

MODERNE WISKUNDE

A

$$\nu = \frac{4h}{2(h+z) - zh}$$



Noordhoff

Dit boek is van jou:

NAAM

KLAS

12e editie

Moderne Wiskunde

havo A deel 3

Serieoverzicht Tweede Fase

	havo		vwo		
klas 4	A 1	B 1	AC 1		B 1
klas 5	A 2	B 2	AC 2		B 2
klas 6	A 3	B 3	A 3	C 3	B 3
			A 4	C 4	B 4

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleen.

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 21

© 2021 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsenauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication

ISBN 978-90-01-89208-1

12e editie

Moderne Wiskunde

havo A deel 3

Bert Boon

Ferdi Doddema

Wim Doekes

Ilse de Jong

Gerard van Proosdij

Colin Roll

Geertrui Schaberg

Ron Sinkeldam

Carolijn Tacken

11 Allerlei formules 6

- Voorkennis 8
- 11.1 Recht evenredig en omgekeerd evenredig 10
- 11.2 Grenswaarden 14
- 11.3 Redeneren met formules 18
- 11.4 Machtsformules 22
- 11.5 Formules met meer variabelen 26
- 11.6 Gemengde opdrachten 30
- Onderzoeksopdrachten 31
- Samenvatting 32
- Test jezelf 36
- Extra oefening 38

12 Toegepast rekenen 40

- Voorkennis 42
- 12.1 Breuken 44
- 12.2 Absoluut en relatief 48
- 12.3 Afronden 52
- 12.4 Tijden 56
- 12.5 Grote en kleine getallen 60
- 12.6 Gemengde opdrachten 64
- Onderzoeksopdrachten 65
- Samenvatting 66
- Test jezelf 70
- Extra oefening 72

Vaardigheden 6 74

- Lineaire groei 76
- Recht evenredig en omgekeerd evenredig 76
- Gebieden 78
- Exponentiële groei 79

13 Conclusies uit data 80

- Voorkennis 82
- 13.1 Percenteren 84
- 13.2 Continu, discreet, nominaal en ordinaal 88
- 13.3 Groepen grafisch vergelijken 92
- 13.4 Groepen vergelijken met formules 96
- 13.5 Data-analyse 100
- 13.6 Gemengde opdrachten 104
- Onderzoeksopdrachten 105
- Samenvatting 106
- Test jezelf 110
- Extra oefening 112

14 Formules herleiden 114

- Voorkennis 116
 - 14.1 Lineaire formules herleiden 118
 - 14.2 Gebroken formules herleiden 122
 - 14.3 Wortelformules herleiden 126
 - 14.4 Machtsformules herleiden 130
 - 14.5 Formules combineren 134
 - 14.6 Gemengde opdrachten 138
 - Onderzoeksopdrachten 139
 - Samenvatting 140
 - Test jezelf 144
 - Extra oefening 146
- ### **Vaardigheden 7 148**
- Lineair interpoleren 150
 - Verdubbelingstijd en halveringstijd 151
 - Logaritmische schaalverdeling 151
 - Het 95%-betrouwbaarheidsinterval 152
 - Redeneren met formules 153

Examenvoorbereiding 154

Rekenen 156
Grafieken, formules en tabellen 160
Evenredige en omgekeerd
evenredige verbanden 168
Lineaire verbanden 171
Exponentiële verbanden 178
Formules herleiden 186
Statistiek 195
Hints bij de examenopdrachten 212
Formuleblad 216
Examenwerkwoorden 217

Extra 218

Meer oefenen 220
Oefenproefwerken 228

Trefwoorden 236

Moderne Wiskunde

havo A deel 3



An aerial photograph of a Dutch landscape. In the background, several white wind turbines stand in a line across a green field. The middle ground shows a mix of green agricultural fields and a small village with red-roofed houses. A canal or river winds through the landscape, bordered by lush green trees and grass. The foreground shows more fields and a small bridge over the water.

SE

CE

In dit hoofdstuk

Dit hoofdstuk is een vervolg op hoofdstuk 2 uit deel 1 en hoofdstuk 9 uit deel 2.

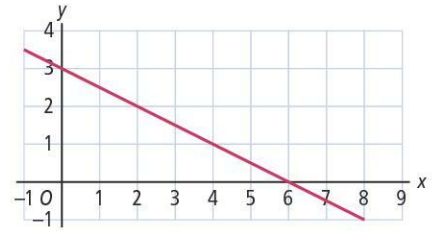
Het hoofdstuk begint met het herhalen van recht evenredige en omgekeerd evenredige verbanden. Door het maken van tabellen en door redeneren wordt onderzocht of waarden van formules naar een grenswaarde naderen. Verder wordt er gekeken naar de eigenschappen van formules met machten. Tot slot krijgen formules met meer variabelen de nodige aandacht.

In hoofdstuk 14 wordt het werken met formules afgesloten.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk:

- | | |
|---|-------------|
| • <i>Probleem oplossen en analytisch denken</i> | opdracht 26 |
| • <i>Ordenen en structureren</i> | opdracht 13 |
| • <i>Formules manipuleren</i> | opdracht 29 |

- V1** De grafiek hoort bij de formule $x + 2y = 6$.
- Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van de grafiek? En hoe groot is het startgetal?
 - Stel een formule op bij de grafiek van de vorm $y = ax + b$.
 - Laat zien hoe je de formule $x + 2y = 6$ kunt herleiden tot de vorm $y = ax + b$.



Theorie

De formule $5p + 2q = 18$ hoort bij een lineair verband. Als je q wilt berekenen als je p weet, dan kun je de **formule herleiden** zodat q wordt **uitgedrukt in p** . Bij het herleiden gebruik je de balansmethode.

Voorbeeld

Herleid de formule $5p + 2q = 18$ waarbij je q uitdrukt in p .

Oplossing

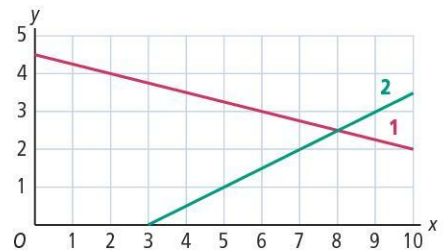
$$5p + 2q = 18$$

$$2q = 18 - 5p \quad \text{links en rechts } - 5p$$

$$q = 9 - 2,5p \quad \text{links en rechts : 2}$$

De formule wordt $q = -2,5p + 9$ of $q = 9 - 2,5p$.

- V2** Herleid de formules waarbij je b uitdrukt in a .
- $4b + 6a = 12$
 - $3b - a = 6$
 - $2a + b + 5 = 0$
 - $5b - 6 + 15a = 4$
 - $0,2a + 0,1b = 10$
 - $4(b + 1) + 2a = 10$
- V3** De lijnen horen bij de formules $4y + x = 18$ en $2y - x = -3$.
- Welke formule hoort bij lijn 1 die door het punt $(2, 4)$ gaat?
 - Om de coördinaten van het snijpunt van de lijnen te berekenen, kun je bij beide formules y uitdrukken in x . Herleid de formules waarbij je y uitdrukt in x .
 - Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen.



- V4** Bij welke van de formules is sprake van een lineair verband tussen de variabelen x en y ?
- $y = 3x + 7$
 - $x \cdot y = 24$
 - $y = 3x^2$
 - $3x + y = 12$

- V5** Jorrit en Sietske hebben beiden al een paar jaar een baan. Jorrit kan zijn maandsalaris berekenen met de formule $B = 1800 + 70t$. Sietske berekent haar maandsalaris met de formule $B = 1800 \cdot 1,035^t$. In beide formules is B het bedrag in euro's en t de tijd in jaren na 1 januari 2020. Ze krijgen beide jaarlijks op 1 januari een salarisverhoging.

- Met hoeveel procent per jaar stijgt het salaris van Sietske?
- En met hoeveel procent stijgt het salaris van Sietske in vijf jaar?
- Bij wie van de twee is het salaris op 1 januari 2022 het hoogst?
- Vanaf wanneer is het salaris van Sietske hoger dan dat van Jorrit?

Als de groeifactor per jaar gelijk is aan g , dan is de groeifactor per n jaar gelijk aan g^n .

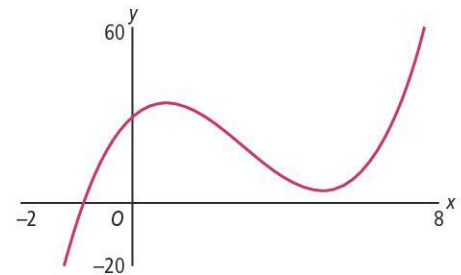
Bij de volgende situaties kun je de rekenmachine gebruiken bij het maken van opdrachten.

- Het vinden van het snijpunt van een grafiek met de horizontale as, dus de waarde vinden waarbij een formule de uitkomst 0 heeft.
- Het vinden van het snijpunt van twee grafieken, dus de waarde vinden waarbij twee formules dezelfde uitkomst hebben.
- Het vinden van de coördinaten van de toppen van een grafiek, dus de waarden vinden waarbij een formule een maximale of minimale uitkomst heeft.

- V6** Je ziet een schets van de grafiek bij de formule

$$y = x^3 - 8x^2 + 11x + 25.$$

- Bij welke waarde van x geldt $y = 0$? Rond je antwoord af op twee decimalen.
- Bij een waarde van x tussen 0 en 2 heeft deze formule een maximum. Bereken dit maximum en de waarde van x waarvoor dit maximum wordt bereikt.
- In de grafiek zie je dat er ook een minimum is. Bereken dit minimum en de bijbehorende waarde van x .



- V7** Op 1 januari 2010 heeft Thomas € 500,- gestort op een spaarrekening. Hij krijgt jaarlijks 2,3% rente. De rente wordt ieder jaar op 1 januari bijgeschreven.

- Leg uit dat hij het bedrag B in euro na t jaren kan berekenen met de formule $B = 500 \cdot 1,023^t$.
- In welk jaar staat er voor het eerst meer dan € 700,- op zijn spaarrekening?
- Na hoeveel jaar is het bedrag op de spaarrekening verdubbeld?

11.1 Recht evenredig en omgekeerd evenredig

Je herhaalt • wat recht evenredig en omgekeerd evenredig is

Leerroutes

- ondersteunend: 1–2–03–4–5–06–7–8
- doorlopend: 1–2–3–4–5–6–7–8
- uitdagend: 1–2–4–5–6–7–8–U1

Stefan verhuurt strandstoelen. De oppervlakte van het strand dat hij mag gebruiken is 800 m^2 . De huur van een strandstoel is € 12,50 per uur. Er is een verband tussen het aantal strandstoelen en de oppervlakte van het strand per strandstoel. Er is ook een verband tussen het aantal strandstoelen en de opbrengst.

- Omschrijf het verschil tussen deze twee verbanden.



- 1 Het bestuur van de voetbalvereniging heeft voor een actie 2000 kalenders laten drukken. De kalenders worden verkocht voor € 5,- per stuk.

- Bereken de opbrengst als er 875 kalenders worden verkocht.
- Vul de tabel in.

aantal verkochte kalenders	100	200	300	400
opbrengst in euro's	...	...	...	...

- Wordt de opbrengst twee keer zo groot als er twee keer zoveel kalenders worden verkocht?
- Stel een formule op voor het verband tussen de opbrengst O in euro's en het aantal verkochte kalenders K .

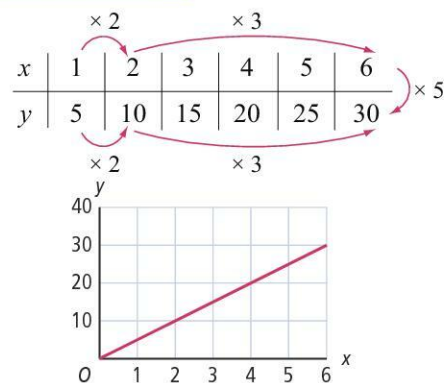
Theorie

Twee variabelen heten **recht evenredig** als geldt: als de ene variabele k keer zo groot wordt, dan wordt de andere variabele ook k keer zo groot. Zijn de variabelen x en y , dan heet y recht evenredig met x , of kortweg **evenredig** met x .

Er geldt $\frac{y}{x} = c$, maar ook $y = c \cdot x$ waarbij c een constant getal is.

Je herkent een evenredig verband in een tabel, als van de twee getallen in elke kolom de verhouding dezelfde is. De grafiek bij een evenredig verband is een rechte lijn door de oorsprong.

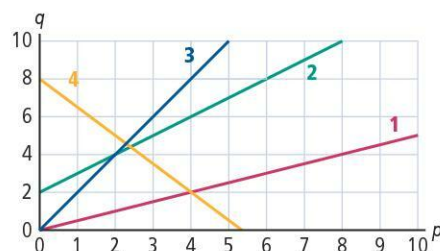
Voorbeeld



Het verband tussen x en y is recht evenredig.

De formule is $\frac{y}{x} = 5$ of $y = 5x$.

- 2 a Maak een tabel bij grafiek 1 en laat zien dat p recht evenredig is met q .
 b Welke andere grafiek hoort bij een recht evenredig verband?
 c Stel bij elk van de vier grafieken een formule op.



Ondersteunende route → maak opdracht 03

- 3 Het laten drukken van de 2000 kalenders uit opdracht 1 kost in totaal € 3.000,-.
 a Bereken de winst als er 1000 kalenders en als er 2000 kalenders worden verkocht.
 b Leg uit dat de winst niet recht evenredig is met het aantal verkochte kalenders.
- 4 De leden van de voetbalclub gaan de 2000 kalenders verkopen. Ieder lid dat kalenders gaat verkopen, krijgt een gelijk aantal.
 a Hoeveel kalenders krijgt ieder lid, als de kalenders door 40 leden worden verkocht?
 b Hoe verandert het aantal kalenders dat ieder lid meekrijgt als het aantal leden dat kalenders gaat verkopen wordt verdubbeld?
 c Noem het aantal leden dat kalenders gaat verkopen L en het aantal kalenders dat elk lid meekrijgt N .
 Stel een formule op voor het verband tussen N en L .

Theorie

Twee variabelen heten **omgekeerd evenredig** als geldt: als de ene variabele k keer zo groot wordt, wordt de andere variabele k keer zo klein.

Zijn de variabelen x en y , dan geldt $x \cdot y = c$. Je kunt ook schrijven $y = \frac{c}{x}$ of $x = \frac{c}{y}$.

Je herkent een omgekeerd evenredig verband in een tabel als het product van de variabelen in elke kolom steeds hetzelfde is.

Voorbeeld 1

	$\times 2$	$\times 2$	$\times 2$	
x	3	6	12	24
y	40	20	10	5
	$: 2$	$: 2$	$: 2$	

Het verband tussen x en y is omgekeerd evenredig, want als x twee keer zo groot wordt, wordt y twee keer zo klein.

De formule is $x \cdot y = 120$ of $y = \frac{120}{x}$ of $x = \frac{120}{y}$.

Voorbeeld 2

x	3	4	5	10
y	8	6	4,8	2,4

Het verband tussen x en y is omgekeerd evenredig, want $3 \times 8 = 24$; $4 \times 6 = 24$; $5 \times 4,8 = 24$ en $10 \times 2,4 = 24$.

De formule is $x \cdot y = 24$ of $y = \frac{24}{x}$ of $x = \frac{24}{y}$.

- 5** Een grote scholengemeenschap heeft 1800 leerlingen.
- H** a Hoeveel leerlingen zijn er gemiddeld per klas als de leerlingen verdeeld zijn over 75 klassen?
- b Noem de gemiddelde klassengrootte g en het aantal klassen k .
Waarom is het verband tussen k en g omgekeerd evenredig?
- c Stel een formule op voor het verband tussen k en g .

Ondersteunende route → maak opdracht O6

x	1,2	...	3	6	54
y	90	72	36	...	...

A

n	1	2	6	30	80
k	...	60	...	4	...

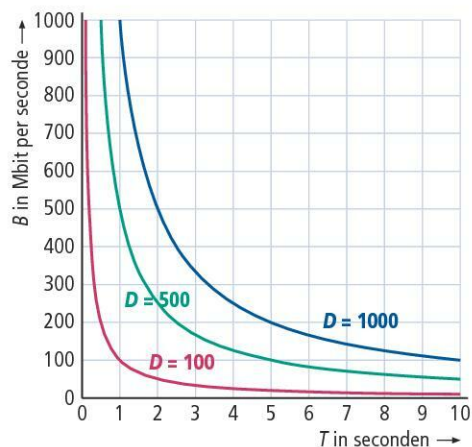
B

p	3	6	8	10	12
q	27	...	72	...	...

C

- 6** Bij de tabellen hoort een recht evenredig of omgekeerd evenredig verband.
- a Vul de tabellen verder in.
- b Stel bij elke tabel een formule op.
- 7** Bedenk in de volgende gevallen of er sprake is van een recht evenredig verband, een omgekeerd evenredig verband of geen van beide. Verklaar je antwoord.
- H** a Het gewicht en de prijs bij een stuk kaas.
- b De tijd en de gemiddelde snelheid bij een af te leggen afstand van 20 km.
- c De tijd en de afgelegde afstand bij een constante snelheid van 10 km per uur.
- d De tijd en het aantal inwoners van een land bij een bevolkingsgroei van 3% per jaar.

- 8** Bij een internetverbinding beperkt de bandbreedte de downloadsnelheid. De bandbreedte van een verbinding is de maximale hoeveelheid data die verwerkt kan worden per tijdseenheid. In de grafiek is voor drie datahoeveelheden D in Mbit het verband weergegeven tussen de verwerkingstijd T in seconden en de bijbehorende bandbreedte B in Mbit per seconde bij het downloaden.
- a Bij een bandbreedte van 100 Mbit per seconde duurt het langer om 500 Mbit te downloaden dan 100 Mbit. Hoeveel seconden langer?
- b In de grafiek zie je voor $D = 1000$ het omgekeerd evenredig verband tussen B en T getekend. Stel bij deze waarde van D een formule op waarbij je B uitdrukt in T .
(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2019, tijdvak 2)



Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

- 03** Het tuinbedrijf Groen rekent €45,- per werkuur voor het onderhoud van de tuin.
- Hoeveel euro moet je betalen voor 7 werkuren?
 - En hoeveel euro moet je betalen voor 14 werkuren?
 - Waarom is het verband tussen het te betalen bedrag en het aantal uren recht evenredig?
 - Het tuinbedrijf werkt 5 uur in de tuin van Mevrouw Klinker. Ze koopt bovendien voor €250,- plantgoed. Hoeveel euro moet ze totaal betalen?
 - En hoeveel moet ze totaal betalen voor het plantgoed en 8 werkuren?
 - Vul de tabel in.

<i>tijd</i> in uren	1	5	8	10
<i>totaal bedrag</i> in euro's	...	...	...	...

- g** Waarom is het verband bij deze tabel niet recht evenredig?

<i>p</i>	3	4	5	6	...
<i>q</i>	20	15	...	...	2,5

A

<i>k</i>	3	...	6	30	80
<i>n</i>	4,5	60	...	45	...

B

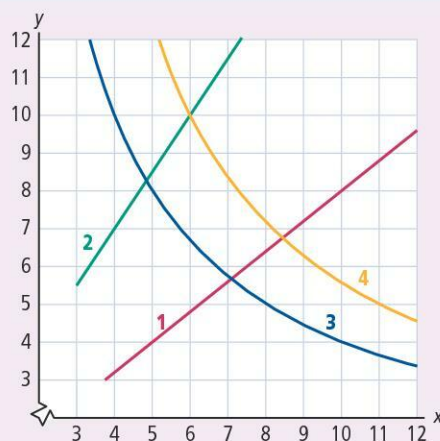
<i>r</i>	2	8	...	10	40
<i>d</i>	10	2,5	4	...	...

C

- 06** Bij de tabellen hoort een recht evenredig of omgekeerd evenredig verband.
- Welke waarde heeft $p \cdot q$ in tabel A?
 - Vul tabel A verder in.
 - Schrijf de formule bij tabel A in de vorm $q = \frac{c}{p}$
 - Vul tabel B en C verder in en stel een formule op bij de tabellen.

Uitdagende opdrachten

- U1**
- Geef bij de grafieken aan of er een recht evenredig verband, een omgekeerd evenredig verband of geen van beide bij kan horen.
 - Stel een formule op bij het recht evenredige verband en bij het omgekeerd evenredige verband.
 - Welke grafiek hoort bij een lineair verband maar is niet recht evenredig? Stel bij deze grafiek een formule op.



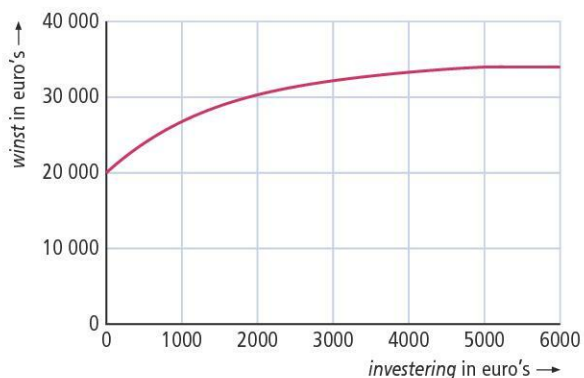
11.2 Grenswaarden

Je leert • hoe je bij een formule de grenswaarde vindt

Leerroutes • ondersteunend: 9—010—10—11—12—13
• doorlopend: 9—10—11—12—13—14
• uitdagend: 9—10—11—13—14—U2

Een bedrijf wil graag meer winst maken en heeft een econoom laten uitzoeken wat het effect is van een reclamecampagne op de winst. In een onderzoeksrapport staat onder andere deze grafiek. Je leest daar bijvoorbeeld in af dat bij een maandelijkse investering van 2000 euro in de reclamecampagne de te verwachten winst gelijk zal zijn aan 30000 euro die maand.

• Welk advies zou jij het bedrijf geven?



- 9 Een schoonmaakbedrijf berekent voor het reinigen van vloeren eerst de prijs per m^2 . Deze prijs is lager naarmate er een grotere oppervlakte moet worden schoongemaakt. Voor het berekenen van de prijs P gebruikt men de formule

$$P = 0,17 + \frac{150}{V}$$

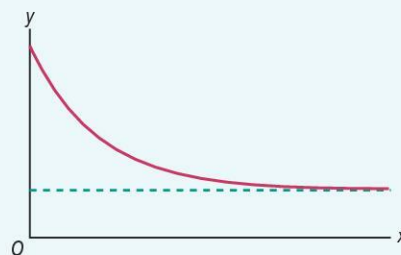
Hierin is V de vloeroppervlakte in m^2 en P de prijs in euro's per m^2 .

- Bereken P bij een vloeroppervlak van 200 m^2 .
- Hoe hoog zijn de totale kosten voor een vloeroppervlak van 200 m^2 ?
- Bereken P bij een vloeroppervlak van 3000 m^2 .
- Plot de grafiek bij de formule. Op welke manier daalt de grafiek?
- Vul de tabel in. Wat valt je op aan de waarde van P als V steeds groter wordt?
- Leg uit wat de waarde van P van opdracht e in de praktijk betekent.

V	P
10	...
100	...
1000	...
10 000	...

Theorie

Bij een verband tussen de variabelen x en y kan voor grote waarden van x , de waarden van y steeds dichterbij naderen naar een **grenswaarde**.



Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $y = \frac{3}{x} - 1,25$.
Onderzoek naar welke grenswaarde y zal naderen als x steeds groter wordt.

Oplossing

x	1	10	100	1000	10 000
y	1,75	-0,95	-1,22	-1,247	-1,2497

In de tabel zie je dat y naar de grenswaarde $-1,25$ zal naderen.

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $P = 6 + 4 \cdot 0,95^t$.
Onderzoek of de formule een grenswaarde heeft. Zo ja, schrijf deze grenswaarde op.

Oplossing

t	0	5	10	100	200
P	10	9,095	8,395	6,024	6,0001

In de tabel zie je dat de formule een grenswaarde heeft. De grenswaarde is 6.

Ondersteunende route → maak opdracht 010

- 10** Onderzoek of de formules een grenswaarde hebben. Zo ja, schrijf deze grenswaarde op.

a $A = \frac{10b}{2b+3}$

c $Q = 7 - 3 \cdot 0,92^t$

b $K = \frac{3p^2}{p+10}$

d $W = \frac{40}{4 + 1,2^n}$

- 11** Voor het aantal diersoorten dat voorkomt in een gebied geldt bij benadering de formule $N = 60 \cdot (1 - 0,64^a)$. Hierin is N het aantal diersoorten en a de grootte van het gebied in km^2 .

- a** Hoe groot is N voor $a = 0$? Wat is de betekenis daarvan?
b Onderzoek welke grenswaarde de formule heeft.
c Wat betekent deze grenswaarde voor het aantal diersoorten in een gebied?



- 12** Een tuinder heeft een waterreservoir om bij gebrek aan regenwater de planten water te kunnen geven. Voor een bepaalde periode kun je de hoeveelheid water in het reservoir berekenen met de formule $I = \frac{120}{(0,05t + 1)^2}$

Hierin is I de hoeveelheid water in m^3 en t de tijd in dagen.

- Plot de grafiek bij de formule, neem voor t de waarden van 0 tot 100. Is de grafiek afnemend dalend of toenemend dalend?
- Na hoeveel dagen is de inhoud van het waterreservoir voor het eerst minder dan 50 m^3 ?
- Onderzoek naar welke grenswaarde de inhoud van het waterreservoir zal naderen voor heel grote waarden van t .



- 13** De firma Wortel produceert onder andere hardhouten tuinbankjes. De gemiddelde kosten per bankje worden

berekend met de formule $GK = 15 + \frac{12000}{B}$

Hierin is GK de gemiddelde kosten in euro's en B het aantal geproduceerde bankjes.

- Neemt GK toe of af als B steeds groter wordt?
- Naar welke grenswaarde zal GK naderen?
- Het bedrijf wil dat de gemiddelde kosten niet hoger zijn dan €17,50. Hoeveel bankjes moeten er dan minstens worden geproduceerd?
- Bij welk aantal tuinbankjes is de verandering in de gemiddelde kosten minder dan €0,50 als de productie met één toeneemt?

- 14** Bij Internetbank kun je alleen maar sparen via een internetrekening. In het begin van het jaar 2000 waren er bij Internetbank 1200 rekeningen. Aanvankelijk ging men ervan uit dat het aantal rekeningen elke maand met 9% zou toenemen.
- Stel de formule op waarbij het aantal rekeningen N in honderdtallen is uitgedrukt in de tijd t in maanden. Neem $t = 0$ op 1 januari 2000.
 - Na verloop van tijd bleek de formule $N = \frac{1080}{3 + 62 \cdot 0,73^t}$ een betere benadering van het aantal rekeningen te geven. Onderzoek naar welke grenswaarde N zal naderen als t heel groot wordt.

Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

010 Gegeven is de formule $y = \frac{6}{x}$

a Vul de tabel in.

x	1	10	100	500	1000	2000
y	...	...	...	...	...	...

b Neemt de waarde van y toe of af als x steeds groter wordt?

c Naar welke grenswaarde nadert y als x steeds groter wordt?

d Vul de tabel in bij de formule $y = \frac{x^2 + 5}{x}$

x	1	10	100	500	1000	2000
y	...	...	...	...	...	...

e Neemt de waarde van y toe of af als x steeds groter wordt?

f Nadert y naar een grenswaarde als x steeds groter wordt?

Uitdagende opdrachten

U2 Robert en Niels varen met hun kano een tocht van 10 km heen en 10 km terug over een rivier. De stroomsnelheid van de rivier is v km per uur en ze varen met een gemiddelde snelheid van 4 km per uur ten opzichte van het water. De totale tijd T in uren kun je berekenen met

$$\text{de formule } T = \frac{10}{4 - v} + \frac{10}{4 + v}$$

a Bereken T als $v = 1$, $v = 2$ en $v = 3$.

b Waarom kunnen ze beter niet gaan varen als de stroomsnelheid 4 km per uur of meer is?

c Ga na wat er met de uitkomst voor T gebeurt als de waarden van v heel dicht bij 4 liggen.



11.3 Redeneren met formules

Je leert • hoe je met formules redeneert

Leerroutes • ondersteunend: 15—16—017—18—19—20
• doorlopend: 15—16—17—18—19—20
• uitdagend: 15—16—17—19—20—U3

Voor een stadsuitbreiding is $40\,000\text{ m}^2$ grond beschikbaar. De kavels voor de woningen krijgen allemaal dezelfde oppervlakte. Voor de groenvoorziening en de wegen is per woning steeds 100 m^2 nodig. Het aantal kavels A met een oppervlakte per kavel k in m^2 , kun je berekenen met de formule $A = \frac{40\,000}{100 + k}$

- Kun je twee keer zoveel kavels maken als de oppervlakte van de kavels gehalveerd wordt?



- 15** Een pak melk wordt uit de koelkast gehaald. Daardoor stijgt de temperatuur van de melk. Met de formule $T = 20 - 16 \cdot 0,75^t$ kun je de temperatuur T in graden Celsius van de melk berekenen. Hierin is t de tijd in uren vanaf het moment dat de melk uit de koelkast is gehaald.

- a** Welke temperatuur heeft de melk op het moment dat zij uit de koelkast wordt gehaald?
- b** Vul de tabel in.
- c** Leg uit dat $16 \cdot 0,75^t$ op den duur nadert naar nul.
- d** Naar welke waarde nadert de temperatuur van de melk op den duur?

t	$0,75^t$	$16 \cdot 0,75^t$	$20 - 16 \cdot 0,75^t$
0	...	...	...
5	...	...	...
10	...	...	...

- 16** Bij een telecombedrijf wordt de gemiddelde prijs per belminuut lager naarmate het aantal gebelde minuten groter is. Dit wordt beschreven door de formule $G = 0,015 + \frac{5}{a}$

Hierin is G de gemiddelde prijs in euro's per belminuut en a het aantal belminuten per maand.

- a** Bereken de gemiddelde prijs per belminuut als er in een maand 3 uur en 20 minuten is gebeld.
- b** Leg uit dat $\frac{5}{a}$ bij grote waarden van a naar nul nadert.
- c** Leg uit dat de formule een grenswaarde heeft en geef deze grenswaarde.
- d** Welke praktische betekenis heeft deze grenswaarde?

Theorie

Door na te gaan hoe een formule is opgebouwd, kun je beredeneren hoe de uitkomst van een formule verandert. Je gebruikt bijvoorbeeld de volgende eigenschappen.

- g' neemt toe als $g > 1$ en t groter wordt.
- g' neemt af als $g < 1$ en t groter wordt.
- Bij een vaste positieve waarde van c en positieve waarde van n neemt $\frac{c}{n}$ af als n groter wordt.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $K = 35 + \frac{100}{t^2 + 1}$.
Beredeneer of de waarde van K toeneemt of afneemt als t steeds groter wordt en naar welke grenswaarde K nadert.

Oplossing

Bij $t = 0$ is $K = 35 + \frac{100}{0^2 + 1} = 135$.

Als t steeds groter wordt, dan neemt t^2 toe.

Daardoor neemt $t^2 + 1$ ook toe.

100 wordt gedeeld door een steeds groter getal en daardoor nadert $\frac{100}{t^2 + 1}$ naar 0.

De waarde van K zal dan naderen naar $35 + 0 = 35$.

De waarde van K neemt af en de grenswaarde is 35.

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $P = \frac{2}{4 + 6 \cdot 0,7^t}$.
Beredeneer of de formule een grenswaarde heeft.

Oplossing

Als t steeds groter wordt, dan nadert $0,7^t$ naar 0, want $0,7 < 1$.

$6 \cdot 0,7^t$ nadert dan ook naar 0.

Daardoor nadert $4 + 6 \cdot 0,7^t$ naar 4.

De waarde van P nadert dan naar $\frac{2}{4} = 0,5$.

De formule heeft dan 0,5 als grenswaarde.

Ondersteunende route → maak opdracht 017

- 17** Beredeneer of de waarde van P toeneemt of afneemt als t steeds groter wordt en naar welke eventuele grenswaarde P nadert.

H

a $P = \frac{2}{7 + 2t} - 11$

c $P = 3 + \frac{2}{1,2^t}$

b $P = 4 - 0,85^t$

d $P = 7 + 1,45^t$

- 18** Gegeven is de formule $K = 3 + \frac{5}{1 + 0,7^t}$.
- a** Volgens Bart nadert de waarde van K bij grote waarden van t naar 3.
Laat met een tabel zien dat Bart geen gelijk heeft.
- b** Beredeneer dat de waarde van K bij grote waarden van t nadert naar 8.

- 19** Bij een gemeente komen elk weekend tientallen telefoontjes binnen van mensen die geluidsoverlast ervaren van bezoekers van een uitgaansgelegenheid. Samen met de eigenaar van deze gelegenheid en de politie wordt een project gestart om door middel van een voorlichtingscampagne en het uitdelen van boetes de bezoekers te bewegen buiten het gebouw minder lawaai te maken. Op grond van de resultaten van de eerste weken na de start van het project stelt een onderzoeker de formule $A = 5 \cdot (2,2 + 5,8 \cdot 0,72^t)$ op.

Hierin is A het aantal telefonische klachten in het weekend en t de tijd in weken na de start van het project.

- Bereken de waarde van A bij de start van het project.
- Beredeneer aan de hand van de formule of de waarde van A toeneemt of afneemt als t steeds groter wordt.
- Bij de start van het project is de doelstelling geformuleerd dat er op den duur hoogstens tien telefonische klachten per weekend binnen komen. Wordt deze doelstelling gehaald?

- 20** Het aantal actieve gebruikers van Facebook steeg de eerste jaren van zijn bestaan spectaculair. Op 1 december 2005 waren er 5,5 miljoen actieve gebruikers. 43 maanden later waren dat er al 244 miljoen. Neem aan dat er in deze periode bij benadering sprake was van exponentiële groei.

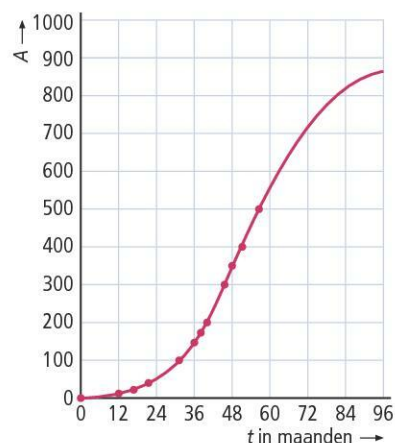
- Ga na dat het aantal actieve gebruikers in de eerste 43 maanden met ongeveer 9,2% per maand is gestegen.
- Stel een formule op voor het aantal actieve gebruikers A in miljoenen en de tijd t in maanden met $t = 0$ op 1 december 2005 voor deze periode.
- Al in 2011 werd er voorspeld dat de groei zo niet door zou gaan. In de figuur zie je een grafiek die bij de voorspelling past. Bij de grafiek hoort de formule

$$A = \frac{4500}{5 + 310 \cdot 0,926^t}$$

Hierin is A het aantal actieve gebruikers in miljoenen en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 december 2005.

Beredeneer aan de hand van de formule dat het aantal actieve gebruikers toeneemt en naar welke grenswaarde dit aantal nadert.

(Ontleend aan CE havo wiskunde A pilot 2015, tijdvak 1)



Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

017 Gegeven is de formule $A = 12 + \frac{1}{p^2 + 1}$

- Vul de tabel in.
- Wat gebeurt er met de waarde van p^2 als p steeds groter wordt?
- En wat gebeurt er dan met de waarde van $p^2 + 1$?
- Naar welke waarde nadert $\frac{1}{p^2 + 1}$ als p steeds groter wordt?
- Neemt de waarde van A toe of af als p steeds groter wordt?
- Welke grenswaarde heeft de formule $A = 12 + \frac{1}{p^2 + 1}$?
- Gegeven is de formule $y = 15 - 6 \cdot 0,8^x$.
Vul het blaadje in.

p	p^2	$p^2 + 1$	$\frac{1}{p^2 + 1}$
0	...	...	...
10	...	...	...
100	...	...	...
1000	...	...	...

☐	Bij $x=0$ is $y = 15 - 6 \cdot 0,8^0 = \dots$								
☐	Als x steeds groter wordt, nadert $0,8^x$ naar ... want $0,8 < 1$.								
☐	$6 \cdot 0,8^x$ nadert dan ook naar ...								
☐	De waarde van y zal dan naderen naar $y = 15 - \dots = \dots$								

- Neemt de waarde van y toe of af als x steeds groter wordt?
- Welke grenswaarde heeft de formule $y = 15 - 6 \cdot 0,8^x$?

Bereken of de waarde van N toeneemt of afneemt als t steeds groter wordt en naar welke eventuele grenswaarde N nadert.

- $N = \frac{24}{3 + 0,85^t}$
- $N = 38 - \frac{80}{4 + 6 \cdot 0,5^t}$
- $N = 14 + 2 \cdot 1,85^t$
- $N = 17 + 7 \cdot 0,45^t$

Uitdagende opdrachten

U3 Je kunt de temperatuur T in een oven in graden Celsius berekenen met de formule $T = \frac{200t}{t + 1} + 20$.

Hierin is t de tijd in minuten na het aanzetten van de oven.

- Welke temperatuur heeft de oven bij het aanzetten?
- Na hoeveel minuten is de temperatuur in de oven 180°C ?
- Bereken aan de hand van de formule naar welke grenswaarde de temperatuur van de oven nadert.



11.4 Machtsformules

Je leert • hoe je met een machtsformule werkt

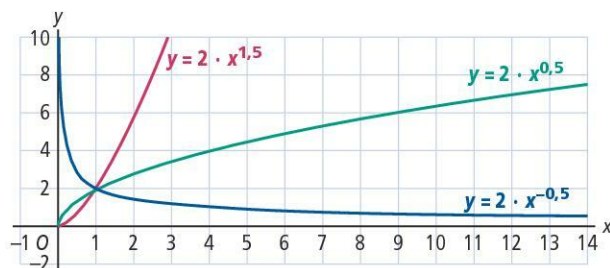
Leerroutes • ondersteunend: 21—22—023—24—25—26
• doorlopend: 21—22—23—24—25—26
• uitdagend: 21—23—24—25—26—U4

De inhoud van een bol met straal r kun je berekenen met de formule $I = 4,19 \cdot r^3$.

De formule voor de oppervlakte van een bol is $A = 12,56 \cdot r^2$.

De straal van de planeet Uranus is ongeveer vier keer zo groot als die van de aarde.

- Is de inhoud van Uranus ook vier keer zo groot als die van de aarde?
- En hoeveel keer zo groot is de oppervlakte van Uranus als die van de aarde?



21 Je ziet de grafieken bij $y = 2 \cdot x^{1,5}$, $y = 2 \cdot x^{0,5}$ en $y = 2 \cdot x^{-0,5}$.

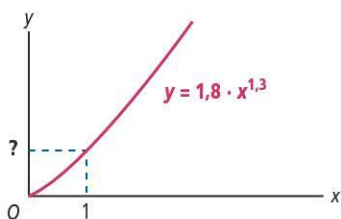
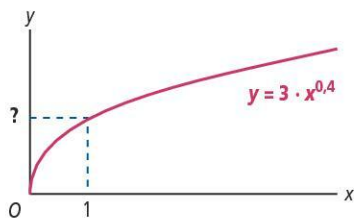
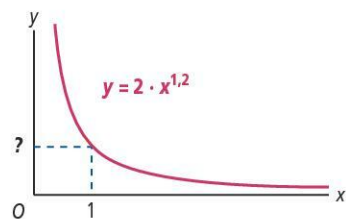
- Geef van elke grafiek aan of deze toenemend of afnemend stijgend, toenemend of afnemend dalend, of constant stijgend of dalend is.
- Er is een punt waar alle drie grafieken doorheen gaan. Wat zijn de coördinaten van dat punt?
- Welke van de grafieken bij de formules $y = 2 \cdot x^{2,3}$, $y = 3 \cdot x^2$ $y = 4 \cdot x^{-4,1}$ gaat ook door dit punt?
- Leg uit waarom deze grafieken door dit punt gaan.

Theorie

Een **machtsformule** heeft de vorm $y = c \cdot x^n$.

Machtsformules zijn bijvoorbeeld $y = 6,1 \cdot x^7$, $w = 4 \cdot t^{2,5}$ en $h = 6,5 \cdot q^{2,1}$.

Bij de formules van de vorm $y = c \cdot x^n$ is y bij $x = 1$ gelijk aan c . Alle grafieken bij de formules $y = c \cdot x^n$ gaan door het punt $(1, c)$.



- 22** Je ziet schetsen van de grafieken bij de formules $y = 1,8 \cdot x^{1,3}$, $y = 3 \cdot x^{0,4}$ en $y = 2 \cdot x^{-1,2}$.
Welke waarde hoort bij de vraagtekens op de verticale as?

Ondersteunende route → maak opdracht 023

- 23** Biologen hebben gemeten hoeveel zuurstof een zoogdier nodig heeft om één kilometer af te leggen. Voor het verband tussen het lichaamsgewicht L in kilogrammen en het aantal liter zuurstof Z per kilogram lichaamsgewicht dat verbruikt wordt, vonden ze de formule $Z = 0,4 \cdot L^{-\frac{1}{3}}$.

- Bereken Z voor een neushoorn van 2400 kg.
- Hoeveel liter zuurstof verbruikt de neushoorn van 2400 kg als hij een afstand van vijf kilometer aflegt?
- Bereken Z voor een geit van 100 kg, een varken van 350 kg en een koe van 600 kg.
- Het verschil in gewicht tussen de geit, het varken en de koe is hetzelfde.
Tussen welke twee dieren is het verschil tussen de waarden van Z het grootst?
- Teken de grafiek bij de formule $Z = 0,4 \cdot L^{-\frac{1}{3}}$.
- Verklaar je antwoord van opdracht d met behulp van de grafiek.

- 24** Er bestaat een verband tussen de diameter van de stam van een boom en zijn hoogte. Bij benadering geldt de formule $h = c \cdot d^{0,65}$. Hierin zijn zowel de hoogte h als de diameter d in meters. De waarde van de constante c hangt af van de boomsoort. Voor een grove den is $c = 44$.

- Bereken de hoogte van een grove den in meters als de diameter 36 cm is. Rond je antwoord af op één decimaal.
- Bereken de diameter van een grove den die een hoogte heeft van 15 meter. Rond je antwoord af op een geheel aantal cm.
- Voor een andere boomsoort geldt dat bij een hoogte van 18 meter de diameter gelijk is aan 20 cm.
Leg uit dat voor deze boom moet gelden $18 = c \cdot 0,2^{0,65}$.
- Bereken voor deze boomsoort de waarde van c .





- 25** Op een boerderij wordt per dag maximaal 1000 liter melk geproduceerd. Er is bijgehouden hoe groot de totale kosten TK in euro's zijn voor verschillende hoeveelheden Q in liters.

H

- a** Stel dat de waarde van Q wordt verdubbeld.
Leg met behulp van de tabel uit dat de waarde van TK minder dan twee keer zo groot wordt.
- b** De economisch adviseur vermoedt dat hier sprake is van een machtsformule van de vorm $TK = 25 \cdot Q^n$.
In de tabel zie je dat de totale kosten bij 200 liter melk gelijk zijn aan 600 euro.
Leg uit dat dan moet gelden $600 = 25 \cdot 200^n$
- c** Bereken de waarde van n en geef de formule bij de tabel.

Q	TK
200	600
350	840
500	1040
650	1220
1000	1580

- 26** Er bestaat een verband tussen het gewicht van een zoogdier en de tijd waarin het bloed één keer wordt rondgepompt. Bij benadering geldt de formule $T = 3,08 \cdot G^{0,25}$. Hierin is T de circulatietijd in seconden en G het gewicht in grammen.

- a** Controleer de uitspraak 'Hoe groter het lichaamsgewicht, hoe groter de circulatietijd'.
- b** Is het verband recht evenredig? Verklaar je antwoord.
- c** Bereken T voor een muis van 30 gram, een konijn van 3 kg, een hond van 30 kg en een eland van 300 kg.
- d** Wordt de circulatietijd meer dan of minder dan tien keer zo groot, als het gewicht tien keer zo groot wordt?
- e** Gegeven zijn de volgende tweetallen dieren:
- een rat van 1 kg en een geit van 21 kg
 - een koe van 320 kg en een paard van 340 kg
- Bij elk tweetal dieren is het verschil in gewicht 20 kg.
Leg met de behulp van de grafiek bij de formule $T = 3,08 \cdot G^{0,25}$ uit bij welk tweetal dieren het verschil tussen de circulatietijden het grootst is.

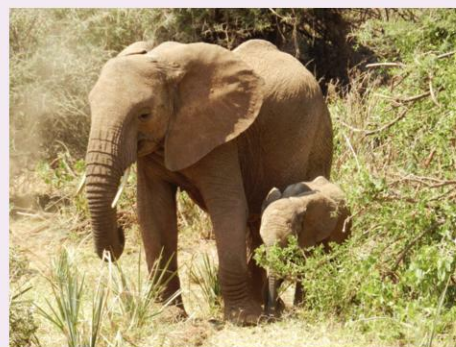
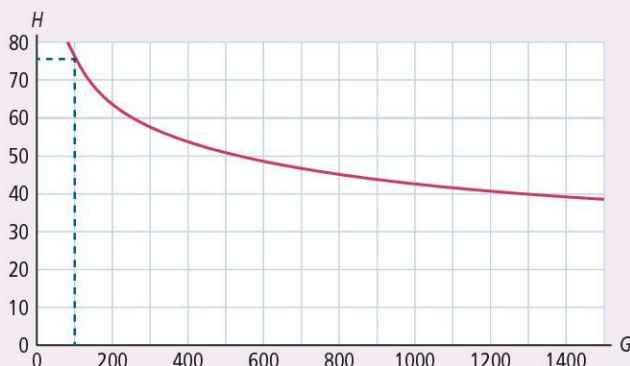
Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten

023

De normale hartslag H van een rustend zoogdier hangt af van het gewicht G in kg van het dier volgens de formule $H = 241 \cdot G^{-0,25}$. Hierin is H het aantal slagen per minuut.

- Hoeveel slagen per minuut maakt het hart van een rustende volwassen olifant die 4000 kg weegt?
- In de grafiek bij de formule $H = 241 \cdot G^{-0,25}$ zie je dat een schaap van 100 kg een hartslag heeft van ongeveer 76 slagen per minuut. Geef in de grafiek op dezelfde manier de waarde van H aan voor een pony van 500 kg en voor een paard van 900 kg.



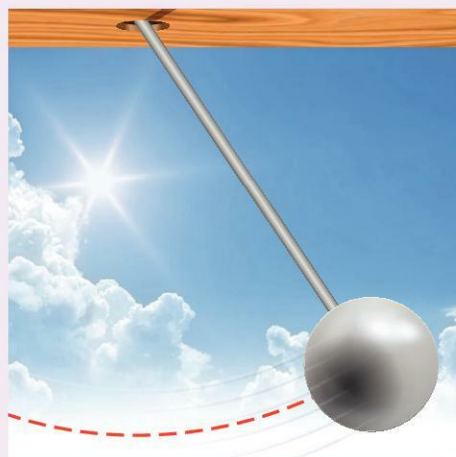
- Op welke manier daalt de grafiek?
- Leg uit hoe je aan de grafiek kunt zien dat het verschil in het aantal hartslagen per minuut tussen de pony en het schaap groter is dan tussen het paard en de pony.

Uitdagende opdrachten

U4

Een voorwerp wordt opgehangen aan een slinger. Met de formule $T = 2 \cdot l^{0,5}$ wordt de tijd T die één slingerbeweging duurt in seconden uitgedrukt in de lengte l van de slinger in meters.

- Hoe kun je aan de formule zien dat een slingerbeweging van een slinger van één meter lang, twee seconden duurt?
- Hoeveel cm moet je de slinger inkorten om een slingerbeweging 1,9 seconden te laten duren?
- De slingertijd van een slinger duurt t seconden. Als je de slingertijd van deze slinger wilt verdubbelen, wat moet er dan met de lengte van de slinger gebeuren?



11.5 Formules met meer variabelen

Je leert

- hoe je met een formule met meerdere variabelen werkt
- hoe je een formule na substitutie van variabelen herleidt

Leerroutes

- ondersteunend: 27—28—29—030—31—32
- doorlopend: 27—28—29—30—31—32
- uitdagend: 27—29—30—31—32—U5

De formule voor de BMI (Body Mass Index)

voor een persoon is $BMI = \frac{G}{L^2}$

Hierin is G het

gewicht in kg en L de lengte in meter.

- Voor welke variabele moet je een vaste waarde invullen om een recht evenredig verband te krijgen?



27 Bij het berekenen van de totale kosten per maand TK in euro's voor het bezit en gebruik van een auto spelen de volgende factoren een rol:

- de maandelijkse afschrijving A
- de halfjaarlijkse grote beurt en reparaties G
- de kosten van de verzekering per maand V
- de motorrijtuigbelasting per jaar M
- het aantal gereden kilometers per jaar k

Hierbij zijn A , G , V en M in euro's.

De formule hierbij is $TK = \frac{12A + 2G + 12V + M + 0,12k}{12}$

- a** Op het blaadje zie je de gegevens van de auto van Albert.
Vul de gegevens in de formule in en laat zien dat je het resultaat kunt vereenvoudigen tot $TK = 251 + 0,01k$.
- b** Bereken de totale kosten per maand als Albert 18000 km per jaar rijdt.
- c** Albert wil gemiddeld per maand niet meer dan €375,- uitgeven aan zijn auto.
Hoeveel km kan hij per jaar rijden?

- De maandelijkse afschrijving is € 120,-.
- De halfjaarlijkse grote beurt en reparaties kosten € 280,-.
- De kosten voor de verzekering per maand zijn € 42,-.
- De motorrijtuigenbelasting per jaar is € 508,-.

Theorie

Allerlei situaties in het dagelijks leven hangen af van meer dan twee factoren. Bij zulke situaties horen **formules met meer dan twee variabelen**. Bij een formule met meer dan twee variabelen kun je de waarde van één variabele pas uitrekenen als je de waarde van alle andere variabelen kent.

Voorbeeld

De contributie die een sportvereniging ontvangt, is te berekenen met de formule $C = 170S + 140J$. Hierin is C het ontvangen bedrag aan contributies in euro's, S het aantal seniorleden en J is het aantal juniorleden. De vereniging wil minstens € 22.000,- aan contributies ontvangen. Er zijn 45 juniorleden.

Hoeveel seniorleden moet de vereniging minstens hebben om dit bedrag te kunnen halen?

Oplossing

De gegevens invullen geeft:

$$22\,000 = 170 \times S + 140 \times 45$$

$$22\,000 = 170S + 6300$$

$$170S = 15\,700$$

$$S \approx 92,35$$

De vereniging moet minstens 93 seniorleden hebben.

- 28** **H**
- a** De sportvereniging uit het voorbeeld heeft 95 seniorleden en wil minstens € 24.500,- aan contributies ontvangen. Hoeveel juniorleden moet de vereniging minstens hebben om bij dezelfde contributie dit bedrag te kunnen halen?
- b** De vereniging heeft 95 seniorleden en 45 juniorleden en besluit om het bedrag van € 24.500,- te kunnen halen door beide contributiebedragen aan te passen. De contributie voor de juniorleden wordt € 150,-. Hoe hoog met de contributie voor de seniorleden minstens worden? Geef je antwoord in hele euro's.

- 29** De penningmeester van een klein koor heeft de begroting voor een nieuw kalenderjaar gemaakt. Het koor ontvangt per jaar € 520,- subsidie van de gemeente en de overige inkomsten zijn de contributies. Het aantal leden is L en de contributie per maand is C .

- a** Geef een formule voor het bedrag aan inkomsten B per jaar uitgedrukt in C en L .
- b** Er zijn 14 leden die ieder € 30,- per maand aan contributie betalen. Voor het betalen van de dirigent, de zaalhuur en andere vaste lasten is € 7.000,- per jaar nodig.

Bereken of de penningmeester genoeg inkomsten heeft om alle kosten te betalen.

- c** Bij een sluitende begroting hoort de vergelijking $7000 = 520 + 12C \cdot L$. Vul de tabel verder in.

- d** Welk soort verband bestaat er tussen C en L ?
- e** Saar gaat de formule $7000 = 520 + 12C \cdot L$ herleiden waarbij de contributie C uitgedrukt is in het aantal leden L .

Maak de herleiding van Saar af.

- f** De zaalhuur gaat omhoog. De vaste lasten worden daardoor € 7.792,-. De subsidie verandert niet. Stel een nieuwe formule op waarbij C uitgedrukt is in L .
- g** Hoeveel euro moet de contributie per maand worden als er 14 leden zijn?

L	10	12	15	18	20
C	...	...	...	...	...

					Saar
●	$7000 = 520 + 12C \cdot L$				
●	$12C \cdot L = 6480$				
●	$C \cdot L = 540$				
●	$C = \dots$				

Theorie

In een formule kun je voor een variabele een waarde invullen. Vaak kun je na het **substitueren** de ontstane formule vereenvoudigen.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $B = \frac{4g + 6}{5p}$

Druk B uit in g als $p = 4$.

Oplossing

$$B = \frac{4g + 6}{5 \times 4}$$

$$B = \frac{4g + 6}{20}$$

$$B = \frac{4g}{20} + \frac{6}{20} \text{ of } B = 0,2g + 0,3$$

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $K = 2,3S + 4T - 1,83$.

Druk T uit in K als $S = 6,5$.

Oplossing

$$K = 2,3 \times 6,5 + 4T - 1,83$$

$$K = 14,95 + 4T - 1,83$$

$$K = 13,12 + 4T$$

$$4T = K - 13,12$$

$$T = 0,25K - 3,28$$

Ondersteunende route → maak opdracht 030

30 Gegeven is de formule $Q = \frac{2p + 9}{t + 1}$

a Druk Q uit in p als $t = 1$.

b Druk p uit in Q als $t = 3$.

31 Gegeven is de formule $R = \frac{25t + 15}{A}$

a Vul in $t = 5$ en druk R uit in A .

b Wat voor soort verband is er tussen R en A ?

c Bij $A = 10$ is de formule te schrijven als $R = p \cdot t + q$.
Bereken de waarde van p en van q .

d Stel bij $A = 10$ ook een formule op waarbij je t uitdrukt in R .

32 Het volume V van een bepaald model glas kun je berekenen met de formule $V = 0,26 \cdot D^2 \cdot h$. Hierin is V het volume in cm^3 , h de hoogte in cm en D de diameter in cm.

a Stel een formule op voor het verband tussen het volume en de hoogte bij een diameter van 1,2 dm.

b Stel de formule op waarbij je h uitdrukt in V bij $D = 8$.

c Hoeveel keer zo groot wordt het volume V als de diameter van het glas twee keer zo groot wordt?

Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

030 Gegeven is de formule $K = \frac{2q - 7}{4t + 2}$

Op het blaadje zie je hoe Remco $t = 2$ in de formule invult en hoe hij vervolgens de formule herleidt.

- Welke bewerking heeft hij in stap 1 gedaan?
- En welke bewerking in stap 2, stap 3 en stap 4?
- Wordt bij stap 4 K uitgedrukt in q of q uitgedrukt in K ?
- Welke bewerkingen heeft hij in stap 5, stap 6 en stap 7 gedaan?
- Druk K uit in q als $t = 0,5$.
- Druk q uit in K als $t = 0,5$.

	Remco
$K = \frac{2q - 7}{4t + 2}$	
$K = \frac{2q - 7}{4 \times 2 + 2}$	1
$K = \frac{2q - 7}{10}$	2
$K = \frac{2q}{10} - \frac{7}{10}$	3
$K = 0,2q - 0,7$	4
$0,2q - 0,7 = K$	5
$0,2q = K + 0,7$	6
$q = 5K + 3,5$	7

Uitdagende opdrachten

U5 Aisha heeft een fles frisdrank gekocht en zet deze in de koelkast. Op dat moment is de temperatuur van de frisdrank 18°C , terwijl de temperatuur in de koelkast op 6°C is ingesteld. In de tabel staat de temperatuur T in $^\circ\text{C}$ op verschillende tijdstippen t in minuten.

tijd t in minuten	0	5	10	15	20
temperatuur T in $^\circ\text{C}$	18	12	10	9	8,4

Aisha denkt dat ze met een formule van de vorm

$T = \frac{a}{t} + B$ het verband tussen T en t kan beschrijven.

- Waarom kan deze formule niet bij de tabel passen?
- Aisha verandert de formule in de vorm $T = \frac{a}{t + 5} + B$.
Waarom is dit beter?
- Beredeneer dat uit de tekst blijkt dat de grenswaarde 6 is en leg uit dat hieruit volgt dat $B = 6$.
- Bereken de waarde van a .



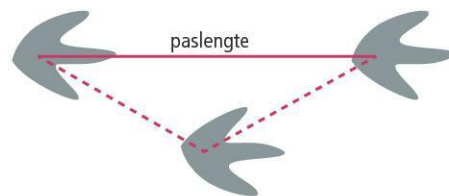
11.6 Gemengde opdrachten

- 33** Gegeven is de formule $y = \frac{24}{4 + 2 \cdot 0,45^x}$
Bereken of de waarde van y toeneemt of afneemt als x steeds groter wordt en naar welke grenswaarde y zal naderen.

- 34** Een automobieleclub organiseert voor zijn leden een rally over 500 km. Van elke deelnemer wordt de tijd genoteerd die nodig was voor de tocht. Vervolgens wordt van elke deelnemer de gemiddelde snelheid in km per uur berekend.
- Een deelnemer doet 8 uur over de rally.
Bereken zijn gemiddelde snelheid in km per uur.
 - Voor het verband tussen de gemiddelde snelheid v in km per uur en de tijd t in uren geldt de formule $v = \frac{500}{t}$
Wat voor soort verband is er tussen de snelheid v en de tijd t ?
 - Plot de grafiek van de formule voor v en leg uit dat je aan de grafiek kunt zien dat deelnemers die als eerste binnenkomen een hoge gemiddelde snelheid hebben.
 - Eén deelnemer had onderweg met erg veel pech te kampen. Hij kwam pas na enkele dagen binnen.
Wat kun je zeggen over zijn gemiddelde snelheid? Hoe zie je dat in de grafiek van v ?

- 35** De biomechanicus R. McNeill Alexander heeft van een groot aantal diersoorten de relatie tussen paslengte, snelheid en grootte bepaald. De paslengte is de afstand tussen twee opeenvolgende voetafdrukken van dezelfde voet. Met de formule $v = 2,81 \cdot s^{1,67} \cdot h^{-1,17}$ kun je een goede schatting geven voor de snelheid van dieren.
Hierin is v de snelheid in kilometer per uur, s de paslengte in meter en h de heuphoogte in meter.
De formule geldt voor zowel twee- als viervoeters, zowel groot als klein, dus ook voor katten en honden.

- Op een mooie winterdag staan er voetsporen in de sneeuw in de tuin. Deze zijn afkomstig van de kat van de burens, die een heuphoogte heeft van 21 cm. Uit de voetsporen blijkt dat de paslengte 35 cm is.
Bereken de snelheid van de kat.
- Michiel heeft gefietst met zijn hond. Volgens Michiel had zijn hond een paslengte van ongeveer anderhalve meter, toen de snelheidsmeter 15 km per uur aangaf. De heuphoogte van zijn hond is 40 cm.
Bereken de paslengte van de hond in cm nauwkeurig.
(Ontleend aan CE havo wiskunde A12 2005, tijdvak 2)





- 36** In Noord-Amerika is een verband geconstateerd tussen de oppervlakte van een gebied en het aantal verschillende vogelsoorten dat voorkomt. De formule bij dit verband is $S = 40 \cdot A^{\frac{1}{6}}$.

Hierin is S het aantal vogelsoorten en A de oppervlakte van het gebied in vierkante mijl.

In een gebied komen 50 verschillende vogelsoorten voor. Onderzoek hoeveel keer zo groot het gebied moet worden zodat er 100 verschillende vogelsoorten voorkomen.

- 37** Bij grote bedrijven wordt er regelmatig gereorganiseerd. Hierbij vallen soms gedwongen ontslagen. Een ontslagen werknemer krijgt dan vaak eenmalig een ontslagvergoeding. Er zijn verschillende rekenmethodes om deze vergoeding te bepalen. Een rekenmethode die gebruikt wordt, is $V = 6 \cdot m + 2,4 \cdot m \cdot d$.

Hierin is V de ontslagvergoeding in euro's, m het bruto maandsalaris in euro's en d het aantal dienstjaren, geteld vanaf de 36e verjaardag.

Er geldt dat $d = 0$ totdat de werknemer 37 jaar wordt. Op de dag dat de werknemer 37 jaar wordt, wordt $d = 1$. Op de 38e verjaardag wordt $d = 2$, enzovoort. Het aantal dienstjaren wordt altijd in gehele jaren berekend.

De maximale ontslagvergoeding is 54 keer het bruto maandsalaris.

Henk werkt vanaf zijn 36e verjaardag bij zijn huidige werkgever. Hij is bang bij een reorganisatie te worden ontslagen. Neem aan dat zijn maandsalaris door de jaren heen steeds gelijk blijft.

Na hoeveel dienstjaren zal hij voor het eerst zijn maximale ontslagvergoeding krijgen volgens deze rekenmethode?

(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2013, tijdvak 1)

Theorie

Recht evenredig en omgekeerd evenredig

Twee variabelen heten recht evenredig als geldt:
als de ene variabele k keer zo groot wordt, dan wordt de
andere variabele ook k keer zo groot.

Zijn de variabelen x en y , dan geldt $\frac{y}{x} = c$, maar ook
 $y = c \cdot x$ waarbij c een constant getal is.

Twee variabelen heten omgekeerd evenredig als geldt:
als de ene variabele k keer zo groot wordt, wordt de
andere variabele k keer zo klein.

Zijn de variabelen x en y , dan geldt $x \cdot y = c$. Je kunt ook
schrijven $y = \frac{c}{x}$ of $x = \frac{c}{y}$

Voorbeeld 1

	$\times 2$	$\times 4$	$\times 2,5$	
p	5	10	40	100
q	3	6	24	60
	$\times 2$	$\times 4$	$\times 2,5$	

$\times 0,6$

Het verband tussen p en q is recht evenredig.

De formule is $\frac{q}{p} = 0,6$ of $q = 0,6p$.

Voorbeeld 2

b	2	3	7	14
w	21	14	6	3

Het verband tussen b en w is omgekeerd evenredig,
want $2 \times 21 = 42$, $3 \times 14 = 42$, $7 \times 6 = 42$ en $14 \times 3 = 42$.

De formule is $b \cdot w = 42$ of $w = \frac{42}{b}$ of $b = \frac{42}{w}$

S1 Bij de tabellen hoort een recht evenredig of omgekeerd
evenredig verband.

- Vul de tabellen verder in.
- Stel bij elke tabel een formule op.

p	2	...	5	10
q	16	8	6,4	...

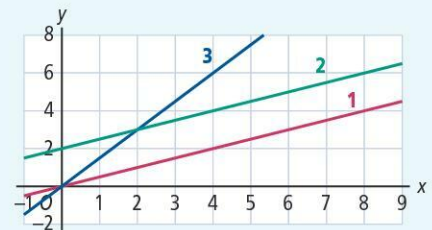
A

a	1	2	5	...
b	20	40	...	120

B

S2

- Maak een tabel bij grafiek 1 en laat zien dat x recht
evenredig is met y .
- Welke andere grafiek hoort ook bij een recht evenredig
verband?
- Stel bij elk grafiek 1 en grafiek 2 een formule op.



Vaardigheid

Je kunt bij een formule de grenswaarde vinden.

Bij een verband tussen de variabelen x en y kan voor grote waarden van x , de waarden van y steeds dichterbij naderen naar een grenswaarde.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $y = 12 \cdot 0,95^x + 1$.

Onderzoek of de formule een grenswaarde heeft. Zo ja, schrijf deze grenswaarde op.

Oplossing

x	0	10	50	100	200
y	13	8,185	1,923	1,071	1,0004

In de tabel zie je dat de formule een grenswaarde heeft. De grenswaarde is 1.

S3 Onderzoek of T naar een grenswaarde nadert als a steeds groter wordt en geef die eventuele grenswaarde.

a $T = \frac{3a + 12}{a + 1}$

b $T = 4 \cdot 1,01^a + 17$

Vaardigheid

Je kunt met formules redeneren.

Door na te gaan hoe een formule is opgebouwd, kun je beredeneren hoe de uitkomst van een formule verandert.

Je gebruikt bijvoorbeeld de volgende eigenschappen.

- g^t neemt toe als $g > 1$ en t groter wordt.
- g^t neemt af als $g < 1$ en t groter wordt.
- Bij een vaste positieve waarde van c en positieve waarde van n neemt $\frac{c}{n}$ af als n groter wordt.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $Q = 4,6 + 50 \cdot 1,2^n$.

Beredeneer of de waarde van Q toeneemt of afneemt als n steeds groter wordt.

Oplossing

Bij $n = 0$ is $Q = 4,6 + 50 \times 1,2^0 = 54,6$.

Als n steeds groter wordt, dan neemt $1,2^n$ toe, want $1,2 > 1$.

Daardoor nemen $50 \times 1,2^n$ en $4,6 + 50 \times 1,2^n$ ook toe. De waarde van Q neemt toe.

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $Q = \frac{32}{16 - 7 \cdot 0,2^n}$.

Beredeneer of de formule een grenswaarde heeft.

Oplossing

Als n steeds groter wordt, dan nadert $0,2^n$ naar 0, want $0,2 < 1$.

$7 \cdot 0,2^n$ nadert dan ook naar nul.

Daardoor nadert $16 - 7 \cdot 0,2^n$ naar 16.

De waarde van Q nadert dan naar $\frac{32}{16} = 2$.

De formule heeft dan 2 als grenswaarde.

- S4** Bereken of de waarde van B toeneemt of afneemt als a steeds groter wordt en naar welke grenswaarde B nadert.

a $B = 4 \cdot 0,5^a + 1$

b $B = \frac{4}{a^2 - 4} + 5$

Vaardigheid

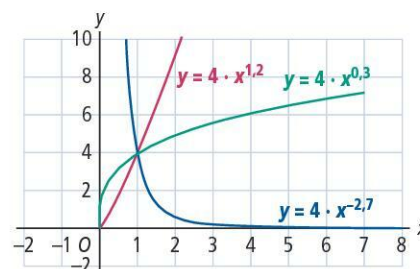
Je kunt met machtsformules werken.

Een machtsformule heeft de vorm $y = c \cdot x^n$.

Formules met machten zijn bijvoorbeeld $y = 4 \cdot x^{1,2}$,

$y = 4 \cdot x^{0,3}$ en $y = 4 \cdot x^{-2,7}$.

Bij de formules van de vorm $y = c \cdot x^n$ is y bij $x = 1$ gelijk aan c . Alle grafieken bij de formules $y = c \cdot x^n$ gaan door het punt $(1, c)$.



- S5** De levensverwachting L van een zoogdier hangt af van zijn gewicht G . Voor het verband tussen L en G geldt $L = 11,75 \cdot G^{0,2}$ met L in jaren en G in kg.

- a** Bereken de levensverwachting van een olifant van 4000 kg.
b Ga na dat deze formule niet voor mensen geldt.
c Bereken het gewicht van een zoogdier met een levensverwachting van 40 jaar.

Vaardigheid

Je kunt met een formule met meerdere variabelen werken.

Bij een formule met meer dan twee variabelen kun je de waarde van één variabele pas uitrekenen als je de waarde van alle andere variabelen kent.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule

$$T = 6,5a + 10b - 82.$$

Bereken b als $T = 12$ en $a = 8$.

Oplossing

$$T = 6,5a + 10b - 82$$

$$12 = 6,5 \times 8 + 10b - 82$$

$$12 = 52 + 10b - 82$$

$$42 = 10b$$

$$b = 4,2$$

Voorbeeld 2

De oppervlakte van de huid van zoogdieren kun je berekenen met de

formule $H = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$. Hierin is H de huidoppervlakte in dm^2 en G het gewicht in kg. Voor mensen geldt dat $c = 11,2$.

Bereken het gewicht van een man met een huidoppervlakte van 2 m^2 .

Oplossing

$$H = 200, \text{ want } 2 \text{ m}^2 = 200 \text{ dm}^2.$$

$$\text{Invullen geeft } 200 = 11,2 \cdot G^{\frac{2}{3}}.$$

Met de rekenmachine vind je dat $G = 78,8 \dots$

De man is ongeveer 79 kg.

- S6** Voor een bepaald type windmolen geldt de formule $P = 0,4 \cdot v^3 \cdot h^{0,75}$. Hierin is P het afgegeven elektrische vermogen in watt, v de windsnelheid in meter per seconde op een meter hoogte boven de grond en h de hoogte van de as van de rotorbladen in meters.

- De as van de rotorbladen zit 16 meter boven de grond. Stel een formule op bij deze windmolen.
- Hoe groot is het vermogen van deze windmolen bij $v = 6$?
- Bij welke windsnelheid is het vermogen van deze windmolen 800 watt?

Vaardigheid

Je kunt een formule na substitutie van variabelen herleiden.

Allerlei situaties in het dagelijks leven hangen af van meer dan twee factoren. Bij zulke situaties horen formules met meer dan twee variabelen. Bij een formule met meer dan twee variabelen kun je de waarde van één variabele pas uitrekenen als je de waarde van alle andere variabelen kent.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $K - 18 = \frac{4a}{b - 1}$
Bereken a als $K = 28$ en $b = 3$.

Oplossing

$$28 - 18 = \frac{4a}{3 - 1}$$

$$10 = \frac{4a}{2}$$

$$20 = 4a$$

$$a = 5$$

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $K - 18 = \frac{4a}{b - 1}$
Druk a uit in K als $b = 3$.

Oplossing

$$K - 18 = \frac{4a}{3 - 1}$$

$$K - 18 = \frac{4a}{2}$$

$$K - 18 = 2a$$

$$2a = K - 18$$

$$a = 0,5K - 9$$

- S7** Conservenblikken hebben meestal de vorm van een cilinder. Voor de inhoud V van een cilinder met straal r en hoogte h geldt $V = 3,14 \cdot r^2 \cdot h$. In deze formule zijn r en h in cm en V in cm^3 .

- Een blik heeft een hoogte van 1,2 dm en inhoud van 1,5 liter. Hoeveel cm is de straal van dit blik?
- Stel een formule op voor een blik met een straal van 4 cm waarbij je V uitdrukt in h .
- Herleid de formule van opdracht b waarbij je h uitdrukt in V .

T1 Het kloppen dat je aan je pols kunt voelen, wordt veroorzaakt door samentrekkingen van de hartspier. De tijd tussen twee hartslagen heet de periode.

- a Leg uit dat bij 60 hartslagen per minuut de periode één seconde is.
- b Hoe groot is die periode bij 120 hartslagen per minuut?
- c Noem het aantal hartslagen per minuut a en de periode in seconden is p .
Vul de tabel verder in.
- d Wat voor soort verband is er tussen a en p ?
- e Het maximale aantal hartslagen M per minuut hangt af van de leeftijd L . Voor dit verband wordt vaak de formule $M = 220 - L$ gebruikt.
Wat voor soort verband is er tussen L en M ?
- f Rob is 70 jaar oud.
Bereken hoelang de periode bij Rob is bij het maximale aantal hartslagen.

a	50	60	80	100	120
p	...	1	...	...	...

T2 Op 1 januari 2017 wordt in een vijver een aantal vissen uitgezet. Men verwacht dat de groei van het aantal vissen zal gaan volgens de formule $V = 385 - 281 \cdot 0,87^t$. Hierin is V het aantal vissen en t de tijd in jaren na 1 januari 2017.

- a Hoeveel vissen heeft men uitgezet?
- b Met hoeveel neemt het aantal vissen in het jaar 2020 toe?
- c In welk jaar zijn er voor het eerst meer dan 300 vissen?
- d Hoeveel vissen zullen er op den duur zijn?

T3 Beredeneer of de waarde van K toeneemt of afneemt als x steeds groter wordt en naar welke grenswaarde K nadert.

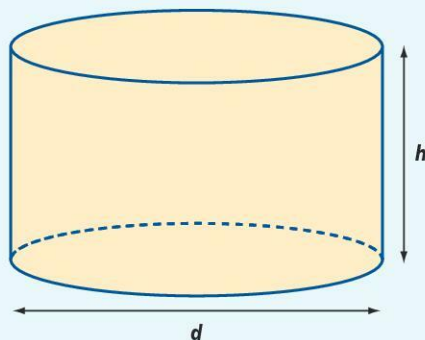
- a $K = \frac{20}{2x + 1} - 3,2$
- b $K = \frac{9}{45 - 12 \cdot 0,68^x}$

T4 Hoe hoger het gemiddeld jaarinkomen, hoe meer er wordt gereisd. Voor een inwoner van West-Europa geldt bij benadering de formule $M = 0,07 \cdot I^{1,26}$. De mobiliteit M is het aantal gereisde kilometers per jaar en I is het gemiddeld jaarinkomen in euro's.

- a Bereken M bij een jaarinkomen van 30 000 euro.
- b Onderzoek met hoeveel procent de mobiliteit stijgt als het jaarinkomen van 30 000 euro naar 60 000 euro stijgt.
- c Bij welk jaarinkomen is de mobiliteit tweemaal zo groot als bij 30 000 euro?



- T5** Een formule voor de totale oppervlakte A in cm^2 van de cilindervormige doos is $A = 3,14 \cdot d \cdot h + 0,79 \cdot d^2$. Hierin is d de diameter van de bodem in cm en h de hoogte in cm.
- Bereken de waarde van A als $h = 15$ en $d = 20$.
 - Stel een formule op die hoort bij dozen met een hoogte van 1,5 dm.
 - Een doos met deze vorm heeft een oppervlakte van 15 dm^2 en is 12 cm hoog. Bereken de diameter van deze doos.



- T6** In een laboratorium worden op een voedingsbodem gistcellen gekweekt. In het begin groeit het aantal gistcellen exponentieel. In de tabel staan enkele gemeten waarden.

<i>tijd t in dagen</i>	2	5
<i>aantal N in miljoenen</i>	7,1	39,4

- Met hoeveel procent neemt het aantal gistcellen per dag toe?
- Stel een formule op voor het verband tussen t en N .
- Na 10 dagen is de groei van het aantal gistcellen niet meer exponentieel. Vanaf 10 dagen geldt de formule

$$N = \frac{9100}{8,9 + 24,9 \cdot 0,85^t}$$

Beredeneer aan de hand van de formule of het aantal gistcellen op den duur toeneemt of afneemt en tot welke grenswaarde het aantal gistcellen op den duur nadert.

- T7** Het aantal m^3 hout dat een boom bevat is niet eenvoudig te bepalen. Daarom wordt de dwarsdoorsnede van de boom op een hoogte van 1,3 meter gemeten. Hoe dikker de boom op die plaats is, hoe meer hout zo'n boom oplevert. Bij elke boomsoort is een standaardhoutprijs vastgesteld. De prijs P in euro's van de boom hangt af van het aantal m^3 hout en wordt berekend met de formule $P = \frac{s^2}{12,56} \times k$.

Hierin is s de omtrek in cm van de dwarsdoorsnede op een hoogte van 1,3 m en is k de standaardhoutprijs.

- Bereken de prijs van een eikenboom met een omtrek van 230 cm en een standaardhoutprijs van € 2,70.
- Onderzoek of de prijs voor één eikenboom met een omtrek van 400 centimeter gelijk is aan de prijs voor twee eikenbomen met een omtrek van 200 centimeter.
- Als $k = 2,70$ kun je de formule in de vorm $P = c \cdot s^2$ schrijven. Bereken de waarde van c .



Je kunt bij een formule de grenswaarde vinden.

- E1** Onderzoek of de formules een grenswaarde hebben. Zo ja, schrijf deze grenswaarde op.

a $R = \frac{200}{7 + 2a} - 0,2$

c $W = \frac{200}{7 + 8 \cdot 1,35^m}$

b $H = \frac{w^2 + 15}{10w + 6}$

d $P = 600 - 48 \cdot 0,78^s$

Je kunt met formules redeneren.

- E2** Beredeneer of de waarde van y toeneemt of afneemt als x steeds groter wordt en naar welke eventuele grenswaarde y nadert.

a $y = 45 - 30 \cdot 0,68^x$

c $y = \frac{12}{2 + x^2} + 3,5$

b $y = \frac{24}{5 + 3 \cdot 0,45^x}$

d $y = 80 \cdot 1,67^x - 8$

Je kunt met machtsformules werken.

- E3** Voor het verband tussen de omlooptijd en de gemiddelde afstand van een planeet tot de zon geldt de formule $T = 0,2 \cdot A^{1,5}$.

Hierin is T de tijd in dagen en A de afstand in miljoenen km.

- a** De gemiddelde afstand van de aarde tot de zon is 149,4 miljoen km.

Bereken de omlooptijd van de aarde in dagen nauwkeurig.

- b** De formule kun je ook schrijven als $A = c \cdot T^{0,67}$. De gemiddelde afstand A van de planeet Uranus tot de zon is 2870 miljoen km en Uranus heeft een omlooptijd T van 30 660 dagen.

Bereken de waarde van c .



Je kunt met een formule met meerdere variabelen werken.

- E4** Met de formule $B = 2,8 + 0,8a + 1,2t$ kun je het bedrag B in euro's van een taxirit berekenen. Hierin is a de afgelegde afstand in km en t de tijd in minuten.

- a** Bij een rit die 15 minuten duurde was de prijs €25,-.

Hoeveel km is er afgelegd?

- b** Twee taxi's van dit bedrijf leggen een afstand van 10 km af. Taxi A doet er twee keer zo lang over als taxi B. Onderzoek met berekeningen of de ritprijs van taxi A ook twee keer zo hoog is als de prijs van taxi B.

Je kunt een formule na substitutie van variabelen herleiden.

- E5** De formule voor de maandelijkse autokosten TK in euro's van een bepaald type auto is $TK = \frac{3700 + 0,06B \cdot k}{12}$

Hierin is B de benzineprijs in euro's per liter, k is het aantal gereden km per jaar.

- a** Ronald rijdt in maart 2500 km. De benzineprijs was in maart €1,60 per liter.
Bereken de maandelijkse autokosten voor Ronald in maart.
- b** In april rijdt Ronald vergeleken met maart 10% minder, maar is de benzineprijs 10% hoger.
Zijn de maandelijkse autokosten voor hem in april hoger dan in maart?
- c** In mei is de benzineprijs €1,68. Voor deze maand is de formule te schrijven als $TK = a \cdot k + b$
Bereken de waarden van a en b . Rond zonodig af op drie decimalen.



- E6** **a** Gegeven is de formule $y = a + \frac{b}{x}$
De grenswaarde van de formule is gelijk aan 12 en de grafiek van de formule gaat door het punt (6, 4).
Bereken de waarden van a en b .
- b** Gegeven is de formule $y = a + b \cdot 0,25^x$. Als x steeds groter wordt, nadert de waarde van y naar 8. De grafiek van de formule gaat door het punt (2, 9).
Bereken de waarden van a en b .

- E7** Voor de productie van een artikel is zowel menselijke arbeid nodig als kapitaal, bijvoorbeeld voor fabrieksruimte en machines. Een econoom gebruikt de formule

$$A = \frac{Q^2}{900 \cdot K^{1,4}}$$

Hierin is A het aantal werknemers, Q het aantal geproduceerde artikelen per jaar en K het geïnvesteerde kapitaal in duizenden euro's.

- a** Een bedrijf wil €650.000,- investeren om een jaarproductie van 18000 artikelen te bereiken.
Hoeveel werknemers moet het bedrijf dan inzetten?
- b** Toon aan dat voor $Q = 30000$ de formule te schrijven is als $A = \frac{1000000}{K^{1,4}}$
- c** Een fabrikant wil 30000 artikelen produceren.
De fabrikant heeft daarvoor 100 werknemers ter beschikking.
Hoeveel kapitaal is er dan nodig?



CE

In dit hoofdstuk

In hoofdstuk 1 heb je gezien dat rekenen een belangrijk onderdeel is van wiskunde A.

In dit hoofdstuk worden veel onderwerpen uit dat hoofdstuk herhaald, zoals rekenen met breuken, tijden, snelheden en kleine en grote getallen. Ook ga je rekenen met absolute en relatieve getallen. Hierbij is het belangrijk dat je goed afrondt.

Rekenen is een belangrijk onderwerp voor het eindexamen en in het dagelijks leven.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk:

- *Logisch redeneren en bewijzen*
- *Probleem oplossen en analytisch denken*
- *Ordenen en structureren*

opdracht 8
opdracht 17
opdracht 39



- V1** Oude kaas kost €9,- voor 500 gram. In de verhoudingstabel zie je hoe je kunt berekenen hoeveel je voor een ander gewicht aan kaas moet betalen.

	$\div 5$	$\times \dots$		
gewicht in grammen	500	100	250	1000
prijs in euro's	9	1,80	4,50	...

- a Vul de getallen op de stipjes in.
 b Een voorbeeld van kruisproducten die gelijk zijn, is $500 \times 1,80 = 9 \times 100$.
 Noem nog twee paren gelijke kruisproducten uit de tabel.
 c Hoeveel euro moet je betalen voor 850 gram oude kaas?

	500	100
	9	1,80
	$500 \times 1,80 = 9 \times 100$	

Theorie

In een **verhoudingstabel** hebben de getallen die boven elkaar staan steeds dezelfde verhouding. Je kunt op verschillende manieren erin rekenen. Bij de rode pijltjes vermenigvuldig en deel je van links naar rechts met hetzelfde getal. Bij het blauwe pijltje werk je van boven naar beneden. In de verhoudingstabel noem je $300 \times 1,50$ en $4,50 \times 100$ kruisproducten. In een verhoudingstabel zijn de kruisproducten gelijk.

	$\div 3$	$\times 7$	
gewicht in grammen	300	100	700
prijs in euro's	4,50	1,50	10,50
	$\div 3$	$\times 7$	$\times 0,015$

Voorbeeld

Op een bus verf van 750 mL staat dat je er 5 m^2 mee kunt verven.
 Hoeveel mL verf heb je nodig voor 7 m^2 ?

Oplossing

	$\div 5$	$\times 7$	
hoeveelheid in mL	750	150	?
oppervlakte in m^2	5	1	7
	$\div 5$	$\times 7$	$\div 150$

met pijltjes
 $? = 150 \times 7 = 1050$
 of
 $? : 150 = 7$
 $? = 7 \times 150 = 1050$

met kruisproduct
 $750 \times 7 = 5 \times ?$
 $? = 750 \times 7 : 5 = 1050$

Je moet 1050 mL verf kopen.

- V2** Bereken de waarden van a en b .

lengte in meters	70	217	gewicht in kg	0,44	3,08
gewicht in kg	42	a	prijs in euro's	b	11,2

- V3** Kibbeling kost €3,25 voor 250 gram.
 a Hoeveel euro kost 150 gram kibbeling?
 b Gerrie koopt kibbeling en betaalt €7,80.
 Hoeveel gram kibbeling heeft zij gekocht?

- V4 Op een sportdag wordt een hardloopwedstrijd gehouden over een afstand van 300 meter. Sophie doet er 56 seconden over. Ze wil haar gemiddelde snelheid in km per uur berekenen.

afstand in km	0,3	?
tijd in seconden	56	3600

- Waarom zet ze 0,3 in de tabel? En waarom 3600?
- Bereken de gemiddelde snelheid van Sophie in km per uur. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.
- Bob deed 62 seconden over dezelfde afstand. Bereken de gemiddelde snelheid van Bob in km per uur.



- V5
- Verdeel 200 m^2 in de verhouding 1 : 4.
 - Verdeel € 166,50 in de verhouding 2 : 7.
 - Verdeel € 420,- in de verhouding 2 : 5 : 8.

Theorie

Bij het **optellen en aftrekken van breuken** moet je er eerst voor zorgen dat de noemers gelijk zijn. Dat heet **gelijknamig** maken. Je kunt **breuken vereenvoudigen** als je de teller en de noemer door hetzelfde getal kunt delen.

$$\frac{3}{7}$$

teller
noemer

Voorbeeld 1

Bereken $2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{2}$.

Oplossing

$$2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{2} = 2\frac{2}{6} + 3\frac{3}{6} = 5\frac{5}{6}$$

Voorbeeld 2

Bereken $2\frac{5}{6} + 3\frac{5}{8}$.

Oplossing

$$2\frac{5}{6} + 3\frac{5}{8} = 2\frac{40}{48} + 3\frac{30}{48} = 5\frac{70}{48} = 6\frac{22}{48} = 6\frac{11}{24}$$

Voorbeeld 3

Bereken $7\frac{1}{2} - 5\frac{5}{9}$.

Oplossing

$$7\frac{1}{2} - 5\frac{5}{9} = 7\frac{9}{18} - 5\frac{10}{18} = 6\frac{27}{18} - 5\frac{10}{18} = 1\frac{17}{18}$$

- V6 Bereken en noteer al je tussenstappen.

- $2\frac{1}{4} + \frac{7}{8}$
- $3\frac{1}{3} - \frac{5}{6}$
- $4\frac{1}{2} - 2\frac{1}{4}$
- $8\frac{1}{3} - 5\frac{5}{7}$
- $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$
- $1\frac{1}{4} + 2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{2}$

- V7 Vul in.

- 1,7 m = ... mm
- 47 000 dm³ = ... m³
- 5,72 L = ... mL
- 14 000 cm² = ... m²
- 300 cL = ... dm³
- 298 mg = ... kg

1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm
 1 m² = 100 dm² = 10 000 cm²
 1 m³ = 1000 dm³ = 1 000 000 cm³
 1 dm³ = 1 L = 10 dL = 100 cL = 1000 mL
 1 kg = 1000 gram = 1 000 000 mg

12.1 Breuken

- Je herhaalt**
- hoe je een deel van een hoeveelheid berekent
 - hoe je breuken met elkaar vermenigvuldigt

- Leerroutes**
- ondersteunend: 1—2—3—4—05—06—6—8
 - doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7—8
 - uitdagend: 2—3—4—5—6—7—8—U1

Een chocoladereep weegt 240 gram. Het gewicht van de noten in de reep is $\frac{3}{20}$ deel

van het totale gewicht van de reep.

$\frac{7}{48}$ deel van het totale gewicht van de reep is karamel.

- Hoe kun je berekenen of de noten meer wegen dan de karamel?



- 1 Schrijf als decimaal getal. Rond af op vier decimalen.

- a $\frac{5}{7}$ c $3\frac{6}{11}$
b $2\frac{2}{3}$ d $12\frac{13}{14}$

- 2 Een school heeft 1240 leerlingen. Daarvan komt $\frac{1}{5}$ deel met het openbaar vervoer naar school en $\frac{3}{4}$ deel komt met de fiets.

- a Hoeveel leerlingen komen met het openbaar vervoer?
b Hoeveel leerlingen komen met de fiets?
c De rest van de leerlingen komt lopend.
Welke deel van de leerlingen is dat?

Theorie

Je kunt op verschillende manieren **een deel van een hoeveelheid berekenen**, bijvoorbeeld $\frac{2}{3}$ deel van 336 euro.

Voorbeeld 1

Bereken $\frac{2}{3}$ deel van 336 euro.

Oplossing

$\frac{2}{3} = 0,666\ldots$
 $0,666\ldots \times 336 = 224$
Dus 224 euro.

Voorbeeld 2

Bereken $\frac{2}{3}$ deel van 336 euro.

Oplossing

Direct invoeren op je rekenmachine geeft
 $\frac{2}{3} \times 336 = 224$.
Dus 224 euro.

Voorbeeld 3

Bereken $\frac{2}{3}$ deel van 336 euro.

Oplossing

$\frac{1}{3}$ deel is $336 : 3 = 112$
 $\frac{2}{3}$ deel is $2 \times 112 = 224$
Dus 224 euro.

- 3 Bereken en rond je antwoord zo nodig af op één decimaal.

- H** a $\frac{7}{9}$ deel van 18 liter c $\frac{5}{6}$ deel van 4196 liter
b $\frac{2}{7}$ deel van 119 mijl d $\frac{3}{23}$ deel van 134 m^3

- 4 a Vul in: $2\frac{1}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{\dots}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{\dots \times 2}{7 \times 5} = \frac{\dots}{35} = \frac{\dots}{\dots}$
- b Bereken op dezelfde manier $2\frac{1}{7} \times \frac{1}{2}$.
- c Drie kinderen krijgen elk $\frac{1}{3}$ deel van 21 chocolaatjes.
Elk kind krijgt dan $21 : 3 = 7$ chocolaatjes.
Laat zien dat je dit aantal ook kunt berekenen met $21 \times \frac{1}{3}$.
- d Er is nog $\frac{2}{7}$ deel van een pizza over.
Dit wordt verdeeld onder twee kinderen.
Vul in: ieder kind krijgt $\frac{2}{7} : \dots = \frac{2}{7} \times \frac{1}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$ deel van de pizza.

Theorie

Je kunt **breuken met elkaar vermenigvuldigen** door de tellers met elkaar te vermenigvuldigen en de noemers met elkaar te vermenigvuldigen.

Voorbeeld 1

Bereken $3\frac{2}{7} \times \frac{4}{9}$.

Oplossing

$$3\frac{2}{7} \times \frac{4}{9} = \frac{23}{7} \times \frac{4}{9} = \frac{92}{63} = 1\frac{29}{63}$$

Voorbeeld 2

Bereken $\frac{7}{11} : 4$.

Oplossing

$$\frac{7}{11} : 4 = \frac{7}{11} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{44}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 05

- 5 Bereken.

- H** a $\frac{2}{5} \times \frac{10}{11}$ c $1\frac{1}{4} : 7$
b $4\frac{1}{2} \times \frac{4}{5}$ d $\frac{4}{7} : 2$

Ondersteunende route → maak opdracht 06

- 6 Louise gaat vaak vissen. Het afgelopen jaar is zij in totaal 84 keer gaan vissen. In $\frac{2}{3}$ deel van het aantal keer vissen ving zij minimaal één vis. Op de dagen dat zij minimaal één vis ving, ving ze op $\frac{1}{8}$ deel van die dagen drie vissen. Ze ving twee vissen op $\frac{3}{7}$ deel van die dagen en op de andere dagen ving ze één vis.
- a Op hoeveel dagen ving ze geen vissen?
b Op hoeveel dagen ving ze één vis?
c Hoeveel vissen heeft Louise afgelopen jaar gevangen?



- 7** Bij het aanleggen van een laminaatvloer heb je altijd meer laminaat nodig dan de oppervlakte waar je de vloer legt vanwege onder andere snijverlies. Een laminaatleverancier raadt aan om $\frac{1}{10}$ deel meer te bestellen dan de oppervlakte van de vloer.
- Hoeveel laminaat heb je volgens de leverancier nodig voor een vloer met een oppervlakte van 12 m^2 ?
 - Het laminaat wordt geleverd in pakken waar $2,6 \text{ m}^2$ in zit.
Hoeveel pakken heb je nodig voor een vloer van 16 m^2 ?
 - Willem wil laminaat leggen op een vloer van 60 m^2 . Omdat de ruimte waarin hij het laminaat wil leggen erg veel lastige hoeken heeft, moet hij $\frac{2}{15}$ deel van de totale hoeveelheid extra bestellen. Het laminaat dat hij legt, wordt in pakken van $2,6 \text{ m}^2$ geleverd en kost € 24,99 per pak.
Hoeveel moet Willem betalen voor het laminaat?



- 8** Alfred Binet ontwierp aan het begin van de 20e eeuw een test om de intelligentie van kinderen vast te leggen in een getal, het intelligentiequotiënt IQ . Later zijn deze tests door anderen uitgebreid en verbeterd.

Het IQ wordt berekend met de formule $IQ = \frac{ML}{WL} \cdot 100$ en afgerond op een geheel getal. WL is de werkelijke leeftijd en ML is de mentale leeftijd.

Als je een test voor je eigen leeftijd goed maakt, krijg je een test voor een steeds hogere leeftijd. Voor elke hogere test die goed is gemaakt, komen er twee maanden bij de mentale leeftijd.

Als je de test voor je eigen leeftijd niet goed maakt, krijg je steeds lagere tests voorgelegd tot je er één goed maakt. Voor elke lagere test die je niet goed maakt, gaan er twee maanden van je mentale leeftijd af.

- Een meisje van precies 12 jaar blijkt, behalve de test voor haar eigen leeftijd, ook nog 21 hogere tests goed te maken.
Bereken het IQ van dit meisje.
- Hoe hoog is het IQ van een kind dat alleen de test voor zijn eigen leeftijd goed maakt?
- Twee kinderen blijken, behalve de test voor hun eigen leeftijd, ook nog tien hogere tests goed te maken.
Is het mogelijk dat ze toch een verschillend IQ hebben? Verklaar je antwoord.
(Ontleend aan *CE havo wiskunde A 1992, tijdvak 2*)

Een jongen van 10 jaar en 4 maanden ($WL = 10 + \frac{4}{12}$) maakt de test van zijn eigen leeftijd goed en nog 8 hogere tests. Zijn mentale leeftijd wordt verhoogd met $8 \times 2 = 16$ maanden.

$$ML = 10 + \frac{4}{12} + \frac{16}{12} = 11 + \frac{8}{12}$$

$$\text{Zijn } IQ \text{ is dan } \frac{11 + \frac{8}{12}}{10 + \frac{4}{12}} \times 100 = 113.$$

Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

- 05** Op het bovenste blaadje wordt $2\frac{1}{10} \times \frac{5}{6}$ berekend.
- a** Bij stap 1 werd $2\frac{1}{10}$ als één breuk geschreven.
Vul het blaadje bij stap 1 verder in.
- b** Je vermenigvuldigt de breuken door de tellers met elkaar te vermenigvuldigen en de noemers met elkaar te vermenigvuldigen.
Vul het blaadje verder in.
- c** Op het onderste blaadje wordt $3\frac{1}{8} : 4 =$ berekend.
Een breuk delen door 4 is hetzelfde als de breuk vermenigvuldigen met $\frac{1}{4}$.
Vul het onderste blaadje verder in.

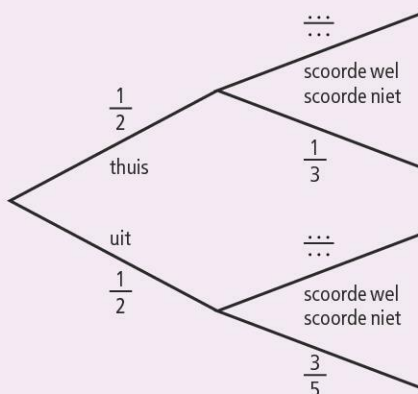
Bereken.

- d** $\frac{3}{7} \times \frac{4}{10}$ **f** $1\frac{1}{3} : 5$
e $4\frac{1}{3} \times \frac{6}{7}$ **g** $\frac{5}{9} : 2$

2	$\frac{1}{10} = \frac{20}{10} + \frac{1}{10} = \frac{\dots}{10}$	1
$\frac{\dots}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{\dots}{60} = \dots \frac{\dots}{\dots}$	2	

$3\frac{1}{8} : 4 =$	
$3\frac{1}{8} \times \frac{\dots}{4} = \frac{\dots}{8} \times \frac{\dots}{4} = \dots$	

- 06** Voetbalclub SCV speelde in een seizoen vijftien keer thuis en vijftien keer uit. In totaal scoorde SCV 64 doelpunten. SCV scoorde niet in $\frac{1}{3}$ deel van de thuiswedstrijden en in $\frac{3}{5}$ deel van de uitwedstrijden. Het schema hoort bij de wedstrijden waarin er wel of niet is gescoord.
- a** Waarom is er bij zowel thuis als uit het getal $\frac{1}{2}$ ingevuld?
- b** Vul het schema verder in.
- c** $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ deel van alle wedstrijden waren thuiswedstrijden waarin SCV niet scoorde.
Welk deel van alle wedstrijden waren uitwedstrijden waarin SCV niet scoorde?
- d** In hoeveel uitwedstrijden scoorde SCV niet?



Uitdagende opdrachten

- U1** In 2018 is in Nederland 48 keer een vrouw van een drie- of vierling bevallen. Dit aantal is $\frac{6}{325}$ deel van het totaal aantal bevallingen van een twee-, drie- of vierling. $\frac{3}{200}$ deel van het totaal aantal bevallingen is van een tweeling.
Hoeveel bevallingen waren er in 2018 in totaal?

12.2 Absoluut en relatief

Je herhaalt • wat absolute en relatieve gegevens zijn

Leerroutes • ondersteunend: 9—10—O11—12—13
• doorlopend: 9—10—11—12—13
• uitdagend: 9—10—11—13—U2

Een docente wiskunde geeft aan dat slechts twee leerlingen in haar klas een onvoldoende staan. In de klas van een andere docente staat 10% van de leerlingen een onvoldoende.

• Bij welke docente staan de leerlingen er het beste voor denk je? Leg je antwoord uit.



- 9 In de tabel zie je gegevens over de Nederlandse bevolking in 1980 en in 2019.

<i>jaartal</i>	<i>80 jaar of ouder</i>	<i>totaal ($\times 1000$)</i>	<i>% 80 jaar of ouder</i>
1980	311 870	14 091	...
2019	798 820	...	4,6%

- a Bereken hoeveel procent van de Nederlandse bevolking in 1980 bij de categorie 80 jaar of ouder hoorde.
- b Je wilt weten hoe groot de totale bevolking van Nederland in 2019 was. Daarvoor gebruik je de verhoudingstabel.
Waarom is het getal 100 onderaan bij percentage ingevuld?
- c Bereken met behulp van de verhoudingstabel hoe groot de totale bevolking van Nederland in 2019 was.
Rond je antwoord af op duizendtallen.
- d In 2019 is gegeven dat 2,74‰ (2,74 promille) van de mensen die 80 jaar of ouder zijn, 100 jaar of ouder is. Waarom is in de verhoudingstabel al het getal 1000 ingevuld?
- e Bereken met behulp van de verhoudingstabel hoeveel personen 100 jaar of ouder waren.

<i>aantal</i>	798 820	...
<i>percentage</i>	4,6	100

<i>aantal</i>	...	...
<i>promillage</i>	1000	...

Theorie

Gegevens kunnen **absoluut** of **relatief** weergegeven zijn. Het werkelijke aantal is een absoluut gegeven. Een relatief gegeven is een verhoudingsgetal. Voorbeelden van relatieve gegevens zijn:

- een aantal ten opzichte van bijvoorbeeld 1 000 000.
- een percentage, dit is een hoeveelheid ten opzichte van 100.
- een promillage, dit is een hoeveelheid ten opzichte van 1000.

Voorbeeld

16 op elke 10 000 is $\frac{16}{10\,000}$ deel.

38% is $\frac{38}{100}$ deel.

5‰ (5 promille) is $\frac{5}{1000}$ deel.

- 10** Op 1 oktober 2019 zitten op een school 1230 leerlingen.
H Op 1 oktober 2020 is het aantal leerlingen 77 gedaald.
a Bereken de relatieve afname van het aantal leerlingen.
b Op een andere school zitten op 1 oktober 2019 1100 leerlingen. Op 1 oktober 2020 waren er 112 brugklassers en dit was 10,4% van het totaal aantal leerlingen.
 Bereken de absolute en de relatieve toe- of afname van het aantal leerlingen op deze school.

Ondersteunende route → maak opdracht 011

- 11** In de tabel vind je het aantal inwoners van Nederland en het aantal leden van sportbonden in 2012 en 2017.
H

	2012	2017
<i>totaal aantal inwoners (× 1000)</i>	16 730,3	17 081,5
<i>aantal leden per 1000 inwoners</i>	312,3	304,1

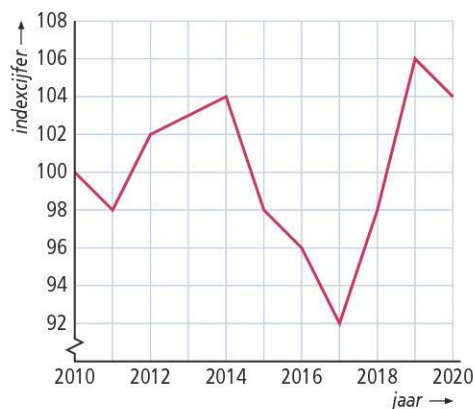
- a** Hoeveel inwoners had Nederland in 2012? En hoeveel inwoners in 2017?
b Welke getallen in de tabel zijn absoluut en welke getallen zijn relatief?
c Er is een verhoudingstabel gemaakt om het aantal leden van sportbonden in 2012 te berekenen.

<i>aantal leden van sportbonden</i>	312,3	...
<i>totaal aantal personen</i>	1000	...

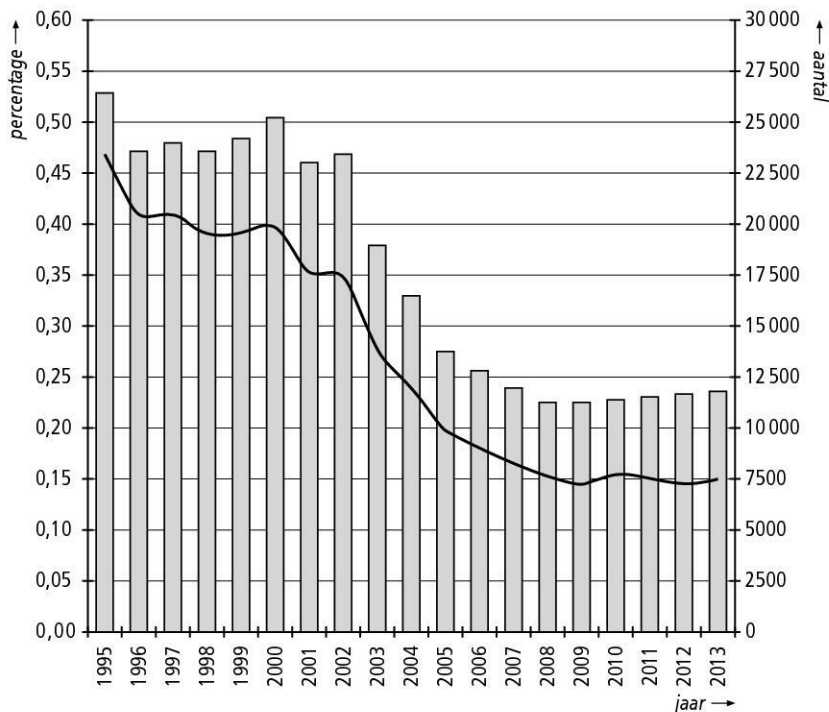
Waarom is in de verhoudingstabel 312,3 boven 1000 ingevuld?

- d** Bereken hoeveel leden van sportbonden er in 2012 waren.
e Hoeveel leden van sportbonden waren er in 2017?

- 12** Om prijzen te kunnen vergelijken, worden ze vaak vergeleken met de prijs in een bepaald basisjaar. De prijs in dat jaar krijgt het getal 100. Je zegt dan dat het indexcijfer 100 is.
 De grafiek gaat over de prijs van koffiebonen vanaf het basisjaar 2010. In de grafiek zie je dat het indexcijfer in 2011 gelijk is aan 98. Dit betekent dat de prijs van de koffiebonen in 2011 2% lager was dan in 2010.
a Zijn indexcijfers absolute of relatieve cijfers? Waarom?
b In 2019 kostten koffiebonen 21 dollarcent per kilogram. Hoeveel kostte een kilogram koffiebonen in 2010?
c Hoeveel kostte een kilogram koffiebonen in 2015?



- 13** Elk jaar wordt een percentage van de auto's in Nederland gestolen. Dit percentage is aan het begin van deze eeuw flink gedaald. In de figuur is voor de jaren 1995 tot en met 2013 zowel het percentage gestolen personenauto's (kromme) als het aantal gestolen personenauto's (staafdiagram) weergegeven.



In de figuur is te zien dat in de laatste weergegeven jaren het percentage gestolen personenauto's ongeveer gelijk aan 0,15% bleef. Ook als dit de volgende jaren zo zou blijven, dan nog neemt het aantal gestolen personenauto's toe, omdat het aantal personenauto's in Nederland toeneemt. In de tabel is voor een aantal jaren het aantal personenauto's in Nederland weergegeven. Uit de tabel is af te leiden dat het aantal personenauto's bij benadering lineair toeneemt. Neem aan dat de komende jaren het percentage gestolen personenauto's blijft zoals in 2013 en dat het aantal personenauto's lineair blijft toenemen zoals in de tabel. Bereken in welk jaar er voor het eerst weer meer personenauto's gestolen zullen worden dan in 2005.
(Ontleend aan *CE havo wiskunde A 2019, tijdvak 1*)

	aantal personenauto's in Nederland (in miljoenen)
2001	6,55
2004	6,90
2007	7,24
2010	7,59
2013	7,93

Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

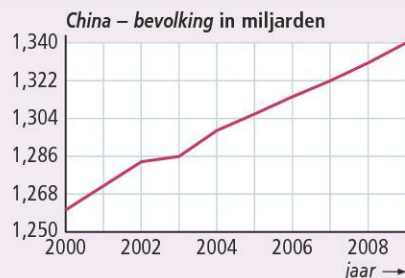
- 011** In de tabel vind je gegevens over de aantallen kinderen die in 2010 en 2018 in Nederland geboren zijn.

<i>aantal kinderen geboren</i>	2010	2018
<i>totaal (× 1000)</i>	184,4	168,5
<i>per 1000 inwoners</i>	11,1	9,8
<i>per 1000 vrouwen van 15-44 jaar</i>	56,2	53,7

- Welke getallen zijn absoluut en welke getallen zijn relatief?
- Waarom kun je aan deze gegevens niet meteen zien of het aantal inwoners tussen 2010 en 2018 is toegenomen?
- Het getal 11,1 in de tabel betekent dat als je alle inwoners van Nederland in 2010 zou verdelen in groepjes van 1000, er per groep gemiddeld 11,1 kinderen zijn geboren.
Gebruik de verhoudingstabel om het aantal inwoners in 2010 te berekenen. Geef je antwoord in duizendtallen.
- Bereken ook het aantal inwoners in 2018.
- Hoeveel vrouwen van 15-44 jaar waren er volgens deze tabel in het jaar 2018?

<i>aantal kinderen</i>	11,1	...
<i>aantal inwoners</i>	1000	...

Uitdagende opdrachten



- U2** In de linker grafiek zie je dat er in China en in de westerse landen meer jongens dan meisjes geboren worden.

- Ga na dat in de westerse landen het percentage jongens van de geboren kinderen 51,2% is.
- In de rechter grafiek zie je de grootte van de bevolking van China van 2000 tot 2009. In de tabel zie je het geboortecijfer. Het geboortecijfer is het aantal geboortes per 1000 inwoners.
Laat zien dat er in 2009 ongeveer 18,7 miljoen kinderen zijn geboren in China.
- Als gevolg van het eenkindbeleid in China worden er daar veel meer jongens dan meisjes gemeld bij de overheid.
Hoeveel jongens en hoeveel meisjes zijn er in 2009 gemeld bij de overheid?

<i>jaar</i>	<i>geboortecijfer</i>
2000	16,12
2003	12,96
2006	13,25
2009	14,00

12.3 Afronden

Je herhaalt • hoe je getallen afrondt

Leerroutes • ondersteunend: 14—15—016—17—18—19—20—21
• doorlopend: 14—15—16—17—18—19—20—21
• uitdagend: 14—17—18—19—20—21—U3—U4

Klas H5H heeft geld opgehaald voor het goede doel. Er zitten 13 leerlingen in de klas. Per persoon is er afgerond op hele euro's gemiddeld € 37,- opgehaald.

- Hoeveel geld kan er in totaal opgehaald zijn?



- 14**
- a** Alle 345 nieuwe brugklasleerlingen van een grote school worden op een kennismakingsdag ontvangen in groepen van maximaal 24 leerlingen. Hoeveel groepen worden er minimaal gevormd?
 - b** Een groepje leerlingen gaat cakes bakken. Voor elke cake zijn vier eieren nodig. Ze hebben 57 eieren gekregen. Hoeveel cakes kunnen ze bakken?

Theorie

Bij **afronden** gebruik je de volgende regels.

- Als je moet afronden op bijvoorbeeld drie decimalen, kijk je eerst naar het volgende (in dit geval dus het vierde) cijfer achter de komma.
- Is dit cijfer 4 of lager, dan laat je het vierde en verdere cijfers achter de komma weg.
- Is dit cijfer 5 of hoger, dan maak je het derde cijfer achter de komma één hoger en laat je de volgende cijfers weg.

Bij grotere getallen kan het nodig zijn om op bijvoorbeeld tientallen of duizendtallen af te ronden.

Bij praktische problemen moet je altijd bedenken of je moet afwijken van de rekenregels voor afronden. Let goed op of je daarbij naar boven of naar beneden moet afronden.

Voorbeeld 1

Rond 3,519 af op twee decimalen, op één decimaal en op een geheel getal.

Oplossing

Op twee decimalen afgerond wordt het 3,52, op één decimaal 3,5 en op een geheel getal 4.

Voorbeeld 2

Alle 362 leerlingen gaan met bussen naar een pretpark. Alle bussen hebben 58 zitplaatsen. Hoeveel bussen zijn er nodig?

Oplossing

$362 : 58 = 6,24\dots$
Er zijn zeven bussen nodig.

Voorbeeld 3

Rond 10 913 473 af op honderdtallen en op duizendtallen.

Oplossing

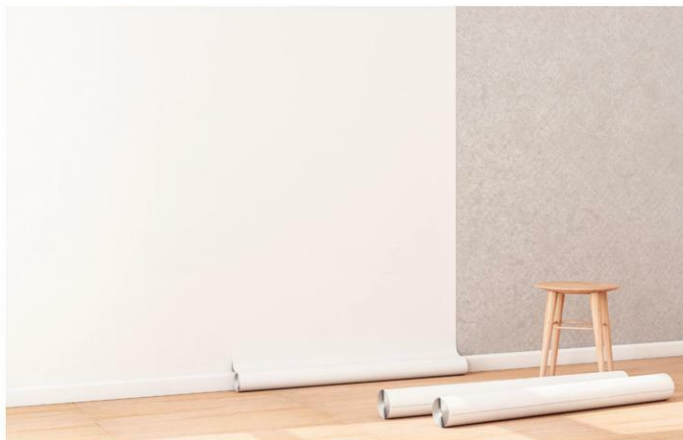
Op honderdtallen afgerond wordt het 10 913 500.
Op duizendtallen afgerond wordt het 10 913 000.

- 15** **H** a Joris staat voor wiskunde A gemiddeld 7,492.
Welk cijfer staat hij voor wiskunde A afgerond op één decimaal?
- b Het aantal inwoners van Rotterdam op 1 januari 2020 was 651 376.
Rond het aantal inwoners af op duizendtallen.

Ondersteunende route → maak opdracht 016

- 16** **H** a Dave heeft vijf eieren nodig om een taart te maken. Hij heeft 49 eieren.
Hoeveel taarten kan Dave maken?
- b Jolanda heeft 49 tegels nodig voor haar veranda. De tegels worden in pakken van acht verkocht.
Hoeveel pakken tegels moet Jolanda bestellen?
- c Lara heeft 400 paaseitjes. Zij maakt cadeauzakjes voor haar turnleerlingen met 13 paaseitjes per cadeauzakje.
Hoeveel cadeauzakjes kan zij maken?

- 17** Ben en Wil gaan een muur in hun woonkamer behangen. De kamer is 2,57 m hoog en de muur die behangen wordt is 8 m lang. Een rol behang is 10,05 m lang en 50 cm breed. Per baan behang nemen ze altijd 15 cm in de hoogte extra om de baan behang netjes te kunnen afwerken.
Hoeveel rollen behang moeten ze kopen?



- 18** De Johan Cruijff Arena heeft 54 784 zitplaatsen. Bij een bekerwedstrijd waren de zitplaatsen voor $\frac{2}{3}$ deel bezet.
- a Hoeveel toeschouwers waren er?
- b Rond je antwoord van opdracht a op honderdtallen af.
- c Bij een competitiewedstrijd is het aantal lege en bezette stoelen verdeeld in de verhouding 5 : 6.
Hoeveel toeschouwers waren er? Rond je antwoord verstandig af.

- 19** In de tabel staan gegevens over het aantal personenauto's in Nederland in 1990 en 2010. De gegevens zijn telkens vastgesteld op 1 januari. Het aantal inwoners van Nederland is in de loop der jaren toegenomen.

	<i> totaal aantal personenauto's</i>	<i> aantal personenauto's per 1000 inwoners</i>
1990	5 118 429	344
2010	7 622 353	460

Bereken de toename van het aantal inwoners van Nederland in de periode van 1 januari 1990 tot 1 januari 2010. Rond je antwoord af op duizendtallen.

(*Ontleend aan CE havo wiskunde A 2017, tijdvak 2*)

- 20** In Engeland worden andere eenheden gebruikt dan in Nederland.
- a** Rob is '6 foot 6', dus 6 feet and 6 inches. Bereken Robs lengte in cm nauwkeurig.
 - b** Yusif zegt: '1 inch is ongeveer 2,5 cm' en berekent daarmee Robs lengte. Hoeveel is het verschil met het antwoord bij opdracht a?
 - c** Zina en Yuri moeten een hoeveelheid van 253 pints omrekenen naar liters en het antwoord afronden op twee decimalen. Zina zegt: 'Ik rond 0,568 261 af op 0,57 en ik berekenen $253 \times 0,57$ '. Yuri zegt: 'Ik bereken $253 \times 0,568\,261$ en daarna rond ik af'. Wie heeft het goed uitgerekend?

1 inch = 2,54 cm
12 inches = 1 foot
1 pint $\approx$ 0,568 261 liter

Tussentijds afronden kan leiden tot verschillen in de antwoorden. Probeer zo lang mogelijk door te rekenen met niet afgeronde getallen.

- 21** In het magazijn van een uitgever staan grote aantallen identieke boeken op boekenplanken. Elk boek heeft een dikte van 1,7 cm. De boekenplanken hebben een lengte van 87,6 cm.
- a** Hoeveel boeken kunnen er maximaal op één plank worden geplaatst?
 - b** De beide getallen in de gegevens zijn afgerond op één decimaal. Neem aan dat deze getallen, afgerond op twee decimalen, gelijk zijn aan 1,74 en 87,56. Krijg je hiermee hetzelfde antwoord als bij opdracht a?
 - c** Bedenk zelf getallen met twee decimalen, die afgerond op één decimaal gelijk zijn aan 1,7 en 87,6, maar die na deling een grotere uitkomst opleveren dan bij opdracht a.

Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4

Ondersteunende opdrachten

016 Je gaat in deze opdracht nadenken over hoe je de uitkomst van $68 : 7$ moet afronden in verschillende situaties. Als je $68 : 7$ uitrekent op je rekenmachine dan zie je dat het antwoord 9,714285 ... is.

- a** Waarom is het getal op 9,714285 ... op vijf decimalen afgerond gelijk aan 9,71429?
- b** Vul in: het getal 9,714285 ... is op twee decimalen afgerond gelijk aan ... omdat het ... cijfer achter de komma 4 of lager is.
- c** Rond het getal 9,714285 ... op één decimaal af en op een geheel getal.
- d** Hoeveel plantenbakken met een inhoud van 7 liter kun je maximaal vullen met 68 liter potgrond? Waarom moet je het antwoord niet naar boven afronden?
- e** Je kunt met een blik verf 7 m² verven. Je wilt een oppervlakte van 68 m² verven. Hoeveel blikken verf moet je kopen? Waarom moet je het antwoord naar boven afronden?

Uitdagende opdrachten

U3 Langs de snelweg A7 staan ter hoogte van Purmerend kort na elkaar enkele borden waarop de afstanden tot Hoorn staan aangegeven. Op één van de borden staat 'Hoorn 19 km' en op het volgende bord staat 'Hoorn 16 km'. Neem aan dat deze afstanden zijn afgerond op hele kilometers. De afstand tussen deze twee borden is 1800 meter. Kan deze informatie kloppen?

U4 Abdelali en Nicole gaan allebei een rechthoekige muur verven. De muur van Abdelali is 480 cm bij 250 cm groot. De muur van Nicole is 520 cm bij 260 cm groot. Zij kopen verf in blikken van 750 mL. De verf kost € 15,- per liter. Abdelali kan met 1 liter verf 5 m² verven terwijl Nicole daarmee 7 m² kan verven. Ze moeten allebei twee keer hun muur verven. Wie moet meer betalen voor de verf en hoeveel euro moet hij of zij daarvoor meer betalen?



12.4 Tijden

Je herhaalt • hoe je met tijd, afstand en snelheid rekest

Leerroutes • ondersteunend: 22—23—024—25—26—27
 • doorlopend: 22—23—24—25—26—27
 • uitdagend: 23—24—25—26—27—U5

Een van de beroemdste beklimmingen in de Tour de France is de Alpe d'Huez.
 De beklimming is in totaal 14,5 km lang.
 In 1997 deed Marco Pantani (Italië) over deze beklimming 37 minuten en 35 seconden.
 • Was zijn gemiddelde snelheid hoger of lager dan 30 km per uur?



- 22** Een vliegtuig vliegt een afstand van 1450 km met een gemiddelde snelheid van 700 km per uur.
a Bereken hoelang deze vlucht duurt in uren en minuten.
b Het vliegtuig vertrekt om 19.48 uur.
 Hoe laat komt het vliegtuig aan?

2.12,8 minuten betekent
 2 minuten en 12,8 seconden
 $2\frac{1}{3}$ minuten is
 2 minuten en $\frac{1}{3} \times 60 = 20$ seconden

- 23** **a** Hoeveel seconden is 3 uur, 11 minuten en 53 seconden?
b Hoeveel seconden is 2.12,8 minuten?
c Bram rijdt met een snelheid van 88 kilometer per uur.
 Gebruik de verhoudingstabel om zijn gemiddelde snelheid in meter per seconde te berekenen.
d Kate wandelt met een snelheid van 1,8 meter per seconde.
 Bereken haar gemiddelde snelheid in km per uur.

<i>afstand</i> in meters	88 000	...
<i>tijd</i> in seconden	...	1

Theorie

Voor het noteren van tijden is afgesproken dat tussen de uren, minuten en seconden een punt wordt gebruikt.
 7.14,13 minuten betekent 7 minuten en $14\frac{13}{100}$ seconden.
 Dit wordt ook wel genoteerd als 7:14,13 minuten.
 Bij het berekenen van een gemiddelde snelheid moet je de tijd eerst omrekenen naar één tijdseenheid.

Voorbeeld

Op de wereldkampioenschappen atletiek in Doha in 2019 won Sifan Hassan de 1500 m met een tijd van 3:51,95 minuten.
 Bereken haar gemiddelde snelheid in km per uur.

Oplossing

3:51,95 minuten is
 $3 \times 60 + 51,95 = 231,95$ seconden.

<i>afstand</i> in km	1,5	?
<i>tijd</i> in seconden	231,95	3600

$1,5 \times 3600 = 231,95 \times ?$
 $? = 1,5 \times 3600 : 231,95$
 $? = 23,280...$
 Haar gemiddelde snelheid was ongeveer 23,3 km per uur.

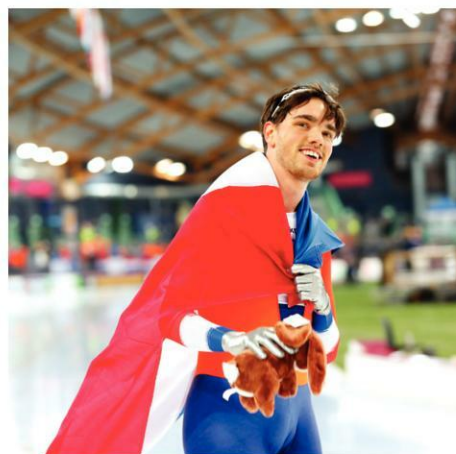
Ondersteunende route → maak opdracht 024

24

H

Op de wereldkampioenschappen schaatsen in Hamar in 2020 won Patrick Roest het wereldkampioenschap allround. Hij won hierbij drie van de vier afstanden.

- Patrick won de 500 meter niet. Hij werd zevende met een tijd van 36,52 seconden.
Bereken zijn gemiddelde snelheid in meter per seconde.
- Hoeveel kilometer per uur is dat? Rond je antwoord af op één decimaal.
- Patrick won de 1500 meter in 1:44,41 minuten.
Bereken het verschil tussen zijn gemiddelde snelheid op de 1500 meter en zijn gemiddelde snelheid op de 500 meter in meter per seconde.
- Hij won de 5000 meter met een gemiddelde snelheid van 48,08 km per uur.
Vul in: zijn tijd op de 5000 meter was ... : ..., ... minuten.



25

In de tabel staan van een aantal takken van de motorsport de gegevens over de snelste gereden rondes.

	Formule 1	MotoGP	IndyCar
<i>lengte circuit</i> in meters	5793	4318	...
<i>rondetijd</i> in minuten	1:19,119	...	0:37,895
<i>gemiddelde snelheid</i> in km per uur	...	187,2	382,182

- Bereken de gemiddelde snelheid van de Formule 1 wagen in km per uur. Rond je antwoord af op drie decimalen.
- Bereken de snelste rondetijd gereden in de MotoGP. Rond je antwoord af op duizendste van seconden.
- In de IndyCar worden lengtes van circuits in mijlen gegeven. Eén mijl is 1,609 344 km.
Bereken de lengte van het circuit waarop de snelste IndyCar ronde is gereden in mijlen afgerond op één decimaal.

26

In april 2019 verbeterde de Belgische wielrenner Victor Campenaerts in Mexico het wereldrecord afstand fietsen in een uur. Hij verbeterde het record van de Brit Bradley Wiggins met 563 meter. Het oude record was 54,526 km. De lengte van één ronde op de baan in het Mexicaanse Aquascalientes is 250 meter.

- Hoeveel volledige ronden heeft Campenaerts in dit uur gereden?
- Hoeveel seconden deed hij gemiddeld over één ronde?
- Baansprinters kunnen 70 km per uur fietsen.
Hoeveel volledige ronden zou een baansprinter in 20 minuten kunnen afleggen als hij deze snelheid kan volhouden?

27 De marathon is een hardloepwedstrijd over een afstand van 42 km en 195 m. In september 2003 verbeterde de Keniaan Paul Tergat in Berlijn het wereldrecord op de marathon tot 2 uur, 4 minuten en 55 seconden.

- a Toon aan dat zijn gemiddelde snelheid tijdens het lopen van dit wereldrecord ruim 5,6 meter per seconde was.
- b Na dit wereldrecord schreef een sportverslaggever dat een tijd onder de 2 uur en 4 minuten haalbaar zou zijn. De verslaggever baseerde die uitspraak op tijden die Tergat had gelopen op andere afstanden. Zo was Tergats beste tijd op de 10 000 meter op dat moment 26 minuten en 27 seconden. Ook had Tergat op de halve marathon het wereldrecord in handen met 59 minuten en 17 seconden.

In de atletiekwereld wordt gebruik gemaakt van de

formule $T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^{1,06}$ om een recordtijd op een

gegeven afstand te voorspellen, uitgaande van een recordtijd op een andere afstand.

T_2 is de voorspelde recordtijd in seconden op de afstand D_2 in meters. T_1 is de recordtijd in seconden die bekend is op de afstand D_1 in meters.

Uitgaande van zijn recordtijd op de halve marathon kan Tergat volgens deze formule inderdaad op de marathon een tijd lopen onder de 2 uur en 4 minuten.

Toon dit met een berekening aan.

- c Een formule die een schatting geeft van de wereldrecordtijd van mannen is $T = 0,05827 \cdot D^{1,111}$. Hierin is D de afstand in meters en T de tijd in seconden. Je kunt berekenen wat de wereldrecordtijd op de 5000 meter volgens deze formule moet zijn. Het wereldrecord op de 5000 meter stond tot mei 2004 op naam van de Ethiopiër Haile Gebreselassie: 12 minuten en 39,36 seconden.

Bereken hoeveel procent zijn tijd afwijkt van de met de formule berekende wereldrecordtijd.

- d Bij hardlopen gaat het om de kortste tijd op een bepaalde afstand. Bij de Coopertest is dat anders, want daar moet je een zo groot mogelijke afstand lopen in 12 minuten. Met de formule kun je berekenen hoe groot die recordafstand voor mannen bij de Coopertest zou kunnen zijn.

Bereken die afstand in meters nauwkeurig.

(Ontleend aan CE wiskunde havo A12 2007, tijdvak 1)



Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

024

Op de wereldkampioenschappen schaatsen in Hamar in 2020 won Ireen Wüst het wereldkampioenschap allround.

- Op de 500 meter reed zij een tijd van 36,52 seconden. Om haar gemiddelde snelheid in meter per seconde te berekenen, gebruik je verhoudingstabel A. Waarom staat het getal 1 in de tabel?
- Bereken haar gemiddelde snelheid in meter per seconde.
- Om haar gemiddelde snelheid in km per uur te berekenen, gebruik je verhoudingstabel B. Waarom staat het getal 0,5 boven 36,52? En waarom is het getal 3600 ingevuld?
- Bereken haar gemiddelde snelheid op de 500 meter in km per uur.
- Zij reed de 3000 meter in 4:02,60 minuten. Vul in: $4:02,60 = 4 \times \dots + 2,60 = \dots$ seconden.
- Bereken met een verhoudingstabel haar gemiddelde snelheid op de 3000 meter in km per uur. Rond je antwoord af op één decimaal.
- Ireen Wüst won de 1500 meter met een gemiddelde snelheid van 47,4142 kilometer per uur. Dat is dus 47,4142 kilometer in 3600 seconden. Bereken met behulp van verhoudingstabel C haar tijd op de 1500 meter. Schrijf haar tijd op in de tijdsnotatie. Rond daarbij af op twee decimalen.

<i>afstand</i> in meters	500	...
<i>tijd</i> in seconden	36,52	1

A

<i>afstand</i> in km	0,5	...
<i>tijd</i> in seconden	36,52	3600

B

<i>afstand</i> in km	47,4142	...
<i>tijd</i> in seconden	...	...

C

Uitdagende opdrachten

U5

De triatlon is een zware race, die bestaat uit de onderdelen zwemmen, fietsen en hardlopen. Sinds het jaar 2000 is de triatlon ook een Olympisch nummer. De afstanden zijn op de Olympische spelen 1,5 km zwemmen, 40 km fietsen en 10 km hardlopen. Op het blaadje zie je de gemiddelde tijd die de beste deelnemers nodig hadden voor de drie onderdelen. Goede fietsers lijken in het voordeel ten opzichte van zwemmers en hardlopers omdat meer tijd wordt besteed aan fietsen. Daarom wordt voorgesteld om de afstanden van de onderdelen zo te veranderen, dat elk onderdeel evenveel tijd kost en de totale tijd voor de beste deelnemers één uur en drie kwartier bedraagt. Bereken deze afstanden. Rond je antwoorden af op hele kilometers.

zwemmen
18 minuten en 20 seconden
fietsen
59 minuten en 0 seconden
hardlopen
30 minuten en 50 seconden

12.5 Grote en kleine getallen

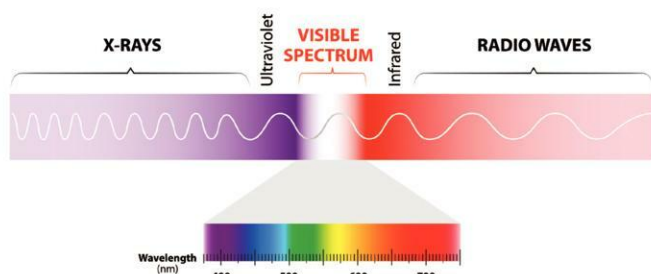
Je herhaalt • wat de standaardvorm of de wetenschappelijke notatie is

Leerroutes • ondersteunend: 28—29—030—30—31—32—33—34
• doorlopend: 28—29—30—31—32—33—34—35
• uitdagend: 28—29—30—32—33—34—35—U6

In de natuurkunde worden de eenheden ångström, nanometer en micrometer gebruikt voor hele kleine lengtes zoals bij lichtgolven. Eén ångström (Å) is gelijk aan 0,000 000 000 1 meter. Een nanometer (nm) is gelijk aan 0,000 000 001 meter. Een micrometer (µm) is gelijk aan 0,000 001 meter.

- Wat is meer, 400 000 ångström, 50 000 nanometer of 20 micrometer?

VISIBLE AND INVISIBLE LIGHT



1 miljoen is 1 000 000
1 miljard is 1 000 000 000
1 biljoen is 1 000 000 000 000
In veel andere, met name Engelstalige, landen wordt gewerkt met 1 billion (is 1 000 000 000).

- 28** Op het blaadje zie je een aantal grote getallen. Als de getallen erg groot worden, is het handiger om ze te schrijven als machten van 10. Bijvoorbeeld $1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$.

- a Schrijf 1 miljard als macht van 10.
- b 10^{100} wordt ook wel een googol genoemd. Uit hoeveel cijfers bestaat een googol?

- 29** Bij scheikunde en biologie komen vaak heel kleine getallen voor. Zo heeft een virus een doorsnede van 0,000 02 cm. Dit schrijf je ook wel als 2×10^{-5} cm.

- a Schrijf 0,000 000 1 als macht van 10.
- b Is 4×10^{-7} kleiner of groter dan 6×10^{-8} ?

Theorie

Grote en kleine getallen worden vaak in de **standaardvorm** of **wetenschappelijke notatie** geschreven. Dit is een getal tussen 1 en 10, vermenigvuldigd met een macht van 10. De exponent geeft aan hoeveel plaatsen je de komma naar rechts of naar links moet verschuiven. Op sommige rekenmachines wordt bijvoorbeeld het getal $1,28 \times 10^{-5}$ weergegeven als 1,28E-5.

Voorbeeld

$$\begin{aligned} 9\,800\,000 &= 9,8 \times 10^6 \\ 45\,621 &= 4,5621 \times 10^4 \\ 0,000\,021 &= 2,1 \times 10^{-5} \\ 0,0055 &= 5,5 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 030

- 30** Op het blaadje zie je een aantal berekeningen.
- Voer de berekeningen uit en schrijf de antwoorden in de normale notatie en in de standaardvorm. Rond daarbij het voorste getal af op twee decimalen.
 - Welke van de antwoorden is groter dan één miljoen?

A	$563 \times 23 = \dots$
B	$5000 : 100\,000 = \dots$
C	$541\,000^2 = \dots$
D	$\frac{82\,970\,000}{4\,200\,050 + 2\,365\,190} = \dots$

- 31** Bereken en schrijf je antwoord in de standaardvorm.
- 1 miljoen : 1 miljard
 - $5,4 \times 10^9 : (2,7 \times 10^6)$

H

b	$\frac{8,2 \times 10^7}{4 \times 10^{10}}$	d	$\frac{2,5 \times 10^3}{2,5 \times 10^{-3}}$
---	--	---	--

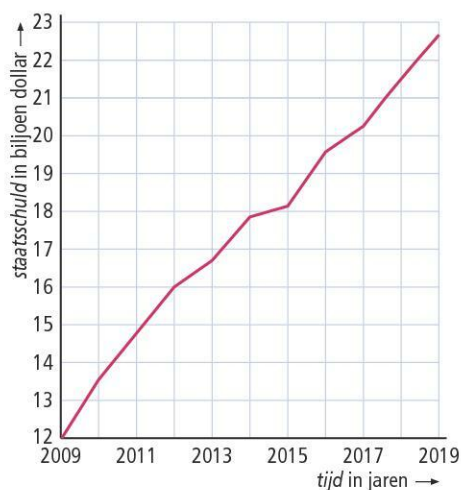
- 32** Het zwaarste landdier ter wereld is de savanne-olifant. Deze weegt gemiddeld 4,9 ton (1 ton is 1000 kg). Het zwaarste zeedier is een blauwe vinvis die gemiddeld 170 ton weegt.

- Hoeveel keer zo zwaar is een blauwe vinvis als een savanne-olifant? Rond je antwoord af op één decimaal.
- Gewicht werd vroeger in gerstenkorrels uitgedrukt. Eén gerstenkorrel was omgerekend 0,0648 gram. Hoeveel gerstenkorrels weegt een blauwe vinvis? Rond je antwoord af op miljoenen.
- Blauwe vinvissen eten Antarctische krill. Eén krill weegt 2000 mg. Per voedingsdag moet de blauwe vinvis ongeveer 3,5 ton krill eten. Hoeveel krillen eet een blauwe vinvis per voedingsdag? Geef je antwoord in de standaardvorm.

- 33** Er zijn eenheden om de opslagcapaciteit of geheugenruimte van harde schijven, USB-sticks en dergelijke aan te duiden. De kleinste eenheid is één bit (een 0 of 1) en 8 bits vormen een byte. Tegenwoordig geldt volgens internationale afspraken: 1000 byte is een kilobyte (KB), 1000 KB is een Megabyte (MB), 1000 MB is een Gigabyte (GB), en 1000 GB is een Terabyte (TB).

- Hoeveel bits zitten er in 1 MB?
- Hoeveel bits zitten er in 300 TB?
- In het verleden werd in plaats van met een factor 1000 ook wel met een factor 1024 gewerkt. Rond 1975 verschenen de eerste computers voor thuisgebruik met een geheugen van 256 byte. Hoeveel keer past 256 byte in 1 MiB?
- 1 GiB bevat meer bits dan 1 GB. Hoeveel procent meer?

In het oude systeem werd 1 kilobyte aangegeven met 1 KiB, dus
 $1 \text{ KiB} = 1024 \text{ byte}$
 $1 \text{ MiB} = 1024 \text{ KiB}$
 enzovoort.



- 34** In de grafiek zie je dat de staatsschuld van de VS in 2019 was opgelopen tot bijna 23 biljoen dollar. Op de foto zie je dat op dat moment de gemiddelde schuld per gezin 168 863 dollar was.

- Op de foto zie je de 'klok' van de staatsschuld. Geef een schatting van de maand en het jaar waarin de foto van deze klok is gemaakt.
- Een Amerikaanse gezin bestaat gemiddeld uit 2,8 personen. Hoe groot was de Amerikaans bevolking op het moment dat de foto van de 'klok' is gemaakt?
- In mei 2020 had het land 331 miljoen inwoners en de staatsschuld bedroeg 24 948 857 000 000 dollar. Irene en Sjoerd willen berekenen hoe groot de staatsschuld per gezin in mei 2020 was. Op het blaadje zie je hoe ze dat berekenen. Maak de berekeningen af. Rond je antwoord af op duizendtallen.
- Welke berekening vind jij het handigst?

Irene	$\frac{24\,948\,857\,000\,000}{331\,000\,000} \times 2,8 = \dots$
Sjoerd	$\frac{24\,948\,857}{331} \times 2,8 = \dots$

- 35** Het gemiddelde gewicht van een zandkorrel op een strand is ongeveer $2,65 \times 10^{-3}$ gram.

H

- Vul in: 1 zandkorrel weegt ongeveer ... kg.
- Hoeveel kg wegen 2,5 miljoen zandkorrels?
- Een zandkasteel weegt ongeveer 20 kg. Uit hoeveel zandkorrels bestaat dit zandkasteel?

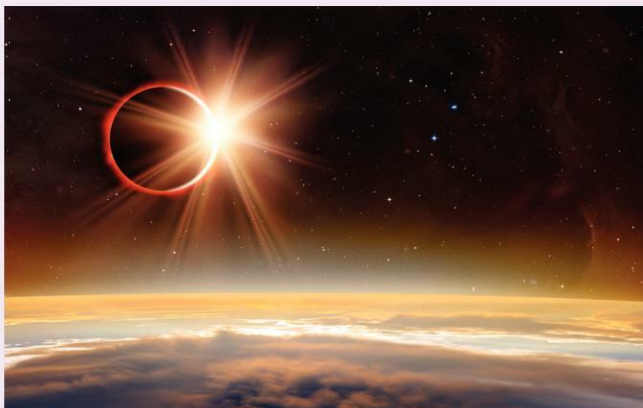
Uitdagende route → maak opdracht U6

Ondersteunende opdrachten

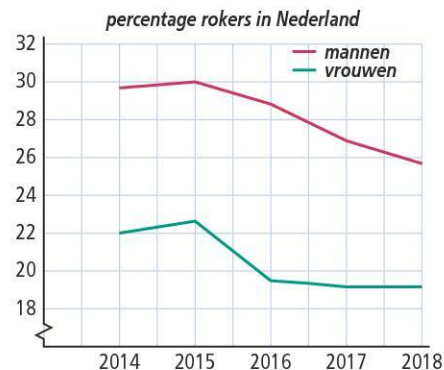
- 030**
- a** Het antwoord van 1900×580 is 1 102 000.
Vul in.
Je schuift de komma ... plaatsen naar links om het getal 1 102 000 te kunnen schrijven als $1,102 \times 10^{\dots}$, dus $1\,102\,000 = 1,102 \times 10^{\dots}$.
- b** De uitkomst van $30 : 60\,000\,000 = 0,000\,000\,5$.
Vul in.
 $0,000\,000\,5 = 5 \times 10^{\dots}$, want je schuift de komma ... plaatsen naar ...
- c** Ga na dat de uitkomst van $\frac{49}{199\,000\,000 + 300\,000}$ afgerond op twee decimalen gelijk is aan $2,46 \times 10^{-7}$.
- d** Vul in.
Om het getal $2,46 \times 10^{-7}$ in de normale notatie te schrijven, moet je de komma ... plaatsen naar ... schuiven. In de normale notatie wordt het getal ...

Uitdagende opdrachten

- U6** In de sterrenkunde worden afstanden vaak aangegeven in lichtjaren. Een lichtjaar is gelijk aan de afstand die licht in één jaar kan afleggen. De lichtsnelheid is ongeveer 300 miljoen meter per seconde. Afstanden worden ook aangegeven in astronomische eenheden (AE). Dat is de afstand van de aarde tot de zon, dus ongeveer 150 miljoen kilometer.
- a** Hoeveel keer zo groot is een lichtjaar als één AE?
- b** Hoelang doet het licht van de zon erover om de aarde te bereiken?



- 36** Je ziet gegevens over het rookgedrag van mannen en vrouwen van 18 jaar en ouder in Nederland tussen 2014 en 2018.
- Zijn deze gegevens absoluut of relatief?
 - In 2018 waren er in Nederland 1,344 miljoen rokende vrouwen en 1,746 miljoen rokende mannen. Hoeveel miljoen mensen van 18 jaar en ouder woonden er in Nederland in 2018?
 - Tussen 2014 en 2018 is het aantal mannen van 18 jaar en ouder toegenomen met 3,36%. Met hoeveel is het absolute aantal rokende mannen in de periode tussen 2014 en 2018 afgenomen?
 - In 2018 is het totaal aantal sigaretten dat per jaar gerookt werd afgenomen met 30,6% ten opzichte van 2014. In 2018 werden 9,815 miljard sigaretten gerookt. Hoeveel sigaretten werden er in 2014 gerookt? Geef je antwoord in de standaardvorm en rond het voorste getal af op één decimaal.



- 37** Een 50 meter wedstrijdbad mag maximaal 6 cm te lang zijn en nooit korter dan 50,00 m. Het is lastig om een zwembad zo nauwkeurig aan te leggen.
- Stel dat een 50 meter bad in werkelijkheid 6 cm te lang is. Voor een wedstrijd over 1500 meter moeten 30 banen worden gezwommen. Hoeveel meter heeft een zwemmer dan teveel afgelegd?
 - Stel dat een zwemmer de 1500 meter heeft gezwommen in dat bad en dat zijn tijd 14:45 minuten was. Wat zou zijn tijd zijn geweest in een zwembad dat exact 50 meter lang is, als hij precies even snel zwom?
- 38** Nederlanders verplaatsen zich lopend, fietsend, met de auto en met het openbaar vervoer. Een kwart van al onze verplaatsingen doen we met de fiets. Dit zijn jaarlijks ruim 4,5 miljard verplaatsingen waarbij we in totaal 15 miljard km fietsen. Gemiddeld maakt een Nederlander ieder jaar 300 fietsverplaatsingen, goed voor bijna 1000 km. In totaal leggen Nederlanders in eigen land jaarlijks bijna 200 miljard km af, waarvan 75% met de auto. Van alle verplaatsingen wordt 33% per auto als bestuurder en 15% als passagier gedaan.
- Hoeveel verplaatsingen zijn er in totaal per jaar in Nederland?
 - Welk deel van alle afgelegde kilometers is per fiets gedaan?
 - Welk deel van de afgelegde kilometers wordt op een andere wijze dan fiets of auto afgelegd?
 - Welk deel van de verplaatsingen per auto wordt als passagier gedaan?



- 39** De ongeadresseerde reclamefolder is er al een poosje en blijft ook nog wel even. Het onderzoek 'Thuis binnen Bereik', dat in 2009 gehouden is, geeft aan dat reclamefolders behoorlijk effectief zijn. Veel mensen die ze hebben bekeken, gaan tot actie over: men koopt een getoond product óf gaat een winkel bezoeken óf kijkt op een website. Volgens het onderzoek zorgen deze ongeadresseerde reclamefolders er voor dat 15% van de totale Nederlandse bevolking tot actie overgaat. Het onderzoek is gebaseerd op een aantal gegevens en aannames.

Het Centraal Bureau voor de Statistiek meldt voor 2009.

- Er zijn 7,313 miljoen huishoudens, waarvan 2,618 miljoen eenpersoonshuishoudens.
- Een meerpersoonshuishouden telt gemiddeld 2,3 personen ouder dan 16 jaar.
- Nederland heeft 16,53 miljoen inwoners.

De volgende aannames zijn gedaan.

- $\frac{1}{6}$ deel van de huishoudens heeft een 'ja/nee-sticker' en ontvangt dus geen folders.
- In verhouding zijn er evenveel eenpersoons- als meerpersoonshuishoudens met een sticker.
- In huishoudens waar de folders wel ontvangen worden, bekijkt driekwart van alle personen ouder dan 16 jaar deze folders.
- 27% van de personen die de folders bekijken, gaat tot actie over.
- Alle eenpersoonshuishoudens worden gevoerd door een persoon ouder dan 16 jaar.

Het genoemde percentage van 15% dat tot actie overgaat, lijkt erg hoog. Op basis van bovenstaande gegevens en aannames kun je onderzoeken of dit percentage juist is.

Onderzoek of het percentage van 15% juist is.

(Ontleend aan pilotexamen havo wiskunde A 2012, tijdvak 2)

Theorie

absoluut en relatief

Gegevens kunnen absoluut of relatief weergegeven zijn. Het werkelijke aantal is een absoluut gegeven. Een relatief gegeven is een verhoudingsgetal. Voorbeelden van relatieve gegevens zijn:

- een aantal ten opzichte van bijvoorbeeld 1 000 000.
- een percentage, dit is een hoeveelheid ten opzichte van 100.
- een promillage, dit is een hoeveelheid ten opzichte van 1000.

Voorbeeld

53 op elke 100 000 is $\frac{53}{100\,000}$ deel.

19% is $\frac{19}{100}$ deel.

77‰ (77 promille) is $\frac{77}{1000}$ deel.

- S1** Geef aan of de gegevens absoluut of relatief zijn.
- $\frac{11}{23}$ deel van een klas is een meisje.
 - In een klas zitten 12 meisjes.
 - 89% van de leerlingen in een klas vindt wiskunde leuk.

- S2** In de tabel zie je dat het gebruik van kunstmest in de landbouw in de jaren 2000-2007 flink is afgenomen.
- Met hoeveel procent is het gebruik van stikstof afgenomen?
 - Van welke van de stoffen is in deze periode het gebruik relatief het meest afgenomen?
 - Tussen 1985 en 2007 is het gebruik van stikstof met 50,3% afgenomen. Hoeveel ton stikstof werd er in 1985 gebruikt?

jaar	× 1000 ton		
	stikstof	fosfaat	kali
2000	300	55	68
2007	251	39	42

Theorie

standaardvorm of wetenschappelijke notatie

Grote en kleine getallen worden vaak in de standaardvorm of wetenschappelijke notatie geschreven. Dit is een getal tussen 1 en 10, vermenigvuldigd met een macht van 10.

De exponent geeft aan hoeveel plaatsen je de komma naar rechts of naar links moet verschuiven. Op sommige rekenmachines wordt bijvoorbeeld het getal $7,65 \times 10^8$ weergegeven als 7,65E8.

Voorbeeld

$$2\,700\,000\,000 = 2,7 \times 10^9$$

$$0,000\,98 = 9,8 \times 10^{-4}$$

$$816\,600 = 8,166 \times 10^5$$

$$0,007\,003 = 7,003 \times 10^{-3}$$

- S3** Bereken en schrijf je antwoord in de standaardvorm.
- 5 miljard $\times$ 20 miljard
 - $\frac{8 \times 10^{12}}{5 \times 10^5}$
 - $1,5 \times 10^6 \times 6 \times 10^8$
 - $3,5 \times 10^9 : (5 \times 10^2)$



- S4** De totale oppervlakte van alle oceanen en zeeën is ongeveer 360 miljoen km². Dit is 72% van het totale aardoppervlakte.
- Schrijf de totale oppervlakte van alle oceanen en zeeën in de wetenschappelijke notatie.
 - Geef de totale oppervlakte van alle oceanen en zeeën in m² in standaardvorm.
 - Bereken de totale aardoppervlakte in km².

Vaardigheid

Je kunt een deel van een hoeveelheid berekenen.

Je kunt op verschillende manieren een deel van een hoeveelheid berekenen, bijvoorbeeld $\frac{3}{7}$ deel van 112 kg.

Voorbeeld 1

Bereken $\frac{3}{7}$ deel van 112 kg.

Oplossing

$\frac{3}{7} = 0,428...$
 $0,428... \times 112 = 48$
 Dus 48 kg.

Voorbeeld 2

Bereken $\frac{3}{7}$ deel van 112 kg.

Oplossing

Direct invoeren op je rekenmachine geeft
 $\frac{3}{7} \times 112 = 48$ kg.
 Dus 48 kg.

Voorbeeld 3

Bereken $\frac{3}{7}$ deel van 112 kg.

Oplossing

$\frac{1}{7}$ deel is $112 : 7 = 16$
 $\frac{3}{7}$ deel is $3 \times 16 = 48$
 Dus 48 kg.

- S5** Bereken.
- $\frac{5}{7}$ deel van 42 personen
 - $\frac{4}{19}$ deel van 57 seconden
 - $\frac{2}{9}$ deel van 1233 km²
 - $\frac{6}{35}$ deel van 980 mieren
- S6** Bij de nationale vogeltelling in 2020 werden 1 581 156 vogels geteld.
- Van deze vogels was ongeveer $\frac{1}{5}$ deel de huismus. Hoeveel huismussen werden er geteld?
 - $\frac{1}{4}$ deel was een koolmees of pimpelmees. De verhouding tussen de aantallen koolmezen en pimpelmezen was 11 : 7. Hoeveel koolmezen werden er geteld?

Vaardigheid

Je kunt breuken met elkaar vermenigvuldigen.

Je kunt breuken met elkaar vermenigvuldigen door de tellers met elkaar te vermenigvuldigen en de noemers met elkaar te vermenigvuldigen.

Voorbeeld

Bereken $5\frac{1}{3} \times \frac{5}{6}$ en $1\frac{2}{5} : 3$.

Oplossing

$$5\frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{16}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{80}{18} = \frac{40}{9} = 4\frac{4}{9}$$

$$\frac{7}{5} : 3 = \frac{7}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{15}$$

S7 Bereken.

a $\frac{4}{9} \times \frac{5}{8}$

c $2\frac{3}{4} : 4$

b $6\frac{1}{3} \times \frac{9}{14}$

d $\frac{3}{11} : 8$

S8 Een korfbalteam speelde in een seizoen $\frac{15}{28}$ van alle wedstrijden thuis en won $\frac{2}{3}$ deel van deze thuiswedstrijden.

Welk deel van alle gespeelde wedstrijden waren gewonnen thuiswedstrijden?

Vaardigheid

Je kunt getallen afronden.

Bij afronden gebruik je de volgende regels.

- Als je moet afronden op bijvoorbeeld drie decimalen, kijk je eerst naar het volgende (in dit geval dus het vierde) cijfer achter de komma.
- Is dit cijfer 4 of lager, dan laat je het vierde en verdere cijfers achter de komma weg.
- Is dit cijfer 5 of hoger, dan maak je het derde cijfer achter de komma één hoger en laat je de volgende cijfers weg.

Bij grotere getallen kan het nodig zijn om op bijvoorbeeld tientallen of duizendtallen af te ronden.

Bij praktische problemen moet je altijd bedenken of je moet afwijken van de rekenregels voor afronden. Let goed op of je daarbij naar boven of naar beneden moet afronden.

Voorbeeld 1

Rond 9,4682 af op twee decimalen, op één decimaal en op een geheel getal.

Oplossing

Op twee decimalen afgerond wordt het 9,47, op één decimaal 9,5 en op een geheel getal 9.

Voorbeeld 2

Iris heeft 86 tegels nodig. De tegels worden verkocht in pakken van 12. Hoeveel pakken moet Iris kopen?

Oplossing

$86 : 12 = 7,16\dots$
Zij moet acht pakken kopen.

Voorbeeld 3

Rond het bedrag € 894.495,- af op honderdtallen en op duizendtallen.

Oplossing

Op honderdtallen afgerond wordt het € 894.500,-.
Op duizendtallen afgerond wordt het € 894.000,-.

S9 a Rond de volgende getallen af op twee decimalen.

A 24,1094

C 32,9595

B 1,0789

D 3,12049

- b** Een Amerikaanse auto heeft een tankinhoud van 16 gallon.
1 gallon komt overeen met 3,7854 liter.
Bereken de tankinhoud in liters en rond je antwoord verstandig af.

Vaardigheid

Je kunt met tijd, afstand en snelheid rekenen.

Voor het noteren van tijden is afgesproken dat tussen de uren, minuten en seconden een punt wordt gebruikt.

8.47,39 minuten betekent 8 minuten en $47\frac{39}{100}$ seconden.

Dit wordt ook wel genoteerd als 8:47,39 minuten.

Bij het berekenen van een gemiddelde snelheid moet je de tijd eerst omrekenen naar één tijdseenheid.

Voorbeeld

Op de Olympische spelen in 1992 won Ellen de Langen de 800 meter atletiek met een tijd van 1:55,54 minuten. Bereken haar gemiddelde snelheid in km per uur.

Oplossing

1:55,54 minuten is
 $1 \times 60 + 55,54 = 115,54$ seconden.

<i>afstand</i> in km	0,8	?
<i>tijd</i> in seconden	115,54	3600

$$0,8 \times 3600 = 115,54 \times ?$$
$$? = 0,8 \times 3600 : 115,54 = 24,92...$$

Haar gemiddelde snelheid was ongeveer 24,9 km per uur.

S10 Een trein rijdt een afstand van 32 km in 13:50 minuten.

- a** Bereken de gemiddelde snelheid van de trein in kilometer per uur. Rond je antwoord af op een geheel getal.
- b** Hoelang zou de trein erover doen om een afstand van 100 km af te leggen met dezelfde gemiddelde snelheid? Geef je antwoord in minuten en seconden.



- T1** In de periode 2008-2017 nam het aantal leden van de Nederlandse tennisbond (KNLTB) af. In de tabel staat voor een drietal jaren het aantal inwoners van Nederland, het aantal leden van de KNLTB en het aantal tennisverenigingen.

	<i>aantal inwoners Nederland</i>	<i>aantal leden KNLTB</i>	<i>aantal tennisverenigingen</i>
2008	16 405 399	719 985	1741
2012	16 730 348	674 696	1711
2017	17 081 507	570 431	1662

- Bereken de absolute afname van het aantal leden van de KNLTB tussen 2008 en 2012 in duizendtallen.
- Met hoeveel procent is het percentage inwoners van Nederland dat lid is van de KNLTB afgenomen tussen 2008 en 2017? Rond je antwoord af op één decimaal.
- Met hoeveel is het gemiddeld aantal leden van een tennisvereniging afgenomen tussen 2008 en 2017? Rond je antwoord af op één decimaal.



- T2** In het Verenigd Koninkrijk wordt nog vaak de inhoudsmaat pint gebruikt. Eén pint is gelijk aan 0,568 25 liter.

- Hoeveel glazen met een inhoud van 1 pint kun je vullen uit een vat met een inhoud van 60 liter?
- Hoeveel pints gaan er in 1 m^3 ?
- Een andere eenheid die veel gebruikt wordt, is een gallon. Eén gallon is gelijk aan 3,785 411 78 liter. Een glas in een kroeg heeft een inhoud van 0,5 pint. Hoeveel van deze glazen kun je helemaal vullen met één gallon?
- In een jaar werd 140,2 miljoen hectoliter frisdrank in het Verenigd Koninkrijk gedronken (1 hectoliter = 100 liter). Het Verenigd Koninkrijk had toen 66,27 miljoen inwoners. Hoeveel glazen van één pint werden er toen gemiddeld per inwoner gedronken?

- T3** De wielrenners Arnor en Javille beginnen tegelijk aan de beklimming van de Saint Clement. De klim is 24 km lang. Arnor klimt met een gemiddelde snelheid van 20 km per uur. Javille rijdt iets langzamer de berg op. Zijn gemiddelde snelheid is 19,2 km per uur.

- Hoelang doet Arnor over de klim? En Javille? Geef je antwoorden in minuten nauwkeurig.
- In de afdaling daalt Arnor met een gemiddelde snelheid van 72 km per uur en Javille daalt met een gemiddelde snelheid van 80 km per uur. De afdaling is 24 km lang. Wie wint de wedstrijd (klim plus afdaling)?

- T4** Twee broers kweken groenten en aardappelen op een stuk grond. Aad gebruikt $\frac{2}{5}$ deel van de grond en Cor de rest. Aad heeft groenten op $\frac{3}{4}$ deel van zijn gedeelte en Cor heeft groenten op $\frac{4}{5}$ deel van zijn gedeelte. Op welk deel van het gehele stuk grond staan aardappelen?

- T5** Een zwembad is gevuld met 3800 liter water. Er wordt wat chloor aan het zwembad toegevoegd. Er moet per 10 m³ water minimaal 80 mL chloor aan het water worden toegevoegd.
- Hoeveel mL chloor moet er minimaal in het water zitten?
 - Er zit nog $\frac{17}{19}$ deel van het water in het zwembad. Tabletten waarin 8 mL chloor zit, worden aan het water toegevoegd. Hoeveel tabletten moeten minimaal aan het water worden toegevoegd als er al 5 mL chloor in het water zit?

- T6** In november 2004 maakte energiebedrijf Essent de tarieven voor de levering van elektriciteit bekend voor het jaar 2005. In de tabel staan de bedragen, inclusief btw, voor huishoudens met een zogenaamde enkeltariefmeter. Zoals je kunt zien, kunnen klanten bij Essent kiezen uit drie tarieven. Familie Vliet gebruikt het standaardtarief.

<i>Keuze Tarief</i>	<i>vaste kosten per jaar</i>	<i>enkeltarief kWh-prijs</i>
Budget	€ 0,00	€ 0,0814
Standaard	€ 17,85	€ 0,0635
Plus	€ 35,70	€ 0,0602

kWh = kilowattuur

- Hoeveel moeten ze betalen als ze 4200 kWh gebruiken?
- Familie Vliet moet € 221,05 betalen. Bereken hoeveel kWh ze verbruikt hebben.
- In een consumentenonderzoek wil men graag een overzicht opnemen waarin een klant bij elk verbruik kan zien welk KeuzeTarief het voordeligst is. In het overzicht beperkt men zich tot een verbruik van 0 kWh tot 6000 kWh.

Bereken vanaf welk verbruik KeuzeTarief Standaard voordeliger is dan KeuzeTarief Budget en vanaf welk verbruik KeuzeTarief Plus voordeliger is dan KeuzeTarief Standaard.

- Essent kent ook tarieven voor huishoudens die een elektriciteitsmeter gebruiken waarmee onderscheid wordt gemaakt tussen laagtarief en normaal-tarief. Het laagtarief wordt berekend voor elektriciteitsverbruik in het weekend en 's nachts van 23.00 tot 7.00 uur, het normaal-tarief op de andere tijden. De tarieven in deze situatie staan in de tabel. De vaste kosten per jaar zijn hetzelfde als in de eerste tabel.

<i>Keuze Tarief</i>	<i>laagtarief kWh-prijs</i>	<i>normaal- tarief kWh-prijs</i>
Budget	€ 0,0520	€ 0,0970
Standaard	€ 0,0419	€ 0,0749
Plus	€ 0,0364	€ 0,0743

Mevrouw Kroes verbruikt jaarlijks 3500 kWh. Ze maakt gebruik van het Keuzetarief Standaard met enkeltarief. Ze schat dat ze 's nachts 1200 kWh verbruikt.

Onderzoek of het voor mevrouw Kroes voordelig is om over te stappen van het enkeltarief naar het laag- en normaal-tarief.

(Ontleend aan CE vwo Wiskunde A1 2007, tijdvak 2)

Je kunt een deel van een hoeveelheid berekenen.

E1 Bereken.

a $\frac{7}{9}$ deel van 117

c $\frac{10}{17}$ deel van 68

b $\frac{5}{12}$ deel van 72

d $\frac{2}{15}$ deel van 270

Je kunt breuken met elkaar vermenigvuldigen.

E2 Bereken.

a $\frac{6}{7} \times \frac{14}{15}$

c $\frac{3}{5} : 6$

b $\frac{1}{3} \times 3\frac{2}{13}$

d $5\frac{5}{8} : 11$

Je kunt getallen afronden.

E3 a Rond de getallen af op twee decimalen.

A 7,397

C 62,7581

B 21,0887

D 9,38042

b Op 1 januari 2017 had India 1 281 935 911 inwoners. Rond het aantal inwoners af op duizendtallen.

c Een inch is ongeveer 25,4 mm. René is 1,85 m lang. Hoe lang is René in inches?

d Frisdrank wordt vervoerd in kratten waarin 12 flessen passen. Hoeveel kratten heb je nodig om 110 frisdrankflessen te vervoeren?

Je kunt met tijd, afstand en snelheid rekenen.

E4 a Mike loopt bij een training 10 km in 39:05,68 minuten. Bereken zijn gemiddelde snelheid in km per uur.

b Paula fietst 78 km met een gemiddelde snelheid van 29,8 km per uur. Hoelang heeft Paula gefietst? Geef je antwoord in uren en minuten.

E5 Een restaurant houdt bij hoeveel en welke soort hoofdgerechten er in een jaar worden verkocht. Zo zie je dat het aantal verkochte vegetarische hoofdgerechten behoorlijk is toegenomen.

a Bereken de absolute en de relatieve toename van het aantal verkochte vegetarische hoofdgerechten tussen 2015 en 2020.

b Van welke soort hoofdgerecht is de relatieve afname van het aantal verkochten hoofdgerechten tussen 2010 en 2020 het grootst?

c Tussen 2000 en 2010 is het totaal aantal verkochte hoofdgerechten met ongeveer 10,5% afgenomen. Hoeveel hoofdgerechten werden er in 2000 in totaal verkocht?

	aantal verkocht ($\times 100$)		
	vlees	vis	vegetarisch
2010	85	35	10
2015	75	32	25
2020	56	26	43

- E6** Een pantoffeldiertje, een eencellig organisme, heeft een lengte die ligt tussen 50 μm en 300 μm . 1 μm (micrometer) is 10^{-6} m.
- Geef de lengte van een pantoffeldiertje in mm.
 - Als je een rij zou vormen van pantoffeldiertjes, hoeveel passen er dan minimaal en hoeveel maximaal op 1 meter?
- E7** Drie sportclubs beheren gezamenlijk een kantine. De voetbalclub krijgt 40% van de winst. De rest wordt verdeeld tussen de tennisclub en de korfbalclub in een verhouding 3 : 2. In 2020 was de winst € 82.600,-.
- Hoeveel procent van de winst is voor de tennisclub?
 - Bereken voor elk van de clubs het bedrag dat zij krijgen van de winst uit de kantine.
 - De korfbalclub besluit het bedrag in twee gelijke delen te verdelen. Eén deel gaat naar de training voor de jeugd en het andere deel wordt besteed aan nieuw materiaal. Hoeveel procent van de totale winst van de kantine gaat naar de jeugdtraining van de korfballers?
- E8** In 2011 werd de maximumsnelheid op de Afsluitdijk verhoogd van 120 km naar 130 km per uur. De lengte van de Afsluitdijk is 32 km.
- Hoeveel seconden tijdswinst kan deze verhoging van de maximale snelheid op dit traject opleveren?
 - Michael heeft een auto die bij een snelheid van 120 km per uur 1 liter benzine per 15 km gebruikt. Bij een snelheid van 130 km per uur gebruikt de auto 10% meer brandstof. Hoeveel liter benzine gebruikt Michael meer als hij over de Afsluitdijk 130 in plaats van 120 km per uur rijdt?
 - In 2020 werd de maximumsnelheid overdag op de Nederlandse snelwegen verlaagd naar 100 km per uur. Gerard rijdt op een stuk snelweg gemiddeld 100 km per uur. Hij doet er nu 1 uur en 6 minuten over. Hoeveel minuten doet hij er langer over dan toen hij 130 km per uur mocht rijden?
- E9** Een jaar heeft 365 dagen, en één keer per vier jaar 366 dagen. Rond 300 n.Chr. werd deze kalender in de Christelijke wereld ingevoerd. Omdat de aarde niet in 365,25, maar in 365,2422 dagen om de zon draait, werd in 1592 een correctie toegepast. De jaartallen die door 100 deelbaar zijn maar niet door 400, zijn geen schrikkeljaar.
- Bereken het aantal dagen in 400 jaar en bereken het gemiddelde aantal dagen per jaar over die periode.
 - Hoeveel seconden wijkt je antwoord op opdracht a af van 365,2422 dagen?



Gevoelstemperatuur

Als het waait, voelt het veel kouder aan dan de thermometer aangeeft. Dit wordt gevoelstemperatuur genoemd. In de grafiek zijn punten met een gelijke gevoelstemperatuur verbonden door vloeiende lijnen. Langs de horizontale as staat de temperatuur in graden Celsius en langs de verticale as de windsnelheid in km per uur. Zo kun je aflezen dat bij een temperatuur van -25°C en een windsnelheid van 30 km per uur, waarschuwniveau V van toepassing is. Terwijl bij een temperatuur van -25°C en een windsnelheid van 5 km per uur waarschuwniveau II geldt. De grafiek wordt gebruikt door het leger op Goose Bay Air Base in Canada voor werk-kledingadviezen. De waarschuwniveaus zijn:

- I Aangenaam, gewone kleding.
- II Werken en reizen onaangenaam, dikke kleding.
- III Werken en reizen gevaarlijk. Zware kleding.
- IV Onbeschermde huid loopt gevaar te bevriezen bij langere blootstelling. Extra zware kleding.
- V Onbeschermde huid bevriest direct. Meerdere lagen beschermende kleding verplicht.

Enzovoort.

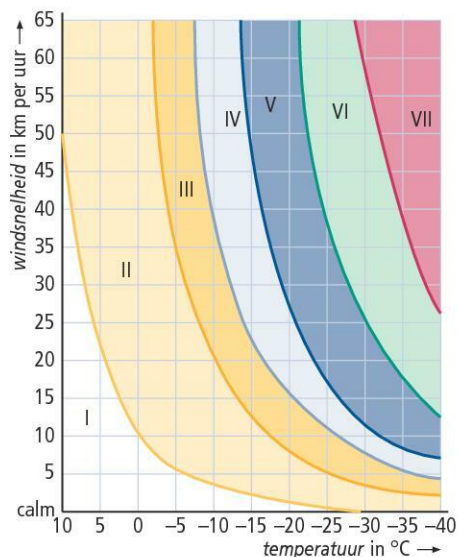
Er zijn verschillende formules in omloop om de gevoelstemperatuur te berekenen. Op basis van experimenten tijdens de derde poolexpeditie van Admiraal Byrd werd door de Amerikaanse onderzoekers Paul Siple en Charles Passel de formule $G_{S \& P} = 33 + (T - 33)(0,474 + 0,454 \cdot \sqrt{W} - 0,0454W)$ opgesteld. In deze formule is T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ op 1,50 meter hoogte en W is de windsnelheid in meter per seconde op 10 meter hoogte. In 1948 stelde de meteoroloog Arnold Court een aangepaste formule op: $G_C = 33 + (T - 33)(0,550 - 0,0454W + 0,417 \cdot \sqrt{W})$.

Opdracht

De formules verschillen van elkaar.

- Laat zien dat je bij 0°C de formule van Siple & Passel kunt schrijven als: $G_{S \& P} = 17,358 - 14,982 \cdot \sqrt{W} + 1,4982W$.
- Geef de formule van Court voor $T = 0$.
- Bereken bij welke windsnelheid de formules voor $T = 0$ dezelfde gevoelstemperatuur geven.

In april 2000 is de eerste 'Global International workshop on Windchill' georganiseerd, om te komen tot een internationale standaard voor de 'windchill equivalent temperature'. Daarbij werd de formule $G_J = 13,12 + 0,625T - 13,96w + 0,4867 \cdot T \cdot w$ met $w = (3,6 \cdot W)^{0,16}$ opgesteld.



In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Lineaire groei
- Recht evenredig en omgekeerd evenredig
- Gebieden
- Exponentiële groei



Lineaire groei

1

x	0	4	8	12	16
y	60	52	44	36	28

A

x	4	6	8	10	20
y	6	12	24	48	96

B

x	15	30	45	90	150
y	25,5	30	34,5	48	66

C

- Welke tabellen horen bij een lineair verband?
- Stel bij de tabellen die bij een lineair verband horen een formule op en bereken steeds welke x bij $y = 270$ hoort.

2 Tussen de variabelen M en w bestaat een lineair verband.

- Vul de tabel verder in.
- Stel een formule op bij de tabel.

w	1	2	7	10	...
M	...	18	...	42	51

3 Op 1 januari 2021 zwemmen in een groot meer 8850 vissen. Het aantal vissen neemt elke maand met 25 toe. Noem het aantal vissen in het meer N en de tijd in jaren t met $t = 0$ op 1 januari 2021.

- Uit welk gegeven kun je opmaken dat het verband tussen de variabelen N en t lineair is?
- Stel een formule op voor het verband tussen N en t .
- Bereken in welke maand van welk jaar er voor het eerst meer dan 12 000 vissen in het meer zullen zwemmen.

4 Merel vult met een tuinslang een groot cilindervormig vat. Ze begint het vat te vullen om 16.00 uur. In de tabel staat de hoogte in centimeters van het water in het vat. De hoogte van het water stijgt elke minuut evenveel.

- Laat zien dat de waterhoogte toeneemt met 1,4 cm per minuut.
- Vul de tabel verder in.
- Stel een formule op voor het verband tussen de waterhoogte h in cm en de tijd t in minuten na 16.00 uur.

<i>tijdstip</i>	<i>hoogte in cm</i>
16.15	22
16.20	29
16.25	...
16.30	...

Recht evenredig en omgekeerd evenredig

A	<table> <tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>8</td></tr> <tr><td>y</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>10</td><td>16</td></tr> </table>	x	1	2	3	5	8	y	2	4	6	10	16	B	<table> <tr><td>x</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td><td>20</td></tr> <tr><td>y</td><td>6</td><td>9</td><td>12</td><td>15</td><td>30</td></tr> </table>	x	4	6	8	10	20	y	6	9	12	15	30	C	<table> <tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>y</td><td>60</td><td>65</td><td>70</td><td>75</td><td>80</td></tr> </table>	x	1	2	3	4	5	y	60	65	70	75	80
x	1	2	3	5	8																																				
y	2	4	6	10	16																																				
x	4	6	8	10	20																																				
y	6	9	12	15	30																																				
x	1	2	3	4	5																																				
y	60	65	70	75	80																																				

- Waarom horen de tabellen A en B bij een recht evenredig verband?
- Welk verband hoort er bij tabel C?
- Stel bij elke tabel een formule op.

Theorie

Twee variabelen heten recht evenredig als geldt: als de ene variabele k keer zo groot wordt, dan wordt de andere variabele ook k keer zo groot. Zijn de variabelen x en y , dan heet y recht evenredig, of kortweg evenredig met x .

Een recht evenredig verband is een bijzonder lineair verband.

Er geldt $y = c \cdot x$ en dus ook $\frac{y}{x} = c$, waarbij c een constant getal is.

Twee variabelen heten omgekeerd evenredig als geldt: als de ene variabele k keer zo groot wordt, dan wordt de andere variabele k keer zo klein. Zijn de variabelen x en y , dan geldt $x \cdot y = c$, waarbij c een constant getal is.

Je kunt ook schrijven $y = \frac{c}{x}$ of $x = \frac{c}{y}$

Voorbeeld 1

	$\times 2$	$\times 3$				
x	1	2	3	4	5	6
y	5	10	15	20	25	30
	$\times 2$	$\times 3$				

Het verband tussen x en y is recht evenredig.
De formule is $y = 5x$.

Voorbeeld 2

r	5	10	30
Q	300	150	50

Het verband tussen Q en r is omgekeerd evenredig,
want $5 \times 300 = 1500$, $10 \times 150 = 1500$ en
 $30 \times 50 = 1500$.

De formules zijn $r \cdot Q = 1500$, $Q = \frac{1500}{r}$ of $r = \frac{1500}{Q}$

- 6 Tussen de variabelen A en t bestaat een recht evenredig verband.

a Vul de tabel verder in.

b Stel een formule op bij de tabel.

t	2	3	5	...	10
A	...	7,5	...	20	...

- 7 Tussen de variabelen K en a bestaat een omgekeerd evenredig verband.

a Vul de tabel verder in.

b Stel een formule op bij de tabel.

a	...	5	7,2	15	...
K	36	144	...	...	180

- 8 Stel bij elke tabel een formule op.

x	2	3	4	6	18
y	27	18	13,5	9	3

A

a	10	20	30	40	50
P	2	4	6	8	10

B

t	2	4	6	8	10
N	8	4	0	-4	-8

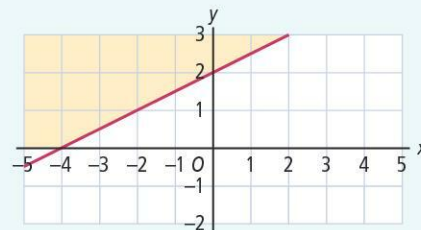
C

Gebieden in een assenstelsel

- 9 Gegeven is de ongelijkheid $3x + 5y > 30$.
- De lijn bij de vergelijking $3x + 5y = 30$ is de grenslijn. Waarom moet deze grenslijn gestippeld getekend worden?
 - Teken in een assenstelsel de grenslijn.
 - Vul $x = 0$ en $y = 0$ in de ongelijkheid in. Is het punt $(0, 0)$ een oplossing van de ongelijkheid?
 - Geef in het assenstelsel van opdracht b het gebied aan dat voldoet aan de ongelijkheid $3x + 5y > 30$.

Theorie

Een uitdrukking zoals $-x + 2y \geq 4$ heet een lineaire ongelijkheid. De grafiek van een lineaire ongelijkheid is een halfvlak. Het halfvlak wordt begrensd door de lijn die bij de bijbehorende lineaire vergelijking hoort. De lijn bij de vergelijking $-x + 2y = 4$ heet de grenslijn. Als de punten op de grenslijn niet voldoen aan de ongelijkheid, dan wordt de grenslijn gestippeld getekend.



- 10 Teken de halfvlakken bij elk van de lineaire ongelijkheden. Neem de t -as horizontaal.

- | | |
|-----------------------|----------------------|
| a $5t + 6N > 120$ | c $10t + 50N \geq 5$ |
| b $-0,8t + 2N \leq 4$ | d $t - N < 4$ |

- 11 Mirte besteedt per week maximaal €7,50 aan koffie en thee. Daarvoor wil ze minimaal twee koppen koffie en maximaal acht koppen thee kopen. Een kop koffie kost €0,75 en een kop thee kost €0,50.

- Het verband tussen het aantal koppen thee t en het aantal koppen koffie k wordt gegeven door de ongelijkheden $0,5t + 0,75k \leq 7,5$, $k \geq 2$ en $0 \leq t \leq 8$. Leg deze ongelijkheden uit.
- Geef in een assenstelsel het gebied aan waarin de mogelijke oplossingen van dit probleem liggen. Neem de k -as horizontaal.
- Waarom voldoen in dit geval alleen de roosterpunten van het getekende gebied?
- Hoeveel mogelijke oplossingen zijn er voor Mirte?



Exponentiële groei

x	0	1	2	3	4
y	2	6	18	54	172

A

x	1	2	3	4	5
y	1000	500	250	125	62,5

B

x	6	8	10	12	14
y	0,3	1,5	2,7	3,9	5,1

C

- 12**
- Welke tabellen horen bij een exponentieel verband?
 - Stel bij de tabellen die bij een exponentieel verband horen een formule op en bereken steeds de waarde van y als $x = 12$.

Theorie

Een exponentieel verband herken je op verschillende manieren.

- In een tabel wordt er bij gelijke stappen met hetzelfde getal vermenigvuldigd.
- Uit de tekst kun je opmaken dat er bij gelijke stappen een vast percentage bij komt of van af gaat.
- Uit de tekst kun je opmaken dat er bij gelijke stappen met hetzelfde getal vermenigvuldigd wordt.

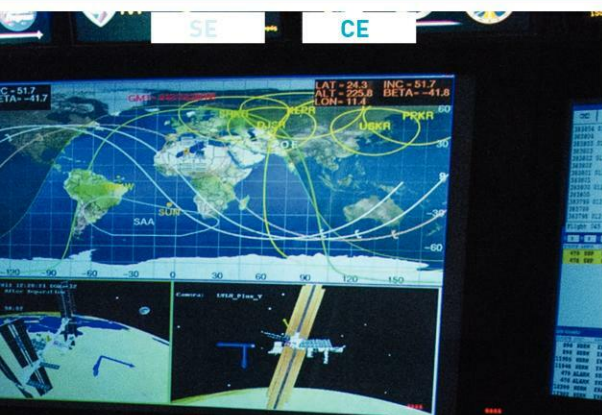
Bij een exponentieel verband tussen de variabelen x en y hoort een formule van de vorm $y = b \cdot g^x$. Hierin is b de beginhoeveelheid en g de groeifactor.

Bij een toename is de groeifactor groter dan 1.
Bij een afname ligt de groeifactor tussen 0 en 1.

- 13**
- Stel in de volgende gevallen een formule op voor het verband tussen het aantal N en de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 april 2021.
- Op 1 april 2021 waren er in een gebied 8645 kevers en dit aantal neemt jaarlijks met 8% toe.
 - Op 1 april 2022 is het aantal sprinkhanen 84 000 en dit aantal halveert elk jaar.
 - Het aantal konijnen in een gebied neemt exponentieel toe. Tussen 1 april 2021 en 1 mei 2021 is het aantal konijnen toegenomen van 5214 naar 5321.

- 14**
- In een tuinwinkel neemt de verkoop van robotgrasmaaiers elk jaar met 16,3% toe. In 2018 werden er 50 robotgrasmaaiers per jaar verkocht. Noem het aantal verkochte robotgrasmaaiers per jaar R en de tijd in jaren t met $t = 0$ het jaar 2018.
- Stel een formule op voor het verband tussen R en t .
 - Bereken in welk jaar er voor het eerst meer dan 400 robotgrasmaaiers worden verkocht.
 - In 2018 werden er in totaal 590 grasmaaiers verkocht. Dit aantal neemt jaarlijks met 20 toe. Bereken hoeveel procent van de grasmaaiers die verkocht worden in 2030 een robotgrasmaaiër zal zijn.





In dit hoofdstuk

Om statistische uitspraken te kunnen doen over een populatie neem je een representatieve en aselechte steekproef. Op basis van deze steekproef trek je conclusies. Je hebt geleerd hoe je de data uit een onderzoek kunt onderzoeken met behulp van centrummaten en spreidingsmaten. Ook heb je geleerd dat je statistische variabelen kunt onderverdelen in kwantitatieve en kwalitatieve variabelen.

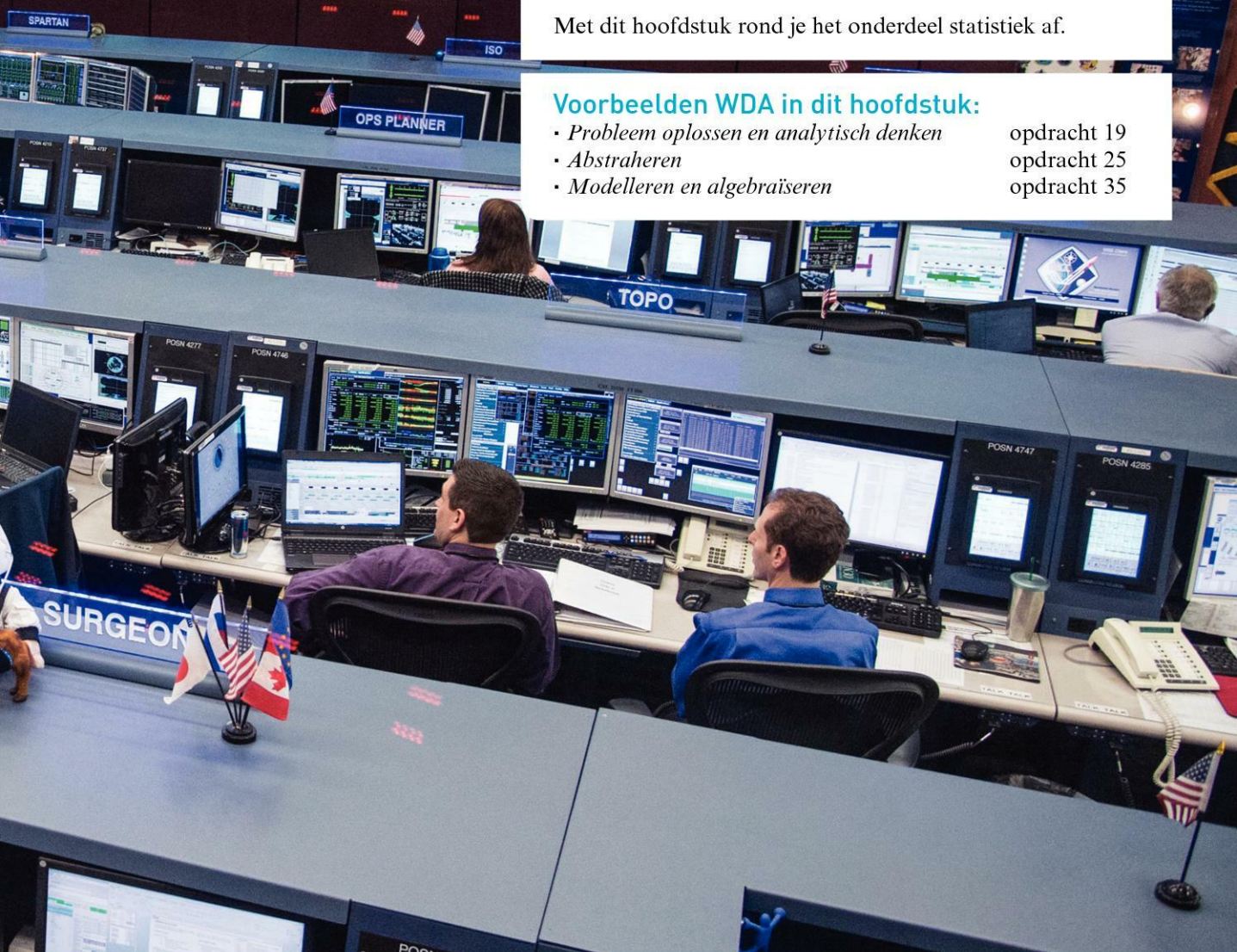
In dit hoofdstuk ga je zien hoe je kwantitatieve en kwalitatieve variabelen weer kunt onderverdelen. Verder ga je groepen vergelijken. Je kunt dit doen met grafieken zoals boxplots en relatieve somfrequentiepolygonen, maar ook met formules.

Met dit hoofdstuk rond je het onderdeel statistiek af.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk:

- *Probleem oplossen en analytisch denken*
- *Abstraheren*
- *Modelleren en algebraïseren*

opdracht 19
opdracht 25
opdracht 35



Theorie

Statistiek is de naam van het vakgebied dat zich bezighoudt met het verzamelen, ordenen, samenvatten en analyseren van gegevens. Deze gegevens worden **data** genoemd en de verzamelde data vormen een **dataset**. Een **statistisch onderzoek** begint met een aantal vragen en de vaststelling over welke doelgroep het onderzoek gaat. Die doelgroep heet de **populatie**. Je gaat na op welke **statistische variabelen** het onderzoek betrekking heeft en je verzamelt data bij die variabelen. Die variabelen kunnen verschillende **waarden** aannemen. Je ordent de dataset om meer overzicht te krijgen. Uitspraken gedaan naar aanleiding van een statistisch onderzoek worden **statistische uitspraken** genoemd.

Voorbeeld

In een statistisch onderzoek wordt onderzoek gedaan naar het verband tussen het geslacht en het rapportcijfer voor muziek.

In dit onderzoek zijn de statistische variabelen geslacht en rapportcijfer muziek. De variabele geslacht kan de waarden man en vrouw aannemen. De variabele rapportcijfer muziek kan de waarden 1,0 tot en met 10,0 met tussenstappen van 0,1 aannemen.

- V1** Marloes heeft van twee kastanjabomen het gewicht van de kastanjes bepaald. Boom A staat op een parkeerplaats, boom B staat in een park.
- Wat zijn de data van haar onderzoek?
 - Welke waarden neemt de variabele boom aan?
 - Welke tweede variabele staat in de tabel? Welke waarden neemt deze variabele aan?
 - Geef voor zowel boom A als boom B, het gemiddelde, de modus en de mediaan voor het gewicht van de kastanjes.
 - Ga na of de drie centrummaten, gemiddelde, mediaan en modus, dezelfde boom aanwijzen met de zwaarste kastanjes.
 - De standaardafwijking van het gewicht van de kastanjes van boom A is 1,70 gram. Bij boom B is dat 1,39 gram. Welke statistische uitspraak kun je doen op grond van deze gegevens?

gewicht in grammen	boom	
	A	B
4	6	0
5	10	0
6	10	5
7	16	4
8	11	15
9	7	18
10	3	13
11	1	9
totaal	64	64

→ Instructie rekenmachine | Centrummaten

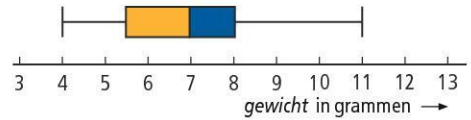
Theorie

Een **spreidingsmaat** geeft aan of de waarnemingsgetallen dicht bij elkaar of juist ver van elkaar liggen.

Spreidingsmaten zijn:

- de spreidingsbreedte, het verschil tussen het hoogste en het laagste waarnemingsgetal.
- de interkwartielafstand of kwartielafstand, het verschil tussen het derde kwartiel Q_3 en het eerste kwartiel Q_1 .
- de standaardafwijking of standaarddeviatie, een maat voor de spreiding ten opzichte van het gemiddelde.

- V2** De boxplot hoort bij de data van boom A van opdracht V1.
- Hoe groot is de spreidingsbreedte van het gewicht van de kastanjes?
 - En hoe groot is de kwartielf afstand van het gewicht van de kastanjes?
 - Teken ook de boxplot van boom B.



- V3** Gegeven zijn twee rijen getallen.
- A 10, 15, 15, 16, 17, 17, 22
- B 10, 10, 10, 16, 22, 22, 22
- Hoe kun je zonder berekeningen zien dat bij beide rijen het gemiddelde gelijk is aan 16?
 - De standaardafwijking van rij A is 3,30. Is de standaardafwijking van rij B groter of kleiner dan die van rij A? Leg je antwoord uit.
 - Bij alle getallen in rij A wordt 2 opgeteld. Geef het gemiddelde en de standaardafwijking van deze nieuwe rij. Leg je antwoord uit.

Theorie

Statistische variabelen kun je verdelen in **kwantitatieve** variabelen en **kwalitatieve** variabelen. De waarde van een kwantitatieve variabele is een hoeveelheid uitgedrukt in een getal. De 'waarde' van een kwalitatieve variabele geeft een kenmerk weer.

Voorbeeld

Voorbeelden van kwantitatieve variabelen zijn leeftijd, lengte en geluidssterkte in dB. Voorbeelden van kwalitatieve variabelen zijn huidskleur, postcode en type woning.

- V4** In het steelbladdiagram zie je de cijfers voor een proefwerk natuurkunde van de jongens en de meisjes in een 5 havo klas. Het laagste cijfer bij de jongens was een 3,3.
- Welke statistische variabelen staan in het steelbladdiagram?
 - Zijn deze statistische variabelen kwantitatief of kwalitatief?
 - Hoe groot is de spreidingsbreedte van de cijfers bij de jongens? En bij de meisjes?
 - Bereken het gemiddelde, de mediaan en de modus van de cijfers van de jongens.
 - Je kunt voor de hele klas (jongens en meisjes samen) een klassenindeling bij de cijfers maken met als laagste klasse [2,5; 3,5). Welke klasse is de modale klasse?

jongens					meisjes				
				3	3				9
			2	5	9	4			8
			2	5	6	5	0	6	7
			5	9	9	6	4	7	
				2	5	7	4	4	5
					8	8	1	1	9
						9	2	5	

13.1 Percenteren

Je leert • hoe je percenteert

Leerroutes • ondersteunend: 1—2—03—3—4
 • doorlopend: 1—2—3—4—5
 • uitdagend: 1—3—4—5—U1

Uit een onderzoek blijkt dat op een school 80% van de mannelijke docenten en 60% van de vrouwelijke docenten een hoge werkdruk ervaart.

- Kun je de conclusie trekken dat op deze school meer mannelijke dan vrouwelijke docenten een hoge werkdruk ervaren?



geslacht	afstand verspringen in cm			totaal
	[100; 200)	[200; 300)	[300; 400)	
jongen	0	12	28	40
meisje	1	21	33	55
totaal	1	33	61	95

- 1 In de kruistabel zie je de resultaten van het verspringen tijdens een sportdag. Je gaat de resultaten van de jongens en de meisjes vergelijken.
 - a Om welke statistische variabelen gaat het hier? Zijn ze kwantitatief of kwalitatief?
 - b Welke waarden nemen de variabelen aan?
 - c Hoeveel procent van de jongens heeft minstens 300 cm gesprongen? Bereken dit percentage ook voor de meisjes.
 - d Volgens Gesine hebben de meisjes beter gesprongen dan de jongens.
Leg uit dat Gesine deze bewering op de absolute frequenties baseert.
 - e Welke conclusie zou jij trekken?
 - f Gesine wil berekenen hoeveel procent van de leerlingen die tussen de 200 en 300 cm hebben gesprongen een meisje is. Welk getal moet zij als totaal nemen? Bereken dit percentage.

Theorie

Om conclusies uit kruistabellen te kunnen trekken, moet je vaak overgaan op relatieve frequenties. Je kunt dit bijvoorbeeld doen door percentages te berekenen. Je noemt dit **percenteren**. Om te percenteren moet je steeds bepalen welk getal je als totaal moet gebruiken.

Voorbeeld

In de tabel zie je hoeveel meisjes en jongens op een school hebben gekozen voor wiskunde A en voor wiskunde B.

geslacht	wiskunde		totaal
	A	B	
jongen	27	56	83
meisje	35	51	86
totaal	62	107	169

Bereken hoeveel procent van de meisjes voor wiskunde A heeft gekozen.

Oplossing

Om te berekenen hoeveel procent van de meisjes voor wiskunde A heeft gekozen, neem je als totaal het totaal aantal meisjes. Er zijn in totaal 86 meisjes.

Van de 86 meisjes, hebben er 35 voor wiskunde A gekozen.

$$35 : 86 \times 100\% \approx 40,7\%$$

Ongeveer 40,7% van de meisjes heeft voor wiskunde A gekozen.

- 2
- Welke statistische uitspraak kun je doen op basis van de berekening in het voorbeeld?
 - Je kunt ook nagaan welke soort wiskunde naar verhouding de meeste jongens gekozen hebben. Welk getal moet je dan als totaal nemen?
 - Ga na welke wiskunde naar verhouding de meeste jongens gekozen hebben.

Ondersteunende route → maak opdracht 03

profiel	cijfer centraal schriftelijk examen geschiedenis						totaal
	3,0-3,9	4,0-4,9	5,0-5,9	6,0-6,9	7,0-7,9	8,0-8,9	
CM	2	6	15	20	10	0	53
EM	1	6	24	15	14	2	62
NG	0	0	0	1	2	0	3
NT	0	0	0	0	0	1	1
totaal	3	12	39	36	26	3	119

- 3
- H
- In de kruistabel zie je de behaalde cijfers op het centraal schriftelijk examen bij het vak geschiedenis.
- Over welke statistische variabelen gaat het bij deze data?
 - Bereken per profiel hoeveel procent van de leerlingen minimaal een 6,0 heeft behaald.
 - Welke statistische uitspraak kun je doen naar aanleiding van de resultaten van opdracht b?
 - Joost beweert dat de laagste cijfers zijn behaald door leerlingen met het profiel EM.
Geef een argument voor en een argument tegen zijn bewering. Licht je argumenten toe met berekeningen.

- 4** Tijdens de coronacrisis werd op een middelbare school voor het eerst onderwijs op afstand aangeboden. Na de crisis werd aan alle leerlingen gevraagd aan welk type onderwijs ze de voorkeur geven: onderwijs op afstand, onderwijs op school of een combinatie van beide. In de tabel zie je de resultaten.
- Bereken hoeveel procent van de leerlingen op de havo zit.
 - Bereken hoeveel procent van de vmbo-leerlingen de voorkeur geeft aan onderwijs op afstand.
 - Bij welk niveau geven naar verhouding de meeste leerlingen de voorkeur aan een combinatie van onderwijs op afstand en onderwijs op school?
 - De directeur van de school vermoedt dat ten opzichte van de havo/vwo-leerlingen meer vmbo-leerlingen de voorkeur geven aan onderwijs op afstand. Ga na of de data dit vermoeden ondersteunen.
 - Welk advies zou jij de school op basis van deze gegevens geven als ze het onderwijs opnieuw zouden willen inrichten?

	vmbo	havo	vwo
afstand	81	27	10
combi	62	56	48
school	88	44	31
totaal	231	127	89



- 5** Er is onderzoek gedaan naar de verschillende manieren waarop mensen zich verplaatsen. Er is onderscheid gemaakt tussen verplaatsingen van minder dan 7,5 km en verplaatsingen van minstens 7,5 km. Je ziet bijvoorbeeld in de tabel dat alle mensen die lopen, een afstand van minder dan 7,5 km hebben afgelegd.
- Om welke statistische variabelen gaat het hier?
 - Geef de betekenis van het percentage 2%.
 - Hoeveel procent van de mensen die fietsen, leggen een afstand van minstens 7,5 km af? En hoeveel procent is dit bij de trein?
 - Mag je uit je antwoorden van opdracht c concluderen dat bij afstanden van minstens 7,5 km de trein veel vaker gebruikt wordt dan de fiets? Verklaar je antwoord.

	< 7,5 km
fiets	70%
autobestuurder	51%
autopassagier	54%
lopen	100%
bus, tram, metro	42%
trein	2%
overig	60%

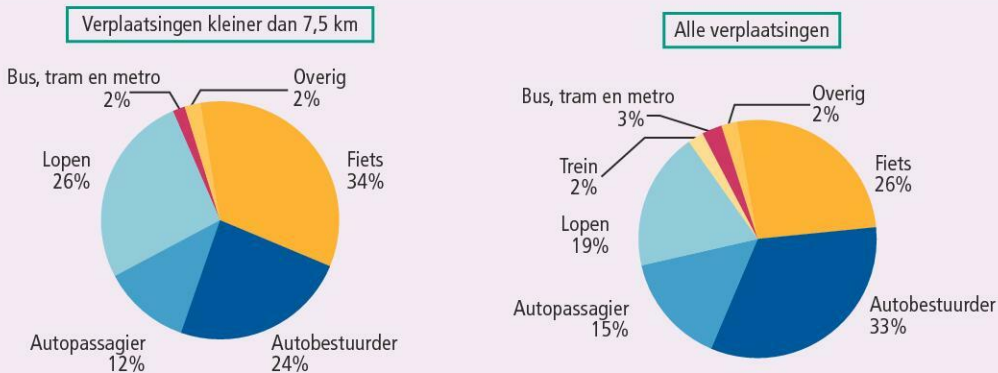
Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

	<i>bruto maandsalarissen in euro's</i>				
<i>geslacht</i>	[0, 1500>	[1500, 3000>	[3000, 4500>	≥ 4500	totaal
mannen	839	852	282	1	1914
vrouwen	1051	411	160	4	1686
totaal	1890	1263	442	5	3600

- 03** In de tabel zie je de bruto maandsalarissen van alle werknemers binnen een bedrijf.
- Over welke statistische variabelen gaan deze data?
 - Hoeveel werknemers verdienen tussen 1500 en 3000 euro per maand? En hoeveel daarvan zijn vrouw?
 - Bereken hoeveel procent van de werknemers met een inkomen tussen 1500 en 3000 euro een vrouw is.
 - Waarom neem je als totaal 1914 als je berekent hoeveel procent van de mannen minstens 4500 euro verdient?
 - Bereken voor zowel de mannen als de vrouwen het percentage dat minstens 4500 euro verdient.
 - Op basis van de klasse ≥4500 beweert de directeur dat vrouwen hogere salarissen hebben.
Geef een argument waarom mannen hogere salarissen hebben.

Uitdagende opdrachten



- U1** In opdracht 5 heb je gezien dat 70% van de mensen die zich per fiets verplaatst, minder dan 7,5 km aflegt. In de cirkeldiagrammen zie je hoe de verschillende vervoersmiddelen zijn verdeeld over de verplaatsingen kleiner dan 7,5 km en over het totaal aantal verplaatsingen. Bereken hoeveel procent van de verplaatsingen van minstens 7,5 km per fiets wordt afgelegd.

13.2 Continu, discreet, nominaal en ordinaal

Je leert

- wat continue en discrete variabelen zijn
- wat nominale en ordinale variabelen zijn

Leerroutes

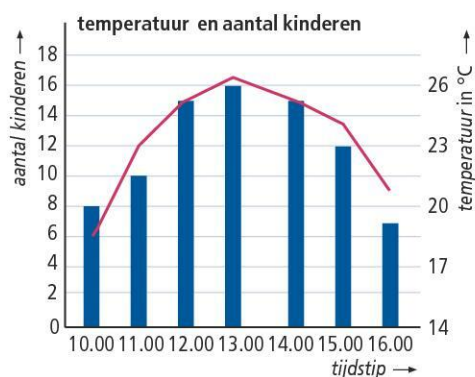
- ondersteunend: 6—07—8—9—010—11—12—13
- doorlopend: 6—7—8—9—10—11—12—13
- uitdagend: 6—8—9—10—11—12—13—U2

Een docent wiskunde geeft altijd een schriftelijke overhoring bestaande uit 15 vragen. Per vraag kan een leerling 0 of 1 punt verdienen. Het valt Claire op dat er in haar klas met 20 leerlingen altijd twee of meer leerlingen zijn met hetzelfde cijfer.

- Hoe kan het dat er steeds twee of meer leerlingen hetzelfde cijfer hebben?



- 6 Bij een speeltterrein is op een dag elk uur genoteerd hoeveel kinderen er waren en wat de temperatuur was. Op de linker as kun je met het staafdiagram het aantal kinderen aflezen. Op de rechter as kun je met het rode lijndiagram de temperatuur aflezen.
- Leg uit dat de variabelen aantal kinderen en temperatuur beide kwantitatief zijn.
 - Welke minimum temperatuur en welke maximum temperatuur zijn er gemeten?
 - Leg uit dat de temperatuur alle waarden tussen de minimum en maximum temperatuur heeft aangenomen.
 - Hoeveel kinderen waren er minimaal en hoeveel kinderen waren er maximaal op het speeltterrein aanwezig?
 - Welke waarden kan het aantal kinderen hebben aangenomen?



Theorie

De waarde van een **kwantitatieve** variabele is een getal. Je kunt deze variabelen verwerken in grafieken zoals lijndiagrammen en staafdiagrammen. Kwantitatieve variabelen kunnen **continu** of **discreet** zijn. Een discrete variabele neemt alleen bepaalde waarden aan. Een continue variabele kan alle waarden op een interval aannemen. Je kunt de mogelijke waarden van een continue variabele voorstellen door een aaneengesloten (continue) lijn. De mogelijke waarden van een discrete variabele kun je voorstellen met losse punten.

Voorbeeld

De voetlengte van peuters is een continue variabele, want je kunt de waarden voorstellen als een aaneengesloten lijn.



De schoenmaat van peuters is een discrete variabele, want je kunt de waarden voorstellen als losse punten.



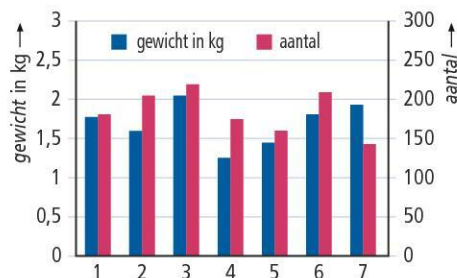
Ondersteunende route → maak opdracht 07

- 7** Zijn de volgende kwantitatieve variabelen discreet of continu? Licht je antwoord toe.
- H**
- De score die iemand haalt op multiplechoicetest.
 - De duur van een broedperiode van zwanen.
 - Het gewicht van een bospaddenstoel.
- 8** Bij een onderzoek naar de opbrengst van zeven spruitjesplanten is gekeken naar het totale gewicht van de spruitjes per plant en het aantal spruitjes per plant.
- Om welke twee variabelen gaat het?
 - Welke variabele is continu? En welke variabele is discreet?
 - Welke plant heeft gemiddeld de zwaarste spruitjes?
 - En welke plant heeft gemiddeld de lichtste spruitjes?
- 9** Op een school in Engeland is in een klas een proefwerk wiskunde gemaakt. In de tabel zie je de resultaten.

	beoordeling				
geslacht	A	B	C	D	E
jongens	6	4	2	3	1
meisjes	4	4	1	0	0

De variabelen zijn geslacht en beoordeling. De hoogste beoordeling is A en de laagste beoordeling is E.

- Welke waarden neemt de variabele geslacht aan? En welke waarden neemt de variabele beoordeling aan?
- Waarom zijn beide variabelen kwalitatief?
- Je zou ook de rij van de meisjes en de rij van de jongens kunnen omdraaien.
Waarom zou het niet logisch zijn om de kolommen van de beoordelingen A en B om te draaien?



Theorie

De 'waarde' van een **kwalitatieve** variabele geeft een kenmerk weer. Soms worden kwalitatieve variabelen met een getal weergegeven, dat getal stelt dan een kenmerk voor. Kwalitatieve variabelen kun je onderverdelen in **nominale** en **ordinale** variabelen.
Bij nominale variabelen kun je geen logische volgorde vastleggen.
Bij ordinale variabelen kan dat wel, bijvoorbeeld van klein naar groot.

Voorbeeld

Huisdier is een nominale variabele. Er is geen logische volgorde vast te leggen.

hond – cavia – konijn – goudvis – kat

Het aantal sterren van een hotel is een ordinale variabele. Je kunt een logische volgorde vastleggen, bijvoorbeeld van weinig naar veel.

★ – ★★ – ★★★ – ★★★★★

Ondersteunende route → maak opdracht 010

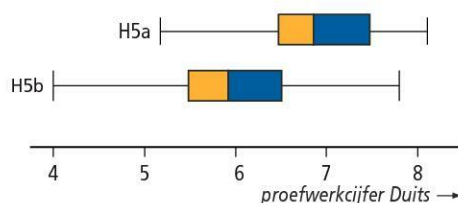
- 10** Zijn de volgende kwalitatieve variabelen nominaal of ordinaal? Licht je antwoord toe.

H

- Het geslacht van een hond.
- De rang in het leger.
- De oogkleur van een mens.
- Het beroep van een persoon.

- 11** In twee havo 5-groepen Duits is dezelfde toets afgenomen. De resultaten zijn verwerkt in twee boxplots.

- Om welke variabelen gaat het hier?
- Welke variabele is kwantitatief? Is deze variabele continu of discreet?
- Welke variabele is kwalitatief? Is deze variabele nominaal of ordinaal?
- In welke groep is de toets het beste gemaakt?
- Robin beweert dat de standaardafwijking van de proefwerkcijfers in beide klassen gelijk is. Kun je dit uit de boxplots afleiden? Leg je antwoord uit.



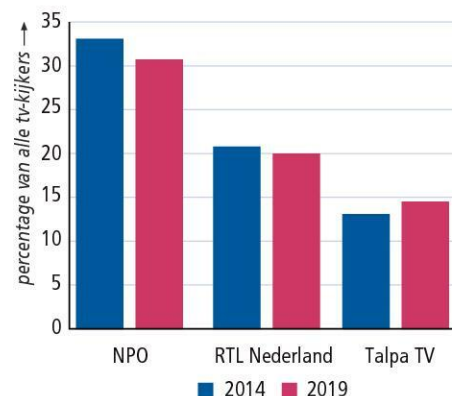
- 12** Een kledingwinkel heeft een bestelling geplaatst voor T-shirts. In de tabel zie je welke kleuren en maten ze besteld hebben.

- Welke variabelen staan in de tabel?
- Leg uit dat deze variabelen kwalitatief zijn en geef aan of deze variabelen nominaal of ordinaal zijn.
- Hoeveel procent van de bestelde T-shirts maat L waren blauw?
- En hoeveel procent van de rode bestelde T-shirts waren S?

	maat				
kleur	S	M	L	XL	XXL
zwart	12	12	20	20	8
rood	12	12	8	8	5
blauw	10	10	15	15	10
groen	8	8	8	5	5

- 13** In Nederland zijn drie grote omroeporganisaties, de NPO, RTL en Talpa TV (voorheen SBS). In het diagram is voor deze omroeporganisaties het percentage kijkers per omroeporganisatie voor de jaren 2014 en 2019 weergegeven. In 2014 keek 33% van de tv-kijkers naar de NPO.

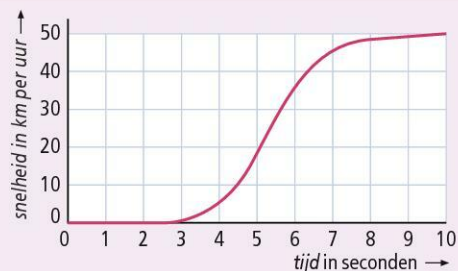
- Welke statistische variabelen zijn in het diagram verwerkt?
- Zijn deze statistische variabelen kwantitatief of kwalitatief?
- Geef ook aan of de variabelen continu, discreet, nominaal of ordinaal zijn. Leg je antwoord uit.
- Leg uit hoe uit het diagram volgt dat er naast NPO, RTL en Talpa TV nog meer omroeporganisaties zijn.
- In 2019 had RTL gemiddeld 388 000 kijkers per dag. Hoeveel tv-kijkers waren er in 2019 gemiddeld per dag bij alle omroeporganisaties samen?



Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

- 07** Iemand gooit met een dobbelsteen en noteert het aantal ogen.
- Geef de mogelijke uitkomsten weer op een getallenlijn.
 - Is het aantal ogen van een dobbelsteen een continue of een discrete variabele?
 - In de grafiek zie je de snelheid van een optrekkende auto.
Welke snelheden worden aangenomen?
 - Geef de snelheden weer op een getallenlijn.
 - Is de snelheid een continue of een discrete variabele?
 - Zijn de volgende variabelen discreet of continu? Licht je antwoord toe.
 - Het aantal winegums in een zakje.
 - De duur van een winterslaap van een bruine beer.
 - Het gewicht van een stuk kaas.



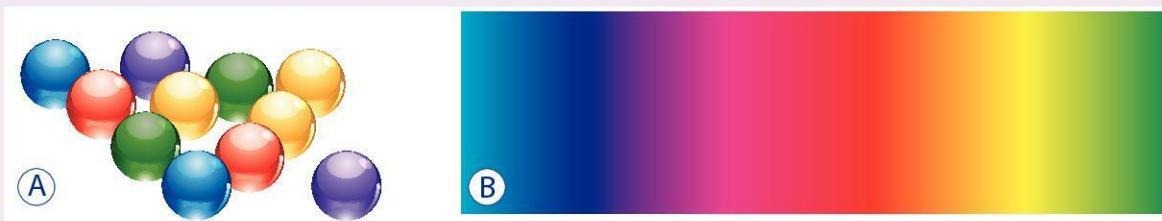
- 010** Je ziet een deel van een enquête.
- Geef vier mogelijke waarden die de variabele antwoord vraag 1 kan aannemen.
 - Leg uit dat deze variabele nominaal is.
 - Welke waarden kan de variabele antwoord vraag 2 aannemen?
 - Is deze variabele nominaal of ordinaal?
 - Zijn de volgende variabelen nominaal of ordinaal? Licht je antwoord toe.
 - De maand waarin iemand geboren is.
 - De haarkleur van een persoon.
 - Het telefoonnummer.

Vraag 1
Wat is uw woonplaats?

Vraag 2
In hoeverre bent u het eens met de stelling 'In Nederland zijn te veel regels'?

- Helemaal oneens
- Oneens
- Eens
- Helemaal eens

Uitdagende opdrachten



- U2**
- Waarom is de variabele kleur in afbeelding A een kwalitatieve variabele?
 - Is deze variabele in afbeelding A nominaal of ordinaal?
 - In afbeelding B kun je de variabele kleur opvatten als een kwantitatieve variabele.
Leg uit waarom.
 - Is de variabele kleur in afbeelding B discreet of continu?

13.3 Groepen grafisch vergelijken

Je leert

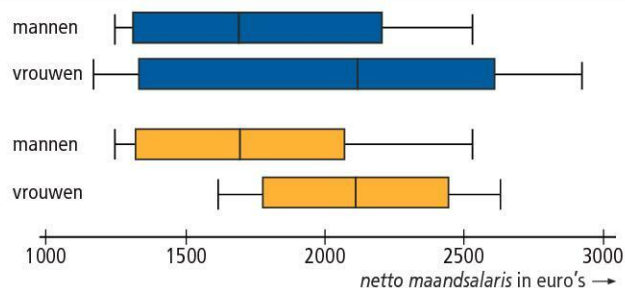
- hoe je groepen vergelijkt met boxplots
- hoe je groepen vergelijkt met relatieve somfrequentiepolygonen

Leerroutes

- ondersteunend: 14—015—16—17—018—19
- doorlopend: 14—15—16—17—18—19
- uitdagend: 14—16—17—18—19—U3

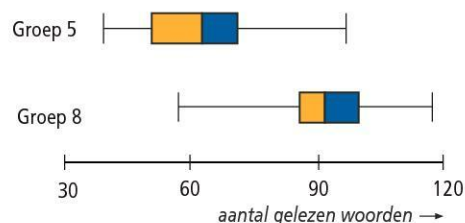
De bovenste twee boxplots geven de netto maandsalarissen van de mannen en de vrouwen bij bedrijf A weer en de onderste boxplots bij bedrijf B.

- Bij welk bedrijf vind jij het verschil in netto maandsalarissen tussen de mannen en de vrouwen het grootst?



- 14 Om vast te stellen hoe snel jonge kinderen kunnen lezen, moeten kinderen binnen één minuut zoveel mogelijk woorden voorlezen. Naarmate kinderen ouder worden, zouden ze sneller moeten kunnen lezen. Op een basisschool is de test afgenomen bij leerlingen in groep 5 en leerlingen in groep 8. De resultaten zijn verwerkt in twee boxplots.

- Hoeveel woorden heeft de leerling uit groep 5 met de meeste woorden gelezen?
- Bereken de kwartielafstand van het aantal gelezen woorden in groep 5 en in groep 8.
- De box is het interval van het eerste tot en met het derde kwartiel.
Overlappen de boxen elkaar als je de boxplot van groep 5 op die van groep 8 zou leggen?
- Vind je het verschil tussen de prestaties van de groepen klein of groot?

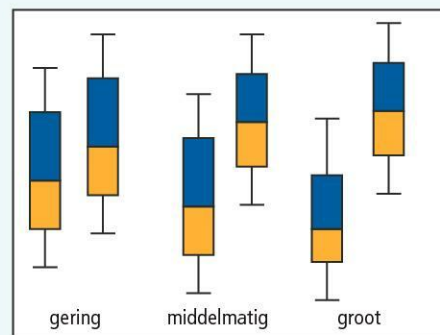


Theorie

Je kunt boxplots gebruiken om populaties of deelpopulaties te vergelijken. Om twee **boxplots** te **vergelijken**, kijk je naar de ligging van de medianen en de boxen. De box is het interval vanaf het eerste kwartiel tot en met het derde kwartiel.

Je gebruikt de volgende vuistregels:

- als de boxen elkaar niet overlappen, dan zeggen we 'het verschil is groot'.
- als de boxen elkaar wel overlappen en een mediaan van een boxplot buiten de box van de andere boxplot ligt, dan zeggen we 'het verschil is middelmatig'.
- in alle andere gevallen zeggen we 'het verschil is gering'.



Voorbeeld

Twee winkels A en B hebben een jaar lang bijgehouden hoeveel klanten er elke dag in de winkel waren. De resultaten zijn verwerkt in de boxplots.

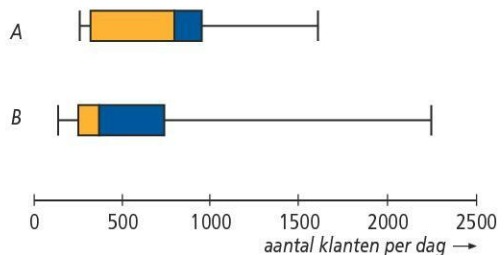
Ga na of het verschil in het aantal klanten per dag tussen de supermarkten gering, middelmatig of groot is.

Oplossing

De boxen overlappen elkaar.

De mediaan van winkel A ligt buiten de box van winkel B.

Het verschil is middelmatig.



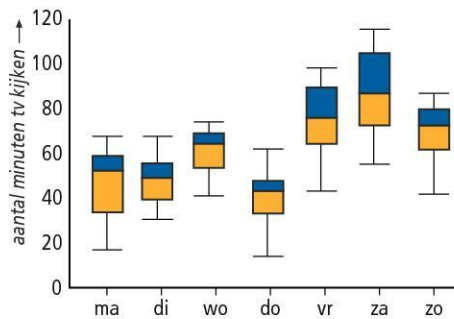
Ondersteunende route → maak opdracht 015

- 15 Ga na of het verschil in aantal gelezen woorden tussen groep 5 en groep 8 in opdracht 14 gering, middelmatig of groot is.

- 16 In een onderzoek is aan jongeren gevraagd hoeveel tijd ze per dag besteden aan televisie kijken.

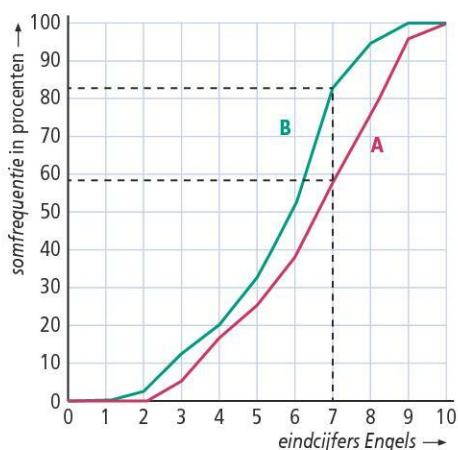
H

- Welke variabelen zijn in het diagram verwerkt? Zijn deze kwantitatief of kwalitatief?
- Leg uit dat het verschil in tijd dat ze televisie kijken tussen maandag en dinsdag gering is.
- Geef nog twee dagen waartussen het verschil in tijd dat ze televisie kijken gering is.
- Geef ook een voorbeeld van twee dagen waartussen het verschil in tijd dat ze televisie kijken middelmatig is en twee dagen waartussen dit verschil groot is. Licht je antwoord toe.



- 17 In de relatieve somfrequentiepolygonen zijn de eindcijfers voor het vak Engels van twee scholen verwerkt.

- Op welke school zal het gemiddelde eindcijfer het hoogst zijn?
- Om twee somfrequentie polygonen te vergelijken, kun je kijken naar het grootste verschil in cumulatief percentage van de relatieve somfrequentiepolygonen. Hoe kun je zien dat dit verschil het grootst is bij het eindcijfer 7?
- Lees de somfrequentie in procenten van zowel school A als school B af bij het eindcijfer 7 en bereken daarmee het grootste verschil in cumulatief percentage tussen de scholen A en B.



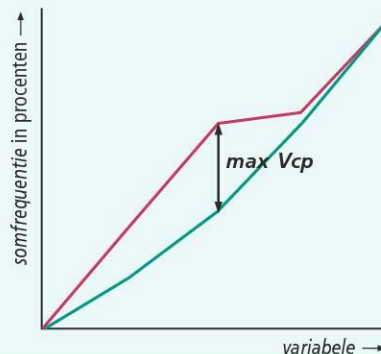
Theorie

Je kunt relatieve somfrequentiepolygonen gebruiken om twee (deel)populaties te vergelijken. Je berekent het grootste verschil in cumulatief percentage, ook wel $\max V_{cp}$ genoemd (maximaal verschil in cumulatief percentage).

Je gebruikt de volgende vuistregels:

- als $\max V_{cp} > 40$, dan zeggen we 'het verschil is groot'.
- als $20 < \max V_{cp} \leq 40$, dan zeggen we 'het verschil is middelmatig'.
- als $\max V_{cp} \leq 20$, dan zeggen we 'het verschil is gering'.

Een voorwaarde om deze vuistregels te mogen gebruiken is dat de steekproefomvang n groter dan 100 is.



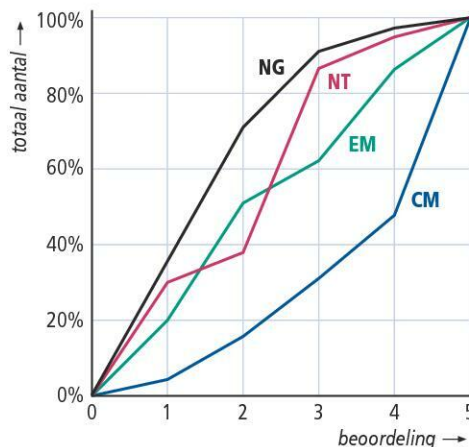
Ondersteunende route → maak opdracht 018

18

H

Na afloop van een bezoek aan een museum is de leerlingen van 5 havo om een beoordeling gevraagd. Ze konden een beoordeling geven op een schaal van 1 tot met 5 waarbij 1: helemaal niet leerzaam en 5: erg leerzaam is.

- a Om welke variabelen gaat het in deze grafieken?
- b Zijn deze variabelen kwantitatief of kwalitatief?
- c Bij welk profiel is het bezoek als beste beoordeeld? En bij welk profiel het slechtst?
- d Leg uit dat het verschil in beoordeling tussen de profielen NG en NT middelmatig is en geef nog een voorbeeld van twee profielen waartussen het verschil in de beoordeling middelmatig is.
- e Zijn er twee profielen waartussen het verschil in beoordeling gering is? Zo ja, welke profielen?
- f En zijn er twee profielen waartussen het verschil in beoordeling groot is? Zo ja, geef een voorbeeld.



19

In twee steden is onderzoek gedaan naar het aantal kinderen jonger dan 18 jaar per huishouden. In de tabel zie je de resultaten.

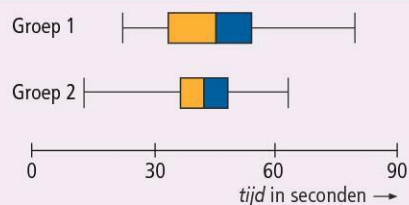
- a Bereken de cumulatieve frequenties in procenten en vul de tabel verder in.
- b Waarom is het niet nodig om de relatieve somfrequentiepolygonen te tekenen om $\max V_{cp}$ te berekenen?
- c Ga na of het verschil in het aantal kinderen tussen de steden gering, middelmatig of groot is.

aantal kinderen	stad A	cum. in %	stad B	cum. in %
0	50	...	35	...
1	14	...	29	...
2	88	...	76	...
3	40	...	30	...
4	10	...	19	...
5	4	...	2	...

Uitdagende route → maak opdracht U3

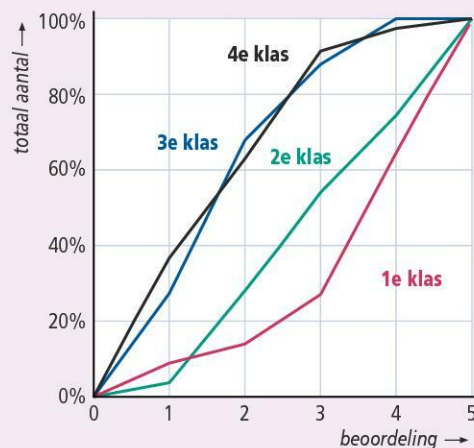
Ondersteunende opdrachten

- 015** Aan de kinderen van groep 1 en groep 2 is gevraagd om een puzzel in elkaar te zetten. Er is gemeten hoeveel seconden de kinderen hierover deden en de resultaten zijn verwerkt in twee boxplots.
- Overlappen de boxen van de boxplots elkaar?
 - Hoe kun je zien dat de mediaan van de boxplot van groep 1 in de box van de boxplot van groep 2 ligt?
 - Ligt de mediaan van de boxplot van groep 2 ook in de box van de boxplot van groep 1?
 - Is het verschil in tijd tussen groep 1 en groep 2 gering, middelmatig of groot?



- 018** Na afloop van een theatervoorstelling is aan de leerlingen van alle leerjaren vmbo om een beoordeling gevraagd. Ze konden een beoordeling geven op een schaal van 1 tot met 5 waarbij 1: helemaal niet leuk en 5: erg leuk is. De resultaten zijn verwerkt in relatieve somfrequentiepolygonen per leerjaar.

- Om welke variabelen gaat het in deze grafieken?
- Zijn deze variabelen kwantitatief of kwalitatief?
- Bij welke klas hebben procentueel gezien de meeste leerlingen 'erg leuk' gezegd? Hoe zie je dat aan de grafiek?
- Om de 1e en 2e klas te vergelijken, kijk je naar de grootste verticale afstand tussen de grafieken van deze klassen.
Ga na dat deze afstand tussen de 1e en 2e klas gelijk is aan 30%.
- Waarom is het verschil in beoordeling tussen de 1e en 2e klas middelmatig?
- Hoe groot is het maximale verschil in cumulatief percentage tussen de 2e en 3e klas? Is het verschil in beoordeling van deze klassen gering, middelmatig of groot?
- Tussen welke twee klassen is het verschil in beoordeling gering? Leg je antwoord uit.



Uitdagende opdrachten

- U3** Meneer Ten Dam heeft twee eindexamenklassen havo wiskunde A. Hij vergelijkt de behaalde eindexamenresultaten. In klas 5h.wisa1 is het eerste kwartiel 5,8, de kwartielafstand 2,1 en de mediaan gelijk aan 6,5. In klas 5h.wisa2 is de mediaan 5,6 en heeft 25% van de leerlingen tussen de 5,6 en 6,4 gescoord. Ga na of het verschil in eindexamenresultaten tussen de twee klassen gering, middelmatig of groot is.

13.4 Groepen vergelijken met formules

Je leert

- hoe je groepen vergelijkt met de effectgrootte
- hoe je groepen vergelijkt met de ϕ -coëfficiënt

Leerroutes

- ondersteunend: 20—21—022—23—24—025—26
- doorlopend: 20—21—22—23—24—25—26
- uitdagend: 20—22—23—24—25—26—U4

Op zowel het Stadscollege als het Dorpscollege zitten in totaal 600 leerlingen met wiskunde in 4 en 5 havo. Op het Stadscollege heeft de helft van de leerlingen wiskunde A.

- Bij hoeveel leerlingen op het Dorpscollege met wiskunde A vind je het verschil tussen de twee scholen groot?



- 20** Op twee scholen A en B zijn de leerlingen in twee even grote groepen verdeeld. Groep 1 had les met een nieuwe lesmethode bij het vak Frans en groep 2 met de oude lesmethode. De leerlingen hebben dezelfde toets gemaakt. In de tabellen zie je de gemiddeldes en de standaardafwijkingen van de cijfers.

- a** Op welke school heeft de nieuwe lesmethode het grootste effect gehad op de cijfers?

- b** Een maat voor het verschil in resultaat kun je berekenen

met de formule
$$E = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\frac{1}{2}(S_1 + S_2)}$$

Hierin zijn $\bar{X}_1$ en $\bar{X}_2$ de gemiddeldes en S_1 en S_2 de standaardafwijkingen van groep 1 en groep 2.

Bereken E voor zowel school A als school B.

- c** Het verschil tussen de groepen is groter bij een hogere waarde van E .

Komen je antwoorden van opdracht a en b overeen?

school A	lesmethode	
	nieuw (groep 1)	oud (groep 2)
$\bar{X}$	6,7	5,8
S	0,6	0,6

school B	lesmethode	
	nieuw (groep 1)	oud (groep 2)
$\bar{X}$	6,6	6,3
S	0,6	0,6

Theorie

Je kunt twee (deel)populaties vergelijken met behulp van de gemiddeldes en de standaardafwijkingen. Je berekent de

effectgrootte met de formule
$$E = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\frac{1}{2}(S_1 + S_2)}$$
, met $\bar{X}_1$ en $\bar{X}_2$

de steekproefgemiddelden ($\bar{X}_1 \geq \bar{X}_2$) en S_1 en S_2 de steekproefstandaardafwijkingen.

Je gebruikt de volgende vuistregels:

- als $E > 0,8$, dan zeggen we 'het verschil is groot'.
- als $0,4 < E \leq 0,8$, dan zeggen we 'het verschil is middelmatig'.
- als $E \leq 0,4$, dan zeggen we 'het verschil is gering'.

Voorbeeld

In een supermarkt is de omzet op zaterdagen gemiddeld € 42.659,- met een standaardafwijking van € 3.120,-. De supermarktmanager hoopt met een nieuwe actie een hogere omzet te halen. Na ingaan van de actie is de gemiddelde omzet op zaterdagen € 45.096,- met een standaardafwijking van € 2.653,-.

Ga na of het verschil in omzet gering, middelmatig of groot is.

Oplossing

$$E = \frac{45\,096 - 42\,659}{\frac{1}{2}(2653 + 3120)} \approx 0,84$$

De effectgrootte is groter dan 0,8.
Het verschil in omzet is groot.

- 21** Welke conclusie zou je in het voorbeeld hebben getrokken als de omzet na de actie gemiddeld € 44.128,- met een standaardafwijking van € 2.653,- was geweest?

Ondersteunende route → maak opdracht 022

- 22** Om te weten te komen of perenbomen die speciale voeding krijgen zwaardere peren geven, krijgt een aantal perenbomen speciale voeding en aantal perenbomen niet. Van 100 peren van bomen met speciale voeding en van 100 peren van bomen zonder speciale voeding wordt het gewicht gemeten.

- a Om welke statistische variabelen gaat het hier?
- b Zijn deze variabelen kwalitatief of kwantitatief? En zijn ze discreet, continu, nominaal of ordinaal?
- c De peren van de bomen zonder speciale voeding wegen gemiddeld 225 gram met een standaardafwijking van 30 gram. De peren van de bomen met speciale voeding wegen gemiddeld 245 gram met een standaardafwijking van 30 gram.

Ga na of het verschil in gewichten tussen de peren van de bomen met speciale voeding en de peren van de bomen zonder speciale voeding gering, middelmatig of groot is.



- 23** Twan vermoedt dat er op zijn school minder jongens dan meisjes linkshandig zijn. Hij neemt een steekproef van 200 jongens en 100 meisjes en vindt 20 linkshandige jongens.

- a Geef de waarden van a en b in de tabel.
- b Leg uit dat er geen verschil is op het gebied van linkshandig zijn tussen jongens en meisjes als er 10 meisjes linkshandig zijn.
- c Een maat voor het verschil tussen variabelen in een

$$2 \times 2 \text{ kruistabel is } \phi = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}$$

Bereken de waarde van ϕ als 10 meisjes linkshandig zijn.

- d Bereken de waarde van ϕ als 20 meisjes linkshandig zijn.
- e Bereken de waarde van ϕ als 70 meisjes linkshandig zijn.
- f Wat valt je op aan de waarden van ϕ als er een groter verschil tussen jongens en meisjes is?

	links- handig	rechts- handig	totaal
jongens	a	b	200
meisjes	c	d	100

Theorie

Je kunt twee (deel)populaties vergelijken met behulp van een 2×2 kruistabel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Je berekent daarvoor de **waarde van**

phi met de formule
$$\phi = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}$$

Je gebruikt de vuistregels:

- als $\phi < -0,4$ of $\phi > 0,4$, dan zeggen we 'het verschil is groot'.
- als $-0,4 \leq \phi < -0,2$ of $0,2 < \phi \leq 0,4$, dan zeggen we 'het verschil is middelmatig'.
- als $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$, dan zeggen we 'het verschil is gering'.

Voorbeeld

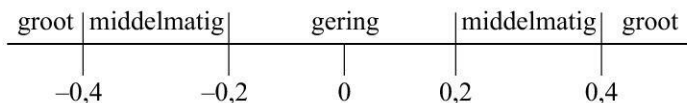
	met bril	zonder bril
jongens	5	25
meisjes	8	45

Ga na of het verschil in wel of geen bril dragen tussen jongens en meisjes gering, middelmatig of groot is.

Oplossing

$$\phi = \frac{5 \times 45 - 25 \times 8}{\sqrt{(5+25)(5+8)(25+45)(8+45)}}$$

$\phi \approx 0,03$ en ligt tussen $-0,2$ en $0,2$.
Het verschil in wel of geen bril dragen tussen jongens en meisjes is gering.



- 24** Geef de juiste conclusie over het verschil als $\phi = -0,89$, $\phi = 0,2$, $\phi = -0,401$ en $\phi = 0,39$.

Ondersteunende route → maak opdracht 025

- 25** Om te onderzoeken of een pijnstillertje effect heeft, heeft een onderzoeker 48 personen een middel toegediend terwijl 48 andere personen een placebo (nepmiddel) kregen. De personen in kwestie wisten niet of ze de pijnstillertje of de placebo kregen. Van de personen die het middel kregen toegediend, gaven 20 personen aan dat er geen effect waarneembaar was, bij de personen met het placebo was dit aantal 30.

- H**
- Stel bij de situatie een 2×2 kruistabel op.
 - Bereken de waarde van ϕ .
 - Welke conclusie kun je trekken met deze resultaten?
- 26** Het Trimbos-instituut heeft in 2015 onder jongeren onderzoek gedaan naar roken. In de tabel zie je enkele resultaten uit dit onderzoek.
- Bereken hoeveel procent van de vmbo-leerlingen rookt of ooit gerookt heeft.
 - Ga na of het verschil in roken tussen havo- en vwo-leerlingen gering, middelmatig of groot is.
(Ontleend aan examen havo wiskunde A 2018, tijdvak 2)

	aantal leerlingen	aantal leerlingen dat rookt of ooit gerookt heeft
vmbo	3265	873
havo	1805	410
vwo	1644	261
totaal	6714	1544

Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten

- 022** Hellen vergelijkt de gewichten van appels van appelbomen in de zon en appels van appelbomen in de schaduw.
- Om welke statistische variabelen gaat het hier?
 - Zijn deze variabelen kwalitatief of kwantitatief? En zijn ze discreet, continu, nominaal of ordinaal?
 - De appels van de bomen in de zon wegen gemiddeld 121 gram met een standaardafwijking van 24 gram. De appels van de bomen in de schaduw wegen gemiddeld 129 gram met een standaardafwijking van 21 gram. Waarom kan je de effectgrootte E gebruiken om te bepalen of het verschil in gewicht gering, middelmatig of groot is?
 - Bij het berekenen van E moet het gemiddelde $\bar{X}_1$ groter of gelijk zijn aan het gemiddelde $\bar{X}_2$ ($\bar{X}_1 \geq \bar{X}_2$). Geef de waarden van $\bar{X}_1$ en $\bar{X}_2$ bij deze situatie.
 - Bereken E .
 - Is het verschil in gewicht van appels van de bomen in de zon en het gewicht van appels van bomen in de schaduw gering, middelmatig of groot?

- 025** Om te onderzoeken of het dagelijks slikken van vitamine C de kans op een verkoudheid verlaagt of niet, wordt een groep mensen gevraagd om dagelijks een aantal tabletten te slikken. Een aantal deelnemers krijgt vitamine C tabletten; de anderen krijgen een placebo (een nepmiddel). Van de deelnemers die vitamine C tabletten slikten, werden 300 verkouden. Van de deelnemers die een placebo slikten, werden 340 verkouden.

	verkouden	niet verkouden	totaal
vitamine C	...	...	405
placebo	...	...	415
totaal	640	180	820

- Hoeveel personen deden er mee aan het onderzoek?
- Vul de waarden 300 en 340 op de juiste plek in de tabel in.
- Ga na dat er 105 deelnemers niet verkouden werden die vitamine C tabletten slikten.
- Vul de tabel verder in.
- Om ϕ te berekenen, heb je de waarden van a , b , c en d nodig. Waarom is $a = 300$? Geef ook de waarden van b , c en d .
- Bereken ϕ .
- Is het verschil gering, middelmatig of groot?
- Welke conclusie kun je trekken met deze resultaten?

Uitdagende opdrachten

- U4** Om na te gaan of er meer mannen of vrouwen vegetariër zijn, wordt aan 5000 mannen en 5000 vrouwen een enquête voorgelegd. Er blijken 234 mannen vegetariër te zijn. Bereken bij welke aantallen vrouwelijke vegetariërs de conclusie is dat het verschil in aantallen vegetariërs tussen mannen en vrouwen gering is.

13.5 Data-analyse

Je leert

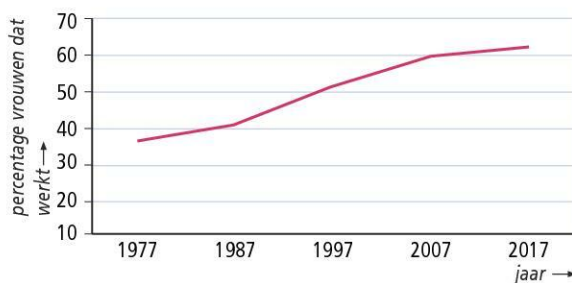
- wat statistisch onderzoek is

Leerroutes

- ondersteunend: 27—28—029—30—31
- doorlopend: 27—28—29—30—31
- uitdagend: 27—29—30—31—U5

Marieke en Sven gaan onderzoeken voor hun profielwerkstuk of leerlingen door het drinken van koffie hogere proefwerkcijfers kunnen halen.

- Hoe zouden Marieke en Sven dit kunnen onderzoeken?

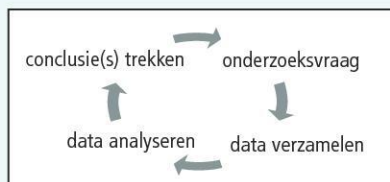


- 27 In de diagrammen zie je de resultaten van een onderzoek.
- Geef een mogelijke onderzoeksvraag bij dit onderzoek.
 - Welke data zijn er verzameld?
 - Waarom is ervoor gekozen om de data in twee lijndiagrammen te verwerken?
 - Formuleer op basis van de diagrammen een conclusie bij je onderzoeksvraag.

Theorie

Bij het doen van **statistisch onderzoek** kun je de volgende stappen onderscheiden:

- formuleren onderzoeksvraag
- verzamelen van data
- data analyseren
- conclusie(s) trekken



- 28 Waarom staat er in de afbeelding een pijl van conclusie(s) trekken naar onderzoeksvraag?

29

H

Bij het bevolkingsonderzoek naar darmkanker bij Nederlanders tussen de 55 en 75 jaar oud wordt er gekeken of er bloed in de ontlasting zit. Als de uitslag positief (wel bloed aanwezig) is, komt er een vervolgonderzoek. Als de uitslag negatief (geen bloed aanwezig) is, is dit geen garantie dat je ook geen darmkanker hebt. In de tabel kun je zien dat van een steekproef van 1000 onderzochte mensen er 76 een negatieve uitslag kregen terwijl later bleek dat ze wel darmkanker hadden.

- Formuleer een onderzoeksvraag bij dit onderzoek.
- Ga na of op basis van dit onderzoek het verschil in uitslag tussen zieke en niet zieke mensen gering, middelmatig of groot is.
- Welke conclusie kun je trekken?
- Bereken hoeveel procent van de zieke mensen een positieve uitslag kreeg.
- Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage zieke Nederlanders dat een positieve uitslag kreeg.
- Hoe zullen de tegenstanders van dit bevolkingsonderzoek deze data gebruiken?

	uitslag	
	negatief	positief
ziek	76	37
niet ziek	874	13

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is:

$$\left[p - 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

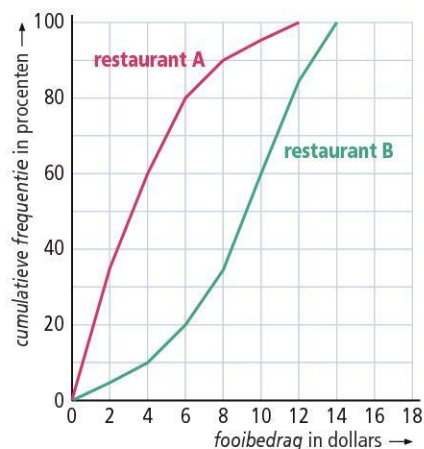
Hierin is p de steekproefproportie en n de steekproefomvang.

30

In de Verenigde Staten is het gebruikelijk dat je in een restaurant een flinke fooi geeft aan degene die je bedient. In New York bestudeerde een onderzoeker welke fooien er gegeven werden bij 500 rekeningen in restaurant A en 500 rekeningen in restaurant B. In de figuur zijn de cumulatieve frequentiepolygonen in procenten van de fooien van de restaurants A en B getekend.

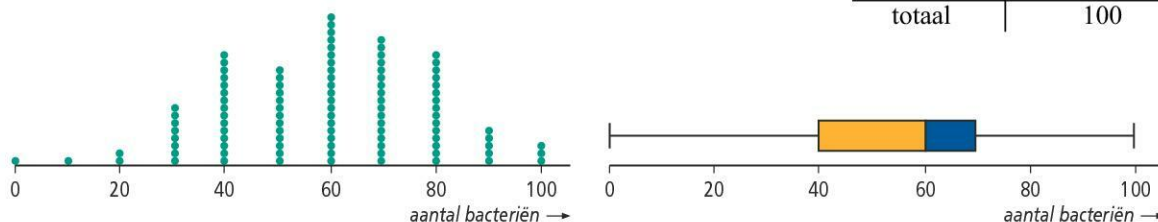
- Formuleer een mogelijke onderzoeksvraag bij dit onderzoek.
- Welke data is er verzameld?
- In welk restaurant werd in totaal meer fooi gegeven?
- In welk restaurant werden er relatief meer fooien tussen de 6 en de 8 dollar gegeven?
- Ruim driekwart van de fooien in restaurant B is hoger dan de 75% laagste fooien van restaurant A. Leg uit hoe je dit in de figuur terug kunt vinden.
- Ga na of het verschil in fooien tussen de restaurants gering, middelmatig of groot is en trek hieruit je conclusie over de fooien in restaurant A en B.
- Formuleer een mogelijke onderzoeksvraag voor een vervolgonderzoek.

(Ontleend aan voorbeeldexamenopgaven juni 2015)



- 31** East Coast Milk (ECM) is een bedrijf in de VS dat elke dag melk bij honderd boeren in de regio ophaalt. Voordat de melk in de transporttank gaat, wordt bij elke boer een monster van de melk genomen. In het laboratorium van ECM wordt de melk onderzocht op de aanwezigheid van bacteriële vervuiling. Daartoe wordt in elk monster het aantal bacteriën per centiliter (cL) geteld. De Public Health Service (PHS), verantwoordelijk voor de kwaliteitsbewaking, stelt als eis een maximum van 80 bacteriën per cL. In de frequentietabel staan de gevonden waarden in de honderd monsters van een dag. Het gemiddelde is gelijk aan 59 bacteriën per cL en de standaardafwijking is 20,3 bacteriën per cL. Er zijn bij deze gegevens nog twee representaties gemaakt.

aantal bacteriën	frequentie
0	1
10	1
20	2
30	8
40	15
50	13
60	20
70	17
80	15
90	5
100	3
totaal	100



- Welke van deze drie representaties is/zijn niet geschikt om het aantal overschrijdingen van de PHS norm vast te stellen? Licht je antwoord toe.
- De totale hoeveelheid melk die elke dag wordt opgehaald, heet een dagproductie. In de honderd monsters zitten gemiddeld 59 bacteriën per cL. Is dit ook altijd het gemiddelde van de dagproductie?
- Het laboratorium let goed op uitschieters omdat die op bijzonderheden kunnen wijzen. Vaak zijn dat meetfouten. Het laboratorium gebruikt de volgende vuistregel: Een uitschieter ligt buiten het interval $\text{mediaan} \pm 1,5 \times \text{interkwartielafstand}$. Ga na hoeveel uitschieters er zijn. Bij welke zou het om een meetfout kunnen gaan?
- De twee monsters met de laagste waarden worden opnieuw gemeten. Dat levert in beide gevallen een waarde van 50 bacteriën per cL op. Beredeneer, zonder een berekening te maken, dat met deze nieuwe meetwaarden het gemiddelde groter wordt en de standaardafwijking kleiner wordt.
- Beredeneer wat er verandert aan de mediaan.
(Ontleend aan de Syllabus havo wiskunde A 2017)

Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

029 Een zwangerschapstest is meestal niet 100% betrouwbaar. Bij een steekproef van 1000 vrouwen is een nieuw ontwikkelde zwangerschapstest afgenomen. In de tabel zie je de resultaten. Zo kun je zien dat bij 82 zwangere vrouwen de test aangeeft dat ze niet zwanger zijn.

- De onderzoeker heeft als onderzoeksvraag: 'Zijn de zwangere vrouwen waarbij de test geen juiste uitslag geeft vaker zwanger van een jongen of een meisje?' Waarom kun je deze vraag niet met de gegevens beantwoorden?
- Formuleer een onderzoeksvraag bij dit onderzoek die je wel met de gegevens kunt beantwoorden.
- Welke formule kun je gebruiken om een mogelijk verband bij deze 2×2 kruistabel aan te tonen?
- Ga na of het verschil in uitslag tussen zwangere en niet zwangere vrouwen gering, middelmatig of groot is.
- Welke conclusie kun je trekken?
- Leg uit dat de proportie zwangere vrouwen met de testuitslag niet zwanger gelijk is aan $\frac{82}{316 + 82} \approx 0,206$.
- Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage zwangere vrouwen met de testuitslag niet zwanger.
- Welk argument kan gebruikt worden om deze zwangerschapstest niet op de markt te brengen?

	uitslag	
	zwanger	niet zwanger
zwanger	316	82
niet zwanger	2	600

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is:

$$\left[p - 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

Hierin is p de steekproefproportie en n de steekproefomvang.

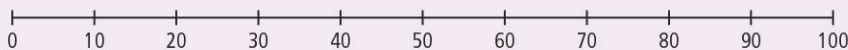
Uitdagende opdrachten

wachttijd neurochirurgie

A	B	C	D	E	F	G	H	I
---	---	---	---	---	---	---	---	---

wachttijd orthopedie

A	B	C	D	E	F	G	H	I
---	---	---	---	---	---	---	---	---



percentage wachtenden verdeeld naar wachttijd

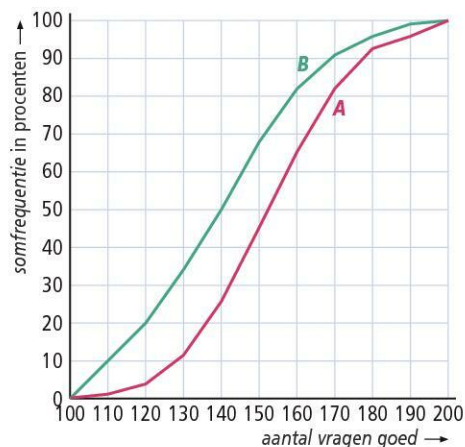
wachttijd

A	0 - <	2 weken
B	2 - <	4 weken
C	4 - <	6 weken
D	6 - <	8 weken
E	8 - <	10 weken
F	10 - <	12 weken
G	12 - <	26 weken
H	26 - <	52 weken
I	52 - <	104 weken

- U5** In de gezondheidszorg staan veel mensen op een wachtlijst. Voor alle specialismen is in een aantal ziekenhuizen onderzoek gedaan naar de wachtlijsten. Zo zie je in de figuur hoelang patiënten bij neurochirurgie en orthopedie moeten wachten op een behandeling. Beide afdelingen beweren dat ze het beter doen dan de andere afdeling. Noem voor elke afdeling op basis van de figuur een argument dat ze kunnen aanvoeren.

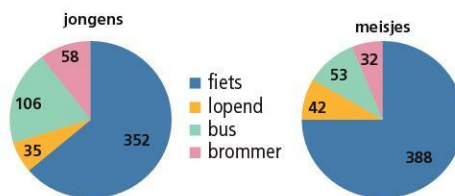
(Ontleend aan voorbeeldexamenopgaven havo wiskunde 2017)

- 32** De citotoets wordt gebruikt om de schoolprestaties van de leerlingen van groep 8 te beoordelen. Deze toets bestaat uit 200 vragen. Een student pedagogiek heeft onderzocht of het geven van een training effect heeft op de score die behaald wordt. Hij heeft daarbij een steekproef genomen van 150 leerlingen (groep A) die een training hebben gehad en 150 leerlingen (groep B) die geen training hebben gehad. De resultaten zijn verwerkt in een relatieve somfrequentiepolygonen.
- Welke statistische variabelen staan in dit onderzoek centraal?
 - Zijn deze statistische variabelen kwalitatief of kwantitatief? En zijn ze discreet, continu, nominaal of ordinaal?
 - Welke groep heeft de citotoets het best gemaakt?
 - Hoeveel procent van de leerlingen van groep A heeft minstens 140, maar minder dan 180 vragen goed?
 - Ga met behulp van de $\max V_{cp}$ na of het verschil in scores gering, middelmatig of groot is.
 - Teken twee boxplots bij de relatieve somfrequentiepolygonen.
 - Volgt uit de boxplots dezelfde conclusie als bij opdracht e?



- 33** Bij de citotoets van opdracht 32 heeft groep A een gemiddelde score van 152,5 gehaald met een standaardafwijking van 19,0. Groep B heeft een gemiddelde score van 139,2 met een standaardafwijking van 22,3.
- Ga met behulp van de effectgrootte na of het verschil in scores gering, middelmatig of groot is.
 - Je kunt de scores van de leerlingen in twee groepen verdelen: scores lager dan 150 en scores van minstens 150. Bepaal met behulp van ϕ of het verschil in scores tussen de groepen A en B gering, middelmatig of groot is.

- 34** Doede en Bram hebben een onderzoek gedaan naar het vervoermiddel waarmee de leerlingen naar school komen. Zij hebben daarbij onderzocht of er een verschil is tussen de jongens en de meisjes. In de cirkeldiagrammen is aangegeven hoe de 1064 leerlingen naar school komen.
- Om welke statistische variabelen gaat het hier?
 - Bereken hoeveel procent van de jongens met de bus naar school komt.
 - Bereken hoeveel procent van de leerlingen die met de bus naar school komen een meisje is.



- 35** In 2013 werden de resultaten van een onderzoek naar reken-, taal-, en probleemoplossingsvaardigheden in meerdere landen gepubliceerd. In deze opdracht kijken we naar de scores op rekenvaardigheden, een score met een schaal van 0 tot 500. In de tabel zie je van een aantal landen de gemiddelde score en de standaardafwijking. Je kunt ook de percentielen van de scores aflezen. Je kunt bijvoorbeeld aflezen dat het 75e percentiel van Nederland 315,3 is. Dit betekent dat 75% van de Nederlandse deelnemers een score van 315,3 of lager had.

land	gemiddelde score	standaard-afwijking	percentiel						
			5	10	25	50	75	90	95
Australië	267,6	56,6	169,3	197,7	234,7	271,9	305,4	334,3	351,6
Canada	265,5	55,5	169,2	194,2	230,8	269,8	303,9	332,4	349,3
Finland	282,2	52,2	193,6	217,4	250,8	285,8	317,3	345,0	360,8
Frankrijk	254,2	56,2	152,1	179,7	219,9	259,2	293,9	321,5	336,5
Duitsland	271,7	53,1	179,0	201,9	238,4	275,9	309,3	335,0	350,5
Italië	247,1	50,0	161,1	182,9	215,4	249,3	281,9	309,1	324,1
Japan	288,2	44,0	212,6	231,7	260,7	290,8	318,1	341,7	335,4
Nederland	280,3	51,1	188,6	214,6	251,0	285,8	315,3	339,7	354,2
Spanje	245,8	51,3	149,1	177,8	216,3	250,3	280,9	307,4	322,3
Zweden	279,1	54,9	181,7	209,9	249,2	284,0	316,0	342,8	358,4
USA	252,8	57,0	151,7	177,9	217,1	256,1	293,1	322,7	340,0
Alle deelnemers van de 23 landen	268,7	51,3	178,4	202,8	237,9	272,5	303,9	330,3	345,6

- a** Geef op basis van de onderste regel van de tabel een mogelijke statistische redenering waaruit blijkt dat de score van de deelnemers niet normaal verdeeld is.
- b** Je wilt onderzoeken of het verschil tussen de scores van de Canadese en de Spaanse deelnemers gering, middelmatig of groot is. Onderzoek dit op twee verschillende manieren.
(*Ontleend aan examen havo wiskunde A 2017, tijdvak 1*)

Theorie

Kwantitatief, continu, discreet, kwalitatief, nominaal, ordinaal

De waarde van een kwantitatieve variabele is een getal.

Kwantitatieve variabelen kunnen continu of discreet zijn.

Een discrete variabele neemt alleen bepaalde waarden aan.

Een continue variabele kan in principe alle waarden op een interval aannemen.

Kwalitatieve variabelen kun je onderverdelen in nominale en ordinale variabelen. Bij nominale variabelen kun je geen logische volgorde vastleggen. Bij ordinale variabelen kan dat wel, bijvoorbeeld van klein naar groot.

Voorbeeld

Aan docenten is gevraagd of het examen havo wiskunde A en vwo wiskunde A bij de lesstof paste. Ze konden dit beoordelen als slecht, matig, voldoende en goed.

De variabele examen is kwalitatief en nominaal.

De variabele beoordeling is kwalitatief en ordinaal.

- S1** Je ziet een aantal vragen uit een enquête.
- Om welke variabelen gaat het hier?
 - Welke variabelen zijn kwantitatief? Zijn deze variabelen discreet of continu?
 - En welke zijn kwalitatief? Zijn deze variabelen nominaal of ordinaal?

Wat is uw leeftijd?

In welke plaats bent u geboren?

Hoe lang bent u?

Wat is uw hoogst genoten opleiding?

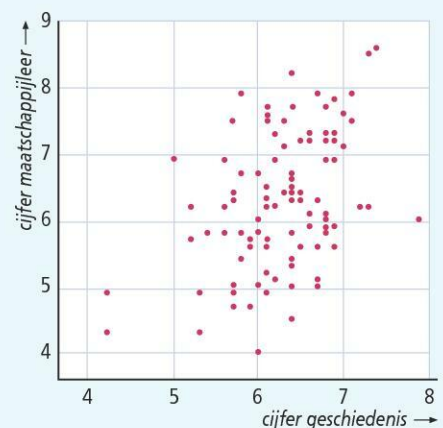
Theorie

Statistisch onderzoek

Bij het doen van statistisch onderzoek kun je de volgende stappen onderscheiden:

- formuleren onderzoeksvraag
- verzamelen van data
- data analyseren
- conclusie(s) trekken

- S2** Je ziet een puntenwolk bij twee variabelen.
- Formuleer een onderzoeksvraag bij dit onderzoek.
 - Welke data zijn er verzameld?
 - Geef voor beide vakken zowel het hoogste als laagste behaalde cijfer.
 - Formuleer een conclusie bij de onderzoeksvraag.



Vaardigheid

Je kunt percenteren.

Om conclusies uit kruistabellen te kunnen trekken, moet je vaak overgaan op relatieve frequenties. Je kunt dit bijvoorbeeld doen door percentages te berekenen, dit noem je percenteren. Om te percenteren moet je steeds bepalen welk getal je als totaal moet gebruiken.

Voorbeeld

In de tabel zie je de leeftijden van de leden van een tennisclub.

Hoeveel procent van de mannen is ouder dan 40 jaar?

	10-18	19-40	ouder dan 40	totaal
man	41	135	49	225
vrouw	29	123	28	179

Oplossing

$$49 : 225 \times 100\% \approx 21,8\%$$

Ongeveer 21,8% van de mannen is ouder dan 40 jaar.

- S3
- Hoeveel procent van de leden in het voorbeeld is ouder dan 40 jaar?
 - En hoeveel procent van de leden van hoogstens 40 jaar is een vrouw?

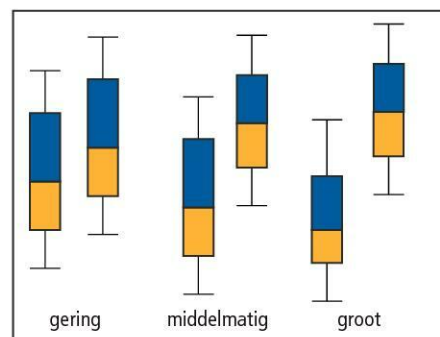
Vaardigheid

Je kunt groepen vergelijken met boxplots.

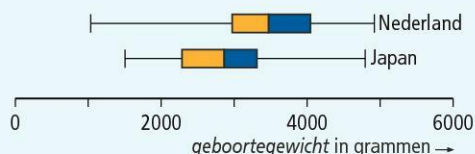
Je kunt boxplots gebruiken om populaties of deelpopulaties te vergelijken. Om twee boxplots te vergelijken, kijk je naar de ligging van de medianen en de boxen. De box is het interval vanaf het eerste kwartiel tot en met het derde kwartiel.

Je gebruikt de volgende vuistregels:

- als de boxen elkaar niet overlappen, dan zeggen we 'het verschil is groot'.
- als de boxen elkaar wel overlappen en een mediaan van een boxplot buiten de box van de andere boxplot ligt, dan zeggen we 'het verschil is matig'.
- in alle andere gevallen zeggen we 'het verschil is gering'.



- S4
- Je ziet de boxplots die horen bij de geboortegewichten van kinderen die gedurende een maand in een Nederlands ziekenhuis en in een Japans ziekenhuis zijn geboren. Ga na of het verschil tussen het Japanse en het Nederlandse ziekenhuis gering, middelmatig of groot is.



Vaardigheid

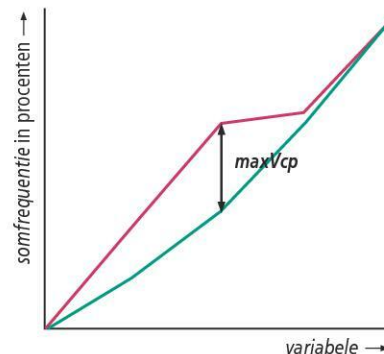
Je kunt groepen vergelijken met relatieve somfrequentiepolygonen.

Je kunt relatieve somfrequentiepolygonen gebruiken om twee (deel)populaties te vergelijken. Je berekent het grootste verschil in cumulatief percentage, ook wel $\max V_{cp}$ genoemd (maximaal verschil in cumulatief percentage).

Je gebruikt de volgende vuistregels:

- als $\max V_{cp} > 40$, dan zeggen we 'het verschil is groot'.
- als $20 < \max V_{cp} \leq 40$, dan zeggen we 'het verschil is middelmatig'.
- als $\max V_{cp} \leq 20$, dan zeggen we 'het verschil is gering'.

Een voorwaarde om deze vuistregels te mogen gebruiken is dat de steekproefomvang n groter dan 100 is.



- S5** Op een middelbare school is van alle leerlingen in de 1e klas en in de 5e klas de lengte opgemeten. In de tabel zie je de resultaten in cumulatieve frequenties in procenten. Ga na of het verschil in lengtes tussen leerlingen in de 1e en in de 5e klas gering, middelmatig of groot is.

<i>lengte in cm</i>	cum. freq. 1e klas	cum. freq. 5e klas
[140,150)	23%	0%
[150,160)	78%	2%
[160,170)	98%	53%
[170,180)	100%	85%
[180,190)	100%	100%

Vaardigheid

Je kunt groepen vergelijken met de effectgrootte.

Je kunt twee (deel)populaties vergelijken met behulp van de gemiddeldes en de standaardafwijkingen. Je berekent de

effectgrootte met de formule $E = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\frac{1}{2}(S_1 + S_2)}$, met $\bar{X}_1$ en $\bar{X}_2$

de steekproefgemiddelden ($\bar{X}_1 \geq \bar{X}_2$) en S_1 en S_2 de steekproefstandaardafwijkingen.

Je gebruikt de volgende vuistregels:

- als $E > 0,8$, dan zeggen we 'het verschil is groot'.
- als $0,4 < E \leq 0,8$, dan zeggen we 'het verschil is middelmatig'.
- als $E \leq 0,4$, dan zeggen we 'het verschil is gering'.

Voorbeeld

De bloemkolen van boer Müller wegen gemiddeld 911 gram met een standaardafwijking van 57 gram. De bloemkolen van boer Nassar wegen gemiddeld 934 gram met een standaardafwijking van 72 gram. Ga na of het verschil in gewichten van de bloemkolen van boer Müller en Nassar gering, middelmatig of groot is.

Oplossing

$$E = \frac{934 - 911}{\frac{1}{2}(72 + 57)} \approx 0,36$$

$$E \leq 0,4$$

Het verschil is gering.

- S6** Twee 5 havo klassen wiskunde A hebben een eindexamen gemaakt. De ene klas heeft als voorbereiding een examentraining gevolgd. Zij hebben op hun eindexamen gemiddeld een 6,8 gehaald met een standaardafwijking van 0,6. De andere klas heeft geen examentraining gevolgd en scoorde gemiddeld 6,4 met een standaardafwijking van 0,5. Ga na of het verschil in scores tussen de twee klassen gering, middelmatig of groot is.

Vaardigheid

Je kunt groepen vergelijken met de phi-coëfficiënt.

Je kunt twee (deel)populaties vergelijken met behulp van een 2×2 kruistabel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Je berekent daarvoor de waarde

$$\text{van } \phi \text{ met de formule } \phi = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}$$

Je gebruikt de vuistregels:

- als $\phi < -0,4$ of $\phi > 0,4$, dan zeggen we 'het verschil is groot'.
- als $-0,4 \leq \phi < -0,2$ of $0,2 < \phi \leq 0,4$, dan zeggen we 'het verschil is middelmatig'.
- als $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$, dan zeggen we 'het verschil is gering'.

Voorbeeld

In de tabel zie je de profielkeuze van havo-leerlingen op een middelbare school. Er is onderscheid gemaakt tussen de M-profielen (CM en EM) en de N-profielen (NG en NT).

	M-profiel	N-profiel
jongens	61	53
meisjes	55	24

Ga na of het verschil in aantal leerlingen dat een M- of N-profiel kiest tussen jongens en meisjes gering, middelmatig of groot is.

Oplossing

$$\phi = \frac{61 \times 24 - 53 \times 55}{\sqrt{(61+53)(61+55)(53+24)(55+24)}}$$

$$\phi \approx -0,16$$

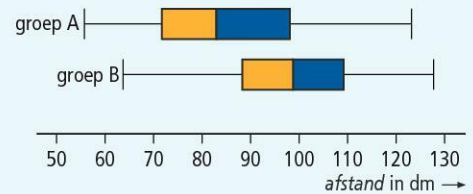
ϕ ligt tussen $-0,2$ en $0,2$.

Het verschil is gering

- S7** Aan 500 docenten is gevraagd of ze liever op vakantie gaan in Nederland of naar het buitenland. Dezelfde vraag is gesteld aan 600 artsen. Van de docenten kiezen 236 voor een vakantie in Nederland, bij de artsen ligt dit aantal op 139. Ga na of het verschil in aantallen dat voor Nederland of buitenland als vakantiebestemming kiest tussen docenten en artsen gering, middelmatig of groot is.

T1 Een docent gymnastiek wil weten wat het effect is van extra trainingen bij het kogelstoten. Hij heeft de leerlingen in twee groepen verdeeld. Groep A heeft een week extra getraind en groep B heeft een maand lang extra getraind. In de boxplots zijn de resultaten van de groep A en groep B na de extra trainingen verwerkt.

- Om welke statistische variabelen gaat het hier?
- Zijn deze variabelen kwalitatief of kwantitatief? En zijn ze discreet, continu, nominaal of ordinaal?
- Ga na of het verschil in de geworpen afstand tussen groep A en groep B gering, middelmatig of groot is.



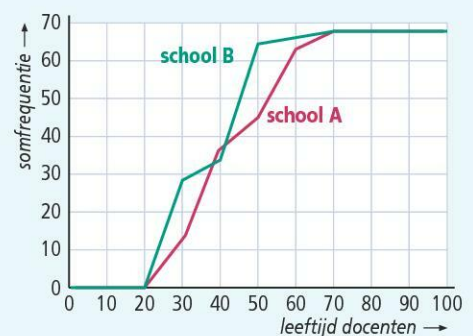
T2 In de tabel staan de resultaten van een onderzoek naar slaapproblemen bij mensen met een visuele beperking. Bij de mensen met een visuele beperking is onderscheid gemaakt tussen blinde en slechthziende mensen.

	wel slaapproblemen	geen slaapproblemen
blind	22	11
slechthziend	8	13
geen visuele beperking	16	32

- Hoeveel procent van de mensen met slaapproblemen is blind?
- Hoeveel procent van de blinde mensen heeft slaapproblemen?
- Ga na of het verschil in aantallen mensen met slaapproblemen tussen mensen met en zonder een visuele beperking gering, middelmatig of groot is.

T3 Op twee middelbare scholen is onderzoek gedaan naar de leeftijd van de docenten. In de somfrequentiepolygonen zijn de resultaten verwerkt.

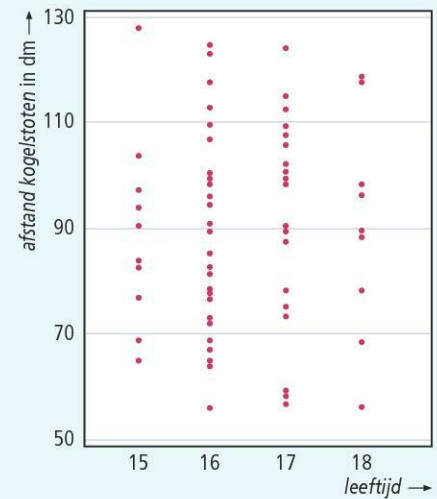
- Hoe kun je zien dat op beide middelbare scholen evenveel docenten werken? Hoeveel docenten zijn dat per school?
- Op welke school is het percentage docenten van 50 jaar of ouder het hoogst? Hoe hoog is dat percentage?
- Hoeveel procent van de docenten jonger dan 30 jaar werkt op school A?
- Ga na of het verschil in leeftijden van de docenten tussen school A en school B gering, middelmatig of groot is.



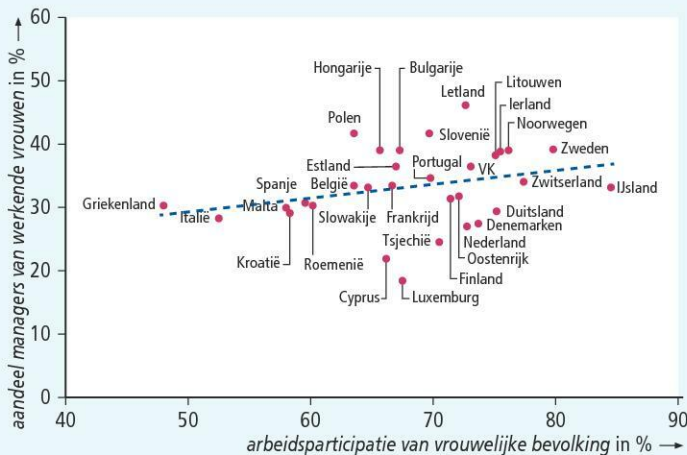
T4 Aan een sportdag hebben 64 leerlingen meegedaan. In de puntenwolk zijn de resultaten bij het kogelstoten vergeleken met de leeftijd.

- Welke statistische variabelen staan in de puntenwolk?
- Zijn deze variabelen kwalitatief of kwantitatief? En zijn ze discreet, continu, nominaal of ordinaal?
- Bij welke leeftijd is de spreidingsbreedte het grootst?
- Bij de leerlingen van vijftien jaar is het gemiddelde van de afstanden bij het kogelstoten 89,2 dm en de standaardafwijking 175 cm. Bij de leerlingen van 17 jaar is het gemiddelde 93,1 dm en de standaardafwijking 183 cm.

Ga na of het verschil in gestoten afstand tussen de leerlingen van 15 jaar en leerlingen van 17 jaar gering, middelmatig of groot is.



T5 In de grafiek zie je voor een aantal landen het verband tussen het percentage managers van werkende vrouwen en de arbeidsparticipatie van de vrouwelijke bevolking (15-64 jaar) in het jaar 2017.



- Bedenk een mogelijke onderzoeksvraag bij dit onderzoek.
- Hoeveel procent van de werkende vrouwen werkt als manager in het land met de hoogste arbeidsparticipatie van de vrouwelijke bevolking?
- Welke trend wordt er met de stippellijn aangegeven?
- Geef op basis van de figuur een conclusie bij je onderzoeksvraag van opdracht a.

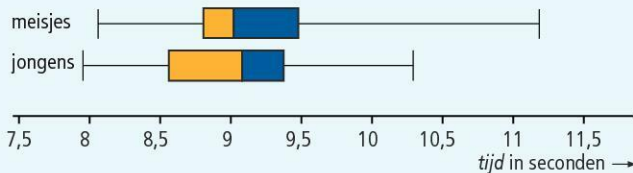
Je kunt percenteren.

- E1** In de tabel zie je de resultaten van het onderdeel sprinten op een zeskamp van basisschoolleerlingen.
- Bereken hoeveel procent van de leerlingen een meisje is.
 - Hoeveel procent van de leerlingen die de afstand in minder dan 9 seconden hebben afgelegd, is een meisje?
 - Hoeveel procent van de jongens loopt sneller dan 10 seconden?
 - En hoeveel procent van de leerlingen die de afstand in 9 seconden of meer hebben afgelegd, is een jongen?

tijd in seconden	geslacht		totaal
	jongen	meisje	
[8, 9)	14	14	28
[9, 10)	14	22	36
[10, 11)	5	4	9
totaal	33	40	73

Je kunt groepen vergelijken met boxplots.

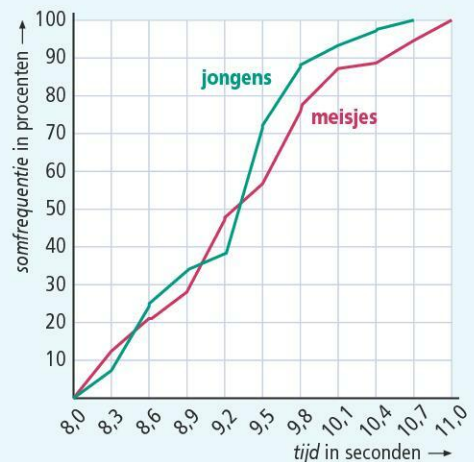
- E2** In de boxplots zijn de tijden van de jongens en de meisjes op het onderdeel sprinten verwerkt.



Ga na of op basis van deze boxplots het verschil in de tijden tussen de jongens en de meisjes gering, middelmatig of groot is.

Je kunt groepen vergelijken met relatieve somfrequentiepolygonen.

- E3** De resultaten van het onderdeel sprinten zijn verwerkt in twee relatieve somfrequentiepolygonen. Ga na of op basis van deze relatieve somfrequentiepolygonen het verschil in tijden tussen de jongens en de meisjes gering, middelmatig of groot is.



Je kunt groepen vergelijken met de effectgrootte.

- E4** Op de zeskamp van de basisscholen moesten de leerlingen ook verspringen. De leerlingen van groep 5 sprongen gemiddeld 2,48 meter met een standaardafwijking van 40 cm. De leerlingen van groep 8 sprongen gemiddeld 3,53 meter met een standaardafwijking van 37 cm. Ga na of het verschil in de gesprongen afstand tussen groep 5 en groep 8 gering, middelmatig of groot is.

Je kunt groepen vergelijken met de phi-coëfficiënt.

- E5** Een derde onderdeel op de zeskamp was hoogspringen. Van de 22 jongens bereikten er 14 een hoogte van minimaal 140 cm. Bij de 36 meisjes waren dit er 15.

- Vul de kruistabel verder in.
- Ga na of het verschil in gesprongen hoogte tussen jongens en meisjes op basis van deze gegevens gering, middelmatig of groot is.

<i>hoogte van 140 cm</i>	jongen	meisje
niet	...	...
wel	14	15

- E6** De opleiding tot docent wiskunde op een hogeschool duurt 4 jaren. Sommige studenten ronden de opleiding in precies 4 jaar af, maar veel studenten doen er langer over. Uit een onderzoek blijkt dat mannelijke studenten gemiddeld 4 jaren en 10 maanden over de studie doen met een standaardafwijking van 4 maanden. Vrouwelijke studenten doen gemiddeld 4 jaren en 5 maanden over de opleiding met een standaardafwijking van 3 maanden.

- Welke statistische variabelen staan hier centraal?
- Ga na of het verschil in studieduur tussen mannelijke en vrouwelijke studenten gering, middelmatig of groot is.
- Bij de mannelijke studenten is het eerste kwartiel van de studieduur gelijk aan 4 jaar en 7 maanden, de mediaan gelijk aan 4 jaar en 9 maanden en het derde kwartiel gelijk aan 5 jaar en 2 maanden. Bij de vrouwelijke studenten liggen deze waarden allemaal 2 maanden lager.

Teken de boxen van de boxplots bij deze gegevens en ga na of je hieruit dezelfde conclusie kunt trekken als in opdracht b.

- E7** Bij twee warenhuizen is de klanten gevraagd het warenhuis te beoordelen met een cijfer op een schaal van 1 tot en met 10. In de tabel staan de resultaten.

- Ga met $\max V_{cp}$ na of het verschil in beoordelingen tussen de warenhuizen gering, middelmatig of groot is.
- Maak op basis van de gegevens een 2×2 kruistabel waarin je kunt aflezen hoeveel voldoende en hoeveel onvoldoende er bij warenhuis A en bij warenhuis B zijn gegeven.
- Ga met de 2×2 kruistabel van opdracht b na of je dezelfde conclusie kunt trekken over het verschil in beoordelingen tussen de warenhuizen als bij opdracht a.

	<i>warenhuis</i>	
<i>cijfer</i>	A	B
[2,5; 3,5)	0	1
[3,5; 4,5)	1	2
[4,5; 5,5)	8	5
[5,5; 6,5)	10	5
[6,5; 7,5)	3	8
[7,5; 8,5)	4	4
[8,5; 9,5)	1	2



CE

In dit hoofdstuk

In eerdere hoofdstukken heb je geleerd hoe je een lineaire formule zoals $4c + 8d = -48$ herleidt zodat d uitgedrukt wordt in c . In hoofdstuk 11 heb je ook formules met meerdere variabelen herleid.

In dit hoofdstuk leer je hoe je gebroken formules, machtsformules en wortelformules kunt herleiden. Daarbij maak je gebruik van allerlei rekenregels die je eerder bent tegengekomen.

Het herleiden van verschillende soorten formules is een onderwerp dat in examens kan voorkomen.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk:

- *Probleemoplossen en analytisch denken*
- *Abstraheren*
- *Logisch redeneren en bewijzen*

opdracht 37
opdracht 3
opdracht 13

- V1** Op het blaadje zie je hoe haakjes worden weggewerkt.
- Vereenvoudig het resultaat door de gelijksoortige termen samen te nemen.
 - Schrijf zonder haakjes.
 A $u = 5t + 3(-2 + 7t)$ C $m = 6(5a - 3b + 12)$
 B $w = -6h - 2h(-7h + 5)$ D $z = 4k(2k - 7m + 1)$

●	$w = 6p + 2(4q - p + 8)$	
●	$w = 6p + 8q - 2p + 16$	
●	$w = 8q + \dots p + 16$	
●		

- V2** In de Ardennen kun je een bepaald type vakantiehuis huren voor € 65,- per dag. Voor de verplichte schoonmaak betaal je de huur van anderhalve dag extra. Verder moet je bij het huren één keer € 17,50 boekingskosten betalen.
- Bereken hoeveel euro je in totaal moet betalen als je het huis voor zeven dagen wilt huren.
 - Leg uit dat je met de formule $K = 65(a + 1,5) + 17,5$ de totale kosten K in euro's kunt berekenen als je het aantal dagen huren a weet.
 - Schrijf de formule zo kort mogelijk door de haakjes weg te werken.

Theorie

In een formule kun je een variabele vervangen door een andere formule. Dit heet **substitueren**. Vaak is het nodig daarbij haakjes te gebruiken. Na het substitueren vereenvoudig je zo mogelijk de formule.

Voorbeeld

Substitueer $m = 4p - 2$ in $k = -2m + 8$.

Oplossing

$$k = -2m + 8$$

$$m = 4p - 2$$

$$k = -2(4p - 2) + 8$$

$$k = -8p + 4 + 8$$

$$k = -8p + 12$$

- V3** Substitueer formule B in formule A.
- A $w = 5m - 12$ en B $m = -2d + 4$
 - A $w = 8 - 2m$ en B $m = 17 - 3d$
 - A $w = -5m - 12$ en B $m = -4 - 3p$

- V4** Bram trakteert zijn klasgenoten op ijsjes. Bij een ijsjeszaak kost een waterijsje € 0,75 en een chocolade-ijsje € 1,25. Bram koopt w waterijsjes en c chocolade-ijsjes en moet € 30,- betalen.
- Leg uit dat hierbij de vergelijking $0,75w + 1,25c = 30$ hoort.
 - Op het blaadje zie je hoe de vergelijking herschreven wordt zodat c wordt uitgedrukt in w .
Leg uit wat er in stap 1 en stap 2 is gebeurd.
 - Laat zien dat je de vergelijking $0,75w + 1,25c = 30$ ook kunt herschrijven tot de formule $w = -1\frac{2}{3}c + 40$.

●	$0,75w + 1,25c = 30$	
●	$1,25c = -0,75w + 30$	1
●	$c = -0,6w + 24$	2
●		

Theorie

Je kunt een **vergelijking van een lijn** zoals $4h - 2g = 12$ **herleiden** tot de formule $h = 0,5g + 3$ door gebruik te maken van de balansmethode. In deze formule wordt h **uitgedrukt in** g .

Voorbeeld

Herleid de vergelijking $2a + 4(7 - b) = 5$ waarbij je b uitdrukt in a .

Oplossing

$$2a + 4(7 - b) = 5$$

$$2a + 28 - 4b = 5 \quad \text{haakjes weggewerkt}$$

$$2a - 4b = -23 \quad \text{links en rechts } -28$$

$$-4b = -2a - 23 \quad \text{links en rechts } -2a$$

$$b = 0,5a + 5,75 \quad \text{links en rechts : } -4$$

V5 Herleid de vergelijkingen waarbij je p uitdrukt in q .

a $-16q + 3p = -12$

d $-3\left(p - \frac{q}{2}\right) = 36$

b $7q - p = 4q + 14$

e $6p + 2(q - 7) = q$

c $-p - \frac{1}{2}q = -6 + 3\frac{1}{2}q$

f $q - (p - 9q) = 34 + 12q$

V6 **a** Vul in.

A $4^2 \times 4^3 = 4^{2+3} = 4 \dots$

B $(6^5)^3 = 6^{5 \times 3} = 6 \dots$

C $\frac{9^6}{9^2} = 9^{6-2} = 9 \dots$

b Schrijf als één macht.

A $3^7 \times 3 \times 3^5$

E $(12^3)^6 \times 12$

B $\frac{9^{12}}{9^8}$

F $(5^{12} \times 5^4)^3$

C $4^{10} \times 4^7$

G $(6^2)^9 \times 6$

D $\frac{2^{17}}{2^{16}}$

H $\frac{8^{18}}{8^3} \times 8^2$

V7 **a** Vul in.

A $\sqrt{9} \times \sqrt{5} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{\dots}$

B $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{14}{2}} = \sqrt{\dots}$

b Schrijf als één wortel.

A $\sqrt{15} \times \sqrt{6} =$

C $\sqrt{40} \times \sqrt{3} =$

B $\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{5}} =$

D $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{4}} =$

14.1 Lineaire formules herleiden

Je leert

- hoe je aantoont of twee formules gelijkwaardig zijn

Leerroutes

- ondersteunend: 1—02—3—4—05—6
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6
- uitdagend: 1—2—4—5—6—U1

Aan de hand van de lengtes van de ouders van een meisje kun je met de formule $K = 0,5(V + M - 13)$ berekenen hoe lang een meisje ongeveer zal worden. Hierin is K de lengte van het meisje, V de lengte van de vader en M de lengte van de moeder, waarbij de lengtes in cm zijn. De vader van Joanne is 35 cm groter dan haar moeder.

- Met welke van de volgende formules kun je de lengte van Joanne berekenen als je de lengte van haar vader weet?

A $K = V - 13$

B $K = V - 24$



- 1 Gegeven zijn de formules A $h = 6w - 7$ en B $2q - 6w = 18$.

- Herleid formule B tot de vorm $w = \dots q + \dots$.
- Substitueer de formule van opdracht a in de formule $h = 6w - 7$ en vereenvoudig het resultaat.

Theorie

Bij het substitueren van formules is het soms nodig dat je een formule eerst herleidt.

Voorbeeld

Gegeven zijn de formule A $a - 6t = -7$ en B $m = 8 - 2a$. Druk m uit in t .

Oplossing

$$a - 6t = -7$$

$$a = 6t - 7$$

formule herleid

$$m = 8 - 2a$$

$$m = 8 - 2(6t - 7)$$

gesubstitueerd

$$m = 8 - 12t + 14$$

haakjes weggewerkt

$$m = -12t + 22$$

vereenvoudigd

Ondersteunende route → maak opdracht 02

2 Druk k uit in w .

H

a $A \ k = 4s - 8$ en $B \ 3s - 6w = 24$

b $A \ k = 10 + 7s$ en $B \ w - s = 9$

c $A \ k = -2s - 5$ en $B \ w = -7 - s$



3 Bij een notenbar kosten walnoten €27,- per kilogram en cashewnoten €15,- per kilogram.

a Laat met een berekening zien dat je voor 250 gram walnoten en 350 gram cashewnoten €12,- moet betalen.

b Leg uit dat bij deze situatie de formule $0,027w + 0,015c = B$ hoort. Hierin is B het bedrag in euro's, w het aantal gram walnoten en c het aantal gram cashewnoten.

c Louis koopt in totaal een halve kilogram walnoten en cashewnoten.

Vul in: hierbij hoort de formule $w + c = \dots$

d Druk B uit in c .

4 In restaurants in Amerika is het gebruikelijk dat je een vast percentage van de rekening extra betaalt als fooi. In een restaurant kost een driegangenmenu \$24,00. Daarnaast betaal je \$2,50 per drankje. Bij het afrekenen betaal je 20% van de rekening extra als fooi.

a Laat zien dat je voor een driegangenmenu met vier drankjes in totaal \$40,80 moet betalen inclusief fooi.

b Op het blaadje zie je drie formules staan waarbij B het bedrag in dollars is dat je moet betalen bij n drankjes. Leg uit dat formule A bij de situatie hoort.

c Bij welke formules krijg je als je voor n het getal 4 invult ook de uitkomst $B = 40,8$?

d Bij welke formules krijg je dezelfde uitkomst als je voor n het getal 7 invult? En als je voor n het getal 10 invult?

e Laat zien dat je formule A kunt herleiden tot formule C.

f Waarom weet je nu zeker dat de formules A en C voor elke waarde van n dezelfde uitkomst zullen hebben?

A $B = 1,2(2,5n + 24)$

B $B = 2,5n + 30,8$

C $B = 3n + 28,8$

Theorie

Twee formules zijn **gelijkwaardig** als elke combinatie van waarden van de variabelen die voldoet aan de ene formule ook voldoet aan de andere formule en omgekeerd. Je kunt laten zien dat twee formules gelijkwaardig zijn door de ene formule te herleiden tot de andere.

Voorbeeld

Onderzoek of de formules $q = 3(2p - 5) - 4p$ en $p = \frac{1}{2}q + 8$ gelijkwaardig zijn.

Oplossing

$$q = 3(2p - 5) - 4p$$

$$q = 6p - 15 - 4p$$

$$q = 2p - 15$$

$$2p - 15 = q$$

$$2p = q + 15$$

$$p = \frac{1}{2}q + 7\frac{1}{2}$$

haakjes weggewerkt

vereenvoudigd

links en rechts verwisseld

links en rechts + 15

links en rechts : 2

De formules zijn niet gelijkwaardig, want je kunt de formule $q = 3(2p - 5) - 4p$ niet herleiden tot de formule $p = \frac{1}{2}q + 8$.

Ondersteunende route → maak opdracht O5

- 5** Onderzoek of de paren formules gelijkwaardig zijn.

H

a $y = 8x + 9$ en $x = 0,125y - 1,125$

b $F = 3(2t + 1) + 2(7t - 11)$ en $t = \frac{1}{20}F + \frac{19}{20}$

c $5(2p + 5) = 3\left(\frac{q}{3} - 1\right)$ en $p = 0,9q + 2,2$

d $a + 5 = 8b - 9(2b - 9a + 5)$ en $b = 8a - 5$

- 6** Een afgesloten vat gevuld met gas wordt verwarmd waardoor de druk P in hectopascal (hPa) van het gas in het vat toeneemt. Met de formule $P = 3,4(20 + 0,5t) + 932$ kun je de druk na t minuten verwarmen berekenen.
- a** Bereken P bij $t = 10$. Welke betekenis heeft je antwoord in de praktijk?
 - b** Je kunt de formule herleiden tot de vorm $P = a \cdot t + b$ waarbij a en b getallen zijn. Bereken de waarden van a en b .
 - c** Herschrijf de formule waarbij je t uitdrukt in P . Rond daarbij af op twee decimalen.
 - d** De druk in het vat mag niet hoger worden dan 1500 hPa. Hoeveel minuten mag het vat maximaal verwarmd worden?



Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

02 Je gaat de formule $6m - 3r = 30$ substitueren in de formule $u = 5 - 4r$. Daarvoor moet je eerst de formule $6m - 3r = 30$ herleiden zodat r wordt uitgedrukt in m .

a Vul in.

$$6m - 3r = 30$$

$$-3r = \dots + 30$$

$$r = \dots - \dots$$

b Substitueer het resultaat van opdracht a in de formule $u = 5 - 4r$. Gebruik daarbij haakjes.

Druk g uit in b .

c A $g = 8a + 12$ en B $4a + 2b = 6$

d A $g = 5 - 7a$ en B $3b - a = 8$

e A $g = 2a - 10$ en B $b = 3a + 8$

05 Joost onderzoekt of de formule $R = 6 - 2(4v + 1)$ gelijkwaardig is aan de formule $v = -\frac{1}{8}R + \frac{1}{4}$. Op het blaadje zie je hoe hij de formule $R = 6 - 2(4v + 1)$ herleidt waarbij hij v uitdrukt in R .

a Leg bij elke stap uit wat er is gebeurd.

b Vul het blaadje verder in.

c Is de formule die Joost krijgt gelijk aan de formule $v = -\frac{1}{8}R + \frac{1}{4}$?

d Zijn de formules $R = 6 - 2(4v + 1)$ en $v = -\frac{1}{8}R + \frac{1}{4}$ gelijkwaardig?

Onderzoek of de paren formules gelijkwaardig zijn.

e $R = 2v + 3,5$ en $v = 0,25R - 3,5$

f $7\left(\frac{t}{4} - 5\right) = 2(4r + 6)$ en $r = 2,625t - 5,875$

g $2d - 4(3d - 6c + 1) = c + 7$ en $d = 2,3c - 1,1$

	$R = 6 - 2(4v + 1)$		
	$R = 6 - 8v - 2$	1	
	$R = 4 - 8v$	2	
	$4 - 8v = R$	3	
	$-8v = R - \dots$	4	
	$v = \dots R + \dots$	5	

Uitdagende opdrachten

U1 De formules $6w - 4(2s + w) = 2(s - 7)$, $5s - w = a$ en $s = b \cdot w + 1,4$ zijn gelijkwaardig. Bereken de waarde van a en b .

14.2 Gebroken formules herleiden

Je leert

- hoe je een gebroken formule herleidt

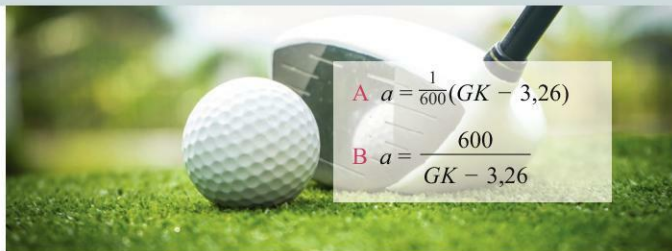
Leerroutes

- ondersteunend: 7—8—09—9—10—11—13
- doorlopend: 7—8—9—10—11—12—13
- uitdagend: 7—8—9—11—12—13—U2

Een bedrijf produceert golfballen. Voor de gemiddelde productiekosten in euro's per golfbal geldt $GK = 3,26 + \frac{600}{a}$

Hierin is GK uitgedrukt in het aantal geproduceerde golfballen a .

- Zoek uit welke formule gelijkwaardig is.



- 7** De gemiddelde snelheid van een auto bereken je met de formule $v = \frac{A}{t}$

Hierin is v de gemiddelde snelheid in km per uur, A de afstand in km en t de tijd in uren.

- Hoeveel uur duurt het om een afstand van 120 km af te leggen met een gemiddelde snelheid van 80 km per uur?
- Op het blaadje zie je hoe de formule herschreven wordt. Leg uit wat er bij elke stap is gebeurd.

•	$v = \frac{A}{t}$				
•	$v \cdot t = A$			1	
•	$t = \frac{A}{v}$			2	
•					

- 8** **a** Op het blaadje zie je het begin van een herleiding van de formule $\frac{w+4}{7} = \frac{r-9}{3}$

Met welk getal is in stap 1 links en rechts van het gelijkteken vermenigvuldigd?

- En met welk getal is in stap 2 links en rechts van het gelijkteken vermenigvuldigd?
- Werk de haakjes weg en maak de herleiding verder af waarbij je w uitdrukt in r .

•	$\frac{w+4}{7} = \frac{r-9}{3}$				
•	$w+4 = \frac{7(r-9)}{3}$			1	
•	$3(w+4) = 7(r-9)$			2	
•					

Theorie

Een formule heet een gebroken formule als er een variabele in een noemer voorkomt. Een **gebroken formule** kun je **herleiden** en soms vereenvoudigen. Daarbij kun je gebruik maken van:

Uit $\frac{A}{B} = C$ volgt $A = B \cdot C$ en dus ook $\frac{A}{C} = B$.

Uit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ volgt $A \cdot D = B \cdot C$.

Voorbeeld 1

Herleid $\frac{5}{b} - 3a = 1$ waarbij je b uitdrukt in a .

Oplossing

$$\frac{5}{b} - 3a = 1$$

$$\frac{5}{b} = 1 + 3a \quad \text{links en rechts } + 3a$$

$$\frac{5}{1 + 3a} = b \quad \frac{A}{B} = C \text{ dus } A = B \cdot C \text{ dus } \frac{A}{C} = B$$

$$b = \frac{5}{1 + 3a} \quad \text{links en rechts verwisseld}$$

Voorbeeld 2

Herleid $\frac{q+3}{2} = \frac{p}{-8}$ tot de vorm $p = \dots$

Oplossing

$$\frac{q+3}{2} = \frac{p}{-8}$$

$$-8(q+3) = 2p$$

$$-8q - 24 = 2p$$

$$2p = -8q - 24$$

$$p = -4q - 12$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \text{ dus } A \cdot D = B \cdot C$$

haakjes weggewerkt

links en rechts verwisseld

links en rechts : 2

Ondersteunende route → maak opdracht 09

9 Herleid de vergelijkingen tot de vorm $b = \dots$

H **a** $a = \frac{12}{b+5}$ **e** $\frac{b+3}{7} = \frac{2a+1}{4}$

b $\frac{b-1}{a^2} = 7$ **f** $\frac{6}{a-8} = \frac{2}{b+10}$

c $\frac{4}{b} + 7 = 6a$ **g** $\frac{6}{a} = \frac{12a}{b+3}$

d $a = 2 \cdot \frac{8}{b+4}$ **h** $\frac{7}{b} = \frac{2a+1}{a}$

10 De firma Licht produceert onder andere bureaulampen. De gemiddelde kosten per bureaulamp worden berekend

met de formule $GK = \frac{6000}{B+5} + 23$.

Hierin is GK de gemiddelde kosten in euro's en B het aantal geproduceerde bureaulampen.

- Tot welke waarde nadert GK als het aantal geproduceerde bureaulampen heel groot wordt?
- Bereken hoeveel bureaulampen er moeten worden geproduceerd als $GK = 80$.
- Herleid de formule waarbij je B uitdrukt in GK .
- Bereken hoeveel bureaulampen er moeten worden geproduceerd als $GK = 70$.



- 11 a** Op het blaadje zie je hoe de formule $L = \frac{4r + 2(9r - 7)}{20}$ herleid wordt.

Leg uit wat er in stap 1 en stap 2 is gebeurd.

- b** In stap 3 werd de breuk gesplitst in twee breuken.

Welke getallen komen op de puntjes te staan?

- c** Herleid de formules tot de vorm $T = a \cdot p + b$.

A $T = \frac{4(3p - 6) + 8p}{40}$

B $T = \frac{6p - (p - 4) + 2(4p - 8)}{25}$

☐	$L = \frac{4r + 2(9r - 7)}{20}$		
☐	$L = \frac{4r + 18r - 14}{20}$	1	
☐	$L = \frac{22r - 14}{20}$	2	
☐	$L = \frac{22r}{20} - \frac{14}{20}$	3	
☐	$L = \dots r - \dots$		

- 12** Grote stukken vlees zijn goed in de oven te bereiden. Het verband tussen de bereidingstijd t in minuten, het gewicht G van het vlees in kg en de temperatuur T van de oven in $^{\circ}\text{C}$ wordt gegeven door de formule $t = \frac{2000 \cdot (4 \cdot G + 3)}{T}$

- a** Bereken hoeveel minuten de bereidingstijd is van een rollade van 1200 gram in een oven van 180°C .

- b** Als de oventemperatuur 200°C is, dan is het verband tussen t en G te schrijven als $t = \dots \cdot G + \dots$.
Bereken welke getallen op de puntjes staan.

- 13** Als de schade aan een auto groter is dan de waarde, dan wordt de auto total loss verklaard. Verzekeringen vergoeden dan alleen de zogenaamde dagwaarde. Verzekeraar Allasure berekent de dagwaarde met de formule $D_A = \frac{N}{1 + 0,4x}$

Hierin is D_A de dagwaarde in euro's, N de nieuwwaarde in euro's en x de leeftijd van de auto in jaren.

- a** Bereken na hoeveel jaar de waarde van een auto met een nieuwwaarde van €32.000,- gedaald is tot €12.000,-.

- b** Verzekeringsmaatschappij Beodin berekent de dagwaarde met een formule van de vorm $D_B = \frac{c \cdot N}{3 + y}$

Hierin is D_B de dagwaarde in euro's en y de leeftijd in jaren. Voor een nieuwe auto geldt dat de dagwaarde gelijk is aan de nieuwwaarde, dus als $y = 0$ geldt $D_B = N$.
Laat zien dat $c = 3$.

- c** Als $D_A = D_B$, dan is het verband tussen x en y te schrijven als $y = a \cdot x + b$.
Bereken door herleiding de waarden van a en b .



Uitdagende route → maak opdracht U2

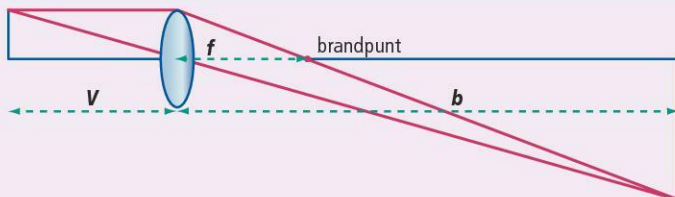
Ondersteunende opdrachten

- 09** **a** Op het bovenste blaadje zie je hoe de vergelijking $\frac{4}{z} + 3p = 6$ herleid wordt tot de vorm $z = \dots$.
Schrijf op wat er bij stap 1 is gebeurd.
- b** Bij stap 2 is gebruik gemaakt van de regel:
Uit $\frac{A}{B} = C$ volgt $A = B \cdot C$ en dus ook $\frac{A}{C} = B$.
Wat komt er op de puntjes te staan?
- c** Bij stap 3 zijn links en rechts verwisseld.
Vul het blaadje verder in.
- d** Op het onderste blaadje zie je hoe de vergelijking $\frac{z-2}{6} = \frac{p}{10}$ herleid wordt tot de vorm $z = \dots$.
Bij stap 1 is gebruik gemaakt van de regel:
Uit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ volgt $A \cdot D = B \cdot C$.
Schrijf op wat er bij de andere stappen is gebeurd.
- e** Vul het blaadje verder in.

•	$\frac{4}{z} + 3p = 6$			
•	$\frac{4}{z} = 6 - 3p$			
•	$\frac{4}{z} = 6 - 3p$			1
•	$\frac{4}{z} = z$			
•	$\dots$			2
•	$z = \frac{4}{\dots}$			
•	$\dots$			3

•	$\frac{z-2}{6} = \frac{p}{10}$			
•	$\frac{z-2}{6} = \frac{p}{10}$			
•	$10(z-2) = 6p$			1
•	$10z - 20 = 6p$			2
•	$10z = 6p + \dots$			3
•	$z = 0,6p + \dots$			4

Uitdagende opdrachten



- U2** Voor lenzen geldt de zogenaamde lenzenformule $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{v}$

Hierin is f de brandpuntsafstand, b de afstand van het beeld tot de lens en v de afstand van het voorwerp tot de lens. Alle afmetingen zijn in cm.

- a** Je wilt een lampje afbeelden op een scherm dat op 100 cm afstand van de lens staat. Je gebruikt een lens met $f = 25$.
Op hoeveel cm van de lens moet je het lampje zetten?
- b** Neem $f = 10$ en laat zien dat je de lenzenformule kunt herleiden tot $b = \frac{10v}{v - 10}$

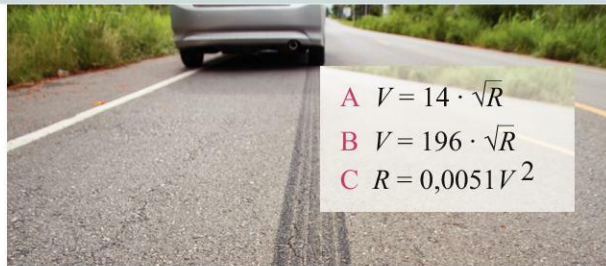
14.3 Wortelformules herleiden

Je leert • hoe je een wortelformule herleidt

Leerroutes • ondersteunend: 14—15—016—17—18—019—20
 • doorlopend: 14—15—16—17—18—19—20
 • uitdagend: 15—16—17—18—19—20-U3

Bij een ongevalonderzoek gebruikt de politie om de snelheid van een auto te bepalen de formule $V = \sqrt{196R}$. Hierin is V de snelheid van de auto in km per uur en R de lengte van het remspoor van de auto in meters.

- Welke van de formules zijn gelijkwaardig aan de formule $V = \sqrt{196R}$?



- 14** De waterhoogte in een reservoir dat wordt gevuld met water kun je beschrijven met de formule $H = \sqrt{0,25t + 100}$.

Hierin is H de waterhoogte in cm en t de tijd in minuten.

- Hoe hoog staat het water op $t = 0$?
- Bereken met de rekenmachine na hoeveel minuten de waterhoogte 40 cm is.
- Op het blaadje zie je hoe de formule herleid wordt waarbij t wordt uitgedrukt in H . In stap 1 is links en rechts van het gelijkteken gekwadeerd.
- In stap 4 wordt er links en rechts van het gelijkteken vermenigvuldigd met 4.
- Het reservoir heeft een hoogte van 1,5 meter. Hoeveel minuten duurt het vullen van het reservoir?

●	$H = \sqrt{0,25t + 100}$	
●	$H^2 = 0,25t + 100$	1
●	$0,25t + 100 = H^2$	2
●	$0,25t = H^2 - 100$	3
●	$t = \dots H^2 - \dots$	4

- 15** Gegeven is de formule $p = 2 \cdot \sqrt{4q + 5}$.

- Bereken p als $q = 11$.
- Welke waarde heeft q als $p = 10$?
- Op het blaadje is een begin gemaakt bij het herleiden van de formule $p = 2 \cdot \sqrt{4q + 5}$ zodat q wordt uitgedrukt in p . In stap 1 wordt er links en rechts van het gelijkteken gedeeld door 2.
- In stap 2 wordt er links en rechts van het gelijkteken gekwadeerd.
- Leg uit wat er in de stappen 3, 4, 5 en 6 is gebeurd.
- Maak deze herleiding verder af.

●	$p = 2 \cdot \sqrt{4q + 5}$	
●	$0,5p = \sqrt{4q + 5}$	1
●	$(0,5p)^2 = 4q + 5$	2
●	$0,5^2 \cdot p^2 = 4q + 5$	3
●	$0,25p^2 = 4q + 5$	4
●	$4q + 5 = 0,25p^2$	5
●	$4q = 0,25p^2 - \dots$	6
●	$q = \dots p^2 - \dots$	7

Theorie

Een formule waarin een variabele onder het wortelteken voorkomt, heet een wortelformule. Een **wortelformule herleid** je door links en rechts van het gelijktteken dezelfde bewerking uit te voeren. Je gebruikt de regel:

Uit $\sqrt{A} = B$ volgt $A = B^2$ (voor $B \geq 0$).

Je kunt bij het herleiden van wortelformules dezelfde technieken gebruiken als bij het oplossen van wortelvergelijkingen.

Voorbeeld

Herleid de formule $b = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a+1}$ waarbij je a uitdrukt in b .

Oplossing

$$b = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a+1}$$

$$2b = \sqrt{a+1} \quad \text{links en rechts} \times 2$$

$$\sqrt{a+1} = 2b \quad \text{links en rechts verwisseld}$$

$$a+1 = (2b)^2 \quad \text{uit } \sqrt{A} = B \text{ volgt } A = B^2$$

$$a+1 = 4b^2 \quad \text{haakjes weggewerkt}$$

$$a = 4b^2 - 1 \quad \text{links en rechts} - 1$$

Ondersteunende route → maak opdracht 016

- 16** Herleid de formules waarbij je p uitdrukt in q .

H

a $q = \sqrt{0,1p - 6}$
b $q = \sqrt{\frac{1}{4}p + 8}$
c $q = 4 \cdot \sqrt{p + 3}$
d $q = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2p + 5}$

- 17** Bij een test voor het meten van de reactietijd zijn twee personen nodig en één liniaal. Persoon 1 houdt de liniaal bovenaan vast en persoon 2 houdt duim en wijsvinger rond het 0-streepje (niet vastpakken). Persoon 1 laat op gegeven moment de liniaal los. Persoon 2 pakt zo snel mogelijk de liniaal met duim en wijsvinger. Na vijf pogingen wordt de gemiddelde vangafstand A in cm berekend. Met de formule $R = 100 \cdot \sqrt{\frac{A}{4,9}}$ wordt de reactietijd in seconden berekend.

Herleid de formule tot de vorm $A = c \cdot R^2$.

(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2012 pilot, 1e tijdvak)

- 18** **a** Vul in.

$$\sqrt{11} \times \sqrt{x} = \sqrt{11 \times x} = \sqrt{\dots} \quad \text{en} \quad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{\dots}{7}}$$

- b** Schrijf als één wortel.

A $\sqrt{45} \times \sqrt{m} =$

C $\sqrt{w} \times \sqrt{17} =$

B $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{k}} =$

D $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{6}} =$



start test



einde test

Theorie

Bij het herleiden van wortelformules kun je gebruik maken van de rekenregels (voor $p \geq 0$ en $q \geq 0$):

$$\sqrt{p \cdot q} = \sqrt{p} \cdot \sqrt{q}$$

$$\sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}} \quad (\text{met } q \neq 0)$$

Voorbeeld 1

Vereenvoudig de formule $D = \sqrt{\frac{9}{h}}$

Oplossing

$$D = \sqrt{\frac{9}{h}}$$

$$D = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{h}}$$

$$D = \frac{3}{\sqrt{h}}$$

$$\sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$$

vereenvoudigd

Voorbeeld 2

Vereenvoudig de formule $F = \sqrt{4b}$.

Oplossing

$$F = \sqrt{4b}$$

$$F = \sqrt{4} \cdot \sqrt{b}$$

$$F = 2 \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt{p \cdot q} = \sqrt{p} \cdot \sqrt{q}$$

vereenvoudigd

Ondersteunende route → maak opdracht 019

19 Vereenvoudig de formules.

H

a $R = \sqrt{225s}$

c $W = \sqrt{\frac{t}{144}}$

b $B = \sqrt{\frac{1}{4}k}$

d $K = \sqrt{\frac{0,01}{n}}$

20 Hoe hoger je staat, hoe verder je kunt kijken. Voor de kijkafstand K geldt bij onbelemmerd zicht en vlak terrein de formule $K = \sqrt{12,25 \cdot h}$. Hierin is K de kijkafstand in km en h de hoogte in meter.

- De vuurtoren op Texel is 63 meter hoog. Bereken de kijkafstand vanaf deze vuurtoren.
- Herleid de formule tot de vorm $K = \dots \cdot \sqrt{h}$.
- Om te berekenen welke hoogte een vuurtoren moet hebben bij een gewenste kijkafstand is het handiger om h uit te drukken in K . Herleid de formule zo, dat h wordt uitgedrukt in K .



Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

016 Op het blaadje is een begin gemaakt met het herleiden van de formule $k = 5 \cdot \sqrt{2n-6}$ waarbij n uitgedrukt wordt in k .

- a** Leg uit wat er in stap 1 is gebeurd.
- b** Welke rekenregel is in stap 2 gebruikt?
- c** En welke rekenregel is in stap 3 gebruikt?
- d** Maak de herleiding verder af waarbij n uitgedrukt wordt in k .

Herleid de formules waarbij je n uitdrukt in k .

- e** $k = \sqrt{4n-6}$
- f** $k = \sqrt{0,25n+3}$
- g** $k = 10 \cdot \sqrt{n+2}$
- h** $k = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{5n-1}$

☐	$k = 5 \cdot \sqrt{2n-6}$		
☐	$0,2k = \sqrt{2n-6}$	1	
☐	$(0,2k)^2 = 2n-6$	2	
☐	$0,2^2 \cdot k^2 = 2n-6$	3	
☐	...		

019 **a** Vul in.
 $W = \sqrt{196m}$ wordt $W = \sqrt{\dots} \cdot \sqrt{m}$ en dus $W = \dots \cdot \sqrt{m}$.
 $S = \sqrt{\frac{n}{81}}$ wordt $S = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\dots}}$ wordt $S = \frac{\sqrt{n}}{\dots}$ en dus $S = \dots \cdot \sqrt{n}$.

Vereenvoudig de formules.

- b** $G = \sqrt{\frac{r}{49}}$
- d** $L = \sqrt{\frac{0,04}{u}}$
- c** $A = \sqrt{16f}$
- e** $C = \sqrt{\frac{1}{9}p}$

Uitdagende opdrachten

U3 Een fabrikant maakt schoenen met zes paren gaatjes. De fabrikant wil daar zo kort mogelijke veters bij leveren. Hij rijgt daarom de veters op de Amerikaanse manier. Bij deze manier van rijgen, hoort de formule $l = 4 + 10\sqrt{d^2 + 16}$.

Hierin is l de benodigde veterlengte in cm en d is de gaatjesafstand in cm. Het deel van de veter waar de knoop in komt, is buiten beschouwing gelaten.

- a** Leg uit dat de formule juist is.
- b** De formule is te herleiden tot de vorm $d = \sqrt{a \cdot l^2 + b \cdot l + c}$ waarbij a , b en c getallen zijn. Geef deze herleiding en bereken de waarden van a , b en c .



14.4 Machtsformules herleiden

Je leert • hoe je een machtsformule herleidt

Leerroutes • ondersteunend: 21—022—23—024—25—26
 • doorlopend: 21—22—23—24—25—26
 • uitdagend: 21—23—24—25—26—U4

Een tennistrainer heeft verschillende formaten tennisballen. Van de tennisballen is de diameter aangegeven. De inhoud I in cm^3 van een tennisbal met diameter d in cm kun je berekenen met de formule $I = 0,5236 \cdot d^3$.

• Hoe kun je uitzoeken hoeveel keer zo groot de inhoud van een large tennisbal is ten opzichte van een Xsmall tennisbal?



$$H = p^2 \cdot p^3$$

$$H = p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p$$

$$H = p^{\dots}$$

$$H = (p^7)^3$$

$$H = p^7 \cdot p^7 \cdot p^7$$

$$H = p^{\dots}$$

$$H = \frac{p^5}{p^3}$$

$$H = \frac{p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p}{p \cdot p \cdot p}$$

$$H = p^{\dots}$$

21 Op de blaadjes zie je hoe machtsformules herleid worden tot de vorm $H = p^{\dots}$.

a Vul de blaadjes verder in.

b Herleid de formules tot de vorm $f = m^{\dots}$.

A $f = (m^2)^5$ C $f = (m^3)^4$

B $f = m^7 \cdot m^4$ D $f = \frac{m^6}{m}$

Theorie

Bij het **herleiden van machtsformules** kun je gebruik maken van de rekenregels:

$$g^a \cdot g^b = g^{a+b} \quad \frac{g^a}{g^b} = g^{a-b} \quad (\text{met } g \neq 0)$$

$$(g^a)^b = g^{a \cdot b} \quad \frac{1}{g^b} = g^{-b} \quad (\text{met } g \neq 0)$$

Deze rekenregels gelden ook voor negatieve en gebroken exponenten.

Voorbeeld

Herleid de formules $w = (d^4)^2$, $w = d^6 \cdot d$ en $w = \frac{d^{20}}{d^{2,5}}$ tot de vorm $w = d^{\dots}$.

Oplossing

$$w = (d^4)^2 \quad w = d^6 \cdot d \quad w = \frac{d^{20}}{d^{2,5}}$$

$$w = d^{4 \times 2} \quad w = d^{6+1} \quad w = d^{20-2,5}$$

$$w = d^8 \quad w = d^7 \quad w = d^{17,5}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 022

22 Herleid de formules tot de vorm $R = z^{\dots}$.

- H**
- a $R = (z^4)^{10}$ d $R = z^{13} \cdot z \cdot z^4$
 b $R = z^{-3} \cdot z^8$ e $R = (z^{13})^7$
 c $R = \frac{z^{10}}{z^{2,5}}$ f $R = \frac{1}{z^{17}}$

☐	$T = (4k^3)^2$
☐	$T = 4k^3 \cdot 4k^3$
☐	$T = 4 \cdot 4 \cdot k^3 \cdot k^3$
☐	$T = 4^2 \cdot (k^3)^2$
☐	$T = \dots k^{\dots}$
☐	
☐	

☐	$T = \left(\frac{k}{2}\right)^3$
☐	$T = \frac{k}{2} \cdot \frac{k}{2} \cdot \frac{k}{2}$
☐	$T = \frac{k^3}{2^3}$
☐	$T = \frac{k^3}{8}$
☐	$T = \frac{1}{\dots} k^3$
☐	
☐	

23 Op de blaadjes zie je hoe machtsformules herleid worden tot de vorm $T = \dots k^{\dots}$.

- a Vul de blaadjes verder in.
 b Herleid de formules tot de vorm $v = \dots b^{\dots}$
 A $v = (5b^6)^4$ C $v = (2b^{10})^6$
 B $v = \left(\frac{10}{b}\right)^5$ D $v = \left(\frac{b}{2}\right)^{10}$

Theorie

Bij het **herleiden van machtsformules** kun je gebruik maken van de rekenregels:

$$(p \cdot q)^a = p^a \cdot q^a$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^a = \frac{p^a}{q^a} \quad (\text{met } q \neq 0)$$

Deze rekenregels gelden ook voor negatieve en gebroken exponenten.

Voorbeeld

Herleid de formules $t = (4n^3)^{2,5}$ en

$$t = \left(\frac{n}{-3}\right)^4 \text{ tot de vorm } t = \dots n^{\dots}.$$

Oplossing

$$t = (4n^3)^{2,5} \quad t = \left(\frac{n}{-3}\right)^4$$

$$t = 4^{2,5} (n^3)^{2,5} \quad t = \frac{n^4}{(-3)^4}$$

$$t = 32n^{7,5} \quad t = \frac{1}{81}n^4$$

Ondersteunende route → maak opdracht 024

24 Herleid de formules tot de vorm $Z = \dots h^{\dots}$.

H

a $Z = (-8h^7)^2$ **c** $Z = (16h^3)^{1,5}$

b $Z = \left(\frac{14h}{2}\right)^2$ **d** $Z = \left(\frac{16}{h}\right)^{2,25}$

25 Hoe sneller je rijdt, hoe langer de remweg. De remweg is de afstand die de auto nog rijdt voor hij tot stilstand komt nadat de rem is ingetrapt. Voor een gemiddelde auto bij droog weer en normaal wegdek geldt $R = 0,07 \cdot v^2$. Hierin is R de remweg in meters en v de snelheid in meters per seconde.

- a** Bereken de remweg bij een snelheid van 20 meter per seconde.
- b** De snelheid van een auto geef je meestal niet in meter per seconde maar in km per uur of, zoals in de Verenigde Staten gebruikelijk is, in miles per hour. Een mijl is 1609 meter.
Leg met de verhoudingstabel uit dat 1 mijl per hour ongeveer gelijk is aan 0,447 meter per seconde.
- c** Vul in: Met de formule $v = \dots \cdot V$ druk je de snelheid v in meter per seconde uit in de snelheid V in miles per hour.
- d** Druk door te substitueren de remweg R uit in V . Schrijf de formule zonder haakjes.

<i>aantal meters</i>	...	...
<i>aantal seconden</i>	3600	1

26 Het materiaal waar zwempkleding van gemaakt is, heeft invloed op de weerstand ten opzichte van het water. Voor de zwempakken A en B gelden de formules $I_A = 23,47 \cdot v^{2,28}$ en $I_B = 21,83 \cdot v^{2,21}$. Hierin is I de inspanning in Newton en v de snelheid in meter per seconde.

- a** Pieter haalt een snelheid van 1,65 meter per seconde als hij zwempak A draagt.
Bereken welke snelheid hij met dezelfde inspanning kan halen als hij zwempak B draagt.
- b** De verhouding $K = \frac{I_B}{I_A}$ geeft aan hoeveel keer zo groot de vereiste inspanning is wanneer je in zwempak B zwemt ten opzichte van zwempak A.
Herleid de verhouding $K = \frac{I_B}{I_A}$ tot de vorm $K = p \cdot v^q$.
Rond indien nodig af op twee decimalen.



Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten

- 022 a** Vul in en schrijf op welke rekenregel is gebruikt.

$$S = (k^{10})^{2,4} \text{ wordt } S = k^{10 \times 2,4} \text{ dus } S = k^{\dots}$$

$$M = u^{12} \cdot u^{-3} \text{ wordt } M = u^{12 + (-3)} \text{ dus } M = u^{\dots}$$

$$R = \frac{1}{t^{1,6}} \text{ wordt } R = t^{\dots}$$

$$F = \frac{r^8}{r^{1,6}} \text{ wordt } F = r^{8 - 1,6} \text{ dus } F = r^{\dots}$$

Herleid de formules tot de vorm $W = s^{\dots}$.

b $W = (s^5)^6$

e $W = s^{11} \cdot s \cdot s^5$

c $W = \frac{s^{14}}{s^{3,5}}$

f $W = \frac{1}{s^8}$

d $W = s^{-4} \cdot s^6$

g $W = (s^8)^3$

- 024 a** Vul in en schrijf op welke rekenregel is gebruikt.

$$B = \left(\frac{r}{2}\right)^4 \text{ wordt } B = \frac{r^4}{2^4} \text{ wordt } B = \frac{r^4}{\dots} \text{ dus } B = \frac{1}{\dots} r^4.$$

$$D = (-4w)^3 \text{ wordt } D = (-4)^3 \cdot w^3 \text{ dus } D = \dots w^3.$$

Herleid de formules tot de vorm $T = \dots c^{\dots}$.

b $T = \left(\frac{32c}{8}\right)^3$

d $T = \left(\frac{81}{c}\right)^{1,25}$

c $T = (-4c^5)^4$

e $T = (25c^6)^{1,5}$

1 $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$

2 $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$

3 $\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b} \quad (\text{met } g \neq 0)$

4 $\frac{1}{g^b} = g^{-b} \quad (\text{met } g \neq 0)$

5 $(p \cdot q)^a = p^a \cdot q^a$

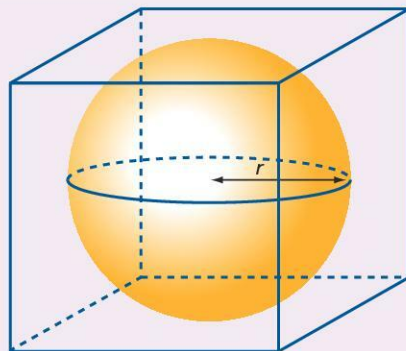
6 $\left(\frac{p}{q}\right)^a = \frac{p^a}{q^a} \quad (\text{met } q \neq 0)$

Uitdagende opdrachten

- U4** In een fabriek worden ballen in kubusvormige dozen verpakt. Er wordt steeds een doos gebruikt waar de bal precies in past. De inhoud I_B van de bal in cm^3 kun je berekenen met de formule $I_B = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$. Hierin is r de straal van de bal in cm.

- a** Leg uit dat je de inhoud I_D in cm^3 van de doos kunt berekenen met de formule $I_D = 8r^3$.
- b** Vanwege de vorm van de bal zal altijd een deel van de inhoud van de doos uit lucht bestaan. Het percentage P van de inhoud dat door de bal wordt ingenomen, kun je berekenen met de formule $P = \frac{I_B}{I_D} \times 100\%$.

Ga na, zonder getallenvoorbeelden te gebruiken, dat dit percentage altijd hetzelfde is.



14.5 Formules combineren

Je leert

- hoe je formules combineert

Leerroutes

- ondersteunend: 27—028—29—30—31
- doorlopend: 27—28—29—30—31
- uitdagend: 27—29—30—31—U5

De bruto maandsalarissen van Dennis en Joris kun je berekenen met de formules $S_D = 124j + 3350$ en $S_E = 186j + 2640$. In deze formules is het bruto maandsalaris S in euro's en j de tijd in jaren met $j = 0$ in 2021.

- Hoe kun je uitzoeken in welke jaren de bruto maandsalarissen minder dan 100 euro van elkaar verschillen?



- 27** Klaas en Iris zijn beiden aan het sparen. Op het blaadje staan de formules waarmee je het spaartegoed van elk kunt berekenen. In deze formules is het spaartegoed S in euro's, j de tijd in jaren en m de tijd in maanden.

- a** Je kunt het spaartegoed van Iris ook uitdrukken in j door de formule $m = 12j$ te substitueren. Laat zien dat het resultaat $S_I = 240j + 3200$ is.

- b** Klaas en Iris maken een verschilformule. Vul in.

$$S_{\text{verschil}} = S_K - S_I$$

$$S_{\text{verschil}} = 150j + 4190 - (240j + 3200)$$

$$S_{\text{verschil}} = 150j + 4190 - \dots j - \dots$$

$$S_{\text{verschil}} = \dots j + \dots$$

- c** Los de vergelijking $S_{\text{verschil}} = 0$ op.
d Na hoeveel jaar sparen hebben ze evenveel gespaard?
e Hoeveel euro hebben ze dan beiden gespaard?
f Na hoeveel jaar heeft Iris 100 euro meer spaartegoed dan Klaas?

Klaas $S_K = 150j + 4180$

Iris $S_I = 20m + 3200$

Theorie

Je kunt **formules combineren** door onder andere:

- de ene formule te substitueren in de andere formule
- de ene formule van de andere formule af te trekken.

Soms heb je bij het combineren van formules haakjes nodig. Daarna werk je indien nodig de haakjes weg en vereenvoudig je de ontstane formule.

Voorbeeld 1

Gegeven zijn de formules $a = 2m$ en $r = m^2 - 4m + 7$.
Druk r uit in a .

Oplossing

$$\begin{aligned} a &= 2m \\ 2m &= a && \text{verwisseld} \\ m &= 0,5a && \text{links en rechts : 2} \\ r &= (0,5a)^2 - 4(0,5a) + 7 && \text{gesubstitueerd} \\ r &= 0,5^2 \cdot a^2 - 2a + 7 && \text{haakjes weggewerkt} \\ r &= 0,25a^2 - 2a + 7 && \text{vereenvoudigd} \end{aligned}$$

Voorbeeld 2

Stel de verschilformule $V = W_A - W_B$ op met de formules $W_A = -7n + 9$ en $W_B = 3n - 6$.

Oplossing

$$\begin{aligned} V &= W_A - W_B \\ V &= -7n + 9 - (3n - 6) && \text{gecombineerd} \\ V &= -7n + 9 - 3n + 6 && \text{haakjes weggewerkt} \\ V &= -10n + 15 && \text{vereenvoudigd} \end{aligned}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 028

- 28** Een productiemaatschappij maakt cd's en rekent een prijs per cd die afhankelijk is van het te leveren aantal. Het verband wordt gegeven door de formule $p = -0,003q + 16,25$.

Hierin is p de verkoopprijs per cd in euro's en q het aantal cd's. De productiekosten K van één cd in euro's hangen af van het aantal cd's dat gemaakt wordt. Dit verband wordt gegeven door de formule $K = \frac{4500}{q} + 0,25$.

- Bereken de winst per cd bij $q = 5000$.
- Leg uit dat je met de formule $W = -0,003q + 16 - \frac{4500}{q}$ direct de winst per cd kunt berekenen bij elk aantal geproduceerde cd's.
- Hoe groot is de maximale winst per cd? Hoeveel cd's moeten er dan geproduceerd worden?

- 29** Met een windmolen kun je energie opwekken. De hoeveelheid energie per tijdseenheid heet het vermogen. Het vermogen dat een windmolen levert, hangt af van de windsnelheid. Bij een bepaalde windmolen geldt de formule $P = 3,7w^3$. Hierin is P het vermogen in watt en w de windsnelheid in meters per seconde.

- Bij welke windsnelheid levert een windmolen 29 600 watt?
- Met de formule $k = 3,6w$ kun de je windsnelheid k in km per uur berekenen. Hierin is w de windsnelheid in meter per seconde.
Stel een formule op waarin P uitgedrukt wordt in k .



30

H

Een fabrikant van spelletjes wil een nieuw kaartspel op de markt brengen. Uit onderzoek is gebleken dat het verband tussen de prijs en het aantal spelletjes dat hij per maand kan verkopen, wordt gegeven door de formule $q = 4p^2 - 120p + 900$. Hierin is q is het aantal spelletjes dat hij per maand kan verkopen en p de prijs van een spel in euro's. De fabrikant maakt precies zoveel spelletjes als hij kan verkopen. De formule geldt alleen voor een maximale prijs van 15 euro per spelletje.

- Bereken de totale opbrengst als hij 9 euro per spel vraagt.
- Voor de totale kosten geldt de formule $TK = 3q + 150$. Bereken de totale winst bij een prijs van 9 euro.
- Leg uit dat voor de totale opbrengst TO geldt $TO = 4p^3 - 120p^2 + 900p$.
- Druk TK uit in p .
- De totale winst TW wordt berekend met $TW = TO - TK$. Druk de totale winst uit in de prijs p .
- Welke prijs kan de fabrikant het beste vragen?

31

Bij het afdrukken van een digitale foto wordt de afbeelding in een heleboel kleine vierkantjes verdeeld, pixels of dots genoemd. Het aantal pixels wordt bepaald door de gekozen resolutie. Bij een lage resolutie zijn er weinig pixels en kun je soms de afzonderlijke pixels zien. Bij een hoge resolutie zijn er veel pixels: de afdruk is scherp en je kunt niet meer zien dat de foto in vierkantjes is verdeeld. Het opslaan van de foto kost dan wel veel geheugenruimte. De totale hoeveelheid pixels P die een foto bevat, is afhankelijk van de gekozen resolutie R en van de lengte l en de breedte b van de foto. Er geldt $P = 0,1550 \cdot l \cdot b \cdot R^2$. Hierin zijn l en b in cm, en R in dpi (dots per inch). Ga in de rest van de opdracht uit van foto's die voldoen aan $l = 1,5 \cdot b$.

- Laat met een herleiding zien dat voor dit soort foto's de formule voor P kan worden geschreven in de vorm $P = a \cdot l^2 \cdot R^2$ en bereken a in vier decimalen.
- Bij een grote foto kun je een lagere resolutie kiezen, omdat je die van een grotere afstand bekijkt. Voor de beste kijkafstand K geldt $K = 2l$. De optimale resolutie hangt af van de kijkafstand: $R = 5500K^{-0,812}$. Gebruik de formules voor K en R om het aantal benodigde pixels uit te drukken in de lengte l van de foto. (Ontleend aan *CE havo wiskunde A pilot 2013, tijdvak 2*)



Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

028

Een fabrikant maakt webcams en rekent een prijs per webcam die afhankelijk is van het aantal gefabriceerde webcams. Het verband wordt gegeven door de formule $p = -0,05q + 58$. Hierin is p de verkoopprijs per webcam in euro's en q het aantal gefabriceerde webcams.

De productiekosten K per webcam in euro's hangen af van het aantal gefabriceerde webcams. Dit verband wordt gegeven door de formule $K = 17,5 + \frac{250}{q}$

- Bereken de prijs van een webcam bij een productie van 500 webcams.
- De winst W per webcam in euro's bereken je met de formule $W = p - K$.
Hoeveel euro winst per webcam wordt er gemaakt bij een productie van 500 webcams?
- Op het blaadje zie je hoe de formule voor de winst W per webcam in euro's wordt opgesteld door de formules van p en K te combineren.
Waarom is de formule van K tussen haakjes gezet?
- In stap 2 werden de haakjes weggewerkt en in stap 3 werd de formule vereenvoudigd.
Vul het blaadje verder in
- Onderzoek met je rekenmachine hoe groot de maximale winst per webcam is. Hoeveel webcams moeten er dan gefabriceerd worden?



●	$W = p - K$								
●	$W = -0,05q + 58 - \left(17,5 + \frac{250}{q}\right)$	1							
●	$W = -0,05q + 58 - \dots - \frac{\dots}{\dots}$	2							
●	$W = \dots q + \dots - \frac{\dots}{\dots}$	3							
●									

Uitdagende opdrachten

U5

De hoeveelheid vloeistof die per seconde door een buis stroomt, hangt af van de straal van de buis. Maar ook het drukverschil en de vloeistofdikte hebben invloed. Bij een vast drukverschil geldt de formule $V = p \cdot R^4$.

Hierin is V de hoeveelheid vloeistof in liters per seconde die door de buis stroomt en is R de straal van de buis in cm. In de formule is p een constante die afhangt van het drukverschil en de vloeistofdikte.

Onderzoek met een substitutie of de hoeveelheid vloeistof bij iedere waarde van p met hetzelfde percentage toeneemt als de straal van de buis twee keer zo groot wordt genomen. En zo ja, met hoeveel procent neemt de hoeveelheid vloeistof dan steeds toe?

32 Herleid de formules waarbij je S uitdrukt in d .

a $\frac{2}{5}(30S - 10d) = 42$ **d** $-4d + 3S = -100 - 2S$

b $6 = \frac{S+3}{d-9} - 4$ **e** $\frac{4}{S} = \frac{5d+8}{d}$

c $d = \sqrt{2,5S - 10}$ **f** $d = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{4S + 8}$

33 De firma Swing produceert onder andere schommels van duurzame materialen. De gemiddelde kosten per toestel hangen af van het geproduceerde aantal volgens de formule

$$GK = 35 + \frac{9000}{4S + 50}$$

Hierin is GK de gemiddelde kosten per schommel in euro's en S het aantal geproduceerde schommels.

- a** Bereken de gemiddelde kosten per schommel als er 100 schommels worden gemaakt.
- b** Beredeneer aan de hand van de formule dat de gemiddelde kosten per schommel dalen als er meer schommels worden gemaakt.
- c** De prijs P in euro's die de firma voor een toestel wil vragen is 40% hoger dan de gemiddelde kosten. Druk P uit in S en schrijf daarbij de formule zonder haakjes.
- d** Laat zien dat je de formule tot $S = \frac{3150}{P - 49} - 12,5$ kunt herleiden.



34 Herleid de formules tot de vorm $T = \dots m^{\dots}$.

a $T = (m^5)^7 \cdot m$ **d** $T = m^6 \cdot 6m^9 \cdot \frac{1}{m^4}$

b $T = m^3 \cdot (-2m^{2,6})^4$ **e** $T = \frac{4}{m^7}$

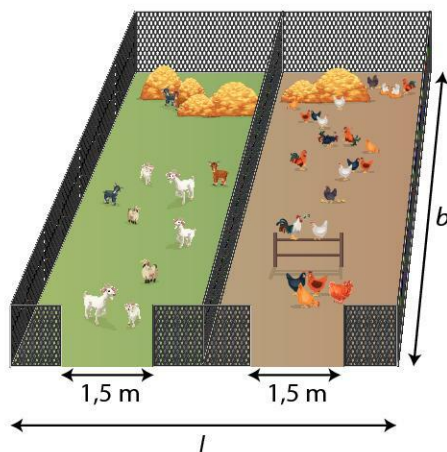
c $T = \left(\frac{256}{h}\right)^{1,25}$ **f** $T = \left(\frac{15m^2}{3}\right)^3$

35 De meeste roofdieren proberen iedere dag hun voedsel zo snel mogelijk te vangen. Voor een bepaald soort roofdier is met de formule $r = 4 \cdot \sqrt{t - 1}$ de hoeveelheid voedsel r in kg te berekenen bij een tijd van t uur die nodig is om het te vangen.

- a** Hoeveel uur moet dit soort roofdieren jagen om 8 kg voedsel te vangen?
- b** Herleid de formule waarbij t wordt uitgedrukt in r .
- c** Hoelang moet dit soort roofdieren jagen om 6 kg voedsel te vangen? Geef je antwoord in uren en minuten nauwkeurig.

- 36** Boer Mertens wil een stuk land van 150 m^2 afrasteren voor zijn kippen en geiten. De afrastering kost € 12,- per strekkende meter. De twee openingen voor de toegangshekjes zijn 1,5 meter breed en daarvoor hoeft geen materiaal gekocht te worden. Noem de breedte van het stuk land b en de lengte l .

- Kies $b = 30$ en bereken de totale kosten voor de afrastering.
- Leg uit dat geldt: $l = \frac{150}{b}$
- Voor de totale lengte TL van de afrastering, dus zonder de hekken, geldt de formule $TL = 3b - 3 + \frac{3}{b}$.
Zoek uit welk getal op de puntjes moet staan.
- Onderzoek bij welke breedte de kosten voor boer Mertens het laagst zijn.



- 37** Een bus rijdt met een constante snelheid van 90 km per uur over de A28 richting Amersfoort. Bij Zwolle rijdt hij over de IJsselbrug en 6 km verderop rijdt hij om 11.00 uur langs een tankstation. Met de formule $A_{bus} = 1,5t + 6$ kun je berekenen hoeveel km de bus heeft afgelegd nadat het over de IJsselbrug reed. Hierin is A in km en de t tijd in minuten met $t = 0$ om 11.00 uur.

- Leg uit hoe je de getallen 1,5 en 6 in de formule kunt afleiden uit de gegevens.
- Een auto die met een constante snelheid van 120 km per uur rijdt, passeert het tankstation wat later. De afstand die de auto heeft afgelegd nadat het over de IJsselbrug reed, is te berekenen met de formule $A_{auto} = 2 \cdot (t - 2) + 6$. Hierin is A in km en de t tijd in minuten met $t = 0$ om 11.00 uur. Nadat de auto de bus heeft ingehaald, geldt voor de afstand D in km tussen de auto en de bus een formule van de vorm $D = a \cdot t + b$, met t de tijd in minuten met $t = 0$ om 11.00 uur. Zoek uit welke waarden a en b hebben.

Vaardigheid

Je kunt aantonen dat twee formules gelijkwaardig zijn.

Door de ene formule te herleiden tot de andere kun je aantonen dat twee formules gelijkwaardig zijn.

Voorbeeld 1

Onderzoek of de formules $S = 3r + 21$ en $r = \frac{1}{3}S - 7$ gelijkwaardig zijn.

Oplossing

$S = 3r + 21$ De formules zijn gelijkwaardig,
 $3r + 21 = S$ want je kunt de formule $S = 3r + 21$
 $3r = S - 21$ herleiden tot de formule $r = \frac{1}{3}S - 7$.
 $r = \frac{1}{3}S - 7$

Voorbeeld 2

Onderzoek of de formules $b = 0,2c + 8$ en $c = 5b - 1,6$ gelijkwaardig zijn.

Oplossing

$b = 0,2c + 8$ De formules zijn niet gelijkwaardig,
 $0,2c + 8 = b$ want je kunt de formule
 $0,2c = b - 8$ $b = 0,2c + 8$ niet herleiden tot de
 $c = 5b - 40$ formule $c = 5b - 1,6$.

S1 Onderzoek of de paren formules gelijkwaardig zijn.

a $w = 6(c + 9) - 4c$ en $c = 9 - \frac{1}{6}w$

b $k = 3(2t + 12) - (7t - 4)$ en $t + k = 32$

Vaardigheid

Je kunt een gebroken formule herleiden.

Bij het herleiden van een gebroken formule kun je gebruik maken van de rekenregels:

Uit $\frac{A}{B} = C$ volgt $A = B \cdot C$ en dus ook $\frac{A}{C} = B$.

Uit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ volgt $A \cdot D = B \cdot C$.

Voorbeeld 1

Herleid $\frac{m-5}{d} = \frac{6}{m}$ tot de vorm $d = \dots$

Oplossing

$$\begin{aligned}\frac{m-5}{d} &= \frac{6}{m} \\ m(m-5) &= 6d \\ m^2 - 5m &= 6d \\ 6d &= m^2 - 5m \\ d &= \frac{1}{6}m^2 - \frac{5}{6}m\end{aligned}$$

Voorbeeld 2

Herleid $4v + \frac{c}{7} = 8$, waarbij je c uitdrukt in v .

Oplossing

$$\begin{aligned}4v + \frac{c}{7} &= 8 \\ \frac{c}{7} &= 8 - 4v \\ c &= 7(-4v + 8) \\ c &= -28v + 56\end{aligned}$$

S2 Herleid de vergelijkingen tot de vorm $E = \dots$

a $r = \frac{14}{2E - 8}$

b $\frac{6}{E + 7} = \frac{3}{r - 6}$

S3 Herleid de formules tot de vorm $P = a \cdot n + b$.

a $P = \frac{5n + 2(3n - 1)}{2}$

b $P = \frac{6n - (n - 24)}{10}$

Vaardigheid

Je kunt een wortelformule herleiden.

Bij het herleiden van een wortelformule kun je gebruik maken van:

Uit $\sqrt{A} = B$ volgt $A = B^2$ (voor $B \geq 0$).

Je kunt ook gebruik maken van de rekenregels (voor $p \geq 0$ en $q \geq 0$):

$$\sqrt{p \cdot q} = \sqrt{p} \cdot \sqrt{q} \quad \sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}} \quad \text{met } q \neq 0$$

Voorbeeld 1

Herleid de formule $d = \sqrt{2r - 4}$ waarbij je r uitdrukt in d .

Oplossing

$$d = \sqrt{2r - 4}$$

$$\sqrt{2r - 4} = d$$

$$2r - 4 = d^2$$

$$2r = d^2 + 4$$

$$r = \frac{1}{2}d^2 + 2$$

Voorbeeld 2

Herleid de formule $T = \sqrt{\frac{16}{m}}$

Oplossing

$$T = \sqrt{\frac{16}{m}}$$

$$T = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{m}}$$

$$T = \frac{4}{\sqrt{m}}$$

Voorbeeld 3

Vereenvoudig de formule $B = \sqrt{0,09n}$.

Oplossing

$$B = \sqrt{0,09n}$$

$$B = \sqrt{0,09} \cdot \sqrt{n}$$

$$B = 0,3 \cdot \sqrt{n}$$

S4 Herleid de formules waarbij je d uitdrukt in s .

a $s = \sqrt{4d - 7}$

b $s = 5 \cdot \sqrt{3d + 8}$

S5 Vereenvoudig de formules.

a $T = \sqrt{289r}$

b $U = \sqrt{\frac{z}{256}}$

Vaardigheid

Je kunt een machtsformule herleiden.

Bij het herleiden van een machtsformule kun je gebruikmaken van de rekenregels:

$$g^a \cdot g^b = g^{a+b} \quad \frac{g^a}{g^b} = g^{a-b} \quad (\text{met } g \neq 0)$$

$$(g^a)^b = g^{a \cdot b} \quad \frac{1}{g^b} = g^{-b} \quad (\text{met } g \neq 0)$$

$$(p \cdot q)^a = p^a \cdot q^a \quad \left(\frac{p}{q}\right)^a = \frac{p^a}{q^a} \quad (\text{met } q \neq 0)$$

Deze rekenregels gelden ook voor negatieve en gebroken exponenten.

Voorbeeld 1

Herleid de formule $f = (-2d^3)^4$ tot de vorm $f = \dots d^{\dots}$.

Oplossing

$$f = (-2d^3)^4$$

$$f = (-2)^4 \cdot (d^3)^4$$

$$f = 16d^{12}$$

Voorbeeld 2

Herleid de formule $f = d^{8,7} \cdot d \cdot \frac{1}{d^5}$ tot de vorm $f = \dots d^{\dots}$.

Oplossing

$$f = d^{8,7} \cdot d \cdot \frac{1}{d^5}$$

$$f = d^{8,7} \cdot d \cdot d^{-5}$$

$$f = d^{4,7}$$

Voorbeeld 3

Herleid de formule $f = \left(\frac{d^4}{2}\right)^3$ tot de vorm $f = \dots d^{\dots}$.

Oplossing

$$f = \left(\frac{d^4}{2}\right)^3$$

$$f = \frac{(d^4)^3}{2^3}$$

$$f = \frac{d^{12}}{8} \text{ dus } f = \frac{1}{8} d^{12}$$

S6 Herleid de formules tot de vorm $B = \dots d^{\dots}$.

a $B = d^{-3} \cdot d^8 \cdot (d^2)^{1,5}$ **c** $B = (6d)^2 \cdot \frac{1}{d^3} \cdot d^4$

b $B = \left(\frac{14}{d^3}\right)^2$ **d** $B = \left(\frac{2d}{6}\right)^3$

Vaardigheid

Je kunt formules combineren.

Formules combineer je door onder andere:

- de ene formule te substitueren in de andere formule
- de ene formule van de andere formule af te trekken.

Soms heb je bij het combineren van formules haakjes nodig. Daarna werk je indien nodig de haakjes weg en vereenvoudig je de ontstane formule.

Voorbeeld 1

Gegeven zijn de formules $m + 6t = 3$ en $r = \frac{6}{5m - 8}$.
Druk r uit in t .

Oplossing

$$m + 6t = 3$$

$$m = -6t + 3$$

$$r = \frac{6}{5m - 8}$$

$$r = \frac{6}{5(-6t + 3) - 8}$$

$$r = \frac{6}{-30t + 15 - 8}$$

$$r = \frac{6}{-30t + 7}$$

Voorbeeld 2

Stel de verschilformule $V = W_A - W_B$ op bij de formules $W_A = 4h + 1$ en $W_B = -7h - 5$.

Oplossing

$$V = W_A - W_B$$

$$V = 4h + 1 - (-7h - 5)$$

$$V = 4h + 1 + 7h + 5$$

$$V = 11h + 6$$

- S7** Een fabrikant produceert zadels voor paarden. Met de formules op het blaadje kun je de opbrengst O en de kosten K per zadel in euro's berekenen als je het aantal geproduceerde zadels q weet. Het aantal geproduceerde zadels is afhankelijk van de prijs p per zadel in euro's.
- Druk O uit in p .
 - Laat met substitueren zien dat $K = \frac{4000}{1000 - p} + 138$.
 - De winst W per zadel wordt berekend met $W = O - K$.
Druk W uit in p .
 - Bij welke prijs per zadel is de winst per zadel maximaal?

$$O = p \cdot q$$

$$K = \frac{2000}{q} + 138$$

$$q = 500 - 0,5p$$

T1 Het bereik van een zendantenne voor mobiele telefonie hangt af van de hoogte van de zendantenne. Bij benadering geldt dat het bereik R in km afhangt van de hoogte h in meters volgens de formule $R = 3,6 \cdot \sqrt{h + 0,8}$.

- a Een zendantenne heeft een hoogte van 12 meter en wordt 3 meter hoger gemaakt.
Met hoeveel km neemt het bereik toe?
- b Herleid de formule waarbij h uitgedrukt wordt in R .
- c Hoe hoog moet een zendmast worden als het een bereik moet hebben van 18 km?



T2 Onderzoek of de paren formules gelijkwaardig zijn.

- a $-(2f + 3) = 6\left(\frac{u}{3} - 1\right)$ en $u = -f + 3$
- b $F = \frac{6r - (3r + 8) + 9r}{4}$ en $F - 3r = 2$
- c $k = \sqrt{\frac{49}{5t}}$ en $\sqrt{5t} = \frac{k}{7}$
- d $s = \sqrt{0,16v}$ en $2,5s = \sqrt{v}$

T3 Een fabrikant van spelletjes maakt onder andere het bordspel Klossen. De gemiddelde kosten per spel kun je berekenen met de formule $GK = 2,5 + \frac{600}{0,5s + 25}$

Hierin is GK de gemiddelde kosten in euro's en s het aantal geproduceerde spellen.

- a Bereken de gemiddelde kosten bij een productie van 100 spellen.
- b Tot welke grenswaarde nadert GK als er veel spellen worden geproduceerd?
- c Laat zien dat de formule te herleiden is tot $s = \frac{2400}{2GK - 5} - 50$.

T4 Herleid de formules waarbij je K uitdrukt in r .

- a $36 = \frac{2}{3}(20K - 4r)$
- b $\frac{7}{K} = \frac{5}{2r - 5}$
- c $r = \sqrt{1,25K + 35}$
- d $17 = \frac{r + 8}{K - 10} - 3$
- e $6r = \frac{72}{\sqrt{K}}$

T5 Frank is een succesvol fotograaf bij huwelijken. Hij verzorgt bij een huwelijk de foto's en maakt daar een trouwalbum van. Er is een verband tussen de prijs per trouwalbum en het aantal opdrachten q dat hij per jaar krijgt.

Met de formule $q = -0,00008p^2 + 0,16p + 60$ kan hij dit aantal opdrachten berekenen. Hierin is p de prijs van een trouwalbum in euro's.

- Bereken de totale opbrengst per jaar als hij 990 euro per trouwalbum vraagt.
- Stel een formule op voor de totale opbrengst TO in euro's.
- Voor de totale kosten geldt de formule $TK = 300q + 650$. Bereken de totale winst bij een prijs van 990 euro.
- Druk TK uit in p .
- Druk de totale winst TW uit in p .
- Bereken de maximale totale winst die hij per jaar kan maken.



T6 Herleid de formules tot de vorm $H = \dots v \dots$.

- $H = (v^3)^6 \cdot v$
- $H = v^2 \cdot (-5v^{6,1})^7$
- $H = \left(\frac{16}{v}\right)^{2,5}$
- $H = v \cdot -3v^4 \cdot \frac{7}{v^6}$
- $H = -v \cdot \frac{3}{v^7}$
- $H = \left(\frac{35v^5}{7}\right)^4$

T7 Bij het spel 'Frisbee werpen'werp je een frisbee op een vloer met even grote rechthoekige tegels. Als de frisbee in zijn geheel op één tegel blijft liggen, dan win je een prijs. In de figuur zie je het bovenaanzicht van een stukje van de tegelvloer. Bij dit spel geldt de formule

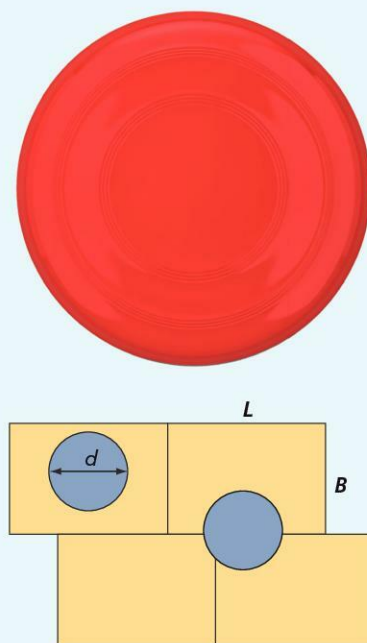
$$P = 100 \cdot \frac{L \cdot B - (L - d) \cdot (B - d)}{L \cdot B}$$

Hierin is P het verwachte percentage worpen waarbij de frisbee op meer dan één tegel terecht komt, L de lengte en B de breedte van een tegel in cm en d de diameter van de frisbee in cm.

- Bereken hoeveel procent van de worpen naar verwachting een prijs op zal leveren als de tegels 60 bij 40 cm zijn en de diameter van de frisbee 25 cm is.
- Voor vierkante tegels met lengte L is de formule te herleiden tot $P = 100 \cdot \frac{2d \cdot L - d^2}{L^2}$

Geef deze herleiding.

(Ontleend aan CE havo wiskunde A pilot 2013, tijdvak 1)



Je kunt aantonen dat twee formules gelijkwaardig zijn.

E1 Onderzoek of de paren formules gelijkwaardig zijn.

a $y = 4x - 84$ en $x = 0,25y + 21$

b $\frac{2}{5}P - \frac{4}{5}Q = \frac{3}{10}$ en $P = 2Q + 0,5$

c $Q = 2(5u + 1) + 7$ en $Q - 10u = 9$

Je kunt een gebroken formule herleiden.

E2 Herleid de vergelijkingen tot de vorm $y = \dots$

a $4 = \frac{x+6}{y-6}$

d $\frac{5}{y+1} = \frac{3}{x-2}$

b $8 = 2 + \frac{y+3}{x}$

e $\frac{y}{80} = \frac{5x-6}{12,5}$

c $x = \frac{2}{y+3}$

f $\frac{3}{2y+4} = \frac{x}{8}$

Je kunt een wortelformule herleiden.

E3 Herleid de formules waarbij je m uitdrukt in p .

a $p = \sqrt{0,5m+1}$

c $p = 2 \cdot \sqrt{m-4}$

b $p = \sqrt{\frac{1}{10}m+6}$

d $p = 0,1 \cdot \sqrt{5m-1}$

E4 Vereenvoudig de formules.

a $T = \sqrt{289z}$

c $B = \sqrt{0,09f}$

b $R = \sqrt{\frac{169}{p}}$

d $M = \sqrt{\frac{u}{6,25}}$

Je kunt een machtsformule herleiden.

E5 Herleid de formules tot de vorm $U = \dots r \dots$.

a $U = r^5 \cdot r^{18} \cdot r$

d $U = (-2r)^4 \cdot 6r^9$

b $U = \frac{r^{17}}{r^{18}}$

e $U = \left(\frac{3r}{5}\right)^4$

c $U = (r^5)^{12}$

f $U = (r^3 \cdot r^4)^5$

Je kunt formules combineren.

E6 Met de formules op het blaadje kun je de opbrengst en kosten per USB-stick berekenen. In deze formules zijn O en K in euro's en is q het aantal geproduceerde USB-sticks.

a De winst W per USB-stick wordt berekend met $W = O - K$.

Druk W uit in q .

b Bij welke aantal geproduceerde USB-sticks is de winst per USB-stick maximaal?

$$O = 12,45 - 0,005q$$

$$K = \frac{450}{q} + 3,85$$

E7 Het aantal voorkomende plantensoorten op een eiland kan benaderd worden met de formule $S = 28,6A^{0,32}$. Hierin is S het aantal voorkomende plantensoorten en A de oppervlakte van het eiland in vierkante mijlen.

- Het eiland Isla Isabela heeft een oppervlakte van 2249 vierkante mijl. Bereken hoeveel plantensoorten er volgens de formule op dit eiland voorkomen.
- Noem B de oppervlakte van een eiland in km^2 . Eén mijl is gelijk aan 1,609 km. Leg uit dat één vierkante mijl ongeveer gelijk is aan 2,589 vierkante km.
- Vul in: $A = \dots \cdot B$
- Stel een formule op waarbij S wordt uitgedrukt in B .

E8 Het aantal vierkante meters dat je met een liter verf kunt schilderen heet het rendement. Het rendement kun je berekenen met de formule $R = \frac{10 \cdot V}{d}$

Hierin is R het rendement in m^2/L , V het percentage vaste stof in de verf en d de dikte van de verflaag in micrometer.

- Op een blik verf staat vermeld dat het percentage vaste stof 67 is en dat het rendement 12 m^2/L is. Bereken de dikte van de verflaag waar de fabrikant van uitgaat.
- Herleid de formule zo, dat V wordt uitgedrukt in R en d .
- Als je rekening houdt met de verf die achterblijft in je gereedschap, dan kun je de hoeveelheid verf die je nodig hebt berekenen met de formule $H = \frac{10 \cdot A \cdot d}{V \cdot (100 - p)}$

Hierin is H de hoeveelheid verf in L, A de oppervlakte in m^2 , d de dikte van de verflaag in micrometer, V het percentage vaste stof en p het verliespercentage. Bij kwasten varieert het verliespercentage van 5 tot 10.

Op een blik van 2,5 liter staat dat het percentage vaste stof 35 is. Je wilt met een kwast een verflaag van 70 micrometer aanbrengen.

Bereken de oppervlakte die je met zo'n blik maximaal kunt verven.

- Herleid de formule voor H met behulp van je antwoord op opdracht b zo, dat H wordt uitgedrukt in A , R en p .
- Iemand heeft 15 liter verf gekocht met een rendement van 11 m^2/L . Met deze waarden is het verband tussen A en p te schrijven in de vorm $A = a \cdot p + b$. Bereken de waarden van a en b .

(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2009, tijdvak 2)



Steekproeven

Over het algemeen zal een grote steekproef een betrouwbaarder resultaat geven dan een kleine dachten ze in 1936 bij het blad *The Literary Digest*. In 1936, midden in een economische crisis met veel werklozen, stuurden ze 10 miljoen briefkaarten naar hun abonnees en naar personen uit telefoonboeken en uit registers van autokentekens. Op de briefkaart kon de keuze tussen Landon (republikein) en Roosevelt (democraat) vermeld worden. Het resulteerde in 2,4 miljoen reacties met 57% voor Landon en 43% voor Roosevelt. De verkiezingen werden echter door Roosevelt gewonnen met 61% tegen 37%. Het blad verloor aan geloofwaardigheid en aan aanzien en was twee jaar later verdwenen. Uiteraard volgde er een onderzoek naar oorzaken van dit falen.

Opdracht

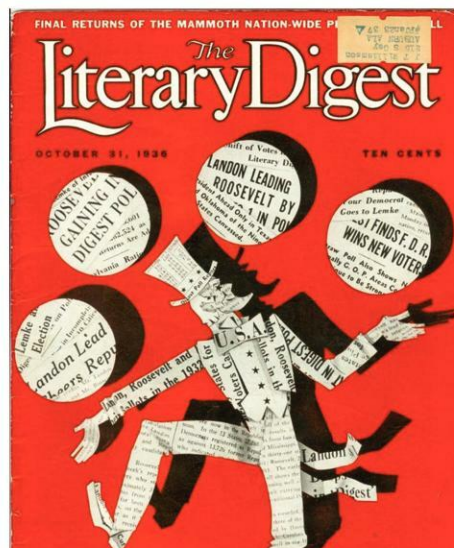
- Wat kunnen volgens jou de oorzaken zijn dat deze zeer grote steekproef faalde?

Het gevolg was dat er gezocht werd naar methoden waarbij steekproeven gebaseerd zijn op kansrekening, waardoor personen aselekt werden gekozen. George Gallup, oprichter van het onderzoeksbureau Gallup, dat in meer dan 20 landen opinieonderzoek doet, gebruikte deze methode in 1948. Zijn bureau voorspeldde dat de democraat Truman het zou verliezen van zijn uitdager Dewey. Steekproeven wezen uit dat Dewey met 49,5% tegen 44,5% zou winnen. De *Chicago Daily Tribune* was hiervan zo overtuigd dat deze krant de uitslag vroegtijdig publiceerde. Truman won echter de verkiezing met 49,1% tegen 45,1%. Met veel plezier toonde Truman dan ook de miskleun van de krant. De belangrijkste oorzaken van het falen van de onderzoekers was het stoppen van de interviews tien dagen voor de verkiezing en de aanname dat mensen die nog geen keuze konden maken niet zouden stemmen.

In Nederland voelen veel mensen zich overvallen door telefonische enquêtes. Onderzoeksbureaus hanteren daarom ook wel bestanden waarin allerlei soorten mensen zijn opgenomen die bereid zijn om mee te werken aan onderzoeken. Je kunt, als je ouder bent dan 18 jaar, je aanmelden voor het EenVandaag Opiniepanel. Je moet wel gegevens, zoals leeftijd, opleiding, beroep, inkomen, afkomst en dergelijke invullen.

Opdracht

- Is dit panel representatief voor Nederland?
- Noem enkele vragen waarvoor je het panel kunt gebruiken.



In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Lineair interpoleren
- Verdubbelingstijd en halveringstijd
- Logaritmische schaalverdeling
- Het 95%-betrouwbaarheidsinterval
- Redeneren met formules



Lineair interpoleren

- 1 De ontwikkeling van een vrucht wordt onderzocht. Daarvoor is de vrucht een aantal keer gewogen. In de tabel staan de resultaten.

t in weken	8	13	17	21
g in grammen	38	68	88	108

- Met hoeveel gram is het gewicht gemiddeld per week toegenomen tussen $t = 8$ en $t = 13$?
- Neem aan dat het gewicht tussen $t = 8$ en $t = 13$ elke week evenveel toenam en schat daarmee het gewicht van de vrucht na 10 weken.
- Neem aan dat het gewicht tussen week 17 en week 21 ook elke week evenveel toenam en dat die ontwikkeling zich na week 21 doorzette. Schat het gewicht van de vrucht na 25 weken.



Theorie

Het vinden van een tussenliggende waarde in een grafiek of in een tabel heet interpoleren.

Als een grafiek bij een tabel op een bepaald gedeelte vrijwel een rechte lijn is, dan kun je een tussenliggende waarde schatten met lineair interpoleren.

- 2 In de tabel is voor een land weergegeven hoeveel huishoudens in een bepaalde inkomensklasse zitten.
- Schat met behulp van lineair interpoleren het aantal huishoudens met een besteedbaar inkomen van maximaal 37000 euro.
 - Schat ook met behulp van lineair interpoleren het aantal huishoudens met een besteedbaar inkomen van minimaal 42000 euro.

<i>besteedbaar inkomen in euro's</i>	<i>aantal huishoudens in duizendtallen</i>
minder dan 20 000	2547
20 000 – 30 000	1777
30 000 – 40 000	1309
40 000 – 50 000	687
meer dan 50 000	657

- 3 Een dorp had 579 inwoners in het jaar 2000. Twintig jaar later was het aantal inwoners gestegen naar 648.
- Bradley gaat er vanuit dat het aantal inwoners tussen 2000 en 2020 lineair is gestegen. Welke aantal inwoners zal Bradley schatten in 2012?
 - In 1980 had het dorp 461 inwoners. Schat met behulp van lineair interpoleren het aantal inwoners in 1994.

Verdubbelingstijd en halveringstijd

Theorie

Bij een exponentieel groeiproces met groefactor g is de verdubbelingstijd de tijd die nodig is om een hoeveelheid te verdubbelen.

Deze tijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = 2$.

De halveringstijd is de tijd die nodig is om een hoeveelheid te halveren.

Deze tijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = 0,5$.

Voorbeeld

Een populatie neemt jaarlijks met 1,3% af.

Na hoeveel jaren is de populatie gehalveerd?

Oplossing

De groefactor per jaar is

$$(100 - 1,3) : 100 = 0,987.$$

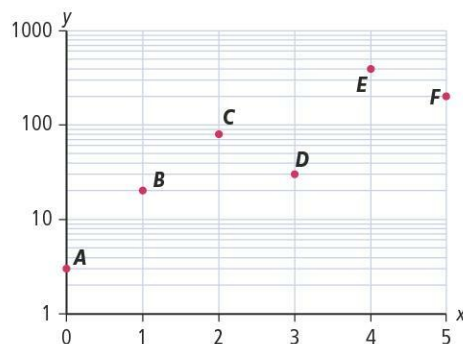
$0,987^t = 0,5$ oplossen met de rekenmachine geeft $t \approx 53,0$.

De populatie is na 53,0 jaren gehalveerd.

- 4 a Bij een groeiproces neemt de hoeveelheid met 1,29% per jaar toe.
Bereken de verdubbelingstijd.
- b Bij een ander groeiproces neemt de hoeveelheid met 25% per tien jaar af.
Bereken de halveringstijd in jaren.
- 5 a Het aantal kapperszaken in een land is de afgelopen vijf jaren met 25% toegenomen.
Bereken de verdubbelingstijd als deze stijging zich de komende jaren op dezelfde manier voortzet.
- b Het aantal cd-winkels in dat land is in de laatste twaalf jaar met één derde deel afgenomen.
Bereken de halveringstijd als deze daling zich de komende jaren op dezelfde manier voortzet.

Logaritmische schaalverdeling

- 6 In het assenstelsel heeft de verticale as een logaritmische schaalverdeling. Punt A heeft als coördinaten $(0, 3)$.
- a Geef de coördinaten van de punten B , C , D , E en F .
- b Teken de punten $G(0, 200)$, $H(2, 4)$ en $I(5, 500)$ in het assenstelsel.



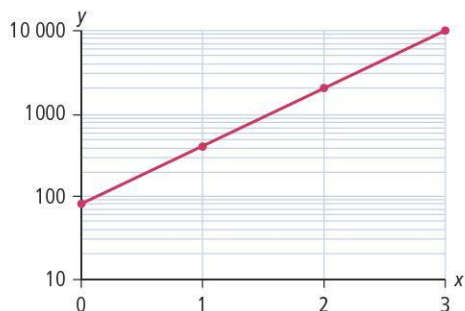
- 7 In de figuur is een grafiek getekend van het verband tussen de variabelen x en y .

a Vul de tabel in.

x	0	1	2	3
y	...	...	...	...

b Welk verband bestaat er tussen x en y ?

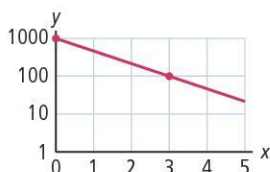
c Stel een formule op bij dit verband.



In een assenstelsel met op de verticale as een logaritmische schaalverdeling is de grafiek bij een exponentieel verband een rechte lijn.



A



B

- 8 a Bij welk assenstelsel heeft de verticale as een lineaire schaalverdeling? En bij welke een logaritmische schaalverdeling?
b Stel bij beide grafieken een formule op.
c Bereken bij het exponentiële verband de halveringstijd.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval

- 9 Bij een steekproef onder 1000 Nederlanders blijkt dat 10,8% regelmatig naar de sauna gaat.
a Leg uit dat de steekproefproportie p gelijk is aan 0,108.
b Welke waarde heeft de steekproefomvang n ?
c Bereken het 95% betrouwbaarheidsinterval voor het percentage Nederlanders dat regelmatig naar de sauna gaat. Geef de bijbehorende conclusie en vermeld de foutenmarge.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is:

$$\left[p - 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

Hierin is p de steekproefproportie en n de steekproefomvang.

- 10 In een onderzoek naar overgewicht onder jongens van 17 jaar zijn 400 jongens van 17 jaar gewogen. Het gemiddelde gewicht van deze jongens was 72 kg met een standaardafwijking van 7 kg. Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde gewicht van jongens van 17 jaar. Geef de bijbehorende conclusie en vermeld de foutenmarge.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is

$$\left[\bar{X} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right], \text{ met}$$

$\bar{X}$ het steekproefgemiddelde,
 n de steekproefomvang en
 S de steekproefstandaardafwijking.

Redeneren met formules

- 11** Op het blaadje wordt beredeneerd of bij de formule

$N = 16 - \frac{5}{1,8^t}$ de waarde van N toeneemt of afneemt als t steeds groter wordt en naar welke grenswaarde N nadert.

- a** Vul het blaadje verder in.
b Beredeneer op de manier van het blaadje of de waarde van P toeneemt of afneemt als t steeds groter wordt en naar welke eventuele grenswaarde P nadert.

A $P = \frac{250}{10 + 3 \cdot 0,15^t}$

B $P = 10(10 - 0,8^t)$

C $P = 1000 - \frac{130}{18 + 5 \cdot 2^t}$

D $P = 4 \cdot 1,3^t + 7$

Bij $t = 0$ is $N = \dots$
Als t steeds groter wordt, dan neemt $1,8^t$..., want $1,8 > 1$.
$\frac{5}{1,8^t}$ wordt dan bijna ...
$16 - \frac{5}{1,8^t}$ wordt dan bijna ...
Als t steeds groter wordt, dan wordt de waarde van N bijna ...
De waarde van N neemt dan dus ...
De grenswaarde is ...

- 12** Een slager haalt een stuk vlees uit de vrieskast en legt het in de koelcel. De temperatuur T in graden Celsius van het vlees, t uur nadat het vlees in de koelcel is gelegd, is te

berekenen met de formule $T = 6 - \frac{24}{\sqrt{3t+1}}$

- a** Welke temperatuur had het vlees op het moment dat het in de koelcel werd gelegd?
b Bereken de temperatuur van het vlees 10 uur nadat het in de koelcel is gelegd.
c Bereken na hoeveel uur de temperatuur van het vlees 0°C is.
d Beredeneer met de formule dat de temperatuur T bij toenemende waarden van t zal blijven stijgen.
e Beredeneer met de formule dat de temperatuur van de koelcel 6°C is.

- 13** Een kippenboer mest haantjes van een bepaald ras voor de slacht. Voor de gewichtstoename van haantjes van dat ras

geldt de formule $G = \frac{10000}{4 + 200 \cdot 0,4^t}$

Hierin is G het gewicht in grammen en t de tijd in weken.

- a** Beredeneer dat uit de formule blijkt dat het gewicht van de haantjes toeneemt.
b Als de boer doorgaat met mesten, dan zullen de haantjes niet onbegrensd in gewicht blijven toenemen. Beredeneer welke grenswaarde geldt voor het gewicht van de haantjes van dit ras.





Examenvorbereitung

SE

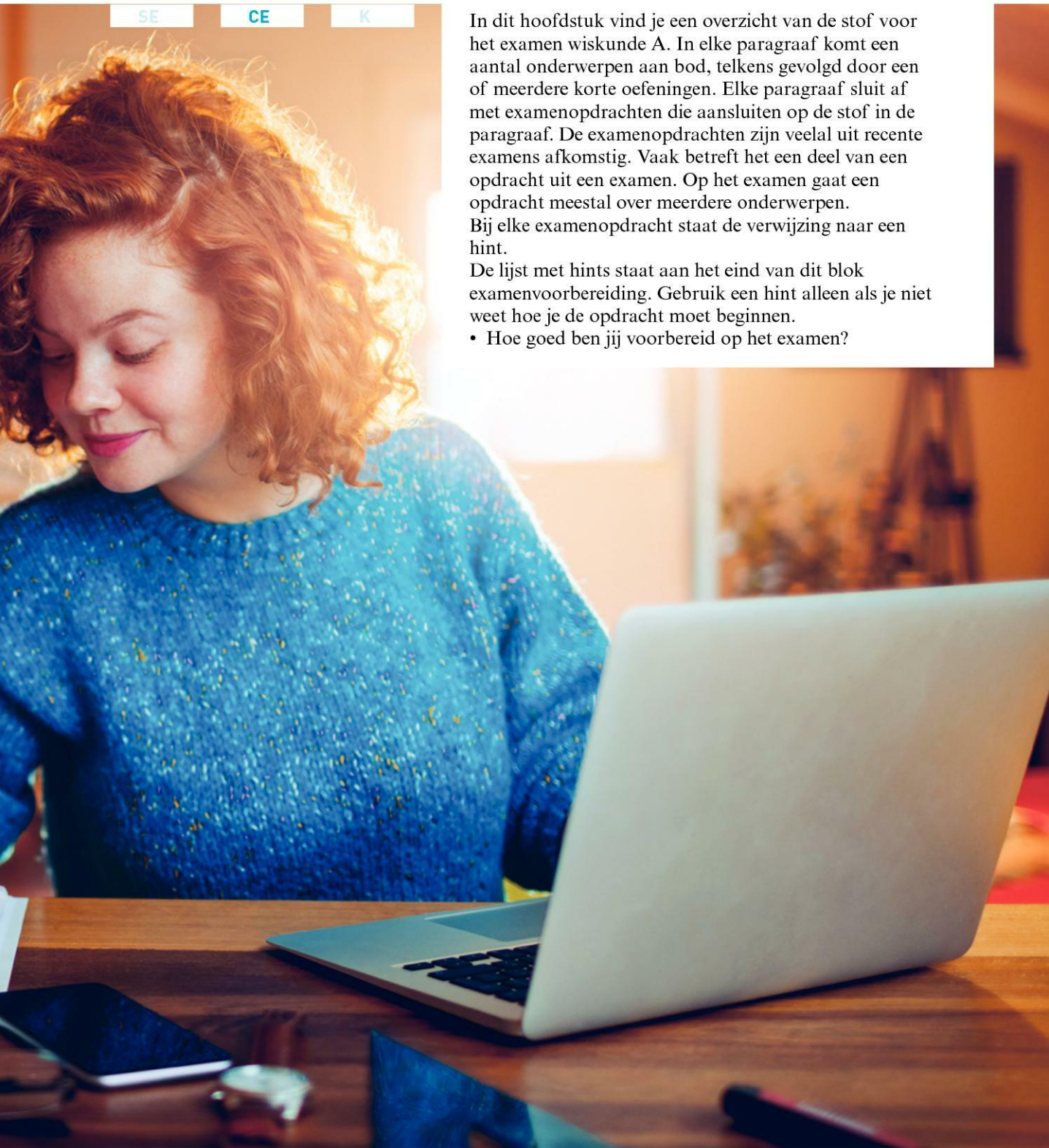
CE

K

In dit hoofdstuk vind je een overzicht van de stof voor het examen wiskunde A. In elke paragraaf komt een aantal onderwerpen aan bod, telkens gevolgd door een of meerdere korte oefeningen. Elke paragraaf sluit af met examenopdrachten die aansluiten op de stof in de paragraaf. De examenopdrachten zijn veelal uit recente examens afkomstig. Vaak betreft het een deel van een opdracht uit een examen. Op het examen gaat een opdracht meestal over meerdere onderwerpen. Bij elke examenopdracht staat de verwijzing naar een hint.

De lijst met hints staat aan het eind van dit blok examenvorbereitung. Gebruik een hint alleen als je niet weet hoe je de opdracht moet beginnen.

- Hoe goed ben jij voorbereid op het examen?



Verhoudingstabellen

Bij het rekenen met verhoudingen kun je een verhoudingstabel gebruiken. Verhoudingen kom je onder andere tegen bij relatieve aantallen, procenten en schaal.

Voorbeeld 1

Op een school zijn 42 docenten ouder dan 55 jaar, dat is 35% van alle docenten op die school. Hoeveel docenten werken er op die school?

Oplossing

aantal docenten	42	?
percentage	35	100

$$42 \times 100 = 35 \times ?$$

$$? = 42 \times 100 : 35 = 120$$

Er werken 120 docenten op die school.

Voorbeeld 2

Het aantal leden van een sportclub is met 28 afgenomen tot 724.

Hoeveel procent is het ledenaantal afgenomen?

Oplossing

Voor de afname had de club $724 + 28 = 752$ leden.

aantal docenten	752	28
percentage	100	?

$$28 \times 100 = 752 \times ?$$

$$? = 28 \times 100 : 752 \approx 3,7$$

Het ledenaantal is met ongeveer 3,7% afgenomen.

- 1 a Van een bevolking is 24% jonger dan 25 jaar, dat zijn 1,35 miljoen mensen.
Bereken hoe groot de totale bevolking is.
- b De waarde van een aandeel is in één dag gestegen met 5% tot € 10,07.
Bereken de waarde van het aandeel een dag eerder.

Breuken

Je kunt breuken optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en vereenvoudigen. Ook kun je een deel van een hoeveelheid uitrekenen en een hoeveelheid in een verhouding verdelen.

- 2 Bereken en vereenvoudig.

a $\frac{3}{8} \times \frac{9}{10}$

c $\frac{3}{4} + \frac{1}{5}$

b $\frac{2}{9} : \frac{3}{10}$

d $\frac{13}{28} - \frac{6}{7}$

- 3 Bereken.

a $\frac{6}{25}$ deel van 650

c $\frac{13}{125}$ deel van 50 000

b $\frac{4}{9}$ deel van 81 000

d $\frac{2}{17}$ deel van 8585

- 4 a Verdeel € 350,- in een verhouding 3 : 4.
- b De verhouding jongens: meisjes in een klas met 28 leerlingen is 4 : 3.
Bereken het aantal meisjes.

Voorbeeld

$$\frac{4}{7} + \frac{1}{2} = \frac{8}{14} + \frac{7}{14} = \frac{15}{14} = 1\frac{1}{14}$$

$$\frac{2}{5} - \frac{3}{10} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{3}{8} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$$

$$\frac{4}{\frac{1}{3}} = \frac{4}{1} \times \frac{3}{1} = \frac{4 \times 3}{1 \times 3} = \frac{12}{3} = 4$$

$$\frac{6}{7} \text{ deel van } 924 \text{ is } \frac{6}{7} \times 924 = 792$$

200 verdelen in een verhouding 1 : 4 betekent $\frac{1}{5}$ deel en $\frac{4}{5}$ deel van 200 nemen. $\frac{1}{5}$ deel van 200 is 40 en $\frac{4}{5}$ deel van 200 is 160.

Tijden

Voor het weergeven van tijden gebruik je een aparte notatie. Zo betekent 3.14,6 minuten 3 minuten en 14,6 seconden. Je noteert dit ook wel als 3:14,6 minuten. 3.14.25 uur betekent 3 uur, 14 minuten en 25 seconden. Voor het berekenen van een gemiddelde snelheid reken je de totale tijd eerst om naar uren, minuten of seconden. Vervolgens gebruik je een verhoudingstabel.

- 5 a Karl loopt een marathon in 2.45.21 uur. Een marathon is 42 km en 195 m.
Bereken zijn gemiddelde snelheid in meter per seconde.
- b Geef de snelheid van Karl ook in km per uur.
- c José rijdt elke dag 43,6 km naar haar werk. Zonder files rijdt ze die afstand met een gemiddelde snelheid van 82,5 km per uur.
Hoeveel minuten is ze onderweg?

Examenopdrachten

- 6 **Autobanden**
(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2009, tijdvak 1)

Autobanden zijn er in allerlei soorten en maten. De diameter van de band hangt af van de diameter van de velg en de hoogte van de band. Banden zijn er ook nog in verschillende breedtes. Zie de linker figuur.



Alle belangrijke eigenschappen worden op de zijkant van een band met behulp van een code aangegeven. Zie de rechter figuur.

Het eerste getal (185) is de breedte van de band in millimeters. Het tweede getal (65) is de verhouding van de hoogte van de band ten opzichte van de breedte van de band in procenten. Het volgende getal (14) is de diameter van de velg in inches (1 inch = 2,54 cm), daarna volgt het LI-getal van de band (86) dat het draagvermogen van de band aangeeft. In de code op de band kun je de 'bandenmaat' aflezen. De bandenmaat bestaat uit 3 getallen. Voor de band uit de figuur is dat 185, 65, 14. Dat betekent voor deze band dat de breedte van de band 185 millimeter is, dat de hoogte van de band 65% van de breedte is en dat de diameter van de velg 14 inch is.

Laat met een berekening zien dat de diameter van deze band ongeveer 60 cm is.

Hint 1

Voorbeeld

Merlijn fietst 45 km in 2:15:24 uur.
Bereken zijn gemiddelde snelheid in meter per seconde.

Oplossing

$$2 \times 3600 + 15 \times 60 + 24 = 8124$$

2:15:24 uur is 8124 seconden.

afstand in meters	45 000	?
tijd in seconden	8124	1

$$45000 \times 1 = 8124 \times ?$$

$$? = 45\,000 \times 1 : 8124 = 5,53...$$

Zijn gemiddelde snelheid is ongeveer 5,5 meter per seconde.

7 Comfort Class

(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2009, tijdvak 2)

Een paar jaar geleden vochten vliegmaatschappijen een ware prijzenoorlog met elkaar uit. Om maar zo veel mogelijk passagiers te lokken, verlaagden zij de prijzen van de vliegtickets. Dit ging wel ten koste van de luxe: stoelen werden iets dichter op elkaar gezet zodat er meer passagiers in een vliegtuig konden, op sommige vluchten werd er geen drankje of maaltijd geserveerd, enzovoort. Sommige maatschappijen beginnen langzamerhand weer meer service te verlenen tegen een iets hogere prijs. Een voorbeeld daarvan is het aanbieden van meer ruimte tussen de stoelen. We geven de hoeveelheid ruimte aan met de afstand tussen twee opeenvolgende stoelleuningen. In de figuur is dat 76 cm. Bij het beantwoorden van de vragen nemen we het volgende aan:



- Voor de eerste rij stoelen is net zo veel (been)ruimte als bij de overige rijen.
- De achterste rij stoelen staat tegen de achterwand.
- We houden geen rekening met nooduitgangen en dergelijke.

We nemen aan dat er voor alle stoelen een ticket is verkocht. Een vliegmaatschappij heeft een vliegtuig met stoelen die 76 cm uit elkaar staan. Het is een Boeing 767-300ER met 41 rijen en 7 stoelen per rij. De maatschappij overweegt voor langere vluchten, waar een ticket nu €229,- kost, de stoelen 8 cm verder uit elkaar te zetten. Die stoelen staan dan 84 cm uit elkaar, maar een ticket kost dan wel €49,- meer. Er zijn dan natuurlijk wel minder rijen in het toestel.

- a** Bereken hoeveel euro extra dit dan voor de vliegmaatschappij oplevert.

Hint 2

De vliegmaatschappij bekijkt ook een andere mogelijkheid: alleen de voorste 17 rijen worden vervangen door een aantal rijen met 84 cm ruimte en een aantal rijen met zelfs 113 cm ruimte. Zie de figuur hieronder.

Oude opstelling	17 rijen met 7 stoelen	
	76 cm	
Nieuwe opstelling	4 rijen met 6 stoelen 113 cm	10 rijen met 7 stoelen 84 cm

Van de stoelen met 113 cm ruimte komen er maar 6 op een rij te staan; bij de overige rijen blijven er 7 stoelen per rij. De stoelen met 76 cm ruimte kosten €229,-. De stoelen met 84 cm ruimte kosten €49,- meer. De stoelen met 113 cm ruimte zullen nog duurder moeten worden. De vliegmaatschappij wil weten welke ticketprijs ze moet vragen voor de stoelen met 113 cm ruimte, zodat de inkomsten bij de nieuwe opstelling minstens gelijk blijven ten opzichte van de oude opstelling.

- b** Welke ticketprijs moet ze minstens vragen? Licht je antwoord toe.

Hint 3

8 Overboekt

(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2018 tijdvak 2)

Een overboeking van een vliegtuig ontstaat doordat voor een vlucht meer tickets worden verkocht dan er zitplaatsen zijn. Sommige vliegmaatschappijen kiezen hiervoor, omdat telkens weer blijkt dat niet iedereen die een vliegticket heeft gekocht komt opdagen. Door meer tickets te verkopen willen de vliegmaatschappijen hun winst vergroten. Een vliegmaatschappij rekent er dus bij overboeking op dat sommige passagiers niet komen opdagen. Als vrijwel alle passagiers wel komen opdagen, zijn er te weinig zitplaatsen. In dat geval kunnen één of meer passagiers niet mee. De vliegmaatschappij lost dit op door aan deze passagiers een vergoeding te geven. De vliegmaatschappij Aircrown vliegt in de Verenigde Staten dagelijks op de route Minneapolis - Chicago. Het vliegtuig waarmee gevlogen wordt, heeft 198 stoelen. De tickets op deze vlucht kosten \$78 (78 dollar). Een risicoanalist heeft twee situaties onderzocht: de situatie zonder overboeking en de situatie met overboeking van het vliegtuig.

Zonder overboeking van het vliegtuig

198 mensen kopen een ticket. Allen kunnen mee met het vliegtuig en wie niet komt opdagen is zijn geld kwijt.

Met overboeking van het vliegtuig

Aircrown verkoopt geen 198, maar 210 tickets per vlucht. Iedere passagier die niet komt opdagen, is zijn geld kwijt. Iedere passagier die wel komt opdagen en voor wie er geen stoel meer is, krijgt zijn \$78 niet terug, maar krijgt wel een vergoeding van \$250. Dit zijn de enige extra kosten die Aircrown maakt door het verkopen van de extra tickets. Aircrown heeft van 300 vluchten waarvan de 210 tickets allemaal verkocht zijn, bijgehouden hoeveel passagiers er zijn komen opdagen. Zie de tabel.

<i>aantal passagiers dat komt opdagen</i>	195 of minder	196	197	198	199	200	201	202	203	204 of meer
<i>aantal vluchten</i>	234	22	17	11	8	4	2	1	1	0

Met deze gegevens kun je berekenen hoeveel dollar de vliegmaatschappij aan vergoedingen heeft moet betalen. De risicoanalist van de vliegmaatschappij wil met bovenstaande gegevens berekenen wat overboeking oplevert aan extra winst in vergelijking met de situatie zonder overboeking. Hij kijkt hiervoor naar de gemiddelde winst per stoel per vlucht. In de situatie zonder overboeking is de gemiddelde winst per stoel per vlucht gelijk aan \$11,25. Volgens de risicoanalist is de gemiddelde winst per stoel per vlucht in de situatie met overboeking minstens 25% hoger dan in de situatie zonder overboeking.

Onderzoek of de risicoanalist gelijk heeft.

Hint 4

Grafieken tekenen

Bij het tekenen van een grafiek beslis je eerst welke grootheid op de horizontale as komt en welke op de verticale as. Vervolgens kies je een geschikte stapgrootte, waarbij alle gegevens in de grafiek passen. Ten slotte bedenk je of het zinvol is om de punten te verbinden.

- 9 In de tabel zie je het aantal inwoners van de stad Amsterdam op 1 januari van de jaren 2000 tot en met 2009.

jaar	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
aantal inwoners $\times 1000$	741,3	734,6	735,5	736,6	739,1	742,8	743,1	742,9	747,1	755,6

Teken de bijbehorende grafiek.

- 10 Gegeven is de formule $N = 3100 \cdot 0,95^t$.
- Maak een tabel bij de formule. Neem voor t de waarden 0 tot en met 50 met stappen van 5.
 - Teken een grafiek bij de tabel.

De rekenmachine

Bij berekeningen kun je in veel gevallen je rekenmachine gebruiken. Je krijgt dan in het algemeen geen exacte antwoorden maar benaderingen.

Je kunt met je rekenmachine:

- Grafieken plotten en tabellen maken.
- De toppen van een grafiek vinden.
- De snijpunten van grafieken vinden.
- Vergelijkingen oplossen.

Je geeft aan hoe je de rekenmachine hebt gebruikt. Daarbij neem je de volgende onderdelen op: Invoer, Venster en de gebruikte Opties.

- 11 Gegeven is de formule $y = 4x^{0,7} + 25x$.
- Maak op je rekenmachine een tabel bij deze formule. Neem x van 0 tot en met 40 met stapgrootte 1. Bij welke waarde van x is de uitkomst gelijk aan 637?
 - Verklein de stapgrootte naar 0,1. Bij welke x -waarde is de uitkomst gelijk aan 102,5?
- 12
- Los met behulp van je rekenmachine de vergelijking $120 - 84 \cdot 0,95^x = 100 - 0,5x$ op. Rond je antwoord af op twee decimalen.
 - Bereken het maximum van de formule $y = -x^2 - 3,5x + 18$. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Grafieken aflezen, interpoleren en extrapoleren

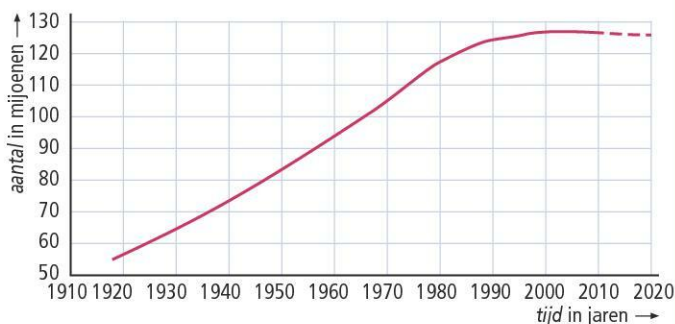
Bij het aflezen uit grafieken houd je rekening met de eenheden die bij de getallen op de assen horen. Het vinden van een tussenliggende waarde in een tabel of een grafiek heet interpoleren. Het vinden van een verder gelegen waarde in een tabel of een grafiek heet extrapoleren.

Voorbeeld

In de grafiek zie je het aantal inwoners van Japan tussen 1910 en 2010. Geef een schatting van het aantal inwoners in 1985 en 2020.

Oplossing

In 1985 waren er naar schatting 121 miljoen inwoners en in 2020 zijn er naar schatting 123 miljoen inwoners.



- 13 Welke schatting in het voorbeeld is het betrouwbaarst? Leg je antwoord uit.

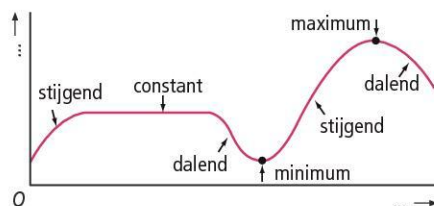
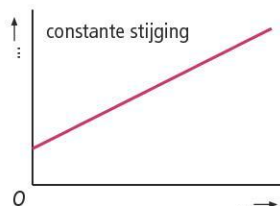
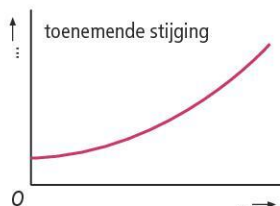
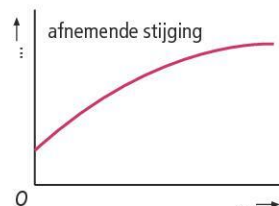
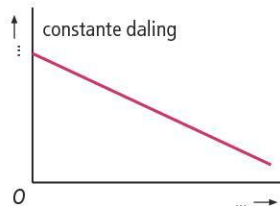
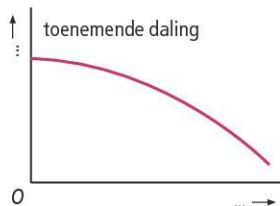
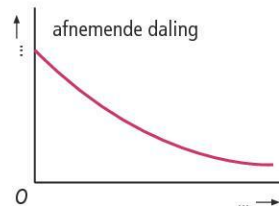
Stijgen en dalen, maximum en minimum

Een grafiek kan een stijgend, een dalend of een constant verloop hebben.

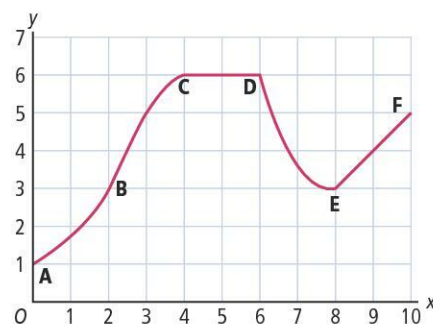
Als een grafiek overgaat van stijgen naar dalen, dan is daar een maximum. Een maximum is een hoogste waarde.

Als een grafiek overgaat van dalen naar stijgen, dan is daar een minimum. Een minimum is een laagste waarde.

Een grafiek kan op verschillende manieren stijgen of dalen.



- 14** Je ziet een grafiek bestaande uit een aantal delen.
Geef bij elk van de delen van de grafiek aan van welk soort stijgen of dalen er sprake is.
- 15** Gegeven is de formule $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 10$.
- Ga met je rekenmachine na bij welke waarden van x de formule een maximum of een minimum heeft. Geef ook de grootte van het maximum of het minimum.
 - Bij welke waarden van x is de grafiek bij de formule stijgend?



Snijpunten assen

Een grafiek bij een formule heeft een snijpunt met de y -as bij $x = 0$. Om het snijpunt met de x -as te vinden, bereken je de waarde van x waarvoor geldt $y = 0$.

- 16**
- Bereken van de grafiek bij de formule $y = 2 + \frac{3}{1-x}$ de coördinaten van de snijpunten met de assen.
 - Waarom heeft de grafiek bij de formule $y = 5 \cdot 0,7^x$ geen snijpunt met x -as?
 - Bereken de coördinaten van het snijpunt met de y -as.

Voorbeeld

Bereken de coördinaten van de snijpunten met de assen van de grafiek bij de formule $y = \sqrt{2x + 9}$.

Oplossing

$x = 0$ geeft $y = \sqrt{2 \cdot 0 + 9} = 3$.

$y = 0$ geeft $\sqrt{2x + 9} = 0$.

Oplossen geeft $x = -4\frac{1}{2}$.

De coördinaten van het snijpunt met de y -as zijn $(0, 3)$ en van het snijpunt met de x -as $(-4\frac{1}{2}, 0)$.

Grenswaarde

In sommige groeiprocessen komt de hoeveelheid steeds dichterbij een grenswaarde. De bijbehorende grafiek komt dan op den duur steeds dichterbij een horizontale lijn.

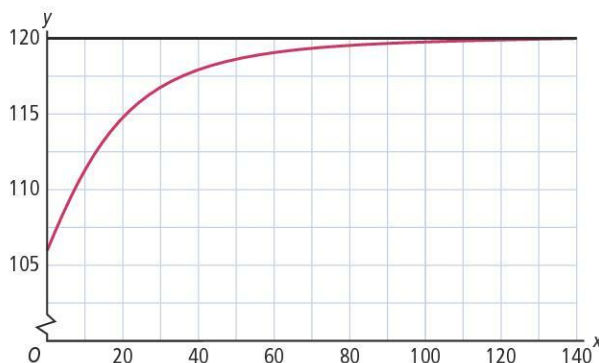
Voorbeeld

Onderzoek of de grafiek bij $y = 120 - 14 \cdot 0,95^x$ een grenswaarde heeft.

Oplossing

x	10	100	1000	10 000
y	111,62	119,92	120,00	120,00

De grenswaarde is 120.



- 17** De formules horen bij enkele groeiprocessen. Onderzoek bij elk groeiproces of er sprake is van een grenswaarde en, zo ja, hoe groot de grenswaarde is.

a $P = 145 \cdot (5 - 10 \cdot 0,25^t)$ c $A = 50x^2$
b $k = 585 - \frac{300}{d^2}$ d $u = \frac{-3t + 12}{2t - 10}$

Formules met meerdere variabelen

Allerlei situaties in het dagelijks leven hangen af van meer dan twee factoren. Bij zulke situaties horen formules met meer dan twee variabelen. In een formule kun je voor een variabele een waarde invullen. Vaak kun je na het substitueren de ontstane formule vereenvoudigen. Bij een formule met meer dan twee variabelen kun je de waarde van één variabele pas uitrekenen als je de waarde van alle andere variabelen kent.

Voorbeeld

De prijs van een rit met een taxi P in euro's hangt af van het aantal gereden kilometers d en het aantal minuten t dat de rit heeft geduurd. Een taxibedrijf gebruikt hiervoor de formule $P = 1,75d + 0,5t$.

Voor een rit van 12 kilometer betaalt Koos € 32,-.
Hoeveel minuten duurde deze rit?

Oplossing

Er geldt $p = 32$ en $d = 12$.
 $32 = 1,75 \times 12 + 0,5t$
 $32 = 21 + 0,5t$
 $11 = 0,5t$ dus $t = 22$
De rit duurde 22 minuten.

- 18** Gegeven is de formule $T = 0,15P + 6,2U - 10$.

a Bereken P als $T = 18,1$ en $U = 4$.

b Bereken U als $T = 24,71$ en $P = 8,2$.

c Druk T uit in U als $P = 2$.

- 19** Gegeven is de formule $X = \frac{4Y - 3Z + 4}{2P}$.

a Bereken X als $Y = 3$, $Z = 2$ en $P = 5$.

b Bereken Y als $X = 16$, $Z = 2$ en $P = 0,5$.

c Druk X uit in P als $Y = 10$ en $Z = 4,5$.

d Druk X uit in Z als $Y = 10$ en $P = 5$.

Vergelijkingen en ongelijkheden

Een vergelijking los je op met algebra of met je rekenmachine. Met behulp van een plot of een tabel kun je zien wanneer de ene formule een grotere uitkomst heeft dan de andere.

Voorbeeld

Los $12 + 0,1x > 35 + 0,06x$ op.

Oplossing

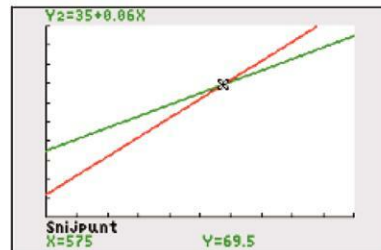
Invoer: $y_1 = 12 + 0,1x$ en $y_2 = 35 + 0,06x$

Venster: x van 0 tot 1000 en y van 0 tot 100

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (575; 69,5).

De oplossing van de ongelijkheid is $x > 575$.



- 20** Gegeven zijn de formules $P = 0,5a + 2$ en $P = -0,25a + 4$.
- Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van de formules.
 - Voor welke waarden van a ligt de grafiek van $P = 0,5a + 2$ boven de grafiek van $P = -0,25a + 4$?
 - Los $0,5a + 2 > -0,25a + 4$ op.
- 21** In een koele kamer wordt om 7.00 uur de verwarming aangezet. De temperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ in de kamer voldoet vanaf dat moment aan de formule $T = 21 - 6 \cdot 0,7^t$ met t de tijd in minuten en $t = 0$ om 7.00 uur.
- Geef de temperatuur om 7.00 uur.
 - Onderzoek hoe groot de grenswaarde is.
 - Geef de praktische betekenis van deze grenswaarde.
 - Bereken na hoeveel minuten de temperatuur 20°C is.
 - Vanaf wanneer ligt de temperatuur boven de 18°C ?

Examenopdrachten

22 Muurtje metselen

(Ontleend aan CE havo wiskunde A-pilot 2014, tijdvak 2)

Luc en Laura willen langs de tuin een muurtje laten metselen. Zij willen graag een antieke baksteen. Deze antieke baksteen is leverbaar in twee formaten. Het kleine formaat heeft afmetingen $190 \times 90 \times 65$ en het grote formaat $220 \times 100 \times 65$. Deze afmetingen zijn in mm.

Ze besluiten om één van deze antieke bakstenen te kiezen.

De hoogte van de baksteen is dus in ieder geval 65 mm. Om het minimum aantal benodigde bakstenen N te berekenen,

gebruiken ze de formule
$$N = \frac{2\,000\,000}{(L + 10)(H + 10)} \cdot M.$$

In deze formule zijn L en H de lengte en de hoogte van de baksteen in mm en is M de muuroppervlakte in m^2 .

Het muurtje moet 8,0 meter lang en 2,1 meter hoog worden.

De muuroppervlakte is dus $16,8 \text{ m}^2$.

Als Luc en Laura kiezen voor het kleine formaat antieke baksteen, hebben ze meer bakstenen nodig dan wanneer ze kiezen voor het grote formaat.

a Bereken hoeveel bakstenen het scheelt bij dit muurtje.

Rond je antwoord af op honderdtallen.

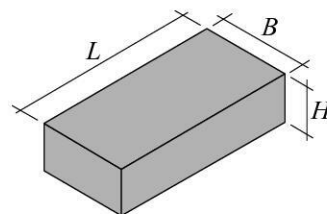
Hint 5

Ze besluiten de antieke baksteen in groot formaat te nemen. Tijdens het werk kunnen bakstenen kapotgaan. Als regel wordt daarom uitgegaan van 10% materiaalverlies. Luc en Laura houden er dus rekening mee dat 10% van het aantal bakstenen dat ze bestellen, verloren gaat. Ook besluiten ze om het muurtje iets minder hoog te maken: de hoogte wordt 1,8 meter in plaats van 2,1 meter.

De antieke baksteen in groot formaat is te koop in twee verpakkingen. Een doos met 10 stuks kost € 6,50. Bestellen per pallet is goedkoper: een pallet met 800 stuks kost € 450,-. Luc en Laura bepalen de goedkoopst mogelijke bestelling voor de benodigde bakstenen.

b Bereken hoeveel euro Luc en Laura moeten betalen voor hun voordeligste bestelling.

Hint 6



23 Brandstofverbruik

(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2010, tijdvak 1)

Vliegen kost veel brandstof. Een flink deel van de totale kosten van een vlucht bestaat uit brandstofkosten. Voor vliegmaatschappijen is het dus interessant om zuinige vliegtuigen te gebruiken. Om het brandstofverbruik van verschillende typen vliegtuigen te kunnen vergelijken, kijkt men naar het brandstofverbruik per kilometer per passagier. Men gaat er daarbij van uit dat alle plaatsen (stoelen) in het vliegtuig bezet zijn. Dit brandstofverbruik per kilometer per passagier wordt brandstofverbruik per skm (stoelkilometer) genoemd en wordt uitgedrukt in gram.

- a Een vliegtuig met 210 stoelen heeft voor een vlucht van 4500 km 26 325 kg brandstof verbruikt.
Ga met een berekening na dat het brandstofverbruik per skm voor dit vliegtuig tijdens deze vlucht bijna 28 gram is.

Hint 7

Ook kan men brandstof besparen door zo weinig mogelijk brandstof voor de vlucht mee te nemen. Als bij een vliegtuig de brandstoftanks helemaal vol zijn, gebruikt het vliegtuig veel meer brandstof dan wanneer de tanks halfvol zijn. Het vliegtuig is dan immers veel zwaarder. Een vliegtuig neemt dan ook altijd precies de hoeveelheid brandstof mee die voldoende is voor de lengte van de vlucht. In de figuur is voor een bepaald type vliegtuig het brandstofverbruik per skm uitgezet tegen de vluchtlengte in km. In het vervolg van deze opdracht gaan we uit van het type vliegtuig uit de figuur. Dit type heeft 524 stoelen aan boord. Het vliegtuig begint aan een vlucht van 9000 km.

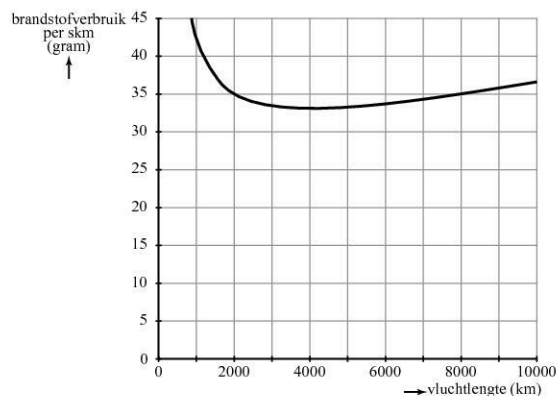
- b Bereken hoeveel kg brandstof dit vliegtuig meeneemt voor deze vlucht.

Hint 8

Wanneer er mogelijkheden zijn voor een tussenlanding kan dat voordelig zijn, want voor kortere vluchten is het brandstofverbruik per skm lager doordat er minder brandstof meegenomen hoeft te worden.

Bij de vlucht van 9000 km zou bijvoorbeeld na elke 3000 km een tussenlanding gemaakt kunnen worden. Als de vliegmaatschappij daartoe besluit, hoeft het vliegtuig bij elk vertrek maar voor 3000 km aan brandstof mee te nemen.

- c Bereken hoeveel procent het vliegtuig op deze manier aan brandstof per skm kan besparen.

Hint 9

Voor het vliegtuig kan het verband tussen het brandstofverbruik en de vluchtlengte worden uitgedrukt in de volgende formule

$$B = \frac{0,001 \cdot L^2 + 25 \cdot L + 16500}{L}$$

Hierin is B het brandstofverbruik per skm in gram en L de vluchtlengte in km.

- d** Bereken met de formule voor welke vluchtlengtes het brandstofverbruik per skm 38 gram is.

Hint 10

Een vliegmaatschappij die veel lange afstanden vliegt met dit type vliegtuig, wil natuurlijk weten hoe groot de optimale vluchtlengte is. De optimale vluchtlengte is de vluchtlengte waarbij het brandstofverbruik per skm minimaal is.

- e** Onderzoek met de GR hoe groot de optimale vluchtlengte is.

Hint 11

24 Sprintsnelheid

(Ontleend aan CE havo wiskunde A12 2007, tijdvak 2)

Een hardlooper is gespecialiseerd op de 100 meter. Bij dit atletiekonderdeel moet je zo snel mogelijk je topsnelheid halen en die dan proberen vast te houden tot de finish. Haar trainer heeft haar sprint laten onderzoeken met behulp van supersnelle camera's. In de figuur is het verband tussen de snelheid en de afgelegde afstand in een grafiek weergegeven. Op verzoek van de trainer heeft een wiskundige een formule gemaakt die goed past bij de grafiek. Die formule is

$$v = \frac{100800 \cdot \sqrt{x}}{(x + 90)^2}$$

In deze formule is v de snelheid in kilometer per uur en x de afgelegde afstand in meter. In de figuur zie je dat de maximale snelheid ongeveer 38 km per uur is en de snelheid bij de finish ongeveer 28 km per uur.

- a** Bereken met welke snelheid de hardlooper volgens de formule de finish passeert. Geef je antwoord in één decimaal.

Hint 12

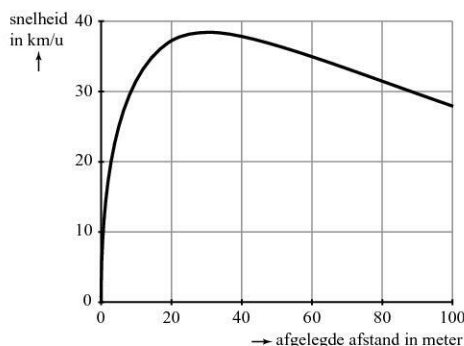
- b** Bereken de hoogste snelheid die de hardlooper bereikt volgens de formule. Geef je antwoord in één decimaal.

Hint 13

In de grafiek zie je dat de snelheid tijdens een gedeelte van de sprint hoger dan 35 km per uur is.

- c** Bereken met behulp van de formule hoeveel meter de hardlooper aflegt met een snelheid die hoger is dan 35 km per uur.

Hint 14



Evenredige en omgekeerd evenredige verbanden

Evenredig verband

Twee variabelen heten recht evenredig als geldt: als de ene variabele k keer zo groot wordt, dan wordt de andere variabele ook k keer zo groot.

Zijn de variabelen x en y , dan heet y recht evenredig, of kortweg evenredig, met x . Er geldt $\frac{y}{x} = c$, dus ook $y = c \cdot x$.

Je herkent een evenredig verband in een tabel, als van de twee getallen in elke kolom de verhouding dezelfde is. De grafiek bij een evenredig verband is een rechte lijn door de oorsprong.

- 25 Ga voor de tabellen na of er een recht evenredig verband bestaat tussen de variabelen. Geef bij elk evenredig verband een bijbehorende formule.

A

x	4,5	12,5	16	50
y	3,6	10	12,8	40

C

W	80	40	10	5
R	12	24	96	190

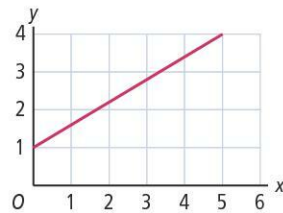
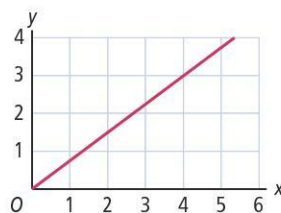
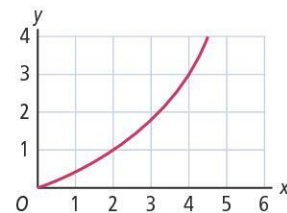
B

p	4,5	5	12	16
q	16	14,4	6	4,5

D

x	16	20	36	40
y	40	50	90	100

- 26 Bij welke grafiek(en) is y evenredig met x ?



Omgekeerd evenredig

Twee variabelen heten omgekeerd evenredig als geldt: als de ene variabele k keer zo groot wordt, wordt de andere variabele k keer zo klein. Zijn de variabelen x en y , dan

geldt $x \cdot y = c$. Je kunt ook schrijven $y = \frac{c}{x}$ of $x = \frac{c}{y}$.

Bij een omgekeerd evenredig verband is het product van de variabelen in elke kolom van de bijbehorende tabel steeds hetzelfde.

Voorbeeld

t	0,3	2,4	3,8	5,4
s	1,8	14,4	22,8	32,4

Laat zien dat s recht evenredig is met t en geef een bijbehorende formule.

Oplossing

$$\frac{s}{t} = \frac{1,8}{0,3} = \frac{14,4}{2,4} = \frac{22,8}{3,8} = \frac{32,4}{5,4} = 6$$

Een formule is $s = 6 \cdot t$.

Voorbeeld

v	6	9	18
t	1,5	1	0,5

Laat zien dat v en t omgekeerd evenredig zijn en geef de bijbehorende formules.

Oplossing

$v \cdot t = 6 \times 1,5 = 9 \times 1 = 18 \times 0,5 = 9$. De formules zijn $v \cdot t = 9$ of $t = \frac{9}{v}$ of $v = \frac{9}{t}$

- 27** De variabelen x en y in deze twee tabellen zijn omgekeerd evenredig.
Vul de tabellen verder in. Geef ook bij beide tabellen een formule.

A

x	0,8	...	2	6	80
y	60	32	24	...	...

B

x	1	...	5	15	60
y	...	45	...	6	...

- 28** Ga na of de variabelen in de formules recht of omgekeerd evenredig zijn. Schrijf de omgekeerd evenredige verbanden op twee andere manieren.

a $p \cdot q = 7$

d $l = \frac{200}{b}$

b $\frac{s}{t} = 50$

e $y = 5x$

c $A = 10B - 5$

f $\frac{x}{y} = 36$

Examenopdrachten

29 **Licht en kleur**

(Ontleend aan CE havo A-pilot 2014, tijdvak 2)

De kleur van een helder wit papier wordt beïnvloed door het omgevingslicht. Een maat voor dit omgevingslicht is de kleurtemperatuur die wordt gemeten in kelvin (K).

Professionele fotografen gebruiken in plaats van kleurtemperatuur liever een andere maat, de miredwaarde.

In de tabel vind je voor verschillende soorten licht de kleurtemperatuur T en de bijbehorende miredwaarde M .

omgevingslicht	kleurtemperatuur T (K)	miredwaarde M (mired)
kaarslicht	1200	833
zonsopkomst	2000	500
halogeenlamp	3200	312
middagzon	6000	167

Er is een omgekeerd evenredig verband tussen de kleurtemperatuur T en de miredwaarde M .

Toon aan dat de tabel hiermee in overeenstemming is.

Gebruik alle waarden in de tabel.

Hint 15

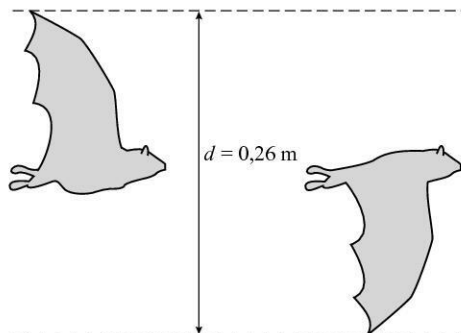
30 Vliegen

(Ontleend aan examen wiskunde A1,2 havo 2007, tijdvak 2)

Onderzoekers hebben een verband ontdekt tussen de slagfrequentie (het aantal slagen per seconde van de vleugels), de slag grootte (de afstand tussen de vleugelstanden tijdens een slag, zie figuur 1) en de kruissnelheid (de gemiddelde snelheid in meter per seconde). Dit wordt wel de formule van Strouhal genoemd. De formule hoort bij een vleermuis ziet er als volgt uit: $\frac{f \cdot 0,26}{v} = 0,3$.

In deze formule is f de slagfrequentie en v de kruissnelheid. Wat voor soort verband geldt tussen f en v ? Licht je antwoord toe.

Hint 16

**31 Flitsleningen**

(Ontleend aan examen wiskunde A havo 2015, tijdvak 2)

Geld lenen kost geld. Soms kost het heel veel geld. Vooral als je direct een paar honderd euro nodig hebt. In dit soort situaties kun je een flitslening nemen. Je leent een niet al te groot geldbedrag en betaalt dit na een korte periode terug. Er bestaan verschillende websites waar je geld kunt lenen. Op de website flitsmoney.nl staat dat er geen rente wordt berekend. Je hoeft alleen behandelingskosten te betalen. Zie de tabel.

te lenen bedrag (in euro's)	behandelingskosten (in euro's)
100,00	25,00
250,00	62,50
300,00	75,00
375,00	93,75

Als je bijvoorbeeld € 100,00 wilt lenen, krijg je dit geld binnen 10 minuten op je bankrekening. Dit bedrag moet samen met de € 25,00 behandelingskosten na 30 dagen worden terugbetaald.

Er is bij Flitsmoney een (recht) evenredig verband tussen het totaal terug te betalen bedrag en het te lenen bedrag. Laat dit met berekeningen zien. Controleer hiervoor alle waarden in de tabel.

Hint 17

Lineair verband

Bij een lineair verband tussen twee variabelen is er sprake van een constante toename of constante afname. Je herkent een lineair verband aan:

- De grafiek is een rechte lijn.
- In een tabel en in een grafiek is er bij gelijke stappen altijd dezelfde toename.
- Uit de tekst kun je opmaken dat de toename bij gelijke stappen altijd hetzelfde is.

Bij een lineair verband hoort een lineaire formule van de vorm $y = ax + b$. Hierin is a het hellingsgetal of de richtingscoëfficiënt en is b het startgetal.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $k = 0,23t + 5,65$ met k de kosten in euro's en t de tijd in minuten.
Met hoeveel euro nemen de kosten per minuut toe?
En hoeveel bedragen de vaste kosten?

Oplossing

De kosten nemen toe met € 0,23 per minuut en de vaste kosten bedragen € 5,65.

Voorbeeld 2

t	4	5	6	10	13
K	17	19,5	22	32	39,5

Ga na of de tabel bij een lineair verband kan horen.

Oplossing

De toename per stap is steeds 2,5, want $(32 - 22) : 4 = 2,5$ en $(39,5 - 32) : 3 = 2,5$.
De tabel hoort bij een lineair verband.

- 32 a Ga na of er een lineair verband tussen p en A bestaat.
b Gegeven is de formule $N = 1350 - 125t$ met N het aantal vissen in miljoenen en t de tijd in jaren na 1950.
Hoeveel vissen waren er in 1950 en met hoeveel vissen nam dat aantal per jaar af?

p	10	50	75	90	100
A	10	90	140	170	190

Lineair interpoleren en extrapoleren

Het vinden van een tussenliggende waarde in een tabel of grafiek heet interpoleren. Als de grafiek bij een tabel op een bepaald gedeelte vrijwel een rechte lijn is, dan kun je de tussenliggende waarden schatten met lineair interpoleren. Het vinden van een verder gelegen waarde in een tabel of grafiek heet extrapoleren. Bij extrapoleren moet je de ontwikkeling van de grafiek zo goed mogelijk volgen.

Voorbeeld

<i>tijd in jaren</i>	2004	2007	2011
<i>aantal mannen</i>	1523	1796	2160

Schat met lineair interpoleren het aantal mannen in 2010.

Oplossing

Tussen 2007 en 2011 nam het aantal mannen gemiddeld met $(2160 - 1796) : 4 = 91$ per jaar toe.
In 2010 waren er naar schatting $1796 + 3 \times 91 = 2069$ mannen.

- 33** Tijdens de groei wordt een vrucht een aantal keer gewogen.

<i>tijd</i> in weken	8	13	17	21
<i>gewicht</i> in grammen	38	68	88	104

- a Bereken met lineair interpoleren het gewicht van de vrucht op tijdstip $t = 11$.
- b Neem aan het gewicht van de vrucht in de weken na $t = 21$ met dezelfde snelheid toeneemt als in de vier weken daarvoor.
Bereken het gewicht van de vrucht op tijdstip $t = 26$.

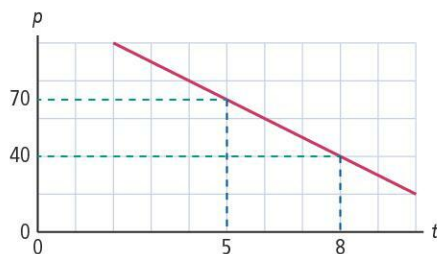
Lineaire formules opstellen

Je kunt in de volgende gevallen een lineaire formule opstellen:

- Bij de beschrijving van een lineair verband.
- Bij een gegeven tabel.
- Bij een gegeven lineaire grafiek.
- Bij twee gegeven punten van de grafiek.

Voorbeeld

Stel een formule op bij de grafiek.



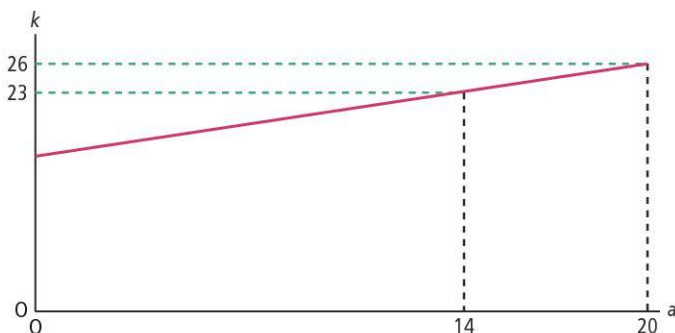
Oplossing

De richtingscoëfficiënt is $\frac{40 - 70}{8 - 5} = -10$.

Het startgetal is $70 + 5 \times 10 = 120$.

Een formule bij de grafiek is $p = -10t + 120$.

- 34** Stel een formule op bij de grafiek hieronder.



- 35** De grafiek die het verband tussen x en y weergeeft is een rechte lijn door de punten $(150, 18)$ en $(200, 13)$. Geef een lineaire formule voor het verband tussen x en y .
- 36** Een crèche berekent een maandelijks ouderbijdrage. Deze hangt af van het maandinkomen van de ouders. Het verband tussen de bijdrage en het inkomen is lineair. Bij een maandinkomen van € 1.800,- bedraagt de bijdrage € 430,- en bij een maandinkomen van € 4.000,- is dat € 650,-.
- Bereken de maandelijks bijdrage bij een maandinkomen van € 2.700,-.
 - Stel een formule op voor het verband tussen de bijdrage B in euro's en het inkomen I in euro's.

Lineaire vergelijkingen oplossen

Lineaire vergelijkingen kun je oplossen door links en rechts van het gelijkteken dezelfde bewerking te doen. Daarmee vereenvoudig je de vergelijking zo ver dat de onbekende nog maar aan één kant van het gelijkteken staat.

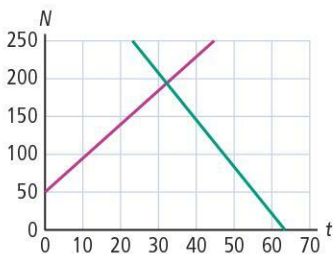
- 37** Los de vergelijkingen op.
- $-3x + 12 = 5x + 28$
 - $\frac{3}{5}x + \frac{1}{2} = 2 - \frac{9}{10}x$
 - $225t = -25t + 10(13t + 18)$
 - $0,7p - 6p + 1,3 = 1,2(4 - 5p)$

Snijpunten van lineaire grafieken

De coördinaten van het snijpunt van twee lineaire grafieken bereken je door de bijbehorende vergelijking op te lossen of met behulp van je rekenmachine.

Voorbeeld

Je ziet de grafieken van de formules $N = 4,5t + 50$ en $N = -6,25t + 394$.



Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken.

Oplossing

Door een vergelijking op te lossen.

$$\begin{aligned} 4,5t + 50 &= -6,25t + 394 \\ 10,75t &= 344 \\ t &= 32 \\ t &= 4,5 \times 32 + 50 = 194 \end{aligned}$$

De coördinaten van het snijpunt zijn $(32, 194)$.

Met de rekenmachine.

Invoer: $y_1 = 4,5x + 50$
 $y_2 = -6,25x + 394$
 Venster: x van 0 tot 50
 y van 0 tot 300
 Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn $(32, 194)$.

- 38** Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken bij de formules.

- a $A \ q = 5p + 40$ en $B \ q = 13p - 20$
- b $A \ n = -0,5p + 60$ en $B \ n = -0,3p + 10$
- c $A \ w = 1080p - 300$ en $B \ w = -240p + 492$

Lineaire ongelijkheid

Een uitdrukking als $4x - y \leq 10$ heet een lineaire ongelijkheid. De grafiek van een lineaire ongelijkheid is een halfvlak. Dit halfvlak wordt begrensd door grenslijn, de lijn die bij de vergelijking $4x - y = 10$ hoort.

Voorbeeld

Teken het halfvlak dat hoort bij de ongelijkheid $3x + 2y \leq 6$.

Oplossing

$$3 \times 0 + 2y = 6$$

$$2y = 6$$

$$y = 3$$

$$3x + 2 \times 0 = 6$$

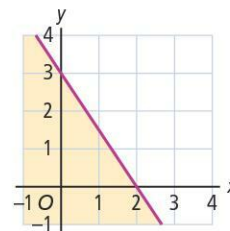
$$3x = 6$$

$$x = 2$$

De bijbehorende grenslijn gaat door de punten $(0, 3)$ en $(2, 0)$.

$$3 \times 0 + 2 \times 0 \leq 6 \text{ klopt.}$$

Het punt $(0, 0)$ ligt in het gevraagde halfvlak.



- 39** a Teken het halfvlak bij de ongelijkheid $5x + 2y \geq 5$.
- b Teken het halfvlak bij de ongelijkheid $3y - 4x \leq 12$.

Examenopdrachten

40 Vijvertest

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A1 2005, tijdvak 1)

Met een eenvoudige test kan van het water zowel de hardheid, aangegeven met KH (carbonaathardheid), als de zuurgraad, aangegeven met pH , van vijverwater worden vastgesteld. Deze twee waarden bepalen op hun beurt het CO_2 -gehalte van het water. Het CO_2 -gehalte, dat we in deze opgave zullen aangeven met C , is een belangrijke indicator voor de kwaliteit van het vijverwater. Met behulp van de tabel kan bij gegeven KH en pH de waarde van C worden bepaald.

		CO ₂ -gehalte C in mg per liter					
		pH					
		6,0	6,4	6,8	7,2	7,6	8,0
KH	12	480,0	191,1	76,1	30,3	12,1	4,8
	10	400,0	159,2	63,4	25,2	10,0	4,0
	8	320,0	127,4	50,7	20,2	8,0	3,2
	6	...	...	...	...	...	...
	5	200,0	79,6	31,7	12,6	5,0	2,0
	4	160,0	63,7	25,4	10,1	4,0	1,6
	3	120,0	47,7	19,0	7,6	3,0	1,2
	2	80,0	31,8	12,7	5,0	2,0	0,8

De waarde van KH wordt in gehele getallen weergegeven; de waarde van pH wordt altijd met een nauwkeurigheid van 0,1 weergegeven. Uit de tabel lezen we bijvoorbeeld af dat voor vijverwater met $KH = 5$ en $pH = 7,2$ geldt: $C = 12,6$. Als je voor pH een vaste waarde kiest, dan hangt C alleen nog maar af van KH . In de kolommen van de tabel is te zien dat bij iedere vaste waarde van pH er een lineair (en zelfs recht evenredig) verband is tussen KH en C . In de tabel is de rij die hoort bij $KH = 6$ leeg gelaten.

- a** Bereken welk getal er moet komen te staan op de plaats die hoort bij $KH = 6$ en $pH = 6,8$.

Hint 18

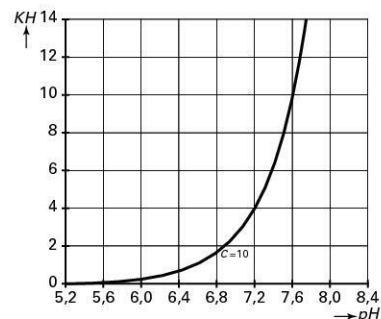
Volgens de folder is het water in een vijver van goede kwaliteit als voldaan is aan de volgende drie voorwaarden:

- I De KH -waarde van het water moet ten minste 6 en ten hoogste 10 zijn.
- II De pH -waarde van het water moet ten minste 7 en ten hoogste 8 zijn.

III De C -waarde van het water moet ten minste 10 zijn. In folders waarin voorlichting gegeven wordt over de kwaliteit van vijverwater wordt vaak gekozen voor een 'plaatje'. In de figuur is begonnen met het maken van zo'n plaatje. Bij elk punt in de figuur hoort een waarde van pH en van KH . Deze bepalen de waarde van C . In de figuur is een kromme getekend. Daarop liggen alle punten waarvoor geldt dat $C = 10$, zoals bijvoorbeeld het punt met $pH = 7,6$ en $KH = 10$ dat we al kennen uit de tabel. Om deze figuur bruikbaar te maken voor een voorlichtingsfolder, moet hierin het gebied worden aangegeven dat bestaat uit alle punten waarvoor de waarden van pH , KH en C voldoen aan de voorwaarden I, II en III voor vijverwater van goede kwaliteit.

- b** Geef dit gebied in de figuur duidelijk aan. Licht je werkwijze toe.

Hint 19



41 Autobanden

(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2009, tijdvak 1)

Het *LI*-getal (van Load-Index) geeft het draagvermogen van een autoband aan. Het *LI*-getal geeft aan welk gewicht (in kg) de band kan dragen. In de tabel staat voor enkele *LI*-getallen het draagvermogen van de band. Op een band staat *LI*-getal 103. Uitgaande van de tabelwaarden bij *LI*-getal 100 en bij *LI*-getal 105 kun je met behulp van lineair interpoleren het draagvermogen van deze band berekenen. Bereken het draagvermogen van deze band.

Hint 20

<i>LI</i> -getal	draagvermogen in kg
70	335
75	387
80	450
85	515
90	600
95	690
100	800
105	925

42 Vogeltrek

(Ontleend aan CE havo wiskunde A-pilot 2012, tijdvak 1)

Vogels die jaarlijks op een andere plaats overwinteren en na de winter terugkeren naar hun broedgebied, worden trekvogels genoemd. Onderzoekers houden jaarlijks de terugkeerdatum van diverse soorten trekvogels bij. Deze terugkeerdatum is sinds 1980 bij vrijwel alle trekvogelsoorten steeds vroeger geworden. Uit Engels onderzoek blijkt bijvoorbeeld dat vanaf 1980 de terugkeerdatum van de gierzwaluw per 10 jaar 3 dagen vroeger wordt. In 1980 keerde de gierzwaluw op 2 mei terug.

- a** Bereken op welke datum de gierzwaluw in 2020 zal terugkeren als deze trend zich voortzet.

Hint 21

Om voorspellingen voor de toekomst te kunnen doen, wordt een model opgesteld dat deze trend beschrijft. In dit model houden we geen rekening met schrikkeljaren. De dagen van het jaar worden genummerd: 1 januari krijgt dagnummer 1 en 31 december dus dagnummer 365. Het dagnummer waarop de gierzwaluw in het model terugkeert, noemen we A . Bij de datum 2 mei hoort dagnummer $A = 122$. Zoals eerder vermeld, wordt de terugkeerdatum van de gierzwaluw per 10 jaar 3 dagen vroeger. We noemen de tijd in jaren t , met $t = 0$ in 1980. Er kan een lineaire formule worden opgesteld waarin A wordt uitgedrukt in t .

- b** Stel deze formule op.

Hint 22

In Engeland wordt de gierzwaluw ook wel de honderddagenvogel genoemd, omdat hij gemiddeld 100 dagen in het land verblijft voordat hij weer naar zijn wintergebied vertrekt. Uit hetzelfde onderzoek blijkt dat deze vertrekdatum sinds 1980 ook verandert. Deze wordt elke 10 jaar ongeveer 0,6 dag vroeger. Samen met het vroeger worden van de terugkeerdatum leidt dit ertoe dat de verblijfsduur langer wordt. Ga ervan uit dat in 1980 de verblijfsduur 100 dagen is.

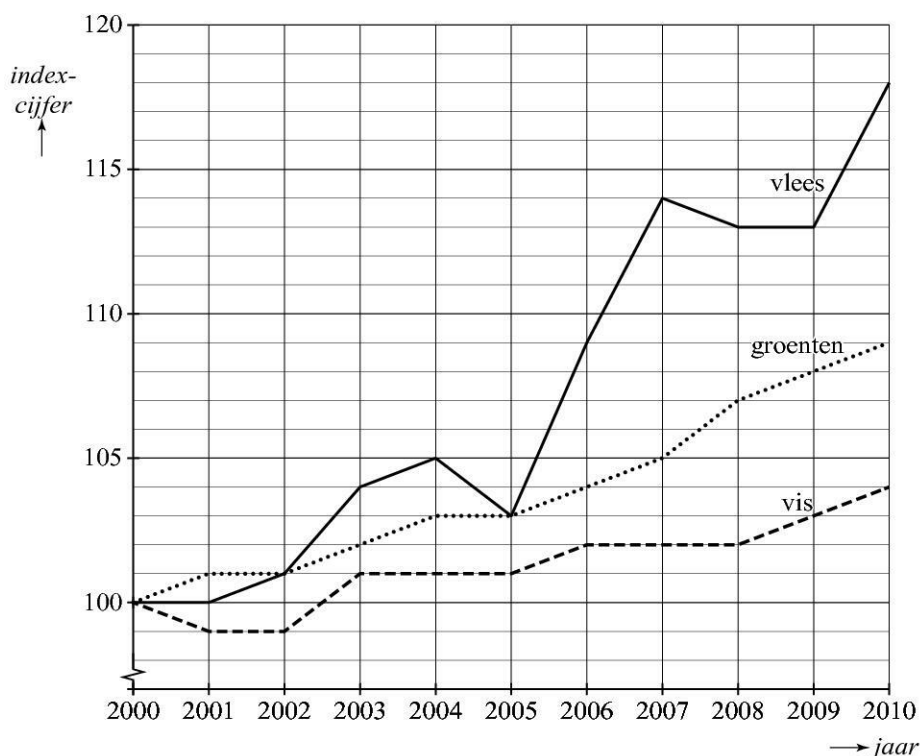
- c** Bereken in welk jaar de gierzwaluw dan voor het eerst meer dan 115 dagen in Engeland verblijft als de genoemde trends zich voortzetten.

Hint 23

43 Voedingsmiddelen

(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2018, tijdvak 2)

Voedingsmiddelen worden in China steeds duurder. Om de prijzen over de jaren heen te kunnen vergelijken, worden ze vaak vergeleken met de prijs in een bepaald basisjaar. In deze opgave is het jaar 2000 het basisjaar. De prijs van een voedingsmiddel, bijvoorbeeld vis, duiden we in dat basisjaar aan met het getal 100. We zeggen: het indexcijfer van vis is in 2000 gelijk aan 100. In de figuur zie je dat het indexcijfer van vis in 2010 gelijk is aan 104. Dat betekent dat in 2010 vis $\frac{104}{100} = 1,04$ keer zo duur is als in 2000. Anders gezegd: in 2010 was vis 4% duurder dan in 2000.



In de periode 2006 - 2010 is het indexcijfer van vlees met 9 gestegen. Dat hoeft niet te betekenen dat de prijs van vlees met 9% is gestegen.

- a** Bereken met hoeveel procent de prijs van vlees in deze periode dan wel is gestegen. Rond je antwoord af op een geheel getal.

Hint 24

De grafiek van het indexcijfer van groenten in de periode 2005 – 2010 is bij benadering een rechte lijn. Je kunt op basis van de indexcijfers van 2005 en 2010 het indexcijfer van groenten in 2021 schatten door middel van lineair extrapoleren.

- b** Bereken op deze manier het indexcijfer van groenten in 2021. Rond je antwoord af op een geheel getal.

Hint 25

Exponentieel verband, exponentiële formule

Bij een exponentieel verband tussen twee variabelen wordt er per tijdseenheid met hetzelfde getal vermenigvuldigd.

Een exponentieel verband herken je aan:

- In een tabel wordt er bij gelijke stappen met hetzelfde getal vermenigvuldigd.
- Uit de tekst kun je opmaken dat er bij gelijke stappen een vast percentage bij komt of van af gaat.
- Uit de tekst kun je opmaken dat er bij gelijke stappen met hetzelfde getal vermenigvuldigd wordt.

Bij een exponentieel verband tussen de variabelen x en y hoort de exponentiële formule $y = b \cdot g^x$. Hierbij is b de beginwaarde, dat is de waarde van y voor $x = 0$ en is g de groeifactor, de factor waarmee je de waarde van y moet vermenigvuldigen als x met 1 toeneemt.

Voorbeeld 1

Bij een groeiproces hoort de formule $N = 350 \cdot 0,89^t$ met N het aantal in miljoenen en t de tijd in jaren.

Met hoeveel procent neemt het aantal jaarlijks toe of af?

Oplossing

De groeifactor is 0,89.

De groeifactor is kleiner dan 1, dus er is sprake van een afname.

Bij een groeifactor van 0,89 per jaar hoort een afname van 11% per jaar.

Voorbeeld 2

t	0	1	4	6
N	100	150	506	1139

Ga na of de tabel bij een exponentieel verband kan horen.

Oplossing

Als de tabel bij een exponentieel verband hoort, is de groeifactor gelijk aan $\frac{150}{100} = 1,5$. De bijbehorende formule is dan $N = 100 \cdot 1,5^t$. Hiermee controleer je de andere waarden in de tabel.

$N = 100 \cdot 1,5^4 \approx 506$ en $N = 100 \cdot 1,5^6 \approx 1139$

De waarden komen overeen met de tabel. De tabel hoort bij een exponentieel verband.

- 44** Het aantal werklozen in een land voldoet aan de formule $P = 275 \cdot 1,075^t$. Hierin is P het aantal werklozen in duizenden en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2010.

- Hoeveel werklozen waren er op 1 januari 2010?
- Neemt het aantal werklozen toe of af?
- Met hoeveel procent neemt het aantal werklozen toe of af per maand?
- Hoeveel werklozen waren er op 1 mei 2010?
- En op 1 december 2009?

- 45** Ga na of bij de tabel sprake kan zijn van een exponentieel verband tussen p en q .

p	0	3	5	6	10
q	288	121,5	68,3	51,3	16,2

Rekenen met groeifactoren

Als g de groeifactor per tijdseenheid is, dan is g^n de groeifactor per n tijdseenheden. Evenzo is $g^{\frac{1}{n}}$ de groeifactor voor een n -de deel van die tijdseenheid.

Voorbeeld 1

De groeifactor per week is 1,35.
Bereken de groeifactor per dag en per 18 weken.

Oplossing

Een dag is $\frac{1}{7}$ week.

De groeifactor per dag is $1,35^{\frac{1}{7}} \approx 1,044$

De groeifactor per 18 weken is $1,35^{18} \approx 221,824$.

Voorbeeld 2

Een populatie neemt jaarlijks met 15% in aantal af.
Bereken met hoeveel procent de populatie per 20 jaar afneemt.

Oplossing

De groeifactor per jaar is 0,85.

De groeifactor per 20 jaar is $0,85^{20} \approx 0,039$.

Per 20 jaar neemt de populatie met 96,1% af.

- 46 Bij een groeiproses is de groeifactor per uur gelijk aan 1,28.
Geef je antwoord steeds in vier decimalen nauwkeurig.

- a Hoe groot is de groeifactor per dag?
- b Hoe groot is de groeifactor per kwartier?
- c Hoe groot is de groeifactor per vijf minuten?
- d Hoe groot is de groeifactor per 13 minuten?

- 47 Een populatie neemt al geruime tijd met 2,5% per 10 jaar toe.

Rond je antwoord steeds af op twee decimalen.

- a Bereken de procentuele toename per 5 jaar.
- b Bereken de procentuele toename per jaar.
- c Bereken de procentuele toename per 25 jaar.
- d Bereken de procentuele toename per eeuw.

Exponentiële formules opstellen

Voor het opstellen van een exponentiële formule $y = b \cdot g^x$ heb je de beginwaarde b nodig, dat is de waarde bij $x = 0$, en de groeifactor g . De waarde van de groeifactor is afhankelijk van de gekozen tijdseenheid.

Voorbeeld

Het aantal auto's in een land neemt per drie jaar met 18% toe.
Op 1 januari 2019 waren er 6,8 miljoen auto's in dat land.
Stel een formule op voor het aantal auto's N in miljoenen.
Neem voor de tijd in jaren t met $t = 0$ op 1 januari 2019.

Oplossing

De groeifactor per 3 jaar is 1,18.

De groeifactor per jaar is $1,18^{\frac{1}{3}} \approx 1,057$.

De formule is $N = 6,8 \cdot 1,057^t$.

- 48** Stel in de volgende gevallen een formule op voor het verband tussen het aantal N en de tijd t in jaren met $t = 0$ het jaar 2020.
- In 2020 woonden er in een stad 180 000 mensen en dat aantal neemt jaarlijks met 2,6% af.
 - In 2020 produceerde een land 12 miljoen vaten olie. De productie neemt elk half jaar met 10% toe.
 - Het aantal gebruikers van een tablet verdubbelt elke vier jaar. In 2020 waren er vijf miljoen gebruikers.

Verdubbelingstijd en halveringstijd

Bij een exponentieel groeiproces is de verdubbelingstijd de tijdsduur waarin de hoeveelheid wordt verdubbeld. De tijd die nodig is voor een halvering heet de halveringstijd. Deze tijden hangen af van de groeifactor en niet van de beginhoeveelheid.

Voorbeeld

Het aantal konijnen in een gebied neemt jaarlijks met 4% af. In 2000 waren er ongeveer 15 000 konijnen. Na hoeveel jaar is het aantal konijnen gehalveerd?

Oplossing

Bij halveren moet gelden $0,96^t = 0,5$.

Invoer: $y_1 = 0,96^x$ en $y_2 = 0,5$

Venster: x van 0 tot 20 en y van 0 tot 1

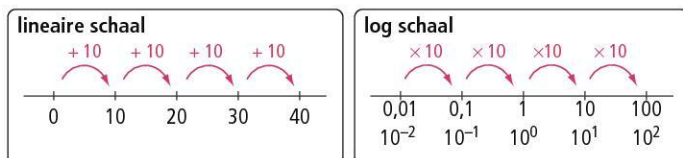
Optie: snijpunt

Na ongeveer 17 jaar is het aantal konijnen gehalveerd.

- 49** Het aantal abonnees A van een tijdschrift voldoet aan de formule $A = 135\,600 \cdot 0,94^t$. Hierin is t het aantal jaren na 1 januari 2020.
- Hoeveel abonnees waren er op 1 januari 2023?
 - Met hoeveel procent neemt het aantal abonnees per jaar af?
 - En met hoeveel procent neemt dat aantal per vier jaar af?
 - Neem aan dat het aantal abonnees nog een aantal jaren met dezelfde snelheid afneemt. Bereken na hoeveel jaar het aantal abonnees gehalveerd is.
- 50** Het gewicht van een courgette neemt tijdens de groei dagelijks met 15% toe. Bereken na hoeveel dagen het gewicht van de courgette verdubbeld is.

Werken met logaritmische schalen

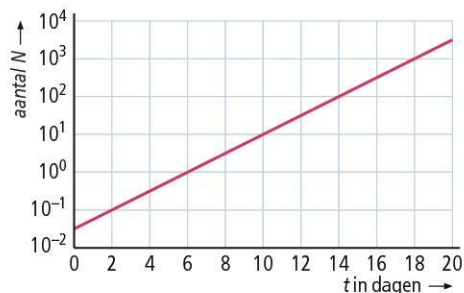
Bij lineaire schaalverdelingen wordt bij gelijke afstand een vast getal opgeteld. Een schaalverdeling waar bij gelijke afstanden met een vast getal wordt vermenigvuldigd, heet een logaritmische schaal of logschaal. Dat vaste getal is meestal 10.



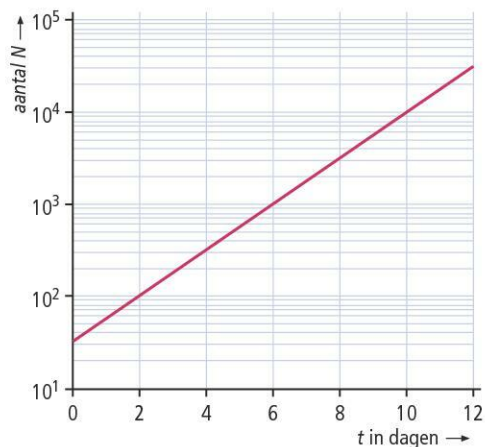
Je gebruikt een logschaal als je zowel erg grote als erg kleine waarden in één grafiek moet verwerken. Als een grafiek bij een logaritmische schaalverdeling op de verticale as een rechte lijn is, is het verband exponentieel.

51 De grafiek gaat over het verband tussen een aantal N en de tijd t in dagen.

- Hoe groot is N als $t = 2$?
- Hoe groot is N als $t = 10$?
- Hoe groot is N als $t = 18$?
- Bij de grafiek hoort de formule $N = b \cdot g^t$, waarbij N het aantal is en t de tijd in dagen. Bereken b en g .
- Bereken N als $t = 5$.
- Bereken t als $N = 2000$.



- 52**
- Hoe groot is N als $t = 0$?
 - Hoe groot is N als $t = 6$?
 - Lees af bij welke waarde van t er geldt dat $N = 3000$.
 - En bij welke waarde van t is N gelijk aan 30 000?
 - Stel een formule op bij de grafiek.

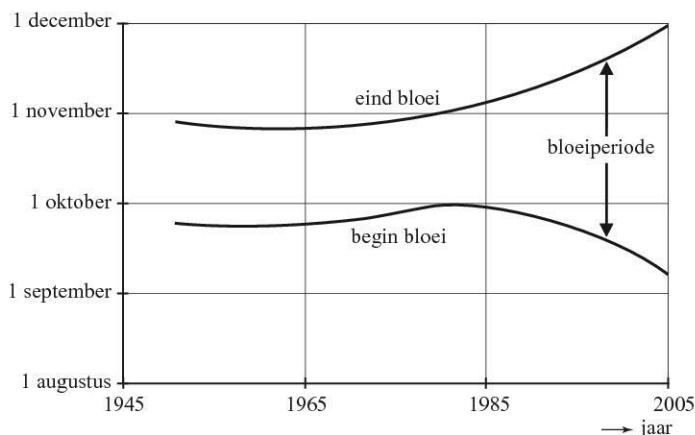


53 Examenopdrachten

Bloeiperiode

(Ontleend aan CE havo wiskunde A- pilot 2012, tijdvak 1)

In Zuid-Engeland onderzoekt men sinds 1950 de lengte van de bloeiperiode van paddenstoelen. Na vele duizenden waarnemingen bij 315 verschillende paddenstoelsoorten hebben Britse onderzoekers geconcludeerd dat er sinds 1980 een duidelijke verandering van de gemiddelde lengte van de bloeiperiode zichtbaar is. Zie de figuur.



Van 1950 tot 1980 bleef de lengte van de bloeiperiode ongeveer gelijk. Daarna is deze in de periode van 1980 tot 2005 toegenomen van 30 tot 83 dagen. In deze opgave nemen we aan dat de lengte van de bloeiperiode sinds 1980 exponentieel toeneemt.

- a** Bereken met de gegevens van 1980 en 2005 het jaarlijkse groeipcentage vanaf 1980 in twee decimalen nauwkeurig.

Hint 26

Vanaf 1980 is de lengte van de bloeiperiode bij benadering te beschrijven met de formule $B = 30 \cdot 1,042^t$.

Hierin is B de lengte van de bloeiperiode in dagen en t de tijd in jaren vanaf 1980. De lengte van de bloeiperiode is van 1980 tot 2005 ruimschoots verdubbeld.

- b** Bereken in hoeveel jaar de bloeiperiode twee keer zo lang wordt.

Hint 27

54 Het HABOG

(Ontleend aan CE havo wiskunde A12 2005, tijdvak 2)

Kernenergie levert weinig afval op, maar het is wel afval dat speciale aandacht vereist. Het is namelijk radioactief en het blijft nog tientallen jaren warmte afgeven. In 2003 is in Zeeland een gebouw geopend waar de komende honderd jaar kernafval zal worden opgeslagen. Het gebouw heet HABOG, Hoogradioactief Afval Behandelings- en Opslag Gebouw. In het HABOG wordt het afval van de kerncentrale van Borssele opgeslagen. Over honderd jaar zijn de radioactiviteit en de warmte van het afval zo veel afgenomen dat het afval op een andere plaats kan worden opgeslagen. Het afval uit Borssele bestaat jaarlijks uit zes glasblokken met hoogradioactief afval. In het begin geeft zo'n blok evenveel warmte af als een kachel van 1800 Watt. Na 100 jaar is de warmteafgifte verminderd tot die van drie gloeilampen, ofwel 180 Watt. De warmteafgifte neemt exponentieel af.

- a Bereken het percentage waarmee de warmteafgifte per jaar afneemt. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Hint 28

Het gebouw is knaloranje geverfd. In grote groene letters zijn er beroemde formules van Einstein en Planck op aangebracht. Elke tien jaar wordt het gebouw opnieuw geverfd, telkens in een iets lichtere tint om de afname van de warmteafgifte mee aan te geven. Je mag er in de rest van de opgave van uitgaan dat de warmteafgifte met 2,3% per jaar afneemt.

- b Bereken het percentage waarmee de warmteafgifte in een periode van tien jaar afneemt. Rond je antwoord af op één decimaal.

Hint 29

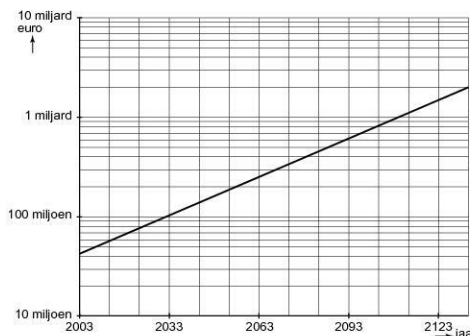
- c Bereken na hoeveel jaar de warmteafgifte nog maar de helft is van de oorspronkelijke hoeveelheid. Rond je antwoord af op één decimaal.

Hint 30

Er wordt nu al geld gereserveerd om over meer dan honderd jaar het afval verder te kunnen verwerken. Daartoe is in het jaar 2003 een bedrag van 43 miljoen euro op een spaarrekening gezet. In de grafiek zie je hoe men verwacht dat dit bedrag zal toenemen. De verticale as heeft een logaritmische schaalverdeling. De grafiek is een rechte lijn. Dit betekent dat men uitgegaan is van een vast rentepercentage per jaar gedurende de gehele looptijd.

- d Bereken dat percentage.

Hint 31



55 Sparen

(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2009, tijdvak 2)

Bij een internetspaarrekening is er sprake van 2,75% rente op jaarbasis (365 dagen). Het spaarsaldo groeit dus exponentieel. Bij dit rentepercentage komt dat neer op een groeifactor van 1,000074328 per dag.

- a** Toon aan dat de groeifactor per dag inderdaad 1,000074328 is.

Hint 32

Op 31 maart stort iemand 12 500 euro op deze internetspaarrekening. Op 1 april is zijn spaarsaldo al toegenomen vanwege de rente die hij krijgt.

- b** Bereken zijn spaarsaldo in centen nauwkeurig op 22 april.

Hint 33

Er zijn nogal wat verschillende internetspaarrekeningen. In de rest van deze opgave bekijken we er twee: een gewone en een met opnamekosten. Deze laatste geeft wel een iets hogere rente, maar als je het spaarsaldo opneemt, betaal je een percentage van het opgenomen bedrag aan opnamekosten. Als je bijvoorbeeld 2500 euro van je rekening haalt en de bank rekent 1% opnamekosten, dan moet je 25 euro aan opnamekosten betalen. Je krijgt dus maar 2475 euro uitbetaald. Je stort 10 000 euro op een gewone internetspaarrekening met een rentepercentage op jaarbasis van 1,85%. Je stort ook 10 000 euro op een internetspaarrekening die 1% opnamekosten rekent, maar wel 2,65% rente op jaarbasis geeft. Na 6 jaar neem je van beide rekeningen het totale spaarsaldo op.

- c** Bereken bij elk van beide internetspaarrekeningen het bedrag dat je uiteindelijk in handen krijgt.

Hint 34**56 De aardbeving van l'Aquila**

(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2018 tijdvak 1)

Aardbevingen verschillen in kracht. De kracht van een aardbeving wordt meestal weergegeven op de schaal van Richter. In de nacht van 5 op 6 april 2009 werd de Italiaanse stad l'Aquila getroffen door een zware aardbeving. De avond ervoor werd er al een lichte beving gevoeld die een kracht had van 3,3 op de schaal van Richter. De zware aardbeving 's nachts, die veel schade aanrichtte, had een kracht van 6,3 op de schaal van Richter.



Bij elke aardbeving komt energie vrij. Volgens een wetenschapper geldt de volgende vuistregel: als de kracht op de schaal van Richter met 1 toeneemt, dan is de hoeveelheid vrijgekomen energie ongeveer 30 keer zo groot. Er is bij de zware aardbeving 's nachts veel meer energie vrijgekomen dan bij de lichte beving van de avond daarvoor.

- a** Bereken met behulp van de vuistregel hoeveel keer zoveel energie er 's nachts vrijkwam vergeleken met de avond ervoor.

Hint 35

Bij een aardbeving kan de hoeveelheid vrijgekomen energie worden berekend met de formule $E = 0,06 \cdot 32^R$. In deze formule is R de kracht van de aardbeving op de schaal van Richter en E de hoeveelheid vrijgekomen energie in MJ (megajoule). Na de zware nachtelijke aardbeving waren er nog verschillende kleine naschokken. Bij de naschok van 7 april 's avonds was de hoeveelheid energie die vrijkwam slechts 9% van de hoeveelheid energie die bij de zware nachtelijke aardbeving vrijkwam. Toch was deze naschok ook een zware schok.

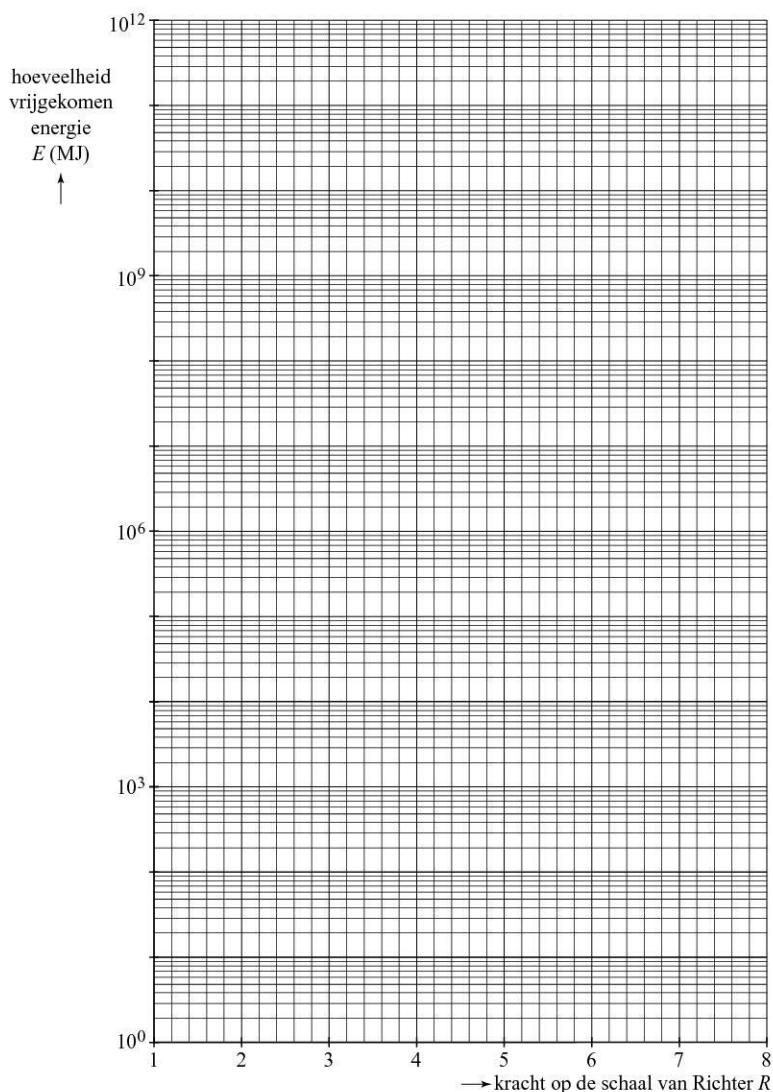
- b** Bereken welke kracht deze naschok had op de schaal van Richter. Rond je antwoord af op één decimaal.

Hint 36

Hiernaast staat een assenstelsel afgebeeld, waarbij op de verticale as een logaritmische schaal is gebruikt. In dat assenstelsel kun je een grafiek tekenen waarin je de vrijgekomen energie uitzet tegen de kracht op de schaal van Richter. Deze grafiek blijkt een (rechte) lijn te zijn.

- c** Teken deze grafiek in de figuur voor bevingen met een kracht van minimaal 1 en maximaal 8 op de schaal van Richter.

Hint 37



Formules herleiden

Haakjes wegwerken

Bij het herleiden van formules moet je soms haakjes wegwerken en gelijksoortige termen samen nemen.

Voorbeeld 1

Herleid:

$$y = 4x^2 + 8x + 5x^2 - 7$$

Oplossing

$$y = 9x^2 + 8x - 7$$

Voorbeeld 2

Herleid:

$$y = 5 - 2(x - 3)$$

Oplossing

$$y = 5 - 2x + 6$$

$$y = 11 - 2x$$

Voorbeeld 3

Herleid:

$$y = (7x + 4)(x - 3)$$

Oplossing

$$y = 7x^2 - 21x + 4x - 12$$

$$y = 7x^2 - 17x - 12$$

57 Herleid.

a $K = 3a + 5 - a + 4$

d $H = 5g^4 - 7g^4$

b $b = 5v + 3v - 7v$

e $W = 3x - 2 - 6x^2 - 7x + 3$

c $p = 4c^3 + 3c^2 + 5c^3 - 2$

f $t = 3T - 6 + 2T^2 - 5$

58 Herleid.

a $A = 3(b + 2)$

d $q = (x + 2)(3x - 1)$

b $P = 2q(3 - q)$

e $T = (2g - 3)(5 - 3g) + 4$

c $k = 15 - 2(a - 3)$

f $Y = 8a(2a + 1) - 2(a^2 + 1)$

Breuken herschrijven

Bij het herleiden van formules met breuken gebruik je dezelfde regels als bij het rekenen met breuken.

- Breuken vermenigvuldigen betekent: teller keer teller en noemer keer noemer.
- Bij het optellen van breuken moet je eerst de breuken gelijknamig maken.

Voorbeeld

$$\frac{3}{a} \cdot \frac{2a + 1}{7} = \frac{3(2a + 1)}{7a}$$

$$\frac{x + 1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{2(x + 1)}{2x} + \frac{x}{2x} = \frac{3x + 2}{2x}$$

59 Schrijf als één breuk.

a $k = \frac{3}{p} \cdot \frac{2}{p^2}$

d $W = \frac{1}{v} + \frac{3}{2v}$

b $P = \frac{q}{2} \cdot \frac{5}{q - 3}$

e $G = \frac{2}{h} - \frac{3}{10}$

c $T = 3 \cdot \frac{t}{t + 2}$

f $b = 3 + \frac{1}{a + 1}$

Machten en wortels

Bij het herleiden van formules met machten en wortels gebruik je de rekenregels.

Voorbeeld 1

Schrijf $(a^3 \cdot a^{0,5})^4$ als één macht.

Oplossing

$$(a^3 \cdot a^{0,5})^4 = (a^{3,5})^4 = a^{14}$$

Voorbeeld 2

Vereenvoudig: $\sqrt{25x^2}$

Oplossing

$$\sqrt{25} \cdot x^2 = \sqrt{25} \cdot \sqrt{x^2} = 5x$$

$$\begin{aligned} g^a \cdot g^b &= g^{a+b} & \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} \\ \frac{g^a}{g^b} &= g^{a-b} & \sqrt{a \cdot b} &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \\ (g^a)^b &= g^{a \cdot b} & \sqrt[n]{a} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \\ (a \cdot b)^n &= a^n \cdot b^n \end{aligned}$$

60 Schrijf als één macht.

a $P = k^3 \cdot k^5$

d $Q = p^3 \cdot p^{0,2} \cdot p$

b $a = (b^3)^{0,4}$

e $T = (m^{0,3} \cdot m^{1,2})^4$

c $V = \frac{w^{4,6}}{w^{2,2}}$

f $k = \left(\frac{a^5}{a^3}\right)^4$

61 Vereenvoudig zo ver mogelijk.

a $Q = \sqrt{25p^2}$

d $t = 3\sqrt{2k} \cdot \sqrt{18k}$

b $R = (2 \cdot q)^3$

e $b = \left(\frac{1}{2} \cdot a\right)^4 \cdot \sqrt{16a^2}$

c $y = \frac{(0,5x)^2}{x}$

f $g = \sqrt{\frac{d^2}{9}} \cdot (d \cdot 3)^2$

Substitueren

In formules met meerdere variabelen moet je soms getallen of andere formules substitueren. De ontstane formule is dan vaak te vereenvoudigen.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $T = 13A + 5A \cdot B + \frac{10}{C}$

Gegeven is verder $B = 2$ en $C = 5$.

Schrijf de formule in de vorm $T = p \cdot A + q$.

Oplossing

$$T = 13A + 5 \cdot A \cdot 2 + \frac{10}{5}$$

$$T = 13A + 10A + 2$$

$$T = 23A + 2$$

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $T = 2,5A - 14B + 6B \cdot C$.

Gegeven is verder $B = 0,5$ en $C = 2A + 1$.

Schrijf de formule in de vorm $T = p \cdot A + q$.

Oplossing

$$T = 2,5A - 14 \cdot 0,5 + 6 \cdot 0,5 \cdot (2A + 1)$$

$$T = 2,5A - 7 + 3(2A + 1)$$

$$T = 2,5A - 7 + 6A + 3$$

$$T = 8,5A - 4$$

62 Gegeven is de formule $p = 4r + \frac{3rq + 2t}{q}$

Verder is gegeven $q = 5$ en $t = 7$.

Schrijf de formule in de vorm $p = a \cdot r + b$.

63 Gegeven is de formule $N = 4,5P + 8P \cdot Q - 12,5P \cdot R$.

Verder is gegeven $P = 8$ en $Q = 6 - 0,5R$.

Schrijf de formule in de vorm $N = a \cdot R + b$.

Uitdrukken in

Bij de formule $q = -3p + 22$ is q uitgedrukt in p . Een dergelijke formule is handig om bij waarden van p de bijbehorende waarden van q te berekenen. Door p uit te drukken in q krijg je een formule waarmee je bij waarden van q de bijbehorende waarden van p kunt berekenen.

64 Druk p uit in q .

a $q = 4p - 10$

c $2q + 5p = 10$

b $q = \frac{1}{2}p + 8$

d $10q - 4p = 40$

65 Gegeven is de formule $N = -2,5Q + 1,5R + 6P$.

a Neem $N = 10$ en $Q = 2$ en druk P uit in R .

b Neem $N = 0$ en $R = 10$ en druk Q uit in P .

c Neem $P = Q$ en $R = 6$ en druk N uit in Q .

66 Herleid de formules tot de vorm $Q = a \cdot p + b$.

a $Q = \frac{(0,8x + 4)(-2x + 6p)}{x - 4}$ met $x = 5$.

b $Q = \frac{3(4A - 2) + 6p(2C - A)}{A + C}$ met $A = 2$ en $C = 4$

67 Druk t uit in N .

a $N = \frac{-10}{t}$

c $N = \frac{9}{t - 6}$

b $N = \frac{5}{t} - 7$

d $N = 12 + \frac{5}{t}$

Voorbeeld

Gegeven is de formule $q = -3p + 22$.

Druk p uit in q .

Oplossing

$$-3p + 22 = q$$

$$-3p = q - 22$$

$$p = -\frac{1}{3}q + 7\frac{1}{3}$$

$$P = \frac{5}{q}$$

$$P \cdot q = 5 \quad \text{links en rechts} \times q$$

$$q = \frac{5}{P} \quad \text{links en rechts} : P$$

68 Druk a uit in K .

a $K = \frac{1}{2}\sqrt{a}$

c $K = 3 + \sqrt{a}$

b $K = \sqrt{a-2}$

d $K = -8 + \sqrt{a+4}$

$$P = \sqrt{q}$$

$$P^2 = q$$

Redeneren met formules

Door na te gaan hoe een formule is opgebouwd kun je eigenschappen van formules beredeneren.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $N = \frac{100}{5(10 - 0,8^k)}$

Beredeneer of de waarde van N toeneemt of afneemt als k steeds groter wordt. Beredeneer ook of er sprake is van een grenswaarde en zo ja, hoe groot die grenswaarde is.

Oplossing

Bij $k=0$ is $N = \frac{100}{5(10 - 0,8^0)} \approx 2,22$.

Als k groter wordt, dan neemt $0,8^k$ af, want $0,8 < 1$.

$10 - 0,8^k$ neemt dan toe en nadert tot 10, want er wordt een steeds kleiner getal van 10 afgetrokken.

Daardoor neemt $5(10 - 0,8^k)$ ook toe en nadert tot 50.

De waarde van N neemt af, want 100 wordt door een steeds groter getal gedeeld. De grenswaarde is $\frac{100}{50} = 2$.

69 Beredeneer of de waarde van Q toeneemt of afneemt als a steeds groter wordt. Beredeneer ook of er sprake is van een grenswaarde en zo ja, hoe groot die eventuele grenswaarde is.

a $Q = \frac{20}{8 \cdot 1,6^a - 10}$

c $Q = 7 + \frac{2}{2 - 0,8^a}$

b $Q = 5 \cdot 1,38^a - 4$

d $Q = 5(4 - 0,75^a)$

Examenopdrachten

70 Schommelen

(Ontleend aan CE havo wiskunde A-pilot 2015, tijdvak 2)

In bijna elke speeltuin staat wel een schommel. De tijd waarin je één keer met de schommel heen en weer zwaait, is afhankelijk van de lengte van het schommeltouw. Voor de tijd T waarin je één keer heen en weer zwaait, geldt de

$$\text{formule: } T = 6,28 \cdot \sqrt{\frac{L}{9,81}}.$$

In deze formule is T de tijd in seconden en L de lengte van het schommeltouw in meters. In de figuur is L aangegeven. Van een schommel is de lengte van het schommeltouw 1,80 meter.

- a** Bereken hoeveel keer per minuut je heen en weer zwaait op deze schommel.

Hint 38

De gegeven formule is te herleiden tot een vorm waarin L uitgedrukt is in T , namelijk $L = 0,249T^2$. Het getal 0,249 in deze formule is afgerond.

- b** Herleid de formule voor T tot de formule $L = 0,249T^2$.

Hint 39



71 Krachtvoer voor melkkoeien

(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2014, tijdvak 1)

Er is een verband tussen de hoeveelheid krachtvoer die een koe krijgt en de hoeveelheid melk die zij produceert. Er geldt: $M = -0,04V^2 + 1,05V + 27,2$. Hierin is V de hoeveelheid krachtvoer in kg per dag en M de melkproductie in kg per dag. Voor de melkveehouder is vooral de winst W in euro per koe per dag belangrijk. De winstformule bij een melkprijs van €0,29 per kg en een krachtvoerprijs van €0,20 per kg is $W = 0,29 \cdot M - 0,20 \cdot V$.

- a** Bereken de winst W wanneer een koe 4 kg krachtvoer per dag krijgt.

Hint 40

Als je de formule van M invult in de formule van W , ontstaat de formule

$$W = 0,29(-0,04V^2 + 1,05V + 27,2) - 0,20V.$$

Je kunt deze formule herleiden tot de vorm

$$W = a \cdot V^2 + b \cdot V + c.$$

- b** Laat deze herleiding zien.

Hint 41

72 Brandgevaar

(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2018, tijdvak 1)

In de zomer kan in natuurgebieden met veel bos gemakkelijk brand ontstaan. Het risico op bosbrand wordt vooral bepaald door de temperatuur van de lucht en door de hoeveelheid vocht in de lucht. Om het risico op bosbrand goed in beeld te krijgen, wordt gebruikgemaakt van een brandgevaarindex. In Scandinavië gebruikt men als brandgevaarindex de Angström Index, die wordt berekend met de volgende formule:

$$I_A = \frac{V}{20} + \frac{27 - T}{10}.$$

Hierin is I_A de Angström Index, V de relatieve luchtvochtigheid in procenten en T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$. De relatieve luchtvochtigheid V geeft de hoeveelheid vocht in de lucht aan ten opzichte van de hoeveelheid vocht die de lucht maximaal kan bevatten. De relatieve luchtvochtigheid kan niet meer dan 100% zijn.

- a Bereken de minimale en de maximale waarde van de Angström Index bij een temperatuur van 24°C .

Hint 42

Hoe lager de waarde van I_A , hoe groter het risico op bosbrand. In de tabel kun je zien hoe de waarden van I_A worden vertaald naar het risico op bosbrand. Op een bepaalde zomerdag is de relatieve luchtvochtigheid 35%.

- b Bereken bij welke temperaturen er op deze dag sprake is van een zeer groot risico op bosbrand.

I_A	risico op brand
4 of groter	zeer klein
van 2,5 tot 4	klein
van 2 tot 2,5	groot
kleiner dan 2	zeer groot

Hint 43

Als de temperatuur constant is, dan neemt het risico op bosbrand toe als de relatieve luchtvochtigheid afneemt.

- c Beredeneer zonder getallenvoorbeelden dat de formule hiermee in overeenstemming is.

Hint 44

Een andere index voor brandgevaar is de Chandler Burning Index I_C , die in Noord-Amerika wordt gebruikt. Deze wordt berekend met de formule: $I_C = (216 - 2,84V + 1,12T) \cdot 0,97^V$. Ook in deze formule is V de relatieve luchtvochtigheid in procenten en T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$. Als de relatieve luchtvochtigheid bekend is, dan is de formule van I_C te herleiden tot de vorm $I_C = a \cdot T + b$, waarbij a en b getallen zijn.

- d Geef deze herleiding voor het geval dat de relatieve luchtvochtigheid 43% is. Rond de waarden van a en b af op twee decimalen.

Hint 45

73 BMR

(Ontleend aan *CE havo wiskunde A 2018, tijdvak 1*)

Mensen krijgen energie binnen via voedsel. De hoeveelheid energie in voedsel wordt uitgedrukt in kilocalorieën (kcal). De minimale hoeveelheid energie die iemand per dag nodig heeft om op gewicht te blijven, wordt aangeduid met de Engelse afkorting BMR (Basal Metabolic Rate). Diëtisten maken gebruik van formules om deze hoeveelheid te berekenen. Een formule van de BMR voor mannen luidt: $BMR = 10 \cdot G - 5 \cdot J + 6,25 \cdot L + 5$. Hierin is G het gewicht in kg, J de leeftijd in jaren, L de lengte in cm en BMR in kcal. Luuk is 1,88 meter lang en weegt 77 kg. Hij is 25 jaar oud.

a Bereken zijn BMR.

Hint 46

Marcio is in precies 1 jaar 5 kg afgevallen. Zijn lengte is niet veranderd.

b Bereken aan de hand van de formule, zonder gebruik te maken van een getallenvoorbeeld voor G en J , hoeveel Marcio's BMR in die periode van 1 jaar verminderd is.

Hint 47

Voor 30-jarige mannen met een BMR van 2000 kcal kun je het gewicht uitdrukken in de lengte. Er geldt dan $G = a \cdot L + b$, waarbij a en b getallen zijn.

c Bereken de waarden van a en b in één decimaal nauwkeurig.

Hint 48

In de Verenigde Staten hanteert men soortgelijke formules maar met andere variabelen. Men gebruikt voor het gewicht de variabele W (weight) in pounds, voor de lengte de variabele H (height) in feet en voor de leeftijd in jaren de variabele Y (years). Er geldt:

$$W = 2,2 \cdot G$$

$$Y = J$$

$$H = 0,033 \cdot L$$

Met deze gegevens kun je de formule van BMR opstellen zoals die in de Verenigde Staten gebruikt wordt in de vorm $BMR = \dots \cdot W - 5 \cdot Y + \dots \cdot H + 5$.

Hierbij staan op de puntjes getallen.

d Bereken welke getallen op de puntjes moeten staan en rond af op één decimaal.

Hint 49

74 Homeopathische middelen

(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2019, tijdvak 1)

Homeopathische middelen worden gemaakt uit grondstoffen die worden gehaald uit planten, dieren of mineralen. Uit deze grondstoffen wordt allereerst een basisstof gemaakt, de zogenoemde oertinctuur. Oertinctuur is echter nog niet geschikt voor gebruik. Daarvoor moet deze een aantal keren verdund worden. Na deze verdunningen ontstaat dan een homeopathisch middel dat gereed is voor gebruik. Voor het verdunnen worden verschillende verdunningsreeksen gebruikt. Zie de tabel.

D-reeks	verdunningen van 1 : 10
C-reeks	verdunningen van 1 : 100
L-reeks	verdunningen van 1 : ...

Om aan te geven welke verdunningen een oertinctuur ondergaan hebben, voegt men aan de Latijnse naam van het homeopathische middel een letter en een getal toe. Zo bestaat bijvoorbeeld het middel Arnica D3. De toevoeging D3 geeft aan dat de oertinctuur Arnica driemaal een verdunning van 1 : 10 heeft ondergaan. Het homeopathisch middel Arnica D3 bestaat dus voor 1/1000e deel uit de oertinctuur Arnica.

In de D-reeks wordt het percentage oertinctuur in een homeopathisch middel bij elke verdunning tien keer zo

klein. Er geldt dus: $P = 100 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n$.

Hierin is P het percentage oertinctuur in een homeopathisch middel in de D-reeks en n het aantal verdunningen dat de oertinctuur ondergaan heeft. Je kunt de formule van P herleiden tot de volgende formule: $P = 10^{2-n}$.

Geef deze herleiding.

Hint 50

75 Besmettelijke ziektes

(Ontleend aan *CE havo wiskunde A 2018, tijdvak 2*)

Sommige ziektes zijn besmettelijk. Als je aan zo'n besmettelijke ziekte lijdt, kun je gezonde personen besmetten, waardoor die ook ziek worden. Van veel ziektes is bekend hoe groot het gemiddelde aantal (gezonde) personen is dat door één zieke wordt besmet. Dat gemiddelde aantal noemen we B . Zo geldt bijvoorbeeld voor de ziekte griep: $B = 2,2$. In deze opgave maken we de volgende aannames:

- Iemand die ziek wordt, is precies één week ziek. Daarna is hij weer gezond (maar kan vervolgens wel weer ziek worden). Alleen in die ene week dat hij ziek is, besmet hij andere personen.

– Wie besmet wordt, zal pas in de week erna ziek zijn. Stel bijvoorbeeld dat in week 50 van een bepaald jaar één persoon een ziekte heeft met $B = 3$. In week 51 zal die persoon weer gezond zijn, maar zullen drie andere personen ziek zijn. In week 52 zullen er negen andere personen ziek zijn, omdat elk van de drie zieken van week 51 drie andere personen heeft besmet. In de praktijk besmet een zieke vaak minder personen dan het gemiddelde aantal B , omdat tegen een aantal ziektes vaccins zijn ontwikkeld.

Als je met zo'n vaccin bent ingeënt, kun je de ziekte niet meer krijgen. Vaccinatie van een deel van de bevolking leidt ertoe dat het gemiddelde aantal personen dat door één zieke wordt besmet, kleiner is dan B . We noemen dit gemiddelde aantal B_V . Dus:

- B is het gemiddelde aantal personen dat besmet wordt door één zieke als niemand gevaccineerd zou worden.
- B_V is het gemiddelde aantal personen dat besmet wordt door één zieke als er sprake is van vaccinatie van een deel van de bevolking.

In deze opgave gebruiken we de volgende formule om B_V te bepalen: $B_V = B \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$.

Hierin is p de vaccinatiegraad: het percentage van de bevolking dat tegen de ziekte is gevaccineerd. Bij elke ziekte zorgt een hogere vaccinatiegraad ervoor dat een kleiner aantal personen besmet wordt.

- a** Beredeneer dit aan de hand van de formule, zonder getallenvoorbeelden te gebruiken.

Hint 51

In een situatie waarbij $B_V = 1$ kan de formule herleid worden

tot de formule: $p = 100 - \frac{100}{B}$.

- b** Laat deze herleiding zien.

Hint 52

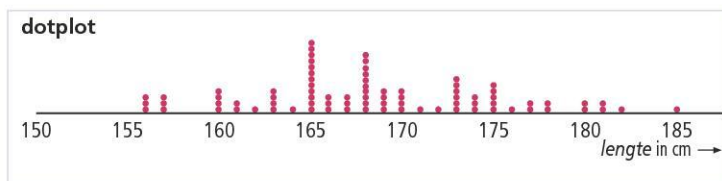
Data en frequenties

De verzamelde waarnemingsgetallen heten data. Een frequentie geeft aan hoe vaak een waarneming voorkomt. De waarnemingsgetallen kunnen gegroepeerd zijn in klassen. Data kun je overzichtelijk weergeven in een tabel of grafiek. De absolute frequentie is het werkelijke aantal. De relatieve frequentie is het aantal in verhouding tot het totale aantal, bijvoorbeeld een percentage, een promillage of een aantal per 100000. Frequenties kunnen worden weergegeven in een tabel, een staafdiagram of in een grafiek zoals: een cirkeldiagram, een staafdiagram, een dotplot.

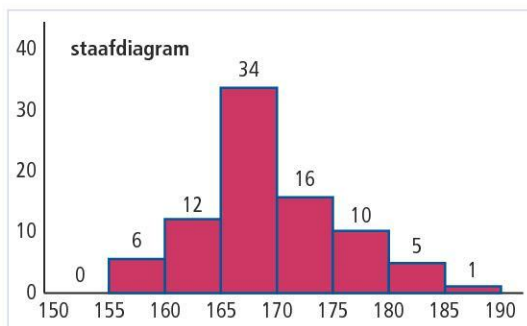
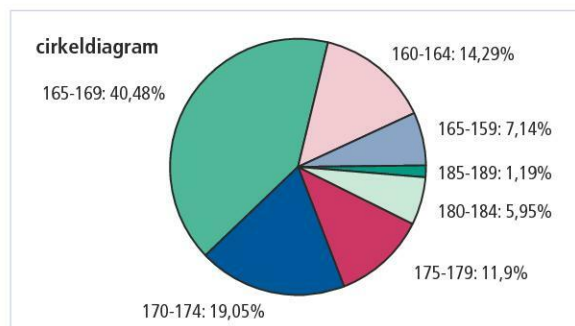
Voorbeeld

De lengte van 15-jarige meisjes is gemeten. Je ziet hoe de data op vijf verschillende manieren zijn verwerkt.

frequentietabel	
lengte in cm	freq.
150-154	0
155-159	6
160-164	12
165-169	34
170-174	16
175-179	10
180-184	5
185-189	1
totaal	84



staafdiagram	
lengte in cm	
15	666777
16	0000112333345555555555555555666777888888888889999
17	0000012333333334455555567788
18	001112



76 De vijf verschillende weergaven hierboven horen bij dezelfde dataset.

- Welke weergave geeft dezelfde informatie als de dotplot?
- En welke weergave geeft dezelfde informatie als het staafdiagram?
- In welk diagram zijn de data relatief?
- Welk voordeel heeft een staafdiagram boven het cirkeldiagram?

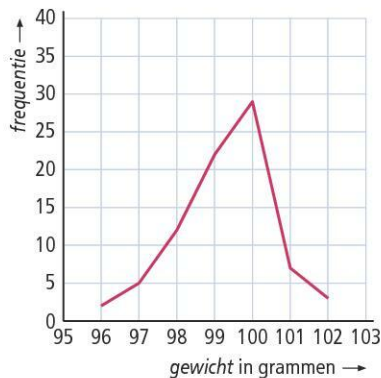
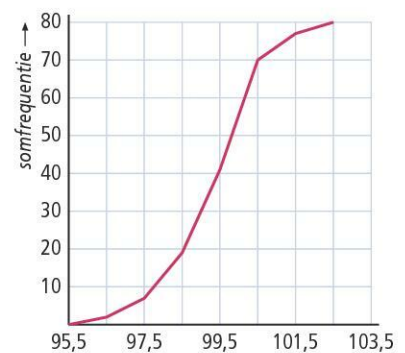
Frequentiepolygoon en somfrequentiepolygoon

Een frequentiepolygoon of lijndiagram is een grafiek waarin de frequenties (absoluut of relatief) uitgezet zijn tegen de waarnemingsgetallen. De somfrequentie of cumulatieve frequentie van waarnemingsgetallen is de som van alle frequenties (absoluut of relatief) vanaf het kleinste waarnemingsgetal. De grafiek waarin de cumulatieve frequenties worden uitgezet tegen de waarnemingsgetallen heet een somfrequentiepolygoon. Bij het tekenen van een somfrequentiepolygoon zet je de somfrequenties boven de rechter klassengrens.

Voorbeeld

Van 80 mandarijnen is het gewicht in grammen gemeten. In de tabel staat het resultaat. Naast de tabel zie je de frequentiepolygoon en de somfrequentiepolygoon.

gewicht in grammen	frequentie	som- frequentie
[95,5; 96,5>	2	2
[96,5; 97,5>	5	7
[97,5; 98,5>	12	19
[98,5; 99,5>	22	41
[99,5; 100,5>	29	70
[100,5; 101,5>	7	77
[101,5; 102,5>	3	80



- 77** a Zijn de frequenties in de frequentiepolygoon bij het Voorbeeld absoluut of relatief?
 b Teken bij de tabel hiernaast een relatieve somfrequentiepolygoon.

lengte in cm	frequentie
[140, 150>	3
[150, 160>	10
[160, 170>	32
[170, 180>	28
[180, 190>	12

Centrummaten

Statistische gegevens worden vaak samengevat in een paar karakteristieke getallen: de centrummaten. Je kent drie centrummaten:

- Het gemiddelde is de som van alle waarnemingen gedeeld door het aantal waarnemingen.
- De mediaan is het middelste waarnemingsgetal als alle data naar grootte zijn gerangschikt.
- De modus is het waarnemingsgetal dat het meest voorkomt.

- 78** Een bouwmarkt verkoopt doosjes met schroeven. Het etiket op de doosjes vermeldt dat er ongeveer 40 schroeven in elk doosje zitten. Van 500 doosjes wordt het aantal schroeven nageteld.

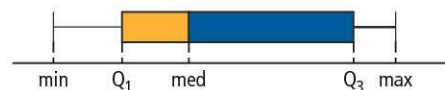
<i>aantal schroeven</i>	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
<i>aantal doosjes</i>	23	18	79	83	102	115	40	18	8	7	1	6

Bereken het gemiddelde, de mediaan en de modus.

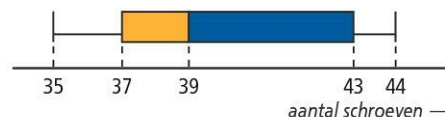
Spreidingsmaten

Je kent drie spreidingsmaten:

- De spreidingsbreedte is het verschil tussen het grootste en het kleinste waarnemingsgetal.
- De interkwartielafstand is het verschil tussen het derde en het eerste kwartiel.
- De standaardafwijking of standaarddeviatie is een maat voor de afwijkingen van de waarnemingen ten opzichte van het gemiddelde van de waarnemingen.



- 79**
- Gebruik de grafiek van opdracht 77 om een boxplot te tekenen bij de gegeven tabel.
 - Bereken van de data uit opdracht 78 de spreidingsbreedte en de interkwartielafstand.
 - Van een ander merk schroeven zijn er ook 500 doosjes met schroeven nageteld. De resultaten zijn verwerkt in de boxplot.
Hoeveel van deze doosjes bevat meer dan 37 schroeven?



Kwantitatieve en kwalitatieve variabelen

De waarde van een kwantitatieve variabele is een getal waarvan je een zinvol gemiddelde kunt berekenen. Deze waarden kunnen discreet of continu zijn.

Continue variabelen kunnen alle waarden op een interval aannemen. Discrete variabelen nemen alleen bepaalde waarden aan.

Kwalitatieve variabelen geven een kenmerk van de populatie weer en hoeven geen getal te zijn. Het berekenen van een gemiddelde heeft geen zin. Kwalitatieve variabelen waar sprake is van een ordening noem je ordinaal. Kwalitatieve variabelen die je niet kunt ordenen, zijn nominaal.

Voorbeeld 1

Het aantal zonnebloempitten in een zonnebloem is een kwantitatieve variabele. Deze variabele is discreet.

Het gewicht van de zonnebloempitten is ook kwantitatief, maar deze variabele is continu.

Voorbeeld 2

Een webshop verkoopt handschoenen in de maten S, M, L, XL en XXL. Er kan een keuze gemaakt worden tussen de kleuren zwart, blauw en wit. De variabelen maat en kleur zijn kwalitatief. De variabele maat is ordinaal en de variabele kleur is nominaal.

80 Welke variabelen zijn kwantitatief en welke zijn kwalitatief? Geef bij de kwantitatieve variabele aan of ze continu of discreet zijn. Geef bij de kwalitatieve variabelen aan of ze nominaal of ordinaal zijn.

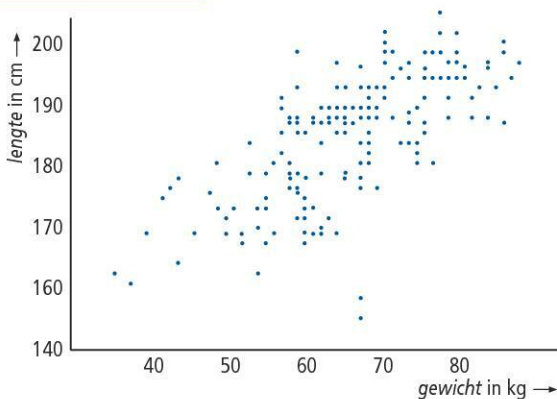
- a de profielkeuze van de 4 havo-leerlingen
- b de lengte van de dunne darm
- c het aantal eieren in een nest van de wilde eend
- d de keuze bij een enquête tussen matig, voldoende, goed en heel goed
- e de hoogste temperatuur op een dag bij verschillende meetstations

Variabelen vergelijken

Het verband tussen twee variabelen kun je onderzoeken in een kruistabel. Kwantitatieve variabelen kun je bovendien vergelijken in een puntenwolk of spreidingsdiagram.

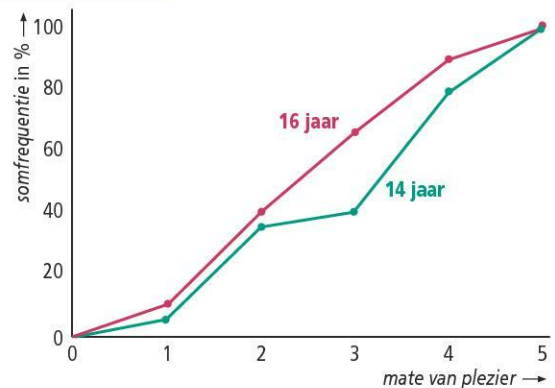
Het verschil tussen twee (deel)populaties kun je grafisch weergeven zoals met boxplots. Ook zijn er vuistregels om een waarde aan het verschil te geven. Deze vuistregels staan op het formuleblad. (zie blz. 216)

Voorbeeld 1



In de puntenwolk is het gewicht en de lengte van 154 leerlingen weergegeven. Je ziet aan de vorm van de puntenwolk dat er een verband is tussen deze variabelen. Langere leerlingen zijn meestal zwaarder.

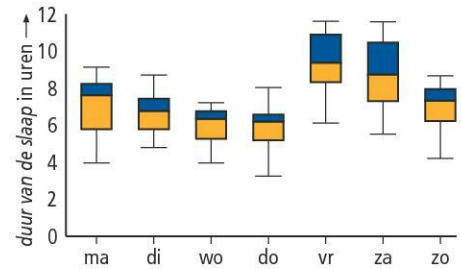
Voorbeeld 2



In de somfrequentiegrafiek is de mate van plezier in school van leerlingen van 14 jaar en 16 jaar weergegeven. De max V_{cp} is ruim 20%. Het verschil is middelmatig.

81 Met de boxplots is het resultaat van een onderzoek naar het slaapgedrag van studenten weergegeven.

- Welke variabele is hier kwantitatief? Is deze variabele continu of discreet?
- Welke dag is de spreidingsbreedte het grootst?
- Ga na of het verschil in aantal uren slaap op maandag en dinsdag gering, middelmatig of gering is.
- Hoe is dit verschil op zaterdag en zondag?
- Tussen welke dagen is er sprake van een 'groot verschil'?

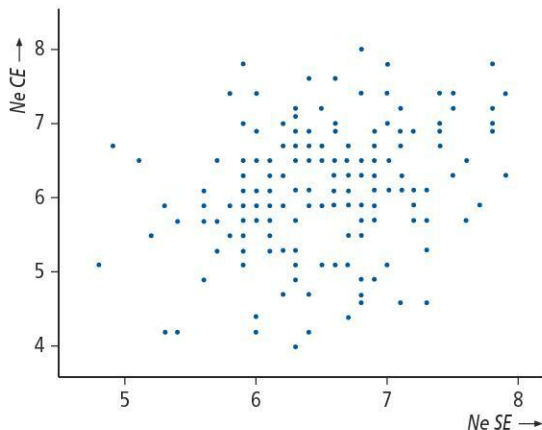
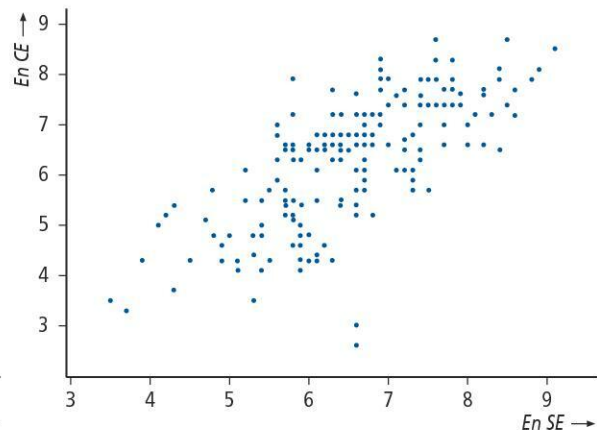


82 Een opticien heeft onderzoek gedaan naar de voorkeur voor bril of contactlenzen onder 18-jarigen. Hij heeft daarbij gekeken naar mannen en vrouwen. In de kruistabel zie je het resultaat van zijn onderzoek.

	bril	contactlenzen
mannen	57	22
vrouwen	43	45

Ga na of het verschil tussen voorkeur voor bril of contactlenzen bij mannen en vrouwen gering, middelmatig of groot is.

83 In de linker puntenwolk wordt het cijfer voor Nederlands op het SE en het CE vergeleken. In de rechter puntenwolk wordt het cijfer voor Engels op het SE en het CE vergeleken. Bij welk vak is het verband tussen de cijfers het sterkst? Verklaar je antwoord.



Percenteren

Om conclusies uit kruistabellen te kunnen trekken, moet je vaak overgaan op relatieve frequenties. Je kunt dit bijvoorbeeld doen door percentages te berekenen, dit noem je percenteren. Om te percenteren moet je steeds bepalen welk getal je als totaal moet gebruiken.

Voorbeeld

In de tabel zie je hoeveel meisjes en jongens in een klas wel en niet wekelijks sporten.

<i>geslacht</i>	<i>sporten</i>		<i>totaal</i>
	<i>wel</i>	<i>niet</i>	
jongen	15	3	18
meisje	11	1	12
totaal	26	4	30

Bereken hoeveel procent van de jongens niet wekelijks sport.

Oplossing

Om te berekenen hoeveel procent van de jongens niet wekelijks sport, neem je als totaal het totaal aantal jongens. Van de 18 jongens, sporten er 3 niet wekelijks.

$$3 : 18 \times 100\% \approx 16,7\%$$

Van de jongens sport ongeveer 16,7% niet wekelijks.

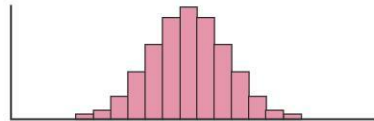
<i>leeftijd</i>	<i>plezier</i>					<i>totaal</i>
	1	2	3	4	5	
14	2	1	1	2	1	7
15	7	16	19	32	15	89
16	5	9	19	11	9	53
17	0	1	2	1	1	5
totaal	14	27	41	46	26	154

- 84** In de kruistabel kun je aflezen met welke mate van plezier leerlingen naar school gaan.
- Hoeveel procent van de leerlingen is 16 jaar en heeft score 5 gegeven voor de mate van plezier?
 - Hoeveel procent van de leerlingen is 15 jaar en heeft score 5 gegeven voor de mate van plezier?
 - Waarom mag je op grond van de antwoorden van opdracht a en b niet de conclusie trekken dat de 15-jarigen vaker een score 5 geven dan de 16-jarigen?
 - Hoeveel procent van de leerlingen die een score 4 hebben gegeven, is 14 jaar?

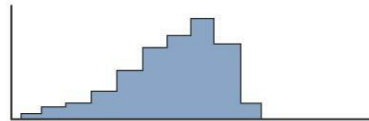
Verdelingen

Frequentieverdelingen van datasets kun je weergeven in staafdiagrammen. Deze staafdiagrammen kunnen verschillende vormen aannemen.

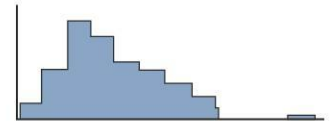
Voorbeeld



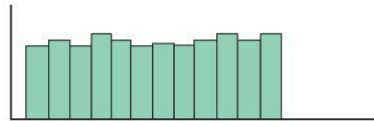
klokvormig



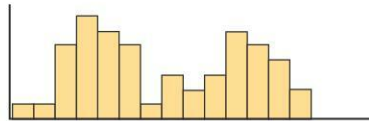
schief met staart naar links



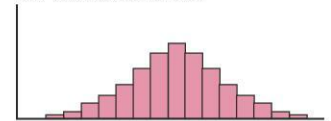
schief met staart naar rechts en een uitschieter



uniform

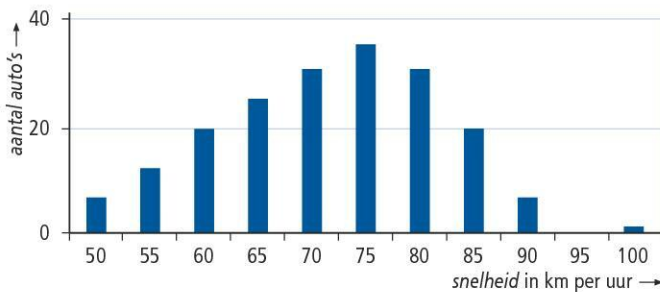


meertoppig



klokvormig

- 85** Op een provinciale weg met een maximumsnelheid van 80 km per uur is gedurende een aantal uren de snelheid van de 189 passerende auto's gemeten. In het staafdiagram hieronder zijn de snelheden afgerond op een veelvoud van 5 km per uur.



- Hoe karakteriseer je de vorm van deze verdeling?
- Hoeveel auto's hadden een snelheid tussen 57,5 en 62,5 km per uur?
- Welke centrummaat zal veranderen door het weglaten van de uitschieter?
- Bestuurders die sneller reden dan 85 km per uur kregen een bekeuring toegestuurd. Maak een schatting van het percentage voertuigen waarvan de bestuurder een bekeuring kreeg.

Klokvormige en normale verdeling

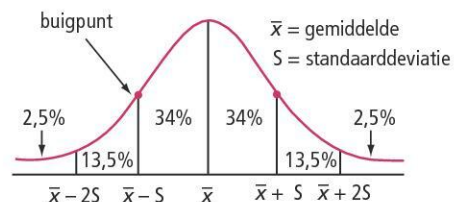
De frequentieverdeling van een variabele kun je vaak benaderen met een klokvormige grafiek. De belangrijkste kenmerken van zo'n grafiek zijn:

- De grafiek is symmetrisch.
- De symmetrie-as ligt precies bij het gemiddelde.
- Het gemiddelde, de mediaan en de modus vallen samen.
- s is de afstand van de symmetrie-as tot de buigpunten van de kromme.

Er gelden de volgende drie vuistregels:

- 1 Van de data ligt ongeveer 68% tussen $\bar{x} - s$ en $\bar{x} + s$.
- 2 Van de data ligt ongeveer 95% tussen $\bar{x} - 2s$ en $\bar{x} + 2s$.
- 3 Van de data ligt vrijwel 100% tussen $\bar{x} - 3s$ en $\bar{x} + 3s$.

De ideale klokvormige verdeling wordt de normale verdeling genoemd. Een variabele waarvan de frequentieverdeling benaderd kan worden door de normale verdeling heet normaal verdeeld.

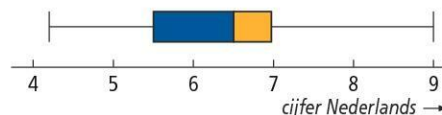


- 86** Het gewicht van pakken koffie is normaal verdeeld met een gemiddelde van 251,5 gram en een standaardafwijking van 3,5 gram.

- a Hoeveel procent van de pakken heeft een gewicht van minder dan 255 gram?
- b En hoeveel procent van de pakken heeft een gewicht tussen 248 gram en 258,5 gram?

- 87** De 248 leerlingen van havo 5 hebben een toets voor het vak Nederlands gemaakt. Je ziet een boxplot met de resultaten.

- a Wat is het laagste cijfer dat gehaald is?
- b Hoeveel procent van de leerlingen had een cijfer tussen 7,0 en 9,0?
- c Hoeveel leerlingen hadden een onvoldoende ($< 5,5$)?
- d Hoe kun je aan de boxplot zien dat de cijfers niet normaal verdeeld zijn?



Populaties, steekproeven en steekproevenverdelingen

Als je te weten wilt komen hoeveel procent van een populatie een bepaalde eigenschap heeft, en de populatie is groot, dan neem je een steekproef. Je zorgt ervoor dat de steekproefgrootte of steekproefomvang groot genoeg is en dat de steekproef aselekt is, en zo mogelijk, representatief. Het steekproefgemiddelde van een bepaalde eigenschap is een schatting van het populatiegemiddelde van deze eigenschap. De variatie die optreedt bij steekproeven kun je bestuderen door van een heleboel steekproeven het steekproefgemiddelde te bepalen en te kijken naar de verdeling van deze gemiddelden. Je noemt dit de steekproevenverdeling van het gemiddelde. Een steekproevenverdeling kan benaderd worden met een normale verdeling.

- 88** Een politieke partij met 13 500 leden hield een enquête onder de leden om de te onderzoeken of het beleid van de partij gewaardeerd wordt. Aan 1500 leden werd een enquêteformulier toegestuurd met 25 vragen. Het formulier werd teruggestuurd door 853 leden, waarvan er 673 tevreden waren.
- a** Uit welke populatie is deze steekproef getrokken?
 - b** Hoe groot is de steekproef?
 - c** Is de steekproef aselekt en representatief?
 - d** Waarom is het niet zeker dat de meerderheid van de leden van de partij tevreden is?
 - e** Zeggen de resultaten van de steekproef iets over de waardering van alle Nederlanders voor het programma van die partij?

Steekproefproportie en betrouwbaarheidsinterval

Het percentage in de steekproef met een bepaalde eigenschap is de steekproefproportie. Het percentage met deze eigenschap in de populatie noem je de populatieproportie. Door toeval zal de steekproefproportie meestal niet gelijk zijn aan de populatieproportie. In je conclusie houd je daarom een foutenmarge aan. Het betrouwbaarheidsinterval bereken je met de steekproefproportie min en plus de foutenmarge.

Voorbeeld

Er is een onderzoek gedaan naar het gebruik van de smartphone onder 65+-ers. Het blijkt dat 45% van de 2000 ondervraagden een smartphone heeft. Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval van het percentage 65+-ers met een smartphone.

Oplossing

$$p - 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,45 - 2 \cdot \sqrt{\frac{0,45(1-0,45)}{2000}} \approx 0,428$$

$$p + 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,45 + 2 \cdot \sqrt{\frac{0,45(1-0,45)}{2000}} \approx 0,472$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval van het percentage 65+-ers met een smartphone is [42,8; 47,2].

- 89** Bereken bij het voorbeeld het 95%-betrouwbaarheidsinterval in het geval dat bij een steekproef van 300 docenten, 70% een smartphone blijkt te hebben.



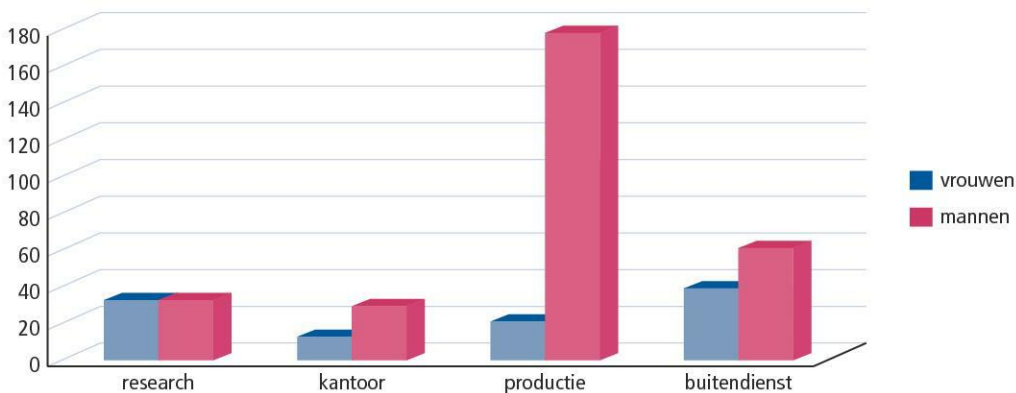
- 90** Een machine vult glazen potjes met aardbeienjam. Van een steekproef van 100 potjes is het gemiddelde gewicht aan jam per potje 220,8 gram met een standaardafwijking van 8,2 gram.
- Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval van het gemiddelde gewicht aan aardbeienjam in een potje.
 - De potjes jam worden afgesloten met een deksel. Van de 100 potjes jam bleek dat bij 7 potjes de deksel het potje niet goed afsluit. Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval van het percentage potjes jam waarbij de deksel het potje niet goed afsluit.

Examenopdrachten

91 Het bedrijf

(Ontleend aan de syllabus wiskunde A havo 2017)

Een bedrijf met 400 personeelsleden heeft vier afdelingen waar zowel mannen als vrouwen werken. In het jaarverslag staat een 3D-diagram waarin je onder meer kunt aflezen dat op de afdeling productie veel meer mannen dan vrouwen werken.



- a Om welke twee statistische variabelen gaat het hier? Geef bij elk van deze twee variabelen aan of ze kwalitatief of kwantitatief is, discreet of continu, en nominaal of ordinaal.

Hint 53

- b Maak een kruistabel met de absolute gegevens die je aan dit diagram ontleent.

Hint 54

In het diagram kun je zien dat het aantal vrouwen en het aantal mannen op de afdeling research ongeveer even groot zijn.

- c Kun je hieruit de conclusie trekken dat het percentage van alle vrouwen in het bedrijf dat bij de afdeling research werkt ongeveer even groot is als het percentage van alle mannen in het bedrijf dat bij de afdeling research werkt? Licht je antwoord toe.

Hint 55

92 Referentiewaarden

(*Ontleend aan CE havo wiskunde A 2018, tijdvak 1*)

Bij een bloedonderzoek worden het hemoglobinegehalte en de hoeveelheid rode bloedcellen gemeten. In de uitslag van het onderzoek staan van beide de gemeten waarden.

Om deze uitslag te kunnen beoordelen, worden de gemeten waarden vergeleken met de bijbehorende referentiewaarden.

Dit zijn de waarden zoals ze gevonden worden bij 95% van de gezonde mensen. In deze opgave bekijken we de referentiewaarden van volwassenen. Het hemoglobinegehalte wordt uitgedrukt in millimol per liter (mmol/L). Een mol is een eenheid voor het aantal deeltjes en de hoeveelheid rode bloedcellen in biljoenen per liter ($1 \text{ biljoen} = 10^{12}$). We gaan ervan uit dat het hemoglobinegehalte en de hoeveelheid rode bloedcellen van gezonde mannen normaal verdeeld zijn. Dit geldt ook voor het hemoglobinegehalte en de hoeveelheid rode bloedcellen van gezonde vrouwen. In de tabel staan de referentiewaarden van het hemoglobinegehalte en van de hoeveelheid rode bloedcellen. Deze referentiewaarden liggen symmetrisch om het gemiddelde. Zo kun je in de tabel bijvoorbeeld aflezen dat 95% van de gezonde mannen een hemoglobinegehalte heeft tussen 8,6 mmol/L en 11,0 mmol/L.

	<i>geslacht</i>	<i>referentiewaarden</i>
hemoglobine	man	8,9 – 11,0
	vrouw	7,6 – 10,0
rode bloedcellen	man	4,4 – 5,8
	vrouw	4,0 – 5,3

- a** Bereken de standaardafwijking van de hoeveelheid rode bloedcellen van gezonde vrouwen. Geef je antwoord in biljoenen per liter en rond af op één decimaal.

Hint 56

De standaardafwijking van het hemoglobinegehalte van zowel gezonde mannen als gezonde vrouwen is 0,6 mmol/L.

- b** Ga met behulp van het formuleblad na of het verschil tussen het hemoglobinegehalte van gezonde mannen en gezonde vrouwen gering, middelmatig of groot is.

Hint 57

93 Lunchen

(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2018, tijdvak 1)

Een paar jaar geleden heeft men in de Verenigde Staten een onderzoek gehouden onder mensen die in hun lunchpauze ergens gaan eten. Men wilde weten wat er zoal als lunch besteld werd en hoeveel kilocalorieën (kcal) de bestelde lunch bevatte. Het onderzoek werd uitgevoerd in New York City. Uit alle 1064 lunchrestaurants die op hun website calorie-informatie hadden staan, werden er willekeurig 167 uitgekozen waar het onderzoek werd uitgevoerd.

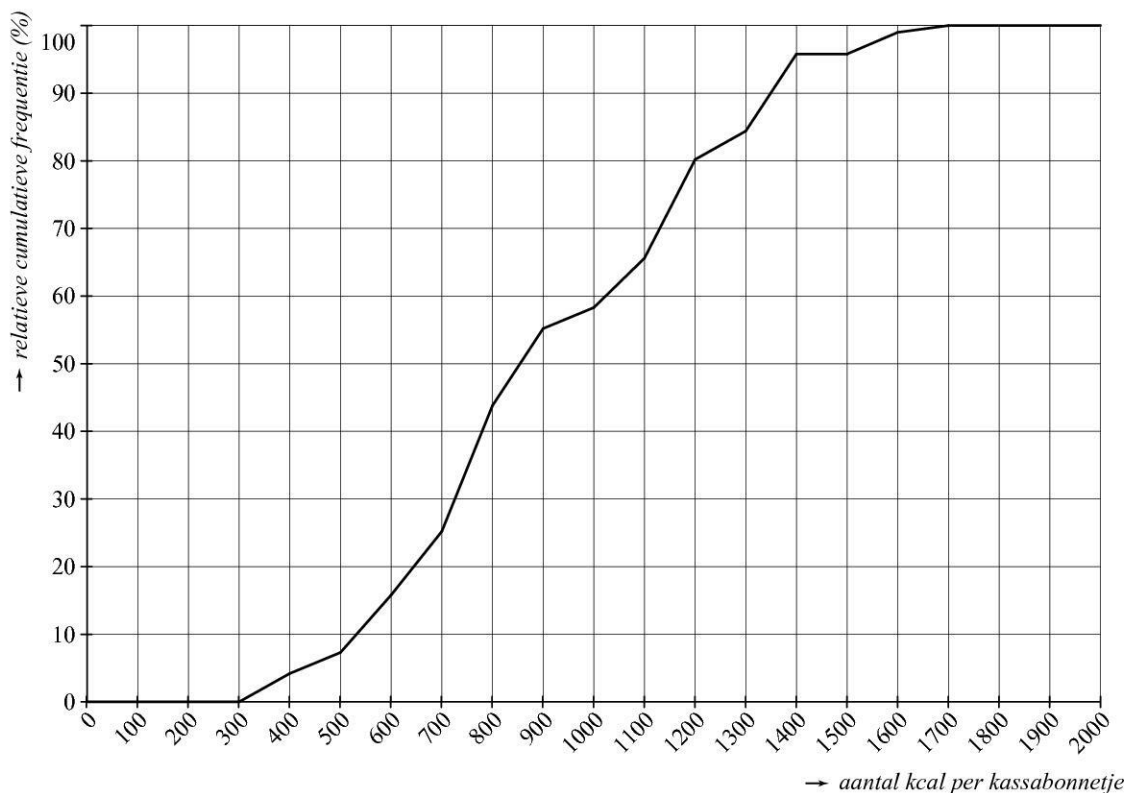
Verschillende teams van onderzoekers gingen rond lunchtijd naar deze lunchrestaurants om klanten te informeren over het onderzoek. Alleen klanten van 18 jaar en ouder mochten meedoen. Ze moesten dan een individuele bestelling plaatsen. Wie vervolgens zijn kassabonnetje inleverde, kreeg als beloning een metrokaartje van 2 dollar. Vrijwel alle klanten wilden meedoen met het onderzoek, mede vanwege de beloning. De onderzoekers kregen op deze manier heel wat kassabonnetjes in handen. Achteraf bleek dat 5,6% van de ingeleverde kassabonnetjes onbruikbaar was. De overige 7318 kassabonnetjes konden worden gebruikt voor het onderzoek.

- a** Bereken hoeveel dollar de onderzoekers kwijt waren aan metrokaartjes.

Hint 58

Omdat op de kassabonnetjes precies vermeld stond wat er besteld was, konden onderzoekers met de calorie-informatie van de betreffende lunchrestaurants berekenen hoeveel kcal elke lunch bevatte. Een samenvatting van de resultaten staat in de tabel.

type lunch- restaurant	aantal restaurants	aantal geldige kassa- bonnetjes	aantal kcal per kassabonnetje		percentage klanten dat meer dan ... kcal bestelde	
			gemiddelde	standaard- afwijking	1000 kcal	1250 kcal
broodjes	49	1989	734	361	20,0	8,8
pizza	17	272	766	449	20,6	15,1
hamburgers	75	3857	857	336	38,6	16,5
tex-mex	3	96	900	295	41,7	17,7
kip	14	649	931	264	47,5	18,0
gemengd	9	455	821	256	35,6	16,9
totaal	167	7318	827	458	33,5	14,5



Van één type lunchrestaurant uit de tabel zijn de resultaten ook weergegeven in een relatieve cumulatieve frequentiepolygoon.

- b** Van welk type lunchrestaurant zijn de resultaten in de relatieve cumulatieve frequentiepolygoon weergegeven?

Licht je antwoord toe.

Hint 59

De aanbevolen hoeveelheid kcal voor een lunch is 750 kcal. Het lijkt erop dat die hoeveelheid in hamburgerrestaurants ruimschoots overschreden wordt. Het steekproefgemiddelde was daar immers veel hoger dan 750 kcal.

- c** Onderzoek of de aanbevolen hoeveelheid van 750 kcal in het 95%-betrouwbaarheidsinterval van het populatiegemiddelde in hamburgerrestaurants ligt.

Hint 60

De Amerikaanse overheid is geschrokken van de resultaten van dit onderzoek. Ze trekt de conclusie: 'Veel volwassenen nuttigen bij de lunch meer dan de aanbevolen hoeveelheid kcal.' Door de gekozen onderzoeksopzet, zoals die beschreven staat in de inleiding van deze opgave, is de conclusie van de Amerikaanse overheid echter te algemeen.

- d** Noem hiervoor twee aspecten uit de gekozen onderzoeksopzet.

Hint 61

Een van de deelnemende lunchrestaurants probeert zijn klanten bewust te maken van de hoeveelheid kcal die ze bestellen. Dit restaurant presenteert daarom de calorie-informatie niet alleen op de website, maar ook duidelijk zichtbaar bij het bestelpunt. De onderzoekers hebben aan de klanten van dit restaurant gevraagd of deze informatie effect had op hun bestelling. Die informatie hebben zij per klant gekoppeld aan zijn of haar kassabonnetje. De resultaten staan in onderstaande tabel.

	aantal geldige kassabonnetjes	aantal kcal		percentage dat meer dan 100 kcal bestelt
		gemiddelde	standaardafwijking	
calorie-informatie wel gelezen	568	713	301	17,5
calorie-informatie niet gelezen	1237	766	584	23,0

Op grond van de resultaten in deze tabel bespreken de onderzoekers de volgende stelling: 'Er bestaat een groot verschil in het aantal kcal per bestelling tussen klanten die de calorie-informatie wel hebben gelezen en klanten die de calorie-informatie niet hebben gelezen.'

e Onderzoek met behulp van het formuleblad of deze stelling door de gegevens in deze tabel wordt ondersteund.

Hint 62

94 Rookgedrag van leerlingen

(Ontleend aan *CE havo wiskunde A 2018, tijdvak 2*)

Sinds de jaren tachtig meet het Trimbos-instituut regelmatig via een enquête het gebruik van alcohol, drugs en tabak in aselechte, representatieve steekproeven onder alle leerlingen van het voortgezet onderwijs. Ook werd de leerlingen in de enquête gevraagd naar hun leeftijd (in jaren), hun geslacht (jongen, meisje), en hun schoolniveau (vmbo, havo, vwo). Aan de enquête van 2015 deden 6714 leerlingen mee in de leeftijd van 12 tot en met 16 jaar. In deze groep is onder andere gekeken naar de lifetime-prevalentie van roken. Hiermee wordt het percentage van de leerlingen bedoeld dat rookt of ooit gerookt heeft in zijn of haar leven.

lifetime-prevalentie van roken

steekproefomvang	6714
aantal dat rookt of ooit gerookt heeft	1544
lifetime-prevalentie	23%

In de tabel zie je dat van de leerlingen in de steekproef 23%, bijna een kwart, rookt of ooit gerookt heeft. Op basis van bovenstaande gegevens kun je het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de lifetime-prevalentie van roken berekenen.

- a** Bereken dit 95%-betrouwbaarheidsinterval. Rond de percentages in je antwoord af op gehele getallen.

Hint 63

In de tabel hieronder zijn de 6714 leerlingen uitgesplitst naar schoolniveau.

lifetime-prevalentie van roken

	aantal leerlingen	aantal dat rookt of ooit gerookt heeft	lifetime-prevalentie
vmbo	3265	873	27%
havo	1805	410	23%
vwo	1644	261	16%
totaal	6714	1544	23%

- b** Bepaal met behulp van het formuleblad of het verschil in lifetime-prevalentie van roken tussen havoleerlingen en vwo-leerlingen groot, middelmatig of gering is.

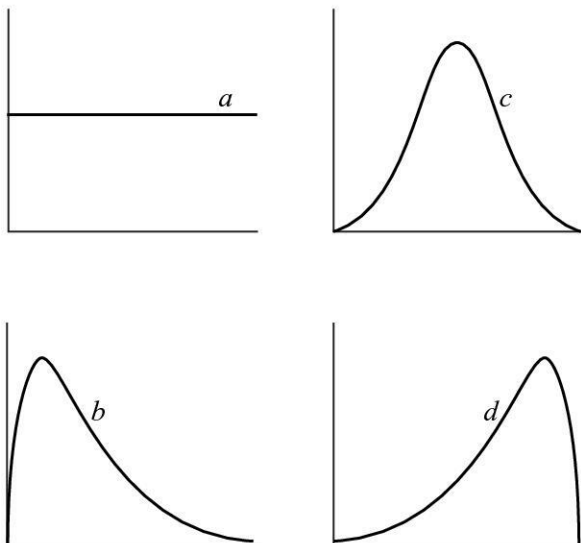
Hint 64

Van de 1544 leerlingen die aangaven dat zij rookten of ooit gerookt hadden, gaven 712 leerlingen aan in de afgelopen maand nog gerookt te hebben. Deze groep van 712 leerlingen noemen we 'de rokers'. Aan de rokers is gevraagd hoeveel sigaretten zij gemiddeld per dag hebben gerookt in de afgelopen maand. Het resultaat staat in de tabel hieronder.

gemiddeld aantal sigaretten per dag

	aantal leerlingen
minder dan één sigaret (< 1)	364
één tot en met tien sigaretten ($1 - 10$)	255
meer dan tien sigaretten (> 10)	93
totaal	712

Deze tabel geeft inzicht in de verdeling van de variabele ‘gemiddeld aantal sigaretten per dag in de afgelopen maand’. Op basis van deze gegevens kun je inschatten hoe de relatieve frequentiepolygoon van deze variabele eruitziet. In de figuur staan vier schetsen van relatieve frequentiepolygonen (a, b, c, d).



- c Welke van deze vier relatieve frequentiepolygonen geeft de verdeling waarschijnlijk het best weer? Licht je antwoord toe.

Hint 65

In de onderstaande tabel zijn de gegevens van de tabel van opdracht c uitgesplitst naar geslacht.

gemiddeld aantal sigaretten per dag

	meisjes	jongens	totaal
minder dan één sigaret (< 1)	196	168	364
één tot en met tien sigaretten ($1 - 10$)	111	144	255
meer dan tien sigaretten (> 10)	29	64	93
totaal	336	376	712

- d Bij welk geslacht, meisjes of jongens, is de mediaan van het gemiddeld aantal sigaretten per dag het grootst? Licht je antwoord toe

Hint 66

Hints bij de examenopdrachten

- 1 De diameter van de band is gelijk aan de diameter van de velg plus twee keer de hoogte van de band. Hoe bereken je de hoogte van de band?
- 2 Hoeveel rijen zijn er als ze 84 cm in plaats van 76 cm uit elkaar staan?
- 3 Hoeveel euro brengen 17 rijen van zeven stoelen met een afstand van 76 cm op? En hoeveel euro tien rijen van zeven stoelen met een afstand van 84 cm?
- 4 Bij welke aantallen mensen die komen opdagen hoeft Aircrown geen vergoeding te betalen?
- 5 Welke waarde hebben L , H en M bij het kleine formaat? En welke waarde bij het grote formaat?
- 6 Welke waarde krijgt M doordat de hoogte 1,8 m wordt?
- 7 Hoeveel kg brandstof heeft het vliegtuig met 210 stoelen per km verbruikt?
- 8 Bij 9000 km lees je (ongeveer) 36 gram per skm af. Wat betekent dit getal?
- 9 Hoeveel gram per skm bedraagt het brandstofverbruik bij een vlucht van 3000 km? Hoeveel brandstof verbruikt het vliegtuig op deze manier bij een vlucht van in totaal 9000 km?
- 10 Los met je rekenmachine de bijbehorende vergelijking op.
- 11 Hoe vind je met je rekenmachine het minimum van de formule voor het brandstofverbruik?
- 12 Welke waarde van x moet je in de formule invullen?
- 13 Hoe vind je met je rekenmachine het maximum van een formule?
- 14 Los met je rekenmachine de bijbehorende vergelijking op.
- 15 Welke waarde moet constant zijn bij een omgekeerd evenredig verband tussen T en M ?
- 16 Wat gebeurt er met v als f twee keer zo groot wordt?
- 17 Bereken eerst de totaal terug te betalen bedragen.
- 18 Met hoeveel neemt bij $pH = 6$ het CO_2 gehalte toe als KH met één toeneemt?

- 19** Geef de voorwaarden I en II aan in de tekening. Welk deel van het gebied, links of rechts van de grafiek, voldoet?
- 20** Met hoeveel kg neemt het draagvermogen van de autoband gemiddeld toe tussen de LI-getallen 100 en 105?
- 21** Hoeveel dagen vroeger zal de gierzwaluw terugkeren na 40 jaar?
- 22** De lineaire formule is van de vorm $A = a \cdot t + b$. Welke waarde heeft a ?
- 23** Met hoeveel dagen neemt de verblijfsduur per 10 jaar toe? En per jaar?
- 24** Bereken eerst de prijs van het vlees in 2006 en in 2010.
- 25** Met hoeveel neemt het indexcijfer tussen 2005 en 2010 gemiddeld per jaar toe?
- 26** Welke factor hoort er bij de toename tussen 1980 en 2005?
- 27** Welke waarde heeft B na een verdubbeling van de bloeiperiode?
- 28** Met welke factor neemt de warmteafgifte af in 100 jaar?
- 29** Welke factor hoort er bij een afname van 2,3%?
- 30** Welke vergelijking moet je hier oplossen?
- 31** Na hoeveel jaar is het bedrag op de spaarrekening 10 keer zo groot geworden?
- 32** Welke groeifactor per jaar hoort bij een rentepercentage van 2,75%? En hoe bereken je daarmee de groeifactor per dag?
- 33** Je weet de groeifactor van het spaarsaldo per dag. Over hoeveel dagen krijg je nu rente?
- 34** Hoe hoog zou het bedrag na zes jaar zijn als er geen opnamekosten berekend zouden worden?
- 35** Hoeveel hoger is de aardbeving 's nachts op de schaal van Richter vergeleken met de avond ervoor?
- 36** Bereken eerst hoeveel energie er vrijkwam tijdens de nachtelijke aardbeving.

- 37** Hoeveel energie komt er vrij bij een aardbeving met kracht 1 op de schaal van Richter? En bij kracht 8 op de schaal van Richter?
- 38** Hoeveel seconden duurt één keer heen en weer zwaaien?
- 39** De wortel kun je wegwerken door links en rechts te kwadrateren.
- 40** Welke waarden hebben M en V ?
- 41** Werk eerst de haakjes weg.
- 42** Wat zijn de minimale en maximale waarden van V ?
- 43** Welke waarde heeft V ? Welke ongelijkheid moet je vervolgens oplossen?
- 44** Wat gebeurt er met de breuk $\frac{V}{20}$ als V toeneemt?
- 45** Vul $V = 43$ in de formule in en herleid.
- 46** Welke waarden hebben G , J en L ?
- 47** Naar welke delen van de formule moet je kijken?
- 48** Vul de waarden voor BMR en J in de formule in en druk G uit in L .
- 49** Bereken eerst het gewicht voor mannen van twee verschillende lengtes, bijvoorbeeld 150 en 200 cm.
- 49** Druk eerst G uit in W en L uit in H .
- 50** Gebruik dat $\frac{1}{10} = 10^{-1}$.
- 51** Beredeneer wat er gebeurt als p in de formule groter wordt.
- 52** Vervang B_V door 1 en breng b naar de andere kant van het gelijkteken.
- 53** Waarom zijn deze variabelen kwalitatief? Hebben de variabelen een natuurlijke ordening?
- 54** Gebruik een liniaal om zo nauwkeurig mogelijk af te lezen.
- 55** Hoe kun je zien dat er veel meer mannen in het bedrijf werken? Waarom kunnen deze percentages dus niet gelijk zijn?

- 56** Schets de normale verdeling en verwerk hierin de vuistregels.
- 57** Welk gemiddelde geldt bij mannen? En bij vrouwen?
- 58** Hoeveel kassabonnetjes kregen ze in totaal in handen?
- 59** Hoeveel procent bestelde meer dan 1000 kcal volgens de relatieve cumulatieve polygoon?
- 60** Gebruik de formule voor het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde.
- 61** Waarom is het onderzoek niet voor heel Amerika geldig?
- 62** Welke formule kun je gebruiken als het gemiddelde en de standaardafwijking zijn gegeven?
- 63** De steekproefproportie is 0,23.
- 64** Maak eerst een kruistabel met aan de ene kant 'havo' en 'vwo' en aan de andere kant 'wel gerookt' en 'niet gerookt'.
- 65** Wat komt vaker voor, een laag aantal sigaretten of een hoog aantal sigaretten?
- 66** Er zijn 336 meisjes, waar ligt dan de mediaan?

Vuistregels voor de grootte van het verschil van twee groepen

2×2 kruistabel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, met $\phi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}$, waarin

a, b, c en d absolute aantallen zijn.

- als $\phi < -0,4$ of $\phi > 0,4$, dan zeggen we 'het verschil is groot',
- als $-0,4 \leq \phi < -0,2$ of $0,2 < \phi \leq 0,4$, dan zeggen we 'het verschil is middelmatig',
- als $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$, dan zeggen we 'het verschil is gering'.

Maximaal verschil in cumulatief percentage (max V_{cp}) (met voor beide groepen een steekproefomvang $n > 100$)

- als max $V_{cp} > 40$, dan zeggen we 'het verschil is groot',
- als $20 < \max V_{cp} \leq 40$, dan zeggen we 'het verschil is middelmatig',
- als max $V_{cp} \leq 20$, dan zeggen we 'het verschil is gering'.

Effectgrootte $E = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\frac{1}{2}(S_1 + S_2)}$, met $\bar{X}_1$ en $\bar{X}_2$ de steekproefgemiddelden

($\bar{X}_1 \geq \bar{X}_2$) en S_1 en S_2 de steekproefstandaardafwijkingen

- als $E > 0,8$, dan zeggen we 'het verschil is groot',
- als $0,4 < E \leq 0,8$, dan zeggen we 'het verschil is middelmatig',
- als $E \leq 0,4$, dan zeggen we 'het verschil is gering'.

Twee boxplots vergelijken

- als de boxen¹ elkaar niet overlappen, dan zeggen we 'het verschil is groot',
- als de boxen elkaar wel overlappen en een mediaan van een boxplot buiten de box van de andere boxplot ligt, dan zeggen we 'het verschil is middelmatig',
- in alle andere gevallen zeggen we 'het verschil is gering'.

noot 1 De 'box' is het interval vanaf het eerste kwartiel tot en met het derde kwartiel.

Betrouwbaarheidsintervallen

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is

$$p \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \text{ met } p \text{ de steekproefproportie en } n \text{ de steekproefomvang.}$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatiegemiddelde is

$$\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \text{ met } \bar{X} \text{ het steekproefgemiddelde, } n \text{ de steekproefomvang en } S \text{ de steekproefstandaardafwijking.}$$

Als in een examen een van de woorden uit onderstaande lijst wordt gebruikt, dan geldt de betekenis die hieraan in deze lijst is gegeven.

aantonen dat, laten zien dat	Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.
afleiden van bijvoorbeeld een formule of een eenheid	Het geven van een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van de formule of eenheid volgt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. Tenzij anders aangegeven, geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.
bepalen	Het gevraagde vaststellen en/of uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
beredeneren, uitleggen	Het geven van een uitwerking waarin de denkstappen staan, waaruit het gestelde/gevraagde blijkt.
berekenen	Het gevraagde uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
herleiden (van een formule)	Een formule stap voor stap herschrijven tot deze in de gevraagde vorm staat, zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine.
noemen, (aan)geven wat, welke, wanneer, hoeveel	Een eindantwoord geven. Een toelichting is niet vereist tenzij anders is aangegeven.
onderzoeken of	Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de (on)juistheid van het gestelde blijkt. Het antwoord moet worden afgesloten met een conclusie. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt.
oplossen	Het bepalen van de waarden van een of meer onbekenden die voldoen aan de gegeven vergelijking of ongelijkheid. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
schetsen	Het geven van een grafische voorstelling die de voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen bevat.
tekenen	Het geven van een grafische voorstelling die de voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen bevat en voldoende nauwkeurig is. In het geval van een grafiek moet een assenstelsel met schaalverdeling zijn weergegeven.



Meer oefenen 220

In ieder hoofdstuk wordt bij enkele opdrachten extra oefening aangeboden. In de extra oefeningen wordt in het algemeen hetzelfde type opdracht gegeven maar met andere getallen.

Oefenproefwerken 228

Bij ieder hoofdstuk vind je hier een oefenproefwerk. Dit oefenproefwerk kun je gebruiken om je voor te bereiden op het echte proefwerk. De oefenproefwerken zijn in het algemeen wat langer dan een proefwerk dat je in een les van 45 of 50 minuten moet maken.

In een proefwerk komen verschillende soorten opdrachten voor:

- opdrachten waarmee getoetst wordt of je de vaardigheden van het hoofdstuk beheerst;
- opdrachten waarmee getoetst wordt of je de vaardigheden kunt toepassen binnen een grotere wiskundige opdracht of binnen een context of binnen een situatie die meer denkstappen vraagt en dus meer inzicht.



- 5** Een basketbalvereniging heeft 95 leden.
- De leden zijn verdeeld over acht teams. Hoeveel leden zijn er gemiddeld per team?
 - Noem de gemiddelde teamgrootte g en het aantal teams k . Leg uit waarom het verband tussen k en g omgekeerd evenredig is.
 - Stel een formule op voor het verband tussen k en g .

- 7** Bedenk in de volgende gevallen of er tussen beide grootheden sprake is van een recht evenredig verband, een omgekeerd evenredig verband of geen van beide.
- De hoogte van de gasrekening en het gasverbruik.
 - De afgelegde afstand en de tijd bij een constante snelheid.
 - De omtrek en de zijde van een vierkant.
 - De huurprijs en de tijd bij een jaarlijkse huurverhoging van 2%.

- 12** In Nederland is de levensduur van woningen wisselend. Soms worden betrekkelijk nieuwe woningen gesloopt maar er zijn ook woningen die al eeuwen bestaan en telkens gerenoveerd worden. Voor huurwoningen is ontdekt dat de leeftijd van 100 jaar door zo'n 81% van deze woningen gehaald wordt. Dit percentage noemen we een overlevingspercentage.

Het overlevingspercentage kun je berekenen met de formule

$$p = 56 + \frac{484}{10 + 1,023^t}$$

Hierin is p het overlevingspercentage en t de leeftijd van de woning in jaren.

- Plot de grafiek van P . Is de grafiek van P afnemend dalend of toenemend dalend?
- Hoe groot is het overlevingspercentage na 5 jaar?
- Na hoeveel jaar is het overlevingspercentage voor het eerst minder dan 70%?
- Onderzoek naar welke waarde het overlevingspercentage zal naderen voor grote waarden van t .



- 13** De firma Multifloor legt tapijt in een kantoorruimte voor €9,50 per m² en rekent €180,- voorrijkosten. De formule voor de kosten M per m² is $M = 9,5 + \frac{180}{a}$

Hierin M in euro's en a het aantal m².

- Onderzoek naar welke waarde M nadert als a heel erg groot wordt.
- Bij welk aantal m² zijn de kosten M minder dan €10,-?

- 17** Beredeneer of de waarde van N toeneemt of afneemt als q steeds groter wordt en naar welke grenswaarde N nadert.

a $N = \frac{200}{3q+4} + 13,5$ c $N = \frac{18000}{3,2^q}$

b $N = 114 + 0,95^q$ d $N = \frac{14}{7 + 10 \cdot 0,87^q}$

- 25** In de tabel staat voor enkele planeten de afstand tot de zon A in miljoenen kilometers en de omwentelingstijd rond de zon T in dagen.

- a Het verband tussen T en A heeft de vorm $T = c \cdot A^{1,5}$. Bereken c in één decimaal nauwkeurig.
- b Bereken de afstand van de aarde tot de zon.
- c Als A twee maal zo groot wordt, wordt T dan ook twee keer zo groot? Licht je antwoord toe.

	A	T
Jupiter	778	4329
Saturnus	1427	10 753
Uranus	2870	30 660
Neptunus	4497	60 150
Pluto	5907	90 670

- 28** Een tafeltennisvereniging in Hoorn heeft 119 seniorleden en 67 juniorleden. De contributie C die de vereniging van deze leden ontvangt, wordt berekend met de formule $C = 119p + 67q$.

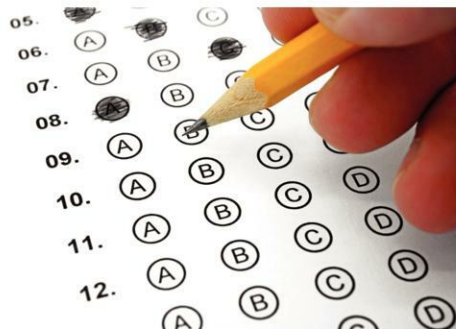
Hierin is p de contributie voor een seniorlid en q de contributie voor een juniorlid. Alle bedragen zijn in euro's. De huidige contributie bedraagt €100,- voor een seniorlid en €85,- voor een juniorlid.

- a De vereniging wil met het bestaande aantal leden de contributie-inkomsten verhogen tot €20.927,-. Welk bedrag moeten de seniorleden gaan betalen om dit te bereiken, als het bedrag voor de juniorleden niet wordt verhoogd?
- b De vereniging besluit om beide contributiebedragen aan te passen. De contributie voor de juniorleden wordt €95,-. Hoeveel euro wordt de nieuwe contributie voor de senioren?

- 32** Voor het berekenen van cijfers voor toetsen die alleen uit vierkeuzevragen bestaan, wordt de formule $C = 12 \cdot \frac{G}{V} - 2$

gebruikt. Hierin is C het cijfer, G het aantal goed beantwoorde vragen en V het aantal vragen van de toets.

- a Stel een formule op voor het verband tussen het cijfer en het aantal goed beantwoorde vragen als de toets uit 25 vragen bestaat. Vereenvoudig de formule zover mogelijk.
- b Stel een formule op voor het verband tussen het cijfer en het aantal vragen van de toets als er 18 goed beantwoorde vragen zijn.



3 Bereken.

- a** $\frac{2}{17}$ deel van 238 m³ **c** $\frac{8}{9}$ deel van 2196 km
b $\frac{3}{23}$ deel van 1357 mensen **d** $\frac{5}{9}$ deel van 27 hectare

5 Bereken.

- a** $\frac{1}{4} \times \frac{3}{7}$ **c** $\frac{3}{5} : 6$
b $\frac{7}{10} \times 3\frac{4}{9}$ **d** $3\frac{1}{2} : 7$

10 Op 1 oktober 2020 zitten er op een school 2340 leerlingen. Dit aantal is 5,3% minder dan in 2019.

- a** Hoeveel leerlingen zaten er in 2019 op deze school?
b Van de 2340 leerlingen zit 24,8% op het vwo. Van alle vwo-leerlingen zit 18,3% in 3 vwo. Hoeveel leerlingen zitten er in 3 vwo?
c Er zitten 62 meisjes in 3 vwo. Dit aantal is 5,4% van alle meisjes op school. Hoeveel procent van alle leerlingen op deze school is een meisje?

11 In de tabel zie je voor 2010 en 2018 hoeveel Nederlanders in de zorg werkten.

	2010	2018
<i>totaal aantal inwoners (× 1000)</i>	16 575,0	17 181,1
<i>werkzaam in de zorg per 1000 inwoners</i>	78,14	77,30

- a** Bereken de absolute toename van het aantal inwoners van Nederland tussen 2010 en 2018.
b Is het getal 78,14 absoluut of relatief? Leg je antwoord uit.
c Om het aantal mensen die in 2010 in de zorg werkten te berekenen, is een verhoudingstabel gemaakt.

<i>aantal personen werkzaam in de zorg</i>	78,14	...
<i>totaal aantal personen</i>	1000	...

Bereken hoeveel mensen er in 2010 in de zorg werkten. Geef je antwoord in duizendtallen.

- d** Bereken de absolute toename van het aantal mensen dat werkzaam was in de zorg tussen 2010 en 2018.

- 15** **a** Rond 2,3565 af op drie decimalen.
b Rond 42 959 614 af op duizendtallen.
c Rond 81,967 342 af op vier decimalen.
d Rond 234 513 480 af op miljoenen.

- 16** a Nico vult bekers met drinken voor zijn voetbalteam.
Hij vult elke beker met 200 mL limonade.
Hoeveel bekers kan hij vullen met een fles met 1,5 liter limonade?
- b Weldsen wil zijn kamer behangen. Een rol behang is 53 cm breed en 10 meter lang. Hij wil een muur van 6,95 meter breed en 2,59 meter hoog behangen.
Hoeveel rollen behang moet hij kopen?
- 23** a Druk 11 456 seconden uit in uren, minuten en seconden.
- b Hoeveel seconden is 4.23.12 uur?
- c Jari loopt 100 meter in 12,4 seconden.
Bereken zijn snelheid in km per uur.
- 24** De Brit Fauja Singh van Indiaase afkomst is de onofficiële wereldrecordhouder in een aantal atletiekonderdelen voor mannen van 100 jaar en ouder. Zijn wereldrecords worden niet officieel erkend omdat hij geen geboortecertificaat heeft.
- a Fauja Singh liep de 100 meter in 23,40 seconden.
Bereken zijn gemiddelde snelheid in meter per seconde.
- b Zijn record op de 200 meter is 52,23 seconden.
Bereken zijn gemiddelde snelheid op de 200 meter in km per uur. Rond je antwoord af op één decimaal.
- c Op een andere afstand is zijn recordtijd 11:27,81 minuten met een gemiddelde snelheid van 2,181 meter per seconde.
Op welke afstand was dit een record?
- d Fauja Singh heeft ook een wereldrecord op de marathon (42,195 km) gelopen. Zijn gemiddelde snelheid daarbij is 5,0105 kilometer per uur.
Vul in: Zijn recordtijd was ... : ... : ... uur.
- 31** Bereken en schrijf je antwoord in de standaardvorm. Rond het voorste getal eventueel af op één decimaal.
- a 12 miljard $\times$ 15 duizend c $12,3 \times 10^{-3} \times 4 \times 10^6$
- b $\frac{8 \times 10^{12}}{4 \times 10^5}$ d $1,4 \times 10^9 : (1,75 \times 10^2)$
- 35** Moleculen zijn heel klein en wegen heel weinig. Voor moleculen is een speciale massa-eenheid ingevoerd, de atomaire massa-eenheid u. Hierbij is $1 \text{ u} = 1,66054 \times 10^{-27} \text{ kg}$.
- a Vul in: $1 \text{ u} = \dots \text{ gram}$.
- b De massa van één molecuul waterstof is 1,00797 u.
Hoeveel gram wegen 20 000 moleculen waterstof?
- c De massa van één molecuul ijzer is 55,8452 u.
Hoeveel ijzermoleculen zitten in 1 kg ijzer?



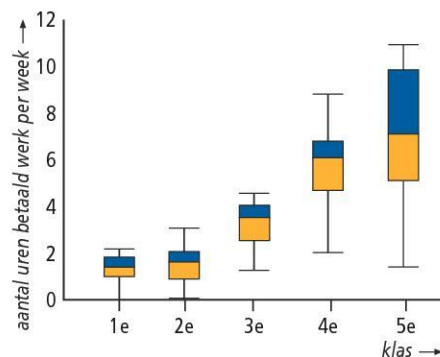
profiel	cijfer centraal schriftelijk examen Frans						totaal
	3,0-3,9	4,0-4,9	5,0-5,9	6,0-6,9	7,0-7,9	8,0-8,9	
CM	0	0	2	10	16	8	36
EM	0	2	3	5	13	2	25
NG	1	3	6	2	1	1	14
NT	0	1	3	1	0	0	5
totaal	1	6	14	18	30	11	85

- 3** In de kruistabel zie de behaalde cijfers op het centraal schriftelijk examen bij het vak Frans.
- Welke statistische variabelen staan in de tabel?
 - Bereken voor de klasse 8,0-8,9 hoeveel procent van de leerlingen een M-profiel (CM of EM) heeft en hoeveel procent van de leerlingen een N-profiel heeft (NG of NT).
 - Welke statistische uitspraak kun je doen naar aanleiding van de resultaten van opdracht b?
 - De docent Frans beweert dat de laagste cijfers zijn behaald door leerlingen met het profiel NG. Geef een argument voor zijn bewering.

- 7** Zijn de volgende kwantitatieve variabelen discreet of continu? Licht je antwoord toe.
- De diameter van een wc-rol.
 - Het aantal planken van een schutting.
 - De prijs van een pak melk.

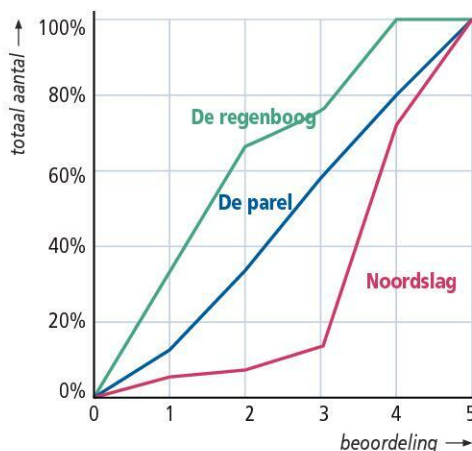
- 10** Zijn de volgende kwalitatieve variabelen nominaal of ordinaal? Licht je antwoord toe.
- Het leerjaar van een middelbare scholier.
 - Het soort huisdier.
 - De kleur van het haar van een mens.
 - Het type woning waarin iemand woont.

- 16** In een onderzoek op een middelbare school is aan de havo leerlingen gevraagd hoeveel tijd ze per week betaald werk verrichten.
- Welke variabelen zijn in het diagram verwerkt? Zijn deze kwantitatief of kwalitatief?
 - Leg uit dat het verschil in werktijd tussen de 3e en de 4e klas groot is.
 - Geef nog twee klassen waartussen het verschil in werktijd groot is.
 - Geef ook een voorbeeld van twee klassen waartussen het verschil in werktijd gering is en twee klassen waartussen het verschil in werktijd middelmatig is. Licht je antwoord toe.



- 18** De nieuwe brugklasleerlingen hebben voorlichting over de middelbare school gehad. In de relatieve somfrequentiepolygonen zie je hoe de leerlingen van drie basisscholen deze voorlichting hebben beoordeeld op een schaal van 0 tot en met 5 waarbij 0: zeer slecht en 5: zeer goed is.

- Door leerlingen van welke school is de voorlichting als beste beoordeeld? En door welke leerlingen het slechtst?
- Ga na of het verschil in beoordeling tussen de leerlingen van De regenboog en de leerlingen van De parel gering, middelmatig of groot is.
- Tussen welke twee scholen is het verschil in beoordeling van de leerlingen groot? Licht je antwoord toe.



- 21** Visboer Haring en visboer Gamba staan elke zaterdag op de markt. De gemiddelde omzet op zaterdagen bij visboer Haring is €3.897,- met een standaardafwijking van €689,-. Bij visboer Gamba is de gemiddelde omzet op zaterdagen €3.372,- met een standaardafwijking van €987,-. Ga na of het verschil in omzet op zaterdagen tussen de twee visboeren gering, middelmatig of groot is.

- 25** In een bejaardentehuis wonen 212 vrouwen en 89 mannen. Van de vrouwen lopen er 154 altijd met een rollator, bij de mannen is dit aantal gelijk aan 44.

- Stel bij de situatie een 2×2 kruistabel op.
- Bereken de waarde van ϕ .
- Welke conclusie kun je trekken met deze resultaten?

- 29** Een onderzoeker onderzoekt het verschil tussen de rapportcijfers bij wiskunde A en wiskunde B. Hij heeft een steekproef genomen bij een aantal middelbare scholen in Nederland. De resultaten zijn verwerkt in de kruistabel.

- Formuleer een onderzoeksvraag bij dit onderzoek.
- Ga na of op basis van dit onderzoek het verschil in rapportcijfer tussen leerlingen met wiskunde A en leerlingen met wiskunde B gering, middelmatig of groot is.
- Welke conclusie kun je trekken?
- Hoeveel procent van de leerlingen met een voldoende hebben wiskunde A?
- De leerlingen met wiskunde A hadden gemiddeld een 6,7 met een standaardafwijking van 0,9. Bij wiskunde B was het gemiddelde 7,3 met een standaardafwijking van 0,7. Bereken de 95%-betrouwbaarheidsintervallen voor de gemiddelde cijfers van de leerlingen met wiskunde A en van de leerlingen met wiskunde B.

	cijfer	
	voldoende	onvoldoende
wis A	680	123
wis B	264	35

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is

$$\left[\bar{X} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right], \text{ met}$$

$\bar{X}$ het steekproefgemiddelde,
 n de steekproefomvang en
 S de steekproefstandaardafwijking.

2 Druk r uit in s .

a $A r = 5q + 35$ en $B 3q - 12s = 36$

b $A r = -2 - 8q$ en $B s - q = 10$

c $A r = -q + 18$ en $B q + 4s - 10 = 0$

5 Onderzoek of de paren formules gelijkwaardig zijn.

a $3(a - 3b) = 7(b - 3a)$ en $b = 1,5a$

b $B = 4(3 - 2A) - 2(A - 5)$ en $A = 10B + 2$

c $F = 5 - 2(2x + 5)$ en $x = -0,25F - 1,25$

9 Herleid de vergelijkingen tot de vorm $z = \dots$

a $p = \frac{36}{z - 4}$

d $\frac{z - 1}{4} = \frac{4p + 3}{8}$

b $\frac{2}{z} - 8 = 3p$

e $\frac{8p}{z + 5} = \frac{10}{p}$

c $p = 3 \cdot \frac{5}{z + 10}$

f $\frac{4p - 3}{p} = \frac{8}{z}$

10 Onderzoekers hebben muggen in een afgesloten ruimte gebracht. Het aantal muggen blijkt redelijk benaderd te kunnen worden met de formule $N = 1500 - \frac{600}{2 + 3t}$.

Hierin is N het aantal muggen en t de tijd in dagen.

a Hoeveel muggen hebben de onderzoekers in de afgesloten ruimte gebracht?

b Tot welke grenswaarde nadert het aantal muggen op den duur?

c Herleid de formule waarbij je t uitdrukt in N .

d Na hoeveel dagen is het aantal muggen 1490?



16 Herleid de formules waarbij je h uitdrukt in s .

a $s = \sqrt{4h + 8}$

c $s = 2 \cdot \sqrt{h - 5}$

b $s = \sqrt{\frac{1}{100}h - 2}$

d $s = 0,2 \cdot \sqrt{2h - 6}$

19 Vereenvoudig de formules.

a $D = \sqrt{\frac{m}{81}}$

c $J = \sqrt{\frac{0,04}{t}}$

b $P = \sqrt{49e}$

d $L = \sqrt{\frac{1}{16}r}$

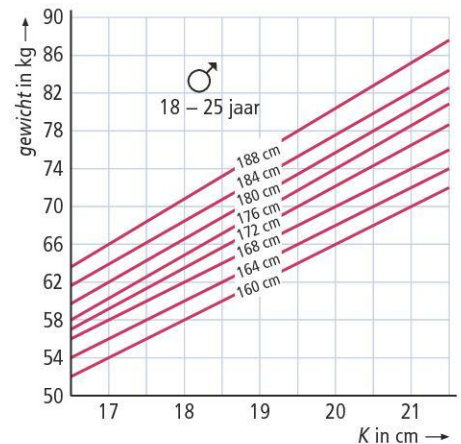
- 22** Herleid de formules tot de vorm $F = m^{\dots}$.
- a** $F = m^{-2} \cdot m^{12}$ **d** $F = (m^4)^{21}$
b $F = \frac{m^6}{m^{3,5}}$ **e** $F = \frac{1}{m^3}$
c $F = (m^3)^9$ **f** $F = m^8 \cdot m^5 \cdot m$
- 24** Herleid de formules tot de vorm $H = \dots u^{\dots}$.
- a** $H = \left(\frac{24u}{6}\right)^3$ **c** $H = \left(\frac{2}{u}\right)^8$
b $H = (-3u^4)^6$ **d** $H = (81u^7)^{2,5}$
- 29** Op een nieuw industrieterrein komen zowel grote bedrijven als kleine bedrijven. Elk groot bedrijf zal zich vestigen op 1000 m^2 en elk klein bedrijf zal zich vestigen op 200 m^2 . Bij deze situatie hoort de formule $A = 1000g + 200k$. Hierin is A de oppervlakte van het industrieterrein in m^2 , g het aantal grote bedrijven en k het aantal kleine bedrijven. De gemeente heeft als eis dat er twee keer zoveel kleine als grote bedrijven komen.
- a** Leg uit dat bij de eis van de gemeente de formule $2g = k$ hoort.
- b** Herleid door te substitueren de formule $A = 1000g + 200k$ tot de vorm waarin A uitgedrukt wordt in g .
- 30** Een fabrikant produceert loungesets. Het aantal verkochte loungesets per jaar hangt af van de prijs volgens de formule $q = -0,0032p^2 + 3,2p$. Hierin is q is het aantal loungesets dat hij per jaar kan verkopen en p de prijs van een loungeset in euro's. De fabrikant maakt precies zoveel loungesets als hij kan verkopen. De formule geldt alleen voor loungesets die maximaal 1000 euro kosten.
- a** Bereken de totale opbrengst als hij 450 euro per loungeset vraagt.
- b** Voor de totale kosten geldt de formule $TK = 240q + 46000$. Bereken de totale winst bij een prijs van 450 euro.
- c** Leg uit dat voor de totale opbrengst TO geldt $TO = -0,0032p^3 + 3,2p^2$.
- d** Druk TK uit in p .
- e** De totale winst TW wordt berekend met $TW = TO - TK$. Druk de totale winst uit in de prijs p .
- f** Welke prijs kan de fabrikant het beste vragen?



- 1 De prijs van een product is afhankelijk van de omvang van de dagproductie volgens de formule $P = 10 - \frac{8q}{3 + q}$.
Hierin is P de prijs van het product in euro's en q het aantal geproduceerde producten per dag in duizenden.
 - a Bereken de grootte van de dagproductie als de prijs €4,40 is.
 - b Onderzoek of het mogelijk is dat de prijs bij grote waarden voor q minder dan twee euro is. Licht je antwoord toe.

- 2 Er bestaat een verband tussen de druk, het volume en de temperatuur van een afgesloten hoeveelheid gas, bijvoorbeeld in een gasfles. Dit verband wordt gegeven met de formule $\frac{p \cdot V}{T} = 0,000012$. Hierin is p de druk in bar, V het volume in m^3 en T de temperatuur van de lucht in Kelvin.
 - a Bereken de druk van het gas als het volume van het gas $0,58 \text{ m}^3$ is en de temperatuur van het gas 290 Kelvin is.
 - b Welk soort verband bestaat er tussen p en V als geldt $T = 300$? Licht je antwoord toe.
 - c En wat voor een soort verband is er tussen V en T als $p = 0,001$?

- 3 Van een grote groep mannen tussen 18 en 25 jaar is het verband onderzocht tussen het lichaamsgewicht G in kg en de kniebreedte K in cm. Dit verband blijkt af te hangen van de lengte L in cm van de onderzochte persoon. In de figuur is voor een aantal verschillende lengtes het verband tussen G en K weergegeven.
 - a Voor een man van 188 cm lang is het verband tussen G en K weer te geven volgens de formule $G = a \cdot K + b$. Gebruik de figuur om de waarden van a en b te berekenen.
 - b Onderzoekers hebben gevonden dat het verband tussen G , K en L wordt gegeven door een formule van de vorm $G = p \cdot L^q \cdot K + r$. Hierin zijn p en q constanten. Leg uit hoe je aan de formule kunt zien dat de grafieken in de figuur rechte lijnen zijn.
 - c Vergelijk de formules uit opdracht a en opdracht b. Leg uit dat geldt $r = b$.
 - d Ga uit van $p = 0,013$. Bereken in drie decimalen nauwkeurig de waarde van q .

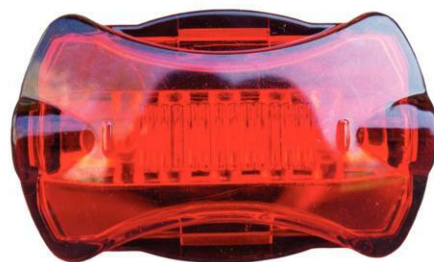


- 4 De kwaliteit van oplaadbare batterijen vermindert door het opladen. De tijd T in uren die het licht van een fiets kan branden op een batterij voordat deze weer moet worden opgeladen, wordt gegeven door de formule

$$T = \frac{150}{20 - 18 \cdot 0,93^n}.$$

Hierin is n het aantal keer dat de batterij opnieuw is opgeladen.

Beredeneer aan de hand van de formule of de tijd die een licht kan branden op den duur toeneemt of afneemt en tot welke grenswaarde deze tijd op den duur nadert.



- 5 Voor het verband tussen de huidoppervlakte H in m^2 , de lengte L in cm en het gewicht G in kg is experimenteel de formule $H = 0,006681 \cdot G^{0,425} \cdot L^{0,725}$ opgesteld.

- Ga uit van personen met een lengte van 175 cm. Onderzoek of het verschil in huidoppervlakte tussen personen van 60 en 80 kg even groot is als het verschil in huidoppervlakte tussen personen van 80 en 100 kg.
- Stel een formule op voor de huidoppervlakte van personen die 165 cm lang zijn.
- Stel twee mensen hebben dezelfde huidoppervlakte. De ene persoon is 1,70 meter lang en weegt 80 kg. De andere persoon is slechts 1,60 m lang. Bereken het gewicht van de tweede persoon.

- 6 De woorden die je begrijpt of kunt gebruiken, vormen samen je woordenschat. We gaan uit van een woordenschat van gemiddeld 17000 woorden op de 12e verjaardag. Bij sommige jongeren spreken we van een hoge woordenschat. Bij hen groeit de woordenschat exponentieel tot gemiddeld 150000 woorden wanneer de leeftijd van 21 jaar bereikt wordt.

- Met hoeveel procent per jaar neemt het aantal woorden voor deze jongeren toe?
- Stel een formule op waarmee je de woordenschat W voor deze jongeren na t jaren kunt berekenen. Neem $t = 0$ op de 12e verjaardag.
- Bij sommige andere jongeren spreken we van een lage woordenschat. Bij deze jongeren groeit de woordenschat lineair tot gemiddeld 45000 woorden op hun 21e verjaardag. Stel ook voor deze jongeren een formule op waarmee je de woordenschat W na t jaren kunt berekenen. Neem $t = 0$ op de 12e verjaardag.
- Bereken het verschil in woordenschat op de 18e verjaardag tussen jongeren met een hoge woordenschat en jongeren met een lage woordenschat. Rond je antwoord af op duizendtallen.
(ontleend aan CE vwo wiskunde C 2012, 2e tijdvak)

- 1** André laat 16 000 bakstenen bezorgen om een muur te bouwen. Gemiddeld weegt een baksteen 1,9 kg.
- Hoeveel kg zal deze partij bakstenen ongeveer wegen? Rond je antwoord af op duizendtallen.
 - André verplaatst de bakstenen in een kruiwagen. Om de kruiwagen niet te zwaar te maken, vervoert hij per keer steeds 24 bakstenen.
Hoeveel keer zal hij dan de kruiwagen met bakstenen moeten vullen?



- 2** Tijdens de wereldkampioenschappen atletiek 2015 in Peking veroverde Daphne Schippers goud op de 200 meter met een tijd van 21,63 seconden. Tijdens datzelfde kampioenschap behaalde Sifan Hassan brons op de 1 500 meter met een tijd van 4:09,34 minuten.
- Bereken de gemiddelde snelheid in km per uur van Daphne Schippers over de 200 meter.
 - Stel dat Sifan Hassan de 1 500 meter zou hebben gelopen met dezelfde gemiddelde snelheid als Daphne Schippers op de 200 meter.
Hoeveel seconden sneller zou Sifan Hassan dan geweest zijn dan de tijd waarmee ze brons heeft behaald?

- 3** Bereken.
- $\frac{2}{3} \times 2\frac{1}{2}$
 - $2\frac{4}{5} : 3$
 - $\frac{5}{7}$ deel van 91 meter
 - $\frac{2}{13}$ deel van 104 euro

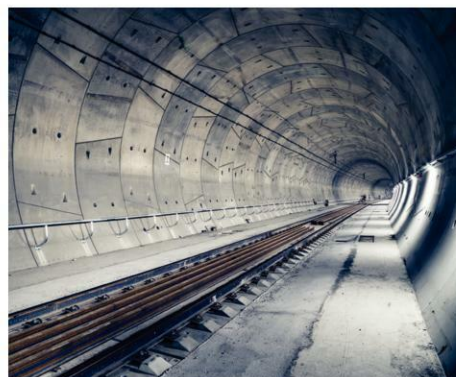
- 4** De lengtemaat ångström is genoemd naar een Zweedse natuurkundige en gelijk aan 0,000 000 01 cm. Deze lengtemaat wordt gebruikt om zeer kleine lengtes aan te geven.
- Hoeveel ångström gaan er in 1 kilometer? Schrijf je antwoord in de wetenschappelijke notatie.
 - Een salmonellabacterie is 2×10^{-3} mm lang.
Bereken de lengte van een salmonellabacterie in ångström.
- 5** In een tube crème met een inhoud van 20 mL zit onder andere 5 gram avocado-olie en 125 mg calendula-extract. Verder is bekend dat 100 mL van deze crème 85 gram weegt.
- In de fabriek wordt 6 liter van deze crème gemaakt.
Hoeveel gram avocado-olie is hierbij nodig?
 - Een volle tube crème weegt 31 gram.
Hoeveel gram weegt de lege tube?
 - Bereken hoeveel procent van het gewicht van de crème in een volle tube uit calendula-extract bestaat. Rond je antwoord af op één decimaal.

- 6 De politie doet in twee gemeenten een maand lang controle naar het gebruik van alcohol in het verkeer. In de tabel zie je de resultaten.

<i>gemeente</i>	A	B
<i>aantal gecontroleerde automobilisten ($\times 1000$)</i>	15,3	9,3
<i>automobilist heeft te hoog promillage per 1000 automobilisten</i>	2,6	1,6
<i>hoogste promillage alcohol</i>	1,1	0,8

- Bereken hoeveel automobilisten in gemeente A een te hoog promillage alcohol had.
- Van de automobilisten van gemeente A die een te hoog promillage had, was $\frac{5}{8}$ deel een man. Van deze mannen was $\frac{2}{5}$ deel jonger dan 20 jaar. Hoeveel mannen van jonger dan 20 jaar waren dat?
- Hoeveel procent van de automobilisten in gemeente B had een te hoog percentage alcohol?
- Bereken hoeveel procent meer automobilisten met een te hoog promillage alcohol gemeente A had vergeleken met gemeente B.
- Bij een controle op het politiebureau had een automobilist in 20 mL bloed 0,013 mL alcohol. Volgens de wet is een maximum van 0,5 promille toegestaan. Heeft deze bestuurder te veel alcohol gedronken?

- 7 Eind 2016 werd in Zwitserland de Gotthard-basistunnel, de langste spoorwegtunnel ter wereld, geopend.
- Bij het boren van de tunnel moest de tunnelboormachine op exact de juiste plaats aankomen. Een zijdelingse afwijking van maximaal 0,000 14% van de afgelegde afstand werd daarbij geaccepteerd. Hoeveel mm bedroeg de maximale afwijking over een geboord tunnelgedeelte van 5 km?
 - Door de tunnel worden vrachtauto's per trein door de Alpen vervoerd. Een vrachtauto stoot gemiddeld 16 milligram fijnstof uit per ton per kilometer. Neem aan dat er per trein 40 vrachtauto's van elk 30 ton over een afstand van 60 kilometer worden vervoerd. Hoeveel gram fijnstof zouden deze vrachtauto's hebben geproduceerd, als ze dezelfde afstand over de weg zouden afleggen?



- 1** Om te onderzoeken of vitamine C helpt tegen verkoudheid heeft een onderzoeker 138 personen vitamine C toegediend en 141 personen een placebo (fopmiddel). De personen in kwestie wisten niet of ze vitamine C dan wel de placebo toegediend kregen. De onderzoeker telde het aantal personen dat verkouden werd en verwerkte deze aantallen in een kruistabel.

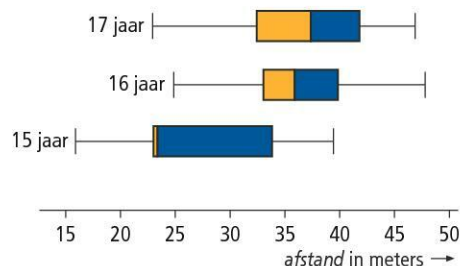
	verkouden	niet verkouden	totaal
vitamine C	19	122	141
placebo	29	109	138
totaal	48	231	279



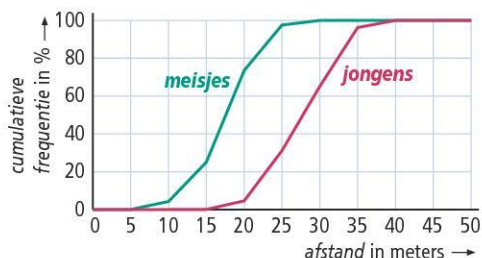
- Formuleer een onderzoeksvraag bij dit onderzoek.
- Om welke variabelen gaat het in dit onderzoek?
- Zijn deze statistische variabelen kwantitatief of kwalitatief?
- Geef ook aan of de variabelen continu, discreet, nominaal of ordinaal zijn. Leg je antwoord uit.
- Hoeveel procent van de verkouden mensen hebben vitamine C toegediend gekregen?
- Hoeveel procent van de mensen die vitamine C hebben geslikt, zijn verkouden geworden?
- Ga na of het verschil tussen de twee groepen groot, middelmatig of gering is.
- Welke conclusie zou je kunnen trekken bij de resultaten van dit onderzoek?

- 2** Een docent LO onderzoekt de resultaten van het onderdeel speerwerpen op een sportdag. Hij heeft de resultaten in boxplots verwerkt.

- Formuleer een onderzoeksvraag bij dit onderzoek.
- Om welke variabelen gaat het in dit onderzoek?
- Zijn deze statistische variabelen kwantitatief of kwalitatief?
- Geef ook aan of de variabelen continu, discreet, nominaal of ordinaal zijn. Leg je antwoord uit.
- Ga na of het verschil in prestatie tussen de 15-jarigen en 16-jarigen gering, middelmatig of groot is.
- Ga na of het verschil in prestatie tussen de 16-jarigen en 17-jarigen gering, middelmatig of groot is.
- De LO-docent beweert dat hij aan de boxplots kan zien dat 16-jarigen beter gepresteerd hebben dan de 17-jarigen. Welk argument zal hij hiervoor aanvoeren?
- Volgens zijn collega hebben de 17-jarigen beter gepresteerd. Welk argument zal zijn collega aanvoeren?



- 3** De LO-docent heeft de resultaten van het speerwerpen ook gesplitst op de variabele geslacht. Hij heeft de resultaten verwerkt in relatieve somfrequentiepolygonen.
- Welke klassenbreedte heeft hij daarbij gebruikt?
 - Hoeveel procent van de jongens wierp minstens 20 meter ver?
 - Ga na of het verschil in prestatie tussen de jongens en meisjes gering, middelmatig of groot is.



- 4** Het ministerie van onderwijs doet onderzoek naar de studieduur van hbo-studenten. De resultaten van een representatieve steekproef onder 2111 studenten zijn gesplitst op de variabele geslacht en op de variabele vooropleiding. In de tabellen zie je de resultaten.

<i>geslacht</i>	<i>studieduur in maanden</i>	
	jongens	meisjes
aantal waarnemingen	1019	1092
gemiddelde	57,1	53,1
mediaan	57	53
modus	55	56
minimum	41	42
maximum	77	73
Q_1	46	48
Q_3	62	59
standaardafwijking	6,11	4,82

<i>vooropleiding</i>	<i>studieduur in maanden</i>		
	40 tot 60	60 tot 80	totaal
havo	494	420	914
mbo	702	34	736
vwo	447	14	461
totaal	1643	468	2111

- Om welke variabelen gaat het in dit onderzoek?
- Zijn deze variabelen kwantitatief of kwalitatief?
- Geef ook aan of de variabelen continu, discreet, nominaal of ordinaal zijn. Leg je antwoord uit.
- Je wilt onderzoeken of het verschil in studieduur tussen jongens en meisjes gering, middelmatig of groot is. Onderzoek dit op twee verschillende manieren. Krijg je dezelfde uitkomst?
- Wijzen de drie spreidingsmaten spreidingsbreedte, kwartielafstand en standaardafwijking hetzelfde geslacht aan met de grootste spreiding in de studieduur?
- Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de gemiddelde studieduur in maanden van meisjes die een hbo-studie volgen.
- Hoeveel procent van de studenten met een studieduur van minder dan 60 maanden heeft havo als vooropleiding?
- Ga na dat het verschil in de studieduur tussen de vooropleiding havo en mbo groot is.

- 1** Voor volwassen vrouwen met een gemiddelde lichaamsbouw wordt het verband tussen de elleboogbreedte en de lichaamslengte gegeven door de formule $B = 0,143L + 39$. Hierin is B de breedte van de gebogen elleboog in mm en L de lichaamslengte in cm. Voor deze vrouwen is het verband tussen het ideale lichaamsgewicht G in kg en de lichaamslengte L in cm te berekenen met de formule $G = 0,89L - 91$.

- Hoeveel kg is het ideale lichaamsgewicht voor een vrouw met een elleboogbreedte van 64 mm? Rond je antwoord af op één decimaal.
- De formule voor het ideale gewicht is te schrijven in de vorm $G = p \cdot B + q$. Bereken de waarden van p en q in twee decimalen nauwkeurig.



- 2** Onderzoek of de paren formules gelijkwaardig zijn.

- $\frac{10p - 5w}{5} = \frac{5p + 7}{3}$ en $p - 3w = -7$
- $H = \sqrt{81r}$ en $r = \frac{1}{9}H$
- $W = \frac{26e + 8 - 4(2e + 1)}{3}$ en $W = 6e + 4$

- 3** Koppelingsplaten van een motor bestaan uit twee ronde platen met een gat voor de as erin. Bij het schakelen worden de platen tegen elkaar aangezet. Daarvoor moet de oppervlakte van de platen groot genoeg zijn. Voor het verband tussen de straal r in cm en de oppervlakte A in cm^2

van de koppelingsplaat geldt de formule $r = \sqrt{\frac{A}{3,14}} + 9$.

- Een koppelingsplaat heeft een oppervlakte van 50 cm^2 . Hoeveel cm is de straal van deze koppelingsplaat?
- Herleid de formule waarbij je A in r uitdrukt.
- Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van een koppelingsplaat met een straal van $6,23 \text{ cm}$?

- 4** Herleid de formules tot de vorm $K = \dots m \dots$.

- $K = (6m^{4,1})^2 \cdot 2m^4$
- $K = \left(\frac{-8}{3m^2}\right)^4$
- $K = -9m \cdot \frac{1}{m^5}$
- $K = \left(\frac{2m^4}{5}\right)^3$

- 5** Als iemand in koud water terechtkomt, daalt zijn lichaamstemperatuur. Als de lichaamstemperatuur is gedaald tot 30°C ontstaat een levensbedreigende situatie. De tijd die verstrijkt tussen het te water raken en het bereiken van een lichaamstemperatuur van 30°C heet de overlevingstijd. Voor een persoon die te water is geraakt in gewone kleding en met een reddingsvest geldt de formule $R = 15 + \frac{7,2}{0,0785 - 0,0034T}$

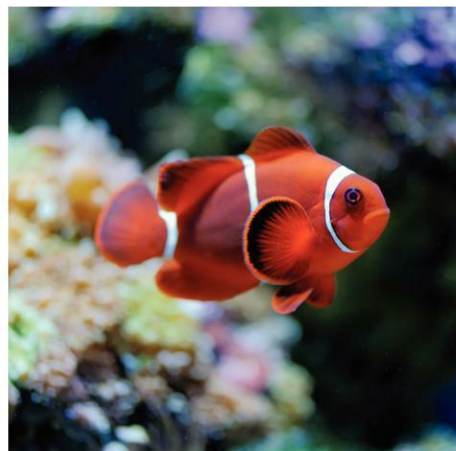
Hierin is R de overlevingstijd in minuten en T de watertemperatuur in $^\circ\text{C}$. Deze formule geldt alleen voor watertemperaturen van minstens 5°C .

- Bereken de overlevingstijd van iemand die in water met een temperatuur van 7°C terecht komt.
- De formule is te herleiden tot de vorm $T = a + \frac{b}{R - 15}$. Bereken de waarden van a en b in twee decimalen nauwkeurig.
- Hoeveel graden moet de temperatuur van het water minstens zijn wil iemand een overlevingstijd van minstens vier uur hebben?

(Ontleend aan CE havo wiskunde B pilot 2011, tijdvak 1)

- 6** Het energieverbruik van een vis die in stilstaand water zwemt, is afhankelijk van de snelheid. Er geldt $E = 0,15 \cdot v^3 \cdot t$. Hierin is E het energieverbruik in Joule, v de snelheid in kilometer per uur en t de tijd in uren. Neem bij de volgende opdrachten aan dat de vis met constante snelheid zwemt in stilstaand water.

- Bereken het energieverbruik van een vis die een afstand van 3 km aflegt met een snelheid van 2 kilometer per uur.
- De afstand a in km die een vis zwemt, bereken je met de formule $a = v \cdot t$. Druk t uit in a en v en herleid de formule voor het energieverbruik tot de vorm $E = p \cdot v^q \cdot a$.
- In plaats van de snelheid uit te drukken in kilometer per uur en de tijd in uren kun je de snelheid ook uitdrukken in meter per seconde en de tijd in seconden. Laat met een berekening zien dat $v = 3,6V$. Hierin is V de snelheid in meter per seconde en v de snelheid in kilometer per uur.
- Leg uit dat het verband tussen de tijd T in seconden en de tijd t in uren gegeven wordt door de formule $t = \frac{T}{3600}$.
- De formule voor het energieverbruik is te schrijven als $E = p \cdot V^3 \cdot T$. Bereken de waarde van p . Rond zo nodig af op vier decimalen.



- A** absoluut 48
afronden 52
- B** boxplots vergelijken 92
breuken vereenvoudigen 43
breuken vermenigvuldigen 45
- C** continu 88
- D** data 82
dataset 82
deel van een hoeveelheid berekenen 44
discreet 88
- E** effectgrootte 96
- F** formules herleiden 8, 118
formules combineren 134
formules met meer variabelen 26
- G** gebroken formule herleiden 122
gelijknamig 43
gelijkwaardig 120
grenswaarde 14
- H** herleiden 117
- K** kwalitatieve variabelen 83, 89
kwantitatieve variabelen 83, 88
- M** machtsformule 22
machtsformule herleiden 130, 131
 $\max V_{cp}$ 94
- N** nominaal 89
- O** omgekeerd evenredig 11
ordinaal 89
- P** percenteren 84
phi waarde 98
populatie 82
- R** recht evenredig 10
redeneren met formules 19
rekenen met breuken 43
rekenen met tijden 56
relatief 48
- S** spreidingsmaten 82
standaardvorm 60
statistisch onderzoek 82, 100
statistische uitspraken 82
statistische variabelen 82
substitueren 28, 116
- U** uitdrukken in 8, 117
- V** vergelijking van een lijn 117
verhoudingstabel 42
- W** waarden 82
wetenschappelijke notatie 60
wortelformule herleiden 127

Ontwerp omslag G2K Creative Agency, Groningen/Amsterdam

Fotografie omslag Getty Images

Ontwerp binnenwerk Ebel Kuipers grafisch ontwerp, Sappemeer
(Paul Kooi en G2K Creative Agency, Groningen/Amsterdam)

Illustraties Peter Fitzverploegh, Utrecht

Beeldresearch Daliz, Den Haag

Fotoverantwoording

Siebe Swart Luchtfotografie/ ANP, Den Haag: p. 6- 7

Shutterstock, New York: p. 10, 17, 18, 21, 22, 23, 24, 31, 36, 38, 39, 43, 44, 45, 46,
48, 52, 53, 55, 63, 67, 69, 70, 73, 78, 84, 86, 88, 97, 100, 118, 119, 120, 122, 123,
124, 126, 128, 132, 135, 137, 138, 144, 145o, 147, 150, 153, 204, 220, 221, 226, 227,
229, 230, 231, 232, 234, 235

Geertrui Schaberg, Mildam: p. 15, 25

Nick Beer/ Shutterstock.com: p. 16

J. Henning Buchholz/ Shutterstock.com: p. 26

John And Penny/ Shutterstock.com: p. 29

E+/ Getty Images, Amsterdam: p. 40- 41, 74- 75, 148- 149, 154- 155

Michael Steele/ EMPICS / PA Images/ Getty Images, Amsterdam: p. 56

EPA/ ANP, Den Haag: p. 57

SCC EVENTS (2003)/ BMW Marathon, Berlijn: p. 58

Leonard Zhukovsky/ Shutterstock.com: p. 62

G.J. Woutersen /Nationale Beeldbank/ ANP, Den Haag: p. 65

Photos by Tom/ Shutterstock.com: p. 73

Nasa, Washington: p. 80- 81

Ferdi Doddema, Winschoten: p. 96

iStockphoto/ Getty Images, Amsterdam: p. 114- 115, 218- 219

Daliz, Den Haag: p. 136

e-leet/ Shutterstock.com: p. 145b

Underwood Archives / Getty Images, Amsterdam: p. 148o

Alamy/ Image Select, Wassenaar: p. 148b

Cito Nederland. Arnhem: p. 183, 184

Jeff J Mitchell / Staf/ Getty Images, Amsterdam: p. 223

Met FLEX heb je:

Boeken die je mag houden

- elk schooljaar krijg je een nieuw boek
- dit boek mag je houden om in te markeren en te werken
- zo wordt je boek een effectief leermiddel

Een persoonlijke digitale leeromgeving

- waarin je wordt uitgedaagd om het beste uit jezelf te halen
- met oefentoetsen, interactieve opdrachten en feedback
- en met inzicht in je resultaten



Altijd actueel lesmateriaal

- actuele inhoud met opdrachten en toetsen
- zowel in je boek als digitaal
- aangevuld met nieuw lesmateriaal op basis van het nieuws en actualiteiten

