

MODERNE WISKUNDE

A



Noordhoff

$$v = \frac{4h}{2(h+z) - zh}$$

12e editie

Moderne Wiskunde

Uitwerkingen bij havo A deel 3

Ontwerp omslag G2K Designers, Groningen/Amsterdam
Ontwerp binnenwerk Ebel Kuipers, Sappemeer
Technisch tekenwerk Integra Software services Pvt. Ltd., India

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleenen.

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 21

© 2021 Noordhoff bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsenauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-89262-3

12e editie

Moderne Wiskunde

Uitwerkingen bij havo A deel 3

Ferdi Doddema

Arjan Eikelboom

Gerard van Proosdij

Colin Roll

Geertrui Schaberg

Greetje Smeenk - van Broekhoven

- H11 Allerlei formules 6
- H12 Toegepast rekenen 33

Vaardigheden 6 50

- H13 Conclusies uit data 56
- H14 Formules herleiden 74

Vaardigheden 7 104

Examenvoorbereiding 109
Meer oefenen 136
Oefenproefwerken 146

11 Allerlei formules

Voorkennis

V1 a De grafiek gaat 2 naar rechts en 1 naar beneden, dus de richtingscoëfficiënt is $-\frac{1}{2}$. Het snijpunt met de y -as is $(0, 3)$ dus het startgetal is 3.

b De formule is $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

c $x + 2y = 6$

$$2y = -x + 6$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

V2 a $4b + 6a = 12$

$$4b = -6a + 12$$

$$b = -1,5a + 3$$

b $3b - a = 6$

$$3b = a + 6$$

$$b = \frac{1}{3}a + 2$$

c $2a + b + 5 = 0$

$$b = -2a - 5$$

d $5b - 6 + 15a = 4$

$$5b = -15a + 10$$

$$b = -3a + 2$$

e $0,2a + 0,1b = 10$

$$0,1b = -0,2a + 10$$

$$b = -2a + 100$$

f $4(b + 1) + 2a = 10$

$$4b + 4 + 2a = 10$$

$$4b = -2a + 6$$

$$b = -0,5a + 1,5$$

V3 a De coördinaten $(2, 4)$ invullen bij $4y + x = 18$ geeft $4 \times 4 + 2 = 18$ en dat klopt. De formule $4y + x = 18$ hoort bij lijn 1.

b $4y + x = 18$

$$2y - x = -3$$

$$4y = -x + 18$$

$$2y = x - 3$$

$$y = -0,25x + 4,5$$

$$y = 0,5x - 1,5$$

c $-0,25x + 4,5 = 0,5x - 1,5$

$$-0,75x = -6$$

$$x = \frac{-6}{-0,75} = 8$$

$$y = -0,25 \times 8 + 4,5 = 2,5 \text{ (of } y = 0,5 \times 8 - 1,5 = 2,5)$$

De coördinaten van het snijpunt zijn $(8; 2,5)$.

V4 a Er is wel een lineair verband.

b Er is geen een lineair verband, want het is een omgekeerd evenredig verband.

c Er is geen een lineair verband, want het is een kwadratisch verband.

d $3x + y = 12$

$$y = -3x + 12$$

Er is wel een lineair verband.

V5 a De groeifactor per jaar is 1,035.

Elk jaar stijgt het salaris van Sietske met $1,035 \times 100 - 100 = 3,5$ procent.

b De groeifactor per vijf jaar is $1,035^5 = 1,1876\dots$

In vijf stijgt het salaris van Sietske met $1,1876\dots \times 100 - 100 \approx 18,8$ procent.

c Jorrit verdient dan $1800 + 70 \times 2 = 1940$ euro.

Sietske verdient dan $1800 \times 1,035^2 = 1928,21$ euro.

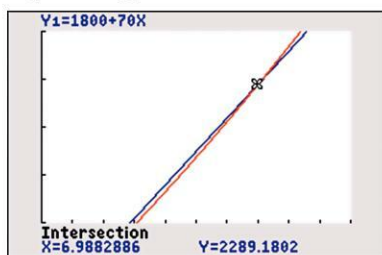
Jorrit heeft dan een hoger salaris.

d $1800 + 70t = 1800 \cdot 1,035^t$

Invoer: $y_1 = 1800 + 70x$ en $y_2 = 1800 \times 1,035^x$

Venster: x van 0 tot 10 en y van 2000 tot 2400

Optie: snijpunt



De coördinaten van het snijpunt zijn (6,98; 2289,18).

Na 7 jaar verdient Sietske meer, dat is vanaf 2027.

V6 a Invoer: $y_1 = x^3 - 8x^2 + 11x + 25$

Venster: x van -3 tot 9 en y van -10 tot 40

Optie: nulpunt

Bij $x \approx -1,16$ geldt $y = 0$.

b Optie: maximum

Het maximum is $y \approx 29,19$ en ligt bij $x \approx 0,81$.

c Optie: minimum

Het minimum is $y \approx 3,62$ en ligt bij $x \approx 4,52$.

V7 a De groeifactor per jaar is $(2,3 + 100) : 100 = 1,023$.

De beginhoeveelheid is 500 euro.

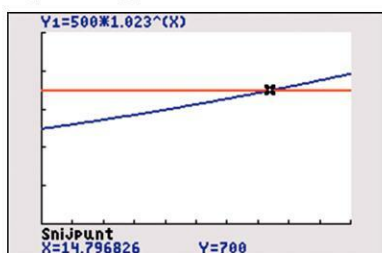
Daarbij hoort de exponentiële formule $B = 500 \cdot 1,023^t$.

b $700 = 500 \cdot 1,023^t$

Invoer: $y_1 = 500 \cdot 1,023^x$ en $y_2 = 700$

Venster: x van 0 tot 20 en y van 0 tot 1000

Optie: snijpunt



De coördinaten van het snijpunt zijn (14,8; 700).

Na 15 jaar, dus in 2025 staat er voor het eerst meer dan € 700,- op zijn spaarrekening.

c Als het bedrag is verdubbeld geldt er $1,023^t = 2$.

Invoer: $y_1 = 1,023^x$ en $y_2 = 2$

Venster: x van 0 tot 50 en y van 0 tot 4

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (30,48; 2).

Na 31 jaar is het bedrag op zijn spaarrekening verdubbeld.

11.1 Recht evenredig en omgekeerd evenredig

intro Als bijvoorbeeld het aantal strandstoelen twee keer zo groot wordt, dan wordt de oppervlakte van het strand per strandstoel twee keer zo klein. Hoe groter het aantal strandstoelen, hoe kleiner de oppervlakte van het strand per strandstoel.

Als bijvoorbeeld het aantal strandstoelen twee keer zo groot wordt, dan wordt de opbrengst ook twee keer zo groot. Hoe groter het aantal strandstoelen hoe groter de opbrengst.

1 a De opbrengst is dan $875 \times €5,- = €4.375,-$.

b

<i>aantal verkochte kalenders</i>	100	200	300	400
<i>opbrengst in euro's</i>	500	1000	1500	2000

c Ja, de opbrengst wordt twee keer zo groot als er twee keer zoveel kalenders worden verkocht.

d Het verband is $O = 5K$.

2 a

<i>p</i>	2	4	6	8	10
<i>q</i>	1	2	3	4	5

Bij grafiek 1 is p recht evenredig met q , want als p twee keer zo groot wordt, dan wordt q ook twee keer zo groot.

b Bij grafiek 3 is het verband tussen q en p ook recht evenredig, want de grafiek is een rechte lijn door de oorsprong.

c Bij grafiek 1 hoort een formule van de vorm $q = c \cdot p$.

Grafiek 1 gaat door het punt (4, 2).

$$2 = c \cdot 4$$

$$c = 0,5$$

Bij grafiek 1 hoort de formule $q = 0,5p$.

Bij grafiek 2 hoort een formule van de vorm $q = a \cdot p + b$.

Grafiek 2 gaat door de punten (0, 2) en (6, 8).

De richtingscoëfficiënt is $\frac{8-2}{6-0} = \frac{6}{6} = 1$ en het startgetal is 2.

Bij grafiek 2 hoort de formule $q = p + 2$.

Bij grafiek 3 hoort een formule van de vorm $q = c \cdot p$.

Grafiek 3 gaat door het punt (4, 8).

$$8 = c \cdot 4$$

$$c = 2$$

Bij grafiek 3 hoort de formule $q = 2p$.

Bij grafiek 4 hoort een formule van de vorm $q = a \cdot p + b$.

Grafiek 4 gaat door de punten (0, 8) en (4, 2).

De richtingscoëfficiënt is $\frac{2-8}{4-0} = \frac{-6}{4} = -1,5$ en het startgetal is 8.

Bij grafiek 4 hoort de formule $q = -1,5p + 8$.

3 a Bij 1000 kalenders is de winst $1000 \times €5,- = €3.000,- = €2.000,-$.

Bij 2000 kalenders is de winst $2000 \times €5,- = €3.000,- = €7.000,-$.

b Als het aantal verkochte kalenders verdubbeld, dan verdubbeld de winst niet.

- 4 a** Ieder lid krijgt dan $2000 : 40 = 50$ kalenders.
b Dan krijgt ieder lid $2000 : 80 = 25$ kalenders, dat is de helft van het aantal kalenders als in opdracht a.
c De formule is $N = \frac{2000}{L}$ (of $L = \frac{2000}{N}$)
- 5 a** Gemiddeld zitten er in een klas $1800 : 75 = 24$ leerlingen.
b Het verband is omgekeerd evenredig, want als je bijvoorbeeld twee keer zo veel klassen hebt, dan zal het gemiddeld aantal leerlingen per klas twee keer zo klein zijn.
c De formule is $g = \frac{1800}{k}$ (of $k = \frac{1800}{g}$).

6 a

x	1,2	1,5	3	6	54
y	90	72	36	18	2

A

n	1	2	6	30	80
k	120	60	20	4	1,5

B

p	3	6	8	10	12
q	27	54	72	90	108

C

- b** De formule bij tabel A is $x \cdot y = 108$, de formule bij tabel B is $n \cdot k = 120$ en de formule bij tabel C is $q = 9p$.
- 7 a** Er is sprake van een recht evenredig verband, want als je bijvoorbeeld twee keer zo veel kaas koopt, betaal je ook twee keer zoveel.
b Er is sprake van een omgekeerd evenredig verband, want als je bijvoorbeeld twee keer zo snel gaat, zal de tijd die je over de 20 km doet twee keer zo klein worden.
c Er is sprake van een recht evenredig verband, want als je bijvoorbeeld twee keer zo lang reist, leg je ook twee zoveel afstand af.
d Geen van beide, want dit is een exponentieel verband doordat er elk jaar 3% meer inwoners bij komt.
- 8 a** Het downloaden van 500 Mbit duurt 5 seconden en 100 Mbit duurt 1 seconde.
 Het duurt $5 - 1 = 4$ seconden langer.
- b** Bij de grafiek hoort een formule van de vorm $B = \frac{c}{T}$
 De grafiek gaat door het punt (2, 500).
 Dit invullen geeft $500 = \frac{c}{2}$
 $c = 500 \times 2 = 1000$
 Bij de grafiek voor $D = 1000$ hoort de formule $B = \frac{1000}{T}$

11 Allerlei formules

- 03** a Voor zeven werkuren moet je $7 \times €45,- = €315,-$ betalen.
 b Voor veertien werkuren moet je $14 \times €45,- = €630,-$ betalen.
 c Als je het aantal uren bijvoorbeeld keer twee doet, wordt het bedrag ook twee keer zo hoog.
 d Ze moet in totaal $5 \times €45,- + €250,- = €475,-$ betalen.
 e Dan moet ze in totaal $8 \times €45,- + €250,- = €610,-$ betalen.
 f
- | | | | | |
|------------------|-----|-----|-----|-----|
| tijd in uren | 1 | 5 | 8 | 10 |
| bedrag in euro's | 295 | 475 | 610 | 700 |
- g Als je het aantal uren bijvoorbeeld 10 keer zo groot maakt, dan wordt het bedrag niet 10 keer zo groot. Dat komt doordat het bedrag aan plantgoed niet verandert.

- 06** a Als $p = 3$ dan is $q = 20$.
 $p \cdot q = 3 \times 20 = 60$

b

p	3	4	5	6	24
q	20	15	12	10	2,5

- c** De formule is $q = \frac{60}{p}$

- d** tabel B

Bij tabel B hoort een recht evenredig verband.

k	3	40	6	30	80
n	4,5	60	9	45	120

Bij een recht evenredige verband hoort de formule van de vorm $n = c \cdot k$.

Als $k = 30$ dan is $n = 45$.

Dit invullen geeft $45 = c \cdot 30$ dus $c = 45 : 30 = 1,5$.

De formule bij tabel B is $n = 1,5k$.

tabel C

Bij tabel C hoort een omgekeerd evenredig verband.

r	2	8	5	10	40
d	10	2,5	4	2	0,5

Bij het omgekeerd evenredige verband hoort een formule van de vorm $d = \frac{c}{r}$

Als $r = 2$ dan is $d = 10$.

Dit invullen geeft $10 = \frac{c}{2}$ dus $c = 2 \times 10 = 20$.

De formule bij tabel C is $d = \frac{20}{r}$

U1 a 1

x	5	10
y	4	8

3

x	4	8	10
y	10	5	4

2

x	4	6
y	7	10

4

x	6	11
y	10	5

Bij tabel 1 past een recht evenredig verband, want als x twee keer zo groot wordt, wordt y ook twee keer zo groot.

Bij tabel 2 past geen recht evenredig of omgekeerd evenredig verband.

Bij tabel 3 past een omgekeerd evenredig verband, want als x twee keer zo groot wordt, wordt y twee keer zo klein.

Bij tabel 4 past geen recht evenredig of omgekeerd evenredig verband.

- b Bij het recht evenredige verband hoort de formule van de vorm $y = c \cdot x$.

$$c = 4 : 5 = 0,8$$

Bij grafiek 1 hoort de formule $y = 0,8x$.

Bij het omgekeerd evenredige verband hoort de formule van de vorm $y = \frac{c}{x}$

$$c = 4 \times 10 = 40$$

Bij grafiek 3 hoort de formule $y = \frac{40}{x}$

- c De richtingscoëfficiënt van grafiek 2 is $3 : 2 = 1,5$ en het startgetal is $7 - 4 \times 1,5 = 1$. De grafiek is een rechte lijn die niet door de oorsprong gaat.

Het verband is dus lineair.

De formule bij grafiek 2 is $y = 1,5x + 1$.

11.2 Grenswaarden

intro Een advies zou kunnen zijn om maandelijks 3000 euro te investeren omdat bij een nog hogere investering de maandelijkse winst relatief gezien nog weinig toeneemt.

- 9 a $V = 200$ invullen geeft $P = 0,17 + \frac{150}{200} = 0,92$.

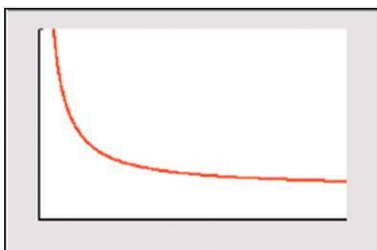
De prijs per m^2 is €0,92.

- b De totale kosten zijn dan gelijk aan $200 \times €0,92 = €184,-$.

- c $V = 3000$ invullen geeft $P = 0,17 + \frac{150}{3000} = 0,22$ euro per m^2 .

- d Invoer: $y = 0,17 + \frac{150}{x}$

Venster: x van 0 tot 4000 en y van 0 tot 1



De grafiek is afnemend dalend.

11 Allerlei formules

e

V	P
10	15,17
100	1,67
1000	0,32
10 000	0,185

Als V steeds groter wordt, nadert P tot de waarde 0,17.

f In de praktijk worden de kosten per m² nooit lager dan €0,17.

10 a

b	1	10	100	1000	10 000
A	2	4,348	4,926	4,993	4,999

De formule heeft een grenswaarde. Deze grenswaarde is 5.

b

p	1	10	100	1000	10 000
K	0,27	15	272,73	2970,30	29 970,03

De formule heeft geen grenswaarde.

c

t	1	10	100	1000	10 000
Q	4,24	5,697	6,999...	6,999...	6,999...

De formule heeft een grenswaarde. Deze grenswaarde is 7.

d

n	1	10	100	1000	10 000
W	7,692	3,925	0,000...	0,000...	0,000...

De formule heeft een grenswaarde. Deze grenswaarde is 0.

11 a $a = 0$ invullen geeft $N = 60 \cdot (1 - 0,64^0) = 0$.

Als het gebied 0 km² groot is, dan leven er geen diersoorten in dat gebied.

b

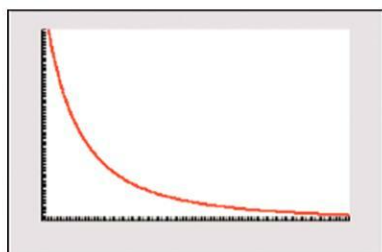
a	1	10	20	50	100
N	21,6	59,31	59,99	59,99...	59,99...

De formule heeft een grenswaarde. Deze grenswaarde is 60.

c Hoe groot het gebied ook wordt, het aantal diersoorten wordt nooit meer dan 60.

12 a Invoer: $y_1 = \frac{120}{(0,05x + 1)^2}$

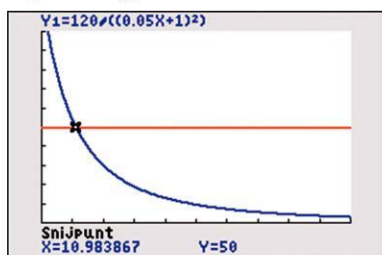
Venster: x van 0 tot 100 en y van 0 tot 100



De grafiek is afnemend dalend.

b Invoer: $y_2 = 50$

Optie: snijpunt



Na ongeveer 11 dagen is de inhoud voor het eerst minder dan 50 m^3 .

c

t	1	10	100	1000	10 000
I	108,84	53,33	3,33	0,05	0,00...

Als t heel groot wordt, dan nadert de inhoud van het waterreservoir naar de grenswaarde 0.

13 a

B	1	10	100	1000	10 000	100 000
GK	12 015	1215	135	27	16,20	15,12

GK neemt af als B steeds groter wordt.

b GK zal naar de grenswaarde 15 naderen.

c $17,5 = 15 + \frac{12000}{B}$

$$2,5 = \frac{12000}{B}$$

$$B = \frac{12000}{2,5} = 4800$$

Er moeten dan minstens 4800 bankjes geproduceerd worden.

d Invoer: $y_1 = 15 + \frac{12000}{x}$ en $y_2 = y_1(x) - y_1(x-1)$

Optie: tabel

X	Y1	Y2		
151	94,47	-0,53		
152	93,947	-0,523		
153	93,431	-0,516		
154	92,922	-0,509		
155	92,419	-0,503		
156	91,923	-0,496		
157	91,433	-0,49		
158	90,949	-0,484		
159	90,472	-0,478		
160	90	-0,472		
161	89,534	-0,466		
$Y_2 = -0,496277915633$				

Bij 156 en meer bankjes is de verandering in de gemiddelde kosten voor het eerst minder dan €0,50 als de productie met één bankje toeneemt.

14 a De groeifactor per maand is 1,09.

De formule is $N = 12 \cdot 1,09^t$.

b

t	1	10	100	1000	10 000
N	22,38	190,66	359,999...	359,999...	359,999...

Als t heel groot wordt, dan nadert N tot de grenswaarde 360.

De bank zal op den duur 36 000 rekeningen hebben.

010 a

x	1	10	100	500	1000	2000
y	6	0,6	0,06	0,012	0,006	0,003

b De waarde van y neemt af als x steeds groter wordt.

c De waarde van y nadert naar de grenswaarde 0 als x steeds groter wordt.

d

x	1	10	100	500	1000	2000
y	6	10,5	100,05	500,01	1000,005	2000,0025

e De waarde van y neemt toe als x steeds groter wordt.

f De waarde van y nadert niet naar een grenswaarde als x steeds groter wordt.

U2 a

Als $v = 1$ dan is $T = \frac{10}{4-1} + \frac{10}{4+1} \approx 5,33$.

Als $v = 2$ dan is $T = \frac{10}{4-2} + \frac{10}{4+2} \approx 6,67$.

Als $v = 3$ dan is $T = \frac{10}{4-3} + \frac{10}{4+3} \approx 11,43$.

b Als de stroomsnelheid meer dan 4 km per uur is, dan is bij het tegen de stroom in varen de snelheid van het water groter dan hun eigen snelheid. Ze zullen dan naar achter gaan en dus nooit de 10 km overbruggen.

c

v	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	3,99
T	21,33	26,32	34,63	51,28	101,27	1001,25

Als de waarden van v heel dicht bij 4 liggen, dan wordt de uitkomst van T heel groot. Ze hebben dan bij het tegen de stroom in varen bijna een snelheid van 0 km per uur ten opzichte van het vaste land en doen dan heel lang over de 10 km stroomopwaarts varen.

11.3 Redeneren met formules

intro Als bijvoorbeeld de kaveloppervlakte 300 m^2 is, zijn er $A = \frac{40\,000}{100 + 300} = 100$

kavels en als de kaveloppervlakte 150 m^2 is, zijn er $A = \frac{40\,000}{100 + 150} = 160$

kavels, dus je kunt niet twee keer zoveel kavels maken.

15 a $t = 0$ invullen geeft $T = 20 - 16 \cdot 0,75^0 = 4$.

De temperatuur van de melk is dan 4°C .

b

t	$0,75^t$	$16 \cdot 0,75^t$	$20 - 16 \cdot 0,75^t$
0	1	16	4
5	0,237	3,797	16,203
10	0,056	0,901	19,099

c Als t heel groot wordt, dan nadert $0,75^t$ tot nul.

Ook $16 \cdot 0,75^t$ zal dan tot 0 naderen, want $16 \times 0 = 0$.

d $20 - 16 \cdot 0,75^t$ wordt dan $20 - 0 = 20$.

De temperatuur van de melk nadert op den duur tot 20°C .

- 16 a** Voor 3 uur en 20 minuten geldt $a = 3 \times 60 + 20 = 200$.
 Dit invullen in de formule voor G geeft $G = 0,015 + \frac{5}{200} = 0,04$.
 De gemiddelde prijs per belminuut is dan €0,04.
- b** Als je 5 deelt door een steeds groter getal, dan zal de uitkomst steeds dichterbij nul naderen.
- c** De formule heeft een grenswaarde, want $G = 0,015 + \frac{5}{a}$ wordt dan
 $G = 0,015 + 0 = 0,015$.
 De grenswaarde is 0,015.
- d** Deze grenswaarde betekent dat de gemiddelde prijs per belminuut nooit lager dan €0,015 wordt.

17 a Bij $t = 0$ is $P = \frac{2}{7 + 2 \times 0} - 11$ ofwel $P = \frac{2}{7} - 11 = -10\frac{5}{7}$.

Als t heel groot wordt, dan wordt $2 \times t$ ook heel groot.
 Hierdoor wordt $7 + 2t$ ook heel groot.

De uitkomst van $\frac{2}{7 + 2t}$ wordt dan ongeveer 0.

De grenswaarde is daarom $0 - 11 = -11$.

De waarde van P neemt af als t heel groot wordt.

b Bij $t = 0$ is $P = 4 - 0,85^0 = 3$.

Als t heel groot wordt, dan wordt $0,85^t$ ongeveer 0.

De grenswaarde is daarom $4 - 0 = 4$.

De waarde van P neemt toe als t heel groot wordt.

c Bij $t = 0$ is $P = 3 + \frac{2}{1,2^0} = 5$.

Als t heel groot wordt, dan wordt $1,2^t$ ook heel groot.

De uitkomst van $\frac{2}{1,2^t}$ wordt dan ongeveer 0.

De grenswaarde is daarom $3 + 0 = 3$.

De waarde van P neemt af als t heel groot wordt.

d Bij $t = 0$ is $P = 7 + 1,45^0 = 8$.

Als t heel groot wordt, dan wordt $1,45^t$ ook heel groot.

$7 + 1,45^t$ zal dan ook heel groot worden.

Er is daarom geen sprake van een grenswaarde.

De waarde van P neemt toe als t heel groot wordt.

18 a

t	1	10	20	50	100
K	5,941	7,863	7,996	7,99...	7,99...

Bart heeft geen gelijk, de waarde van K nadert naar 8.

b Als t heel groot wordt, dan wordt $0,7^t$ ongeveer 0.

De uitkomst van $1 + 0,7^t$ wordt dan ongeveer $1 + 0 = 1$.

De uitkomst van $\frac{5}{1 + 0,7^t}$ wordt dan ongeveer $\frac{5}{1} = 5$.

De grenswaarde is daarom $3 + 5 = 8$.

- 19 a** Bij de start van het project is $A = 5(2,2 + 5,8 \times 0,72^0) = 40$.
b Als t heel groot wordt, dan wordt $0,72^t$ ongeveer 0.
 $5,8 \times 0,72^t$ wordt dan ongeveer 0.
 $2,2 + 5,8 \times 0,72^t$ wordt dan ongeveer 2,2.
 De grenswaarde is dan $A = 5(2,2 + 5,8 \times 0) = 11$.
 De waarde van A neemt af als t steeds groter wordt.
c De waarde van A neemt af maar komt niet onder de grenswaarde 11.
 Het aantal telefonische klachten zal nooit minder dan 11 worden en dus wordt de doelstelling niet gehaald.

- 20 a** De groeifactor per 43 maanden is $244 : 5,5 = 44,36\dots$
 De groeifactor per maand is $44,36\dots^{\frac{1}{43}} = 1,0922\dots$
 Dat is per maand een stijging van $1,0922\dots \times 100 - 100 \approx 9,2$ procent.
b De beginhoeveelheid is 5,5 miljoen en de groeifactor is 1,092.
 De formule is $A = 5,5 \cdot 1,092^t$.
c Bij $t = 0$ is $A = \frac{4500}{5 + 310 \times 0,926^0} = \frac{4500}{315} \approx 14,3$.
 Als t steeds groter wordt, dan wordt $0,926^t$ bijna 0.
 De uitkomst van $310 \times 0,926^t$ wordt dan ook ongeveer 0.
 De uitkomst van $5 + 310 \times 0,926^t$ wordt dan ongeveer 5.
 De grenswaarde is daarom $\frac{4500}{5} = 900$.
 De waarde van A neemt toe als t heel groot wordt, het aantal actieve gebruikers blijft stijgen.

017 a

p	p^2	$p^2 + 1$	$\frac{1}{p^2 + 1}$
0	0	1	1
10	100	101	0,009 900 9...
100	10 000	10 001	0,000 099 9...
1000	1 000 000	1 000 001	0,000 000 9...

- b** Als p steeds groter wordt, dan wordt de waarde van p^2 heel groot.
c Als p steeds groter wordt, dan wordt de waarde van $p^2 + 1$ ook heel groot.
d Als p steeds groter wordt, dan nadert de waarde van $\frac{1}{p^2 + 1}$ naar 0.
e De waarde van A neemt af als p steeds groter wordt, want de waarde van $\frac{1}{p^2 + 1}$ neemt dan af.
f Deze formule heeft de grenswaarde 12.
g Als x steeds groter wordt, nadert $0,8^x$ naar 0 want $0,8 < 1$.
 $6 \times 0,8^x$ nadert dan ook naar 0.
 De waarde van y zal dan naderen naar $15 - 0 = 15$.
h Bij $x = 0$ is $15 - 6 \times 0,8^0 = 9$.
 De waarde van y neemt toe als x steeds groter wordt.
i Deze formule heeft als grenswaarde 15.

j Bij $t = 0$ is $N = \frac{24}{3 + 0,85^0} = 6$.

Als t heel groot wordt, dan nadert $0,85^t$ naar nul.

De noemer $3 + 0,85^t$ nadert dan naar 3.

De uitkomst van $\frac{24}{3 + 0,85^0}$ wordt dan ongeveer $\frac{24}{3} = 8$.

De grenswaarde is daarom 8.

De waarde van N neemt toe als t heel groot wordt.

k Bij $t = 0$ is $N = 14 + 2 \times 1,85^0 = 16$.

Als t heel groot wordt, dan wordt $1,85^t$ ook heel groot.

$2 \cdot 1,85^t$ zal dan ook heel groot worden.

$14 + 2 \cdot 1,85^t$ wordt dan ook heel groot.

Er is geen grenswaarde.

De waarde van N neemt toe als t heel groot wordt.

l Bij $t = 0$ is $N = 38 - \frac{80}{4 + 6 \times 0,5^0} = 30$.

Als t heel groot wordt, dan wordt $0,5^t$ ongeveer 0.

$6 \cdot 0,5^t$ wordt dan ook bijna 0.

De noemer $4 + 6 \cdot 0,5^t$ wordt dan bijna 4.

$\frac{80}{4 + 6 \cdot 0,5^t}$ nadert dan naar $\frac{80}{4} = 20$.

De grenswaarde is daarom $38 - 20 = 18$.

De waarde van N neemt af als t heel groot wordt.

m Bij $t = 0$ is $N = 17 + 7 \times 0,45^0 = 24$.

Als t heel groot wordt, dan wordt $0,45^t$ ongeveer 0.

$7 \cdot 0,45^t$ wordt dan ook ongeveer 0.

De grenswaarde is daarom $17 + 0 = 17$.

De waarde van N neemt af als t heel groot wordt.

U3 a $T = \frac{200 \times 0}{0 + 1} + 20 = 20$

Bij het aanzetten heeft de oven een temperatuur van 20°C .

b $\frac{200t}{t + 1} + 20 = 180$

$$\frac{200t}{t + 1} = 160$$

$$200t = 160t + 160$$

$$40t = 160$$

$$t = 4$$

Na 4 minuten is de temperatuur in de oven 180°C .

c Als t heel groot wordt, dan worden zowel $200t$ als $t + 1$ heel groot.

$\frac{200t}{t + 1}$ zal ongeveer 200 worden, doordat de $+ 1$ in de noemer nauwelijks

meer invloed heeft als t heel groot wordt. De teller is dan ongeveer 200 keer zo groot als de noemer.

De grenswaarde is dan $200 + 20 = 220^\circ\text{C}$.

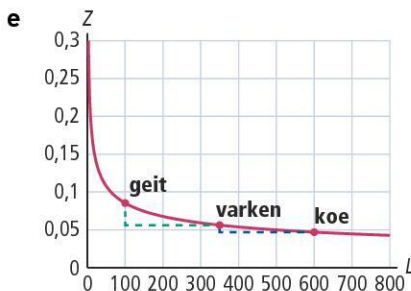
11.4 Machtsformules

intro De inhoud is dan niet vier keer zo groot, maar $4^3 = 64$ keer zo groot.
De oppervlakte is dan $4^2 = 16$ keer zo groot als die van de aarde.

- 21 a** De grafiek van $y = 2 \cdot x^{1,5}$ is toenemend stijgend.
De grafiek van $y = 2 \cdot x^{0,5}$ is afnemend stijgend.
De grafiek van $y = 2 \cdot x^{-0,5}$ is afnemend dalend.
- b** De coördinaten van dat punt zijn (1, 2).
- c** De grafiek bij de formule $y = 2 \cdot x^{2,3}$ gaat ook door dat punt, want $y = 2 \cdot 1^{2,3} = 2$.
- d** Het maakt niet wat de exponent van de macht is, de uitkomst van $1^{\dots}$ is altijd 1.
In al deze formules wordt de macht $x^{\dots}$ vervolgens met 2 vermenigvuldigd.
Daarom zal bij al deze formules bij $x = 1$ de uitkomst $y = 2$ zijn.

- 22** Bij grafiek A komt op de verticale as 1,8 te staan, want $y = 1,8 \times 1^{1,3} = 1,8$.
Bij grafiek B komt op de verticale as 3 te staan, want $y = 3 \times 1^{0,4} = 3$.
Bij grafiek C komt op de verticale as 2 te staan, want $y = 2 \times 1^{-1,2} = 2$.

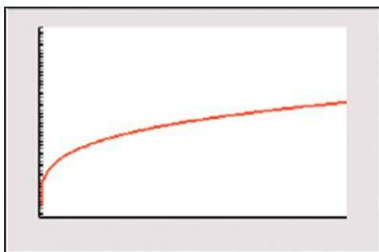
- 23 a** $L = 2400$ invullen geeft $Z = 0,4 \times 2400^{-\frac{1}{3}} \approx 0,030$.
- b** Voor één kilometer verbruikt de neushoorn $0,4 \times 2400^{-\frac{1}{3}} = 0,029\dots$ liter zuurstof per kg.
Dat is in totaal $2400 \times 0,029\dots = 71,7\dots$ liter zuurstof voor één km.
Voor vijf km verbruikt hij dan in totaal $5 \times 71,7\dots \approx 359$ liter zuurstof.
- c** Voor een geit van 100 kg is $Z = 0,4 \times 100^{-\frac{1}{3}} \approx 0,086$.
Voor een varken van 350 kg is $Z = 0,4 \times 350^{-\frac{1}{3}} \approx 0,057$.
Voor een koe van 600 kg is $Z = 0,4 \times 600^{-\frac{1}{3}} \approx 0,047$.
- d** Het verschil tussen de waarde van Z van de geit en het varken is $0,086 - 0,057 = 0,029$.
Het verschil tussen de waarde van Z van het varken en de koe is $0,057 - 0,047 = 0,010$.
Het verschil in de waarde van Z tussen de geit en het varken is groter dan de waarde van Z tussen het varken en de koe.



- f** Zie opdracht e.
Tussen het lichaamsgewicht van de dieren zit steeds 250 kg verschil.
Doordat de grafiek afnemend dalend is, zal de afname van Z tussen de geit en het varken groter zijn, doordat de grafiek op dit interval sterker daalt.

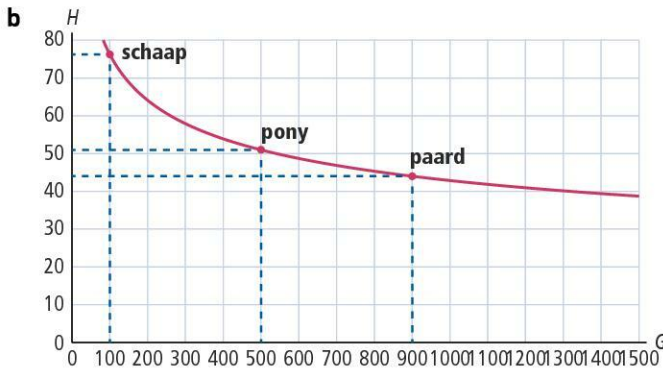
- 24 a** $36 \text{ cm} = 0,36 \text{ m}$
De hoogte van de grove den is $44 \times 0,36^{0,65} \approx 22,6$ meter.
- b** $15 = 44 \cdot d^{0,65}$
Invoer: $y_1 = 44 \times x^{0,65}$ en $y_2 = 15$
Venster: x van 0 tot 1 en y van 0 tot 20
Optie: snijpunt
De diameter is 0,190... meter ofwel 19 cm.
- c** De hoogte is 18 meter, daarom is $h = 18$.
 $20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$ en daarom is $d = 0,2$.
- d** Invoer: $y_1 = x \times 0,2^{0,65}$ en $y_2 = 18$
Venster: x van 0 tot 100 en y van 0 tot 20
Optie: snijpunt
De waarde van c voor deze boomsoort is ongeveer 51.
- 25 a** Bij $Q = 500$ hoort $TK = 1040$ en bij $Q = 1000$ hoort $TK = 1580$.
Als de waarde van Q wordt verdubbeld, dan wordt de waarde van TK $1580 : 1040 \approx 1,52$ keer zo groot en dus minder dan twee keer zo groot.
- b** Invullen van $Q = 200$ en $TK = 600$ in de formule geeft de vergelijking $600 = 25 \cdot 200^n$.
- c** Invoer: $y_1 = 25 \times 200^x$ en $y_2 = 600$
Venster: x van 0 tot 5 en y van 0 tot 1000
Optie: snijpunt
De waarde van n is ongeveer 0,6.
De formule is $TK = 25 \cdot Q^{0,6}$.

- 26 a** Invoer: $y_1 = 3,08 \times x^{0,25}$
Venster: x van 0 tot 20000 en y van 0 tot 60



- De grafiek is afnemend stijgend, dus de uitspraak: hoe groter het lichaamsgewicht hoe groter de circulatietijd, klopt.
- b** Het verband is niet recht evenredig, want de grafiek is niet een lineaire grafiek.
- c** Bij een muis is $G = 30$ en $T = 3,08 \times 30^{0,25} \approx 7$.
Bij een konijn is $G = 3000$ en $T = 3,08 \times 3000^{0,25} \approx 23$.
Bij een hond is $G = 30000$ en $T = 3,08 \times 30000^{0,25} \approx 41$.
Bij een eland is $G = 300000$ en $T = 3,08 \times 300000^{0,25} \approx 72$.
- d** Als het gewicht tien keer zo groot wordt, dan wordt de circulatietijd minder dan tien keer zo groot doordat de grafiek afnemend stijgend is.
Dat blijkt ook als je de antwoorden van opdracht c gebruikt, namelijk $23 : 7 \approx 3,3$ en $72 : 41 \approx 1,8$.
- e** De grafiek is afnemend stijgend, dus bij het 20 kg gewichtsverschil bij de zwaardere dieren zal het verschil van T daardoor minder zijn.

023 a Dat zijn $241 \times 4000^{-0,25} \approx 30$ hartslagen per minuut.



c De grafiek is afnemend dalend.

d Doordat de grafiek afnemend dalend is, zakt over het zelfde interval van 400 kg de grafiek tussen het schaap en de pony meer dan op het interval tussen de pony en het paard.

U4 a Als de slinger één meter lang is, dan is $l = 1$.

$1^{0,5} = 1$ en dan wordt de uitkomst van de formule $T = 2 \times 1 = 2$.

Dat betekent dat een slingerbeweging dan 2 seconden duurt.

b $1,9 = 2 \cdot l^{0,5}$

Invoer: $y_1 = 2 \times x^{0,5}$ en $y_2 = 1,9$

Venster: x van 0 tot 2 en y van 0 tot 2

Optie: snijpunt

De waarde van l is 0,9025.

Je moet de slinger dan $1 - 0,9025 = 0,0975$ meter inkorten.

Dat is 9,75 cm.

c Er geldt dan $2 = l^{0,5}$.

Invoer: $y_1 = x^{0,5}$ en $y_2 = 2$

Venster: x van 0 tot 5 en y van 0 tot 5

Optie: snijpunt

Als je de slinger vier keer zo lang maakt, wordt de slingertijd verdubbeld.

11.5 Formules met meer variabelen

intro Als je de variabele L een vaste waarde geeft, dan krijg je een recht evenredig

verband. Neem bijvoorbeeld $l = 1,8$ dan is $BMI = \frac{G}{1,8^2}$ ofwel $BMI = \frac{G}{3,24}$

$$BMI = \frac{1}{3,24} \cdot G$$

$$BMI = 0,308... \cdot G$$

Je krijgt dan een formule van de vorm $BMI = c \cdot G$ en dus een recht evenredig verband.

- 27 a** Invullen van de gegevens levert op:

$$TK = \frac{12 \times 120 + 2 \times 280 + 12 \times 42 + 508 + 0,12 \times k}{12}$$

$$TK = \frac{1440 + 560 + 504 + 508 + 0,12k}{12}$$

$$TK = \frac{3012 + 0,12k}{12}$$

$$TK = 251 + 0,01k$$

- b** De totale kosten per maand zijn dan $TK = 251 + 0,01 \times 18\,000 = 431$ euro.

- c** $375 = 251 + 0,01k$

$$124 = 0,01k$$

$$k = 124 : 0,01 = 12\,400$$

Hij kan dan maximaal 12 400 km per jaar rijden.

- 28 a** $24\,500 = 170 \times 95 + 140J$

$$24\,500 = 16\,150 + 140J$$

$$140J = 8350$$

$$J = 8350 : 140 = 59,6\dots$$

Er moeten minstens 60 juniorleden zijn.

- b** Noem de contributie van de seniorleden C_S .

Invullen van de gegevens levert op $24\,500 = C_S \times 95 + 150 \times 45$.

$$24\,500 = C_S \times 95 + 6750$$

$$C_S \times 95 = 17\,750$$

$$C_S = 17\,750 : 95 = 186,842\dots$$

De contributie voor de seniorleden moet dan minstens € 187,- worden.

- 29 a** De formule is $B = 520 + 12 \cdot C \cdot L$.

- b** Er komt jaarlijks in totaal $520 + 12 \times 30 \times 14 = € 5.560,-$ binnen.

Dat is minder dan de € 7.000,- die nodig is.

De penningmeester heeft niet genoeg inkomsten.

c

L	10	12	15	18	20
C	54	45	36	30	27

- d** Het product van C en L moet steeds 540 zijn.

Het verband tussen C en L is daarom omgekeerd evenredig.

- e** $7000 = 520 + 12C \cdot L$

$$12 \cdot C \cdot L = 6480$$

$$C \cdot L = 540$$

$$C = \frac{540}{L}$$

- f** $7792 = 520 + 12C \cdot L$

$$7272 = 12 \cdot C \cdot L$$

$$606 = C \cdot L$$

$$C = \frac{606}{L}$$

- g** $C = \frac{606}{14} = 43,285\dots$

De contributie moet dan minimaal € 43,29 per maand worden.

30 a $Q = \frac{2p+9}{1+1}$

$$Q = \frac{2p+9}{2}$$

$$Q = \frac{2p}{2} + \frac{9}{2}$$

$$Q = p + 4,5$$

b $Q = \frac{2p+9}{3+1}$

$$Q = \frac{2p+9}{4}$$

$$Q = \frac{2p}{4} + \frac{9}{4}$$

$$Q = \frac{1}{2}p + 2\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2}p + 2\frac{1}{4} = Q$$

$$\frac{1}{2}p = Q - 2\frac{1}{4}$$

$$p = 2Q - 4\frac{1}{2}$$

31 a $R = \frac{25 \times 5 + 15}{A}$

$$R = \frac{140}{A}$$

b Er is een omgekeerd evenredig verband tussen R en A .

c $R = \frac{25t+15}{10}$

$$R = \frac{25t}{10} + \frac{15}{10}$$

$$R = 2,5t + 1,5$$

De waarde van p is 2,5 en de waarde van q is 1,5.

d Zie opdracht c.

$$R = 2,5t + 1,5$$

$$2,5t + 1,5 = R$$

$$2,5t = R - 1,5$$

$$t = 0,4R - 0,6$$

32 a 1,2 dm = 12 cm, dus $D = 12$ substitueren.

$$V = 0,26 \cdot 12^2 \cdot h$$

$$V = 37,44h$$

De formule is $V = 37,44h$.

b $V = 0,26 \cdot 8^2 \cdot h$

$$V = 16,64h$$

$$16,64h = V$$

$$h = \frac{1}{16,64} \cdot V$$

$$h \approx 0,06 \cdot V$$

c Omdat in de formule D in het kwadraat staat, wordt het volume dan $2^2 = 4$ keer zo groot.

- 030 a** In stap 1 heeft voor t het getal 2 ingevuld.
b In stap 2 heeft hij $4 \times 2 + 2$ berekend.
 In stap 3 heeft hij de breuk gesplitst in twee breuken.
 In stap 4 heeft hij $2 : 10$ en $7 : 10$ berekend.
c In de formule bij stap 4 wordt K uitgedrukt in q .
d In stap 5 heeft hij de linker- en rechterkant verwisseld.
 In stap 6 heeft hij links en rechts er 0,7 bij opgeteld.
 In stap 7 heeft hij links en recht gedeeld door 0,2 (of vermenigvuldigd met 5).

e $K = \frac{2q - 7}{4 \times 0,5 + 2}$

$$K = \frac{2q - 7}{2 + 2}$$

$$K = \frac{2q - 7}{4}$$

$$K = \frac{2q}{4} - \frac{7}{4}$$

$$K = 0,5q - 1,75$$

- f** Zie opdracht e.

$$K = 0,5q - 1,75$$

$$0,5q - 1,75 = K$$

$$0,5q = K + 1,75$$

$$q = 2K + 3,5$$

- U5 a** In de tabel zie je dat bij $t = 0$ de uitkomst $T = 18$ hoort. Dat kan niet met de formule $T = \frac{a}{t} + B$, want dan krijg je bij $t = 0$ gedeeld door nul en dus geen uitkomst.
c Nu krijg je bij $t = 0$ niet meer gedeeld door nul maar gedeeld door 5 en dus is er dan bij $t = 0$ wel een uitkomst.
d De temperatuur in de koelkast is 6°C , de temperatuur van de fles frisdrank zal als t heel groot wordt deze temperatuur naderen.
 Als t heel groot wordt, dan wordt $t + 5$ heel groot.

En daardoor wordt $\frac{a}{t + 5}$ ongeveer 0.

De grenswaarde is dan $0 + B = B$.

Hieruit volgt dan dat $B = 6$.

- e** In de tabel zie je bijvoorbeeld dat bij $t = 0$ de uitkomst $T = 18$ hoort.

$$18 = \frac{a}{0 + 5} + 6$$

$$18 = \frac{a}{5} + 6$$

$$12 = \frac{a}{5}$$

$$a = 12 \times 5 = 60$$

11.6 Gemengde opdrachten

33 Bij $x = 0$ is $y = \frac{24}{4 + 2 \times 0,45^0} = 4$

Als x heel groot wordt, dan wordt $0,45^x$ ongeveer 0.

$2 \cdot 0,45^x$ wordt dan ook ongeveer 0.

$4 + 2 \cdot 0,45^x$ wordt dan ongeveer 4.

y zal naderen tot de grenswaarde $y = \frac{24}{4} = 6$.

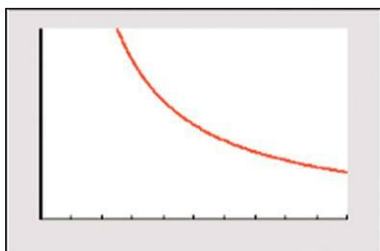
De waarde van y neemt toe als x steeds groter wordt.

34 a Zijn gemiddelde snelheid is $500 : 8 = 62,5$ km per uur.

b Er is een omgekeerd evenredig verband tussen v en t .

c Invoer: $y_1 = \frac{500}{x}$

Venster: x van 0 tot 10 en y van 0 tot 200



Bij de deelnemers die als eerste binnenkomen, horen lage waarden voor t .

Bij lage waarden voor t ligt de grafiek hoog en dat betekent dat de gemiddelde snelheid dan hoog is.

d Zijn gemiddelde snelheid zal erg laag zijn. De grafiek zal dan al bijna tegen de horizontale as liggen.

35 a $s = 0,35$ en $h = 0,21$, want $35 \text{ cm} = 0,35 \text{ m}$ en $21 \text{ cm} = 0,21 \text{ m}$.

Deze tweewaarden substitueren in de formule geeft een snelheid van $2,81 \times 0,35^{1,67} \times 0,21^{-1,17} \approx 3,0$ km per uur.

b $h = 0,40$, want $40 \text{ cm} = 0,40 \text{ m}$ en $v = 15$ substitueren in de formule geeft $15 = 2,81 \cdot s^{1,67} \cdot 0,40^{-1,17}$

Invoer: $y_1 = 2,81 \times x^{1,67} \times 0,40^{-1,17}$ en $y_2 = 15$

Venster: x van 0 tot 2 en y van 0 tot 20

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn $(1,434...; 15)$.

De paslengte van de hond was ongeveer 143 cm.

Onderzoeksoopdrachten

- 36** Eerst moet er berekend worden hoe groot een gebied is als er 50 verschillende vogelsoorten voorkomen.
 $50 = 40 \cdot A^{\frac{1}{6}}$
 Invoer: $y_1 = 40 \times x^{\frac{1}{6}}$ en $y_2 = 50$
 Venster: x van 0 tot 300 en y van 0 tot 200
 Optie: snijpunt
 De coördinaten van het snijpunt zijn (3,814...; 50).
 Voor 50 verschillende vogelsoorten moet het gebied ongeveer 3,81 vierkante mijl zijn.
 Bereken nu hoe groot een gebied is als er 100 verschillende vogelsoorten voorkomen.
 $100 = 40 \cdot A^{\frac{1}{6}}$
 Invoer: $y_1 = 40 \times x^{\frac{1}{6}}$ en $y_2 = 100$
 Venster: x van 0 tot 300 en y van 0 tot 200
 Optie: snijpunt
 De coördinaten van het snijpunt zijn (244,140...; 100).
 Voor 100 verschillende vogelsoorten moet het gebied ongeveer 244,14 vierkante mijl zijn.
 Het gebied moet ongeveer $244,140... : 3,814... = 64$ keer zo groot worden.
- 37** Bij een maximale ontslagvergoeding geldt $V = 54m$.
 Dit substitueren in de formule geeft
 $54m = 6 \cdot m + 2,4 \cdot m \cdot d$
 $54m = m(6 + 2,4d)$
 $54 = 6 + 2,4d$
 $48 = 2,4d$
 $d = 48 : 2,4 = 20$
 Na 20 dienstjaren krijgt Henk voor het eerst zijn maximale ontslagvergoeding.

Samenvatting

- S1 a** Bij tabel A hoort een omgekeerd evenredig verband.
 Bij tabel B hoort geen omgekeerd evenredig verband.

p	2	4	5	10
q	16	8	6,4	3,2

A

a	1	2	5	6
b	20	40	100	120

B

- b** Bij het recht omgekeerd evenredige verband hoort een formule van de vorm $q = \frac{c}{p}$. In deze formule $p = 2$ en $q = 16$ invullen geeft $16 = \frac{c}{2}$ dus $c = 2 \times 16 = 32$. Bij tabel A hoort de formule $q = \frac{32}{p}$.
 Bij een recht evenredige verband hoort de formule van de vorm $b = c \cdot a$.
 In deze formule $a = 1$ en $b = 20$ invullen geeft $20 = c \cdot 1$ dus $c = 20$.
 Bij tabel B hoort de formule $b = 20a$.

S2 a

x	0	2	4	6	8
y	0	1	2	3	4

Bij de tabel hoort een formule van de vorm $y = c \cdot x$.

Grafiek 1 gaat door het punt (2, 1).

$$1 = c \cdot 2 \text{ dus } c = 0,5.$$

Bij grafiek 1 hoort de formule $y = 0,5x$.

b Ook bij grafiek 3 hoort een recht evenredig verband, want de grafiek is een rechte lijn door de oorsprong.

c Bij grafiek 1 hoort de formule $y = 0,5x$.

Bij grafiek 2 hoort een formule van de vorm $y = a \cdot x + b$.

Grafiek 2 gaat door de punten (0, 2) en (4, 4), dus de richtingscoëfficiënt is

$$\frac{4-2}{4-0} = \frac{2}{4} = 0,5. \text{ Het startgetal is 2.}$$

Bij grafiek 2 hoort de formule $y = 0,5x + 2$.

S3 a

a	1	10	100	1000	10 000
T	7,5	3,82	3,09	3,01	3,00

T nadert tot de grenswaarde 3.

b

a	1	10	100	1000
T	21,04	21,418	27,819	83 854

T nadert niet tot een grenswaarde.

S4 a

Bij $a = 0$ is $B = 4 \times 0,5^0 + 1 = 5$.

Als a heel groot wordt, dan wordt $0,5^a$ ongeveer 0.

$4 \cdot 0,5^a$ wordt dan ook ongeveer 0.

De grenswaarde is daarom $0 + 1 = 1$.

De waarde van B neemt af als a heel groot wordt.

b Bij $a = 0$ is $B = \frac{4}{0^2 - 4} + 5 = 4$.

Als a heel groot wordt, dan wordt a^2 ook heel groot.

$a^2 - 4$ wordt dan ook heel groot.

De uitkomst van $\frac{4}{a^2 - 4}$ wordt dan ongeveer 0.

De grenswaarde is daarom $0 + 5 = 5$.

De waarde van B neemt toe als a heel groot wordt.

S5 a

De levensverwachting is $11,75 \times 4000^{0,2} \approx 61,7$ jaar.

b Stel een mens weegt ongeveer 80 kg, dan is de levensverwachting voor de mens volgens deze formule $11,75 \times 80^{0,2} \approx 28$ jaar en dat klopt niet.

c $40 = 11,75 \cdot G^{0,2}$

Invoer: $y_1 = 11,75 \times x^{0,2}$ en $y_2 = 40$

Venster: x van 0 tot 1000 en y van 0 tot 100

Optie: snijpunt

Het gewicht van dat zoogdier zal ongeveer 457 kg zijn.

S6 a $h = 16$ substitueren in de formule geeft:

$$P = 0,4 \cdot v^3 \cdot 16^{0,75}$$

$$P = 3,2v^3$$

De formule is $P = 3,2v^3$.

b Het vermogen is dan $P = 3,2 \times 6^3 = 691,2$ watt.

c $800 = 3,2v^3$

Invoer: $y_1 = 3,2 \times x^3$ en $y_2 = 800$

Venster: x van 0 tot 10 en y van 0 tot 1000

Optie: snijpunt

Bij een windsnelheid van ongeveer 6,3 meter per seconde is het vermogen 800 watt.

S7 a $1,2 \text{ dm} = 12 \text{ cm}$, dus $h = 12$.

$1,5 \text{ liter} = 1,5 \text{ dm}^3 = 1500 \text{ cm}^3$, dus $V = 1500$.

$$1500 = 3,14 \cdot r^2 \cdot 12$$

$$125 = 3,14 \cdot r^2$$

$$r^2 = 39,80\dots$$

$$r = \sqrt{39,80\dots} = 6,309\dots$$

De straal van dit blik is ongeveer 6,3 cm.

b $r = 4$ substitueren in de formule geeft:

$$V = 3,14 \cdot 4^2 \cdot h$$

$$V = 50,24 \cdot h$$

De formule wordt $V = 50,24 \cdot h$.

c Zie opdracht b.

$$V = 50,24 \cdot h$$

$$50,24 \cdot h = V$$

$$h = \frac{1}{50,24} \cdot V$$

$$h \approx 0,02V$$

Test jezelf

T1 a In 1 minuut zitten 60 seconden.

Tussen elke hartslag zit dan $60 : 60 = 1$ seconde, dus de periode is dan één seconde.

b Eén periode is dan $60 : 120 = 0,5$ seconden.

c

a	50	60	80	100	120
p	1,2	1	0,75	0,6	0,5

d Het verband tussen a en p is omgekeerd evenredig, want $50 \times 1,2 = 60$, $60 \times 1 = 60$, $80 \times 0,75 = 60$, $100 \times 0,6 = 60$ en $120 \times 0,5 = 60$.

e Tussen L en M is er een lineair verband.

f Rob heeft een maximale hartslag van $220 - 70 = 150$ slagen per minuut.

De periode is dan $\frac{60}{150} = 0,4$ seconden lang.

- T2 a** $t = 0$ invullen geeft $385 - 281 \times 0,87^0 = 104$.
Men heeft 104 vissen uitgezet.
- b** Het jaar 2020 begint bij $t = 3$ en 2021 begint bij $t = 4$.
Op 1 januari 2020 waren er $385 - 281 \times 0,87^3 = 200$ vissen.
Op 1 januari 2021 waren er $385 - 281 \times 0,87^4 = 224$ vissen.
Het aantal vissen neemt in 2020 met $224 - 200 = 24$ toe.
- c** $385 - 281 \cdot 0,87^t = 300$
Invoer: $y_1 = 385 - 281 \times 0,87^x$ en $y_2 = 300$
Venster: x van 0 tot 20 en y van 0 tot 500
Optie: snijpunt
Na ongeveer 8,6 jaar zijn er meer dan 300 vissen.
Dat is in het jaar 2025.
- d** Als t heel groot wordt, dan wordt $0,87^t$ ongeveer 0.
Dan wordt $281 \times 0,87^t$ ook ongeveer 0.
Op den duur zullen er $385 - 0 = 385$ vissen zijn.
- T3 a** Bij $x = 0$ is $K = \frac{20}{2 \times 0 + 1} - 3,2 = 16,8$.
Als x heel groot wordt, dan wordt $2x$ ook heel groot.
 $2x + 1$ zal dan ook heel groot worden.
De uitkomst van $\frac{20}{2x + 1}$ wordt dan ongeveer 0.
De grenswaarde is daarom $0 - 3,2 = -3,2$.
Als x heel groot wordt, neemt de waarde van K af.
- b** Bij $x = 0$ is $K = \frac{9}{45 - 12 \times 0,68^0} \approx 0,27$.
Als x heel groot wordt, dan wordt $0,68^x$ ongeveer 0.
 $12 \cdot 0,68^x$ wordt dan ook ongeveer 0.
 $45 - 12 \cdot 0,68^x$ wordt dan ongeveer 45.
De grenswaarde is daarom $\frac{9}{45} = 0,2$.
Als x heel groot wordt, neemt de waarde van K af.
- T4 a** De mobiliteit M is dan $0,07 \times 30\,000^{1,26} \approx 30\,639$ km.
- b** Bij een jaarinkomen van 60 000 euro is de mobiliteit $0,07 \times 60\,000^{1,26} \approx 73\,378$ km.
De mobiliteit neemt met $73\,378 - 30\,639 = 42\,739$ km toe.
Dat is een toename van $42\,739 : 30\,639 \times 100\% \approx 139\%$.
- c** De mobiliteit is dan $2 \times 30\,639 = 61\,278$.
Invoer: $y_1 = 0,07 \times x^{1,26}$ en $y_2 = 61\,278$
Venster: x van 0 tot 100 000 en y van 0 tot 100 000
Optie: snijpunt
Bij een jaarinkomen van ongeveer 52 000 euro is de mobiliteit twee keer zo groot als bij een jaarinkomen van 30 000 euro.
- T5 a** $h = 15$ en $d = 20$ substitueren in de formule geeft
 $A = 3,14 \times 20 \times 15 + 0,79 \times 20^2 = 1258 \text{ cm}^2$.
- b** $1,5 \text{ dm} = 15 \text{ cm}$, dus $h = 15$.
 $A = 3,14 \cdot d \cdot 15 + 0,79 \cdot d^2$
 $A = 47,1 \cdot d + 0,79 \cdot d^2$
De formule is $A = 47,1 \cdot d + 0,79 \cdot d^2$.

- c $15 \text{ dm}^2 = 1500 \text{ cm}^2$, dus $A = 1500$ en $h = 12$ substitueren.

$$1500 = 3,14 \cdot d \cdot 12 + 0,79 \cdot d^2$$

Invoer: $y_1 = 3,14 \times x \times 12 + 0,79 \times x^2$ en $y_2 = 1500$

Venster: x van 0 tot 40 en y van 0 tot 2000

Optie: snijpunt

De diameter van deze doos is ongeveer 25,8 cm.

- T6 a** De groeifactor per 3 dagen is $39,4 : 7,1 = 5,549\dots$
 De groeifactor per dag is $5,549\dots^{\frac{1}{3}} = 1,770\dots$
 Per dag neemt het aantal met $1,770\dots \times 100 - 100 \approx 77$ procent toe.

- b** De beginhoeveelheid is $7,1 : 1,770\dots^2 \approx 2,27$.

De formule is $N = 2,27 \cdot 1,77^t$.

- c** Bij $t = 10$ is $N = \frac{9100}{8,9 + 24,9 \times 0,85^{10}} \approx 659$.

Als t heel groot wordt, dan wordt $0,85^t$ ongeveer 0.

$24,9 \cdot 0,85^t$ wordt dan ook ongeveer 0.

$8,9 + 24,9 \cdot 0,85^t$ wordt dan ongeveer 8,9.

De grenswaarde is daarom $\frac{9100}{8,9} \approx 1022$.

Als t heel groot wordt, neemt de waarde van N toe.

- T7 a** $s = 230$ en $k = 2,70$ substitueren in de formule geeft

$$P = \frac{230^2}{12,56} \times 2,70 = 11\,371,82.$$

De prijs van deze boom is 11 371,82 euro.

- b** De prijs voor één boom met een omtrek van 400 cm is

$$P = \frac{400^2}{12,56} \times 2,7 = 34\,394,90 \text{ euro.}$$

De prijs voor één boom met een omtrek van 200 cm is

$$P = \frac{200^2}{12,56} \times 2,7 = 8598,73 \text{ euro.}$$

Nee, de prijs voor twee van zulke bomen is $2 \times 8598,73 = 17\,197,46$ euro en dat is minder dan de prijs voor één boom met een omtrek van 400 cm.

- c** $k = 2,70$ substitueren in de formule geeft $P = \frac{s^2}{12,56} \times 2,7$.

$$P = \frac{s^2 \times 2,7}{12,56}$$

$$P = \frac{2,7}{12,56} \times s^2$$

$$P \approx 0,215 \cdot s^2$$

De waarde van c is ongeveer 0,215.

Extra oefening

E1

a

a	1	10	100	1000	10 000
R	22,022	7,207	0,766	-0,100	-0,190

De formule heeft als grenswaarde $-0,2$.

b

w	1	10	100	1000	10 000
H	1	1,085	9,955	99,942	999,940

De formule heeft geen grenswaarde.

c

m	1	10	100	1000	10 000
W	11,236	1,192	0,000...	0,000...	0,000...

De formule heeft als grenswaarde 0.

d

s	1	10	100	1000	10 000
P	562,56	595,999	599,999...	599,999...	599,999...

De formule als grenswaarde 600.

E2

Als $x = 0$ dan is $y = 45 - 30 \times 0,68^0 = 15$.

Als x heel groot wordt, dan wordt $0,68^x$ ongeveer 0.

$30 \times 0,68^x$ wordt dan ook ongeveer 0.

De grenswaarde is daarom $45 - 0 = 45$.

De waarde van y neemt toe als x heel groot wordt.

b Als $x = 0$ dan is $y = \frac{24}{5 + 3 \times 0,45^0} = 3$.

Als x heel groot wordt, dan wordt $0,45^x$ ongeveer 0.

$3 \times 0,45^x$ wordt dan ook ongeveer 0.

$5 + 3 \times 0,45^x$ wordt dan ongeveer 5.

De grenswaarde is daarom $\frac{24}{5} = 4,8$.

De waarde van y neemt toe als x heel groot wordt.

c Als $x = 0$ dan is $y = \frac{12}{2 + 0^2} + 3,5 = 9,5$.

Als x heel groot wordt, dan wordt x^2 ook heel groot.

$2 + x^2$ wordt dan ook heel groot.

$\frac{12}{2 + x^2}$ wordt dan ongeveer 0.

De grenswaarde is daarom $0 + 3,5 = 3,5$.

De waarde van y neemt af als x heel groot wordt.

d Als $x = 0$ dan is $y = 80 \times 1,67^0 - 8 = 72$.

Als x heel groot wordt, dan wordt $1,67^x$ ook heel groot.

$80 \cdot 1,67^x$ wordt dan ook heel groot.

$80 \cdot 1,67^x - 8$ wordt dan ook heel groot.

De formule heeft geen grenswaarde.

De waarde van y neemt toe als x heel groot wordt.

E3 a $A = 149,4$ substitueren in de formule geeft $T = 0,2 \cdot 149,4^{1,5} = 365,22\dots$

De omlooptijd van de aarde is ongeveer 365 dagen.

b $A = 2870$ en $T = 30\,660$ substitueren in deze formule geeft

$$2870 = c \cdot 30\,660^{0,67}$$

$$c = 2870 : 30\,660^{0,67} \approx 2,83$$

E4 a $t = 15$ en $B = 25$ substitueren in deze formule geeft

$$25 = 2,8 + 0,8a + 1,2 \times 15$$

$$25 = 2,8 + 0,8a + 18$$

$$25 = 0,8a + 20,8$$

$$4,2 = 0,8a$$

$$a = 4,2 : 0,8 = 5,25$$

Er is 5,25 km afgelegd.

b Stel Taxi A doet er 40 minuten over en Taxi B doet er 20 minuten over.

Bij taxi A is de ritprijs $2,8 + 0,8 \times 10 + 1,2 \times 40 = 58,80$ euro.

Bij taxi B is de ritprijs $2,8 + 0,8 \times 10 + 1,2 \times 20 = 34,80$ euro.

De ritprijs van taxi A is $58,80 : 34,80 \approx 1,69$ keer zo hoog en dus niet twee keer zo hoog.

E5 a 2500 km per maand, zou $12 \times 2500 = 30\,000$ km per jaar zijn.

De kosten in maart waren $\frac{3700 + 0,06 \times 1,60 \cdot 30\,000}{12} \approx 548,33$ euro.

b In april rijdt Ronald $0,9 \times 2500 = 2250$ km en dat zou per jaar

$12 \times 2250 = 27\,000$ km zijn. De benzineprijs is $1,1 \times 1,60 = 1,76$ euro.

$k = 27\,000$ en $B = 1,76$ invullen in de formule geeft

$$\frac{3700 + 0,06 \times 1,76 \cdot 27\,000}{12} \approx 545,93$$

De kosten waren in april ongeveer 545,93 euro en dus niet hoger dan in maart, maar lager.

c $B = 1,68$ invullen geeft $TK = \frac{3700 + 0,06 \times 1,68k}{12}$

$$TK = \frac{3700 + 0,1008 \cdot k}{12}$$

$$TK = \frac{3700}{12} + \frac{0,1008 \cdot k}{12}$$

$$TK = 308,333\dots + 0,0084 \cdot k$$

Dus de waarde van a is ongeveer 308,333 en de waarde van b is 0,008.

E6 a Als x steeds groter wordt, dan wordt $\frac{b}{x}$ ongeveer 0.

Hierdoor nadert $y = a + \frac{b}{x}$ ongeveer de grenswaarde a .

Als de grenswaarde 12 is, dan is $a = 12$.

Invullen van $a = 12$ en de coördinaten (6, 4) geeft:

$$4 = 12 + \frac{b}{6}$$

$$-8 = \frac{b}{6}$$

$$b = 6 \times -8 = -48$$

De waarde van a is 12 en de waarde van b is -48.

- b** Als de grenswaarde 8 is, dan is $a = 8$, want als x steeds groter wordt, dan nadert $b \cdot 0,25^x$ naar 0.

Invullen van $a = 8$ en de coördinaten (2, 9) geeft:

$$9 = 8 + b \cdot 0,25^2$$

$$b \cdot 0,25^2 = 1$$

$$b = 1 : 0,25^2 = 16$$

De waarde van a is 8 en de waarde van b is 16.

- E7 a** $K = 650$ (want K is in duizendtallen) en $Q = 18\,000$ invullen in de formule

$$\text{geeft } A = \frac{18\,000^2}{900 \times 650^{1,4}} = 41,516\dots$$

Het bedrijf zal 42 werknemers inzetten.

- b** $Q = 30\,000$ invullen in de formule geeft

$$A = \frac{30\,000^2}{900 \cdot K^{1,4}}$$

$$A = \frac{900\,000\,000}{900 \cdot K^{1,4}}$$

$$A = \frac{1\,000\,000}{K^{1,4}}$$

- c** $100 = \frac{30\,000^2}{900 \cdot K^{1,4}}$

$$\text{Invoer: } y_1 = \frac{30\,000^2}{900 \times x^{1,4}} \text{ en } y_2 = 100$$

Venster: x van 0 tot 1000 en y van 0 tot 200

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn ongeveer (719,686; 100).

Er is ongeveer € 720.000,- kapitaal nodig.

12 Toegepast rekenen

Voorkennis

V1 a

gewicht in grammen	500	100	250	1000
prijs in euro's	9	1,80	4,50	18

Diagram showing relationships between weights and prices:

- From 500g to 100g: $\div 5$
- From 100g to 250g: $\times 4$
- From 250g to 1000g: $\times 4$
- From 9€ to 1,80€: $\div 5$
- From 1,80€ to 4,50€: $\times 4$
- From 4,50€ to 18€: $\times 4$
- From 1000g to 18€: $\times 0,018$

- b Nog twee paren zijn: $100 \times 4,50 = 1,80 \times 250$ en $250 \times 18 = 4,50 \times 1000$ (of $500 \times 4,50 = 9 \times 2,50$, $500 \times 18 = 9 \times 1000$ of $100 \times 18 = 1,8 \times 1000$).
- c $850 \times 0,018 = 15,3$
voor 850 gram oude kaas betaal je € 15,30.

V2

$$a \times 70 = 42 \times 217$$

$$a = 42 \times 217 : 70 = 130,2$$

$$b \times 3,08 = 11,2 \times 0,44$$

$$b = 0,44 \times 11,2 : 3,08 = 1,6$$

V3 a

gewicht in grammen	250	150
bedrag in euro's	3,25	?

$$? = 3,25 \times 150 : 250 = 1,95$$

150 gram kibbeling kost € 1,95.

b

gewicht in grammen	250	?
bedrag in euro's	3,25	7,80

$$? = 250 \times 7,8 : 3,25 = 600$$

Gerrie heeft 600 gram kibbeling gekocht.

V4 a $300 \text{ m} = 0,3 \text{ km}$ en $1 \text{ uur} = 3600 \text{ seconden}$

b De gemiddelde snelheid van Sophie is $0,3 \times 3000 : 56 \approx 19,3 \text{ km per uur}$.

c De gemiddelde snelheid van Bob is $0,3 \times 3000 : 62 \approx 17,4 \text{ km per uur}$.

V5 a Er zijn $1 + 4 = 5$ gelijke delen. Elk deel is $200 : 5 = 40 \text{ m}^2$.

De verdeling is 40 m^2 en $4 \times 40 = 160 \text{ m}^2$.

b Er zijn $2 + 7 = 9$ gelijke delen. Elk deel is $166,50 : 9 = 18,50 \text{ euro}$.

De verdeling is $2 \times 18,50 = 37 \text{ euro}$ en $7 \times 18,50 = 129,50 \text{ euro}$.

d Er zijn $2 + 5 + 8 = 15$ gelijke delen. Elk deel is $420 : 15 = 28 \text{ euro}$.

De verdeling is $2 \times 28 = 56 \text{ euro}$, $5 \times 28 = 140 \text{ euro}$ en $8 \times 28 = 224 \text{ euro}$.

V6 a $2\frac{1}{4} + \frac{7}{8} =$

$$2\frac{2}{8} + \frac{7}{8} = 3\frac{1}{8}$$

b $3\frac{1}{3} - \frac{5}{6} =$

$$3\frac{2}{6} - \frac{5}{6} = 2\frac{3}{6} = 2\frac{1}{2}$$

c $4\frac{1}{2} - 2\frac{1}{4} =$

$$4\frac{2}{4} - 2\frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$$

d $8\frac{1}{3} - 5\frac{5}{7} =$

$$8\frac{7}{21} - 5\frac{15}{21} = 7\frac{28}{21} - 5\frac{15}{21} = 2\frac{13}{21}$$

e $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} =$

$$\frac{15}{60} + \frac{20}{60} + \frac{12}{60} = \frac{47}{60}$$

f $1\frac{1}{4} + 2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{2} =$

$$1\frac{3}{12} + 2\frac{4}{12} + 3\frac{6}{12} = 6\frac{13}{12} = 7\frac{1}{12}$$

V7 a $1,7 \text{ m} = 1700 \text{ mm}$

b $47000 \text{ dm}^3 = 47 \text{ m}^3$

c $5,72 \text{ L} = 5720 \text{ mL}$

d $14000 \text{ cm}^2 = 1,4 \text{ m}^2$

e $300 \text{ cL} = 3 \text{ dm}^3$

f $298 \text{ mg} = 0,000298 \text{ kg}$

12.1 Breuken

intro Je kunt uitrekenen of $\frac{3}{20}$ meer is dan $\frac{7}{48}$.

Bijvoorbeeld $\frac{3}{20} = 3 : 20 = 0,15$ en $\frac{7}{48} = 7 : 48 \approx 0,146$.

De noten wegen meer dan de karamel.

- 1 a $\frac{5}{7} \approx 0,7143$ c $3\frac{6}{11} \approx 3,5455$
 b $2\frac{2}{3} \approx 2,6667$ d $12\frac{13}{14} \approx 12,9286$

- 2 a $1240 : 5 = 248$ leerlingen komen met het openbaar vervoer.
 b $\frac{3}{4} = 0,75$
 $0,75 \times 1240 = 930$ leerlingen komen met de fiets.
 c $1 - \frac{1}{5} - \frac{3}{4} = \frac{20}{20} - \frac{4}{20} - \frac{15}{20} = \frac{1}{20}$ deel.

- 3 a $\frac{7}{9} \times 18 \text{ liter} = 14 \text{ liter}$ c $\frac{5}{6} \times 4196 \approx 3496,7 \text{ liter}$
 b $\frac{2}{7} \times 119 = 34 \text{ mijl}$ d $\frac{3}{23} \times 134 \approx 17,5 \text{ m}^3$

- 4 a $2\frac{1}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{15}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{30}{35} = \frac{6}{7}$
 b $2\frac{1}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{15}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{15}{14} = 1\frac{1}{14}$
 c $21 \times \frac{1}{3} = 7$
 d $\frac{2}{7} : 2 = \frac{2}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{7}$

- 5 a $\frac{2}{5} \times \frac{10}{11} = \frac{20}{55} = \frac{4}{11}$
 b $4\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{9}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{36}{10} = 3\frac{6}{10} = 3\frac{3}{5}$
 c $1\frac{1}{4} : 7 = \frac{5}{4} \times \frac{1}{7} = \frac{5}{28}$
 d $\frac{4}{7} : 2 = \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$

- 6 a $\frac{1}{3}$ deel van de dagen ving ze geen vissen.
 Op $\frac{1}{3} \times 84 = 28$ dagen ving ze geen vissen.
 b Op $84 - 28 = 56$ dagen ving ze wel vissen.
 Op $1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{7} = 1 - \frac{7}{56} - \frac{24}{56} = \frac{25}{56}$ deel van die dagen ving ze één vis.
 Dat is op $\frac{25}{56} \times 56 = 25$ dagen.
 c Op 25 dagen ving ze één vis.
 Op $\frac{1}{8} \times 56 = 7$ dagen ving ze drie vissen.
 Op $\frac{3}{7} \times 56 = 24$ dagen ving ze twee vissen.
 Ze heeft in totaal $25 + 7 \times 3 + 24 \times 2 = 94$ vissen gevangen.

- 7 a Voor 12 m^2 vloer heb je $12 + \frac{1}{10} \times 12 = 13,2 \text{ m}^2$ laminaat nodig.
 b Voor 16 m^2 vloer heb je $16 + \frac{1}{10} \times 16 = 17,6 \text{ m}^2$ laminaat nodig.
 $17,6 : 2,6 \approx 6,77$.
 Je hebt dus 7 pakken nodig voor 16 m^2 .
 c Willem heeft $60 + \frac{2}{15} \times 60 = 68 \text{ m}^2$ laminaat nodig.
 Dat betekent $68 : 2,6 \approx 26,15$ pakken.
 Hij moet dus 27 pakken kopen.
 Deze 27 pakken kosten $27 \times €24,99 = €674,73$.

- 8 a Haar mentale leeftijd wordt verhoogd met $21 \times 2 = 42$ maanden.

$$ML = 12 + \frac{42}{12} = 15 + \frac{6}{12}$$

$$IQ = \frac{15 + \frac{6}{12}}{12} \times 100 \approx 129$$

- b Voor een kind dat alleen de test van zijn eigen leeftijd goed maakt geldt $ML = WL$.

$$IQ = \frac{WL}{WL} \times 100 = 1 \times 100 = 100$$

- c Neem bijvoorbeeld een kind van 10 jaar en een kind van 15 jaar.

$$\text{Het kind van 10 jaar heeft dan een } IQ \text{ van } \frac{10 + \frac{20}{12}}{10} \times 100 \approx 117.$$

$$\text{Het kind van 15 jaar heeft dan een } IQ \text{ van } \frac{15 + \frac{20}{12}}{15} \times 100 \approx 111.$$

Het is mogelijk dat ze een verschillend IQ hebben.

05 a $2\frac{1}{10} = \frac{20}{10} + \frac{1}{10} = \frac{21}{10}$

b $\frac{21}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{105}{60} = 1\frac{45}{60} = 1\frac{3}{4}$

c $3\frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{25}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{25}{32}$

d $\frac{3}{7} \times \frac{4}{10} = \frac{12}{70} = \frac{6}{35}$

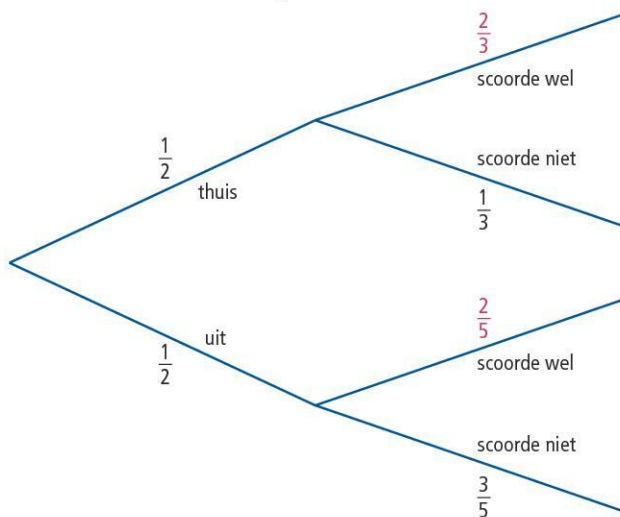
e $4\frac{1}{3} \times \frac{6}{7} = \frac{13}{3} \times \frac{6}{7} = \frac{78}{21} = 3\frac{15}{21} = 3\frac{5}{7}$

f $1\frac{1}{3} : 5 = \frac{4}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{15}$

g $\frac{5}{9} : 2 = \frac{5}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{18}$

- 06 a De helft van de wedstrijden was thuis en de helft van de wedstrijden was uit.

b



- c $\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$ deel van de wedstrijden waren uitwedstrijden waarin niet werd gescoord.

- d In $\frac{3}{10} \times 30 = 9$ uitwedstrijden scoorde SCV niet.

U1 $\frac{6}{325}$ komt overeen met 48.

Het totaal aantal bevallingen van een twee-, drie- of vierling is dus

$$48 : 6 \times 325 = 2600.$$

Het aantal bevallingen van een tweeling was dus $2600 - 48 = 2552$.

$$\frac{3}{200} \text{ komt overeen met } 2552.$$

Het totaal aantal bevallingen in 2018 was dus $2552 : 3 \times 200 \approx 170\,133$.

12.2 Absoluut en relatief

intro Dit hangt af van het aantal leerlingen in de klas van de andere docent. Bij 20 leerlingen in deze klas betekent dat 2 onvoldoendes, maar bij 30 leerlingen zijn dat 3 onvoldoendes. Dus zitten er in de ene klas met 2 onvoldoendes 20 leerlingen, dan hebben zij het net zo goed gedaan als bijvoorbeeld een andere klas met 3 onvoldoendes en 30 leerlingen.

9 a In 1980 waren er in totaal 14 091 000 inwoners.
 $311\,870 : 14\,091\,000 \times 100 \approx 2,2\%$ van de bevolking hoorde bij de categorie 80 jaar of ouder.

b 100 procent is het totale aantal.

c $798\,820 \times 100 : 4,6 \approx 17\,365\,652$

De totale bevolking in 2019 was dus ongeveer 17 366 000.

d 1000 promille is het totale aantal.

e

<i>aantal</i>	798 820	...
<i>promillage</i>	1000	2,74

$$798\,820 \times 2,74 : 1000 \approx 2188,77$$

In 2019 waren er 2189 personen van 100 jaar of ouder.

10 a Relatieve afname: $77 : 1230 \times 100\% \approx 6,3\%$.

b

<i>aantal</i>	112	...
<i>percentage</i>	10,4	100

$$112 \times 100 : 10,4 \approx 1076,9$$

Op 1 oktober 2020 was het totaal aantal leerlingen 1077.

De absolute afname was $1100 - 1077 = 23$.

De relatieve afname was $23 : 1100 \times 100\% \approx 2,1\%$.

11 a In 2012 had Nederland 16 730 300 inwoners.

In 2017 had Nederland 17 081 500 inwoners.

b Het totaal aantal inwoners is absoluut. Het aantal leden is relatief.

c Er is gegeven dat het aantal leden 312,3 per 1000 inwoners was.

d

<i>aantal leden van sportbonden</i>	312,3	?
<i>totaal aantal personen</i>	1000	16 730 300

$$? = 312,3 \times 16\,730\,300 : 1000 \approx 5\,224\,873$$

Het aantal leden in 2012 was ongeveer 5 225 000.

e $304,1 \times 17\,081\,500 : 1000 \approx 5\,194\,484$

Het aantal leden in 2017 was ongeveer 5 194 500.

12 a Het zijn relatieve cijfers want het is het percentage ten opzichte van 2010.

b

<i>bedrag in centen</i>	21	?
<i>indexcijfer</i>	106	100

$$? = 21 \times 100 : 106 \approx 19,8$$

In 2010 kostte een kilogram koffiebonen 19,8 cent.

c

<i>aantal</i>	21	?
<i>indexcijfer</i>	106	98

$$? = 21 \times 98 : 106 \approx 19,4$$

In 2015 kostte een kilogram koffiebonen 19,4 cent.

- 13** In 2005 zijn 13 750 personenauto's gestolen. 0,15% van de auto's komt overeen met 13 750.

<i>aantal auto's</i>	13 750	?
<i>percentage</i>	0,15	100

$$? = 13\,750 \times 100 : 0,15 \approx 9\,166\,667$$

Het totaal aantal auto's moet daarvoor dan 9,17 miljoen zijn.

Het aantal neemt met $(7,93 - 6,55) : 12 = 0,115$ miljoen per jaar toe.

Vanaf 2013 duurt het $(9,17 - 7,93) : 0,115 \approx 10,8$ jaar tot het aantal van 9,17 miljoen is bereikt.

In 2024 zijn er voor het eerst weer meer gestolen auto's dan in 2005.

- 011 a** Het totaal aantal geboren kinderen is een absoluut getal.
Het aantal geboren kinderen per 1000 inwoners en het aantal geboren kinderen per 1000 vrouwen van 15-44 jaar zijn relatieve getallen.
- b** De absolute aantallen inwoners zijn niet direct af te lezen, die moet je eerst berekenen met behulp van de relatieve gegevens in de tabel.

c

<i>aantal kinderen</i>	11,1	184 400
<i>aantal inwoners</i>	1000	?

$$? = 1000 \times 184\,400 : 11,1 \approx 16\,612\,613$$

Het aantal inwoners in 2010 was ongeveer 16 613 000.

- d** In 2018 waren er ongeveer $1000 \times 168\,500 : 9,8 \approx 17\,194\,000$ inwoners.

e

<i>aantal kinderen</i>	53,7	168 500
<i>aantal vrouwen</i>	1000	?

$$? = 1000 \times 168\,500 : 53,7 \approx 3\,137\,803$$

Het aantal vrouwen van 15-44 jaar in 2018 was ongeveer 3 138 000.

- U2 a** 105 jongens en 100 meisjes zijn samen 205 kinderen.
Daarvan is $105 : 205 \times 100\% \approx 51,2\%$ jongen.
- b** $1\,340\,000\,000 : 1000 \times 14 = 18\,760\,000$
- c** In 2009 zijn er 119 jongens per 100 meisjes geboren.
Het percentage jongens is $119 : 219 \times 100\% \approx 54,3\%$.
 $54,3\%$ van 18 760 000 is $0,543 \times 18,76 \approx 10,19$ miljoen jongens.
Dus zijn er $18,76 - 10,19 = 8,57$ miljoen meisjes geboren.

12.3 Afronden

intro Afgerond €37,- is een bedrag vanaf €36,50 tot en met €37,49.

Het totaalbedrag dat is opgehaald ligt tussen $13 \times €36,50 = €474,50$ en $13 \times €37,49 = €487,37$.

14 a Omdat $\frac{435}{24} = 18,125$ worden er minimaal 19 groepen gevormd.

b Omdat $\frac{57}{4} = 14,25$ kunnen er maximaal 14 cakes worden gebakken.

15 a 7,492 is afgerond op één decimaal 7,5.

b 651 376 afgerond op duizendtallen is 651 000.

16 a $49 : 5 = 9,8$

Hij kan maximaal 9 taarten maken.

b $49 : 8 = 6,125$

Ze moet zeven pakken tegels kopen.

c $400 : 13 = 30,769\dots$

Ze kan maximaal 30 cadeauzakjes maken.

17 Er zijn $800 : 50 = 16$ banen nodig.

Een baan is $257 + 15 = 272$ cm lang.

$1005 : 272 \approx 3,7$ dus je kunt maar drie banen uit een rol halen.

$16 : 3 \approx 5,33$

Ze moeten 6 rollen behang kopen.

18 a $\frac{2}{3} \times 54\,784 \approx 36\,522,67$

Er waren dus 36 523 toeschouwers.

b 36523 afgerond op honderdtallen is 36 500.

c Van de stoelen was $\frac{6}{11}$ deel bezet.

$\frac{6}{11} \times 54\,784 \approx 29\,882,18$

Er waren dus 29 900 toeschouwers.

19 $5118429 : 344 \times 1000 = 14\,879\,154,07$

In 1990 waren er ongeveer 14 879 000 inwoners.

$7622353 : 460 \times 1000 = 16\,570\,332,6$

In 2020 waren er ongeveer 16 570 000 inwoners.

De toename was dus $16\,570\,000 - 14\,879\,000 = 1\,691\,000$.

20 a Rob is $6 \times 12 + 6 = 78$ inches lang.

Dit komt overeen met $78 \times 2,54 = 198,12 \approx 198$ cm.

b $78 \times 2,5 = 195$ cm.

Het verschil is $198,12 - 195 = 3,12$ cm.

c Zina: $253 \times 0,57 = 144,21$ liter.

Yuri: $253 \times 0,568\,261 \approx 143,77$ liter.

De methode van Yuri is nauwkeuriger, want hij rondt pas op het eind af.

Zina rondt meteen al af en vermenigvuldigt het afgeronde getal met 253.

Op deze manier ligt haar uiteindelijke antwoord verder af van het werkelijke antwoord.

- 21 a** Omdat $87,6 : 1,7 \approx 51,5$ kunnen er maximaal 51 boeken op één plank staan.
- b** Omdat $87,56 : 1,74 \approx 50,3$ kunnen er slechts 50 boeken staan.
Dus een ander aantal als bij opdracht a.
- c** Je moet dan de boekenplank een maximale lengte geven: 87,64 cm en de boeken geef je een minimale dikte: 1,65 cm.
 $87,64 : 1,65 \approx 53,12$
Er kunnen dan 53 boeken staan.

- 016 a** Het zesde cijfer achter de komma is 5 of groter, dus moet er naar boven worden afgerond.
- b** 9,714285 is op twee decimalen afgerond gelijk aan 9,71 omdat het derde cijfer achter de komma 4 of lager is.
- c** 9,714285 afgerond op één decimaal is 9,7.
9,714285 afgerond op een geheel getal is 10.
- d** $68 : 7 = 9,714285\dots$
Je kunt 9 plantenbakken vullen.
- e** $68 : 7 = 9,714285\dots$
Je moet 10 blikken verf kopen.
Aan 9 blikken verf heb je niet genoeg.

- U3** 19 km komt minimaal overeen met 18500 meter.
16 km komt maximaal overeen met 16499 meter.
Het verschil is minimaal 2001 meter, dus klopt deze informatie niet.

- U4** Deze verf kost per blik $750 : 1000 \times €15,- = €11,25$.
Abedelali:
De oppervlakte is $4,8 \times 2,5 = 12 \text{ m}^2$.
Er komen twee lagen op de muur, dus moet er 24 m^2 geverfd worden.
 $24 : 5 = 4,8$. Hij moet dus vijf blikken kopen.
De kosten zijn $5 \times €11,25 = €56,25$.
Nicole:
De oppervlakte is $5,2 \times 2,6 = 13,52 \text{ m}^2$.
Zij moet er $27,04 \text{ m}^2$ verven.
 $27,04 : 7 \approx 3,8$. Ze moet dus vier blikken kopen.
De kosten zijn $4 \times €11,25 = €45,-$.
Abedelali betaalt dus $€56,25 - €45,- = €11,25$ meer.

12.4 Tijden

- intro** Bij een snelheid van 30 km per uur fiets je 15 km in een half uur.
Dan moet 14,5 km binnen een half uur gefietst worden.
Pantani deed er langer dan een half uur over, dus de snelheid van Pantani was lager dan 30 km per uur.
- 22 a** De vlucht duurt $1450 : 700 = 2,0714\dots$ uur.
1 uur duurt 60 minuten dus $0,0714$ uur duurt $0,0714 \times 60 \approx 4,29$ minuten.
De vlucht duurt 2 uur en ruim 4 minuten.
- b** Het vliegtuig komt aan om 21.52 uur.

12 Toegepast rekenen

23 a $3 \times 60 \times 60 + 11 \times 60 + 53 = 11\,513$ seconden

b $2 \times 60 + 12,8 = 132,8$ seconden

c

<i>afstand</i> in meter	88 000	?
<i>tijd</i> in seconden	3600	1

$$? = 88\,000 \times 1 : 3600 \approx 24,4$$

De snelheid van Bram is ongeveer 24,4 meter per seconde.

d In één uur zitten 3600 seconden.

De gemiddelde snelheid van Kate is dus $1,8 \times 3600 = 6480$ meter per uur, ofwel 6,48 km per uur.

24 a

<i>afstand</i> in meter	500	?
<i>tijd</i> in seconden	36,52	1

$$? = 1 \times 500 : 36,52 = 13,691\dots$$

De gemiddelde snelheid was ongeveer 13,7 meter per seconde.

b

<i>afstand</i> in m	500	?
<i>tijd</i> in seconden	36,52	3600

$$? = 500 \times 3600 : 36,52 \approx 49288,06$$

De gemiddelde snelheid was ongeveer 49,3 km per uur.

c 1 : 44,41 minuten is $60 + 44,41 = 104,41$ seconden

<i>afstand</i> in m	1500	?
<i>tijd</i> in seconden	104,41	1

$$? = 1500 \times 1 : 104,41 = 14,366\dots$$

Zijn gemiddelde snelheid op de 1500 meter was

$$14,366\dots - 13,691\dots \approx 0,68 \text{ meter per seconde hoger.}$$

d

<i>afstand</i> in m	48080	5000
<i>tijd</i> in seconden	3600	?

$$? = 3600 \times 5000 : 48080 \approx 374,38$$

$$374,38 = 6 \times 60 + 14,38$$

Zijn tijd op de 5000 meter was 6:14,38 minuten.

25 a 1:19,119 minuten is $60 + 19,119 = 79,119$ seconden

<i>afstand</i> in km	5,793	?
<i>tijd</i> in seconden	79,119	3600

$$? = 5,793 \times 3600 : 79,119 \approx 263,588$$

De gemiddelde snelheid van de formule 1-wagen is 263,588 km per uur.

b

<i>afstand</i> in km	187,2	4,318
<i>tijd</i> in seconden	3600	?

$$? = 3600 \times 4,318 : 187,2 \approx 83,038$$

De snelste rondetijd was 83,038 seconden ofwel 1:23,038 minuten.

c	afstand in km	382,182	?
	tijd in seconden	3600	37,895

$$? = 382,182 \times 37,895 : 3600 = 4,0229... \text{ kilometer}$$

$$4,0229... : 1,609344 \approx 2,499$$

De lengte is dus ongeveer 2,5 mijl.

- 26 a** De afstand van Campenaerts was $54,526 + 0,563 = 55,089$ km.
Dit zijn $55089 : 250 = 220,356$ ronden ofwel 220 volledige ronden.

b	afstand in meter	55089	250
	tijd in seconden	3600	?

$$? = 3600 \times 250 : 55089 \approx 16,337$$

Hij deed gemiddeld 16,337 seconden over één ronde.

c	afstand in meter	70000	?
	tijd in seconden	3600	1200

$$? = 70000 \times 1200 : 3600 = 23333,33$$

In 20 minuten kan er 23 333,33 meter worden afgelegd.

Dat zijn $23333,33 : 250 \approx 93,33$ ronden, ofwel 93 volledige ronden.

- 27 a** 2 uur, 4 minuten en 55 seconden komt overeen met
 $2 \times 3600 + 4 \times 60 + 55 = 7495$ seconden.

	afstand in m	42195	?
	tijd in seconden	7495	1

$$? = 42195 \times 1 : 7495 \approx 5,63$$

- b** $D_2 : D_1 = 2$

T_1 is 59 minuten en 17 seconden ofwel $59 \times 60 + 17 = 3557$ seconden.

$$T_2 = 3557 \cdot 2^{1,06} = 7416,10... \text{ seconden}$$

7416,10... seconden is 123 minuten en 36,10 seconden ofwel 2:03:36,10 uur.

Deze tijd is minder dan 2 uur en 4 minuten.

- c** $D = 5000$ invullen geeft $T = 0,05827 \cdot 5000^{1,111} \approx 749,90$ seconden.

749,90 seconden is 12 minuten en 29,90 seconden.

Het verschil is $39,36 - 29,90 = 9,46$ seconden ofwel

$$9,46 : 749,90 \times 100\% \approx 1,26\%$$

- d** 12 minuten ofwel 720 seconden invullen geeft $720 = 0,05827 \cdot D^{1,111}$

Invoer: $y_1 = 0,05827 \times x^{1,111}$ en $y_2 = 720$

Venster: x van 0 tot 5000 en y van 700 tot 750

Optie: snijpunt

Dit geeft $x = 4820,22$

Die afstand is ongeveer 4820 meter.

- 024 a** Je wilt berekenen welke afstand ze in 1 seconde aflegt.

- b** $? = 500 \times 1 : 36,52 \approx 13,69$

De gemiddelde snelheid van Ireen was ongeveer 13,7 meter per seconde.

- c** 500 meter is 0,5 km en 3600 seconden = 1 uur

- d** $? = 0,5 \times 3600 : 36,52 \approx 49,29$

Haar gemiddelde snelheid is ongeveer 49,3 km per uur.

- e** $4.02,60 = 4 \times 60 + 2,60 = 242,60$ seconden

f

<i>afstand</i> in km	3	?
<i>tijd</i> in seconden	242,60	3600

$$? = 3 \times 3600 : 242,60 \approx 44,52$$

Haar gemiddelde snelheid was ongeveer 44,5 km per uur.

g

<i>afstand</i> in km	47,4142	1,5
<i>tijd</i> in seconden	3600	?

$$? = 3600 \times 1,5 : 47,4142 \approx 113,89$$

Haar tijd was dus 113,89 seconden ofwel 1:53,89 minuten.

U5 De totale tijd is $1 \times 3600 + 45 \times 60 = 6300$ seconden.

Dit betekent 2100 seconden per onderdeel.

zwemmen:

<i>afstand</i> in km	1,5	?
<i>tijd</i> in seconden	1100	2100

$$? = 1,5 \times 2100 : 1100 \approx 2,864$$

fietsen:

<i>afstand</i> in km	40	?
<i>tijd</i> in seconden	3540	2100

$$? = 40 \times 2100 : 3540 \approx 23,73$$

hardlopen:

<i>afstand</i> in km	10	?
<i>tijd</i> in seconden	1850	2100

$$? = 10 \times 2100 : 1850 \approx 11,35$$

Het zwemmen wordt dan 3 km, het fietsen 24 km en het lopen 11 km.

12.5 Grote en kleine getallen

intro $400\,000 \times 0,000\,000\,000\,1 = 0,000\,04$

$$50\,000 \times 0,000\,000\,001 = 0,000\,05$$

$$20 \times 0,000\,001 = 0,000\,02$$

50 000 nanometer is meer.

28 a $1 \text{ miljard} = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^9$

b Een googol bestaat uit 101 cijfers: een 1 en daarachter 100 nullen.

29 a $0,000\,000\,1 = 1 \times 10^{-7}$

b $6 \times 10^{-8} = 0,6 \times 10^{-7}$ dus 4×10^{-7} is groter.

30 a A: $563 \times 23 = 12\,949 \approx 1,29 \times 10^4$

B: $5000 : 100\,000 = 0,05 = 5 \times 10^{-2}$

C: $541\,000^2 = 292\,681\,000\,000 = 2,93 \times 10^{11}$

D: $\frac{82\,970\,000}{4\,200\,050 + 2\,365\,190} = 12,637\,771\,05 = 1,26 \times 10^1$

b Alleen antwoord C is groter dan een miljoen.

- 31** a $1 \text{ miljoen} : 1 \text{ miljard} = 10^6 : 10^9 = 10^{-3} = 1 \times 10^{-3}$
 b $8,2 \times 10^7 : (4 \times 10^{10}) = 2,05 \times 10^{-3}$
 c $5,4 \times 10^9 : (2,7 \times 10^6) = 2 \times 10^3$
 d $2,5 \times 10^3 : (2,5 \times 10^{-3}) = 1 \times 10^6$
- 32** a $170 : 4,9 \approx 34,69$
 Een blauwe vinvis is ongeveer 34,7 keer zo zwaar als een savanneolifant.
 b Een blauwe vinvis weegt $170 \times 1000 \times 1000 = 1,7 \times 10^8$ gram
 $1,7 \times 10^8 : 0,0648 = 2\,623\,456\,790$
 Een blauwe vinvis weegt ongeveer 2623 miljoen gerstekorrels.
 c $3,5 \text{ ton}$ is $3,5 \times 10^6$ gram.
 Eén krill weegt 2 gram.
 Een blauwe vinvis eet $3,5 \times 10^6 : 2 = 1,75 \times 10^6$ krillen per voedingsdag.
- 33** a $1 \text{ MB} = 1\,000\,000 \text{ byte}$.
 $1 \text{ MB} = 8\,000\,000 \text{ bits}$
 b $300 \text{ TB} = 300\,000\,000\,000\,000 \text{ byte}$
 $300 \text{ TB} = 2\,400\,000\,000\,000\,000 \text{ bits}$
 c $1 \text{ MiB} = 1024^2 \text{ byte}$
 $1024^2 : 256 = 4096$
 256 byte past 4096 keer in een MiB
 d $1 \text{ GiB} = 1024^3 \text{ byte}$ en $1 \text{ GB} = 1000^3 \text{ byte}$
 $1024^3 : 1000^3 \approx 1,074$
 1 GiB bevat 7,4% meer bits dan 1 GB.
- 34** a De foto is in de 10e of 11e maand van 2016 gemaakt. Dus in oktober of november 2016.
 b Volgens de klok zijn er $19947022666105 : 168863 = 118125478$ families.
 Dat betekent $118125478 \times 2,8 \approx 330\,751\,340$ inwoners.
 c $\frac{24\,948\,857\,000\,000}{331\,000\,000} \times 2,8 \approx 211\,048$
 $\frac{24\,948\,857}{331} \times 2,8 \approx 211\,048$
 De staatsschuld per gezin is dus 211 000 dollar.
 d De berekening van Sjoerd is handiger, je hoeft minder grote getallen in te toetsen.
- 35** a 1 zandkorrel weegt ongeveer $2,65 \times 10^{-6} \text{ kg}$.
 b 2,5 miljoen zandkorrels wegen $2,5 \times 10^6 \times 2,65 \times 10^{-6} = 6,625 \text{ kg}$.
 c $20 : (2,65 \times 10^{-6}) \approx 7\,547\,170$ zandkorrels.
- 030** a Je schuift de komma 6 plaatsen naar links, dus $1\,102\,00 = 1,102 \times 10^6$.
 b $0,000\,000\,5 = 5 \times 10^{-7}$ want je schuift de komma 7 plaatsen naar rechts.
 c $49 : (199\,000\,000 + 300\,000) \approx 2,46 \times 10^{-7}$
 d Om het getal $2,46 \times 10^{-7}$ in de normale notatie te schrijven moet je de komma 7 plaatsen naar links verschuiven.
 In de normale notatie wordt het getal 0,000 000 246.

- U6 a** Eén lichtjaar is $365 \times 24 \times 3600 \times 300 \times 10^3 = 9\,460\,800\,000\,000$ km
 $9\,460\,800 \times 10^6 : (150 \times 10^6) = 63\,072$
 Eén lichtjaar is 63 072 keer groter dan één AE.
- b** De afstand van de zon tot de aarde is 150×10^9 meter.
 $150 \times 10^9 : (300 \times 10^6) = 500$
 Het licht doet er 500 seconden ofwel 8 minuten en 20 seconden over om de aarde te bereiken.

12.6 Gemengde opdrachten

- 36 a** De gegevens zijn relatief

<i>aantal</i> in miljoenen	1,344	...	<i>aantal</i> in miljoenen	1,746	...
<i>percentage</i>	19,5	100	<i>percentage</i>	26	100

Het aantal vrouwen was

$1,344 \times 100 : 19,5 \approx 6,892$ miljoen.

Het aantal mannen was

$1,746 \times 100 : 26 \approx 6,727$ miljoen.

In 2018 waren er ongeveer $6,892 + 6,727 = 13,619$ miljoen mensen van 18 jaar en ouder.

<i>aantal</i> in miljoenen	1,746	...
<i>percentage</i>	103,36	100

Het aantal mannen van 18 jaar en ouder was in 2014

$6,727 \times 100 : 103,36 \approx 6,508$ miljoen.

Het aantal rokers onder de mannen was $0,295 \times 6,508 = 1,920$ miljoen.

Het aantal rokende mannen is tussen 2014 en 2018 met

$1,920 - 1,746 = 0,174$ miljoen afgenomen.

- d** Het percentage sigaretten in 2018 in vergelijking met 2014 is
 $100 - 30,6 = 69,4\%$.

<i>aantal</i> in miljarden	9,815	...
<i>percentage</i>	69,4	100

$9,815 \times 100 : 69,4 \approx 14,143$

In 2014 werden er 14,143 miljard sigaretten gerookt.

- 37 a** $30 \times 0,06 = 1,8$ meter.

- b** $1501,8$ meter in $14 \times 60 + 45 = 885$ seconden.

De gemiddelde snelheid is dan $1501,8 : 885 = 1,69694...$ meter per seconde.

De extra tijd om 1,8 meter te zwemmen is

$1,8 : 1,69694... \approx 1,0607...$ seconden

De tijd zou 14 minuten en 44 seconden geweest zijn.

<i>aantal</i> in miljarden	4,5	?
<i>percentage</i>	25	100

$? = 4,5 \times 100 : 25 = 18$

Er zijn in totaal 18 miljard verplaatsingen.

- b $\frac{15}{200}$ deel ofwel $\frac{3}{40}$ deel.
- c In de auto en op de fiets wordt totaal $0,75 \times 200 + 15 = 165$ miljard km afgelegd. dus $200 - 165 = 35$ miljard km op een andere wijze.
Dat is $\frac{35}{200} = \frac{7}{40}$ deel dat op andere wijze wordt afgelegd.
- d Van alle verplaatsingen is $33 + 15 = 48\%$ met de auto.
Hiervan is $\frac{15}{48} = \frac{5}{16}$ deel als passagier.

Onderzoeksopdrachten

- 39** Totaal zijn er $2,618 + 2,3 \times (7,313 - 2,618) = 13,4165$ miljoen mensen van 16 jaar en ouder.
 $0,75 \times \frac{5}{6} \times 13,4165$ miljoen mensen van 16 jaar en ouder bekijken de folder.
 $0,27 \times 0,75 \times \frac{5}{6} \times 13,4165 \approx 2,264$ miljoen mensen gaan tot actie over.
Dit $2,264 : 16,53 \times 100\% \approx 13,7\%$ van de totale bevolking.
Volgens deze berekening is het dus iets minder dan 15%.

Samenvatting

- S1** a Relatief
b Absoluut
c Relatief
- S2** a $(300 - 251) : 300 \times 100\% \approx 16,3\%$
b Fosfaat: $(55 - 39) : 55 \times 100\% \approx 29,1\%$
Kali: $(68 - 42) : 68 \times 100\% \approx 38,2\%$
Het gebruik van Kali is relatief het meest afgenomen.
- c
- | | | |
|-----------------------|------|-----|
| aantal in 1000 tonnen | 251 | ? |
| percentage | 49,7 | 100 |
- $? = 251 \times 100 : 49,7 \approx 505$, dus in 1985 werd er 505 000 ton stikstof gebruikt.
- S3** a $5 \times 10^9 \times 20 \times 10^9 = 100 \times 10^{18} = 1 \times 10^{20}$
b $(8 \times 10^{12}) : (5 \times 10^5) = 1,6 \times 10^7$
c $1,5 \times 10^6 \times 6 \times 10^8 = 9 \times 10^{14}$
d $3,5 \times 10^9 : (5 \times 10^2) = 0,7 \times 10^7 = 7 \times 10^6$
- S4** a 360 miljoen km^2 is $3,6 \times 10^8 \text{ km}^2$
b $3,6 \times 10^8 \text{ km}^2 = 3,6 \times 10^8 \times 10^6 \text{ m}^2 = 3,6 \times 10^{14} \text{ m}^2$
- c
- | | | |
|------------------------------|-------------------|-----|
| oppervlakte in km^2 | $3,6 \times 10^8$ | ? |
| percentage | 72 | 100 |
- $? = 3,6 \times 10^8 \times 100 : 72 = 5 \times 10^8$
De oppervlakte van de aarde is $5 \times 10^8 \text{ km}^2$ ofwel 500 miljoen km^2 .
- S5** a $\frac{5}{7} \times 42 = 30$ personen
b $\frac{4}{19} \times 57 = 12$ seconden
c $\frac{2}{9} \times 1233 = 274 \text{ km}^2$
d $\frac{6}{35} \times 980 = 168$ mieren

12 Toegepast rekenen

S6 a $\frac{1}{5} \times 1\,581\,156 = 316\,231,2$

Er werden 316 231 huismussen geteld.

b $\frac{1}{4} \times 1\,581\,156 = 395\,289$

$\frac{11}{18} \times 395\,289 = 241\,565,5$

Er werden 241 566 koolmezen geteld.

S7 a $\frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$

c $2\frac{3}{4} : 4 = \frac{11}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{11}{16}$

b $6\frac{1}{3} \times \frac{9}{14} = \frac{19}{3} \times \frac{9}{14} = \frac{171}{42} = \frac{57}{14} = 4\frac{1}{14}$

d $\frac{3}{11} : 8 = \frac{3}{11} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{88}$

S8 $\frac{2}{3} \times \frac{15}{28} = \frac{30}{84} = \frac{5}{14}$ deel van de wedstrijden waren gewonnen thuiswedstrijden.

S9 a A: $24,1094 \approx 24,11$

C: $32,9595 \approx 32,96$

B: $1,0789 \approx 1,08$

D: $3,12049 \approx 3,12$

b $16 \times 3,7854 \approx 60,6$ liter

S10 a 13:50 minuten is $13 \times 60 + 50 = 830$ seconden.

<i>afstand</i> in km	32	?
<i>tijd</i> in seconden	830	3600

$? = 32 \times 3600 : 830 \approx 138,8$

De gemiddelde snelheid is 139 km per uur.

b $100 : 139 \times 3600 \approx 2589,9$ seconden

2590 seconden is 43 minuten en 10 seconden.

Test jezelf

T1 a $719\,985 - 674\,696 = 45\,289$

De afname is ongeveer 45 000.

b In 2008 is het percentage leden $719\,985 : 16\,405\,399 \times 100\% = 4,388\ldots\%$.

In 2017 is het percentage leden $570\,431 : 17\,081\,507 \times 100\% \approx 3,339\ldots\%$.

$4,388\ldots - 3,339\ldots = 1,049\ldots$

Het is dus afgenomen met ongeveer 1,0%.

c In 2008 hadden ze gemiddeld $719\,985 : 1741 \approx 413,5$ leden.

In 2017 hadden ze gemiddeld $570\,431 : 1662 \approx 343,2$ leden.

Het aantal leden is gemiddeld met ongeveer 70,3 afgenomen.

T2 $60 : 0,56825 \approx 105,58$

Je kunt dus 105 glazen vullen.

b $1\text{ m}^3 = 1000$ liter

$1000 : 0,56825 \approx 1759,79$

Eén m^3 komt overeen met ongeveer 1760 pints.

c $3,785411\,78 : (0,5 \times 0,56825) \approx 13,32$

Je kunt dus 13 glazen helemaal vullen.

d Het totaal aantal glazen was $140,2 \times 10^6 \times 100 : 0,56825 = 246,7\ldots \times 10^8$.

Dat is per persoon $246,7\ldots \times 10^8 : (66,27 \times 10^6) \approx 372,3$

Er werden toen gemiddeld 372 glazen frisdrank gedronken.

T3 a

<i>afstand</i> in km	20	24
<i>tijd</i> in minuten	60	...

Arnor doet $60 \times 24 : 20 = 72$ minuten over de klim.

<i>afstand</i> in km	19,2	24
<i>tijd</i> in minuten	60	...

Javille doet $60 \times 24 : 19,2 = 75$ minuten over de klim.

b

<i>snelheid</i> in km/uur	72	24
<i>tijd</i> in minuten	60	...

Arnor doet $60 \times 24 : 72 = 20$ minuten over de afdaling.

<i>snelheid</i> in km/uur	80	24
<i>tijd</i> in minuten	60	...

Javille doet $60 \times 24 : 80 = 18$ minuten over de afdaling.

Arnor doet in totaal $72 + 20 = 92$ minuten over de wedstrijd en Javille

$75 + 18 = 93$ minuten.

Arnor wint de wedstrijd.

T4

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} =$$

$$\frac{6}{20} + \frac{12}{25} =$$

$\frac{30}{100} + \frac{48}{100} = \frac{78}{100}$ deel wordt voor groente gebruikt, dus de rest wordt voor aardappelen gebruikt. Dat is $\frac{22}{100} = \frac{11}{50}$ deel.

T5 a $10 \text{ m}^3 = 10\,000$ liter

80 mL per 10 000 liter is $80 : 10\,000 = 0,008$ mL per liter.

Dus er moet $3800 \times 0,008 = 30,4$ mL chloor in het zwembad zitten.

b $\frac{17}{19} \times 3800 = 3400$ liter

Er is minimaal $3400 \times 0,008 = 27,2$ mL chloor nodig.

Dus er moet nog $27,2 - 5 = 22,2$ mL chloor toegevoegd worden.

$$22,2 : 8 = 2,775$$

Er moeten 3 tabletten chloor aan het water worden toegevoegd.

T6 a De familie Vliet moet $17,85 + 0,0635 \times 4200 = 284,55$ euro betalen.

b $221,05 - 17,85 = 203,20$ euro

$$203,20 : 0,0635 = 3200 \text{ kWh}$$

De familie Vliet heeft 3200 kWh verbruikt.

c Keuze Tarief Budget tegenover Keuze Tarief Standaard

$$0,0814k = 17,85 + 0,0635k$$

$$0,0179k = 17,85$$

$$k = 997,206\dots$$

Vanaf 998 kWh is Keuze Tarief Standaard voordeliger dan Keuze Tarief Budget.

Keuze Tarief Standaard tegenover Keuze Tarief Plus

$$17,85 + 0,0635k = 35,70 + 0,0602k$$

$$17,85 + 0,0033k = 35,70$$

$$0,0033k = 17,85$$

$$k = 5409,090\dots$$

Vanaf 5410 kWh is Keuze Tarief Plus voordeliger dan Keuze Tarief Standaard.

- d** Met enkeltarief zijn de kosten $17,85 + 0,0635 \cdot 3500 = 240,10$ euro.
 Met laag- en normaaltarief zijn de kosten
 $17,85 + 0,0419 \cdot 1200 + 0,0749 \cdot 2300 = 240,40$ euro.
 Het is voor mevrouw Kroes dus (net) niet voordelig om over te stappen.

Extra oefening

- E1** **a** $\frac{7}{9} \times 117 = 91$ **c** $\frac{10}{17} \times 68 = 40$
b $\frac{5}{12} \times 73 = 30$ **d** $\frac{2}{15} \times 270 = 36$
- E2** **a** $\frac{6}{7} \times \frac{14}{15} = \frac{84}{105} = \frac{28}{35}$ **c** $\frac{3}{5} : 6 = \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$
b $\frac{1}{3} \times 3\frac{2}{13} = \frac{1}{3} \times \frac{41}{13} = \frac{41}{39} = 1\frac{2}{39}$ **d** $5\frac{5}{8} : 11 = \frac{45}{8} \times \frac{1}{11} = \frac{45}{88}$
- E3** **a** A: $7397 \approx 7,40$ C: $62,7581 \approx 62,76$
 B: $21,0887 \approx 21,09$ D: $9,38042 \approx 9,38$
b 1 281 935 911 is afgerond 1 281 936 000 ofwel 1 281 936 duizend.
c $1850 : 25,4 = 72,83$
 René is ongeveer 73 inches lang.
d $110 : 12 \approx 9,17$
 Je hebt hiervoor 10 kratten nodig.
- E4** **a** 39 minuten en 5,68 seconden is $39 \times 60 + 5,68 = 2345,68$ seconden.
- | | | |
|------------------|---------|------|
| afstand in km | 10 | ? |
| tijd in seconden | 2345,68 | 3600 |
- $? = 10 \times 3600 : 2345,68 \approx 15,35$
 Zijn gemiddelde snelheid over de 10 kilometer was dus 15,35 km per uur.
- b**
- | | | |
|------------------|------|----|
| afstand in km | 29,8 | 78 |
| tijd in seconden | 3600 | ? |
- $? = 3600 \times 78 : 29,8 \approx 9422,82$
 Dit is ongeveer 2 uur en 37 minuten.
- E5** **a** De absolute toename tussen 2015 en 2020 is $4300 - 2500 = 1800$.
 De relatieve toename is $18 : 25 \times 100\% = 72\%$.
b De relatieve afname bij vlees is $(85 - 56) : 85 \approx 34\%$.
 De relatieve afname bij vis is $(35 - 26) : 35 \approx 26\%$.
 De relatieve afname bij vlees is het grootst.
c In 2010 was het aantal verkochte hoofdgerechten
 $8500 + 3500 + 1000 = 13\,000$.
- | | | |
|------------|--------|-----|
| aantal | 13 000 | ? |
| percentage | 89,5 | 100 |
- $? = 13\,000 \times 100 : 89,5 \approx 14\,525$
 In 2000 werden er totaal 14 525 hoofdgerechten verkocht.

- E6 a** De minimale lengte is $50 \times 10^{-6} \text{ m} = 50 \times 10^{-3} \text{ mm} = 0,05 \text{ mm}$.
De maximale lengte is $300 \times 10^{-6} \text{ m} = 300 \times 10^{-3} \text{ mm} = 0,3 \text{ mm}$.
- b** $1000 : 0,3 \approx 3333$ pantoffeldiertjes passen er minimaal op een meter.
 $1000 : 0,05 = 20\,000$ pantoffeldiertjes passen er maximaal op een meter.
- E7 a** De overgebleven 60% verdelen ze in een verhouding 3 : 2.
Er zijn 5 gelijke delen. Elk deel is $\frac{60}{5} = 12\%$.
De tennisclub krijgt $3 \times 12 = 36\%$ van de winst.
- b** Voetbalclub: $82\,600 \times 0,40 = 33\,040$ euro.
Tennisclub: $82\,600 \times 0,36 = 29\,736$ euro.
De korfbalclub krijgt $100 - 40 - 36 = 24\%$, dus $82\,600 \times 0,24 = 19\,824$ euro.
- c** $24 : 2 = 12\%$ van de totale winst van de kantine gaat naar de jeugdtraining van de korfballers.
- E8 a** $32 : 120 = 0,2666\dots$ uur oftewel 960 seconden.
 $32 : 130 = 0,2461\dots$ uur ofwel 886 seconden.
De tijdswinst is $960 - 886 = 74$ seconden (1 minuut en 14 seconden).
- b** Voor 32 km met een snelheid van 120 km per uur heeft Michael $\frac{32}{15} \approx 2,13$ liter benzine nodig.
Als hij met 130 km per uur over de Afsluitdijk rijdt, heeft hij 10% meer benzine nodig. Dat is $0,10 \times 2,13 = 0,213$ liter extra benzine.
- c** 1 uur en 6 minuten is 1,1 uur.
De afstand die hij aflegt is dan $1,1 \times 100 = 110$ km.
Met een snelheid van 130 km per uur doet hij over 110 km $\frac{110}{130} = 0,846\dots$ uur
ofwel $0,846\dots \times 60 \approx 51$ minuten.
Hij doet er dan $66 - 51 = 15$ minuten langer over.
- E9 a** Neem bijvoorbeeld de periode van 1 januari 1600 tot en met 31 december 1999.
Per periode van 4 jaar gaat het dan om $3 \times 365 + 366 = 1461$ dagen.
De eeuwwisselingen in deze periode zijn 1600, 1700, 1800 en 1900.
De jaren 1700, 1800 en 1900 zijn geen schrikkeljaar.
Totaal gaat het om 100 perioden van 4 jaar.
Het aantal dagen in 400 jaar is dan $146\,100 - 3 = 146\,097$.
Gemiddeld heeft een jaar $\frac{146\,097}{400} \approx 365,2425$ dagen.
- b** Het verschil is 0,0003 dag en dat komt overeen met
 $0,0003 \times 24 \times 60 \times 60 \approx 26$ seconden.

- 1 a** Bij tabel A hoort wel een lineair verband, want de richtingscoëfficiënt is $-8 : 4 = -2$.

Bij tabel B hoort geen lineair verband, want als de x -waarde met twee toeneemt, neemt de y -waarde niet steeds met hetzelfde aantal toe.

Bij tabel C hoort wel een lineair verband, want de richtingscoëfficiënt is $4,5 : 15 = 13,5 : 45 = 18 : 60 = 0,3$.

- b** Bij tabel A hoort de formule $y = -2x + 60$.

$$270 = -2x + 60$$

$$2x = -210$$

$$x = -105$$

Bij tabel C is het startgetal $25,5 - 15 \times 0,3 = 21$.

Bij tabel C hoort de formule $y = 0,3x + 21$.

$$270 = 0,3x + 21$$

$$0,3x = 249$$

$$x = 830$$

- 2 a** De richtingscoëfficiënt is $\frac{\Delta M}{\Delta w} = \frac{42 - 18}{10 - 2} = \frac{24}{8} = 3$.

w	1	2	7	10	13
M	15	18	33	42	51

- b** Het startgetal is $18 - 2 \times 3 = 12$.
De formule is $y = 3x + 12$.

- 3 a** Het verband is lineair omdat elk jaar het aantal vissen met $12 \times 25 = 300$ toeneemt.

- b** De formule is $N = 300t + 8850$.

- c** $300t + 8850 = 12000$

$$300t = 3150$$

$$t = 10,5$$

Na 10 jaar en 6 maanden is het aantal vissen gelijk aan 12000.

In juli 2031 zullen er voor het eerst meer dan 12000 vissen zijn.

- 4 a** In vijf minuten stijgt het water met $29 - 22 = 7$ cm, dus per minuut stijgt het water $7 : 5 = 1,4$ cm.

b

<i>tijdstip</i>	<i>hoogte in cm</i>
16.15	22
16.20	29
16.25	36
16.30	43

- c** Om 16.00 uur is de waterhoogte $22 - 15 \times 1,4 = 1$ cm.
De formule is $h = 1,4t + 1$.

- 5 a** $2 : 1 = 4 : 2 = 6 : 3 = 10 : 5 = 16 : 8 = 2$

Bij tabel A hoort een recht evenredig verband, want de getallen in een kolom hebben steeds dezelfde verhouding.

$$6 : 4 = 9 : 6 = 12 : 8 = 15 : 10 = 30 : 20 = 1 \frac{1}{2}$$

Bij tabel B hoort een recht evenredig verband, want de getallen in een kolom hebben steeds dezelfde verhouding.

- b** Bij tabel C hoort een lineair verband, want als de x -waarde met 1 toeneemt, neemt de y -waarde met 5 toe (de richtingscoëfficiënt is 5).

- c Bij tabel A hoort de formule $y = 2x$.
 Bij tabel B hoort de formule $y = 1,5x$.
 Het startgetal bij tabel C is $60 - 5 = 55$.
 Bij tabel C hoort de formule $y = 5x + 55$.

6 a $c = 7,5 : 3 = 2,5$

t	2	3	5	8	10
A	5	7,5	12,5	20	25

- b De formule is $A = 2,5t$.

7 a $c = 5 \times 144 = 720$

a	20	5	7,2	15	4
K	36	144	100	48	180

- b De formule is $K = \frac{720}{a}$ (of $a = \frac{720}{K}$ of $a \cdot K = 720$).

- 8 Bij tabel A hoort een omgekeerd evenredig verband, want $2 \times 27 = 54$,
 $3 \times 18 = 54$, $4 \times 13,5 = 54$, $6 \times 9 = 54$ en $18 \times 3 = 54$.

De formule is $y = \frac{54}{x}$ (of $x = \frac{54}{y}$ of $y \cdot x = 54$).

Bij tabel B hoort een recht evenredig verband, want
 $2 : 10 = 4 : 20 = 6 : 30 = 8 : 40 = 10 : 50 = 0,2$.

De formule is $P = 0,2a$.

Bij tabel C hoort een lineair verband, want de richtingscoëfficiënt is

$$\frac{4 - 8}{4 - 2} = \frac{-4}{2} = -2. \text{ Het startgetal is } 8 + 2 \times 2 = 12.$$

De formule is $N = -2t + 12$.

- 9 a De grenslijn moet gestippeld worden omdat de punten op deze lijn niet voldoen aan de ongelijkheid.

- b Voor het snijpunt met de x -as geldt: $y = 0$.

$$3x + 5 \times 0 = 30$$

$$3x = 30$$

$$x = 10$$

Het snijpunt met de x -as is $(10, 0)$.

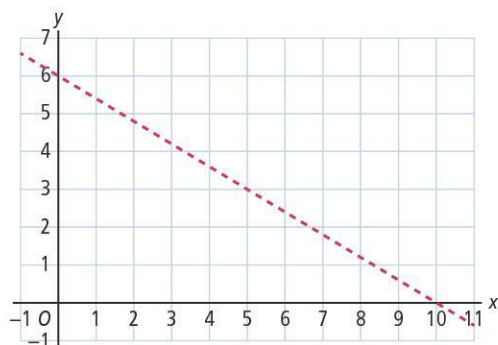
Voor het snijpunt met de y -as geldt: $x = 0$

$$3 \times 0 + 5y = 30$$

$$5y = 30$$

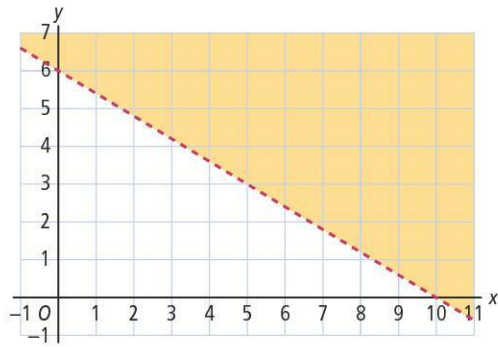
$$y = 6$$

Het snijpunt met de y -as is $(0, 6)$.



- c Invullen van $x = 0$ en $y = 0$ geeft $3 \times 0 + 5 \times 0 > 30$ ofwel $0 > 30$.
Dit klopt niet, dus het punt $(0, 0)$ ligt niet in het gevraagde gebied.

d



- 10 a Voor het snijpunt met de t -as geldt: $N = 0$

$$5t + 6 \times 0 = 120$$

$$5t = 120$$

$$t = 24$$

Het snijpunt met de t -as is $(24, 0)$.

Voor het snijpunt met de N -as geldt: $t = 0$

$$5 \times 0 + 6N = 120$$

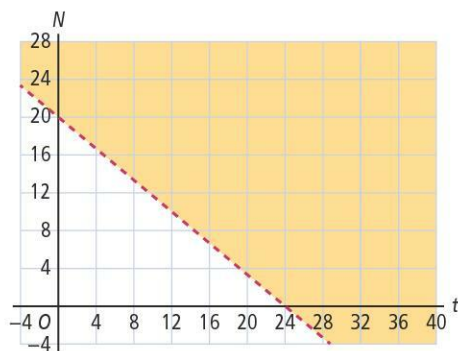
$$6N = 120$$

$$N = 20$$

Het snijpunt met de N -as is $(0, 20)$.

Invullen van $t = 0$ en $N = 0$ geeft $5 \times 0 + 6 \times 0 > 120$ ofwel $0 > 120$.

Dit klopt niet, dus het punt $(0, 0)$ ligt niet in het gevraagde gebied.



- b Voor het snijpunt met de t -as geldt: $N = 0$

$$-0,8t + 2 \times 0 = 4$$

$$-0,8t = 4$$

$$t = -5$$

Het snijpunt met de t -as is $(-5, 0)$.

Voor het snijpunt met de N -as geldt: $t = 0$

$$-0,8 \times 0 + 2N = 4$$

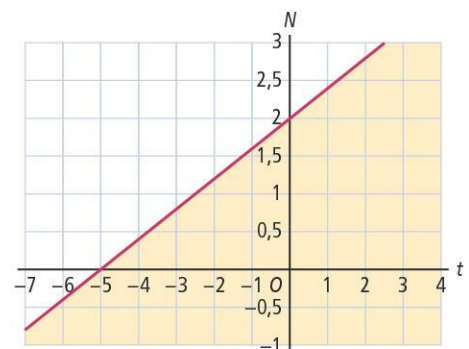
$$2N = 4$$

$$N = 2$$

Het snijpunt met de N -as is $(0, 2)$.

Invullen van $t = 0$ en $N = 0$ geeft $-0,8 \times 0 + 2 \times 0 \leq 4$ ofwel $0 \leq 4$.

Dit klopt, dus het punt $(0, 0)$ ligt in het gevraagde gebied.



- c Voor het snijpunt met de t -as geldt: $N = 0$

$$10t + 50 \times 0 = 5$$

$$10t = 5$$

$$t = 0,5$$

Het snijpunt met de t -as is $(0,5; 0)$.

Voor het snijpunt met de N -as geldt: $t = 0$

$$10 \times 0 + 50N = 5$$

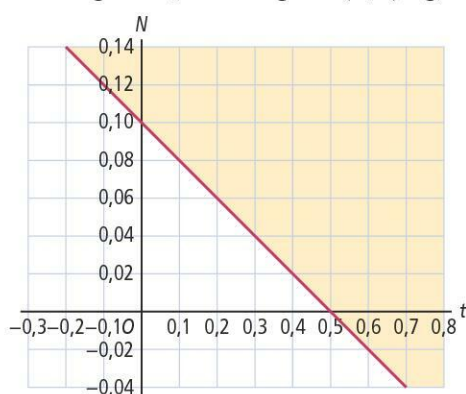
$$50N = 5$$

$$N = 0,1$$

Het snijpunt met de N -as is $(0; 0,1)$.

Invullen van $t = 0$ en $N = 0$ geeft $10 \times 0 + 50 \times 0 \geq 5$ ofwel $0 \geq 5$.

Dit klopt niet, dus het punt $(0, 0)$ ligt niet in het gevraagde gebied.



- d Voor het snijpunt met de t -as geldt: $N = 0$

$$t - 0 = 4$$

$$t = 4$$

Het snijpunt met de t -as is $(4, 0)$.

Voor het snijpunt met de N -as geldt: $t = 0$

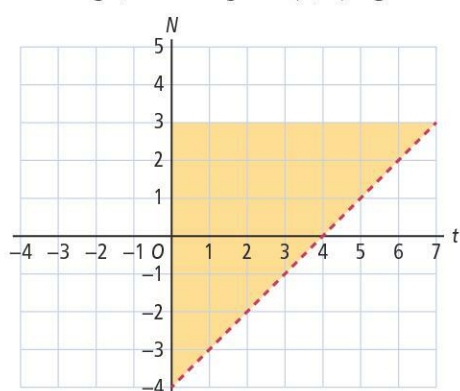
$$0 - N = 4$$

$$N = -4$$

Het snijpunt met de N -as is $(0, -4)$.

Invullen van $t = 0$ en $N = 0$ geeft $0 - 0 < 4$ ofwel $0 < 4$.

Dit klopt, dus het punt $(0, 0)$ ligt in het gevraagde gebied.



- 11 a Met $0,5t$ bereken je de kosten voor de thee en met $0,75k$ bereken je de kosten voor de koffie. Dit mag samen maximaal € 7,50 zijn. Vandaar de ongelijkheid $0,5t + 0,75k \leq 7,5$.
Met $k \geq 2$ wordt aangegeven dat het aantal koppen koffie minimaal 2 is.
Met $0 \leq t \leq 8$ wordt aangegeven dat het aantal koppen thee 0 tot en met 8 kan zijn.

- b** Voor het snijpunt met de k -as geldt: $t = 0$

$$0,5 \times 0 + 0,75k = 7,5$$

$$0,75k = 7,5$$

$$k = 10$$

Het snijpunt met de k -as is $(10, 0)$.

Voor het snijpunt met de t -as geldt: $k = 0$

$$0,5t + 0,75 \times 0 = 7,5$$

$$0,5t = 7,5$$

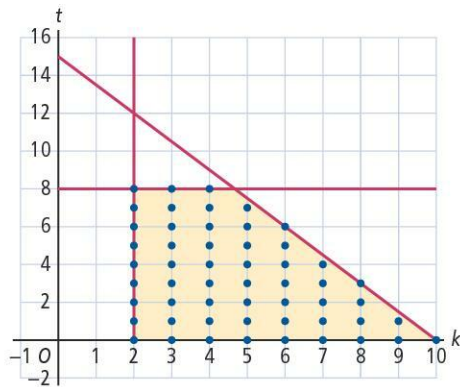
$$t = 15$$

Het snijpunt met de t -as is $(0, 15)$.

Invullen van $t = 0$ en $N = 0$ geeft $0 + 0 \leq 7,5$ ofwel $0 \leq 7,5$.

Dit klopt, dus het punt $(0, 0)$ ligt in het gevraagde gebied.

Verder moet gelden dat het gevraagde gebied op of rechts van de lijn $k = 2$ ligt en op of onder de lijn $t = 8$ ligt. Zie de tekening hieronder.



- c** Alleen de roosterpunten van het gebied voldoen omdat je alleen maar gehele aantallen koppen koffie en thee kunt kopen.
- d** Het aantal roosterpunten in het gearceerde gebied voldoen.
Er zijn 54 mogelijke oplossingen voor Mirthe.

- 12 a** Bij tabel A hoort een exponentieel verband, want de groeifactor is $6 : 2 = 18 : 6 = 54 : 18 = 172 : 54 = 3$.

Bij tabel B hoort een exponentieel verband, want de groeifactor is $500 : 1000 = 250 : 500 = 125 : 250 = 62,5 : 125 = 0,5$.

Bij tabel C hoort geen exponentieel verband, bij deze tabel hoort een lineair verband. De richtingscoëfficiënt is $\frac{1,5 - 0,3}{8 - 6} = \frac{1,2}{2} = 0,6$.

- b** Bij tabel A is de formule $y = 2 \cdot 3^x$.

Bij $x = 12$ is de waarde van $y = 2 \times 3^{12} = 1\,062\,882$.

Bij tabel B is de beginhoeveelheid $1000 : 0,5 = 2000$ en de formule $y = 2000 \cdot 0,5^x$.

Bij $x = 12$ is de waarde van $y = 2000 \times 0,5^{12} \approx 0,488$.

- 13 a** De groeifactor per jaar is $(100 + 8) : 100 = 1,08$.

De formule is $N = 8645 \cdot 1,08^t$.

- b** De groeifactor per jaar is $0,5$.

De beginhoeveelheid is $84\,000 : 0,5 = 168\,000$.

De formule is $N = 168\,000 \cdot 0,5^t$.

- c** De groeifactor per maand is $5321 : 5214 = 1,020\dots$

De groeifactor per jaar is $1,020\dots^{12} \approx 1,276$.

De formule is $N = 5214 \cdot 1,276^t$.

- 14 a** De groeifactor is $(100 + 16,3) : 100 = 1,163$.
De formule is $R = 50 \cdot 1,163^t$.
- b** $50 \cdot 1,163^t = 400$
Invoer: $y_1 = 50 \times 1,163^x$ en $y_2 = 400$
Venster: x van 0 tot 30 en y van 0 tot 500
Optie: snijpunt
De coördinaten van het snijpunt zijn $(13,77; 400)$.
Na 14 jaar dus in 2032 worden 400 robotgrasmaaiers verkocht.
- c** In 2030 worden $590 + 12 \times 20 = 830$ grasmaaiers verkocht.
Daarvan zijn $50 \times 1,163^{12} \approx 306$ robotgrasmaaiers.
Dat is $306 : 830 \times 100\% \approx 37\%$.

13 Conclusies uit data

Voorkennis

- V1**
- a** De data zijn de gewichten van de kastanjes en de twee bomen.
 - b** De variabele boom kan de waarden A of B aannemen.
 - c** De tweede variabele is gewicht, deze neemt de gehele waarden 4 tot en met 11 gram aan.
 - d** Boom A:

Het gemiddelde is $\frac{6 \times 4 + 10 \times 5 + \dots + 1 \times 11}{6 + 10 + \dots + 1} = \frac{438}{64} \approx 6,8$ gram.

De modus is 7 gram, dit komt 16 keer voor.

De mediaan ligt tussen de 32e en 33e kastanje, dit is 7 gram.

Boom B:

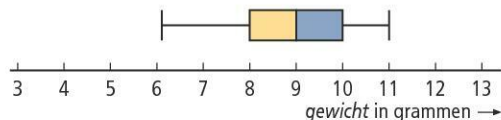
Het gemiddelde is $\frac{5 \times 6 + 4 \times 7 + \dots + 9 \times 11}{5 + 4 + \dots + 9} = \frac{569}{64} \approx 8,9$ gram.

De modus is 9 gram, dit komt 18 keer voor.

De mediaan ligt tussen de 32e en 33e kastanje, dit is 9 gram.

- e** Ja, de drie centrummaten zijn bij boom B het grootst.
- f** De spreiding van het gewicht ten opzichte van het gemiddelde gewicht is bij de kastanjes van boom A groter dan bij de kastanjes van boom B.

- V2**
- a** De spreidingsbreedte is $11 - 4 = 7$ gram.
 - b** De kwartielfstand is $8 - 5,5 = 2,5$ gram.
 - c** De lichtste kastanje is 6 gram, de zwaarste kastanje is 11 gram.
De mediaan is 9 gram.
Het eerste kwartiel is het midden van de 16e en 17e kastanje, dit is 8 gram.
Het derde kwartiel is het midden van de 48e en 49e kastanje, dit is 10 gram.



- V3**
- a** In beide rijen wijken de getallen kleiner dan 16 net zo ver af van het gemiddelde als de getallen groter dan 16. Het gemiddelde van beide rijen is daarom 16.
 - b** Bij rij B zijn de vier getallen die één van het gemiddelde verschillen (15 en 17) vervangen door vier getallen die zes van het gemiddelde verschillen (10 en 22). De standaardafwijking van rij B zal daardoor groter zijn dan die van rij A.
 - c** Als alle getallen twee groter worden, dan wordt het gemiddelde ook twee groter, dus $16 + 2 = 18$. Alle getallen wijken net zo veel van het gemiddelde af als eerst. De standaardafwijking blijft hetzelfde, dus 3,30.
- V4**
- a** De statistische variabelen zijn geslacht en proefwerkcijfer natuurkunde.
 - b** Geslacht is een kwalitatieve variabele. Proefwerkcijfer natuurkunde is een kwantitatieve variabele.
 - c** De spreidingsbreedte van de cijfers bij de jongens is $8,8 - 3,3 = 5,5$.
De spreidingsbreedte van de cijfers bij de meisjes is $9,5 - 3,9 = 5,6$.

d Het gemiddelde is $\frac{3,3 + 4,2 + \dots + 8,8}{14} = \frac{83,9}{14} \approx 6,0$.

De mediaan is het gemiddelde van het 7e en het 8e cijfer, dit is

$\frac{5,6 + 6,5}{2} = 6,05$. De modus is 6,9 dat drie keer voorkomt.

e

<i>proefwerkcijfer</i>	<i>frequentie</i>
[2,5; 3,5)	1
[3,5; 4,5)	2
[4,5; 5,5)	5
[5,5; 6,5)	6
[6,5; 7,5)	8
[7,5; 8,5)	5
[8,5; 9,5)	3
[9,5; 10)	1

De modale klasse is de klasse [6,5; 7,5), want deze heeft de hoogste frequentie.

13.1 Percenteren

intro De relatieve frequentie van het aantal mannen is groter, dus relatief gezien kun je deze conclusie wel trekken. Je weet alleen niet hoeveel mannelijke en vrouwelijke docenten er in totaal zijn. Het zou kunnen dat er veel meer vrouwelijke docenten zijn, waardoor er toch meer vrouwelijke docenten een hoge werkdruk ervaren. Je kunt qua absolute cijfers deze conclusie niet trekken.

- 1
 - a Het gaat hier om geslacht en om afstand verspringen. Geslacht is een kwalitatieve variabele. Afstand verspringen is een kwantitatieve variabele.
 - b Geslacht neemt de waarden jongen en meisje aan. Afstand verspringen neemt de waarden 100 cm tot 400 cm aan.
 - c Bij de jongens heeft $28 : 40 \times 100\% = 70\%$ minstens 300 cm gesprongen. Bij de meisjes heeft $33 : 55 \times 100\% = 60\%$ minstens 300 cm gesprongen.
 - d 33 meisjes en slechts 28 jongens hebben meer dan 300 cm gesprongen. Dit zijn de absolute frequenties.
 - e De jongens hebben beter gesprongen dan de meisjes omdat 70% van de jongens minstens 300 cm heeft gesprongen en slechts 60% van de meisjes.
 - f Zij moet 33 als totaal nemen. Het percentage is $21 : 33 \times 100\% \approx 63,6\%$.
- 2
 - a Meer meisjes hebben voor wiskunde B gekozen dan voor wiskunde A.
 - b Je moet dan het getal 83 als totaal nemen.
 - c $27 : 83 \times 100\% \approx 32,5\%$ van de jongens heeft voor wiskunde A gekozen. Naar verhouding hebben de meeste jongens voor wiskunde B gekozen.

- 3 a** Het gaat over het profiel en over het cijfer voor het centraal schriftelijk examen geschiedenis.
- b** CM: totaal $20 + 10 = 30$ leerlingen, dit is $30 : 53 \times 100\% \approx 56,6\%$.
 EM: totaal $15 + 14 + 2 = 31$ leerlingen, dit is $31 : 62 \times 100\% = 50\%$.
 NG: 3 van de 3, dus alle leerlingen ofwel 100%.
 NT: 1 van de 1, dus ook 100%.
- c** Bijvoorbeeld dat de leerlingen met een N-profiel het relatief beter hebben gedaan dan leerlingen met een M-profiel.
- d** Een argument voor is bijvoorbeeld dat het percentage EM-leerlingen dat minimaal een 6,0 heeft behaald, kleiner is dan bij de andere profielen.
 Een argument tegen is bijvoorbeeld dat er meer CM-leerlingen zijn die lager dan een 4,0 hebben gehaald dan EM-leerlingen.
- 4 a** In totaal zitten er $231 + 127 + 89 = 447$ leerlingen op deze school.
 $127 : 447 \times 100\% \approx 28,4\%$ van de leerlingen zit op de havo.
- b** $81 : 231 \times 100\% \approx 35,1\%$ van de vmbo-leerlingen geeft de voorkeur aan onderwijs op afstand.
- c** vmbo: $62 : 231 \times 100\% \approx 26,8\%$
 havo: $56 : 127 \times 100\% \approx 44,1\%$
 vwo: $48 : 89 \times 100\% \approx 53,9\%$
 Naar verhouding geven op het vwo de meeste leerlingen de voorkeur aan een combinatie van onderwijs op afstand en onderwijs op school.
- d** In totaal $27 + 10 = 37$ leerlingen van de in totaal $127 + 89 = 216$ havo/vwo-leerlingen geven de voorkeur aan onderwijs op afstand.
 Dit is $37 : 216 \times 100\% \approx 17,1\%$ van de havo/vwo-leerlingen.
 In opdracht b heb je berekend dat 35,1% van de vmbo-leerlingen de voorkeur geeft aan onderwijs op afstand.
 De data ondersteunen het vermoeden van de directeur.
- e** Geef de vmbo-leerlingen relatief meer onderwijs op afstand en de havo/vwo-leerlingen relatief meer onderwijs op school. Of kies voor de combi, dan heb je voor twee van de drie niveaus een meerderheid.
- 5 a** Het gaat hier om vervoersmiddel en om afstand verplaatsingen.
- b** 2% van de mensen die de trein nemen, leggen minder dan 7,5 km af.
- c** Bij de mensen die fietsen is dit $100\% - 70\% = 30\%$.
 Bij de mensen die met de trein gaan, is dit $100\% - 2\% = 98\%$.
- d** Dit mag je niet concluderen. Je weet bijvoorbeeld niet het absolute aantal mensen dat de trein neemt.
- 03 a** Het gaat om het geslacht en om het bruto maandsalaris.
- b** 1263 werknemers verdienen tussen 1500 en 3000 euro.
 Daarvan zijn 411 werknemers een vrouw.
- c** $411 : 1263 \times 100\% \approx 32,5\%$ van deze werknemers is een vrouw.
- d** Er zijn in totaal 1914 mannen.
- e** Bij de mannen is dit percentage $1 : 1914 \times 100\% \approx 0,05\%$.
 Bij de vrouwen is dit percentage $4 : 1686 \times 100\% \approx 0,24\%$.
- f** Van de mannen verdient meer dan helft meer dan 1500 euro en bij de vrouwen verdient meer dan de helft minder dan 1500 euro.

U1 Noem het totaal aantal verplaatsingen T . Van alle verplaatsingen is 26% per fiets, dit is dan $0,26T$. Van deze verplaatsingen is 70% minder dan 7,5 km, dus $0,70 \cdot 0,26T = 0,182T$. Dit is gelijk aan 34% van alle verplaatsingen kleiner dan 7,5 km. Dan is het totaal aantal verplaatsingen kleiner dan 7,5 km gelijk aan $0,182T : 0,34 \approx 0,5353T$. Dit betekent dat 53,53% van het totaal aantal verplaatsingen kleiner dan 7,5 km is, en dat 46,47% van het totaal aantal verplaatsingen minstens 7,5 km is, dus $0,4647T$. 30% van alle verplaatsingen per fiets is $0,30 \cdot 0,26T = 0,078T$. Het gevraagde percentage is $0,078T : 0,4647T \cdot 100\% \approx 16,8\%$.

13.2 Continu, discreet, nominaal en ordinaal

intro Er zijn 16 verschillende puntenaantallen (0 tot en met 15), dus 16 verschillende cijfers mogelijk. Als de eerste 16 leerlingen in de klas allemaal een verschillende cijfer hebben, dan moeten de laatste 4 leerlingen ook één van deze 16 cijfers hebben.

- 6**
 - a** De waarden van het aantal kinderen en de temperatuur zijn een getal.
 - b** De minimum temperatuur is $18,5^{\circ}\text{C}$ en de maximum temperatuur is $26,5^{\circ}\text{C}$.
 - c** De temperatuur is geleidelijk van $18,5^{\circ}\text{C}$ naar $26,5^{\circ}\text{C}$ gegaan. Het kan niet ineens van bijvoorbeeld 20°C naar 22°C zijn gesprongen zonder alle waarden daartussen in te zijn geweest.
 - d** Er waren minimaal 7 kinderen en maximaal 16 kinderen aanwezig.
 - e** Het aantal kinderen kan de waarden 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 of 16 hebben aangenomen.
- 7**
 - a** De score die iemand haalt op een multiplechoicetest is discreet. Het kan namelijk alleen gehele waarden aannemen.
 - b** De duur van een broedperiode van zwanen is continu. Je kunt namelijk de waarden voorstellen als een aaneengesloten lijn.
 - c** Het gewicht van een bospaddenstoel is continu. Je kunt namelijk de waarden voorstellen als een aaneengesloten lijn.
- 8**
 - a** Het gaat om de variabelen gewicht en aantal.
 - b** De variabele gewicht is continu en de variabele aantal is discreet.
 - c** Plant 7 heeft gemiddeld de zwaarste spuitjes omdat het bijna het grootste totale gewicht heeft maar verreweg de minste spuitjes.
 - d** Er zal dan een relatief kleine blauwe staaf zijn (gewicht), en een relatief hoge rode staaf (aantal spuitjes). Plant 4 heeft gemiddeld de lichtste spuitjes.
- 9**
 - a** De variabele geslacht neemt de waarden jongens en meisjes aan. De variabele beoordeling neemt de waarden A, B, C, D en E aan.
 - b** De waarden van beide variabelen geven een kenmerk weer, en worden niet uitgedrukt in een getal.
 - c** Als je A en B om zou draaien dan gaan de beoordelingen niet meer van de hoogste naar de laagste.

- 10 a** Het geslacht van een hond is een nominale variabele omdat er geen logische volgorde is vast te leggen.
- b** De rang in het leger is een ordinale variabele omdat er een logische volgorde is vast te leggen (van laag naar hoog).
- c** De oogkleur van een mens is een nominale variabele omdat er geen logische volgorde is vast te leggen.
- d** Het beroep van een persoon is een nominale variabele omdat er geen logische volgorde is vast te leggen.
- 11 a** De variabelen zijn de klas en het proefwerkcijfer Duits.
- b** De variabele proefwerkcijfer Duits is kwantitatief en discreet, want de cijfers worden gegeven in tienden nauwkeurig en tussenliggende worden niet gegeven.
- c** De variabele klas is kwalitatief en ordinaal.
- d** In groep H5a is de toets het beste gemaakt. Alle kenmerkende waarden van de boxplot zijn bij H5a groter dan bij H5b.
- e** Nee, je kunt in het boxplot de afzonderlijke cijfers niet meer zien, dus de spreiding, en daarmee de standaardafwijking, kan verschillend zijn. Robin bedoelt dat een andere spreidingsmaat, namelijk de kwartielafstand, gelijk is. Dit omdat de boxen bij H5a en H5b even breed zijn.
- 12 a** De variabelen kleur en maat staan in de tabel.
- b** De kleur is een kwalitatieve variabele omdat de waarden een kenmerk weergeven. De variabele is nominaal omdat er geen logische volgorde is vast te leggen.
De maat is een kwalitatieve variabele omdat de waarden een kenmerk weergeven. De variabele is ordinaal omdat er een logische volgorde is vast te leggen (van klein naar groot).
- c** Er waren $20 + 8 + 15 + 8 = 51$ bestelde T-shirts maat L.
 $15 : 51 \times 100\% \approx 29,4\%$ van de bestelde T-shirts maat L waren blauw.
- d** Er waren $12 + 12 + 8 + 8 + 5 = 45$ rode bestelde T-shirts.
 $12 : 45 \times 100\% \approx 26,7\%$ van de rode bestelde T-shirts waren S.
- 13 a** De variabelen zijn omroeporganisatie, jaartal en percentage van alle tv-kijkers.
- b** Omroeporganisatie is kwalitatief omdat het een kenmerk weergeeft. Jaartal en percentage van alle tv-kijkers is kwantitatief.
- c** Omroeporganisatie is een nominale variabele omdat er geen logische volgorde is. Jaartal is discreet, want het zijn alleen gehele getallen. Percentage van alle tv-kijkers is een continue variabele omdat je de waarden kunt voorstellen als een aaneengesloten lijn.
- d** Als je bijvoorbeeld de percentages van 2014 bij elkaar optelt, dan krijg je $33\% + 21\% + 13\% = 65\%$ en niet 100% . Van de kijkers keek 35% naar één of meerdere andere omroeporganisaties.
- e** RTL had 20% van alle tv-kijkers.

<i>percentage</i>	20	100
<i>aantal tv-kijkers</i>	388 000	?

Het gemiddeld aantal tv-kijkers per dag in 2019 is
 $388\,000 \times 100 : 20 = 1\,940\,000$.



b Het aantal ogen van een dobbelsteen is een discrete variabele omdat het alleen bepaalde waarden kan aannemen.

c Alle snelheden van 0 km per uur tot en met 50 km per uur.



e De snelheid is een continu variabele omdat het alle waarden op de getallenlijn kan aannemen.

f A Het aantal winegums is discreet omdat het alleen bepaalde waarden kan aannemen.

B De duur van een winterslaap van een bruine beer is continu omdat je de waarden kunt voorstellen als een aaneengesloten lijn.

C Het gewicht van een stuk kaas is continu omdat je de waarden kunt voorstellen als een aaneengesloten lijn.

- 010 a** Bijvoorbeeld Rotterdam, Den Haag, Oud-Beijerland en Emmen.
- b** De waarden geven een kenmerk weer en er is geen logische volgorde vast te leggen.
- c** De variabele kan de waarden 'Helemaal oneens', 'Oneens', 'Eens' en 'Helemaal eens' aannemen.
- d** Deze variabele is ordinaal omdat er een logische volgorde is vast te leggen.
- e A** De maand waarin iemand geboren is, is ordinaal omdat er een logische volgorde is vast te leggen (van januari tot en met december).
- B** De haarkleur van een persoon is nominaal omdat er geen logische volgorde is vast te leggen.
- C** Het telefoonnummer is nominaal omdat er geen logische volgorde is vast te leggen.

- U2 a** De variabele kleur is een kwalitatieve variabele omdat de waarde een kenmerk weergeeft.
- b** De variabele kleur is een nominale variabele omdat er geen logische volgorde is vast te leggen.
- c** Je kunt de kleur opvatten als bijvoorbeeld een hoeveelheid rood, groen of blauw.
- d** De variabele kleur is continu omdat je bijvoorbeeld de hoeveelheid rood of blauw kunt voorstellen als waarden op een getallenlijn, alle tussenliggende kleuren komen voor.

13.3 Groepen grafisch vergelijken

intro Bij bedrijf A zie je bijvoorbeeld dat het laagste salaris bij de vrouwen lager ligt dan die bij de mannen, maar dat het hoogste salaris bij de vrouwen veel hoger ligt dan bij de mannen. Bij bedrijf B zie je dat de salarissen van de vrouwen bij alle kenmerkende waarden van de boxplot, hoger ligt dan die bij de mannen. Het verschil in netto maandsalarissen tussen de mannen en de vrouwen is bij bedrijf B het grootst.

- 14 a** Deze leerling heeft ongeveer 96 woorden gelezen.
- b** Groep 5:
De eerste kwartiel is 50, de derde kwartiel is 69.
De kwartielfstand is $69 - 50 = 19$ woorden.
Groep 8:
De eerste kwartiel is 85, de derde kwartiel is 99.
De kwartielfstand is $99 - 86 = 14$ woorden.
- c** Nee, de boxen overlappen elkaar niet omdat het derde kwartiel van de boxplot van groep 5 kleiner is dan het eerste kwartiel van de boxplot van groep 8.
- d** Het verschil is best wel groot omdat alle kenmerkende waarden van de boxplot van groep 8 groter zijn dan die van groep 5.
- 15** De boxen overlappen elkaar niet, dus het verschil in aantal gelezen woorden tussen groep 5 en groep 8 is groot.
- 16 a** De variabelen dagen van de week en aantal minuten tv kijken zijn in het diagram verwerkt. De variabele dagen van de week is kwalitatief en de variabele aantal minuten tv kijken is kwantitatief.
- b** Het verschil is gering omdat de boxen elkaar overlappen en de medianen van beide boxplots liggen binnen de box van de ander.
- c** Tussen vrijdag en zaterdag is het verschil ook gering.
- d** Tussen maandag en donderdag is het verschil middelmatig omdat de boxen elkaar overlappen en de mediaan van maandag ligt buiten de box van donderdag.
Tussen bijvoorbeeld donderdag en vrijdag is het verschil groot omdat de boxen elkaar niet overlappen.
- 17 a** Het gemiddelde eindcijfer zal op school A het grootst zijn. Het percentage dat tot en met een bepaalde cijfer heeft gehaald, ligt altijd bij school A lager dan bij school B.
- b** De verticale afstand tussen de twee somfrequentiepolygonen is daar het grootst.
- c** Bij school A is de somfrequentie ongeveer 58% en bij school B is de somfrequentie ongeveer 83%.
Het grootste verschil in cumulatieve percentage tussen de scholen is $83\% - 58\% = 25\%$.
- 18 a** Het gaat om de variabelen beoordeling en profiel.
- b** Beoordeling en profiel zijn beiden kwalitatief omdat het een kenmerk weergeeft.
- c** Het bezoek is het beste bij de leerlingen met een CM profiel beoordeeld. De bijbehorende grafiek ligt namelijk onder alle andere grafieken waardoor de hoge waarderingen meer voorkomen dan de lage waarderingen. Het bezoek is het slechtst beoordeeld bij de leerlingen met een NG profiel, dit kun je zien omdat de grafiek boven de andere grafieken ligt.
- d** Het grootste verschil in cumulatief percentage ofwel de $\max V_{cp} = 34$. Het verschil in beoordeling is middelmatig omdat $20 < \max V_{cp} \leq 40$. Tussen EM en NG is het grootste verschil in cumulatief percentage bij een beoordeling 3. Het $\max V_{cp} = 92,5 - 61 = 31,5$. Het verschil in beoordeling is ook hier middelmatig omdat $20 < \max V_{cp} \leq 40$.

- e Er zijn geen twee profielen waartussen het verschil gering is omdat er geen tweetal profielen bestaat waarvoor $\max V_{cp} \leq 20$.
- f Tussen de profielen NG en CM is het verschil groot. Het grootste verschil in cumulatief percentage is bij een beoordeling van 2.
Het $\max V_{cp} = 73 - 16 = 57$. Het verschil in beoordeling is groot omdat $\max V_{cp} > 40$.

- 19 a** In stad A zijn er in totaal $50 + 14 + 88 + 40 + 10 + 4 = 206$ kinderen.
In stad B zijn er in totaal $35 + 29 + 76 + 30 + 19 + 2 = 191$ kinderen

aantal kinderen	stad A	cum. in %	stad B	cum. in %
0	50	$50 : 206 \times 100 \approx 24,3$	35	$35 : 191 \times 100 \approx 18,3$
1	14	$64 : 206 \times 100 \approx 31,1$	29	$64 : 191 \times 100 \approx 33,5$
2	88	$152 : 206 \times 100 \approx 73,9$	76	$140 : 191 \times 100 \approx 73,3$
3	40	$192 : 206 \times 100 \approx 93,2$	30	$170 : 191 \times 100 \approx 89,0$
4	10	$202 : 206 \times 100 \approx 98,1$	19	$189 : 191 \times 100 \approx 99,0$
5	4	100	2	100

- b Je hebt daarvoor de cumulatieve percentages nodig en die staan al in de tabel.
- c Het grootste verschil in cumulatief percentage is bij 0 kinderen.
Het $\max V_{cp} = 24,3 - 18,3 = 6$. Het verschil is gering omdat $\max V_{cp} \leq 20$.

- 015 a** Ja, de boxen van de boxplots overlappen elkaar omdat het eerste kwartiel van de boxplot van groep 2 groter is dan het eerste kwartiel van de boxplot van groep 1, en het derde kwartiel van de boxplot van groep 2 is kleiner dan het derde kwartiel van de boxplot van groep 1.
- b De mediaan van de boxplot van groep 1 ligt tussen de mediaan en het derde kwartiel van de boxplot van groep 2. Hierdoor ligt de mediaan van de boxplot van groep 1 in de box van de boxplot van groep 2.
 - c Ja, de mediaan van de boxplot van groep 2 ligt tussen het eerste kwartiel en de mediaan van de boxplot van groep 1. Hierdoor ligt de mediaan van de boxplot van groep 2 ook in de box van de boxplot van groep 1.
 - d De boxen overlappen elkaar, en de medianen van de boxplots liggen in de boxen van de ander. Het verschil tussen groep 1 en groep 2 is daarom gering.

- 018 a** Het gaat om de variabelen beoordeling en klas.
- b De variabele beoordeling en klas zijn kwalitatief omdat de waarde een kenmerk weergeeft.
 - c In de eerste klas hebben de meeste leerlingen 'erg leuk' gezegd.
Dat zie je omdat de bijbehorende grafiek tussen beoordeling 4 en beoordeling 5 steiler is dan bij alle andere grafieken.
 - d Het grootste verschil in cumulatief percentage is bij een beoordeling van 3.
Het $\max V_{cp} = 56 - 26 = 30$.
 - e Het verschil is middelmatig omdat $20 < \max V_{cp} \leq 40$.
 - f Het maximale verschil in cumulatief percentage is bij een beoordeling van 2.
Het $\max V_{cp} = 69 - 28 = 41$. Het verschil is groot omdat $\max V_{cp} > 40$.
 - g Tussen de 3e klas en de 4e klas is het maximale verschil in cumulatief percentage 12 en omdat $\max V_{cp} \leq 20$ is het verschil gering.

- U3** Voor klas 5h.wisa1 geldt:
 eerste kwartiel is 5,8, mediaan is 6,5 en derde kwartiel is $5,8 + 2,1 = 7,9$.
 Voor klas 5h.wisa2 geldt:
 mediaan is 5,6 en derde kwartiel is 6,4
 De boxen overlappen elkaar omdat bijvoorbeeld het eerste kwartiel van de boxplot van klas 5h.wisa1 tussen de mediaan en het derde kwartiel van de boxplot van klas 5h.wisa2 ligt.
 De mediaan van de boxplot van klas 5h.wisa1 is groter dan het derde kwartiel van de boxplot van klas 5h.wisa2 en ligt dus buiten de box van de boxplot van 5h.wisa2. De mediaan van de boxplot van klas 5h.wisa2 is kleiner dan het eerste kwartiel van de boxplot van klas 5h.wisa1 en ligt dus ook buiten de box van de boxplot van 5h.wisa1.
 De boxen overlappen elkaar en beide medianen vallen buiten de box van de andere boxplot dus het verschil in eindexamenresultaten is middelmatig.

13.4 Groepen vergelijken met formules

- intro** Het verschil tussen de twee scholen is groot op het moment dat er veel meer of veel minder dan de helft van de leerlingen met wiskunde A op het Dorpscollege zitten.
- 20 a** Op school A heeft de nieuwe lesmethode het grootste effect gehad op de toetscijfers. Het gemiddelde is daar $6,7 - 5,8 = 0,9$ gestegen terwijl het $6,6 - 6,3 = 0,3$ is gestegen op school B en de standaardafwijking op beide scholen is gelijk gebleven.
- b** School A:

$$E = \frac{6,7 - 5,8}{\frac{1}{2}(0,6 + 0,6)} = \frac{0,9}{0,6} = 1,5$$
 School B:

$$E = \frac{6,6 - 6,3}{\frac{1}{2}(0,6 + 0,6)} = \frac{0,3}{0,6} = 0,5$$
- c** De waarde van E is voor school A groter dan die voor school B. Het verschil is dus groter voor school A wat overeenkomt met het antwoord van opdracht a.
- 21**
$$E = \frac{44\,128 - 42\,659}{\frac{1}{2}(2653 + 3120)} \approx 0,51$$

 Het verschil in omzet is middelmatig omdat $0,4 < E \leq 0,8$.
- 22 a** Het gaat om de variabelen gewicht en wel of niet speciale voeding.
- b** De variabele gewicht is kwantitatief omdat de waarde een getal is. Deze variabele is continu omdat je de waarden kunt voorstellen door een aaneengesloten lijn.
 De variabele wel of niet speciale voeding is kwalitatief omdat het een kenmerk weergeeft. Deze variabele is nominaal omdat je geen logische volgorde kunt vastleggen.
- c**
$$E = \frac{245 - 225}{\frac{1}{2}(30 + 30)} \approx 0,67$$

 Het verschil in gewichten is middelmatig omdat $0,4 < E \leq 0,8$.

- 23 a** De waarde van a is 20 en die van $b = 200 - 20 = 180$.
- b** Als er 10 linkshandige meisjes zijn, dan zijn er $100 - 10 = 90$ rechtshandige meisjes. De verhouding linkshandig: rechtshandig is dan bij zowel de jongens als de meisjes gelijk aan $1 : 9$. Er is dan geen verschil op het gebied van linkshandig zijn.
- c** Dan is $c = 10$ en $d = 100 - 10 = 90$.
- $$\phi = \frac{20 \times 90 - 180 \times 10}{\sqrt{(20 + 180) \times (20 + 10) \times (180 + 90) \times (10 + 90)}} = 0$$
- d** Dan is $c = 20$ en $d = 100 - 20 = 80$.
- $$\phi = \frac{20 \times 80 - 180 \times 20}{\sqrt{(20 + 180) \times (20 + 20) \times (180 + 80) \times (20 + 80)}} \approx -0,14$$
- e** Dan is $c = 70$ en $d = 100 - 70 = 30$.
- $$\phi = \frac{20 \times 30 - 180 \times 70}{\sqrt{(20 + 180) \times (20 + 70) \times (180 + 30) \times (70 + 30)}} \approx -0,62$$
- f** Hoe groter het verschil tussen jongens en meisjes is, des te meer de waarden van ϕ van 0 afwijken.

- 24** Als $\phi = -0,89$ dan is het verschil groot omdat $\phi < -0,4$.
 Als $\phi = 0,2$ dan is het verschil gering omdat $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$.
 Als $\phi = -0,401$ dan is het verschil groot omdat $\phi < -0,4$.
 Als $\phi = 0,39$ dan is het verschil middelmatig omdat $0,2 < \phi \leq 0,4$.

25 a

	wel effect	geen effect
middel	28	20
placebo	18	30

- b** $\phi = \frac{28 \times 30 - 20 \times 18}{\sqrt{(28 + 20) \times (28 + 18) \times (20 + 30) \times (18 + 30)}} \approx 0,21$
- c** Het verschil is middelmatig omdat $0,2 < \phi \leq 0,4$.

- 26 a** $873 : 3265 \times 100\% \approx 26,7\%$ van de vmbo-leerlingen rookt of heeft ooit gerookt.

b

	nooit gerookt	rookt of ooit gerookt
havo	1395	410
vwo	1383	261

$$\phi = \frac{1395 \times 261 - 410 \times 1383}{\sqrt{(1395 + 410) \times (1395 + 1383) \times (410 + 261) \times (1383 + 261)}} \approx -0,09$$

Het verschil is gering omdat $-0,2 \leq \phi \leq 0,2$.

- 022 a** Het gaat hier om de variabelen gewicht en om plaats van de boom.
- b** De variabele gewicht is kwantitatief omdat de waarde een getal is. Deze variabele is continu omdat je de waarden kunt voorstellen door een aaneengesloten lijn.
 De variabele plaats van de boom is kwalitatief omdat de waarde een kenmerk is. Deze variabele is nominaal omdat je geen logische volgorde kunt vastleggen.
- c** Je kunt de effectgrootte E gebruiken omdat beide gemiddeldes en beide standaardafwijkingen bekend zijn.

13 Conclusies uit data

- d 129 is groter dan 121, dus $\bar{X}_1 = 129$ en $\bar{X}_2 = 121$.
- e $E = \frac{129 - 121}{\frac{1}{2}(21 + 24)} \approx 0,36$
- f Omdat $E \leq 0,4$ is het verschil in gewicht van de appels gering.

025 a 820 personen deden mee aan het onderzoek.

b

	verkouden	niet verkouden	totaal
vitamine C	300	105	405
placebo	340	75	415
totaal	640	180	820

- c 300 van de 405 deelnemers die vitamine C tabletten slikten, werden verkouden. Dan werden er $405 - 300 = 105$ deelnemers niet verkouden.
- d Zie opdracht b.
- e De waarde van a staat linksboven in de tabel, dus $a = 300$.
Verder is $b = 105$, $c = 340$ en $d = 75$.
- f $phi = \frac{300 \times 75 - 105 \times 340}{\sqrt{(300 + 105) \times (300 + 340) \times (105 + 75) \times (340 + 75)}} \approx -0,09$
- g Het verschil is gering omdat $-0,2 \leq phi \leq 0,2$.
- h Het effect van het slikken van vitamine C tabletten om te voorkomen dat je verkouden wordt is gering.

U4

	vegetariër	geen vegetariër	totaal
mannen	234	$5000 - 234 = 4766$	5000
vrouwen	c	$5000 - c$	5000
totaal	$234 + c$	$9766 - c$	10 000

$$phi = \frac{234 \times (5000 - c) - 4766 \times c}{\sqrt{(234 + 4766) \times (234 + c) \times (4766 + 5000 - c) \times (c + 5000 - c)}}$$

Als het verschil in aantallen vegetariërs tussen mannen en vrouwen gering is, dan is $-0,2 \leq phi \leq 0,2$.

Invoer: $y_1 = (234(5000 - x) - 4766x) / \sqrt{5000 \cdot (234 + x) \cdot (9766 - x) \cdot 5000}$

Optie: tabel

Als $c = -42$, dan is $phi = 0,2011\dots$, het verschil is dan middelmatig.

Als $c = -41$, dan is $phi = 0,1998\dots$, het verschil is dan gering.

Als $c = 857$, dan is $phi = -0,19983\dots$, het verschil is dan gering.

Als $c = 858$, dan is $phi \approx -0,20007\dots$, het verschil is dan middelmatig.

Als het aantal vrouwelijke vegetariërs minder is dan 858, dan is het verschil in aantallen vegetariërs tussen mannen en vrouwen gering.

13.5 Data-analyse

intro Laat bijvoorbeeld de hele klas een proefwerk maken. Geef daarna de halve klas twee kopjes koffie en de andere helft twee kopjes water. Laat alle leerlingen weer een proefwerk maken over hetzelfde onderwerp en vergelijk de resultaten.

27 a Bijvoorbeeld: 'Hoe ontwikkelt de gemiddelde leeftijd zich waarop vrouwen hun eerste kind krijgen in vergelijking met het percentage vrouwen dat werkt?'

- b De leeftijden van moeders waarop zij hun eerste kind krijgen en het percentage werkende vrouwen gedurende veertig jaren zijn verzameld.
 - c Omdat lijndiagrammen uitermate geschikt zijn om een verloop in tijd weer te geven. En het kan niet in één lijndiagram omdat er twee verschillende variabelen op de verticale as zijn uitgezet.
 - d De gemiddelde leeftijd waarop vrouwen hun eerste kind krijgen stijgt en dit gaat samen met een toenemend percentage werkende vrouwen.
- 28** Aan de hand van een conclusie kun je bijvoorbeeld kijken of je misschien de onderzoeksvraag moet aanpassen of dat je andere data nodig hebt. Het kan ook zijn dat de conclusie aanleiding geeft tot een nieuwe onderzoeksvraag.
- 29 a** Bijvoorbeeld: 'Is bloed in de ontlasting een kenmerk om te bepalen of iemand darmkanker heeft?'
- b
$$\phi = \frac{76 \times 13 - 37 \times 874}{\sqrt{(76 + 37) \times (76 + 874) \times (37 + 13) \times (874 + 13)}} \approx -0,45$$

Het verschil is groot omdat $\phi < -0,4$.
- c Je kunt darmkanker goed opsporen door te kijken naar bloed in de ontlasting.
- d Er waren $76 + 37 = 113$ zieke mensen.
 $37 : 113 \times 100\% \approx 32,7\%$ van de zieke mensen kreeg een positieve uitslag.
- e $p = \frac{37}{113}$ en $n = 113$
Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is
$$\left[\frac{37}{113} - 2 \times \sqrt{\frac{\frac{37}{113} \left(1 - \frac{37}{113}\right)}{113}}, \frac{37}{113} + 2 \times \sqrt{\frac{\frac{37}{113} \left(1 - \frac{37}{113}\right)}{113}} \right]$$
. Dit is $[0,2391; 0,4157]$.
- f De tegenstanders zullen zeggen dat slechts 32,7% van de zieke mensen een correcte uitslag kregen. Er zijn veel meer zieke mensen die een incorrecte uitslag kregen dan een correcte uitslag.
- 30 a** Bijvoorbeeld: 'In welk restaurant werd meer fooi gegeven?'
- b De fooibedragen van 500 rekeningen in restaurant A en van 500 rekeningen in restaurant B zijn verzameld.
- c Er is evenveel keer fooi gegeven in beide restaurants, maar je ziet bij elke fooibedrag dat de hoeveelheid rekeningen tot dat bedrag bij restaurant B kleiner is dan bij restaurant A. Er werd dus in restaurant B in totaal meer fooi gegeven.
- d Tussen 6 en 8 dollar loopt de grafiek van restaurant B steiler dan de grafiek bij restaurant A. Er werden dus relatief meer fooien tussen de 6 en 8 dollar in restaurant B gegeven. Of: in restaurant A is dat 10% en in restaurant B 15%.
- e De 75% laagste fooien in restaurant A zijn 5,50 dollar en minder.
Bij 5,50 dollar lees je bij de grafiek van restaurant B een percentage van ongeveer 17,5% af. Dit betekent dat 82,5% (ruim driekwart) van de fooien in restaurant B hoger is 5,50 dollar.
- f Het grootste verschil in cumulatief percentage is bij een fooibedrag van 6 dollar. De $\max V_{cp} = 80 - 20 = 60$. Het verschil is groot omdat $\max V_{cp} > 40$. De conclusie is dat de fooibedragen in restaurant B groter zijn dan de fooibedragen in restaurant A.
- g Bijvoorbeeld: 'Verdiene bezoekers van restaurant B gemiddeld meer dan bezoekers van restaurant A?'

- 31 a** De boxplot is niet geschikt om het aantal overschrijdingen vast te stellen omdat je alleen kunt zien dat 25% van alle monsters tussen de 70 en 100 bacteriën bevatten, maar niet precies hoeveel monsters er meer dan de PHS norm van 80 bacteriën bevatten.
- b** Nee, dit is het gemiddelde van de honderd monsters. Het gemiddelde van de dagproductie kan hiervan verschillen.
- c** Het eerste kwartiel is 40, het derde kwartiel is 70. De interkwartielafstand is $70 - 40 = 30$. De mediaan is 60.
De ondergrens van het interval is $60 - 1,5 \times 30 = 15$.
De bovengrens van het interval is $60 + 1,5 \times 30 = 105$.
Er zijn twee monsters die buiten dit interval liggen, namelijk een van 0 bacteriën en een van 10 bacteriën, dit zijn de twee uitschieters.
Het monster met 0 bacteriën is erg onwaarschijnlijk omdat het heel ver buiten het interval ligt, bij deze zou het om een meetfout kunnen gaan.
- d** Het gemiddelde wordt groter omdat de som van alle waarnemingen nu $50 + (50 - 10) = 90$ groter wordt.
De standaardafwijking wordt kleiner omdat de twee waarnemingen die ver van het gemiddelde aflagen nu veel dichterbij het gemiddelde zullen liggen.
- e** De monsters lagen links van het gemiddelde en dus ook van de mediaan. De nieuwe meetwaarden blijven links van deze centrummaten liggen en zullen de mediaan dus niet doen veranderen, deze blijft 60.

- 029 a** Je kunt deze vraag niet met de gegevens beantwoorden omdat je niets weet over het geslacht van het kindje.
- b** Bijvoorbeeld: 'Is deze zwangerschapstest een goede test om te bepalen of iemand zwanger is?'
- c** Je kunt de formule voor *phi* gebruiken.

d

	testuitslag	
	zwanger	niet zwanger
zwanger	316	82
niet zwanger	2	600

$$\phi = \frac{316 \times 600 - 82 \times 2}{\sqrt{(316 + 82) \times (316 + 2) \times (82 + 600) \times (2 + 600)}} \approx 0,83$$

Het verschil is groot omdat $\phi > 0,4$.

- e** Het verschil is groot, dus is de zwangerschapstest goed te gebruiken om te bepalen of iemand zwanger is.
- f** Er zijn 82 zwangere vrouwen die testuitslag niet zwanger kregen. In totaal zijn er $316 + 82 = 398$ zwangere vrouwen.
De proportie zwangere vrouwen met de testuitslag niet zwanger is daarom gelijk aan $\frac{82}{316 + 82} \approx 0,206$.
- g** Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is

$$\left[0,206 - 2 \times \sqrt{\frac{0,206 \times (1 - 0,206)}{398}}, 0,206 + 2 \times \sqrt{\frac{0,206 \times (1 - 0,206)}{398}} \right]$$
 Dit is $[0,165; 0,247]$.
- h** Meer dan 20% van de zwangere vrouwen krijgt als uitslag: niet zwanger.
Dit lijkt wel erg veel.

- U5** Neurochirurgie kan het argument gebruiken dat ruim twee keer zoveel patiënten binnen twee weken bij hen terechtkan dan bij orthopedie.
Orthopedie kan het argument gebruiken dat slechts 15% van hun patiënten een wachttijd van meer dan 12 weken heeft, terwijl bij neurochirurgie bijna 40% van de patiënten meer dan 12 weken moet wachten.

13.6 Gemengde opdrachten

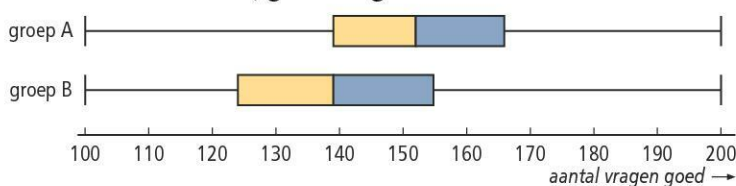
- 32 a** De variabelen aantal vragen goed en de groep (A of B) staan in dit onderzoek centraal.
- b** De variabele aantal vragen goed is kwantitatief omdat de waarde een getal is. Deze variabele is discreet omdat het een bepaald aantal waarden aanneemt.
De variabele groep is kwalitatief en nominaal.
- c** Groep A heeft de citotoets het beste gemaakt omdat de bijbehorende grafiek voor elk aantal vragen lager ligt dan die van groep B.
- d** 26% van de leerlingen van groep A heeft minder dan 140 vragen goed.
92% van de leerlingen van groep A heeft minder dan 180 vragen goed.
 $92\% - 26\% = 66\%$ van de leerlingen heeft minstens 140, maar minder dan 180 vragen goed.
- e** Het grootste verschil in cumulatief percentage is bij 140 vragen goed.
Het max $V_{cp} = 51 - 26 = 25$. Het verschil is middelmatig omdat $20 < \max V_{cp} \leq 40$.

f Boxplot A:

kleinste getal = 100, eerste kwartiel = 139, mediaan = 152,
derde kwartiel = 166, grootste getal = 200

Boxplot B:

kleinste getal = 100, eerste kwartiel = 124, mediaan = 140,
derde kwartiel = 155, grootste getal = 200



- g** De boxen overlappen elkaar en de medianen vallen (net) binnen de boxen van de andere boxplot. Het verschil in scores is gering. Dit is een andere conclusie dan bij opdracht e.

33 a $E = \frac{152,5 - 139,2}{\frac{1}{2}(19,0 + 22,3)} \approx 0,64$

Het verschil in scores is middelmatig omdat $0,4 < E \leq 0,8$.

	lager dan 150	minstens 150	totaal
groep A	$0,46 \times 150 = 69$	$0,54 \times 150 = 81$	150
groep B	$0,68 \times 150 = 102$	$0,32 \times 150 = 48$	150
totaal	171	129	300

$$\phi = \frac{69 \times 48 - 81 \times 102}{\sqrt{(69 + 81) \times (69 + 102) \times (81 + 48) \times (102 + 48)}} \approx -0,22$$

Het verschil is ook nu middelmatig omdat $-0,4 \leq \phi < -0,2$.

- 34 a** Het gaat om de variabelen geslacht en vervoersmiddel.
- b** Er zijn in totaal $352 + 35 + 106 + 58 = 551$ jongens.
 $106 : 551 \times 100\% \approx 19,2\%$ van de jongens komt met de bus naar school.
- c** Er komen $106 + 53 = 159$ leerlingen met de bus naar school.
 $53 : 159 \times 100\% \approx 33,3\%$ van de leerlingen die met de bus naar school komen is een meisje.

Onderzoeksoopdrachten

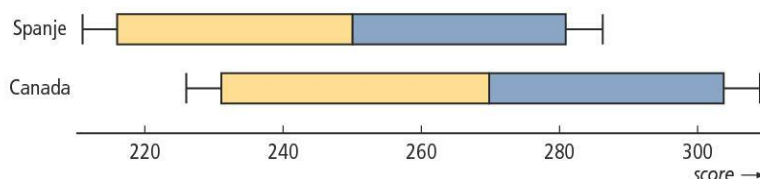
- 35 a** Als de score van de deelnemers normaal verdeeld zou zijn, dan zou de mediaan gelijk aan het gemiddelde moeten zijn. De mediaan van de scores is hier 272,5 maar het gemiddelde is 268,7. De score van de deelnemers is dus niet normaal verdeeld.

b Manier 1:

$$E = \frac{265,5 - 245,8}{\frac{1}{2}(55,5 + 51,3)} \approx 0,37$$

Het verschil tussen de scores is gering omdat $E \leq 0,4$.

Manier 2:



De boxen overlappen elkaar en de medianen vallen binnen de boxen van de andere boxplot. Het verschil tussen de scores is gering.

Samenvatting

- S1 a** Het gaat om de variabelen leeftijd, geboorteplaats, lengte en hoogst genoten opleiding.
- b** Leeftijd en lengte zijn kwantitatief omdat de waardes getallen zijn.
Leeftijd is discreet, dit zijn alleen maar gehele getallen.
Lengte is continu omdat je de waarden kunt voorstellen als een aaneengesloten lijn.
- c** Geboorteplaats en hoogst genoten opleiding zijn kwalitatief omdat de waarde een kenmerk weergeeft. Geboorteplaats is een nominale variabele omdat je geen logische volgorde kunt vastleggen. Hoogst genoten opleiding is een ordinale variabele omdat je een logische volgorde kunt vastleggen (van laag naar hoog).
- S2 a** Bijvoorbeeld: 'Is er een verband tussen het cijfer geschiedenis en het cijfer maatschappijleer?'
- b** De cijfers van leerlingen voor zowel geschiedenis als maatschappijleer.
- c** Geschiedenis: hoogste cijfer = 7,9; laagste cijfer = 4,2
Maatschappijleer: hoogste cijfer = 8,6; laagste cijfer = 4,0
- d** Het lijkt alsof er een verband is tussen de cijfers. Des te hoger het cijfer geschiedenis, des te hoger het cijfer maatschappijleer.
- S3 a** Er zijn $49 + 28 = 77$ leden ouder dan 40. In totaal zijn er $225 + 179 = 404$ leden.
 $77 : 404 \times 100\% \approx 19,1\%$ van de leden is ouder dan 40 jaar.
- b** Er zijn $29 + 123 = 152$ vrouwen van hoogstens 40 jaar.
Er zijn $41 + 135 + 29 + 123 = 328$ leden van hoogstens 40 jaar.
 $152 : 328 \times 100\% \approx 46,3\%$ van de leden van hoogstens 40 jaar is een vrouw.

- S4** De boxen overlappen elkaar en de medianen liggen buiten de box van de andere boxplot. Het verschil tussen de ziekenhuizen is middelmatig.
- S5** Het grootste verschil in cumulatief percentage is bij de klasse $[150, 160)$.
Het $\max V_{cp} = 78 - 2 = 76$. Het verschil in lengtes tussen de leerlingen in de 1e klas en in de 5e klas is groot omdat $\max V_{cp} > 40$.

S6
$$E = \frac{6,8 - 6,4}{\frac{1}{2}(0,6 + 0,5)} \approx 0,73$$

Het verschil in scores tussen de klassen is middelmatig omdat $0,4 < E \leq 0,8$.

S7

	Nederland	buitenland	totaal
docenten	236	$500 - 236 = 264$	500
artsen	139	$600 - 139 = 461$	600
totaal	375	725	1100

$$\phi = \frac{236 \times 461 - 264 \times 139}{\sqrt{(236 + 264) \times (236 + 139) \times (264 + 461) \times (139 + 461)}} \approx 0,25$$

Het verschil in aantallen is middelmatig omdat $0,2 < \phi \leq 0,4$.

Test jezelf

- T1 a** Het gaat om de variabelen afstand en groep.
b De variabele afstand is kwantitatief omdat de waarde een getal is.
 De variabele is continu omdat je de waarden kunt voorstellen door een aaneengesloten lijn.
 De variabele groep is kwalitatief omdat de waarde een kenmerk is.
 De variabele is nominaal omdat je geen logische volgorde kunt vastleggen.
c De boxen overlappen elkaar en de medianen van de boxplots vallen buiten de box van de andere boxplot. Het verschil in geworpen afstand is middelmatig.

- T2 a** Er zijn $22 + 8 + 16 = 46$ mensen met slaapproblemen.
 $22 : 46 \times 100\% \approx 47,8\%$ van de mensen met slaapproblemen is blind.
b Er zijn $22 + 11 = 33$ blinde mensen.
 $22 : 33 \times 100\% \approx 66,7\%$ van de blinde mensen heeft slaapproblemen.

c

	wel visuele beperking	geen visuele beperking
wel slaapproblemen	$22 + 8 = 30$	16
geen slaapproblemen	$11 + 13 = 24$	32

$$\phi = \frac{30 \times 32 - 16 \times 24}{\sqrt{(30 + 16) \times (30 + 24) \times (16 + 32) \times (24 + 32)}} \approx 0,22$$

Het verschil in aantallen is middelmatig omdat $0,2 < \phi \leq 0,4$.

- T3 a** Je ziet dat er op beide middelbare scholen evenveel docenten werken omdat de somfrequentiepolygonen op dezelfde hoogte eindigen.
 Er zijn 68 docenten per school.
b Het percentage is op school A het hoogst omdat de grafiek bij school A lager ligt bij een leeftijd van 50 dan de grafiek bij school B.
 Er zijn $68 - 45 = 23$ docenten van 50 jaar of ouder op school A.
 $23 : 68 \times 100\% \approx 33,8\%$ van de docenten op school A is 50 jaar of ouder.

- c Er zijn $28 + 12 = 40$ docenten jonger dan 30 jaar.
 $12 : 40 \times 100\% = 30\%$ van de docenten jonger dan 30 jaar werkt op school A.
- d Het grootste verschil in cumulatief percentage is bij 50 jaar.
 Bij school A is het cumulatief percentage $45 : 68 \times 100\% \approx 66,2\%$.
 Bij school B is het cumulatief percentage $64 : 68 \times 100\% \approx 94,1\%$.
 Het max $V_{cp} = 94,1 - 66,2 = 27,9$. Het verschil in leeftijden van de docenten is middelmatig omdat $20 < \max V_{cp} \leq 40$.

- T4 a De variabelen leeftijd en afstand kogelstoten staan in de puntenwolk.
 b De variabelen zijn allebei kwantitatief omdat de waarden ervan getallen zijn.
 De variabele leeftijd is discreet omdat het bepaalde waarden aanneemt.
 De variabele afstand kogelstoten is continu omdat je de waarden kunt voorstellen door een aaneengesloten lijn.
 c Het grootste verschil in kogelstoten tussen de kleinste en grootste afstand is bij een leeftijd van 16 jaar. De spreidingsbreedte is dus het grootst bij 16 jaar.
 d $E = \frac{93,1 - 89,2}{\frac{1}{2}(18,3 + 17,5)} \approx 0,22$
 Het verschil is gering omdat $E \leq 0,4$.

- T5 a Bijvoorbeeld: 'Neemt het aandeel managers van werkende vrouwen toe als er meer vrouwen werken?'
 b Dit is in IJsland; 32% van de werkende vrouwen werkt daar als manager.
 c Des te groter de arbeidsparticipatie van de vrouwen, des te groter het aandeel vrouwelijke managers.
 d Het aandeel managers van werkende vrouwen neemt inderdaad toe als er meer vrouwen werken.

Extra oefening

- E1 a $40 : 73 \times 100\% \approx 54,8\%$ van de leerlingen is een meisje.
 b $14 : 28 \times 100\% = 50\%$ van de leerlingen die de afstand in minder dan 9 seconden hebben afgelegd, is meisje.
 c Er zijn $14 + 14 = 28$ jongens die sneller dan 10 seconden hebben gelopen.
 $28 : 33 \times 100\% \approx 84,8\%$ van de jongens loopt sneller dan 10 seconden.
 d Er zijn $36 + 9 = 45$ leerlingen die de afstand in 9 seconden of meer hebben afgelegd, waarvan $14 + 5 = 19$ jongens zijn.
 $19 : 45 \times 100\% \approx 42,2\%$ van de leerlingen die de afstand in 9 seconden of meer hebben afgelegd, is een jongen.
- E2 De boxen overlappen elkaar en de medianen liggen in de box van de andere boxplot. Het verschil in de tijden tussen de jongens en de meisjes is gering.
- E3 Het grootste verschil in cumulatief percentage is bij 9,5 seconden.
 Het max $V_{cp} = 73 - 57 = 16$. Het verschil in tijden tussen de jongens en de meisjes is gering omdat $\max V_{cp} \leq 20$.

E4 $E = \frac{353 - 248}{\frac{1}{2}(37 + 40)} \approx 2,73$

Het verschil in de gesprongen afstand tussen groep 5 en groep 8 is groot omdat $E > 0,8$.

E5 a

hoogte van 140 cm	jongen	meisje
niet	$22 - 14 = 8$	$36 - 15 = 21$
wel	14	15

b $phi = \frac{8 \times 15 - 21 \times 14}{\sqrt{(8 + 21) \times (8 + 14) \times (21 + 15) \times (14 + 15)}} \approx -0,21$

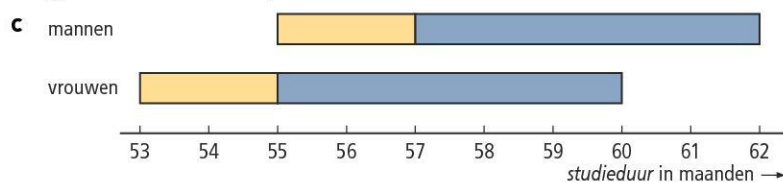
Het verschil in gesprongen hoogte tussen jongens en meisjes is middelmatig omdat $-0,4 \leq phi < -0,2$.

E6 a De variabelen geslacht en studieduur staan hier centraal.

b Mannelijke studenten doen gemiddeld 58 maanden over de studie en vrouwelijke studenten doen er gemiddeld 53 maanden over.

$$E = \frac{58 - 53}{\frac{1}{2}(4 + 3)} \approx 1,43$$

Het verschil in studieduur tussen mannelijke en vrouwelijke studenten is groot omdat $E > 0,8$.



De boxen overlappen elkaar en de medianen liggen niet buiten de box van de andere boxplot. Het verschil in studieduur tussen mannelijke en vrouwelijke studenten is gering. Dit is een andere conclusie dan in opdracht b.

E7 a

	warenhuis			
cijfer	cum. A	cum.% A	cum. B	cum.% B
[2,5; 3,5)	0	0	1	3,7
[3,5; 4,5)	1	3,7	3	11,1
[4,5; 5,5)	9	33,3	8	29,6
[5,5; 6,5)	19	70,4	13	48,1
[6,5; 7,5)	22	81,5	21	77,8
[7,5; 8,5)	26	96,3	25	92,6
[8,5; 9,5)	27	100	27	100

Het grootste verschil in cumulatief percentage is bij de klasse $[5,5; 6,5)$.

Het max $V_{cp} = 70,4 - 48,1 = 22,3$. Het verschil in beoordelingen tussen de warenhuizen is middelmatig omdat $20 < \max V_{cp} \leq 40$.

b

	A	B
onvoldoendes	18	19
voldoendes	9	8

c $phi = \frac{18 \times 8 - 19 \times 9}{\sqrt{(18 + 19) \times (18 + 9) \times (19 + 8) \times (9 + 8)}} \approx -0,04$

Het verschil in beoordelingen tussen de warenhuizen is gering omdat $-0,2 \leq phi \leq 0,2$. Je trekt dus een andere conclusie dan bij opdracht a.

14 Formules herleiden

Voorkennis

- V1**
- a** $w = 8q + 4p + 16$
- b** A $u = 5t + 3(-2 + 7t)$
 $u = 5t - 6 + 21t$
 $u = 26t - 6$
- B $w = -6h - 2h(-7h + 5)$
 $w = -6h + 14h^2 - 10h$
 $w = 14h^2 - 16h$
- C $m = 6(5a - 3b + 12)$
 $m = 30a - 18b + 72$
- D $z = 4k(2k - 7m + 1)$
 $z = 8k^2 - 28km + 4k$
- V2**
- a** Als je het huis voor zeven dagen wilt huren, moet je
 $7 \times 65 + 1,5 \times 65 + 17,50 = €570,-$ betalen.
- b** Wanneer je het vakantiehuis a dagen huurt, betaal je $a + 1,5$ keer de huurprijs per dag (€65,-). Dit moet je optellen bij de boekingskosten van €17,50. Dit resulteert in de formule $K = 65(a + 1,5) + 17,5$.
- c** $K = 65(a + 1,5) + 17,5$
 $K = 65a + 97,5 + 17,5$
 $K = 65a + 115$
- V3**
- a** $w = 5(-2d + 4) - 12$
 $w = -10d + 20 - 12$
 $w = -10d + 8$
- b** $w = 8 - 2(17 - 3d)$
 $w = 8 - 34 + 6d$
 $w = 6d - 26$
- c** $w = -5(-4 - 3p) - 12$
 $w = 20 + 15p - 12$
 $w = 15p + 8$
- V4**
- a** Het bedrag dat hij voor w waterijsjes moet betalen is gelijk aan $0,75 \cdot w$ euro en het bedrag voor c chocolade-ijsjes is gelijk aan $1,25 \cdot c$ euro. Samen is dit gelijk aan 30 euro.
- b** Stap 1: links en rechts $-0,75w$
Stap 2: links en rechts $: 1,25$
- c** $0,75w + 1,25c = 30$
 $0,75w = -1,25c + 30$
 $w = -1\frac{2}{3}c + 40$
- links en rechts $-1,25c$
links en rechts $: 0,75$
- V5**
- a** $-16q + 3p = -12$
 $3p = 16q - 12$
 $p = 5\frac{1}{3}q - 4$
- b** $7q - p = 4q + 14$
 $-p = -3q + 14$
 $p = 3q - 14$
- c** $-p - \frac{1}{2}q = -6 + 3\frac{1}{2}q$
 $-p = -6 + 4q$
 $p = 6 - 4q$
- d** $-3\left(p - \frac{q}{2}\right) = 36$
 $-3p + \frac{3q}{2} = 36$
 $-3p + 1\frac{1}{2}q = 36$
 $-3p = -1\frac{1}{2}q + 36$
 $p = \frac{1}{2}q - 12$

$$\begin{aligned} \text{e } 6p + 2(q - 7) &= q \\ 6p + 2q - 14 &= q \\ 6p &= -q + 14 \\ p &= -\frac{1}{6}q + 2\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } q - (p - 9q) &= 34 + 12q \\ q - p + 9q &= 34 + 12q \\ -p + 10q &= 34 + 12q \\ -p &= 34 + 2q \\ p &= -34 - 2q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{V6 a } \text{A } 4^2 \times 4^3 &= 4^{2+3} = 4^5 \\ \text{B } (6^5)^3 &= 6^{5 \times 3} = 6^{15} \\ \text{C } \frac{9^6}{9^2} &= 9^{6-2} = 9^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } \text{A } 3^7 \times 3 \times 3^5 &= 3^{13} \\ \text{B } \frac{9^{12}}{9^8} &= 9^4 \\ \text{C } 4^{10} \times 4^7 &= 4^{17} \\ \text{D } \frac{2^{17}}{2^{16}} &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{E } (12^3)^6 \times 12 = 12^{18} \times 12 = 12^{19}$$

$$\text{F } (5^{12} \times 5^4)^3 = (5^{16})^3 = 5^{48}$$

$$\text{G } (6^2)^9 \times 6 = 6^{18} \times 6 = 6^{19}$$

$$\text{H } \frac{8^{18}}{8^3} \times 8^2 = 8^{15} \times 8^2 = 8^{17}$$

$$\text{V7 a } \text{A } \sqrt{9} \times \sqrt{5} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{45}$$

$$\text{B } \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{14}{2}} = \sqrt{7}$$

$$\text{b } \text{A } \sqrt{15} \times \sqrt{6} = \sqrt{90}$$

$$\text{B } \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{5}} = \sqrt{6}$$

$$\text{C } \sqrt{40} \times \sqrt{3} = \sqrt{120}$$

$$\text{D } \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{4}} = \sqrt{13}$$

14.1 Lineaire formules herleiden

intro De vader van Joanne is 35 cm groter dan haar moeder, oftewel $M = V - 35$.

Wanneer je deze formule in $K = 0,5(V + M - 13)$ substitueert, krijg je

$$K = 0,5(V + V - 35 - 13)$$

$$K = 0,5(2V - 48)$$

$$K = V - 24$$

Je kunt de lengte van Joanne berekenen met de formule $K = V - 24$.

$$\text{1 a } 2q - 6w = 18$$

$$-6w = -2q + 18$$

$$w = \frac{1}{3}q - 3$$

$$\text{b } h = 6\left(\frac{1}{3}q - 3\right) - 7$$

$$h = 2q - 18 - 7$$

$$h = 2q - 25$$

$$\text{2 a } 3s - 6w = 24$$

$$3s = 6w + 24$$

$$s = 2w + 8$$

substitutie geeft:

$$k = 4(2w + 8) - 8$$

$$k = 8w + 32 - 8$$

$$k = 8w + 24$$

b $w - s = 9$
 $-s = -w + 9$
 $s = w - 9$
 substitutie geeft:
 $k = 10 + 7(w - 9)$
 $k = 10 + 7w - 63$
 $k = 7w - 53$

c $w = -7 - s$
 $-7 - s = w$
 $-s = w + 7$
 $s = -w - 7$
 substitutie geeft:
 $k = -2(-w - 7) - 5$
 $k = 2w + 14 - 5$
 $k = 2w + 9$

- 3 a** 250 gram is gelijk aan 0,25 kg en 350 gram is gelijk aan 0,35 kg.
 Voor 250 gram walnoten en 350 gram cashewnoten betaal je samen
 $0,25 \times 27 + 0,35 \times 15 = \text{€ } 12,-$.
- b** 1 kg walnoten kost €27,-, dus 1 gram walnoten kost $\frac{27}{1000} = \text{€ } 0,027$.
 1 kg cashewnoten kost €15,-, dus 1 gram cashewnoten kost $\frac{15}{1000} = \text{€ } 0,015$.
 $0,027w$ staat voor het bedrag in euro's dat je aan walnoten moet betalen en
 $0,015c$ voor het bedrag in euro's dat je aan cashewnoten moet betalen.
- c** Een halve kilogram is gelijk aan 500 gram, oftewel $w + c = 500$.
- d** $w + c = 500$
 $w = 500 - c$
 substitutie geeft:
 $0,027(500 - c) + 0,015c = B$
 $B = 0,027(500 - c) + 0,015c$
 $B = 13,5 - 0,027c + 0,015c$
 $B = 13,5 - 0,012c$

- 4 a** Een driegangendiner met vier drankjes exclusief fooi kost
 $24,00 + 4 \times 2,50 = \$34,00$. Inclusief 20% fooi wordt dit
 $1,20 \times 34,00 = \$40,80$.
- b** Voor n drankjes betaal je $2,5n$ dollar. Voor n drankjes en een
 driegangenmenu exclusief fooi betaal je $2,5n + 24$ dollar. Inclusief fooi
 wordt dit $1,2(2,5n + 24)$ omdat er 20% extra gerekend moet worden.
- c** Als je $n = 4$ invult in formule B krijg je $B = 2,5 \times 4 + 30,8 = 40,8$.
 Bij formule C krijg je $B = 3 \times 4 + 28,8 = 40,8$.
 Bij zowel formule B als C krijg je ook de uitkomst $B = 40,8$.
- d** A: $B = 1,2(2,5 \times 7 + 24) = 49,8$
 B: $B = 2,5 \times 7 + 30,8 = 48,3$
 C: $B = 3 \times 7 + 28,8 = 49,8$
 Als je voor n het getal 7 invult krijg je bij formule A en formule C dezelfde
 uitkomst.
 A: $B = 1,2(2,5 \times 10 + 24) = 58,8$
 B: $B = 2,5 \times 10 + 30,8 = 55,8$
 C: $B = 3 \times 10 + 28,8 = 58,8$
 Als je voor n het getal 10 invult krijg je ook bij formule A en C dezelfde
 uitkomst.

- e $B = 1,2(2,5n + 24)$ haakjes wegwerken geeft
 $B = 3n + 28,8$
- f Omdat je de ene formule tot de andere formule kunt herleiden geldt het voor elke waarde van n .

- 5 a $y = 8x + 9$
 $8x + 9 = y$
 $8x = y - 9$
 $x = 0,125y - 1,125$
 De formules zijn gelijkwaardig, want je kunt de formule $y = 8x + 9$ herleiden tot de formule $x = 0,125y - 1,125$.
- b $F = 3(2t + 1) + 2(7t - 11)$
 $F = 6t + 3 + 14t - 22$
 $F = 20t - 19$
 $20t + 19 = F$
 $20t = F + 19$
 $t = \frac{1}{20}F + \frac{19}{20}$
 De formules zijn gelijkwaardig, want je kunt de formule $F = 3(2t + 1) + 2(7t - 11)$ herleiden tot de formule $t = \frac{1}{20}F + \frac{19}{20}$.
- c $5(2p + 5) = 3\left(\frac{q}{3} - 1\right)$
 $10p + 25 = q - 3$
 $10p = q - 28$
 $p = 0,1q - 2,8$
 De formules zijn niet gelijkwaardig, want je kunt de formule $5(2p + 5) = 3\left(\frac{q}{3} - 1\right)$ niet herleiden tot de formule $p = 0,9q + 2,2$.
- d $a + 5 = 8b - 9(2b - 9a + 5)$
 $a + 5 = 8b - 18b + 81a - 45$
 $a + 5 = -10b + 81a - 45$
 $10b = 80a - 50$
 $b = 8a - 5$
 De formules zijn gelijkwaardig, want je kunt de formule $a + 5 = 8b - 9(2b - 9a + 5)$ herleiden tot de formule $b = 8a - 5$.
- 6 a $t = 10$ invullen geeft $P = 3,4(20 + 0,5 \times 10) + 932 = 1017$
 Na 10 minuten is de druk van het gas in het vat 1017 hPa.
- b $P = 3,4(20 + 0,5t) + 932$
 $P = 68 + 1,7t + 932$
 $P = 1,7t + 1000$
 $a = 1,7$ en $b = 1000$
- c $P = 1,7t + 1000$
 $1,7t + 1000 = P$
 $1,7t = P - 1000$
 $t \approx 0,59P - 588,24$
- d $1,7t + 1000 \leq 1500$
 $1,7t \leq 500$
 $t \leq 294,117...$
 Het vat mag maximaal 294 minuten verwarmd worden.

02 a $6m - 3r = 30$

$$-3r = -6m + 30$$

$$r = 2m - 10$$

b $u = 5 - 4(2m - 10)$

$$u = 5 - 8m + 40$$

$$u = -8m + 45$$

c $4a + 2b = 6$

$$4a = -2b + 6$$

$$a = -\frac{1}{2}b + 1\frac{1}{2}$$

substitutie geeft:

$$g = 8\left(-\frac{1}{2}b + 1\frac{1}{2}\right) + 12$$

$$g = -4b + 12 + 12$$

$$g = -4b + 24$$

d $3b - a = 8$

$$-a = -3b + 8$$

$$a = 3b - 8$$

substitutie geeft:

$$g = 5 - 7(3b - 8)$$

$$g = 5 - 21b + 56$$

$$g = -21b + 61$$

e $b = 3a + 8$

$$3a + 8 = b$$

$$3a = b - 8$$

$$a = \frac{1}{3}b - 2\frac{2}{3}$$

substitutie geeft:

$$g = 2\left(\frac{1}{3}b - 2\frac{2}{3}\right) - 10$$

$$g = \frac{2}{3}b - 5\frac{1}{3} - 10$$

$$g = \frac{2}{3}b - 15\frac{1}{3}$$

05 a stap 1: haakjes weggewerkt

stap 2: vereenvoudigd

stap 3: links en rechts verwisseld

stap 4: links en rechts $- 4$

stap 5: links en rechts $: -8$

b $-8v = R - 4$

$$v = -\frac{1}{8}R + \frac{1}{2}$$

c Nee, de formule die Joost krijgt is niet gelijk aan de formule $v = -\frac{1}{8}R + \frac{1}{4}$.

d De formules $R = 6 - 2(4v + 1)$ en $v = -\frac{1}{8}R + \frac{1}{4}$ zijn niet gelijkwaardig, want je kunt de formule $R = 6 - 2(4v + 1)$ niet herleiden tot de formule $v = -\frac{1}{8}R + \frac{1}{4}$.

e $R = 2v + 3,5$

$$2v + 3,5 = R$$

$$2v = R - 3,5$$

$$v = 0,5R - 1,75$$

De formules zijn niet gelijkwaardig, want je kunt de formule $R = 2v + 3,5$ niet herleiden tot de formule $v = 0,25R - 3,5$.

$$\text{f} \quad 7\left(\frac{t}{4} - 5\right) = 2(4r + 6)$$

$$\frac{7t}{4} - 35 = 8r + 12$$

$$1,75t - 35 = 8r + 12$$

$$8r + 12 = 1,75t - 35$$

$$8r = 1,75t - 47$$

$$r = 0,21875t - 5,875$$

De formules zijn niet gelijkwaardig, want je kunt de formule

$$7\left(\frac{t}{4} - 5\right) = 2(4r + 6) \text{ niet herleiden tot de formule } r = 2,625t - 5,875.$$

$$\text{g} \quad 2d - 4(3d - 6c + 1) = c + 7$$

$$2d - 12d + 24c - 4 = c + 7$$

$$-10d + 24c - 4 = c + 7$$

$$-10d = -23c + 11$$

$$d = 2,3c - 1,1$$

De formules zijn gelijkwaardig, want je kunt de formule

$$2d - 4(3d - 6c + 1) = c + 7 \text{ herleiden tot de formule } d = 2,3c - 1,1.$$

$$\text{U1} \quad 6w - 4(2s + w) = 2(s - 7)$$

$$6w - 8s - 4w = 2s - 14$$

$$2w - 8s = 2s - 14$$

$$-10s = -2w - 14$$

$$s = 0,2w + 1,4$$

$$s = 0,2w + 1,4 \text{ is gelijkwaardig aan } s = b \cdot w + 1,4 \text{ dus } b = 0,2.$$

Uit $s = 0,2w + 1,4$ volgt:

$$5s = w + 7$$

$$5s - w = 7$$

$$5s - w = 7 \text{ is gelijkwaardig aan } 5s - w = a, \text{ dus } a = 7.$$

14.2 Gebroken formules herleiden

$$\text{intro} \quad GK = 3,26 + \frac{600}{a}$$

$$3,26 + \frac{600}{a} = GK$$

$$\frac{600}{a} = GK - 3,26$$

$$\frac{600}{GK - 3,26} = a$$

De formule is gelijkwaardig aan formule B.

- 7 a** Het duurt $\frac{80}{120} = \frac{2}{3}$ uur om een afstand van 120 km af te leggen met een gemiddelde snelheid van 80 km per uur.

b stap 1: links en rechts $\times t$

stap 2: links en rechts : v

8 a stap 1: links en rechts $\times 7$

b stap 2: links en rechts $\times 3$

c $3w + 12 = 7r - 63$

$$3w = 7r - 75$$

$$w = 2\frac{1}{3}r - 25$$

9 a $a = \frac{12}{b+5}$

$$b+5 = \frac{12}{a}$$

$$b = \frac{12}{a} - 5$$

b $\frac{b-1}{a^2} = 7$

$$b-1 = 7a^2$$

$$b = 7a^2 + 1$$

c $\frac{4}{b} + 7 = 6a$

$$\frac{4}{b} = 6a - 7$$

$$\frac{4}{6a-7} = b$$

$$b = \frac{4}{6a-7}$$

d $a = 2 \cdot \frac{8}{b+4}$

$$a = \frac{16}{b+4}$$

$$b+4 = \frac{16}{a}$$

$$b = \frac{16}{a} - 4$$

e $\frac{b+3}{7} = \frac{2a+1}{4}$

$$4(b+3) = 7(2a+1)$$

$$4b+12 = 14a+7$$

$$4b = 14a-5$$

$$b = 3\frac{1}{2}a - 1\frac{1}{4}$$

f $\frac{6}{a-8} = \frac{2}{b+10}$

$$6(b+10) = 2(a-8)$$

$$6b+60 = 2a-16$$

$$6b = 2a-76$$

$$b = \frac{1}{3}a - 12\frac{2}{3}$$

g $\frac{6}{a} = \frac{12a}{b+3}$

$$6(b+3) = 12a^2$$

$$6b+18 = 12a^2$$

$$6b = 12a^2 - 18$$

$$b = 2a^2 - 3$$

h $\frac{7}{b} = \frac{2a+1}{a}$

$$7a = b(2a+1)$$

$$b(2a+1) = 7a$$

$$b = \frac{7a}{2a+1}$$

10 a

B	10	100	1000	10 000	100 000
GK	423	80,1429	28,9701	23,5997	23,0600

GK nadert tot de waarde 23 als het aantal geproduceerde bureaulampen heel groot wordt.

b $80 = \frac{6000}{B+5} + 23$

$$57 = \frac{6000}{B+5}$$

$$B+5 = \frac{6000}{57}$$

$$B = 105,263... - 5 = 100,263...$$

Er moeten 100 bureaulampen worden geproduceerd als $GK = 80$.

$$\text{c } GK = \frac{6000}{B+5} + 23$$

$$GK - 23 = \frac{6000}{B+5}$$

$$B+5 = \frac{6000}{GK-23}$$

$$B = \frac{6000}{GK-23} - 5$$

$$\text{d } GK = 70 \text{ invullen geeft } B = \frac{6000}{70-23} - 5 = 122.66\dots$$

Er moeten 123 bureaulampen worden geproduceerd als $GK = 70$.

- 11 a** stap 1: haakje weggewerkt
stap 2: vereenvoudigd

$$\text{b } 1,1 \text{ en } 0,7$$

$$\text{c A: } T = \frac{4(3p-6) + 8p}{40}$$

$$T = \frac{12p - 24 + 8p}{40}$$

$$T = \frac{20p - 24}{40}$$

$$T = 0,5p - 0,6$$

$$\text{B: } T = \frac{6p - (p-4) + 2(4p-8)}{25}$$

$$T = \frac{6p - p + 4 + 8p - 16}{25}$$

$$T = \frac{13p - 12}{25}$$

$$T = 0,52p - 0,48$$

- 12 a** Er geldt $G = 1,2$ en $T = 180$. Dit invullen geeft

$$t = \frac{2000 \cdot (4 \cdot 1,2 + 3)}{180} \approx 87$$

De bereidingstijd van de rollade is ongeveer 87 minuten.

$$\text{b } T = 200 \text{ invullen geeft } t = \frac{2000 \cdot (4 \cdot G + 3)}{200}$$

$$t = 10(4 \cdot G + 3)$$

$$t = 40 \cdot G + 30$$

- 13 a** De op te lossen vergelijking is $12000 = \frac{32000}{1 + 0,4x}$

$$1 + 0,4x = \frac{32000}{12000}$$

$$0,4x = 1\frac{2}{3}$$

$$x \approx 4,2$$

Na 4,2 jaar is de waarde van een auto met een nieuwwaarde van € 32.000,- gedaald tot € 12.000,-.

- b** $D_B = N$ en $y = 0$ invullen in de formule geeft

$$N = \frac{c \cdot N}{3 + 0}$$

$$N = \frac{cN}{3}$$

$$3N = cN$$

$$3 = c$$

$$c = 3$$

c $\frac{N}{1 + 0,4x} = \frac{3N}{3 + y}$

$$(3 + y)N = (1 + 0,4x) \cdot 3N$$

$$3 + y = (1 + 0,4x) \cdot 3$$

$$3 + y = 3 + 1,2x$$

$$y = 1,2x$$

$$a = 1,2 \text{ en } b = 0$$

- 09 a** stap 1: links en rechts $- 3p$

- b** Op de puntjes komt $6 - 3p$ te staan

c $\frac{4}{6 - 3p} = z$

$$z = \frac{4}{6 - 3p}$$

- d** stap 2: haakjes weggewerkt

stap 3: links en rechts $+ 20$

stap 4: links en rechts $: 10$

e $10z = 6p + 20$

$$z = 0,6p + 2$$

- U2 a** $f = 25$ en $b = 100$ invullen in de formule

$$\frac{1}{25} = \frac{1}{100} + \frac{1}{v}$$

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{v} = \frac{1}{25}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{3}{100}$$

$$3v = 100$$

$$v = 33\frac{1}{3}$$

Je moet het lampje op ongeveer 33,3 cm van de lens zetten.

b $\frac{1}{10} = \frac{1}{b} + \frac{1}{v}$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{v} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{10} - \frac{1}{v}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{v}{10v} - \frac{10}{10v}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{v - 10}{10v}$$

$$b(v - 10) = 10v$$

$$b = \frac{10v}{v - 10}$$

14.3 Wortelformules herleiden

intro $V = \sqrt{196R}$
 $V = \sqrt{196} \cdot \sqrt{R}$
 $V = 14 \cdot \sqrt{R}$ (formule A)
 $14 \cdot \sqrt{R} = V$
 $\sqrt{R} = \frac{1}{14} V$
 $R = \left(\frac{1}{14} V\right)^2$
 $R = \left(\frac{1}{14}\right)^2 \cdot V^2$
 $R = 0,0051 V^2$ (formule C)
De formules A en C zijn gelijkwaardig aan de formule $V = \sqrt{196R}$.

- 14 a** $t = 0$ invullen geeft $H = \sqrt{0,25 \cdot 0 + 100} = 10$
Op $t = 0$ staat het water 10 cm hoog.
- b** De op te lossen vergelijking is $\sqrt{0,25t + 100} = 40$
Invoer: $y_1 = \sqrt{0,25x + 100}$ en $y_2 = 40$
Venster: x van 0 tot 10000 en y van 0 tot 60
Optie: snijpunt
De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (6000, 40).
Na 6000 minuten is de waterhoogte 40 cm.
- c** stap 2: links en rechts verwisseld
stap 3: links en rechts $- 100$
- d** Op de puntjes komen de getallen 4 en 400 te staan: $t = 4H^2 - 400$.
- e** 1,5 meter is gelijk aan 150 cm. Dit invullen geeft
 $t = 4 \cdot 150^2 - 400 = 89\,600$
Het duurt 89 600 minuten om het reservoir te vullen.
- 15 a** $q = 11$ invullen geeft $p = 2 \cdot \sqrt{4 \times 11 + 5} = 14$
- b** De op te lossen vergelijking is dan $2 \cdot \sqrt{4q + 5} = 10$.
 $\sqrt{4q + 5} = 5$
 $4q + 5 = 25$
 $4q = 20$
 $q = 5$
 $q = 5$ als $p = 10$
- c** Omdat delen door 2 hetzelfde is als vermenigvuldigen met 0,5.
- d** Als je geen haakjes gebruikt wordt de 0,5 niet gekwadrateerd.
- e** stap 3: haakjes weggewerkt
stap 4: vereenvoudigd
stap 5: links en rechts verwisseld
stap 6: links en rechts $- 5$
- f** $4q = 0,25p^2 - 5$
 $q = 0,0625p^2 - 1,25$
- 16 a** $q = \sqrt{0,1p - 6}$
 $\sqrt{0,1p - 6} = q$
 $0,1p - 6 = q^2$
 $0,1p = q^2 + 6$
 $p = 10q^2 + 60$

b $q = \sqrt{\frac{1}{4}p + 8}$

$$\sqrt{\frac{1}{4}p + 8} = q$$

$$\frac{1}{4}p + 8 = q^2$$

$$\frac{1}{4}p = q^2 - 8$$

$$p = 4q^2 - 32$$

c $q = 4 \cdot \sqrt{p + 3}$

$$\frac{1}{4}q = \sqrt{p + 3}$$

$$\left(\frac{1}{4}q\right)^2 = p + 3$$

$$\frac{1}{16}q^2 = p + 3$$

$$p + 3 = \frac{1}{16}q^2$$

$$p = \frac{1}{16}q^2 - 3$$

d $q = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2p + 5}$

$$3q = \sqrt{2p + 5}$$

$$(3q)^2 = 2p + 5$$

$$9q^2 = 2p + 5$$

$$2p + 5 = 9q^2$$

$$2p = 9q^2 - 5$$

$$p = 4\frac{1}{2}q^2 - 2\frac{1}{2}$$

17 $R = 100 \cdot \sqrt{\frac{A}{4,9}}$

$$100 \cdot \sqrt{\frac{A}{4,9}} = R$$

$$\sqrt{\frac{A}{4,9}} = 0,01R$$

$$\frac{A}{4,9} = (0,01R)^2$$

$$\frac{A}{4,9} = 0,0001R^2$$

$$A = 0,00049 \cdot R^2$$

18 a $\sqrt{11} \times \sqrt{x} = \sqrt{11 \times x} = \sqrt{11x}$ en $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{x}{7}}$

b A $\sqrt{45} \times \sqrt{m} = \sqrt{45m}$

C $\sqrt{w} \times \sqrt{17} = \sqrt{17w}$

B $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{k}} = \sqrt{\frac{20}{k}}$

D $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{u}{6}}$

19 a $R = \sqrt{225s}$
 $R = \sqrt{225} \cdot \sqrt{s}$
 $R = 15 \cdot \sqrt{s}$

b $B = \sqrt{\frac{1}{4}k}$
 $B = \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{k}$
 $B = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{k}$

$$\begin{aligned} \text{c} \quad W &= \sqrt{\frac{t}{144}} \\ W &= \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{144}} \\ W &= \frac{\sqrt{t}}{12} \\ W &= \frac{1}{12} \cdot \sqrt{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d} \quad K &= \sqrt{\frac{0,01}{n}} \\ K &= \frac{\sqrt{0,01}}{\sqrt{n}} \\ K &= \frac{0,1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

- 20 a** $h = 63$ invullen geeft $K = \sqrt{12,25 \cdot 63} \approx 27,8$.
De kijkaafstand vanaf deze vuurtoren is 27,8 kilometer.

$$\begin{aligned} \text{b} \quad K &= \sqrt{12,25 \cdot h} \\ K &= \sqrt{12,25} \cdot \sqrt{h} \\ K &= 3,5 \cdot \sqrt{h} \\ \text{c} \quad K &= \sqrt{12,25 \cdot h} \\ \sqrt{12,25 \cdot h} &= K \\ 12,25 \cdot h &= K^2 \\ h &\approx 0,08 \cdot K^2 \end{aligned}$$

- 016 a** stap 1: links en rechts : 5

- b** stap 2: links en rechts gekwadrateerd

- c** stap 3: $(p \cdot q)^a = p^a \cdot q^a$

$$\begin{aligned} \text{d} \quad 0,04k^2 &= 2n - 6 \\ 2n - 6 &= 0,04k^2 \\ 2n &= 0,04k^2 + 6 \\ n &= 0,02k^2 + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e} \quad k &= \sqrt{4n - 6} \\ \sqrt{4n - 6} &= k \\ 4n - 6 &= k^2 \\ 4n &= k^2 + 6 \\ n &= \frac{1}{4}k^2 + 1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f} \quad k &= \sqrt{0,25n + 3} \\ \sqrt{0,25n + 3} &= k \\ 0,25n + 3 &= k^2 \\ 0,25n &= k^2 - 3 \\ n &= 4k^2 - 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g} \quad k &= 10 \cdot \sqrt{n + 2} \\ \frac{1}{10}k &= \sqrt{n + 2} \\ \left(\frac{1}{10}k\right)^2 &= n + 2 \\ \frac{1}{100}k^2 &= n + 2 \\ n + 2 &= \frac{1}{100}k^2 \\ n &= \frac{1}{100}k^2 - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h} \quad k &= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{5n - 1} \\ 4k &= \sqrt{5n - 1} \\ (4k)^2 &= 5n - 1 \\ 16k^2 &= 5n - 1 \\ 5n - 1 &= 16k^2 \\ 5n &= 16k^2 + 1 \\ n &= 3\frac{1}{5}k^2 + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

019 a $W = \sqrt{196m}$ wordt $W = \sqrt{196} \cdot \sqrt{m}$ en dus $W = 14 \cdot \sqrt{m}$

$S = \sqrt{\frac{n}{81}}$ wordt $S = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{81}}$ wordt $S = \frac{\sqrt{n}}{9}$ en dus $S = \frac{1}{9} \cdot \sqrt{n}$

b $G = \sqrt{\frac{r}{49}}$

$G = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{49}}$

$G = \frac{\sqrt{r}}{7}$

$G = \frac{1}{7} \cdot \sqrt{r}$

c $A = \sqrt{16f}$

$A = \sqrt{16} \cdot \sqrt{f}$

$A = 4 \cdot \sqrt{f}$

d $L = \sqrt{\frac{0,04}{u}}$

$L = \frac{\sqrt{0,04}}{\sqrt{u}}$

$L = \frac{0,2}{\sqrt{u}}$

$L = \frac{1}{5\sqrt{u}}$

e $C = \sqrt{\frac{1}{9}p}$

$C = \sqrt{\frac{1}{9}} \cdot \sqrt{p}$

$C = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{p}$

U3 a Het horizontale deel van de veter heeft een lengte van 4 cm. Een schuin deel heeft volgens de stelling van Pythagoras een lengte van $\sqrt{d^2 + 4^2} = \sqrt{d^2 + 16}$. In de schoen zijn 10 schuine delen aanwezig, dit geeft de formule

$l = 4 + 10\sqrt{d^2 + 16}$

b $l = 4 + 10\sqrt{d^2 + 16}$

$l - 4 = 10\sqrt{d^2 + 16}$

$0,1l - 0,4 = \sqrt{d^2 + 16}$

$(0,1l - 0,4)^2 = d^2 + 16$

$(0,1l - 0,4)(0,1l - 0,4) = d^2 + 16$

$0,01l^2 - 0,08l + 0,16 = d^2 + 16$

$d^2 + 16 = 0,01l^2 - 0,08l + 0,16$

$d^2 = 0,01l^2 - 0,08l - 15,84$

$d = \sqrt{0,01l^2 - 0,08l - 15,84}$

$a = 0,01$, $b = -0,08$ en $c = -15,84$

14.4 Machtsformules herleiden

intro De diameter van een large tennisbal is $\frac{7,6}{3,8} = 2$ keer zo groot als de diameter van een Xsmall tennisbal. De inhoud van een large tennisbal is dan $2^3 = 8$ keer zo groot als de inhoud van een Xsmall tennisbal.

21 a Linker blaadje: $H = p^5$

Middelste blaadje: $H = p^{21}$

Rechter blaadje: $H = p^2$

b A $f = (m^2)^5$

$f = m^{2 \times 5}$

$f = m^{10}$

B $f = m^7 \cdot m^4$

$f = m^{7+4}$

$f = m^{11}$

C $f = (m^3)^4$

$f = m^{3 \times 4}$

$f = m^{12}$

D $f = \frac{m^6}{m}$

$f = m^{6-1}$

$f = m^5$

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{22\ a} & R = (z^4)^{10} \\
 & R = z^{40} \\
 \mathbf{b} & R = z^{-3} \cdot z^8 \\
 & R = z^5 \\
 \mathbf{c} & R = \frac{z^{10}}{z^{2,5}} \\
 & R = z^{7,5} \\
 \mathbf{d} & R = z^{13} \cdot z \cdot z^4 \\
 & R = z^{18} \\
 \mathbf{e} & R = (z^{13})^7 \\
 & R = z^{91} \\
 \mathbf{f} & R = \frac{1}{z^{17}} \\
 & R = z^{-17}
 \end{array}$$

$$\mathbf{23\ a} \text{ linker blaadje: } T = 16k^6 \text{ en rechter blaadje: } T = \frac{1}{8}k^3$$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{b\ A} \quad v = (5b^6)^4 \\
 \quad v = 5b^6 \cdot 5b^6 \cdot 5b^6 \cdot 5b^6 \\
 \quad v = 5^4 \cdot (b^6)^4 \\
 \quad v = 625b^{24} \\
 \mathbf{B} \quad v = \left(\frac{10}{b}\right)^5 \\
 \quad v = \frac{10}{b} \cdot \frac{10}{b} \cdot \frac{10}{b} \cdot \frac{10}{b} \cdot \frac{10}{b} \\
 \quad v = \frac{10^5}{b^5} \\
 \quad v = \frac{100\,000}{b^5} \\
 \quad v = 100\,000b^{-5} \\
 \mathbf{C} \quad v = (2b^{10})^6 \\
 \quad v = 2b^{10} \cdot 2b^{10} \cdot 2b^{10} \cdot 2b^{10} \cdot 2b^{10} \cdot 2b^{10} \\
 \quad v = 2^6 \cdot (b^{10})^6 \\
 \quad v = 64b^{60} \\
 \mathbf{D} \quad v = \left(\frac{b}{2}\right)^{10} \\
 \quad v = \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} \\
 \quad v = \frac{b^{10}}{2^{10}} \\
 \quad v = \frac{b^{10}}{1024} \\
 \quad v = \frac{1}{1024}b^{10}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{24\ a} & Z = (-8h^7)^2 \\
 & Z = 64z^{14} \\
 \mathbf{b} & Z = \left(\frac{14h}{2}\right)^2 \\
 & Z = (7h)^2 \\
 & Z = 49h^2 \\
 \mathbf{c} & Z = (16h^3)^{1,5} \\
 & Z = 64h^{4,5} \\
 \mathbf{d} & Z = \left(\frac{16}{h}\right)^{2,25} \\
 & Z = \frac{512}{h^{2,25}} \\
 & Z = 512 \cdot \frac{1}{h^{2,25}} \\
 & Z = 512h^{-2,25}
 \end{array}$$

25 a $R = 0,07 \cdot 20^2 = 28$

Bij een snelheid van 20 meter per seconde is de remweg 28 meter.

b

aantal meters	1609	...
aantal seconden	3600	1

1 mijl per hour is gelijk aan 1609 meter per 3600 seconden omdat 1 mijl gelijk is aan 1609 meter en 1 uur gelijk is aan 3600 seconden.

Uit de verhoudingstabel volgt dan dat 1 mijl per hour gelijk is aan

$$\frac{1 \times 1609}{3600} \approx 0,447 \text{ meter per seconde.}$$

c Met de formule $v = 0,447 \cdot V$ druk je de snelheid v in meter per seconde uit in de snelheid V in miles per hour.

d $R = 0,07 \cdot (0,447 \cdot V)^2$

$$R \approx 0,07 \cdot 0,200 \cdot V^2$$

$$R = 0,014 V^2$$

26 a Met zwempak A is de inspanning van Pieter bij een snelheid van 1,65 meter per seconde gelijk aan $23,47 \cdot 1,65^{2,28} \approx 73,515 \text{ N}$.

De op te lossen vergelijking is $21,83 \cdot v^{2,21} = 73,515$.

Invoer: $y_1 = 21,83 \cdot x^{2,21}$ en $y_2 = 73,515$

Venster: x van 0 tot 3 en y van 0 tot 100

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (1,73; 73,515).

Met dezelfde inspanning kan hij met zwempak B een snelheid van 1,73 m/s halen.

b $K = \frac{21,83 \cdot v^{2,21}}{23,47 \cdot v^{2,28}}$

$$K = \frac{21,83}{23,47} \cdot \frac{v^{2,21}}{v^{2,28}}$$

$$K \approx 0,93 \cdot v^{-0,07}$$

022 a $S = (k^{10})^{2,4}$ wordt $S = k^{10 \times 2,4}$ dus $S = k^{24}$. Hier is rekenregel 2 gebruikt.

$M = u^{12} \cdot u^{-3}$ wordt $M = u^{12 + -3}$ dus $M = u^9$. Hier is rekenregel 1 gebruikt.

$R = \frac{1}{t^{1,6}}$ wordt $R = t^{-1,6}$. Hier is rekenregel 4 gebruikt.

$F = \frac{r^8}{r^{1,6}}$ wordt $F = r^{8-1,6}$ dus $F = r^{6,4}$. Hier is rekenregel 3 gebruikt.

b $W = (s^5)^6$
 $W = s^{30}$

e $W = s^{11} \cdot s \cdot s^5$
 $W = s^{17}$

c $W = \frac{s^{14}}{s^{3,5}}$
 $W = s^{10,5}$

f $W = \frac{1}{s^8}$
 $W = s^{-8}$

d $W = s^{-4} \cdot s^6$
 $W = s^2$

g $W = (s^8)^3$
 $W = s^{24}$

024 a $B = \left(\frac{r}{2}\right)^4$ wordt $B = \frac{r^4}{2^4}$ wordt $B = \frac{r^4}{16}$ dus $B = \frac{1}{16} r^4$.

Hier is gebruikgemaakt van rekenregel 6.

$D = (-4w)^3$ wordt $D = (-4)^3 \cdot w^3$ dus $D = -64w^3$.

Hier is gebruikgemaakt van rekenregel 5.

$$\begin{aligned} \text{b } T &= \left(\frac{32c}{8}\right)^3 \\ T &= (4c)^3 \\ T &= 64c^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } T &= \left(\frac{81}{c}\right)^{1,25} \\ T &= \frac{243}{c^{1,25}} \\ T &= 243 \cdot \frac{1}{c^{1,25}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } T &= (-4c^5)^4 \\ T &= 256c^{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } T &= (25c^6)^{1,5} \\ T &= 125c^9 \end{aligned}$$

U4 a De straal van de bol is r . De lengte van de ribben van de kubus is gelijk aan de diameter van de bol, dat is $2r$.

De inhoud van de kubus is dan $I_D = 2r \cdot 2r \cdot 2r = 8r^3$.

$$\text{b } P = \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}{8r^3} \times 100\%$$

$$P = \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi}{8} \cdot \frac{r^3}{r^3} \times 100\%$$

$$P \approx 52,4\%$$

Dit percentage is altijd ongeveer 52,4%.

14.5 Formules combineren

intro Dit kun je uitzoeken door de ongelijkheden

$124j + 3350 - (186j + 2640) < 100$ en $186j + 2640 - (124j + 3350) < 100$ op te lossen.

$$\text{27 a } S_I = 20 \cdot 12j + 3200$$

$$S_I = 240j + 320$$

$$\text{b } A_{\text{verschil}} = 150j + 4190 - 240j - 3200$$

$$A_{\text{verschil}} = -90j + 990$$

$$\text{c } -90j + 990 = 0$$

$$-90j = -990$$

$$j = 11$$

d Na 11 jaar sparen hebben ze evenveel gespaard.

e Na 11 jaar hebben Klaas en Iris beiden $150 \times 11 + 4190 = \text{€ } 5840,-$ gespaard.

f Iris heeft 100 euro meer spaartegoed als $A_{\text{verschil}} = -100$

$$-90j + 990 = -100$$

$$-90j = -1090$$

$$j \approx 12,1$$

Na iets meer dan 12 jaar heeft Iris 100 euro meer spaartegoed dan Klaas.

28 a De prijs per cd is $p = -0,003 \cdot 5000 + 16,25 = \text{€ } 1,25$.

De productiekosten per cd zijn $K = \frac{4500}{5000} + 0,25 = \text{€ } 1,15$.

De winst per cd is $1,25 - 1,15 = \text{€ } 0,10$.

b $W = p - K$

$$W = -0,003q + 16,25 - \left(\frac{4500}{q} + 0,25 \right)$$

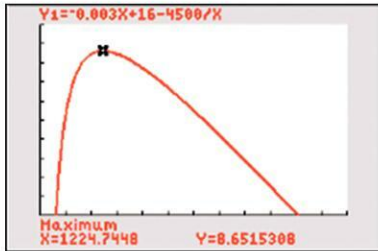
$$W = -0,003q + 16,25 - \frac{4500}{q} - 0,25$$

$$W = -0,003q + 16 - \frac{4500}{q}$$

c Invoer: $y_1 = -0,003x + 16 - \frac{4500}{x}$

Venster: x van 0 tot 6000 en y van 0 tot 10

Optie: maximum



De coördinaten van de top van de grafiek die bij een maximum hoort zijn (1224,74; 8,65).

Bij een productie van 1224 cd's is de winst

$$W = -0,003 \times 1224 + 16 - \frac{4500}{1224} \approx 8,651529 \text{ euro en bij een productie van}$$

$$1225 \text{ cd's is de winst } W = -0,003 \times 1225 + 16 - \frac{4500}{1225} \approx 8,651531 \text{ euro. De}$$

maximale winst per cd is (afgerond) € 8,65 bij een productie van 1225 cd's.

29 a De op te lossen vergelijking is $3,7w^3 = 29\,600$.

Invoer: $y_1 = 3,7x^3$ en $y_2 = 29\,600$

Venster: x van 0 tot 30 en y van 0 tot 40 000

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (20, 29 600).

Bij een windsnelheid van 20 m/s levert de windmolen 29 600 watt.

b $k = 3,6w$

$$3,6w = k$$

$$w = \frac{5}{18}k$$

substitutie geeft:

$$P = 3,7 \cdot \left(\frac{5}{18}k \right)^3$$

$$P = 3,7 \cdot 0,0214... \cdot k^3$$

$$P \approx 0,08k^3$$

30 a Bij een prijs van 9 euro per spel verkoopt hij $q = 4 \times 9^2 - 120 \times 9 + 900 = 144$ spellen.

De totale opbrengst is dan $144 \times 9 = \text{€ } 1296,-$.

b De totale kosten zijn $TK = 3 \times 144 + 150 = \text{€ } 582,-$.

De totale winst is gelijk aan $1296 - 582 = \text{€ } 714,-$.

c $TO = p \cdot q$

$$TO = p \cdot (4p^2 - 120p + 900)$$

$$TO = 4p^3 - 120p^2 + 900p$$

- d $q = 4p^2 - 120p + 900$ substitueren in $TK = 3q + 150$ geeft

$$TK = 3(4p^2 - 120p + 900) + 150$$

$$TK = 12p^2 - 360p + 2700 + 150$$

$$TK = 12p^2 - 360p + 2850$$

- e $TW = TO - TK$

$$TW = 4p^3 - 120p^2 + 900p - (12p^2 - 360p + 2850)$$

$$TW = 4p^3 - 120p^2 + 900p - 12p^2 + 360p - 2850$$

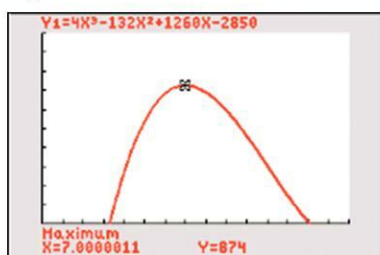
$$TW = 4p^3 - 132p^2 + 1260p - 2850$$

- f De prijs die hij het best kan vragen hoort bij de maximale winst.

$$\text{Invoer: } y_1 = 4x^3 - 132x^2 + 1260x - 2850$$

Venster: x van 0 tot 15 en y van 0 tot 1200

Optie: maximum



De coördinaten van de top van de grafiek die bij een maximum horen zijn (7, 874).

De fabrikant kan het beste een prijs van € 7,- per spel vragen.

- 31 a $l = 1,5 \cdot b$

$$1,5 \cdot b = l$$

$$b = \frac{2}{3}l$$

substitutie geeft:

$$P = 0,1550 \cdot l \cdot \frac{2}{3}l \cdot R^2$$

$$P = 0,1550 \cdot \frac{2}{3} \cdot l \cdot l \cdot R^2$$

$$P = 0,10333... \cdot l^2 \cdot R^2, \text{ dus } a \approx 0,1033.$$

- b Substitutie van de formule van K in de formule van R geeft

$$R = 5500 \cdot (2l)^{-0,812}$$

$$R = 5500 \cdot 2^{-0,812} \cdot l^{-0,812}$$

$$R = 3132,75... \cdot l^{-0,812}$$

De verkregen formule substitueren in de formule van opdracht b geeft

$$P = 0,10333... \cdot l^2 \cdot (3132,75... \cdot l^{-0,812})^2$$

$$P = 0,10333... \cdot l^2 \cdot 9\,814\,149,425 \cdot l^{-1,624}$$

$$P \approx 1\,014\,129 \cdot l^{0,376}$$

- 028 a $q = 500$ invullen geeft $p = -0,05 \times 500 + 58 = 33$

Bij een productie van 500 webcams is de prijs per webcam 33 euro.

- b De kosten per webcam zijn $K = 17,5 + \frac{250}{500} = 18$ euro.

De winst per webcam is dan $33 - 18 = 15$ euro.

- c Omdat het minteken zowel bij de 17,5 als bij de $\frac{250}{q}$ hoort.

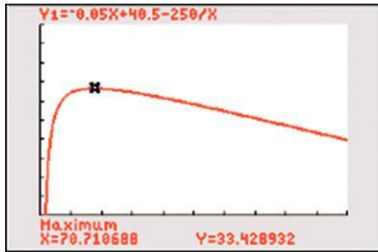
- d $W = -0,05q + 58 - 17,5 - \frac{250}{q}$

$$W = -0,05q + 40,5 - \frac{250}{q}$$

e Invoer: $y_1 = -0,05x + 40,5 - \frac{250}{x}$

Venster: x van 0 tot 400 en y van 0 tot 50

Optie: maximum



De coördinaten van de top van de grafiek die bij een maximum horen zijn (70,71; 33,43).

De maximale winst per webcam is €33,43 bij een productie van 71 webcams.

U5 Als de straal van de buis twee keer zo groot wordt, wordt R gelijk aan $2R$. Substitutie van $2R$ in de formule geeft:

$$V = p \cdot (2R)^4$$

$$V = p \cdot 16 \cdot R^4$$

$$V = 16 \cdot p \cdot R^4$$

Als de straal van de buis twee keer zo groot wordt, wordt de hoeveelheid vloeistof die per seconde door de buis stroomt 16 keer zo groot. De hoeveelheid vloeistof neemt steeds met hetzelfde percentage toe, namelijk met 1500%.

14.6 Gemengde opdrachten

32 a $\frac{2}{5}(30S - 10d) = 42$

$$12S - 4d = 42$$

$$12S = 4d + 42$$

$$S = \frac{1}{3}d + 3\frac{1}{2}$$

b $6 = \frac{S+3}{d-9} - 4$

$$10 = \frac{S+3}{d-9}$$

$$10(d-9) = S+3$$

$$10d - 90 = S + 3$$

$$S + 3 = 10d - 90$$

$$S = 10d - 93$$

c $d = \sqrt{2,5S - 10}$

$$d^2 = 2,5S - 10$$

$$2,5S - 10 = d^2$$

$$2,5S = d^2 + 10$$

$$S = \frac{2}{5}d^2 + 4$$

d $-4d + 3S = -100 - 2S$

$$-4d + 5S = -100$$

$$5S = 4d - 100$$

$$S = \frac{4}{5}d - 20$$

e $\frac{4}{S} = \frac{5d+8}{d}$

$$4d = S(5d+8)$$

$$S(5d+8) = 4d$$

$$S = \frac{4d}{5d+8}$$

f $d = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{4S+8}$

$$5d = \sqrt{4S+8}$$

$$(5d)^2 = 4S+8$$

$$25d^2 = 4S+8$$

$$4S+8 = 25d^2$$

$$4S = 25d^2 - 8$$

$$S = 6\frac{1}{4}d^2 - 2$$

33 a $S = 100$ invullen geeft $GK = 35 + \frac{9000}{4 \times 100 + 50} = 55$.

De gemiddelde kosten zijn 55 euro per schommel als er 1000 schommels worden geproduceerd.

- b** Als er meer schommels worden geproduceerd, neemt S toe. Dan neemt ook $4S + 50$ toe. De breuk neemt dan af omdat 9000 door een steeds groter getal wordt gedeeld. En dus neemt GK ook af.

- c** P is 40% hoger dan GK , oftewel $P = 1,4 \cdot GK$

$$P = 1,4 \cdot \left(35 + \frac{9000}{4S + 50} \right)$$

$$P = 49 + \frac{12600}{4S + 50}$$

d $P = 49 + \frac{12600}{4S + 50}$

$$P - 49 = \frac{12600}{4S + 50}$$

$$4S + 50 = \frac{12600}{P - 49}$$

$$4S = \frac{12600}{P - 49} - 50$$

$$S = \frac{3150}{P - 49} - 12,5$$

34 a $T = (m^5)^7 \cdot m$

$$T = m^{35} \cdot m$$

$$T = m^{36}$$

b $T = m^3 \cdot (-2m^{2,6})^4$

$$T = m^3 \cdot 16 \cdot m^{10,4}$$

$$T = 16m^{13,4}$$

c $T = \left(\frac{256}{h} \right)^{1,25}$

$$T = \frac{1024}{h^{1,25}}$$

$$T = 1024 \cdot \frac{1}{h^{1,25}}$$

$$T = 1024h^{-1,25}$$

d $T = m^6 \cdot 6m^9 \cdot \frac{1}{m^4}$

$$T = 6 \cdot m^6 \cdot m^9 \cdot m^{-4}$$

$$T = 6m^{11}$$

e $T = \frac{4}{m^7}$

$$T = 4 \cdot \frac{1}{m^7}$$

$$T = 4m^{-7}$$

f $T = \left(\frac{15m^2}{3} \right)^3$

$$T = (5m^2)^3$$

$$T = 125m^6$$

35 a De op te lossen vergelijking is $8 = 4 \cdot \sqrt{t-1}$.

$$2 = \sqrt{t-1}$$

$$4 = t - 1$$

$$t - 1 = 4$$

$$t = 5$$

Dit soort roofdieren moet 5 uur jagen om 8 kg voedsel te vangen.

b $r = 4 \cdot \sqrt{t-1}$

$$4 \cdot \sqrt{t-1} = r$$

$$\sqrt{t-1} = \frac{1}{4}r$$

$$t - 1 = \left(\frac{1}{4}r \right)^2$$

$$t - 1 = \frac{1}{16}r^2$$

$$t = \frac{1}{16}r^2 + 1$$

c $t = \frac{1}{16} \cdot 6^2 + 1 = 3,25$

Dit soort roofdieren moet 3 uur en 15 minuten jagen om 6 kg voedsel te vangen.

36 a Als de breedte 30 meter is, dan is de lengte $\frac{150}{30} = 5$ meter.

De afrastering is dan $30 + 30 + 30 + 5 + 5 - 1,5 - 1,5 = 97$ meter lang.

De totale kosten voor de afrastering zijn dan $97 \times 12 = 1164$ euro.

b De oppervlakte, dus lengte vermenigvuldigd met breedte, is 150 m^2 .

Oftewel, $l \times b = 150$. Hieruit volgt $l = \frac{150}{b}$.

c De totale lengte van de afrastering bestaat uit $3 \cdot b$ en $2 \cdot l - 1,5 - 1,5$.

$$TL = 3b + 2 \cdot l - 1,5 - 1,5$$

$$TL = 3b + 2 \cdot \frac{150}{b} - 3$$

$$TL = 3b + \frac{300}{b} - 3$$

Op de puntjes moet 300 staan.

d De totale kosten TK zijn gelijk aan $TK = 12 \cdot TL$.

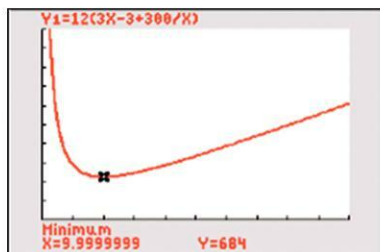
$$TK = 12 \left(3b - 3 + \frac{300}{b} \right)$$

Je wilt te weten komen voor welke waarde van b de grafiek van TK een minimum heeft.

Invoer: $y_1 = 12 \left(3x - 3 + \frac{300}{x} \right)$

Venster: x van 0 tot 50 en y van 0 tot 3000

Optie: minimum



De coördinaten van de top waar de grafiek een minimum heeft zijn (10, 684).

De kosten zijn voor boer Mertens het laagst bij een breedte van 10 meter.

37 a De snelheid van de bus is 90 km per uur, dit is gelijk aan $\frac{90}{60} = 1,5$ km per minuut. De richtingscoëfficiënt is daarom gelijk aan 1,5. Op $t = 0$ heeft de bus al 6 km afgelegd vanaf de IJsselbrug, daarom is de beginhoeveelheid 6.

b $D = A_{\text{auto}} - A_{\text{bus}}$

$$D = 2 \cdot (t - 2) + 6 - (1,5t + 6)$$

$$D = 2t - 4 + 6 - 1,5t - 6$$

$$D = 0,5 \cdot t - 4$$

dus $a = 0,5$ en $b = -4$.

S1 a $w = 6(c + 9) - 4c$

$$w = 6c + 54 - 4c$$

$$w = 2c + 54$$

$$2c + 54 = w$$

$$2c = w - 54$$

$$c = \frac{1}{2}w - 27$$

De formules zijn niet gelijkwaardig, want je kunt de formule

$w = 6(c + 9) - 4c$ niet herleiden tot de formule $c = 9 - \frac{1}{6}w$.

b $k = 3(2t + 12) - (7t - 4)$

$$k = 6t + 36 - 7t + 4$$

$$k = 6t + 36 - 7t + 4$$

$$k = -t + 40$$

$$t + k = 40$$

De formules zijn niet gelijkwaardig, want je kunt de formule

$k = 6t + 36 - 7t + 4$ niet herleiden tot de formule $t + k = 32$.

S2 a $r = \frac{14}{2E - 8}$

$$2E - 8 = \frac{14}{r}$$

$$2E = \frac{14}{r} + 8$$

$$E = \frac{7}{r} + 4$$

b $\frac{6}{E + 7} = \frac{3}{r - 6}$

$$6(r - 6) = 3(E + 7)$$

$$6r - 36 = 3E + 21$$

$$3E + 21 = 6r - 36$$

$$3E = 6r - 57$$

$$E = 2r - 19$$

S3 a $P = \frac{5n + 2(3n - 1)}{2}$

$$P = \frac{5n + 6n - 2}{2}$$

$$P = \frac{11n - 2}{2}$$

$$P = 5\frac{1}{2}n - 1$$

b $P = \frac{6n - (n - 24)}{10}$

$$P = \frac{6n - n + 24}{10}$$

$$P = \frac{5n + 24}{10}$$

$$P = \frac{1}{2}n + 2\frac{2}{5}$$

S4 a $s = \sqrt{4d - 7}$

$$s^2 = 4d - 7$$

$$4d - 7 = s^2$$

$$4d = s^2 + 7$$

$$d = \frac{1}{4}s^2 + 1\frac{7}{4}$$

b $s = 5 \cdot \sqrt{3d + 8}$

$$\frac{1}{5}s = \sqrt{3d + 8}$$

$$\left(\frac{1}{5}s\right)^2 = 3d + 8$$

$$\frac{1}{25}s^2 = 3d + 8$$

$$3d + 8 = \frac{1}{25}s^2$$

$$3d = \frac{1}{25}s^2 - 8$$

$$d = \frac{1}{75}s^2 - 2\frac{2}{3}$$

S5 a $T = \sqrt{289r}$

$$T = \sqrt{289} \cdot \sqrt{r}$$

$$T = 17 \cdot \sqrt{r}$$

b $U = \sqrt{\frac{z}{256}}$

$$U = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{256}}$$

$$U = \frac{\sqrt{z}}{16}$$

$$U = \frac{1}{16} \cdot \sqrt{z}$$

S6 a $B = d^{-3} \cdot d^8 \cdot (d^2)^{1,5}$

$$B = d^{-3} \cdot d^8 \cdot d^3$$

$$B = d^8$$

b $B = \left(\frac{14}{d^3}\right)^2$

$$B = \frac{196}{d^6}$$

$$B = 196 \cdot \frac{1}{d^6}$$

$$B = 196d^{-6}$$

c $B = (6d)^2 \cdot \frac{1}{d^3} \cdot d^4$

$$B = 36d^2 \cdot d^{-3} \cdot d^4$$

$$B = 36d^3$$

d $B = \left(\frac{2d}{6}\right)^3$

$$B = \left(\frac{1}{3}d\right)^3$$

$$B = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot (d)^3$$

$$B = \frac{1}{27} \cdot d^3$$

S7 a $q = 500 - 0,5p$ substitueren in $O = p \cdot q$ geeft

$$O = p \cdot (500 - 0,5p)$$

$$O = 500p - 0,5p^2$$

b $q = 500 - 0,5p$ substitueren in $K = \frac{2000}{q} + 138$ geeft

$$K = \frac{2000}{500 - 0,5p} + 138$$

$$K = \frac{2000}{500 - 0,5p} \cdot \frac{2}{2} + 138$$

$$K = \frac{4000}{1000 - p} + 138$$

c $W = p - K$

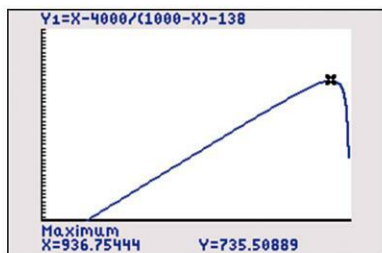
$$W = p - \left(\frac{4000}{1000 - p} + 138 \right)$$

$$W = p - \frac{4000}{1000 - p} - 138$$

d Invoer: $y_1 = x - \frac{4000}{1000 - x} - 138$

Venster: x van 0 tot 1000 en y van 0 tot 1000

Optie: maximum



De coördinaten van de top waar de grafiek een maximum heeft zijn (936,75; 735,51).

De winst per zadel is maximaal bij een prijs van €936,75 per zadel.

Test jezelf

T1 a Het bereik van de zendantenne was eerst $R = 3,6 \cdot \sqrt{12 + 0,8} = 12,879... \text{ km}$.

De zendantenne wordt 15 meter hoog en het bereik is dan

$$R = 3,6 \cdot \sqrt{15 + 0,8} = 14,309... \text{ km}$$

Het bereik neemt toe met $14,309... - 12,879... \approx 1,4 \text{ km}$.

b $R = 3,6 \cdot \sqrt{h + 0,8}$

$$\frac{5}{18} R = \sqrt{h + 0,8}$$

$$\left(\frac{5}{18} R \right)^2 = h + 0,8$$

$$\frac{25}{324} R^2 = h + 0,8$$

$$h + 0,8 = \frac{25}{324} R^2$$

$$h = \frac{25}{324} R^2 - 0,8$$

c $R = 18$ substitueren geeft $h = \frac{25}{324} \cdot 18^2 - 0,8 = 24,2$

De zendmast moet 24,2 meter hoog worden voor een bereik van 18 km.

T2 a $-(2f + 3) = 6 \left(\frac{u}{3} - 1 \right)$

$$-2f - 3 = \frac{6u}{3} - 6$$

$$-2f - 3 = 2u - 6$$

$$2u - 6 = -2f - 3$$

$$2u = -2f + 3$$

$$u = -f + 1\frac{1}{2}$$

De formules zijn niet gelijkwaardig, want je kunt de formule

$$-(2f + 3) = 6 \left(\frac{u}{3} - 1 \right) \text{ niet herleiden tot de formule } u = -f + 3.$$

$$\text{b } F = \frac{6r - (3r + 8) + 9r}{4}$$

$$F = \frac{6r - 3r - 8 + 9r}{4}$$

$$F = \frac{12r - 8}{4}$$

$$F = 3r - 2$$

$$F - 3r = -2$$

De formules zijn niet gelijkwaardig, want je kunt de formule

$$F = \frac{6r - (3r + 8) + 9r}{4} \text{ niet herleiden tot de formule } F - 3r = 2.$$

$$\text{c } k = \sqrt{\frac{49}{5t}}$$

$$k = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{5t}}$$

$$k = \frac{7}{\sqrt{5t}}$$

$$\sqrt{5t} = \frac{7}{k}$$

De formules zijn niet gelijkwaardig, want je kunt de formule $k = \sqrt{\frac{49}{5t}}$ niet herleiden tot de formule $\sqrt{5t} = \frac{k}{7}$

$$\text{d } s = \sqrt{0,16v}$$

$$s = \sqrt{0,16 \cdot v}$$

$$s = 0,4 \cdot \sqrt{v}$$

$$2,5s = \sqrt{v}$$

De formules zijn gelijkwaardig, want je kunt de formule $s = \sqrt{0,16v}$ herleiden tot de formule $2,5s = \sqrt{v}$.

$$\text{T3 a } s = 100 \text{ substitueren geeft } GK = 2,5 + \frac{600}{0,5 \times 100 + 25} = 10,5$$

Bij een productie van 100 spellen zijn de gemiddelde kosten per spel € 10,50.

b Als er veel spellen worden geproduceerd, is s erg groot. Als s erg groot wordt, wordt de noemer van de breuk heel groot. De breuk nadert dan naar 0 omdat 600 door een steeds groter getal wordt gedeeld.

GK nadert dan naar de grenswaarde 2,5.

$$\text{c } GK = 2,5 + \frac{600}{0,5s + 25}$$

$$GK - 2,5 = \frac{600}{0,5s + 25}$$

$$0,5s + 25 = \frac{600}{GK - 2,5}$$

$$0,5s = \frac{600}{GK - 2,5} - 25$$

$$s = \frac{1200}{GK - 2,5} - 50$$

$$s = \frac{2400}{2GK - 5} - 50$$

$$\text{T4 a } 36 = \frac{2}{3}(20K - 4r)$$

$$54 = 20K - 4r$$

$$20K - 4r = 54$$

$$20K = 54 + 4r$$

$$K = 2\frac{7}{10} + \frac{1}{5}r$$

$$\text{b } \frac{7}{K} = \frac{5}{2r - 5}$$

$$7(2r - 5) = 5K$$

$$14r - 35 = 5K$$

$$5K = 14r - 35$$

$$K = 2\frac{4}{5}r - 7$$

$$\text{c } r = \sqrt{1,25K + 35}$$

$$r^2 = 1,25K + 35$$

$$1,25K + 35 = r^2$$

$$1,25K = r^2 - 35$$

$$K = \frac{4}{5}r^2 - 28$$

$$\text{d } 17 = \frac{r + 8}{K - 10} - 3$$

$$20 = \frac{r + 8}{K - 10}$$

$$K - 10 = \frac{r + 8}{20}$$

$$K - 10 = \frac{1}{20}r + \frac{2}{5}$$

$$K = \frac{1}{20}r + 10\frac{2}{5}$$

$$\text{e } 6r = \frac{72}{\sqrt{K}}$$

$$\sqrt{K} = \frac{72}{6r}$$

$$\sqrt{K} = \frac{12}{r}$$

$$K = \left(\frac{12}{r}\right)^2$$

$$K = \frac{144}{r^2}$$

T5 a Bij een prijs van 990 euro per trouwalbum, heeft hij

$$q = -0,00008 \cdot 990^2 + 0,16 \cdot 990 + 60 \approx 140 \text{ opdrachten per jaar.}$$

De totale opbrengst per jaar is dan $140 \times 990 = \text{€ } 138\,600,-$.

$$\text{b } TO = p \cdot q$$

$$TO = p \cdot (-0,00008p^2 + 0,16p + 60)$$

$$TO = -0,00008p^3 + 0,16p^2 + 60p$$

c Bij een prijs van 990 euro per trouwalbum, zijn de totale kosten

$$TK = 300 \times 140 + 650 = \text{€ } 42\,650,-.$$

De totale winst is dan $138\,600 - 42\,650 = \text{€ } 95\,950,-$.

$$\text{d } TK = 300(-0,00008p^2 + 0,16p + 60) + 650$$

$$TK = -0,024p^2 + 48p + 18\,000 + 650$$

$$TK = -0,024p^2 + 48p + 18\,650$$

e $TW = TO - TK$

$$TW = -0,00008p^3 + 0,16p^2 + 60p - (-0,024p^2 + 48p + 18650)$$

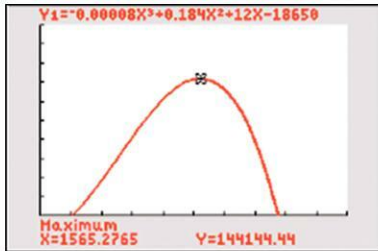
$$TW = -0,00008p^3 + 0,16p^2 + 60p + 0,024p^2 - 48p - 18650$$

$$TW = -0,00008p^3 + 0,184p^2 + 12p - 18650$$

f Invoer: $y_1 = -0,00008x^3 + 0,184x^2 + 12x - 18650$

Venster: x van 0 tot 3000 en y van 0 tot 200 000

Optie: maximum



De coördinaten waar de grafiek een maximum heeft zijn (1565,28; 144 144,44).

De maximale totale winst die hij per jaar kan maken is bij 1565 opdrachten en bedraagt € 144.144,-.

T6 a $H = (v^3)^6 \cdot v$
 $H = v^{18} \cdot v$
 $H = v^{19}$

d $H = v \cdot -3v^4 \cdot \frac{7}{v^6}$
 $H = v \cdot -3v^4 \cdot 7 \cdot \frac{1}{v^6}$
 $H = v \cdot -3v^4 \cdot 7 \cdot v^{-6}$
 $H = -21v^{-1}$

b $H = v^2 \cdot (-5v^{6,1})^7$
 $H = v^2 \cdot -78125 \cdot v^{42,7}$
 $H = -78125v^{44,7}$

e $H = -v \cdot \frac{3}{v^7}$
 $H = -v \cdot 3 \cdot \frac{1}{v^7}$
 $H = -v \cdot 3 \cdot v^{-7}$
 $H = -3v^{-6}$

c $H = \left(\frac{16}{v}\right)^{2,5}$
 $H = \frac{1024}{v^{2,5}}$
 $H = 1024 \cdot \frac{1}{v^{2,5}}$
 $H = 1024v^{-2,5}$

f $H = \left(\frac{35v^5}{7}\right)^4$
 $H = (5v^5)^4$
 $H = 625v^{20}$

T7 a Er geldt $L = 60$, $B = 40$ en $d = 25$.

$$P = 100 \cdot \frac{60 \cdot 40 - (60 - 25)(40 - 25)}{60 \cdot 40} \approx 78,1$$

Naar verwachting zal bij 78,1% van de worpen de frisbee op meer dan één tegel terechtkomen. Dit betekent dat naar verwachting $100 - 78,1 = 21,9\%$ van de worpen een prijs zal opleveren.

b Voor vierkante tegels geldt $L = B$. Dit invullen geeft

$$P = 100 \cdot \frac{L \cdot L - (L - d)(L - d)}{L \cdot L}$$

$$P = 100 \cdot \frac{L^2 - (L^2 - 2d \cdot L + d^2)}{L^2}$$

$$P = 100 \cdot \frac{L^2 - L^2 + 2d \cdot L - d^2}{L^2}$$

$$P = 100 \cdot \frac{2d \cdot L - d^2}{L^2}$$

Extra oefening

E1 a $y = 4x - 84$

$$4x - 84 = y$$

$$4x = y + 84$$

$$x = 0,25y + 21$$

De formules zijn gelijkwaardig, want je kunt de formule $y = 4x - 84$ herleiden tot de formule $x = 0,25y + 21$.

b $\frac{2}{5}P - \frac{4}{5}Q = \frac{3}{10}$

$$\frac{2}{5}P = \frac{4}{5}Q + \frac{3}{10}$$

$$P = 2Q + 0,75$$

De formules zijn niet gelijkwaardig, want je kunt de formule $\frac{2}{5}P - \frac{4}{5}Q = \frac{3}{10}$ niet herleiden tot de formule $P = 2Q + 0,5$.

c $Q = 2(5u + 1) + 7$

$$Q = 10u + 2 + 7$$

$$Q = 10u + 9$$

$$Q - 10u = 9$$

De formules zijn gelijkwaardig, want je kunt de formule $Q = 2(5u + 1) + 7$ herleiden tot de formule $Q - 10u = 9$.

E2 a $4 = \frac{x+6}{y-6}$

$$4(y-6) = x+6$$

$$4y - 24 = x + 6$$

$$4y = x + 30$$

$$y = \frac{1}{4}x + 7\frac{1}{2}$$

b $8 = 2 + \frac{y+3}{x}$

$$6 = \frac{y+3}{x}$$

$$y + 3 = 6x$$

$$y = 6x - 3$$

c $x = \frac{2}{y+3}$

$$y + 3 = \frac{2}{x}$$

$$y = \frac{2}{x} - 3$$

d $\frac{5}{y+1} = \frac{3}{x-2}$

$$3(y+1) = 5(x-2)$$

$$3y + 3 = 5x - 10$$

$$3y = 5x - 13$$

$$y = 1\frac{2}{3}x - 4\frac{1}{3}$$

e $\frac{y}{80} = \frac{5x-6}{12,5}$

$$12,5y = 80(5x-6)$$

$$12,5y = 400x - 480$$

$$y = 32x - 38,4$$

f $\frac{3}{2y+4} = \frac{x}{8}$

$$x(2y+4) = 24$$

$$2y + 4 = \frac{24}{x}$$

$$2y = \frac{24}{x} - 4$$

$$y = \frac{12}{x} - 2$$

E3 a $p = \sqrt{0,5m+1}$

$$p^2 = 0,5m + 1$$

$$0,5m + 1 = p^2$$

$$0,5m = p^2 - 1$$

$$m = 2p^2 - 2$$

b $p = \sqrt{\frac{1}{10}m+6}$

$$p^2 = \frac{1}{10}m + 6$$

$$\frac{1}{10}m + 6 = p^2$$

$$\frac{1}{10}m = p^2 - 6$$

$$m = 10p^2 - 60$$

$$\begin{aligned} \text{c } p &= 2 \cdot \sqrt{m-4} \\ \frac{1}{2}p &= \sqrt{m-4} \\ \left(\frac{1}{2}p\right)^2 &= m-4 \\ \frac{1}{4}p^2 &= m-4 \\ m-4 &= \frac{1}{4}p^2 \\ m &= \frac{1}{4}p^2 + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } p &= 0,1 \cdot \sqrt{5m-1} \\ 10p &= \sqrt{5m-1} \\ (10p)^2 &= 5m-1 \\ 100p^2 &= 5m-1 \\ 5m-1 &= 100p^2 \\ 5m &= 100p^2 + 1 \\ m &= 20p^2 + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{E4 a } T &= \sqrt{289z} \\ T &= \sqrt{289} \cdot \sqrt{z} \\ T &= 17 \cdot \sqrt{z} \\ \text{b } R &= \sqrt{\frac{169}{p}} \\ R &= \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{p}} \\ R &= \frac{13}{\sqrt{p}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } B &= \sqrt{0,09f} \\ B &= \sqrt{0,09} \cdot \sqrt{f} \\ B &= 0,3 \cdot \sqrt{f} \\ \text{d } M &= \sqrt{\frac{u}{6,25}} \\ M &= \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{6,25}} \\ M &= \frac{\sqrt{u}}{2,5} \\ M &= \frac{2}{5} \cdot \sqrt{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{E5 a } U &= r^5 \cdot r^{18} \cdot r \\ U &= r^{24} \\ \text{b } U &= \frac{r^{17}}{r^{18}} \\ U &= r^{-1} \\ \text{c } U &= (r^5)^{12} \\ U &= r^{60} \end{aligned}$$

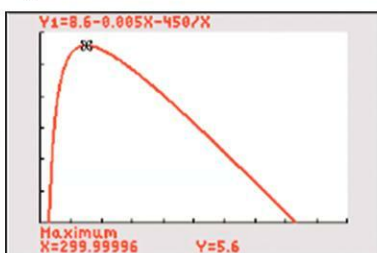
$$\begin{aligned} \text{d } U &= (-2r)^4 \cdot 6r^9 \\ U &= 16 \cdot r^4 \cdot 6 \cdot r^9 \\ U &= 96r^{13} \\ \text{e } U &= \left(\frac{3r}{5}\right)^4 \\ U &= \left(\frac{3}{5}r\right)^4 \\ U &= 0,1296r^4 \\ \text{f } U &= (r^3 \cdot r^4)^5 \\ U &= (r^7)^5 \\ U &= r^{35} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{E6 a } W &= O - K \\ W &= 12,45 - 0,005q - \left(\frac{450}{q} + 3,85\right) \\ W &= 12,45 - 0,005q - \frac{450}{q} - 3,85 \\ W &= 8,6 - 0,005q - \frac{450}{q} \end{aligned}$$

$$\text{b Invoer: } y_1 = 8,6 - 0,005x - \frac{450}{x}$$

Venster: x van 0 tot 2000 en y van 0 tot 6

Optie: maximum



De coördinaten van de top waar de grafiek een maximum heeft zijn (300; 5,6).

De winst per USB-stick is maximaal bij 300 geproduceerde USB-sticks.

E7 a $A = 2249$ substitueren geeft $S = 28,6 \times 2249^{0,32} \approx 338$

Op dit eiland komen volgens de formule 338 planten voor.

b Een vierkante mijl is gelijk aan 1 mijl vermenigvuldigd met 1 mijl, oftewel $1,609 \times 1,609 \approx 2,589 \text{ km}^2$.

c $A = \frac{1}{2,589} \cdot B$

d $A = \frac{1}{2,589} \cdot B$ substitueren geeft $S = 28,6 \cdot \left(\frac{1}{2,589} \cdot B\right)^{0,32}$

$$S = 28,6 \cdot 0,737 \dots \cdot B^{0,32}$$

$$S \approx 21,09 \cdot B^{0,32}$$

E8 a Er geldt $V = 67$ en $R = 12$. Dit invullen geeft

$$12 = \frac{10 \cdot 67}{d}$$

$$12 = \frac{670}{d}$$

$$d = \frac{670}{12} \approx 55,8$$

De dikte van de verflaag waar de fabrikant van uitgaat is 55,8 micrometer.

b $R = \frac{10 \cdot V}{d}$

$$10 \cdot V = R \cdot d$$

$$V = \frac{R \cdot d}{10}$$

c Bij een maximale oppervlakte hoort een minimaal verliespercentage, oftewel $p = 5$. Verder geldt $H = 2,5$, $d = 70$ en $V = 35$.

$$2,5 = \frac{10 \cdot A \cdot 70}{35 \cdot (100 - 5)}$$

$$2,5 = \frac{700A}{3325}$$

$$8312,5 = 700A$$

$$700A = 8312,5$$

$$A = 11,875$$

Met zo'n blik kun je maximaal 11,8 m² verven.

d $V = \frac{R \cdot d}{10}$ ofwel $V = \frac{1}{10} \cdot R \cdot d$ substitueren in $H = \frac{10 \cdot A \cdot d}{V \cdot (100 - p)}$ geeft

$$H = \frac{10 \cdot A \cdot d}{\frac{1}{10} \cdot R \cdot d \cdot (100 - p)}$$

$$H = \frac{10 \cdot A}{\frac{1}{10} \cdot R \cdot (100 - p)}$$

$$H = \frac{100A}{R \cdot (100 - p)}$$

e Er geldt nu $H = 15$ en $R = 11$.

$$15 = \frac{100A}{11 \cdot (100 - p)}$$

$$15 = \frac{100A}{1100 - 11p}$$

$$100A = 15(1100 - 11p)$$

$$100A = 16500 - 165p$$

$$A = -1,65p + 165$$

De waarde van $a = -1,65$ en de waarde van $b = 165$.

- 1 a** Het gewicht is gemiddeld met $(68 - 38) : 5 = 6$ gram per week toegenomen.
b Na 10 weken was het gewicht dan $38 + 2 \times 6 = 50$ gram.
c Het gewicht neemt dan gemiddeld met $(108 - 88) : 4 = 5$ gram per week toe.
Na 25 weken zou het gewicht dan $108 + 4 \times 5 = 128$ gram zijn.
- 2 a** In de klasse 30 000 – 40 000 euro hebben $1309 : 10 \times 7 \approx 916$ duizend huishoudens een besteedbaar inkomen van maximaal 37 000 euro.
In totaal zijn er $2547 + 1777 + 916 = 5240$ duizend huishoudens met een besteedbaar inkomen van maximaal 37 000 euro.
b In de klasse 40 000 – 50 000 euro hebben $687 : 10 \times 8 \approx 550$ duizend huishoudens met een besteedbaar inkomen van minimaal 42 000 euro.
In totaal zijn er $550 + 657 = 1207$ duizend huishoudens met een besteedbaar inkomen van minimaal 42 000 euro.
- 3 a** De gemiddelde toename per jaar is $(648 - 579) : 20 = 3,45$ inwoners per jaar.
Bradley zal het aantal inwoners schatten op $579 + 12 \times 3,45 \approx 620$.
b Tussen 1980 en 2000 nam het aantal inwoners met gemiddeld $(579 - 461) : 20 = 5,9$ per jaar toe.
In 1994 waren er dan $461 + 14 \times 5,9 \approx 544$ inwoners.
- 4 a** De groeifactor per jaar is $(100 + 1,29) : 100 = 1,0129$.
 $1,0129^t = 2$
Invoer: $y_1 = 1,0129^x$ en $y_2 = 2$
Venster: x van 0 tot 100 en y van 0 tot 5
Optie: snijpunt
De coördinaten van het snijpunt zijn (54,08; 2).
De verdubbelingstijd is ongeveer 54 jaar.
b De groeifactor per 10 jaar is $(100 - 25) : 100 = 0,75$.
De groeifactor per jaar is $0,75^{\frac{1}{10}} = 0,971\,641\dots$
 $0,971\,641\dots^t = 0,5$
Invoer: $y_1 = 0,971\,641\dots^x$ en $y_2 = 0,5$
Venster: x van 0 tot 50 en y van 0 tot 2
Optie: snijpunt
De coördinaten van het snijpunt zijn (24,09; 0,5).
De halveringstijd is ongeveer 24 jaar.
- 5 a** De groeifactor per 5 jaar is $(100 + 25) : 100 = 1,25$.
De groeifactor per jaar is $1,25^{\frac{1}{5}} = 1,045\,639\dots$
 $1,045\,639\dots^t = 2$
Invoer: $y_1 = 1,045\,639\dots^x$ en $y_2 = 2$
Venster: x van 0 tot 30 en y van 0 tot 5
Optie: snijpunt
De coördinaten van het snijpunt zijn (15,53; 2).
De verdubbelingstijd is ongeveer 15,5 jaar.

b De groeifactor per 12 jaar is $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

De groeifactor per jaar is $(\frac{2}{3})^{\frac{1}{12}} = 0,966775\dots$

$0,966775\dots^t = 0,5$

Invoer: $y_1 = 0,966775\dots^x$ en $y_2 = 0,5$

Venster: x van 0 tot 30 en y van 0 tot 2

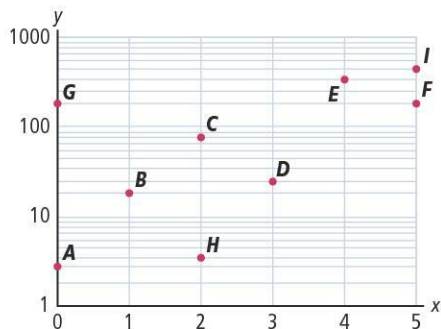
Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (20,51; 0,5).

De halveringstijd is ongeveer 20,5 jaar.

6 a De coördinaten zijn $B(1, 20)$, $C(2, 80)$, $D(3, 30)$, $E(4, 400)$ en $F(5, 200)$.

b



7 a

x	0	1	2	3
y	80	400	2000	10 000

b Er is een exponentieel verband tussen x en y , want bij een rechte lijn op logaritmisch papier hoort een exponentieel verband.

c De beginhoeveelheid is 80 en de groeifactor is

$$400 : 80 = 2000 : 400 = 10\,000 : 2000 = 5.$$

De formule is $y = 80 \cdot 5^x$.

8 a Bij grafiek A heeft de verticale as een lineaire schaalverdeling en bij grafiek B heeft de verticale as een logaritmische schaalverdeling.

b grafiek A:

Het startgetal is 30 en de richtingscoëfficiënt is $-10 : 3 = -3\frac{1}{3}$.

De formule is $y = 30 - 3\frac{1}{3}x$.

grafiek B:

De beginhoeveelheid is 1000.

De groeifactor per 3 stapjes is $100 : 1000 = 0,1$.

De groeifactor per stapje is $0,1^{\frac{1}{3}} \approx 0,464$.

De formule is $y = 1000 \cdot 0,464^x$.

c Voor de halveringstijd moet gelden $0,464\dots^x = 0,5$.

Invoer: $y_1 = 0,464\dots^x$ en $y_2 = 0,5$

Venster: x van 0 tot 5 en y van 0 tot 1

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (0,90309; 0,5).

De halveringstijd is ongeveer 0,9 jaar (of 11 maanden).

9 a De steekproefproportie is 10,8% ofwel $10,8 : 100 = 0,108$.

b De steekproefomvang n is 1000.

$$c \quad p - 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,108 - 2 \times \sqrt{\frac{0,108(1-0,108)}{1000}} \approx 0,08837$$

$$p + 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,108 + 2 \times \sqrt{\frac{0,108(1-0,108)}{1000}} \approx 0,12763$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,08837; 0,12763]$.

Met 95% zekerheid ligt het percentage Nederlanders dat naar de sauna gaat tussen 8,837 en 12,763.

De foutenmarge is $(12,763 - 8,837) : 2 = 1,963$ procent.

10 $\bar{X} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 72 - 2 \times \frac{7}{\sqrt{400}} = 71,3$

$$\bar{X} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 72 + 2 \times \frac{7}{\sqrt{400}} = 72,7$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[71,3; 72,7]$.

Met 95% zekerheid ligt het gewicht van jongens van 17 jaar tussen 71,3 en 72,7 kg.

De foutenmarge is $(72,7 - 71,3) : 2 = 0,7$ kg.

11 a Bij $t = 0$ is $N = 16 - \frac{5}{1,8^0} = 11$.

Als t steeds groter wordt, dan neemt $1,8^t$ toe, want $1,8 > 1$.

$\frac{5}{1,8^t}$ wordt dan bijna 0.

$16 - \frac{5}{1,8^t}$ wordt dan bijna 16.

Als t steeds groter wordt, dan wordt de waarde van N bijna 16.

De waarde van N neemt dan dus toe.

De grenswaarde is 16.

b A $P = \frac{250}{10 + 3 \cdot 0,15^t}$

Bij $t = 0$ is $P = \frac{250}{10 + 3 \times 0,15^0} \approx 19,2$.

Als t steeds groter wordt, dan nadert $0,15^t$ naar 0, want $0,15 < 1$.

$3 \times 0,15^t$ wordt dan bijna 0.

$10 + 3 \times 0,15^t$ wordt dan bijna 10.

$\frac{250}{10 + 3 \cdot 0,15^t}$ wordt dan bijna 25.

Als t steeds groter wordt, dan wordt de waarde van P bijna 25.

De waarde van P neemt dan dus toe.

De grenswaarde is 25.

B $P = 10(10 - 0,8^t)$

Bij $t = 0$ is $P = 10(10 - 0,8^0) = 90$.

Als t steeds groter wordt, dan nadert $0,8^t$ naar 0, want $0,8 < 1$.

$10 - 0,8^t$ wordt dan bijna 10.

$10(10 - 0,8^t)$ wordt dan bijna 100.

Als t steeds groter wordt, dan wordt de waarde van P bijna 100.

De waarde van P neemt dan dus toe.

De grenswaarde is 100.

$$C \quad P = 1000 - \frac{130}{18 + 5 \cdot 2^t}$$

Bij $t = 0$ is $P = 1000 - \frac{130}{18 + 5 \times 2^0} \approx 994$.

Als t steeds groter wordt, dan neemt 2^t toe, want $2 > 1$.

$5 \cdot 2^t$ neemt dan ook steeds toe.

$18 + 5 \cdot 2^t$ neemt dan ook steeds toe.

$\frac{130}{18 + 5 \cdot 2^t}$ wordt dan bijna 0.

$1000 - \frac{130}{18 + 5 \cdot 2^t}$ wordt dan bijna 1000.

Als t steeds groter wordt, dan wordt de waarde van P bijna 1000.

De waarde van P neemt dan dus toe.

De grenswaarde is 1000.

$$D \quad P = 4 \cdot 1,3^t + 7$$

Bij $t = 0$ is $P = 4 \times 1,3^0 + 7 = 11$.

Als t steeds groter wordt, dan neemt $1,3^t$ toe, want $1,3 > 1$.

$4 \cdot 1,3^t$ neemt dan ook steeds toe.

$4 \cdot 1,3^t + 7$ neemt dan ook steeds toe.

Als t steeds groter wordt, dan wordt de waarde van P ook steeds groter.

De waarde van P neemt dan dus toe.

De formule heeft geen grenswaarde.

12 a $t = 0$ invullen geeft $T = 6 - \frac{24}{\sqrt{3 \times 0 + 1}} = 6 - 24 = -18$

Op dat moment had het vlees een temperatuur van -18°C .

b $t = 10$ invullen geeft $T = 6 - \frac{24}{\sqrt{3 \times 10 + 1}} \approx 1,7$

Op dat moment had het vlees een temperatuur van ongeveer $1,7^\circ\text{C}$.

c $6 - \frac{24}{\sqrt{3t + 1}} = 0$

$$\frac{24}{\sqrt{3t + 1}} = 6$$

$$\sqrt{3t + 1} = 4$$

$$3t + 1 = 16$$

$$3t = 15$$

$t = 5$, dus na 5 uur is de temperatuur van het vlees 0°C .

d Bij $t = 0$ is de temperatuur -18°C .

Als t steeds groter wordt, dan neemt $3t$ toe.

$3t + 1$ neemt dan ook toe.

$\sqrt{3t + 1}$ neemt dan ook toe.

$\frac{24}{\sqrt{3t + 1}}$ wordt dan bijna 0.

$6 - \frac{24}{\sqrt{3t + 1}}$ wordt dan bijna 6.

Als t steeds groter wordt, dan wordt de waarde van T bijna 6.

De waarde van T neemt dan dus toe.

e De grenswaarde is 6, de temperatuur van de koelcel zal daarom 6°C zijn.

13 a Bij $t = 0$ is $G = \frac{10000}{4 + 200 \times 0,4^0} \approx 49$.

Als t steeds groter wordt, dan nadert $0,4^t$ naar 0, want $0,4 < 1$.

$200 \cdot 0,4^t$ wordt dan ook bijna 0.

$4 + 200 \cdot 0,4^t$ wordt dan bijna 4.

$\frac{10000}{4 + 200 \cdot 0,4^t}$ wordt dan bijna 2500.

Als t steeds groter wordt, dan wordt de waarde van G bijna 2500.

De waarde van G neemt dan dus toe.

b Zie opdracht a.

De grenswaarde is 2500 gram

1 a

<i>aantal mensen</i>	1,35	?
<i>percentage</i>	24	100

$$1,35 \times 100 = 24 \times ?$$

$$? = 1,35 \times 100 : 24 = 5,625$$

De totale bevolking bestaat uit ongeveer 5,6 miljoen mensen.

b

<i>waarde aandeel</i>	10,07	?
<i>percentage</i>	105	100

$$10,07 \times 100 = 105 \times ?$$

$$? = 10,07 \times 100 : 105 \approx 9,59$$

Een dag eerder was de waarde van het aandeel € 9,59.

2 a $\frac{3}{8} \times \frac{9}{10} = \frac{27}{80}$

c $\frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{15}{20} + \frac{4}{20} = \frac{19}{20}$

b $\frac{2}{9} : \frac{3}{10} = \frac{2}{9} \times \frac{10}{3} = \frac{20}{27}$

d $\frac{13}{28} - \frac{6}{7} = \frac{13}{28} - \frac{24}{28} = -\frac{11}{28}$

3 a $\frac{6}{25}$ deel van 650 is
 $\frac{6}{25} \times 650 = 156$

c $\frac{13}{125}$ deel van 50 000 is
 $\frac{13}{125} \times 50\,000 = 5200$

b $\frac{4}{9}$ deel van 81 000 is
 $\frac{4}{9} \times 81\,000 = 36\,000$

d $\frac{2}{17}$ deel van 8585 is
 $\frac{2}{17} \times 8585 = 1010$

4 a € 350,- verdelen in een verhouding 3 : 4 betekent $\frac{3}{7}$ deel en $\frac{4}{7}$ deel van € 350,-. $\frac{1}{7}$ deel is € 50,-, dus $\frac{3}{7}$ deel is € 150,- en $\frac{4}{7}$ deel is € 200,-.

b 28 leerlingen verdelen in een verhouding 4 : 3 betekent $\frac{4}{7}$ deel en $\frac{3}{7}$ deel van 28 leerlingen. $\frac{1}{7}$ deel zijn 4 leerlingen, dus $\frac{3}{7}$ deel zijn 12 leerlingen.
 Er zijn 12 meisjes.

5 a $2.45.21$ is $2 \times 3600 + 45 \times 60 + 21 = 9921$ seconden.

<i>afstand in meters</i>	42195	?
<i>tijd in seconden</i>	9921	1

$$42\,195 \times 1 = 9921 \times ?$$

$$? = 42\,195 \times 1 : 9921 \approx 4,25$$

Zijn gemiddelde snelheid is 4,25 meter per seconde.

b

<i>afstand in km</i>	42,195	?
<i>tijd in seconden</i>	9921	3600

$$42,195 \times 3600 = 9921 \times ?$$

$$? = 42,195 \times 3600 : 9921 \approx 15,31$$

De gemiddelde snelheid is 15,31 km per uur.

- c Een gemiddelde snelheid van 82,5 km per uur betekent 82,5 km in 60 minuten.

<i>afstand</i> in km	82,5	43,6
<i>tijd</i> in minuten	60	?

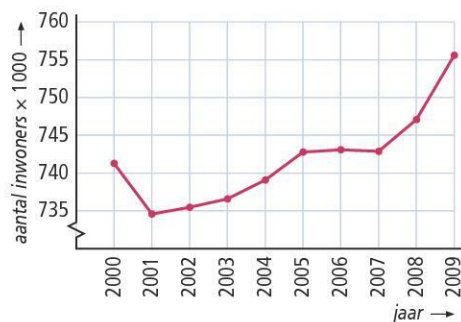
$$60 \times 43,6 = 82,5 \times ?$$

$$? = 60 \times 43,6 : 82,5 \approx 31,71$$

Zij is dus bijna 32 minuten onderweg.

- 6 Er geldt diameter band = diameter velg + 2 × hoogte band.
 De diameter van de velg is $14 \times 2,54 = 35,56$ cm.
 De bandbreedte is 185 mm, oftewel 18,5 cm.
 De hoogte van de band is $0,65 \times 18,5 = 12,025$ cm.
 De diameter van de band is $35,56 + 2 \times 12,025 = 59,61$ cm.
 De diameter van de band is dus ongeveer 60 cm.
- 7 a Als de stoelen 76 cm uit elkaar staan zijn er totaal $41 \times 7 = 287$ stoelen.
 De opbrengst is dan $287 \times 229 = €65.723,-$.
 De totale lengte aan stoelen is $76 \times 41 = 3116$ cm.
 Als de stoelen 84 cm uit elkaar staan kunnen er dus $3116 : 84 = 37$ rijen gemaakt worden.
 Er zijn dan dus $37 \times 7 = 259$ stoelen.
 De opbrengst is dan $259 \times (229 + 49) = €72.002,-$.
 De extra opbrengst is dus $72.002 - 65.723 = €6.279,-$.
- b De opbrengst in de oude opstelling is $17 \times 7 \times 229 = €27.251,-$.
 De opbrengst voor de 70 stoelen met 84 cm tussenruimte is $70 \times (229 + 49) = €19.460,-$.
 Er zijn dan $4 \times 6 = 24$ stoelen met 113 cm tussenruimte.
 Deze stoelen moeten minstens $27.251 - 19.460 = €7.791,-$ opbrengen.
 Dit is per stoel een bedrag van minstens $7.791 : 24 \approx €324,63$.
- 8 De inkomsten zonder overboeking op deze 300 vluchten zijn $300 \times 198 \times 78 = \$4.633.200,-$ en met overboeking is dat $300 \times 210 \times 78 = \$4.914.000,-$.
 De extra inkomsten zijn dus $4.914.000 - 4.633.200 = \$280.800,-$.
 Het aantal passagiers dat op deze 300 vluchten een vergoeding krijgt is $8 \times 1 + 4 \times 2 + 2 \times 3 + 1 \times 4 + 1 \times 5 = 31$.
 De extra winst is $280.800 - 31 \times 250 = \$273.050,-$.
 De gemiddelde extra winst per stoel per vlucht is $273.050 : (300 \times 198) = \$4,5...$
 Dat is een toename van $4,5... : 11,25 \times 100\% \approx 40,9\%$.
 De risicoanalist heeft dus gelijk.

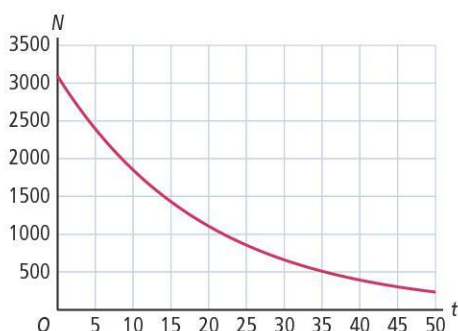
9



10 a

t	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
N	3100	2398,7	1856,1	1436,2	1111,3	859,9	665,4	514,9	398,4	308,3	238,5

b



11 a Invoer: $y_1 = 4x^{0,7} + 25x$

Met een tabel op je grafische rekenmachine zie je dat de uitkomst gelijk is aan 637 voor $x = 24$.

b Met een tabel op je grafische rekenmachine vind je dat de uitkomst voor $x = 3,7$ gelijk is aan 102,5.

12 a Invoer: $y_1 = 120 - 84 \cdot 0,95^x$ en $y_2 = 100 - 0,5x$

Venster: x van 0 tot 50 en y van 0 tot 150

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (20,06; 89,97).

De oplossing is $x \approx 20,06$.

b Invoer: $y_1 = -x^2 - 3,5x + 18$

Venster: x van -10 tot 10 en y van -10 tot 50

Optie: maximum

De coördinaten van de top van de grafiek die bij een maximum horen zijn (-1,75; 21,0625).

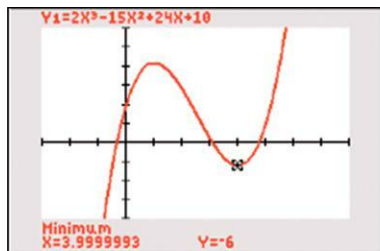
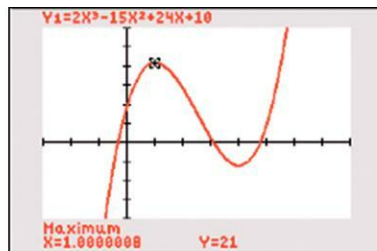
Het maximum van de formule is ongeveer 21,06.

13

De schatting van het aantal inwoners in 1985 is het meest betrouwbaar, omdat in deze grafiek alleen maar gegevens staan tot 2010. Wat er na 2010 met het inwoneraantal is gebeurd is niet getekend, dus ook moeilijk te schatten.

- 14** van A naar B: toenemend stijgend
 van B naar C: afnemend stijgend
 van C naar D: constant
 van D naar E: afnemend dalend
 van E naar F: constant stijgend

- 15 a** Invoer: $y_1 = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 10$
 Venster: x van -3 tot 8 en y van -20 tot 30
 Opties: minimum en maximum



De coördinaten van de top van de grafiek die bij een minimum horen zijn $(4, -6)$ en de coördinaten van de top van de grafiek die bij een maximum horen zijn $(1, 21)$.

Het maximum is 21 bij $x = 1$.

Het minimum is -6 bij $x = 4$.

- b** In de plot zie je dat de grafiek stijgend is voor $x < 1$ en voor $x > 4$.

- 16 a** $x = 0$ geeft $y = 2 + \frac{3}{1-0} = 2 + \frac{3}{1} = 5$.

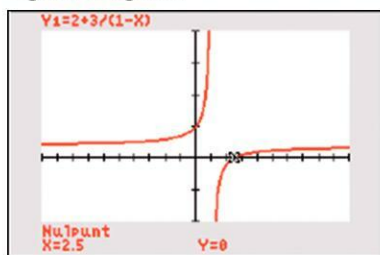
De coördinaten van het snijpunt met de y -as zijn $(0, 5)$.

$$y = 0 \text{ geeft } 2 + \frac{3}{1-x} = 0$$

$$\text{Invoer: } y_1 = 2 + \frac{3}{1-x}$$

Venster: x van -10 tot 10 en y van -10 tot 20

Optie: nulpunt



De coördinaten van het snijpunt met de y -as zijn $(2\frac{1}{2}, 0)$.

- b** De grafiek heeft geen snijpunt met de x -as omdat de vergelijking $5 \cdot 0,7^x = 0$ geen oplossing heeft. De grenswaarde bij de grafiek is gelijk aan 0 .
- c** $x = 0$ geeft $y = 5 \cdot 0,7^0 = 5 \cdot 1 = 5$.
 De coördinaten van het snijpunt met de y -as zijn $(0, 5)$.

17 a

t	10	100	1000	10 000
P	725,00	725,00	725,00	725,00

De grenswaarde is 725.

b

a	10	100	1000	10 000
k	582	584,97	585,00	585,00

De grenswaarde is 585.

c

x	10	100	1000	10 000
A	5000	500 000	50 000 000	5 000 000 000

Er is geen grenswaarde.

d

t	10	100	1000	10 000
u	-1,8	-1,52	-1,50	-1,50

De grenswaarde is -1,5.

18 a Invullen van $T = 18,1$ en $U = 4$ geeft:

$$18,1 = 0,15P + 6,2 \cdot 4 - 10$$

$$18,1 = 0,15P + 14,8$$

$$0,15P = 3,3$$

$$P = 22$$

b Invullen van $T = 24,71$ en $P = 8,2$ geeft:

$$24,71 = 0,15 \cdot 8,2 + 6,2U - 10$$

$$24,71 = -8,77 + 6,2U$$

$$33,48 = 6,2U$$

$$6,2U = 33,48$$

$$U = 5,4$$

c Invullen van $P = 2$ geeft:

$$T = 0,15 \cdot 2 + 6,2U - 10$$

$$T = 0,3 + 6,2U - 10$$

$$T = 6,2U - 9,7$$

19 a Invullen van $Y = 3$, $Z = 2$ en $P = 5$ geeft:

$$X = \frac{4 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 4}{2 \cdot 5} = \frac{12 - 6 + 4}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

b Invullen van $X = 16$, $Z = 2$ en $P = 0,5$ geeft:

$$16 = \frac{4Y - 3 \cdot 2 + 4}{2 \cdot 0,5}$$

$$16 = \frac{4Y - 2}{1}$$

$$16 = 4Y - 2$$

$$4Y = 18$$

$$Y = 4,5$$

c Invullen van $Y = 10$ en $Z = 4,5$ geeft:

$$X = \frac{4 \cdot 10 - 3 \cdot 4,5 + 4}{2P}$$

$$X = \frac{30,5}{2P}$$

$$X = \frac{61}{4P}$$

- d Invullen van $Y = 10$ en $P = 5$ geeft:

$$X = \frac{4 \cdot 10 - 3Z + 4}{2 \cdot 5}$$

$$X = \frac{-3Z + 44}{10}$$

$$X = -0,3Z + 4,4$$

- 20 a $0,5x + 2 = -0,25x + 4$

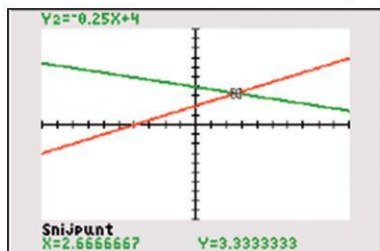
$$0,75x = 2$$

$$x = \frac{2}{0,75} = 2\frac{2}{3} \text{ en } y = 0,5 \cdot 2\frac{2}{3} + 2 = 3\frac{1}{3}$$

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn $(2\frac{2}{3}; 3\frac{1}{3})$.

- b Invoer: $y_1 = 0,5x + 2$ en $y_2 = -0,25x + 4$

Venster: x van -10 tot 10 en y van -10 tot 10



In de plot zie je dat voor $a > 2\frac{2}{3}$ de grafiek van $P = 0,5a + 2$ boven de grafiek van $P = -0,25a + 4$ ligt.

- c $0,5a + 2 > -0,25a + 4$ geeft $a > 2\frac{2}{3}$.

- 21 a Om 7.00 uur is $t = 0$. Invullen geeft:

$$T = 21 - 6 \cdot 0,7^0 = 15$$

De temperatuur om 7.00 uur is 15°C .

b

t	10	100	1000	10 000
T	20,83	21,00	21,00	21,00

De grenswaarde is 21.

- c Op den duur wordt de temperatuur in de kamer 21°C .

- d De op te lossen vergelijking is $21 - 6 \cdot 0,7^t = 20$.

Invoer: $y_1 = 21 - 6 \times 0,7^x$ en $y_2 = 20$

Venster: x van 0 tot 10 en y van 0 tot 25

Optie: snijpunt

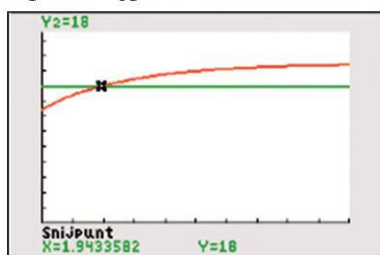
De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn $(5,02; 20)$.

Na 5 minuten is de temperatuur 20°C .

- e De op te lossen ongelijkheid is $21 - 6 \cdot 0,7^t > 18$.

Invoer: $y_2 = 18$

Optie: snijpunt



De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn $(1,94; 18)$.

Na 2 minuten, vanaf 7.02 uur, ligt de temperatuur boven de 18°C .

- 22 a** Als ze kiezen voor het kleine formaat hebben ze

$$N = \frac{2\,000\,000}{(190 + 10)(65 + 10)} \cdot 16,8 = 2240 \text{ bakstenen nodig.}$$

Als ze kiezen voor het grote formaat hebben ze

$$N = \frac{2\,000\,000}{(220 + 10)(65 + 10)} \cdot 16,8 = 1948,82... \text{ bakstenen nodig.}$$

Het scheelt dus $2240 - 1948,82... \approx 300$ bakstenen.

- b** De muuroppervlakte M is $8 \times 1,8 = 14,4 \text{ m}^2$.

Voor dit muurtje hebben ze $N = \frac{2\,000\,000}{(220 + 10)(65 + 10)} \cdot 14,4 \approx 1670$ bakstenen nodig.

Omdat 10 procent verloren gaat, moeten ze $1670 : 90 \times 100 = 1856$ bakstenen hebben.

Ze kunnen kiezen uit 186 dozen van 10 stuks. Dit kost $186 \times 6,50 = € 1209,-$.

Ze kunnen ook kiezen uit 3 pallets van 800 stuks, dit kost $3 \times 450 = € 1350,-$.

Of ze kiezen voor 2 pallets van 800 stuks en 26 dozen van 10 stuks, dit kost $2 \times 450 + 26 \times 6,50 = € 1069,-$.

Ze zullen kiezen voor het laatste en betalen dus 1069 euro.

- 23 a** Het verbruik per km is $26\,325 : 4500 = 5,85 \text{ kg}$. Dit is per stoel $5,85 : 210 \approx 0,02786 \text{ kg}$.

Dit komt overeen met ongeveer 28 gram.

- b** In de grafiek lees je af dat het brandstofverbruik per skm 36 gram is.

De benodigde brandstof voor de vlucht van 9000 km met 524 passagiers is:

$$36 \times 9000 \times 524 = 169\,776\,000 \text{ gram} = 169\,776 \text{ kg.}$$

- c** Bij 3000 km is het brandstof verbruik per skm 33,5 gram.

Het verbruik per 3000 km is $524 \times 3000 \times 33,5 = 52\,662\,000 \text{ gram}$.

Er zijn drie vluchten nodig, het totale verbruik is dus

$$3 \times 52\,662\,000 = 157\,986\,000 \text{ gram} = 157\,986 \text{ kg.}$$

Dit geeft een besparing van $\frac{157\,986 - 169\,776}{169\,776} \cdot 100\% = -6,9\%$.

Dit betekent dat er een afname aan brandstofgebruik is van ongeveer 7%.

- d** De op te lossen vergelijking is $\frac{0,001 \cdot L^2 + 25 \cdot L + 16\,500}{L} = 38$.

$$\text{Invoer: } y_1 = \frac{0,001 \times x^2 + 25x + 16\,500}{x} \text{ en } y_2 = 38$$

Venster: x van 0 tot 20000 en y van 0 tot 50

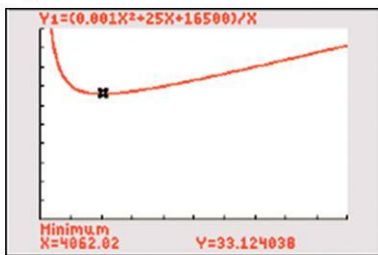
Optie: snijpunten

De coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn (1426, 38) en (11574, 38).

Bij een vluchtlengte van 1426 km en van 11574 km is het brandstofverbruik per skm gelijk aan 38 gram.

- e Je wilt weten bij welke vlucht lengte L het brandstofverbruik B minimaal is.

Optie: minimum



De coördinaten van de top van de grafiek die bij een minimum horen zijn (4062,02; 33,12).

De optimale vlucht lengte is 4062 km.

- 24 a De finish is na 100 meter, dus $x = 100$.

$$v = \frac{100800 \cdot \sqrt{100}}{(100 + 90)^2} \approx 27,92$$

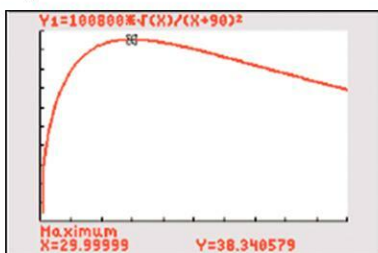
De snelheid is volgens de formule ongeveer 27,9 km per uur.

- b Op de GR het maximum bepalen van de formule $v = \frac{100800 \cdot \sqrt{x}}{(x + 90)^2}$

Invoer: $y_1 = \frac{100800 \times \sqrt{x}}{(x + 90)^2}$

Venster: x van 0 tot 100 en y van 0 tot 40

Optie: maximum



De coördinaten van de top van de grafiek die bij een maximum horen zijn (30,00; 38,34).

De hoogste snelheid is dus 38,3 km per uur.

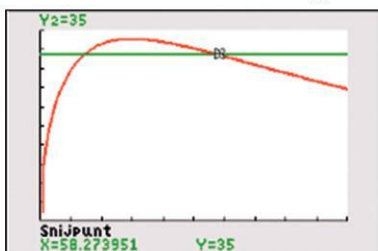
- c De op te lossen ongelijkheid is $\frac{100800 \cdot \sqrt{x}}{(x + 90)^2} > 35$.

Invoer: $y_1 = \frac{100800 \times \sqrt{x}}{(x + 90)^2}$ en $y_2 = 35$

Venster: x van 0 tot 100 en y van 0 tot 40

Optie: snijpunten

De coördinaten van de snijpunten zijn (14,22; 35) en (58,27; 35).



Zij heeft dus $58,27 - 14,22 \approx 44$ meter afgelegd met een snelheid die hoger is dan 35 km per uur.

Evenredige en omgekeerd evenredige verbanden

- 25** A $\frac{y}{x} = \frac{3,6}{4,5} = \frac{10}{12,5} = \frac{12,5}{16} = \frac{40}{50} = 0,8$
 Er bestaat een recht evenredig verband tussen x en y .
 Een bijbehorende formule is $y = 0,8 \cdot x$.
- B $\frac{q}{p} = \frac{16}{4,5} \approx 3,56$ en $\frac{q}{p} = \frac{14,4}{5} = 2,88$
 Er bestaat geen recht evenredig verband tussen p en q .
- C $\frac{R}{W} = \frac{12}{80} = 0,15$ en $\frac{R}{W} = \frac{24}{40} = 0,6$
 Er bestaat geen recht evenredig verband tussen W en R .
- D $\frac{y}{x} = \frac{40}{16} = \frac{50}{20} = \frac{90}{36} = \frac{100}{40} = 2,5$
 Er bestaat een recht evenredig verband tussen x en y .
 Een bijbehorende formule is $y = 2,5 \cdot x$.

- 26** De grafiek bij een evenredig verband is een rechte lijn door de oorsprong.
 Bij grafiek A is y niet evenredig met x , omdat de grafiek niet door de oorsprong gaat.
 Bij grafiek B is y wel evenredig met x , omdat de grafiek een rechte lijn is en door de oorsprong gaat.
 Bij grafiek C is y niet evenredig met x , omdat de grafiek geen rechte lijn is.

- 27** Bij tabel A is het product van x en y is steeds 48.

x	0,8	1,5	2	6	80
y	60	32	24	8	0,6

Een formule is $x \cdot y = 48$ (of $y = \frac{48}{x}$ of $y = \frac{48}{x}$).

Bij tabel B is het product van x en y steeds gelijk aan 90.

x	1	2	5	15	60
y	90	45	18	6	1,5

Een formule is gelijk aan $x \cdot y = 90$ (of $y = \frac{90}{x}$ of $y = \frac{90}{x}$).

- 28 a** De variabelen in $p \cdot q = 7$ zijn omgekeerd evenredig.
 De andere manieren zijn $q = \frac{7}{p}$ of $p = \frac{7}{q}$.
- b** De variabelen in $\frac{s}{t} = 50$ zijn recht evenredig.
- c** De grafiek van $A = 10B - 5$ is wel een rechte lijn, maar gaat niet door de oorsprong. De variabelen in deze formule zijn niet recht evenredig en ook niet omgekeerd evenredig.
- d** De variabelen in $l = \frac{200}{b}$ zijn omgekeerd evenredig.
 De andere manieren zijn $b = \frac{200}{l}$ of $l \cdot b = 200$.

- e De variabelen in $y = 5x$ zijn recht evenredig.
- f De variabelen in $\frac{x}{y} = 36$ zijn recht evenredig.

29 Als er sprake is van een omgekeerd evenredig verband is het product van T en M steeds gelijk.

$$1200 \times 833 = 999\,600, 2000 \times 500 = 1\,000\,000, 3200 \times 312 = 998\,400 \text{ en } 6000 \times 167 = 1\,002\,000.$$

De uitkomsten zijn nagenoeg gelijk, je kunt daarom zeggen dat er hier sprake is van een omgekeerd evenredig verband.

30 De formule $\frac{f \cdot 0,26}{v} = 0,3$ kun je ook schrijven als $f \cdot 0,26 = 0,3 \cdot v$ of $f = \frac{0,3}{0,26} \cdot v$.

Deze laatste formule is van de vorm $f = c \cdot v$ met c een constante.

Tussen de variabelen f en v geldt daarom een recht evenredig verband.

31 Je berekent eerst de totaal terug te betalen bedragen, zie de tabel.

<i>te lenen bedrag (in euro)</i>	<i>totaal terug te betalen (in euro)</i>
100,00	125,00
250,00	312,50
300,00	375,00
375,00	468,75

$$\frac{125,00}{100,00} = \frac{312,5}{250,00} = \frac{375,00}{300,00} = \frac{468,75}{375,00} = 1,25$$

Het verband tussen het totaal terug te betalen bedrag en het te lenen bedrag is recht evenredig.

Lineaire verbanden

32 a Tussen $p = 10$ en $p = 50$ is de toename van A gelijk aan 80.

Dit is een toename van $80 : 40 = 2$ per stap.

Tussen $p = 50$ en $p = 75$ is de toename van A gelijk aan 50.

Dit is een toename van $50 : 25 = 2$ per stap.

Tussen $p = 75$ en $p = 90$ is de toename van A gelijk aan 30.

Dit is een toename van $30 : 15 = 2$ per stap.

Tussen $p = 90$ en $p = 100$ is de toename van A gelijk aan 20.

Dit is een toename van $20 : 10 = 2$ per stap.

Er bestaat een lineair verband tussen p en A .

b In 1950 waren er 1350 vissen, want 1350 is het startgetal.

Het aantal vissen neemt met 125 per jaar af, want de richtingscoëfficiënt is gelijk aan -125 .

33 a De toename tussen week 8 en week 13 is $68 - 38 = 30$ gram.

Dat is $30 : 5 = 6$ gram per week.

Op tijdstip $t = 11$ is het gewicht $38 + 3 \times 6 = 56$ gram.

- b** De toename tussen week 17 en week 21 is $104 - 88 = 16$ gram.
Dat is $16 : 4 = 4$ gram per week.
Op tijdstip $t = 26$ zal het gewicht $104 + 5 \times 4 = 124$ gram zijn.
- 34** De richtingscoëfficiënt is $\frac{26 - 23}{20 - 14} = 0,5$.
Het startgetal is $23 - 14 \times 0,5 = 16$.
Een formule bij de grafiek is $K = 0,5a + 16$.
- 35** De richtingscoëfficiënt is $\frac{13 - 18}{200 - 150} = -0,1$.
Het startgetal is $18 + 150 \times 0,1 = 33$.
Een formule bij de grafiek is $y = -0,1x + 33$.
- 36 a** De toename tussen $I = 1800$ en $I = 4000$ is $650 - 430 = 220$ euro.
De toename per 100 euro $220 : 22 = 10$ euro.
Bij een inkomen van 2700 euro is de bijdrage $430 + 9 \times 10 = 520$ euro.
- b** De richtingscoëfficiënt is gelijk aan $\frac{650 - 430}{4000 - 1800} = 0,1$.
Het startgetal is gelijk aan $430 - 1800 \times 0,1 = 250$.
Een formule is $B = 0,1I + 250$.
- 37 a** $-3x + 12 = 5x + 28$
 $-8x + 12 = 28$
 $-8x = 16$
 $x = -2$
- b** $\frac{3}{5}x + \frac{1}{2} = 2 - \frac{9}{10}x$
 $6x + 5 = 20 - 9x$
 $15x = 15$
 $x = 1$
- c** $225t = -25t + 10(13t + 18)$
 $225t = -25t + 130t + 180$
 $225t = 105t + 180$
 $120t = 180$
 $t = 1\frac{1}{2}$
- d** $0,7p - 6p + 1,3 = 1,2(4 - 5p)$
 $-5,3p + 1,3 = 4,8 - 6p$
 $0,7p = 3,5$
 $p = 5$
- 38 a** $5p + 40 = 13p - 20$
 $-8p = -60$
 $p = 7,5$
 $q = 5 \times 7,5 + 40 = 77,5$
De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn $(7,5; 77,5)$.
- b** $-0,5p + 60 = -0,3p + 10$
 $-0,2p = -50$
 $p = 250$
 $n = -0,5 \times 250 + 60 = -65$
De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn $(250, -65)$.
- c** $1080p - 300 = -240p + 492$
 $1320p = 792$
 $p = 0,6$
 $w = 1080 \times 0,6 - 300 = 348$
De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn $(0,6; 348)$.

39 a $5 \times 0 + 2y = 5$

$$2y = 5$$

$$y = 2\frac{1}{2}$$

De bijbehorende grenslijn gaat door de punten $(0, 2\frac{1}{2})$ en $(1, 0)$.

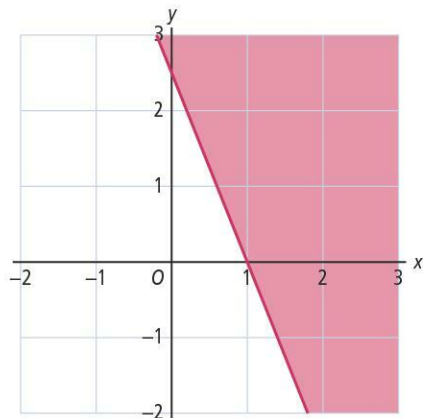
$5 \times 0 + 2 \times 0 \geq 5$ klopt niet.

Het punt $(0, 0)$ ligt niet in het gevraagde halfvlak.

$$5x + 2 \cdot 0 = 5$$

$$5x = 5$$

$$x = 1$$



b $3y - 4 \times 0 = 12$

$$3y = 12$$

$$y = 4$$

De bijbehorende grenslijn gaat door de punten $(0, 4)$ en $(-3, 0)$.

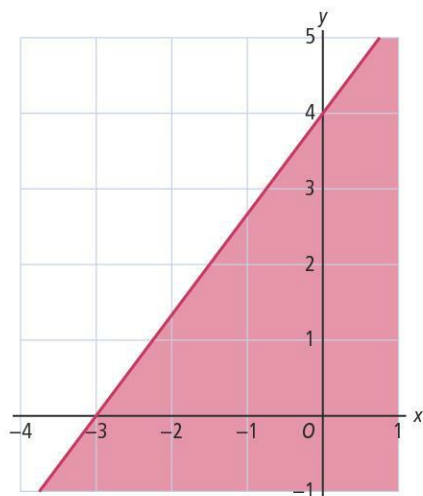
$3 \times 0 - 4 \times 0 \leq 12$ klopt.

Het punt $(0, 0)$ ligt in het gevraagde halfvlak.

$$3 \times 0 - 4x = 12$$

$$-4x = 12$$

$$x = -3$$



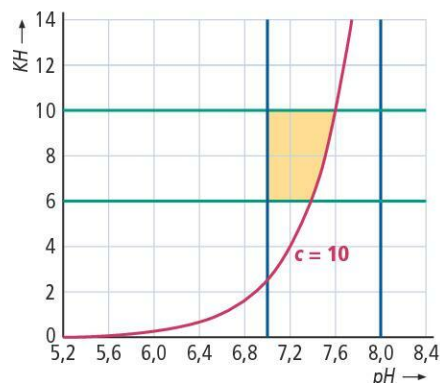
- 40 a** Omdat het verband tussen KH en C recht evenredig is, is de waarde van C bij $KH = 6$ de helft van de waarde van C bij $KH = 12$.
Dus $C = 76,1 : 2 = 38,05$. Op de plaats moet dus 38,0 of 38,1 komen te staan.

- b** Door voorwaarde I moet het gebied liggen tussen de horizontale lijnen

$KH = 6$ en $KH = 10$.

Door voorwaarde II moet het gebied ook liggen tussen de verticale lijnen $pH = 7$ en $pH = 8$.

Door voorwaarde III moet het gebied ook nog eens boven de lijn $C = 10$ liggen.



- 41** Bij een *LI*-getal toename van 100 naar 105 hoort een draagvermogen toename van $925 - 800 = 125$ kg.
 Bij een *LI*-getal toename van 1 hoort een draagvermogen toename van $125 : 5 = 25$ kg.
 Het draagvermogen van deze band is $800 + 3 \times 25 = 875$ kg.
- 42 a** 2020 is 40 jaar later dan 1980, dus keert de gierzwaluw 4 maal 3 dagen eerder terug.
 Hij zal in 2020 dus 12 dagen voor 2 mei terugkeren, dat is op 20 april.
- b** Het startgetal van deze formule is 122 en de richtingscoëfficiënt is $-\frac{3}{10}$.
 De formule is $A = 122 - \frac{3}{10} \cdot t$.
- c** De gierzwaluw komt per 10 jaar 3 dagen eerder en gaat 0,6 dagen eerder weg.
 Per 10 jaar wordt zijn verblijf daarom $3 - 0,6 = 2,4$ dagen langer.
 Per 1 jaar wordt zijn verblijf 0,24 dagen langer.
 Dat zijn verblijf 15 dagen langer wordt, duurt nog $15 : 0,24 = 62,5$ jaar (na 1980).
 In het jaar 2043 zal de gierzwaluw voor het eerst meer dan 115 dagen in Engeland verblijven.
- 43 a** Het indexcijfer van vlees in 2006 is 109.
 De prijs van het vlees is in de periode 2006 – 2010 met $9 : 109 \times 100\% \approx 8\%$ gestegen.
- b** Het indexcijfer van groenten in 2005 is 103 en in 2010 is dat 109.
 Dat is per jaar een gemiddelde toename van $\frac{109 - 103}{2010 - 2005} = 1,2$.
 Het indexcijfer van groenten in 2021 is $109 + 11 \times 1,2 \approx 122$.

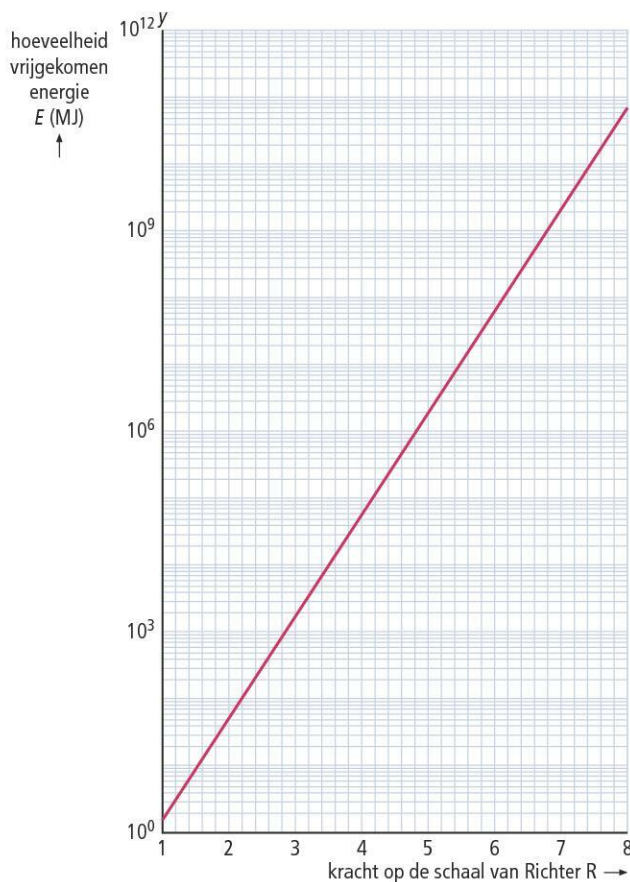
Exponentiële verbanden

- 44 a** Voor 1 januari 2010 geldt $t = 0$.
 $P = 275 \cdot 1,075^0 = 275$
 Op 1 januari 2010 zijn er 275 000 werklozen.
- b** Het aantal werklozen neemt toe, want de groeifactor is groter dan 1.
- c** De groeifactor is 1,075, dus het aantal werklozen neemt met 7,5% per jaar toe.
- d** Voor 1 mei 2010 geldt $t = 4$.
 $P = 275 \cdot 1,075^4 \approx 367,254$
 Op 1 mei 2010 waren er 367 254 werklozen.
- e** Voor 1 december 2009 geldt $t = -1$.
 $P = 275 \cdot 1,075^{-1} \approx 255,814$
 Op 1 december 2009 waren er 255 814 werklozen.
- 45** Volgens de tabel is de groeifactor tussen $p = 5$ en $p = 6$ gelijk aan
 $g = \frac{51,3}{68,3} \approx 0,75$.
 De beginwaarde is gelijk aan 288, een bijbehorende formule zou dan
 $q = 288 \cdot 0,75^t$ zijn.
 Je controleert de andere waarden in de tabel:
 $t = 3$ geeft $q = 288 \times 0,75^3 = 121,5$
 $t = 5$ geeft $q = 288 \times 0,75^5 \approx 68,3$
 $t = 10$ geeft $q = 288 \times 0,75^{10} \approx 16,2$
 De gevonden waarden komen overeen met de waarden in de tabel.
 De tabel kan bij een exponentieel verband horen.
- 46 a** De groeifactor per dag is $1,28^{24} \approx 374,1444$.
- b** De groeifactor per kwartier is $1,28^{\frac{1}{4}} \approx 1,0637$.
- c** De groeifactor per vijf minuten is $1,28^{\frac{1}{12}} \approx 1,0208$.
- d** De groeifactor per 13 minuten is $1,28^{\frac{13}{60}} \approx 1,0549$.
- 47 a** De groeifactor per 10 jaar is 1,025.
 De groeifactor per 5 jaar is $1,025^{\frac{1}{2}} \approx 1,0124$.
 De procentuele toename per 5 jaar is 1,24%.
- b** De groeifactor per jaar is $1,025^{\frac{1}{10}} \approx 1,0025$.
 De procentuele toename per jaar is 0,25%.
- c** De groeifactor per 25 jaar is $1,025^{2\frac{1}{2}} \approx 1,0637$.
 De procentuele toename per 25 jaar is 6,37%.
- d** Een eeuw is gelijk aan 100 jaar.
 De groeifactor per 100 jaar is $1,025^{10} \approx 1,2801$.
 De procentuele toename is 28,01%.
- 48 a** Op $t = 0$ geldt $N = 180\,000$.
 De groeifactor is 0,974.
 Een formule is $N = 180\,000 \cdot 0,974^t$.
- b** Op $t = 0$ geldt $N = 12\,000\,000$.
 De groeifactor per halfjaar is 1,1.
 De groeifactor per jaar is $1,1^2 = 1,21$.
 Een formule is $N = 12\,000\,000 \cdot 1,21^t$.

- c Op $t = 0$ geldt $N = 5\,000\,000$.
De groeifactor per vier jaar is 2.
De groeifactor per jaar is $2^{\frac{1}{4}} \approx 1,189$.
Een formule is $N = 5\,000\,000 \cdot 1,189^t$.
- 49** a Op 1 januari 2023 waren er $A = 135\,600 \cdot 0,94^3 \approx 112\,627$ abonnees.
b De groeifactor per jaar is 0,94. Het aantal abonnees neemt per jaar met 6% af.
c De groeifactor per vier jaar is $0,94^4 \approx 0,781$.
Per vier jaar neemt het aantal abonnees met 21,9% af.
d Bij halveren moet gelden $0,94^t = 0,5$.
Invoer: $y_1 = 0,94^x$ en $y_2 = 0,5$
Venster: x van 0 tot 20 en y van 0 tot 1
Optie: snijpunt
De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (11,2; 0,5).
Na 11,2 jaren is het aantal abonnees gehalveerd.
- 50** De groeifactor per dag is 1,15.
Bij verdubbelen moet gelden $1,15^t = 2$.
Invoer: $y_1 = 1,15^x$ en $y_2 = 2$
Venster: x van 0 tot 10 en y van 0 tot 4
Optie: snijpunt
De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (4,96; 2).
Na 5,0 dagen is het gewicht van de courgette verdubbeld.
- 51** a Als $t = 2$ is $N = 10^{-1} = 0,1$.
b Als $t = 10$ is $N = 10^1 = 10$.
c Als $t = 18$ is $N = 10^3 = 1000$.
d De groeifactor per 8 dagen is $\frac{10}{0,1} = 100$.
De groeifactor per dag is $g = 100^{\frac{1}{8}} \approx 1,778$.
Het begingetal is $b = 10^{-1,5} \approx 0,032$.
e De formule is $N = 0,032 \cdot 1,778^t$.
 $t = 5$ invullen geeft $N = 0,032 \cdot 1,778^5 \approx 0,569$.
f De op te lossen vergelijking is $0,032 \cdot 1,778^t = 2000$.
Invoer: $y_1 = 0,032 \cdot 1,778^x$ en $y_2 = 2000$
Venster: x van 0 tot 30 en y van 0 tot 3000
Optie: snijpunt
De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (19,2; 2000).
Als $N = 2000$ is $t \approx 19,2$.
- 52** a Als $t = 0$ is $N = 30$.
b Als $t = 6$ is $N = 10^3 = 1000$.
c $N = 3000$ bij $t = 8$.
d $N = 30\,000$ bij $t = 12$.
e De groeifactor per 6 dagen is $\frac{1000}{30} = 33\frac{1}{3}$.
De groeifactor per dag is $\left(33\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{6}} \approx 1,794$.
Een formule bij de grafiek is $N = 30 \cdot 1,794^t$.

- 53 a** De groeifactor per 25 jaar is $\frac{83}{30}$.
 De groeifactor per jaar is $\left(\frac{83}{30}\right)^{\frac{1}{25}} \approx 1,0415$.
 Het jaarlijkse groeipercentage vanaf 1980 is 4,15%.
- b** Bij verdubbelen moet gelden $1,0415^t = 2$.
 Invoer: $y_1 = 1,0415^x$ en $y_2 = 2$
 Venster: x van 0 tot 30 en y van 0 tot 4
 Optie: snijpunt
 De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (17,0; 2).
 In 17 jaren wordt de bloeiperiode twee keer zo lang.
- 54 a** De groeifactor per 100 jaar is $\frac{180}{1800} = 0,1$.
 De groeifactor per jaar is $0,1^{\frac{1}{100}} \approx 0,9772$.
 De warmteafgifte neemt per jaar met 2,28% af.
- b** De groeifactor per 100 jaar is 0,1.
 De groeifactor per 10 jaar is $0,1^{\frac{10}{100}} = 0,7943\dots$
 Per tien jaar neemt de warmteafgifte met 20,6% af.
- c** Bij halveren moet gelden $0,977^t = 0,5$.
 Invoer: $y_1 = 0,977^x$ en $y_2 = 0,5$
 Venster: x van 0 tot 50 en y van 0 tot 1
 Optie: snijpunt
 De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (29,8; 0,5).
 Na 29,8 jaren is er nog maar de helft van de oorspronkelijke warmteafgifte over.
- d** De grafiek gaat door het punt met jaartal 2133 en bedrag 2 miljard.
 In het jaar 2003 is er een bedrag van 43 miljoen op de rekening gezet.
 De groeifactor per 130 jaar is $\frac{2 \cdot 10^9}{43 \cdot 10^6} = 46,511\dots$
 De groeifactor per jaar is $46,511\dots^{\frac{1}{130}} = 1,0299\dots$
 Men is uitgegaan van een vast rentepercentage van 3 procent.
- 55 a** De groeifactor per jaar is 1,0275.
 De groeifactor per dag is $1,0275^{\frac{1}{365}} = 1,000\,074\,328$.
- b** Er geldt $t = 22$. Zijn spaarsaldo op 22 april is
 $12\,500 \times 1,000\,074\,328^{22} \approx \text{€ } 12\,520,46$.
- c** Op de gewone internetspaarrekening is het totale spaarsaldo
 $10\,000 \times 1,0185^6 \approx \text{€ } 11\,162,62$.
 Je kunt € 11 162,62 opnemen.
 Op de internetspaarrekening met opnamekosten is het totale spaarsaldo
 $10\,000 \times 1,0265^6 \approx \text{€ } 11\,699,13$.
 Je kunt dus $11\,699,13 - 0,01 \times 11\,699,13 = \text{€ } 11\,582,14$ opnemen.
- 56 a** Het verschil in kracht is 3.
 Er komt 's nachts (ongeveer) $30^3 = 27\,000$ keer zoveel energie vrij vergeleken met de avond ervoor.

- b** Voor de nachtelijke beving geldt $E = 0,06 \cdot 32^3$.
 9% hiervan is $0,09 \cdot 0,06 \cdot 32^3$.
 De vergelijking $0,06 \cdot 32^R = 0,09 \cdot 0,06 \cdot 32^{6,3}$ moet worden opgelost.
 Invoer: $y_1 = 0,06 \times 32^x$ en $y_2 = 0,09 \times 0,06 \times 32^{6,3}$
 Venster: x van 0 tot 10 en y van 0 tot 20 000 000
 Optie: snijpunt
 De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (5,605; 16 399 802,7).
 Deze naschok had een kracht van 5,6 op de schaal van Richter.
- c** Je berekent eerst de coördinaten van twee punten.
 $R = 1$ invullen geeft $E = 0,06 \cdot 32^1 = 1,92$.
 $R = 8$ invullen geeft $E = 0,06 \cdot 32^8 \approx 6,6 \times 10^{10}$.
 De coördinaten van twee punten op de grafiek zijn (1; 1,92) en (8; $6,6 \times 10^{10}$).
 Je tekent een rechte lijn door deze twee punten.



Formules herleiden

- 57 a** $K = 3a + 5 - a + 4$
 $K = 2a + 9$
- b** $b = 5v + 3v - 7v$
 $b = v$
- c** $p = 4c^3 + 3c^2 + 5c^3 - 2$
 $p = 9c^3 + 3c^2 - 2$
- d** $H = 5g^4 - 7g^4$
 $H = -2g^4$
- e** $W = 3x - 2 - 6x^2 - 7x + 3$
 $W = -4x - 6x^2 + 1$
- f** $t = 3T - 6 + 2T^2 - 5$
 $t = 3T + 2T^2 - 11$

58 a $A = 3(b + 2)$

$$A = 3b + 6$$

b $P = 2q(3 - q)$

$$P = 6q - 2q^2$$

c $k = 15 - 2(a - 3)$

$$k = 15 - 2a + 6$$

$$k = 21 - 2a$$

d $q = (x + 2)(3x - 1)$

$$q = 3x^2 - x + 6x - 2$$

$$q = 3x^2 + 5x - 2$$

e $T = (2g - 3)(5 - 3g) + 4$

$$T = 10g - 6g^2 - 15 + 9g + 4$$

$$T = 19g - 6g^2 - 11$$

f $Y = 8a(2a + 1) - 2(a^2 + 1)$

$$Y = 16a^2 + 8a - 2a^2 - 2$$

$$Y = 14a^2 + 8a - 2$$

59 a $k = \frac{3}{p} \cdot \frac{2}{p^2}$

$$k = \frac{6}{p^3}$$

b $P = \frac{q}{2} \cdot \frac{5}{q - 3}$

$$P = \frac{5q}{2(q - 3)}$$

$$P = \frac{5q}{2q - 6}$$

c $T = 3 \cdot \frac{t}{t + 2}$

$$T = \frac{3t}{t + 2}$$

d $W = \frac{1}{v} + \frac{3}{2v}$

$$W = \frac{2}{2v} + \frac{3}{2v} = \frac{5}{2v}$$

e $G = \frac{2}{h} - \frac{3}{10}$

$$G = \frac{20}{10h} - \frac{3h}{10h}$$

$$G = \frac{20 - 3h}{10h}$$

f $b = 3 + \frac{1}{a + 1}$

$$b = \frac{3(a + 1)}{a + 1} + \frac{1}{a + 1}$$

$$b = \frac{3a + 3}{a + 1} + \frac{1}{a + 1}$$

$$b = \frac{3a + 4}{a + 1}$$

60 a $P = k^3 \cdot k^5$

$$P = k^8$$

b $a = (b^3)^{0,4}$

$$a = b^{1,2}$$

c $V = \frac{w^{4,6}}{w^{2,2}}$

$$V = w^{2,4}$$

d $Q = p^3 \cdot p^{0,2} \cdot p$

$$Q = p^{4,2}$$

e $T = (m^{0,3} \cdot m^{1,2})^4$

$$T = (m^{1,5})^4$$

$$T = m^6$$

f $K = \left(\frac{a^5}{a^3}\right)^4$

$$K = (a^2)^4$$

$$K = a^8$$

61 a $Q = \sqrt{25p^2}$

$$Q = \sqrt{25} \cdot \sqrt{p^2}$$

$$Q = 5p$$

c $y = \frac{(0,5x)^2}{x}$

$$y = \frac{0,5^2 \cdot x^2}{x}$$

$$y = \frac{0,25 \cdot x^2}{x}$$

$$y = 0,25x$$

d $t = 3\sqrt{2k} \cdot \sqrt{18k}$

$$t = 3\sqrt{36} \cdot \sqrt{k^2}$$

$$t = 3 \cdot 6 \cdot k$$

$$t = 18k$$

b $R = (2 \cdot q)^3$

$$R = 2^3 \cdot q^3$$

$$R = 8q^3$$

$$\text{e } b = \left(\frac{1}{2} \cdot a\right)^4 \cdot \sqrt{16a^2}$$

$$b = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot a^4 \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{a^2}$$

$$b = \frac{1}{16} \cdot a^4 \cdot 4 \cdot a$$

$$b = \frac{1}{4}a^5$$

$$\text{f } g = \sqrt{\frac{d^2}{9}} \cdot (d \cdot 3)^2$$

$$g = \frac{\sqrt{d^2}}{\sqrt{9}} \cdot d^2 \cdot 3^2$$

$$g = \frac{d}{3} \cdot d^2 \cdot 9$$

$$g = \frac{1}{3}d \cdot d^2 \cdot 9$$

$$g = 3d^3$$

$$62 \quad q = 5 \text{ en } t = 7 \text{ substitueren geeft } p = 4r + \frac{3r \cdot 5 + 2 \cdot 7}{5}$$

$$p = 4r + \frac{15r + 14}{5}$$

$$p = 4r + \frac{15r}{5} + \frac{14}{5}$$

$$p = 4r + 3r + 2\frac{4}{5}$$

$$p = 7r + 2\frac{4}{5}$$

$$63 \quad \begin{aligned} P &= 8 \text{ en } Q = 6 - 0,5R \text{ substitueren geeft} \\ N &= 4,5 \cdot 8 + 8 \cdot 8 \cdot (6 - 0,5R) - 12,5 \cdot 8 \cdot R \\ N &= 36 + 64 \cdot (6 - 0,5R) - 100 \cdot R \\ N &= 36 + 384 - 32R - 100R \\ N &= -132R + 420 \end{aligned}$$

$$64 \text{ a } \begin{aligned} q &= 4p - 10 \\ 4p - 10 &= q \\ 4p &= q + 10 \\ p &= \frac{1}{4}q + 2\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{b } \begin{aligned} \frac{1}{2}p + 8 &= q \\ \frac{1}{2}p &= q - 8 \\ p &= 2q - 16 \end{aligned}$$

$$\text{c } \begin{aligned} 2q + 5p &= 10 \\ 5p &= -2q + 10 \\ p &= -\frac{2}{5}q + 2 \end{aligned}$$

$$\text{d } \begin{aligned} 10q - 4p &= 40 \\ -4p &= -10q + 40 \\ p &= 2\frac{1}{2}q - 10 \end{aligned}$$

$$65 \text{ a } \begin{aligned} N &= 10 \text{ en } Q = 2 \text{ substitueren geeft} \\ 10 &= -2,5 \cdot 2 + 1,5R + 6P \\ 10 &= -5 + 1,5R + 6P \\ 15 &= 1,5R + 6P \\ 1,5R + 6P &= 15 \\ 6P &= 15 - 1,5R \\ P &= 2,5 - 0,25R \end{aligned}$$

$$\text{b } \begin{aligned} N &= 0 \text{ en } R = 10 \text{ substitueren geeft} \\ 0 &= -2,5Q + 1,5 \cdot 10 + 6P \\ 0 &= -2,5Q + 15 + 6P \\ 2,5Q &= 15 + 6P \\ Q &= 6 + 2,4P \end{aligned}$$

$$\text{c } \begin{aligned} P &= Q \text{ en } R = 6 \text{ substitueren geeft} \\ N &= -2,5Q + 1,5 \cdot 6 + 6Q \\ N &= 3,5Q + 9 \end{aligned}$$

$$66 \text{ a } Q = \frac{(0,8 \cdot 5 + 4)(-2 \cdot 5 + 6p)}{5 - 4}$$

$$Q = \frac{8(-10 + 6p)}{1}$$

$$Q = -80 + 48p$$

$$Q = 48 \cdot p - 80$$

$$\text{b } Q = \frac{3(4 \cdot 2 - 2) + 6p(2 \cdot 4 - 2)}{2 + 4}$$

$$Q = \frac{3 \cdot 6 + 6p \cdot 6}{6}$$

$$Q = \frac{18 + 36p}{6}$$

$$Q = 3 + 6p$$

$$Q = 6 \cdot p + 3$$

$$67 \text{ a } N = \frac{-10}{t}$$

$$t \cdot N = -10$$

$$t = \frac{-10}{N}$$

$$\text{b } N = \frac{5}{t} - 7$$

$$N + 7 = \frac{5}{t}$$

$$t = \frac{5}{N + 7}$$

$$\text{c } N = \frac{9}{t - 6}$$

$$t - 6 = \frac{9}{N}$$

$$t = \frac{9}{N} + 6$$

$$\text{d } N = 12 + \frac{5}{t}$$

$$N - 12 = \frac{5}{t}$$

$$t = \frac{5}{N - 12}$$

$$68 \text{ a } K = \frac{1}{2}\sqrt{a}$$

$$2K = \sqrt{a}$$

$$(2K)^2 = a$$

$$4K^2 = a$$

$$a = 4K^2$$

$$\text{b } K = \sqrt{a - 2}$$

$$K^2 = a - 2$$

$$a - 2 = K^2$$

$$a = K^2 + 2$$

$$\text{c } K = 3 + \sqrt{a}$$

$$K - 3 = \sqrt{a}$$

$$(K - 3)^2 = a$$

$$a = (K - 3)^2$$

$$a = K^2 - 6K + 9$$

$$\text{d } K = -8 + \sqrt{a + 4}$$

$$K + 8 = \sqrt{a + 4}$$

$$(K + 8)^2 = a + 4$$

$$a + 4 = (K + 8)^2$$

$$a + 4 = K^2 + 16K + 64$$

$$a = K^2 + 16K + 60$$

$$69 \text{ a } \text{Bij } a = 0 \text{ is } Q = \frac{20}{8 \cdot 1,6^0 - 10} = -10.$$

Als a groter wordt, dan neemt $1,6^a$ toe, want $1,6 > 1$.

$8 \cdot 1,6^a - 10$ neemt dan ook toe.

Daardoor neemt de waarde van Q af, want 20 wordt door een steeds groter getal gedeeld. De grenswaarde van Q is 0.

$$\text{b } \text{Bij } a = 0 \text{ is } Q = 5 \cdot 1,38^0 - 4 = 1.$$

Als a groter wordt, dan neemt $1,38^a$ toe, want $1,38 > 1$.

De waarde van Q neemt daarom ook toe. Er is geen grenswaarde.

c Bij $a = 0$ is $Q = 7 + \frac{2}{2 - 0,8^0} = 9$.

Als a groter wordt, dan neemt $0,8^a$ af, want $0,8 < 1$.

$2 - 0,8^a$ neemt dan toe en nadert 2, want er wordt een steeds kleiner getal van 2 afgetrokken.

Daardoor neemt $\frac{2}{2 - 0,8^a}$ af en nadert $\frac{2}{2} = 1$.

De waarde van Q neemt af. De grenswaarde is $7 + 1 = 8$.

d Bij $a = 0$ is $Q = 5(4 - 0,75^0) = 15$.

Als a groter wordt, dan neemt $0,75^a$ af, want $0,75 < 1$.

Daardoor neemt $4 - 0,75^a$ toe en nadert 4, want er wordt een steeds kleiner getal van 4 afgetrokken.

De waarde van Q neemt toe. De grenswaarde is $5 \times 4 = 20$.

70 a Invullen van $L = 1,80$ in de formule $T = 6,28\sqrt{\frac{L}{9,81}}$ geeft

$$T = 6,28\sqrt{\frac{1,80}{9,81}} = 2,69 \dots \text{ seconden.}$$

Eén keer heen en weer zwaaien duurt 2,69 seconden, dus je zwaait $60 : 2,69 \dots \approx 22$ keer heen en weer per minuut.

b $T = 6,28\sqrt{\frac{L}{9,81}}$

$$\frac{T}{6,28} = \sqrt{\frac{L}{9,81}}$$

$$\left(\frac{T}{6,28}\right)^2 = \frac{L}{9,81}$$

$$\frac{T^2}{39,4384} = \frac{L}{9,81}$$

$$39,4384 \cdot L = 9,81 \cdot T^2$$

$$L \approx 0,249 \cdot T^2$$

71 a Invullen van $V = 4$ in de formule $M = -0,04V^2 + 1,05V + 27,2$ geeft

$$M = -0,04 \cdot 4^2 + 1,05 \cdot 4 + 27,2 = 30,76.$$

De winst W is dan $W = 0,29 \cdot 30,76 - 0,20 \cdot 4 \approx 8,12$ euro per koe per dag.

b $W = 0,29(-0,04V^2 + 1,05V + 27,2) - 0,20V$

$$W = -0,0116 \cdot V^2 + 0,3045 \cdot V + 7,888 - 0,20 \cdot V$$

$$W = -0,0116 \cdot V^2 + 0,1045 \cdot V + 7,888$$

72 a $T = 24$ en V is minimaal 0 en maximaal 100.

De minimale waarde is $I_A = \frac{0}{20} + \frac{27 - 24}{10} = 0,3$.

De maximale waarde is $I_A = \frac{100}{20} + \frac{27 - 24}{10} = 5,3$.

b De ongelijkheid $\frac{35}{20} + \frac{27 - T}{10} < 2$ moet worden opgelost.

$$1,75 + 2,7 - 0,1T < 2$$

$$-0,1T < -2,45$$

$$T > 24,5$$

Bij temperaturen hoger dan $24,5^\circ\text{C}$ is er sprake van een zeer groot risico op bosbrand.

- c Als de temperatuur T constant is, dan is $\frac{27 - T}{10}$ constant.

Als V afneemt, dan neemt $\frac{V}{20}$ ook af.

I_A neemt dus af en daarom neemt het risico op bosbrand toe.

- d $I_C = (216 - 2,84 \cdot 43 + 1,12T) \cdot 0,97^{43}$

$$I_C = (93,88 + 1,12T) \cdot 0,97^{43}$$

$$I_C = 25,34 + 0,30T$$

$$I_C = 0,30T + 25,34$$

- 73 a** Er geldt $G = 77$, $J = 25$ en $L = 188$. Dit invullen in de formule geeft

$$BMR = 10 \cdot 77 - 5 \cdot 25 + 6,25 \cdot 188 + 5 = 1825$$

Zijn BMR is 1825 kcal.

- b Zijn BMR neemt met $10 \times 5 = 50$ kcal af omdat hij 5 kg afvalt en zijn BMR neemt met $5 \times 1 = 5$ kcal toe omdat hij 1 jaar ouder wordt. Zijn BMR is in die periode met $50 + 5 = 55$ kcal afgenomen.

- c Er geldt $BMR = 2000$ en $J = 30$. Dit invullen in de formule geeft

$$2000 = 10 \cdot G - 5 \cdot 30 + 6,25 \cdot L + 5$$

$$2000 = 10 \cdot G + 6,25 \cdot L - 145$$

$$10 \cdot G + 6,25 \cdot L - 145 = 2000$$

$$10 \cdot G + 6,25 \cdot L = 2145$$

$$10 \cdot G = -6,25 \cdot L + 2145$$

$$G \approx -0,6 \cdot L + 214,5$$

$$\text{Dus } a = -0,6 \text{ en } b = 214,5.$$

- d $W = 2,2 \cdot G$

$$2,2 \cdot G = W$$

$$G = \frac{W}{2,2}$$

$$H = 0,033 \cdot L$$

$$0,033 \cdot L = H$$

$$L = \frac{H}{0,033}$$

Beide substitueren geeft:

$$BMR = 10 \cdot \frac{W}{2,2} - 5 \cdot Y + 6,25 \cdot \frac{H}{0,033} + 5$$

$$BMR \approx 4,5 \cdot W - 5 \cdot Y + 189,4 \cdot H + 5$$

Op de puntjes moeten de getallen 4,5 en 189,4 staan.

- 74** $100 = 10^2$ en $\frac{1}{10} = 10^{-1}$

Dit invullen in de formule geeft:

$$P = 10^2 \cdot (10^{-1})^n$$

$$P = 10^2 \cdot 10^{-n}$$

$$P = 10^{2-n}$$

- 75 a** Een hogere vaccinatiegraad, betekent een hogere waarde van p .

Als p groter wordt, dan neemt $\frac{p}{100}$ toe.

Dan neemt $1 - \frac{p}{100}$ af, want er wordt een steeds groter getal van 1 afgetrokken.

Daardoor neemt B_v ook af en dit betekent dat een kleiner aantal personen besmet wordt.

- b** Beide kanten van de formule $1 = B \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$ delen door B geeft

$$\frac{1}{B} = 1 - \frac{p}{100}$$

$$\frac{p}{100} = 1 - \frac{1}{B}$$

$$p = 100 \cdot \left(1 - \frac{1}{B}\right)$$

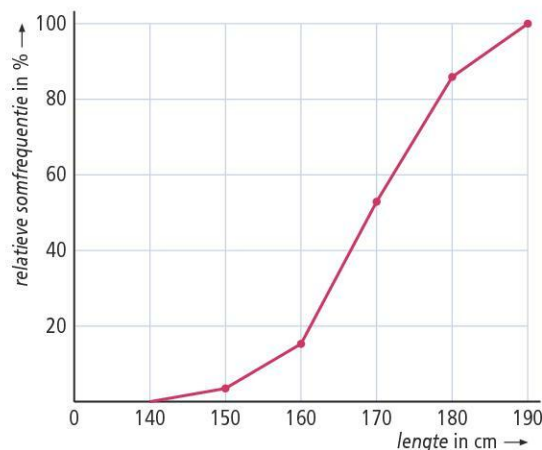
$$p = 100 - \frac{100}{B}$$

Statistiek

- 76 a** Het steelbladdiagram geeft dezelfde informatie als de dotplot, omdat ook hier elke lengte afzonderlijk nog af te lezen is.
- b** De frequentietabel geeft dezelfde informatie als het staafdiagram, namelijk de absolute aantallen per klasse.
- c** In het cirkeldiagram zijn de data relatief, namelijk in procenten.
- d** In het staafdiagram zijn ook de absolute aantallen af te lezen.

- 77 a** De frequenties zijn absoluut, want het zijn de aantallen die daadwerkelijk geteld zijn.
- b** De totale frequentie is $3 + 10 + 32 + 28 + 12 = 85$.

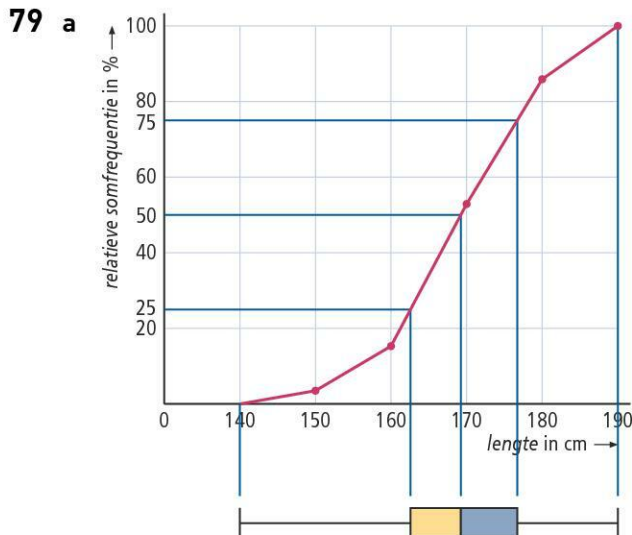
<i>lengte in cm</i>	<i>frequentie</i>	<i>som frequentie</i>	<i>relatieve somfrequentie</i>
[140, 150>	3	3	3,5
[150, 160>	10	13	15,3
[160, 170>	32	45	52,9
[170, 180>	28	73	85,9
[180, 190>	12	85	100



78 Het gemiddelde is $\frac{23 \times 35 + 18 \times 36 + \dots + 6 \times 46}{23 + 18 + \dots + 6} \approx 39,0$ schroeven.

Voor de mediaan moet je kijken naar het aantal schroeven in het 250^e en 251^e doosje. In beide doosjes zitten 39 schroeven, dus de mediaan is 39.

De modus is 40 schroeven, omdat dit aantal het vaakst voorkomt.



b De spreidingsbreedte is $46 - 35 = 11$ schroeven.

De interkwartielafstand is $40 - 38 = 2$ schroeven.

c In de boxplot kun je aflezen dat $Q_1 = 37,5$. Dit betekent dat er in het 125^e doosje 37 schroeven zitten en in het 126^e doosje 38 schroeven. Hieruit kun je concluderen dat 375 doosjes meer dan 37 schroeven bevatten.

80 a De profielkeuze is kwalitatief en nominaal.

b De lengte is kwantitatief en continu.

c Het aantal eieren is kwantitatief en discreet.

d De keuze is kwalitatief en ordinaal.

e De hoogste temperatuur is kwantitatief en continu.

81 a De variabele *duur van de slaap* is kwantitatief. Deze variabele is continu.

b Op zaterdag is de spreidingsbreedte het grootst.

c De boxen overlappen elkaar en de mediaan van maandag valt buiten de box van dinsdag. Het verschil is middelmatig.

d De boxen overlappen elkaar en de mediaan van zaterdag valt buiten de box van zondag. Het verschil is middelmatig.

e Er is sprake van een groot verschil als de boxen elkaar niet overlappen. Het verschil is groot tussen maandag en vrijdag, dinsdag en vrijdag, woensdag en vrijdag, donderdag en vrijdag, dinsdag en zaterdag, woensdag en zaterdag en ten slotte tussen donderdag en zaterdag.

82 Je berekent de waarde van ϕ :

$$\phi = \frac{57 \cdot 45 - 22 \cdot 43}{\sqrt{(57 + 22)(57 + 43)(22 + 45)(43 + 45)}}$$

$$\phi = 0,237 \dots$$

$0,2 < \phi \leq 0,4$, dus het verschil tussen voorkeur voor bril of contactlenzen bij mannen en vrouwen is middelmatig.

- 83** Het verband is het sterkst bij het vak Engels omdat de punten daar gemiddeld dichter rondom een rechte lijn liggen dan bij het vak Nederlands.
- 84**
- a** $9 : 154 \times 100\% \approx 5,8\%$ van de leerlingen is 16 jaar en heeft score 5 gegeven voor de mate van plezier.
 - b** $15 : 154 \times 100\% \approx 9,7\%$ van de leerlingen is 15 jaar en heeft score 5 gegeven voor de mate van plezier.
 - c** Je mag deze conclusie niet trekken omdat je daarvoor moet berekenen hoeveel procent van de 16-jarigen en hoeveel procent van de 15-jarigen score 5 heeft gegeven
 - d** $2 : 46 \times 100\% \approx 4,3\%$ van de leerlingen die een score 4 hebben gegeven, is 14 jaar.
- 85**
- a** Het betreft een scheve verdeling met een staart naar links en een uitschieter.
 - b** Voor een snelheid tussen 57,5 en 62,5 km per uur moet gekeken worden naar de hoogte van het staafje bij 60 km per uur. Dat waren 19 auto's.
 - c** Het gemiddelde zal iets lager worden.
 - d** Het staafje bij 85 km per uur bestaat uit auto's waarvan de snelheid tussen 82,5 en 87,5 km per uur lag.
Ongeveer de helft daarvan (= 10) zal harder hebben gereden dan 85 km per uur.
De twee rechterstaafjes bevatten $5 + 1 = 6$ auto's.
In totaal reden 16 auto's harder dan 85 km per uur, dat is $16 : 189 \times 100\% \approx 8,5\%$.
- 86**
- a** Het gemiddelde plus de standaarddeviatie is $251,5 + 3,5 = 255$ gram.
Volgens de vuistregels heeft $2,5 + 13,5 + 34 + 34 = 84\%$ van de pakken een gewicht minder dan 255 gram.
 - b** Volgens de vuistregels heeft $34 + 34 + 13,5 = 81,5\%$ een gewicht tussen 248 (= gemiddelde min standaarddeviatie) en 258,5 gram (= gemiddelde plus tweemaal standaarddeviatie).
- 87**
- a** Het laagste cijfer dat gehaald is, is een 4,2.
 - b** 25% van de leerlingen had een cijfer tussen 7,0 en 9,0.
 - c** 25% van de leerlingen had een cijfer lager dan 5,5.
Dat zijn $0,25 \times 248 = 62$ leerlingen met een onvoldoende.
 - d** Je kunt zien dat de cijfers niet normaal verdeeld zijn omdat de boxplot niet symmetrisch is.
- 88**
- a** De populatie waaruit de steekproef is getrokken bestaat uit de leden van de politieke partij.
 - b** De steekproefomvang is 1500.
 - c** Het valt niet te zeggen of de steekproef aselekt en representatief was omdat je niet weet hoe de 1500 leden van de steekproef geselecteerd zijn.
 - d** Het kan best zijn dat van de leden die tevreden waren er veel meer het formulier hebben teruggestuurd dan de leden die ontevreden waren. Dus dat de meerderheid van de leden die het formulieren teruggestuurd hebben tevreden is, zegt nog niets.
 - e** Nee, het kan hooguit iets zeggen over de waardering die de eigen leden voor het programma van die partij hebben.

$$89 \quad p - 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,7 - 2 \cdot \sqrt{\frac{0,7(1-0,7)}{300}} = 0,6470...$$

$$p + 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,7 + 2 \cdot \sqrt{\frac{0,7(1-0,7)}{300}} = 0,7529...$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval van het percentage docenten met een smartphone is [64,7; 75,3].

$$90 \quad a \quad \bar{X} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 220,8 - 2 \cdot \frac{8,2}{\sqrt{100}} = 219,16$$

$$\bar{X} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 220,8 + 2 \cdot \frac{8,2}{\sqrt{100}} = 222,44$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval van het gemiddelde gewicht aan aardbeienjam in een potje in grammen is [219,16; 222,44].

b In steekproef sloot bij 7% van de potjes de deksel het potje niet goed af.

$$p - 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,07 - 2 \cdot \sqrt{\frac{0,07(1-0,07)}{100}} = 0,0189...$$

$$p + 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,07 + 2 \cdot \sqrt{\frac{0,07(1-0,07)}{100}} = 0,1210...$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval van het percentage potjes jam waarbij de deksel het potje niet goed afsluit is [1,9; 12,1].

91 a Het gaat om de statistische variabelen *geslacht* en *afdeling*.
Beiden variabelen zijn kwalitatief en nominaal.

b

	research	kantoor	productie	buitendienst
vrouwen	30	10	20	40
mannen	30	30	180	60

c In het diagram is af te lezen dat er op de afdeling research inderdaad net zoveel vrouwen als mannen werken. Maar in het bedrijf werken veel meer mannen dan vrouwen.

Dus van alle vrouwen werkt een veel groter percentage bij de afdeling research dan van alle mannen.

92 a Ongeveer 95% van de waarnemingen bij een normale verdeling ligt tussen $\bar{x} - 2\sigma$ en $\bar{x} + 2\sigma$. Bij 95% van de gezonde vrouwen ligt het aantal rode bloedcellen tussen 4,0 en 5,3 biljoen per liter.

Tussen 4,0 en 5,3 ligt daarom vier keer de standaardafwijking.

De standaardafwijking is gelijk aan $\frac{5,3 - 4,0}{4} \approx 0,3$ biljoen per liter.

b Bij gezonde mannen is het gemiddelde $(8,9 + 11,0) : 2 = 9,95$ en bij gezonde vrouwen is het gemiddelde $(7,6 + 10,0) : 2 = 8,8$.

Je berekent de effectgrootte:

$$E = \frac{9,95 - 8,8}{0,5(0,6 + 0,6)} = 1,916...$$

De effectgrootte is groter dan 0,8, dus het verschil is groot.

93 a 5,6% van de bonnetjes was onbruikbaar, dus $100 - 5,6 = 94,4\%$ van de bonnetjes was wel bruikbaar. 7318 is daarom gelijk aan 94,4%. In totaal zijn er $7318 : 94,4 \times 100 \approx 7752$ kassabonnetjes ingeleverd.

De onderzoekers waren $7752 \times 2 = 15\,504$ dollar kwijt aan metrokaartjes.

- b** In de polygoon lees je af dat het cumulatieve percentage bij 1000 kcal ongeveer gelijk is aan 58%. Dit betekent dat $100 - 58 = 42\%$ van de klanten meer dan 1000 kcal bestelde. De polygoon hoort daarom bij tex-mex.
- c** Je berekent het 95%-betrouwbaarheidsinterval:

$$\bar{X} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 857 - 2 \cdot \frac{336}{\sqrt{3857}} = 846,17...$$

$$\bar{X} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 857 + 2 \cdot \frac{336}{\sqrt{3857}} = 867,82...$$

Het 95% betrouwbaarheidsinterval van de gemiddelde hoeveelheid aan kcal in hamburgerrestaurants is [846,2; 867,8].

De aanbevolen hoeveelheid van 750 kcal ligt niet in dit interval.

- d** Voorbeelden van juiste aspecten zijn:
- Het onderzoek is alleen gehouden onder volwassenen die in hun lunchpauze ergens gaan lunchen terwijl er ook volwassenen zullen zijn die hun eigen lunch meenemen of helemaal niet lunchen.
 - Het onderzoek is alleen gehouden onder volwassenen in New York City.
 - Het onderzoek is alleen gehouden in lunchzaken die op hun website calorie-informatie hadden staan.

- e** Je berekent de effectgrootte:

$$E = \frac{766 - 713}{0,5(301 + 584)} = 0,119...$$

De effectgrootte is kleiner dan 0,4, dus het verschil is gering.

De stelling wordt daarom niet ondersteund door de gegevens in tabel 2.

94 a $p - 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,23 - 2 \cdot \sqrt{\frac{0,23(1-0,23)}{6714}} = 0,219...$

$$p + 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,23 + 2 \cdot \sqrt{\frac{0,23(1-0,23)}{6714}} = 0,240...$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de lifetime-prevalentie is [22%; 24%].

- b** Eerst maak je een kruistabel

	havo	vwo	totaal
wel gerookt	410	261	671
niet gerookt	1395	1383	2778
totaal	1805	1644	3449

Je berekent de waarde van ϕ :

$$\phi = \frac{410 \cdot 1383 - 261 \cdot 1395}{\sqrt{(410 + 261)(410 + 1395)(261 + 1383)(1395 + 1383)}} = 0,08...$$

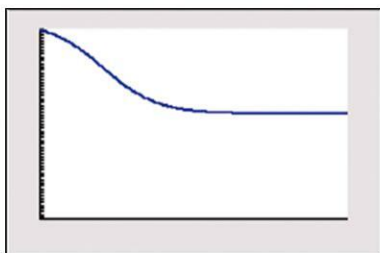
$-0,2 \leq \phi \leq 0,2$, dus het verschil in lifetime-prevalentie van roken tussen havo-leerlingen en vwo-leerlingen is gering.

- c** De lage aantallen sigaretten hebben een hogere frequentie dan de hoge aantallen. Dit zie je terug in relatieve frequentiepolygoon *b*.
- d** Bij de meisjes ligt de mediaan in de klasse <1, omdat 196 meer is dan 168, de helft van 336.
- Bij de jongens ligt de mediaan in de klasse 1 – 10, omdat 168 minder is dan 188, de helft van 376 en $168 + 144 = 312$ meer is dan 188, de helft van 376.
- De mediaan bij de jongens is het grootst.

- 5 a** Gemiddeld zitten er in een team $95 : 8 = 11,875$ leden.
- b** Het verband is omgekeerd evenredig, want als je bijvoorbeeld twee keer zo veel teams hebt, dan zal het gemiddeld aantal leden per team twee keer zo klein zijn.
- c** De formule is $g = \frac{95}{k}$ (of $k = \frac{95}{g}$ of $k \cdot g = 95$).
- 7 a** Geen van beide, want dit is een lineair verband. Bij de gasrekening betaal je namelijk behalve voor het gas ook voor andere kosten.
- b** Er is sprake van een recht evenredig verband, want als je bijvoorbeeld twee keer zo lang loopt, leg je ook twee keer zoveel afstand af.
- c** Er is sprake van een recht evenredig verband, want als je bijvoorbeeld de zijde twee keer zo lang maakt, dan wordt de omtrek ook twee keer zo lang.
- d** Geen van beide, want dit is een exponentieel verband doordat de huur elk jaar 2% hoger wordt.

12 a Invoer: $y_1 = 56 + \frac{484}{10 + 1,023^x}$

Venster: x van 0 tot 200 en y van 0 tot 100

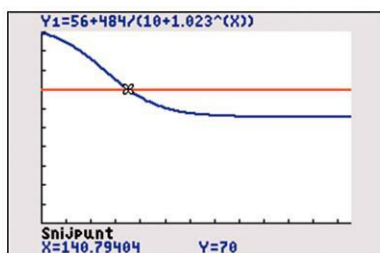


De grafiek is eerst toenemend dalend, daarna afnemend dalend.

b Na 5 jaar is het overlevingspercentage $56 + \frac{484}{10 + 1,023^5} \approx 99,5\%$.

c Invoer: $y_2 = 70$

Optie: snijpunt



Na ongeveer 141 jaar is het overlevingspercentage voor het eerst minder dan 70%.

d

t	1	10	100	200	1000
p	99,9	99,0	80,5	60,6	56,0

Als t heel groot wordt, dan nadert het overlevingspercentage tot de grenswaarde 56.

- 13 a** Als a steeds groter wordt, dan wordt $\frac{180}{a}$ ongeveer 0.

De waarde van M wordt dan ongeveer $9,5 + 0 = 9,5$.

b $10 = 9,5 + \frac{180}{a}$

$$0,5 = \frac{180}{a}$$

$$a = 180 : 0,5 = 360$$

Vanaf 360 m^2 zijn de kosten M minder dan € 10,-.

- 17 a** Bij $q = 0$ is $N = \frac{200}{3 \times 0 + 4} + 13,5 = 63,5$.

Als q heel groot wordt, dan wordt $3q$ ook heel groot.

$3q + 4$ wordt dan ook heel groot.

$\frac{200}{3q + 4}$ wordt dan ongeveer 0.

De grenswaarde wordt dan $N = 0 + 13,5 = 13,5$.

De waarde van N neemt af als q heel groot wordt.

- b** Bij $q = 0$ is $N = 114 + 0,95^0 = 115$.

Als q heel groot wordt, dan wordt $0,95^q$ ongeveer 0.

De grenswaarde wordt dan $114 + 0 = 114$.

De waarde van N neemt af als q heel groot wordt.

- c** Bij $q = 0$ is $N = \frac{18\,000}{3,2^0} = 18\,000$.

Als q heel groot wordt, dan wordt $3,2^q$ ook heel groot.

De uitkomst van $\frac{18\,000}{3,2^q}$ wordt dan ongeveer 0.

De grenswaarde is dan 0.

De waarde van N neemt af als q heel groot wordt.

- d** Bij $q = 0$ is $N = \frac{14}{7 + 10 \times 0,87^0} \approx 0,8$.

Als q heel groot wordt, dan wordt $0,87^q$ ongeveer 0.

$10 \times 0,87^q$ zal dan ook ongeveer 0 worden.

$7 + 10 \times 0,87^q$ zal dan ongeveer 7 worden.

De grenswaarde is dan $\frac{14}{7} = 2$.

De waarde van N neemt toe als q heel groot wordt.

- 25 a** Bijvoorbeeld $A = 778$ en $T = 4329$ substitueren geeft
 $4329 = c \cdot 778^{1,5}$

$$c = \frac{4329}{778^{1,5}} \approx 0,2$$

- b** Bij de aarde is de omwentelingstijd rond de zon $T \approx 365$.

$$365 = 0,2 \cdot A^{1,5}$$

Invoer: $y_1 = 0,2 \times x^{1,5}$ en $y_2 = 365$

Venster: x van 0 tot 1000 en y van 0 tot 400

Optie: snijpunt

De afstand van de aarde tot de zon is ongeveer 149 miljoen kilometers.

- c** Als $A = 2 \times 149 = 298$, dan is $T = 0,2 \times 298^{1,5} \approx 1029$

T is dan $1029 : 365 \approx 2,8$ keer zo groot geworden.

T wordt dan niet twee keer zo groot.

- 28 a** $20927 = 119p + 67 \times 85$
 $20927 = 119p + 5695$
 $15232 = 119p$
 $p = 15232 : 119 = 128$
 De contributie voor een seniorlid wordt dan € 128,-.
- b** $20927 = 119p + 67 \times 95$
 $20927 = 119p + 6365$
 $14562 = 119p$
 $p = 14562 : 119 = 122,369...$
 De nieuwe contributie voor een seniorlid wordt dan € 123,-.

- 32 a** $V = 25$ substitueren in de formule geeft

$$C = 12 \cdot \frac{G}{25} - 2$$

$$C = \frac{12}{25} \cdot G - 2$$

$$C = 0,48 \cdot G - 2$$

- b** $G = 18$ substitueren in de formule geeft

$$C = 12 \cdot \frac{18}{V} - 2$$

$$C = \frac{216}{V} - 2$$

Hoofdstuk 12 Toegepast rekenen

- 3 a** $\frac{2}{17} \times 238 = 28 \text{ m}^3$ **c** $\frac{8}{9} \times 2196 = 1952 \text{ km}$
b $\frac{3}{23} \times 1357 = 177 \text{ mensen}$ **d** $\frac{5}{9} \times 27 = 15 \text{ hectare}$
- 5 a** $\frac{1}{4} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{28}$ **c** $\frac{3}{5} : 6 = \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$
b $\frac{7}{10} \times 3\frac{4}{9} = \frac{7}{10} \times \frac{31}{9} = \frac{217}{90} = 2\frac{37}{90}$ **d** $3\frac{1}{2} : 7 = \frac{7}{2} \times \frac{1}{7} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$

- 10 a** In 2020 zitten er 94,7% leerlingen op deze school in vergelijking met 2019.

<i>aantal</i>	2340	?
<i>percentage</i>	94,7	100

$$? = 2340 \times 100 : 94,7 \approx 2470,96$$

In 2019 zaten er 2471 leerlingen op deze school.

- b** $0,183 \times 0,248 \times 2340 \approx 106,2$
 Er zitten 106 leerlingen in vwo 3.

c

<i>aantal</i>	62	?
<i>percentage</i>	5,4	100

$$? = 62 \times 100 : 5,4 \approx 1148,15$$

In totaal zijn er 1148 meisjes op deze school.

Dit is $1148 : 2340 \times 100\% \approx 49,1\%$.

11 a $17\,181,1 - 16\,575,0 = 606,1$

De absolute toename is 606,1 duizend ofwel 606 100.

b 78,14 is relatief want het is het aantal per duizend inwoners.

c

<i>aantal personen werkzaam in de zorg</i>	78,14	?
<i>totaal aantal personen</i>	1000	16 575 000

$? = 78,14 \times 16\,575\,000 : 1000 = 1\,295\,171$

Er waren in 2010 ongeveer 1295 duizend mensen werkzaam in de zorg.

d In 2018 waren er $77,3 \times 17\,181\,000 : 1000 = 1\,328\,091$ mensen werkzaam in de zorg.

De absolute toename was $1\,328\,091 - 1\,295\,171 = 32\,920$.

15 a $2,3565 \approx 2,357$

b $42\,959\,614 \approx 42\,960\,000$ ofwel 42 960 duizend

c $81,967342 \approx 81,9673$

d $234\,513\,480 \approx 235\,000\,000$ ofwel 235 miljoen

16 a $1500 : 200 = 7,5$

Hij kan maximaal zeven bekers vullen.

b $695 : 53 \approx 13,11$

Er zijn dus 14 banen nodig.

$1000 : 259 = 3,86$

Uit één rol kun je maximaal drie banen knippen.

$14 : 3 \approx 4,67$

Weldsen heeft vijf rollen behang nodig.

23 a 11456 seconden is $11\,456 : 60 = 190,9333\dots$ minuten en dit is

190 minuten en $0,9333\dots \times 60 = 56$ seconden.

190 minuten is 3 uur en 10 minuten.

11456 seconden is daarom hetzelfde als 3 uur, 10 minuten en 56 seconden.

b $4,23,12$ is $4 \times 3600 + 23 \times 60 + 12 = 15\,792$ seconden.

c $100\text{ m} = 0,1\text{ km}$

<i>afstand in km</i>	0,1	?
<i>tijd in seconden</i>	12,4	3600

$? = 0,1 \times 3600 : 12,4 \approx 29,03$

De snelheid van Jari was 29 km per uur.

24 a 100 meter in 23,4 seconden betekent $100 : 23,4 \approx 4,3$ meter per seconde.

b $200\text{ m} = 0,2\text{ km}$

<i>afstand in km</i>	0,2	?
<i>tijd in seconden</i>	52,23	3600

$? = 0,2 \times 3600 : 52,23 \approx 13,79$

Zijn gemiddelde snelheid was 13,8 km per uur.

c $11 : 27,81$ minuten is $11 \times 60 + 27,81 = 687,81$ seconden.

<i>afstand in m</i>	2,181	?
<i>tijd in seconden</i>	1	687,81

$? = 2,181 \times 687,81 : 1 \approx 1500,11$

Dit was een record op de 1500 meter.

d

<i>afstand</i> in km	5,0105	42,195
<i>tijd</i> in uren	1	?

$$? = 1 \times 42,195 : 5,0105 = 8,4213\dots$$

Zijn tijd was 8 uur en $0,4213\dots \times 60 = 25,278\dots$ minuten.

$25,278\dots$ minuten = 25 minuten en $0,278\dots \times 60 \approx 17$ seconden.

Zijn recordtijd was 8:25:17 uur.

- 31 a** $12 \text{ miljard} \times 15 \text{ duizend}$
 $12 \times 10^9 \times 15 \times 10^3 =$
 $180 \times 10^{12} = 1,8 \times 10^{14}$
- b** $8 \times 10^{12} : (4 \times 10^5) = 2 \times 10^7$
- c** $12,3 \times 10^{-3} \times 4 \times 10^6 =$
 $49,2 \times 10^3 \approx 4,9 \times 10^4$
- d** $1,4 \times 10^9 : (1,75 \times 10^2) =$
 $0,8 \times 10^7 = 8 \times 10^6$
- 35 a** $1 \text{ u} = 1,66054 \times 10^{-24} \text{ gram}$
- b** 20 000 moleculen waterstof wegen
 $20\,000 \times 1,00797 \times 1,66054 \times 10^{-24} \approx 3,35 \times 10^{-20} \text{ gram}.$
- c** Eén molecuul ijzer weegt $55,8452 \times 1,66054 \times 10^{-27} \text{ kg}.$
 In 1 kg ijzer zitten dus $1 : (55,8452 \times 1,66054 \times 10^{-27}) \approx 1,078 \times 10^{25}$ ijzermoleculen.

Hoofdstuk 13 Conclusies uit data

- 3 a** De variabelen profiel en cijfer centraal schriftelijk examen Frans staan in de tabel.
- b** Er zijn $8 + 2 = 10$ leerlingen met een M-profiel, en 1 leerling met een N-profiel.
 $10 : 11 \times 100\% \approx 90,9\%$ van de leerlingen heeft een M-profiel en
 $1 : 11 \times 100\% \approx 9,1\%$ van de leerlingen heeft een N-profiel.
- c** Er zijn relatief veel meer leerlingen met een M-profiel die een cijfer vanaf 8,0 tot en met een 8,9 hebben gehaald dan leerlingen met een N-profiel.
- d** In de laagste drie klassen zijn de leerlingen met het NG-profiel de grootste groep.
- 7 a** De diameter van een wc-rol is continu omdat je de waarden kunt voorstellen als een aaneengesloten lijn.
- b** Het aantal planken van een schutting is discreet omdat het alleen bepaalde, gehele waarden aanneemt.
- c** De prijs van een pak melk is discreet omdat het alleen waarden afgerond op hele centen aanneemt.
- 10 a** Het leerjaar van een middelbare scholier is een ordinale variabele omdat je een logische volgorde kunt vastleggen.
- b** Het soort huisdier is een nominale variabele omdat je geen logische volgorde kunt vastleggen.
- c** De kleur van het haar van een mens is een nominale variabele omdat je geen logische volgorde kunt vastleggen.

- d Het type woning waarin iemand woont is een nominaal variabele omdat je geen logische volgorde kunt vastleggen.
- 16 a** De variabelen klas en aantal uren betaald werk per week zijn in het diagram verwerkt. De variabele klas is kwalitatief omdat het een kenmerk weergeeft. De variabele aantal uren betaald werk per week is kwantitatief omdat de waarde een getal is.
- b** De boxen overlappen elkaar niet. Het verschil in werktijd tussen de 3e en de 4e klas is dan groot.
- c** Bijvoorbeeld tussen de 1e klas en de 5e klas is het verschil ook groot.
- d** Het verschil tussen de 1e klas en de 2e klas is gering omdat de boxen elkaar overlappen en de medianen liggen binnen de box van de andere boxplot. Het verschil tussen de 4e en de 5e klas is middelmatig omdat de boxen elkaar overlappen maar de mediaan van de boxplot van de 5e klas ligt buiten de box van de boxplot van de 4e klas.
- 18 a** De voorlichting is door de leerlingen van Noordslag als beste beoordeeld omdat de bijbehorende grafiek onder de grafieken die bij de leerlingen van de andere scholen horen ligt. Door leerlingen van De regenboog is de voorlichting als slechtste beoordeeld.
- b** Het grootste verschil in cumulatief percentage is bij een beoordeling van 2. Het $\max V_{cp} = 68 - 34 = 34$. Het verschil is middelmatig omdat $20 < \max V_{cp} \leq 40$.
- c** Het verschil is groot tussen De regenboog en Noordslag. Het grootste verschil in cumulatief percentage is bij een beoordeling van 3. Het $\max V_{cp} = 76 - 13 = 63$ en dit is groter dan 40. Ook tussen De parel en Noordslag is het verschil groot. Het grootste verschil in cumulatief percentage is bij een beoordeling van 3. Het $\max V_{cp} = 59 - 13 = 46$ en dit is ook groter dan 40.
- 21**
$$E = \frac{3897 - 3372}{\frac{1}{2}(689 + 987)} \approx 0,63$$
 Het verschil is middelmatig omdat $0,4 < E \leq 0,8$.
- 25 a**
- | | met rollator | zonder rollator | totaal |
|---------|--------------|------------------|--------|
| vrouwen | 154 | $212 - 154 = 58$ | 212 |
| mannen | 44 | $89 - 44 = 45$ | 89 |
| totaal | 198 | 103 | 301 |
- b**
$$phi = \frac{154 \times 45 - 58 \times 44}{\sqrt{(154 + 58) \times (154 + 44) \times (58 + 45) \times (44 + 45)}} \approx 0,22$$
- c** Het verschil tussen mannen en vrouwen die met een rollator lopen is middelmatig omdat $0,2 < phi \leq 0,4$.
- 29 a** Bijvoorbeeld: 'Zijn er meer voldoende bij wiskunde A dan er bij wiskunde B zijn?'
- b**
$$phi = \frac{680 \times 35 - 123 \times 264}{\sqrt{(680 + 123) \times (680 + 264) \times (123 + 35) \times (264 + 35)}} \approx -0,05$$
 Het verschil is gering omdat $-0,2 \leq phi \leq 0,2$.
- c** Er zijn niet beduidend meer voldoende bij wiskunde A dan er bij wiskunde B zijn.

- d** Er zijn $680 + 264 = 944$ leerlingen met een voldoende.
 $680 : 944 \times 100\% \approx 72,0\%$ van de leerlingen met een voldoende hebben wiskunde A.
- e** Er zijn $680 + 123 = 803$ leerlingen met wiskunde A.
 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $\left[6,7 - 2 \times \frac{0,9}{\sqrt{803}}, 6,7 + 2 \times \frac{0,9}{\sqrt{803}}\right]$
 Dit is $[6,64; 6,76]$.
 Er zijn $264 + 35 = 299$ leerlingen met wiskunde B.
 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $\left[7,3 - 2 \times \frac{0,7}{\sqrt{299}}, 7,3 + 2 \times \frac{0,7}{\sqrt{299}}\right]$
 Dit is $[7,22; 7,38]$.

Hoofdstuk 14 Formules herleiden

- 2 a** $3q - 12s = 36$
 $3q = 12s + 36$
 $q = 4s + 12$
 substitutie geeft:
 $r = 5(4s + 12) + 35$
 $r = 20s + 60 + 35$
 $r = 20s + 95$
- b** $s - q = 10$
 $-q = -s + 10$
 $q = s - 10$
 substitutie geeft:
 $r = -2 - 8(s - 10)$
 $r = -2 - 8s + 80$
 $r = -8s + 78$
- c** $q + 4s - 10 = 0$
 $q = -4s + 10$
 substitutie geeft:
 $r = -(-4s + 10) + 18$
 $r = 4s - 10 + 18$
 $r = 4s + 8$

- 5 a** $3(a - 3b) = 7(b - 3a)$
 $3a - 9b = 7b - 21a$
 $-16b = -24a$
 $b = 1,5a$
 De formules zijn gelijkwaardig, want je kunt de formule $3(a - 3b) = 7(b - 3a)$ herleiden tot de formule $b = 1,5a$.
- b** $B = 4(3 - 2A) - 2(A - 5)$
 $B = 12 - 8A - 2A + 10$
 $B = -10A + 22$
 $-10A + 22 = B$
 $-10A = B - 22$
 $A = -0,1B + 2,2$
 De formules zijn niet gelijkwaardig, want je kunt de formule $B = 4(3 - 2A) - 2(A - 5)$ niet herleiden tot de formule $A = 10B + 2$.

$$\text{c } F = 5 - 2(2x + 5)$$

$$F = 5 - 4x - 10$$

$$F = -4x - 5$$

$$-4x - 5 = F$$

$$-4x = F + 5$$

$$x = -0,25F - 1,25$$

De formules zijn gelijkwaardig, want je kunt de formule $F = 5 - 2(2x + 5)$ herleiden tot de formule $x = -0,25F - 1,25$.

$$9 \text{ a } p = \frac{36}{z-4}$$

$$z-4 = \frac{36}{p}$$

$$z = \frac{36}{p} + 4$$

$$\text{b } \frac{2}{z} - 8 = 3p$$

$$\frac{2}{z} = 3p + 8$$

$$\frac{2}{3p+8} = z$$

$$z = \frac{2}{3p+8}$$

$$\text{c } p = 3 \cdot \frac{5}{z+10}$$

$$p = \frac{15}{z+10}$$

$$z+10 = \frac{15}{p}$$

$$z = \frac{15}{p} + 10$$

$$\text{d } \frac{z-1}{4} = \frac{4p+3}{8}$$

$$8(z-1) = 4(4p+3)$$

$$8z-8 = 16p+12$$

$$8z = 16p+20$$

$$z = 2p + 2\frac{1}{2}$$

$$\text{e } \frac{8p}{z+5} = \frac{10}{p}$$

$$8p^2 = 10(z+5)$$

$$8p^2 = 10z+50$$

$$10z+50 = 8p^2$$

$$10z = 8p^2 - 50$$

$$z = \frac{4}{5}p^2 - 5$$

$$\text{f } \frac{4p-3}{p} = \frac{8}{z}$$

$$z(4p-3) = 8p$$

$$z = \frac{8p}{4p-3}$$

$$10 \text{ a } t = 0 \text{ invullen geeft } N = 1500 - \frac{600}{2+3 \times 0} = 1200.$$

De onderzoekers hebben 1200 muggen in de afgesloten ruimte gebracht.

b Als t heel groot wordt, gaat de noemer naar oneindig. Dan wordt 600 door een steeds groter getal gedeeld, de breuk nadert dan naar 0.

Het aantal muggen nadert op den duur de grenswaarde 1500.

$$\text{c } N = 1500 - \frac{600}{2+3t}$$

$$N - 1500 = -\frac{600}{2+3t}$$

$$-N + 1500 = \frac{600}{2+3t}$$

$$2+3t = \frac{600}{-N+1500}$$

$$3t = \frac{600}{-N+1500} - 2$$

$$t = \frac{200}{-N+1500} - \frac{2}{3}$$

d $N = 1490$ invullen geeft $t = \frac{200}{-1490 + 1500} - \frac{2}{3} = 19\frac{1}{3}$

Na 19 dagen is het aantal muggen gelijk aan 1490.

16 a $s = \sqrt{4h + 8}$

$$s^2 = 4h + 8$$

$$4h + 8 = s^2$$

$$4h = s^2 - 8$$

$$h = \frac{1}{4}s^2 - 2$$

c $s = 2 \cdot \sqrt{h - 5}$

$$\frac{1}{2}s = \sqrt{h - 5}$$

$$\left(\frac{1}{2}s\right)^2 = h - 5$$

$$\frac{1}{4}s^2 = h - 5$$

$$h - 5 = \frac{1}{4}s^2$$

$$h = \frac{1}{4}s^2 + 5$$

b $s = \sqrt{\frac{1}{100}h - 2}$

$$s^2 = \frac{1}{100}h - 2$$

$$\frac{1}{100}h - 2 = s^2$$

$$\frac{1}{100}h = s^2 + 2$$

$$h = 100s^2 + 200$$

d $s = 0,2 \cdot \sqrt{2h - 6}$

$$5s = \sqrt{2h - 6}$$

$$(5s)^2 = 2h - 6$$

$$25s^2 = 2h - 6$$

$$2h - 6 = 25s^2$$

$$2h = 25s^2 + 6$$

$$h = 12\frac{1}{2}s^2 + 3$$

19 a $D = \sqrt{\frac{m}{81}}$

$$D = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{81}}$$

$$D = \frac{\sqrt{m}}{9}$$

$$D = \frac{1}{9} \cdot \sqrt{m}$$

c $J = \sqrt{\frac{0,04}{t}}$

$$J = \frac{\sqrt{0,04}}{\sqrt{t}}$$

$$J = \frac{0,2}{\sqrt{t}}$$

b $P = \sqrt{49e}$

$$P = \sqrt{49} \cdot \sqrt{e}$$

$$P = 7 \cdot \sqrt{e}$$

d $L = \sqrt{\frac{1}{16}r}$

$$L = \sqrt{\frac{1}{16}} \cdot \sqrt{r}$$

$$L = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{r}$$

22 a $F = m^{-2} \cdot m^{12}$

$$F = m^{10}$$

b $F = \frac{m^6}{m^{3,5}}$

$$F = m^{2,5}$$

c $F = (m^3)^9$

$$F = m^{27}$$

d $F = (m^4)^{21}$

$$F = m^{84}$$

e $F = \frac{1}{m^3}$

$$F = m^{-3}$$

f $F = m^8 \cdot m^5 \cdot m$

$$F = m^{14}$$

24 a $H = \left(\frac{24u}{6}\right)^3$

$$H = (4u)^3$$

$$H = 64u^3$$

c $H = \left(\frac{2}{u}\right)^8$

$$H = \frac{256}{u^8}$$

$$H = 256u^{-8}$$

b $H = (-3u^4)^6$

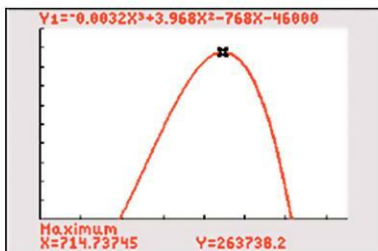
$$H = 729u^{24}$$

d $H = (81u^7)^{2,5}$

$$H = 59049u^{17,5}$$

- 29 a** Het aantal kleine bedrijven moet volgens de gemeente twee keer zo groot zijn als het aantal grote bedrijven. De waarde van k moet dus twee keer zo groot zijn als de waarde van g , oftewel $2g = k$.
- b** $k = 2g$ substitueren geeft $A = 1000g + 200 \cdot 2g$.
 $A = 1000g + 400g$
 $A = 1400g$

- 30 a** Bij een prijs van 450 euro per loungeset, verkoopt hij
 $q = -0,0032 \times 450^2 + 3,2 \times 450 = 792$ loungesets per jaar.
 De totale opbrengst per jaar is dan $792 \times 450 = \text{€} 356.400,-$.
- b** De totale kosten per jaar zijn $TK = 240 \times 792 + 46.000 = \text{€} 236.080,-$.
 De totale winst is $356.400 - 236.080 = \text{€} 120.320,-$ per jaar.
- c** $TO = p \cdot q$
 $TO = p \cdot (-0,0032p^2 + 3,2p)$
 $TO = -0,0032p^3 + 3,2p^2$
- d** $TK = 240(-0,0032p^2 + 3,2p) + 46.000$
 $TK = -0,768p^2 + 768p + 46.000$
- e** $TW = TO - TK$
 $TW = -0,0032p^3 + 3,2p^2 - (-0,768p^2 + 768p + 46.000)$
 $TW = -0,0032p^3 + 3,2p^2 + 0,768p^2 - 768p - 46.000$
 $TW = -0,0032p^3 + 3,968p^2 - 768p - 46.000$
- f** Hij kan het beste de prijs vragen die bij de maximale winst hoort.
 Invoer: $y_1 = -0,0032x^3 + 3,968x^2 - 768x - 46.000$
 Venster: x van 0 tot 1200 en y van 0 tot 300.000
 Optie: maximum



De coördinaten van de top waar de grafiek een maximum heeft zijn (714,74; 263.738,2).

De fabrikant kan het beste € 714,74 per loungeset vragen.

- 1 a** De op te lossen vergelijking is $4,40 = 10 - \frac{8q}{3 + q}$

Invoer: $y_1 = 4,40$ en $y_2 = 10 - \frac{8x}{3 + x}$

Venster: x van 0 tot 10 en y van 0 tot 10

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (7; 4,4).

Er worden 7000 producten per dag geproduceerd als de prijs €4,40 is.

b

q	10	100	1000	10 000
P	3,8462	2,3330	2,0239	2,0024

De grafiek van P neemt af en nadert de grenswaarde 2. De prijs zal daarom nooit minder dan twee euro zijn.

- 2 a** Er geldt $V = 0,58$ en $T = 290$. Deze waarden invullen in de formule geeft:

$$\frac{p \cdot 0,58}{290} = 0,000012$$

$$p \cdot 0,58 = 0,000012 \cdot 290$$

$$0,58p = 0,00348$$

$$p = 0,006$$

De druk van het gas is 0,006 bar.

- b** $T = 300$ invullen geeft:

$$\frac{p \cdot V}{300} = 0,000012$$

$$p \cdot V = 0,000012 \cdot 300$$

$$p \cdot V = 0,0036$$

Tussen p en V bestaat een omgekeerd evenredig verband.

- c** $p = 0,001$ invullen geeft:

$$\frac{0,001 \cdot V}{T} = 0,000012$$

$$0,001 \cdot V = 0,000012 \cdot T$$

$$V = 0,012 \cdot T$$

Tussen V en T bestaat een recht evenredig verband.

- 3 a** De grafiek die bij 188 cm hoort gaat door de punten met coördinaten (17, 66) en (19,5; 78).

De richtingscoëfficiënt van deze lijn is $\frac{78 - 66}{19,5 - 17} = 4,8$.

Het startgetal is $66 - 17 \times 4,8 = -15,6$.

De formule is $G = 4,8 \cdot K - 15,6$.

- b** In de grafieken is de lengte L constant. Aangezien q een constante is, is voor iedere grafiek L^q constant. De formule is dan van de vorm $G = a \cdot K + r$ met $a = p \cdot L^q$. Dit is een lineaire formule en bij een lineaire formule hoort een rechte lijn als grafiek.
- c** Uit opdracht c volgt dat de formule van de vorm $G = a \cdot K + r$ is. In de formule is het startgetal gelijk aan r . Hieruit volgt $r = b$.

- d Uit opdracht c volgt $a = p \cdot L^q$.

Invullen van $a = 4,8$, $L = 188$ en $p = 0,013$ geeft:

$$4,8 = 0,013 \times 188^q$$

Invoer: $y_1 = 4,8$ en $y_2 = 0,013 \times 188^x$

Venster: x van 0 tot 2 en y van 0 tot 10

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (1,129; 4,8).

De waarde van q is 1,129.

4 Voor $n = 0$ is $T = \frac{150}{20 - 18 \cdot 0,93^0} = 75$.

Als n groter wordt, neemt $0,93^n$ af en nadert naar de waarde 0, want

$0,93 < 1$. Dan neemt $18 \cdot 0,93^n$ ook af en nadert ook naar de 0.

$20 - 18 \cdot 0,93^n$ neemt dan toe, want er wordt een steeds kleiner getal van 20 afgetrokken en nadert de waarde $20 - 0 = 20$.

$\frac{150}{20 - 18 \cdot 0,93^n}$ neemt af, want 150 wordt door een steeds groter getal gedeeld en nadert de waarde $\frac{150}{20} = 7,5$.

De tijd die een licht kan branden neemt op den duur af en nadert tot de grenswaarde 7,5 uren.

- 5 a Voor personen met een lengte van 175 cm geldt $L = 175$.

$$H = 0,006681 \times 60^{0,425} \times 175^{0,725} = 1,609...$$

$$H = 0,006681 \times 80^{0,425} \times 175^{0,725} = 1,819...$$

$$H = 0,006681 \times 100^{0,425} \times 175^{0,725} = 2,000...$$

Tussen personen van 60 en 80 kg verschilt de huidoppervlakte

$$1,819... - 1,609... \approx 0,21 \text{ m}^2.$$

Tussen personen van 80 en 100 kg verschilt de huidoppervlakte

$$2,000... - 1,819... \approx 0,18 \text{ m}^2.$$

Het verschil in huidoppervlakte tussen personen van 60 en 80 kg en tussen personen van 80 en 100 kg is dus niet even groot.

- b Voor personen van 165 cm geldt $L = 165$. Dit invullen in de formule geeft:

$$H = 0,006681 \cdot G^{0,425} \cdot 165^{0,725}$$

$$H = 0,006681 \cdot 165^{0,725} \cdot G^{0,425}$$

$$H = 0,2707 \cdot G^{0,425}$$

- c De persoon van 1,70 m en 80 kg heeft een huidoppervlakte van

$$H = 0,006681 \cdot 80^{0,425} \cdot 170^{0,725} = 1,7812... \text{ m}^2.$$

De op te lossen vergelijking is $0,006681 \cdot 160^{0,725} \cdot G^{0,425} = 1,7812...$

Invoer: $y_1 = 0,006681 \times 160^{0,725} \times x^{0,425}$ en $y_2 = 1,7812...$

Venster: x van 0 tot 100 en y van 0 tot 3

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (88,708; 1,781).

De tweede persoon weegt 88,7 kg.

- 6 a** De groeifactor per jaar is $\left(\frac{150000}{17000}\right)^{\frac{1}{9}} \approx 1,274$.
 Voor deze jongeren neemt het aantal woorden met 27,4% per jaar toe.
- b** Een formule voor de woordenschat is $W = 17000 \cdot 1,274^t$.
- c** De formule is van de vorm $W = a \cdot t + b$.
 De richtingscoëfficiënt is $\frac{45000 - 17000}{9} \approx 3111$ en het startgetal is 17000.
 Voor deze jongeren geldt de formule $W = 3111 \cdot t + 17000$.
- d** De jongeren met een hoge woordenschat kennen op hun 18^e verjaardag $17000 \times 1,274^6 \approx 72688$ woorden. De jongeren met een lage woordenschat kennen op hun 18^e verjaardag $3111 \cdot 6 + 17000 \approx 35566$ woorden.
 Het verschil is $72688 - 35566 \approx 37000$ woorden.

Hoofdstuk 12 Toegepast rekenen

- 1 a** De partij bakstenen zal ongeveer $16000 \times 1,9 \approx 30000$ kg wegen.
- b** $\frac{16000}{24} = 666,666\dots$
 Hij zal de kruiwagen 667 keer met bakstenen moeten vullen.
- 2 a** Daphne Schippers liep 0,2 km in 21,63 seconden.
 1 uur is gelijk aan 3600 seconden.
- | | | |
|------------------|-------|------|
| afstand in km | 0,2 | ? |
| tijd in seconden | 21,63 | 3600 |
- $? = 0,2 \times 3600 : 21,63 = 33,287\dots$
 Haar gemiddelde snelheid was ongeveer 33,3 km per uur.
- b** 4 : 09,34 minuten is gelijk aan $4 \times 60 + 9,34 = 249,34$ seconden.
 1500 meter is gelijk aan 1,5 km
- | | | |
|------------------|-----------|-----|
| afstand in km | 33,287... | 1,5 |
| tijd in seconden | 3600 | ? |
- $? = 1,5 \times 3600 : 33,287\dots = 162,225$
 Sifan Hassan zou dan $249,34 - 162,225 \approx 87,1$ seconden sneller zijn geweest.
- 3 a** $\frac{2}{3} \times 2\frac{1}{2} =$
 $\frac{2}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{10}{6} = 1\frac{2}{3}$
- c** $\frac{5}{7} \times 91 = 65$ meter
- b** $2\frac{4}{5} : 3 =$
 $\frac{14}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{14}{15}$
- d** $\frac{2}{13} \times 104 = 16$ euro
- 4 a** 1 kilometer is gelijk aan 100000 cm.
 In 1 kilometer gaan $\frac{100000}{0,00000001} = 1 \times 10^{13}$ ångström.
- b** 2×10^{-3} mm is gelijk aan 2×10^{-4} cm.
 De lengte van een salmonellabacterie is $\frac{2 \times 10^{-4}}{0,00000001} = 20000$ ångström.

- 5 a** 6 liter is gelijk aan 6000 mL.
Met 6 liter crème kunnen $\frac{6000}{20} = 300$ tubes worden gevuld.
Hiervoor is $300 \times 5 = 1500$ gram avocado-olie nodig.
- b** 100 ml crème weegt 85 gram. Een tube heeft een inhoud van 20 ml.
20 ml is $\frac{1}{5}$ deel van 100.
20 ml crème weegt dus $\frac{1}{5} \times 85 = 17$ gram.
De lege tube weegt $31 - 17 = 14$ gram.
- c** In een volle tube zit 125 mg calendula-extract, dit is gelijk aan 0,125 gram.
0,125 gram van 17 gram is $\frac{0,125}{17} \times 100 \approx 0,7\%$.
- 6 a** In gemeente A zijn 15 300 automobilisten gecontroleerd waarvan 2,6 per 1000 een te hoog promillage hadden.
Dit zijn $15\,300 : 1000 \times 2,6 \approx 40$ automobilisten met een te hoog promillage.
- b** $\frac{5}{8}$ deel van 40 zijn $\frac{5}{8} \times 40 = 25$ mannen
 $\frac{2}{5}$ deel van 25 zijn $\frac{2}{5} \times 25 = 10$ mannen jonger dan 20 jaar.
- c** In gemeente B hadden per 1000 automobilisten er 1,6 een te hoog promillage. Dat komt overeen met $\frac{1,6}{1000} \times 100 = 0,16\%$.
- d** In gemeente A hadden per 100 automobilisten er 2,6 een te hoog promillage.
Dat komt overeen met $\frac{2,6}{1000} \times 100 = 0,26\%$.
In gemeente A had $0,26 - 0,16 = 0,1\%$ meer automobilisten een te hoog promillage vergeleken met gemeente B.
- e** Het promillage van deze bestuurder is $\frac{0,013}{20} \times 1000\text{‰} = 0,65\text{‰}$.
0,65‰ is meer dan 0,5‰, deze bestuurder heeft wel te veel gedronken.
- 7 a** 5000 km is gelijk aan 5 000 000 mm.
0,000 14% van 5 000 000 mm is $0,000\,001\,4 \times 5\,000\,000 = 7$ mm.
De maximale uitwijking bedroeg 7 mm.
- b** 40 vrachtwagens van elk 30 ton wegen samen $40 \times 30 = 1200$ ton.
Deze 40 vrachtwagens zouden over 60 kilometer $1200 \times 60 \times 16 = 1\,152\,000$ mg fijnstof hebben uitgestoten, dit is gelijk aan 1152 gram fijnstof.

Hoofdstuk 13 Conclusies uit data

- 1 a** Een mogelijke onderzoeksvraag is: ‘Helpt vitamine C om verkoudheid te voorkomen?’
- b** Het gaat hier om de variabelen *verkouden* en *toegediend middel*.
- c** Beide variabelen zijn kwalitatief.
- d** Beide variabelen zijn nominaal, want bij beide is er niet een logische volgorde in de waarden aan te wijzen.
- e** Van de verkouden mensen heeft $\frac{19}{48} \times 100\% \approx 39,6\%$ vitamine C toegediend gekregen.
- f** Van de mensen die vitamine C toegediend hebben gekregen werd $\frac{19}{141} \times 100\% \approx 13,5\%$ verkouden.

- g Je berekent de waarde van ϕ .

$$\phi = \frac{19 \times 109 - 122 \times 29}{\sqrt{(19 + 122)(19 + 29)(122 + 109)(29 + 109)}} \approx -0,0999$$

$-0,2 \leq \phi \leq 0,2$, dat betekent dat het verschil tussen de twee groepen gering is.

- h Je zou de conclusie kunnen trekken dat het slikken van vitamine C een geringe invloed heeft op het wel of niet verkouden worden.

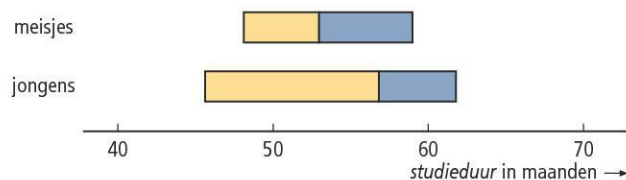
- 2 a Een mogelijke onderzoeksvraag is: 'Werpen oudere leerlingen verder dan jongere leerlingen bij het speerwerpen?'
- b In dit onderzoek gaat het om de variabelen *leeftijd* en *afstand speerwerpen*.
- c Beide variabelen zijn kwantitatief.
- d De variabele leeftijd is discreet, want leeftijd kan alleen gehele waarden aannemen. De variabele afstand speerwerpen is continu, want deze kan alle tussenliggende waarden aannemen.
- e De boxen van de 15-jarigen en de 16-jarigen overlappen en beide medianen liggen buiten de box van de andere boxplot. Het verschil in prestatie tussen de 15-jarigen en de 16-jarigen is middelmatig.
- f De boxen van de 16-jarigen en de 17-jarigen overlappen en beide medianen vallen in de box van de andere boxplot. Het verschil in prestatie tussen de 16-jarigen en de 17-jarigen is gering.
- g Een argument hiervoor is dat de alle 16-jarigen 25 meter of meer gegooid hebben en ook de grootste afstand door een 16-jarige gegooid is. En dat is niet het geval bij de 17-jarigen.
- h Een argument dat de collega kan aanvoeren is dat de mediaan van de 17-jarigen groter is dan de mediaan van de 16-jarigen.
- 3 a Hij heeft de klassenbreedte 5 meter gebruikt.
- b Van de jongens gooide 4% minder dan 20 meter ver.
96% wierp minstens 20 meter ver.
- c Je bepaalt hiervoor de max V_{cp} .
Je leest af bij 20 meter dat max $V_{cp} = 72 - 4 = 68\%$.
De max V_{cp} is groter dan 40, dus het verschil in prestatie tussen de jongens en de meisjes is groot.
- 4 a In dit onderzoek gaat het om de variabelen *geslacht*, *studieduur hbo-opleiding* en *vooropleiding*.
- b De variabelen *geslacht* en *vooropleiding* zijn kwalitatief en de variabele *studieduur hbo-opleiding* is kwantitatief.
- c De variabele *geslacht* is nominaal, want er is geen logische volgorde in de waarden aan te wijzen. De variabele *vooropleiding* is ordinaal, want daar is wel een logische volgorde in de waarden aan te wijzen. De variabele *studieduur hbo-opleiding* is continu want deze kan alle waarden groter dan 0 aannemen.

- d Je kunt dit onderzoeken met de effectgrootte en met boxplots.

De effectgrootte is $E = \frac{57,1 - 53,1}{\frac{1}{2}(6,11 + 4,82)} \approx 0,73$.

$0,4 < E \leq 0,8$. Volgens deze manier is het verschil in studieduur tussen jongens en meisjes middelmatig.

Je tekent de boxen die horen bij de jongens en de meisjes.



De boxen overlappen; de medianen van beide boxen vallen binnen de box van de andere boxplot. Volgens deze manier is het verschil in studieduur tussen jongens en meisjes gering.

Je krijgt niet dezelfde uitkomst.

- e spreidingsbreedte jongens = $77 - 41 = 36$

spreadingsbreedte meisjes = $73 - 42 = 31$

De spreidingsbreedte geeft een grotere spreiding bij de jongens.

kwartielafstand jongens = $62 - 46 = 16$

kwartielafstand meisjes = $59 - 48 = 11$

De kwartielafstand geeft ook een grotere spreiding bij de jongens.

De standaardafwijking is bij de jongens 6,11 en bij de meisjes 4,82.

Ook de standaardafwijking wijst bij de jongens op een grotere spreiding in studieduur.

- f $53,1 - 2 \cdot \frac{4,82}{\sqrt{1092}} \approx 52,8$ en $53,1 + 2 \cdot \frac{4,82}{\sqrt{1092}} \approx 53,4$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval van de gemiddelde duur in maanden van de meisjes die een hbo-studie volgen is $[52,8; 53,4]$.

- g Van de 1643 studenten met een studieduur van minder dan 60 maanden, hebben 494 havo als vooropleiding. 494 van 1643 is $\frac{494}{1643} \times 100\% \approx 30,1\%$.

- h Je maakt eerst een 2×2 kruistabel en berekent dan de waarde van ϕ .

vooropleiding	studieduur in maanden		
	40 tot 60	60 tot 80	totaal
havo	494	420	914
mbo	702	34	736
totaal	1196	454	1650

$$\phi = \frac{494 \times 34 - 420 \times 702}{\sqrt{(494 + 420)(494 + 702)(420 + 34)(702 + 34)}} \approx -0,46$$

$\phi < -0,4$ dus het verschil in studieduur tussen de vooropleiding havo en mbo is groot.

Hoofdstuk 14 Formules herleiden

- 1 a $B = 64$ invullen in de formule geeft:

$$64 = 0,143L + 39$$

$$0,143L + 39 = 64$$

$$0,143L = 25$$

$$L = 174,825\dots$$

De lengte van deze vrouw is 175 cm.

Het ideale lichaamsgewicht dat hierbij hoort is

$$G = 0,89 \times 174,825\dots - 91 \approx 64,6 \text{ kg.}$$

- b $B = 0,143L + 39$

$$0,143L + 39 = B$$

$$0,143L = B - 39$$

$$L = 6\frac{142}{143}B - 272\frac{8}{11}$$

Dit substitueren in de formule voor G geeft:

$$G = 0,89\left(6\frac{142}{143}B - 272\frac{8}{11}\right) - 91$$

$$G \approx 6,22B - 242,73 - 91$$

$$G \approx 6,22B - 333,73$$

2 a $\frac{10p - 5w}{5} = \frac{5p + 7}{3}$

$$3(10p - 5w) = 5(5p + 7)$$

$$30p - 15w = 25p + 35$$

$$5p - 15w = 35$$

$$p - 3w = 7$$

De formules zijn niet gelijkwaardig, want je kunt de formule

$$\frac{10p - 5w}{5} = \frac{5p + 7}{3} \text{ niet herleiden tot de formule } p - 3w = -7.$$

b $H = \sqrt{81r}$

$$H^2 = 81r$$

$$81r = H^2$$

$$r = \frac{1}{81}H^2$$

De formules zijn niet gelijkwaardig, want je kunt de formule $H = \sqrt{81r}$ niet herleiden tot de formule $r = \frac{1}{9}H$.

c $W = \frac{26e + 8 - 4(2e + 1)}{3}$

$$W = \frac{26e + 8 - 8e - 4}{3}$$

$$W = \frac{18e + 4}{3}$$

$$W = \frac{18e}{3} + \frac{4}{3}$$

$$W = 6e + 1\frac{1}{3}$$

De formules zijn niet gelijkwaardig, want je kunt de formule

$$W = \frac{26e + 8 - 4(2e + 1)}{3} \text{ niet herleiden tot de formule } W = 6e + 4.$$

3 a Er geldt $A = 50$. De straal van de koppelingsplaat is $r = \sqrt{\frac{50}{3,14} + 9} \approx 5,0$ cm.

b $r = \sqrt{\frac{A}{3,14} + 9}$

$$r^2 = \frac{A}{3,14} + 9$$

$$\frac{A}{3,14} + 9 = r^2$$

$$\frac{A}{3,14} = r^2 - 9$$

$$A = 3,14(r^2 - 9)$$

$$A = 3,14r^2 - 28,26$$

c Er geldt $r = 6,23$. Dit invullen in de formule $A = 3,14r^2 - 28,26$ geeft

$$A = 3,14 \cdot 6,23^2 - 28,26 = 93,612\dots$$

De oppervlakte van de koppelingsplaat is ongeveer $93,6$ cm².

4 a $K = (6m^{4,1})^2 \cdot 2m^4$

$$K = 36m^{8,2} \cdot 2m^4$$

$$K = 72m^{12,2}$$

c $K = -9m \cdot \frac{1}{m^5}$

$$K = -9m \cdot m^{-5}$$

$$K = -9m^{-4}$$

b $K = \left(\frac{-8}{3m^2}\right)^4$

$$K = \left(\frac{-8}{3} \cdot \frac{1}{m^2}\right)^4$$

$$K = \left(-2\frac{2}{3}m^{-2}\right)^4$$

$$K = 50\frac{46}{81}m^{-8}$$

d $K = \left(\frac{2m^4}{5}\right)^3$

$$K = \left(\frac{2}{5}m^4\right)^3$$

$$K = \frac{9}{125}m^{12}$$

5 a Er geldt $T = 7$. Dit invullen geeft

$$R = 15 + \frac{7,2}{0,0785 - 0,0034 \cdot 7} \approx 147$$

De overlevingstijd van iemand die in water met een temperatuur van 7°C terechtkomt is ongeveer 147 minuten.

b $R = 15 + \frac{7,2}{0,0785 - 0,0034T}$

$$R - 15 = \frac{7,2}{0,0785 - 0,0034T}$$

$$0,0785 - 0,0034T = \frac{7,2}{R - 15}$$

$$-0,0034T = \frac{7,2}{R - 15} - 0,0785$$

$$T \approx \frac{-2117,65}{R - 15} + 23,09 \text{ ofwel } T \approx 23,09 + \frac{-2117,65}{R - 15}$$

$$a = 23,09 \text{ en } b = -2117,65$$

c 4 uur is gelijk aan 240 minuten, er geldt dus dat $R = 240$.

$$T = 23,09 + \frac{-2117,65}{240 - 15} = 13,678\dots$$

Wil iemand een overlevingstijd van minstens vier uur hebben, dan moet de temperatuur van het water minstens $13,7^\circ\text{C}$ zijn.

- 6 a** Een vis die een afstand van 3 km met een snelheid van 2 kilometer per uur zwemt, doet daar $\frac{3}{2} = 1,5$ uur over. Er geldt daarom $v = 2$ en $t = 1,5$.

$$E = 0,15 \cdot 2^3 \cdot 1,5 = 1,8$$

Het energieverbruik van deze vis is 1,8 Joule.

b $a = v \cdot t$

$$v \cdot t = a$$

$$t = \frac{a}{v}$$

substitutie geeft:

$$E = 0,15 \cdot v^3 \cdot \frac{a}{v}$$

$$E = 0,15 \cdot v^3 \cdot a \cdot \frac{1}{v}$$

$$E = 0,15 \cdot v^3 \cdot a \cdot v^{-1}$$

$$E = 0,15 \cdot v^{-2} \cdot a$$

- c** 1 meter is gelijk aan 0,001 km en 1 seconde is gelijk aan $\frac{1}{3600}$ uur.

In een verhoudingstabel krijg je:

<i>afstand</i> in km	0,001	?
<i>tijd</i> in uren	$\frac{1}{3600}$	1

$$\frac{1}{3600} \times ? = 0,001 \cdot 1$$

$$? = 0,001 \cdot 1 : \frac{1}{3600} = 3,6$$

Hieruit volgt dat 1 meter per seconde gelijk is aan 3,6 kilometer per uur, oftewel $v = 3,6V$.

- d** Een uur is gelijk aan 3600 seconden. Als je de tijd in seconden wilt omrekenen naar de tijd in uren, moet je daarom delen door 3600.

- e** Substitueer $v = 3,6V$ en $t = \frac{T}{3600}$ in de formule $E = 0,15 \cdot v^3 \cdot t$.

$$E = 0,15 \cdot (3,6V)^3 \cdot \frac{T}{3600}$$

$$E = 0,15 \cdot 46,656 \cdot V^3 \cdot T \cdot \frac{1}{3600}$$

$$E = 0,001944 \cdot V^3 \cdot T$$

De waarde van $p \approx 0,0019$.



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.
Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.
Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.