaire en exponentiële formules 89
- H10 Verdelingen (met ICT) 118
- H10 Verdelingen (zonder ICT) 147

Vaardigheden 5 170

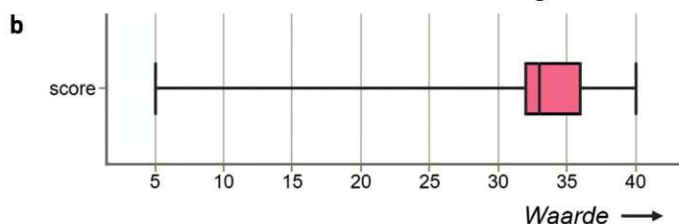
Meer oefenen 175
Oefenproefwerken 190

7 Statistische verwerking (met ICT)

Voorkennis

- V1**
- a** $3 + 6 + 8 + 6 + 11 + 9 = 43$ jeugdleden zijn jonger dan 12 jaar.
 - b** Er zijn in totaal $67 + 70 = 137$ jeugdleden.
 $43 : 137 \times 100\% \approx 31\%$ daarvan is jonger dan 12 jaar.
 - c** De groep 15-jarige meisjes is het grootst. Er zijn er 12.
De groep 10-jarige jongens is het grootst. Het zijn er 11.
 - d** Er zijn 67 meisjes. Omdat $67 = 33 + 1 + 33$, is Simone het 34e meisje als je ze van jong naar oud zou rangschikken. Van links naar rechts het aantal meisjes tellend geeft $3 + 6 + 8 + 12 + 7 = 36$.
Het 34e meisje valt in de groep 13-jarigen. Simone is 13 jaar oud.
 - e** Er zijn in totaal 137 jeugdleden.
Gezamenlijk zijn ze $9 \times 9 + 17 \times 10 + 17 \times 11 + \dots + 17 \times 17 = 1803$ jaar oud.
De gemiddelde leeftijd is $1803 : 137 \approx 13,2$ jaar.
- V2**
- a** Het gemiddelde cijfer is
$$\frac{3 \times 2 + 4 \times 6 + 5 \times 35 + 6 \times 34 + 7 \times 18 + 8 \times 11 + 9 \times 3}{109} \approx 6,0.$$
 - b** Er zijn 109 waarnemingen. De middelste waarneming is de 55e, want $109 = 54 + 1 + 54$. Tel je de frequenties op van links naar rechts, dan krijg je $2 + 6 + 35 = 43$ en $2 + 6 + 35 + 34 = 67$.
De 55e leerling heeft een 6, de mediaan is 6.
 - c** Het cijfer 5 komt het meest voor en is de modus.
 - d** 43 leerlingen hebben een onvoldoende. Dat is $43 : 109 \times 100 \approx 39,4\%$.
- V3**
- a** De drie nullen achter de acht betekenen dat er drie kastanjes zijn met een gewicht van 8,0 gram.
 - b** Er zijn 10 kastanjes die meer dan 9 gram wegen. Dat is $10 : 59 \times 100 \approx 17\%$.
 - c** Het verschil in gewicht tussen de lichtste en de zwaarste kastanje is $10,1 - 3,2 = 6,9$ gram.
 - d** De modus is 7,7 gram.
Van de 59 kastanjes gerangschikt op volgorde van gewicht van licht naar zwaar, is de 30e kastanje de middelste, want $59 = 29 + 1 + 29$.
De 30e kastanje weegt 7,7 gram. De mediaan is 7,7.
- V4**
- a** De laatste man kwam $2,5 - 1 = 1,5$ uur later binnen dan de eerste man.
 - b** De snelste vrouw deed er $1\frac{1}{2}$ uur over.
In de periode van 1 uur tot $1\frac{1}{2}$ uur kwamen alle mannen uit het eerste kwartiel binnen. Dat is 25% van het totaal aantal mannen.
 - c** De mediaan bij de mannen is $1\frac{3}{4}$ uur, dat is 1 uur en 45 minuten.
 - d** Dat zijn alle vrouwen tussen het eerste en het derde kwartiel, dus 50%.
 - e** De 25% snelste vrouwen hadden een tijd tussen $1\frac{1}{2}$ uur en $2\frac{1}{4}$ uur dus tussen 1:30 en 2:15 uur.
 - f** Het tijdstip van de langzaamste man valt precies op het derde kwartiel van de vrouwen. 75% van de vrouwen was dan al binnen. Dat waren 126 vrouwen.
25% moest dus nog binnen komen. Dat waren $126 : 3 = 42$ vrouwen.

V5 a 250 mensen hebben een scoreformulier ingevuld.



c Maak een tabel met de kentallen.

De hoogste score is 40 en de laagste score is 5.

d Er is maar één persoon die een score van 5 heeft, de overige 249 allemaal een score van 30 of meer. De kans is groot dat hier een fout is gemaakt, bijvoorbeeld bij het invoeren, of dat de vragen niet serieus zijn beantwoord.



f Er is niet zoveel verschil, want Q_1 , mediaan, Q_3 zijn hetzelfde. Alleen begint de boxplot nu bij 5 in plaats van 25.

7.1 Klassenindeling

intro In een tabel waar je de data in drie groepen verdeeld. De auto's met een snelheid van 20 tot 30 km per uur, 30 tot 40 km per uur en 40 tot 50 km per uur.

Of een staafdiagram met twee staven. De hoogte van de linker staaf geeft het percentage weer dat 30 km per uur reed of minder en de hoogte van de tweede staaf geeft het percentage weer dat meer dan 30 km per uur reed.

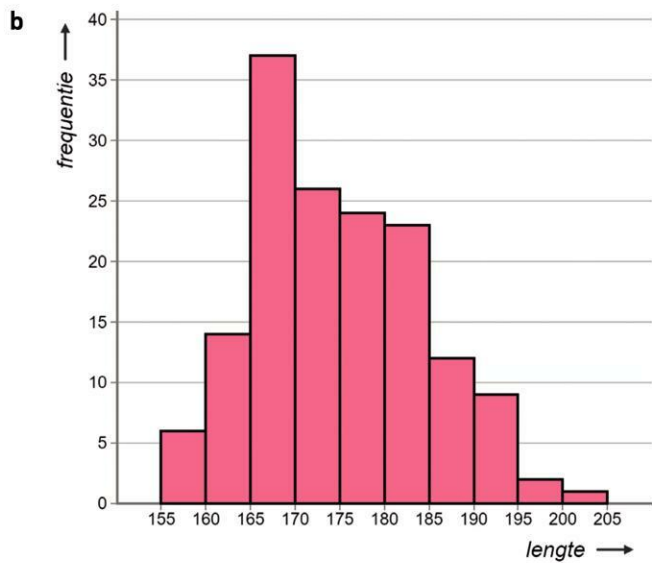
- 1 a De lengte in de tabel wordt gegeven in cm. 179,8 cm wordt afgerond naar 180 cm.
 - b Een lengte van 164,4 wordt afgerond naar 164 cm en valt in de klasse 160-164 cm.
 - c Het kleinste meisje in deze klasse is 174,5 cm lang.
 - d 174,5 cm is de linker grens en 179,5 de rechter grens van de klasse 175-179.
 - e De klasse 155-159 heeft als grenzen 154,5 en 159,5.
De breedte van deze klasse is $159,5 - 154,5 = 5$ cm.
 - f Het midden van de klasse 155-159 is $(154,5 + 159,5) : 2 = 157$ cm.
- 2 a 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76.
 - b Alle leden met een gewicht uit het interval $[69,5; 76,5)$ hebben afgerond op hele kilogrammen een gewicht van 70 tot en met 76 kg.
 - c Het midden van de klasse $[69,5; 76,5)$ is $(69,5 + 76,5) : 2 = 73$ kg.
De klassenbreedte is $76,5 - 69,5 = 7$ kg.
 - d Personen met een leeftijd in de klasse 70-76 hebben een leeftijd van 70,0 tot en met 76,99.... (je bent pas 77 op je verjaardag)
De klassengrenzen zijn 70 en 77.
Het klassenmidden is $(70 + 77) : 2 = 73,5$ jaar.

7 Statistische verwerking (met ICT)

e $[70, 77)$ is de klasse.

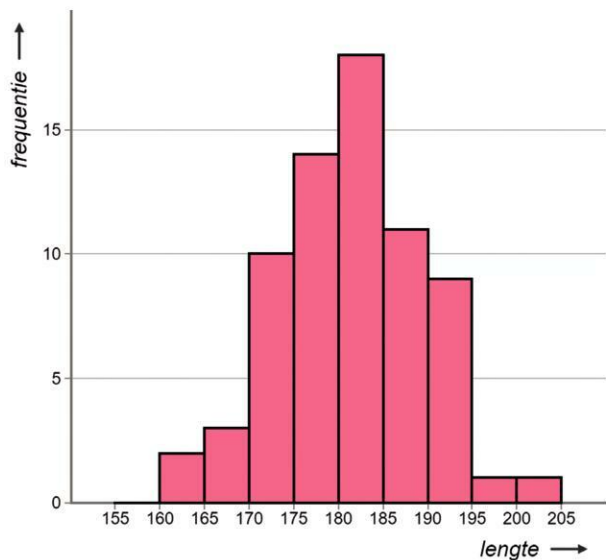
f De klassenbreedte $77 - 70 = 7$ jaar.

3 a De klassenbreedte is 2 cm.

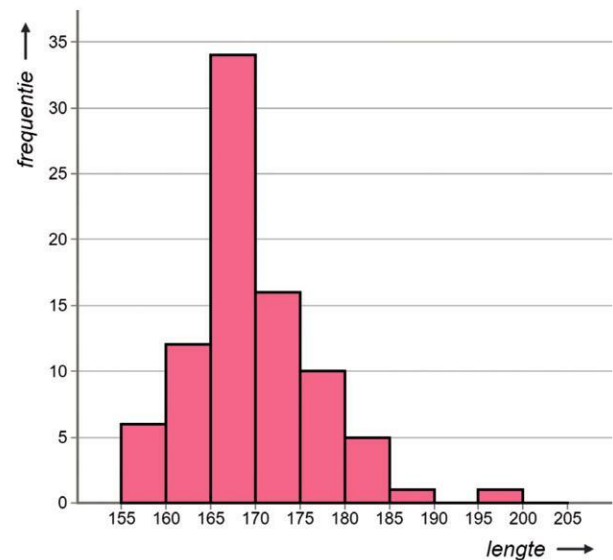


c Die met klassenbreedte 5 cm.

d jongens



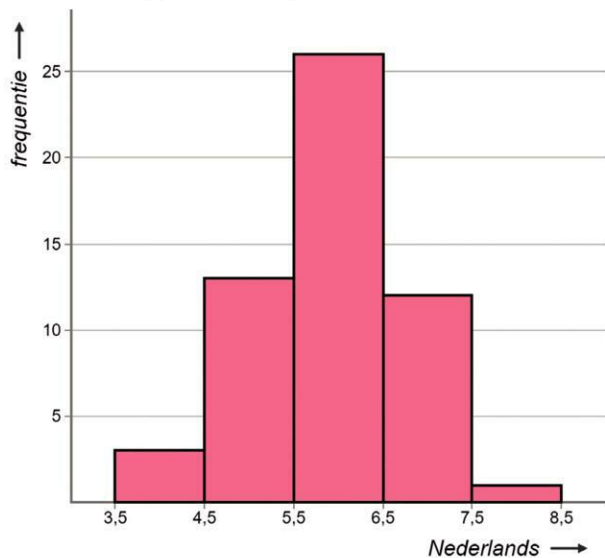
meisjes



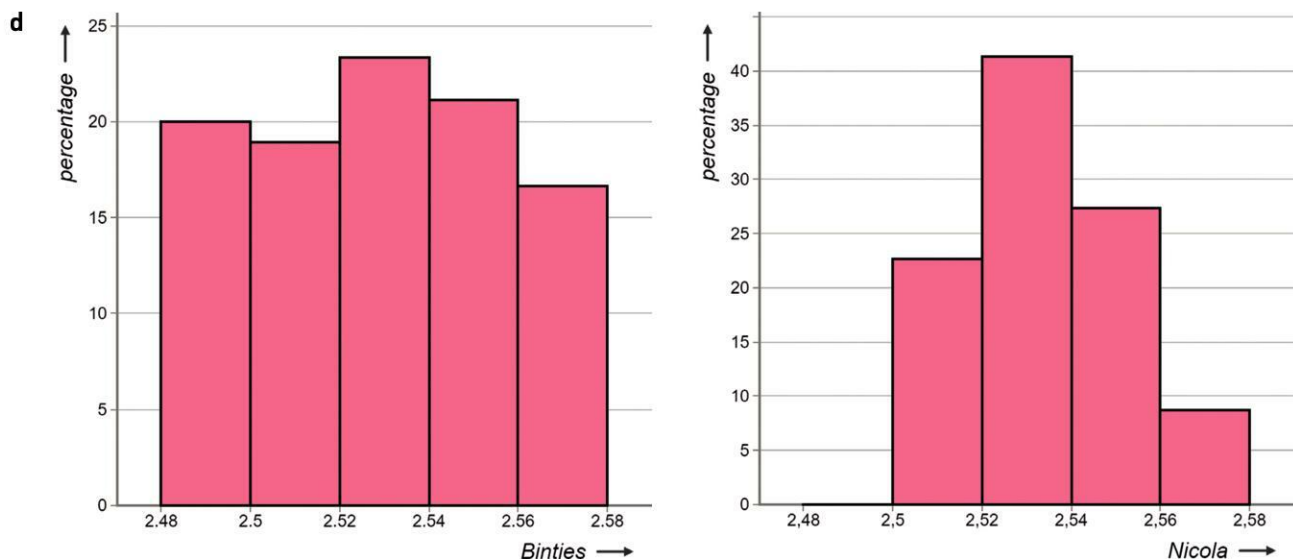
e Neem bijvoorbeeld klassenbreedte 10 cm en 3 cm.

Het lijkt dat je bij een indeling van met klassebreedte 5 cm een goed beeld krijgt.

- 4 a** Neem als beginwaarde 3,5 en kies klassenbreedte 1.



- b** Twaalf leerlingen staan afgerond een 7.
c In een tabel met de kentallen zie je dat de mediaan is 5,9 is. Deze ligt in de klasse $[5,5; 6,5)$.
d De modale klasse is ook de klasse $[5,5; 6,5)$, want die bevat de meeste waarnemingen.
- 5 a** De klassenbreedte is 0,02 kg en de klassenmiddens zijn 2,49; 2,51; 2,53; 2,55 en 2,57.
- b** Er zijn niet evenveel aardappelen van elke soort.
c 18 zakken Bintjes vallen in die klasse. Er zijn 90 zakken bintjes. Dat is $18 : 90 \times 100 = 20\%$.

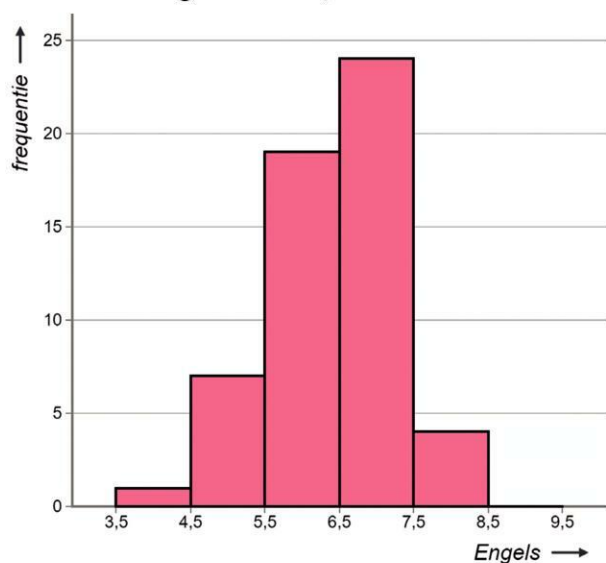


- e** Het staafdiagram van de Bintjes loopt min of meer vlak, terwijl die van de Nicola eerst sterk toeneemt en vervolgens weer afneemt.
- 6 a** De indruk wordt gewekt dat er heel veel meer junioren zijn vergeleken met de rest. Dit komt doordat de klassenbreedtes niet gelijk zijn.
b Een klassenindeling maken met gelijke klassenbreedte, dus die van 6-17 opsplitsen in 6-9, 10-13 en 14-17 en dan de 90 junioren gelijk verdelen over deze drie klassen, dus in elke klasse 30 junioren.

7 Statistische verwerking (met ICT)

- 7 a** De klassenbreedte is 0,10 kg en de klassenmiddens zijn 2,45; 2,55; 2,65 en 2,75.
b Het gemiddelde is
 $(2,45 \times 6 + 2,55 \times 10 + 2,65 \times 8 + 2,75 \times 6) : 30 = 77,9 : 30 \approx 2,60$ kg.
c Binnen elke klasse moeten de waarnemingen gelijkmatig verdeeld zijn en wel zo, dat het gemiddelde van alle waarnemingen in een klasse ook gelijk is aan het klassenmidden. Vaak weet je niet of dat zo is en neem je dit maar aan.

- 04 a** Elk cijfer dat afgerond op één decimaal groter of gelijk is aan 6,5 maar lager dan 7,5.
b De cijfers die liggen in het interval $[6,5; 7,5)$.
c Het laagste cijfer voor Engels is een 4,1.
d 4,1 valt in de klasse $[3,5; 4,5)$. De linker grens van die klasse is 3,5.
e Je neemt als beginwaarde 3,5 en kiest als klassenbreedte 1.



- f** 24 leerlingen staan afgerond een 7.
g In een tabel met kentallen zie je dat de mediaan is 6,5 is. Deze ligt in de klasse $[6,5; 7,5)$.
h De modale klasse is $[6,5; 7,5)$, want hierin liggen de meeste waarnemingen. De grenzen van de modale klasse zijn 6,5 en 7,5.

- U1** De klassengrenzen zijn 55, 60, 65 enzovoort, want het zijn leeftijden. De klassenmiddens zijn 57,5; 62,5; 67,5 enzovoort. Noem de aantallen leden in de klasse 65-69 a en het aantal leden in de klasse 75-79 b .

$$a + b = 50 - 3 - 9 - 14 - 3 - 2$$

$$a + b = 20 \text{ ofwel } b = 20 - a \quad (1)$$

Gemiddelde leeftijd is

$$\frac{3 \times 57,5 + 8 \times 62,5 + a \times 67,5 + 14 \times 72,5 + b \times 77,5 + 3 \times 82,5 + 2 \times 87,5}{50} = 70.$$

Dit is een vergelijking die je kunt herleiden tot:

$$2110 + 67,5a + 77,5b = 3500$$

$$67,5a + 77,5b = 1390 \text{ ofwel } b = (1390 - 67,5a) : 77,5 \quad (2)$$

Vul vergelijking (1) en (2) in op je rekenmachine en bereken het snijpunt.

Invoer: $y_1 = 20 - x$ en $y_2 = (1390 - 67,5x) : 77,5$

Venster: x van 0 tot 20 en y van 0 tot 10

Optie: snijden

Dit geeft $x = 16$ en $y = 4$ dus $a = 16$ en $b = 4$.

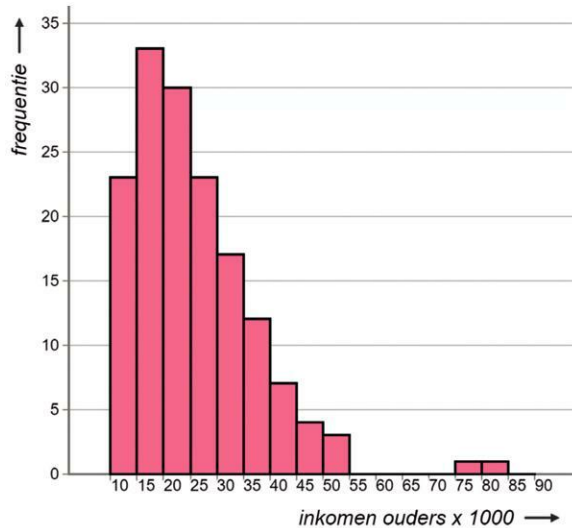
Op de open plaatsen staan achtereenvolgens 16 en 4.

7.2 Soorten frequentieverdelingen

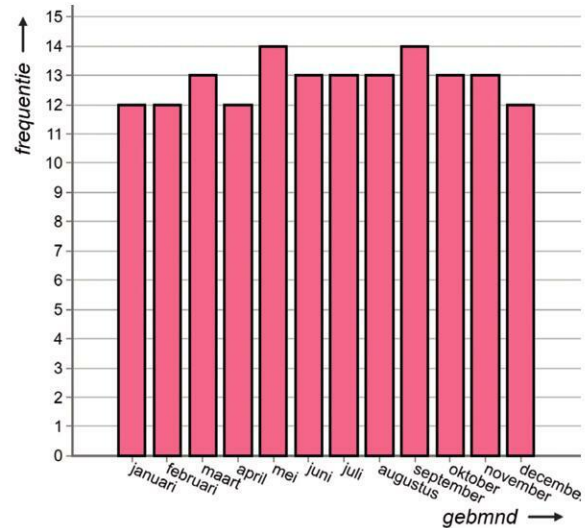
intro Er zullen ongeveer net zoveel leerlingen zijn die sneller dan het gemiddelde als langzamer dan het gemiddelde reageren.

- 8 a** De dataset bevat 11 variabelen.
b De variabelen *leeftijd*, *lengte*, *gewicht*, *vergooien* en *inkomen ouders* zijn kwantitatief, de overige kwalitatief.

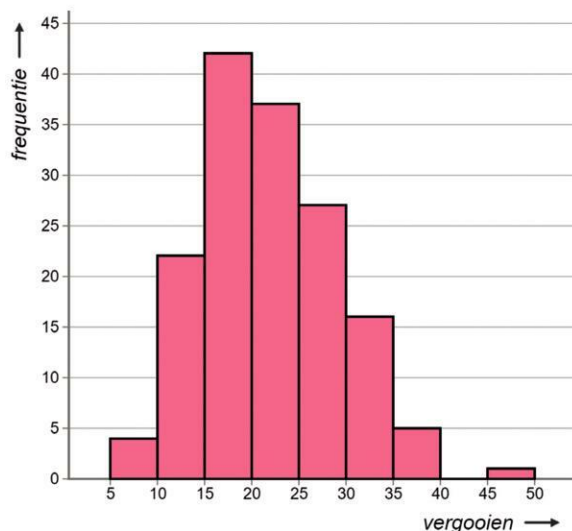
c A



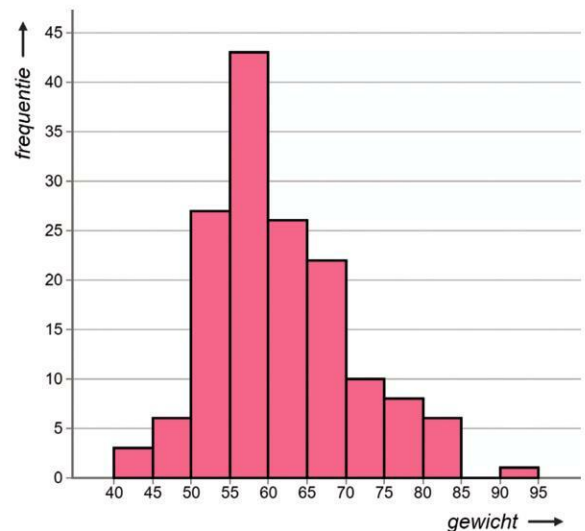
B



C

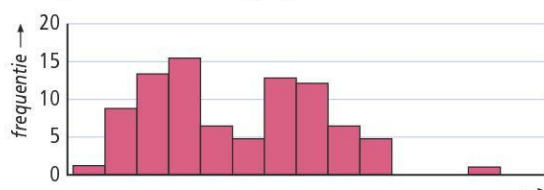


D



- d** De staafdiagrammen van B en C zijn min of meer symmetrisch.
e Sorteert de variabele *vergooien*, bijvoorbeeld aflopend en je leest direct af dat er $55,00 - 48,50 = 6,5$ meter verschil zit tussen de twee beste worpen.

- 9 a** De klokvormige, de uniforme en de meertoppige.
b Bij de klokvormige en de uniforme zijn de modus, mediaan en het gemiddelde (vrijwel) gelijk aan elkaar.
c Er zijn meerdere mogelijkheden.



- 10** a Scheef met staart naar rechts, uniform en klokvormig.
b Inkomen ouders: een paar zijn echt rijk, het merendeel (de modale klasse) heeft een 'gewoon' (niet extreem) inkomen.
Geboortemaand: de geboortes zijn gelijk verdeeld over het jaar.
Vergooien en gewicht:
Er zijn ongeveer evenveel afwijkingen boven als onder het gemiddelde.
c De vorm van het staafdiagram bij de variabele lengte zal ook klokvormig zijn.
d -

- 11** a Van 100 accu's.
b Tweetoppig met uitschieter.
c Min of meer klokvormig.
d De uitschieter is van type A.
e Met kentallen vind je:
Van type A is het gemiddelde is 10, de mediaan is 10 en de modus is 10.
Van type B is het gemiddelde is 7, de mediaan is 7 en de modus is 7.
f Bij een klokvormige verdeling zijn het gemiddelde, de modus en de mediaan gelijk.

- 12** a Scheef met staart naar rechts.
b De modale klasse is de klasse $[2000, 2200)$.
c Met de kentallen zie je dat het gemiddelde 2490 euro is.
d Er liggen meer data links van het gemiddelde, dus Mohammed heeft gelijk.
e Van 416 huishoudens is het inkomen genoteerd. Met aflopend sorteren zie je dat 182 huishoudens 2500 euro of meer verdienen.
Dit is $182 : 416 \times 100\% \approx 44\%$.
f De mediaan is het gemiddelde van het 208e en 209e inkomen.
Dat is het gemiddelde van 2300 euro en 2400 euro.
Vanaf 2350 euro hoor je bij de 50% meest verdienende huishoudens.

- 13** a Scheef met staart naar links.
b De klasse van 8 uur tot 8,5 uur is de modale klasse.
c Langer dan de modale klasse is $16\% + 7\% + 2\% + 1\% = 26\%$.
De modale klasse is 21%.
Korter dan de modale klasse is $100\% - 21\% - 26\% = 53\%$.
Gemiddeld slapen de Nederlanders korter dan modaal.
d Ongeveer $1\% + 2\% + 2\% + 3\% = 8\%$ van de Nederlandse bevolking heeft kans op een chronisch slaaptekort.

- 012** a Scheef met staart naar rechts.
b De modale klasse is $[15, 18)$ meter.
c Met kentallen vind je dat het gemiddelde 22,3 meter is.
d Sorteert de variabele *vergooien* aflopend.
66 leerlingen hebben verder dan 22,3 meter gegooid en dat is minder dan de helft.
e 66 van de 154 leerlingen hebben verder gegooid dan het gemiddelde.
Dat is $66 : 154 \times 100\% \approx 43\%$.

- U2** a Scheef met staart naar rechts. Er zitten minder leerlingen in de bovenbouw dan in de onderbouw.
b Meertoppig, 's morgens en aan het eind van de werkdag zijn er pieken.
c Klokvormig, in de flessen zal soms wat minder en soms wat meer frisdrank zitten.

7.3 Centrummaten

intro In klas H4a is waarschijnlijk het percentage voldoende het hoogst.
Het gemiddelde is daar wel lager dan in H4b maar er zijn in H4a geen hoge cijfers gehaald die het gemiddelde omhoog halen.

- 14 a** Maak een tabel met de kentallen bij de variabele *1500 meter*.
Er waren 78 deelnemers.
- b** In de tabel lees je af dat de snelste deelnemer er 302 seconden over deed.
Dat is 5 minuten en 2 seconden.
De langzaamste deelnemer liep 540 seconden ofwel 9 minuten.
- c** Het gemiddelde is 381,7 seconden, de modus is 345 seconden en de mediaan is 380 seconden.
- d** De modus geeft in dit geval geen goed beeld, er zijn (toevallig) zes leerlingen die er 345 seconden over hebben gedaan.
Het gemiddelde en de mediaan geven een goed beeld van de prestaties op de 1500 meter.
- e** Door deze langzame leerling niet mee te nemen, zal het gemiddelde omlaag gaan. Door het weglaten van één van de 78 resultaten zal de mediaan waarschijnlijk niet veranderen. De modus blijft zeker gelijk want er is maar één leerling die zo langzaam heeft gelopen.

- 15 a** In een tabel met kentallen zie je dat het gemiddelde 35,0 meter is en de mediaan 36,0 meter is.

b

Speerwerpen (m)	Frequentie
15 -< 18	1
18 -< 21	1
21 -< 24	4
24 -< 27	6
27 -< 30	5
30 -< 33	8
33 -< 36	11
36 -< 39	15
39 -< 42	10
42 -< 45	7
45 -< 48	7
48 -< 51	1
51 -< 54	0
54 -< 57	0
Totaal	76

- c** De klasse $[36, 39)$ heeft de hoogste frequentie.
- 16** De modus is 2000 euro en geeft een goed beeld. Veel werknemers verdienen dat bedrag per maand.
De mediaan geeft ook wel een goed beeld. De helft van de werknemers verdient minder dan 3000 euro per maand.
Het gemiddelde geeft geen goed beeld, dit wordt te sterk beïnvloed door een paar hoge inkomens.

17 a

Variabele	leeftijd			
	15	16	17	18
1500 m hardlopen (sec)				
Aantal waarnemingen	10	32	27	9
Gemiddelde	408,00	374,94	375,30	396,11
Mediaan	396	377,5	371,5	407
Modus	360	380	-	-
Minimum	360	310	302	342
Maximum	540	432	427	435

Uit de kentallen gesplitst op leeftijd zie je dat de gemiddelde tijd van de 16-jarigen sneller was dan die van de 18-jarigen.

Aan de andere kant zijn de aantallen erg verschillend. Het is daarom moeilijk te zeggen of Maaïke gelijk heeft.

b Er is geen modus bij de leeftijden 17 en 18.

c De 17-jarigen hebben het beste resultaat. De gemiddelde tijd is iets hoger dan van de 16-jarigen.

De mediaan is duidelijk lager dan bij de 16-jarigen.

d

Variabele	groep		
	1	2	3
Speerwerpen (m)			
Aantal waarnemingen	26	24	26
Gemiddelde	28,33	38,40	38,62
Mediaan	28,25	39	37,75
Modus	25	-	40

Gemiddeld gooide groep 3 het verst, maar van groep 2 gooide de helft meer dan 39 meter. In groep 2 werd het gemiddelde waarschijnlijk te veel beïnvloed door een paar slechte worpen.

De resultaten van groep 2 zijn het beste.

18 a In klas 2A zitten $1 + 3 + 8 + \dots + 1 = 24$ leerlingen.

In klas 2B zitten $3 + 4 + 4 + \dots + 1 = 24$ leerlingen.

b Voer de tabellen in je rekenmachine in.

Je vindt dan voor de modus, mediaan en gemiddelde de volgende waarden.

	klas 2A	klas 2B
modus	5	6
mediaan	5,5	6
gemiddelde	6,1	4,8

c Zie opdracht 18b.

d Hoewel het gemiddelde in klas 2B het laagst is, overheerst toch het idee dat wel 10 leerlingen een 6 hebben gescoord. Eigenlijk geeft niet één centrummaat een compleet beeld. De cijfers bij klas 2A liggen veel meer verspreid dan in klas 2B. In 2A zijn lage en hoge cijfers gehaald.

19 a In een tabel met kentallen zie je dat het gemiddelde 3425,6 gram is.

b Splits de variabele *geboortegewicht* op *geslacht*.

Het gemiddelde gewicht van de jongens is 3458,3 gram en het gemiddelde gewicht van de meisjes is 3387,3 gram.

c Thomas houdt geen rekening met het feit dat er meer meisjes zijn dan jongens. De juiste berekening is $\frac{40 \times 3387,3 + 47 \times 3458,3}{87} \approx 3425,6$ gram.

d Er zijn twee lage uitschieters die het gemiddelde naar beneden trekken.

- e Verwijder de twee meisjes met het laagste geboortegewicht.
Het gemiddelde gewicht van de meisjes is dan 3505,5 gram.
- f Bij zowel de jongens als de meisjes is $[3000, 3500)$ de modale klasse.

- 20 a** De mediaan is het gemiddelde van het 750e en 751e jaarsalaris.
Beide jaarsalarissen liggen in de klasse $[0, 10\,000)$.
De mediaan ligt in deze klasse.
- b** De klasse $[0, 10\,000)$ is ook de modale klasse.
- c** Het gemiddelde is

$$\frac{752 \times 5000 + 663 \times 17\,500 + 76 \times 32\,500 + 8 \times 50\,000 + 1 \times 70\,000}{1500} \approx 12\,202 \text{ euro.}$$
- d** Hij zal naar het gemiddelde verwijzen.
- e** Je zou kunnen kiezen voor de modus of de mediaan.
Voor de modus, want de meeste werknemers hebben een inkomen dat minder is dan 10 000 euro.
Voor de mediaan, want de helft van de werknemers heeft een inkomen minder dan 10 000 euro.

- 017 a** Maak een tabel bij de variabele *speerwerpen* gesplitst op *leeftijd*.

Variabele	leeftijd			
	15	16	17	18
Aantal waarnemingen	9	29	29	9
Gemiddelde	27,67	36,17	36,72	33,22
Mediaan	27,75	36,5	37,25	31,75
Modus	23	25	42,5	-
Minimum	16	25	23	28
Maximum	39,5	48	47	42

De 15-jarigen gooien gemiddeld 27,7 meter ofwel afgerond 28 meter.

- b** Gemiddeld hebben de 17-jarigen het beste gepresteerd.
- c** Ook de 17-jarigen, hoewel die van de 18-jarigen ontbreekt. Van de negen 18-jarigen zijn er twee met een afstand van 30 meter en twee met een afstand van 28 meter, de overige vijf hebben een individuele afstand. Maar ook dan presteren de 17-jarigen beter.
- d** Bij de 17-jarigen zijn alle centrummaten het grootst. Je kunt dus de conclusie trekken dat zij het best hebben gepresteerd.
- e** De maximum worp en de minimum worp is bij de 16-jarigen het grootst.

- U3** Door het schrappen van de uitslag AS Roma – Juventus ontstaat de volgende frequentie tabel bij het aantal doelpunten.

<i>aantal doelpunten</i>	<i>frequentie</i>
0	1
1	3
3	1
4	4

De mediaan wordt $3\frac{1}{2}$ als er in de wedstrijd AS Roma – Juventus vier of vijf keer gescoord wordt. De mogelijke uitslagen zijn dus $2 - 2$, $2 - 3$, $3 - 1$, $3 - 2$, $4 - 0$, $4 - 1$ en $5 - 0$.

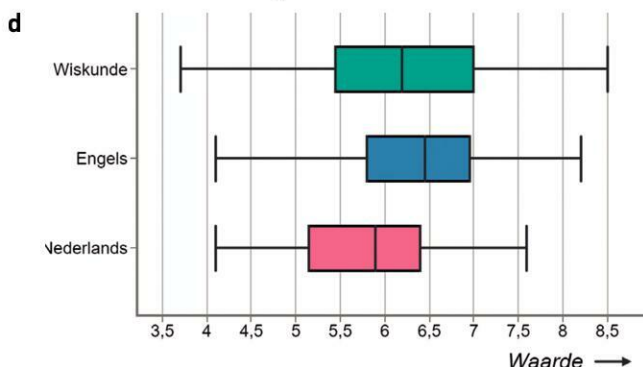
7.4 Spreidingsmaten

intro De gemiddelde stroomleveringsduur zal elkaar niet veel ontlopen. Bij de blauwe heb je meer kans om een batterij te treffen die lang stroom levert of juist niet. Er kan stroom geleverd worden tussen de 2,5 en de 7 uur. Bij de rode heb je de zekerheid dat er stroom geleverd wordt tussen de 3 en de 5,5 uur.

21 Bij Nederlands zijn er maar weinig cijfers die meer dan 1 punt van het gemiddelde afliggen, namelijk 21 van de 193 en dat is ongeveer 11%. Bij Engels zijn dat er veel meer, namelijk 65 van de 193 dat is ongeveer 34%.

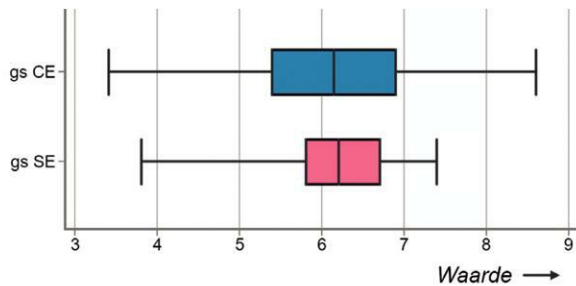
- 22 a** Maak een tabel met kentallen bij de variabelen *Ne SE* en *En SE*.
 Bij *NE SE* zie je dat 4,8 het laagst behaalde en 7,9 het hoogst behaalde cijfer is. Het verschil is 3,1 punt.
 Bij *EN SE* zie je dat 3,5 het laagst behaalde en 9,1 het hoogst behaalde cijfer is. Het verschil is 5,6 punt.
- b** Er zijn 193 leerlingen en 25% daarvan is 48,25.
 Sorteert de *Ne SE* cijfers aflopend en kijk naar de 48e waarneming.
 Dit is een leerling met het cijfer 6,9.
- c** Sorteert de *Ne SE* cijfers oplopend en kijk naar de 48e waarneming.
 Dit is een leerling met het cijfer 6,1.
- d** Het verschil is $6,9 - 6,1 = 0,8$.

- 23 a** Maak voor de drie kernvakken een tabel met kentallen.
 Spreidingsbreedte Nederlands is $7,6 - 4,1 = 3,5$.
 Spreidingsbreedte Engels is $8,2 - 4,1 = 4,1$.
 Spreidingsbreedte wiskunde is $8,5 - 3,7 = 4,8$.
 Wiskunde heeft de grootste spreidingsbreedte.
- b** Nederlands heeft de kleinste spreidingsbreedte.
- c** Kwartielafstand Nederlands is $6,4 - 5,2 = 1,2$.
 Kwartielafstand Engels is $6,95 - 5,8 = 1,15$.
 Kwartielafstand wiskunde is $7 - 5,45 = 1,55$.
 Wiskunde heeft de grootste kwartielafstand.



- e** Een onvoldoende heb je bij een cijfer minder dan 5,5. Je ziet dat bij Nederlands het eerste kwartiel 5,2 is.
 Bij Nederlands heeft meer dan 25% van de leerlingen een onvoldoende.
- f** Dat zijn ongeveer de cijfers die liggen in de 'box', dus 50% of iets minder.

24 a

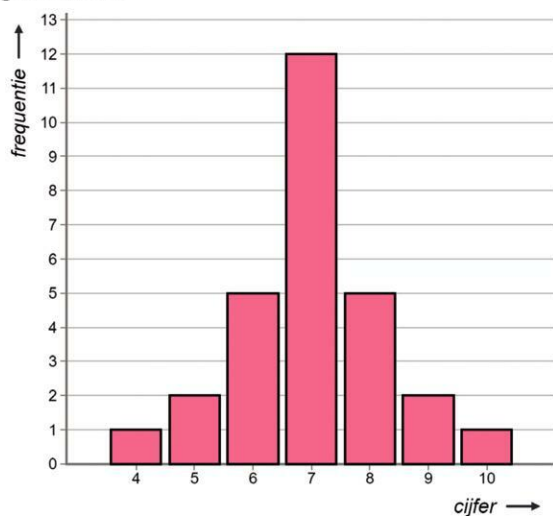


- b De medianen ontlopen elkaar niet veel.
- c De cijfers van het CE lijken veel meer gespreid. Het verschil tussen het hoogste en laagst behaalde cijfer is groter.
- d Maak een tabel met kentallen van *gs CE* en splitsen op *profiel*.
Je ziet dat er 3 NG leerlingen eindexamen hebben gedaan in het vak geschiedenis.
- e CM: spreidingsbreedte is $7,9 - 3,4 = 4,5$ en kwartielafstand is $6,7 - 5,4 = 1,3$.
EM: spreidingsbreedte is $8,5 - 4 = 4,5$ en kwartielafstand is $7 - 5,4 = 1,6$.
NG: spreidingsbreedte is $7,9 - 6,6 = 1,3$ en kwartielafstand is 0.
NT: spreidingsbreedte is 0 en kwartielafstand is 0.
- f Omdat er maar één deelnemer uit dat profiel het examen geschiedenis heeft gemaakt.
- g Bij het profiel EM is de spreiding het grootst.

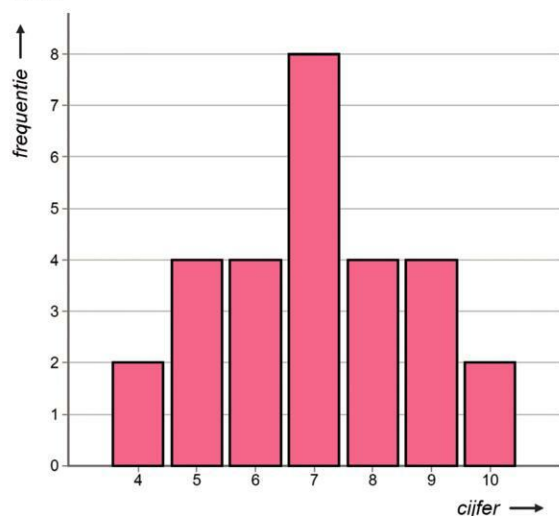
25 a De cijfers liggen symmetrisch verdeeld rond de 7.

- b De spreidingsbreedte is $9 - 5 = 4$ voor beide leerlingen.
- c Voor beide leerlingen geldt dat Q_1 het 3e cijfer is en dat Q_3 het 8e cijfer is. De kwartielafstand is bij beide leerlingen gelijk aan $8,4 - 5,6 = 2,8$.
- d Bij Tim liggen de cijfers het dichtst bij het gemiddelde.
- e Bij Bas is de spreiding als je kijkt naar spreidingsbreedte en kwartielafstand even groot als bij Tim. Toch lijken bij Bas meer cijfers verspreid te liggen dan bij Tim.

26 a proefwerk



S.O.



- b De staven bij de SO's zijn naar verhouding hoger dan bij de proefwerken als je verder van het gemiddelde afkomt.
- c Maak een tabel met de kentallen bij de proefwerken en de SO's.
Bij de proefwerken is de spreidingsbreedte $10 - 4 = 6$ en de kwartielafstand is $8 - 6 = 2$.
Bij de SO's is de spreidingsbreedte ook 6 en de kwartielafstand is ook 2.

7 Statistische verwerking (met ICT)

- d De standaardafwijking bij de proefwerken is 1,28.
De standaardafwijking bij de SO's is 1,68.

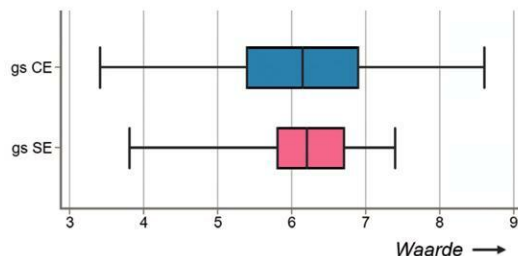
- 27 a** De standaardafwijking bij Nederlands is 0,83, bij Engels 0,89 en bij wiskunde 1,08.
Wiskunde heeft de grootste spreiding.
- b** Nederlands heeft de kleinste spreiding.
- c** Bij alle drie de spreidingsmaten heeft het vak wiskunde de grootste spreiding. In dit geval lijkt er geen spreidingsmaat te zijn waar het verschil het beste wordt weergegeven.

- 28 a** Met behulp van de kentallen, kun je de gevraagde gegevens vinden:

standaardafwijking	SE	CE
Nederlands	0,61	0,81
Engels	1,08	1,26

- b** De cijfers die het schoolexamen bepalen, zijn meestal het gewogen gemiddelde van een hele reeks van cijfers waarvan sommige reeds in klas 4 zijn behaald. Grote afwijkingen komen daarin niet voor, want die zijn al 'uitgemiddeld'. Het is logisch dat de resultaten van het schoolexamen dichter bij het gemiddelde van de schoolcijfers van alle leerlingen liggen dan de resultaten van die ene momentopname, het examen, bij het examengemiddelde liggen.
- c** Bij het vak geschiedenis is bij het SE de standaardafwijking 0,64. Bij het CE is dit 1,03. Dus ook bij geschiedenis is de standaardafwijking bij het CE groter dan bij het SE.

024 a



- b** De mediaan is vrijwel gelijk, namelijk SE 6,3 en CE 6,1.
- c** De spreiding van de cijfers bij het CE is groter.
- d** In een tabel met kentallen zie je dat 3,4 het laagste resultaat bij het CE gs is en 8,6 het hoogste resultaat.
- e** De spreidingsbreedte is $8,6 - 3,4 = 5,2$.
- f** Maak een kentallentabel.
Het eerste kwartiel is 5,4 en het derde kwartiel is 6,9.
- g** De kwartiellafstand is $6,9 - 5,4 = 1,5$.

Variabele	gs CE
Aantal waarnemingen	119
Gemiddelde	6,18
Mediaan	6,15
Modus	5,8
Minimum	3,4
Maximum	8,6
Standaardafwijking	1,03
Eerste kwartiel	5,4
Derde kwartiel	6,9

h	Variabele	profiel			
	gs CE	CM	EM	NG	NT
	Aantal waarnemingen	53	62	3	1
	Gemiddelde	6,08	6,17	7,33	8,60
	Mediaan	6,15	6,05	7,25	NaN
	Modus	6,3	5,8	-	8,6
	Minimum	3,4	4	6,6	8,6
	Maximum	7,9	8,5	7,9	8,6
	Standaardafwijking	0,98	1,02	0,67	NaN
	Eerste kwartiel	5,4	5,35	NaN	NaN
	Derde kwartiel	6,7	7	7,7	8,6

CM: spreidingsbreedte is 4,5 en kwartielfstand is 1,3.

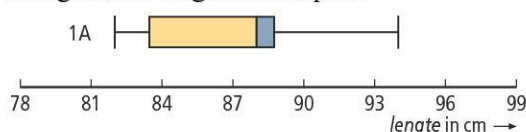
EM: spreidingsbreedte is 4,5 en kwartielfstand is 1,7.

NG: spreidingsbreedte is 1,3 en kwartielfstand is 0.

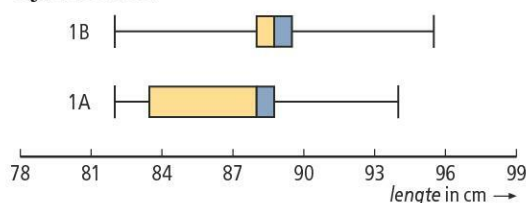
NT: spreidingsbreedte is 0 en kwartielfstand is 0.

- i Omdat er maar één deelnemer uit dat profiel het examen geschiedenis heeft gemaakt.
- j Bij het profiel EM is de spreiding het grootst.

- U4 a Ga er van uit dat de kleinste leerling 82 cm is en dat de Q_1 84 cm is. Dan is de Q_3 $84 + 5 = 89$ cm en de maximum lengte is $82 + 12 = 94$ cm. De mediaan ligt tussen 84 cm en 89 cm. Dit geeft de volgende boxplot.



- b Voor groep 1B moet gelden dat de afstand tussen maximum en minimum groter is dan bij groep 1A. De 'box' moet bij groep 1B kleiner zijn dan groep 1A. Verder moet de Q_1 van groep 1B gelijk liggen met de mediaan van groep 1A. bijvoorbeeld

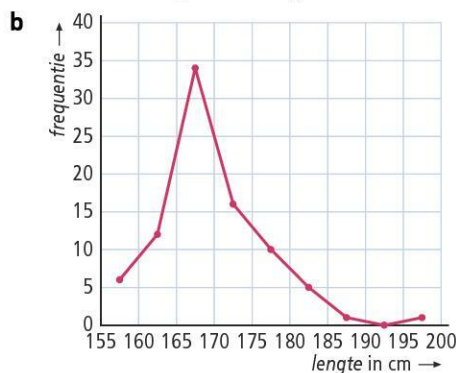


7.5 Cumulatieve verdelingen

intro In de grafieken kun je bijvoorbeeld zien dat de 50% best presterende leerlingen van groep B meer dan 45 punten hebben gehaald. In groep A was dat 40 punten.

De grafiek van groep B ligt overall rechts van groep A. Dus voor alle percentages geldt dat groep B het beter heeft gedaan.

29 a De klassengrenzen zijn 155 en 160 en het klassenmidden is $(155 + 160) : 2 = 157,5$.



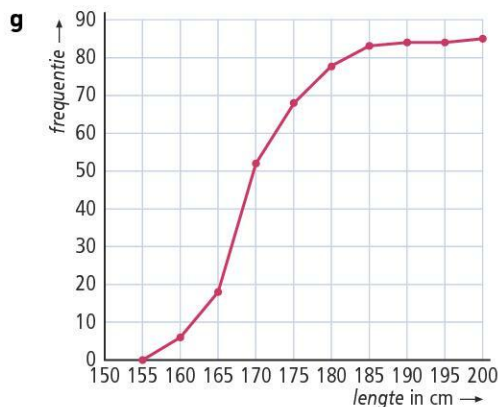
c $6 + 12 + 34 = 52$ meisjes zijn kleiner dan 170 cm.

d $52 + 16 = 68$ meisjes zijn kleiner dan 175 cm.

e 18 meisjes zijn kleiner dan 165 cm.

f

lengte	< 160	< 165	< 170	< 175	< 180	< 185	< 190	< 195	< 200
frequentie	6	18	52	68	78	83	84	84	85



30 a Er zijn 40 waxinelichtjes van merk A en 70 waxinelichtjes van merk B onderzocht.

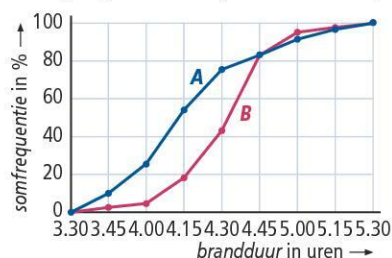
b Omdat het totaal aantal waxinelichtjes van merk B veel groter is dan van merk A, kun je de absolute aantallen niet goed vergelijken.

c $3 : 40 \times 100\% = 7,5\%$

d De frequentie van een cumulatieve frequentiepolygoon in dit voorbeeld geeft bijvoorbeeld het percentage waxinelichtjes aan dat hoogstens een brandduur heeft van 5 uur. Die frequentie zet je dan boven de 5.00 uur.

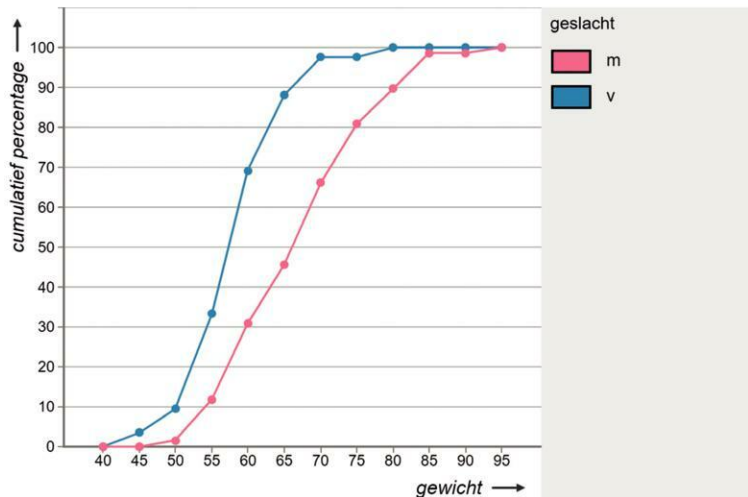
e

brandduur in uren	3.45	4.00	4.15	4.30	4.45	5.00	5.15	5.30
somfrequentie in procenten A	7,5	25	52,5	75	85	92,5	97,5	100
somfrequentie in procenten B	1,4	4,3	17,1	44,3	84,3	95,7	98,6	100



f 50% van de waxinelichtjes brand korter dan de mediaan. De mediaan bij merk A is ongeveer 4.10 uur. Bij merk B is dat ongeveer 4.40 uur. De grafiek van merk B loopt in het midden steiler dan de grafiek van merk A, daar liggen dus veel waarnemingen dicht bij elkaar. Bij merk A is de spreiding groter dan bij merk B.

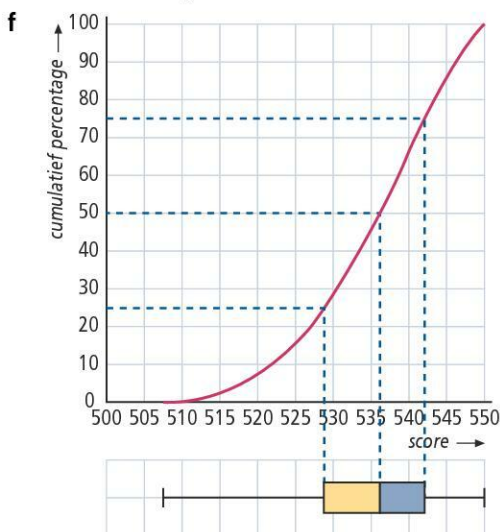
31 a Neem klassenbreedte 5 kg met beginwaarde 40 kg.



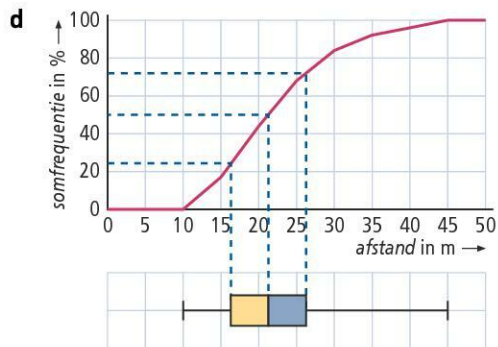
- b** 25% van de jongens is lichter dan 58 kg.
- c** 25% van de meisjes is lichter dan 53 kg.
- d** Dit zijn de eerste kwartielen.
- e** De mediaan lees je af bij 50%.
De mediaan van de jongens is 66 kg.
De mediaan van de meisjes is 57 kg.

32 a Uit de relatieve somfrequentiepolygoon lees je af dat ongeveer 86% een score had (gelijk of) lager dan 545. Dat betekent dat ongeveer $100\% - 86\% = 14\%$ een score had van meer dan 545.

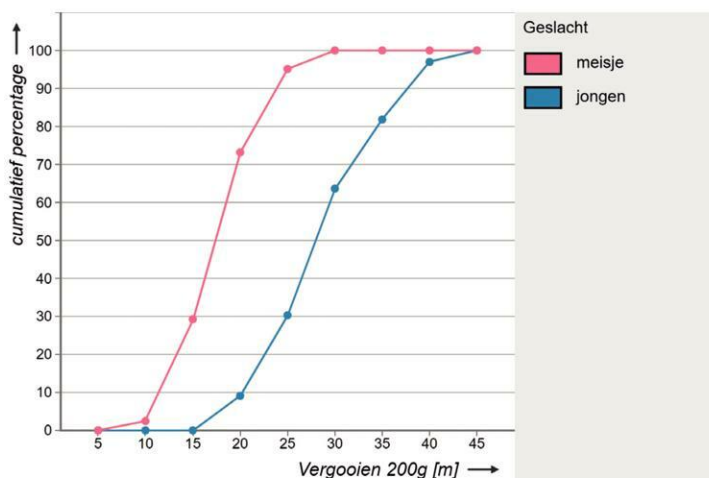
- b** 7% had een score minder dan 520 punten.
66% had een score minder dan 540 punten.
 $66 - 7 = 59\%$ had een score tussen 520 en 540 punten.
Dat waren $164\,500 : 100 \times 59 = 97\,055$ leerlingen.
- c** 50% van de data is kleiner dan de mediaan.
De mediaan is 536 punten.
- d** De 25% laagst scorende leerlingen hadden 529 punten. Het eerste kwartiel hoort hierbij.
- e** De 25% hoogst scorende leerlingen hadden 542 punten. Het derde kwartiel hoort hierbij.



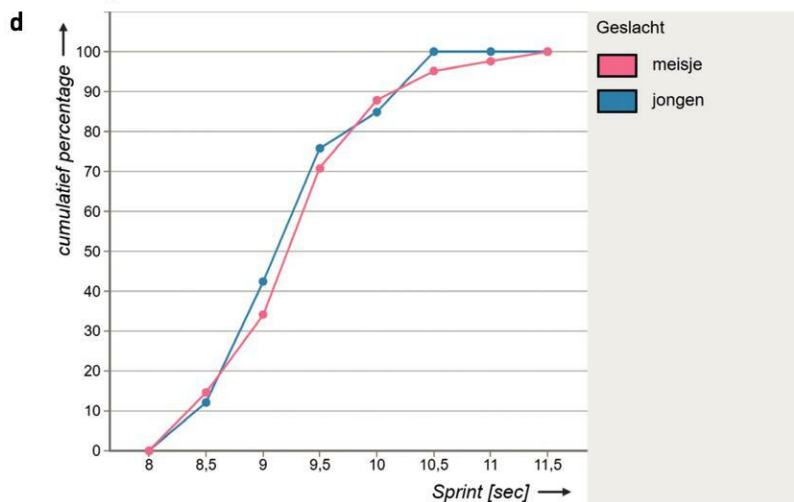
- 33** a De relatieve somfrequentiepolygoon bestaat uit lijnstukjes.
b De klassenbreedte is 5 meter.
c De modale klasse hoort bij het steilste lijnstukje. Dat is de klasse $[15, 20)$ meter.



34 a



- b** De relatieve somfrequentiepolygoon van de ligt rechts van die van de meisjes.
c Volgens de relatieve somfrequentiepolygoon is de maximale worp van de meisjes maximaal 30 meter.
64% van de jongens gooide minder ver dan 30 meter.
Dan gooide $100\% - 64\% = 36\%$ verder.



- e** Bij het onderdeel sprint ontlopen de jongens en de meisjes elkaar niet veel.

030 a Nee, van het ras Gloria zijn er meer planten gewogen.

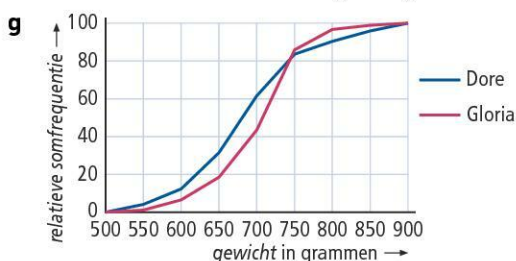
b $3 + 6 + 14 = 23$

<i>gewicht</i> in grammen	Doré	cum. Doré	Gloria	cum. Gloria
[500, 550>	3	3	1	1
[550, 600>	6	9	5	6
[600, 650>	14	23	11	17
[650, 700>	22	45	23	40
[700, 750>	16	61	39	79
[750, 800>	5	66	10	89
[800, 850>	4	70	2	91
[850, 900>	3	73	1	92

d Het totale aantal planten per ras is niet gelijk.

<i>gewicht</i> in grammen	Doré	cum. Doré	cum. Doré in %	Gloria	cum. Gloria	cum. Gloria in %
[500, 550>	3	3	4,1	1	1	1,1
[550, 600>	6	9	12,3	5	6	6,5
[600, 650>	14	23	31,5	11	17	18,5
[650, 700>	22	45	61,6	23	40	43,5
[700, 750>	16	61	83,6	39	79	85,9
[750, 800>	5	66	90,4	10	89	96,7
[800, 850>	4	70	95,9	2	91	98,9
[850, 900>	3	73	100,0	1	92	100,0

f De percentages in de tabel geven aan hoeveel procent van de planten minder dan deze rechter klassengrens geven.



h Bij de mediaan is 50% van de waarnemingen kleiner en 50% groter.

i De mediaan van Doré is 680 gram en van Gloria is de mediaan 715 gram.

Van Gloria is de mediaan het grootst.

j Van Doré is de kwartielafstand $730 - 630 = 100$ gram.

Van Gloria is de kwartielafstand $745 - 670 = 75$ gram.

Van Doré is de kwartielafstand duidelijk groter.

k Een Gloria plant levert over het algemeen een hoger gewicht op.

De mediaan van de opbrengst van het ras Gloria is groter. Rond de mediaan loopt de grafiek van het ras Gloria steiler. De spreiding is dus kleiner.

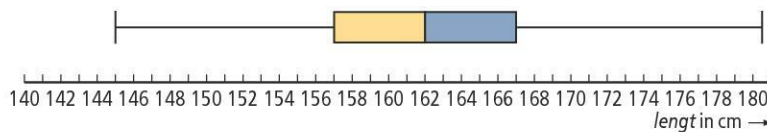
U5 De mediaan ligt ongeveer bij 6,5 km. Het gemiddelde is groter dan 6,5 km.

35% van alle leerlingen fietst meer dan 8 km. 20% fietst zelfs meer dan

14 km. Dat levert al zo'n grote bijdrage aan het totaal aantal kilometers, dat het gemiddeld hoger dan 6,5 km zal zijn.

7.6 Gemengde opdrachten

- 35 a** 69% van de meisjes heeft een lengte kleiner dan 165,5 cm.
b De punten zijn uitgezet boven de rechter klassengrenzen. De indeling is $[140,5; 145,5)$, $[145,5; 150,5)$, ..., en $[175,5; 180,5)$.
c 19% van de meisjes is kleiner dan 155,5 cm en 5% van de meisjes is kleiner dan 150,5 cm.
 In de klasse valt dus $19\% - 5\% = 14\%$. Dat zijn $400 : 100 \times 14 = 56$ meisjes.
d $100\% - 87\% = 13\%$, dus $400 : 100 \times 13 = 52$ meisjes waren langer dan 170,5 cm.
e Tussen 160,5 en 165,5 cm is de grafiek het steilst, dus $[160,5; 165,5)$ is de modale klasse.
f Lees de mediaan af bij 50%. De mediaan is 162 cm.
 Lees Q_1 af bij 25%. $Q_1 = 157$ cm Lees Q_3 af bij 75%. $Q_3 = 167$ cm.



- 36 a** Het staafdiagram is scheef met een staart naar links.
b Maak een tabel met kentallen bij de variabele *1500 m hardlopen* en splits op groep.

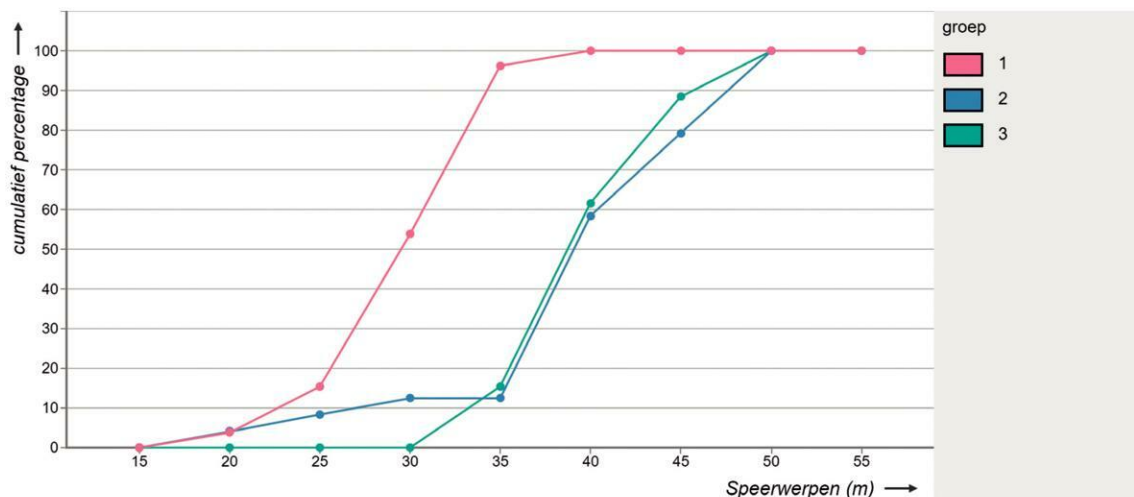
Variabele	groep		
	1	2	3
1500 m hardlopen (sec)			
Aantal waarnemingen	26	26	26
Gemiddelde	393,27	379,00	372,96
Mediaan	392,5	372,5	372
Modus	-	345	-
Minimum	302	325	310
Maximum	540	435	427

Met de mediaan en het gemiddelde kun je zien dat groep 1 het slechtst presteerde.

- c** De groep is te groot om een uitschieter van invloed te laten zijn. Het gemiddelde is nu 393,3 bij 26 deelnemers in groep 1. In totaal zijn dat $26 \times 393,3 = 10225,8$ seconden. Trek je de uitschieter er vanaf en deel je door 25, dan krijg je een gemiddelde van $(10225,8 - 540) : 25 \approx 387,4$ seconden.
 Nog steeds presteerde groep 1 slechter.
d Bij groep 1 is het gemiddelde 28,33 meter, de mediaan 28,25 meter en de modus 25 meter. Bij groep 2 is het gemiddelde 38,40 meter, de mediaan 39 meter en de modus bestaat niet. Bij groep 3 is het gemiddelde 38,62 meter, de mediaan 37,75 meter en de modus 40 meter.

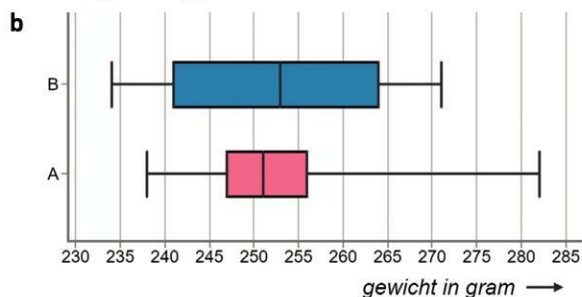
Variabele	groep		
	1	2	3
Speerwerpen (m)			
Aantal waarnemingen	26	24	26
Gemiddelde	28,33	38,40	38,62
Mediaan	28,25	39	37,75
Modus	25	-	40
Minimum	19,5	16	32,5
Maximum	35	48	47
Standaardafwijking	4,16	7,42	3,81
Eerste kwartiel	25	36	35,75
Derde kwartiel	31,75	42,5	40,75

- e Groep 2 en groep 3 hebben ongeveer gelijk gepresteerd.
Groep 1 heeft het minst gepresteerd.
- f Zie opdracht 36d.
De spreidingsmaten van groep 2 en 3 verschillen wel.
Van groep 2 is de spreidingsbreedte $48 - 16 = 32$ meter, de standaardafwijking is 7,42 meter,
Van groep 3 is de spreidingsbreedte $47 - 32,5 = 15,5$ meter, de standaardafwijking is 3,81 meter.
- g Bijvoorbeeld met de cumulatieve frequentiepolygonen.

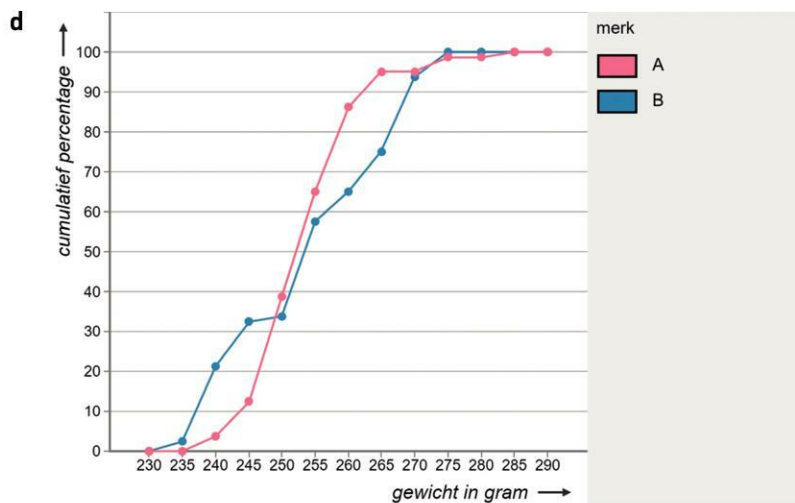


Ook in de relatieve somfrequentiepolygoon zie je dat groep 1 slechter presteerde dan groep 2 en groep 3. Groep 2 en groep 3 verschillen weinig.

- 37 a** Maak een tabel met de kentallen.
De spreidingsbreedte van merk A is $282 - 238 = 44$ gram.
De spreidingsbreedte van merk B is $271 - 234 = 37$ gram.



- c De spreidingsbreedte geeft alleen aan hoe lang de boxplot is. Die is bij merk A iets groter dan bij merk B en geeft het verschil dus niet goed weer. De interkwartielafstand van merk A is veel kleiner dan van merk B. Deze geeft het verschil dus veel beter weer.



- e** Je ziet dat de relatieve somfrequentiepolygoon van merk A rond de mediaan steiler loopt. Bij merk A zijn er veel pakken met een gewicht rond de mediaan. Hierdoor is de spreiding kleiner.

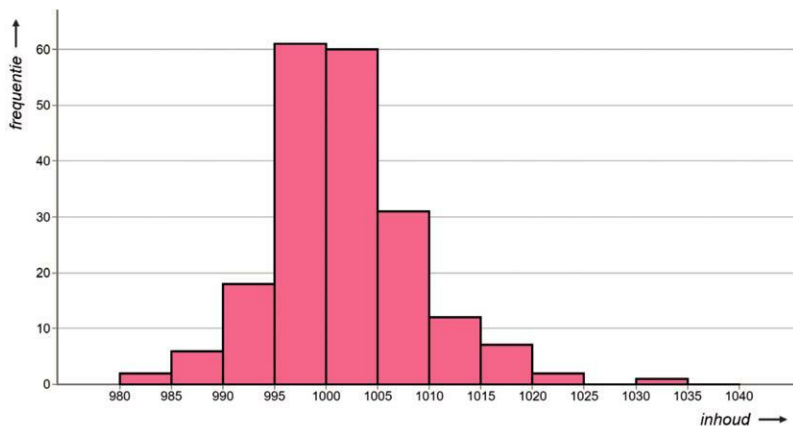
Onderzoeksoopdrachten

- 38 a** Grafiek B, want dat is een symmetrische figuur. Dan vallen de modus, de mediaan en het gemiddelde samen.
- b** Grafiek A ligt het meest naar rechts. Daar heeft de mediaan de hoogste waarde.
- 39** $196 : 4 = 49$ leerlingen hebben een cijfer tussen 5 en 6. Neem aan dat 1 leerling een 5 heeft en 48 leerlingen een 6 hebben. Neem ook aan dat 49 leerlingen een 7 hebben, 49 leerlingen een 8 hebben en 49 leerlingen een 10 hebben. Dan hebben we een totaal van $5 + 48 \times 6 + 49 \times 7 + 49 \times 8 + 49 \times 10 = 1518$. Het hoogst mogelijke gemiddelde zou dan $1518 : 196 = 7,744...$ zijn. Hij kan dus geen gelijk hebben.
- 40** Het totaal aantal uren zonneshijin in deze maand was ongeveer $1 + 3,5 + 1,5 + 2 + 3 + 3,5 + 0 + 1 + 1 + 0 + 5 + 0 + 0 + 6,5 + 0,5 + 0 + 1 + 2,5 + 0 + 3,5 + 1 + 7,5 + 0 + 0 + 1,5 + 1 + 0 + 3 + 5 + 4 = 58,5$ en dat is ongeveer die 60 uur die in de grafiek staat.
De langst mogelijke duur van de zonneshijin per dag is de lengte van de blauwe staaf.
De gemiddelde lengte van een blauwe staaf is ongeveer 9 uur, want er zijn iets meer staven onder de 9 uur dan erboven. Schat dit gemiddelde bijvoorbeeld op 8,8 uur. In totaal zijn er dan $30 \times 8,8 = 264$ uren zonneshijin mogelijk.
Normaal is 63 uur en dat is $63 : 264 \times 100\% \approx 24\%$. Er zijn 58,5 uren zonneshijin gemeten en dat is $58,5 : 264 \times 100\% \approx 22\%$. De vermelde percentages kloppen.

Samenvatting

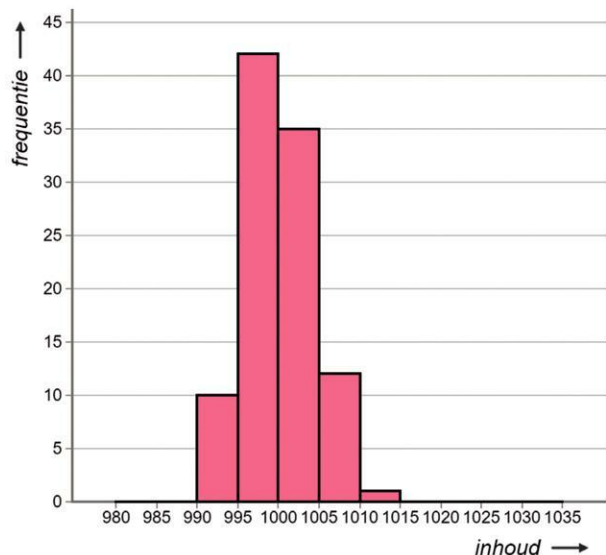
- S1** a Deze is klokvormig.
b Deze is meertoppig.
- S2** a Het is een cumulatieve frequentiepolygoon.
b Ongeveer 115 klanten moesten minder dan één minuut wachten.
Dit is $115 : 193 \times 100\% \approx 60\%$.
c Je leest af dat ongeveer 163 klanten maximaal twee minuten moesten wachten. Er waren 193 klanten.
 $193 - 163 = 30$ klanten moesten langer dan twee minuten wachten.

- S3** a De klassenbreedte is 5 mL.

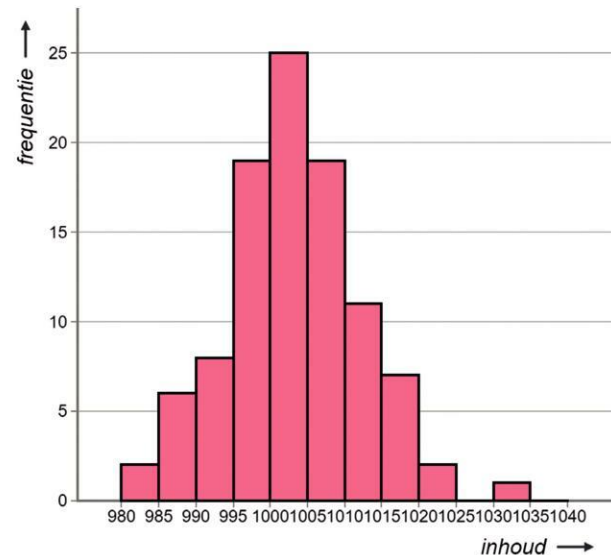


- b De eerste klasse is $[980, 985)$. Het klassenmidden is dan $(980 + 985) : 2 = 982,5$ mL.

- c machine A



- machine B

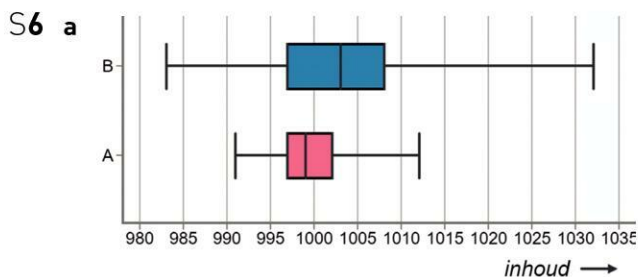


- d De inhoud bij machine A is iets kleiner dan bij machine B.
De spreiding van inhoud van de pakken bij machine B is groter dan die bij machine A.

- S4** De modus, want de kans op een prijs van 10 euro is groter dan de kans op één van de andere prijzen.

7 Statistische verwerking (met ICT)

- S5 a** Maak een tabel met de kentallen en splits op machine.
 Bij machine A is het gemiddelde 999,7 mL, de mediaan is 999 mL en de modus is 999 mL.
 Bij machine B is het gemiddelde 1002,8 mL, de mediaan is 1003 mL en de modus is 1002 mL.
- b** Dit pak is waarschijnlijk door machine B gevuld.



- b** De spreidingsbreedte en de kwartielafstand bij machine B is veel groter. Machine A vult de pakken veel nauwkeuriger.
- c** Bij machine A is de kwartielafstand $1002 - 997 = 5$ mL en de standaardafwijking is 3,94 mL.
 Bij machine B is de kwartielafstand $1008,5 - 997 = 11,5$ mL en de standaardafwijking is 8,87 mL.
- d** Ja, deze maten onderschrijven het antwoord van opdracht b.

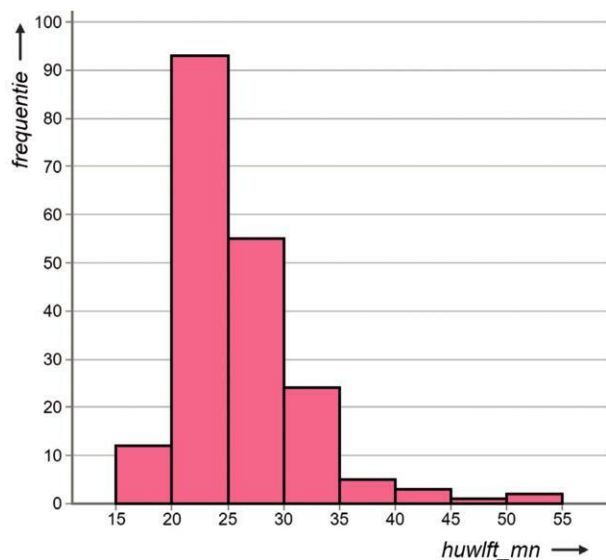
S7

<i>wachttijd</i> in seconden	<i>somfrequentie</i> in procenten
< 20	29
< 40	77
< 60	85
< 80	90
< 100	92
< 120	100



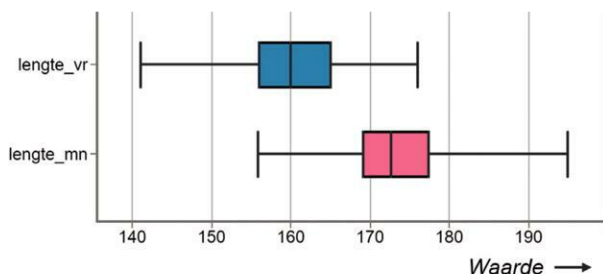
Test jezelf

T1 a



- b Het staafdiagram is scheef met een staart naar rechts.
- c De modale klasse is $[20, 25)$.
- d Het klassenmidden is $(20 + 25) : 2 = 22,5$ jaar.
- e Gemiddelde leeftijd van de man is 42,6 jaar, de mediaan is 43 jaar en de modus is 27 jaar.
 Gemiddeld leeftijd van de vrouw is 40,7 jaar, de mediaan is 41 jaar en er is geen modus.
 De mannen zijn gemiddeld 1,9 jaar ouder. Dat zie je ook terug bij de mediaan.

T2 a



- b In de boxplot zie je dat 25% van de vrouwen kleiner is dan de kleinste man.
- c Maak een tabel met de kentallen bij de variabele *lengte_mn* en *lengte_vr*.
 mannen
 Spreidingsbreedte is $194,9 - 155,9 = 39$ cm.
 De kwartielfstand is $177,4 - 169,1 = 8,3$ cm.
 De standaardafwijking is 6,86 cm.
 vrouwen
 Spreidingsbreedte is $176 - 141 = 35$ cm.
 De kwartielfstand is $165 - 156 = 9$ cm.
 De standaardafwijking is 6,23 cm.
 De kwartielfstand bij de vrouwen is groter. De standaardafwijking en de spreidingsbreedte bij de mannen is groter. De spreidingsmaten wijzen niet alle drie naar hetzelfde geslacht.

7 Statistische verwerking (met ICT)

- T3 a** Maak een frequentietabel bij de variabele *huiswerk* en splits op *geslacht*. Pas eventueel de klasseindeling aan.

	geslacht	
	m	v
huiswerk	Frequentie	Frequentie
0 -< 4	21	9
4 -< 8	22	15
8 -< 12	12	19
12 -< 16	9	21
16 -< 20	3	5
20 -< 24	1	8
Totaal	68	77

b
$$\frac{9 \times 2 + 15 \times 6 + 19 \times 10 + 21 \times 14 + 5 \times 18 + 8 \times 22}{77} = \frac{858}{77} = 11,14... \text{ uur}$$

Het gemiddelde is ongeveer 11,14 uur ofwel ofwel 11 uur en $0,14... \times 60 \approx 9$ minuten.

- c** In een tabel met kentallen zie je dat het gemiddelde bij de meisjes 10,8 uur ofwel 10 uur en $0,8 \times 60 = 48$ minuten is.

Het verschil is $12 + 9 = 21$ minuten.

- d** In een tabel met klassenbreedte 2 zie je dat 30 meisjes meer dan 14 uur aan het huiswerk besteden. Dit is $30 : 77 \times 100\% \approx 39\%$.

- e** Er zijn 32 jongens en 18 meisjes die minder dan 6 uur per week aan hun huiswerk besteden. Het aandeel jongens daarin is $32 : 50 \times 100\% = 64\%$.

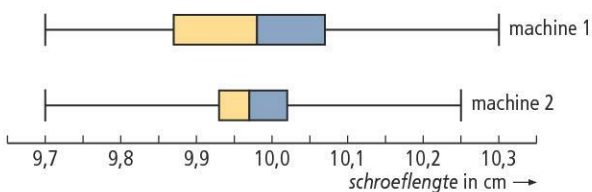
- f** Bij de jongens is de spreidingsbreedte $21 - 1 = 20$ uur, de kwartielafstand is $10 - 3 = 7$ uur en de standaardafwijking is 4,67 uur.

Bij de meisjes is de spreidingsbreedte $21 - 1 = 20$ uur, de kwartielafstand is $15 - 6 = 9$ uur en de standaardafwijking is 5,62 uur.

De spreiding bij de meisjes is het grootst.

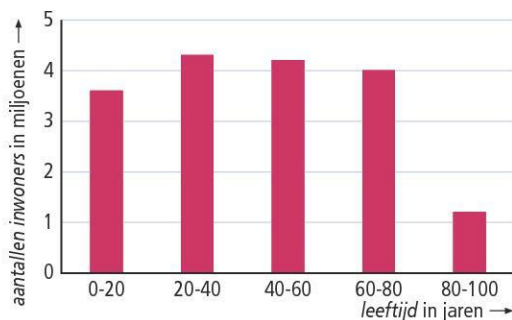
- T4 a** Lees het minimum, maximum, Q_1 , Q_3 en de mediaan af uit de grafiek.

	minimum	Q_1	mediaan	Q_3	maximum
machine 1	9,7	9,87	9,98	10,07	10,3
machine 2	9,7	9,93	9,97	10,02	10,25

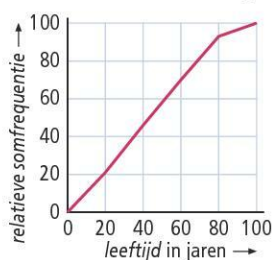


- b** In de relatieve somfrequentiepolygoon lees je voor machine 1 af dat ongeveer 30% korter is dan 9,9 cm en 20% langer is dan 10,1 cm. Voor machine 2 geldt dat ongeveer 11% korter is dan 9,9 cm en 10% langer is dan 10,1 cm.
- c** Machine 2 is beter afgesteld. Hier wordt maar $10\% + 11\% = 21\%$ afgekeurd.

- T5 a** De modale klasse is de klasse 20-40.
- b** De mediaan valt in de klasse 40-60, want als je de percentages gaat optellen, valt 50% in deze klasse.
- c** De absolute aantallen zijn $17,5 : 100 \times 21 = 3,675$, $17,5 : 100 \times 25 = 4,375$, $17,5 : 100 \times 24 = 4,2$, $17,5 : 100 \times 23 = 4,025$ en $17,5 : 100 \times 7 = 1,225$.

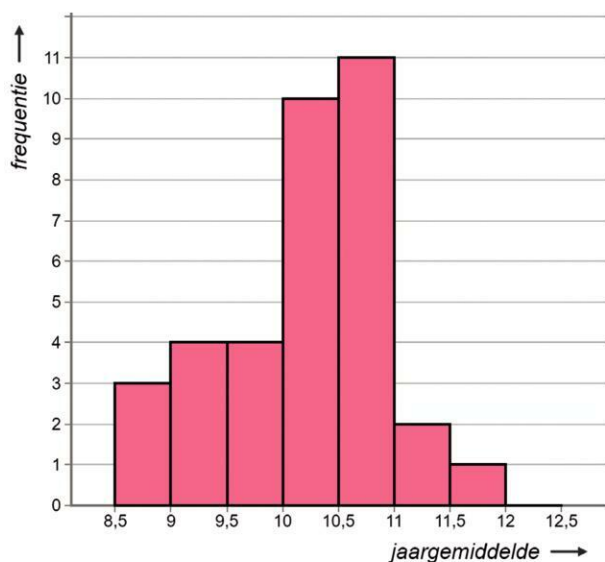


- d** De relatieve somfrequenties zijn 21, 46, 70, 93 en 100.



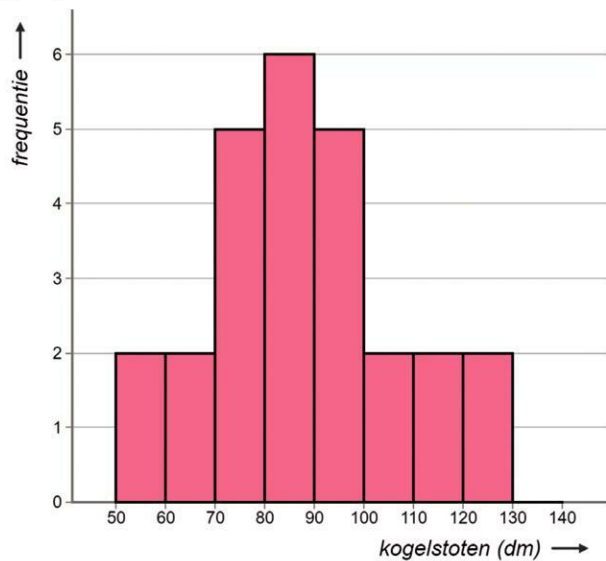
Extra oefening

E1 a

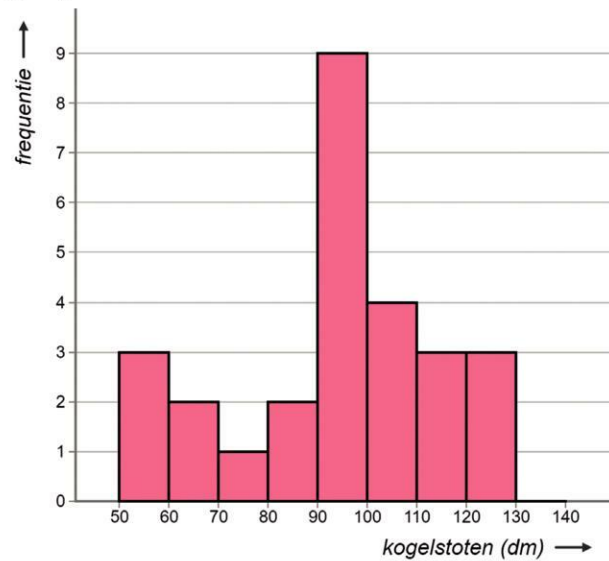


- b** Bij klassebreedte van $0,5^\circ\text{C}$ heb je een goed beeld.
- c** Omdat het aantal tropische dagen in een jaar maximaal maar 13 is geweest.
- d** Sorteert de variabele tropische dagen oplopend.
Er zijn 5 jaar zonder tropische dagen.

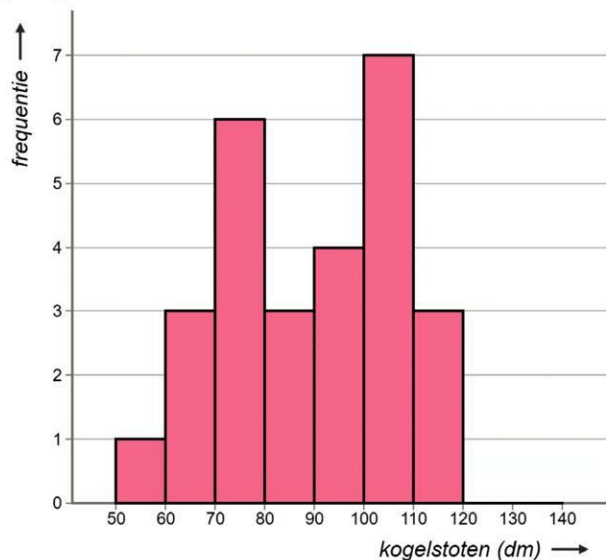
E2 a groep 1



groep 2



groep 3

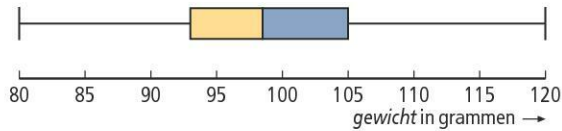


- b** Maak bij de variabele *kogelstoten* een tabel met kentallen en splits op *groep*.
 Bij groep 1 is het gemiddelde 89,19 dm, de mediaan is 87,95 dm en de modus bestaat niet.
 Bij groep 2 is het gemiddelde 94,53 dm, de mediaan is 97,75 dm en de modus bestaat niet.
 Bij groep 3 is het gemiddelde 89,78 dm, de mediaan is 93,85 dm en de modus is 98,3 dm.
- c** Groep 2 heeft het best gepresteerd, het gemiddelde en de mediaan zijn daar het grootst.

E3

Maak bij de variabele *kogelstoten* een tabel met kentallen en splits op *groep*.
 Bij groep 1 is de spreidingsbreedte $124,5 - 56,1 = 68,4$ dm, de kwartielafstand is $97,3 - 77,6 = 19,7$ dm en de standaardafwijking is 18,33 dm.
 Bij groep 2 is de spreidingsbreedte $127,6 - 56,2 = 71,4$ dm, de kwartielafstand is $104,5 - 78,9 = 25,6$ dm en de standaardafwijking is 20,33 dm.
 Bij groep 3 is de spreidingsbreedte $114,9 - 58,4 = 56,5$ dm, de kwartielafstand is $102 - 73,2 = 28,8$ dm en de standaardafwijking is 16,85 dm.
 Nee, want groep 3 heeft de kleinste spreidingsbreedte en standaardafwijking, en groep 1 heeft de kleinste kwartielafstand.

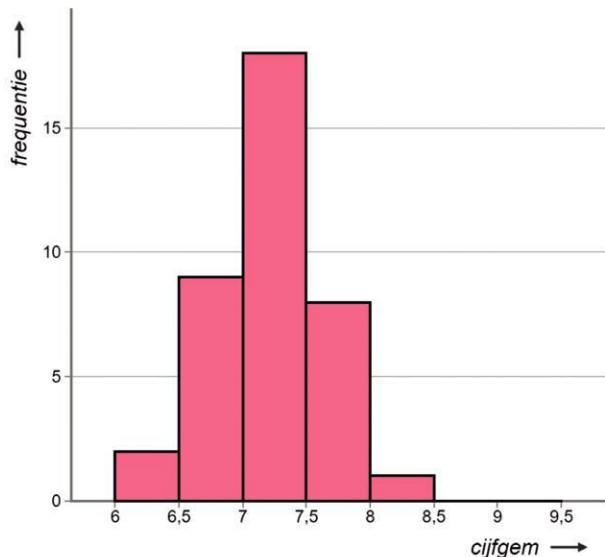
- E4 a** Langs de verticale as staat relatieve somfrequentie.
b De klassen zijn 4 gram breed.
c De modale klasse is waar de grafiek het steilst loopt. Dat is de klasse $[96, 100)$.
d De mediaan lees je af bij 50% en dat is ongeveer 98,5 gram.
e Q_1 lees je af bij 25% en dat is ongeveer 93 gram en Q_3 lees je af bij 75% en dat is ongeveer 105 gram. De lichtste appel is 80 gram en de zwaarste is 120 gram.



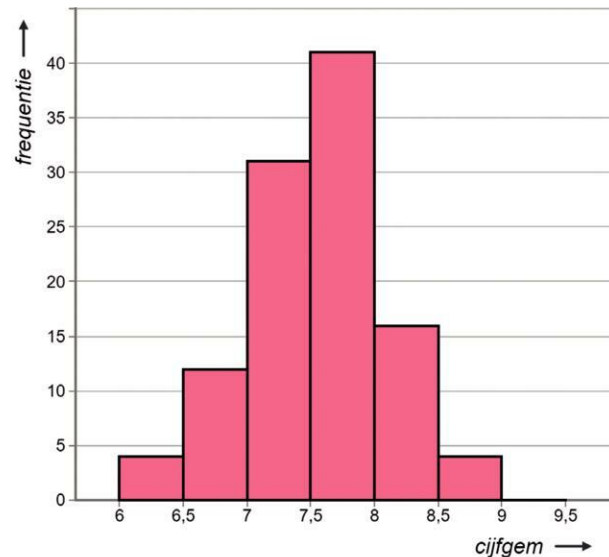
- f** De spreidingsbreedte is $120 - 80 = 40$ gram.
 De kwartielafstand is $Q_3 - Q_1 = 105 - 93 = 12$ gram.

- E5 a** Er wonen $6 + 10 + 7 + 3 + 2 + 1 + 1 = 30$ huishoudens in de straat.
b Het totaal aantal kinderen is $6 \times 0 + 10 \times 1 + 7 \times 2 + 3 \times 3 + 2 \times 4 + 5 + 6 = 52$.
 Het gemiddelde is $52 : 30 \approx 1,73$ kinderen per huishouden.
c De mediaan is het gemiddelde van het aantal kinderen in het 15e en 16e huishouden.
 De mediaan is $(1 + 1) : 2 = 1$ kind.
 De modus is 1 kind.
 Het gemiddelde is een betere maat voor het aantal kinderen per huishouden.
d $1,73 \times 890 \approx 1542,67$
 Er wonen ongeveer 1543 kinderen in het dorp.

E6 a wiskunde A



wiskunde B



- b** In groep A zijn er $18 + 8 + 1 = 27$ leerlingen met minimaal een 7,0.
 In groep B zijn er $31 + 41 + 16 + 4 = 92$ leerlingen met minimaal een 7,0.
 Groep B heeft de meeste leerlingen met minimaal een 7,0.
c In groep A is dit $27 : 38 \times 100\% \approx 71\%$.
 In groep B is dit $92 : 108 \times 100\% \approx 85\%$.
 Groep B heeft ook naar verhouding de meeste leerlingen met minimaal een 7,0.

- d Maak een tabel met de kentallen bij de variabele *cijfgem* en splits op *groep*.

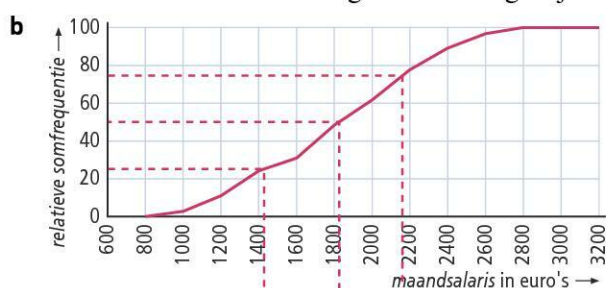
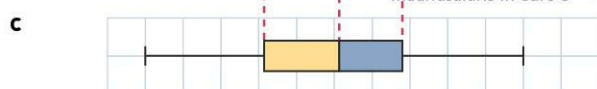
De centrummaten van groep B zijn alle drie het grootst.

Groep B heeft het beste gepresteerd.

- e Bij groep A is de spreidingsbreedte $8 - 6 = 2$, de kwartielafstand is $7,3 - 6,7 = 0,6$ en de standaardafwijking is 0,46.
Bij groep B is de spreidingsbreedte $8,9 - 6 = 2,9$, de kwartielafstand is $7,8 - 7 = 0,8$ en de standaardafwijking is 0,58.
Bij groep A zijn de drie spreidingsmaten het kleinst.

Variabele	wisgroep	
	A	B
cijfgem		
Aantal waarnemingen	38	108
Gemiddelde	7,02	7,40
Mediaan	7	7,5
Modus	7	7,5
Minimum	6	6
Maximum	8	8,9
Standaardafwijking	0,46	0,58
Eerste kwartiel	6,7	7
Derde kwartiel	7,3	7,8

- E7 a Er is een groot aantal vrouwen wat tussen de 800 en 1600 euro verdient (23 vrouwen). Daarentegen zijn er maar 5 mannen met een inkomen binnen deze klassen. Het gemiddelde ligt bij de vrouwen lager.



- d Uit de boxplots kun je aflezen dat van de vrouwen meer dan 25% meer dan € 2.100,- verdient. Van de mannen is dit minder dan 50%. Dus relatief gezien klopt deze uitspraak zeker niet.
Er werken meer vrouwen dan mannen in het bedrijf, dus absoluut gezien klopt deze uitspraak ook niet.

7 Statistische verwerking (zonder ICT)

Voorkennis

- V1**
- a** $3 + 6 + 8 + 6 + 11 + 9 = 43$ jeugdleden zijn jonger dan 12 jaar.
 - b** Er zijn in totaal $67 + 70 = 137$ jeugdleden.
 $43 : 137 \times 100\% \approx 31\%$ daarvan is jonger dan 12 jaar.
 - c** De groep 15-jarige meisjes is het grootst.
De groep 10-jarige jongens is het grootst.
 - d** Er zijn 67 meisjes. Omdat $67 = 33 + 1 + 33$, is Simone het 34e meisje als je ze van jong naar oud zou rangschikken. Van links naar rechts het aantal meisjes tellend geeft: $3 + 6 + 8 + 12 + 7 = 36$.
Het 34e meisje valt in de groep 13-jarigen. Simone is 13 jaar oud.
 - e** Er zijn in totaal 137 jeugdleden.
Gezamenlijk zijn ze $9 \times 9 + 17 \times 10 + \dots + 17 \times 17 = 1803$ jaar oud.
De gemiddelde leeftijd is $1803 : 137 \approx 13,2$ jaar.
- V2**
- a** Het gemiddelde cijfer is
$$\frac{3 \times 2 + 4 \times 6 + 5 \times 35 + 6 \times 34 + 7 \times 18 + 8 \times 11 + 9 \times 3}{109} \approx 6,0.$$
 - b** Er zijn 109 waarnemingen. De middelste waarneming is de 55e, want $109 = 54 + 1 + 54$. Tel je de frequenties op van links naar rechts, dan krijg je $2 + 6 + 35 = 43$ en $2 + 6 + 35 + 34 = 67$.
De 55e leerling heeft een 6, de mediaan is 6.
 - c** Het cijfer 5 komt het meest voor en is de modus.
 - d** 43 leerlingen hebben een onvoldoende. Dat is $43 : 109 \times 100 \approx 39,4\%$.
- V3**
- a** Er zijn dan drie kastanjes met een gewicht van 8,0 gram.
 - b** Er zijn 10 kastanjes die meer dan 9 gram wegen. Dat is $10 : 59 \times 100 \approx 17\%$.
 - c** Het verschil in gewicht tussen de lichtste en de zwaarste kastanje is $10,1 - 3,2 = 6,9$ gram.
 - d** De modus is 7,7 gram.
Van de 59 kastanjes gerangschikt op volgorde van gewicht van licht naar zwaar, is de 30e kastanje de middelste, want $59 = 29 + 1 + 29$.
De 30e kastanje weegt 7,7 gram. De mediaan is 7,7.
- V4**
- a** De laatste man kwam $2,5 - 1 = 1,5$ uur later binnen dan de eerste man.
 - b** De snelste vrouw deed er $1\frac{1}{2}$ uur over.
In de periode van 1 uur tot $1\frac{1}{2}$ uur kwamen alle mannen uit het eerste kwartiel binnen. Dat is 25% van het totaal aantal mannen.
 - c** De mediaan bij de mannen is $1\frac{3}{4}$ uur, dat is 1 uur en 45 minuten.
 - d** Dat zijn precies alle vrouwen tussen het eerste kwartiel en het derde kwartiel, dus 50%.
 - e** De 25% snelste vrouwen hadden een tijd tussen $1\frac{1}{2}$ uur en $2\frac{1}{4}$ uur dus tussen 1:30 en 2:15 uur.
 - f** Het tijdstip van de langzaamste man valt precies op het derde kwartiel van de vrouwen. 75% van de vrouwen was dan al binnen. Dat waren 126 vrouwen.
25% moest dus nog binnen komen. Dat waren er dus $126 : 3 = 42$ vrouwen.

- V5 a** De score met de hoogste frequentie is 23, de modus is 23 punten.
Er zijn 150 deelnemers. De mediaan is het gemiddelde van de score van de 75e en 76e deelnemer. Deze deelnemers hebben beiden 25 punten.
De mediaan is dan $(25 + 25) : 2 = 25$ punten.
- b** De gemiddelde score is $\frac{1 \times 5 + 39 \times 23 + \dots + 2 \times 30}{150} \approx 24,85$ punten.
- c** Waarschijnlijk heeft deze deelnemer de test niet serieus ingevuld of is er iets fout gegaan bij het invullen.
- d** De score met de hoogste frequentie verandert niet, dus de modus verandert niet.
De mediaan is nu de score van de 75e deelnemer en deze valt ook nu in de groep met een score van 25 punten.

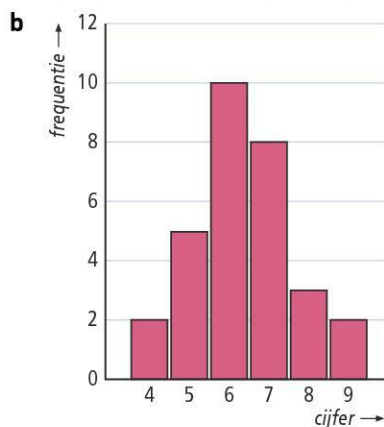
7.1 Klassenindeling

intro In een tabel waar je de data in drie groepen verdeeld. De auto's met een snelheid van 20 tot 30 km per uur, 30 tot 40 km per uur en 40 tot 50 km per uur.
Of een staafdiagram met twee staven. De hoogte van de linker staaf geeft het percentage weer dat 30 km per uur reed of minder en de hoogte van de tweede staaf geeft het percentage weer dat meer dan 30 km per uur reed.

- 1 a** De lengte in de tabel wordt gegeven in cm. 179,8 cm wordt afgerond naar 180 cm.
b Een lengte van 164,4 wordt afgerond naar 164 cm en valt in de klasse 160-164 cm.
c Het kleinste meisje in deze klasse is 174,5 cm lang.
d 174,5 cm is de linker grens en 179,5 de rechter grens van de klasse 175-179.
e De klasse 155-159 heeft als grenzen 154,5 en 159,5.
De breedte van deze klasse is $159,5 - 154,5 = 5$ cm.
f Het midden van de klasse 155-159 is $(154,5 + 159,5) : 2 = 157$ cm.
- 2 a** Bij staafdiagram A is de klassenbreedte $4 : 2 = 2$ cm.
Bij staafdiagram B is de klassenbreedte $10 : 2 = 5$ cm.
b De modale klasse van staafdiagram A is $[167, 169\rangle$.
De modale klasse van staafdiagram B is $[165, 170\rangle$.
c Staafdiagram A geeft meer informatie, maar geeft geen duidelijk beeld over hoe de lengtes verdeeld zijn.
Staafdiagram B is overzichtelijker maar er is informatie verloren gegaan.
- 3 a** 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76
b Alle leden met een gewicht uit het interval $[69,5; 76,5\rangle$ hebben afgerond op hele kilogrammen een gewicht van 70 tot en met 76 kg.
c Het midden van de klasse $[69,5; 76,5\rangle$ is $(69,5 + 76,5) : 2 = 73$ kg.
De klassenbreedte is $76,5 - 69,5 = 7$ kg.
d Personen met een leeftijd in de klasse 70-76 hebben een leeftijd van 70,0 tot en met 76,99.... (je bent pas 77 op je verjaardag)
De klassengrenzen zijn 70 en 77.
Het klassenmidden is $(70 + 77) : 2 = 73,5$ jaar.
e $[70, 77\rangle$ is de klasse.
f De klassenbreedte $77 - 70 = 7$ jaar.

4 a

<i>cijfer</i>	4	5	6	7	8	9
<i>frequentie</i>	2	5	10	8	3	2



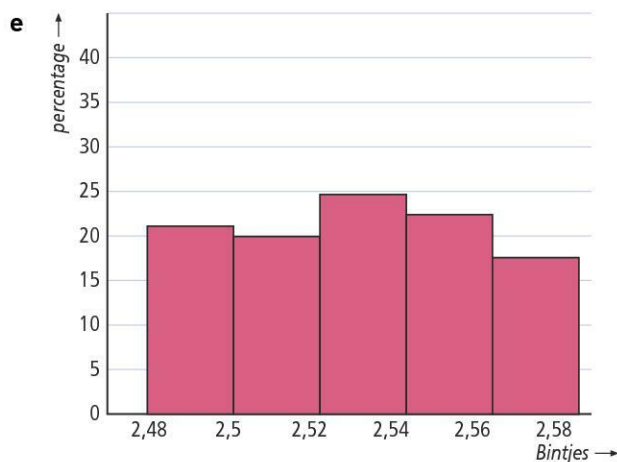
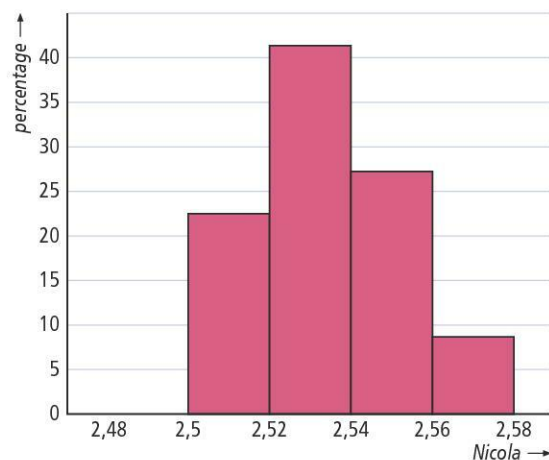
- c** De klassen grenzen zijn 3,5 en 4,5. In de intervalnotatie is dit $[3,5; 4,5)$.
d De klassenbreedte is 1.
e Er zijn 30 cijfers. De mediaan is het gemiddelde van de cijfers van de 15e en 16e leerling.
 Deze cijfers liggen in de klasse $[5,5; 6,5)$.
f De modale klasse is ook de klasse $[5,5; 6,5)$. De klassengrenzen zijn 5,5 en 6,5.

- 5 a** De klassenbreedte is 0,02 kg en de klassenmiddens zijn 2,49; 2,51; 2,53; 2,55 en 2,57.

- b** De aantallen zakken van Bintjes en Nicola zijn niet hetzelfde.
c 18 zakken Bintjes vallen in die klasse. Er zijn 90 zakken bintjes.
 Dat is $18 : 90 \times 100 = 20\%$.

d

	<i>percentage zakken</i>	
<i>gewicht in kg</i>	Bintjes	Nicola
$[2,48; 2,50)$	20	0
$[2,50; 2,52)$	18,9	22,7
$[2,52; 2,54)$	23,3	41,3
$[2,54; 2,56)$	21,1	27,3
$[2,56; 2,58)$	16,7	8,7
totaal	100	100



- f** Het staafdiagram van de Bintjes loopt min of meer vlak, terwijl die van de Nicola eerst sterk toeneemt en vervolgens weer afneemt.

7 Statistische verwerking (zonder ICT)

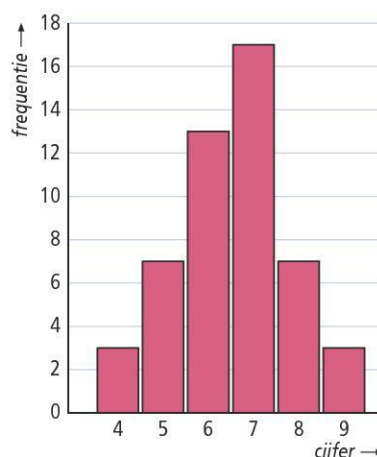
- 6 a** De indruk wordt gewekt dat er heel veel meer junioren zijn vergeleken met de rest. Dit komt doordat de klassenbreedtes niet gelijk zijn.
- b** Een klassenindeling maken met gelijke klassenbreedte, dus die van 6-17 opsplitsen in 6-9, 10-13 en 14-17 en dan de 90 junioren gelijk verdelen over deze drie klassen, dus in elke klasse 30 junioren.
- 7 a** De klassenbreedte is 0,10 kg en de klassenmiddens zijn 2,45; 2,55; 2,65 en 2,75.
- b** Het gemiddelde is $(2,45 \times 6 + 2,55 \times 10 + 2,65 \times 8 + 2,75 \times 6) : 30 = 77,9 : 30 \approx 2,60$ kg.
- c** Binnen elke klasse moeten de waarnemingen gelijkmatig verdeeld zijn en wel zo, dat het gemiddelde van alle waarnemingen in een klasse ook gelijk is aan het klassenmidden. Vaak weet je niet of dat zo is en neem je dit maar aan.

- 04 a** De cijfers 6,5 en hoger maar lager dan 7,5.
- b** Er zijn 17 leerlingen die afgerond een 7 hebben.
- c** De cijfers liggen in het interval $[6,5; 7,5)$.
- d** 4,1 valt in de klasse $[3,5; 4,5)$.

De linker grens van die klasse is 3,5.

e	<i>cijfer</i>	4	5	6	7	8	9
	<i>frequentie</i>	3	7	13	17	7	3

- f** Zie figuur hiernaast.



- g** Er zijn 50 leerlingen. De mediaan is het gemiddelde van de cijfers van de 25e en 26e leerling. Deze leerlingen hadden een 6,6 en een 6,8. De mediaan is $(6,6 + 6,8) : 2 = 6,7$.
De mediaan ligt in de klasse $[6,5; 7,5)$.
- h** De grenzen van de modale klasse zijn 6,5 en 7,5. De interval notatie is $[6,5; 7,5)$.

- U1** De klassengrenzen zijn 55, 60, 65 enzovoort, want het zijn leeftijden.
De klassenmiddens zijn 57,5; 62,5; 67,5 enzovoort.
Noem de aantallen leden in de klasse 65-69 a en het aantal leden in de klasse 75-79 b .

$$a + b = 50 - 3 - 8 - 14 - 3 - 2$$

$$a + b = 20 \text{ ofwel } b = 20 - a \quad (1)$$

De gemiddelde leeftijd is

$$\frac{3 \times 57,5 + 8 \times 62,5 + a \times 67,5 + 14 \times 72,5 + b \times 77,5 + 3 \times 82,5 + 2 \times 87,5}{50} = 70.$$

Dit is een vergelijking die je kunt herleiden tot:

$$2110 + 67,5a + 77,5b = 3500$$

$$67,5a + 77,5b = 1390 \text{ ofwel } b = (1390 - 67,5a) : 77,5 \quad (2)$$

Vul vergelijking (1) en (2) in op je rekenmachine en bereken het snijpunt.

Invoer: $y_1 = 20 - x$ en $y_2 = (1390 - 67,5x) : 77,5$

Venster: x van 0 tot 20 en y van 0 tot 10

Optie: snijden

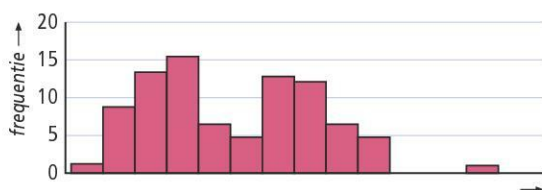
Dit geeft $x = 16$ en $y = 4$ dus $a = 16$ en $b = 4$.

Op de open plaatsen staan achtereenvolgens 16 en 4.

7.2 Soorten frequentieverdelingen

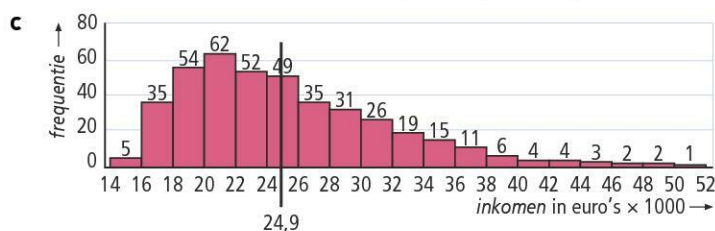
intro Er zullen ongeveer net zoveel leerlingen zijn die sneller dan het gemiddelde als langzamer dan het gemiddelde reageren.

- 8 a** De variabelen leeftijd, lengte, gewicht en inkomen ouders zijn kwantitatief.
b Staafdiagram A kan bij geboortemaand horen, staafdiagram B hoort waarschijnlijk bij lengte of gewicht en staafdiagram C hoort waarschijnlijk bij profiel.
c De staafdiagrammen van A en B zijn min of meer symmetrisch.
d Staafdiagram A heeft deze vorm omdat in elke maand ongeveer evenveel kinderen worden geboren.
 Staafdiagram B heeft deze vorm omdat de meeste kinderen een lengte of gewicht hebben rond het gemiddelde. Er zijn ongeveer evenveel kinderen die langer of minder lang dan het gemiddelde zijn. (of lichter of zwaarder dan het gemiddelde zijn.)
 Staafdiagram C heeft deze vorm omdat er vier profielen zijn en dus ook vier staven. Niet alle profielen worden even vaak gekozen, daarom zijn de staven niet even hoog.
- 9 a** De klokvormige, de uniforme en de meertoppige.
b Bij de klokvormige zijn de modus, mediaan en het gemiddelde (vrijwel) gelijk aan elkaar.
c bijvoorbeeld



- 10 a** Het aantal onderzochte accu's is $1 + 22 + 24 + \dots + \dots + 6 = 100$.
b Scheef met staart naar rechts en een uitschieter.
c De mediaan is het gemiddelde van de levensduur van de 50e en de 51e accu. Deze hebben een levensduur van 9 uur, dus de mediaan is $(9 + 9) : 2 = 9$ uur. De modus is 8 uur.
d De mediaan is de levensduur van de 50e accu en dus gelijk aan 9 uur. De modus is nog steeds 8 uur. Het weglaten van de uitschieter heeft geen gevolg voor de mediaan en de modus. Het gemiddelde zal hoger zijn.

- 11 a** Scheef met staart naar rechts.
b De modale klasse is de klasse $[20\,000, 22\,000)$.



7 Statistische verwerking (zonder ICT)

- d** Er liggen meer data links van het gemiddelde, dus Mohammed heeft gelijk.
- e** Van 416 huishoudens is het inkomen genoteerd.
 $35 + 31 + \dots + 1 = 149$ huishoudens verdienen 26 000 euro of meer.
Van de groep met een inkomen van 24 000 tot 26 000 zal ongeveer de helft meer verdienen dan 24 900 euro. Dat zijn ongeveer 25 huishoudens.
 $(149 + 25) : 416 \times 100\% \approx 41,8\%$
Ongeveer 42% van de huishoudens verdient meer dan het gemiddelde.
- f** De mediaan is het gemiddelde van het 208e en 209e inkomen.
 $5 + 35 + 54 + 62 + 52 = 208$.
Het 208e inkomen zit nog net in de klasse $[22\,000, 24\,000)$.
Vanaf 24 000 euro behoort je tot de 50% meest verdienende huishoudens van het dorp.

- 12 a** Scheef met staart naar links.
- b** De klasse van 8 uur tot 8,5 uur is de modale klasse.
- c** Langer dan de modale klasse is $16\% + 7\% + 2\% + 1\% = 26\%$.
De modale klasse is 21%.
Korter dan de modale klasse is $100\% - 21\% - 26\% = 53\%$.
Gemiddeld slapen de Nederlanders korter dan modaal.
- d** Ongeveer $1\% + 2\% + 2\% + 3\% = 8\%$ van de Nederlandse bevolking heeft kans op een chronisch slaaptekort.

- 011 a** Scheef met staart naar rechts.
- b** De modale klasse is $[15, 18)$ meter.



- d** $17 + 14 + 10 + 7 + 5 + 2 + 1 + 1 = 57$ leerlingen hebben verder dan het gemiddelde gegoooid. Dat is minder dan de helft.
- e** 57 van de 154 leerlingen hebben verder gegoooid dan het gemiddelde.
Dat is $57 : 154 \times 100\% \approx 37,0\%$.

- U2 a** Scheef met staart naar rechts. Er zitten minder leerlingen in de bovenbouw dan in de onderbouw.
- b** Meertoppig, 's morgens en aan het eind van de werkdag zijn er pieken.
- c** Klokvormig, in de flessen zal soms wat minder en soms wat meer frisdrank zitten.

7.3 Centrummaten

intro In klas H4a is waarschijnlijk het percentage voldoende het hoogst.

Het gemiddelde is daar wel lager dan in H4b maar er zijn in H4a geen hoge cijfers gehaald die het gemiddelde omhoog halen.

13 a De modus is één concertbezoek.

b Het totaal is 1027. De mediaan is het aantal concertbezoeken van de 514e bezoeker en dat is 2. De mediaan is 2 concertbezoeken

c Het gemiddelde is $\frac{375 \times 1 + 293 \times 2 + 196 \times 3 + 163 \times 4}{1027} \approx 2,14$ concertbezoeken.

14 a De modus is het cijfer 6.

De mediaan is het gemiddelde van het 14e en 15e cijfer. De mediaan is $(6 + 6) : 2 = 6$.

Het gemiddelde is

$$\frac{1 \times 1 + 1 \times 4 + 3 \times 5 + 11 \times 6 + 8 \times 7 + 1 \times 8 + 2 \times 9 + 1 \times 10}{28} = \frac{178}{28} \approx 6,4.$$

b De modus verandert niet, want het cijfer 6 blijft hoe dan ook het cijfer dat het meest is gehaald.

De mediaan wordt het 14e cijfer en dat is een 6. De mediaan verandert dus ook niet.

Het gemiddelde wordt $(178 - 1) : 27 \approx 6,6$. Het gemiddelde gaat omhoog.

15 De modus is 2000 euro en geeft een goed beeld. Veel werknemers verdienen dat bedrag per maand.

De mediaan geeft ook wel een goed beeld. De helft van de werknemers verdient minder dan 3000 euro per maand.

Het gemiddelde geeft geen goed beeld, dit wordt te sterk beïnvloed door een paar hoge inkomens.

16 a In klas 2A zitten $1 + 3 + 8 + \dots + 1 = 24$ leerlingen.

In klas 2B zitten $3 + 4 + 4 + \dots + 1 = 24$ leerlingen.

b c Voer de tabellen in je rekenmachine in.

Je vindt dan voor de modus, mediaan en gemiddelde de volgende waarden.

	klas 2A	klas 2B
modus	5	6
mediaan	5,5	6
gemiddelde	6,1	4,8

d Hoewel het gemiddelde in klas 2B het laagst is, overheerst toch het idee dat wel 10 leerlingen een 6 hebben gescoord. Eigenlijk geeft niet één centrummaat een compleet beeld. De cijfers bij klas 2A liggen veel meer verspreid dan in klas 2B. In 2A zijn lage en hoge cijfers gehaald.

17 a Bij de jongens en de meisjes is de modale klasse 3000-3999 gram.

b Omdat het aantal meisjes en het aantal jongens niet gelijk is, mag je het gemiddelde zo niet uitrekenen.

c Het gemiddelde gewicht is $(40 \times 3387,3 + 47 \times 3458,3) : 87 \approx 3425,7$ gram.

d Bij de meisjes zijn twee uitschieters met een gewicht van minder dan 1999 gram.

- 18 a** De mediaan is het gemiddelde van het 750e en 751e jaarsalaris.
Beide jaarsalarissen liggen in de klasse $[0, 10\,000)$. Hierin ligt dus de mediaan.
- b** De klasse $[0, 10\,000)$ is ook de modale klasse.
- c** Het gemiddelde is

$$\frac{752 \times 5000 + 663 \times 17\,500 + 76 \times 32\,500 + 8 \times 50\,000 + 1 \times 70\,000}{1500} \approx 12\,202 \text{ euro.}$$
- d** Hij zal naar het gemiddelde verwijzen.
- e** Je zou kunnen kiezen voor de modus of de mediaan.
Voor de modus, want de meeste werknemers hebben een inkomen dat minder is dan 10 000 euro.
Voor de mediaan, want de helft van de werknemers heeft een inkomen minder dan 10 000 euro.

- 016 a** Gemiddeld hebben de 17-jarigen het beste gepresteerd.
- b** 25 meter is de afstand die het meest geworpen is door de 16-jarigen.
- c** De mediaan bij de 16-jarigen is het grootst.
- d** Bij de 17-jarigen is de modus en het gemiddelde het grootst.

- U3** Door het schrappen van de uitslag AS Roma – Juventus ontstaat de volgende frequentie tabel bij het aantal doelpunten.

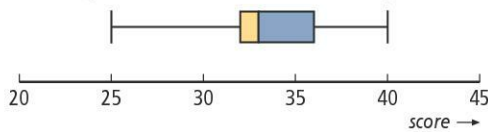
<i>aantal doelpunten</i>	<i>frequentie</i>
0	1
1	3
3	1
4	4

De mediaan wordt $3\frac{1}{2}$ als er in de wedstrijd AS Roma – Juventus vier of vijf keer gescoord wordt. De mogelijke uitslagen zijn dus
 $2 - 2, 2 - 3, 3 - 1, 3 - 2, 4 - 0, 4 - 1$ en $5 - 0$.

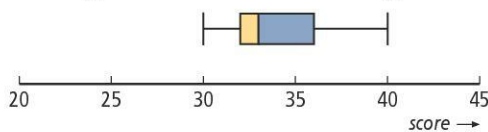
7.4 Spreidingsmaten

- intro** De gemiddelde stroomleveringsduur zal elkaar niet veel ontlopen. Bij de blauwe heb je meer kans om een batterij te treffen die lang stroom levert of juist niet. Er kan stroom geleverd worden tussen de 2,5 en de 7 uur. Bij de rode heb je de zekerheid dat er stroom geleverd wordt tussen de 3 en de 5,5 uur.
- 19** Bij Nederlands zijn er maar weinig cijfers die meer dan 1 punt van het gemiddelde afliggen, namelijk 21 van de 193 dat is ongeveer 11%.
Bij Engels zijn dat er veel meer, namelijk 65 van de 193 dat is ongeveer 34%.
- 20 a** Het verschil is $201 - 178 = 23 \text{ mL}$.
- b** De mediaan is het gemiddelde van de inhoud van het 10e en 11e flesje.
De mediaan is $(185 + 185) : 2 = 185 \text{ mL}$.
- c** De 25% flesjes met de kleinste inhoud hebben 178, 179, 179, 180 en 182 mL.
Er zit maximaal 182 mL in deze flesjes.

- 21 a** De mediaan is het gemiddelde van de score van de 125e en de 126e deelnemer. De mediaan is $(33 + 33) : 2 = 33$.
 Q_1 is de score van de 63e deelnemer en dus gelijk aan 32.
 Q_3 is de score van de 188e deelnemer en dus gelijk aan 36.
 De laagste score is 25 en de hoogste score is 40.



- b** De frequenties van de scores net onder de mediaan is groot, de spreiding daar is dus klein. De spreiding van de scores boven de mediaan is groter.
c Dit is een uitschieter. Tussen 25 en 30 punten komt niet voor.
d De mediaan is de score van de 125e en dus gelijk aan 33.
 Q_1 is de score van de 62e deelnemer en dus gelijk aan 32.
 Q_3 is de score van de 187e deelnemer en dus gelijk aan 36.
 De laagste score is 30 en de hoogste score is 40.



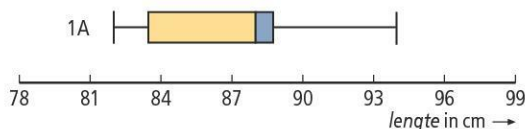
- e** Rechts van de Q_1 verandert niets. De scores in het eerste kwartiel liggen nu veel dichter bij elkaar.
- 22 a** Dit komt overeen met de boxplot. De mediaan ligt bij 5 uur en 20 minuten.
b Uit de boxplot kun je alleen de conclusie trekken dat 25% van de 84 leerlingen, ofwel 21 leerlingen er langer dan 5 uur en 50 minuten aan gewerkt hebben. Het kan zijn dat er maar 3 leerlingen meer dan 6 uur nodig hebben gehad, maar dat hoeft niet zo te zijn. Het kan dus kloppen.
- 23 a** De cijfers liggen symmetrisch verdeeld rond de 7.
b De spreidingsbreedte is $9 - 5 = 4$ voor beide leerlingen.
c Voor beide leerlingen geldt dat Q_1 het 3e cijfer is en dat Q_3 het 8e cijfer is. De kwartielfstand is bij beide leerlingen gelijk aan $8,4 - 5,6 = 2,8$.
d Bij Tim liggen de cijfers het dichtst bij het gemiddelde.
e Bij Bas is de spreiding als je kijkt naar spreidingsbreedte en kwartielfstand even groot als bij Tim. Toch lijken bij Bas meer cijfers verspreid te liggen dan bij Tim.
- 24 a** De spreidingsbreedte bij de proefwerken en SO's is $10 - 4 = 6$.
 De kwartielfstand bij de proefwerken en SO's is $8 - 6 = 2$.
b Bij de SO's zijn meer cijfers die afwijken van het gemiddelde.
- 25 a** De spreidingsbreedte van klas 5A is $8,7 - 3,4 = 5,3$.
 De spreidingsbreedte van klas 5B is $8,8 - 4,1 = 4,7$.
 De spreidingsbreedte van klas 5A is het grootst.
b De standaardafwijking van klas 5A is veel kleiner dan in klas 5B.
 In klas 5A zijn veel meer cijfers rond het gemiddelde 6,9.
 In klas 5B zijn dus waarschijnlijk meer onvoldoendes.

- 022 a** 6,2 is de mediaan van de cijfers. Dus 50% heeft een lager cijfer dan dat van Marjolijn.
b 25% heeft een cijfer hoger dan een 7. Dit zijn $60 : 100 \times 25 = 15$ leerlingen.
c 25% heeft een cijfer tussen 5,7 en 6,2.

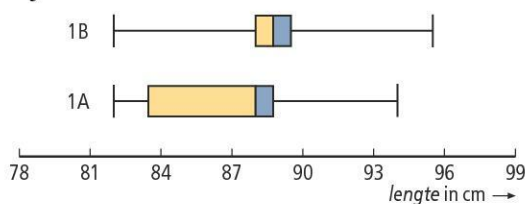
7 Statistische verwerking (zonder ICT)

- d 25% heeft een cijfer lager dan 5,7. Dat zijn $60 : 100 \times 25 = 15$ leerlingen.
 e 25% of wel 15 leerlingen hebben een cijfer 5,7 of lager.
 Het is mogelijk dat van 12 leerlingen het cijfer tussen 5,5 en 5,7 ligt.

- U4 a** Ga ervan uit dat de kleinste leerling 82 cm is en dat de Q_1 84 cm is.
 Dan is de Q_3 $84 + 5 = 89$ cm en de maximum lengte is $82 + 12 = 94$ cm.
 De mediaan ligt tussen 84 cm en 89 cm.
 Dit geeft de volgende boxplot:.



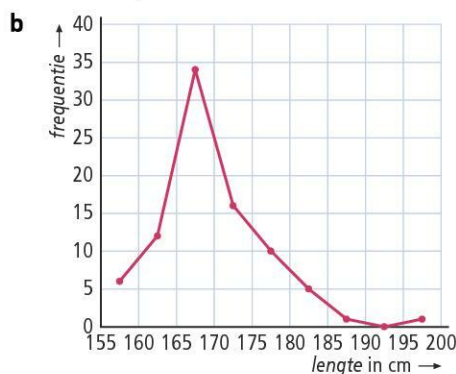
- b** Voor groep 1B moet gelden dat de afstand tussen maximum en minimum groter is dan bij 1A. De 'box' moet bij groep 1B kleiner zijn dan groep 1A. Verder moet de Q_1 van groep 1B gelijk liggen met de mediaan van groep 1A. bijvoorbeeld



7.5 Cumulatieve verdelingen

- intro** In de grafieken kun je bijvoorbeeld zien dat de 50% best presterende leerlingen van groep B meer dan 45 punten hebben gehaald. In groep A was dat 40 punten.
 De grafiek van groep B ligt overall rechts van groep A. Dus voor alle percentages geldt dat groep B het beter heeft gedaan.

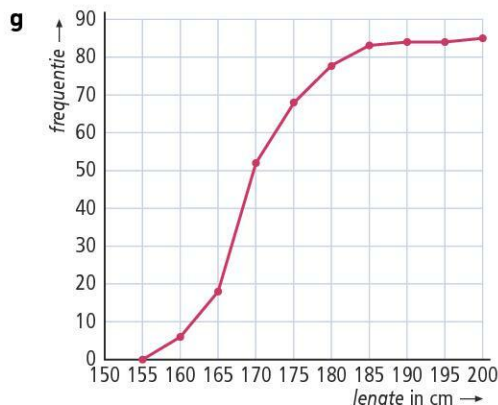
- 26 a** De klassengrenzen zijn 155 en 160 en het klassenmidden is $(155 + 160) : 2 = 157,5$.



- c $6 + 12 + 34 = 52$ meisjes zijn kleiner dan 170 cm.
 d $52 + 16 = 68$ meisjes zijn kleiner dan 175 cm.

e 18 meisjes zijn kleiner dan 165 cm.

lengte	< 160	< 165	< 170	< 175	< 180	< 185	< 190	< 195	< 200
frequentie	6	18	52	68	78	83	84	84	85



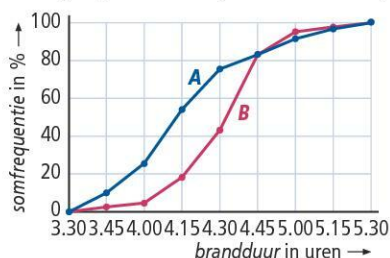
27 a Er zijn 40 waxinelichtjes van merk A en 70 waxinelichtjes van merk B onderzocht.

b Omdat het totaal aantal waxinelichtjes van merk B veel groter is dan van merk A kun je de absolute aantallen niet goed vergelijken.

c $3 : 40 \times 100\% = 7,5\%$

d De frequentie van een cumulatieve frequentiepolygoon in dit voorbeeld geeft bijvoorbeeld het percentage waxinelichtjes aan dat hoogstens een brandduur heeft van 5 uur. Die frequentie zet je dan boven de 5.00 uur.

brandduur in uren	3.45	4.00	4.15	4.30	4.45	5.00	5.15	5.30
somfrequentie in procenten A	7,5	25	52,5	75	85	92,5	97,5	100
somfrequentie in procenten B	1,4	4,3	17,1	44,3	84,3	95,7	98,6	100



f 50% van de waxinelichtjes brand korter dan de mediaan. De mediaan bij merk A is ongeveer 4.10 uur. Bij merk B is dat ongeveer 4.40 uur. De grafiek van merk B loopt in het midden steiler dan de grafiek van merk A, daar liggen dus veel waarnemingen dicht bij elkaar. Bij merk A is de spreiding groter dan bij merk B.

28 a Er deden 41 meisjes mee aan de sportdag.

b De klassen indeling is $[0, 5)$; $[5, 10)$; ...; $[40, 45)$.
De klassenbreedte is 5 meter.

c Er is een meisje dat minder dan 5 meter heeft gegoooid.

d De somfrequentiepolygoon van de jongens ligt steeds rechts van die van de meisjes.

Dat betekent een grotere afstand voor de jongens.

e De beste worp bij de meisjes is 30 meter. 21 jongens van de 33 jongens gooien minder ver dan 30 meter.

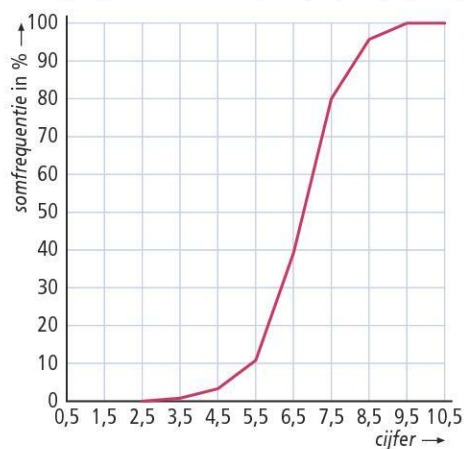
$33 - 21 = 12$ jongens gooien verder dan 30 meter.

Dit is $12 : 33 \times 100\% \approx 36,4\%$.

29 a Cijfers in het interval $[6,5; 7,5)$ worden afgerond op een 7.

b $49 : 10 \times 100\% \approx 40,8\%$ heeft een 7 gehaald.

eindcijfer	3	4	5	6	7	8	9	10
somfrequentie in %	0,8	3,3	10,8	39,2	80	96,7	100	100



d Het steilste deel ligt tussen 6,5 en 7,5.

Dit is dus de modale klasse.

e Bij 50% kun je de mediaan aflezen. De mediaan is ongeveer 6,8.

30 a Uit de relatieve somfrequentiepolygoon lees je af dat ongeveer 86% een score had (gelijk of) lager dan 545. Dat betekent dat ongeveer $100\% - 86\% = 14\%$ een score had van meer dan 545.

b 7% had een score minder dan 520 punten.

66% had een score minder dan 540 punten.

$66 - 7 = 59\%$ had een score tussen 520 en 540 punten.

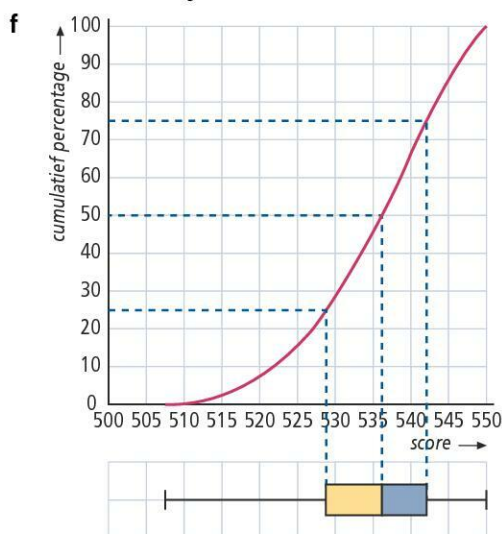
Dat waren $164\,500 : 100 \times 59 = 97\,055$ leerlingen.

c 50% van de data is kleiner dan de mediaan.

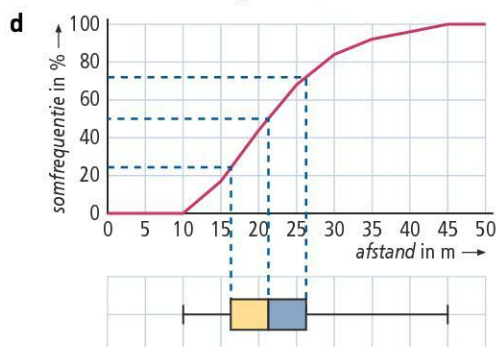
De mediaan is 536 punten.

d De 25% laagst scorende leerlingen hadden 529 punten. Het eerste kwartiel hoort hierbij.

e De 25% hoogst scorende leerlingen hadden 542 punten. Het derde kwartiel hoort hierbij.



- 31 a** De relatieve somfrequentiepolygoon bestaat uit lijnstukjes.
b De klassenbreedte is 5 meter.
c De modale klasse hoort bij het steilste lijnstukje.
 Dat is de klasse $[15, 20)$ meter.



- 027 a** Nee van het ras Gloria zijn er meer planten gewogen.
b $3 + 6 + 14 = 23$

c

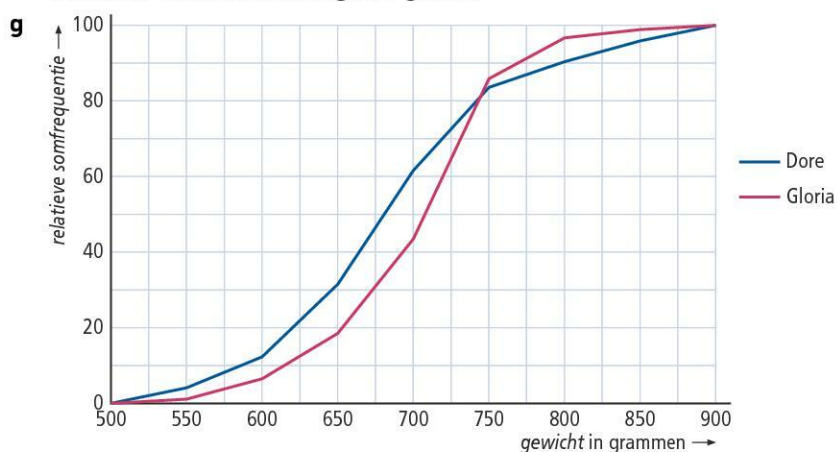
gewicht in grammen	Doré	cum. Doré	Gloria	cum. Gloria
$[500, 550)$	3	3	1	1
$[550, 600)$	6	9	5	6
$[600, 650)$	14	23	11	17
$[650, 700)$	22	45	23	40
$[700, 750)$	16	61	39	79
$[750, 800)$	5	66	10	89
$[800, 850)$	4	70	2	91
$[850, 900)$	3	73	1	92

- d** Het totale aantal planten per ras is niet gelijk.

e

gewicht in grammen	Doré	cum. Doré	cum. Doré in %	Gloria	cum. Gloria	cum. Gloria in %
$[500, 550)$	3	3	4,1	1	1	1,1
$[550, 600)$	6	9	12,3	5	6	6,5
$[600, 650)$	14	23	31,5	11	17	18,5
$[650, 700)$	22	45	61,6	23	40	43,5
$[700, 750)$	16	61	83,6	39	79	85,9
$[750, 800)$	5	66	90,4	10	89	96,7
$[800, 850)$	4	70	95,9	2	91	98,9
$[850, 900)$	3	73	100,0	1	92	100,0

- f** De percentages in de tabel geven aan hoeveel procent van de planten minder dan deze rechter klassengrens geven.



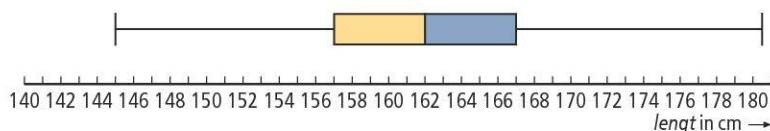
7 Statistische verwerking (zonder ICT)

- h Bij de mediaan is 50% van de waarnemingen kleiner en 50% groter.
- i De mediaan van Doré is 680 gram en van Gloria is de mediaan 715 gram.
Van Gloria is de mediaan het grootst.
- j Van Doré is de kwartielfstand $730 - 630 = 100$ gram.
Van Gloria is de kwartielfstand $745 - 670 = 75$ gram.
Van Doré is de kwartielfstand duidelijk groter.
- k Een Gloria plant levert over het algemeen een hoger gewicht op.
Bovendien liggen de gewichten van die planten dicht bij elkaar.

U5 De mediaan ligt ongeveer bij 6,5 km. Het gemiddelde is groter dan 6,5 km. 35% van alle leerlingen fietst meer dan 8 km. 20% fietst zelfs meer dan 14 km. Dat lever al zo'n grote bijdrage aan het totaal aantal kilometers, dat het gemiddeld hoger dan 6,5 km zal zijn.

7.6 Gemengde opdrachten

- 32 a** 69% van de meisjes heeft een lengte kleiner dan 165,5 cm.
- b** De punten zijn uitgezet boven de rechter klassengrenzen. De indeling is dus $[140,5; 145,5)$, $[145,5; 150,5)$, ..., $[170,5; 175,5)$ en $[175,5; 180,5)$.
- c** 19% van de meisjes is kleiner dan 155,5 cm en 5% van de meisjes is kleiner dan 150,5 cm.
In de klasse valt dus $19\% - 5\% = 14\%$. Dat zijn $400 : 100 \times 14 = 56$ meisjes.
- d** $100\% - 87\% = 13\%$, dus $400 : 100 \times 13 = 52$ meisjes waren langer dan 170,5 cm.
- e** Tussen 160,5 en 165,5 cm is de grafiek het steilst, dus $[160,5; 165,5)$ is de modale klasse.
- f** Lees de mediaan af bij 50%. De mediaan is 162 cm.
Lees Q_1 af bij 25%. $Q_1 = 157$ cm Lees de Q_3 af bij 75%. $Q_3 = 167$ cm



- 33 a** Bij klas A is er geen modus. De modus bij klas B is 2,7 liter.
In klas A zitten 21 leerlingen.
De mediaan is de longinhoud van de 11e leerling. De mediaan is 4,1 liter.
In klas B zitten 22 leerlingen. De mediaan is gelijk aan het gemiddelde van de longinhoud van de 11e en 12e leerling. De mediaan is $(3,0 + 3,3) : 2 = 3,15$ liter.
Het gemiddelde van klas A is $(2,7 + 3,2 + \dots + 5,7) : 21 = 87,8 : 21 \approx 4,18$ liter.
Het gemiddelde van klas B is $(2,4 + 2,4 + \dots + 5,0) : 16 = 55,1 : 16 \approx 3,44$ liter.
- b** De spreidingsbreedte van klas A is $5,7 - 2,7 = 3$ liter.
De spreidingsbreedte van klas B is $5,2 - 2,4 = 2,8$ liter.
De mediaan van klas A is 4,1 liter.
De modus is niet geschikt om het verschil aan te geven. Met de mediaan en het gemiddelde kun je de longinhoud van de leerlingen wel weergeven.
- c** De spreidingsbreedte van klas A is $5,7 - 2,7 = 3$ liter.
De spreidingsbreedte van klas B is $5,2 - 2,4 = 2,8$ liter.
Van klas A is Q_1 het gemiddelde van de longinhoud van de 5e en 6e leerling.
 Q_1 is $(3,4 + 3,5) : 2 = 3,45$ liter.

Van klas A is Q_3 het gemiddelde van de longinhoud van de 16e en 17e leerling. Q_3 is $(4,6 + 4,7) : 2 = 4,65$ liter.

De interkwartielafstand van klas A is $4,65 - 3,45 = 1,20$ liter.

Van klas B is Q_1 het gemiddelde van de longinhoud van de 4e en 5e leerling.

Q_1 is $(2,6 + 2,7) : 2 = 2,65$ liter.

Van klas B is Q_3 het gemiddelde van de longinhoud van de 12e en 13e leerling. Q_3 is $(3,8 + 4,6) : 2 = 4,2$ liter.

De interkwartielafstand van klas B is $4,2 - 2,65 = 1,55$ liter.

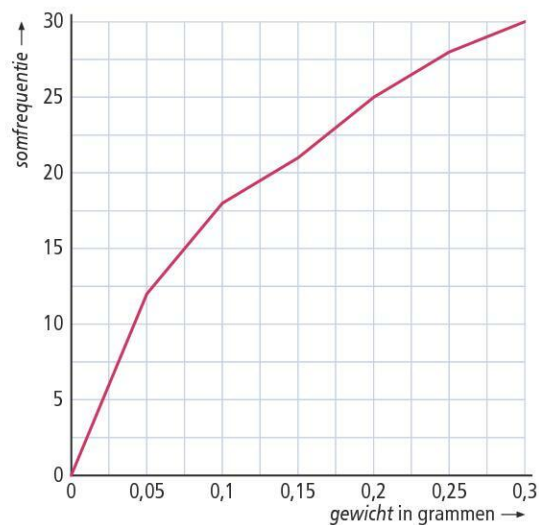
- d** Klas A heeft de grootste spreidingsbreedte, maar de kleinste interkwartielafstand.

Dat betekent dat veel leerlingen van klas A niet ver van het gemiddelde zitten, maar deze klas zal wat meer uitschieters heeft.

34 a

gewicht in grammen	frequentie
$[0; 0,05[$	12
$[0,05; 0,10[$	6
$[0,10; 0,15[$	3
$[0,15; 0,20[$	4
$[0,20; 0,25[$	3
$[0,25; 0,30[$	2

- b** De somfrequenties zijn 12, 18, 21, 25, 28 en 30.



- c** De mediaan lees je af bij de frequentie 15, want 50% van 30 is 15. Het gewicht dat daarbij hoort is 0,075 gram.

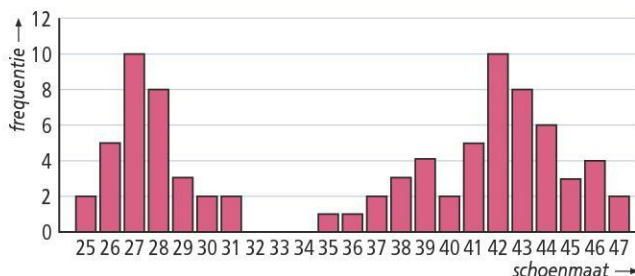
Onderzoeksoopdrachten

- 35 a** Grafiek B, want dat is een symmetrische figuur. Dan vallen de modus, de mediaan en het gemiddelde samen.
- b** Grafiek A ligt het meest naar rechts. Daar heeft de mediaan de hoogste waarde.

- 36** $196 : 4 = 49$ leerlingen hebben een cijfer tussen 5 en 6. Neem aan dat 1 leerling een 5 heeft en 48 leerlingen een 6 hebben. Neem ook aan dat 49 leerlingen een 7 hebben, 49 leerlingen een 8 hebben en 49 leerlingen een 10 hebben. Dan hebben we een totaal van $5 + 48 \times 6 + 49 \times 7 + 49 \times 8 + 49 \times 10 = 1518$. Het hoogst mogelijke gemiddelde zou dan $1518 : 196 = 7,744...$ zijn. Hij kan dus geen gelijk hebben.
- 37** Het totaal aantal uren zonneshijn in deze maand $1 + 3,5 + 1,5 + 2 + 3 + 3,5 + 0 + 1 + 1 + 0 + 5 + 0 + 0 + 6,5 + 0,5 + 0 + 1 + 2,5 + 0 + 3,5 + 1 + 7,5 + 0 + 0 + 1,5 + 1 + 0 + 3 + 5 + 4 = 58,5$ en dat is ongeveer die 60 uur die in de grafiek staat.
- De langst mogelijke duur van de zonneshijn per dag is de lengte van de blauwe staaf.
- De gemiddelde lengte van een blauwe staaf is ongeveer 9 uur, want er zijn iets meer staven onder de 9 uur dan erboven. Schat het gemiddelde bijvoorbeeld op 8,8 uur. In totaal zijn er dan $30 \times 8,8 = 264$ uren zonneshijn mogelijk.
- Normaal is 63 uur. en dat is $63 : 264 \times 100\% \approx 24\%$. Er zijn 58,5 uren zonneshijn gemeten en dat is $58,5 : 264 \times 100\% \approx 22\%$. De vermelde percentages kloppen.

Samenvatting

S1



- S2 a** Het is een cumulatieve frequentiepolygoon.
- b** Ongeveer 115 klanten moesten minder dan één minuut wachten. Dit is $115 : 193 \times 100\% \approx 60\%$.
- c** Je leest af dat ongeveer 163 klanten maximaal twee minuten moesten wachten. Er waren 193 klanten. $193 - 163 = 30$ klanten moesten langer dan twee minuten wachten.
- S3 a** De intervalnotatie is $[980, 990)$.
- b** Het klassenmidden is $(980 + 985) : 2 = 982,5$ mL.
- c** Bij machine A is $[990, 1000)$ de modale klasse. Bij machine B is $[1000, 1010)$ de modale klasse.
- d** Het gemiddelde is $\frac{52 \times 995 + 47 \times 1005 + 1 \times 1015}{100} = 999,9$ mL.
- S4** De modus want de kans op een prijs van 10 euro is groter dan de kans op één van de andere prijzen.

S5 a De modus is één vis.

De mediaan is het aantal vissen van de 16e deelnemer, dus de mediaan is 2 vissen.

Het gemiddelde is $\frac{2 \times 0 + 9 \times 1 + 6 \times 2 + 8 \times 3 + 2 \times 7 + 3 \times 8 + 1 \times 10}{31} = 3$ vissen.

b Het gemiddelde geeft in dit geval het beste beeld van het aantal gevangen vissen.

S6 a machine A

De spreidingsbreedte is $1012 - 991 = 21$ mL.

De kwartielafstand is $1002 - 997 = 5$ mL.

machine B

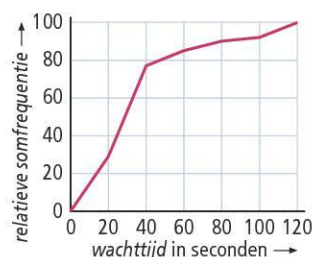
De spreidingsbreedte is $1032 - 983 = 49$ mL.

De kwartielafstand is $1008 - 997$ mL = 12 mL.

b Van machine B is de spreiding van de inhoud veel groter. Van machine B zal de standaardafwijking het grootst zijn.

S7

wachttijd in seconden	somfrequentie in procenten
< 20	29
< 40	77
< 60	85
< 80	90
< 100	92
< 120	100



Test jezelf

T1 a Partij 1 heeft 19 gewichten. De mediaan is het gewicht van de 10e kiwi en is 77 gram.

Partij 2 heeft 18 gewichten. De mediaan is het gemiddelde van het gewicht van de 9e en 10e kiwi. De mediaan is $(80 + 80) : 2 = 80$ gram.

b De modus is 77 gram bij partij 1 en 79 gram bij partij 2.

c Het gemiddelde is $(71 + 72 + \dots + 91) : 19 = 1501 : 19 \approx 79$ gram bij partij 1.

Het gemiddelde is $(68 + 72 + \dots + 89) : 18 = 1441 : 18 \approx 80$ gram bij partij 2.

d De mediaan geeft het verschil tussen de twee partijen het beste weer.

T2 a meisjes

De spreidingsbreedte is $21 - 1 = 20$ uur.

De kwartielafstand is $15 - 6 = 9$ uur.

jongens

De spreidingsbreedte is $21 - 1 = 20$ uur.

De kwartielafstand is $10 - 3 = 7$ uur.

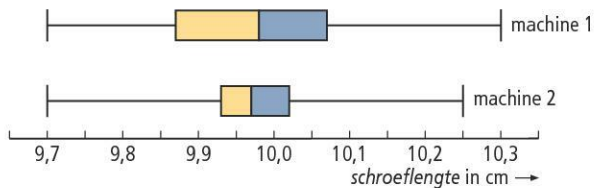
7 Statistische verwerking (zonder ICT)

- b** 5,6 hoort waarschijnlijk bij de meisjes. De kwartielf afstand bij de meisjes is groter dus de waarden liggen rondom het gemiddelde verder uit elkaar.
- c** 50% van de meisjes, dit zijn $78 : 100 \times 50 = 39$ meisjes.
 25% van de jongens, dit zijn $68 : 100 \times 25 = 17$ jongens.
 $39 + 17 = 56$ van de $68 + 78 = 146$ leerlingen besteedde meer dan 10 uur per week aan hun huiswerk.
 Dit is $56 : 146 \times 100\% \approx 38,4\%$ van de leerlingen.

- T3 a** Het staafdiagram is scheef met een staart naar rechts.
- b** De modale klasse is $[20, 25)$.
- c** Het gemiddelde is $\frac{12 \times 17,5 + 93 \times 22,5 + \dots + 2 \times 52,5}{195} = \frac{5062,5}{195} \approx 26,0$.
- d** Bij het berekenen met behulp van klassenmiddens ga je ervan uit dat de leeftijden gelijk verdeeld zijn over de klasse maar dat hoeft natuurlijk niet het geval te zijn.

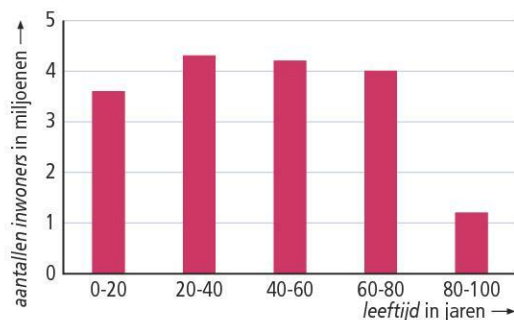
- T4 a** Lees het minimum, maximum, Q_1 , Q_3 en de mediaan af uit de grafiek.

	minimum	Q_1	mediaan	Q_3	maximum
machine 1	9,7	9,87	9,98	10,07	10,3
machine 2	9,7	9,93	9,97	10,02	10,25

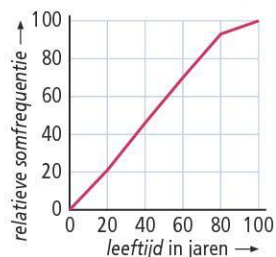


- b** In de relatieve somfrequentiepolygoon lees je voor machine 1 af dat ongeveer 30% korter is dan 9,9 cm en 20% langer is dan 10,1 cm. Voor machine 2 geldt dat ongeveer 11% korter is dan 9,9 cm en 10% langer is dan 10,1 cm.
- c** Machine 2 is beter afgesteld. Hier wordt maar $10\% + 11\% = 21\%$ afgekeurd.

- T5 a** De modale klasse is de klasse 20-40.
- b** De mediaan valt in de klasse 40-60, want als je de percentages gaat optellen, valt 50% in deze klasse.
- c** De absolute aantallen zijn $17,5 : 100 \times 21 = 3,675$, $17,5 : 100 \times 25 = 4,375$, $17,5 : 100 \times 24 = 4,2$, $17,5 : 100 \times 23 = 4,025$ en $17,5 : 100 \times 7 = 1,225$.



- d De relatieve somfrequenties zijn 21, 46, 70, 93 en 100.



Extra oefening

E1 a	<i>schouderbreedte in cm</i>	<i>frequentie</i>
	[34,5; 35,5>	1
	[35,5; 36,5>	1
	[36,5; 37,5>	3
	[37,5; 38,5>	3
	[38,5; 39,5>	4
	[39,5; 40,5>	8
	[40,5; 41,5>	4
	[41,5; 42,5>	5
	[42,5; 43,5>	2
	[43,5; 44,5>	3
	[44,5; 45,5>	1
	[45,5; 46,5>	1

- b De grenzen van de eerste klasse zijn 34,5 cm en 35,5 cm.
c De klassenbreedte is 1 cm.

- E2 a De klasse [90, 100> is de modale klasse.
b Er zijn 80 leerlingen. De mediaan is het gemiddelde van de afstanden van de 40e en 41e leerling.
Deze afstanden vallen in de klasse [90, 100> dm.
c Het gemiddelde is $\frac{6 \times 55 + 7 \times 65 + \dots + 5 \times 125}{80} = \frac{7240}{80} = 90,5$ dm.
d De drie centrummaten vallen in dezelfde klasse. Het maakt dus geen verschil welke centrummaat je gebruikt.

E3 groep 1

De spreidingsbreedte is $124,5 - 66,1 = 58,4$ dm.

De kwartielfstand is $98,3 - 78,0 = 20,3$ dm.

De standaardafwijking is 18,0 dm.

groep 2

De spreidingsbreedte is $127,6 - 66,2 = 61,4$ dm.

De kwartielfstand is $104,5 - 85,3 = 19,2$ dm.

De standaardafwijking is 19,9 dm.

groep 3

De spreidingsbreedte is $114,9 - 68,4 = 46,5$ dm.

De kwartielfstand is $102,0 - 74,2 = 27,8$ dm.

De standaardafwijking is 16,5 dm.

Van groep 3 is de spreidingsbreedte en de standaardafwijking het kleinst.

Van groep 2 is de kwartielfstand het kleinst. Dus er wordt niet in alle gevallen dezelfde groep aangewezen.

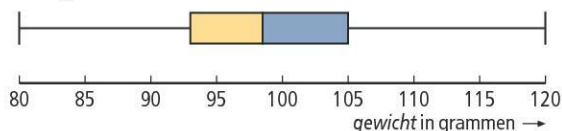
E4 a Langs de verticale as staat relatieve somfrequentie.

b De klassen zijn 4 gram breed.

c De modale klasse is waar de grafiek het steilst loopt. Dat is de klasse $[96, 100)$.

d De mediaan lees je af bij 50% en dat is ongeveer 98,5 gram.

e Q_1 lees je af bij 25% en dat is ongeveer 93 gram en Q_3 lees je af bij 75% en dat is ongeveer 105 gram. De lichtste appel is 80 gram en de zwaarste is 120 gram.



f De spreidingsbreedte is $120 - 80 = 40$ gram.

De kwartielfstand is $Q_3 - Q_1 = 105 - 93 = 12$ gram.

E5 a Er wonen $6 + 10 + 7 + 3 + 2 + 1 + 1 = 30$ huishoudens in de straat.

b Het totaal aantal kinderen is $6 \times 0 + 10 \times 1 + 7 \times 2 + 3 \times 3 + 2 \times 4 + 5 + 6 = 52$.
Het gemiddelde is $52 : 30 \approx 1,73$ kinderen per huishouden.

c De mediaan is het gemiddelde van het aantal kinderen in het 15e en 16e huishouden.

De mediaan is $(1 + 1) : 2 = 1$ kind.

De modus is 1 kind.

Het gemiddelde is een betere maat voor het aantal kinderen per huishouden.

d $1,73 \times 890 \approx 1542,67$

Er wonen ongeveer 1543 kinderen in het dorp.

E6 a Bij wiskunde A heeft 50% minimaal een 7, dit zijn $62 : 100 \times 50 = 31$ leerlingen.

Bij wiskunde B heeft 75% minimaal een 7, dit zijn $86 : 100 \times 75 \approx 65$ leerlingen.

Groep B heeft de meeste leerlingen met gemiddeld minimaal 7,0.

b wiskunde A

De spreidingsbreedte is $8 - 6 = 2$.

De kwartielfstand is $7,3 - 6,8 = 0,5$.

wiskunde B

De spreidingsbreedte is $8,9 - 6 = 2,9$.

De kwartielfstand is $7,8 - 7 = 0,8$.

c Bij wiskunde B is het verschil tussen de cijfers groter, dus zal de standaardafwijking waarschijnlijk ook het groter zijn.

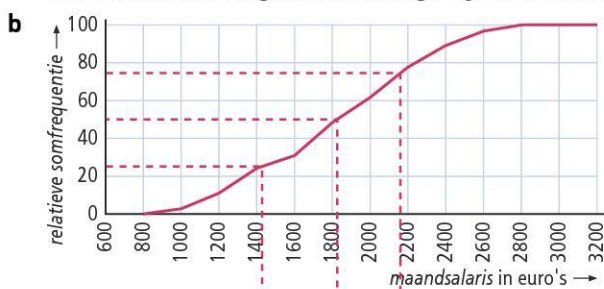
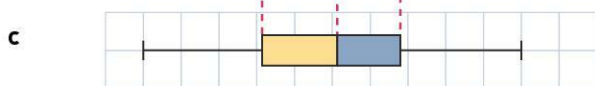
d De Q_1 is groter bij wiskunde B.

De mediaan is groter bij wiskunde B.

De Q_3 is groter bij wiskunde B.

Het hoogste cijfer is hoger bij wiskunde B.

E7 a Er is een groot aantal vrouwen wat tussen de 800 en 1600 euro verdient (23 vrouwen). Daarentegen zijn er maar 5 mannen met een inkomen binnen deze klassen. Het gemiddelde ligt bij de vrouwen lager.



d Uit de boxplots kun je aflezen dat van de vrouwen meer dan 25% meer dan € 2.100,- verdient. Van de mannen is dit minder dan 50%. Dus relatief gezien klopt deze uitspraak zeker niet.

Er werken meer vrouwen dan mannen in het bedrijf, dus absoluut gezien klopt deze uitspraak ook niet.

8 Grafieken en veranderingen

Voorkennis

- V1**
- a** Tussen de punten A en B en tussen de punten F en I is de grafiek dalend.
 - b** Tussen de punten B en C is de grafiek constant.
 - c** Tussen de punten C en E is sprake van een lineaire toename.
 - d** Op dat gedeelte stijgt de grafiek $5 - 1 = 4$.
Dat is $4 : 2 = 2$ per eenheid.
 - e** Op dat gedeelte daalt de grafiek $6 - 3 = 3$.
 - f** De toename in de horizontale richting is $7 - 5 = 2$ en de toename in de verticale richting is $3 - 6 = -3$.
De richtingscoëfficiënt van lijn l is $\frac{-3}{2} = -1\frac{1}{2}$.
 - g** De toename in de horizontale richting is $3 - -1 = 4$ en de toename in de verticale richting is $3 - 2 = 1$.
De richtingscoëfficiënt van lijn m is $\frac{1}{4}$.
- V2**
- a** De toename in de horizontale richting is $6 - 3 = 3$ en de toename in de verticale richting is $0 - 5 = -5$.
De richtingscoëfficiënt van lijn AB is $\frac{-5}{3} = -1\frac{2}{3}$.
 - b** De toename in de horizontale richting is $20 - 12 = 8$ en de toename in de verticale richting is $11 - 15 = -4$.
De richtingscoëfficiënt van lijn CD is $\frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$.
 - c** De toename in de horizontale richting is $-3 - -9 = 6$ en de toename in de verticale richting is $7 - 10 = -3$.
De richtingscoëfficiënt van lijn EF is $\frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$.
 - d** De toename in de horizontale richting is $109 - 104 = 5$ en de toename in de verticale richting is $-12 - 6 = -18$.
De richtingscoëfficiënt van lijn GH is $\frac{-18}{5} = -3\frac{3}{5}$.
- V3**
- a** De toename in de horizontale richting is $10 - 3 = 7$ en de toename in de verticale richting is $21 - 7 = 14$.
De richtingscoëfficiënt is $\frac{14}{7} = 2$.
Om het snijpunt met de y -as te vinden, moet je vanuit $A(3, 7)$ drie eenheden naar links, dus $3 \times 2 = 6$ eenheden omlaag.
 $7 - 6 = 1$, het snijpunt met de y -as is $(0, 1)$.
De formule is $y = 2x + 1$.
 - b** De toename in de horizontale richting is $8 - -2 = 10$ en de toename in de verticale richting is $10 - 5 = 5$.
De richtingscoëfficiënt is $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.
Om het snijpunt met de y -as te vinden, moet je vanuit $C(-2, 5)$ twee eenheden naar rechts, dus $2 \times \frac{1}{2} = 1$ eenheid omhoog.
 $5 + 1 = 6$, het snijpunt met de y -as is $(0, 6)$.
De formule is $y = \frac{1}{2}x + 6$.
 - c** De toename in de horizontale richting is $12 - 7 = 5$ en de toename in de verticale richting is $23 - -7 = 30$.
De richtingscoëfficiënt is $\frac{30}{5} = 6$.
Om het snijpunt met de y -as te vinden, moet je vanuit $E(7, -7)$ zeven eenheden naar links, dus $7 \times 6 = 42$ eenheden omlaag.
 $-7 - 42 = -49$, het snijpunt met de y -as is $(0, -49)$.
De formule is $y = 6x - 49$.

- d** De toename in de horizontale richting is $6 - -2 = 8$ en de toename in de verticale richting is $-6 - -14 = 8$.
De richtingscoëfficiënt is $\frac{8}{8} = 1$.
Om het snijpunt met de y -as te vinden, moet je vanuit $G(-2, -14)$ twee eenheden naar rechts, dus $2 \times 1 = 2$ eenheden omhoog.
 $-14 + 2 = -12$, het snijpunt met de y -as is $(0, -12)$.
De formule is $y = x - 12$.

- V4 a** De toename van de olie is $40 - 15 = 25$ liter.

25 liter olie weegt $46,5 - 24 = 22,5$ kg.

Dus één liter olie weegt $22,5 : 25 = 0,9$ kg.

- b** 40 liter olie weegt $40 \times 0,9 = 36$ kg.

Een leeg vat weegt $46,5 - 36 = 10,5$ kg.

- c** De formule is $G = 0,9a + 10,5$.

- d** $0,9a + 10,5 = 60$

$$0,9a = 49,5$$

$$a = 49,5 : 0,9 = 55$$

De inhoud van een vat is maximaal 55 liter.

- V5 a** De toename in de brandtijd is $100 - 20 = 80$ minuten en de toename in de hoogte is $32 - 48 = -16$ cm.

De richtingscoëfficiënt is $-16 : 80 = -0,2$.

Om het snijpunt met de verticale as te vinden, moet je 20 eenheden naar links, dus $20 \times 0,2 = 4$ cm omhoog.

$48 + 4 = 52$, het snijpunt met de verticale as is $(0, 52)$.

De formule is $H = -0,2t + 52$.

- b** $-0,2t + 52 = 0$

$$-0,2t = -52$$

$$-52 : -0,2 = 260$$

Na 260 minuten is de kaars opgebrand.

- V6 a** De richtingscoëfficiënt van de formule voor tank A is 5,5 en de grafiek door het punt $(0, 120)$. Voor tank A geldt de formule $W = 5,5t + 120$.

De richtingscoëfficiënt van de formule voor tank B is 7 en de grafiek gaat door het punt $(0, 0)$. Voor tank B geldt de formule $w = 7t$.

- b** $7t = 5,5t + 120$

$$1,5t = 120$$

$$t = 120 : 1,5 = 80$$

Na 80 seconden bevatten de tanks evenveel water.

8.1 Toenamedigrammen tekenen

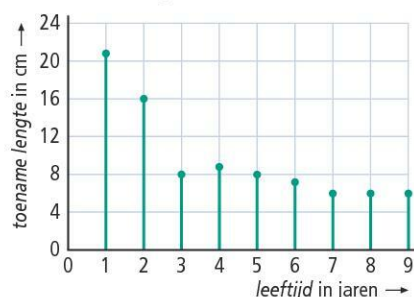
intro Het hoogste punt van de AEX Index vind je als de index niet verder toeneemt. In het diagram is dit het moment dat de staafjes niet meer omhoog getekend zijn maar naar beneden. In het diagram zie je dan dat het hoogste punt bereikt wordt op 5 december.

8 Grafieken en veranderingen

- 1 a** In de rechter grafiek zie je dit terug met een groen staafje van 2 eenheden omhoog getekend bij $t = 7$.
De temperatuur is tussen $t = 6$ en $t = 7$ met 2°C gestegen.
- b** Het betekent dat de temperatuur tussen $t = 5$ en $t = 6$ met $2,5^\circ\text{C}$ is toegenomen.
- c** Een staafje naar beneden getekend betekent dat de temperatuur daalt.
- d** Het betekent dat de temperatuur tussen $t = 3$ en $t = 4$ het sterkst is gedaald.
- e** Om 7.00 uur is de temperatuur 2°C .
Tussen $t = 7$ en $t = 8$ stijgt de temperatuur 2°C , dus om 8.00 uur is het $2 + 2 = 4^\circ\text{C}$.
Tussen $t = 8$ en $t = 9$ stijgt de temperatuur 1°C , dus om 9.00 uur is het $4 + 1 = 5^\circ\text{C}$.

2 a

leeftijd in jaren	0	1	2	3	4	5	6
lengte in cm	57	78	94	102	111	119	126
toename lengte in cm		21	16	8	9	8	7



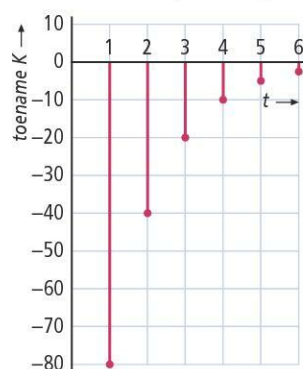
- b** Zie opdracht 2a.
- c** Op z'n negende verjaardag was Phil $126 + 6 + 6 + 6 = 144$ cm.

3 a

t	0	1	2	3	4	5	6
K	160	80	40	20	10	5	2,5

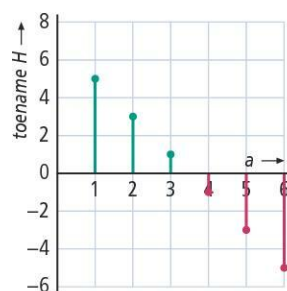
b

t	0	1	2	3	4	5	6
K	160	80	40	20	10	5	2,5
toename K		-80	-40	-20	-10	-5	-2,5



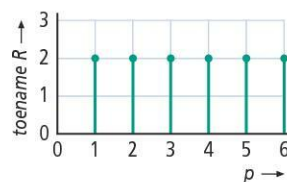
c $H = -a^2 + 6a$

a	0	1	2	3	4	5	6
H	0	5	8	9	8	5	0
toename H		5	3	1	-1	-3	-5

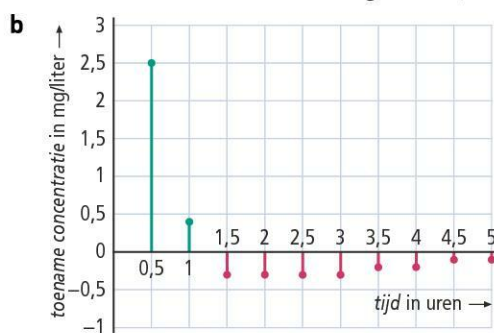


$R = 2p + 1$

p	0	1	2	3	4	5	6
R	1	3	5	7	9	11	13
toename R		2	2	2	2	2	2



4 a tijd in uren	0	0,5	1	1,5	2	2,5
concentratie in mg/liter	0	2,5	3	2,7	2,4	2,1
toename concentratie in mg/liter		2,5	0,4	-0,3	-0,3	-0,3
tijd in uren	3	3,5	4	4,5	5	
concentratie in mg/liter	1,8	1,6	1,4	1,3	1,2	
toename concentratie in mg/liter	-0,3	-0,2	-0,2	-0,1	-0,1	

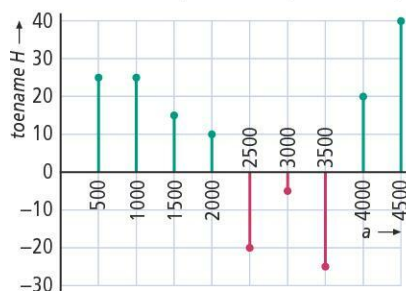


- c Eerst is de grafiek afnemend stijgend, daarna toenemend dalend en daarna afnemend dalend.
- d Tussen $t = 1,5$ en $t = 2,5$ daalt de grafiek het snelst, want bij deze waarden zijn de naar beneden getekende staafjes het langst.

8 Grafieken en veranderingen

5 a

a	0	500	1000	1500	2000
H	1075	1100	1125	1140	1150
toename H		25	25	15	10
a	2500	3000	3500	4000	4500
H	1130	1125	1100	1120	1160
toename H	-20	-5	-25	20	40

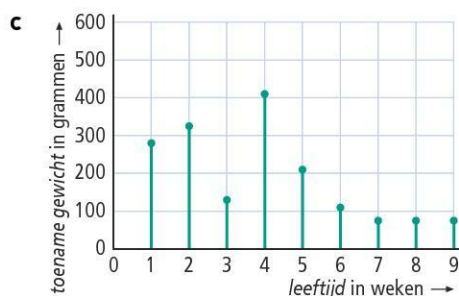


- b** De klim is het steilst tussen $a = 4000$ en $a = 4500$. Daar is het langste staafje dat omhoog getekend is.
- c** In de tabel kun je dat herkennen omdat bij die waarde van a een maximum is. In het toenamediaagram kun je dat herkennen omdat bij die waarde van a een omslag is van stijgen naar dalen.

02 a $520 - 230 = 290$

b

leeftijd in weken	0	1	2	3	4	5	6
gewicht in grammen	230	520	845	975	1385	1595	1700
toename gewicht in grammen		290	325	130	410	210	105



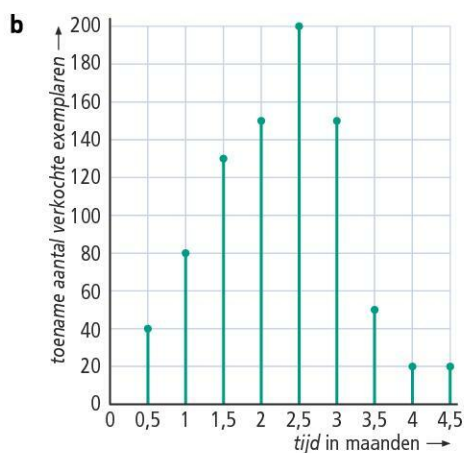
d

leeftijd in weken	7	8	9
gewicht in grammen	1775	1850	1925
toename gewicht in grammen	75	75	75

e $1700 + 3 \times 75 = 1925$

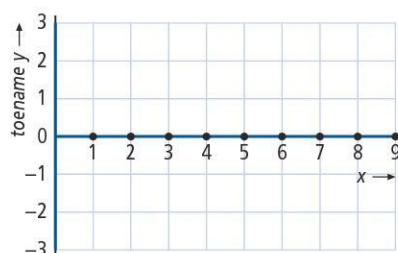
04 a

tijd in maanden	0	0,5	1	1,5	2
aantal verkochte exemplaren	0	40	120	250	400
toename aantal verkochte exemplaren		40	80	130	150
tijd in maanden	2,5	3	3,5	4	4,5
aantal verkochte exemplaren	600	750	800	820	840
toename aantal verkochte exemplaren	200	150	50	20	20

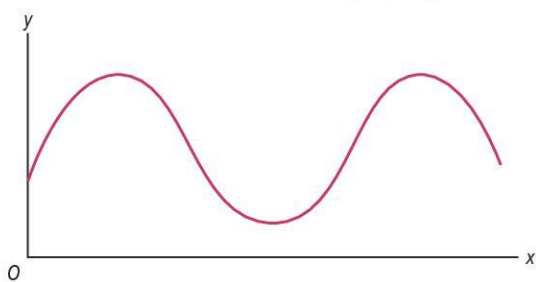


- c** Eerst is er sprake van toenemende stijging, daarna is er sprake van afnemende stijging.
- d** Tussen $t = 2$ en $t = 2,5$, want daar gaat de grafiek het steilst omhoog. In het toenamediagram zie je dit aan het staafje bij $t = 2,5$. Dat staafje is omhoog getekend en is het langst.

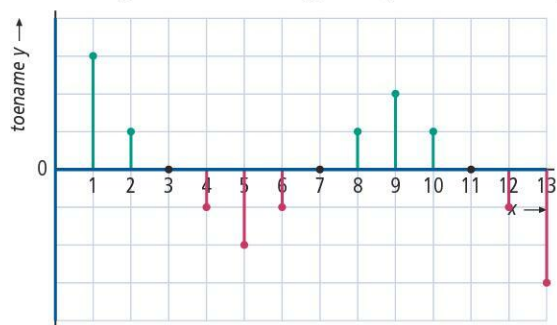
- U1 a** Bij een constante grafiek loopt de grafiek horizontaal. Bij elke stap is de toename dan gelijk aan 0.



- b** Er zijn meerdere mogelijkheden. Je ziet een schets van een mogelijke grafiek.



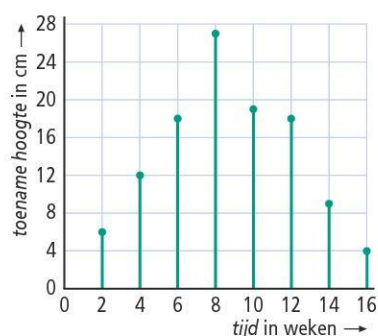
Het toenamediagram gaat dan eerst van positief, naar negatief (een maximum), daarna van negatief naar positief (een minimum) en daarna weer van positief naar negatief (een maximum).



8.2 Werken met toenamediagrammen

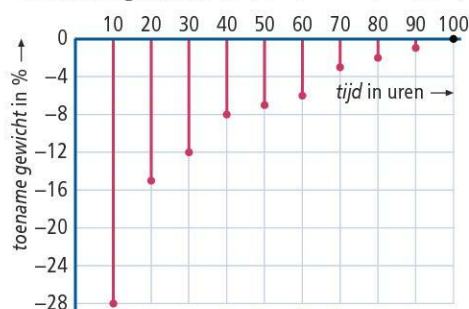
intro Uitspraak A is juist, aangezien het allemaal staafjes zijn die omhoog getekend zijn en steeds langer worden. Joris heeft dus steeds meer gespaard. Uitspraak B is ook juist. Joris heeft $0,50 + 0,75 + 1 + 2 + 2,50 + 2,75 = 9,50$ euro gespaard. Uitspraak C is onjuist. In de eerste week heeft hij het minst gespaard.

6 a tijd in weken	0	2	4	6	8	10	12	14	16
hoogte in cm	12	18	30	48	75	94	112	121	125
toename hoogte in cm		6	12	18	27	19	18	9	4



- b** De staafjes worden eerst langer en na acht weken worden ze weer korter.
c De snelheid waarmee de plant groeit, neemt eerst toe en na acht weken neemt de snelheid waarmee de plant groeit af. Er is dus eerst sprake van toenemende groei, daarna is er sprake van afnemende groei.
- 7 a** De staafjes zijn naar beneden getekend, er is dus sprake van een afname.
b Bij het eerste toenamediagram worden de staafjes steeds minder lang. Dan is er steeds minder daling. Je hebt dan te maken met een afnemende daling. Bij het tweede toenamediagram worden de staafjes steeds langer. Dan is er een steeds sterkere daling. Je hebt dan te maken met een toenemende daling. Bij het derde toenamediagram zijn de staafjes overal even lang. De daling is dan overal even groot. Je hebt dan te maken met een constante daling.

8 a tijd in uren	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
gewicht in %	100	72	57	45	37	30	24	21	19	18	18
toename gewicht in %		-28	-15	-12	-8	-7	-6	-3	-2	-1	0



- b** In de grafiek zie je dat de staafjes naar beneden zijn getekend en steeds minder lang worden. De daling wordt dan steeds minder sterk. Er is dan sprake van afnemende daling.

- c In de loop van de tijd hebben de staafjes in het toenamediaagram lengte nul.
Zo zie je bij $t = 100$ een zwarte stip.
- d De grafiek loopt (ongeveer) horizontaal bij 18%. De bladeren zullen op den duur ongeveer 18% van het oorspronkelijk gewicht hebben.

9 a Eerst zijn de staafjes omhoog getekend en worden de staafjes steeds langer. Er is dan sprake van toenemende stijging. Later worden de staafjes steeds korter maar zijn ze wel omhoog getekend. Er is dan sprake van afnemende stijging. Op het laatst blijven de staafjes even lang en zijn ze omhoog getekend. Er is dan sprake van een contante toename.

b Het is niet bekend hoe groot de wereldbevolking in 1900 is.

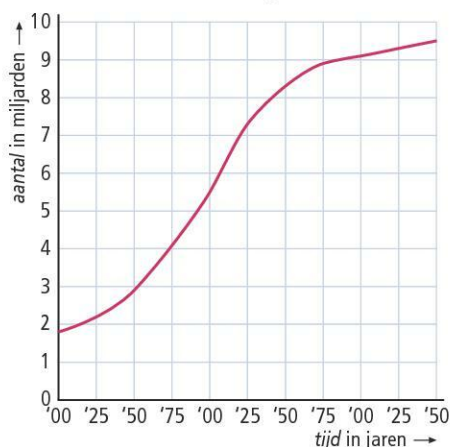
c Tussen 1900 en 1925 steeg de wereldbevolking met 0,4 miljard.

In 1900 waren er $2,2 - 0,4 = 1,8$ miljard mensen.

d Tussen 1925 en 1950 steeg de wereldbevolking met 0,7 miljard.

In 1950 waren er $2,2 + 0,7 = 2,9$ miljard mensen.

e	<i>tijd</i> in jaren	1900	1925	1950	1975	2000	2025
	<i>aantal</i> in miljarden	1,8	2,2	2,9	4,1	5,5	7,3
	<i>toename aantal</i> in miljarden		0,4	0,7	1,2	1,4	1,8
	<i>tijd</i> in jaren	2050	2075	2100	2125	2150	
	<i>aantal</i> in miljarden	8,3	8,9	9,1	9,3	9,5	
	<i>toename aantal</i> in miljarden	1,0	0,6	0,2	0,2	0,2	

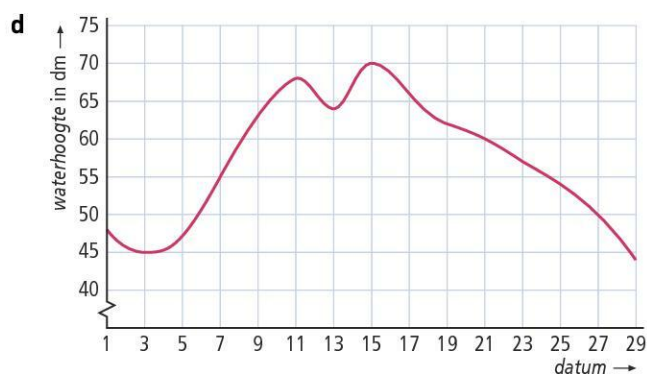


f De wereldbevolking groeit het snelst van 2000 tot en met 2025. Dat zie je in het toenamediaagram, want bij 2025 het langste staafje staat.

10 a Een daling zie je bij de rode staafjes die naar beneden zijn getekend. Tussen 25 april en 29 april wordt deze daling steeds sterker, want de staafjes worden daar steeds langer. Je hebt dan te maken met een toenemende daling.

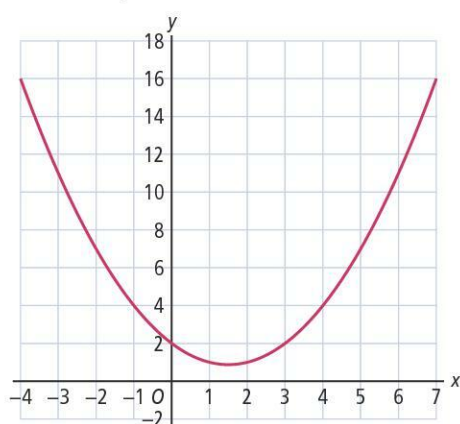
b	<i>datum</i>	1	3	5	7	9	11	13	15
	<i>waterhoogte</i> in dm	48	45	47	55	63	68	64	70
	<i>toename waterhoogte</i> in dm		-3	2	8	8	5	-4	6
	<i>datum</i>	17	19	21	23	25	27	29	
	<i>waterhoogte</i> in dm	66	62	60	57	54	50	44	
	<i>toename waterhoogte</i> in dm	-4	-4	-2	-3	-3	-4	-6	

c De grootste gemeten waterhoogte was 70 dm.



- 11** Er zijn meerdere grafieken mogelijk, want je mist de coördinaten van een punt. Kies daarom bijvoorbeeld het punt $(0, 2)$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
y	16	11	7	4	2	1	1	2	4	7	11	16
toename y		-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5



- 010 a** Tussen 7 januari en 11 januari zijn de staafjes naar beneden getekend, dus er was een afname. Je ziet ook dat de rode staafjes steeds langer worden. De afname werd ook steeds sterker. De sneeuwhoogte daalde dus steeds sneller.

- b** Tussen 7 januari en 8 januari daalde de sneeuwhoogte 2 cm.

Op 8 januari was de sneeuwhoogte $123 - 2 = 121$ cm.

- c** Op 6 januari was de sneeuwhoogte $123 - 8 = 115$ cm.

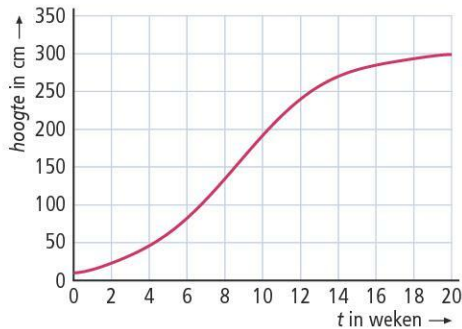
d dag	1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1
sneeuwhoogte in cm	100	99	98	104	111	115
toename sneeuwhoogte in cm		-1	-1	6	7	4
dag	7/1	8/1	9/1	10/1	11/1	
sneeuwhoogte in cm	123	121	118	113	106	
toename sneeuwhoogte in cm	8	-2	-3	-5	-7	

- e** De grootste gemeten sneeuwhoogte was 123 cm.

U2 a

<i>t</i> in weken	0	2	4	6	8	10
hoogte in cm	10	23	46	84	136	194
toename hoogte in cm		13	23	38	52	58

<i>t</i> in weken	12	14	16	18	20
hoogte in cm	242	270	285	293	298
toename hoogte in cm	48	28	15	8	5



- b** Er is eerst een toenemende stijging en daarna een afnemende stijging. Als je dat in beeld brengt, heeft de grafiek de vorm van een ‘S-curve’.

c Invoer: $y1 = \frac{300}{1 + 29 \times 0,67^x}$

Venster: *x* van 0 tot 20 en *y* van 0 tot 350

Optie: tabel

<i>x</i>	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
<i>y</i>	10	21	44	83	138	196	242	271	286	294	297

De waarden in deze tabel kloppen ongeveer met de waarden van de tabel van opdracht a.

8.3 Gemiddelde verandering

intro De eerste tien minuten rende Roos met een constante snelheid. In de 40 minuten daarna rende Roos ook met een constante snelheid, maar wel langzamer dan tijdens de eerste tien minuten. Haar gemiddelde snelheid was de eerste tien minuten steeds hetzelfde en werd na tien minuten steeds iets lager.

- 12 a** Bij $t = 0$ is de waterhoogte 50 cm en bij $t = 1$ is de waterhoogte 56 cm. Gedurende de eerste dag nam de waterhoogte met $56 - 50 = 6$ cm toe.

- b** Bij $t = 7$ is de waterhoogte 125 cm.
In deze periode nam de waterhoogte met $125 - 50 = 75$ cm toe.
Dat is gemiddeld $75 : 7 \approx 10,7$ cm per dag.

- c** Bij $t = 10$ is de waterhoogte 96 cm.
In deze periode was de toename van de waterhoogte $96 - 125 = -29$ cm.
De gemiddelde toename was $-29 : 3 \approx -9,7$ cm per dag.

- d** Het betreft een afname van de waterhoogte van 9,7 cm.
Je kunt dit ook zien als een toename van $-9,7$ cm.

- e** Bij $t = 5$ en $t = 8$ was de waterhoogte 120 cm.
In deze periode was de toename van de waterhoogte $120 - 120 = 0$ cm.
Daardoor was de gemiddelde toename 0 cm per dag, want $0 : 3 = 0$.

8 Grafieken en veranderingen

- 13 a** Bij 10.00 uur geldt $t = 2$ en is de temperatuur $13\text{ }^{\circ}\text{C}$.
Bij 14.00 uur geldt $t = 6$ en is de temperatuur $18\text{ }^{\circ}\text{C}$.
 Δt is dan $6 - 2 = 4$ en ΔT is dan $18 - 13 = 5$.
De gemiddelde verandering is $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{5}{4} = 1,25\text{ }^{\circ}\text{C}$ per uur.
- b** Bij 14.00 uur geldt $t = 6$ en is de temperatuur $18\text{ }^{\circ}\text{C}$.
Bij 18.00 uur geldt $t = 10$ en is de temperatuur $10\text{ }^{\circ}\text{C}$.
 Δt is dan $10 - 6 = 4$ en ΔT is dan $10 - 18 = -8$.
De gemiddelde verandering is $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{-8}{4} = -2\text{ }^{\circ}\text{C}$ per uur.
- c** Het antwoord is negatief omdat de temperatuur na 14.00 uur is gedaald.
- 14 a** Op 16 augustus was de stand van de AEX gelijk aan 556.
Op 24 augustus was de stand van de AEX gelijk aan 560.
In 8 dagen tijd is de stand $560 - 556 = 4$ punten gestegen.
De gemiddelde verandering was $4 : 8 = 0,5$ punt per dag.
- b** Op 3 september was de stand van de AEX gelijk aan 560.
Augustus heeft 31 dagen.
3 september is $15 + 3 = 18$ dagen na 16 augustus.
In 18 dagen is de stand $560 - 556 = 4$ punten gestegen.
De gemiddelde verandering was $4 : 18 \approx 0,22$ punt per dag.
- c** Op 24 augustus was de stand van de AEX gelijk aan 560.
Op 6 september was de stand van de AEX gelijk aan 539.
In $8 + 5 = 13$ dagen is de stand $560 - 539 = 21$ punten gedaald.
De gemiddelde verandering was $-21 : 13 \approx -1,6$ punt per dag.
- 15 a** Marja heeft haar fietstocht over het hele traject met dezelfde snelheid gereden.
- b** Jasper fietste eerst een stuk met constante snelheid en later ging hij steeds langzamer fietsen.
- c** De afgelegde afstand was 15 km en daar hebben ze 2,5 uur over gedaan.
De gemiddelde snelheid is voor beide $45 : 2,5 = 18\text{ km}$ per uur.
- d** Marja fietste twee uur na het begin harder dan Jasper. De grafiek van Marja loopt bij twee uur steiler dan de grafiek van Jasper.
- e** Na ongeveer 1,5 uur fietsten ze even snel, want daar is de helling van de grafieken even steil.
- 16 a** De grafiek is toenemend stijgend. Dus elke seconde legde de auto steeds meer meters af. Dat betekent dat de auto steeds harder ging rijden.
- b**
- | | | | | | | | | | | | |
|-----|---|-----|-----|-----|------|----|------|------|------|------|----|
| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| S | 0 | 0,8 | 3,2 | 7,2 | 12,8 | 20 | 28,8 | 39,2 | 51,2 | 84,8 | 80 |
- c** $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{20 - 0}{5 - 0} = 4\text{ m/s}$
- d** $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{80 - 20}{10 - 5} = 12\text{ m/s}$
- e** $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{80 - 78,408}{10 - 9,9} = 15,92\text{ m/s}$
- f** In 0,1 seconde zal de snelheid niet veel veranderen. De snelheid tussen 9,9 en 10 seconden is dus een goede benadering van de snelheid na 10 seconden.

013 a Bij 15.00 uur is drie uur na 12.00 uur. Dus bij 15.00 uur hoort $t = 3$.

b Om 12.00 uur is de temperatuur van Josje 38°C .
Om 15.00 uur is haar temperatuur $39,5^\circ\text{C}$.
Haar temperatuur is $39,5 - 38 = 1,5^\circ\text{C}$ gestegen.

c Het tijdsverschil is 3 uur, dus $\Delta t = 3$.
Het temperatuurverschil is $1,5^\circ\text{C}$, dus $\Delta T = 1,5$.

d $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{1,5}{3} = 0,5^\circ\text{C}$ per uur.

e Bij $t = 4$ geldt $T = 39,5^\circ\text{C}$.
Bij $t = 8$ geldt $T = 37^\circ\text{C}$.
Dus $\Delta t = 8 - 4 = 4$ en $\Delta T = 37 - 39,5 = -2,5$.
De gemiddelde verandering is $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{-2,5}{4} = -0,625^\circ\text{C}$ per uur.

f De gemiddelde verandering is een negatieve waarde.

U3 In de tabel zie je de tijdverschillen per 10 meter.

<i>aantal meters vanaf de start</i>	<i>aantal seconden na de start</i>	<i>tijdverschil in seconden</i>
0	0	
10	1,88	1,88
20	2,96	1,08
30	3,88	0,92
40	4,77	0,89
50	5,61	0,84
60	6,46	0,85
70	7,30	0,84
80	8,13	0,83
90	9,00	0,87
100	9,86	0,86

De snelste tijd van Lewis over 10 meter was 0,83 seconden.

De gemiddelde snelheid was $\frac{10}{0,83} \approx 12,048...$ meter per seconde.

Dat is ongeveer $12,048... \times 3,6 = 43,4$ km per uur.

8.4 Interpoleren

intro Bernd zou het gemiddelde kunnen uitrekenen van de waarden bij 2006 en 2010.

Het door hem berekende aantal zal waarschijnlijk te hoog zijn, omdat de grafiek tussen 2006 en 2010 ook een stukje daalt.

17 a Om 20.15 uur deed Matthijs de kachel aan. De temperatuur was toen 14°C .

b Om 19.55 uur was de temperatuur ongeveer $14,5^\circ\text{C}$ en om 20.20 uur was de temperatuur ongeveer $14,2^\circ\text{C}$.

c De schatting bij 19.55 uur is betrouwbaarder omdat dat dicht bij 20.00 uur is en dat punt is goed af te lezen.

8 Grafieken en veranderingen

18 a

<i>tijd in jaren</i>	<i>aantal doden</i>	<i>toename</i>
1970	3516	
1975	3005	−511
1980	2521	−484
1985	1997	−524
1990	1477	−520

De toename is redelijk gelijkmatig, namelijk elke vijf jaar ongeveer 500 doden minder.

b

<i>tijd in jaren</i>	<i>aantal gewonden</i>	<i>toename</i>
1970	64034	
1975	62171	−1863
1980	59979	−2192
1985	56623	−3356
1990	48450	−8173

De toename bij het aantal gewonden is niet gelijkmatig, het aantal gewonden neemt steeds sterker af.

c In 1985 waren er 1997 verkeersdoden en in 1990 waren er 1477 verkeersdoden. In vijf jaar tijd zijn waren $1997 - 1477 = 520$ minder verkeersdoden.

d Het aantal verkeersdoden nam gemiddeld $520 : 5 = 104$ per jaar af.

e

<i>tijd in jaren</i>	1985	1986	1987	1988	1989	1990
<i>aantal doden</i>	1997	1893	1789	1685	1581	1477

f Het aantal gewonden nam niet gelijkmatig af. Het is dan lastig te berekenen hoeveel de afname per jaar is.

19 a Om 19.45 uur was de temperatuur $14,7^{\circ}\text{C}$ en om 20.00 uur was de temperatuur $14,4^{\circ}\text{C}$. Het verschil is $14,7 - 14,4 = 0,3^{\circ}\text{C}$.

b Tussen deze tijdstippen zit 15 minuten.

c De gemiddelde verandering was $0,3 : 15 = 0,02^{\circ}\text{C}$ per minuut.

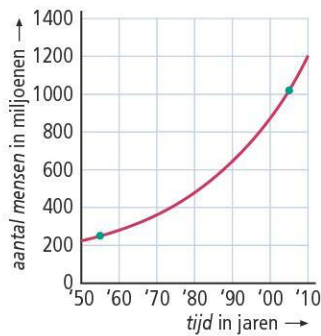
d Een schatting van de temperatuur om 19.55 uur is $14,7 + 10 \times -0,02 = 14,5^{\circ}\text{C}$.

20 Het aantal inwoners in 1998 is $71\,000 + 8 \times 7176,5 = 128\,412$.

21 a De toename van het aantal inwoners was in die periode $525 - 489 = 36$ duizend.
De lengte van de periode is 7 jaar.
De gemiddelde toename was $36 : 7 \approx 5,14$ duizend per jaar.
In 2012 waren er in Den Haag $489 + 2 \times 5,14 \approx 499$ duizend inwoners.

b 1968
De toename van het aantal inwoners was in die periode $551 - 606 = -55$ duizend.
De lengte van de periode is 10 jaar
De gemiddelde toename was $-55 : 10 = -5,5$ duizend inwoners per jaar.
In 1968 waren er in Den Haag $606 - 8 \times 5,5 = 562$ duizend inwoners.
1983
De toename van het aantal inwoners was in die periode $441 - 456 = -15$ duizend.
De lengte van de periode is 10 jaar.
De gemiddelde toename was $-15 : 10 = -1,5$ duizend inwoners per jaar.
In 1983 waren er in Den Haag $456 - 3 \times 1,5 = 451,5$ duizend inwoners.

22 a



b 1955

De toename van het aantal mensen was in die periode
 $280 - 224 = 56$ miljoen.

De lengte van de periode is 10 jaar.

De gemiddelde toename was $56 : 10 = 5,6$ miljoen mensen per jaar.

In 1955 waren er $224 + 5 \times 5,6 = 252$ miljoen mensen.

2005

De toename van het aantal mensen was in die periode

$1203 - 872 = 331$ miljoen.

De lengte van de periode is 10 jaar.

De gemiddelde toename was $331 : 10 = 33,1$ miljoen mensen per jaar.

In 2005 waren er $872 + 5 \times 33,1 = 1037,5$ miljoen mensen.

c Zie opdracht 22a.

d De toename van het aantal mensen was tussen 2000 en 2010 sterk aan het toenemen. Je weet dus niet meer precies hoeveel mensen er per jaar bij zijn gekomen.

021 a De toename is $15,7 - 15,2 = 0,5$ miljard kilometer.

b De lengte van de periode is 5 jaar.

c De gemiddelde verandering is $0,5 : 5 = 0,1$ miljard kilometer per jaar.

d Het aantal reizigerskilometers in 2003 is $15,2 + 3 \times 0,1 = 15,5$ miljard.

e 2007

De toename was $14,6 - 15,7 = -1,1$ miljard kilometer.

De lengte van de periode is 5 jaar.

De gemiddelde verandering was $-1,1 : 5 = -0,22$ miljard kilometer per jaar.

In 2007 was het aantal reizigerskilometers $15,7 - 2 \times 0,22 = 15,26$ miljard.

2014

De toename was $15,8 - 14,6 = 1,2$ miljard kilometer.

De lengte van de periode is 5 jaar.

De gemiddelde verandering was $1,2 : 5 = 0,24$ miljard kilometer per jaar.

In 2014 was het aantal reizigerskilometers $14,6 + 4 \times 0,24 = 15,56$ miljard.

U4 a De toename van het gewicht tussen de lengten 85 cm en 108 cm was
 $18,3 - 12,1 = 6,2$ kg.

Het lengteverschil is $108 - 85 = 23$ cm.

De gemiddelde verandering per cm was $6,2 : 23 = 0,269... \text{ kg}$.

Het gewicht bij een lengte van 100 cm was $1,2 + 15 \times 0,269... \approx 16 \text{ kg}$.

b Het gewicht 30 kg zit tussen de leeftijd van 6 en 10 jaar oud.

De toename van haar leeftijd was $10 - 6 = 4$ jaar.

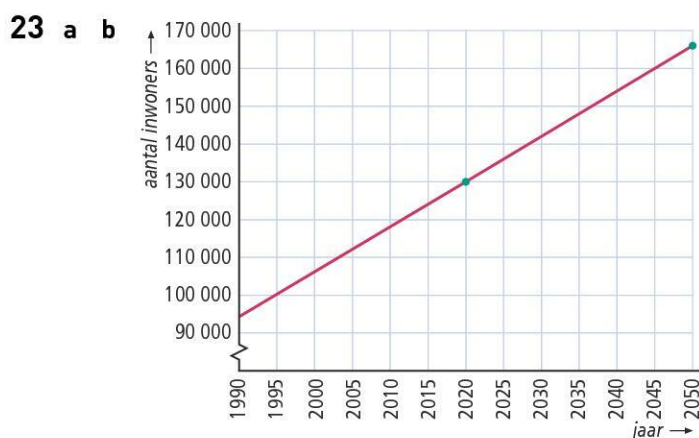
De toename in gewicht is $32,8 - 18,3 = 14,5 \text{ kg}$.

De gemiddelde verandering per kg was $4 : 14,5 = 0,275... \text{ jaar}$.

Haar leeftijd bij een gewicht van 30 kg was $6 + 11,7 \times 0,276 \approx 9 \text{ jaar}$.

8.5 Extrapoleren

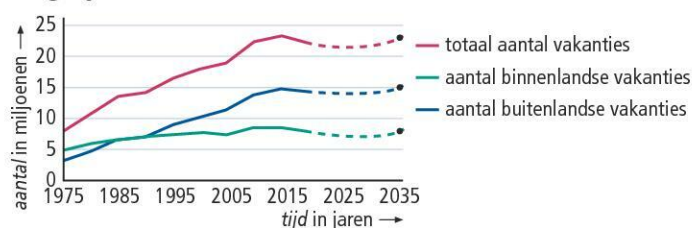
intro De kruisjes lijken de middelste groeicurve te volgen. De baby zal na 12 maanden dan ongeveer 9 kg wegen.



- c** Zie opdracht 23a.
In 2020 is het aantal inwoners naar verwachting 130 000.
In 2050 is het aantal inwoners naar verwachting 166 000.
- d** Het duurt nog een tijd voordat het 2050 is. Voorspellingen voor ver in de toekomst zijn onzeker.

- 24 a** Eerst is er sprake van toenemende stijging, maar na 2005 is er afnemende stijging.
- b** De meest positieve prognose geeft een levensverwachting van 71 jaar.
De meest negatieve prognose geeft een levensverwachting van 66,5 jaar.
De prognose daar tussen in geeft een levensverwachting van 69 jaar.
- c** De meest negatieve prognose volgt beter het verloop van de grafiek voor 2015. Op basis daarvan is deze prognose het meest waarschijnlijk.
- d** Volgens de meest negatieve prognose is in 2015 de levensverwachting van een 15-jarige man 66,2 jaar.

- 25 a** Afhankelijk van hoe je de grafieken verlengt, zijn er meerdere antwoorden mogelijk.



Het aantal binnenlandse vakanties in 2035 is naar verwachting 8 miljoen.
Het aantal buitenlandse vakanties in 2035 is naar verwachting 15 miljoen.
Het totaal aantal vakanties in 2035 is naar verwachting 23 miljoen.

- b** De toename van het aantal vakanties was $23,3 - 8,1 = 15,2$ miljoen.
De lengte van de periode is 35 jaar.
De gemiddelde verandering was $15,2 : 35 \approx 0,43$ miljoen vakanties per jaar.
- c** De formule is $V = 0,43t + 8,1$.
- d** In 2035 zijn er $0,43 \times 60 + 8,1 = 33,9$ miljoen vakanties.
- e** Bij opdracht a heb je rekening gehouden met de schommelingen van de grafiek. Bij opdracht d ben je uit gegaan van het stijgend lineair verband tussen 1975 en 2010.

f $0,43t + 8,1 = 40$

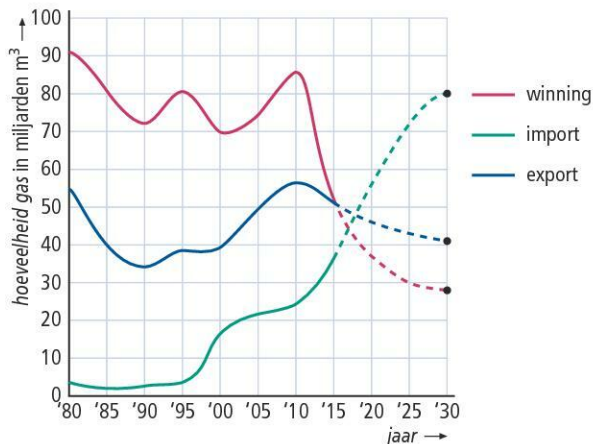
$0,43t = 31,9$

$t = 31,9 : 0,43 = 74,1\dots$

Na ongeveer 74 jaar, dus in 2049, is het aantal vakanties volgens de formule voor het eerst meer van 40 miljoen.

- g Het antwoord van opdracht f is niet betrouwbaar, want je houdt geen rekening met de schommelingen van de grafieken.

26 a



- b Afhankelijk van hoe je de grafieken verlengt, zijn er meerdere antwoorden mogelijk. Zie opdracht 26a.

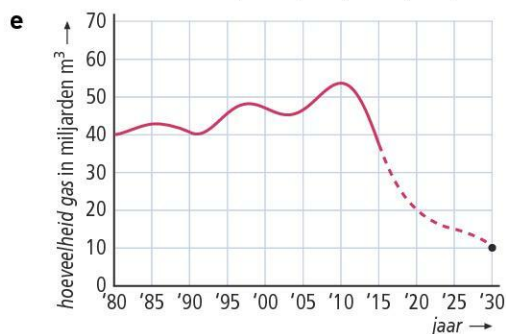
In 2030 is naar verwachting de winning 28 miljard m^3 .

In 2030 is naar verwachting de import 80 miljard m^3 .

In 2030 is naar verwachting de export 41 miljard m^3 .

- c In 1980 werd 90,9 miljard m^3 aardgas gewonnen en 3,8 miljard m^3 geïmporteerd. In totaal kwam er $90,9 + 3,8 = 94,7$ miljard m^3 gas binnen. Vervolgens werd 54,7 miljard m^3 gas geëxporteerd. Er werd dan $94,7 - 54,7 = 40,0$ miljard m^3 gas verbruikt.

d jaar	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010	2015
verbruik in m^3	40,0	42,8	40,6	45,7	47,0	46,6	53,6	37,4

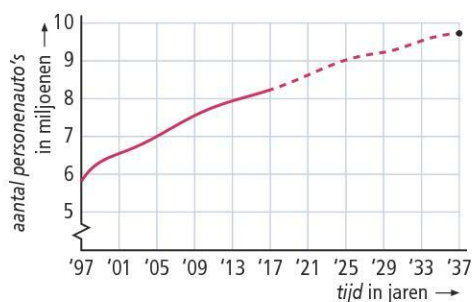


Afhankelijk van hoe je de grafiek verlengt, zijn er meerdere antwoorden mogelijk.

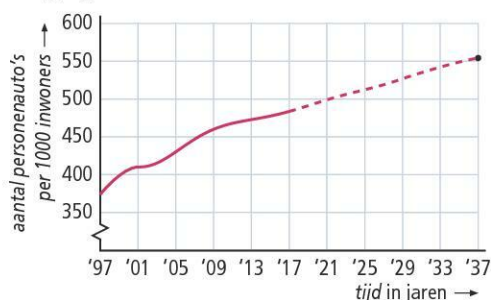
In 2030 is naar verwachting het verbruik 10 miljard m^3 .

- f Door het wetsvoorstel zal het verbruik na 2018 steeds verder gaan afnemen. Als je daar nog geen rekening mee had gehouden bij het verlengen van de grafiek, is je voorspelling bij opdracht e te hoog.

026 a



- b De grafiek stijgt redelijk regelmatig.
- c Afhankelijk van hoe je de grafiek verlengt, zijn er meerdere antwoorden mogelijk. Zie opdracht O26a.
In 2037 zijn er naar verwachting 9,7 miljoen personenauto's.
- d Afhankelijk van hoe je de grafiek verlengt, zijn er meerdere antwoorden mogelijk.



In 2037 zijn er naar verwachting ongeveer 550 personenauto's per 1000 inwoners.

U5

Ga bij beide prognoses uit van de eerste en de laatste waarde in de tabel.
De gemiddelde verandering was $(588 - 415) : 35 = 4,94\dots$ inwoners per jaar.
In 2030 is de bevolkingsdichtheid $415 + 50 \times 4,94\dots \approx 662$ inwoners.
De groeifactor per 35 jaar is $588 : 415 = 1,41\dots$
De groeifactor per jaar is $1,41\dots^{\frac{1}{35}} = 1,01\dots$
In 2030 is de bevolkingsdichtheid $415 \times 1,01\dots^{50} \approx 683$ inwoners.
Het verschil tussen de prognoses is $683 - 662 = 21$ inwoners.

8.6 Trendlijn

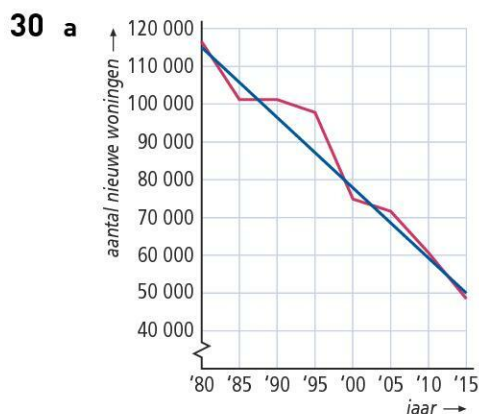
intro De maker van de grafiek wil benadrukken dat de gemiddelde jaartemperatuur in de loop van jaren over het algemeen is gestegen.
In de periode 1954 tot 2014 is de gemiddelde jaartemperatuur $10,9 - 8,8 = 2,1$ °C gestegen.
Dat is een gemiddelde verandering van $2,1 : 60 = 0,035$ °C per jaar.
In 2024 is de gemiddelde jaartemperatuur $10,9 + 10 \times 0,035 = 11,25$ °C.

- 27 a** Johan heeft geen gelijk, want er zijn ook perioden waarin de benzineprijs is gedaald.
- b In 8 maanden tijd was de toename $1,69 - 1,56 = 0,13$ euro.
De gemiddelde toename was $0,13 : 8 = 0,01625$ euro per maand.
De formule is $P = 0,01625t + 1,56$.
- c Voor 1 december geldt $t = 11$.
 $0,01625 \times 11 + 1,56 = 1,73875$
De verwachte literprijs is ongeveer 1,74 euro.

- d Voor 1 januari 2020 geldt $t = 24$.
 $0,01625 \times 24 + 1,56 = 1,95$
 De verwachte literprijs is 1,95 euro. Deze datum ligt verder in de toekomst en dus is deze schatting niet zo betrouwbaar, zeker niet omdat de prijs vaak schommelt.

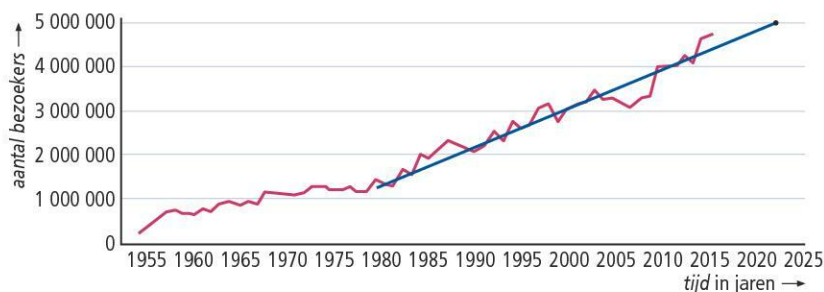
- 28 a Van 2013 tot 2020 nam het aantal jeugdleden $154 - 140 = 14$ af.
 De gemiddelde afname was $14 : 7 = 2$ jeugdleden per jaar.
 Het aantal jeugdleden in 2021 is $140 - 2 = 138$.
- b In de grafiek lees je af dat er in 2019 in totaal 148 jeugdleden waren.
 De penningmeester voorspelde $154 - 4 \times 2 = 146$ jeugdleden.
 Er is dus een verschil van 6 jeugdleden.
 Zijn voorspelling week $\frac{6}{148} \times 100\% \approx 4,1\%$ af.

- 29 a Je mag de stippen in de grafiek niet verbinden omdat er op tussenliggende momenten geen waarnemingen zijn gedaan van het aantal olieslachtoffers.
 De stippen van de grafiek zijn toch met elkaar verbonden om de ontwikkeling van het aantal olieslachtoffers beter zichtbaar te maken.
- b In 30 jaar tijd is het percentage $100 - 70 = 30$ gedaald.
 De gemiddelde verandering was $-30 : 30 = -1$ procent per jaar.
 De formule van de trendlijn is $O = -t + 100$.
- c $-t + 100 = 40$
 $-t = -60$
 $t = 60$
 In 2030 zal het percentage aangespoelde jan-van-genten nog maar 40% zijn van het aantal uit 1970.



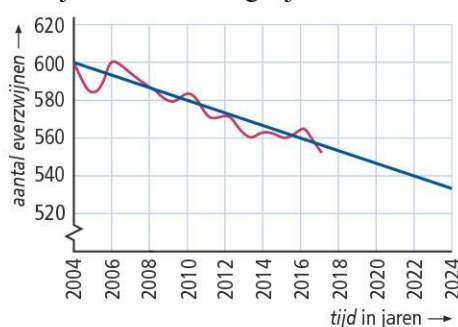
- b Er zijn meerdere mogelijkheden.
 Zie opdracht 30a.
- c Er zijn meerdere mogelijkheden. De werkwijze is:
 De getekende trendlijn gaat door de punten $(0, 115\,000)$ en $(35, 50\,000)$.
 In 35 jaar tijd nam het aantal nieuwe woningen $115\,000 - 50\,000 = 65\,000$ af.
 De gemiddelde verandering was $65\,000 : 35 = 1857,1\ldots$ woningen per jaar.
 De formule van de trendlijn is $A = -1857t + 115\,000$.
- d Het jaar 2030 komt overeen met $t = 50$.
 $-1857,1\ldots \times 50 + 115\,000 = 22\,142,8\ldots$
 Naar verwachting zijn er in 2030 in totaal 22 143 nieuwe woningen.
- e $-1857,1\ldots t + 115\,000 = 30\,000$
 $-1857,1\ldots t = -85\,000$
 $t = -85\,000 : -1857,1\ldots = 45,7\ldots$
 Na 46 jaar, dus in 2026, worden er voor het eerst minder dan 30 000 nieuwe woningen gebouwd.

- 31 a** In 2010 waren er voor het eerst meer dan vier miljoen bezoekers.
b Het bezoekersaantal neemt sterk toe in 1996, 2009 en 2014.
 Dit zou kunnen zijn vanwege het openen van een nieuwe attractie in het park. Ook het mooie weer kan een rol spelen bij toenemende bezoekersaantallen.
c Er zijn meerdere mogelijkheden.



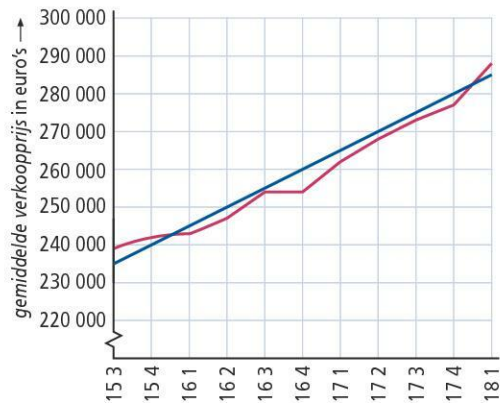
- d** Zie opdracht 31c.
 In 2022 zal het bezoekersaantal van 5 miljoen voor het eerst worden gehaald.
e Het bezoekersaantal van 5 miljoen is eerder gehaald als voorspeld met de trendlijn. Dat betekent dat het aantal bezoekers na 2000 naar verhouding sneller toenam dan in de periode 1980 tot 2000.

- 030 a** Er zijn meerdere mogelijkheden.



- b** In 2014 was het aantal everzwijnen gelijk aan 600.
c In 6 jaar tijd nam het aantal everzwijnen $600 - 580 = 20$ af.
 $-20 : 6 = -3,33\dots$
 De gemiddelde verandering was ongeveer $-3,33$ everzwijn per jaar.
d De formule van de trendlijn is $E = -3,33t + 600$.
e Voor het jaar 2024 geldt $t = 20$.
 In 2024 zijn er dan naar verwachting $-3,33\dots \times 20 + 600 \approx 533$ everzwijnen.
f $-3,33\dots t + 600 = 500$
 $-3,33\dots t = -100$
 $t = -100 : -3,33\dots = 30$
 Na 30 jaar, dus in 2034, zal het aantal everzwijnen naar verwachting minder dan 500 zijn.

U6 a Er zijn meerdere mogelijkheden.



De trendlijn gaat door de punten (154, 240 000) en (162, 250 000).

De toename in 2 kwartalen was $250\,000 - 240\,000 = 10\,000$ euro.

De gemiddelde verandering was $10\,000 : 2 = 5\,000$ euro per kwartaal.

Het startgetal is $240\,000 - 5\,000 = 235\,000$.

De formule van de trendlijn $V = 5000t + 235\,000$.

b $5000t + 235\,000 = 350\,000$

$$5000t = 115\,000$$

$$t = 115\,000 : 5000 = 23$$

23 kwartalen na 153 is de gemiddelde verkoopprijs van een huis voor het eerst 350 000 euro.

Dat is in 212, dus in 2021 kwartaal 2.

c Ga weer uit van de punten die je bij opdracht a hebt gebruikt.

De groeifactor per 2 kwartalen is $250\,000 : 240\,000 = 1,04 \dots$

De groeifactor per kwartaal is $1,04 \dots^{\frac{1}{2}} \approx 1,02 \dots$

De beginhoeveelheid is $240\,000 : 1,02 \dots = 235\,151,015 \dots$

De formule voor de trendlijn wordt dan $V = 235\,151,02 \cdot 1,02^t$.

$$235\,151,02 \cdot 1,02^t = 350\,000$$

Invoer: $y_1 = 235\,151,02 \times 1,02^x$ en $y_2 = 350\,000$

Venster: x van 0 tot 30 en y van 0 tot 400 000

Optie: snijpunt

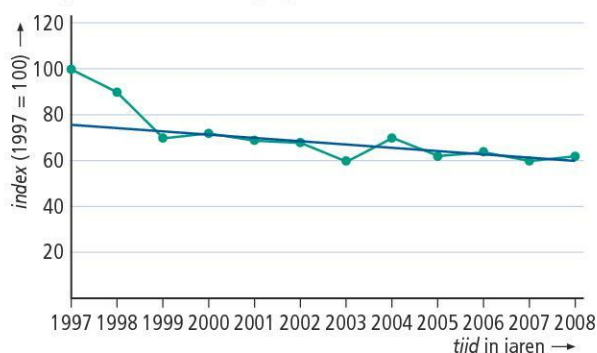
Oplossing: (20,08...; 350 000)

Na 20 kwartalen, dus in 2020 kwartaal 3 is de gemiddelde verkoopprijs van een huis voor het eerst 350 000 euro.

8.7 Gemengde opdrachten

- 32 a** In 1999 waren er $140\,000 : 100 \times 70 = 98\,000$ hazen in Nederland.
In 2007 waren er $140\,000 : 100 \times 60 = 84\,000$ hazen in Nederland.

b Er zijn meerdere mogelijkheden.



Als je de aantallen van 2000 en 2008 gebruikt, dan was er in 8 jaar een afname van $66 - 60 = 6$ procent.

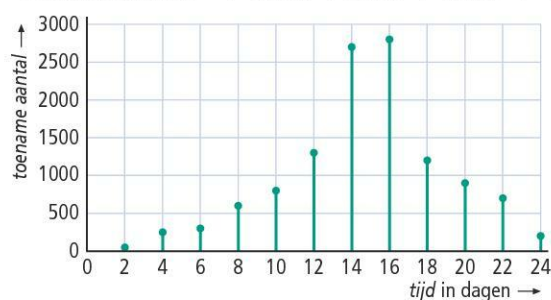
De gemiddelde verandering was $-6 : 8 = -0,75$ procent per jaar.

De formule van de trendlijn is $A = -0,75t + 66$.

- c** Nee, in de grafiek kun je zien dat na 1999 het aantal hazen nauwelijks meer afnam.

- 33 a** De grafiek lijkt te naderen tot 12 000. Er zullen maximaal 12 000 mensen ziek worden.

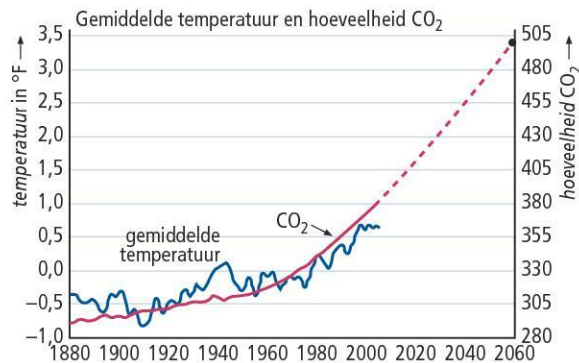
b tijd in dagen	0	2	4	6	8	10	12
aantal	0	50	300	600	1200	2000	3300
toename aantal		50	250	300	600	800	1300
tijd in dagen	14	16	18	20	22	24	
aantal	6000	8800	10000	10900	11600	11800	
toename aantal	2700	2800	1200	900	700	200	



- c** Op dag 16 heeft het toenamediaqram een maximum.
- d** Van dag 14 tot en met dag 16 stijgt de grafiek het snelst, dus daar zal het toenamediaqram een maximum hebben.
- e** De groeifactor per 10 dagen is $6000 : 300 = 20$.
De groeifactor per dag is $20^{\frac{1}{10}} \approx 1,35$.
Het aantal mensen met griep nam per dag met $1,35 \times 100 - 100 = 35\%$ toe.

Onderzoeksoopdrachten

- 34 a** De grafieken suggereren een samenhang tussen de hoeveelheid CO_2 en de stijging van de temperatuur. Maar het hoeft niet zo te zijn. Je zou ook een grafiek over de gemiddelde lengte van Nederlanders en de hoeveelheid CO_2 kunnen maken. Dat laat hetzelfde beeld zien, maar een verband is niet waarschijnlijk.
- b** Afhankelijk van hoe je de grafiek verlengt, zijn er meerdere antwoorden mogelijk.



In 2059 bereikt de hoeveelheid CO_2 in de atmosfeer de waarde 500.

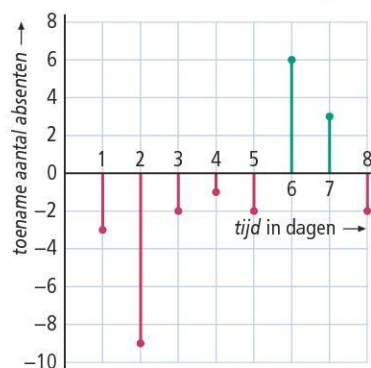
- 35** In de grafiek is te zien dat de toename van het aantal besmette bedrijven in de eerste en laatste weken het minst is. In de weken er tussen in is er een sterkere toename te zien. Je zoekt dus een toenamediaagram die in het midden langere staafjes heeft en aan het begin en aan het eind kortere staafjes heeft. Toenamediaagram A past bij de grafiek.

Samenvatting

- S1 a** In 9 maanden tijd was de toename $220 - 130 = 90$ euro.
De gemiddelde verandering was $90 : 9 = 10$ euro per maand.
De formule is $S = 10t + 130$.
- b** 1 juli 2020 is 18 maanden na 1 januari 2019.
Het spaartegoed is dan $18 \times 10 + 130 = 310$ euro.

S2

<i>tijd in dagen</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8
<i>aantal absentes</i>	17	14	5	3	2	0	6	9	7
<i>toename aantal absentes</i>		-3	-9	-2	-1	-2	6	3	-2

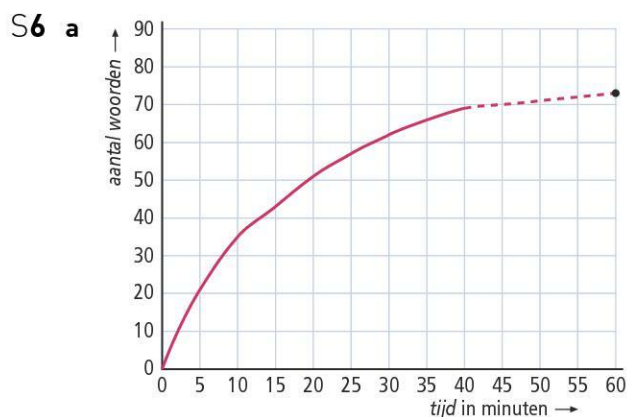


8 Grafieken en veranderingen

- S3 a** De staafjes zijn naar beneden getekend, je hebt dus te maken met een daling. De staafjes worden steeds langer. Je hebt dan te maken met een toenemende daling.
- b** Dit betekent dat in deze periode het aantal klanten steeds sterker afneemt.
- c** Op tijdstip $t = 4$ zijn de meeste klanten in de winkel. Daarna is er een daling te zien en zal het aantal klanten afnemen.
- d** Na $t = 4$ zijn er achtereenvolgens 2, 3 en 6 klanten minder.
Het aantal klanten bij $t = 7$ is $96 - 2 - 3 - 6 = 85$.
Tussen $t = 0$ en $t = 4$ is het aantal klanten achtereenvolgens met 10, 8, 4 en 2 toegenomen.
Het aantal klanten bij $t = 0$ was $96 - 2 - 4 - 8 - 10 = 72$.

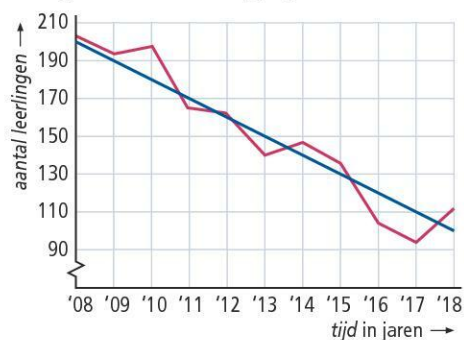
- S4 a** Er geldt $\Delta t = 5 - 2 = 3$ en $\Delta A = 1000 - 475 = 525$.
De gemiddelde snelheid is $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{525}{3} = 175$ meter per minuut.
Dit is $175 \times 60 : 1000 = 10,5$ km per uur.
- b** Dan geldt $\Delta t = 5 - 4 = 1$ en $\Delta A = 1000 - 840 = 160$.
De gemiddelde snelheid is $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{160}{1} = 160$ meter per minuut.
Dit is $160 \times 60 : 1000 = 9,6$ km per uur.
- c** De snelheid van Teun neemt tijdens de hardloopwedstrijd af.

- S5 a** Aileen heeft tussen 60 minuten en 90 minuten $8,5 - 5,7 = 2,8$ km gelopen.
De lengte van de periode is $90 - 60 = 30$ minuten.
De gemiddelde toename is $2,8 : 30 = 0,093\dots$ km per minuut.
Aileen heeft na 70 minuten $5,7 + 10 \times 0,093\dots \approx 6,63$ kilometer gelopen.
- b** Aileen heeft tussen 120 minuten en 150 minuten $12,3 - 10,9 = 1,4$ kilometer gelopen.
De lengte van de periode is $150 - 120 = 30$ minuten.
De gemiddelde toename is $1,4 : 30 = 0,046\dots$ km per minuut.
Aileen heeft na 135 minuten $10,9 + 15 \times 0,046\dots = 11,6$ kilometer gelopen.
- c** $tijd = 70$ ligt dicht bij een gegeven waarde van de tabel dan $tijd = 135$. De schatting van 70 minuten is daarom betrouwbaarder.



- b** Afhankelijk van hoe je de grafiek verlengt, zijn er meerdere antwoorden mogelijk. Na 1 uur kent ze waarschijnlijk 73 woordjes.

S7 a Er zijn meerdere mogelijkheden.



- b** In 10 jaar tijd waren er $200 - 100 = 100$ leerlingen minder.
De gemiddelde verandering per jaar was $-100 : 10 = -10$ leerlingen.
De formule van de trendlijn is $L = -10t + 200$.
- c** $-10t + 200 = 60$
 $-10t = -140$
 $t = -140 : -10 = 14$
Na 14 jaar, dus in 2022, is het aantal leerlingen kleiner dan 60.

Test jezelf

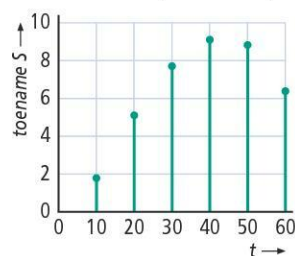
- T1 a** Op dat tijdstip veranderen de toenames in afnamen, want de staafjes zijn niet meer naar boven maar naar beneden getekend.
- b** Van 15.00 uur tot 16.00 uur was er sprake van een toenemende daling.
- c** Tussen 15.00 uur en 16.00 uur worden de staafjes die naar beneden zijn getekend steeds langer. Dan is er sprake van een toenemende daling. Tussen 16.00 uur en 19.00 uur zijn de staafjes nog steeds naar beneden getekend maar worden ze steeds korter. Dan is er sprake van een afnemende daling.
- d** Het was om 6.00 uur $20 - 1 - 1,5 - 2 - 1 - 1,5 - 1 = 12$ °C.
De gemiddelde verandering was $(20 - 12) : 6 = 1\frac{1}{3}$ °C.

- T2 a** $S = 0,018 \times 15^2 - 0,000\,002 \times 15^4 = 3,948\,75$
 $S = 0,018 \times 30^2 - 0,000\,002 \times 30^4 = 14,58$
 $\Delta t = 30 - 15 = 15$ en $\Delta S = 14,58 - 3,948\,75 = 10,631\,25$
De gemiddelde snelheid van Stephen is
 $10,631\,25 : 15 = 0,708\,75$ kilometer per minuut.

- b** Zijn snelheid is $0,708\,75 \times 60 = 42,525$ kilometer per uur.

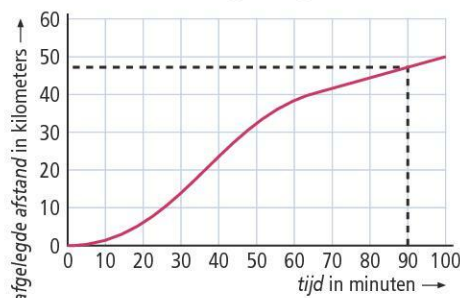
c

t	0	10	20	30	40	50	60
S	0	1,78	6,88	14,58	23,68	32,5	38,88
toename S		1,78	5,1	7,7	9,1	8,82	6,38

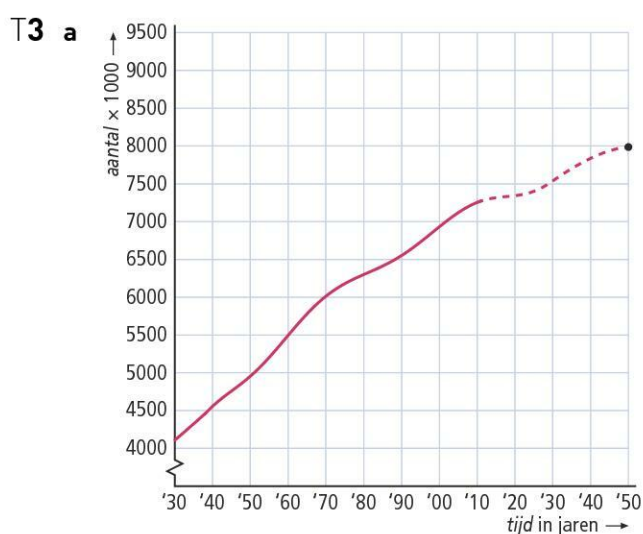


8 Grafieken en veranderingen

- d De grafiek loopt tussen $t = 30$ en $t = 40$ steiler omhoog dan tussen $t = 10$ en $t = 20$.
- e Het staafje bij $t = 40$ is langer dan het staafje bij $t = 20$.
- f Na 60 minuten loopt de grafiek lineair verder.

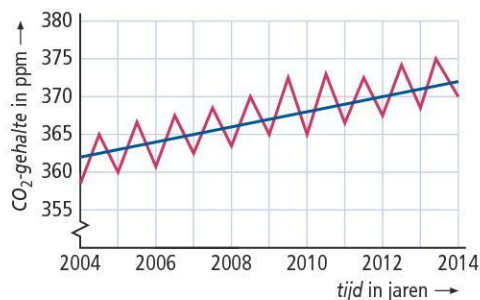


Stephen heeft na 1,5 uur (90 minuten) naar verwachting ongeveer 48 kilometer afgelegd.



- b 1967
De toename was $6320 - 5713 = 607$ duizend inwoners.
De lengte van de periode is 10 jaar.
De gemiddelde verandering was $607 : 10 = 60,7$ duizend inwoners per jaar.
In 1967 waren er $5713 + 7 \times 60,7 = 6137,9$ duizend inwoners.
- 1999
De toename was $7396 - 6967 = 429$ duizend inwoners.
De lengte van de periode is 10 jaar.
De gemiddelde verandering was $429 : 10 = 42,9$ duizend inwoners per jaar.
In 1999 waren er $6967 + 9 \times 42,9 = 7353,1$ duizend inwoners.
- c 1999 ligt dicht bij een waarde van de tabel dan 1967, dus de uitkomst bij 1999 is het meest betrouwbaar.
- d De toename was $7777 - 4060 = 3717$ duizend inwoners.
De lengte van de periode is 80 jaar.
De gemiddelde verandering was $3717 : 80 = 46,4625$ duizend inwoners per jaar.
- e Afhankelijk van hoe je de grafiek verlengt, zijn er meerdere antwoorden mogelijk. Zie opdracht T3a.
In 2050 zijn er naar verwachting ongeveer 8500 duizend inwoners in West-Nederland.

T4 a



- b In 5 jaar tijd was er een toename van $370 - 365 = 5$ ppm.
De gemiddelde verandering was $5 : 5 = 1$ ppm per jaar.
Het startgetal is $365 - 3 \times 1 = 362$.
De formule is $G = t + 362$.
- c Voor het jaar 2020 geldt $t = 16$.
In 2020 is het CO_2 gehalte naar verwachting $16 + 362 = 378$ ppm.
- d Voor het jaar 2050 geldt $t = 46$.
In 2050 is het CO_2 gehalte naar verwachting $46 + 362 = 408$ ppm.
Deze voorspelling is niet betrouwbaar omdat deze verder in de toekomst ligt.

T5 a $-5 \times 0^2 + 20 \times 0 + 105 = 105$ en $-5 \times 2^2 + 20 \times 2 + 105 = 125$

De toename van de hoogte is $125 - 105 = 20$ meter.

De gemiddelde snelheid is $20 : 2 = 10$ meter per seconde.

b $-5 \times 7^2 + 20 \times 7 + 105 = 0$

De toename van de hoogte is $0 - 125 = -125$ meter.

De gemiddelde snelheid is $-125 : 5 = -25$ meter per seconde.

c Het antwoord is negatief en dit betekent dat de bal daalt met een snelheid van 25 meter per seconde.

d $-5 \times 6,9^2 + 20 \times 6,9 + 105 = 4,95$

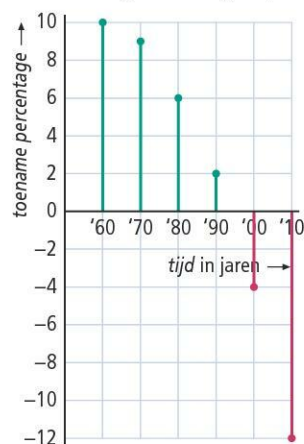
De toename van de hoogte is $0 - 4,95 = -4,95$ meter.

De gemiddelde snelheid is $-4,95 : 0,1 = -49,5$ meter per seconde.

e De bal valt met ongeveer 49,5 meter per seconde op de grond.

Extra oefening

E1 a	tijd in jaren	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
	percentage	17	27	36	42	44	40	28
	toename percentage		10	9	6	2	-4	-12



8 Grafieken en veranderingen

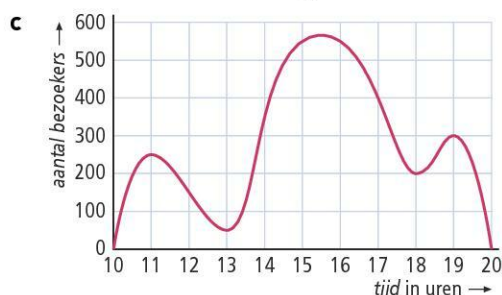
- b** In ongeveer 1990 werd het hoogste punt bereikt. Je ziet dat in het toenamediaagram omdat na 1990 de toename overgaat in een afname.
- c** Het betreft een toenemende daling. Dit kun je zien omdat de staafjes omlaag getekend zijn en steeds langer worden.

- E2 a** Tussen 13.00 uur en 14.00 uur nam het aantal bezoekers met 300 toe.
- b** Toen het museum opende, waren er nog geen bezoekers.

<i>tijd in uren</i>	10	11	12	13	14	15
<i>aantal bezoekers</i>	0	250	150	50	350	550
<i>toename aantal bezoekers</i>		250	-100	-100	300	200

<i>tijd in uren</i>	16	17	18	19	20
<i>aantal bezoekers</i>	550	400	200	300	0
<i>toename aantal bezoekers</i>	0	-150	-200	100	-300

Het maximale aantal getelde bezoekers was 550.



- E3 a** $45 \times 0 - 5 \times 0^2 = 0$ en $45 \times 2 - 5 \times 2^2 = 70$
 De toename is $70 - 0 = 70$ meter.
 De gemiddelde snelheid is $70 : 2 = 35$ meter per seconde.
- b** $45 \times 4 - 5 \times 4^2 = 100$ en $45 \times 9 - 5 \times 9^2 = 0$
 De toename is $0 - 100 = -100$ meter.
 De gemiddelde snelheid is $-100 : 5 = -20$ meter per seconde.
 De snelheid is negatief omdat de steen daalt.

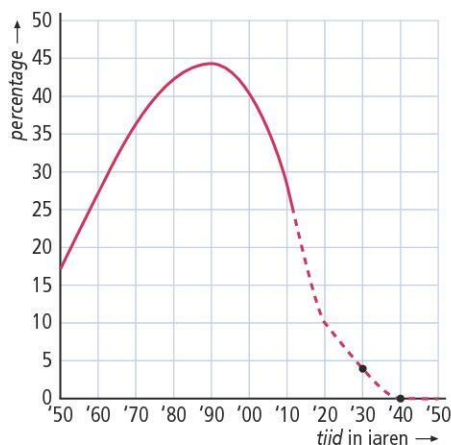
- E4 a** 1963

De toename was $36 - 27 = 9$ procent.
 De lengte van de periode is 10 jaar.
 De gemiddelde verandering was $9 : 10 = 0,9$ procent per jaar.
 In 1963 was het percentage $27 + 3 \times 0,9 = 29,7$.
 2004

De toename was $28 - 40 = -12$ procent.
 De lengte van de periode is 10 jaar.
 De gemiddelde verandering was $-12 : 10 = -1,2$ procent per jaar.
 In 2004 was het percentage $40 - 4 \times 1,2 = 35,2$.

- b** In de periode 1950 tot 1970 was er een redelijke lineaire toename. Na 1990 nam het percentage steeds sneller af. De voorspelling voor 1963 is daarom het meest betrouwbaar.

E5 a



- b Afhankelijk van hoe je de grafiek verlengt, zijn er meerdere antwoorden mogelijk. Zie opdracht E5a.
In 2030 is het percentage rokers ongeveer 4%.
- c Afhankelijk van hoe je de grafiek verlengt, zijn er meerdere antwoorden mogelijk. Zie opdracht E5a.
Vanaf 2040 is het percentage rokers naar verwachting 0%.
- d Het antwoord is niet betrouwbaar, want het is maar de vraag of de sterke daling van het percentage zich zo doorzet.

E6 a De eerste stelling is juist. De toename in het aantal reeën is steeds (ongeveer)

gelijk. De tweede stelling is onjuist. Het aantal reeën dat sterft is steeds (ongeveer) gelijk. Maar omdat het totaal aantal reeën jaarlijks toeneemt, geldt dit niet voor het percentage.

- b In 10 jaar tijd was er een toename van $650 - 400 = 250$ reeën.

De gemiddelde verandering was $250 : 10 = 25$ reeën per jaar.

De formule is $A = 25t + 400$.

- c Voor het jaar 2028 geldt $t = 21$.

In 2028 zijn er $A = 21 \times 25 + 400 = 925$ reeën.

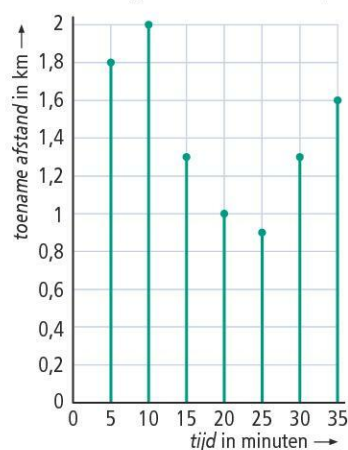
Voor het jaar 2050 geldt $t = 43$.

In 2050 zijn er $A = 43 \times 25 + 400 = 1475$ reeën.

Deze schattingen zijn niet zo betrouwbaar, want ze liggen ver in de toekomst.

E7 a

<i>tijd</i> in minuten	0	5	10	15	20	25	30	35
<i>afstand</i> in km	0	1,8	3,8	5,1	6,1	7,0	8,3	9,9
<i>toename afstand</i> in km		1,8	2	1,3	1	0,9	1,3	1,6



- b** Alle staafjes zijn omhoog getekend omdat er alleen maar toenames zijn in de afgelegde afstand.
- c** In de periode van 20 minuten tot 25 minuten fietste Anna het langzaamst. Dit kun je zien aan dat het kleinste staafje bij 25 minuten staat.
- d** $\Delta t = 20 - 10 = 10$ en $\Delta A = 5,1 - 3,8 = 2,3$
De gemiddelde snelheid van Anna was $2,3 : 10 = 0,23$ kilometer per minuut.
Dat is $0,23 \times 60 = 13,8$ kilometer per uur.
- e** De toename was $6,1 - 5,1 = 1$ km.
De lengte van de periode is 5 minuten.
De gemiddelde verandering was $1 : 5 = 0,2$ km per minuut.
Na 16 minuten heeft Anna $5,1 + 1 \times 0,2 = 5,3$ km gefietst.
- f** In de laatste 5 minuten heeft Anna $9,9 - 8,3 = 1,6$ km gefietst.
Haar gemiddelde snelheid was $1,6 : 5 = 0,32$ km per minuut.
Als zij met deze snelheid doorfietst, dan heeft ze na 45 minuten $9,9 + 10 \times 0,32 = 13,1$ kilometer gefietst.

1 $9 \times 3,5 = 16 \times a$
 $a = 9 \times 3,5 : 16 \approx 1,97$
 $13 \times 4,5 = 7 \times b$
 $b = 13 \times 4,5 : 7 \approx 8,36$
 $13 \times c = 7 \times 18$
 $c = 7 \times 18 : 13 \approx 9,69$

- 2 a** Een korting van 18% betekent dat je 82% moet betalen.
 Je kunt vermenigvuldigen met de factor 0,82.

$$0,82 \times 41 = 33,62$$

De prijs van de koffer is € 33,62.

- b** Een verhoging van 2,6% betekent een factor 1,026.

$$1,026 \times 79 = 81,054$$

De nieuwe prijs van het abonnement is € 81,05.

c

<i>bedrag</i>	27,50	31,25
<i>percentage</i>	100	?

$$27,5 \times ? = 100 \times 31,25$$

$$? = 100 \times 31,25 : 27,50 \approx 113,64$$

Het uurtarief is met 13,6% gestegen.

d

<i>bedrag</i>	3,45	2,98
<i>percentage</i>	100	?

$$3,45 \times ? = 100 \times 2,98$$

$$? = 100 \times 2,98 : 3,45 \approx 86,38$$

Het gehakt is $100\% - 86,38\% = 13,6\%$ goedkoper geworden.

- 3 a** 58:43 minuten is $58 \times 60 + 43 = 3523$ seconden.

<i>afstand in km</i>	14,3	?
----------------------	------	---

<i>tijd in seconden</i>	3523	3600
-------------------------	------	------

$$14,3 \times 3600 = 3523 \times ?$$

$$? = 14,3 \times 3600 : 3523 \approx 14,61$$

De gemiddelde snelheid is ongeveer 14,6 km per uur.

- b** 1:14:13 uur is $3600 + 14 \times 60 + 13 = 4453$ seconden.

<i>afstand in km</i>	18,7	?
----------------------	------	---

<i>tijd in seconden</i>	4453	3600
-------------------------	------	------

$$18,7 \times 3600 = 4453 \times ?$$

$$? = 18,7 \times 3600 : 4453 \approx 15,12$$

De gemiddelde snelheid is ongeveer 15,1 km per uur.

c

<i>afstand in km</i>	15	21,125
<i>tijd in seconden</i>	3600	?

$$15 \times ? = 3600 \times 21,125$$

$$? = 3600 \times 21,125 : 15 \approx 5070$$

$$5070 \text{ seconden} = 3600 \text{ seconden} + 1470 \text{ seconden}$$

$$1470 \text{ seconden is } 1470 : 60 = 24,5 \text{ minuten ofwel } 24 \text{ minuten en } 30 \text{ seconden.}$$

De tijd die hij zal gaan lopen is 1:24:30 uur.

4 a $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}$

c $2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 2 \times 3 = 6$

b $6\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{8} = 18\sqrt{16} = 18 \times 4 = 72$

d $5 \cdot \sqrt{\frac{12}{3}} = 5 \cdot \sqrt{4} = 5 \times 2 = 10$

5 a $y = 10\sqrt{\frac{x}{25}} = \frac{10}{5} \cdot \sqrt{x} = 2\sqrt{x}$

b $y = 5\sqrt{9x} = 5 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{x} = 5 \times 3 \times \sqrt{x} = 15\sqrt{x}$

c $y = \sqrt{2a} \cdot \sqrt{8b} = \sqrt{16ab} = 4\sqrt{ab}$

d $y = \sqrt{\frac{d}{36}} \cdot \sqrt{d} = \sqrt{\frac{d^2}{36}} = \frac{1}{6} \cdot d$

e $y = \sqrt{5x} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{25x} = 5\sqrt{x}$

f $y = 33\sqrt{\frac{x}{121}} = \frac{33}{11} \sqrt{x} = 3\sqrt{x}$

6 a $3^2 \cdot 3^4 = 3^6$

b $2^3 \cdot 2^4 \cdot 2 = 2^8$

c $(2^3)^6 = 2^{18}$

d $6^2 \cdot (6^2)^3 = 6^2 \cdot 6^6 = 6^8$

e $(4^2)^3 \cdot 4 = 4^6 \cdot 4^1 = 4^7$

f $11 \cdot 11^3 \cdot 11^4 \cdot 11^2 = 11^{10}$

7 a $x^3 \cdot x^4 = x^7$

b $(2x)^4 = 2^4 \cdot x^4 = 16x^4$

c $7x^4 \cdot x^2 \cdot (x^3)^5 = 7x^4 \cdot x^2 \cdot x^{15} = 7x^{21}$

d $\frac{3x^5}{x^2} = 3x^3$

e $(3x^2)^5 = 3^5 \cdot x^{10} = 243x^{10}$

f $x \cdot (x^2)^4 = x \cdot x^8 = x^9$

g $2x^3 \cdot 4x^2 \cdot x \cdot x^5 = 8x^{11}$

h $\frac{10x^7}{2x^3} = 5x^4$

8 a $3(2x - 4) = 6x - 12$

b $2(p - 7) - 3(p + 8) = 2p - 14 - 3p - 24 = -p - 38$

c $-3(2x - 4) = -6x + 12$

d $-5(2,5x + 6,2) = -12,5x - 31$

e $-(x + 5) - 3 = -x - 5 - 3 = -x - 8$

f $2a(4 - a) = 8a - 2a^2$

9 $q = (p + 3)(2p - 4) = 2p^2 - 4p + 6p - 12$

$-4p$ en $6p$ zijn gelijksoortige termen, deze kun je samen nemen.

$-4p + 6p = 2p$

$q = 2p^2 + 2p - 12$

10 a $(n + 4)(n - 5) = n^2 - 5n + 4n - 20 = n^2 - n - 20$

b $(3n + 4)(n - 5) = 3n^2 - 15n + 4n - 20 = 3n^2 - 11n - 20$

c $(5p - 2)(p - 3) = 5p^2 - 15p - 2p + 6 = 5p^2 - 17p + 6$

d $(k + 7)^2 = (k + 7)(k + 7) = k^2 + 7k + 7k + 49 = k^2 + 14k + 49$

e $(r - 7)^2 = (r - 7)(r - 7) = r^2 - 7r - 7r + 49 = r^2 - 14r + 49$

f $(2w - 6)^2 = (2w - 6)(2w - 6) = 4w^2 - 12w - 12w + 36 = 4w^2 - 24w + 36$

11 a $6b + 3a = 12$

$6b = -3a + 12$

$b = -\frac{1}{2}a + 2$

b $4b - 12a = 6$

$4b = 12a + 6$

$b = 3a + 1\frac{1}{2}$

c $3a + b - 6 = 8$

$3a + b = 14$

$b = -3a + 14$

d $700a = -20b - 500$

$20b = -700a - 500$

$b = -35a - 25$

e $2(b - 6) - 8a = 0$

$2b - 12 - 8a = 0$

$2b = 8a + 12$

$b = 4a + 6$

f $3b = 6(a - 5) + 9$

$3b = 6a - 30 + 9$

$b = 2a - 7$

12 a $b = 2t + 8$ en $t = p - 4$

$$b = 2(p - 4) + 8$$

$$b = 2p - 8 + 8$$

$$b = 2p$$

b $b = 7 - t$ en $t = -2p + 9$

$$b = 7 - (-2p + 9)$$

$$b = 7 + 2p - 9$$

$$b = 2p - 2$$

c $b = 4(t - 2)$ en $t = -p + 5$

$$b = 4(-p + 5 - 2)$$

$$b = 4(-p + 3)$$

$$b = -4p + 12$$

13 a De formule van de grenslijn is $2t - 8k = 32$.

$$k = 0 \text{ geeft } 2t = 32 \text{ ofwel } t = 16.$$

$$t = 0 \text{ geeft } -8k = 32 \text{ ofwel } k = -4.$$

De snijpunten met de assen zijn (16, 0) en (0, -4).

Het punt (0, 0) voldoet aan de ongelijkheid $2t - 8k \leq 32$.

Het halfvlak ligt boven de grenslijn.

b De formule van de grenslijn is $0,5t + 2k = 6$.

$$k = 0 \text{ geeft } 0,5t = 6 \text{ ofwel } t = 12.$$

$$t = 0 \text{ geeft } 2k = 6 \text{ ofwel } k = 3.$$

De snijpunten met de assen zijn (12, 0) en (0, 3).

Het punt (0, 0) voldoet niet aan de ongelijkheid $0,5t + 2k \geq 6$.

Het halfvlak ligt boven de grenslijn.

c De formule van de grenslijn is $30t + 10k = 450$.

$$k = 0 \text{ geeft } 30t = 450 \text{ ofwel } t = 15.$$

$$t = 0 \text{ geeft } 10k = 450 \text{ ofwel } k = 45.$$

De snijpunten met de assen zijn (15, 0) en (0, 45).

Het punt (0, 0) voldoet aan de ongelijkheid $30t + 10k \leq 450$.

Het halfvlak ligt onder de grenslijn.

d De formule van de grenslijn is $0,2k + 0,4t = 1$.

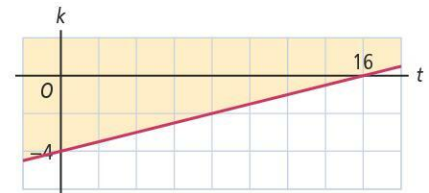
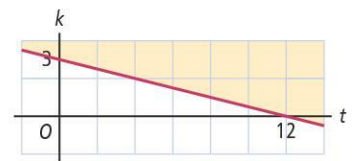
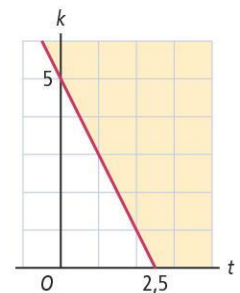
$$k = 0 \text{ geeft } 0,4t = 1 \text{ ofwel } t = 2,5.$$

$$t = 0 \text{ geeft } 0,2k = 1 \text{ ofwel } k = 5.$$

De snijpunten met de assen zijn (2,5; 0) en (0, 5).

Het punt (0, 0) voldoet niet aan de ongelijkheid $0,2k + 0,4t \geq 1$.

Het halfvlak ligt boven de grenslijn.



14 a $-x + 7 = 4x - 13$

$$-5x + 7 = -13$$

$$-5x = -20$$

$$x = 4$$

b $\frac{1}{2}x + 6 = 2\frac{1}{2}x - 4$

$$-2x + 6 = -4$$

$$-2x = -10$$

$$x = 5$$

c $-4x + 28 = 8(x - 4)$

$$-4x + 28 = 8x - 32$$

$$-12x = -60$$

$$x = 5$$

d $-x = -4x - 9$

$$3x = -9$$

$$x = -3$$

e $3(6 + x) = -x + 2$

$$18 + 3x = -x + 2$$

$$4x = -16$$

$$x = -4$$

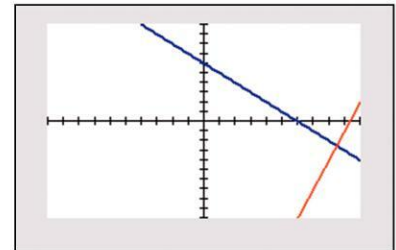
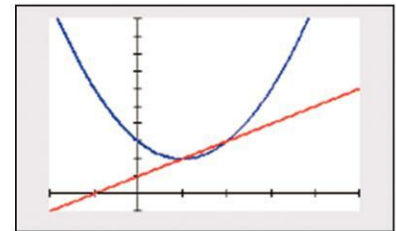
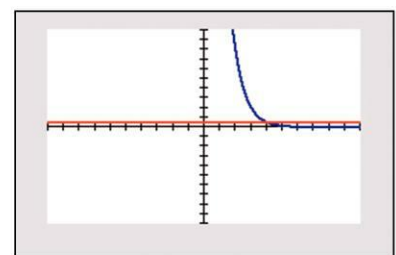
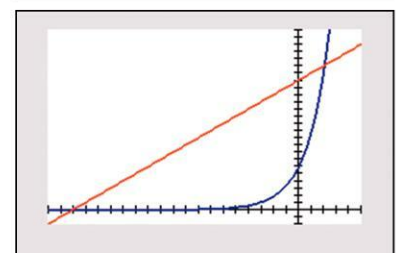
f $2(x - 8) = 5(1 - 2x)$

$$2x - 16 = 5 - 10x$$

$$12x = 21$$

$$x = 1,75$$

- 15 a** Invoer: $y_1 = x^2 + 4x - 4$ en $y_2 = 2x$
 Venster: x van -10 tot 10 en y van -10 tot 10
 Optie: snijpunten
 De oplossingen zijn $x \approx -3,24$ en $x \approx 1,24$.
- b** Invoer: $y_1 = x^4 + 2x - 3$ en $y_2 = x + 5$
 Venster: x van -10 tot 10 en y van -10 tot 10
 Optie: snijpunten
 De oplossingen zijn $x \approx -1,77$ en $x \approx 1,59$.
 Dus $w = -1,77$ of $w = 1,59$.
- c** Invoer: $y_1 = 4 \times 1,1^x$ en $y_2 = -0,5x + 8$
 Venster: x van -10 tot 10 en y van -10 tot 10
 Optie: snijpunten
 De oplossing is $x \approx 4,14$ dus $t = 4,14$.
- d** Invoer: $y_1 = 2\sqrt{x-4}$ en $y_2 = x-7$
 Venster: x van 0 tot 20 en y van -10 tot 10
 Optie: snijpunten
 De oplossing is $x = 13$.
- 16 a** Invoer: $y_1 = -x + 6$ en $y_2 = 3x - 28$
 Venster: x van -10 tot 10 en y van -10 tot 10
 Optie: snijpunten
 De oplossing is $x = 8,5$.
 Links van $x = 8,5$ ligt de grafiek van $y = -x + 6$ hoger dan de grafiek van $y = 3x - 28$.
 De oplossing is $x \leq 8,5$.
- b** Invoer: $y_1 = x^2 - 2x + 3$ en $y_2 = x + 1$
 Venster: x van -10 tot 10 en y van -10 tot 10
 Optie: snijpunten
 De oplossingen zijn $x = 1$ en $x = 2$.
 De grafiek van $y = w^2 - 2w + 3$ ligt links van $x = 1$ en rechts van $x = 2$ boven de grafiek van $y = w + 1$.
 De oplossing is $w < 1$ en $w > 2$.
- c** Invoer: $y_1 = 128 \times 0,25^x$ en $y_2 = 0,5$
 Venster: x van -10 tot 10 en y van -10 tot 10
 Optie: snijpunten
 De oplossing is $x = 4$.
 Links van $x = 4$ ligt de grafiek van $y = 128 \times 0,25^x$ hoger dan de grafiek van $y = 0,5$.
 De oplossing is $t \leq 4$.
- d** Invoer: $y_1 = 6 \times 1,8^x$ en $y_2 = x + 18$
 Venster: x van -20 tot 5 en y van -2 tot 25
 Optie: snijpunten
 De oplossingen zijn $x \approx 18,00$ en $x \approx 2,05$.
 Tussen $x = -18,00$ en $x = 2,05$ ligt de grafiek van $y = 6 \cdot 1,8^x$ onder de grafiek van $y = x + 18$.
 De oplossing is $-18,00 < t < 2,05$.



9 Lineaire en exponentiële formules

Voorkennis

V1 a $1020 : 1200 = 0,85$, $870 : 1020 \approx 0,85$, $740 : 870 \approx 0,85$ en $630 : 740 \approx 0,85$
Het aantal konijnen wordt steeds met 0,85 vermenigvuldigd.

b In 2020 zijn er $630 \times 0,85^2 \approx 455$ konijnen.

In 2021 zijn er $630 \times 0,85^3 \approx 387$ konijnen.

c $630 \times 0,85^7 \approx 202$ en $630 \times 0,85^8 \approx 172$

In 2016 zijn er voor het eerst minder dan 200 konijnen.

V2 a De factor is $1332 : 1480 = 0,9$.

b $188 - 14 = 174$

De factor is $188 : 174 \approx 1,08$.

V3 a

	begin	na één week
gewicht in kg	25	27,5
percentage	100	110


 $\times 1,1$

b De factor is $110 : 100 = 1,1$.

c Het gewicht na 16 weken is $25 \times 1,1^{16} \approx 115$ kg.

V4 a $100\% + 12,5\% = 112,5\%$
De factor is $112,5 : 100 = 1,125$.

b $100\% + 2,8\% = 102,8\%$
De factor is $102,8 : 100 = 1,028$.

c $100\% + 0,3\% = 100,3\%$
De factor is $100,3 : 100 = 1,003$.

d $100\% - 20\% = 80\%$
De factor is $80 : 100 = 0,8$.

e $100\% - 5,2\% = 94,8\%$
De factor is $94,8 : 100 = 0,948$.

f $100\% - 0,7\% = 99,3\%$
De factor is $99,3 : 100 = 0,993$.

V5 a $100\% \times 0,85 = 85\%$
De procentuele afname is $100\% - 85\% = 15\%$.

b $100\% \times 1,36 = 136\%$
De procentuele toename is $136\% - 100\% = 36\%$.

c $100\% \times 0,981 = 98,1\%$
De procentuele afname is $100\% - 98,1\% = 1,9\%$.

d $100\% \times 1,016 = 101,6\%$
De procentuele toename is $101,6\% - 100\% = 1,6\%$.

e $100\% \times 1,205 = 120,5\%$
De procentuele toename is $120,5\% - 100\% = 20,5\%$.

f $100\% \times 0,735 = 73,5\%$
De procentuele afname is $100\% - 73,5\% = 26,5\%$.

V6 a De groeifactor per twee weken is $1,5^2 = 2,25$.

b De groeifactor per vier weken is $1,5^4 = 5,0625$.

c In een week zitten zeven dagen, dus één dag is $\frac{1}{7}$ deel van een week.
De groeifactor per dag is $1,5^{\frac{1}{7}} \approx 1,06$.

V7 a De groeifactor per dag is $0,98^{24} \approx 0,616$.

b In 18 dagen passen zes keer drie dagen.

De groeifactor per drie dagen is $1,6^{\frac{1}{6}} \approx 1,081$.

- V8 a** $100\% + 0,13\% = 100,13\%$
 De groeifactor per maand is $100,13 : 100 = 1,0013$.
 De groeifactor per jaar is $1,0013^{12} = 1,0157\dots$
 $1,0157\dots \times 100 - 100 = 1,57\dots$
 Het rentepercentage per jaar is ongeveer 1,6%.
- b** $100\% - 18\% = 82\%$
 De groeifactor per week is $82 : 100 = 0,82$.
 De groeifactor per dag is $0,82^{\frac{1}{7}} = 0,972\dots$
 $0,972\dots \times 100 - 100 = -2,79\dots$
 Het aantal neemt per dag met ongeveer 2,8% af.
- c** $100\% + 98\% = 198\%$
 De groeifactor per 15 uur is $198 : 100 = 1,98$.
 De groeifactor per uur is $1,98^{\frac{1}{15}} = 1,0465\dots$
 $1,0465\dots \times 100 - 100 = 4,65\dots$
 Het aantal bacteriën neemt per uur met ongeveer 4,7% toe.

9.1 Lineaire verbanden

intro

$$\begin{array}{ll} 2a + 3g = 540 & 4a + 2g = 760 \\ 2a = -3g + 540 & 4a = -2g + 760 \\ a = -1\frac{1}{2}g + 270 & a = -\frac{1}{2}g + 190 \end{array}$$

$$-1\frac{1}{2}g + 270 = -\frac{1}{2}g + 190$$

$$270 = g + 190$$

$$80 = g$$

$$a = -1\frac{1}{2} \times 80 + 270 = 150$$

Een ananas kost € 1,50 en een grapefruit kost € 0,80.

- 1 a** Bij tabel A hoort een lineair verband omdat de toename van y steeds 3 is, als x met 1 toeneemt.
- b** Bij tabel B is sprake van een lineair verband omdat de afname van y steeds 1,5 is, als x met 1 toeneemt.
 Bij tabel C is geen sprake van een lineair verband omdat de toename van y niet steeds hetzelfde is, als x met 1 toeneemt.
- 2 a** De formule $K = a \cdot q + b$ is een lineaire formule en daar hoort een lineaire grafiek bij.
- b** De kosten nemen dan met $38,6 - 17,8 = 20,8$ euro toe.
- c** De richtingscoëfficiënt is $20,8 : 26 = 0,8$.
 De praktische betekenis is, dat per één theekop de productiekosten met 0,80 euro stijgt.
- d** Het startgetal is $17,8 - 11 \times 0,8 = 9$, dus $b = 9$.
- e** De formule is $K = 0,8q + 9$.
- 3** tabel A
 Het startgetal is $2 - 3 = -1$.
 De formule is $y = 3x - 1$.
- tabel B
 Het startgetal is $9,5 + 4 \times 1,5 = 15,5$.
 De formule is $y = -1,5x + 15,5$.

4 a Omdat je bij beide bedrijven een bedrag per kilometer betaalt, is het verband tussen a en P bij beide bedrijven lineair.

b De formule bij het eerste bedrijf is $P = 0,56a + 40$.

c Bij $360 - 200 = 160$ km is de prijs $208 - 144 = 64$ euro gestegen.

De prijs per kilometer is $64 : 160 = 0,40$ euro.

Het vaste bedrag bij het tweede bedrijf is $144 - 200 \times 0,4 = 64$ euro.

De formule bij het tweede bedrijf is $P = 0,4a + 64$.

d $0,56a + 40 = 0,4a + 64$

$$0,16a + 40 = 64$$

$$0,16a = 24$$

$$a = 24 : 0,16 = 150$$

$$p = 0,56 \times 150 + 40 = 124$$

Bij 150 km zijn de bedrijven even duur. De prijs is dan € 124,-.

5 a Bij stap 1 is aan beide kanten van het gelijkteken $-2x$ gedaan.

Bij stap 2 is aan beide kanten van het gelijkteken $:5$ gedaan.

b A $12x + 6y = -108$

$$6y = -12x - 108$$

$$y = -2x - 18$$

B $-3,5x - 4y = 70$

$$-4y = 3,5x + 70$$

$$y = -0,875x - 17,5$$

C $8\frac{1}{2}y - 17x = 68$

$$8\frac{1}{2}y = 17x + 68$$

$$y = 2x + 8$$

D $x = 10y + 74$

$$x - 74 = 10y$$

$$10y = x - 74$$

$$y = 0,1x - 7,4$$

6 a Voor Paul geldt de vergelijking $0,25b + 0,15m = 10$, want hij betaalt voor elke bout 0,25 euro en voor elke moer 0,15 euro. Met $0,25b + 0,15m$ berekent hij hoeveel hij in totaal aan bouten en moeren uitgeeft en dat is samen 10 euro.

Voor Jeroen geldt de vergelijking $0,2b + 0,2m = 12$, want hij betaalt voor elke bout 0,20 euro en voor elke moer 0,20 euro. Met $0,2b + 0,2m$ berekent hij hoeveel hij in totaal aan bouten en moeren uitgeeft en dat is samen 12 euro.

b $0,25b + 0,15m = 10$

$$0,15m = -0,25b + 10$$

$$m = -1\frac{2}{3}b + 66\frac{2}{3}$$

$$0,2b + 0,2m = 12$$

$$0,2m = -0,2b + 12$$

$$m = -b + 60$$

c $-1\frac{2}{3}b + 66\frac{2}{3} = -b + 60$

$$66\frac{2}{3} = \frac{2}{3}b + 60$$

$$6\frac{2}{3} = \frac{2}{3}b$$

$$b = 6\frac{2}{3} : \frac{2}{3} = 10$$

$$m = -10 + 60 = 50$$

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (10, 50).

d Als ze allebei 10 bouten en 50 moeren kopen, is Paul 10 euro kwijt en Jeroen 12 euro.

7 a Een wasmachine van het type A++ kost € 603,-.

De kosten voor 10 jaar alleen het drogen zijn € 693,40 - € 603,- = € 90,40.

Dat is gemiddeld € 90,40 : 10 = € 9,04 per jaar.

Zij droogt gemiddeld € 9,04 : € 0,025 = 361,6 kg per jaar.

- b** Bij type 1 zijn de totale kosten € 498,- + $10 \times 100 \times € 0,04 = € 538,-$.
 Bij type 2 zijn de totale kosten € 603,- + $10 \times 100 \times € 0,025 = € 628,-$.
 Bij type 3 zijn de totale kosten € 749,- + $10 \times 100 \times € 0,015 = € 764,-$.
- c** Een formule voor type 1 is $K = 498 + 10 \times a \times 0,04$ oftewel $K = 498 + 0,4a$.
 Een formule voor type 2 is $K = 603 + 10 \times a \times 0,025$ oftewel $K = 603 + 0,25a$.
 Een formule voor type 3 is $K = 749 + 10 \times a \times 0,015$ oftewel $K = 749 + 0,15a$.
 Eerst het omslagpunt van droger type 1 en type 2 berekenen.
 $498 + 0,4a = 603 + 0,25a$
 $498 + 0,15a = 603$
 $0,15a = 105$
 $a = 105 : 0,15 = 700$
 Vanaf 700 kg per jaar is type 2 voordeliger dan type 1.
 Dan het omslagpunt van droger type 2 en type 3 berekenen.
 $603 + 0,25a = 749 + 0,15a$
 $603 + 0,1a = 749$
 $0,1a = 146$
 $a = 146 : 0,1 = 1460$
 Vanaf 1460 kg per jaar is type 3 voordeliger dan type 2.

- 04 a** Omdat je bij beide bedrijven een bedrag per kilometer betaalt, is het verband tussen a en P bij beide bedrijven lineair.
- b** Het vaste bedrag bij het eerste bedrijf is € 100,-, daarom is het startgetal 100.
- c** De richtingscoëfficiënt is 0,22, want je betaalt per kilometer € 0,22.
 De formule bij het eerste bedrijf is $P = 0,22k + 100$.
- d** Bij $600 - 450 = 150$ km is de prijs $248 - 221 = 27$ euro gestegen.
- e** De prijs per kilometer is $27 : 150 = 0,18$ euro.
- f** $221 - 450 \times 0,18 =$
 $221 - 81 = 140$
 Het vaste bedrag bij het tweede bedrijf is € 140,- euro.
 De formule bij het tweede bedrijf is $P = 0,18k + 140$.
- g** De vergelijking is $0,22k + 100 = 0,18k + 140$.
- h** $0,04k + 100 = 140$
 $0,04k = 40$
 $k = 40 : 0,04 = 1000$
- i** Bij 1000 km zijn beide bedrijven even duur.
 $p = 0,22 \times 1000 + 100 = 320$
 De prijs is dan € 320,-.

- U1** Het taxibedrijf berekent een starttarief en een bedrag per gereden km (de richtingscoëfficiënt).
 Noem de afstand in kilometers a en het bedrag in euro's B .
 In $40 - 15 = 25$ km is het bedrag $64,32 - 36,32 = 28$ euro toegenomen.
 Per km is dat $28 : 25 = 1,12$ euro.
 $B = 1,12a + b$
 $b = 64,32 - 40 \times 1,12 = 19,52$
 $B = 1,12a + 19,52$
 Het aantal kilometers bij een prijs van € 125,92 bereken je met
 $1,12a + 19,52 = 125,92$.
 $1,12a = 106,4$
 $a = 106,4 : 1,12 = 95$
 De rit van echtpaar Weenink was 95 kilometer.

9.2 Gebieden

intro Die leerling bevindt zich in het groene gebied Verveling.

Je eigen antwoord. Bijvoorbeeld ben jij goed in wiskunde en is de uitdaging goed, dan zit je in het blauwe gebied. Dan bevindt je je voor wiskunde A in het gebied Flow.

8 a snijpunt met de x -as, $y = 0$

$$-7x + 3 \times 0 = 42$$

$$-7x = 42$$

$$x = 42 : -7 = -6$$

Snijpunt met de x -as is $(-6, 0)$.

snijpunt met de y -as, $x = 0$

$$-7 \times 0 + 3y = 42$$

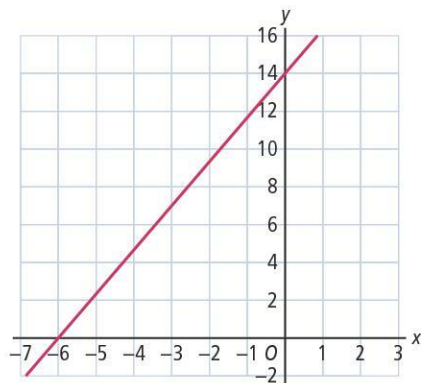
$$3y = 42$$

$$y = 42 : 3 = 14$$

Snijpunt met de y -as is $(0, 14)$.

b Als je van een lijn twee punten weet en daar een rechte lijn door heen tekent, dan liggen de andere punten van de lijn automatisch op die lijn.

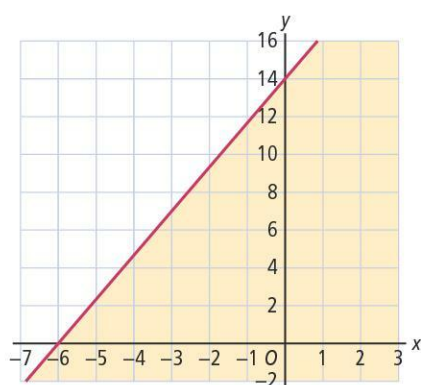
c



9 a De coördinaten van $O(0, 0)$ invullen geeft $-7 \times 0 + 3 \times 0 = 0$.

$0 < 42$ klopt, dus $x = 0$ en $y = 0$ is een oplossing van de ongelijkheid.

b



10 a snijpunt met de x -as, $y = 0$

$$5x + 2 \times 0 = 10$$

$$5x = 10$$

$$x = 10 : 5 = 2$$

Snijpunt met de x -as is (2, 0).

snijpunt met de y -as, $x = 0$

$$5 \times 0 + 2y = 10$$

$$2y = 10$$

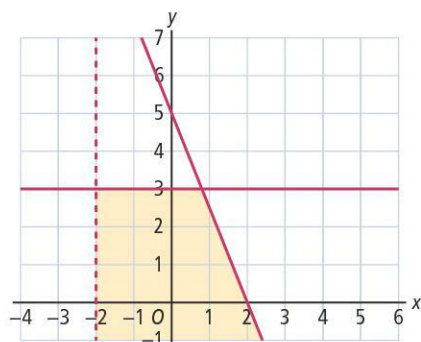
$$y = 10 : 2 = 5$$

Snijpunt met de y -as is (0, 5).

De punten op de grenslijn voldoen wel aan de ongelijkheid.

De coördinaten van $O(0, 0)$ invullen geeft $5 \times 0 + 2 \times 0 = 0$.

$0 \leq 10$ klopt, dus het gebied waar $O(0, 0)$ in ligt, is het gevraagde halfvlak.



b snijpunt met de x -as, $y = 0$

$$0,07x - 0,03 \times 0 = 0,21$$

$$0,07x = 0,21$$

$$x = 0,21 : 0,07 = 3$$

Snijpunt met de x -as is (3, 0).

snijpunt met de y -as, $x = 0$

$$0,07 \times 0 - 0,03y = 0,21$$

$$-0,03y = 0,21$$

$$y = 0,21 : -0,03 = -7$$

Snijpunt met de y -as is (0, -7).

De punten op de grenslijn voldoen niet aan de ongelijkheid.

De coördinaten van $O(0, 0)$ invullen geeft $0,07 \times 0 - 0,03 \times 0 = 0$.

$0 < 0,21$ klopt, dus het gebied waar $O(0, 0)$ in ligt, is het gevraagde halfvlak.

snijpunt met de x -as, $y = 0$

$$0,06x - 0,18 \times 0 = 0,36$$

$$0,06x = 0,36$$

$$x = 0,36 : 0,06 = 6$$

Snijpunt met de x -as is (6, 0).

snijpunt met de y -as, $x = 0$

$$0,06 \times 0 - 0,18y = 0,36$$

$$-0,18y = 0,36$$

$$y = 0,36 : -0,18 = -2$$

Snijpunt met de y -as is (0, -2).

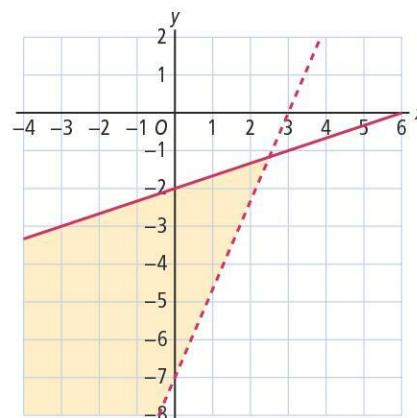
De punten op de grenslijn voldoen aan de ongelijkheid.

De coördinaten van $O(0, 0)$ invullen geeft

$$0,06 \times 0 - 0,18 \times 0 = 0$$

$0 \geq 0,36$ klopt niet, dus het gebied waar $O(0, 0)$ in ligt,

is niet het gevraagde halfvlak.



- 11 a** Met $a \geq 2$ wordt aangegeven dat het aantal avocado's minstens twee is.
 Met $g \geq 1$ wordt aangegeven dat het aantal grapefruits minstens één is.
 Met $1,2a + 0,6g \leq 6$ wordt aangegeven dat het bedrag voor de avocado's en de grapefruits bij elkaar maximaal 6 euro mag zijn.

b snijpunt met de a -as, $g = 0$

$$1,2a + 0,6 \times 0 = 6$$

$$1,2a = 6$$

$$a = 6 : 1,2 = 5$$

Snijpunt met de a -as is $(5, 0)$.

snijpunt met de g -as, $a = 0$

$$1,2 \times 0 + 0,6g = 6$$

$$0,6g = 6$$

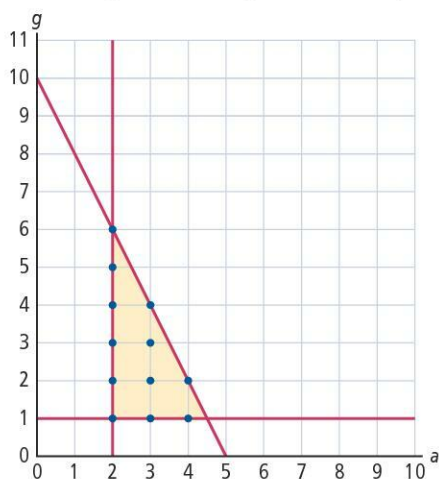
$$g = 6 : 0,6 = 10$$

Snijpunt met de g -as is $(0, 10)$.

De punten op de grenslijn voldoen aan de ongelijkheid.

De coördinaten van $(0, 0)$ invullen geeft $1,2 \times 0 + 0,6 \times 0 = 0$.

$0 \leq 6$ klopt, dus het gebied waar $(0, 0)$ in ligt, is het gevraagde halfvlak.

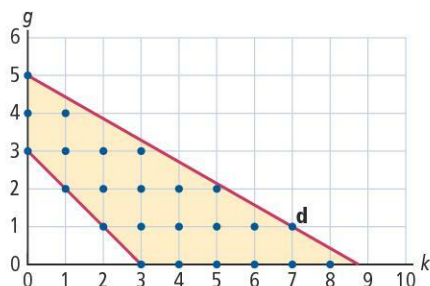


c Zowel a als g moeten gehele getallen zijn.

d Zie opdracht 11b.

Er zijn 12 mogelijke oplossingen.

- 12 a** De variabelen k en g moeten voldoen aan de voorwaarden $2g + 3,5k \leq 17,5$ en $g + k \geq 3$.
- b** snijpunt met de k -as, $g = 0$
 $2 \times 0 + 3,5k = 17,5$
 $3,5k = 17,5$
 $k = 17,5 : 3,5 = 5$
 Snijpunt met de k -as is $(5, 0)$.
 snijpunt met de g -as, $k = 0$
 $2g + 3,5 \times 0 = 17,5$
 $2g = 17,5$
 $g = 17,5 : 2 = 8,75$
 Snijpunt met de g -as is $(0; 8,75)$.
 De punten op de grenslijn voldoen aan de ongelijkheid.
 De coördinaten van $(0, 0)$ invullen geeft $2 \times 0 + 3,5 \times 0 = 0$.
 $0 \leq 17,50$ klopt, dus het gebied waar $(0, 0)$ in ligt, is het gevraagde halfvlak.
 snijpunt met de k -as, $g = 0$
 $0 + k = 3$
 $k = 3$
 Snijpunt met de k -as is $(3, 0)$.
 snijpunt met de g -as, $k = 0$
 $g + 0 = 3$
 $g = 3$
 Snijpunt met de g -as is $(0, 3)$.
 De punten op de grenslijn voldoen aan de ongelijkheid.
 De coördinaten van $(0, 0)$ invullen geeft $0 + 0 = 0$.
 $0 \geq 3$ klopt niet, dus het gebied waar $(0, 0)$ in ligt, is niet het gevraagde halfvlak.



- c** Zie opdracht 13b.
 Er zijn 24 combinaties voor Lisette.
- d** Zie opdracht 13b.
 Ze koopt $7 + 1 = 8$ broodjes.
- 13 a** Met $s + k \leq 200$ wordt aangegeven dat de hoeveelheid sinaasappelsap en karnemelk samen maximaal 200 ml mag zijn.
 10% van 200 ml is 20 ml en 60% van 200 ml is 120 ml.
 Met $20 < k < 120$ wordt aangegeven dat de hoeveelheid karnemelk tussen 20 ml en 120 ml moet zijn.
 Met $s \geq 0$ wordt aangegeven dat de hoeveelheid sinaasappelsap minstens 0 ml moet zijn.

- b** snijpunt met de s -as, $k = 0$

$$s + 0 = 200$$

$$s = 200$$

Snijpunt met de s -as is $(200, 0)$.

snijpunt met de k -as, $s = 0$

$$0 + k = 200$$

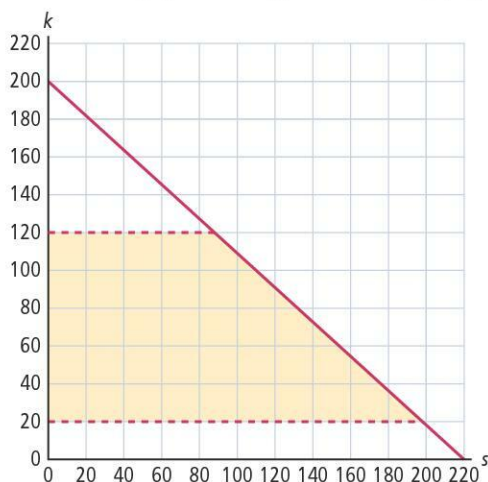
$$k = 200$$

Snijpunt met de k -as is $(0, 200)$.

De punten op de grenslijn voldoen aan de ongelijkheid.

De coördinaten van $(0, 0)$ invullen geeft $0 + 0 = 0$.

$0 \leq 200$ klopt, dus het gebied waar $(0, 0)$ in ligt, is het gevraagde halfvlak.



- c** Alle punten in het gebied zijn oplossingen, want je kunt bijvoorbeeld ook 98,5 ml sinaasappelsap en 80,9 ml karnemelk mixen.

- 011 a** Met $e \geq 2$ wordt aangegeven dat het aantal effen paar sokken minstens twee is. Met $b \geq 3$ wordt aangegeven dat het aantal bedrukte paar sokken minstens drie is.

Met $1,2e + 1,5b < 12$ wordt aangegeven dat het bedrag voor de effen sokken en de bedrukte sokken minder dan 12 euro moet zijn.

- b** De blauwe grenslijn hoort bij de ongelijkheid $1,2e + 1,5b < 12$. De punten op deze grenslijnen voldoen niet aan de ongelijkheid.

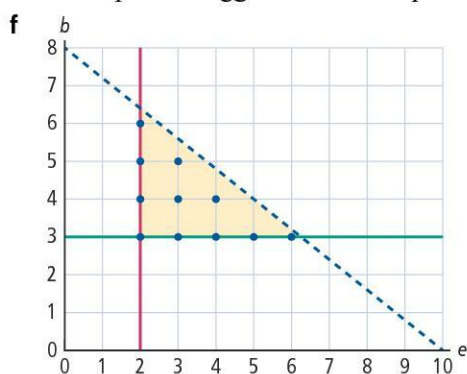
Bij de andere grenslijnen voldoen de punten op die grenslijnen wel aan de bijbehorende ongelijkheden.

- c** De coördinaten van $(0, 0)$ invullen geeft $1,2 \times 0 + 1,5 \times 0 = 0$.

$0 < 12$ klopt, dus het gebied waar $(0, 0)$ in ligt, is het gevraagde halfvlak.

- d** Het halfvlak bevindt zich rechts van de lijn $e = 2$.

- e** Deze punten liggen boven en op de lijn $b = 3$.



9 Lineaire en exponentiële formules

- g** Zowel e als b moeten gehele getallen zijn, dus alleen de roosterpunten in het gebied zijn oplossingen.
- h** Zie opdracht 011e.
Er zijn 11 mogelijke oplossingen.

U2 Een formule bij de rode grenslijn is $y = x + 1$. Deze formule kun je herleiden tot $y - x = 1$.

De punten op deze grenslijn moeten voldoen aan een ongelijkheid.

Stel de bijbehorende ongelijkheid is $y - x \leq 1$.

De coördinaten van $O(0, 0)$ invullen geeft $0 - 0 = 0$.

$0 \leq 1$ klopt, dus het gebied waar $(0, 0)$ in ligt, is het gevraagde halfvlak.

Een formule bij de groene grenslijn is $y = \frac{1}{4}x - 1$. Deze formule kun je herleiden tot $4y - x = -4$.

De punten op deze grenslijn moeten voldoen aan een ongelijkheid.

Stel de bijbehorende ongelijkheid is $4y - x \geq -4$.

De coördinaten van $O(0, 0)$ invullen geeft $4 \times 0 - 0 = 0$.

$0 \geq -4$ klopt, dus het gebied waar $(0, 0)$ in ligt, is het gevraagde halfvlak.

Een formule bij de blauwe grenslijn is $y = -\frac{1}{2}x + 3$. Deze formule kun je herleiden tot $2y + x = 6$.

De punten op deze grenslijn voldoen niet aan de ongelijkheid.

Stel de bijbehorende ongelijkheid is $2y + x < 6$.

De coördinaten van $O(0, 0)$ invullen geeft $2 \times 0 + 0 = 0$.

$0 < 6$ klopt, dus het gebied waar $(0, 0)$ in ligt, is het gevraagde halfvlak.

Er zijn meerdere antwoorden mogelijk, want bijvoorbeeld de ongelijkheid $y - x \leq 1$ kun je ook schrijven als $2y - 2x \leq 2$.

Bij het gebied horen de ongelijkheden $y - x \leq 1$, $4y - x \geq -4$ en $2y + x < 6$.

9.3 Exponentiële verbanden

intro Elke keer in de lengte doorknippen geeft een nieuwe rechthoek met een dubbele lengte.



Dus de lengte van een A4-tje (29,7 cm) wordt elke keer verdubbeld.

De lengte L van de rechthoek na n keer knippen kun je berekenen met de formule $L = 29,7 \cdot 2^n$.

De omtrek van de aarde is 40 000 km = 40 000 000 m = 4 000 000 000 cm.

Het aantal keer knippen bereken je dan door de vergelijking

$29,7 \cdot 2^n = 4 \times 10^9$ op te lossen.

Invoer: $y_1 = 29,7 \times 2^x$ en $y_2 = 4 \times 10^9$

Venster: x van 0 tot 30 en y van 0 tot 10^{10}

Optie: snijpunt

De oplossing is (27,004...; 4×10^9).

Dus na 28 keer knippen kun je de evenaar omspannen.

- 14 a** In de bovenste rij van de tabel staan opeenvolgende getallen en in de onderste rij worden de getallen steeds met twee vermenigvuldigd.

- b** $3888 : 5184 = 0,75$, $2916 : 3888 = 0,75$ en $2187 : 2916 = 0,75$
 In de bovenste rij van de tabel staan opeenvolgende getallen en in de onderste rij worden de getallen steeds met 0,75 vermenigvuldigd.
 $24 : 12 = 2$, $36 : 24 = 1,5$, $48 : 36 = 1,33\dots$ en $60 : 48 = 1,25$
 In de bovenste rij van de tabel staan opeenvolgende getallen en in de onderste rij worden de getallen niet steeds met dezelfde factor vermenigvuldigd.
 Bij tabel B is wel sprake van een exponentieel verband, bij tabel C niet.
- 15 a** $100\% + 14\% = 114\%$
 De groeifactor per jaar is $114 : 100 = 1,14$.
- b** $P = 420 \cdot 1,14^t$
- c** In 2030 zullen er naar verwachting $420 \times 1,14^{13} \approx 2307$ miljoen pakketten verstuurd worden.
- 16 A** De beginhoeveelheid is $3 : 2 = 1,5$. De formule is $y = 1,5 \cdot 2^x$.
- B** De beginhoeveelheid is $5184 : 0,75^4 = 16\,384$. De formule is $y = 16\,384 \cdot 0,75^x$.
- 17 a** $100\% + 6\% = 106\%$
 De groeifactor per jaar is $106 : 100 = 1,06$.
 De beginhoeveelheid is $800 \times 1,06 = 848$.
 De formule is $N = 848 \cdot 1,06^t$.
- b** De groeifactor per jaar is $13\,200 : 11\,500 = 1,147\dots$
 De beginhoeveelheid is $11\,500 : 1,147\dots = 10\,018,9\dots$
 De formule is $N = 10\,019 \cdot 1,15^t$.
- 18 a** $100\% - 0,13\% = 99,87\%$
 De groeifactor per maand is $99,87 : 100 = 0,9987$.
- b** $0,9987^{12} = 0,98451\dots$
 De groeifactor per jaar is ongeveer 0,9845.
- c** $0,98451\dots \times 100 - 100 = -1,54\dots$
 Het aantal krantenlezers neemt per jaar met ongeveer 1,5% af.
- d** Op 1 januari waren er $4,25 : 0,9987^2 = 4,26\dots$ miljoen krantenlezers.
 De formule is $N = 4,26 \cdot 0,9845^t$.
- e** $4,26 \cdot 0,9845^t = 3,5$
 Invoer: $y_1 = 4,26 \times 0,9845^x$ en $y_2 = 3,5$
 Venster: x van 0 tot 20 en y van 0 tot 10
 Optie: snijpunt
 De oplossing is $(12,57\dots; 3,5)$.
 Bij $t \approx 12,6$ is de waarde van N voor het eerst minder dan 3,5.
- f** $0,57\dots \times 12 \approx 7$
 12 jaar en 7 maanden later dan 1 januari 2018
 Dat is in augustus 2030.
- 19 a** De groeifactor per 8 jaar is $8084 : 4400 = 1,837\dots$
 $1,837\dots^{\frac{1}{8}} = 1,079\dots$
 De groeifactor per jaar is ongeveer 1,079.
- b** $1,079\dots \times 100 - 100 = 7,90\dots$
 De jaarlijkse toename is ongeveer 7,9%.
- c** $4400 : 1,079\dots^{12} = 1766,8\dots$
 De formule bij de tabel is $N = 1767 \cdot 1,079^t$.

- 20 a** Op 14 april zijn er $320 \cdot 2^4 = 5120$ bacteriën.
b $2^0 = 1$, want $320 \times 1 = 320$.
c 9 april is één dag voor 10 april.
 Met 320×2^{-1} bereken je de hoeveelheid één dag terug in de tijd.
 Als je het aantal bacteriën één dag later wilt berekenen, moet je het aantal bacteriën met 2 vermenigvuldigen.
 Als je het aantal bacteriën één dag ervoor wilt berekenen, moet je het aantal bacteriën door 2 delen.
d $320 \times 2^{-1} = 160$ en $320 : 2 = 160$
 Uit beide berekeningen komt hetzelfde antwoord, dus vermenigvuldigen met 2^{-1} is hetzelfde als delen door 2.
e $320 \times 2^{-2} = 80$ en $320 : 2^2 = 80$.
 Dus vermenigvuldigen met 2^{-2} is hetzelfde als delen door 2^2 .

- 21 a** $100\% + 2,5\% = 102,5\%$
 De groeifactor per jaar is $102,5 : 100 = 1,025$.
 De formule is $B = 51\,829 \cdot 1,025^t$.
b In 2015 verkocht hij voor $51\,829 \cdot 1,025^{-3} \approx 48\,128,38$ euro aan vuurwerk.
c $51\,829 \cdot 1,025^{-11} \approx 39\,501,20$
 Hij startte 11 jaar terug met verkoop van vuurwerk, dus in 2007.

- 22 a** Elke tien jaar wordt het aantal diefstallen met twee vermenigvuldigd, dus de groeifactor is 2 per tien jaar.
b De groeifactor per jaar is $2^{\frac{1}{10}} = 1,071\dots$
 De formule is $N = 3776 \cdot 1,07^t$.
c In 2000 waren er $3776 \cdot 1,071\dots^{-18} \approx 1084$ winkeldiefstallen.
 In 2010 waren er $3776 \cdot 1,071\dots^{-8} \approx 2169$ winkeldiefstallen.
d $3776 \cdot 1,07^t = 5000$
 Invoer: $y_1 = 3776 \times 1,07^x$ en $y_2 = 5000$
 Venster: x van 0 tot 20 en y van 0 tot 10
 Optie: snijpunt
 De oplossing is $(4,05\dots, 5000)$.
 Bij $t \approx 4,1$ is de waarde van N voor het eerst meer dan 5000.
 In 2023 zal het aantal winkeldiefstallen voor het eerst meer dan 5000 zijn.

- 017 a** 2017 is één jaar verder ten opzichte van 2016.
 $100\% - 4\% = 96\%$
 De groeifactor per jaar is $96 : 100 = 0,96$.
 Het aantal vossen in 2017 kun je berekenen met $150 \times 0,96$.
b De beginhoeveelheid is $150 \times 0,96 = 144$.
 De formule is $N = 144 \cdot 0,96^t$.
c $914 : 870 = 1,050\dots$
 De groeifactor per jaar is ongeveer 1,05.
d In 2017 zijn er $870 : 1,050\dots \approx 828$ kikkers.
e De formule is $K = 828 \cdot 1,05^t$.

- 019 a** *groefactor* = *nieuwe hoeveelheid* : *oude hoeveelheid*
 De groefactor per week is dan $1080 : 600$ en dat is 1,8.
b $1,8^{\frac{1}{7}} = 1,087\dots$
 De groefactor per dag is ongeveer 1,09.
c $1080 : 600 = 0,443\dots$
 De groefactor per vijf uur is ongeveer 0,44.
 $0,443^{\frac{1}{5}} = 0,849\dots$
 De groefactor per uur is ongeveer 0,85.
d $0,849\dots \times 100 - 100 = -15,0\dots$
 Het aantal neemt per uur met ongeveer 15% af.
e De beginhoeveelheid is $1260 \times 0,849\dots^{-4} \approx 2414$.
 De formule is $R = 2414 \cdot 0,85^t$.

- U3** In de grote stad is de groefactor per 8,5 jaar gelijk aan 2.
 De groefactor per jaar is dan $2^{\frac{1}{8,5}} = 1,084963\dots$
 $1,084963\dots \times 100 - 100 = 8,4963\dots$
 In de grote stad neemt het aantal diefstallen op straat per jaar toe met ongeveer 8,4963% en dat iets minder dan de 8,5% van de nabijgelegen stad.
 Dus in de nabijgelegen stad groeit naar verhouding het aantal diefstallen op straat het snelst.

9.4 Verdubbelingstijd en halveringstijd

- intro** $100\% + 1,05\% = 101,05\%$
 De groefactor per jaar is $101,05 : 100 = 1,0105$.
 $550 \cdot 1,0105^t = 1100$
 Invoer: $y_1 = 550 \times 1,0105^x$ en $y_2 = 1100$
 Venster: x van 0 tot 100 en y van 0 tot 2000
 Optie: snijpunt
 De oplossing is (66,35...; 1100).
 Susan moet ongeveer 66,4 jaar wachten.
 $2400 \cdot 1,0105^t = 4800$
 Invoer: $y_1 = 2400 \times 1,0105^x$ en $y_2 = 4800$
 Venster: x van 0 tot 100 en y van 0 tot 10000
 Optie: snijpunt
 De oplossing is (66,35...; 4800).
 Harma moet ongeveer 66,4 jaar wachten.
 Ze moeten beiden even lang wachten tot het bedrag is verdubbeld.

- 23 a** $100\% + 10,4\% = 110,4\%$
 De groefactor per dag is $110,4 : 100 = 1,104$.
 Het dubbele van 80 is $2 \times 80 = 160$.
 Met de vergelijking $80 \times 1,104^t = 160$ reken je uit na hoeveel dagen het aantal watervlooiën is verdubbeld.
b $80 \cdot 1,104^t = 160$
 Invoer: $y_1 = 80 \times 1,104^x$ en $y_2 = 160$
 Venster: x van 0 tot 20 en y van 0 tot 200
 Optie: snijpunt
 De oplossing is (7,00...; 160).

- c Na ongeveer 7,0 dagen is het aantal watervlooien verdubbeld.
- d $120 \cdot 1,104^t = 240$
 Invoer: $y_1 = 120 \times 1,104^x$ en $y_2 = 240$
 Venster: x van 0 tot 20 en y van 0 tot 300
 Optie: snijpunt
 De oplossing is (7,00...; 160).
 Na ongeveer 7,0 dagen is het aantal watervlooien verdubbeld.
- e De hoeveelheid moet worden verdubbeld, dus vermenigvuldigd met 2.
 De uitkomst van $1,104^t$ moet dus gelijk zijn aan 2.
- f Omdat je steeds het dubbele wilt hebben van een hoeveelheid, moet de uitkomst van $1,104^t$ gelijk zijn aan 2, ongeacht wat die beginhoeveelheid is.

- 24 a** $100\% - 8\% = 92\%$
 De groeifactor per jaar is $92 : 100 = 0,92$.
 $500 \cdot 0,92^t = 250$
 Invoer: $y_1 = 500 \times 0,92^x$ en $y_2 = 250$
 Venster: x van 0 tot 20 en y van 0 tot 500
 Optie: snijpunt
 De oplossing is (8,31...; 250).
 Na ongeveer 8,3 jaar is het aantal insecten gedaald tot 250.
- b** $250 \cdot 0,92^t = 125$
 Invoer: $y_1 = 250 \times 0,92^x$ en $y_2 = 125$
 Venster: x van 0 tot 20 en y van 0 tot 500
 Optie: snijpunt
 De oplossing is (8,31...; 125).
 Na ongeveer 8,3 jaar is het aantal insecten gedaald tot 125.
- c** De hoeveelheid moet worden gehalveerd, dus vermenigvuldigd met 0,5.
 De uitkomst van $0,92^t$ moet dus gelijk zijn aan een 0,5.
- d** Ja, want als je een beginhoeveelheid wilt halveren, moet de uitkomst van $0,92^t$ dus gelijk zijn aan een 0,5, ongeacht wat die beginhoeveelheid is.

- 25 a** $100\% + 2,1\% = 102,1\%$
 De groeifactor per jaar is $102,1 : 100 = 1,021$.
 $1,021^t = 2$
 Invoer: $y_1 = 1,021^x$ en $y_2 = 2$
 Venster: x van 0 tot 50 en y van 0 tot 5
 Optie: snijpunt
 De oplossing is (33,35...; 2).
 De verdubbelingstijd is ongeveer 33,4 jaar.
- b** $100\% - 0,7\% = 99,3\%$
 De groeifactor per jaar is $99,3 : 100 = 0,993$.
 $0,993^t = 0,5$
 Invoer: $y_1 = 0,993^x$ en $y_2 = 0,5$
 Venster: x van 0 tot 200 en y van 0 tot 2
 Optie: snijpunt
 De oplossing is (98,67...; 0,5).
 De halveringstijd is ongeveer 98,7 jaar.

- c** De groeifactor per 5 dagen is $150 : 84 = 1,785\dots$
 De groeifactor per dag is $1,785\dots^{\frac{1}{5}} = 1,122\dots$
 $1,122\dots^t = 2$
 Invoer: $y_1 = 1,122\dots^x$ en $y_2 = 2$
 Venster: x van 0 tot 10 en y van 0 tot 5
 Optie: snijpunt
 De oplossing is $(5,97\dots; 2)$.
 De verdubbelingstijd is ongeveer 6,0 dagen.
- d** De groeifactor per 2 dagen is 0,1.
 De groeifactor per dag is $0,1^{\frac{1}{2}} = 0,31\dots$
 $0,31\dots^t = 0,5$
 Invoer: $y_1 = 0,31\dots^x$ en $y_2 = 0,5$
 Venster: x van 0 tot 5 en y van 0 tot 2
 Optie: snijpunt
 De oplossing is $(0,60\dots; 0,5)$.
 De halveringstijd is ongeveer 0,6 dagen.
- 26 a** $100\% - 6,2\% = 93,8\%$
 De groeifactor per jaar is $93,8 : 100 = 0,938$.
 $0,938^t = 0,5$
 Invoer: $y_1 = 0,938^x$ en $y_2 = 0,5$
 Venster: x van 0 tot 20 en y van 0 tot 2
 Optie: snijpunt
 De oplossing is $(10,82\dots; 0,5)$.
 Na 11 jaar is het aantal leerlingen gehalveerd.
- b** $240 : 2 = 120$, $120 : 2 = 60$ en $60 : 2 = 30$.
 Het aantal leerlingen is dan drie keer gehalveerd.
- c** Het zal dan $3 \times 10,82\dots \approx 33$ jaar duren voordat het aantal leerlingen is afgenomen van 240 tot 30.
- 27 a** In 24 uur halveert de hoeveelheid radioactieve stof zich $24 : 6 = 4$ keer.
 Na 24 uur is er nog $100\% \times 0,5^4 = 6,25\%$ van de radioactieve stof aanwezig.
- b** De groeifactor per 7 dagen is $17,3 : 100 = 0,173$.
 In 7 dagen zitten $7 \times 24 = 168$ uren.
 De groeifactor per uur is $0,173^{\frac{1}{168}} = 0,989\ 61\dots$
 $0,989\ 61\dots \times 100 - 100 = -1,038\dots$
 Per uur neemt de hoeveelheid Mo-99 met ongeveer 1,04% af.
- c** De groeifactor per jaar is ongeveer 0,989,6.
 $0,9896^t = 0,5$
 Invoer: $y_1 = 0,9896^x$ en $y_2 = 0,5$
 Venster: x van 0 tot 200 en y van 0 tot 2
 Optie: snijpunt
 De oplossing is $(66,30\dots; 0,5)$.
 Na ongeveer 66,3 uur is de hoeveelheid Mo-99 in de container gehalveerd.

- 024 a** $100\% - 8\% = 92\%$ De groeifactor per jaar is $92 : 100 = 0,92$.
- b** Het dorp heeft dan $2800 : 2 = 1400$ inwoners.
- c** Met de vergelijking $2800 \times 0,92^t = 1400$ reken je uit hoeveel jaar het duurt om het aantal inwoners van 2800 te laten teruglopen tot 1400.
- d** Invoer: $y_1 = 2800 \times 0,92^t$ en $y_2 = 1400$
 Venster: x van 0 tot 10 en y van 0 tot 5000
 Optie: snijpunt
 De oplossing is $(8,31\dots; 1400)$.
- e** Na ongeveer 8,3 is het aantal inwoners gehalveerd.
- f** Als je links en rechts van het gelijkteken deelt door 2800 herleid je de vergelijking $0,92^t = 0,5$.
- g** De helft van 9600 is $9600 : 2 = 4800$.
 $9600 \cdot 0,92^t = 4800$ links en rechts : 9600
 $0,92^t = 0,5$
- h** Als je de beginhoeveelheid wilt halveren, moet de uitkomst van $0,92^t$ gelijk zijn aan een 0,5, ongeacht wat die beginhoeveelheid is.

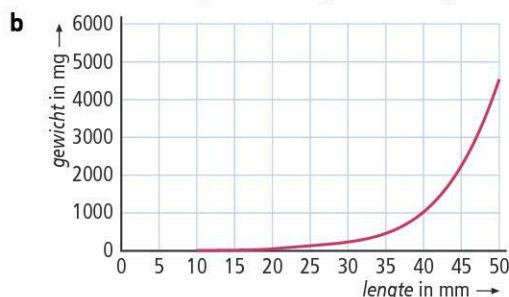
- U4** $100\% + 4,3\% = 104,3\%$
 De groeifactor per jaar is $104,3 : 100 = 1,043$.
 $1,043^t = 2$
 Invoer: $y_1 = 1,043^x$ en $y_2 = 2$
 Venster: x van 0 tot 50 en y van 0 tot 5
 Optie: snijpunt
 De oplossing is $(16,46\dots; 2)$.
 Het aantal vossen verdubbelt zich in ongeveer 16,5... jaar.
 De halveringstijd van het aantal konijnen is dan $16,46\dots \times 2 = 32,92\dots$
 Stel de groeifactor per jaar van het aantal konijnen is g .
 Dan geldt $g^{32,92\dots} = 0,5$.
 Invoer: $y_1 = x^{32,92}$ en $y_2 = 0,5$
 Venster: x van 0 tot 1 en y van 0 tot 2
 Optie: snijpunt
 De oplossing is $(0,979\dots; 0,5)$.
 De groeifactor per jaar is ongeveer 0,979.
 $100 \times 0,979\dots - 100 = -2,08\dots$
 Het aantal konijnen zal dan jaarlijks met ongeveer 2,1% moeten afnemen.

9.5 Logaritmische schaalverdeling

- intro** Een bacterie is 0,001 mm en een virus is 0,0001 mm.
 Een bacterie is $0,0001 : 0,001 = 10$ keer zo groot.
 Een rode bloedcel is 0,01 mm.
 Een rode bloedcel is $0,001 : 0,01 = 10$ keer zo groot.
 Bij de schaalverdeling wordt steeds vermenigvuldigd met 10.

- 28 a** $53 : 12 \approx 4,42$, $233 : 53 \approx 4,40$, $1029 : 233 \approx 4,42$ en $4539 : 1029 \approx 4,41$

De groeifactoren per 10 mm zijn steeds ongeveer hetzelfde, dus is het verband tussen de lengte en het gewicht exponentieel.



- c** Je moet zowel erg kleine getallen als erg grote getallen in het assenstelsel verwerken.

- 29 a** De afstand tussen 2 en 20 is 30 mm en de afstand tussen 20 en 200 is ook 30 mm.

b De afstand tussen 3 en 6 is 9 mm.

c Het getal 60 hoort daarbij.

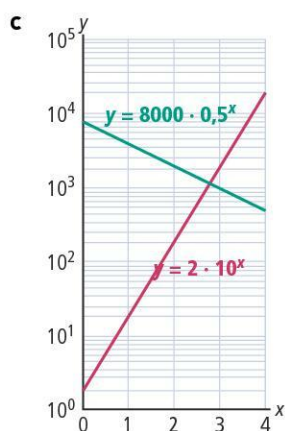
d Deze afstand zal ook 9 mm zijn.

- 30** $D(1, 600)$, $E(2,5; 3000)$ en $F(4, 200)$.

31 a

x	0	1	2	3	4
y	2	20	200	2000	20 000

- b** Er wordt langs de verticale as per stap steeds met 10 vermenigvuldigd.



d

x	0	1	2	3	4
y	8000	4000	2000	1000	500

Zie opdracht 31c.

- d** De grafieken zijn rechte lijnen.

- 32 a** $100 = 10^2$, dus punt A ligt op geen van beide grafieken.
 $10\,000 = 10^4$, dus punt B ligt op de grafiek van soort 1.
 $100\,000 = 10^5$, dus punt C ligt op de grafiek van soort 2.
 $10\,000\,000 = 10^7$, dus punt D ligt op de grafiek van soort 1.

b

t	0	1	2	3	4	5
aantal N	100	1000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000

- c** De formule voor soort 1 is $N = 100 \cdot 10^t$.

- d** In één dag is het aantal bacteriën met 10 vermenigvuldigd. Kortom in één dag is het aantal veel meer dan verdubbeld.

e $10^t = 2$

Invoer: $y_1 = 10^x$ en $y_2 = 2$

Venster: x van 0 tot 1 en y van 0 tot 5

Optie: snijpunt

De oplossing is $(0,30\dots; 2)$.

De verdubbelingstijd is ongeveer 0,3 dagen.

f De beginhoeveelheid is $10^4 = 10\,000$.

De groeifactor per 2 dagen is 10.

De groeifactor per dag is $10^{\frac{1}{2}} = 3,1622\dots$

De formule voor soort 2 is $N = 10\,000 \cdot 3,162^t$.

g $100 \times 3,1622\dots - 100 = 216,22\dots$

Soort 2 groeit met ongeveer 216% per dag.

De groeifactor per drie dagen is $3,1622\dots^3 = 31,622\dots$

$100 \times 31,622\dots - 100 = 3062,27\dots$

Soort 2 groeit met ongeveer 3062% per drie dagen.

33 a Tussen 1959 en 1962 is de grafiek een rechte lijn. Een rechte lijn op logaritmisch papier geeft aan dat er sprake is van een exponentiële groei.

b In 1959 waren er 3 rupsen per 1000 km² en in 1962 waren er 20 000 rupsen per km².

De groeifactor per 3 jaar is $20\,000 : 3 = 6666,6\dots$

De groeifactor per jaar is $6666,6\dots^{\frac{1}{3}} = 18,8\dots$

$18,8\dots \times 100 - 100 = 1782,0\dots$

De jaarlijkse procentuele toename is ongeveer 1782%.

c De groeifactor per dag is $18,8\dots^{\frac{1}{365}} = 1,008\dots$
 $1,008\dots^t = 2$

Invoer: $y_1 = 1,008\dots^x$ en $y_2 = 2$

Venster: x van 0 tot 100 en y van 0 tot 5

Optie: snijpunt

De oplossing is $(86,2\dots; 2)$.

In ongeveer 86 dagen verdubbelde het aantal rupsen per 1000 km².

d Van 1 juli 1962 tot 1 juli 1963 was de jaarlijkse absolute toename van het aantal rupsen het grootst.

e Op 1 juli 1965 waren er 10 000 rupsen per 1000 km² en op 1 juli 1966 waren er 20 rupsen per 1000 km².

De groeifactor per jaar is $20 : 10\,000 = 0,002$.

De formule is $A = 10\,000 \cdot 0,002^t$.

031 a $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10\,000$ en $10^5 = 100\,000$

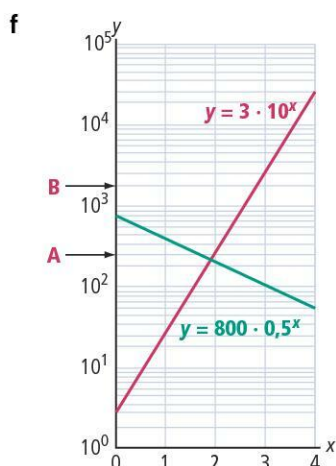
b Er wordt langs de verticale as per stap steeds met 10 vermenigvuldigd. De verticale as heeft dus een log-schaal.

c Pijltje A staat 2 streepjes boven de lijn $10^2 = 100$. Daar hoort dan de waarde 300 bij.

d Pijltje B staat 1 streepje boven de lijn $10^3 = 1000$. Daar hoort dan de waarde 2000 bij.

e

x	0	1	2	3	4
y	3	30	300	3000	30 000



g

x	0	1	2	3	4
y	800	400	200	100	50

Zie opdracht O31f.

h De grafieken zijn rechte lijnen.

- U5** Op de grafiek ligt onder andere het punt (100, 40).
 Dus bij een diameter van 100 cm = 1 m hoort een hoogte van 40 meter.
 $40 = c \cdot 1^a$
 Hieruit volgt dat $c = 40$.
 Op de grafiek ligt ook het punt (10, 10).
 Dus bij een diameter van 10 cm hoort een hoogte van 10 meter.
 $10 = 40 \cdot 0,1^a$
 Invoer: $y_1 = 40 \times 0,1^x$ en $y_2 = 10$
 Venster: x van 0 tot 2 en y van 0 tot 20
 Optie: snijpunt
 De oplossing is (0,602...; 10).
 De waarde van a is ongeveer 0,60.

9.6 Gemengde opdrachten

- 34 a** $100\% - 20\% = 80\%$
 De groeifactor per uur is $80 : 100 = 0,8$.
 De formule is $W = 50 \cdot 0,8^t$.
- b** Na 12 uur is er nog $50 \times 0,8^{12} \approx 3,4$ mg over.
- c** De groeifactor per minuut is $0,8^{\frac{1}{60}} = 0,996...$
 $0,996...^t = 0,5$
 Invoer: $y_1 = 0,996...^x$ en $y_2 = 0,5$
 Venster: x van 0 tot 500 en y van 0 tot 2
 Optie: snijpunt
 De oplossing is (186,3...; 0,5).
 Na ongeveer 186 minuten is de hoeveelheid werkzame stof gehalveerd.
- 35 a** Met $a \geq 2$ wordt aangegeven dat het aantal ananassen minstens twee is.
 Met $m \geq 2$ wordt aangegeven dat het aantal meloenen minstens twee is.
 Met $2a + 1,25m \leq 10$ wordt aangegeven dat het bedrag voor de ananassen en de meloenen bij elkaar maximaal 10 euro mag zijn.

- b** snijpunt met de a -as, $m = 0$

$$2a + 1,25 \times 0 = 10$$

$$2a = 10$$

$$a = 10 : 2 = 5$$

Snijpunt met de a -as is (5, 0).

snijpunt met de m -as, $a = 0$

$$2 \times 0 + 1,25m = 10$$

$$1,25m = 10$$

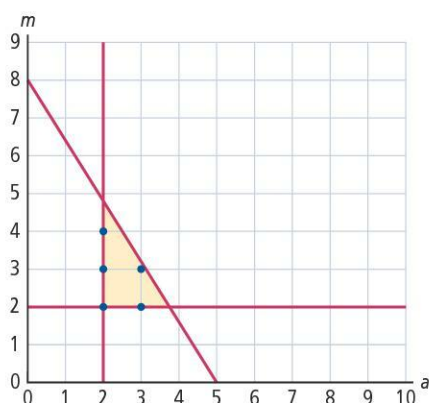
$$m = 10 : 1,25 = 8$$

Snijpunt met de m -as is (0, 8).

De punten op de grenslijn voldoen aan de ongelijkheid.

De coördinaten van (0, 0) invullen geeft $2 \times 0 + 1,25 \times 0 = 0$.

$0 \leq 10$ klopt, dus het gebied waar (0, 0) in ligt, is het gevraagde halfvlak.



- c** Zie opdracht 35b.

Joy kan kiezen uit vijf mogelijkheden.

- 36 a** Bij aanvang van fase B zijn er $10^2 = 100$ bacteriën.

Elk half uur deelt een bacterie zich, dus de groeifactor per half uur is 2.

Je krijgt dan de formule $N = 100 \cdot 2^t$.

- b** $100 \times 2^0 = 100$

Volgens de formule is het aantal bacteriën na 5 halve uren 100 en dat komt overeen met de grafiek.

$$100 \times 2^{10} = 102\,400$$

Volgens de formule is het aantal bacteriën na 15 halve uren 102 400 en dat komt overeen met de grafiek.

$$100 \times 2^{20} = 104\,857\,600$$

Volgens de formule is het aantal bacteriën na 25 halve uren 104 857 600 en dat komt overeen met de grafiek.

- c** 8 uur is gelijk aan 16 halve uren.

In de eerste vijf halve uren verdubbelen de bacteriën zich niet.

Het aantal bacteriën heeft zich dus $16 - 5 = 11$ keer verdubbeld.

$$10^6 : 2^{11} = 488,2\dots$$

De concentratie bacteriën was ongeveer 488 toen het ijs uit de koeling kwam.

37

Stel $p = 1$.

$$100\% + 1\% = 101\%$$

De groeifactor per jaar is $101 : 100 = 1,01$.

$$1,01^t = 2$$

Invoer: $y_1 = 1,01^x$ en $y_2 = 2$

Venster: x van 0 tot 100 en y van 0 tot 5

Optie: snijpunt

De oplossing is (69,66...; 2).

De verdubbelingstijd is 69,66... jaar.

Volgens de vuistregel is de verdubbelingstijd $70 : 1 = 70$ jaar.

$$70 - 69,66... = 0,33...$$

<i>verdubbelingstijd</i>	69,66...	0,33...
<i>percentage</i>	100	?

$$69,66... \times ? = 100 \times 0,33...$$

$$? = 100 \times 0,33... : 69,66... = 0,487...$$

De met de vuistregel berekende verdubbelingstijd wijkt minder dan 1% af van de werkelijke verdubbelingstijd.

Stel $p = 2$.

$$100\% + 2\% = 102\%$$

De groeifactor per jaar is $102 : 100 = 1,02$.

$$1,02^t = 2$$

Invoer: $y_1 = 1,02^x$ en $y_2 = 2$

Venster: x van 0 tot 100 en y van 0 tot 5

Optie: snijpunt

De oplossing is (35,00...; 2).

De verdubbelingstijd is 35,00... jaar.

Volgens de vuistregel is de verdubbelingstijd $70 : 2 = 35$ jaar.

$$35 - 35,00... = -0,00...$$

<i>verdubbelingstijd</i>	35,00...	0,00...
<i>percentage</i>	100	?

$$35,00... \times ? = 100 \times 0,00...$$

$$? = 100 \times 0,00... : 35,00... = 0,00...$$

De met de vuistregel berekende verdubbelingstijd wijkt minder dan 1% af van de werkelijke verdubbelingstijd.

Stel $p = 3$.

$$100\% + 3\% = 103\%$$

De groeifactor per jaar is $103 : 100 = 1,03$.

$$1,03^t = 2$$

Invoer: $y_1 = 1,03^x$ en $y_2 = 2$

Venster: x van 0 tot 100 en y van 0 tot 5

Optie: snijpunt

De oplossing is (23,44...; 2).

De verdubbelingstijd is 23,44... jaar.

Volgens de vuistregel is de verdubbelingstijd $70 : 3 = 23,33...$ jaar.

$$23,33... - 23,44... = 0,11...$$

<i>verdubbelingstijd</i>	23,44...	0,11...
<i>percentage</i>	100	?

$$23,44... \times ? = 100 \times 0,11...$$

$$? = 100 \times 0,11... : 23,44... = 0,49...$$

De met de vuistregel berekende verdubbelingstijd wijkt minder dan 1% af van de werkelijke verdubbelingstijd.

Stel $p = 4$.

$$100\% + 4\% = 104\%$$

De groeifactor per jaar is $104 : 100 = 1,04$.

$$1,04^t = 2$$

Invoer: $y_1 = 1,04^x$ en $y_2 = 2$

Venster: x van 0 tot 100 en y van 0 tot 5

Opti: snijpunt

De oplossing is (17,67...; 2).

De verdubbelingstijd is 17,67... jaar.

Volgens de vuistregel is de verdubbelingstijd $70 : 4 = 17,5$ jaar.

$$17,5 - 17,67... = -0,17...$$

<i>verdubbelingstijd</i>	17,67...	0,17...
<i>percentage</i>	100	?

$$17,67... \times ? = 100 \times 0,17...$$

$$? = 100 \times 0,17... : 17,67... = 0,97...$$

De met de vuistregel berekende verdubbelingstijd wijkt minder dan 1% af van de werkelijke verdubbelingstijd.

Stel $p = 5$.

$$100\% + 5\% = 105\%$$

De groeifactor per jaar is $105 : 100 = 1,05$.

$$1,05^t = 2$$

Invoer: $y_1 = 1,05^x$ en $y_2 = 2$

Venster: x van 0 tot 100 en y van 0 tot 5

Optie: snijpunt

De oplossing is (14,20...; 2).

De verdubbelingstijd is 14,20... jaar.

Volgens de vuistregel is de verdubbelingstijd $70 : 5 = 14$ jaar.

$$14 - 14,20... = -0,20...$$

<i>verdubbelingstijd</i>	14,20...	0,20...
<i>percentage</i>	100	?

$$14,20... \times ? = 100 \times 0,20...$$

$$? = 100 \times 0,20... : 14,20... = 1,45...$$

De met de vuistregel berekende verdubbelingstijd wijkt meer dan 1% af van de werkelijke verdubbelingstijd.

Conclusie:

Voor de percentages 1, 2, 3 en 4 wijkt de met de vuistregel berekende verdubbelingstijd minder dan 1% af van de werkelijke verdubbelingstijd.

38 $100\% + 0,7\% = 100,7\%$

De groeifactor per jaar is $100,7 : 100 = 1,007$.

De formule voor de grootte van de wereldbevolking is $W = 6,9 \cdot 1,007^t$.

Hierin is W in miljarden en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2010.

<i>tijd</i>	<i>wereldbevolking</i>	<i>gemiddelde voetafdruk</i>	<i>totale voetafdruk</i>
2010	6,9	2,85	19,665
...	...	...	...
2023	7,55	1,42	10,728
2024	7,61	1,31	9,966
...	...	...	...
2037	8,33	1,20	9,996
2038	8,38	1,20	10,066

In de jaren 2024 tot en met 2037 is de totale voetafdruk minder dan 10 miljard mha.

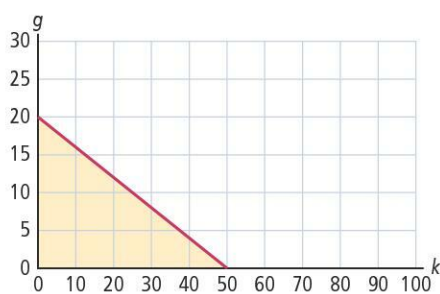
Samenvatting

S1 Bij grafiek A en B heeft de verticale as een logaritmische schaalverdeling. Bij deze grafieken wordt per stap steeds met 10 vermenigvuldigd, bij grafiek C wordt er per stap steeds 5 opgeteld.

S2 De waarde van de auto was bij aanschaf $18\,600 + 3,5 \times 2800 = 28\,400$ euro. De formule is $W = 28\,400 - 2800t$.

S3 a Met $k \geq 0$ wordt aangegeven dat Herman 0 of meer kleine knikkers koopt. Met $g \geq 0$ wordt aangegeven dat Herman 0 of meer grote knikkers koopt. Met $0,1k + 0,25g \leq 5$ wordt aangegeven dat het bedrag voor beide soorten knikkers bij elkaar maximaal 5 euro mag zijn.

b De coördinaten van $(0, 0)$ invullen geeft $0,1 \times 0 + 0,25 \times 0 = 0$. $0 \leq 5$ klopt, dus het gebied waar $(0, 0)$ in ligt, is het gevraagde halfvlak.



c Alleen de roosterpunten in het getekende gebied zijn een oplossing, want je kunt geen halve knikkers kopen.

S4 De groeifactor per jaar is $415,63 : 410,3 = 1,0129\dots$. De huurprijs in 2017 was $410,3 : 1,0129\dots^2 \approx 399,84$. De formule is $H = 399,84 \cdot 1,013^t$.

- S5** $100\% - 1,3\% = 98,7\%$
 De groeifactor per jaar is $98,7 : 100 = 0,987$.
 $0,987^t = 0,5$
 Invoer: $y_1 = 0,987^x$ en $y_2 = 0,5$
 Venster: x van 0 tot 100 en y van 0 tot 2
 Optie: snijpunt
 De oplossing is $(52,97\dots; 0,5)$.
 Na ongeveer 53 jaar (636 maanden) is het aantal inwoners gehalveerd.
- S6 a** In het begin waren er $10^5 = 100\,000$ bacteriën.
b Na 6 minuten waren er 200 bacteriën.

Test jezelf

- T1 a** Het gemiddelde gewicht van de komkommers is dan $2,4 \times 1,14^0 = 2,4$ gram.
b $1,14 \times 100 - 100 = 14$
 Het gemiddelde gewicht neemt met 14% per dag toe.
c De groeifactor per week is $1,14^7 = 2,50\dots$
 $2,50\dots \times 100 - 100 = 150,2\dots$
 Het gemiddelde gewicht neemt met ongeveer 150% per week toe.
d De groeifactor per uur is $1,14^{\frac{1}{24}} = 1,005\dots$
 $1,005\dots^t = 2$
 Invoer: $y_1 = 1,005\dots^x$ en $y_2 = 2$
 Venster: x van 0 tot 500 en y van 0 tot 5
 Optie: snijpunt
 De oplossing is $(126,9\dots; 2)$.
 Na ongeveer 127 uur is het gemiddelde gewicht verdubbeld.
e Eén dag en 3 uren is 27 uren.
 De groeifactor per 27 uur is 2.
 De groeifactor per uur is $2^{\frac{1}{27}} = 1,026\dots$
 De groeifactor per dag is $1,026\dots^{24} = 1,851\dots$
 $1,851\dots \times 100 - 100 = 85,1\dots$
 Het gemiddelde gewicht van deze komkommers neemt met ongeveer 85% per dag toe.
- T2 a** Uit het gegeven dat bij elke 100 meter die je in een mijn afdaalt, de temperatuur drie graden stijgt, blijkt dat er sprake is van een lineair verband.
b De richtingscoëfficiënt is $3 : 100 = 0,03$ en het startgetal is 17.
 De formule is $T = 17 + 0,03d$.
c $17 + 0,03 \times 680 = 37,4$
 Op een diepte van 680 meter is het 37,4 °C.
d $17 + 0,03d = 30$
 $0,03d = 13$
 $d = 13 : 0,03 = 433,3\dots$
 Op een diepte van ongeveer 433 meter is het 30 °C.

- T3 a** Met $h \geq 0$ wordt aangegeven dat Karolina 0 of meer gram hazelnoten koopt.
Met $m \geq 0$ wordt aangegeven dat Karolina 0 of meer gram macadamianoten koopt.

De hazelnoten kosten $\text{€ } 3,75 : 250 = \text{€ } 0,015$ per gram en de macadamianoten kosten $\text{€ } 10,- : 250 = \text{€ } 0,04$ per gram.

Met $0,015h + 0,04m \leq 15$ wordt aangegeven dat het bedrag voor beide soorten noten bij elkaar maximaal 15 euro mag zijn.

Met $h + m \leq 500$ wordt aangegeven dat beide soorten noten bij elkaar maximaal 500 gram mag zijn.

- b** snijpunt met de h -as, $m = 0$

$$0,015h + 0,04 \times 0 = 15$$

$$0,015h = 15$$

$$h = 15 : 0,015 = 1000$$

Snijpunt met de h -as is (1000, 0).

snijpunt met de m -as, $h = 0$

$$0,015 \times 0 + 0,04m = 15$$

$$0,04m = 15$$

$$m = 15 : 0,04 = 375$$

Snijpunt met de m -as is (0; 375).

De punten op de grenslijn voldoen aan de ongelijkheid.

De coördinaten van (0, 0) invullen geeft $0,015 \times 0 + 0,04 \times 0 = 0$.

$0 \leq 15$ klopt, dus het gebied waar (0, 0) in ligt, is het gevraagde halfvlak.

snijpunt met de h -as, $m = 0$

$$h + 0 = 500$$

$$h = 500$$

Snijpunt met de h -as is (500, 0).

snijpunt met de m -as, $h = 0$

$$0 + m = 500$$

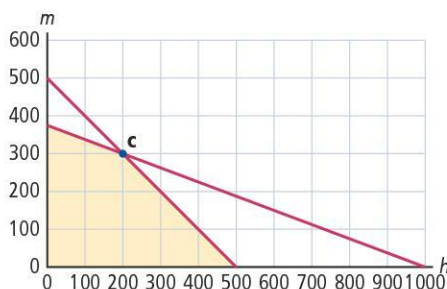
$$m = 500$$

Snijpunt met de m -as is (0; 500).

De punten op de grenslijn voldoen aan de ongelijkheid.

De coördinaten van (0, 0) invullen geeft $0 + 0 = 0$.

$0 \leq 500$ klopt, dus het gebied waar (0, 0) in ligt, is het gevraagde halfvlak.



- c** Zie opdracht T3b.

Ze kiest voor 200 gram hazelnoten en 300 gram macadamianoten.

T4 a $100\% + 2,2\% = 102,2\%$

De groeifactor per jaar is $102,2 : 100 = 1,022$.

Een formule voor het aantal gevulde oliebollen is $G = 4612 \cdot 1,022^t$. Hierin is G het aantal gevulde oliebollen en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2010.

Een formule voor het aantal natuurlijke oliebollen is $N = 8642 - 160t$. Hierin is N het aantal natuurlijke oliebollen en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2010.

$$4612 \cdot 1,022^t = 8642 - 160t$$

Invoer: $y_1 = 4612 \times 1,022^x$ en $y_2 = 8642 - 160x$

Venster: x van 0 tot 20 en y van 0 tot 10 000

Optie: snijpunt

De oplossing is (14,49...; 6322,56...).

Hij zal 15 jaar later voor het eerst meer gevulde dan natuurlijke oliebollen verkopen. Dat is in 2025.

b De totale verkoop kun je bereken met de formule

$V = 4612 \cdot 1,022^t + 8642 - 160t$. Hierin is V de totale verkoop en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2010.

Invoer: $y_1 = 4612 \times 1,022^t + 8642 - 160t$

Venster: x van 0 tot 50 en y van 0 tot 20 000

Optie: minimum

De top is (21,43...; 12 565,47...).

Na 22 jaar zal de totale verkoop voor het eerst gaan stijgen. Dat is in 2032.

T5 a $100\% - 3\% = 97\%$

De groeifactor per week is $97 : 100 = 0,97$.

$$0,97^t = 0,5$$

Invoer: $y_1 = 0,97^x$ en $y_2 = 0,5$

Venster: x van 0 tot 50 en y van 0 tot 2

Optie: snijpunt

De oplossing is (22,75...; 0,5).

Na ongeveer 23 weken is de lading van de batterij gehalveerd.

b Een formule waarmee je de lading in procenten van batterij A na t weken kan berekenen is $L = 100 \cdot 0,97^t$.

Als 90% van de lading weg is, dan is er nog 10% over.

$$100 \cdot 0,97^t = 10$$

Invoer: $y_1 = 100 \times 0,97^x$ en $y_2 = 10$

Venster: x van 0 tot 100 en y van 0 tot 100

Optie: snijpunt

De oplossing is (75,59...; 10).

Na ongeveer 75,6 weken is batterij A niet meer bruikbaar.

$$100\% - 4\% = 96\%$$

De groeifactor per week is $96 : 100 = 0,96$.

Voor batterij B geldt de formule $L = 100 \cdot 0,96^t$.

$$100 \cdot 0,96^t = 10$$

Invoer: $y_1 = 100 \times 0,96^x$ en $y_2 = 10$

Venster: x van 0 tot 100 en y van 0 tot 100

Optie: snijpunt

De oplossing is (56,40...; 10).

Na ongeveer 56,4 weken is batterij B niet meer bruikbaar.

Een batterij van merk A is $75,6 - 56,4 = 19,2$ weken langer bruikbaar.

- c De lading van batterij A kun je berekenen met $L = 60 \cdot 0,97^t$ en de lading van batterij B kun je berekenen met $L = 70 \cdot 0,96^t$.

$$60 \cdot 0,97^t = 70 \cdot 0,96^t$$

Invoer: $y_1 = 60 \times 0,97^x$ en $y_2 = 70 \times 0,96^x$

Venster x van 0 tot 100 en y van 0 tot 100

Optie: snijpunt

De oplossing is (14,87...; 38,13...).

Na ongeveer 14,9 weken is de lading in de batterijen gelijk aan elkaar.

- T6 a $P(1, 10000)$ en $Q(3, 6000)$.

- b De groefactor per 2 stapjes is $6000 : 10000 = 0,6$.

De groefactor per 1 stapje is $0,6^{\frac{1}{2}} = 0,7745\dots$

De beginhoeveelheid is $10000 : 0,7745\dots = 12909,9\dots$

De formule is $N = 12910 \cdot 0,775^t$.

- c $0,7745\dots^t = 0,5$

Invoer: $y_1 = 0,7745\dots^x$ en $y_2 = 0,5$

Venster: x van 0 tot 10 en y van 0 tot 2

Optie: snijpunt

De oplossing is (2,71...; 0,5).

De halveringstijd is ongeveer $2,7 \times 10 = 27$ jaar..

Extra oefening

- E1 a Uit het gegeven dat bij elke 1000 meter stijging, de temperatuur 6 graden daalt, blijkt dat er sprake is van een lineair verband.

- b $6 : 10 = 0,6$

Bij een stijging van 100 meter daalt de temperatuur met $0,6^\circ\text{C}$.

- c Per stijging van één meter daalt de temperatuur met $6 : 1000 = 0,006^\circ\text{C}$.

$$3250 - 1225 = 2025$$

$$14 - 2025 \times 0,006 = 1,85$$

Op een hoogte van 3250 meter is het $1,85^\circ\text{C}$.

- d $14 - 10 = 4$

$$4 : 0,006 = 666,6\dots$$

$$1225 + 666,6\dots = 1892,6\dots$$

Op een hoogte van ongeveer 1893 meter is de temperatuur ongeveer 10°C .

- E2 a Met $g \geq 0$ wordt aangegeven dat er 0 of meer m^2 gras moet komen.

Met $t \geq 0$ wordt aangegeven dat 0 of meer m^2 betegeld moet worden.

Met $g + t \leq 30$ wordt aangegeven dat de oppervlakte van het gras en terras samen niet meer dan 30 m^2 mag zijn.

- b** snijpunt met de g -as, $t = 0$

$$g + 0 = 30$$

$$g = 30$$

Snijpunt met de g -as is $(30, 0)$.

snijpunt met de t -as, $g = 0$

$$0 + t = 30$$

$$t = 30$$

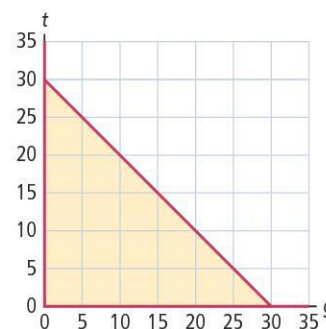
Snijpunt met de t -as is $(0; 30)$.

De punten op de grenslijn voldoen aan de ongelijkheid.

De coördinaten van $(0, 0)$ invullen geeft $0 + 0 = 0$.

$0 \leq 30$ klopt, dus het gebied waar $(0, 0)$ in ligt, is het gevraagde halfvlak.

- c** Alle punten in het getekende gebied zijn een oplossing, want Wouter kan bijvoorbeeld ook $8,5 \text{ m}^2$ gras aanleggen en $14,3 \text{ m}^2$ betegelen.



- E3 a** $100\% + 2,8\% = 102,8\%$

De groeifactor per jaar is $102,8 : 100 = 1,028$.

De groeifactor per 10 jaar is $1,028^{10} = 1,3180\dots$

$$1,3180\dots \times 100 - 100 = 31,80\dots$$

Haar bruto maandinkomen is na tien jaar met ongeveer $31,8\%$ gestegen.

- b** De formule is $B = 1760 \cdot 1,028^t$.

- c** $1760 \cdot 1,028^t = 2000$

Invoer: $y_1 = 1760 \times 1,028^x$ en $y_2 = 2000$

Venster: x van 0 tot 10 en y van 0 tot 3000

Optie: snijpunt

De oplossing is $(4,62\dots; 2000)$.

Na 5 jaar zal Linda's bruto maandinkomen voor het eerst meer dan € 2.000,- zijn. Dat is in het jaar 2020.

- E4 a** $100\% - 16\% = 84\%$

De groeifactor per jaar is $84 : 100 = 0,84$.

$$0,84^t = 0,5$$

Invoer: $y_1 = 0,84^x$ en $y_2 = 0,5$

Venster: x van 0 tot 10 en y van 0 tot 2

Optie: snijpunt

De oplossing is $(3,97\dots; 0,5)$.

Na ongeveer 4 jaar is de waarde van de auto gehalveerd.

- b** $100\% + 0,8\% = 100,8\%$

De groeifactor per jaar is $100,8 : 100 = 1,008$.

$$1,008^t = 2$$

Invoer: $y_1 = 1,008^x$ en $y_2 = 2$

Venster: x van 0 tot 100 en y van 0 tot 5

Optie: snijpunt

De oplossing is $(86,98\dots; 2)$.

Na ongeveer 87 jaar is de waarde van de oldtimer verdubbeld.

- E5** $A(0, 2000)$ $B(1, 10)$, $C(2, 300)$, $D(3, 3)$ en $E(5, 30)$.

E6 a Elke kubieke meter water kost $0,57 + 0,37 = 0,94$ euro.

9% belasting geeft een factor $(100 + 9) : 100 = 109$.

$$E = 1,09(38,48 + 0,94w)$$

$$E = 41,9432 + 1,0246w$$

b $41,9432 + 1,0246w = 294,03$

$$1,0246w = 252,0868$$

$$w = 252,0868 : 1,0246 = 246,0\dots$$

De familie Yildiz heeft dat jaar ongeveer 246 kubieke meter water verbruikt.

E7 a Met $m \geq 10$ wordt aangegeven dat er minstens 10 middelgrote bedrijven moeten vestigen.

Met $m \leq 30$ wordt aangegeven dat er hoogstens 30 middelgrote bedrijven moeten vestigen.

Met $g \geq 0$ wordt aangegeven dat er 0 of meer grote bedrijven moeten vestigen.

Met $2m + 10g \leq 100$ wordt aangegeven dat de totale oppervlakte van de bedrijven maximaal 100 hectare mag zijn.

b snijpunt met de g -as, $m = 0$

$$2 \times 0 + 10g = 100$$

$$10g = 100$$

$$g = 100 : 10 = 10$$

Snijpunt met de g -as is $(10, 0)$.

snijpunt met de m -as, $g = 0$

$$2m + 10 \times 0 = 100$$

$$2m = 100$$

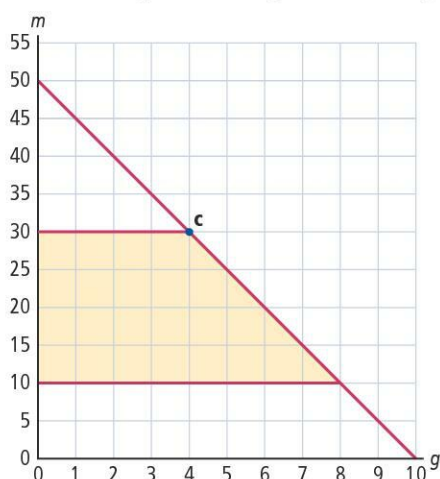
$$m = 100 : 2 = 50$$

Snijpunt met de m -as is $(0; 50)$.

De punten op de grenslijn voldoen aan de ongelijkheid.

De coördinaten van $(0, 0)$ invullen geeft $2 \times 0 + 10 \times 0 = 0$.

$0 \leq 100$ klopt, dus het gebied waar $(0, 0)$ in ligt, is het gevraagde halfvlak.



c Zie opdracht E7b.

Er kunnen maximaal $4 + 30 = 34$ bedrijven zich vestigen.

10 Verdelingen (met ICT)

Voorkennis

- V1
- a De populatie bestaat uit alle bezoekers van de bioscoop.
- b Er zijn meerdere mogelijkheden.
- Heeft u vorig jaar in onze bioscoop een of meerdere films gezien?
 - Heeft u vorig jaar meer of minder films gezien dan het jaar daarvoor?
 - Indien u minder films heeft gezien, kunt u dan de reden vertellen waarom?
 - De bioscoop was vorig jaar minder bereikbaar vanwege allerlei verbouwingen. Is dat van invloed geweest hoe vaak u in onze bioscoop bent geweest?
 - Wat vindt u van ons filmaanbod dit jaar, vergeleken met het filmaanbod van het jaar ervoor?
- c Er zijn meerdere mogelijkheden.
- Het aantal films gezien vorig jaar.
 - Het aantal films gezien het jaar daarvoor.
- d Er zijn meerdere mogelijkheden.
- 'Er kan op grond van het statistisch onderzoek niet worden vastgesteld wat de reden is dat er vorig jaar minder bioscoopbezoekers zijn geweest.'
 - 'Op grond van het statistisch onderzoek is het aannemelijk dat het geringe aanbod van grote films van invloed is geweest op het lagere aantal bezoekers'.

- V2
- a De statistische variabelen zijn *stamnummer*, *leerlingnummer*, *geslacht*, *studie*, *niveau*, *cijfer rekentoets*, *cijfer rekentoets herkansing*, *eindresultaat* en *hoger dan 7*.

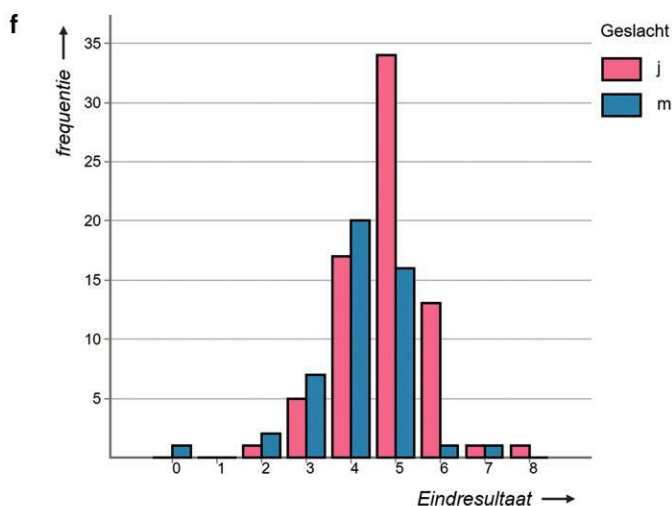
- b De statistische variabele *niveau* neemt de waarden BB en KB aan.

c

Eindresultaat	niveau		Totaal
	BB	KB	
0	0	1	1
1	0	0	0
2	2	1	3
3	4	8	12
4	8	29	37
5	17	33	50
6	3	11	14
7	0	2	2
8	0	1	1
Totaal	34	86	120

Eindresultaat	niveau		Totaal
	BB	KB	
0	0,0%	1,2%	-
1	0,0%	0,0%	-
2	5,9%	1,2%	-
3	11,8%	9,3%	-
4	23,5%	33,7%	-
5	50,0%	38,4%	-
6	8,8%	12,8%	-
7	0,0%	2,3%	-
8	0,0%	1,2%	-
Totaal	100%	100%	-

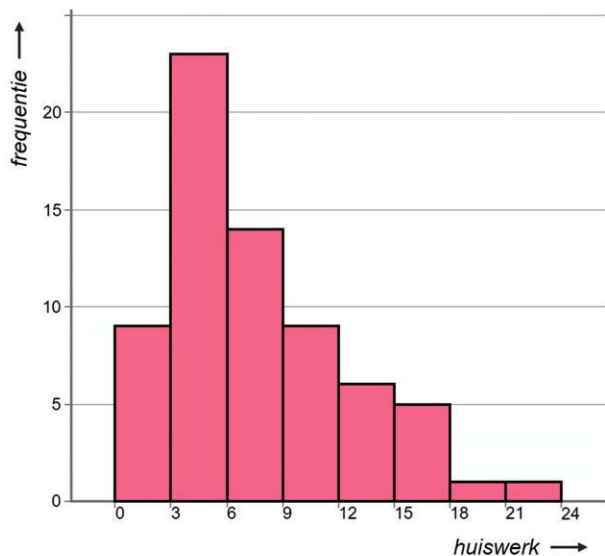
- d 3 van de 34 BB-leerlingen hebben een voldoende.
Dat is $3 : 34 \times 100\% \approx 8,8\%$.
14 van de 86 KB-leerlingen hebben een voldoende.
Dat is $14 : 86 \times 100\% \approx 16,3\%$.
- e Als je let op het percentage voldoende's dan hebben de KB-leerlingen de rekentoets het beste gemaakt.



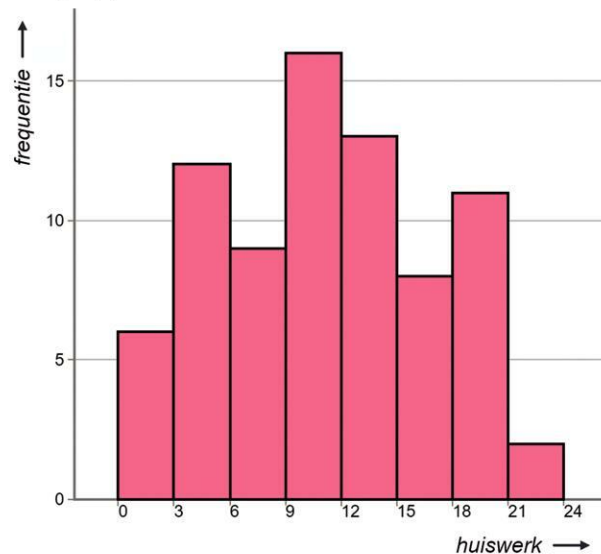
Het staafdiagram van de jongens ligt iets verder naar rechts dan die van de meisjes. Het lijkt of de jongens het beter hebben gedaan.

- V3 a** Vanwege de symmetrie ligt de waarneming met de hoogste frequentie (modus) in het midden onder de top. De mediaan ligt daar ook, want dan zijn er even veel waarnemingen links en rechts. Het gemiddelde ligt daar ook, want er zijn links en rechts even veel waarnemingen die even zwaar mee tellen.
- b** A klokvormig
De meeste pakken suiker hebben het gemiddelde gewicht er zullen even veel pakken zijn met iets meer of iets minder suiker.
- B meertoppig
Er zijn gedurende het jaar meerdere momenten waarop er schoolvakanties zijn waarin veel Nederlanders op vakantie gaan.
- C min of meer uniform
In elke maand zullen ongeveer even veel leerlingen jarig zijn.
- V4 a** Het staafdiagram bij de variabele *Nederlands* is min of meer klokvormig. Het staafdiagram bij de variabele *Engels* is scheef en heeft een staart naar links.
Het staafdiagram bij de variabele *wiskunde* is min of meer klokvormig.
- b** Maak een tabel met de kentallen.
Het gemiddelde van *Nederlands* is 5,9.
Het gemiddelde van *Engels* is 6,4.
Het gemiddelde van *wiskunde* is 6,2.
- c** De spreidingsbreedte bij *Nederlands* is $7,6 - 4,1 = 3,5$.
De spreidingsbreedte bij *Engels* is $8,2 - 4,1 = 4,1$.
De spreidingsbreedte bij *wiskunde* is $8,5 - 3,7 = 4,8$.
Wiskunde heeft de grootste spreidingsbreedte.

V5 a jongens(m)



meisjes(v)



- b Waarschijnlijk is de standaardafwijking bij de meisjes het grootst, want er zijn meer meisjes dan jongens die duidelijk minder of meer dan het gemiddelde aan hun huiswerk besteden.
- c Maak een tabel met de kentallen en splits op geslacht.
De standaardafwijking bij de jongens is 4,67.
De standaardafwijking bij de meisjes is 5,62.

d

Variabele	geslacht	
	m	v
Aantal waarnemingen	68	77
Gemiddelde	7,00	10,78
Mediaan	6	10
Modus	3	10
Minimum	1	1
Maximum	21	21
Standaardafwijking	4,67	5,62
Eerste kwartiel	3	6
Derde kwartiel	10	15

De spreidingsbreedte bij de jongens en bij de meisjes is $21 - 1 = 20$ uur.

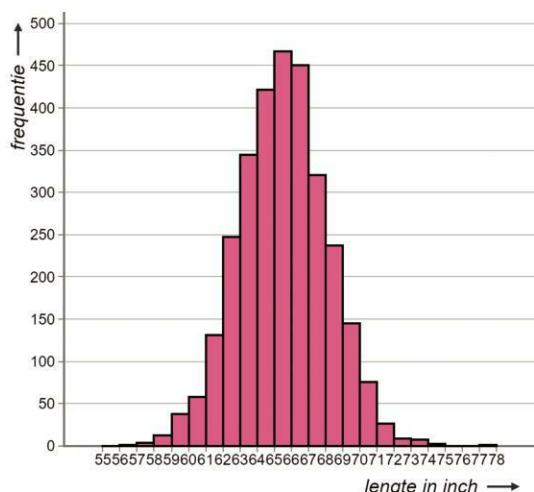
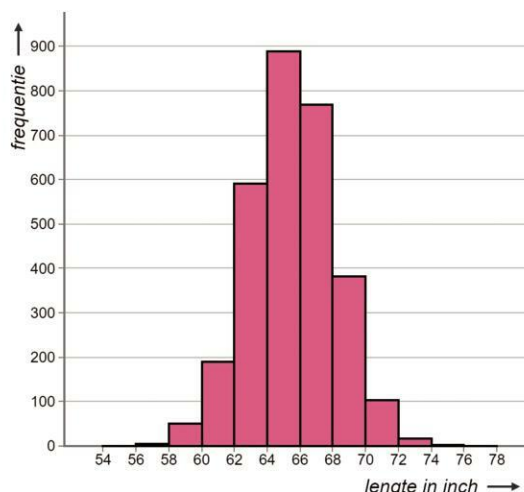
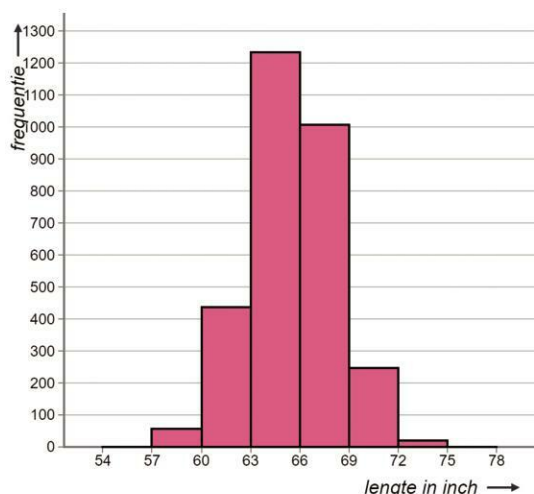
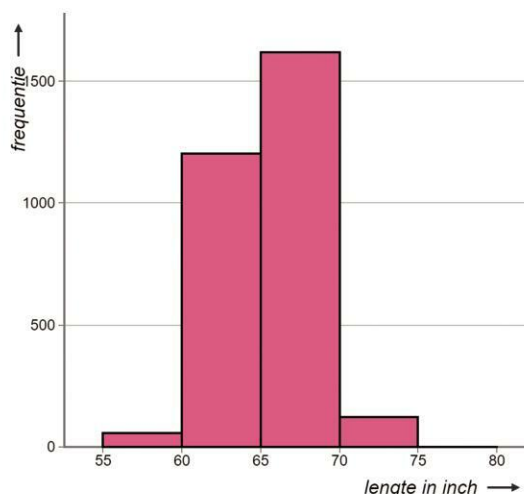
De kwartielfstand bij de jongens is $10 - 3 = 7$ uur.

De kwartielfstand bij de meisjes is $15 - 6 = 9$ uur.

10.1 Normale verdeling

intro Hoe nauwkeurig de vulmachine ook is, er zal altijd wel eens iets meer of iets minder dan een liter in de fles terechtkomen. Toch zullen de meeste flessen 1 liter hebben. Er zullen weinig flessen zijn die veel meer dan 1 liter hebben of veel minder dan 1 liter hebben. Het staafdiagram zal klokvormig worden.

1 a



b Bij klassenbreedte 1 benadert het staafdiagram het best de klokvorm.

2 a Het gemiddelde is 65,5 inch en de standaardafwijking is 2,6 inch.

b $\mu - \sigma = 65,5 - 2,6 = 62,9$ inch

$\mu + \sigma = 65,5 + 2,6 = 68,1$ inch

c De grafiek verandert daar van toenemend dalend naar afnemend dalend.

d Sorteert de data van de lengte oplopend.

Er zijn 2524 criminelen waarvan de lengte kleiner is dan 68,1 inch.

Er zijn 492 criminelen met een lengte kleiner of gelijk aan 62,9 inch.

Er zijn $2524 - 492 = 2032$ criminelen met een lengte tussen 62,9 inch en 68,1 inch.

e $2032 : 3000 \times 100\% = 67,7\ldots\%$

Ongeveer 68% van de criminelen hadden een lengte tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$.

f $\mu - 2\sigma = 65,5 - 2 \times 2,6 = 60,3$

$\mu + 2\sigma = 65,5 + 2 \times 2,6 = 70,7$

g Het aantal criminelen met een lengte tussen 60,3 inch en 70,7 inch was

$2934 - 70 = 2864$

$2864 : 3000 \times 100\% = 95,4\ldots\%$

Ongeveer 95% van de criminelen hadden een lengte tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$.

h $\mu - 3\sigma = 65,5 - 3 \times 2,6 = 57,7$

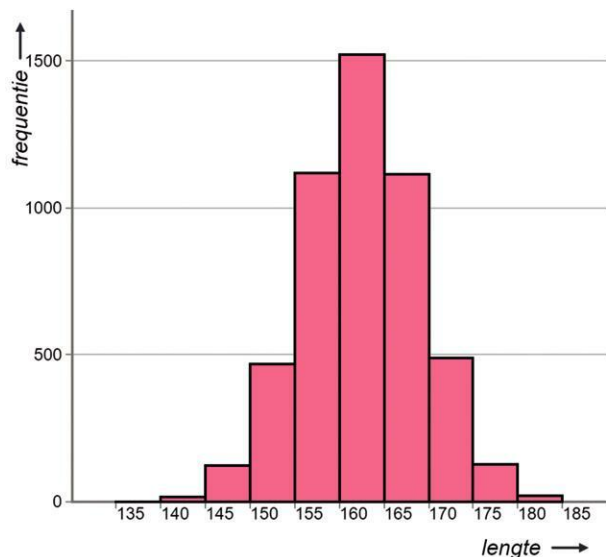
$\mu + 3\sigma = 65,5 + 3 \times 2,6 = 73,3$

Er zijn 2990 criminelen met een lengte tussen 57,7 inch en 73,3 inch.

$2990 : 3000 \times 100\% = 99,66\ldots\%$

Ongeveer 100% van de mannen hadden een lengte tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu + 3\sigma$.

3 a



b Ja, het staafdiagram is bij benadering klokvormig.

c Maak een tabel met de kentallen.

Het gemiddelde is 162,05 cm en de standaardafwijking 6,50 cm.

$$\mu - \sigma = 162,05 - 6,50 = 155,55 \text{ en } \mu + \sigma = 162,05 + 6,50 = 168,55$$

$$\mu - 2\sigma = 162,05 - 2 \times 6,50 = 149,05 \text{ en } \mu + 2\sigma = 162,05 + 2 \times 6,50 = 175,05$$

d Het aantal vrouwen met een lengte tussen 155,55 cm en 168,55 cm is 3427.

$$3427 : 5001 \times 100\% = 68,5\ldots\%$$

Ongeveer 69% van de vrouwen hadden een lengte tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$.

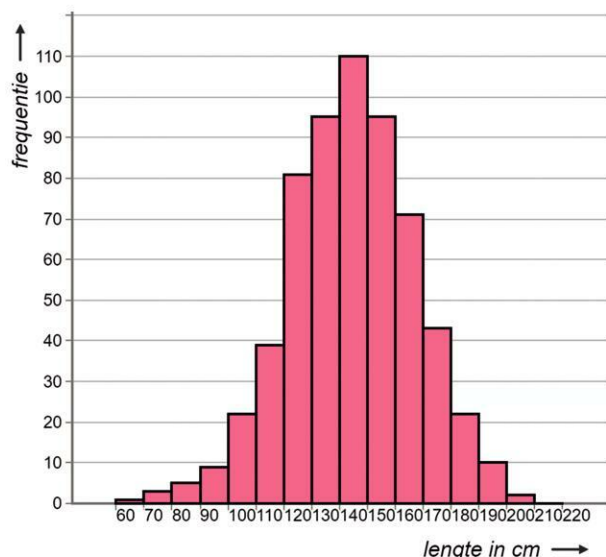
e Het aantal vrouwen met een lengte tussen 149,05 cm en 175,05 cm is 4739.

$$4739 : 5001 \times 100 = 94,7\ldots\%$$

Ongeveer 95% van de vrouwen hadden een lengte tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$.

f De lengte van de vrouwen was redelijk normaal verdeeld, want het staafdiagram is min of meer klokvormig en de vuistregels kloppen redelijk.

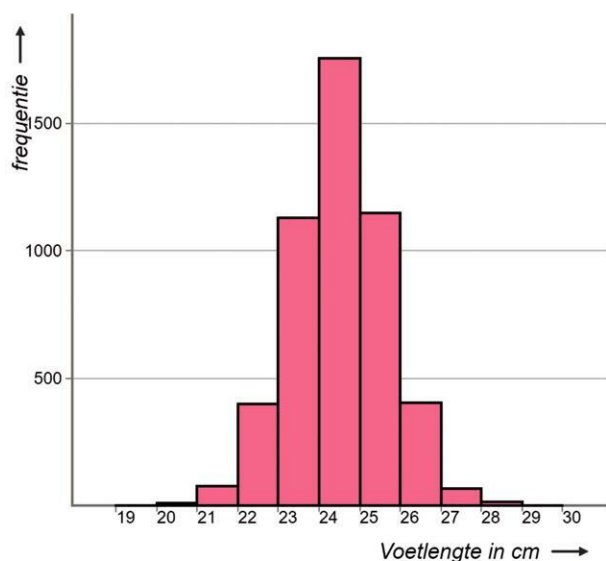
4 a



b Ja, het staafdiagram is bij benadering klokvormig.

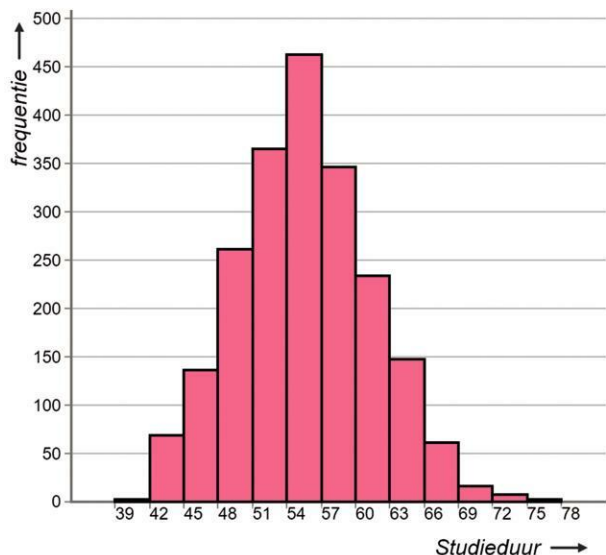
- c Met kentallen vind je dat het gemiddelde 143,73 cm en de standaardafwijking 22,65 cm is.
 $\mu - \sigma = 143,73 - 22,65 = 121,08$ en $\mu + \sigma = 143,73 + 22,65 = 166,38$ cm.
 Sorteert de lengte oplopend.
 Van de 604 planten hebben 472 planten een lengte tussen 121,08 en 166,38.
 Dit is $472 : 608 \times 100\% \approx 69\%$.
 $\mu - 2\sigma = 143,73 - 2 \times 22,65 = 98,43$ en $\mu + 2\sigma = 143,73 + 2 \times 22,65 = 189,03$.
 Van de 604 planten hebben 578 planten een lengte tussen 98,43 en 189,03 cm.
 Dit is $578 : 608 \times 100\% \approx 95\%$.
 De lengte van de planten is normaal verdeeld, want het staafdiagram is min of meer klokvormig en de vuistregels kloppen.

5 a



- b Ja, het staafdiagram is bij benadering klokvormig.
- c Met kentallen vind je dat het gemiddelde 24,45 cm en de standaardafwijking 1,16 cm is.
 $\mu - \sigma = 24,45 - 1,16 = 23,29$ en $\mu + \sigma = 24,45 + 1,16 = 25,61$.
 Van de 5001 vrouwen hebben 3551 vrouwen een voetlengte tussen 23,29 en 25,61 cm.
 Dit is $3551 : 5001 \times 100\% \approx 71\%$.
 $\mu - 2\sigma = 24,45 - 2 \times 1,16 = 22,13$ en $\mu + 2\sigma = 24,45 + 2 \times 1,16 = 26,77$.
 Van de 5001 vrouwen hebben 4772 vrouwen een voetlengte tussen 22,13 cm en 26,77 cm.
 Dit is $4772 : 5001 \times 100\% \approx 95,4\%$.
 De voetlengte van de vrouwen is bij benadering normaal verdeeld, want het staafdiagram is min of meer klokvormig en de vuistregels kloppen redelijk.
- 6 a De grafiek schuift naar links en de vorm van de grafiek blijft gelijk.
 b De grafiek wordt smaller en hoger, maar verschuift niet naar links of rechts.
- 7 a Grafiek 5 heeft het grootste gemiddelde, want de top van deze grafiek ligt het meest naar rechts. De top van grafiek 2 ligt het meest naar links, dus die heeft het kleinste gemiddelde.
 b Grafiek 4 is het breedst (en daardoor ook de laagste top), dus heeft de grootste standaardafwijking. Grafiek 1 is het smalst en heeft daarom ook de hoogste top. Grafiek 1 heeft de kleinste standaardafwijking.

04 a



- b** Ja, het staafdiagram is bij benadering klokvormig.
- c** Met kentallen vind je het gemiddelde en de standaardafwijking.
 $\mu = 55,07$ en $\sigma = 5,83$
- d** $\mu - \sigma = 55,07 - 5,83 = 49,24$ en $\mu + \sigma = 55,07 + 5,83 = 60,90$.
- e** Sorteert de studieduur oplopend.
 Minder dan 60,90 maanden zijn 1737 studenten en minder dan 49,24 maanden zijn 368 studenten.
 Van de 2111 studenten hebben $1737 - 368 = 1369$ een studieduur tussen 49,24 en 60,90 maanden.
- f** Dit is $1369 : 2111 \times 100\% \approx 64,9\%$. Dit klopt ongeveer met de 1^e vuistregel.
- g** $\mu - 2\sigma = 55,07 - 2 \times 5,83 = 43,41$ en $\mu + 2\sigma = 55,07 + 2 \times 5,83 = 66,73$ cm.
 Van de 2111 studenten hebben 2013 een studieduur tussen 43,41 en 66,73 maanden.
 Dit is $2013 : 2111 \times 100\% \approx 95,4\%$. Dit klopt met de 2^e vuistregel.
- h** De studieduur is bij benadering normaal verdeeld, want het staafdiagram is min of meer klokvormig en de vuistregels kloppen redelijk.

U1

1e vuistregel

$$\mu - \sigma = 105,5 - 1,5 = 104 \text{ en } \mu + \sigma = 105,5 + 1,5 = 107$$

Het aantal rollen met een lengte tussen 104 cm en 107 cm is
 $86 + 106 + 84 = 276$.

$$276 : 400 \times 100\% = 69\%, \text{ dus de 1e vuistregel klopt.}$$

2e vuistregel

$$\mu - 2\sigma = 105,5 - 2 \times 1,5 = 102,5 \text{ en } \mu + 2\sigma = 105,5 + 2 \times 1,5 = 108,5$$

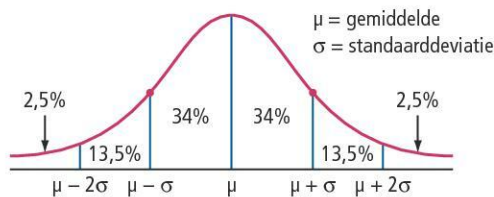
Het aantal rollen met een lengte tussen 102,5 cm en 108,5 cm is
 $0,5 \times 13 + 44 + 86 + 106 + 84 + 46 + 0,5 \times 14 = 379,5$.

$$379,5 : 400 \times 100\% \approx 95\%, \text{ dus de 2e vuistregel klopt ook.}$$

De lengte van de stof op de rollen is normaal verdeeld, want het staafdiagram is min of meer klokvormig en de vuistregels kloppen.

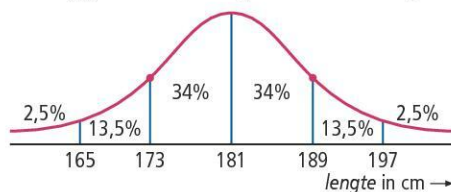
10.2 Rekenen met de vuistregels

intro Het gemiddelde hoort bij de top van de grafiek, dus het gemiddelde is 6,5. Met de vuistregels van een normale verdeling kun je de oppervlakte onder de grafiek opsplitsen in zes stukken met de volgende percentages.



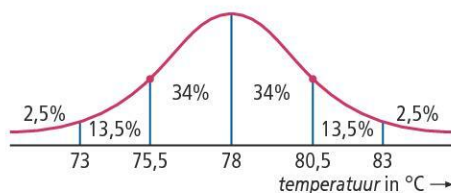
Dan lees je af dat $34 + 34 + 13,5 + 2,5 = 84\%$ van de waarnemingen een hogere waarde heeft dan $\mu - \sigma$. In de grafiek zie je $\mu - \sigma$ gelijk is aan 5,5. Omdat $\mu = 6,5$ betekent dat de standaardafwijking σ gelijk aan 1 is.

- 8 a** 181 is het gemiddelde en in de normale verdeling ligt gemiddelde onder de top.
b De buigpunten liggen één standaardafwijking naar links en naar rechts ten opzichte van het gemiddelde.
 $\mu - \sigma = 181 - 8 = 173$ en $\mu + \sigma = 181 + 8 = 189$
c De figuur is symmetrisch, dus verdeel je die 68% in twee gelijke delen van 34%.
d Tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$ ligt 95% van de waarnemingen.
 $95\% - 68\% = 27\%$ en $27\% : 2 = 13,5\%$
 Buiten $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$ ligt 5% van de waarnemingen.
 $5\% : 2 = 2,5\%$
 Je krijgt dan de volgende verdeling.



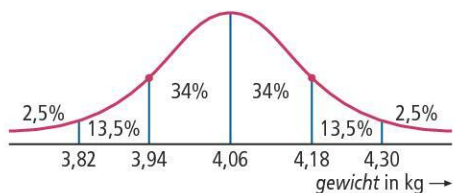
- e** $34 + 34 + 13,5 = 81,5$
 81,5 procent van de dienstplichtigen had een lengte tussen 173 en 197 cm.
f $13,5 + 2,5 = 16$
 16 procent van de dienstplichtigen was langer dan 189 cm.

9 a



- b** $13,5 + 2,5 = 16$
 16 procent van de kopjes koffie is warmer dan 80,5 °C.
c $13,5 + 34 + 34 = 81,5$
 $300 : 100 \times 81,5 \approx 245$ kopjes koffie hebben een ideale temperatuur.

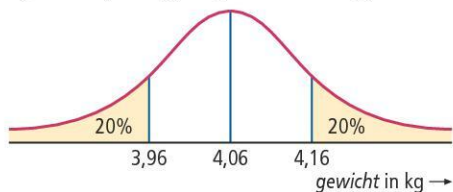
10 a



b $34 + 34 + 13,5 = 81,5$

$500 : 100 \times 81,5 \approx 408$ pakken hebben een gewicht tussen 3,94 kg en 4,30 kg.

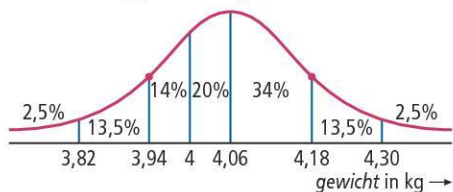
c 4,16 is 0,10 kg hoger dan het gemiddelde 4,06.



$4,06 - 0,10 = 3,96$ kg

De twintig procent pakken met het laagste gewicht weegt minder dan 3,96 kg.

d



4 kg valt precies tussen 3,94 kg en 4,06 kg.

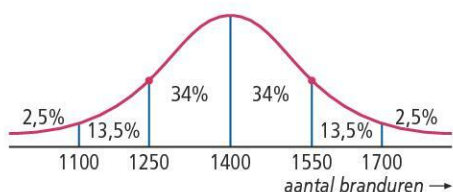
De 34% wordt niet gelijk verdeeld, want de grafiek is rechts van 4 kg hoger.

Verdeel het gebied in ongeveer 14% en 20%.

$2,5 + 13,5 + 14 = 30$

Ongeveer 30 procent van de pakken heeft een gewicht van minder dan 4 kg.

11 a



Na 1250 branduren is 16 procent van de lampen stuk.

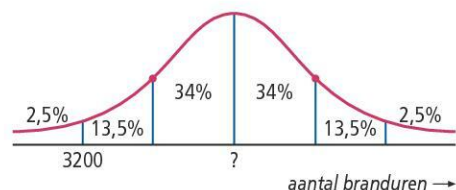
b $\mu - 2\sigma = 3200$

$\mu - 2 \times 75 = 3200$

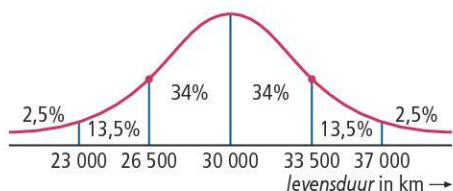
$\mu - 150 = 3200$

$\mu = 3200 + 150 = 3350$

De gemiddelde brandtijd van deze lampen is 3350 uur.



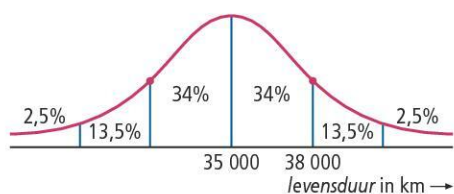
12 a



$34 + 34 + 13,5 = 81,5$

81,5 procent van de banden heeft een levensduur tussen de 26 500 km en 37 000 km.

b



Het gemiddelde is 35 000 km.

$$\mu + \sigma = 38\,000$$

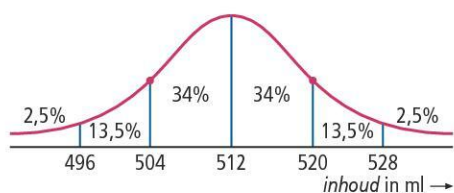
$$35\,000 + \sigma = 38\,000$$

$$\sigma = 38\,000 - 35\,000 = 3\,000$$

De standaardafwijking is 3000 km.

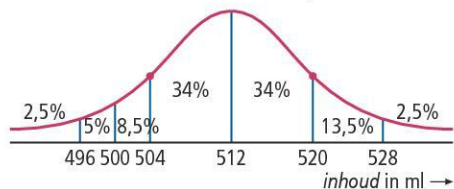
- 13 a** De mediaan ligt bij 50%. Bij 50% lees je in de relatieve somfrequentiepolygoon 45,3 kg af.
- b** In een normale verdeling is het gemiddelde gelijk aan de mediaan.
- c** $\mu + \sigma$ lees je af bij $50 + 34 = 84\%$.
- d** In de relatieve somfrequentiepolygoon lees je af $\mu + \sigma = 47,2$.
 $\mu + \sigma = 47,2$
 $45,3 + \sigma = 47,2$
 $\sigma = 47,2 - 45,3 = 1,9$
 De standaardafwijking is 1,9 kg.

010 a



- b** $34 + 34 = 68$, dus 68% van de flesjes.
 $1000 : 100 \times 68 = 680$ flesjes hebben een inhoud tussen 504 mL en 520 mL.

c



Het lijntje dat hoort bij 500 mL ligt precies tussen 496 mL en 504 mL.

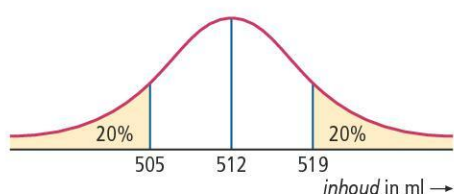
Het lijntje verdeelt dit gebied onder de grafiek in twee delen.

$$13,5 : 2 = 6,75$$

Het linker deel heeft duidelijk een kleiner oppervlak dan het rechter deel.

Het percentage flesjes dat tussen 496 en 500 mL ligt, is dus minder dan de helft van 13,5%, minder dus dan 6,75%.

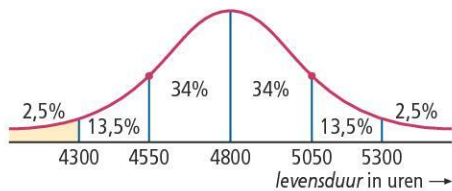
- d** Verdeel het gebied in ongeveer 5% en 8,5%.
 $2,5 + 5 = 7,5$
 Ongeveer 7,5 procent van de flesjes heeft minder dan 500 mL.
- e** $519 - 512 = 7$ mL



$$512 - 7 = 505 \text{ mL}$$

Van 20 procent van de flesjes is de inhoud 505 mL of minder.

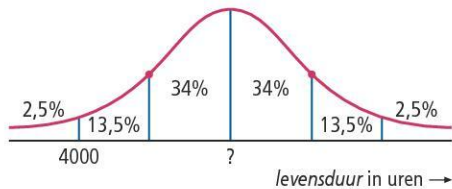
011 a



b 50 procent van de lampen is na 4800 uur defect.

c Dat is na 4300 uur het geval.

d



$$\mu - 2\sigma = 4000$$

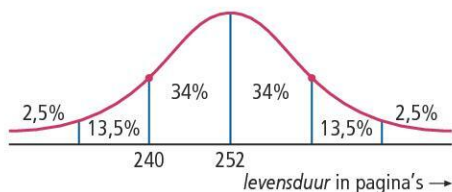
$$\mu - 2 \times 175 = 4000$$

$$\mu - 350 = 4000$$

$$\mu = 4000 + 350 = 4350$$

De gemiddelde levensduur van deze lampen is 4350 uur.

U2 a $504 : 600 \times 100\% = 84\%$



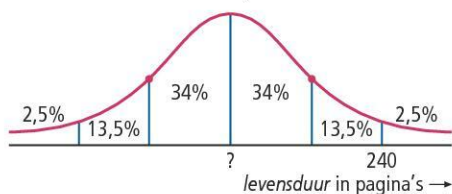
$$\mu - \sigma = 240$$

$$252 - \sigma = 240$$

$$\sigma = 252 - 240 = 12$$

De standaardafwijking van type A is 12 pagina's.

b $15 : 600 \times 100\% = 2,5\%$



$$\mu + 2\sigma = 240$$

$$\mu + 2 \times 7 = 240$$

$$\mu + 14 = 240$$

$$\mu = 240 - 14 = 226$$

Het gemiddelde van type B is 226 pagina's.

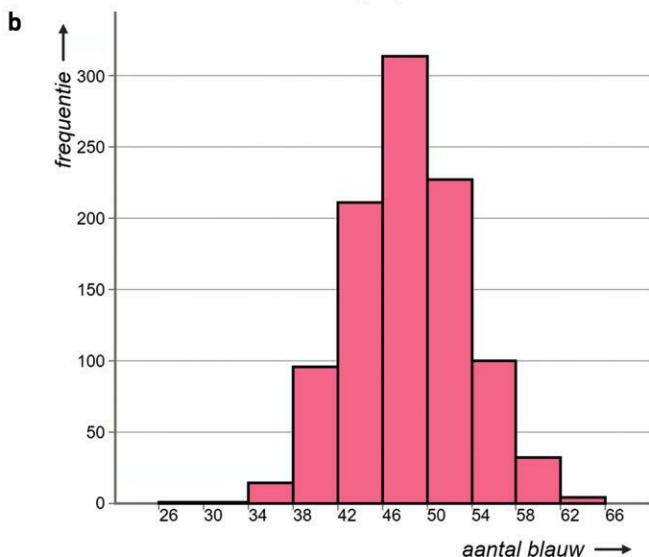
10.3 Steekproevenverdeling van een proportie

intro $3 : 50 \times 100\% = 6\%$, dus 6% van de spijkers in de steekproef is krom.

Je weet echter niet zeker of dat ook voor de hele partij spijkers het geval is.

Een betrouwbaarder schatting krijg je als je een grotere steekproef neemt.

- 14 a** Ja dat is mogelijk.
- b** $20 : 100 \times 20 = 4$
Vier leerlingen zijn naar verwachting linkshandig.
- c** Bij het ondervragen van vijf leerlingen zul je vaker tegenkomen dat geen enkele leerling linkshandig is.
- 15 a** De steekproef van de voorzitter is niet aselekt, want de leden die niet op de vergadering aanwezig zijn, hebben geen enkele kans om in de steekproef terecht te komen.
De steekproef van de secretaris is wel aselekt, want iedereen heeft dezelfde kans om in de steekproef terecht te komen.
- b** De steekproefomvang van de steekproef van de voorzitter is 34.
De steekproefomvang van de steekproef van de secretaris is 60.
- 16 a** $43 : 50 \times 100\% = 86\%$
86 procent van de sinaasappels in de steekproef is rijp.
- b** 86% betekent 86 van de 100 en dat is $86 : 100 = 0,86$.
- 17 a** $20 : 250 \times 100\% = 8\%$
8 procent van de knikkers is geel, dus de populatieproportie van het aantal gele knikkers is 0,08.
- b** $4 : 25 \times 100\% = 16\%$
In de steekproef van Dirk is 16 procent van de knikkers rood, dus de steekproefproportie is 0,16.
- c** De steekproefproportie is een schatting van de populatieproportie.
De populatieproportie van het aantal rode knikkers zal ongeveer 0,16 zijn.
- 18 a** $120 : 250 \times 100\% = 48\%$ van de knikkers is blauw.
Sanne zal naar verwachting $0,48 \times 100 = 48$ blauwe knikkers trekken



- c** Het staafdiagram is redelijk klokvormig.
- d** Het gemiddelde is 47,82 en de standaardafwijking is 5,16.
- e** $\mu - \sigma = 47,82 - 5,16 = 42,66$ en $\mu + \sigma = 47,82 + 5,16 = 52,98$.
Van de 1000 trekkingen ligt het aantal blauwe knikkers in 662 gevallen tussen 42,66 en 52,98. Dit is dus in $662 : 1000 \times 100\% = 66,2\%$ van de gevallen.

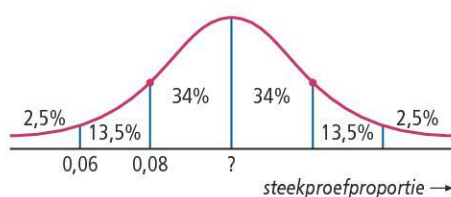
- 19 a** Een steekproefproportie van 0,88 wil zeggen dat 88 procent van de 200 auto's goedgekeurd werden.
Dat zijn $200 : 100 \times 88 = 176$ auto's.
- b** Het gemiddelde van de steekproefproporties is gelijk aan 0,92, want de top van de steekproevenverdeling ligt boven 0,92.
Ongeveer 92 procent van de auto's zal goedgekeurd worden voor de apk-keuring.

- 20 a** $20 : 50 \times 100\% = 40\%$, dus de steekproefproportie 0,4.
- b** Er zijn 27 steekproeven met een steekproefproportie van kleiner of gelijk aan 0,40.
- c** 20 of minder bewoners van de 50 bewoners komt overeen met steekproefproportie van kleiner of gelijk aan 0,40.
In de steekproevenverdeling kwam dat 27 van de 1000 keer voor.
Dat is $27 : 1000 \times 100\% = 2,7\%$.

- 017 a** $26 : 200 \times 100\% = 13\%$
13 procent van de scholieren in het onderzoek ervaart stress op school.
- b** De steekproefproportie is $13 : 100 = 0,13$.
- c** Alle scholieren van de school vormen de populatie.
- d** Als de steekproef een goede indicatie is voor de hele populatie, dan zou 13% van alle scholieren stress op school ervaren.
- e** $98 : 1286 \times 100\% \approx 7,6\%$
Ongeveer 7,6 procent van alle scholieren ervaren stress op school.
- d** De populatieproportie is $7,6 : 100 = 0,076$.

- 019 a** Een steekproefproportie van 0,85 wil zeggen dat 85 procent van de 200 treinen op tijd reed.
Dat zijn $200 : 100 \times 85 = 170$ treinen.
- b** Het gemiddelde van de steekproevenverdeling is 0,83.
- c** Ongeveer 83 procent van de treinen was op tijd.

U3



$$\mu - \sigma = 0,08 \text{ en } \mu - 2\sigma = 0,06$$

Hieruit volgt dat $\sigma = 0,02$.

$$\mu - 0,02 = 0,08$$

$$\mu = 0,08 + 0,02 = 0,10$$

Waarschijnlijk is 10% van de pennen defect.

10.4 Betrouwbaarheidsinterval voor een proportie

intro Het gaat hier om een steekproef met steekproefomvang 1000. Als die steekproef aselekt en representatief is, krijg je een indicatie van het aantal VVD stemmers. Toch blijf je afhankelijk van toeval en heb je dus geen zekerheid dat 16% van alle kiesgerechtigden op de VVD gaan stemmen.

- 21** a Het gemiddelde van alle steekproefproporties is 0,80. Dat is een goede indicatie voor de populatieproportie.
 b De standaardafwijking is $0,80 - 0,76 = 0,04$.
 c De steekproefomvang is 100.

$$\sqrt{\frac{0,8(1 - 0,8)}{100}} = 0,04$$
, dat klopt.
 d De middelste 95% van alle steekproefproporties ligt tussen 0,72 en 0,88.
 e Bij steekproef 4, want daar is de steekproefproportie 0,80.
 f Bij een steekproef kan door toeval het resultaat afwijken.
 g Steekproef 2 en steekproef 5 liggen buiten de middelste 95% van alle steekproefproporties.
- 22** a De steekproefproportie van steekproef 4 is gelijk is aan 0,80.
 Dit interval is gelijk aan $[0,80 - 0,08; 0,80 + 0,08]$ ofwel $[0,72; 0,88]$.
 b De steekproefproportie van steekproef 1 is gelijk is aan 0,77.
 Het interval van steekproef 1 is $[0,77 - 0,08; 0,77 + 0,08]$ ofwel $[0,69; 0,85]$.
 c Bij de steekproeven 1, 3, 4 en 6 bevat het interval de steekproefproportie 0,80.
 d Het interval van de steekproef is gelijk verdeeld rondom de steekproefproportie, ten opzichte van de steekproefproportie 0,08 naar links en 0,08 naar rechts. De gestippelde lijnen liggen 0,08 naar links en 0,08 naar rechts ten opzichte van de populatieproportie.
 Dan kan het niet anders dat als de steekproefproportie binnen de gestippelde lijnen ligt, de populatieproportie in het interval van de steekproef ligt.
 e De gestippelde lijnen liggen bij $\mu - 2\sigma = 0,72$ en $\mu + 2\sigma = 0,84$.
 Volgens de 2e vuistregel van een normale verdeling ligt dan 95 procent van de steekproefproporties tussen deze waarden.
 Daarom zal ook 95 procent van de steekproeven de populatieproportie bevatten.
- 23** $p = 43 : 100 = 0,43$

$$0,43 - 2 \times \sqrt{\frac{0,43(1 - 0,43)}{1500}} \approx 0,40$$
 en $0,43 + 2 \times \sqrt{\frac{0,43(1 - 0,43)}{1500}} \approx 0,46$
 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,40; 0,46]$.
 Met 95% zekerheid kun je zeggen dat het percentage tegenstanders van de komst van airport Lelystad tussen 40% en 46% ligt.
 De foutenmarge is $(0,46 - 0,40) : 2 = 0,03$ ofwel 3%.
- 24** $p = 56 : 100 = 0,56$

$$0,56 - 2 \times \sqrt{\frac{0,56(1 - 0,56)}{2000}} \approx 0,54$$
 en $0,56 + 2 \times \sqrt{\frac{0,56(1 - 0,56)}{2000}} \approx 0,58$
 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,54; 0,58]$.
 b Met 95% zekerheid kun je dat concluderen, want de steekproefproportie 0,67 (67%) van de steekproef in 2018 valt buiten het 95%-betrouwbaarheidsinterval.
- 25** a $96 : 300 \times 100\% = 32\%$
 32 procent van de leerlingen in de steekproef heeft een iPhone.
 De steekproefproportie is $32 : 100 = 0,32$.
 b
$$0,32 - 2 \times \sqrt{\frac{0,32(1 - 0,32)}{300}} \approx 0,27$$
 en $0,32 + 2 \times \sqrt{\frac{0,32(1 - 0,32)}{300}} \approx 0,37$
 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,27; 0,37]$.

- 26 a** 510 van de 11 875 leerlingen zonder dyslexie hebben een onvoldoende voor het vak Nederlands. Dat is $510 : 11\,875 \times 100\% = 4,2\ldots\%$

$$p = 4,2\ldots : 100 = 0,042\ldots$$

$$0,042\ldots - 2 \times \sqrt{\frac{0,042\ldots(1 - 0,042\ldots)}{11\,875}} \approx 0,039$$

$$0,042\ldots + 2 \times \sqrt{\frac{0,042\ldots(1 - 0,042\ldots)}{11\,875}} \approx 0,047$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [0,039; 0,047].

- b** 219 van de 625 dyslectische leerlingen hebben een onvoldoende voor het vak Nederlands.

$$\text{Dat is } 219 : 625 \times 100\% = 35,04\%.$$

$$p = 35,04 : 100 = 0,3504$$

$$0,3504 - 2 \times \sqrt{\frac{0,3504(1 - 0,3504)}{625}} \approx 0,31$$

$$0,3504 + 2 \times \sqrt{\frac{0,3504(1 - 0,3504)}{625}} \approx 0,39$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [0,31; 0,39].

- c** Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor leerling met dyslexie is veel hoger en ligt volledig buiten het 95%-betrouwbaarheidsinterval van leerlingen zonder dyslexie. Daarmee is aangetoond dat leerlingen met dyslexie vaker een onvoldoende voor het vak Nederlands hebben als leerlingen zonder dyslexie.

023 a $p = 72 : 100 = 0,72$

- b** De linker grens van het 95%-betrouwbaarheidsinterval is

$$p - 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,72 - 2 \times \sqrt{\frac{0,72(1-0,72)}{600}} \approx 0,68.$$

- c** De rechter grens van het 95%-betrouwbaarheidsinterval is

$$0,72 + 2 \times \sqrt{\frac{0,72(1-0,72)}{600}} \approx 0,76.$$

- d** Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [0,68; 0,76].

Met 95% zekerheid kun je zeggen dat het percentage leerlingen dat een bijbaantje heeft tussen 68% en 76% ligt.

- e** De foutenmarge is $(0,76 - 0,68) : 2 = 0,04$.

026 a 328 leerlingen met dyscalculie zitten in dit onderzoek, dus $n = 328$.

- b** 278 van deze 328 leerlingen hebben een onvoldoende voor de rekentoets.

$$\text{Dat is dus } 278 : 328 \times 100\% = 84,7\ldots\%, \text{ dus } p = 84,7\ldots : 100 = 0,847\ldots$$

c $0,847\ldots - 2 \times \sqrt{\frac{0,847\ldots(1 - 0,847\ldots)}{328}} \approx 0,81$

$$0,847\ldots + 2 \times \sqrt{\frac{0,847\ldots(1 - 0,847\ldots)}{328}} \approx 0,89$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [0,81; 0,89].

- d** 9172 leerlingen zonder dyscalculie zitten in dit onderzoek, dus $n = 9172$.

659 van de 9172 leerlingen zonder dyscalculie hebben een onvoldoende voor de rekentoets.

$$\text{Dat is dus } 659 : 9172 \times 100\% \approx 7,1\ldots\%, \text{ dus } p = 7,1\ldots : 100 = 0,071\ldots$$

$$0,071\ldots - 2 \times \sqrt{\frac{0,071\ldots(1 - 0,071\ldots)}{9172}} \approx 0,07$$

$$0,071\ldots + 2 \times \sqrt{\frac{0,071\ldots(1 - 0,071\ldots)}{9172}} \approx 0,08$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [0,07; 0,08].

U4 a Als de steekproefomvang groter wordt, neemt n toe.

Als n toeneemt, zal de uitkomst van $\frac{p(1-p)}{n}$ kleiner worden.

Daardoor zal de uitkomst van $2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ ook kleiner worden.

Het betrouwbaarheidsinterval zal dan dus kleiner worden.

b Als de steekproefomvang twee keer zo groot wordt, dan kun je in de formule n vervangen door $2n$.

$$2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{2n}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{p(1-p)}{n}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Als de steekproefomvang twee keer zo groot wordt, wordt de foutenmarge

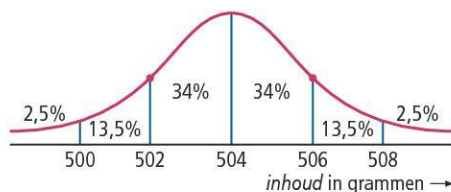
$\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0,71$ keer zo groot. (en dus kleiner)

10.5 Steekproevenverdeling van een gemiddelde

intro Het resultaat van de steekproef van Piet is het meest betrouwbaar. Dat is namelijk een gemiddelde van tien steekproeven. Daarbij ben je weer minder afhankelijk van toeval.

De nauwkeurigheid kun je vergroten door de steekproefomvang groter te nemen of nog meer steekproeven te nemen.

27 a



2,5 procent van de pakken weegt minder dan 500 gram.

- b** Dan zou de helft van de aantallen pakken koffie minder wegen dan 500 gram, dus minder dan wat er op de verpakking staat. De fabrikant zou dan waarschijnlijk te veel klachten krijgen van de consumenten.
- c** Ze kan de pech hebben om twee van dergelijke pakken in handen te krijgen, maar die kans is wel klein. Redelijker is misschien te veronderstellen dat het vulgemiddelde niet op 504 gram staat afgesteld.
- d** 503,1 gram ligt wel dicht bij de veronderstelde 504 gram. De vraag is of het dichtbij genoeg is. Daar kun je over twijfelen. Een steekproefgemiddelde van 503,9 gram zou overtuigender zijn. Een steekproefgemiddelde van 504,1 gram zou je niet meer doen twijfelen.

28 a Het populatiegemiddelde μ is 11,2 uur.

b Het steekproefgemiddelde $\bar{x}$ is 8,7 uur.

c Bij een steekproef kan door toeval het steekproefgemiddelde lager uitkomen. Zeker als de steekproefomvang zo klein is als bij de steekproef van Bas.

29 a Steekproef 1 heeft een gemiddelde van 503,90 gram en steekproef 2 heeft een gemiddelde van 504,1 gram.

b Met kentallen zie je dat het gemiddelde van alle steekproeven 504,01 gram is.

c Een betere schatting is 504 gram.

d Ja dat lijkt er wel op.

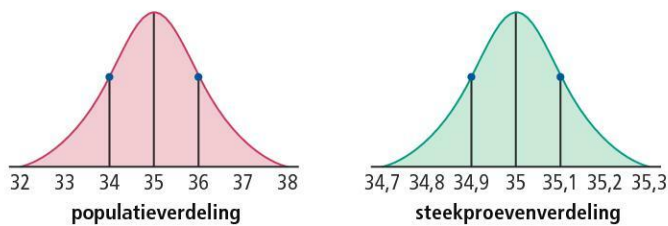
- 30 b** Ja het staafdiagram is bij benadering klokvormig.
- b** De spreidingsbreedte van de steekproef $n = 50$ is $504,77 - 503,05 = 1,72$ gram
- c** De spreidingsbreedte van de steekproef $n = 100$ is $504,6 - 503,31 = 1,29$ gram
De spreidingsbreedte van de steekproef $n = 200$ is $504,5 - 503,45 = 1,05$ gram
De staafdiagrammen zijn klokvormig.
- d** Bij $n = 200$ is de spreidingsbreedte en de standaardafwijking het kleinst.

Variabele	n=50	n=100	n=200
Aantal waarnemingen	1000	1000	1000
Gemiddelde	503,99	504,00	504,00
Mediaan	504	504,005	504
Modus	-	504,05	504,04
Minimum	503,05	503,31	503,45
Maximum	504,77	504,6	504,5
Standaardafwijking	0,28	0,21	0,14
Eerste kwartiel	503,8	503,86	503,91
Derde kwartiel	504,18	504,15	504,09

- 31 a** De populatie in het voorbeeld is die 10 000 blikjes cola.
- b** In de steekproevenverdeling ligt de mediaan en de modus ongeveer bij 33,5 cL. Het gemiddelde van alle steekproefgemiddelden zal dus ongeveer 33,5 cL zijn.
Dat is een goede schatting voor de populatiegemiddelde.
- c** Gemiddeld bevat elk blikje cola 33,5 cL en dus 0,5 cL meer cola dan er op het blikje staat.
- d** Je zult in de praktijk nooit vijftig steekproeven van 20 blikjes cola nemen. Dat kost veel te veel tijd. Je wilt graag met één steekproef een voorspelling kunnen doen. Maar als je vijftig dagen lang elke dag een steekproef van 20 blikjes cola neemt, krijg je een betrouwbaarder schatting van het gemiddelde dan bij één steekproef. Maar dat kost tijd en geld.
- 32 a** Op basis van deze steekproef schat hij dat het populatiegemiddelde 40,9 schroeven per doosje is. Dat betekent dat er waarschijnlijk genoeg schroeven in een doosje zitten. Hoewel het een gemiddelde is, dus er kunnen ook doosjes zijn met minder dan 40 schroeven.
- b** Het gemiddelde van de steekproevenverdeling is 40,6 schroeven. Dat is ook de schatting van het populatiegemiddelde.

- 032 a** Het steekproefgemiddelde is dan een indicatie voor het populatiegemiddelde. Hij zal dus het populatiegemiddelde schatten op 202 punaises.
- b** De praktische betekenis is dat er waarschijnlijk gemiddeld 202 punaises in een doosje zitten.
- c** Het steekproefgemiddelde van 204 punaises per doosje kwam het vaakst voor.
- d** De modus en de mediaan zijn 204 punaises. Het gemiddelde van de steekproevenverdeling zal ongeveer 204 punaises zijn.
- e** Het gemiddelde aantal punaises in een doosje van deze fabriek zal ongeveer 204 punaises zijn.

U5 a



populatieverdeling

$\mu = 35$ en $\sigma = 1$

Je moet vanaf het gemiddelde 35 ongeveer 1 naar rechts en naar links om op de grafiek uit te komen bij de buigpunten.

steekproevenverdeling

$\mu = 35$ en $\sigma = 0,1$

Je moet vanaf het gemiddelde 35 ongeveer 0,1 naar rechts en naar links om op de grafiek uit te komen bij de buigpunten.

- b** In een steekproef kan een uitschieter zitten. Het gemiddelde van een steekproef zal dicht bij het werkelijke gemiddelde van de populatie liggen als de uitkomst van één waarneming. Dat komt doordat die ene uitschieter bij het berekenen van de steekproefgemiddelde minder invloed heeft doordat er ook andere normalere resultaten in de steekproef zitten. Bij een steekproevenverdeling kijk je naar de gemiddelden van de steekproeven. De spreiding zal bij een steekproevenverdeling kleiner zijn en dus zal de standaardafwijking van een steekproevenverdeling ook kleiner zijn.

10.6 Betrouwbaarheidsinterval voor een gemiddelde

intro Het is een steekproef met steekproefomvang 5. Dat is een erg kleine steekproefomvang en dus is het resultaat erg afhankelijk van toeval of meetfouten. De docent is dus niet zo heel zeker van het resultaat. Een grotere steekproefomvang zou een betrouwbaarder resultaat opleveren.

- 33 a** De buigpunten liggen bij 1000 gram en 1004 gram.
Het gemiddelde van de steekproevenverdeling is 1002 gram.
 $\mu - \sigma = 1000$
 $1002 - \sigma = 1000$
 $\sigma = 1002 - 1000 = 2$
De standaardafwijking van de steekproevenverdeling is 2 gram.
- b** De steekproefomvang is 25, dus $n = 25$.
 $\frac{10}{\sqrt{25}} = 2$, klopt.
- c** De middelste 95% van de waarnemingen ligt tussen 998 en 1006 gram.
- d** Bij steekproef 3 was het gemiddelde gelijk aan het populatiegemiddelde, namelijk 1002 gram.
- e** Door toeval zal niet elk steekproefgemiddelde gelijk zijn aan het populatiegemiddelde.
- f** Bij steekproef 2 ligt het steekproefgemiddelde buiten de middelste 95% van alle steekproefgemiddelden.

- 34 a** Bij steekproef 3 is het steekproefgemiddelde 1002 gram.
Dit interval is gelijk aan $[1002 - 4, 1002 + 4]$ ofwel $[998, 1006]$.
- b** Bij steekproef 1 is het steekproefgemiddelde 1001 gram.
Dit interval is gelijk aan $[1001 - 4, 1001 + 4]$ ofwel $[997, 1005]$.
- c** Bij de steekproeven 1, 3 en 4.
- d** Het interval van de steekproef is gelijk verdeeld rondom het steekproefgemiddelde. Ten opzichte van het steekproefgemiddelde 4 naar links en 4 naar rechts. De gestippelde lijnen liggen 4 naar links en 4 naar rechts ten opzichte van het steekproefgemiddelde. Dan kan het niet anders dat als het steekproefgemiddelde binnen de gestippelde lijnen ligt, het populatiegemiddelde in het interval van de steekproef ligt.
- e** De gestippelde lijnen liggen bij $\mu - 2\sigma = 998$ en $\mu + 2\sigma = 1006$.
Volgens de 2e vuistregel van een normale verdeling ligt dan 95 procent van de steekproefgemiddelden tussen deze waarden.
Daarom zal ook 95 procent van de steekproeven het populatiegemiddelde bevatten.
- 35** $38,1 - 2 \times \frac{3,9}{\sqrt{400}} \approx 37,7$ en $38,1 + 2 \times \frac{3,9}{\sqrt{400}} \approx 38,5$
Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[37,7; 38,5]$.
Met 95% zekerheid kun je zeggen dat havo 5 leerlingen gemiddeld tussen 37,7 uur en 38,5 uur aan hun profielwerkstuk werken.
De foutenmarge is $(38,5 - 37,7) : 2 = 0,4$ uur.
- 36 a** $778 - 2 \times \frac{128}{\sqrt{1500}} \approx 771$ en $778 + 2 \times \frac{128}{\sqrt{1500}} \approx 785$
Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[771; 785]$.
- b** Het interval $[770, 786]$ is ruimer dan het 95%-betrouwbaarheidsinterval.
Het is dus meer dan 95% zeker dat het gemiddelde bedrag in het interval $[770, 786]$ ligt.
- 37 a** Met kentallen zie je dat het gemiddelde 55,61 kg is en de standaardafwijking is 9,05 kg.
- b** $55,61 - 2 \times \frac{9,05}{\sqrt{404}} \approx 54,71$ en $55,61 + 2 \times \frac{9,05}{\sqrt{404}} \approx 56,51$
Het 95% betrouwbaarheidsinterval is $[54,71; 56,51]$.
Met 95% zekerheid kun je zeggen dat het gemiddelde gewicht tussen 54,71 kg en 56,51 kg zal liggen. De foutenmarge is 0,9 kg.
- 38 a** jongens
 $88,9 - 2 \times \frac{3,93}{\sqrt{50}} \approx 87,8$ en $88,9 + 2 \times \frac{3,93}{\sqrt{50}} \approx 90,0$
Het 95%-betrouwbaarheidsinterval bij de jongens is $[87,8; 90,0]$.
meisjes
 $87,5 - 2 \times \frac{3,12}{\sqrt{50}} \approx 86,6$ en $87,5 + 2 \times \frac{3,12}{\sqrt{50}} \approx 88,4$
Het 95%-betrouwbaarheidsinterval bij de meisjes is $[86,6; 88,4]$.
- b** Met 95% zekerheid kun je zeggen dat de gemiddelde lengte van de jongens in cm ligt in het interval $[87,8; 90,0]$ en die van de meisjes in $[86,6; 88,4]$.
Het is dus mogelijk dat de gemiddelde lengte van de jongens gelijk is aan bijvoorbeeld 88,0 cm en die van de meisjes gelijk is aan 88,2 cm, maar waarschijnlijk is de gemiddelde lengte van de jongens groter dan die van de meisjes.

035 a De steekproefomvang n is gelijk aan 500.

b De linker grens van het interval is $\bar{x} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 37,9 - 2 \times \frac{3,8}{\sqrt{500}} \approx 37,6$.

c De rechter grens van het interval is $37,9 + 2 \times \frac{3,8}{\sqrt{500}} \approx 38,2$.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[37,6; 38,2]$.

d Met 95% zekerheid kun je zeggen dat de gemiddelde tijd die havo 5 leerlingen aan hun profielwerkstuk werken tussen 37,6 uur en 38,2 uur ligt.

e De lengte van het interval is $38,2 - 37,6 = 0,6$ uur.

f De foutenmarge is $0,6 : 2 = 0,3$ uur.

U6 a Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[5,6 - 0,27; 5,6 + 0,27]$ en dat is $[5,33; 5,87]$.

b $2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 0,27$

$2 \cdot \frac{2,7}{\sqrt{n}} = 0,27$

$\frac{2,7}{\sqrt{n}} = 0,135$

$\sqrt{n} = 2,7 : 0,135 = 20$

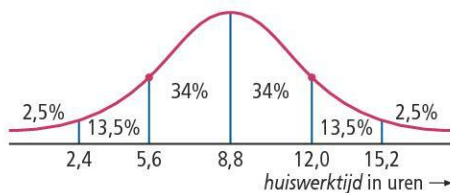
$n = 20^2 = 400$, dus de steekproefomvang is 400.

10.7 Gemengde opdrachten

39 a 40% van de meisjes besteedt minder dan 8 uur per week aan huiswerk.

Dus besteedt $100\% - 40\% = 60\%$ 8 uur of meer per week aan het huiswerk.

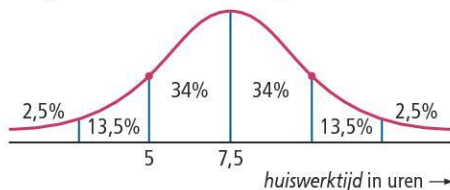
b



$$13,5 + 2,5 = 16$$

16 procent van de meisjes besteedt meer dan 12 uur aan hun huiswerk.

c



$$\mu - \sigma = 5$$

$$7,5 - \sigma = 5$$

$$\sigma = 7,5 - 5 = 2,5$$

De standaardafwijking is 2,5 uur.

d De grafiek van de vrouwen heeft de top meer naar rechts liggen, want ze besteden gemiddeld meer tijd aan huiswerk.

De grafiek van de vrouwen moet breder zijn en dus de top lager, want de spreiding bij de vrouwen is groter.

De figuur moet een grafiek hebben waarvan de top rechts en lager ligt dan de andere grafiek. Dat is figuur 1.

40 a Het staafdiagram is redelijk klokvormig.

b 1e vuistregel

$$\mu - \sigma = 4,54 - 0,38 = 4,16 \text{ en } \mu + \sigma = 4,54 + 0,38 = 4,92$$

Het aantal vliegen met een vleugellengte tussen 4,16 mm en 4,92 mm is $85 - 17 = 68$.

68 van de 100 vliegen, dat is 68%, dus de 1e vuistregel klopt.

2e vuistregel

$$\mu - 2\sigma = 4,54 - 2 \times 0,38 = 3,78 \text{ en } \mu + 2\sigma = 4,54 + 2 \times 0,38 = 5,30$$

Het aantal vliegen met een vleugellengte tussen 3,78 mm en 5,30 mm is $96 - 2 = 94$.

94 van de 100 vliegen, dat is 94%, dus de 2e vuistregel klopt redelijk.

De vleugellengte is redelijk normaal verdeeld.

c $4,54 - 2 \times \frac{0,38}{\sqrt{100}} = 4,464 \text{ en } 4,54 + 2 \times \frac{0,38}{\sqrt{100}} = 4,616$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[4,464; 4,616]$. De foutenmarge is $(4,616 - 4,464) : 2 = 0,076$ mm.

41 a $p = 61 : 100 = 0,61$

$$0,61 - 2 \times \sqrt{\frac{0,61(1-0,61)}{3000}} \approx 0,59 \text{ en } 0,61 + 2 \times \sqrt{\frac{0,61(1-0,61)}{3000}} \approx 0,63$$

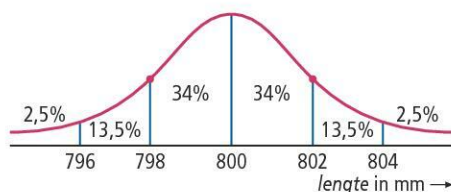
Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,59; 0,63]$.

Met 95% zekerheid kun je zeggen dat het percentage Nederlanders dat regelmatig soaps kijkt tussen 59% en 63% ligt.

b Dan wordt je betrouwbaarheidsinterval groter, want dan moeten er nog meer uitschieters in het interval passen.

Onderzoeksoopdrachten

42 a



<i>lengte van de plank</i>	<i>winst</i>	<i>percentage</i>
kortere dan 798 mm	$3,25 - 0,50 = 2,75$	$2,5 + 13,5 = 16$
tussen 798 mm en 802 mm	3,25	$34 + 34 = 68$
langer dan 802 mm	-2	$13,5 + 2,5 = 16$

Slechts $68\% + 16\% = 84\%$ van de planken is bruikbaar, maar je hebt wel 1000 goede planken nodig voor de klant. Je zult dus meer dan 1000 planken moeten zagen.

<i>aantal planken</i>	1000	?
<i>percentage</i>	84	100

$$1000 \times 100 = 84 \times ?$$

$$? = 1000 \times 100 : 84 = 1190,4...$$

Om 1000 goede planken te leveren, moeten er 1191 planken gezaagd worden.

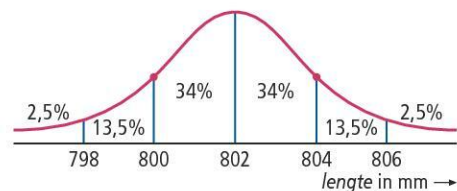
Daarvan zijn $1191 : 100 \times 16 \approx 191$ planken te kort.

Daarvan zijn $1191 : 100 \times 68 \approx 810$ planken direct goed.

Daarvan zijn $1191 : 100 \times 16 \approx 191$ planken te lang.

Dat levert een winst op van $810 \times 3,25 + 191 \times 2,75 - 191 \times 2 = 2775,75$ euro.

b	lengte van de plank	winst	percentage
	korter dan 798 mm	2,75	2,5
	tussen 798 mm en 802 mm	3,25	13,5 + 34 = 47,5
	langer dan 802 mm	-2	50



Slechts $47,5\% + 50\% = 97,5\%$ van de planken is bruikbaar.

aantal planken	1000	?
percentage	97,5	100

$$1000 \times 100 = 97,5 \times ?$$

$$? = 1000 \times 100 : 97,5 = 1025,6\dots$$

Om 1000 goede planken te leveren, moeten er 1026 planken gezaagd worden.

Daarvan zijn $1026 : 100 \times 2,5 \approx 26$ planken te kort.

Daarvan zijn $1026 : 100 \times 47,5 \approx 488$ planken direct goed.

Daarvan zijn $1026 : 100 \times 50 \approx 513$ planken te lang.

Dat levert een winst op van $488 \times 3,25 + 513 \times 2,75 - 26 \times 2 = 2944,75$ euro.

De winst is hoger, dus het is voordeliger om de machine in te stellen op een gemiddelde van 802 mm.

43 a $p = 9,2 : 100 = 0,092$

$$0,092 \pm 2 \times \sqrt{\frac{0,092(1 - 0,092)}{2700}} \approx 0,092 \pm 0,011$$

In procenten is dat $9,2\% \pm 1,1\%$.

b De breedte van het betrouwbaarheidsinterval is $4 \times \sqrt{\frac{0,092(1 - 0,092)}{n}}$

Je wilt een n zo dat dit kleiner is dan 1%, dus kleiner dan 0,01.

Daarbij hoort de vergelijking $4 \times \sqrt{\frac{0,092(1 - 0,092)}{n}} = 0,01$.

Invoer: $y_1 = 4 \times \sqrt{\frac{0,092(1 - 0,092)}{x}}$ en $y_2 = 0,01$

Venster: x van 0 tot 15 000 en y van 0 tot 0,02

Optie: snijpunt

De oplossing is $x = 13\,366$.

Dat betekent dat de steekproefomvang minstens 13 370 personen moet zijn.

44 Bij 1,72% hoort $p = 1,72 : 100 = 0,0172$ en bij 3,28% hoort

$$p = 3,28 : 100 = 0,0328.$$

De lengte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $0,0328 - 0,0172 = 0,0156$.

Het gemiddelde van de steekproefproporties is het midden van het

95%-betrouwbaarheidsinterval en dat is $(0,0328 + 0,0172) : 2 = 0,025$.

De lengte van het betrouwbaarheidsinterval is gelijk aan $4 \times \sqrt{\frac{p(p - 1)}{n}}$

Je krijgt de vergelijking $4 \times \sqrt{\frac{0,025(1 - 0,025)}{n}} = 0,0156$.

Invoer: $y_1 = 4 \times \sqrt{\frac{0,025(1 - 0,025)}{x}}$ en $y_2 = 0,0156$

Venster: x van 0 tot 2000 en y van 0 tot 0,02

Optie: snijpunt

De oplossing is $x \approx 1602,5$.

Dat betekent dat de steekproefomvang ongeveer uit 1603 automobilisten bestond. Daarvan hebben 2,5% een botsing gehad.

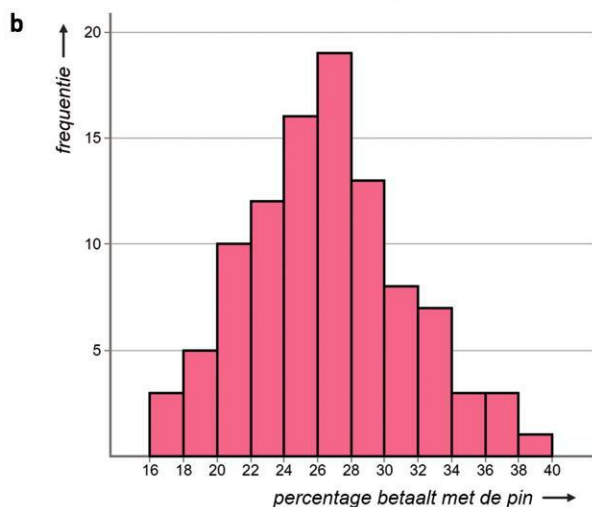
Dat zijn $1603 : 100 \times 2,5 \approx 40$ automobilisten.

Samenvatting

S1 Het staafdiagram is niet heel erg klokvormig. De prestaties van de jongens op het onderdeel vergooien zijn niet normaal verdeeld.

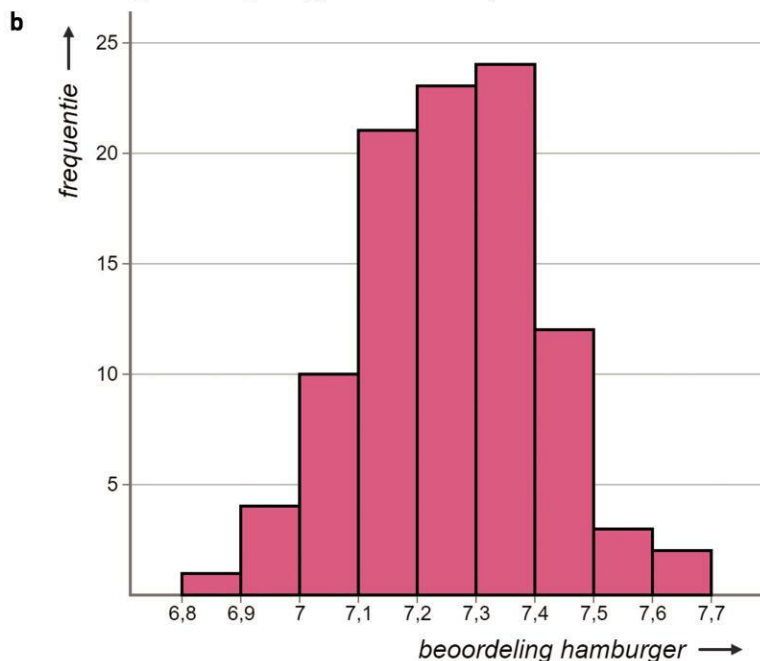
- S2 a**
- Er zijn leerlingen die niet met de fiets komen, zij hebben dus geen kans om in deze steekproef terecht te komen.
 - Ze vragen alleen de eerste 200 leerlingen, de leerlingen die later met de fiets komen, hebben geen kans om in deze steekproef te komen.
- b** In beide steekproeven is de steekproefomvang 200.

S3 a Een steekproefproportie van 0,38 wil zeggen dat 38 procent van de 50 klanten met de pin betaalt, dat zijn $50 : 100 \times 38 = 19$ klanten.



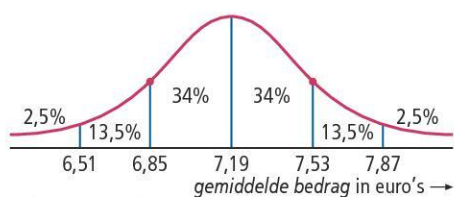
- c** Het gemiddelde van de steekproevenverdeling is een schatting van de populatieproportie. Volgens de kentallen is dit 26% en is de populatieproportie dus 0,26.

S4 a Het laagste steekproefgemiddelde is 6,8.



c Het gemiddelde van de steekproevenverdeling is 7,2.
Een schatting voor het populatiegemiddelde is 7,2.

S5



$$34 + 34 + 13,5 = 81,5$$

81,5 procent van de mannelijke klanten geeft tussen de € 6,85 en de € 7,87 uit.

S6 104 van de 160 leerlingen zijn geslaagd.

Dat is $104 : 160 \times 100\% = 65\%$, dus de steekproefproportie is $65 : 100 = 0,65$.

$$0,65 - 2 \times \sqrt{\frac{0,65 \times (1 - 0,65)}{160}} \approx 0,575$$

$$0,65 + 2 \times \sqrt{\frac{0,65 \times (1 - 0,65)}{160}} \approx 0,725$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,575; 0,725]$.

Met 95% zekerheid kun je zeggen dat het percentage havo 5 leerlingen dat slaagt tussen 57,5% en 72,5% ligt.

De foutenmarge is $(0,725 - 0,575) : 2 = 0,075$ ofwel 7,5%.

S7 $6,7 - 2 \times \frac{0,29}{\sqrt{400}} = 6,671$ en $6,7 + 2 \times \frac{0,29}{\sqrt{400}} = 6,729$

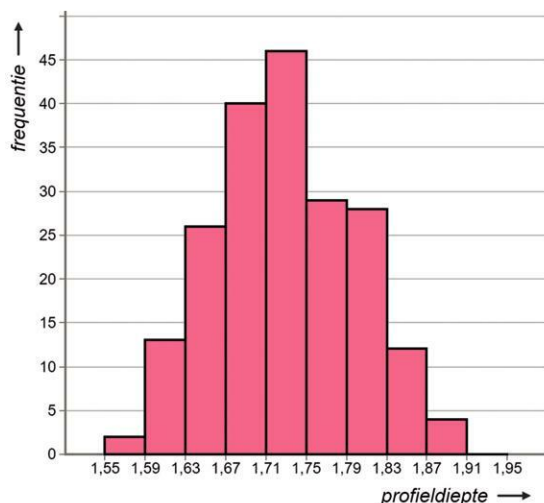
Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[6,671; 6,729]$.

Met 95% zekerheid kun je zeggen dat het gemiddelde voor het wiskunde B havo examen tussen 6,671 en 6,729 ligt.

De foutenmarge is $(6,729 - 6,671) : 2 = 0,029$.

Test jezelf

T1 a



b Het staafdiagram is redelijk klokvormig.

c Het gemiddelde is 1,73 mm en de standaardafwijking is 0,07 mm.

1e vuistregel

$$\mu - \sigma = 1,73 - 0,07 = 1,66 \text{ en } \mu + \sigma = 1,73 + 0,07 = 1,80$$

Het aantal banden met een profiel diepte tussen 1,66 mm en 1,80 mm is $164 - 33 = 131$.

$131 : 200 \times 100\% = 65,5\%$, dus de 1e vuistregel klopt ongeveer.

2e vuistregel

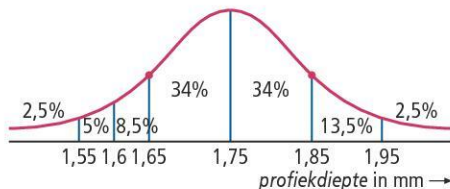
$$\mu - 2\sigma = 1,73 - 2 \times 0,07 = 1,59 \text{ en } \mu + 2\sigma = 1,73 + 2 \times 0,07 = 1,87$$

Het aantal banden met een profiel diepte tussen 1,59 mm en 1,87 mm is $196 - 4 = 192$.

$192 : 200 \times 100\% = 96\%$, dus de 2e vuistregel klopt ongeveer.

De profiel diepte is normaal verdeeld.

d



1,6 mm valt precies tussen 1,55 mm en 1,65 mm.

Verdeel de 13,5% in ongeveer 5% en 8,5%.

$$2,5 + 5 = 7,5$$

Ongeveer 7,5% van de banden wordt afgekeurd.

T2 a De hoogste steekproefproportie is 0,85.

In die steekproef reisde 85% van de reizigers met een koffer.

Dat waren $500 : 100 \times 85 = 425$ reizigers.

b Het gemiddelde van de steekproefproporties is 0,77 en dat is dan ook een schatting van de populatieproportie.

Dus 77 procent van de reizigers reist met een koffer.

c $40 + 30 + 8 = 78$

In 78 van de 1000 steekproeven was het gemiddelde gewicht van de koffers meer dan 10,5 kg.

Dat is 7,8% van alle steekproeven.

d Het gemiddelde van de steekproefgemiddelden is 10,1 kg en dat is dan ook een schatting van het populatiegemiddelde.

Dus ongeveer 10,1 kg is het gemiddelde gewicht van een koffer.

- T3 a** A Je kunt alleen in het onderzoek komen als je in Zwolle woont.
 B Iemand die de website niet bekijkt, komt niet in de steekproef.
 C Iemand die op doordeweekse ochtenden bijvoorbeeld werkt of naar school gaat, komt niet in de steekproef.

b Dat is nog niet zo makkelijk.

Je moet eerst definiëren wat je onder ‘jongeren’ verstaat, bijvoorbeeld alle jongens en meisjes tussen 12 en 25 jaar. Dan vraag je bijvoorbeeld aan elke gemeente in Nederland om drie jongeren van 12 tot 25 jaar uit hun gemeente willekeurig te selecteren en te vragen om aan de vragenlijst mee te doen.

c $56 : 2000 \times 100\% = 2,8\%$, dus de steekproefproportie is $2,8 : 100 = 0,028$.

$$0,028 - 2 \times \sqrt{\frac{0,028(1 - 0,028)}{2000}} \approx 0,0206$$

$$0,028 + 2 \times \sqrt{\frac{0,028(1 - 0,028)}{2000}} \approx 0,0354$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,0206; 0,0354]$.

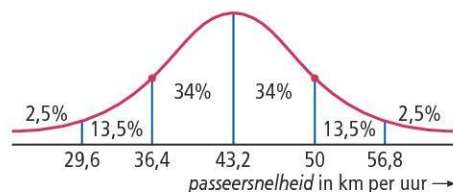
Met 95% zekerheid kun je zeggen dat het percentage Nederlanders dat het computerspel kent tussen 2,06% en 3,54% ligt.

T4 a $7,9 - 2 \times \frac{1,6}{\sqrt{400}} = 7,74$ en $7,9 + 2 \times \frac{1,6}{\sqrt{400}} = 8,06$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[7,74; 8,06]$.

b 7,3 liter valt buiten het 95%-betrouwbaarheidsinterval, dus met 95% zekerheid kun je zeggen dat de gegevens van de autofabrikant niet kloppen.

T5 a



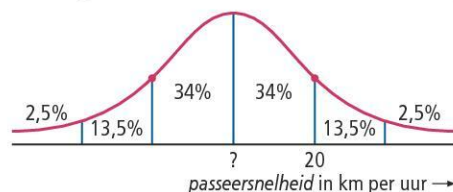
$$2,5 + 13,5 + 34 + 34 = 84$$

84 procent van de automobilisten rijdt niet harder dan 50 km per uur.

b $34 + 34 + 13,5 + 2,5 = 84$

In 84 procent van de 1200 metingen zal de automobilist te hard rijden.

Dat zijn $1200 : 100 \times 84 = 1008$ metingen.



c $\mu + \sigma = 20$

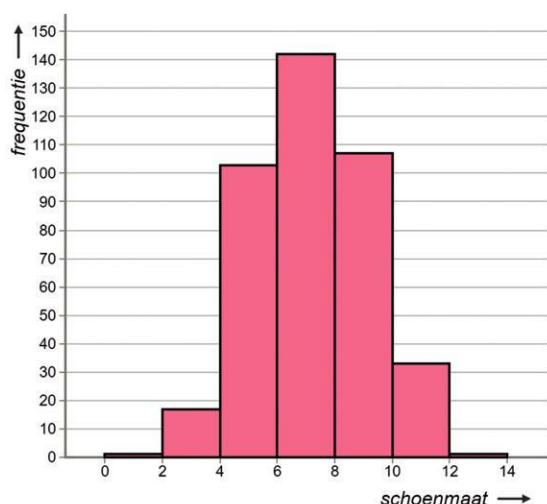
$$\mu + 2,1 = 20$$

$$\mu = 20 - 2,1 = 17,9$$

De gemiddelde passeersnelheid is 17,9 km per uur.

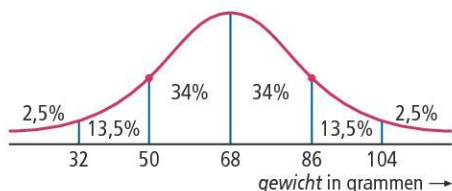
Extra oefening

E1



- b** Het staafdiagram is redelijk klokvormig.
- c** Het gemiddelde is 6,77 en de standaardafwijking is 1,92.
 $\mu - \sigma = 6,77 - 1,92 = 4,85$ en $\mu + \sigma = 6,77 + 1,92 = 8,69$
 Het aantal kinderen met een schoenmaat tussen 4,85 en 8,69 is
 $331 - 53 = 278$.
 $278 : 404 \times 100\% \approx 69\%$, dus de 1e vuistregel klopt.
- d** $\mu - 2\sigma = 6,77 - 2 \times 1,92 = 2,93$ en $\mu + 2\sigma = 6,77 + 2 \times 1,92 = 10,61$
 Het aantal kinderen met een schoenmaat tussen 2,93 en 10,61 is
 $396 - 2 = 394$.
 $394 : 404 \times 100\% \approx 98\%$, dus de 2e vuistregel klopt redelijk.
- e** De schoenmaat van de kinderen is redelijk normaal verdeeld.
- f** Het staafdiagram bij de variabele gewicht is niet klokvormig. Het gewicht is dus niet normaal verdeeld.

E2 a



$$2,5 + 13,5 = 16$$

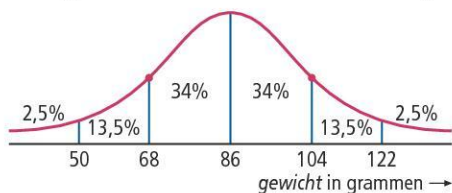
16 procent is lichter dan 50 gram en is voor puree.

$$34 + 34 + 13,5 = 81,5$$

81,5 procent weegt tussen 50 gram en 104 gram en wordt in Nederland verkocht.

2,5 procent weegt meer dan 104 gram en is voor de export.

- b** Het gemiddelde is nu $68 + 18 = 86$ gram.



2,5% van de tomaten weegt minder dan 50 gram.

Dat zijn $4200000 : 100 \times 2,5 = 105000$ tomaten.

E3 a $30400 - 2 \times \frac{12800}{\sqrt{1500}} \approx 29739$ en $30400 + 2 \times \frac{12800}{\sqrt{1500}} \approx 31061$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [29739, 31061].

Met 95% zekerheid kun je zeggen dat het gemiddelde inkomen van een eenpersoonshuishouden tussen 29739 en 31061 euro ligt.

De foutenmarge is $(31061 - 29739) : 2 = 661$ euro.

- b** € 31.000,- ligt in het 95%-betrouwbaarheidsinterval, dus met 95% zekerheid kun je zeggen dat het kabinet gelijk heeft.

E4 a $92 : 400 \times 100\% = 23\%$, dus de steekproefproportie is 0,23.

$$0,23 - 2 \times \sqrt{\frac{0,23 \times (1 - 0,23)}{400}} \approx 0,188$$

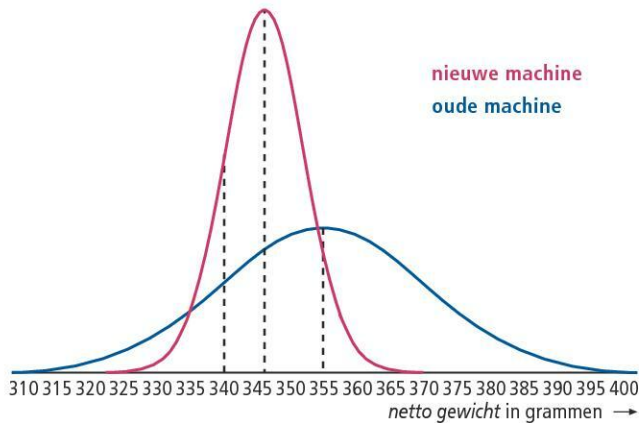
$$0,23 + 2 \times \sqrt{\frac{0,23 \times (1 - 0,23)}{400}} \approx 0,272$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [0,188; 0,272].

Dus het 95%-betrouwbaarheidsinterval ligt tussen de 18,8% en 27,2%.

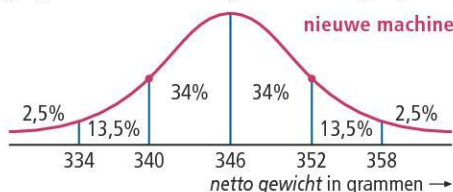
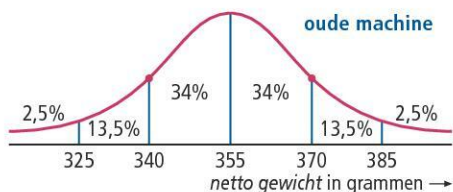
- b** Je weet nooit zeker of hij gelijk gaat hebben, maar het kan wel. Een kwart is namelijk 25% en dat ligt in het 95%-betrouwbaarheidsinterval.

E5 a



- b** Als consument geef je de voorkeur aan de oude machine, want daarbij krijg je gemiddeld meer jam in een potje.

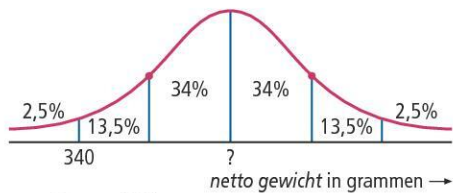
c



$$2,5 + 13,5 = 16$$

Bij beide machines weegt 16 procent van de potjes minder dan 340 gram.

d



$$\mu - 2\sigma = 340$$

$$\mu - 2 \times 3,5 = 340$$

$$\mu - 7 = 340$$

$$\mu = 340 + 7 = 347$$

De machine wordt ingesteld op een gemiddelde gewicht van 347 gram.

E6

$$p = 61 : 100 = 0,61$$

$$0,61 - 2 \times \sqrt{\frac{0,61 \times (1 - 0,61)}{1988}} \approx 0,588$$

$$0,61 + 2 \times \sqrt{\frac{0,61 \times (1 - 0,61)}{1988}} \approx 0,632$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [0,588; 0,632].

Met 95% zekerheid kun je zeggen dat in maart 2007 het percentage van het aantal voorstanders van een rookverbod tussen 58,8% en 63,2% ligt.

Het percentage van oktober 2006 (55%) ligt buiten dit

95%-betrouwbaarheidsinterval.

Daardoor kun je met 95% zekerheid zeggen dat het aantal voorstanders is toegenomen.

10 Verdelingen (zonder ICT)

Voorkennis

- V1**
- a** De populatie bestaat uit alle bezoekers van de bioscoop.
 - b** Er zijn meerdere mogelijkheden.
 - Heeft u vorig jaar in onze bioscoop een of meerdere films gezien?
 - Heeft u vorig jaar meer of minder films gezien dan het jaar daarvoor?
 - Indien u minder films heeft gezien, kunt u dan de reden vertellen waarom?
 - De bioscoop was vorig jaar minder bereikbaar vanwege allerlei verbouwingen. Is dat van invloed geweest hoe vaak u in onze bioscoop bent geweest?
 - Wat vindt u van ons filmaanbod dit jaar, vergeleken met het filmaanbod van het jaar ervoor?
 - c** Er zijn meerdere mogelijkheden.
 - Het aantal films gezien vorig jaar.
 - Het aantal films gezien het jaar daarvoor.
 - d** Er zijn meerdere mogelijkheden.
 - 'Er kan op grond van het statistisch onderzoek niet worden vastgesteld wat de reden is dat er vorig jaar minder bioscoopbezoekers zijn geweest.'
 - 'Op grond van het statistisch onderzoek is het aannemelijk dat het geringe aanbod van grote films van invloed is geweest op het lagere aantal bezoekers'.
- V2**
- a** De statistische variabelen zijn niveau en eindresultaat.
 - b** De statistische variabele niveau neemt de waarden BB en KB aan.
 - c** 3 van de 34 BB-leerlingen hebben een voldoende.
Dat is $3 : 34 \times 100\% \approx 8,8\%$.
 - d** 14 van de 86 KB-leerlingen hebben een voldoende.
Dat is $14 : 86 \times 100\% \approx 16,3\%$.
 - e** Als je let op het percentage voldoende's dan hebben de KB-leerlingen de rekentoets het beste gemaakt.
 - f** Het staafdiagram van de jongens ligt verder naar rechts dan die van de meisjes. Het lijkt of de jongens het beter hebben gedaan.
- V3**
- a** Vanwege de symmetrie ligt de waarneming met de hoogste frequentie (modus) in het midden onder de top. De mediaan ligt daar ook, want dan zijn er even veel waarnemingen links en rechts. Het gemiddelde ligt daar ook, want er zijn links en rechts even veel waarnemingen die even zwaar mee tellen.
 - b** A klokvormig
De meeste pakken suiker hebben het gemiddelde gewicht er zullen even veel pakken zijn met iets meer of iets minder suiker.
 - B meertoppig
Er zijn gedurende het jaar meerdere momenten waarop er schoolvakanties zijn waarin veel Nederlanders op vakantie gaan.
 - C min of meer uniform
In elke maand zullen ongeveer even veel leerlingen jarig zijn.
- V4**
- a** Het vak Engels heeft de beste resultaten, want het gemiddelde is het hoogst.
 - b** De spreidingsbreedte van Nederlands is $7,6 - 4,1 = 3,5$.
De spreidingsbreedte van Engels is $8,2 - 4,1 = 4,1$.
De spreidingsbreedte van wiskunde is $8,5 - 3,7 = 4,8$.
Wiskunde heeft de grootste spreidingsbreedte.

- V5 a** In de staafdiagram kun je zien dat er zowel bij de jongens als bij de meisjes het maximum aantal uur besteed aan huiswerk 21 tot 24 uur is. Ook kun je zien dat zowel bij de jongens als bij de meisjes het minimum aantal uur 0 tot 3 uur is. Dan is de spreidingsbreedte van de jongens gelijk aan die van de meisjes.
- b** Bij de jongens wordt er gemiddeld minder tijd aan huiswerk besteed, want de staafdiagram van de jongens ligt meer naar links.
- c** Waarschijnlijk is de spreiding bij de meisjes het grootst, want er zijn meer meisjes dan jongens die duidelijk minder of meer dan het gemiddelde aan hun huiswerk besteden.
- d** Bij de meisjes zal de standaardafwijking van de variabele huiswerk het grootst zijn, want bij de meisjes zijn er relatief meer hoge en lage waarnemingen.

10.1 Normale verdeling

intro Hoe nauwkeurig de vulmachine ook is, er zal altijd wel eens iets meer of iets minder dan een liter in de fles terecht komen. Toch zullen de meeste flessen 1 liter hebben. Er zullen weinig flessen zijn die veel meer dan 1 liter hebben of veel minder dan 1 liter hebben. Het staafdiagram zal klokvormig worden.

- 1 a** $\mu - \sigma = 65,6 - 2,5 = 63,1$ en $\mu + \sigma = 65,6 + 2,5 = 68,1$
- b** De grafiek verandert daar van toenemend dalend naar afnemend dalend.
- c** De frequenties tussen 63,1 inch en 68,1 inch bij elkaar opgeteld zijn
 $388 + 465 + 463 + 421 + 296 = 2033$.
- d** $2033 : 3000 \times 100\% = 67,7...\%$
Ongeveer 68% van de mannen hadden een lengte tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$.
- e** $\mu - 2\sigma = 65,6 - 2 \times 2,5 = 60,6$ en $\mu + 2\sigma = 65,6 + 2 \times 2,5 = 70,6$
- f** De frequenties tussen 60,6 inch en 70,6 inch bij elkaar opgeteld zijn
 $83 + 156 + 307 + 388 + 465 + 463 + 421 + 296 + 162 + 107 = 2848$.
 $2848 : 3000 \times 100\% = 94,9...\%$
Ongeveer 95% van de mannen hadden een lengte tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$.
- g** $\mu - 3\sigma = 65,6 - 3 \times 2,5 = 58,1$ en $\mu + 3\sigma = 65,6 + 3 \times 2,5 = 73,1$
De frequenties tussen 58,1 inch en 73,1 inch bij elkaar opgeteld zijn
 $4 + 22 + \dots + 19 + 6 = 2997$.
 $2993 : 3000 \times 100\% = 99,7...\%$
Ongeveer 100% van de mannen hadden een lengte tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu + 3\sigma$.
- 2 a** Ja, het staafdiagram is bij benadering klokvormig.
- b** $\mu - \sigma = 162,0 - 6,4 = 155,6$ en $\mu + \sigma = 162,0 + 6,4 = 168,4$
- c** De frequenties tussen 155,6 cm en 168,4 cm bij elkaar opgeteld zijn
 $208 + 208 + \dots + 222 + 184 = 3427$.
 $3427 : 5001 \times 100\% = 68,52...\%$
Ongeveer 68,5% van de vrouwen hadden een lengte tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$.
- d** $\mu - 2\sigma = 162,0 - 2 \times 6,4 = 149,2$ en $\mu + 2\sigma = 162,0 + 2 \times 6,4 = 174,8$
De frequenties tussen 149,2 cm en 174,8 cm bij elkaar opgeteld zijn
 $54 + 71 + \dots + 65 + 62 = 4710$.
 $4710 : 5001 \times 100 = 94,18...\%$
Ongeveer 94,2% van de vrouwen hadden een lengte tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$.
- e** De lengte van de vrouwen was redelijk normaal verdeeld, want het staafdiagram is min of meer klokvormig en de vuistregels kloppen redelijk.

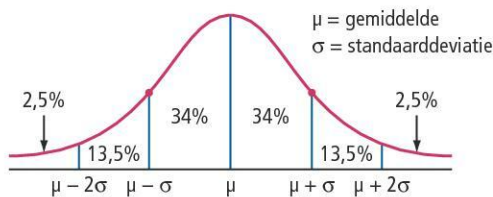
- 3 a** Ja, het staafdiagram is bij benadering klokvormig.
- b** 1e vuistregel
 $\mu - \sigma = 24,48 - 1,2 = 23,28$ en $\mu + \sigma = 24,48 + 1,2 = 25,68$
 Het aantal vrouwen met een voetlengte tussen 23,28 cm en 25,68 cm is
 $4232 - 854 = 3378$.
 Dat is $3378 : 5001 \times 100\% \approx 68\%$ en dus klopt de 1e vuistregel.
- 2e vuistregel
 $\mu - 2\sigma = 24,48 - 2 \times 1,2 = 22,08$ en $\mu + 2\sigma = 24,48 + 2 \times 1,2 = 26,88$
 Het aantal vrouwen met een voetlengte tussen 22,08 cm en 26,88 cm is
 $4904 - 102 = 4802$.
 Dat is $4802 : 5001 \times 100 \approx 96\%$ en dus klopt de 2e vuistregel.
 De voetlengte van de vrouwen is normaal verdeeld, want het staafdiagram is min of meer klokvormig en de vuistregels kloppen.
- 4 a** De grafiek schuift naar links en de vorm van de grafiek blijft gelijk.
- b** De grafiek wordt smaller en hoger, maar verschuift niet naar links of rechts.
- 5 a** Grafiek 5 heeft het grootste gemiddelde, want de top van deze grafiek ligt het meest naar rechts. De toppen van grafiek 2 ligt het meest naar links, dus die heeft het kleinste gemiddelde.
- b** Grafiek 4 is het breedst (en daardoor ook de laagste top), dus heeft de grootste standaardafwijking. Grafiek 1 is het smalst en heeft daarom ook de hoogste top. Grafiek 1 heeft de kleinste standaardafwijking.

- 03 a** Ja, het staafdiagram is bij benadering klokvormig.
- b** $\mu - \sigma = 55,1 - 5,8 = 49,3$ en $\mu + \sigma = 55,1 + 5,8 = 60,9$
- c** Het aantal studenten die afstuderen tussen 49,3 maanden en 60,9 maanden is
 $121 + 109 + \dots + 115 + 114 = 1419$.
- d** $1419 : 2111 \times 100\% \approx 67\%$ Dat zit dicht bij 68%, dus de 1e vuistregel klopt.
- e** $\mu - 2\sigma = 55,1 - 2 \times 5,8 = 43,5$ en $\mu + 2\sigma = 55,1 + 2 \times 5,8 = 66,7$
 Het aantal studenten die afstuderen tussen 43,5 maanden en 66,7 maanden is
 $35 + 45 + \dots + 23 + 25 = 2013$.
 $2013 : 2111 \times 100\% \approx 95\%$, dus de 2e vuistregel klopt.
- f** De studieduur van de hbo studenten is normaal verdeeld, want het staafdiagram is min of meer klokvormig en de vuistregels kloppen.

- U1** 1e vuistregel
 $\mu - \sigma = 105,5 - 1,5 = 104$ en $\mu + \sigma = 105,5 + 1,5 = 107$
 Het aantal rollen met een lengte tussen 104 cm en 107 cm is
 $86 + 106 + 84 = 276$.
 $276 : 400 \times 100\% = 69\%$, dus de 1e vuistregel klopt.
- 2e vuistregel
 $\mu - 2\sigma = 105,5 - 2 \times 1,5 = 102,5$ en $\mu + 2\sigma = 105,5 + 2 \times 1,5 = 108,5$
 Het aantal rollen met een lengte tussen 102,5 cm en 108,5 cm is
 $0,5 \times 13 + 44 + 86 + 106 + 84 + 46 + 0,5 \times 14 = 379,5$.
 $379,5 : 400 \times 100\% \approx 95\%$, dus de 2e vuistregel klopt ook.
 De lengte van de stof op de rollen is normaal verdeeld, want het staafdiagram is min of meer klokvormig en de vuistregels kloppen.

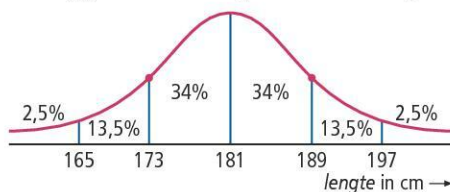
10.2 Rekenen met de vuistregels

intro Het gemiddelde hoort bij de top van de grafiek, dus het gemiddelde is 6,5.
Met de vuistregels van een normale verdeling kun je de oppervlakte onder de grafiek opsplitsen in zes stukken met de volgende percentages.



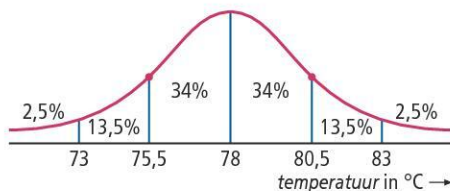
Dan lees je af dat $34 + 34 + 13,5 + 2,5 = 84\%$ van de waarnemingen een hogere waarde heeft dan $\mu - \sigma$. In de grafiek zie je $\mu - \sigma$ gelijk is aan 5,5. Omdat $\mu = 6,5$ betekent dat de standaardafwijking σ gelijk aan 1 is.

- 6 a** 181 is het gemiddelde en in de normale verdeling ligt gemiddelde onder de top.
b De buigpunten liggen één standaardafwijking naar links en naar rechts ten opzichte van het gemiddelde.
 $\mu - \sigma = 181 - 8 = 173$ en $\mu + \sigma = 181 + 8 = 189$
c De figuur is symmetrisch, dus verdeel je die 68% in twee gelijke delen van 34%.
d Tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$ ligt 95% van de waarnemingen.
 $95\% - 68\% = 27\%$ en $27\% : 2 = 13,5\%$
 Buiten $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$ ligt 5% van de waarnemingen.
 $5\% : 2 = 2,5\%$
 Je krijgt dan de volgende verdeling.



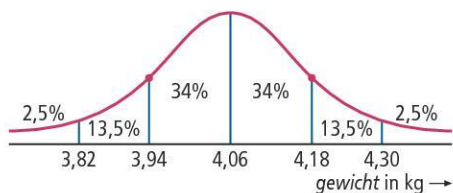
- e** $34 + 34 + 13,5 = 81,5$
 81,5 procent van de dienstplichtigen had een lengte tussen 173 en 197 cm.
f $13,5 + 2,5 = 16$
 16 procent van de dienstplichtigen was langer dan 189 cm.

7 a



- b** $13,5 + 2,5 = 16$
 16 procent van de kopjes koffie is warmer dan 80,5 °C.
c $13,5 + 34 + 34 = 81,5$
 $300 : 100 \times 81,5 \approx 245$ kopjes koffie hebben een ideale temperatuur.

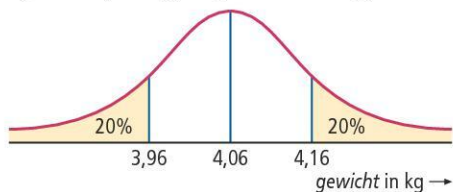
8 a



b $34 + 34 + 13,5 = 81,5$

$500 : 100 \times 81,5 \approx 408$ pakken hebben een gewicht tussen 3,94 kg en 4,30 kg.

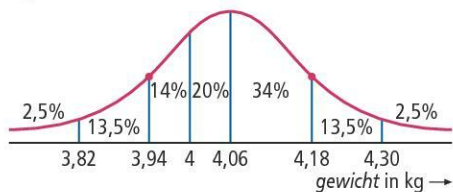
c 4,16 is 0,10 kg hoger dan het gemiddelde 4,06.



$4,06 - 0,10 = 3,96$ kg

De twintig procent pakken met het laagste gewicht weegt minder dan 3,96 kg.

d



4 kg valt precies tussen 3,94 kg en 4,06 kg.

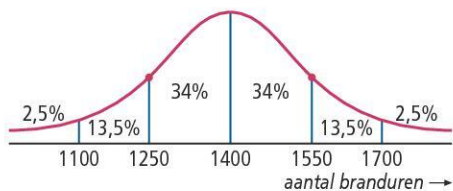
De 34% wordt niet gelijk verdeeld, want de grafiek is rechts van 4 kg hoger.

Verdeel het gebied in ongeveer 14% en 20%.

$2,5 + 13,5 + 14 = 30$

Ongeveer 30 procent van de pakken heeft een gewicht van minder dan 4 kg.

9 a



Na 1250 branduren is 16 procent van de lampen stuk.

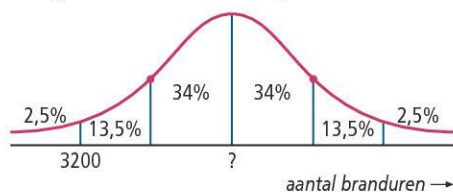
b $\mu - 2\sigma = 3200$

$\mu - 2 \times 75 = 3200$

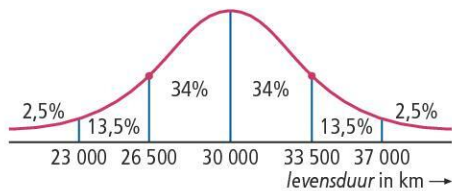
$\mu - 150 = 3200$

$\mu = 3200 + 150 = 3350$

De gemiddelde brandtijd van deze lampen is 3350 uur.



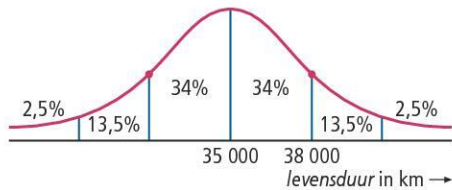
10 a



$$34 + 34 + 13,5 = 81,5$$

81,5 procent van de banden heeft een levensduur tussen de 26 500 km en 37 000 km.

b



Het gemiddelde is 35 000 km.

$$\mu + \sigma = 38\,000$$

$$35\,000 + \sigma = 38\,000$$

$$\sigma = 38\,000 - 35\,000 = 3\,000$$

De standaardafwijking is 3 000 km.

11 a De mediaan ligt bij 50%. Bij 50% lees je in de relatieve somfrequentiepolygoon 45,3 kg af.

b In een normale verdeling is het gemiddelde gelijk aan de mediaan.

c $\mu + \sigma$ lees je af bij $50 + 34 = 84\%$.

d In de relatieve somfrequentiepolygoon lees je af $\mu + \sigma = 47,2$.

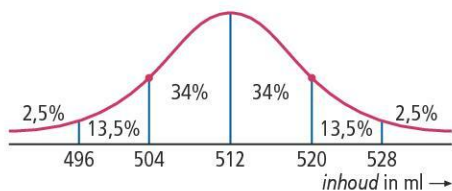
$$\mu + \sigma = 47,2$$

$$45,3 + \sigma = 47,2$$

$$\sigma = 47,2 - 45,3 = 1,9$$

De standaardafwijking is 1,9 kg.

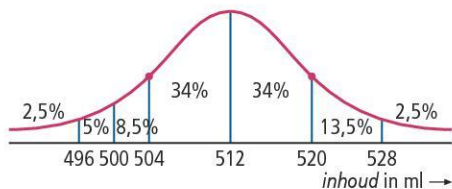
08 a



b $34 + 34 = 68$, dus 68% procent van de flesjes.

$$1000 : 100 \times 68 = 680 \text{ flesjes hebben een inhoud tussen } 504 \text{ mL en } 520 \text{ mL.}$$

c



Het lijntje dat hoort bij 500 mL ligt precies tussen 496 mL en 504 mL.

Het lijntje verdeelt dit gebied onder de grafiek in twee delen.

$$13,5 : 2 = 6,75$$

Het linker deel heeft duidelijk een kleiner oppervlak dan het rechter deel.

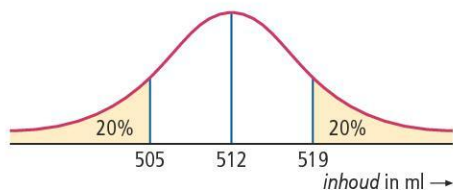
Het percentage flesjes dat tussen 496 en 500 mL ligt, is dus minder dan de helft van 13,5%, minder dus dan 6,75%.

d Verdeel het gebied in ongeveer 5% en 8,5%.

$$2,5 + 5 = 7,5$$

Ongeveer 7,5 procent van de flesjes heeft minder dan 500 mL.

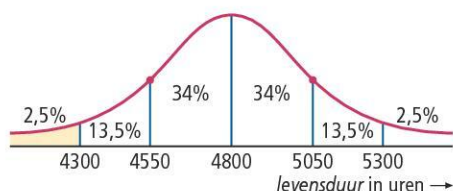
e $519 - 512 = 7 \text{ mL}$



$512 - 7 = 505 \text{ mL}$

Van 20 procent van de flesjes is de inhoud 505 mL of minder.

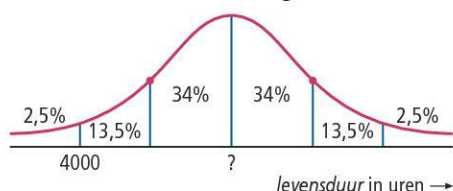
09 a



b 50 procent van de lampen is na 4800 uur defect.

c Dat is na 4300 uur het geval.

d



$\mu - 2\sigma = 4000$

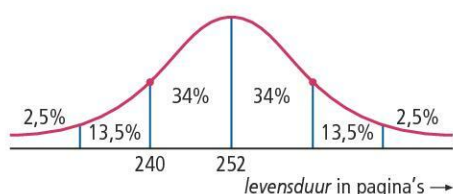
$\mu - 2 \times 175 = 4000$

$\mu - 350 = 4000$

$\mu = 4000 + 350 = 4350$

De gemiddelde levensduur van deze lampen is 4350 uur.

U2 a $504 : 600 \times 100\% = 84\%$



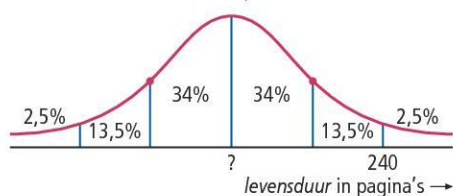
$\mu - \sigma = 240$

$252 - \sigma = 240$

$\sigma = 252 - 240 = 12$

De standaardafwijking van type A is 12 pagina's.

b $15 : 600 \times 100\% = 2,5\%$



$\mu + 2\sigma = 240$

$\mu + 2 \times 7 = 240$

$\mu + 14 = 240$

$\mu = 240 - 14 = 226$

Het gemiddelde van type B is 226 pagina's.

10.3 Steekproevenverdeling van een proportie

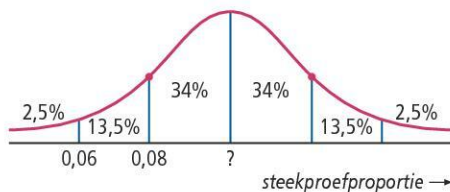
intro $3 : 50 \times 100\% = 6\%$, dus 6% van de spijkers in de steekproef is krom.
Je weet echter niet zeker of dat ook voor de hele partij spijkers het geval is.
Een betrouwbaarder schatting krijg je als je een grotere steekproef neemt.

- 12 a** Ja dat is mogelijk.
b $20 : 100 \times 20 = 4$
Vier leerlingen zijn naar verwachting linkshandig.
c Bij het ondervragen van vijf leerlingen zul je vaker tegenkomen dat geen enkele leerling linkshandig is.
- 13 a** De steekproef van de voorzitter is niet aselekt, want de leden die niet op de vergadering aanwezig zijn, hebben geen enkele kans om in de steekproef terecht te komen.
De steekproef van de secretaris is wel aselekt, want iedereen heeft dezelfde kans om in de steekproef terecht te komen.
b De steekproefomvang in de steekproef van de voorzitter is 34.
De steekproefomvang in de steekproef van de secretaris is 60.
- 14 a** $43 : 50 \times 100\% = 86\%$
86 procent van de sinaasappels in de steekproef is rijp.
b 86% betekent 86 van de 100 en dat is $86 : 100 = 0,86$.
- 15 a** $20 : 250 \times 100\% = 8\%$
8 procent van de knikkers is geel, dus de populatieproportie van het aantal gele knikkers is 0,08.
b $4 : 25 \times 100\% = 16\%$
In de steekproef van Dirk is 16 procent van de knikkers rood, dus de steekproefproportie is 0,16.
c De steekproefproportie is een schatting van de populatieproportie.
De populatieproportie van het aantal rode knikkers zal ongeveer 0,16 zijn.
- 16 a** $120 : 250 \times 100\% = 48\%$
48 procent van de knikkers in de doos is blauw.
Sanne zal naar verwachting $0,48 \times 100 = 48$ blauwe knikkers trekken.
b Het staafdiagram is redelijk klokvormig.
- 17 a** Een steekproefproportie van 0,88 wil zeggen dat 88 procent van de 200 auto's goedgekeurd werden.
Dat zijn $200 : 100 \times 88 = 176$ auto's.
b Het gemiddelde van de steekproefproporties is gelijk aan 0,92, want de top van de steekproevenverdeling ligt boven 0,92.
Ongeveer 92 procent van de auto's zal goedgekeurd worden voor de apk-keuring.
- 18 a** $20 : 50 \times 100\% = 40\%$, dus de steekproefproportie 0,4.
b $3 + 10 = 13$
Er zijn 13 steekproeven met een steekproefproportie van kleiner of gelijk aan 0,40.

- c 20 of minder bewoners van de 50 bewoners komt overeen met steekproefproportie van kleiner of gelijk aan 0,40.
In de steekproevenverdeling kwam dat 13 van de 1000 keer voor.
Dat is $13 : 1000 \times 100\% = 1,3\%$.

- 015** a $26 : 200 \times 100\% = 13\%$
13 procent van de scholieren in het onderzoek ervaart stress op school.
b De steekproefproportie is $13 : 100 = 0,13$.
c Alle scholieren van de school vormen de populatie.
d Als de steekproef een goede indicatie is voor de hele populatie, dan zou 13% van alle scholieren stress op school ervaren.
e $98 : 1286 \times 100\% \approx 7,6\%$
Ongeveer 7,6 procent van alle scholieren ervaren stress op school.
d De populatieproportie is $7,6 : 100 = 0,076$.
- 017** a Een steekproefproportie van 0,85 wil zeggen dat 85 procent van de 200 treinen op tijd reed.
Dat zijn $200 : 100 \times 85 = 170$ treinen.
b Het gemiddelde van de steekproevenverdeling is 0,83.
c Ongeveer 83 procent van de treinen was op tijd.

U3



$$\mu - \sigma = 0,08 \text{ en } \mu - 2\sigma = 0,06$$

Hieruit volgt dat $\sigma = 0,02$.

$$\mu - 0,02 = 0,08$$

$$\mu = 0,08 + 0,02 = 0,10$$

Waarschijnlijk is 10% van de pennen defect.

10.4 Betrouwbaarheidsinterval voor een proportie

intro Het gaat hier om een steekproef met steekproefomvang 1000. Als die steekproef aselekt en representatief is, krijg je een indicatie van het aantal VVD stemmers. Toch blijf je afhankelijk van toeval en heb je dus geen zekerheid dat 16% van alle kiesgerechtigden op de VVD gaan stemmen.

- 19** a Het gemiddelde van alle steekproefproporties is 0,80. Dat is een goede indicatie voor de populatieproportie.
b De standaardafwijking is $0,80 - 0,76 = 0,04$.
c De steekproefomvang is 100.
$$\sqrt{\frac{0,8(1-0,8)}{100}} = 0,04, \text{ dat klopt.}$$

d De middelste 95% van alle steekproefproporties ligt tussen 0,72 en 0,88.
e Bij steekproef 4, want daar is de steekproefproportie 0,80.
f Bij een steekproef kan door toeval het resultaat afwijken.
g Steekproef 2 en steekproef 5 liggen buiten de middelste 95% van alle steekproefproporties.

- 20 a** De steekproefproportie van steekproef 4 is gelijk is aan 0,80.
Dit interval is gelijk aan $[0,80 - 0,08; 0,80 + 0,08]$ ofwel $[0,72; 0,88]$.
- b** De steekproefproportie van steekproef 1 is gelijk is aan 0,77.
Het interval van steekproef 1 is $[0,77 - 0,08; 0,77 + 0,08]$ ofwel $[0,69; 0,85]$.
- c** Bij de steekproeven 1, 3, 4 en 6 bevat het interval de steekproefproportie 0,80.
- d** Het interval van de steekproef is gelijk verdeeld rondom de steekproefproportie, ten opzichte van de steekproefproportie 0,08 naar links en 0,08 naar rechts. De gestippelde lijnen liggen 0,08 naar links en 0,08 naar rechts ten opzichte van de populatieproportie.
Dan kan het niet anders dat als de steekproefproportie binnen de gestippelde lijnen ligt, de populatieproportie in het interval van de steekproef ligt.
- e** De gestippelde lijnen liggen bij $\mu - 2\sigma = 0,72$ en $\mu + 2\sigma = 0,84$.
Volgens de 2e vuistregel van een normale verdeling ligt dan 95 procent van de steekproefproporties tussen deze waarden.
Daarom zal ook 95 procent van de steekproeven de populatieproportie bevatten.

- 21** $p = 43 : 100 = 0,43$

$$0,43 - 2 \times \sqrt{\frac{0,43(1 - 0,43)}{1500}} \approx 0,40 \text{ en } 0,43 + 2 \times \sqrt{\frac{0,43(1 - 0,43)}{1500}} \approx 0,46$$
 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,40; 0,46]$.
 Met 95% zekerheid kun je zeggen dat het percentage tegenstanders van de komst van airport Lelystad tussen 40% en 46% ligt.
 De foutenmarge is $(0,46 - 0,40) : 2 = 0,03$ ofwel 3%.

- 22** $p = 56 : 100 = 0,56$

$$0,56 - 2 \times \sqrt{\frac{0,56(1 - 0,56)}{2000}} \approx 0,54 \text{ en } 0,56 + 2 \times \sqrt{\frac{0,56(1 - 0,56)}{2000}} \approx 0,58$$
 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,54; 0,58]$.
- b** Met 95% zekerheid kun je dat concluderen, want de steekproefproportie 0,67 (67%) van de steekproef in 2018 valt buiten het 95%-betrouwbaarheidsinterval.

- 23 a** $96 : 300 \times 100\% = 32\%$
 32 procent van de leerlingen in de steekproef heeft een iPhone.
 De steekproefproportie is $32 : 100 = 0,32$.
- b**
$$0,32 - 2 \times \sqrt{\frac{0,32(1 - 0,32)}{300}} \approx 0,27 \text{ en } 0,32 + 2 \times \sqrt{\frac{0,32(1 - 0,32)}{300}} \approx 0,37$$
 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,27; 0,37]$.

- 24 a** 510 van de 11 875 leerlingen zonder dyslexie hebben een onvoldoende voor het vak Nederlands.
 Dat is $510 : 11\,875 \times 100\% = 4,2\ldots\%$
 $p = 4,2\ldots : 100 = 0,042\ldots$

$$0,042\ldots - 2 \times \sqrt{\frac{0,042\ldots(1 - 0,042\ldots)}{11\,875}} \approx 0,039$$

$$0,042\ldots + 2 \times \sqrt{\frac{0,042\ldots(1 - 0,042\ldots)}{11\,875}} \approx 0,047$$
 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,039; 0,047]$.

- b** 219 van de 625 dyslectische leerlingen hebben een onvoldoende voor het vak Nederlands.

Dat is $219 : 625 \times 100\% = 35,04\%$.

$$p = 35,04 : 100 = 0,3504$$

$$0,3504 - 2 \times \sqrt{\frac{0,3504(1 - 0,3504)}{625}} \approx 0,31$$

$$0,3504 + 2 \times \sqrt{\frac{0,3504(1 - 0,3504)}{625}} \approx 0,39$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,31; 0,39]$.

- c** Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor leerling met dyslexie is veel hoger en ligt volledig buiten het 95%-betrouwbaarheidsinterval van leerlingen zonder dyslexie. Daarmee is aangetoond dat leerlingen met dyslexie vaker een onvoldoende voor het vak Nederlands hebben als leerlingen zonder dyslexie.

021 a $p = 72 : 100 = 0,72$

- b** De linker grens van het 95%-betrouwbaarheidsinterval is

$$p - 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,72 - 2 \times \sqrt{\frac{0,72(1-0,72)}{600}} \approx 0,68.$$

- c** De rechter grens van het 95%-betrouwbaarheidsinterval is

$$0,72 + 2 \times \sqrt{\frac{0,72(1-0,72)}{600}} \approx 0,76.$$

- d** Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,68; 0,76]$.

Met 95% zekerheid kun je zeggen dat het percentage leerlingen dat een bijbaantje heeft tussen 68% en 76% ligt.

- e** De foutenmarge is $(0,76 - 0,68) : 2 = 0,04$.

024 a 328 leerlingen met dyscalculie zitten in dit onderzoek, dus $n = 328$.

- b** 278 van deze 328 leerlingen hebben een onvoldoende voor de rekentoets.

Dat is dus $278 : 328 \times 100\% = 84,7\ldots\%$, dus $p = 84,7\ldots : 100 = 0,847\ldots$

c $0,847\ldots - 2 \times \sqrt{\frac{0,847\ldots(1-0,847\ldots)}{328}} \approx 0,81$

$$0,847\ldots + 2 \times \sqrt{\frac{0,847\ldots(1-0,847\ldots)}{328}} \approx 0,89$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,81; 0,89]$.

- d** 9172 leerlingen zonder dyscalculie zitten in dit onderzoek, dus $n = 9172$.

659 van de 9172 leerlingen zonder dyscalculie hebben een onvoldoende voor de rekentoets.

Dat is dus $659 : 9172 \times 100\% \approx 7,1\ldots\%$, dus $p = 7,1\ldots : 100 = 0,071\ldots$

$$0,071\ldots - 2 \times \sqrt{\frac{0,071\ldots(1-0,071\ldots)}{9172}} \approx 0,07$$

$$0,071\ldots + 2 \times \sqrt{\frac{0,071\ldots(1-0,071\ldots)}{9172}} \approx 0,08$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,07; 0,08]$.

- U4 a** Als de steekproefomvang groter wordt, neemt n toe.

Als n toeneemt, zal de uitkomst van $\frac{p(1-p)}{n}$ kleiner worden.

Daardoor zal de uitkomst van $2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ ook kleiner worden.

Het betrouwbaarheidsinterval zal dan dus kleiner worden.

- b** Als de steekproefomvang twee keer zo groot wordt, dan kun je in de formule n vervangen door $2n$.

$$2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{2n}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{p(1-p)}{n}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

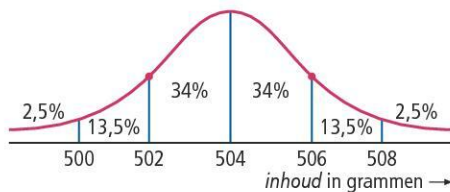
Als de steekproefomvang twee keer zo groot wordt, wordt de foutenmarge

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0,71 \text{ keer zo groot. (en dus kleiner)}$$

10.5 Steekproevenverdeling van een gemiddelde

intro Het resultaat van de steekproef van Piet is het meest betrouwbaar. Dat is namelijk een gemiddelde van tien steekproeven. Daarbij ben je weer minder afhankelijk van toeval. De nauwkeurigheid kun je vergroten door de steekproefomvang groter te nemen of nog meer steekproeven te nemen.

25 a



2,5 procent van de pakken weegt minder dan 500 gram.

- b** Dan zou de helft van de aantallen pakken koffie minder wegen dan 500 gram, dus minder dan wat er op de verpakking staat. De fabrikant zou dan waarschijnlijk te veel klachten krijgen van de consumenten.
- c** Ze kan de pech hebben om twee van dergelijke pakken in handen te krijgen, maar die kans is wel klein. Redelijker is misschien te veronderstellen dat het vulgemiddelde niet op 504 gram staat afgesteld.
- d** 503,1 gram ligt wel dicht bij de veronderstelde 504 gram. De vraag is of het dichtbij genoeg is. Daar kun je over twijfelen. Een steekproefgemiddelde van 503,9 gram zou overtuigender zijn. Een steekproefgemiddelde van 504,1 gram zou je niet meer doen twijfelen.

26 a Het populatiegemiddelde μ is 11,2 uur.

b Het steekproefgemiddelde $\bar{x}$ is 8,7 uur.

c Bij een steekproef kan door toeval het steekproefgemiddelde lager uitkomen. Zeker als de steekproefomvang zo klein is als bij de steekproef van Bas.

27 a De staafdiagram is redelijk klokvormig.

b Het gemiddelde van al die steekproeven is 504,0 gram en is dan een betere schatting dan 503,1 gram.

c Ja, zeer waarschijnlijk wel.

28 a De standaardafwijking wordt kleiner naarmate de steekproefomvang toeneemt.

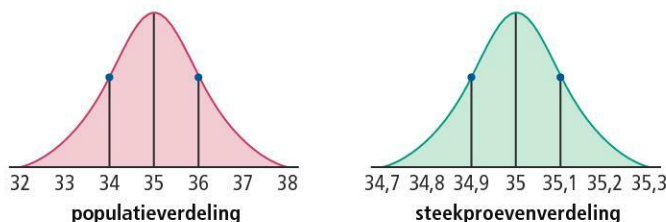
b Bij een steekproefomvang van 200 is de spreiding het kleinst, want dan is de standaardafwijking het kleinst.

- 29 a** De populatie in het voorbeeld zijn die 10 000 blikjes cola.
- b** In de steekproevenverdeling ligt de mediaan en de modus ongeveer bij 33,5 cL. Het gemiddelde van alle steekproefgemiddelden zal ongeveer 33,5 cL zijn. Dat is een goede schatting voor de populatiegemiddelde.
- c** Gemiddeld bevat elk blikje cola 33,5 cL en dus 0,5 cL meer cola dan er op het blikje staat.
- d** Je zult in de praktijk nooit vijftig steekproeven van 20 blikjes cola nemen. Dat kost veel te veel tijd. Je wilt graag met één steekproef een voorspelling kunnen doen. Maar als je vijftig dagen lang elke dag een steekproef van 20 blikjes cola neemt, krijg je een betrouwbaarder schatting van het gemiddelde dan bij één steekproef. Maar dat kost tijd en geld.

- 30 a** Op basis van deze steekproef schat hij dat het populatiegemiddelde 40,9 schroeven per doosje is. Dat betekent dat er waarschijnlijk genoeg schroeven in een doosje zitten. Hoewel het een gemiddelde is, dus er kunnen ook doosjes zijn met minder dan 40 schroeven.
- b** Het gemiddelde van de steekproevenverdeling is 40,6 schroeven. Dat is ook de schatting van het populatiegemiddelde.

- 030 a** Het steekproefgemiddelde is dan een indicatie voor het populatiegemiddelde. Hij zal dus het populatiegemiddelde schatten op 202 punaises.
- b** De praktische betekenis is dat er waarschijnlijk gemiddeld 202 punaises in een doosje zitten.
- c** Het steekproefgemiddelde van 204 punaises per doosje kwam het vaakst voor.
- d** De modus en de mediaan zijn 204 punaises. Het gemiddelde van de steekproevenverdeling zal ongeveer 204 punaises zijn.
- e** Het gemiddelde aantal punaises in een doosje van deze fabriek zal ongeveer 204 punaises zijn.

U5 a



populatieverdeling

$\mu = 35$ en $\sigma = 1$

Je moet vanaf het gemiddelde 35 ongeveer 1 naar rechts en naar links om op de grafiek uit te komen bij de buigpunten.

steekproevenverdeling

$\mu = 35$ en $\sigma = 0,1$

Je moet vanaf het gemiddelde 35 ongeveer 0,1 naar rechts en naar links om op de grafiek uit te komen bij de buigpunten.

- b** In een steekproef kan een uitschieter zitten. Het gemiddelde van een steekproef zal dicht bij het werkelijke gemiddelde van de populatie liggen als de uitkomst van één waarneming. Dat komt doordat die ene uitschieter bij het berekenen van de steekproefgemiddelde minder invloed heeft doordat er ook andere normalere resultaten in de steekproef zitten. Bij een steekproevenverdeling kijk je naar de gemiddelden van de steekproeven. De spreiding zal bij een steekproevenverdeling kleiner zijn en dus zal de standaardafwijking van een steekproevenverdeling ook kleiner zijn.

10.6 Betrouwbaarheidsinterval voor een gemiddelde

intro Het is een steekproef met steekproefomvang 5. Dat is een erg kleine steekproefomvang en dus is het resultaat erg afhankelijk van toeval of meetfouten. De docent is dus niet zo heel zeker van het resultaat. Een grotere steekproefomvang zou een betrouwbaarder resultaat opleveren.

- 31 a** De buigpunten liggen bij 1000 gram en 1004 gram.
Het gemiddelde van de steekproevenverdeling is 1002 gram.
 $\mu - \sigma = 1000$
 $1002 - \sigma = 1000$
 $\sigma = 1002 - 1000 = 2$
 De standaardafwijking van de steekproevenverdeling is 2 gram.
- b** De steekproefomvang is 25, dus $n = 25$.
 $\frac{10}{\sqrt{25}} = 2$, klopt.
- c** De middelste 95% van de waarnemingen ligt tussen 998 en 1006 gram.
- d** Bij steekproef 3 was het gemiddelde gelijk aan het populatiegemiddelde, namelijk 1002 gram.
- e** Door toeval zal niet elk steekproefgemiddelde gelijk zijn aan het populatiegemiddelde.
- f** Bij steekproef 2 ligt het steekproefgemiddelde buiten de middelste 95% van alle steekproefgemiddelden.
- 32 a** Bij steekproef 3 is het steekproefgemiddelde 1002 gram.
Dit interval is gelijk aan $[1002 - 4, 1002 + 4]$ ofwel $[998, 1006]$.
- b** Bij steekproef 1 is het steekproefgemiddelde 1001 gram.
Dit interval is gelijk aan $[1001 - 4, 1001 + 4]$ ofwel $[997, 1005]$.
- c** Bij de steekproeven 1, 3 en 4.
- d** Het interval van de steekproef is gelijk verdeeld rondom het steekproefgemiddelde. Ten opzichte van het steekproefgemiddelde 4 naar links en 4 naar rechts. De gestippelde lijnen liggen 4 naar links en 4 naar rechts ten opzichte van het steekproefgemiddelde.
Dan kan het niet anders dat als het steekproefgemiddelde binnen de gestippelde lijnen ligt, het populatiegemiddelde in het interval van de steekproef ligt.
- e** De gestippelde lijnen liggen bij $\mu - 2\sigma = 998$ en $\mu + 2\sigma = 1006$.
Volgens de 2e vuistregel van een normale verdeling ligt dan 95 procent van de steekproefgemiddelden tussen deze waarden.
Daarom zal ook 95 procent van de steekproeven het populatiegemiddelde bevatten.
- 33** $38,1 - 2 \times \frac{3,9}{\sqrt{400}} \approx 37,7$ en $38,1 + 2 \times \frac{3,9}{\sqrt{400}} \approx 38,5$
Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[37,7; 38,5]$.
Met 95% zekerheid kun je zeggen dat havo 5 leerlingen gemiddeld tussen 37,7 uur en 38,5 uur aan hun profielwerkstuk werken.
De foutenmarge is $(38,5 - 37,7) : 2 = 0,4$ uur.

34 a $778 - 2 \times \frac{128}{\sqrt{1500}} \approx 771$ en $778 + 2 \times \frac{128}{\sqrt{1500}} \approx 785$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [771; 785].

- b** Het interval [770, 786] is ruimer dan het 95%-betrouwbaarheidsinterval. Het is dus meer dan 95% zeker dat het gemiddelde bedrag in het interval [770, 786] ligt.

35 $56,7 - 2 \times \frac{4,3}{\sqrt{22000}} \approx 56,64$ en $56,7 + 2 \times \frac{4,30}{\sqrt{22000}} \approx 56,76$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [56,64; 56,76].

Je kunt met 95% zekerheid zeggen dat het gemiddelde gewicht van alle Nederlandse kinderen van 12 jaar tussen de 56,64 kg en 56,76 kg ligt.

De foutenmarge is $(56,76 - 56,64) : 2 = 0,06$ kg.

- 36 a** jongens

$$88,9 - 2 \times \frac{3,93}{\sqrt{50}} \approx 87,8 \text{ en } 88,9 + 2 \times \frac{3,93}{\sqrt{50}} \approx 90,0$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval bij de jongens is [87,8; 90,0].

meisjes

$$[87,5 - 2 \times \frac{3,12}{\sqrt{50}} = 86,6 \text{ en } 87,5 + 2 \times \frac{3,12}{\sqrt{50}} = 88,4]$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval bij de meisjes is [86,6; 88,4].

- b** Met 95% zekerheid kun je zeggen dat de gemiddelde lengte van de jongens in cm ligt in het interval [87,8; 90,0] en die van de meisjes in [86,6; 88,4]. Het is dus mogelijk dat de gemiddelde lengte van de jongens gelijk is aan bijvoorbeeld 88,0 cm en die van de meisjes gelijk is aan 88,2 cm, maar waarschijnlijk is de gemiddelde lengte van de jongens groter die dat van de meisjes.

- 033 a** De steekproefomvang n is gelijk aan 500.

b De linkergrens van het interval is $\bar{x} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 37,9 - 2 \times \frac{3,8}{\sqrt{500}} \approx 37,6$.

c De rechter grens van het interval is $37,9 + 2 \times \frac{3,8}{\sqrt{500}} \approx 38,2$.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [37,6; 38,2].

- d** Met 95% zekerheid kun je zeggen dat de gemiddelde tijd die havo 5 leerlingen aan hun profielwerkstuk werken tussen 37,6 uur en 38,2 uur ligt.

e De lengte van het interval is $38,2 - 37,6 = 0,6$ uur.

f De foutenmarge is $0,6 : 2 = 0,3$ uur.

- U6 a** Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[5,6 - 0,27; 5,6 + 0,27]$ en dat is [5,33; 5,87].

b $2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 0,27$

$$2 \cdot \frac{2,7}{\sqrt{n}} = 0,27$$

$$\frac{2,7}{\sqrt{n}} = 0,135$$

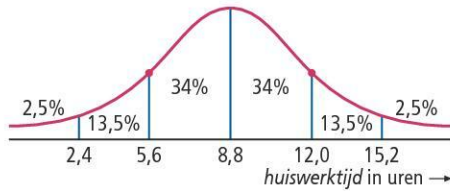
$$\sqrt{n} = 2,7 : 0,135 = 20$$

$n = 20^2 = 400$, dus de steekproefomvang is 400.

10.7 Gemengde opdrachten

- 37 a** 40% van de meisjes besteedt minder dan 8 uur per week aan huiswerk.
Dan besteedt $100\% - 40\% = 60\%$ 8 uur of meer per week aan het huiswerk.

b



$$13,5 + 2,5 = 16$$

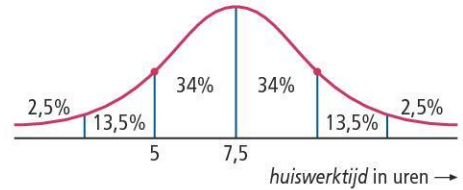
16 procent van de meisjes besteedt meer dan 12 uur aan hun huiswerk.

c $\mu - \sigma = 5$

$$7,5 - \sigma = 5$$

$$\sigma = 7,5 - 5 = 2,5$$

De standaardafwijking is 2,5 uur.



- d** De grafiek van de vrouwen heeft de top meer naar rechts liggen, want ze besteden gemiddeld meer tijd aan huiswerk.
De grafiek van de vrouwen moet breder zijn en dus de top lager, want de spreiding bij de vrouwen is groter.
De figuur moet een grafiek hebben waarvan de top rechts en lager ligt dan de andere grafiek. Dat is figuur 1.

- 38 a** Het staafdiagram is redelijk klokvormig.

b 1e vuistregel

$$\mu - \sigma = 4,54 - 0,39 = 4,15 \text{ en } \mu + \sigma = 4,54 + 0,39 = 4,93$$

Het aantal vliegen met een vleugellengte tussen 4,15 mm en 4,93 mm is

$$6 + 8 + \dots + 8 + 7 = 68.$$

68 van de 100 vliegen, dat is 68%, dus de 1e vuistregel klopt.

2e vuistregel

$$\mu - 2\sigma = 4,54 - 2 \times 0,39 = 3,76 \text{ en } \mu + 2\sigma = 4,54 + 2 \times 0,39 = 5,32$$

Het aantal vliegen met een vleugellengte tussen 3,76 mm en 5,32 mm is

$$2 + 2 + \dots + 2 + 3 = 97.$$

97 van de 100 vliegen, dat is 97%, dus de 2e vuistregel klopt redelijk.

De vleugellengte is redelijk normaal verdeeld.

c $4,54 - 2 \times \frac{0,39}{\sqrt{100}} = 4,462 \text{ en } 4,54 + 2 \times \frac{0,39}{\sqrt{100}} = 4,618$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [4,462; 4,618]. De foutenmarge is $(4,618 - 4,528) : 2 = 0,045 \text{ mm}$.

- 39 a** $p = 61 : 100 = 0,61$

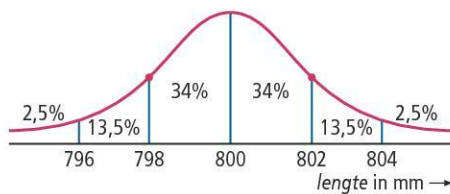
$$0,61 - 2 \times \sqrt{\frac{0,61(1 - 0,61)}{3000}} \approx 0,59 \text{ en } 0,61 + 2 \times \sqrt{\frac{0,61(1 - 0,61)}{3000}} \approx 0,63$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [0,59; 0,63].

Met 95% zekerheid kun je zeggen dat het percentage Nederlanders dat regelmatig soaps kijkt tussen 59% en 63% ligt.

- b** Dan wordt je betrouwbaarheidsinterval groter, want dan moeten er nog meer uitschieters in het interval passen.

40 a



<i>lengte van de plank</i>	<i>winst</i>	<i>percentage</i>
korter dan 798 mm	$3,25 - 0,50 = 2,75$	$2,5 + 13,5 = 16$
tussen 798 mm en 802 mm	3,25	$34 + 34 = 68$
langer dan 802 mm	-2	$13,5 + 2,5 = 16$

Slechts $68\% + 16\% = 84\%$ van de planken is bruikbaar, maar je hebt wel 1000 goede planken nodig voor de klant. Je zult dus meer dan 1000 planken moeten zagen.

<i>aantal planken</i>	1000	?
<i>percentage</i>	84	100

$$1000 \times 100 = 84 \times ?$$

$$? = 1000 \times 100 : 84 = 1190,4...$$

Om 1000 goede planken te leveren, moeten er 1191 planken gezaagd worden.

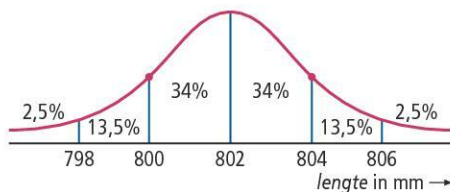
Daarvan zijn $1191 : 100 \times 16 \approx 191$ planken te kort.

Daarvan zijn $1191 : 100 \times 68 \approx 810$ planken direct goed.

Daarvan zijn $1191 : 100 \times 16 \approx 191$ planken te lang.

Dat levert een winst op van $810 \times 3,25 + 191 \times 2,75 - 191 \times 2 = 2775,75$ euro.

b



<i>lengte van de plank</i>	<i>winst</i>	<i>percentage</i>
korter dan 798 mm	2,75	2,5
tussen 798 mm en 802 mm	3,25	$13,5 + 34 = 47,5$
langer dan 802 mm	-2	50

Slechts $47,5\% + 50\% = 97,5\%$ van de planken is bruikbaar.

<i>aantal planken</i>	1000	?
<i>percentage</i>	97,5	100

$$1000 \times 100 = 97,5 \times ?$$

$$? = 1000 \times 100 : 97,5 = 1025,6...$$

Om 1000 goede planken te leveren, moeten er 1026 planken gezaagd worden.

Daarvan zijn $1026 : 100 \times 2,5 \approx 26$ planken te kort.

Daarvan zijn $1026 : 100 \times 47,5 \approx 488$ planken direct goed.

Daarvan zijn $1026 : 100 \times 50 \approx 513$ planken te lang.

Dat levert een winst op van $488 \times 3,25 + 513 \times 2,75 - 26 \times 2 = 2944,75$ euro.

De winst is hoger, dus het is voordeliger om de machine in te stellen op een gemiddelde van 802 mm.

41 a $p = 9,2 : 100 = 0,092$

$$0,092 \pm 2 \times \sqrt{\frac{0,092(1 - 0,092)}{2700}} \approx 0,092 \pm 0,011$$

In procenten is dat $9,2\% \pm 1,1\%$.

b De breedte van het betrouwbaarheidsinterval is $4 \times \sqrt{\frac{0,092(1 - 0,092)}{n}}$

Je wilt een n zo dat dit kleiner is dan 1% , dus kleiner dan $0,01$.

Daarbij hoort de vergelijking $4 \times \sqrt{\frac{0,092(1 - 0,092)}{n}} = 0,01$.

Invoer: $y_1 = 4 \times \sqrt{\frac{0,092(1 - 0,092)}{x}}$ en $y_2 = 0,01$

Venster: x van 0 tot 15 000 en y van 0 tot 0,02

Optie: snijpunt

De oplossing is $x = 13\,366$.

Dat betekent dat de steekproefomvang minstens 13 370 personen moet zijn.

42 Bij $1,72\%$ hoort $p = 1,72 : 100 = 0,0172$ en bij $3,28\%$ hoort

$$p = 3,28 : 100 = 0,0328.$$

De lengte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $0,0328 - 0,0172 = 0,0156$.

Het gemiddelde van de steekproefproporties is het midden van het

95%-betrouwbaarheidsinterval en dat is $(0,0328 + 0,0172) : 2 = 0,025$.

De lengte van het betrouwbaarheidsinterval is gelijk aan $4 \times \sqrt{\frac{p(p - 1)}{n}}$

Je krijgt de vergelijking $4 \times \sqrt{\frac{0,025(1 - 0,025)}{n}} = 0,0156$.

Invoer: $y_1 = 4 \times \sqrt{\frac{0,025(1 - 0,025)}{x}}$ en $y_2 = 0,0156$

Venster: x van 0 tot 2000 en y van 0 tot 0,02

Optie: snijpunt

De oplossing is $x \approx 1602,5$.

Dat betekent dat de steekproefomvang ongeveer uit 1603 automobilisten

bestond. Daarvan hebben $2,5\%$ een botsing gehad.

Dat zijn $1603 : 100 \times 2,5 \approx 40$ automobilisten.

Samenvatting

S1 Het staafdiagram is niet heel erg klokvormig. De prestaties van de jongens op het onderdeel vergooien zijn niet normaal verdeeld.

- S2 a**
- Er zijn leerlingen die niet met de fiets komen, zij hebben dus geen kans om in deze steekproef terecht te komen.
 - Ze vragen alleen de eerste 200 leerlingen, de leerlingen die later met de fiets komen, hebben geen kans om in deze steekproef te komen.

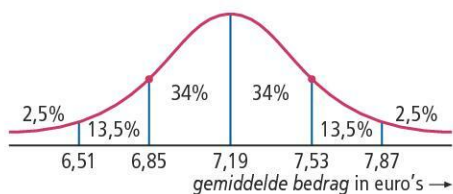
b In beide steekproeven is de steekproefomvang 200.

S3 a Een steekproefproportie van $0,38$ wil zeggen dat 38 procent van de 50 klanten met de pin betaalt. Dat zijn $50 : 100 \times 38 = 19$ klanten.

b Het gemiddelde van de steekproevenverdeling is een schatting van de populatieproportie. Die lijkt ongeveer $0,27$ te zijn.

- S4 a Het laagste steekproefgemiddelde is 6,8.
 b Het gemiddelde van de steekproevenverdeling ligt in de buurt van 7,2.
 Een schatting voor het populatiegemiddelde is 7,2.

S5



$$34 + 34 + 13,5 = 81,5$$

81,5 procent van de mannelijke klanten geeft tussen de € 6,85 en de € 7,87 uit.

- S6 104 van de 160 leerlingen zijn geslaagd.
 Dat is $104 : 160 \times 100\% = 65\%$, dus de steekproefproportie is $65 : 100 = 0,65$.

$$0,65 - 2 \times \sqrt{\frac{0,65 \times (1 - 0,65)}{160}} \approx 0,575$$

$$0,65 + 2 \times \sqrt{\frac{0,65 \times (1 - 0,65)}{160}} \approx 0,725$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,575; 0,725]$.

Met 95% zekerheid kun je zeggen dat het percentage havo 5 leerlingen dat slaagt tussen 57,5% en 72,5% ligt.

De foutenmarge is $(0,725 - 0,575) : 2 = 0,075$ ofwel 7,5%.

S7 $6,7 - 2 \times \frac{0,29}{\sqrt{400}} = 6,671$ en $6,7 + 2 \times \frac{0,29}{\sqrt{400}} = 6,729$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[6,671; 6,729]$.

Met 95% zekerheid kun je zeggen dat het gemiddelde voor het wiskunde B havo examen tussen 6,671 en 6,729 ligt.

De foutenmarge is $(6,729 - 6,671) : 2 = 0,029$.

Test jezelf

- T1 a Het staafdiagram is redelijk klokvormig.

- b 1e vuistregel

$$\mu - \sigma = 1,722 - 0,065 = 1,657 \text{ en } \mu + \sigma = 1,722 + 0,065 = 1,787$$

Het aantal banden met een profieldiepte tussen 1,657 mm en 1,787 mm is

$$8 + 9 + \dots + 9 + 8 = 134.$$

$134 : 200 \times 100\% = 67\%$, dus de 1e vuistregel klopt.

2e vuistregel

$$\mu - 2\sigma = 1,722 - 2 \times 0,065 = 1,592 \text{ en } \mu + 2\sigma = 1,722 + 2 \times 0,065 = 1,852$$

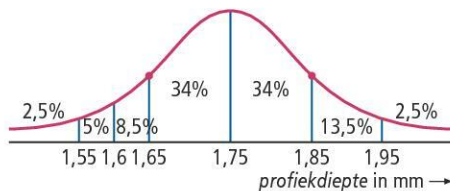
Het aantal banden met een profieldiepte tussen 1,592 mm en 1,852 mm is

$$2 + 3 + \dots + 2 + 2 = 190.$$

$190 : 200 \times 100\% = 95\%$, dus de 2e vuistregel klopt.

De profieldiepte is normaal verdeeld.

c



1,6 mm valt precies tussen 1,55 mm en 1,65 mm.

Verdeel de 13,5% in ongeveer 5% en 8,5%.

$$2,5 + 5 = 7,5$$

Ongeveer 7,5% van de banden wordt afgekeurd.

T2 a De hoogste steekproefproportie is 0,85.

In die steekproef reisde 85% van de reizigers met een koffer.

Dat waren $500 : 100 \times 85 = 425$ reizigers.

b Het gemiddelde van de steekproefproporties is 0,77 en dat is dan ook een schatting van de populatieproportie.

Dus 77 procent van de reizigers reist met een koffer.

c $40 + 30 + 8 = 78$

In 78 van de 1000 steekproeven was het gemiddelde gewicht van de koffers meer dan 10,5 kg.

Dat is 7,8% van alle steekproeven.

d Het gemiddelde van de steekproefgemiddelden is 10,1 kg en dat is dan ook een schatting van het populatiegemiddelde.

Dus ongeveer 10,1 kg is het gemiddelde gewicht van een koffer.

T3 a A Je kunt alleen in het onderzoek komen als je in Zwolle woont.

B Iemand die de website niet bekijkt, komt niet in de steekproef.

C Iemand die op doordeweekse ochtenden bijvoorbeeld werkt of naar school gaat, komt niet in de steekproef.

b Dat is nog niet zo makkelijk.

Je moet eerst definiëren wat je onder 'jongeren' verstaat, bijvoorbeeld alle jongens en meisjes tussen 12 en 25 jaar. Dan vraag je bijvoorbeeld aan elke gemeente in Nederland om drie jongeren van 12 tot 25 jaar uit hun gemeente willekeurig te selecteren en te vragen om aan de vragenlijst mee te doen.

c $56 : 2000 \times 100\% = 2,8\%$, dus de steekproefproportie is $2,8 : 100 = 0,028$.

$$0,028 - 2 \times \sqrt{\frac{0,028(1 - 0,028)}{2000}} \approx 0,0206$$

$$0,028 + 2 \times \sqrt{\frac{0,028(1 - 0,028)}{2000}} \approx 0,0354$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [0,0206; 0,0354].

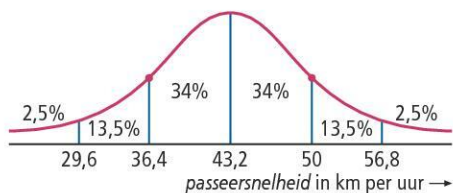
Met 95% zekerheid kun je zeggen dat het percentage Nederlanders dat het computerspel kent tussen 2,06% en 3,54% ligt.

T4 a $7,9 - 2 \times \frac{1,6}{\sqrt{400}} = 7,74$ en $7,9 + 2 \times \frac{1,6}{\sqrt{400}} = 8,06$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [7,74; 8,06].

b 7,3 liter valt buiten het 95%-betrouwbaarheidsinterval, dus met 95% zekerheid kun je zeggen dat de gegevens van de autofabrikant niet kloppen.

T5 a



$$2,5 + 13,5 + 34 + 34 = 84$$

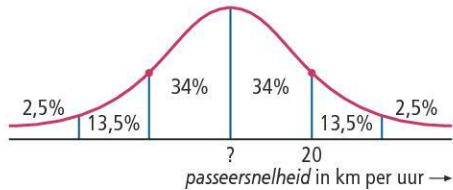
84 procent van de automobilisten rijdt niet harder dan 50 km per uur.

b $34 + 34 + 13,5 + 2,5 = 84$

In 84 procent van de 1200 metingen zal de automobilist te hard rijden.

Dat zijn $1200 : 100 \times 84 = 1008$ metingen.

c



$$\mu + \sigma = 20$$

$$\mu + 2,1 = 20$$

$$\mu = 20 - 2,1 = 17,9$$

De gemiddelde passeersnelheid is 17,9 km per uur.

Extra oefening

E1 a Het staafdiagram is redelijk klokvormig.

b $\mu - \sigma = 6,77 - 1,91 = 4,86$ en $\mu + \sigma = 6,77 + 1,91 = 8,68$

Het aantal kinderen met een schoenmaat tussen 4,86 en 8,68 is

$$331 - 53 = 278.$$

$278 : 404 \times 100\% \approx 69\%$, dus de 1e vuistregel klopt.

c $\mu - 2\sigma = 6,77 - 2 \times 1,91 = 2,95$ en $\mu + 2\sigma = 6,77 + 2 \times 1,91 = 10,59$

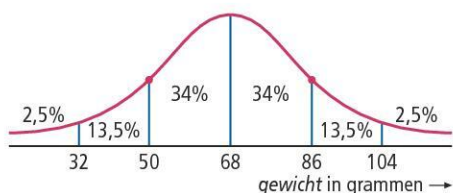
Het aantal kinderen met een schoenmaat tussen 2,95 en 10,59 is

$$396 - 2 = 394.$$

$394 : 404 \times 100\% \approx 98\%$, dus de 2e vuistregel klopt redelijk.

d De schoenmaat van de kinderen is redelijk normaal verdeeld.

E2 a



$$2,5 + 13,5 = 16$$

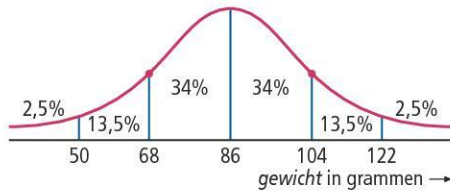
16 procent is lichter dan 50 gram en is voor puree.

$$34 + 34 + 13,5 = 81,5$$

81,5 procent weegt tussen 50 gram en 104 gram en wordt in Nederland verkocht.

2,5 procent weegt meer dan 104 gram en is voor de export.

- b** Het gemiddelde is nu $68 + 18 = 86$ gram.



2,5% van de tomaten weegt minder dan 50 gram.

Dat zijn $4\,200\,000 : 100 \times 2,5 = 105\,000$ tomaten.

E3 a $30\,400 - 2 \times \frac{12\,800}{\sqrt{1500}} \approx 29\,739$ en $30\,400 + 2 \times \frac{12\,800}{\sqrt{1500}} \approx 31\,061$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[29\,739, 31\,061]$.

Met 95% zekerheid kun je zeggen dat het gemiddelde inkomen van een eenpersoonshuishouden tussen 29 739 en 31 061 euro ligt.

De foutenmarge is $(31\,061 - 29\,739) : 2 = 661$ euro.

- b** € 31.000,- ligt in het 95%-betrouwbaarheidsinterval, dus met 95% zekerheid kun je zeggen dat het kabinet gelijk heeft.

E4 a $92 : 400 \times 100\% = 23\%$, dus de steekproefproportie is 0,23.

$$0,23 - 2 \times \sqrt{\frac{0,23 \times (1 - 0,23)}{400}} \approx 0,188$$

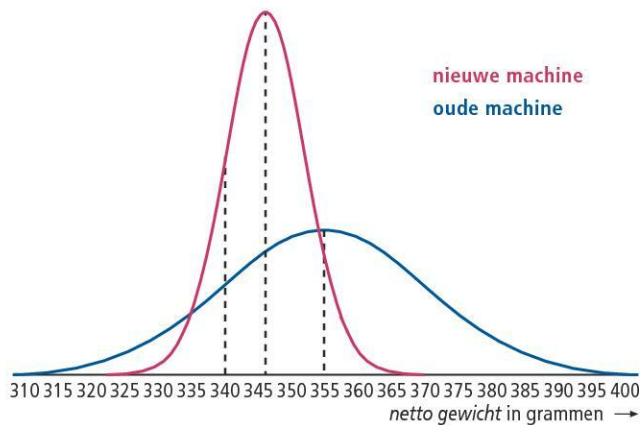
$$0,23 + 2 \times \sqrt{\frac{0,23 \times (1 - 0,23)}{400}} \approx 0,272$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,188; 0,272]$.

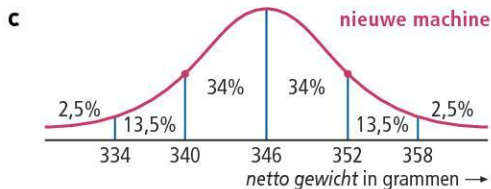
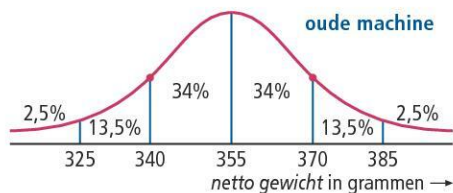
Dus het 95%-betrouwbaarheidsinterval ligt tussen de 18,8% en 27,2%.

- b** Je weet nooit zeker of hij gelijk gaat hebben, maar het kan wel. Een kwart is namelijk 25% en dat ligt in het 95%-betrouwbaarheidsinterval.

E5 a

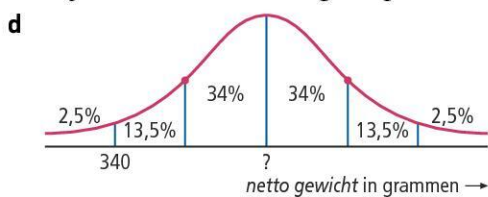


- b** Als consument geef je de voorkeur aan de oude machine, want daarbij krijg je gemiddeld meer jam in een potje.



$$2,5 + 13,5 = 16$$

Bij beide machines weegt 16 procent van de potjes minder dan 340 gram.



$$\mu - 2\sigma = 340$$

$$\mu - 2 \times 3,5 = 340$$

$$\mu - 7 = 340$$

$$\mu = 340 + 7 = 347$$

De machine wordt ingesteld op een gemiddelde gewicht van 347 gram.

E6 $p = 61 : 100 = 0,61$

$$0,61 - 2 \times \sqrt{\frac{0,61 \times (1 - 0,61)}{1988}} \approx 0,588$$

$$0,61 + 2 \times \sqrt{\frac{0,61 \times (1 - 0,61)}{1988}} \approx 0,632$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [0,588; 0,632].

Met 95% zekerheid kun je zeggen dat in maart 2007 het percentage van het aantal voorstanders van een rookverbod tussen 58,8% en 63,2% ligt.

Het percentage van oktober 2006 (55%) ligt buiten dit 95%-betrouwbaarheidsinterval.

Daardoor kun je met 95% zekerheid zeggen dat het aantal voorstanders is toegenomen.

1 a $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} =$

$$\frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

b $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} =$

$$\frac{15}{20} - \frac{8}{20} = \frac{7}{20}$$

c $1\frac{1}{6} + 2\frac{3}{4} =$

$$1\frac{2}{12} + 2\frac{9}{12} = 3\frac{11}{12}$$

d $3\frac{2}{5} - \frac{1}{6} =$

$$3\frac{12}{30} - \frac{5}{30} = 3\frac{7}{30}$$

e $4\frac{2}{7} - 2\frac{3}{4} =$

$$4\frac{8}{28} - 2\frac{21}{28} = 1\frac{15}{28}$$

f $8 - 3\frac{4}{9} =$

$$7\frac{9}{9} - 3\frac{4}{9} = 4\frac{5}{9}$$

2 a $\frac{2}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{35}$

b $2\frac{1}{4} \times \frac{2}{5} =$

$$\frac{9}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

c $5 \times \frac{3}{8} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$

d $3\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{4} =$

$$\frac{7}{2} \times \frac{9}{4} = \frac{63}{8} = 7\frac{7}{8}$$

e $2\frac{1}{2} \times 1\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} =$

$$\frac{5}{2} \times \frac{5}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{25}{24} = 1\frac{1}{24}$$

f $3\frac{1}{5} \times 4 \times \frac{3}{4} =$

$$\frac{16}{5} \times \frac{4}{1} \times \frac{3}{4} = \frac{192}{20} = 9\frac{12}{20} = 9\frac{3}{5}$$

3 a $\frac{3}{5} = 0,6$

b $\frac{2}{3} < 0,67$

c $6\frac{3}{8} < 6,38$

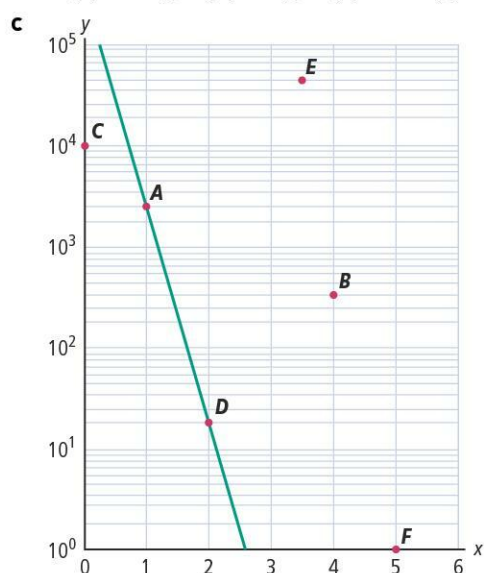
d $\frac{56}{100} = \frac{14}{25}$

e $1\frac{3}{8} < 1\frac{3}{7}$

f $3\frac{5}{16} > 3\frac{1}{4}$

4 a Bij gelijke stappen wordt steeds met dezelfde factor vermenigvuldigd.

b A(1, 3000); B(4, 400); C(0, 10 000); D(2, 20); E(3,5; 40 000) en F(5, 1)



d In het assenstelsel heeft de verticale as een log-schaal.

De formule bij de lijn hoort bij een exponentieel verband.

De algemene vorm van de formule is $y = b \cdot g^x$.

$$g = \frac{200}{3000} = \frac{1}{15}, \text{ dus } y = b \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^x$$

De grafiek gaat door (2, 200), dus $200 = b \times \left(\frac{1}{15}\right)^2$.

Dan is $b = 200 : \left(\frac{1}{15}\right)^2 = 45\,000$.

De formule is $y = 45\,000 \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^x$.

- 5 a $800\,000\,000 = 8 \times 10^8$
 b $42\,404\,000\,000 = 4,2404 \times 10^{10}$
 c 24,7 miljoen = $2,47 \times 10^7$

- d $0,000\,081 = 8,1 \times 10^{-5}$
 e $0,000\,000\,070\,1 = 7,01 \times 10^{-8}$
 f 23 duizendste = $2,3 \times 10^{-2}$

- 6 a $5 \times 10^7 = 50\,000\,000$
 b $4,07 \times 10^4 = 40\,700$
 c $6,31 \times 10^8 = 631\,000\,000$

- d $3,1 \times 10^{-6} = 0,000\,003\,1$
 e $4 \times 10^{-7} = 0,000\,000\,4$
 f $7,281\,617 \times 10^{-3} = 0,007\,281\,617$

- 7 a $4(x - 5) =$
 $4x - 20$
 b $6a + 3(4 - 5a) =$
 $6a + 12 - 15a =$
 $-9a + 12$
 c $b(7b - 6) + 8b$
 $7b^2 - 6b + 8b =$
 $7b^2 + 2b$

- d $p(6 - 4p) + 3(p - 1) =$
 $6p - 4p^2 + 3p - 3 =$
 $-4p^2 + 9p - 3$
 e $(w - 3)(w + 8) =$
 $w^2 + 8w - 3w - 24 =$
 $w^2 + 5w - 24$
 f $2q + (3q - 1)(q - 5)$
 $2q + 3q^2 - 15q - q + 5 =$
 $3q^2 - 14q + 5$

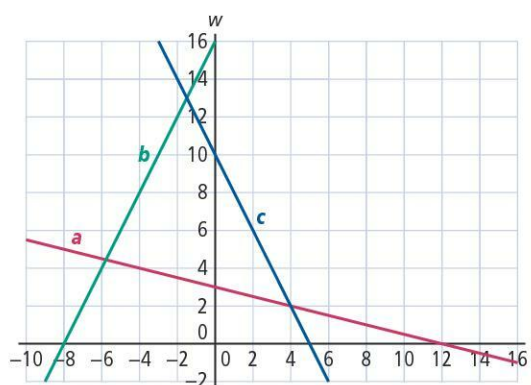
- 8 a $w = 3q + 7$ en $q = 8 + t$
 $w = 3(8 + t) + 7$
 $w = 24 + 3t + 7$
 $w = 3t + 31$
 b $w = 4 - 2q$ en $q = -t + 3$
 $w = 4 - 2(-t + 3)$
 $w = 4 + 2t - 6$
 $w = 2t - 2$

- c $w = 2(q - 3) + q$ en $q = 2t - 5$
 $w = 2(2t - 5 - 3) + 2t - 5$
 $w = 4t - 10 - 6 + 2t - 5$
 $w = 6t - 21$

- 9 a $Q + 6p = 7$
 $Q = -6p + 7$
 b $2Q - 8p = 6$
 $2Q = 8p + 6$
 $Q = 4p + 3$
 c $10Q - p + 5 = 0$
 $10Q = p - 5$
 $Q = 0,1p - 0,5$

- d $30p = 100 + 20Q$
 $20Q = 30p - 100$
 $Q = 1,5p - 5$
 e $5(Q + 1) = 15p$
 $Q + 1 = 3p$
 $Q = 3p - 1$
 f $2Q = 8(p + 10) - 12$
 $2Q = 8p + 80 - 12$
 $Q = 4p + 34$

- 10 a $4t + 16w = 48$
 $w = 0$ geeft $4t = 48$ ofwel $t = 12$.
 $t = 0$ geeft $16w = 48$ ofwel $w = 3$.
 De grafiek snijdt de assen in de punten (12, 0) en (0, 3).
 b $0,5w - t = 8$
 $w = 0$ geeft $-t = 8$ ofwel $t = -8$.
 $t = 0$ geeft $0,5w = 8$ ofwel $w = 16$.
 De grafiek snijdt de assen in de punten (-8, 0) en (0, 16).
 c $w + 2t = 10$
 $w = 0$ geeft $2t = 10$ ofwel $t = 5$.
 $t = 0$ geeft $w = 10$.
 De grafiek snijdt de assen in de punten (5, 0) en (0, 10).



11 a $4x - 6 = -6x + 34$

$$10x = 40$$

$$x = 4$$

$$y = 4 \times 4 - 6 = 10$$

De coördinaten van het snijpunt zijn (4, 10).

b $0,5x + 3 = 11,1x - 7,6$

$$-10,6x = -10,6$$

$$x = 1$$

$$y = 0,5 \times 1 + 3 = 3,5$$

De coördinaten van het snijpunt zijn (1; 3,5).

c $y + x = -0,5$ kun je schrijven als $y = -x - 0,5$

$$4y - 8x = 1 \text{ kun je schrijven als } 4y = 8x + 1 \text{ ofwel } y = 2x + 0,25$$

$$-x - 0,5 = 2x + 0,25$$

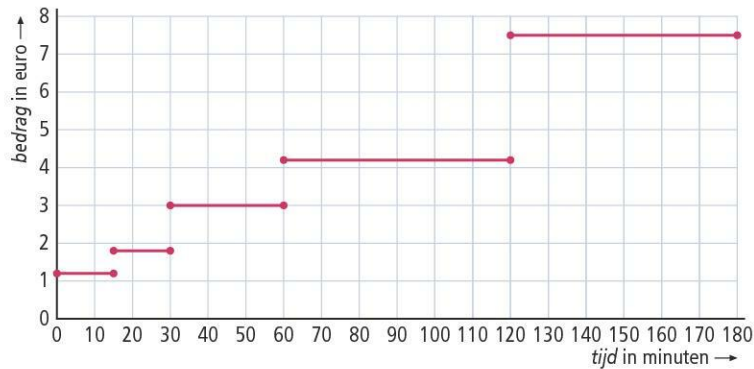
$$-3x = 0,75$$

$$x = -0,25$$

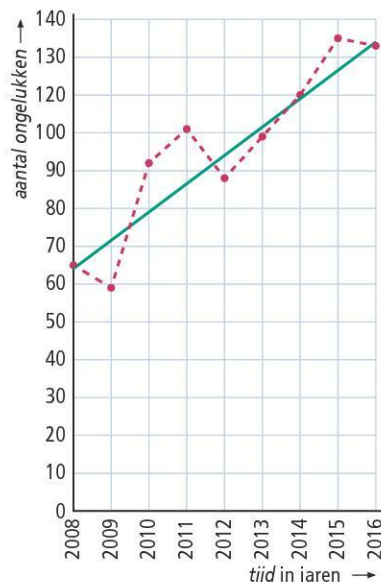
$$y = 2 \times -0,25 + 0,25 = -0,25$$

De coördinaten van het snijpunt zijn (-0,25; -0,25).

12



13 a



b Het zijn totalen per jaar. De waarden tussen de punten bestaan niet.

c Zie opdracht a.

d Op $t = 0$ waren er 64 ongelukken.

Op $t = 8$ zijn er volgens de trendlijn 134 ongelukken.

$$\text{De richtingscoëfficiënt is } \frac{134 - 64}{8 - 0} = \frac{70}{8} = 8,75.$$

De formule bij de trendlijn is $A = 8,75t + 64$.

- e Voor 2030 geldt $t = 22$.

$$A = 8,75 \times 22 + 64 = 256,5.$$

Een schatting van het aantal ongelukken in 2030 is 257.

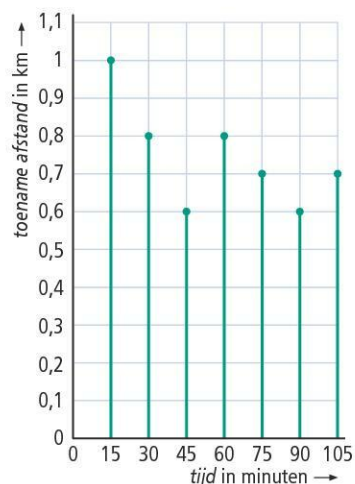
- f $8,75t + 64 = 300$

$$8,75t = 236$$

$$t \approx 27$$

In 2035 zal het aantal ongelukken voor het eerst meer dan 300 zijn.

- 14 a De toenamen zijn 1; 0,8; 0,6; 0,8; 0,7; 0,6 en 0,7.



- b In 30 minuten heeft Jochem $3,2 - 1,8 = 1,4$ km afgelegd.

De gemiddelde snelheid was dus $2 \times 1,4 = 2,8$ km per uur.

- c Tussen $t = 30$ en $t = 45$ heeft Jochem $2,4 - 1,8 = 0,6$ km afgelegd.

Dat is $0,6 : 15 = 0,04$ km per minuut.

Na 34 minuten heeft hij $1,8 + 4 \times 0,04 = 1,96$ km afgelegd.

- 15 Invoer: $y_1 = \frac{3x}{\sqrt{2x-7}}$

Venster: x van 0 tot 20 en y van 0 tot 10

Optie: minimum

De coördinaten van de top zijn $(7; 7,94)$.

- 16 a Invoer: $y_1 = x^3 - 8x$

Venster: x van -10 tot 10 en y van -10 tot 10 .

- b De grafiek heeft drie snijpunten met de x -as.

- c Optie: nulpunten

De oplossingen zijn $x \approx -2,83$, $x = 0$ en $x \approx 2,83$.

- d Optie: maximum en maximum

De coördinaten van de toppen zijn $(-1,63; 8,71)$ en $(1,63; -8,71)$.

- 17 a** Invoer: $y_1 = 0,5x^3 - 3x - 8$
 Venster: x van -10 tot 10 en y van -15 tot 10
 Optie: nulpunten
 De oplossing is $x \approx 3,29$.
 De coördinaten van het snijpunt met de horizontale as zijn dus $(3,29; 0)$.
- b** Optie: maximum
 De coördinaten van de top zijn $(-1,41; -5,17)$, dit is een maximum.
 Optie: minimum
 De coördinaten van de top zijn $(1,413; -10,83)$, dit is een minimum.
- c A**
 Invoer: $y_1 = 0,5x^3 - 3x - 8$ en $y_2 = 4$
 Venster: x van -10 tot 10 en y van -15 tot 10
 Optie: snijpunten
 De oplossing is $x \approx 3,57$.
- B**
 Invoer: $y_1 = 0,5x^3 - 3x - 8$ en $y_2 = 3x - 7$
 Venster: x van -10 tot 10 en y van -20 tot 10
 Optie: snijpunten
 De oplossing zijn $x \approx -3,38$, $x \approx -0,17$ en $x = 3,54$.
- 18 a** Invoer: $y_1 = 2x^2$ en $y_2 = x + 6$
 Venster: x van -10 tot 10 en y van -10 tot 10
 Optie: snijpunten
 De oplossingen zijn $x = -1,5$ en $x = 2$.
- b** Invoer: $y_1 = x^3 - 3x$ en $y_2 = 1$
 Venster: x van -5 tot 5 en y van -10 tot 10
 Optie: snijpunten
 De oplossingen zijn $p \approx -1,53$, $p \approx -0,35$ en $p \approx 1,88$.
- c** Invoer: $y_1 = 2,13^x$ en $y_2 = 40$
 Venster: x van -10 tot 10 en y van -10 tot 50
 Optie: snijpunten
 De oplossing is $t \approx 4,88$.
- d** Invoer: $y_1 = \sqrt{10 - x}$ en $y_2 = x$
 Venster: x van -10 tot 10 en y van -10 tot 10
 Optie: snijpunten
 De oplossing is $x \approx 2,70$.

7 Statistische verwerking (met ICT)

- 1 a** 29,96 wordt op één decimaal afgerond op 30,0 meter. Deze jongen komt in de klasse 30,0-39,9.
- b** Dat is de afstand 19,95 meter.
- c** 19,95 is de linker klassengrens en de rechter klassengrens is 29,95.
- d** De klassenbreedte is $29,95 - 19,95 = 10$ meter.
- e** Het klassenmidden is $(19,95 + 29,95) : 2 = 24,95$ meter.
- 3 a** Er is op deze manier geen leesbaar staafdiagram te maken.
- b** Het aantal staven is veel te groot en er is te veel variatie in lengte van de staven.
- c** Dan krijg je een beter beeld hoe de lengte verdeeld is.
- d** -
- e** Bij een klassenbreedte van 3, 4 of 5 cm.
- 12 a** De klassenbreedte is 5 kg.
- b** Het staafdiagram is scheef met een staart naar rechts met een uitschieter.
- c** De klasse $[55, 60)$ kg is de modale klasse.
- d** Met een kentallentabel zie je dat het gemiddelde 60,6 kg is.
- e** Sorteert de data van gewicht aflopend.
Er zijn 63 leerlingen met een gewicht van minder dan 60,6 kg.
Dit is $63 : 154 \times 100\% \approx 41\%$.
- f** In de kentallentabel zie je dat de mediaan 59 kg is.
Dus bij een gewicht van minimaal 60 kg hoort een leerling bij de 50% zwaarste leerlingen.
- 20 a** De modale klasse is $[10, 12)$.
- b** De mediaan is het gemiddelde van de gewichten van de 50e en de 51e walnoot. Deze walnoten zitten bij boom A in de klasse $[8, 10)$ en bij boom B in de klasse $[12, 14)$. In die klassen liggen dan ook de medianen.
- c** Het gemiddelde van de walnoten van boom A is

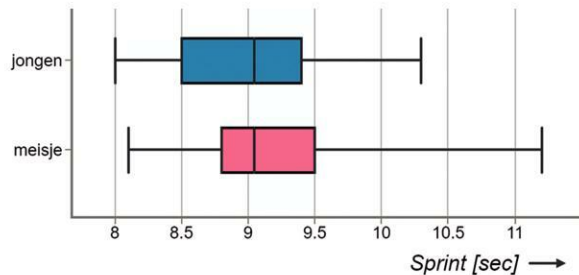
$$\frac{12 \times 5 + 25 \times 7 + 46 \times 9 + 10 \times 11 + 5 \times 13 + 2 \times 15}{100} = 8,54 \text{ gram.}$$
 Het gemiddelde van de walnoten van boom B is

$$\frac{3 + 2 \times 7 + 18 \times 9 + 28 \times 11 + 48 \times 13 + 3 \times 15}{100} = 11,56 \text{ gram.}$$
- d** De mediaan is dan het gewicht van de 50e walnoot en die valt nog steeds in dezelfde klasse.
Ook de modale klasse verandert niet met het weglaten van de uitschieter.
- 23 a** Maak een kentallentabel bij de variabele *gewicht* en splits op *boom*.
Bij boom A is de spreidingsbreedte $15 - 4 = 11$ gram.
Bij boom B is de spreidingsbreedte $15 - 3 = 12$ gram.
Boom A heeft de kleinste spreidingsbreedte.
- b** Bij boom A is de kwartielfstand $9 - 6 = 3$ gram.
Bij boom B is de kwartielfstand $13 - 10 = 3$ gram.
Nee, de kwartielfstand van de bomen is gelijk.
- c** Bij boom A is de standaardafwijking 2,18 gram en bij boom B is de standaardafwijking 1,95 gram.
Bij boom B is de standaardafwijking het kleinst.

Variabele	boom	
	A	B
gewicht		
Aantal waarnemingen	100	100
Gemiddelde	7,98	11,08
Mediaan	8	11,5
Modus	8	13
Minimum	4	3
Maximum	15	15
Standaardafwijking	2,18	1,95
Eerste kwartiel	6	10
Derde kwartiel	9	13

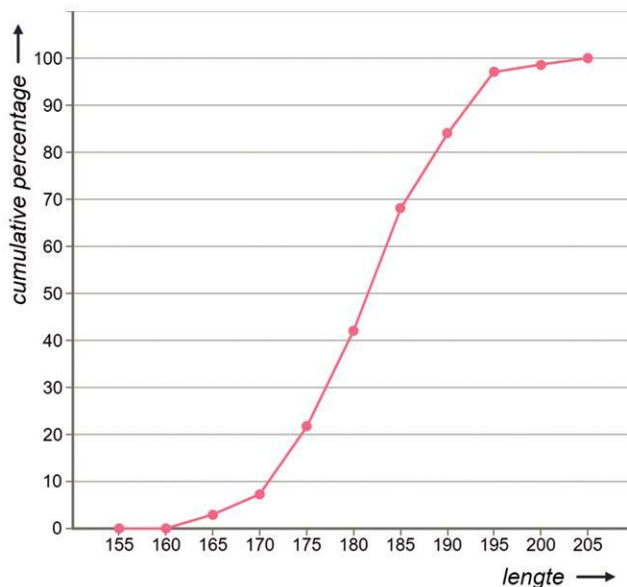
- d Er is geen duidelijk verschil in de spreiding. De kwartielfstand is gelijk. Bij boom A is de spreidingsbreedte kleiner maar de standaardafwijking groter.

28 a



- b De mediaan en het minimum zijn ongeveer gelijk. Maar de spreidingsbreedte bij de meisjes is veel groter. Bij de jongens is de kwartielfstand wat groter.
- c De waarden bij de jongens liggen dicht bij elkaar. Waarschijnlijk is bij de jongens de standaardafwijking dus ook kleiner
- d De spreidingsbreedte bij de jongens is $10,3 - 8,0 = 2,3$ seconden en bij de meisjes $11,2 - 8,1 = 3,1$ seconden.
De kwartielfstand bij de jongens is $9,4 - 8,5 = 0,9$ seconden en bij de meisjes $9,5 - 8,8 = 0,7$ seconden.
De standaardafwijking bij de jongens is 0,63 en bij de meisjes 0,67.
- e Nee, want de kwartielfstand is bij de meisjes kleiner en de andere spreidingsmaten zijn bij de jongens kleiner.

31 a

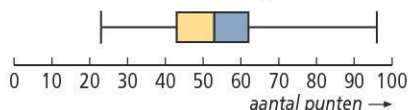


- b De kleinste jongen is 155 cm en de grootste jongen is 205 cm.
- c In de grafiek lees je bij 75% af 187 cm, dus deze jongens zijn minimaal 187 cm.
- d Dit is het derde kwartiel.
- e De mediaan is 182 cm.

32 a

- 57 leerlingen hadden 55 punten of minder. Dus $100 - 57 = 43$ leerlingen behaalden meer dan 55 punten.
- b De somfrequentiepolygoon stopt bij 96 punten.
- c De mediaan lees je af bij 50 leerlingen en is ongeveer 53 punten.
De Q_1 lees je af bij 25 leerlingen en is ongeveer 43 punten.
De Q_3 lees je af bij 75 leerlingen en is ongeveer 62 punten.

- d Het minimum aantal punten is 23 en het maximum aantal punten is 96.



7 Statistische verwerking (zonder ICT)

- 1 a 29,96 wordt op één decimaal afgerond op 30,0 meter Deze jongen komt dus in de klasse 30,0-39,9.
 b Dat is de afstand 19,95 meter.
 c 19,95 is de linker klassengrens en de rechter klassengrens is 29,95.
 d De klassenbreedte is $29,95 - 19,95 = 10$ meter.
 e Het klassenmidden is $(19,95 + 29,95) : 2 = 24,95$ meter.
- 11 a De klassenbreedte is 5 kg.
 b Het staafdiagram is scheef met een staart naar rechts met een uitschieter.
 c De klasse $[55, 60)$ is de modale klasse.
 d Omdat er een staart naar rechts is, zal het gemiddelde hoger zijn dan de mediaan.
 e 9 van de 154 leerlingen wegen minder dan 50 kg.
 Dit is $9 : 154 \times 100\% \approx 5,8\%$.
- 14 a Er zijn in totaal $54 + 23 + 46 + 33 + 8 + 3 + 1 + 1 = 169$ huishoudens.
 De modus is 0 kinderen.
 De mediaan is het aantal kinderen in het 85e huishouden.
 De mediaan is 2 kinderen.
 Het gemiddelde is $\frac{54 \times 0 + 23 \times 1 + 46 \times 2 + \dots + 1 \times 10}{169} = \frac{277}{169} \approx 1,64$ kinderen.
 b De modus is 0 kinderen. Als je deze maat gebruikt lijkt het erop dat er geen kinderen zijn.
 c De modus blijft 0 kinderen, want dat aantal kinderen komt nog steeds het vaakst voor.
 De mediaan is het gemiddelde van het aantal kinderen in het 84e en 85e huishouden.
 De mediaan is $(2 + 2) : 2 = 2$ kinderen en verandert ook niet.
 Het gemiddelde wordt $267 : 168 \approx 1,59$ en verandert wel.
- 18 a De modale klasse is $[10, 12)$.
 b De mediaan is het gemiddelde van de gewichten van de 50e en de 51e walnoot.
 Deze walnoten zitten bij boom A in de klasse $[8, 10)$ en bij boom B in de klasse $[12, 14)$. In die klassen liggen dan ook de medianen.
 c Het gemiddelde van de walnoten van boom A is

$$\frac{12 \times 5 + 25 \times 7 + 46 \times 9 + 10 \times 11 + 5 \times 13 + 2 \times 15}{100} = 8,54 \text{ gram.}$$
 Het gemiddelde van de walnoten van boom B is

$$\frac{3 + 2 \times 7 + 18 \times 9 + 28 \times 11 + 48 \times 13 + 3 \times 15}{100} = 11,56 \text{ gram.}$$
 d De mediaan is dan het gewicht van de 50e walnoot en die valt nog steeds in dezelfde klasse.
 Ook de modale klasse verandert niet met het weglaten van de uitschieter.

24 a jongens

De spreidingsbreedte is $10,3 - 8,0 = 2,3$ seconden.

De kwartielfstand is $9,4 - 8,5 = 0,9$ seconden.

meisjes

De spreidingsbreedte is $11,2 - 8,1 = 3,1$ seconden.

De kwartielfstand is $9,5 - 8,8 = 0,7$ seconden.

- b De standaardafwijking van de jongens is waarschijnlijk kleiner want de spreidingsbreedte is veel kleiner. De afwijkingen ten opzichte van het gemiddelde zijn dus kleiner.

30 a 57 leerlingen hadden 55 punten of minder. Dus $100 - 57 = 43$ leerlingen behaalden meer dan 55 punten.

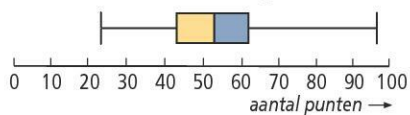
- b De somfrequentiepolygoon stopt bij 96 punten.

- c De mediaan lees je af bij 50 leerlingen en is ongeveer 53 punten.

De Q1 lees je af bij 25 leerlingen en is ongeveer 43 punten.

De Q3 lees je af bij 75 leerlingen en is ongeveer 62 punten.

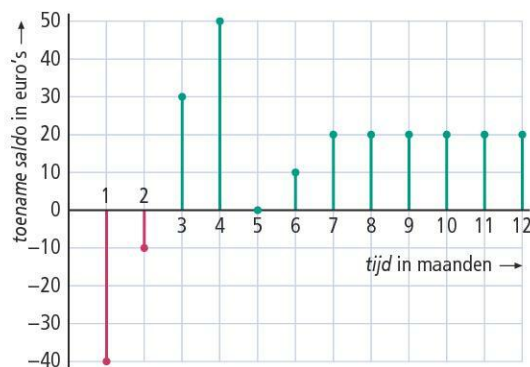
- d Het minimum aantal punten is 23 en het maximum aantal punten is 96.



8 Grafieken en veranderingen

2 a b

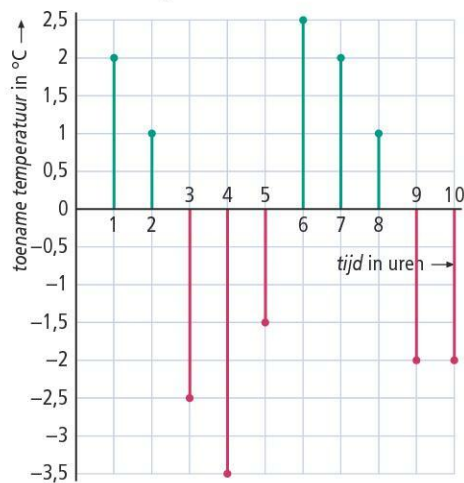
<i>tijd</i> in maanden	0	1	2	3	4	5	6
<i>saldo</i> in euro's	230	190	180	210	260	260	270
<i>toename saldo</i> in euro's		-40	-10	30	50	0	10



- c Het saldo is na 12 maanden $270 + 6 \times 20 = 390$ euro.

4 a b

<i>tijd in uren</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>temperatuur in °C</i>	2	4	5	2,5	-1	-2,5	0	2	3	1	-1
<i>toename temp. in °C</i>		2	1	-2,5	-3,5	-1,5	2,5	2	1	-2	-2



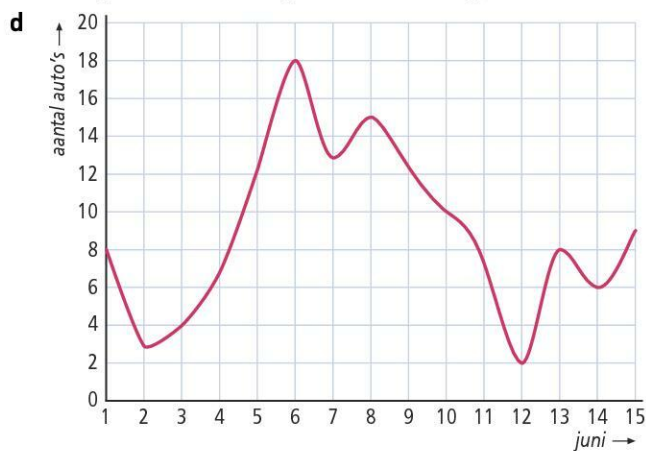
- c Een minimum kun je zien waar de staafjes die naar beneden zijn getekend overgaan in staafjes die naar boven zijn getekend. Op dat moment ga je over van een afname naar een toename.
- d Tussen 5.00 uur en 6.00 uur stijgt de grafiek het snelst. In het toenamediaagram zie je dit terug doordat het staafje bij 6.00 uur het langst is.

10 a Tussen 3 juni en 6 juni nam het aantal aanwezige auto's steeds sneller toe.

<i>juni</i>	1	2	3	4	5	6	7	8
<i>aantal auto's</i>	8	3	4	7	12	18	13	15
<i>toename aantal auto's</i>		-5	1	3	5	6	-5	2

<i>juni</i>	9	10	11	12	13	14	15
<i>aantal auto's</i>	12	10	7	2	8	6	9
<i>toename aantal auto's</i>	-3	-2	-3	-5	6	-2	3

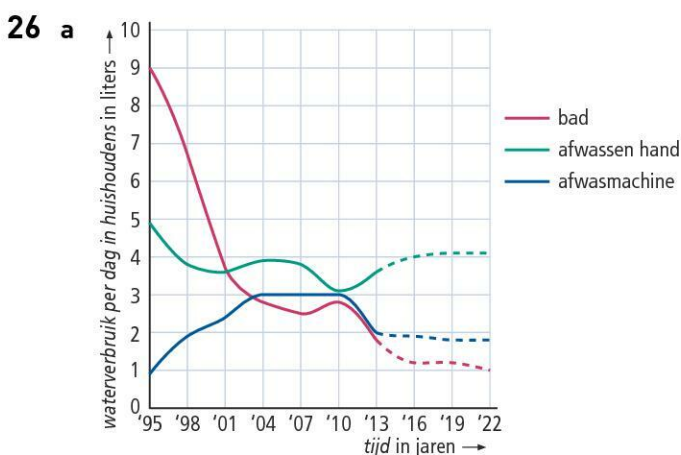
- c Het grootste aantal getelde aanwezige auto's was 18.



16 a	t	0	5	10	15	20	25
	S	0	7,69	22,22	39,13	57,14	75,76
	t	30	35	40	45	50	
	S	94,74	113,95	133,33	152,83	172,41	

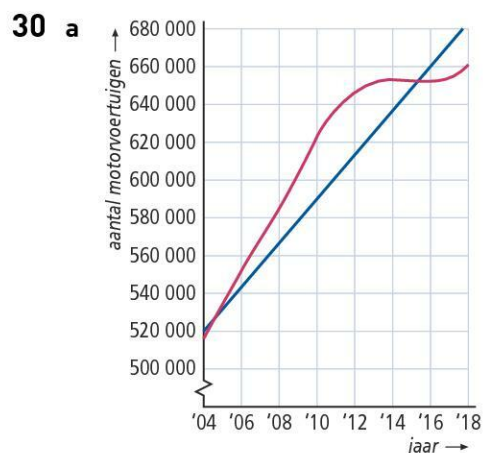
- b** $\Delta S = 33,19 - 0 = 33,19$ en $\Delta t = 15 - 0 = 15$
De gemiddelde snelheid van Jur is $33,19 : 15 \approx 2,2$ meter per seconde.
- c** $\Delta S = 172,41 - 133,33 = 39,08$ en $\Delta t = 50 - 40 = 10$
De gemiddelde snelheid van Jur is $39,08 : 10 \approx 3,9$ meter per seconde.
- d** $S = \frac{20 \times 49,9^2}{5 \times 49,9 + 40} \approx 172,02$
 $\Delta S = 172,41 - 172,02 = 0,39$ en $\Delta t = 50 - 49,9 = 0,1$
De gemiddelde snelheid van Jur is $0,39 : 0,1 = 3,9$ meter per seconde.
- e** De lijn door de punten (49,9; 172,02) en (50, 172,41) loopt vrijwel gelijk aan de grafiek. Met de gemiddelde verandering van de lijn kun je dan goed de snelheid van Jur op $t = 50$ benaderen.

- 21 a** De toename was $197 - 108 = 89$ werknemers.
De lengte van de periode is 8 jaar.
De gemiddelde verandering was $89 : 8 = 11,125$ werknemer per jaar.
In 2003 was het aantal werknemers $108 + 3 \times 11,125 \approx 141$.
- b** 2010
De toename was $169 - 197 = -28$ werknemers.
De lengte van de periode is 5 jaar.
De gemiddelde verandering was $-28 : 5 = -5,6$ werknemer per jaar.
In 2010 was het aantal werknemers $197 - 2 \times 5,6 \approx 186$.
- 2016
De toename was $241 - 169 = 72$ werknemers.
De lengte van de periode is 4 jaar.
De gemiddelde verandering was $72 : 4 = 18$ werknemer per jaar.
In 2016 was het aantal werknemers $169 + 3 \times 18 = 223$.



- b** Afhankelijk van hoe je de grafiek verlengt, zijn er meerdere antwoorden mogelijk. Zie opdracht 26a.
In 2020 wordt er voor het bad ongeveer 1,0 liter water per dag in een huishouden verbruikt.
In 2020 wordt er voor afwassen met de hand ongeveer 4,1 liter water per dag in een huishouden verbruikt.
In 2020 wordt er voor de afwasmachine ongeveer 1,8 liter water per dag in een huishouden verbruikt.

- c Bij alle drie de antwoorden weet je niet zeker hoe het verloop van de grafiek zal zijn. De kans dat dan alle drie de voorspelling dan precies kloppen, is erg klein.



- b Er zijn meerdere mogelijkheden.
Zie opdracht 30a.
- c In 12 jaar was er een toename van $660\,000 - 520\,000 = 140\,000$ motorvoertuigen.
De gemiddelde verandering was $140\,000 : 12 = 11\,666,6\dots$ motorvoertuigen per jaar.
De formule voor de trendlijn is $A = 11\,667t + 520\,000$.
- d Het jaar 2030 komt overeen met $t = 26$.
 $11\,667 \times 26 + 520\,000 = 823\,333$
Het aantal motorvoertuigen in 2030 is dan ongeveer 820 000.
- e $11\,667t + 520\,000 = 1\,000\,000$
 $11\,667t = 480\,000$
 $t = 480\,000 : 11\,667 = 41,1$
In 2051 is het aantal motorvoertuigen naar verwachting voor het eerst groter dan 1 000 000.

9 Lineaire en exponentiële formules

- 3** tabel A
De richtingscoëfficiënt is -13 .
Het startgetal is $110 + 2 \times 13 = 136$.
De formule is $N = 136 - 13t$.
- tabel B
 $5,9 - 2 = 3,9$
De richtingscoëfficiënt is $3,9 : 3 = 1,3$.
Het startgetal is $2 - 2 \times 1,3 = -0,6$.
De formule is $y = 1,3x - 0,6$.
- tabel C
 $24 - 23 = 1$
De richtingscoëfficiënt is $1 : 2 = 0,5$.
Het startgetal is $23 - 5 \times 0,5 = 20,5$.
De formule is $H = 0,5t + 20,5$.

- 4 a** Omdat je bij beide bedrijven een vast bedrag per zakje dieetvoer betaalt, is het verband tussen a en p bij beide bedrijven lineair.
- b** De formule bij het eerste bedrijf is $P = 3,99d + 2,9$.
- c** Met zes zakjes dieetvoer meer is de prijs $65,60 - 42,80 = 22,80$ euro gestegen.
De prijs per zakje dieetvoer is $22,80 : 6 = 3,80$ euro.
Het vaste bedrag bij het tweede bedrijf is $42,80 - 10 \times 3,80 = 4,80$ euro.
De formule bij het tweede bedrijf is $P = 3,8d + 4,8$.
- d** $3,99d + 2,9 = 3,8d + 4,8$
 $0,19d + 2,9 = 4,8$
 $0,19d = 1,9$
 $d = 1,9 : 0,19 = 10$
 $P = 3,99 \times 10 + 2,9 = 42,8$
 Bij 10 zakjes dieetvoer zijn de bedrijven even duur. De prijs is dan € 42,80.

- 10 a** snijpunt met de x -as, $y = 0$

$$8x - 2 \times 0 = 24$$

$$8x = 24$$

$$x = 24 : 8 = 3$$

Snijpunt met de x -as is $(3, 0)$.

snijpunt met de y -as, $x = 0$

$$8 \times 0 - 2y = 24$$

$$-2y = 24$$

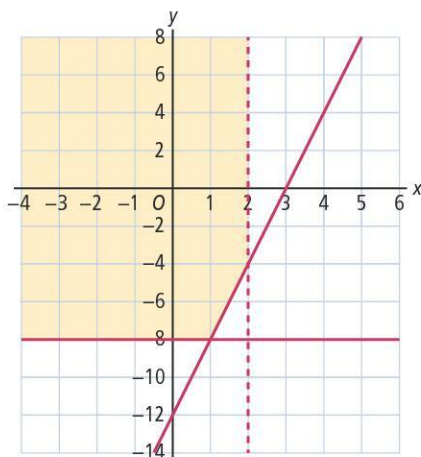
$$y = 24 : -2 = -12$$

Snijpunt met de y -as is $(0, -12)$.

De punten op de grenslijn voldoen wel aan de ongelijkheid.

De coördinaten van $O(0, 0)$ invullen geeft $8 \times 0 - 2 \times 0 = 0$.

$0 \leq 24$ klopt, dus het gebied waar $O(0, 0)$ in ligt, is het gevraagde halfvlak.



- b** snijpunt met de x -as, $y = 0$

$$-0,04x + 0,01 \times 0 = 0,12$$

$$-0,04x = 0,12$$

$$x = 0,12 : -0,04 = -3$$

Snijpunt met de x -as is $(-3, 0)$.

De punten op de grenslijn voldoen niet aan de ongelijkheid.

De coördinaten van $O(0, 0)$ invullen geeft $-0,04 \times 0 + 0,01 \times 0 = 0$.

$0 < 0,12$ klopt, dus het gebied waar $O(0, 0)$ in ligt, is het gevraagde halfvlak.

snijpunt met de y -as, $x = 0$

$$-0,04 \times 0 + 0,01y = 0,12$$

$$0,01y = 0,12$$

$$y = 0,12 : 0,01 = 12$$

Snijpunt met de y -as is $(0, 12)$.

snijpunt met de x -as, $y = 0$

$$0,05x - 0,2 \times 0 = 0,4$$

$$0,05x = 0,4$$

$$x = 0,4 : 0,05 = 8$$

Snijpunt met de x -as is $(8, 0)$.

De punten op de grenslijn voldoen wel aan de ongelijkheid.

De coördinaten van $O(0, 0)$ invullen geeft $0,05 \times 0 - 0,2 \times 0 = 0$.

$0 \leq 0,4$ klopt, dus het gebied waar $O(0, 0)$ in ligt, is het gevraagde halfvlak.

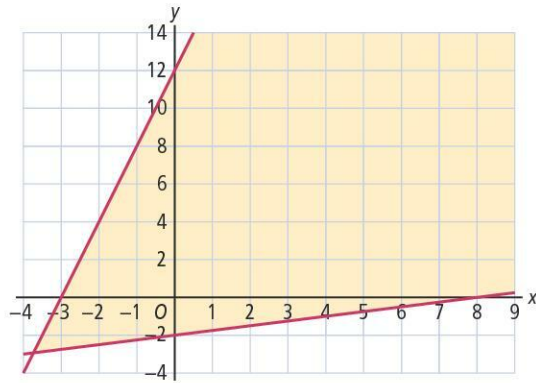
snijpunt met de y -as, $x = 0$

$$0,05 \times 0 - 0,2y = 0,4$$

$$-0,2y = 0,4$$

$$y = 0,4 : -0,2 = -2$$

Snijpunt met de y -as is $(0, -2)$.



- 11 a** Met $d \geq 2$ wordt aangegeven dat het aantal zakken droogvoer minstens twee is.
Met $n \geq 1$ wordt aangegeven dat het aantal dozen natvoer minstens één is.
Met $50d + 25n < 250$ wordt aangegeven dat het bedrag voor de zakken droogvoer en de dozen natvoer bij elkaar maximaal 250 euro moet zijn.

b snijpunt met de d -as, $n = 0$

$$50d + 25 \times 0 = 250$$

$$50d = 250$$

$$d = 250 : 50 = 5$$

Snijpunt met de d -as is $(5, 0)$.

snijpunt met de n -as, $d = 0$

$$50 \times 0 + 25n = 250$$

$$25n = 250$$

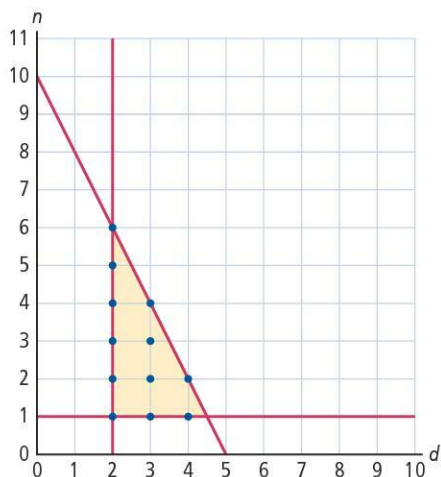
$$n = 250 : 25 = 10$$

Snijpunt met de n -as is $(0, 10)$.

De punten op de grenslijn voldoen aan de ongelijkheid.

De coördinaten van $(0, 0)$ invullen geeft $50 \times 0 + 25 \times 0 = 0$.

$0 \leq 250$ klopt, dus het gebied waar $(0, 0)$ in ligt, is het gevraagde halfvlak.



- c** Zowel d als n moeten gehele getallen zijn.
d Zie opdracht 11b.
Er zijn twaalf mogelijke oplossingen.

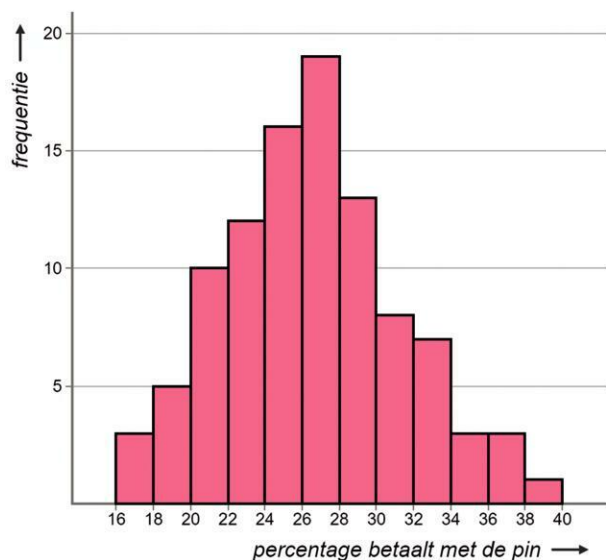
- 17 a** $100\% + 3,7\% = 103,7\%$
 De groeifactor per jaar is $103,7 : 100 = 1,037$.
 De beginhoeveelheid is $430 \times 1,037 = 445,91$.
 De formule is $N = 446 \cdot 1,037^t$.
- b** De groeifactor per jaar is $58\,276 : 55\,716 = 1,0459\dots$
 De beginhoeveelheid is $55\,716 : 1,0459\dots = 53\,268,4\dots$
 De formule is $N = 53\,268 \cdot 1,046^t$.
- 25 a** $100\% + 9\% = 109\%$
 De groeifactor per jaar is $109 : 100 = 1,09$.
 $1,09^t = 2$
 Invoer: $y_1 = 1,021^x$ en $y_2 = 2$
 Venster: x van 0 tot 50 en y van 0 tot 5
 Optie: snijpunt
 De oplossing is $(8,04\dots; 2)$.
 De verdubbelingstijd is ongeveer 8,0 jaar.
- b** $100\% - 3,5\% = 96,5\%$
 De groeifactor per jaar is $96,5 : 100 = 0,965$.
 $0,965^t = 0,5$
 Invoer: $y_1 = 0,965^x$ en $y_2 = 0,5$
 Venster: x van 0 tot 30 en y van 0 tot 2
 Optie: snijpunt
 De oplossing is $(19,45\dots; 0,5)$.
 De halveringstijd is ongeveer 19,5 jaar.
- c** De groeifactor per 5 jaar is $55\,500 : 60\,000 = 0,925$.
 De groeifactor per jaar is $0,925^{\frac{1}{5}} = 0,984\dots$
 $0,984\dots^t = 0,5$
 Invoer: $y_1 = 0,984\dots^x$ en $y_2 = 0,5$
 Venster: x van 0 tot 100 en y van 0 tot 2
 Optie: snijpunt
 De oplossing is $(44,45\dots; 0,5)$.
 De halveringstijd is ongeveer 44,5 jaar.
- 26 a** $100\% - 7,5\% = 92,5\%$
 De groeifactor per jaar is $92,5 : 100 = 0,925$.
 $0,925^t = 0,5$
 Invoer: $y_1 = 0,925^x$ en $y_2 = 0,5$
 Venster: x van 0 tot 20 en y van 0 tot 2
 Optie: snijpunt
 De oplossing is $(8,89\dots; 0,5)$.
 Na ongeveer 9 jaar is het aantal leerlingen gehalveerd.
- b** $980 : 2 = 490$ en $490 : 2 = 245$
 Het aantal leerlingen is dan twee keer gehalveerd.
- c** Het zal $2 \times 8,89\dots \approx 18$ jaar duren voordat het aantal leerlingen is afgenomen van 980 tot 245.
- 32 a** $10\,000 = 10^4$, dus punt *A* ligt op de grafiek van gebied 2.
 $100\,000 = 10^5$, dus punt *B* ligt op de grafiek van gebied 1.
 $1000 = 10^3$, dus punt *C* ligt geen van beide grafieken.
 $100 = 10^2$, dus punt *D* ligt op de grafiek van gebied 2.
- b**

t	0	2	4
aantal N	1 000 000	100 000	10 000

- c De groeifactor per 2 dagen is $100\,000 : 1\,000\,000 = 0,1$.
De groeifactor per dag is $0,1^{\frac{1}{2}} = 0,3162\dots$
De formule is $N = 1\,000\,000 \cdot 0,316^t$.
- d In twee jaar is het aantal konijnen 10 keer zo klein. Kortom in twee jaar is het aantal veel meer dan gehalveerd.
 $0,3162\dots^t = 0,5$
Invoer: $y_1 = 0,3162\dots^x$ en $y_2 = 0,5$
Venster: x van 0 tot 5 en y van 0 tot 2
Optie: snijpunt
De oplossing is $(0,60\dots; 0,5)$.
De halveringstijd is ongeveer 0,6 jaar.
- e De beginhoeveelheid is $10^4 = 10\,000$.
De groeifactor per 5 jaar is $1000 : 10\,000 = 0,1$.
De groeifactor per jaar is $0,1^{\frac{1}{5}} = 0,6309\dots$
De formule is $N = 10\,000 \cdot 0,631^t$.
- f $100 \times 0,3609\dots - 100 = -36,90\dots$
Het aantal konijnen in gebied 2 neemt met ongeveer 37% per jaar af.
De groeifactor per vier jaar is $0,631\dots^4 = 0,158\dots$
 $100 \times 0,158\dots - 100 = -84,1\dots$
Het aantal konijnen in gebied 2 neemt met ongeveer 84% per vier jaar af.

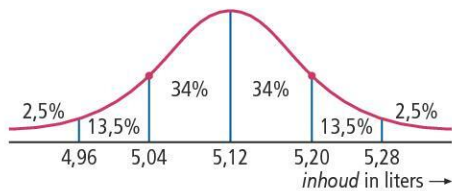
10 Verdelingen (met ICT)

5 a



- b Het staafdiagram is redelijk klokvormig.
- c Het gemiddelde is 26,0 procent en de standaardafwijking is 4,8 procent.
1e vuistregel
 $\mu - \sigma = 26,0 - 4,8 = 21,2$ en $\mu + \sigma = 26,0 + 4,8 = 30,8$
Het aantal klanten tussen deze grenzen is $82 - 18 = 64$.
64 van de 100 is 64%, dus de 1e vuistregel klopt redelijk.
2e vuistregel
 $\mu - 2\sigma = 26,0 - 2 \times 4,8 = 16,4$ en $\mu + 2\sigma = 26,0 + 2 \times 4,8 = 35,6$
Het aantal klanten tussen deze grenzen is $96 - 1 = 95$.
95 van de 100 is 95%, dus de 2e vuistregel klopt.
Het percentage klanten dat pint is redelijk normaal verdeeld.

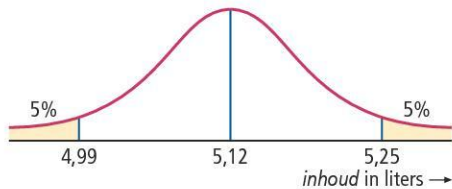
10 a



34 procent van de zakken heeft een inhoud tussen de 5,04 liter en 5,12 liter.

Dat zijn $200 : 100 \times 34 = 68$ zakken.

b

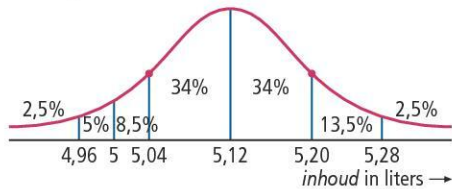


5,25 ligt $5,25 - 5,12 = 0,13$ rechts van het gemiddelde.

$5,12 - 0,13 = 4,99$

De 5 procent lichtste zakken heeft minder dan 4,99 liter.

c



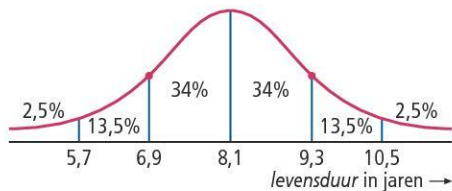
5 liter valt precies tussen 4,96 liter en 5,04 liter.

Verdeel de 13,5% in 5% en 8,5%.

$2,5 + 5 = 7,5$

Ongeveer 7,5 procent van de zakken heeft minder dan 5 liter.

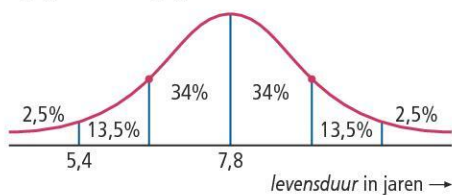
12 a



$13,5 + 34 + 34 = 81,5$

81,5 procent van de wasmachines van type A heeft een levensduur tussen de 5,7 jaar en 9,3 jaar.

b



Het gemiddelde is 7,8 jaar.

$\mu - 2\sigma = 5,4$

$7,8 - 2\sigma = 5,4$

$2\sigma = 7,8 - 5,4 = 2,4$

$\sigma = 2,4 : 2 = 1,2$

De standaardafwijking is 1,2 jaar.

- 17 a** 2 van de 4 is 50%, dus de steekproefproportie is $50 : 100 = 0,5$.
- b** Als de steekproef van Kyra representatief is, dan is de populatieproportie gelijk aan de steekproefproportie en dus 0,5.
- c** Van alle broeken heeft $12 : 56 \times 100\% \approx 21\%$ een naadje los.
De populatieproportie is dan $21 : 100 = 0,21$.
- 24 a** $8 : 600 \times 100\% = 1,33\ldots\%$, dus $p = 1,33\ldots : 100 = 0,0133\ldots$
- $$0,0133\ldots - 2 \times \sqrt{\frac{0,0133\ldots(1 - 0,0133\ldots)}{600}} \approx 0,0040$$
- $$0,0133\ldots + 2 \times \sqrt{\frac{0,0133\ldots(1 - 0,0133\ldots)}{600}} \approx 0,0227$$
- Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,0040; 0,0227]$.
Met 95% zekerheid kun je zeggen dat het percentage auto's dat te hard rijdt tussen 0,40% en 2,27% ligt.
De foutenmarge is $(0,0227 - 0,0040) : 2 = 0,00935$ ofwel ongeveer 0,9%.
- b** 15% ligt buiten het 95%-betrouwbaarheidsinterval.
Met 95% zekerheid kun je zeggen dat er nu minder auto's te hard rijden.
- 28 a** Het populatiegemiddelde is € 83,45.
- b** Het steekproefgemiddelde is € 95,16.
- c** Door toeval kan het steekproefgemiddelde hoger uitkomen. Misschien was de steekproef niet representatief door bijvoorbeeld het tijdstip waarop de steekproef is afgenomen. Als die op zaterdagmorgen was, zal de steekproef niet representatief zijn, want dan komen meestal de mensen die voor de hele week boodschappen doen en zullen de bestedingen relatief hoger zijn.
- 32 a** Op basis van deze steekproef schat hij dat het populatiegemiddelde 503 lucifers per doosje is.
- b** Dat betekent dat er waarschijnlijk genoeg lucifers in een doosje zitten. Het is wel een gemiddelde, er kunnen dus ook doosjes zijn met minder dan 500 lucifers.
- c** Het gemiddelde van de steekproevenverdeling is 504 lucifers. Dat is dan ook de schatting van het populatiegemiddelde.
- 36 a** $26\,000 - 2 \times \frac{4200}{\sqrt{1200}} \approx 25\,758$ en $26\,000 + 2 \times \frac{4200}{\sqrt{1200}} \approx 26\,242$
- Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[25\,758; 26\,242]$.
De foutenmarge is $(26\,242 - 25\,758) : 2 = 242$ km.
- b** Het interval $[25\,800, 26\,200]$ is smaller dan het 95%-betrouwbaarheidsinterval.
Het is daarom minder dan 95% zeker dat het gemiddeld in het interval $[25\,800, 26\,200]$ ligt.

10 Verdelingen (zonder ICT)

- 3 a Het staafdiagram is redelijk klokvormig.
 b Het gemiddelde is 26,0 procent en de standaardafwijking is 4,8 procent.

1e vuistregel

$$\mu - \sigma = 26,0 - 4,8 = 21,2 \text{ en } \mu + \sigma = 26,0 + 4,8 = 30,8$$

Het aantal klanten tussen deze grenzen is $82 - 18 = 64$.

64 van de 100 is 64%, dus de 1e vuistregel klopt redelijk.

2e vuistregel

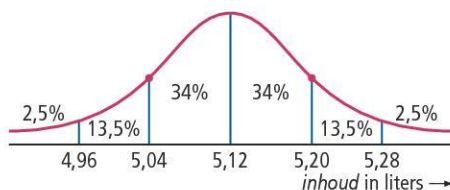
$$\mu - 2\sigma = 26,0 - 2 \times 4,8 = 16,4 \text{ en } \mu + 2\sigma = 26,0 + 2 \times 4,8 = 35,6$$

Het aantal klanten tussen deze grenzen is $96 - 1 = 95$.

95 van de 100 is 95%, dus de 2e vuistregel klopt.

Het percentage klanten dat pint is redelijk normaal verdeeld.

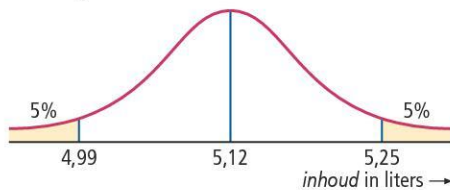
- 8 a



34 procent van de zakken heeft een inhoud tussen de 5,04 liter en 5,12 liter.

Dat zijn $200 : 100 \times 34 = 68$ zakken.

- b

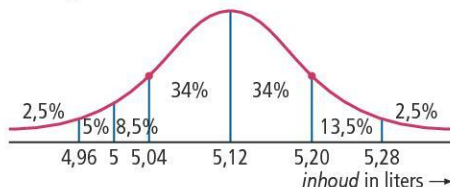


5,25 ligt $5,25 - 5,12 = 0,13$ rechts van het gemiddelde.

$$5,12 - 0,13 = 4,99$$

De 5 procent lichtste zakken heeft minder dan 4,99 liter.

- c



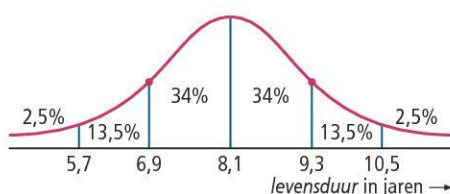
5 liter valt precies tussen 4,96 liter en 5,04 liter.

Verdeel de 13,5% in 5% en 8,5%.

$$2,5 + 5 = 7,5$$

Ongeveer 7,5 procent van de zakken heeft minder dan 5 liter.

- 10 a



$$13,5 + 34 + 34 = 81,5$$

81,5 procent van de wasmachines van type A heeft een levensduur tussen de 5,7 jaar en 9,3 jaar.

- b** Het gemiddelde is 7,8 jaar.

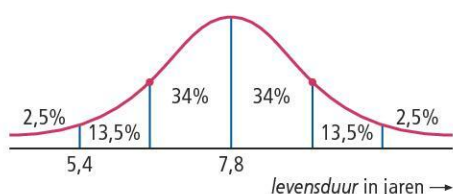
$$\mu - 2\sigma = 5,4$$

$$7,8 - 2\sigma = 5,4$$

$$2\sigma = 7,8 - 5,4 = 2,4$$

$$\sigma = 2,4 : 2 = 1,2$$

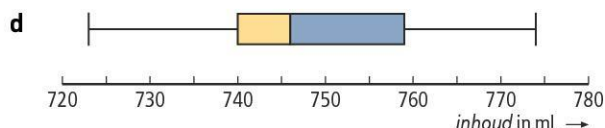
De standaardafwijking is 1,2 jaar.



- 15 a** 2 van de 4 is 50%, dus de steekproefproportie is $50 : 100 = 0,5$.
- b** Als de steekproef van Kyra representatief is, dan is de populatieproportie gelijk aan de steekproefproportie en dus 0,5.
- c** Van alle broeken heeft $12 : 56 \times 100\% \approx 21\%$ een naadje los.
De populatieproportie is dan $21 : 100 = 0,21$.
- 22 a** $8 : 600 \times 100\% = 1,33\ldots\%$, dus $p = 1,33\ldots : 100 = 0,0133\ldots$
- $$0,0133\ldots - 2 \times \sqrt{\frac{0,0133\ldots(1 - 0,0133\ldots)}{600}} \approx 0,0040$$
- $$0,0133\ldots + 2 \times \sqrt{\frac{0,0133\ldots(1 - 0,0133\ldots)}{600}} \approx 0,0227$$
- Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,0040; 0,0227]$.
Met 95% zekerheid kun je zeggen dat het percentage auto's dat te hard rijdt tussen 0,40% en 2,27% ligt.
De foutenmarge is $(0,0227 - 0,0040) : 2 = 0,00935$ ofwel ongeveer 0,9%.
- b** 15% ligt buiten het 95%-betrouwbaarheidsinterval.
Met 95% zekerheid kun je zeggen dat er nu minder auto's te hard rijden.
- 26 a** Het populatiegemiddelde is € 83,45.
- b** Het steekproefgemiddelde is € 95,16.
- c** Door toeval kan het steekproefgemiddelde hoger uitkomen. Misschien was de steekproef niet representatief door bijvoorbeeld het tijdstip waarop de steekproef is afgenomen. Als die op zaterdagmorgen was, zal de steekproef niet representatief zijn, want dan komen meestal de mensen die voor de hele week boodschappen doen en zullen de bestedingen relatief hoger zijn.
- 30 a** Op basis van deze steekproef schat hij dat het populatiegemiddelde 503 lucifers per doosje is.
- b** Dat betekent dat er waarschijnlijk genoeg lucifers in een doosje zitten. Het is wel een gemiddelde, er kunnen dus ook doosjes zijn met minder dan 500 lucifers.
- c** Het gemiddelde van de steekproevenverdeling is 504 lucifers. Dat is dan ook de schatting van het populatiegemiddelde.
- 34 a** $26\,000 - 2 \times \frac{4200}{\sqrt{1200}} \approx 25\,758$ en $26\,000 + 2 \times \frac{4200}{\sqrt{1200}} \approx 26\,242$
- Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[25\,758; 26\,242]$.
De foutenmarge is $(26\,242 - 25\,758) : 2 = 242$ km.
- b** Het interval $[25\,800; 26\,200]$ is smaller dan het 95%-betrouwbaarheidsinterval.
Het is daarom minder dan 95% zeker dat het gemiddeld in het interval $[25\,800; 26\,200]$ ligt.

7 Statistische verwerking (met ICT)

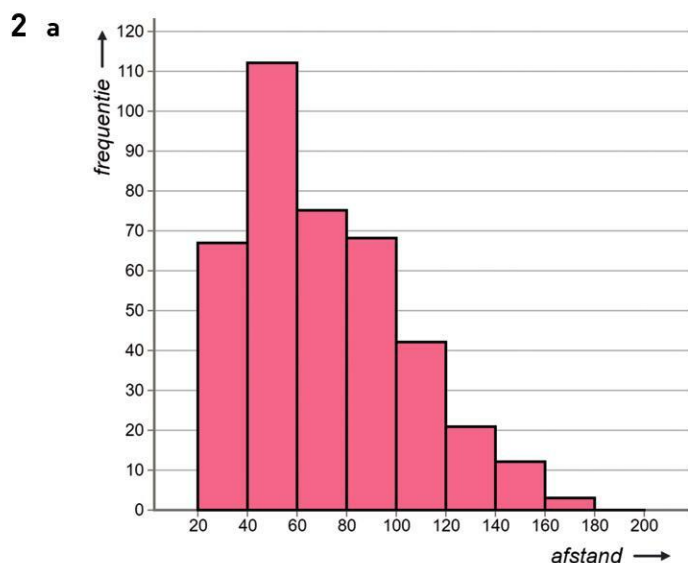
- 1 a** De spreidingsbreedte is $774 - 723 = 51$ mL.
b De modus is 740 mL.
c De mediaan is het gemiddelde van de inhoud van de 15e en 16e fles.
 De mediaan is $(746 + 747) : 2 = 746,5$ mL.
 Het eerste kwartiel is gelijk aan de inhoud van de 8e fles en het derde kwartiel is gelijk aan de inhoud van de 23e fles.
 Het eerste kwartiel is 740 mL en het derde kwartiel is 759 mL.



e

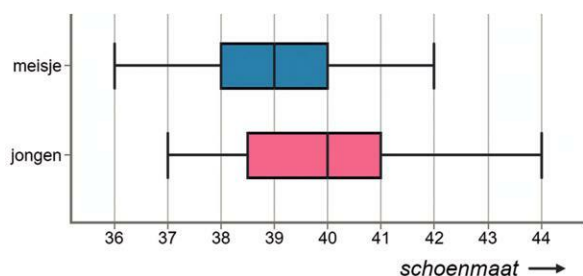
inhoud in mL	frequentie
[720, 730)	4
[730, 740)	2
[740, 750)	10
[750, 760)	8
[760, 770)	5
[770, 780)	1

- f** $4 \times 725 + 2 \times 735 + 10 \times 745 + 8 \times 755 + 5 \times 765 + 775 = 22460$
 De gemiddelde inhoud is $22460 : 30 \approx 748,7$ mL.



- b** De verdeling is scheef met een staart naar rechts.
c De klassenbreedte is $40 - 20 = 20$ km.
d De modale klasse is $[40, 60)$ en de klassenmidden daarvan is 50 km.
e Als je een tabel maakt met kentallen, dan zie je dat de mediaan 64,5 km is.
 Deze valt in de klasse $[60, 80)$.
f Er zijn een aantal hoge uitschieters die het gemiddelde sterk beïnvloeden, namelijk hoger maken.

3 a



b De spreidingsbreedte van de schoenmaat van de jongens is $44 - 37 = 7$.

c De kwartielf afstand van de schoenmaat van de meisjes is $40 - 38 = 2$.

d Conclusie A kun je wel trekken op basis van de boxplots. Zowel de hele boxplot als de box zelf is bij de jongens breder als bij de meisjes.

Conclusie B kun je wel trekken op basis van de boxplots. Ga er bijvoorbeeld van uit dat in elk stukje van de boxplot de jongens zoveel mogelijk naar links liggen.

$$50 \times 37 + 50 \times 38,5 + 50 \times 40 + 49 \times 41 + 44 = 7828$$

Het gemiddelde is dan $7828 : 200 = 39,14$.

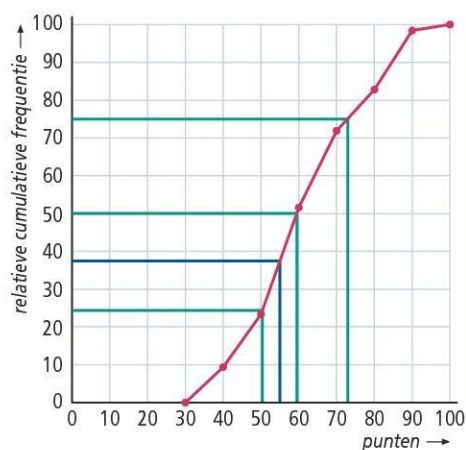
Het gemiddelde is dus sowieso minstens 39.

Conclusie C kun je niet trekken op basis van de boxplots. Er zijn in ieder geval 30 meisjes met een schoenmaat kleiner dan 38. Bij de jongens zijn er 50 die een schoenmaat kleiner dan 38,5 hebben. Maar je weet niet hoe die 50 jongens verdeeld zijn over de schoenmaten 37 tot 38,5. Er kunnen bijvoorbeeld ook 50 jongens een schoenmaat kleiner dan 38 hebben.

4 a $6 \times 35 + 9 \times 45 + 18 \times 55 + 13 \times 65 + 7 \times 75 + 10 \times 85 + 95 = 3920$

De gemiddelde score is $3920 : 64 = 61,25$ punten.

punten	[30, 40)	[40, 50)	[50, 60)	[60, 70)	[70, 80)	[80, 90)	[90, 100)
cumulatieve frequentie	6	15	33	46	53	63	64
relatieve cum. frequentie	9,4	23,4	51,6	71,9	82,8	98,4	100



c Zie opdracht 4b.

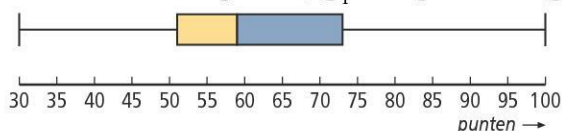
In de grafiek lees je bij 55 punten ongeveer 38% af.

$100\% - 38\% = 62\%$ van de personen heeft dan 55 of meer punten gehaald.

Dat zijn $64 : 100 \times 62 \approx 40$ personen.

d Zie opdracht 4b.

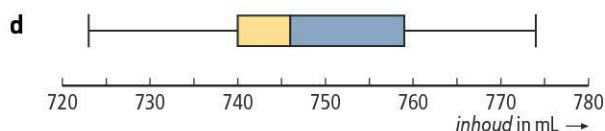
De mediaan is 59 punten, Q_1 is 51 punten en Q_3 is 73 punten.



- 5 a** De modus is 7.
 Er zijn $1 + 0 + \dots + 1 = 160$ mannen.
 De mediaan is het gemiddelde van de scores van de 80e en 81e man.
 De mediaan is $(7 + 7) : 2 = 7$.
 $1 \times 1 + 8 \times 4 + \dots + 1 \times 10 = 1055$
 Het gemiddelde is $1055 : 160 \approx 6,6$.
- b** De modus is 8.
 Er zijn $8 + 22 + \dots + 6 = 270$ vrouwen.
 De mediaan is het gemiddelde van de scores van de 80e en 81e vrouw.
 De mediaan is $(7 + 7) : 2 = 7$.
 $8 \times 2 + 22 \times 3 + \dots + 6 \times 10 = 1704$
 Het gemiddelde is $1704 : 270 \approx 6,3$.
- c** Het gemiddelde geeft de verschillen tussen de geslachten het beste weer.
 De mediaan is bij beide 7, terwijl vrouwen iets minder tevreden zijn.
 De modus 8 bij de vrouwen geeft een beetje vertekend beeld, want er zijn ook veel vrouwen ontevreden.
- d** Bij de vrouwen is de standaardafwijking het grootst, want in de cijfers van de vrouwen zit de meeste variatie.
- 6 a** De sportcoach heeft 26 tennissers onderzocht.
b Hij heeft een klassenbreedte van 200 meter gebruikt.
c De modale klasse van de tennissers is $[3000, 3200)$.
d Er zijn 32 voetballers onderzocht.
 Q_1 ligt bij 8 voetballers en is 2800 meter.
 Q_3 ligt bij 24 voetballers en is 3200 meter.
 De interkwartielafstand is $3200 - 2800 = 400$ meter.
e Bij de tennissers is de spreiding kleiner dan bij de voetballers.
 Bij de tennissers is de standaardafwijking kleiner.
f Kijk bijvoorbeeld kijkt naar de mediaan.
 De mediaan bij de tennissers ligt bij 13 tennissers en bij ongeveer 2650 meter.
 De mediaan bij de voetballers ligt bij 16 voetballers en bij ongeveer 3050 meter.
 Je kunt dan zeggen dat naar verhouding de voetballers het best hebben gedaan.

7 Statistische verwerking (zonder ICT)

- 1 a** De spreidingsbreedte is $774 - 723 = 51$ mL.
b De modus is 740 mL.
c De mediaan is het gemiddelde van de inhoud van de 15e en 16e fles.
 De mediaan is $(746 + 747) : 2 = 746,5$ mL.
 Het eerste kwartiel is gelijk aan de inhoud van de 8e fles en het derde kwartiel is gelijk aan de inhoud van de 23e fles.
 Het eerste kwartiel is 740 mL en het derde kwartiel is 759 mL.



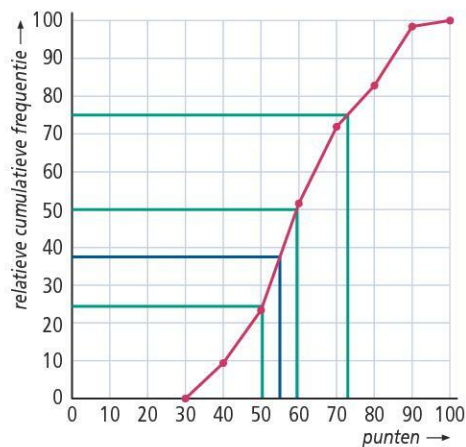
e	inhoud in mL	frequentie
	[720, 730)	4
	[730, 740)	2
	[740, 750)	10
	[750, 760)	8
	[760, 770)	5
	[770, 780)	1

f $4 \times 725 + 2 \times 735 + 10 \times 745 + 8 \times 755 + 5 \times 765 + 775 = 22460$

De gemiddelde inhoud is $22460 : 30 \approx 748,7$ mL.

- 2 a De verdeling is scheef met een staart naar rechts.
b De klassenbreedte is $40 - 20 = 20$ km.
c De modale klasse is $[40, 60)$ en de klassenmidden daarvan is 50 km.
d Er zijn $67 + 112 + 75 + 68 + 42 + 21 + 12 + 3 = 400$ personeelsleden.
De mediaan is het gemiddelde van het aantal kilometers van het 200e en 201e personeelslid. Deze personeelsleden vallen in de klasse vanaf 60 tot 80 kilometer.
De mediaan valt in de klasse $[60, 80)$.
e Er zijn een aantal hoge uitschieters die het gemiddelde sterk beïnvloeden, namelijk hoger maken.
- 3 a De spreidingsbreedte van de schoenmaat van de jongens is $44 - 37 = 7$.
b De kwartielafstand van de schoenmaat van de meisjes is $40 - 38 = 2$.
c Conclusie A kun je wel trekken op basis van de boxplots. Zowel de hele boxplot als de box zelf is bij de jongens breder als bij de meisjes.
Conclusie B kun je wel trekken op basis van de boxplots. Ga er bijvoorbeeld van uit dat in elk stukje van de boxplot de jongens zoveel mogelijk naar links liggen.
 $50 \times 37 + 50 \times 38,5 + 50 \times 40 + 49 \times 41 + 44 = 7828$
Het gemiddelde is dan $7828 : 200 = 39,14$.
Het gemiddelde is dus sowieso minstens 39.
Conclusie C kun je niet trekken op basis van de boxplots. Er zijn in ieder geval 30 meisjes met een schoenmaat kleiner dan 38. Bij de jongens zijn er 50 die een schoenmaat kleiner dan 38,5 hebben. Maar je weet niet hoe die 50 jongens verdeeld zijn over de schoenmaten 37 tot 38,5. Er kunnen dus bijvoorbeeld ook 50 jongens een schoenmaat kleiner dan 38 hebben.
- 4 a $6 \times 35 + 9 \times 45 + 18 \times 55 + 13 \times 65 + 7 \times 75 + 10 \times 85 + 95 = 3920$
De gemiddelde score is $3920 : 64 = 61,25$ punten.

punten	[30, 40)	[40, 50)	[50, 60)	[60, 70)	[70, 80)	[80, 90)	[90, 100)
cumulatieve frequentie	6	15	33	46	53	63	64
relatieve cum. frequentie	9,4	23,4	51,6	71,9	82,8	98,4	100



c Zie opdracht 4b.

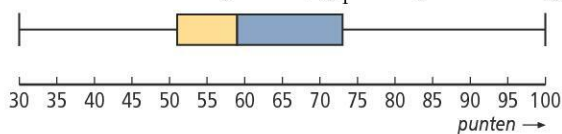
In de grafiek lees je bij 55 punten ongeveer 38% af.

$100\% - 38\% = 62\%$ van de personen heeft dan 55 of meer punten gehaald.

Dat zijn $64 : 100 \times 62 \approx 40$ personen.

d Zie opdracht 4b.

De mediaan is 59 punten, Q_1 is 51 punten en Q_3 is 73 punten.



5 a De modus is 7.

Er zijn $1 + 0 + \dots + 1 = 160$ mannen.

De mediaan is het gemiddelde van de scores van de 80e en 81e man.

De mediaan is $(7 + 7) : 2 = 7$.

$1 \times 1 + 8 \times 4 + \dots + 1 \times 10 = 1055$

Het gemiddelde is $1055 : 160 \approx 6,6$.

b De modus is 8.

Er zijn $8 + 22 + \dots + 6 = 270$ vrouwen.

De mediaan is het gemiddelde van de scores van de 80e en 81e vrouw.

De mediaan is $(7 + 7) : 2 = 7$.

$8 \times 2 + 22 \times 3 + \dots + 6 \times 10 = 1704$

Het gemiddelde is $1704 : 270 \approx 6,3$.

c Het gemiddelde geeft de verschillen tussen de geslachten het beste weer.

De mediaan is bij beide 7, terwijl vrouwen iets minder tevreden zijn.

De modus 8 bij de vrouwen geeft een beetje vertekend beeld, want er zijn ook veel vrouwen ontevreden.

d Bij de vrouwen is de standaardafwijking het grootst, want in de cijfers van de vrouwen zit de meeste variatie.

- 6 a** De sportcoach heeft 26 tennissers onderzocht.
b Hij heeft een klassenbreedte van 200 meter gebruikt.
c De modale klasse van de tennissers is $[3000, 3200)$.
d Er zijn 32 voetballers onderzocht.
 Q_1 ligt bij 8 voetballers en is 2800 meter.
 Q_3 ligt bij 24 voetballers en is 3200 meter.
De interkwartielafstand is $3200 - 2800 = 400$ meter.
e Bij de tennissers is de spreiding kleiner dan bij de voetballers.
Bij de tennissers is de standaardafwijking kleiner.
f Kijk bijvoorbeeld kijkt naar de mediaan.
De mediaan bij de tennissers ligt bij 13 tennissers en bij ongeveer 2650 meter.
De mediaan bij de voetballers ligt bij 16 voetballers en bij ongeveer 3050 meter.
Je kunt dan zeggen dat naar verhouding de voetballers het best hebben gedaan.

8 Grafieken en veranderingen

- 1 a** In zes maanden was het aantal projecten kleiner dan in de voorgaande maand, want er zijn zes staafjes die naar beneden staan.

b

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<i>aantal projecten</i>	5	8	6	8	9	13	11	7	7	9	6	4	3
<i>toename aantal projecten</i>		3	-2	2	1	4	-2	-4	0	2	-3	-2	-1

Op 1 januari 2018 waren er 5 projecten.

- c** In de maanden juni en juli was het aantal projecten groter dan 10.
d Aan het eind van het jaar waren er 3 projecten.
e De gemiddelde verandering is $(3 - 5) : 12 \approx -0,17$ projecten.

- 2 a** Als driekwart van de apparaten defect is, dan is het percentage 75.

$$75 = 100 \cdot (1 - 0,8^t)$$

Invoer: $y_1 = 75$ en $y_2 = 100 \times (1 - 0,8^x)$

Venster: x van 0 tot 20 en y van 0 tot 100

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (6,21; 75).

Na ongeveer 6,21 jaar is driekwart van de apparaten defect.

Dat is na ongeveer 6 jaar en 3 maanden.

- b** Bij $t = 1$ is $P = 20$ en bij $t = 3$ is $P = 48,8$.

$$\Delta t = 3 - 1 = 2 \text{ en } \Delta P = 48,8 - 20 = 28,8.$$

De gemiddelde toename is $28,8 : 2 = 14,4\%$ per jaar.

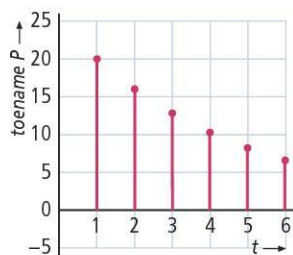
- c** Invoer: $y_1 = 100 \times (1 - 0,8^x)$

Venster: x van 0 tot 20 en y van 0 tot 100

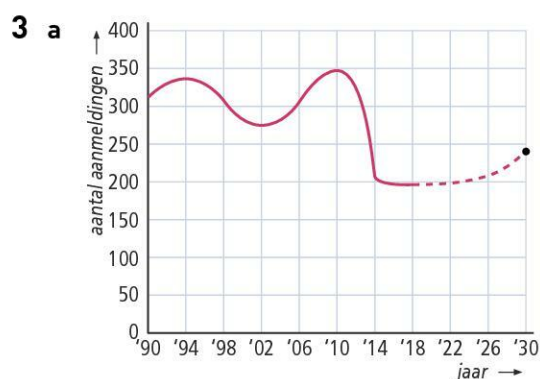
De grafiek is afnemend stijgend. Dan zal de gemiddelde verandering op het interval $[1, 3]$ groter zijn dan de gemiddelde verandering bij het interval $[3, 5]$.

d

t	0	1	2	3	4	5	6
P	0	20	36	48,8	59,04	67,232	73,7856
toename P		20	16	12,8	10,24	8,192	6,5536



- e** Bij $t = 1$ heeft het toenamediaagram een maximum. Dat betekent in de praktijk dat er in de eerste maand de meeste apparaten defect gaan.

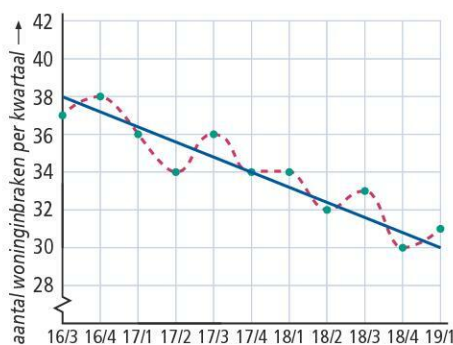


- b** 2007
De toename van het aantal aanmeldingen was in die periode $348 - 306 = 42$.
De lengte van de periode is 4 jaar.
De gemiddelde toename was $42 : 4 = 10,5$ aanmeldingen per jaar.
In 2007 waren er $306 + 10,5 \approx 317$ aanmeldingen.
- 2017
De toename van het aantal aanmeldingen was $196 - 207 = -11$.
De lengte van de periode is 4 jaar.
De gemiddelde toename was $-11 : 4 = -2,75$ aanmeldingen per jaar.
In 2017 waren er $207 - 3 \times 2,75 \approx 199$ aanmeldingen.
- c** De uitkomst van 2017 is het meest betrouwbaar, want in de jaren van 2014 en 2018 is er niet een groot verschil. Dat is bij de jaren 2006 tot 2010 veel groter.
- d** De toename van het aantal aanmeldingen was in die periode $196 - 312 = -116$.
De lengte van de periode is 28 jaar.
De gemiddelde toename was $-116 : 28 \approx -4$ aanmeldingen per jaar.
- e** Zie opdracht 3a.
Afhankelijk van hoe je de grafiek verlengt, zijn er meerdere antwoorden mogelijk. Het aantal aanmeldingen in 2029 is, als je op de manier als bij opdracht 3a verlengt, ongeveer 240.

- 4 a** In 2008 was 92% van 3500 personeelsleden werkzaam.
Dat waren $3500 : 100 \times 92 = 3220$ personeelsleden.
- b** In 2007 waren $3500 : 100 \times 88 = 3080$ personeelsleden.
In 2017 was 92% van 3500 personeelsleden werkzaam.
Dat waren $3500 : 100 \times 92 = 3220$ personeelsleden.
De toename van het aantal personeelsleden was in die periode
 $3220 - 3080 = 140$.
De lengte van de periode is 10 jaar.
De gemiddelde toename was $140 : 10 = 14$ personeelsleden per jaar.
- c** Vanaf 2015 stijgt het percentage elk jaar 4.
 $(100 - 88) : 4 = 3$
In het jaar 2019 werd de 100% bereikt.
- d** Dat is niet zinvol, want je komt dan op percentages boven de 100 en dat is in deze context niet mogelijk.

- 5 a** Bij 40 km per uur is het verbruik 29,03 km per liter.
Bij 70 km per uur is het verbruik 23,51 km per liter..
In $70 - 40 = 30$ km per uur is het verbruik $23,51 - 29,03 = -5,52$ km per liter gestegen. De gemiddelde verandering was $-5,52 : 30 = -0,184$.
- b** Als je harder gaat rijden, neemt het aantal km per liter af.
- c** De toename van het verbruik tussen de snelheden 60 km per uur en 70 km per uur is $23,51 - 25,35 = -1,84$ km per liter.
De lengte van de periode is $70 - 60 = 10$ km per uur.
De gemiddelde verandering in het verbruik is $-1,84 : 10 = -0,184$ km per liter.
 $25,35 - 0,184x = 24$
 $-0,184x = -1,35$
 $x = -1,35 : -0,184 \approx 7,3$
Bij een snelheid van ongeveer $60 + 7,3 = 67,3$ km per uur rijdt de auto op één liter 24 km.

- 6 a** Door de punten met een stippellijn te verbinden, kun je beter een trend zien.
- b** Er zijn meerde mogelijkheden.

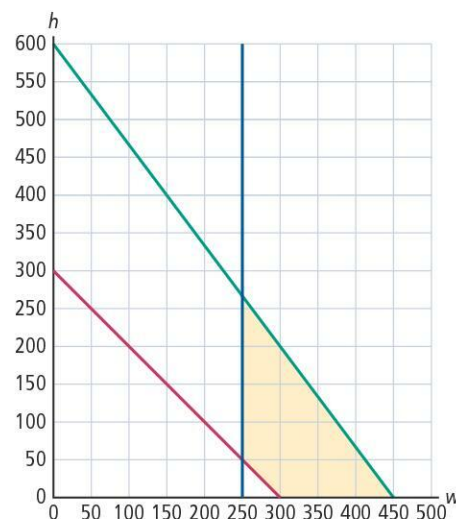


- c** De trendlijn gaat door de punten (16/3, 38) en (19/1, 30).
In 10 kwartalen nam het aantal woninginbraken $38 - 30 = 8$ af.
De gemiddelde verandering was $8 : 10 = 0,8$ woninginbraken per kwartaal.
De formule van de trendlijn is $A = -0,8t + 38$.
- d** 1e kwartaal van 2020 is $t = 2 + 3 \times 4 = 14$.
Het aantal woninginbraken is dan $A = -0,8 \times 14 + 38 \approx 27$.
- e** $20 = -0,8t + 38$
 $-18 = -0,8t$
 $t = -18 : -0,8 = 22,5$
23 kwartalen na 16/3 zijn er voor het eerst minder dan 20 woninginbraken.
 $23 = 5 \times 4 + 3$ Dat is 5 jaar en 3 kwartalen later, dus in 2022 het 2e kwartaal.

9 Lineaire en exponentiële formules

- 1 a** Per 600 km neemt het profiel $7,3 - 3,1 = 4,2$ mm af.
 Dat is $4,2 : 600 = 0,007$ mm per km.
 Het startgetal is $7,3 + 400 \times -0,007 = 10,1$.
 De formule is $P = -0,007k + 10,1$.
- b** $-0,007k + 10,1 = 0$
 $-0,007k = -10,1$
 $k = 1442,8\dots$, dus na ongeveer 1440 km.
- c** Het slijtage per km bij deze band is $1,5 \times 0,007 = 0,0105$ mm.
 Het startgetal is $6,3 + 600 \times 0,0105 = 12,6$.
 De formule is $P = -0,0105k + 12,6$.
- 2 a** Het aantal vergunningen neemt met een vast percentage toe.
- b** De groeifactor per 4 jaar is $300 : 102 = 2,94\dots$
 De groeifactor per jaar is $2,94\dots^{\frac{1}{4}} = 1,30\dots$
 Het groeipcentage is $1,30\dots \times 100 - 100 \approx 31$.
- c** De beginhoeveelheid is $102 : 1,30\dots^4 \approx 35$.
 De formule is $A = 35 \times 1,31^t$.
- d** Bij 2007 hoort $t = 12$.
 Volgens de formule zouden er dan $35 \times 1,31^{12} \approx 894$ vergunningen moeten zijn. Het verschil is $894 - 575 = 319$ vergunningen.
- e** $1,17^t = 2$
 Invoer: $y_1 = 1,17^x$ en $y_2 = 2$
 Venster: x van 0 tot 10 en y van 0 tot 5
 Optie: snijpunt
 De coördinaten van het snijpunt zijn $(4,41; 2)$.
 Na ongeveer 4,41 jaar is het aantal vergunningen verdubbeld.
 Dat is in het jaar 2011.
- 3 a** $3x + 5y = 15$
 $5y = -3x + 15$
 $y = -0,6x + 3$
- b** $\frac{1}{2}x = 2y + 14$
 $2y + 14 = \frac{1}{2}x$
 $2y = \frac{1}{2}x - 14$
 $y = \frac{1}{4}x - 7$
- c** $0,06x - 1,2y = 96$
 $-1,2y = -0,06x + 96$
 $y = 0,05x - 80$
- 4 a** Walnoten kosten 2 cent per gram en hazelnoten kosten 1,5 cent per gram.
 Met $2w$ reken je uit hoeveel cent ze aan walnoten kwijt is en met $1,5h$ reken je uit hoeveel cent ze kwijt is aan hazelnoten. Dat samen mag maximaal 9 euro ofwel 900 cent zijn.
 Met $w \geq 250$ wordt bedoeld dat ze minimaal 250 gram walnoten wil kopen.
- b** Bij het halfvlak hoort de ongelijkheid $w + h \geq 300$.

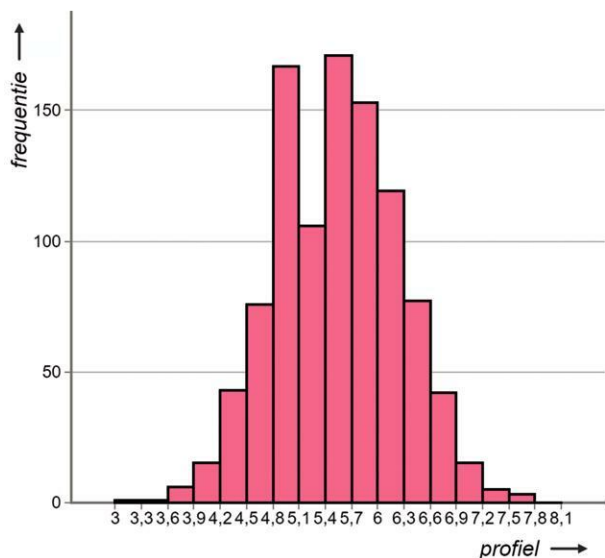
- c** snijpunt met de w -as, $h = 0$
 $2w + 1,5 \times 0 = 900$
 $2w = 900$
 $w = 900 : 2 = 450$
 Snijpunt met de w -as is $(450, 0)$.
 snijpunt met de h -as, $w = 0$
 $2 \times 0 + 1,5h = 900$
 $1,5h = 900$
 $h = 900 : 1,5 = 600$
 Snijpunt met de h -as is $(0, 600)$.
 De coördinaten van $(0, 0)$ invullen geeft $2 \times 0 + 1,5 \times 0 = 0$.
 $0 \leq 900$ klopt, dus het gebied waar $(0, 0)$ in ligt, is het gevraagde halfvlak.
- d** Alle punten, want je kunt ook bijvoorbeeld halve grammen noten kopen.
- e** $2 \times 350 + 1,5h = 900$
 $700 + 1,5h = 900$
 $1,5h = 200$
 $h = 200 : 1,5 = 133,33\dots$
 Josien kan nog maximaal 133 gram hazelnoten kopen.



- 5 a** $100\% - 10\% = 90\%$
 De groeifactor per jaar is $90 : 100 = 0,9$.
 $0,9^t = 0,5$
 Invoer: $y_1 = 0,9^x$ en $y_2 = 0,5$
 Venster: x van 0 tot 10 en y van 0 tot 2
 Optie: snijpunt
 De oplossing is $(6,58\dots; 0,5)$.
 Na ongeveer 6,58... jaar is de waarde gehalveerd.
 Dat is na 6 jaar en $0,58\dots \times 12 \approx 7$ maanden.
- b** $82\,500 \times 0,5^3 = 10\,312,5$
 De waarde van de tractor is dan € 10.312,50.
- 6 a** Na twee dagen waren er 30 000 bacteriën en na 20 dagen waren er 20 000 000 bacteriën.
- b** Een rechte lijn op logaritmisch papier hoort altijd bij een exponentieel verband.
- c** De groeifactor per 18 dagen is $20\,000\,000 : 30\,000 = 666,66\dots$
 De groeifactor per dag is $666,66\dots^{\frac{1}{18}} = 1,435\dots$
 De beginhoeveelheid is $30\,000 \times 1,435\dots^{-2} \approx 14\,566$.
 De formule is $A = 14\,566 \cdot 1,435^t$.
- d** Bij 5 dagen en 8 uur is $t = 5 + \frac{8}{24} = 5\frac{8}{24} = 5\frac{1}{3}$.
 Er zijn dan $14\,566 \times 1,435^{5\frac{1}{3}} \approx 99\,973$ bacteriën.
- e** $1,435^t = 2$
 Invoer: $y_1 = 2,254^x$ en $y_2 = 2$
 Venster: x van 0 tot 2 en y van 0 tot 5
 Optie: snijpunt
 De oplossing is $(1,919\dots; 2)$.
 Na ongeveer 1 dag en $0,919\dots \times 24 \approx 22$ is het aantal bacteriën verdubbeld.

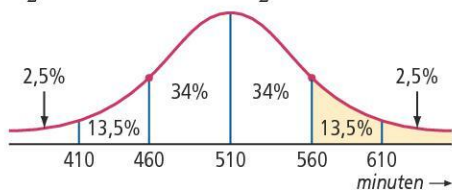
10 Verdelingen (met ICT)

1 a



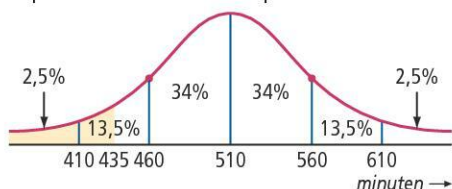
- b Het staafdiagram is redelijk klokvormig.
- c Het gemiddelde is 5,50 mm en de standaardafwijking is ongeveer 0,69 mm.
 $\mu - \sigma = 5,50 - 0,69 = 4,81$ en $\mu + \sigma = 5,50 + 0,69 = 6,19$
 Er zijn 676 banden met een profiel tussen 4,81 mm en 6,19 mm.
 Dat is $676 : 1000 \times 100 = 67,6\%$, dus de 1e vuistregel klopt.
 $\mu - 2\sigma = 5,50 - 2 \times 0,69 = 4,12$ en $\mu + 2\sigma = 5,50 + 2 \times 0,69 = 6,88$
 Er zijn 954 banden met een profiel tussen 4,12 mm en 6,88 mm.
 Dat is $954 : 1000 \times 100 = 95,4\%$, dus de 2e vuistregel klopt.
 De diepte van het profiel is normaal verdeeld.

- 2 a In deze steekproef zijn alleen de laatste 150 batterijen genomen. Een batterij die eerder werd geproduceerd kon dus niet in deze steekproef komen.
- b Neem bijvoorbeeld elk uur een aantal batterijen.
- c $8\frac{1}{2}$ uur is gelijk aan $8\frac{1}{2} \times 60 = 510$ minuten.



Deze batterijen gaan minstens 560 minuten mee.

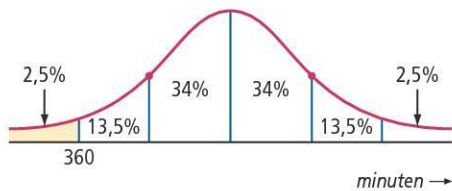
- d $7\frac{1}{4}$ uur is gelijk aan $7\frac{1}{4} \times 60 = 435$ minuten.



Het percentage is ongeveer $2,5\% + 5\% = 7,5\%$.

Dat zijn $150 : 100 \times 7,5 \approx 11$ batterijen.

e



$$\mu - 2\sigma = 360$$

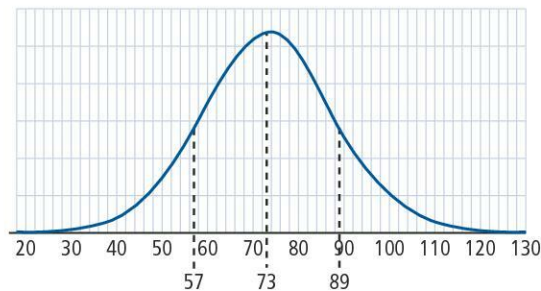
$$\mu - 2 \times 40 = 360$$

$$\mu - 80 = 360$$

$$\mu = 360 + 80 = 440$$

De gemiddelde levensduur in deze test is 440 minuten.

3 a



Het gemiddelde ligt bij 73. De buigpunten liggen bij 57 en 89.

De standaardafwijking is $73 - 57 = 16$ of $89 - 73 = 16$.

b Er zijn meerdere mogelijkheden.

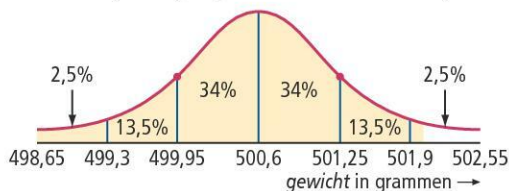
De top van de klokvorm moet meer naar rechts en lager liggen.

De klokvorm moet breder zijn.

4 a Er zijn $50 - 4 = 46$ van de 50 capsules wel goed van vorm.

De steekproefproportie is $46 : 50 = 0,92$.

b



Vrijwel alle capsules in deze steekproef hebben de juiste inhoud.

c Het gemiddelde van de steekproefgemiddelden is ongeveer 500,25 gram.

De machine kan misschien nog iets lager afgesteld worden.

5 a In 2019 vond je $300 : 100 \times 22 = 66$ hoogopgeleiden.

$$b \quad 0,28 - 2 \times \sqrt{\frac{0,28(1 - 0,28)}{50\,000}} \approx 0,276 \text{ en } 0,28 + 2 \times \sqrt{\frac{0,28(1 - 0,28)}{50\,000}} \approx 0,284$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,276; 0,284]$.

Met 95% zekerheid kun je zeggen dat het percentage hoogopgeleiden tussen 27,6% en 28,4% ligt.

De foutenmarge is $(28,4 - 27,6) : 2 = 0,4\%$.

c Het percentage hoogopgeleiden in de steekproef van 2019 is 22.

Dat ligt buiten het 95%-betrouwbaarheidsinterval.

Dus ja, je kunt met 95% zekerheid de conclusie trekken dat het percentage hoogopgeleiden gedaald is.

6 a mannen

$$25,84 - 2 \times \frac{1,59}{\sqrt{100}} = 25,522 \text{ en } 25,84 + 2 \times \frac{1,59}{\sqrt{100}} = 26,158$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [25,522; 26,158].

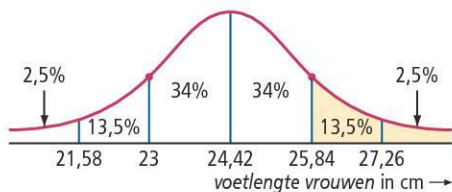
vrouwen

$$24,42 - 2 \times \frac{1,42}{\sqrt{100}} = 24,136 \text{ en } 24,42 + 2 \times \frac{1,42}{\sqrt{100}} = 24,704$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [24,136; 24,704].

- b Ja, want het interval van de mannen is zijn geheel groter dan de rechter grens van het interval van de vrouwen.

c



$$13,5\% + 2,5\% = 16\%$$

16% van 100 is 16 vrouwen.

16 vrouwen hebben grotere voeten dan de gemiddelde voetlengte van de mannen.

10 Verdelingen (zonder ICT)

- 1 a Het staafdiagram is redelijk klokvormig.

b $\mu - \sigma = 5,50 - 0,69 = 4,81$ en $\mu + \sigma = 5,50 + 0,69 = 6,19$

Er zijn $838 - 216 = 622$ banden met een profiel tussen 4,81 mm en 6,19 mm.

Dat is $622 : 1000 \times 100 = 62,2\%$, dus de 1e vuistregel klopt redelijk.

$\mu - 2\sigma = 5,50 - 2 \times 0,69 = 4,12$ en $\mu + 2\sigma = 5,50 + 2 \times 0,69 = 6,88$

Er zijn $977 - 34 = 943$ banden met een profiel tussen 4,12 mm en 6,88 mm.

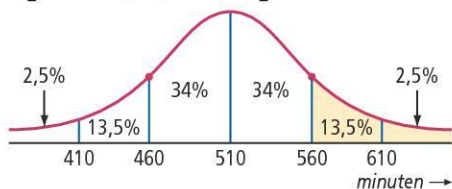
Dat is $943 : 1000 \times 100 = 94,3\%$, dus de 2e vuistregel klopt.

De diepte van het profiel is redelijk normaal verdeeld.

- 2 a In deze steekproef zijn alleen de laatste 150 batterijen genomen. Een batterij die eerder werd geproduceerd kon dus niet in deze steekproef komen.

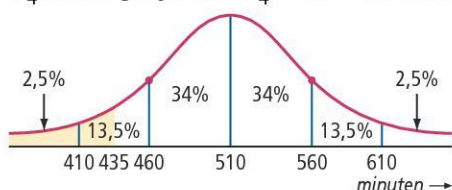
b Neem bijvoorbeeld elk uur een aantal batterijen.

c $8\frac{1}{2}$ uur is gelijk aan $8\frac{1}{2} \times 60 = 510$ minuten.



Deze batterijen gaan minstens 560 minuten mee.

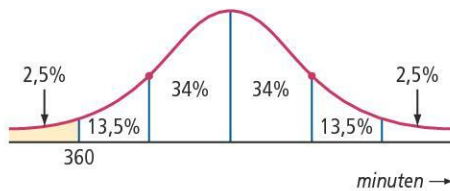
d $7\frac{1}{4}$ uur is gelijk aan $7\frac{1}{4} \times 60 = 435$ minuten.



Het percentage is ongeveer $2,5\% + 5\% = 7,5\%$.

Dat zijn $150 : 100 \times 7,5 \approx 11$ batterijen.

e



$$\mu - 2\sigma = 360$$

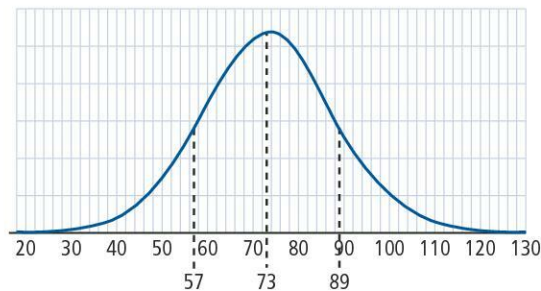
$$\mu - 2 \times 40 = 360$$

$$\mu - 80 = 360$$

$$\mu = 360 + 80 = 440$$

De gemiddelde levensduur in deze test is 440 minuten.

3 a



Het gemiddelde ligt bij 73. De buigpunten liggen bij 57 en 89.

De standaardafwijking is $73 - 57 = 16$ of $89 - 73 = 16$.

b Er zijn meerdere mogelijkheden.

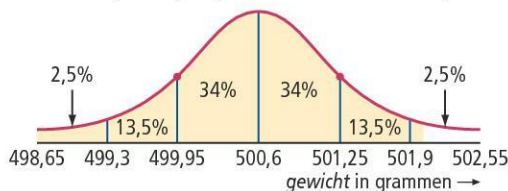
De top van de klokvorm moet meer naar rechts en lager liggen.

De klokvorm moet breder zijn.

4 a Er zijn $50 - 4 = 46$ van de 50 capsules wel goed van vorm.

De steekproefproportie is $46 : 50 = 0,92$.

b



Vrijwel alle capsules in deze steekproef hebben de juiste inhoud.

c Het gemiddelde van de steekproefgemiddelden is ongeveer 500,25 gram.

De machine kan misschien nog iets lager afgesteld worden.

5 a In 2019 vond je $300 : 100 \times 22 = 66$ hoogopgeleiden.

$$b \quad 0,28 - 2 \times \sqrt{\frac{0,28(1 - 0,28)}{50\,000}} \approx 0,276 \text{ en } 0,28 + 2 \times \sqrt{\frac{0,28(1 - 0,28)}{50\,000}} \approx 0,284$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,276; 0,284]$.

Met 95% zekerheid kun je zeggen dat het percentage hoogopgeleiden tussen 27,6% en 28,4% ligt.

De foutenmarge is $(28,4 - 27,6) : 2 = 0,4\%$.

6 a mannen

$$25,84 - 2 \times \frac{1,59}{\sqrt{100}} = 25,522 \text{ en } 25,84 + 2 \times \frac{1,59}{\sqrt{100}} = 26,158$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [25,522; 26,158].

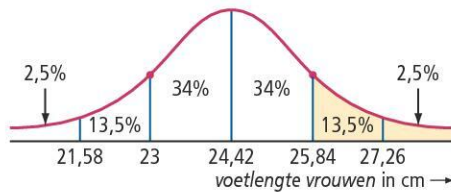
vrouwen

$$24,42 - 2 \times \frac{1,42}{\sqrt{100}} = 24,136 \text{ en } 24,42 + 2 \times \frac{1,42}{\sqrt{100}} = 24,704$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [24,136; 24,704].

- b** Ja, want het interval van de mannen is zijn geheel groter dan de rechter grens van het interval van de vrouwen.

c



$$13,5\% + 2,5\% = 16\%$$

16% van 100 is 16 vrouwen.

16 vrouwen hebben grotere voeten dan de gemiddelde voetlengte van de mannen.



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.
Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.
Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.