

MODERNE WISKUNDE

B



Noordhoff

$$h = 4,9 t^2$$

12e editie

Moderne Wiskunde

havo B deel 1

Serieoverzicht Tweede Fase

	havo		vwo		
klas 4	A 1	B 1	AC 1		B 1
	A 2	B 2	AC 2		B 2
klas 5	A 3	B 3			
			A 3	C 3	B 3
klas 6			A 4	C 4	B 4

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontlelen.



0 / 20

© 2020 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsenauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-89228-9

12e editie

Moderne Wiskunde

havo B deel 1

Harm Bakker
Bert Boon
Dick Bos
Ferdi Doddema
Wim Doekes
Gerben van der Hoek
Ilse de Jong
Boris Nolte
Gerard van Proosdij
Rindert Reijenga
Geertrui Schaberg
Ron Sinkeldam
Carolijn Tacken

1 Vergelijkingen 10

- Voorkennis 12
- 1.1 Lineaire vergelijkingen 14
- 1.2 Kwadratische vergelijkingen 18
- 1.3 Wortelvergelijkingen 22
- 1.4 Gebroken vergelijkingen 26
- 1.5 Ongelijkheden 30
- 1.6 Herleiden 34
- 1.7 Gemengde opdrachten 38
- Onderzoeksopdrachten 39
- Samenvatting 40
- Test jezelf 44
- Extra oefening 46

2 Machtsformules 48

- Voorkennis 50
- 2.1 Negatieve exponenten 52
- 2.2 Gebroken exponenten 56
- 2.3 Machtsformules 60
- 2.4 Vergelijkingen oplossen 64
- 2.5 Herleiden 68
- 2.6 Gemengde opdrachten 72
- Onderzoeksopdrachten 73
- Samenvatting 74
- Test jezelf 78
- Extra oefening 80

- Vaardigheden 1** 82
- Lineaire vergelijkingen opstellen 84
- Rekenen met wortels 85
- Rekenen met breuken 86

De grafische rekenmachine 88

3 Functies en grafieken 94

- Voorkennis 96
- 3.1 Functie en functiewaarde 98
- 3.2 Domein en bereik 102
- 3.3 Gebroken functies 106
- 3.4 Soorten functies 110
- 3.5 Vergelijkingen oplossen 114
- 3.6 Gemengde opdrachten 118
- Onderzoeksopdrachten 119
- Samenvatting 120
- Test jezelf 124
- Extra oefening 126

4 Exponentiële functies 128

- Voorkennis 130
- 4.1 Grafieken van exponentiële functies 132
- 4.2 Transformaties 136
- 4.3 Herleiden 140
- 4.4 Vergelijkingen en ongelijkheden 144
- 4.5 Gemengde opdrachten 148
- Onderzoeksopdrachten 149
- Samenvatting 150
- Test jezelf 154
- Extra oefening 156

- Vaardigheden 2** 158
- Rekenen met breuken 160
- Haakjes wegwerken en bijzondere producten 161
- Vergelijkingen oplossen 162
- Ongelijkheden oplossen 163

5 Lijnen en afstanden 164

- Voorkennis 166
- 5.1 Vergelijking van een lijn 168
- 5.2 Stelsels lineaire vergelijkingen 172
- 5.3 De hoek tussen twee lijnen 176
- 5.4 Loodrecht 180
- 5.5 Afstanden 184
- 5.6 Gemengde opdrachten 188
- Onderzoeksopdrachten 189
- Samenvatting 190
- Test jezelf 194
- Extra oefening 196

6 Afgeleide functies 198

- Voorkennis 200
- 6.1 Toenamedigrammen 202
- 6.2 Gemiddelde verandering 206
- 6.3 Hellingen benaderen 210
- 6.4 De afgeleide functie 214
- 6.5 Differentiëren 218
- 6.6 Regels voor differentiëren 222
- 6.7 Gemengde opdrachten 226
- Onderzoeksopdrachten 227
- Samenvatting 228
- Test jezelf 232
- Extra oefening 234

Vaardigheden 3 236

- Breuken en wortels herleiden 238
- Lineaire en exponentiële formules 239
- Meetkunde 240
- Substitutie 240

Trefwoorden 242

Moderne Wiskunde

havo B deel 1

Aan het begin van de paragraaf staan de **Leerdoelen**. Deze geven richting aan je werk. In de **Samenvatting** komen de leerdoelen weer terug.

Er zijn drie **leerroutes**. Voel je je niet zo vertrouwd met het onderwerp van de paragraaf kies je de **Ondersteunende route**. Voor wat extra moeilijke opgaven kies je de **Uitdagende route**.

Een **W** verwijst naar de werkbladen in het **Hulpboek**.

Voor havo 4 en 5 zijn er **3 delen** met in totaal **14 hoofdstukken**. Na twee hoofdstukken volgt een blok met **Vaardigheden**. In deel 3 staat ook de **Examenvoorbereiding**.

1.4 Routes in een rooster

Je leert

• hoe je een rooster kunt gebruiken om telproblemen op te lossen

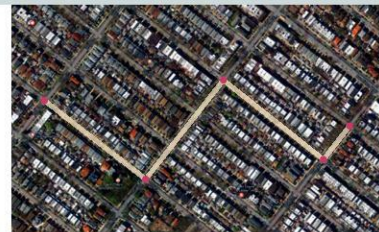
Leerroutes

- ondersteunend: 23–24–025–26–27–28–029–30
- doorlopend: 23–24–25–26–27–28–29–30
- uitdagend: 23–24–25–26–27–29–30–U6

Hiernaast zie je een stukje van de plattegrond van New York.

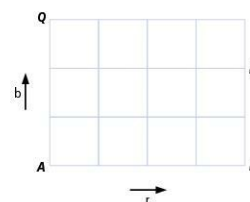
Donald staat op de kruising van 10th Ave en 80th Street (links). Hij moet naar de kruising van 12th Ave en 76th Street (rechts). Met de lijn is een mogelijke route weergegeven.

• Op hoeveel manieren kan Donald zonder omweg naar de kruising van de 10th Ave en 76th Street lopen?



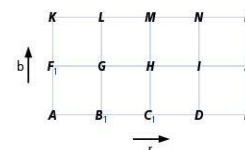
23 In de tekening hiernaast ga je het aantal mogelijke kortste routes tellen van het punt A naar het punt P via de roosterlijnen. Op ieder kruispunt van roosterlijnen heb je de keus uit rechtsaf (r) of naar boven (b). De route die via punt E loopt kun je beschrijven met rrrrb.

- Neem de tekening over en teken daarin de route rrrrb.
- Schrijf nog enkele routes van punt A naar punt P op.
- Hoe kun je zonder te tekenen zien dat de route brrrb niet uitkomt in punt P ?
- Leg uit waarom geen van de gevraagde routes via punt Q gaat.



24 Het aantal kortste routes van A naar P kun je berekenen door bij elk kruispunt het aantal kortste routes van A naar dat kruispunt te noteren.

- Leg uit dat je de punten B , C en F maar op één manier kunt bereiken.
- Welke andere punten kun je maar op één manier bereiken? Noteer bij al deze punten het getal 1.
- Leg uit dat je het punt G op twee manieren kunt bereiken en noteer het getal 2 bij het punt G .
- Het punt H kun je bereiken via punt C (op één manier) of via punt G (op twee manieren). Op hoeveel manieren kun je dus in punt H komen? Noteer dit aantal bij punt H .
- Welk getal noteer je bij punt L ?
- M bereik je vanuit H of L . Hoe bereken je uit de getallen bij H en L het aantal mogelijke kortste routes naar M ?
- Noteer bij alle punten het aantal kortste routes vanuit A .
- Hoeveel kortste routes zijn er van A naar P ?

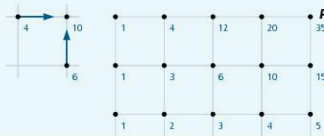


Elk hoofdstuk begint met een paragraaf **Voorkennis**. Met deze paragraaf haal je de benodigde voorkennis op.

Aanpak

Hoe bereken je het aantal kortste routes in een rooster?

- 1 Noteer bij elk punt dat maar op één manier is te bereiken het getal 1.
- 2 Stel voor elk ander punt vast wat de voorgaande punten zijn en tel de bijbehorende aantallen bij elkaar op.



Wat zijn Wiskundige Denk Activiteiten?

Bij het vak Wiskunde leer je veel verschillende methoden om een opdracht aan te pakken. Na de noodzakelijke oefening wordt elke methode een routine, je weet precies welke stappen je moet zetten. Er zijn echter ook veel situaties waarbij het helemaal niet meteen duidelijk is, welke aanpak je moet gebruiken. Daarvoor is de naam Wiskundige Denk Activiteiten bedacht, verder afgekort als WDA. Je kunt niet spreken van één soort WDA, er wordt een onderscheid gemaakt tussen een aantal verschillende aspecten.

- *Probleem oplossen en analytisch denken*
Hiermee wordt bedoeld dat je gaat uitzoeken hoe een probleem in elkaar zit en welke stappen er nodig zijn om het probleem op te lossen. In de boeken vind je dit onder andere terug in de onderzoeksopdrachten.

Voorbeeld

Een cilindervormig literblik heeft een inhoud van 1L of 1000 cm^3 . Bij welke keuze van de straal en de hoogte is er het minste materiaal nodig om het blik te maken?

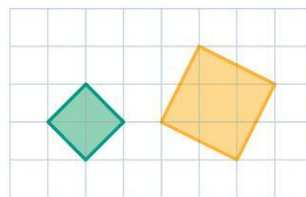
- *Modelleren en algebraïseren*
Soms wordt een probleem in woorden omschreven. Door te modelleren en algebraïseren ga je het probleem in wiskunde vertalen. Daarbij moet je geschikte variabelen kiezen en verbanden tussen die variabelen in de vorm van vergelijkingen kunnen opstellen. Ook dit aspect speelt met name een rol in de onderzoeksopdrachten.

Voorbeeld

Eric en Mariëlle zijn de ouders van Kevin en Pascal. Eric is twee jaar ouder dan Mariëlle en Kevin is twee jaar ouder dan Pascal. Kevin is geboren toen Mariëlle 28 jaar oud was. Het totaal van hun leeftijden is precies 100 jaar. Hoe oud zijn Eric, Mariëlle, Kevin en Pascal?

- *Ordenen en structureren*
Hiermee wordt bedoeld dat je inzicht krijgt in overeenkomsten tussen figuren, verschillende soorten vergelijkingen en dergelijke. In de boeken vind je dit aspect terug in veel intro-opdrachten.

Voorbeeld



De hoekpunten van deze vierkantjes zijn roosterpunten en de oppervlakten zijn 2 en 5.

Ga van alle getallen 1 tot en met 50 na of je vierkanten kunt tekenen met die oppervlakte en roosterpunten als hoekpunten.

Zijn er ook getallen waarbij het op meer dan één manier mogelijk is?

– *Formules manipuleren*

Met het herschrijven van formules, het uitdrukken van een variabele in andere variabelen of het invullen van een formule in een andere formule heb je al vaker ervaring opgedaan. Belangrijk is daarbij, dat je begrijpt hoe een formule is opgebouwd.

Aan dit aspect wordt aandacht besteed in tal van opdrachten.

– *Abstraheren*

Iets abstract maken is een belangrijk onderdeel van de wiskunde, maar lastig te omschrijven. Je abstraheert zodra je een praktisch probleem vertaalt in wiskundige formules of vergelijkingen. Dit aspect vind je vooral terug in praktische toepassingen. Ook bij het aanleren van nieuwe wiskundige begrippen speelt dit een rol.

– *Logisch redeneren en bewijzen*

Dit aspect komt naar voren bij vragen naar een verklaring of bewijs. Je leert bij veel onderdelen van de wiskunde iets aan te tonen met behulp van een redenering met logische stappen. Je vindt dit in de boeken terug bij allerlei vragen met de formulering ‘leg uit’, ‘toon aan’ of ‘bewijs dat’.

Voorbeeld

Laat zien dat je het functievoorschrift $f(x) = x(x - 1)(x + 2) - x^3 + 1$ kunt herleiden tot $f(x) = (x - 1)^2$.

Voorbeeld

Bij veel bijeenkomsten begroeten alle aanwezigen elkaar met een handdruk. Bij twee aanwezigen is er één handdruk, bij drie aanwezigen drie en bij vier aanwezigen zes.

Kun je dit lijstje uitbreiden en vervolgens een formule opstellen voor het aantal handdrukken h als er n aanwezigen zijn?

Voorbeeld

Een getal is deelbaar door 9, als de som van de cijfers van dat getal deelbaar is door 9.

Bewijs deze regel.



Vergelijkingen 1

SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In de voorafgaande jaren heb je al geleerd verschillende soorten vergelijkingen op te lossen.

In dit hoofdstuk ga je uitgebreid met vergelijkingen aan de slag. Het gaat om lineaire vergelijkingen, kwadratische vergelijkingen, wortelvergelijkingen, gebroken vergelijkingen en soms om combinaties hiervan.

Ook leer je formules in een andere vorm schrijven.

Vergelijkingen oplossen en formules anders schrijven spelen in veel hoofdstukken van dit jaar en het volgende jaar opnieuw een belangrijke rol.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 48
- *Formules manipuleren* opdracht 37
- *Ordenen en structureren* opdracht 27

Theorie

Sommige breuken kun je schrijven als decimaal getal. Zo kun je $\frac{7}{10}$ schrijven als 0,7 en $1\frac{1}{2}$ als 1,5 of 1,50.

Sommige breuken kun je niet exact schrijven als decimaal getal. Je zult dan moeten **afronden**. Zo is $\frac{5}{3}$ gelijk aan 1,66666666..., afgerond op twee decimalen is dat 1,67.

Je noteert dit als $\frac{5}{3} \approx 1,67$.

Getallen als 1,67 en 1,6667 zijn **benaderingen** van het **exacte** getal $\frac{5}{3}$ (in dit geval op twee en vier decimalen).

Voorbeeld

Schrijf de getallen $3\frac{37}{500}$ en $\frac{6}{7}$ als een decimaal getal, afgerond op twee decimalen.

Oplossing

$$3\frac{37}{500} = 3,074 \approx 3,07$$

$$\frac{6}{7} = 6 : 7 = 0,857142857... \approx 0,86$$

- V1** a Schrijf de breuken als decimaal getal. Rond zo nodig af op twee decimalen.

$$4\frac{5}{9}, 1\frac{7}{12} \text{ en } \frac{12}{35}$$

- b Wat is waar: $\sqrt{8} = 2,83$ of $\sqrt{8} \approx 2,828$?

- V2** Hans rondt het getal 23,237 548 af op vier cijfers achter de komma. Hij schrijft als antwoord: 23,237 6.

- a Waarom is dat fout?
b Welk getal krijg je als je 832,314 962 1 op vier decimalen afrondt?

- V3** Los op. Geef een exact antwoord en ook een benadering in twee decimalen.

- a $3x + 5 = 9$ c $15 = 6q - 1$
b $8 - 9p = 1$ d $35a + 12 = 4a + 3$

- V4** Schrijf zonder haakjes.

- a $y = 7(2x + 3)$ d $y = -4x(7x + 3)$
b $y = 5(18 - 4x)$ e $y = -9x(2 - 5x)$
c $y = 3x(2x + 9)$ f $y = -9x(2 - 5x^2)$

- V5** Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk.

- a $y = (x + 6)(x + 2)$
b $y = (x + 7)(x - 3) - 3$
c $y = 3x^2 + 5x(x - 2)$
d $y = (3x + 9)(1 - x) + 7x$
e $y = 6x^2 - (5x - 1)$

Voorbeeld

Schrijf $y = (x + 5)(x - 2) + 8x$ zonder haakjes en zo kort mogelijk.

Oplossing

Haakjes wegwerken:

$$y = x^2 - 2x + 5x - 10 + 8x$$

Gelijksoortige termen samennemen:

$$y = x^2 + 11x - 10$$

Aanpak**Hoe ontbind je een tweeterm in factoren?**

- 1 Zoek de grootste factor waar je beide termen door kunt delen.
- 2 Zet de grootste gemeenschappelijke factor voor de haakjes en zoek uit welke factoren binnen de haakjes moeten staan. (Maak eventueel een vermenigvuldigingstabel.)
- 3 Schrijf de formule met haakjes.

Voorbeeld

Ontbind de tweeterm in $y = -8x^2 - 32x$ in factoren.

Oplossing

- 1 De grootste factor is $-8x$,
want $-8x^2 = -8x \cdot x$ en $-32x = -8x \cdot 4$.
- 2 De formule wordt $y = -8x(\dots + \dots)$.
- 3 Kloppend maken geeft $y = -8x(x + 4)$.

V6 Ontbind de tweetermen in factoren.

- | | |
|-----------------------------|----------------------------|
| a $h = 5p^2 + 15p$ | e $y = x^2 + x$ |
| b $K = -3q^2 - 27q$ | f $L = 3m - 12m^2$ |
| c $W = 26t^2 + 13t$ | g $a = 35p^2 - 21p$ |
| d $p = 5q^6 - 30q^4$ | h $k = 18u^2 - 12$ |

Aanpak**Hoe ontbind je de drieterm $y = x^2 + bx + c$ in factoren?**

- 1 Maak een overzicht van de mogelijkheden waarmee je het gezochte product, de waarde van c , kunt krijgen.
- 2 Kijk bij welke getallen de gezochte som b hoort.
- 3 Schrijf de drieterm als een product van factoren.

Voorbeeld 1

Ontbind de drieterm in $y = x^2 - 7x + 12$ in factoren.

Oplossing

1	product	getallen	som
	+12	-1 en -12	-13
	+12	-2 en -6	-8
	+12	-3 en -4	-7

- 2 $-7 = -3 + -4$
- 3 Dus $y = (x - 3)(x - 4)$

V7 Ontbind de drietermen in factoren. Zet de termen zo nodig eerst in de juiste volgorde.

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------------|
| a $y = x^2 + 8x + 12$ | d $Q = p^2 + p + \frac{1}{4}$ |
| b $y = x^2 + 100x + 900$ | e $k = 65 - 18m + m^2$ |
| c $N = t^2 - 25t - 150$ | f $y = 1 + x^2 + 2x$ |

V8 Ontbind de tweetermen en drietermen in factoren.

- | | |
|------------------------------|-------------------------------|
| a $p = n^2 + 8n$ | d $w = t^2 - 12t - 28$ |
| b $u = 6b^2 - 3b$ | e $q = -8p^2 + 8p$ |
| c $y = 15 + 8x + x^2$ | f $y = 5c^2 - 15$ |

1.1 Lineaire vergelijkingen

Je leert

- hoe je een lineaire of eerstegraads vergelijking oplost
- hoe je een vergelijking van een lijn opstelt

Leerroutes

- ondersteunend: 1—02—3—4—05—5—6
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7
- uitdagend: 1—2—3—5—6—U1—U2

Van een brandende kaars voldoet de hoogte H in cm aan de formule $H = 12 - 0,2t$ met t in uren.

- Op welk moment is de kaars voor de helft opgebrand?



1 Op het blaadje is een begin gemaakt met het oplossen van de vergelijking $3x + 5(6 - 2x) = 14 - 4(\frac{1}{2}x + 1)$.

- Leg uit hoe vergelijking 2 uit vergelijking 1 ontstaat.
- Leg uit hoe vergelijking 4 uit vergelijking 3 ontstaat.
- Trek in de vergelijking 4 links en rechts van het $=$ -teken 30 af en los de vergelijking verder op.
- Controleer je oplossing door de gevonden waarde van x in de vergelijking $3x + 5(6 - 2x) = 14 - 4(\frac{1}{2}x + 1)$ in te vullen.

•	$3x + 5(6 - 2x) = 14 - 4(\frac{1}{2}x + 1)$	1
•	$3x + 30 - 10x = 14 - 2x - 4$	2
•	$-7x + 30 = 10 - 2x$	3
•	$-5x + 30 = 10$	4

Theorie

Een **lineaire vergelijking** of **eerstegraads vergelijking** los je op door links en rechts van het $=$ -teken dezelfde bewerkingen uit te voeren.

Daarmee vereenvoudig je de vergelijking zo dat de variabele nog maar aan één kant van het $=$ -teken staat. Soms moet je eerst breuken of haakjes wegwerken.

Het rekenen met letters heet **algebra**.

Voorbeeld

Los op $2x + \frac{2}{5} = \frac{1}{2}x + 3$.

Oplossing

$$20x + 4 = 5x + 30 \quad (\text{links en rechts} \times 10)$$

$$15x + 4 = 30 \quad (\text{links en rechts} - 5x)$$

$$15x = 26 \quad (\text{links en rechts} - 4)$$

$$x = \frac{26}{15} = 1\frac{11}{15} \quad (\text{links en rechts} : 15)$$

Ondersteunende route → maak opdracht 02

2 Los op. Geef exacte antwoorden.

H

a $8x - 4 = 3x + 7$

e $15 - (2x - 6) = 7x + 4$

b $-12x + 6 = 3 - 5x$

f $9x = 6x - 5(2 - 3x)$

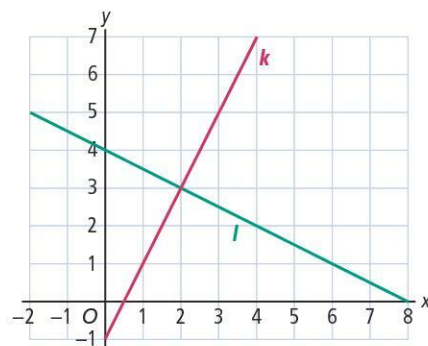
c $\frac{1}{2}x - 5 = \frac{2}{3}x + 1$

g $10 - (3 + 4x) = -7x + 1$

d $1\frac{3}{7}x + 1 = 2x - 3$

h $\frac{3}{5}x + 1\frac{7}{10} = 1\frac{1}{5}x - \frac{3}{10}$

- 3 Lijn l is de grafiek bij de vergelijking $y = 4 - \frac{1}{2}x$.
- Hoe groot is het hellingsgetal van l ?
 - Leg uit hoe je het hellingsgetal van l uit de grafiek kunt aflezen.
 - Geef de richtingscoëfficiënt van lijn k .
 - Stel een formule op van k .
 - Bereken de coördinaten van het snijpunt van l en k .



- 4
- Teken lijn n door de punten $P(1, -4)$ en $Q(5, 4)$.
 - Lees het hellingsgetal van n af.
Vul in: $y = \dots x + b$.
 - Je kunt het startgetal b berekenen door de coördinaten van $P(1, -4)$ of van $Q(5, 4)$ in de formule van opdracht b in te vullen.
Bereken b .
 - Stel een formule op van n .

Theorie

Formules van de vorm $y = ax + b$ zijn lineaire formules, waarbij a het hellingsgetal is en b het startgetal. Een ander woord voor hellingsgetal is richtingscoëfficiënt. De lineaire formule die bij een lijn hoort, noem je ook wel een **vergelijking van een lijn**.

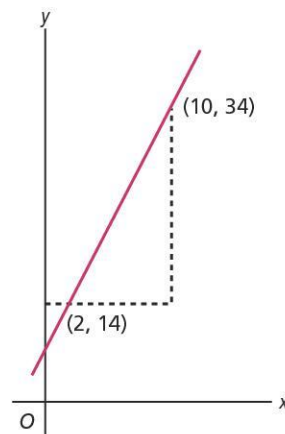
Voorbeeld

Lijn l gaat door de punten $A(2, 14)$ en $B(10, 34)$.
Bereken de richtingscoëfficiënt van l en stel een vergelijking van l op.

Oplossing

Tussen de punten A en B neemt de x -coördinaat met 8 toe en de y -coördinaat met 20. Als x met 1 toeneemt, dan is de toename van y dus gelijk aan $\frac{20}{8} = 2\frac{1}{2}$. De richtingscoëfficiënt is $2\frac{1}{2}$, dus $y = 2\frac{1}{2}x + b$.

Punt $A(2, 14)$ ligt op l . Invullen in de formule levert $14 = 2\frac{1}{2} \cdot 2 + b$. Hieruit volgt dat $b = 9$.
Een vergelijking van l is $y = 2\frac{1}{2}x + 9$.

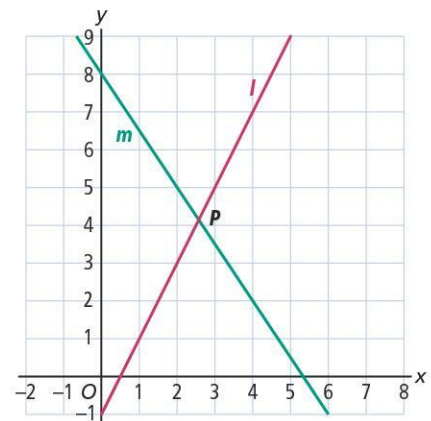


Ondersteunende route → maak opdracht O5

- 5** Stel een vergelijking op van lijn l .
- H**
- a** l gaat door $(2, -3)$ en heeft richtingscoëfficiënt 5.
 - b** l gaat door $(-2, 0)$ en $(1, 6)$.
 - c** l gaat door $(3, 8)$ en $(5, -10)$.
 - d** l gaat door $(0, 4\frac{1}{2})$ en is evenwijdig aan lijn m met vergelijking $y = -2x + 17$.
 - e** l gaat door de oorsprong en $(15, 90)$.
 - f** l gaat door $(-4, -2)$ en $(4, 18)$.

Je komt in deze paragraaf twee verschillende betekenissen van het woord vergelijking tegen. Een lineaire vergelijking zoals $4x + 7 = -2x + 1$ heeft één variabele en kun je oplossen. Een vergelijking zoals $y = 2x - 6$ geeft een lineair verband weer tussen de variabelen x en y .

- 6** Gegeven zijn lijn l met vergelijking $y = 2x - 1$ en lijn m met vergelijking $y = 8 - 1\frac{1}{2}x$. De lijnen snijden elkaar in punt P .
- a** Bereken de x -coördinaat van P door de vergelijking $2x - 1 = 8 - 1\frac{1}{2}x$ op te lossen. Geef een exact antwoord.
 - b** Lees uit de grafieken af voor welke waarden van x de formule $y = 2x - 1$ een grotere uitkomst geeft dan de formule $y = 8 - 1\frac{1}{2}x$.



- 7** Lijn l : $y = -\frac{2}{3}x + 2$ snijdt de x -as in punt A en de y -as in punt B . Bereken de oppervlakte van $\triangle OAB$.

Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2

Ondersteunende opdrachten

02 Op het blaadje is een begin gemaakt met het oplossen van $4x - 3(2 - x) = 15$.

- a** Leg uit wat er in stap 1 is gebeurd.
b Vul de stappen 2 en 3 aan.

Los op. Geef exacte antwoorden.

c $9 - (x - 7) = 5x + 2$ **g** $-3x - 2(2x - 8) = 5x - 6$

d $-11x - 4 = 9 + 2x$ **h** $0,2x - (4 - x) = 20$

e $2(3x - 4) = 5(4 - 3x)$ **i** $1\frac{1}{7}x - \frac{5}{14} = \frac{2}{7}x + 1\frac{3}{14}$

f $18x = 36 - (15 - 12x)$ **j** $1\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2} = \frac{1}{3}x + 14$

05 Gegeven is lijn $l: y = -4x + 17$. Van lijn m is bekend dat deze evenwijdig loopt aan l en door het punt $P(3, -8)$ gaat. Je gaat een vergelijking van m opstellen.

- a** Uit welk gegeven volgt dat de richtingscoëfficiënt van m gelijk moet zijn aan -4 ?
- b** Op het blaadje is een begin gemaakt met de berekening van het startgetal.
Vul het blaadje verder in.

	$4x - 3(2 - x) = 15$		
	$4x - 6 + 3x = 15$	1	
	$\dots x = \dots$	2	
	$x = \dots$	3	

m:	y = -4x + b								
P(3,	-8) ligt op m dus								
x = 3 en y = -8 invullen.									
-8 = -4 × 3 + b									
-8 = ... + b									
b = ...									
m: y = -4x + ...									

Uitdagende opdrachten

U1 Een lijn met vergelijking $y = -\frac{2}{3}x + b$ snijdt de x -as in P en de y -as in Q .

De oppervlakte van $\triangle OPQ$ is 27.

Bereken welke waarden b kan hebben.

U2 Gegeven zijn de lijnen $k: 2x + ay = 7$ en $m: 6x - 5y = bx$.

- Bereken bij welke waarde van a lijn k door $(-2, 6)$ gaat.
- k en m snijden elkaar in het punt $S(3, 5)$.
Bereken a en b .
- Neem $b = 14$ en bereken de waarde van a waarvoor k en m elkaar niet snijden.

1.2 Kwadratische vergelijkingen

Je leert

- hoe je een kwadratische of tweedegraads vergelijking oplost

Leerroutes

- ondersteunend: 8—9—10—011—12—013—14

- doorlopend: 8—9—10—11—12—13—14

- uitdagend: 8—10—11—13—14—U3—U4

Een tennisbal wordt opgeslagen. De hoogte h in meters van de bal voldoet aan de formule $h = -5t^2 + 5t + 3$ met t in seconden.

Bij een snelle opslag is de bal binnen een seconde weer op de grond.

- Is de opslag die bij deze formule hoort een snelle opslag?



8 a De vergelijking $(x - 3)(2x - 10) = 0$ heeft twee oplossingen. Bereken deze oplossingen.

b De vergelijking $p^2 - 7p - 30 = 0$ is te ontbinden in $(p - 10)(p + 3) = 0$.

Bereken hiermee de oplossingen van de vergelijking.

c. Waarom kun je $x^2 + 7x - 13 = 0$ niet op deze manier oplossen?

d Op het blaadje is een begin gemaakt met het oplossen van $4a^2 + 24a = 0$.

Maak de berekening af.

$$4a^2 + 24a = 0$$

$$4a(a+6)=0$$

.....

Theorie

Bij het oplossen van **kwadratische vergelijkingen** of **tweedegraads vergelijkingen** kun je gebruik maken van:

- **ontbinden in factoren**. Je gebruikt dan de regel:

Uit $A \cdot B = 0$ volgt $A = 0$ of $B = 0$.

- de **abc-formule**. De oplossingen van $ax^2 + bx + c = 0$ zijn:

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ of } x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \text{ met } D = b^2 - 4ac.$$

D heet de **discriminant** van de vergelijking.

Als $D > 0$, dan zijn er twee oplossingen.

Als $D = 0$, dan is er één oplossing.

Als $D < 0$, dan zijn er geen oplossingen.

Voorbeeld 1

Los op $3x^2 + 12x = 15$.

Oplossing

$$\begin{aligned} 3x^2 + 12x - 15 &= 0 && \text{(op nul herleid)} \\ x^2 + 4x - 5 &= 0 && \text{(links en rechts : 3)} \\ (x + 5)(x - 1) &= 0 && \text{(ontbonden)} \\ x + 5 = 0 \text{ of } x - 1 &= 0 \\ x = -5 \text{ of } x &= 1 \end{aligned}$$

Voorbeeld 2

Los op $2x(x - 1) = 3x - 2$.

Oplossing

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2x &= 3x - 2 && \text{(haakjes weggewerkt)} \\ 2x^2 - 5x + 2 &= 0 && \text{(op nul herleid)} \\ a = 2, b = -5 \text{ en } c &= 2 && \text{(abc-formule)} \\ D &= (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9 \\ x &= \frac{5 + \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = 2 \text{ of } x = \frac{5 - \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

9 Los op.

H

$$\begin{array}{ll} \mathbf{a} & x^2 - x - 16 = -4 \\ \mathbf{b} & x(x - 1) = 4x \\ \mathbf{c} & 2t^2 - 10t + 12 = 0 \\ \mathbf{d} & (a + 7)(a - 1) = 20 \\ \mathbf{e} & 5x^2 - x = 4 \\ \mathbf{f} & (4x + 2)^2 = (5 - 2x)^2 \end{array}$$

- 10** **a** Als je $(3x + 4)^2 = 25$ wilt oplossen, kun je dat doen door de haakjes weg te werken, op nul te herleiden en de *abc*-formule toe te passen. Dat is hier niet nodig. Los de vergelijking op met de bordjesmethode.
- b** De vergelijking $(x + 5)^2 = 9x^2$ is van de vorm $A^2 = B^2$. Een eerste oplossing vind je door $x + 5 = 3x$ op te lossen. Welke vergelijking moet je oplossen om de tweede oplossing te vinden?

Theorie

Vergelijkingen als $(2x + 3)^2 = 25$ en $(3x + 4)^2 = (2x - 1)^2$ hebben de vorm $A^2 = B^2$. Voor het oplossen van dergelijke vergelijkingen kun je gebruik maken van de regel:
Uit $A^2 = B^2$ volgt $A = B$ of $A = -B$.

Voorbeeld

Los op $(3x + 4)^2 = (2x - 1)^2$.

Oplossing

$$\begin{aligned} 3x + 4 &= 2x - 1 \text{ of } 3x + 4 = -(2x - 1) \\ x + 4 &= -1 && \text{of } 3x + 4 = -2x + 1 \\ x &= -5 && \text{of } 5x = -3 \\ x &= -5 && \text{of } x = -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 011

11 Los op.

- H**
- | | |
|------------------------------------|------------------------------|
| a $(x - 8)^2 = 9$ | d $(5x + 6)^2 = x^2$ |
| b $(7a + 8)^2 = (a + 8)^2$ | e $9p^2 = (12 - p)^2$ |
| c $(4 - p)^2 = (5p + 16)^2$ | f $(x^2 - 5x)^2 = 36$ |

12 In deze opdracht ga je de vergelijking $4x(x - 7) = 5(x - 7)$ oplossen.

- a** Waarom is $x = 7$ een oplossing?
b Als de factor $4x$ aan de linkerkant gelijk is aan de factor 5 aan de rechterkant staat ook links en rechts hetzelfde. Bereken de tweede oplossing.

Theorie

Vergelijkingen als $(x + 4)(2x - 5) = 7(x + 4)$ hebben de vorm $A \cdot B = A \cdot C$. Voor het oplossen van deze vergelijkingen kun je gebruik maken van de regel:
 Uit $A \cdot B = A \cdot C$ volgt $A = 0$ of $B = C$.

Voorbeeld

Los op $2x(x + 7) = (x + 7)(x + 3)$.

Oplossing

De gemeenschappelijke factor is $x + 7$.
 Dus geldt $x + 7 = 0$ of $2x = x + 3$.
 Dit geeft $x = -7$ of $x = 3$.

Ondersteunende route → maak opdracht 013

13 Los de vergelijkingen op met de regel uit de theorie hierboven.

- H**
- | | |
|--|--|
| a $(2x - 5)(x + 4) = 7(x + 4)$ | c $x(2x - 9) = 7x^2$ |
| b $(5t + 3)(t^2 - 4) = 5(5t + 3)$ | d $(2x + 7)(x - 5) = (x - 5)^2$ |

14 Los op. Bedenk eerst welke methode je gaat gebruiken.

- | | |
|---------------------------------------|----------------------------------|
| a $(x - 4)^2 = (5x + 6)^2$ | e $(x - 6)^2 + 6 = 22$ |
| b $(t + 3)(t - 1) = 32$ | f $x^2 = 7x$ |
| c $(t + 3)(t - 4) = 2t(t + 3)$ | g $8x(2x + 1) = x(x - 2)$ |
| d $8x^2 - 2x = 1$ | h $(4x - 10)^2 = 25x^2$ |

Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4

Ondersteunende opdrachten

011 Op het blaadje is een begin gemaakt met het oplossen van $49q^2 = (3 - q)^2$.

a Waarom moet je in de 5e regel haakjes zetten om $3 - q$?

b Los de vergelijking verder op.

Los op.

c $(6a - 3)^2 = (a + 3)^2$ **f** $(x - 6)^2 = 49$

d $(x - 4)^2 = 5^2$ **g** $(2 - 3p)^2 = (4p - 12)^2$

e $(2b - 3)^2 = b^2$ **h** $(x^2 + 5x + 3)^2 = 9$

●	De vergelijking	$49q^2 = (3 - q)^2$			
●	schrijf je als	$(7q)^2 = (3 - q)^2$.			
●	De vergelijking heeft de vorm	$A^2 = B^2$.			
●	$A = B$	of $A = -B$			
●	$7q = 3 - q$	of $7q = -(3 - q)$			
●	$7q = 3 - q$	of $7q = -3 + q$			
●	$\dots q = \dots$	of $\dots q = \dots$			
●	$q = \dots$	of $q = \dots$			

013 Er is een begin gemaakt met het oplossen van $(2t - 7)(t^2 - 2) = 7(2t - 7)$.

a Los de vergelijking verder op.

Los op.

b $(x + 3)(x - 4) = 2x(x + 3)$

c $x(5x - 16) = 4x^2$

d $(2x - 4)(x + 5) = 8(x + 5)$

e $(3x + 5)(x + 3) = (x + 3)^2$

●	De vergelijking	$(2t - 7)(t^2 - 2) = 7(2t - 7)$			
●	heeft de vorm $A \cdot B = C \cdot A$.				
●	De gemeenschappelijke factor is	$2t - 7$, dus			
●	$A = 2t - 7$, $B = t^2 - 2$ en $C = 7$.				
●	Uit $A = 0$ volgt $2t - 7 = 0$ en				
●	uit $B = C$ volgt $t^2 - 2 = 7$.				

Uitdagende opdrachten

U3 Gegeven is de formule $y = x^2 - 4x + c$.

a Neem $c = 1$ en bereken hoeveel snijpunten de bijbehorende parabool met de x -as heeft.

b Bereken voor welke waarde van c de parabool precies één punt gemeenschappelijk heeft met de x -as.

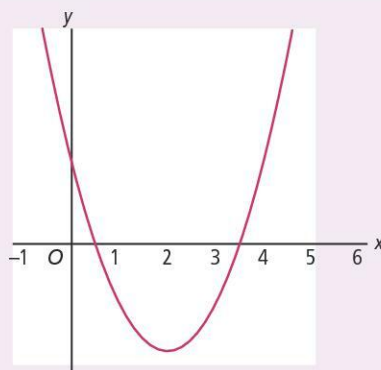
c De getekende parabool snijdt de x -as in twee punten A en B met $AB = 3\frac{1}{2}$.

Bereken welke waarde van c bij deze parabool hoort.

U4 Gegeven is de vergelijking $(x - 2a)^2 = 4$.

Er zijn twee waarden van a waarvoor $x = 5$ een oplossing is van deze vergelijking.

Bereken die waarden van a en de bijbehorende andere oplossing voor x .



1.3 Wortelvergelijkingen

Je leert

- wat een wortelvergelijking is
- hoe je een wortelvergelijking oplost

Leerroutes

- ondersteunend: 15—016—17—18—019—20
- doorlopend: 15—16—17—18—19—20
- uitdagend: 15—16—17—19—20—U5

Op het moment dat een vliegtuig sneller gaat dan het geluid, hoor je een supersonische knal. De snelheid van het geluid is afhankelijk van de temperatuur van de lucht volgens de formule $v = 20\sqrt{273 + T}$ met v de snelheid in m/s en T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$.

Twee vliegtuigen produceren beide een supersonische knal. Het ene vliegtuig vliegt op 1 km hoogte, het ander op 10 km hoogte.

- Welk vliegtuig heeft op dat moment de grootste snelheid?



- 15 Gegeven is de formule $y = \sqrt{2x - 5}$.
- Leg uit waarom er alleen uitkomsten zijn als geldt $2x - 5 \geq 0$.
 - Voor welke waarden van x geldt $2x - 5 \geq 0$?
 - Daan wil de vergelijking $\sqrt{2x - 5} = 2$ oplossen. Daan legt een bordje op $2x - 5$ en bedenkt dat $2x - 5$ gelijk moet zijn aan $2^2 = 4$. Los de vergelijking $2x - 5 = 4$ op.
 - Waarom heeft de vergelijking $\sqrt{2x - 5} = -2$ geen oplossingen?
 - Los de vergelijking $\sqrt{6 - \frac{1}{2}x} = 3\frac{1}{2}$ op.

Theorie

Een vergelijking van de vorm $-7 + \sqrt{x} = 2$ heet een **wortelvergelijking** omdat de variabele onder het wortelteken voorkomt.

Een wortelvergelijking vereenvoudig je tot de vorm $\sqrt{A} = B$ door links en rechts dezelfde bewerking uit te voeren.

Vervolgens gebruik je de regel:

uit $\sqrt{A} = B$ volgt $A = B^2$ mits $B \geq 0$.

Ondersteunende route → maak opdracht 016

- 16** Als de variabele slechts onder het wortelteken voorkomt, is de vergelijking met een bordje op te lossen.

H

Los op.

- a $\sqrt{x} - 5 = 7$ d $5 - \sqrt{6 - 3x} = 2\frac{1}{2}$
 b $2 + \sqrt{3p} - 5 = 11$ e $\sqrt{\frac{1}{3}p} - 5 = \sqrt{11}$
 c $\sqrt{6 - \frac{1}{2}x} = \sqrt{3}$ f $\sqrt{35 - 2x} + 8 = 13$

- 17** In de vergelijking $x + \sqrt{x} = 2$ komt de variabele op meerdere plaatsen voor. Er is een andere aanpak nodig.

- a Wat is er gebeurd in stap 1? En in stap 2?
 b Maak de berekening af en controleer de gevonden waarden door invullen in de vergelijking $x + \sqrt{x} = 2$.
 c Welke van de gevonden waarden is ook werkelijk een oplossing van de vergelijking?

	$x + \sqrt{x} = 2$				
	$\sqrt{x} = 2 - x$			1	
	$x = (2 - x)^2$			2	
				3	

- 18** Kees heeft een begin gemaakt met het oplossen van de vergelijking $9 + 3\sqrt{x} = 17$.

- a Hij deelt in stap 2 links en rechts door 3.
 Los de vergelijking verder op.
 b Bart gaat de vergelijking ook oplossen. Hij krijgt bij stap 2 de vergelijking $9x = 64$.
 Leg uit hoe Bart aan deze vergelijking komt en los deze vergelijking verder op.

				Kees	
	$9 + 3\sqrt{x} = 17$				
	$3\sqrt{x} = 8$			1	
				2	

Aanpak

Hoe los je een wortelvergelijking op?

- 1 Isoleer de wortel in de vergelijking.
- 2 Kwadrateer beide kanten van de vergelijking.
- 3 Los de verkregen vergelijking op.
- 4 Controleer of de oplossingen voldoen door deze in te vullen in de oorspronkelijke vergelijking.

Isoleer
 Kwadrateer
 Los op
 Controleer

Voorbeeld

Los op $9 + \sqrt{x + 3} = x$.

Oplossing

- 1 $\sqrt{x + 3} = x - 9$ (wortel geïsoleerd)
 2 $x + 3 = (x - 9)^2$ (gekwadrateerd)

- 3 $x + 3 = x^2 - 18x + 81$
 $x^2 - 19x + 78 = 0$ (op nul herleid)
 $(x - 6)(x - 13) = 0$ (ontbonden)
 $x = 6$ of $x = 13$
 4 $x = 6$ geeft $9 + \sqrt{6 + 3} = 6$ klopt niet
 $x = 13$ geeft $9 + \sqrt{13 + 3} = 13$ klopt
 De oplossing is $x = 13$.

Ondersteunende route → maak opdracht 019

19 Los op.

- H**
- | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| a $\sqrt{x-3} + 2 = 5$ | e $\sqrt{x} = x - 6$ |
| b $2 + 4\sqrt{2x+3} = 0$ | f $\sqrt{4+x^2} - 1 = x$ |
| c $4 - \sqrt{3-x} = 2x - 1$ | g $\sqrt{2x^2 - x} = 3x - 2$ |
| d $2\sqrt{1+x} + 4 = 7$ | h $x + \sqrt{2x+4} = 10$ |

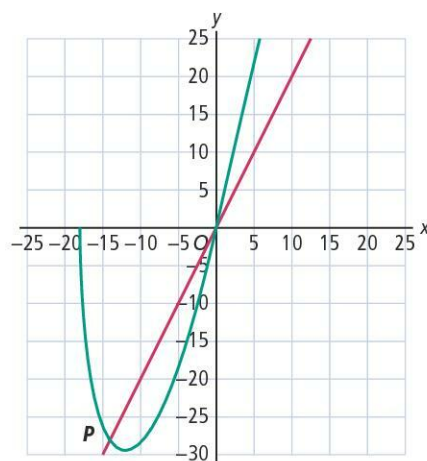
20 Gegeven zijn de grafieken bij de formules $y = 1 + \sqrt{x-3}$ en $y = \frac{1}{2}x - 2$.

Bereken de coördinaten van het punt waarin de grafieken elkaar snijden.



21 In de figuur zijn de grafiek bij de formule $y = x\sqrt{x+18}$ en de lijn $k: y = 2x$ getekend. k snijdt de grafiek van $y = x\sqrt{x+18}$ in $O(0, 0)$ en in een punt P . Bereken OP .

Uitdagende route → maak opdracht U5



Ondersteunende opdrachten

016 Er is een begin gemaakt met het oplossen van

$$3\frac{1}{2} - \sqrt{2-p} = 1\frac{1}{2}.$$

a Leg uit wat er gebeurd is in stap 1.

b Wat gebeurt er in stap 2?

c Los de vergelijking verder op.

Los op.

d $\sqrt{x-17} = 5$

g $\sqrt{\frac{1}{7}q-4} = \sqrt{8}$

e $1 + \sqrt{5q-4} = 7$

h $\sqrt{a-3} = 2$

f $\sqrt{7-8x} = \sqrt{55}$

i $1 + \sqrt{2x-3} = 8$

☐	$3\frac{1}{2} - \sqrt{2-p} = 1\frac{1}{2}$			
☐	$\sqrt{2-p} = 2$			1
☐	$2-p = \dots$			2
☐	$p = \dots$			3

019 Er is een begin gemaakt met het oplossen

van $x + \sqrt{2x+3} = 6$.

a Waarom staan er haakjes in de derde regel?

b Los de vergelijking verder op.

Los op.

c $\sqrt{4x-3} + 2 = 3$

d $6 - \sqrt{7x+3} = 0$

e $3\sqrt{1-x} = 1\frac{1}{2}x + 3$

f $3 + \sqrt{x+17} = x$

g $5\sqrt{4-x} = x + 2$

h $\sqrt{5+x^2} - 1 = x$

i $\sqrt{4x^2+3x} = 3x + 4$

☐	$x + \sqrt{2x+3} = 6$			
☐	$\sqrt{2x+3} = 6 - x$	(Isoleer)		
☐	$(\sqrt{2x+3})^2 = (6-x)^2$	(Kwadrater)		
☐	$2x+3 = 36 - \dots$	(Los op)		
☐	$\dots$ of $\dots$			
☐	$\dots$	(Controleer)		

Uitdagende opdrachten

U5

Twee vliegtuigen A en B gaan tegelijkertijd door de geluidsbarrière. Dat betekent dat ze op dat moment met de snelheid van het geluid vliegen. De snelheid van het geluid is afhankelijk van de temperatuur van de lucht volgens de formule $v = 20\sqrt{273 + T}$ met v de snelheid in m/s en T de temperatuur in °C. De temperatuur is afhankelijk van hoe hoog je zit. Elke 100 meter hoger is de temperatuur 1 °C lager. Vliegtuig A vliegt op het moment dat het door de geluidsbarrière gaat op een hoogte van 1000 m met een snelheid van 336,5 m/s. Vliegtuig B vliegt op dat moment op een hoogte van 9000 m. Bereken de snelheid van vliegtuig B.



1.4 Gebroken vergelijkingen

Je leert

- wat een gebroken vergelijking is
- hoe je een gebroken vergelijking oplost

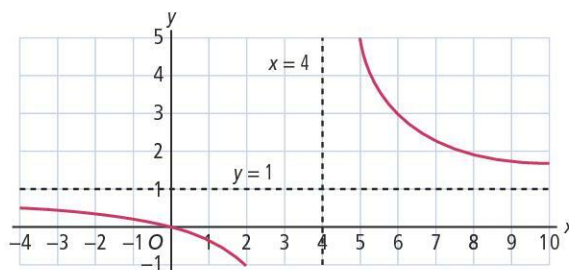
Leerroutes

- ondersteunend: 22—023—24—25—026—27
- doorlopend: 22—23—24—25—26—27
- uitdagend: 22—23—24—25—26—U6

Gegeven zijn de grafiek bij de formule

$$y = \frac{x}{x-4} \text{ en de lijnen } x = 4 \text{ en } y = 1.$$

- Waarom heeft de grafiek geen snijpunten met de lijn $y = 1$?
- Waarom is de lijn $x = 4$ getekend?



- 22** Gegeven is de formule $y = \frac{120}{3x - 15}$
- Waarom heeft de formule geen uitkomst voor $x = 5$?
 - Zijn er naast $x = 5$ nog andere waarden van x waarvoor de formule geen uitkomst heeft?
 - Achmed wil de vergelijking $\frac{120}{3x - 15} = 10$ oplossen.
Hij legt een bordje op $3x - 15$ en bedenkt dat hij de vergelijking $3x - 15 = 12$ moet oplossen.
Welke waarde voor x vindt hij?
 - Los de vergelijkingen $\frac{120}{3x - 15} = 6$ en $\frac{120}{3x - 15} = 15$ op.

Ondersteunende route → maak opdracht 023

- 23** Los op. Geef exacte antwoorden.

H

- | | |
|---------------------------|---|
| a $\frac{18}{7x+2} = 3$ | d $\frac{125}{6p-3} = -25$ |
| b $\frac{-35}{10-3m} = 5$ | e $\frac{30}{16-2q^2} - 2\frac{1}{2} = 5$ |
| c $\frac{56}{x^2+3} = 7$ | f $\frac{-45}{5t+3} + 1 = 10$ |

- 24** Gegeven is de formule $y = \frac{150}{2x+5}$
- Voor welke waarde van x heeft de formule geen uitkomst?
 - Om de coördinaten van de snijpunten van de grafiek bij de formule met de lijn $y = 6x$ te berekenen, gaat Fien de vergelijking $\frac{150}{2x+5} = 6x$ oplossen. Om de breuk in de vergelijking weg te werken vermenigvuldigt ze links en rechts met $2x+5$. Dat kan alleen als $2x+5$ niet gelijk is aan nul.
Voor welke waarde van x is de berekening van Fien onjuist?
 - Maak de berekening af.

						Fien

- 25** Gegeven is de vergelijking $\frac{3}{x-2} = \frac{x}{x+2}$
- Vermenigvuldig links en rechts met $x-2$ én met $x+2$ en laat zien dat de vergelijking te herleiden is tot $3x+6 = x^2-2x$.
 - Waarom geldt de herleiding niet voor $x=2$ en $x=-2$?
 - Los de vergelijking op.

Theorie

Een vergelijking van de vorm $\frac{3p}{p^2-8} + 6 = 10$ of

$\frac{12}{5x+9} = 6x-1$ heet een **gebroken vergelijking**, omdat de variabele in de noemer van de breuk voorkomt.

Een gebroken vergelijking vereenvoudig je tot een vorm waarbij je de volgende regels kunt gebruiken:

Uit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ volgt $A \cdot D = B \cdot C$ mits $B \neq 0$ en $D \neq 0$.

Uit $\frac{A}{B} = C$ volgt $A = B \cdot C$ mits $B \neq 0$.

Voorbeeld 1

Los op $\frac{-10x}{2x-3} + 4 = x+3$.

Oplossing

$$\begin{aligned} \frac{-10x}{2x-3} &= x-1 && \text{(links en rechts } -4) \\ -10x &= (2x-3)(x-1) && \text{mits } x \neq \frac{1}{2} \\ -10x &= 2x^2 - 5x + 3 && \text{(haakjes weggewerkt)} \\ 2x^2 + 5x + 3 &= 0 && \text{(op nul herleid)} \end{aligned}$$

abc -formule geeft $x = -1$ of $x = -1\frac{1}{2}$

Voorbeeld 2

Los op $\frac{x-5}{x-9} = \frac{2x}{x+3}$

Oplossing

$$\begin{aligned} (x-5)(x+3) &= 2x(x-9) && \text{mits } x \neq 9 \text{ en } x \neq -3 \\ x^2 - 2x - 15 &= 2x^2 - 18x && \text{(haakjes weggewerkt)} \\ x^2 - 16x + 15 &= 0 && \text{(op nul herleid)} \\ (x-1)(x-15) &= 0 && \text{(ontbonden in factoren)} \\ x-1 = 0 \text{ of } x-15 = 0 \\ x &= 1 \text{ of } x = 15 \end{aligned}$$

Ondersteunende route → maak opdracht O26

26 Los op.**H**

a $\frac{2}{3x-1} = \frac{x}{3x-2}$

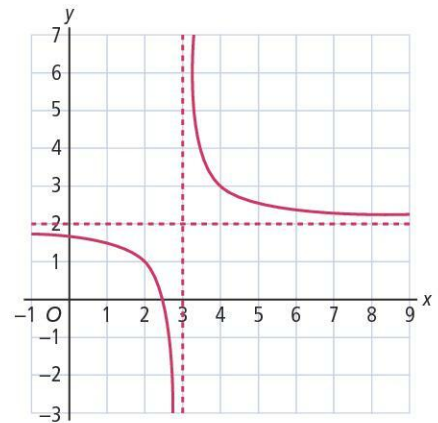
d $x + 10 = \frac{80}{x-8} + 2$

b $\frac{18x}{3x-1} = x$

e $\frac{x-4}{x+6} = \frac{x+3}{x-1}$

c $\frac{2x}{x-4} + 6 = 2x$

f $\frac{1}{x} = \frac{4}{x^2}$

27 Gegeven is de grafiek bij de formule $y = 2 + \frac{1}{x-3}$ **W**De grafiek heeft een verticale asymptoot bij $x = 3$.**a** Lijn l is de lijn met vergelijking $y = 8 - x$.Onderzoek hoeveel punten l gemeenschappelijk heeft met de gegeven grafiek.**b** Teken in de figuur voor enkele waarden van a de lijn $y = a - x$.Onderzoek voor welke waarden van a de lijn $y = a - x$ precies één punt gemeenschappelijk heeft met de grafiek.

Uitdagende route → maak opdracht U6

Ondersteunende opdrachten

023 Er is een begin gemaakt met het oplossen van $\frac{15}{8-3m} - 2 = 1$.

- a Wat is er gebeurd in stap 1?
- b In stap 2 is een bordje gelegd op $8 - 3m$. Welk getal moet er op de puntjes staan?
- c Maak de berekening af.

Los op. Geef exacte antwoorden.

d $\frac{24}{2-x} = 8$

g $\frac{63}{p^2+3} = 9$

e $\frac{-33}{10-2a} = 11$

h $\frac{15}{5x-3} = 3$

f $\frac{28}{3-2x} + 3 = 7$

i $\frac{36}{(x-2)^2} - 3 = 1$

☐	$\frac{15}{8-3m} - 2 = 1$		
☐	$\frac{15}{8-3m} = 3$	1	
☐	$8-3m = \dots$	2	
☐	$3m = \dots$	3	
☐	$m = \dots$	4	

026 Er is een begin gemaakt met het oplossen van $\frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{3} = 1$.

- a Leg uit wat er in stap 1 is gebeurd.
- b Welke regel is er toegepast bij stap 2?
- c Los de vergelijking verder op.

Los op.

d $\frac{6x}{2x-3} = x$

g $\frac{x-2}{x+3} = \frac{x+6}{x-2}$

e $\frac{3-x}{x} = 2x+4$

h $\frac{x^2}{x-1} = 3x$

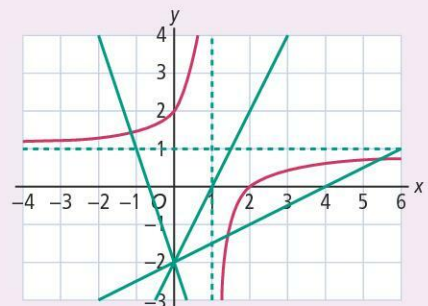
f $\frac{x+1}{x} = \frac{2x+2}{x+1}$

i $\frac{\frac{1}{3}x+3}{x} = \frac{3-x}{6x}$

☐	$\frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{3} = 1$ geeft $\frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{3}$	1	
☐	$\frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{3}$ heeft de vorm $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$		
☐	$3(x+1) = 2(x-1)$ want ...	2	
☐	$\dots = \dots$		

Uitdagende opdrachten

U6 Getekend zijn de grafiek bij de formule $y = 2 - \frac{x}{x-1}$ en voor enkele waarden van a de lijn $y = ax - 2$. Onderzoek voor welke waarden van a de lijn $y = ax - 2$ precies één snijpunt heeft met de grafiek.



1.5 Ongelijkheden

Je leert

- hoe je een ongelijkheid oplost

Leerroutes

- ondersteunend: 28—29—30—31—032—32—33
- doorlopend: 28—29—30—31—32—33—34
- uitdagend: 29—30—31—32—33—U7—U8

De ingang van een tunnel heeft de vorm van een boog die voldoet aan de formule $h = -\frac{1}{12}a(a - 18)$ met h de hoogte van de boog en a de horizontale afstand vanaf links gemeten, beide in meters. Boven de rijbaan in de tunnel hangt een balk met matrixborden. Voor de veiligheid van het verkeer door de tunnel moet die balk op een hoogte van minstens 6 m hangen.

- Hoe lang kan deze balk maximaal zijn?



- 28** Gegeven zijn de grafieken bij de formules $y = x^2 - 3x - 2$ en $y = 2$.

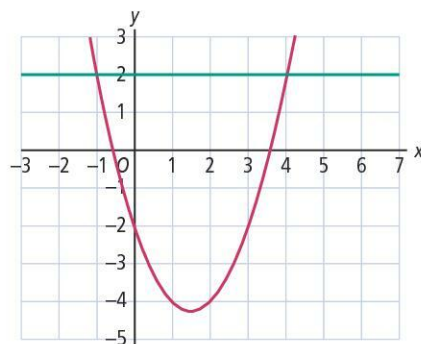
a Los op $x^2 - 3x - 2 = 2$.

b Voor welke waarden van x heeft de formule $y = x^2 - 3x - 2$ een uitkomst die kleiner is dan 2?

Als x groter dan 3 is noteer je $x > 3$.

Als x tussen 3 en 8 ligt, noteer je $3 < x < 8$.

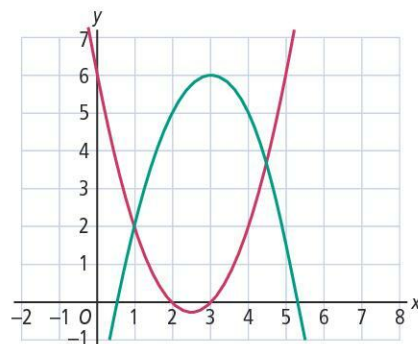
Als x groter dan of gelijk is aan 2, maar kleiner is dan 9, noteer je $2 \leq x < 9$.



- 29** Gegeven zijn de grafieken bij de formules $y = -x^2 + 6x - 3$ en $y = x^2 - 5x + 6$.

a Los de vergelijking $-x^2 + 6x - 3 = x^2 - 5x + 6$ op.

b Gebruik de grafieken om af te lezen voor welke waarden van x de formule $y = -x^2 + 6x - 3$ uitkomsten heeft die groter zijn dan de uitkomsten van de formule $y = x^2 - 5x + 6$. Schrijf je antwoord in de vorm $\dots < x < \dots$.



Aanpak

Hoe los je een ongelijkheid op?

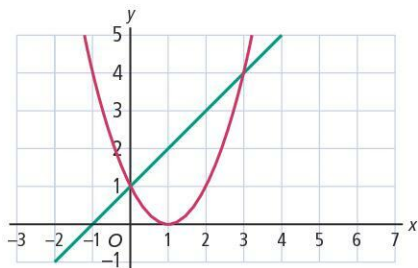
- 1 Los de bijbehorende vergelijking op.
- 2 Lees met behulp van de grafieken de oplossing van de ongelijkheid af.
- 3 Noteer de oplossing van de ongelijkheid.

Voorbeeld

Los de ongelijkheid $x^2 - 2x + 1 > x + 1$ op.

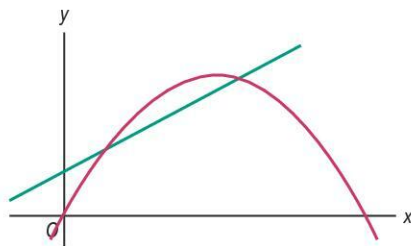
Oplossing

- 1 $x^2 - 2x + 1 = x + 1$
 $x^2 - 3x = 0$
 $x(x - 3) = 0$
 $x = 0$ of $x = 3$
- 2 De grafieken staan rechts.
- 3 De oplossing van de ongelijkheid is $x < 0$ of $x > 3$.



- 30 Gegeven zijn de grafieken bij $y = -x^2 + 7x$ en $y = 2x + 4$.
Los op.

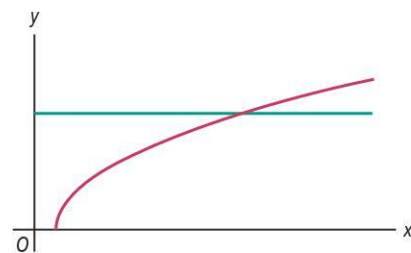
- a $-x^2 + 7x > 0$
- b $2x + 4 \leq 0$
- c $2x + 4 \geq -x^2 + 7x$



- 31 Gegeven zijn de grafiek bij de formule $y = \sqrt{x - 1}$ en de lijn $y = 3$.

H

- a Voor welke waarden van x heeft de wortelformule uitkomsten?
- b Los de vergelijking $\sqrt{x - 1} = 3$ op.
- c Los de ongelijkheid $\sqrt{x - 1} < 3$ op met behulp van de grafiek. Schrijf je antwoord in de vorm $\dots \leq x < \dots$



Theorie

Bij het oplossen van ongelijkheden met wortelformules zijn de oplossingen beperkt tot waarden waarvoor de formules uitkomsten hebben. Een wortelformule heeft uitkomsten als de waarde onder de wortel groter dan of gelijk aan nul is.

Voorbeeld

Gegeven zijn de grafiek bij $y = \sqrt{6-x}$ en de lijn $y = 1\frac{1}{2}$.

Los op $\sqrt{6-x} < 1\frac{1}{2}$.

Oplossing

$$\sqrt{6-x} = 1\frac{1}{2}$$

$$6-x = 2\frac{1}{4}$$

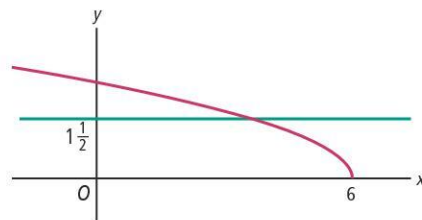
$$x = 3\frac{3}{4}$$

$y = \sqrt{6-x}$ heeft uitkomsten

als $6-x \geq 0$ dus als $x \leq 6$.

De oplossing van de ongelijkheid is

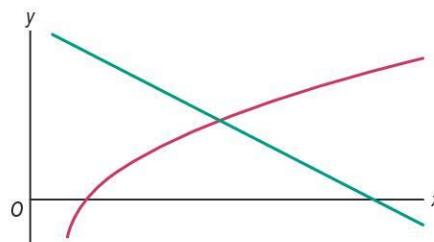
$$3\frac{1}{4} < x \leq 6.$$



Ondersteunende route → maak opdracht O32

- 32** Gegeven zijn de grafieken bij de formules $y = -2 + 3\sqrt{x-1}$ en $y = -x + 9$.

Los de ongelijkheid $-2 + 3\sqrt{x-1} \leq -x + 9$ op.



- 33** Gegeven zijn de grafieken bij de formules $y = \sqrt{6-x}$,

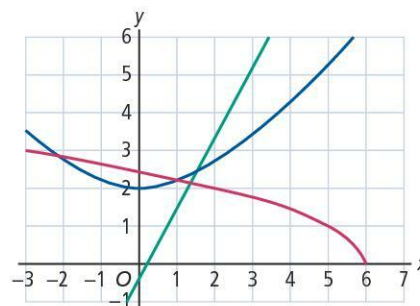
$$y = \sqrt{x^2 + 4} \text{ en } y = 2x - \frac{1}{2}.$$

a Los de vergelijking $\sqrt{6-x} = \sqrt{x^2 + 4}$ op.

b Los de ongelijkheid $\sqrt{6-x} \geq \sqrt{x^2 + 4}$ op.

c Los op $2x - \frac{1}{2} < 0$.

d Los op $\sqrt{6-x} \leq 10$.

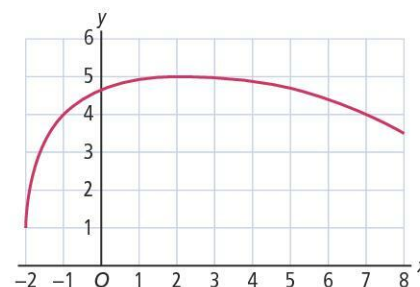


- 34** Gegeven is de grafiek bij de formule $y = -1 - x + 4\sqrt{x+2}$.

a Los op $-1 - x + 4\sqrt{x+2} \geq 3$.

b Los op $-1 - x + 4\sqrt{x+2} < 4$.

c Leg met behulp van de grafiek uit dat de ongelijkheid $-1 - x + 4\sqrt{x+2} > 6$ als oplossing $\mathbb{R}$ heeft.



Uitdagende route → maak opdracht U7 en U8

Ondersteunende opdrachten

032 Gegeven is de grafiek bij de formule $y = 2\sqrt{x}$ en de lijn $y = x - 3$. Je gaat in deze opdracht de ongelijkheid

$2\sqrt{x} \geq x - 3$ oplossen.

a Vul in.

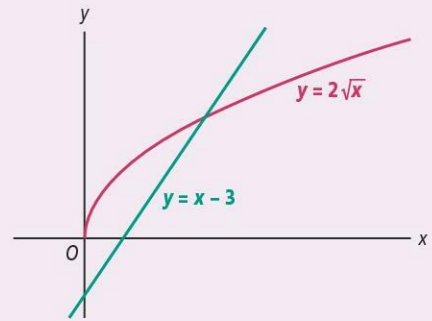
Voor de oplossing van $2\sqrt{x} \geq x - 3$ kijk je voor welke waarden van x de grafiek bij $y = 2\sqrt{x}$... ligt dan de lijn.

b Voor welke waarden van x heeft de formule $y = 2\sqrt{x}$ een uitkomst?

c Los op $2\sqrt{x} = x - 3$.

d De oplossing van de ongelijkheid is van de vorm $0 \leq x \leq \dots$.
Leg uit waarom de oplossing begint met 0.

e Schrijf de oplossing van de ongelijkheid op.



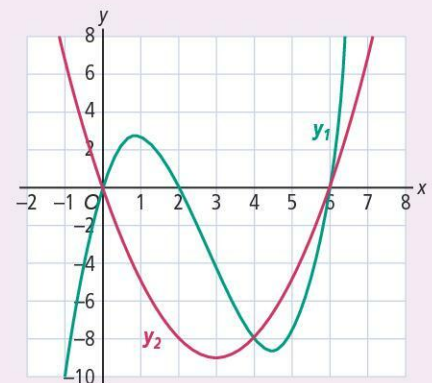
Uitdagende opdrachten

U7 De oplossing van de ongelijkheid $15 - 2\sqrt{8 - x} > ax + b$ is $x < -8$ of $4 < x \leq 8$.
Bereken a en b .

U8 Gegeven zijn de formules $y_1 = 0,5x(x - 2)(x - 6)$ en $y_2 = x(x - 6)$.

a Voor welke waarden van x geldt $y_1 \leq y_2$?

b Voor welke waarden van x geldt $y_1 \cdot y_2 \leq 0$?



1.6 Herleiden

Je leert

- hoe je een variabele uitdrukt in andere variabelen
- hoe je een vergelijking met behulp van een substitutie oplost

Leerroutes

- ondersteunend: 35—36—037—38—39—40—41—042
- doorlopend: 35—36—37—38—39—40—41—42
- uitdagend: 35—36—38—39—40—41—U9—U10

Jeroen heeft de lijn met vergelijking

$$y = 4 - \frac{2}{3}x \text{ getekend.}$$

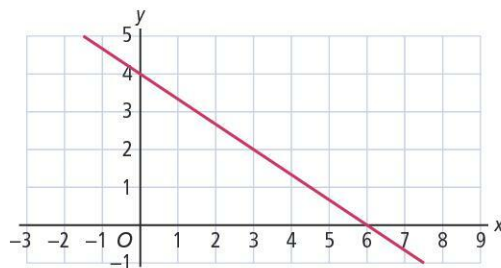
Qing tekent de lijn met vergelijking

$$2x + 3y = 12 \text{ en Coen tekent de lijn met}$$

$$\text{vergelijking } \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1.$$

Ze krijgen precies dezelfde lijn!

- Geef hiervoor een verklaring.



35 Gegeven is de vergelijking $8x - 2y = 15$.

- Vul de tabel verder in en teken de grafiek bij deze vergelijking.
- Schrijf de vergelijking $8x - 2y = 15$ in de vorm $\dots y = \dots x + 15$.
- Laat zien dat je de formule kan herleiden tot $y = ax + b$.
- Schrijf de vergelijking $3m + 4n = 12$ in de vorm $m = \dots n + \dots$ en teken de grafiek bij deze formule.

x	-1	0	1	2	3	4
y	$-11\frac{1}{2}$	$-7\frac{1}{2}$	...	...	...	...

Theorie

De vergelijking $5w + 3v = 45$ is te herleiden tot $w = -\frac{3}{5}v + 9$ of tot $v = -\frac{5}{3}w + 15$.

In de formule $w = -\frac{3}{5}v + 9$ is w **uitgedrukt in** v .

Bij het herleiden pas je, net als bij het oplossen van vergelijkingen, links en rechts steeds dezelfde bewerking toe.

Voorbeeld 1

Herleid de vergelijking $3p + 2q = 10$

waarbij je q in p uitdrukt.

Oplossing

$$3p + 2q = 10$$

$$2q = -3p + 10 \quad (\text{links en rechts } -3p)$$

$$q = -1\frac{1}{2}p + 5 \quad (\text{links en rechts } : 2)$$

Voorbeeld 2

Herleid de vergelijking $\frac{5}{b} - 3a = 1$

waarbij je b uitdrukt in a .

Oplossing

$$\frac{5}{b} - 3a = 1$$

$$\frac{5}{b} = 1 + 3a \quad (\text{links en rechts } + 3a)$$

$$5 = (1 + 3a) \cdot b \quad (\text{links en rechts } \times b)$$

$$b = \frac{5}{1 + 3a} \quad (\text{links en rechts } : (1 + 3a))$$

36 Druk q uit in p .

- H**
- | | |
|--------------------------|-------------------------------------|
| a $8p - 4q = 9$ | d $18q - 12 = 3p + 2(q - 1)$ |
| b $p + q = 0$ | e $3(q + 1) = 6p + 5$ |
| c $15p = 3q + 27$ | f $10p - 4q = 6p + 12$ |

Ondersteunende route → maak opdracht 037

37 Druk b uit in a .

- H**
- | | |
|-------------------------------------|-----------------------------------|
| a $\frac{3}{b} = 7a + 5$ | d $2a = \frac{8}{b+4}$ |
| b $8 + \frac{6}{b} = 7a - 6$ | e $a - 9 = \frac{16}{b-4}$ |
| c $a = \sqrt{b+1}$ | f $a + 3 = \sqrt{b-2}$ |

38 Met de formule $y = 3p + 5$ is y uitgedrukt in p .
Met de formule $p = 7x - 2$ is p uitgedrukt in x .
Om vervolgens y uit te drukken in x moet je p in de formule $y = 3p + 5$ vervangen door $7x - 2$. Je ziet daarvan een begin.

- a** Maak de berekening af.
b Gegeven zijn de formules $b = 8m - 10$ en $m = 2a + 6$.
Druk b uit in a .

$y = 3p + 5$ met $p = 7x - 2$
 $y = 3(\dots) + 5$
 $7x - 2$
 $y = 3(7x - 2) + 5$
Haakjes wegwerken:
 $y = 21x - \dots$

Theorie

In een formule kun je een variabele vervangen door een uitdrukking. Dit heet **substitueren**.
Na het substitueren vereenvoudig je de ontstane formule zoveel mogelijk.

Voorbeeld

Gegeven is $y = 4t + 8$ en $t = -2x + 1$.
Druk y uit in x .

Oplossing

$$\begin{aligned}y &= 4(-2x + 1) + 8 \\y &= -8x + 4 + 8 \\y &= -8x + 12\end{aligned}$$

39 Gebruik een substitutie om y in x uit te drukken.
Vereenvoudig het resultaat.

- H**
- | |
|---|
| a $y = -5t + 89$ en $t = 19x + 18$ |
| b $y = 8p + 10$ en $p = 5 - 2x$ |
| c $y = 6 - 3a$ en $a = x^2 + 4$ |
| d $y = p^2 + 9$ en $p = 3x + 1$ |

Theorie

Sommige vergelijkingen zijn eenvoudiger op te lossen door gebruik te maken van een substitutie.

Voorbeeld

Los op $(x + 2)^2 - 3(x + 2) + 2 = 0$.

Oplossing

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \quad (\text{substitutie } x + 2 = t)$$

$$(t - 2)(t - 1) = 0 \quad (\text{ontbonden in factoren})$$

$$t = 2 \text{ of } t = 1$$

Omdat $x + 2 = t$ is $x + 2 = 2$ of $x + 2 = 1$.

Oplossing $x = 0$ of $x = -1$.

- 40** De vergelijking $(3x - 7)^2 + 5(3x - 7) + 6 = 0$ kun je oplossen zonder eerst de haakjes weg te werken.
- Welke vergelijking krijg je door de substitutie $p = 3x - 7$?
 - Los de vergelijking op die je bij opdracht a hebt gekregen.
 - Gebruik $3x - 7 = p$ om de waarden van x te berekenen.

- 41** Gegeven is de vergelijking $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$. Omdat $x^4 = (x^2)^2$ kun je de substitutie $p = x^2$ gebruiken. De vergelijking wordt $p^2 - 13p + 36 = 0$.
- Los de vergelijking $p^2 - 13p + 36 = 0$ op.
 - De gevonden waarden van p zijn de uitkomsten van x^2 . Bereken de vier oplossingen van $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Ondersteunende route → maak opdracht 042

- 42** Los op.

H

- | | |
|---|---|
| a $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$ | d $3x^4 - 8x^2 + 5 = 0$ |
| b $(x^2 - 3)^2 - 5(x^2 - 3) = 6$ | e $(2x + 5)^2 + 3(2x + 5) = 18$ |
| c $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$ | f $(1 - 2x)^4 - 2(1 - 2x)^2 = 8$ |

Uitdagende route → maak opdracht U9 en U10

Ondersteunende opdrachten

037 Gegeven zijn de formules $\sqrt{b-a} = 5 + a$ en $\frac{12}{1-b} = 2a + 3$.

Op het blaadje is een begin gemaakt met een herleiding zodat b wordt uitgedrukt in a .

- a** Omschrijf wat er in de stappen 1 en 2 bij de eerste formule gebeurt.
- b** Wat gebeurt er in stap 1 bij de tweede formule?
- c** Maak de herleidingen af.

Druk b uit in a .

- d** $a = \sqrt{b+3}$
- e** $\frac{2}{b} = 3a + 7$
- f** $2 + \frac{3}{b} = 4a - 8$
- g** $a - 5 = \sqrt{4b+3}$
- h** $ab = 4$
- i** $\frac{a}{2b} = 4 + a$

☐	$\sqrt{b-a} = 5 + a$				
☐	$b-a = (5+a)^2$			1	
☐	$b = \dots$			2	
☐	$\frac{12}{1-b} = 2a + 3$				
☐	$12 = (2a+3)(1-b)$			1	
☐	$1-b = \frac{12}{\dots}$			2	
☐	$\dots = \dots$				

042 Er is een begin gemaakt met het oplossen van de vergelijking $(2x+1)^2 - (2x+1) - 2 = 0$.

- a** Welke substitutie pas je hier toe?
- b** Los de vergelijking $t^2 - t - 2 = 0$ op.
- c** Welke waarden voor x vind je hieruit? Gebruik daarbij dat $2x+1 = t$.

Los op.

- d** $x^4 - 8x^2 = 128$
- e** $(x^2 - 2)^2 - 7(x^2 - 2) + 12 = 0$
- f** $(3x+4)^4 + (3x+4)^2 = 2$
- g** $5(3+x) = 6 - (3+x)^2$

☐	$(2x+1)^2 - (2x+1) - 2 = 0$				
☐	Gebruik de substitutie $t = \dots$				
☐	De vergelijking wordt $t^2 - t - 2 = 0$.				
☐	Oplossen geeft $t = \dots$ of $t = \dots$				
☐					

Uitdagende opdrachten

U9 Druk b uit in a en herleid.

- a** $\frac{3}{ab} = 7a + 5$
- b** $8 + \frac{6}{b+1} = 7a - 6$
- c** $\sqrt{a+b+1} = 3 - a$
- d** $2a = \frac{5}{b+4a}$
- e** $a - 9 = \frac{16}{b-4a}$
- f** $a + 3 = \sqrt{b-2a}$

U10 Los op. Kies daartoe een geschikte substitutie.

- a** $(1 + \sqrt{x})^2 - 5(1 + \sqrt{x}) + 6 = 0$
- b** $x^4 - 7x^2 - 8 = 0$
- c** $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$
- d** $\frac{6}{x^2} - \frac{5}{x} + 1 = 0$

43 Los op.

a $3x + 12 = 1 - 2x$

e $4x(7 - 2x) = (x - 3)(7 - 2x)$

b $\frac{18}{x-4} = -6x$

f $\frac{x+4}{2x+1} = \frac{2x}{13-x}$

c $2\sqrt{x-1} + 3 = 7$

g $(2x+1)^2 = (x-5)^2$

d $(3x-1)(x+5) = -5$

h $(x-4)^2\sqrt{x^2-9} = 25\sqrt{x^2-9}$

44 De sterkte van een lens wordt bepaald door de brandpuntsafstand f van de lens. De beeldafstand b is de afstand van de lens tot de afbeelding en de voorwerpsafstand v is de afstand van het te vergroten voorwerp tot de lens.

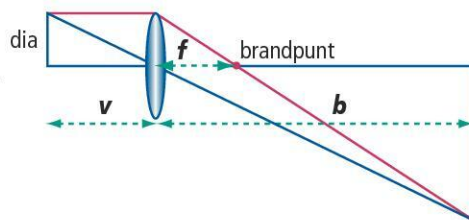
Voor het verband tussen f , b en v geldt de formule:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{v}$$

a De brandpuntsafstand f van een bepaalde lens is 8 cm. Een dia staat 10 cm vóór de lens, dus $v = 10$ cm. Bereken de beeldafstand b .

b Als je bij een lens met een brandpuntsafstand van 8 cm voor een aantal voorwerpsafstanden de beeldafstand moet berekenen kun je de lenzenformule herschrijven.

Laat zien dat de formule dan wordt $b = \frac{8v}{v-8}$



45 Gegeven zijn de grafieken bij $y = 11 - 2x$ en $y = \sqrt{x+2}$.

a Voor welke waarden van x is $\sqrt{x+2} > 8$?

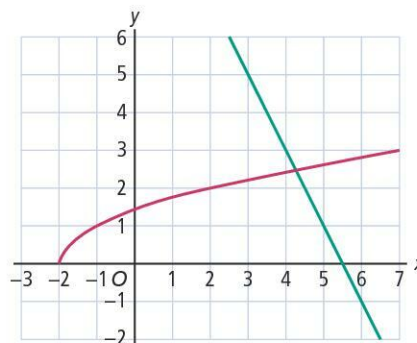
b Los op $\sqrt{x+2} < 3\frac{1}{2}$.

c Bereken de coördinaten van het snijpunt van de gegeven grafieken.

d Los op $1 \leq \sqrt{x+2} < 11 - 2x$.

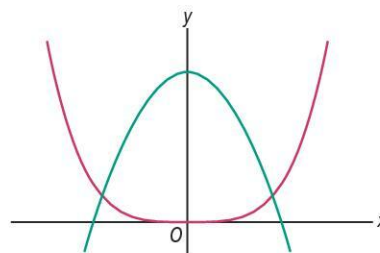
e Verder is gegeven de lijn k met vergelijking $x - 3y + 3 = 0$.

Onderzoek of k de grafiek van $y = \sqrt{x+2}$ snijdt.



46 De grafieken bij de formules $y = x^4$ en $y = -5x^2 + 6$ zijn geschetst.

Los op $x^4 > -5x^2 + 6$.



- 47** De Nederlandse Spoorwegen biedt verschillende kortingsabonnementen aan waarmee je met korting met de trein kunt reizen. Met het abonnement 'Altijd voordeel' kun je onder andere in de spits met 20% korting reizen.

Carel woont in Heiloo en reist regelmatig in het weekend naar Amersfoort en terug. Een enkele reis voor dit traject kost normaal € 14,40.

- Onderzoek hoe vaak Carel per maand minstens heen en weer moet reizen voordat het voor hem voordeliger is om het abonnement 'Altijd voordeel' aan te schaffen.
- Carel werkt in Amsterdam, reist 's morgens in de spits naar zijn werk en 's avonds buiten de spits weer terug naar huis. In april reist Carel één weekend heen en weer naar Amersfoort. Een enkele reis naar Amsterdam kost € 7,91. Onderzoek op hoeveel dagen Carel in deze maand minstens met de trein naar zijn werk moet reizen voordat het voor hem voordeliger is om het abonnement 'Altijd voordeel' aan te schaffen.



**Altijd
Voordeel**

40% korting in het weekend

40% korting buiten de spits

20% korting in de spits

€ 23 per maand

- 48** Voor elke waarde van $p \neq 0$ is de formule $y = 4 + p\sqrt{16 - x}$ een wortelformule. Voor twee waarden van p is de bijbehorende grafiek getekend.



- Er is een waarde van p waarbij de bijbehorende grafiek door het punt $(-9, 14)$ gaat. Bereken deze waarde van p .
- Voor $p = 1$ gaat de bijbehorende grafiek door het punt $R(0, 8)$. Er zijn lijnen door R die deze grafiek behalve in R in nog één ander punt snijden. Elke niet-verticale lijn door $(0, 8)$ voldoet aan de vergelijking $y = ax + 8$. Onderzoek voor welke waarden van a een lijn door R de grafiek behalve in R in nog één ander punt snijdt.

Theorie

Lineaire vergelijking of eerstegraads vergelijking, wortelvergelijking, gebroken vergelijking

Een lineaire vergelijking $y = ax + b$ geeft een lineair verband tussen de variabelen x en y . Een lineaire vergelijking als $8x - 1 = 2x + 5$ heeft één variabele en kun je oplossen.

Een vergelijking als $\sqrt{x - 3} = x$ noem je een wortelvergelijking omdat de variabele onder het wortelteken voorkomt.

Een vergelijking noem je een gebroken vergelijking als de variabele in de noemer van een breuk voorkomt.

S1 Schrijf in de vorm $y = ax + b$.

a $2x + y = 3$

b $3x - 2y = 4$

Theorie

Kwadratische vergelijking of tweedegraads vergelijking

De algemene vorm van een kwadratische vergelijking is $ax^2 + bx + c = 0$.

De oplossingen zijn $x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ of $x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ met

$$D = b^2 - 4ac.$$

D heet de discriminant van de vergelijking.

Als $D > 0$, dan zijn er twee oplossingen.

Als $D = 0$, dan is er één oplossing.

Als $D < 0$, dan zijn er geen oplossingen.

S2 Bereken het aantal oplossingen van deze vergelijkingen.

a $x^2 + 6x - 9 = 0$

b $x^2 + 4x + 8 = 0$

Vaardigheid

Je kunt een lineaire of eerstegraads vergelijking oplossen.

Een lineaire vergelijking of een eerstegraads vergelijking los je op door links en rechts van het $=$ -teken dezelfde bewerkingen uit te voeren.

Voorbeeld

Los op $6 - x = 2 - 3(x - 2)$.

Oplossing

$$6 - x = 2 - 3x + 6$$

$$-x = 2 - 3x$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

S3 Los op.

a $3(5 - x) = 5(3 - 2x) + 21$

b $-4(x - 5) - 2(7 - 3x) = 4x$

Vaardigheid**Je kunt een vergelijking van een lijn opstellen.**

Een vergelijking van een lijn door twee gegeven punten stel je op door eerst de richtingscoëfficiënt uit te rekenen. Het startgetal reken je vervolgens uit door de coördinaten van één van de gegeven punten in te vullen.

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de lijn door de punten (9, 6) en (13, 18).

Oplossing

De richtingscoëfficiënt is $\frac{18-6}{13-9} = \frac{12}{4} = 3$.

$$y = 3x + b$$

$$x = 9 \text{ en } y = 6 \text{ invullen geeft } 3 \times 9 + b = 6$$

$$b = -21$$

$$y = 3x - 21$$

- S4** Stel een vergelijking op van lijn l .
- l gaat door $(-3, 7)$ en $(7, 2)$.
 - l gaat door $(1, 10)$ en is evenwijdig aan lijn m met vergelijking $y = -5x + 17$.

Vaardigheid**Je kunt een kwadratische of tweedegraads vergelijking oplossen.**

Je kunt daarbij gebruik maken van:

- Ontbinden in factoren, uit $A \cdot B = 0$ volgt $A = 0$ of $B = 0$.
- Uit $A^2 = B^2$ volgt $A = B$ of $A = -B$.
- Uit $A \cdot B = A \cdot C$ volgt $A = 0$ of $B = C$.
- De abc -formule.

Voorbeeld 1

$$\text{Los op } (2x - 3)^2 = (x + 4)^2.$$

Oplossing

$$2x - 3 = x + 4 \text{ of } 2x - 3 = -(x + 4)$$

$$x = 7 \text{ of } 2x - 3 = -x - 4$$

$$x = 7 \text{ of } 3x = -1$$

$$x = 7 \text{ of } x = -\frac{1}{3}$$

Voorbeeld 2

$$\text{Los op } (4x - 1)(5x + 2) = 10x + 4.$$

Oplossing

$$(4x - 1)(5x + 2) = 2(5x + 2)$$

$$4x - 1 = 2 \text{ of } 5x + 2 = 0$$

$$4x = 3 \text{ of } 5x = -2$$

$$x = \frac{3}{4} \text{ of } x = -\frac{2}{5}$$

- S5** Los op.
- $(x + 1)^2 = 4(x + 1)$
 - $4x^2 - 12x + 9 = 0$
 - $(3x - 12)^2 = (6 - 2x)^2$
 - $(2x - 3)(2x + 1) = 4(2x + 1)$

Vaardigheid**Je kunt een wortelvergelijking oplossen.**

- 1 Isoleer de wortel in de vergelijking.
- 2 Kwadrateer beide kanten van de vergelijking.
- 3 Los de verkregen vergelijking op.
- 4 Controleer of de oplossingen voldoen door deze in te vullen in de oorspronkelijke vergelijking.

Voorbeeld

Los op $-1 + \sqrt{4x+1} = x$.

Oplossing

1 $\sqrt{4x+1} = x+1$

2 $4x+1 = (x+1)^2$

3 $4x+1 = x^2 + 2x + 1$

$0 = x^2 - 2x$

$x(x-2) = 0$

$x = 0$ of $x = 2$

4 $x = 0$ invullen geeft $-1 + \sqrt{4 \times 0 + 1} = 0$, klopt.

$x = 2$ invullen geeft $-1 + \sqrt{4 \times 2 + 1} = 2$, klopt.

Beide oplossingen voldoen.

S6 Los op.

a $2\sqrt{x-4} = 8 - \frac{1}{2}x$

b $x + 2\sqrt{-1-x} = -4$

Vaardigheid

Je kunt een gebroken vergelijking oplossen.

- In enkele gevallen kun je de bordjesmethode gebruiken.
- In de andere gevallen herleid je de vergelijking door gebruik te maken van de volgende regels:

Uit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ volgt $A \cdot D = B \cdot C$ mits $B \neq 0$ en $D \neq 0$.

Uit $\frac{A}{B} = C$ volgt $A = B \cdot C$ mits $B \neq 0$.

Voorbeeld

Los op $\frac{x+2}{x} = \frac{x}{x-4}$

Oplossing

$(x+2)(x-4) = x^2$

$x^2 - 2x - 8 = x^2$

$-2x = 8$

$x = -4$

S7 Los op.

a $\frac{2}{3x-9} = \frac{1}{\frac{1}{2}x+4}$

b $\frac{x+1}{4x-3} = x$

Vaardigheid

Je kunt een ongelijkheid oplossen.

- 1 Los de bijbehorende vergelijking op.
- 2 Lees met behulp van de grafieken de oplossing van de ongelijkheid af.
- 3 Noteer de oplossing van de ongelijkheid.

Voorbeeld

Los op $-1 + \sqrt{4x+1} < x$.

Oplossing

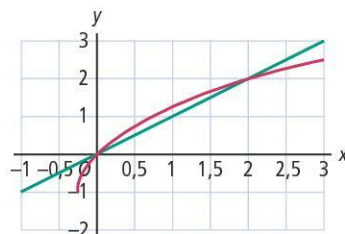
1 $-1 + \sqrt{4x+1} = x$.

$x = 0$ of $x = 2$ (zie het voorbeeld boven opdracht S6)

3 $y = -1 + \sqrt{4x+1}$ bestaat voor $4x+1 \geq 0$ dus $x \geq -\frac{1}{4}$.

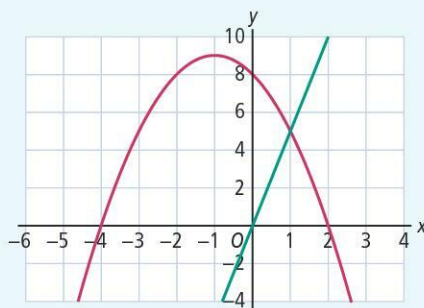
De oplossing van de ongelijkheid is $-\frac{1}{4} \leq x < 0$ of $x > 2$.

2



- S8** Gegeven zijn de grafieken bij de formules $y = -x^2 - 2x + 8$ en $y = 5x$.
Los op.

a $-x^2 - 2x + 8 < 0$
b $-x^2 - 2x + 8 \geq 5x$



Vaardigheid

Je kunt een variabele uitdrukken in andere variabelen.

Bij het herleiden pas je, net als bij het oplossen van vergelijkingen, steeds links en rechts dezelfde bewerkingen toe.

Voorbeeld

Druk p uit in q als $\frac{4}{p} - 3q = 2$.

Oplossing

$$\frac{4}{p} = 2 + 3q \quad (\text{links en rechts } + 3q)$$

$$4 = (2 + 3q) \cdot p \quad (\text{links en rechts } \times p)$$

$$p = \frac{4}{2 + 3q} \quad (\text{links en rechts } : (2 + 3q))$$

- S9** Druk p uit in q .

a $\frac{p + 2q}{2p + q} = 3$

b $q - \sqrt{p - 2q} = 3$

Vaardigheid

Je kunt een vergelijking met behulp van een substitutie oplossen.

Bij een substitutie vervang je een deel van de vergelijking door een andere variabele.

Voorbeeld

Los op $(5x - 4)^2 - 12(5x - 4) + 11 = 0$.

Oplossing

$$t^2 - 12t + 11 = 0 \quad (\text{substitutie } 5x - 4 = t)$$

$$(t - 11)(t - 1) = 0$$

$$t = 11 \text{ of } t = 1$$

$$\text{Dan is } 5x - 4 = 11 \text{ of } 5x - 4 = 1.$$

$$5x = 15 \text{ of } 5x = 5$$

$$x = 3 \text{ of } x = 1$$

- S10** Los op.

a $(1 - 2x)^2 + (1 - 2x) - 12 = 0$

b $(x + 2)^3 = 4(x + 2)^2$

T1 Los op.

a $13 + 2x = 3(x - 5) + 7x$

b $\frac{1}{5}p + 3 = \frac{3}{10}p - 8$

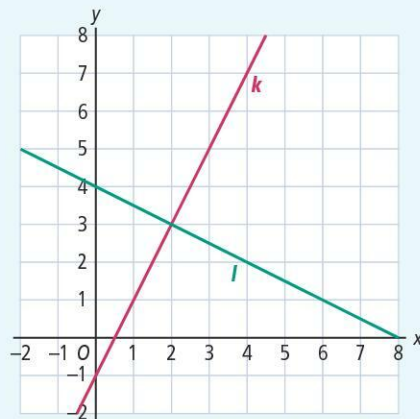
c $3\frac{2}{3}x - 3 = 2(\frac{1}{6}x + 1)$

T2 Gegeven zijn de lijnen $l: y = -\frac{1}{2}x + 4$ en $k: y = 2x - 1$.

a Los op $-\frac{1}{2}x + 4 \geq 2x - 1$.

b Teken de lijnen $m: y = -1,5x + 7$ en $n: y = 2x + 6$ in één assenstelsel.

c Los op $-1,5x + 7 \geq 2x + 6$.



T3 Los op. Geef exacte antwoorden.

a $a^2 = 9a + 22$

e $\frac{x+4}{x-2} = \frac{x+2}{x}$

b $\sqrt{x^2 + 4} - 1 = x$

f $x^2 - 2 = \frac{1}{x^2 - 2}$

c $(2x - 3)^2 = (1 - 8x)^2$

g $(x^2 - 8)^2 = x^2 - 8$

d $\frac{-3x}{x+1} = x - 4$

h $\sqrt{2x-1} \cdot \sqrt{3-5x} = 0$

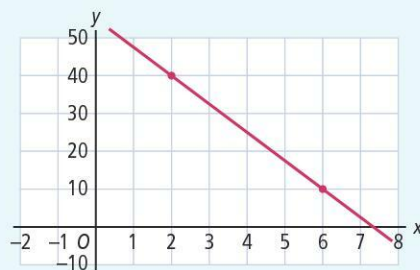
T4 Stel een vergelijking op van de lijn l .

a l gaat door $(2, 5)$ en $(0, 7)$.

b l gaat door de oorsprong en $(-4, 2)$.

c l gaat door $(3, -5)$ en is evenwijdig aan de lijn met vergelijking $y = -3x + 9$.

d l is getekend in het assenstelsel hiernaast.



T5 Druk p uit in q .

a $2(q + 1) = 4p - 5$

c $q + 8 - \frac{1}{p+6} = 0$

b $4 + \frac{3}{p} = q + 5$

d $7 - 2\sqrt{p+6} = q$

T6 Gegeven zijn de formules $y = (3t - 4)^2 + 6t$ en $t = 2x - 1$.
Druk y uit in x en vereenvoudig het resultaat.

T7 Los op met een substitutie.

a $(3x - 1)^2 - 5(3x - 1) = 6$

b $x^4 = 13x^2 - 36$

c $(4x + 2)^2 - 10 = 3(4x + 2)$

d $9x^2 - 2 = 4x^4$

T8 Voor elke waarde van p is de grafiek bij de formule $y = (x + p)^2 - 3$ een parabool.

Getekend is de parabool voor $p = 2$ en de lijn m : $x - 2y = 1$.

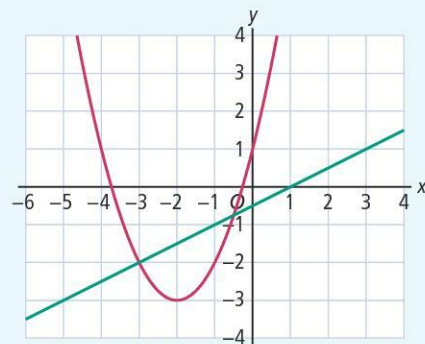
a Bereken de coördinaten van de snijpunten van de getekende parabool met de lijn $y = 2$.

b Bereken de coördinaten van de snijpunten van de getekende parabool met m .

c Er zijn twee waarden van p waarvoor de bijbehorende parabool de y -as snijdt in het punt $(0, 5)$.
Bereken deze waarden van p .

d Neem $p = 4$.

Voor welke waarde van a heeft de ongelijkheid $(x + 4)^2 - 3 < a$ geen oplossing?

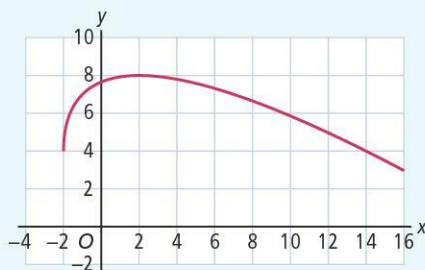


T9 Gegeven is de grafiek bij de formule $y = 2 - x + 4\sqrt{x + 2}$.

W **a** Los op $2 - x + 4\sqrt{x + 2} < 7$.

b Los op $2 - x + 4\sqrt{x + 2} \geq x$.

c Los op $2 - x + 4\sqrt{x + 2} \leq -2x$.



T10 Punt K ligt op de lijn l met de vergelijking $y = -\frac{1}{2}x + 5$.

K is een hoekpunt van rechthoek $OAKB$.

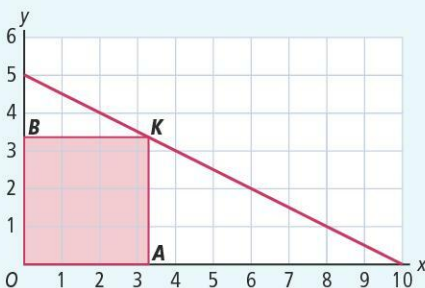
Als K langs lijn l verschuift, veranderen de coördinaten van de punten K , A en B .

Kies voor A het punt $(a, 0)$.

a Druk de coördinaten van B uit in x .

b V is de oppervlakte van de rechthoek $OAKB$.
Druk V uit in a .

c Bereken voor welke waarden van a de oppervlakte van de rechthoek $OAKB$ gelijk is aan $6\frac{3}{8}$.



Je kunt een lineaire of eerstegraads vergelijking oplossen.

E1 Los op.

a $4(2x - 5) + 4 = 1 - 3(8 - x)$

b $\frac{2}{3}(\frac{1}{2}x - 6) = -2x + \frac{1}{3}(x + 12)$

Je kunt een vergelijking van een lijn opstellen.

E2 Stel een vergelijking op van lijn l .

a l gaat door $(6, 20)$ en $(-3, -2)$.

b l gaat door $(-4, 8)$ en $(2, 11)$.

c l gaat door $(0, 9)$ en $(25, 9)$.

d l gaat door $(8, -4)$ en is evenwijdig aan lijn m met vergelijking $y = 1\frac{1}{2}x + 10$.

Je kunt een kwadratische of tweedegraads vergelijking oplossen.

E3 Los op.

a $8 = 3x - \frac{1}{4}x^2$

c $7x - 15x^2 = 19x - 7x^2$

b $(4k - 3)^2 = 100k^2$

d $6x^2(x - 2) = 30(x - 2)$

Je kunt een wortelvergelijking oplossen.

E4 Los op.

a $2\sqrt{6 - 2x} = 18$

c $3x - 2\sqrt{x} = 0$

b $\sqrt{4 + x} - 2 = 5x$

d $2x + \sqrt{x - 7} = 20$

Je kunt een gebroken vergelijking oplossen.

E5 Los op.

a $\frac{18}{5p + 3} = 6$

c $\frac{-45}{2a + 1} = 1 - 7a$

b $\frac{3}{x + 2} = \frac{x}{2x - 1}$

d $\frac{2}{x} + 1 = 2x + 4$

Je kunt een ongelijkheid oplossen.

E6 Gegeven zijn de lijnen l : $y = -\frac{2}{5}x + 10$ en m : $y = \frac{1}{3}x - 2$.

a Teken de lijnen l en m .

b Los de ongelijkheid $-\frac{2}{5}x + 10 > \frac{1}{3}x - 2$ op.

Je kunt een variabele uitdrukken in andere variabelen.

E7 a Herleid $3m = \sqrt{2 + k} - 6$ zodat k wordt uitgedrukt in m .

b Gegeven zijn de formules $t = 3k - 5$ en $y = (2t + 10)^2 - 3t$.
Druk y uit in k en vereenvoudig het resultaat.

Je kunt een vergelijking met behulp van een substitutie oplossen.

E8 Los op.

a $(1 - 3x)^2 = 24 - 5(1 - 3x)$

b $2x^4 + 3 = 5x^2$

E9 Gegeven zijn de lijnen $k: 2x + ay = 7$ en $m: 6x - 5y = bx$.

a Bereken voor welke waarden van a en b het punt $S(3, 5)$ het snijpunt van deze lijnen is.

b Neem $b = 14$ en bereken de waarde van a waarvoor de lijnen elkaar *niet* snijden.

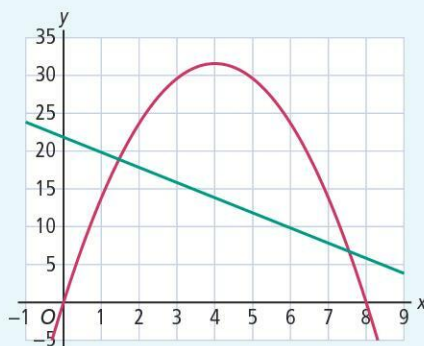
E10 De parabool is de grafiek bij de formule $y = -2x(x - 8)$. Verder is gegeven lijn l met vergelijking $4x + 2y = 45$.

a Bereken de coördinaten van de snijpunten van de parabool en lijn l .

Een verticale lijn met vergelijking $x = p$ snijdt de parabool in punt A en l in punt B , waarbij punt A boven punt B ligt.

b Bereken AB als $p = 6$.

c Bereken de waarden van p als $AB = 5\frac{1}{2}$.



E11 Gegeven is de formule $y = 2x - \sqrt{x + 8}$.

a Punt A met x -coördinaat -8 en punt B met x -coördinaat 17 liggen op de grafiek bij de formule. Stel een vergelijking op van de lijn door A en B .

b Los op $2x - \sqrt{x + 8} = 12$.

E12 Getekend zijn de lijnen $y = x + 5$, $y = -4x$ en $y = 2x - 6$. De lijnen hebben onderling drie snijpunten.

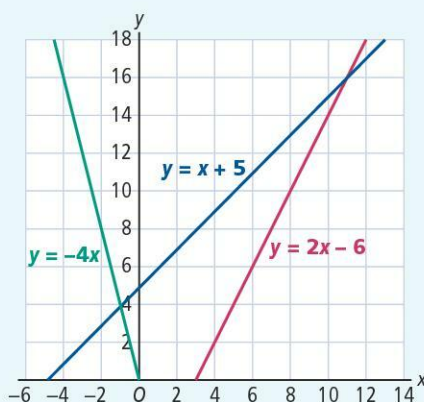
a Bereken de x -coördinaten van deze drie snijpunten.

b Los op $x + 5 > -4x$.

c Los op $0 \leq 2x - 6 < x + 5$.

d Los op $(x + 5)^2 = (2x - 6)^2$.

e Los op $-4x(x + 5) = (x + 5)(2x - 6)$.





SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In de onderbouw heb je gewerkt met machten waarvan de exponent een positief geheel getal is, zoals x^3 en x^6 . Ook heb je geleerd wat de wortel van een getal is en de betekenis van hogere machtswortels zoals $\sqrt[3]{8}$ en $\sqrt[4]{81}$.

In dit hoofdstuk leer je wat de betekenis is van een macht waarvan de exponent een negatief getal of een gebroken getal is, zoals x^{-1} , x^{-3} of $x^{\frac{1}{2}}$.

Bij het oplossen van vergelijkingen met machten ga je gebruik maken van hogere machtswortels.

Het werken met machten en het oplossen van vergelijkingen met machten is een regelmatig terugkerende vaardigheid in hoofdstukken waarin gewerkt wordt met formules, zoals hoofdstuk 4 en hoofdstuk 6.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 53
- *Formules manipuleren* opdracht 47
- *Logisch redeneren en bewijzen* opdracht 15



- V1**
- a** Er geldt dat $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ en $2^2 = 2 \cdot 2$.
Leg hiermee uit dat $2^3 \cdot 2^2 = 2^5$.
- b** Leg uit dat $a^4 \cdot a^3 = a^7$.
- c** Vul in wat op de puntjes moet staan: $x^3 \cdot \dots = x^9$.
- d** Leg uit dat $(2^3)^4 = 2^{12}$.
- e** Vul in wat op de puntjes moet staan: $(x^3)^{\dots} = x^9$.
- f** Er geldt $(2x^3)^4 = 2x^3 \cdot 2x^3 \cdot 2x^3 \cdot 2x^3$.
Leg hiermee uit dat $(2x^3)^4 = 16x^{12}$.
- g** Vul in wat op de puntjes moet staan: $(3x^4)^5 = \dots x^{\dots}$.

Theorie

Bij het rekenen met machten gelden de volgende **rekenregels**.

- $g^1 = g$
- $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$
- $\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$
- $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$
- $(p \cdot q)^a = p^a \cdot q^a$
- $\left(\frac{p}{q}\right)^a = \frac{p^a}{q^a}$

Voorbeeld

Vereenvoudig

$$\frac{a^7 \cdot a^3}{5x^4}$$

$$\frac{10x^8}{5x^4}$$

$$(p^3)^6 \cdot p^2$$

$$(3 \cdot b^4)^2$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^3$$

Oplossing

$$\frac{a^7 \cdot a^3}{5x^4} = \frac{a^{7+3}}{5x^4} = \frac{a^{10}}{5x^4}$$

$$\frac{10x^8}{5x^4} = 2x^{8-4} = 2x^4$$

$$(p^3)^6 \cdot p^2 = p^{3 \cdot 6} \cdot p^2 =$$

$$p^{18} \cdot p^2 = p^{20}$$

$$(3 \cdot b^4)^2 =$$

$$3^2 \cdot (b^4)^2 = 9b^8$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^3 = \frac{b^3}{2^3} = \frac{1}{8} b^3$$

- V2** Schrijf als één macht.

a $3^2 \cdot 3^4$

b $7^2 \cdot 7^7 \cdot 7^3$

c $\frac{2^7}{2^2}$

d $(5^3)^2 \cdot 5^6$

e $11 \cdot 11^3 \cdot 11^4 \cdot 11^2$

f $\frac{6 \cdot (6^2)^4}{6^3 \cdot 6^3}$

- V3** Schrijf de rechterkant van de formules als één macht.

a $K = p^3 \cdot p^4$

b $b = (a^4)^2$

c $N = g^4 \cdot g^2 \cdot (g^3)^5$

d $P = (q^2)^5 \cdot q^2$

e $r = a \cdot (a^2)^4$

f $h = q^3 \cdot q^2 \cdot q \cdot q^2$

V4 Schrijf zonder haakjes en zo eenvoudig mogelijk.

a $y = (3x^3)^4$

e $j = (a^4)^2 \cdot 2a^3$

b $g = (5p^2)^2$

f $k = (-2x^3)^3 \cdot (5x)^2$

c $h = \left(\frac{-4}{u^2}\right)^3$

g $l = \frac{18t^2 \cdot t^3}{t^4}$

d $i = \left(\frac{3}{p^4}\right)^2$

h $m = \left(\frac{4}{3x^2}\right)^3 \cdot 9x^5$

V5 Gegeven zijn de grafieken bij de formules $y = x^3$ en $y = x^4$.

a Welke grafiek hoort bij de formule $y = x^3$?

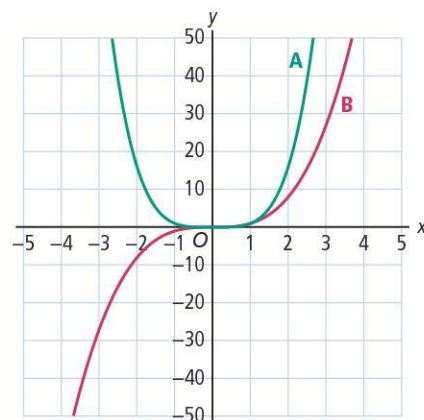
b Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^4 = 81$?
Verklaar je antwoord.

c Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^3 = 125$?
Verklaar je antwoord.

d Los de vergelijkingen $x^3 = 125$ en $x^4 = 81$ op.

e Leg uit waarom de vergelijking $x^4 = -81$ geen oplossingen heeft en de vergelijking $x^3 = -125$ wel.

f Los de vergelijking $x^3 = -125$ op.



Theorie

$\sqrt{c}$ heet de **wortel** van c . Er geldt $(\sqrt{c})^2 = c$.

$\sqrt[3]{c}$ heet de **derdemachtswortel** van c . Er geldt $(\sqrt[3]{c})^3 = c$.

$\sqrt[4]{c}$ heet de **vierdemachtswortel** van c . Er geldt $(\sqrt[4]{c})^4 = c$.

Voorbeeld

$\sqrt{121} = 11$ want $11^2 = 121$.

$\sqrt[3]{1000} = 10$ want $10^3 = 1000$.

$\sqrt[4]{256} = 4$ want $4^4 = 256$.

$\sqrt[4]{-81}$ bestaat niet, want een vierde macht kan niet negatief zijn.

$\sqrt[5]{-32} = -2$ want $(-2)^5 = -32$.

V6 Vul in.

a $\sqrt[5]{243} = \dots$ want $\dots^5 = 243$.

b $\sqrt[3]{-27} = \dots$ want $(\dots)^3 = -27$.

V7 Bereken indien mogelijk. Gebruik geen rekenmachine.

a $\sqrt{169}$

e $\sqrt[5]{-1}$

b $\sqrt[4]{10\,000}$

f $\sqrt[4]{81}$

c $\sqrt[3]{125}$

g $\sqrt[10]{1}$

d $\sqrt[3]{-8}$

h $\sqrt[4]{-16}$

2.1 Negatieve exponenten

Je leert

- de betekenis van een macht met een negatieve exponent
- hoe je rekt met machten met een negatieve exponent

Leerroutes

- ondersteunend: 1–2–03–3–4–05–6–7–8–9
- doorlopend: 1–2–3–4–5–6–7–8–9–10
- uitdagend: 1–2–3–4–5–7–8–10–U1–U2

Een eiland kampt met een konijnenplaag. In 2012 zijn er 300 konijnen op het eiland geteld. Sindsdien verdubbelt het aantal elk jaar. Ga ervan uit dat in de jaren voor 2012 het aantal konijnen ook al elk jaar verdubbelde. Het aantal konijnen voldoet aan de formule $A = 300 \cdot 2^t$ met $t = 0$ in 2012.

- Hoeveel konijnen waren er in 2010? Klopt dat met de formule?

t	-2	-1	0	1	2	3	4
A	...	...	300	600	1200	2400	4800



- Vul de tabel hiernaast in.
 - Gebruik de regelmaat die met de pijltjes onder de tabel is aangegeven om de tabel uit te breiden. Vul waar nodig breuken in.

3^5	3^4	3^3	3^2	3^1	3^0	3^{-1}	3^{-2}
...	...	...	...	...	...	...	...
$\begin{array}{ccccccc} \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright \\ :3 & :3 & :3 & :3 & :3 & :3 & :3 \end{array}$							

3^5	3^4	3^3	3^2	3^1
...	...	...	...	...
$\begin{array}{cccc} \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright \\ :3 & :3 & :3 & :3 \end{array}$				

- Schrijf 3^{-3} en 3^{-4} als breuk.
- In het rijtje met machten van a zit ook een regelmaat. Geef op basis van die regelmaat de waarde van a^0 en schrijf a^{-1} en a^{-2} als breuk.

$$\begin{array}{ccccccc}
 a^3 & a^2 & a^1 & a^0 & a^{-1} & a^{-2} \\
 \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright \\
 :a & :a & :a & :a & :a
 \end{array}$$

- Schrijf de uitkomsten op van 5^0 , 4^0 , 3^0 , 2^0 en 1^0 . Wat zou volgens dit rijtje de uitkomst kunnen zijn van 0^0 ?
 - Schrijf de uitkomsten op van 0^5 , 0^4 , 0^3 , 0^2 en 0^1 . Wat zou volgens dit rijtje de uitkomst kunnen zijn van 0^0 ?
 - Leg met behulp van je antwoorden van opdracht a en b uit dat k^0 niet bestaat in het geval $k = 0$.

Theorie

Voor de **macht met een negatieve exponent** geldt: $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$
 Verder is $g^0 = 1$ voor elk getal $g \neq 0$.

Alle regels voor het rekenen met machten gelden ook voor machten met een negatieve exponent.

Voorbeeld

$$7^0 = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} \quad (= \frac{1}{9})$$

$$a^{-4} = \frac{1}{a^4}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 03

- 3** Vereenvoudig en schrijf zonder negatieve exponent en zonder exponent nul.

H

a t^{-3}

d $2a^{-8}$

b $a^2 \cdot a^{-6}$

e $7a^4 \cdot 3a^2 \cdot a^{-8}$

c $\frac{5p \cdot p^0}{(p^2)^3}$

f $\frac{8x^4}{2x \cdot x^3}$

- 4** Op het blaadje is een begin gemaakt met de herleiding van $\frac{5}{a^8}$ en $\frac{1}{4p^2}$ tot een vorm zonder variabele in de noemer.

- a** Maak de herleidingen af.
b Herleid op dezelfde manier.

A $\frac{3}{p^3}$

C $\frac{1}{6x^4}$

B $\frac{2}{9a^8}$

D $\frac{1}{2u^5}$

$$\frac{5}{a^8} = 5 \cdot \frac{1}{a^8} = 5 \cdot a^{\dots} = 5a^{\dots}$$

$$\frac{1}{4p^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{4} \cdot p^{\dots} = \frac{1}{4}p^{\dots}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 05

- 5** Herleid tot de vorm $a \cdot x^b$.

a $\frac{6x^2}{8x^9}$

d $\frac{18x^4}{3x^2 \cdot 2x^3}$

b $\frac{1}{(x^2)^3}$

e $\frac{6x}{3x^9}$

c $\frac{x^0}{x^7}$

f $\frac{6x^2 \cdot (x^3)^2}{3x}$

2.1 Negatieve exponenten

6 Op het blaadje zie je hoe Addy en Bert de breuk $\frac{7}{a^{-3}}$ herschrijven.

- a** Leg uit waarom Addy de breuk $\frac{7}{a^{-3}}$ als $\frac{7 \cdot a^0}{a^{-3}}$ mag schrijven. Waarom is het handig dat te doen?
- b** Leg uit hoe Bert tot zijn antwoord komt.
- c** Welke methode heeft je voorkeur?

					Addy
	$\frac{7}{a^{-3}}$	$= \frac{7 \cdot a^0}{a^{-3}}$	$= 7 \cdot a^{0 - -3}$	$= 7a^3$	
					Bert
	$\frac{7}{a^{-3}}$	$= \frac{7 \cdot a^3}{a^{-3} \cdot a^3}$	$= \frac{7a^3}{a^0}$		
		$= \frac{7a^3}{1}$	$= 7a^3$		

7 Schrijf zonder negatieve exponent.

- a** $\frac{8}{a^{-9}}$
- b** $\frac{-12}{d^{-7}}$
- c** $\frac{4}{2x^{-3}}$
- d** $\frac{21}{7x^{-2}}$
- e** $\frac{-1}{2p^{-3}}$
- f** $\frac{2}{4a^{-4}}$

8 Vereenvoudig en schrijf het antwoord zonder negatieve exponent.

- a** $\frac{r^4 \cdot r^6}{r^3}$
- b** $\frac{(b^2)^4}{b^6}$
- c** $\frac{8p^3}{p^{-2}}$
- d** $\frac{d^7 \cdot d^{-1}}{d^8}$
- e** $\frac{(q^5)^{-2}}{q^4}$
- f** $\frac{5x^5 \cdot x^{-3}}{10x^{-7}}$

9 Vul in.

- a** $(2a)^3 = 2 \cdot a \cdot 2 \cdot a \cdot 2 \cdot a = 2^3 \cdot a^3 = \dots a^3$
- b** $(-3x)^5 = (-3)^5 \cdot x^5 = \dots x^5$
- c** $(-5p)^4 = (\dots)^4 \cdot p^4 = \dots p^4$

10 Herleid tot de vorm $a \cdot x^b$.

- H a** $(3x^2)^5$
- b** $x^2 \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)^4$
- c** $\left(\frac{5}{2^2 \cdot x^3}\right)^3$
- d** $(-4x)^6$
- e** $x^{-5} \cdot \left(-\frac{1}{3}x^2\right)^4$
- f** $\frac{6x^2 \cdot (-2x)^5}{4(x^2)^3}$

Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2

Ondersteunende opdrachten

- 03** Geef van elke uitdrukking uit het linker rijtje aan welke uitdrukking uit het rechter rijtje erbij hoort. Geef ook aan welke rekenregel(s) je daarbij gebruikt.

A a^{-4}	F $\frac{1}{a^4}$
B $a^3 \cdot a^2$	G a^4
C $(a^2)^3$	H 1
D a^0	I a^6
E $\frac{(a^4)^2}{a \cdot a^3}$	J a^5

$$g^a \cdot g^b = g^{a+b} \quad 1$$

$$\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b} \quad 2$$

$$(g^a)^b = g^{a \cdot b} \quad 3$$

$$g^{-n} = \frac{1}{g^n} \quad 4$$

$$g^0 = 1 \quad 5$$

- 05** Op het blaadje zie je hoe Ruby de breuk $\frac{16x^2 \cdot x^3}{8 \cdot (x^4)^2 \cdot x^0}$ herleidt tot de vorm $a \cdot x^b$.

- a** Leg uit welke rekenregels zij bij stap 1 gebruikt heeft.
b Welke rekenregel gebruikt zij bij stap 2?
c En welke bij stap 3?

Herleid tot de vorm $a \cdot x^b$. Gebruik de rekenregels.

d $\frac{24x \cdot x^2}{6x^9}$	g $\frac{32(x^4)^2}{8x^2 \cdot 2x^4}$
e $\frac{5x^6}{(x^3)^3}$	h $\frac{15x^5}{3x^2}$
f $\frac{x^3 \cdot x^0}{x^4}$	i $\frac{45(x^2)^3 \cdot (x^3)^4}{9x^2 \cdot x^0}$

		Ruby
$\frac{16x^2 \cdot x^3}{8 \cdot (x^4)^2 \cdot x^0} =$		
$\frac{16x^5}{8 \cdot (x^4)^2} =$		1
$\frac{2x^5}{x^8} =$		2
$2x^{-3}$		3

Uitdagende opdrachten

- U1** Gegeven is dat $x^a = p$ en $x^b = q$.
Druk uit in p en/of q .

a x^{a+b}	d x^{a-b}
b x^{3b}	e x^{2a+b}
c $(x^5)^a$	f $(x^3)^{-2a+5b}$

- U2** Je kunt de uitdrukking $\frac{(x^q)^2 \cdot px^{13} \cdot x^{-5}}{4 \cdot (x^{-3})^q \cdot x \cdot 3x^2}$ herleiden tot de vorm $a \cdot x^b$.
Bereken de waarde van p en van q in het geval de breuk na herleiding voor elke waarde van x gelijk is aan 1.

2.2 Gebroken exponenten

Je leert

- de betekenis van een macht met een gebroken exponent
- hoe je rekt met machten met een gebroken exponent

Leerroutes

- ondersteunend: 11–12–13–14–15–O16–17–18–19–O20–20
- doorlopend: 11–12–13–14–15–16–17–18–19–20–21
- uitdagend: 11–12–14–15–16–18–19–20–21–U3–U4

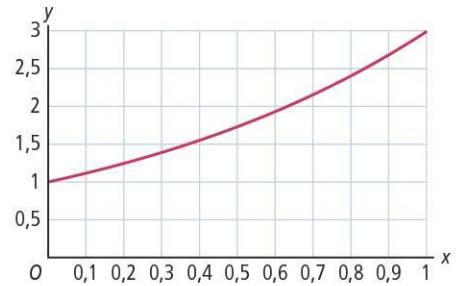
In een petrischaaltje wordt een schimmel onderzocht. De door de schimmel bedekte oppervlakte neemt in het begin exponentieel toe. Om 12.00 uur was die oppervlakte 100 mm^2 en een uur later 900 mm^2 . Om 12.30 uur is de oppervlakte ook gemeten.

- Kun je met behulp van de groeifactor van de oppervlakte per half uur een uitspraak doen over de waarde van $9^{\frac{1}{2}}$?



11 De grafiek hoort bij de formule $y = 3^x$.

- Lees uit de grafiek een benadering af van $3^{\frac{1}{2}}$.
- Leg met de rekenregel $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$ uit dat $(3^{\frac{1}{2}})^2 = 3$.
- Waarom volgt hieruit dat $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$?
- Leg op de manier van opdracht b en c uit dat $4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$.



Theorie

Er geldt $g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$ met n een positief geheel getal.

Bij het herleiden van $5\sqrt{5}$ en $p^2\sqrt[3]{p}$:

- schrijf je eerst de wortel als een macht,
- vervolgens pas je de regel voor het vermenigvuldigen van machten toe.

Omgekeerd kun je een uitdrukking als $x^{\frac{1}{4}}$ schrijven als $x^1 \cdot x^{\frac{1}{4}} = x\sqrt[4]{x}$.

Voorbeeld

$$11^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{11}$$

$$5\sqrt{5} = 5^1 \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{2}}$$

$$a^5 \sqrt[4]{a} = a^5 \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^{5\frac{1}{4}}$$

$$x^{2\frac{1}{3}} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^2 \sqrt[3]{x}$$

12 Schrijf als één macht.

- | | |
|-------------------|--------------------|
| a $\sqrt[5]{6}$ | d $\sqrt{k}$ |
| b $\sqrt[10]{11}$ | e $k\sqrt{k}$ |
| c $\sqrt[7]{a}$ | f $p^3\sqrt[4]{p}$ |

13 Herleid tot een vorm zonder gebroken exponent.

- | | |
|-----------------------|---|
| H a $4^{\frac{1}{6}}$ | d $(6^2)^{\frac{1}{8}}$ |
| b $7^{\frac{1}{5}}$ | e $3^{\frac{1}{8}} \cdot 3$ |
| c $a^{2\frac{1}{7}}$ | f $5 \cdot (5^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}$ |

14 a Er geldt $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$.

Vul in: $5^{\frac{2}{3}} = (5^2)^{\frac{1}{3}}$.

b Leg uit dat uit het voorgaande volgt $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$.

15 Als van een macht het grondtal negatief is en de exponent een breuk, kan er een tegenspraak optreden.

Op het blaadje staan twee berekeningen van de macht $(-8)^{\frac{1}{3}}$.

a Ga van beide berekeningen na dat ze kunnen kloppen.

b Leg uit dat je op basis van deze berekeningen geen waarde aan $(-8)^{\frac{1}{3}}$ kunt toekennen.

$$(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

$$(-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$$

Theorie

Machten waarvan de exponent geen geheel getal is, bestaan alleen als het grondtal niet negatief is.

Voor een **macht met een gebroken exponent** geldt:

$$g^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{g^m}, \text{ met } g \geq 0 \text{ en } n \text{ en } m \text{ positieve gehele getallen.}$$

Alle regels voor het rekenen met machten gelden ook voor machten waarvan de exponent geen geheel getal is.

Voorbeeld

$$3^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{3^4}$$

$$7^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = 7^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{7^7}$$

$$5^{3\frac{1}{6}} = 5^3 \cdot 5^{\frac{1}{6}} = 125\sqrt[6]{5}$$

$$a^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$$

$$p^{-1\frac{1}{2}} = \frac{1}{p^{1\frac{1}{2}}} = \frac{1}{p^1 \cdot p^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{p\sqrt{p}}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 016

16 Herleid tot een vorm zonder negatieve en gebroken exponent ($a > 0$).

a $7^{\frac{2}{5}}$

e $a^{1\frac{2}{3}}$

b $5^{\frac{5}{6}}$

f $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^2$

c $8^{2\frac{3}{7}}$

g $a^{-\frac{1}{3}}$

d $4^{-\frac{1}{2}}$

h $a^{-\frac{2}{7}}$

17 Schrijf als macht met negatieve en/of gebroken exponent ($a > 0$).

H a $\sqrt[5]{3}$

d $\sqrt[8]{a^3}$

b $\sqrt[4]{7^3}$

e $\sqrt[10]{a^6}$

c $\frac{1}{\sqrt[5]{6}}$

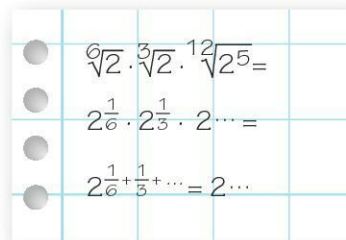
f $\frac{1}{\sqrt[5]{a^3}}$

- 18** Op het blaadje wordt de uitdrukking $\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[12]{2^5}$ tot één macht van 2 herleid.

a Maak de herleiding verder af.

b Herleid net zo $\sqrt[4]{5^2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5}$ tot een macht van 5.

c Herleid net zo $\frac{\sqrt[3]{7^2} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt[6]{7^5}}$ tot een macht van 7.



- 19** Schrijf de uitdrukkingen zonder wortels en als één macht ($p > 0$).

a $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{3}$

d $\sqrt[3]{7^2} \cdot \sqrt[9]{7}$

b $\frac{\sqrt[5]{6^3}}{6\sqrt{6}}$

e $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}}$

c $\frac{1}{p\sqrt[5]{p^3}}$

f $\frac{\sqrt{p}}{p\sqrt[4]{p}}$

Ondersteunende route → maak opdracht O20

- 20** Schrijf zo eenvoudig mogelijk, zonder negatieve of gebroken exponent ($a > 0$).

H

a $a^2 \cdot a^{-\frac{1}{2}}$

d $(a^{-3})^{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{a}$

b $(a^{-\frac{1}{3}})^5 \cdot a$

e $a^{-2} \cdot (\sqrt{a})^3 \cdot a^{\frac{1}{2}}$

c $\frac{(2a)^2}{3\sqrt{a}}$

f $a \cdot a^3 \cdot \frac{1}{a\sqrt{a}}$

- 21** Bij zoogdieren geldt voor het verband tussen de huidoppervlakte en hun gewicht bij benadering de formule van Meeh: $H = \sqrt[3]{c \cdot G^2}$. In deze formule is H de huidoppervlakte in dm^2 , G het gewicht in kg en is c een constante die afhangt van het soort dier. In de tabel zie je voor enkele zoogdieren de bijbehorende waarde van c .

a Bereken de huidoppervlakte van een muis van 40 gram. Rond je antwoord af op een geheel aantal cm^2 .

b De formule bij de mens is te herleiden tot de vorm $H = a \cdot G^b$.

Bereken de waarden van a en b . Rond de waarde van a af op één decimaal.

c Maak opdracht b ook voor de formule bij de egel.

dier	c
egel	421,9
muis	729,0
mens	1404,9
vleermuis	190 109,4

Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4

Ondersteunende opdrachten

- 016**
- a** Vul in: $5^{\frac{3}{8}}$ is gelijk aan $(5^3)^{\frac{1}{8}}$ en dus gelijk aan $\sqrt[8]{5^3}$.
 - b** Vul in: $7^{\frac{2}{3}}$ is gelijk aan $7^{\frac{2}{3}}$ en dus gelijk aan $\sqrt[3]{7^2}$.
 - c** Vul in: $a^{-\frac{1}{3}}$ is gelijk aan $\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}$ en dus gelijk aan $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$.

Herleid tot een vorm zonder negatieve en gebroken exponent ($a > 0$).

- d** $10^{\frac{3}{7}}$
- e** $8^{\frac{3}{4}}$
- f** $6^{2\frac{1}{5}}$
- g** $9^{-\frac{1}{2}}$
- h** $a^{2\frac{3}{4}}$
- i** $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^3$
- j** $a^{-\frac{1}{7}}$
- k** $a^{-\frac{5}{6}}$

- 020** Je gaat in deze opdracht de vorm $\frac{x^{-\frac{1}{3}} \cdot x}{x^2 \cdot \sqrt[4]{x}}$ vereenvoudigen.

- a** Schrijf de teller als $x^{-\frac{1}{3}} \cdot x^1$ en vervolgens als één macht van x door de rekenregel $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$ te gebruiken.
- b** Schrijf de noemer als $x^2 \cdot x^{\frac{1}{4}}$ en vervolgens als één macht van x door de rekenregel $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$ te gebruiken.
- c** De breuk heeft nu de vorm $\frac{x^{\dots}}{x^{\dots}}$
Laat zien dat de breuk te schrijven is als $x^{-1\frac{7}{12}}$ door de rekenregel $\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$ te gebruiken.
- d** Vul in: $x^{-1\frac{7}{12}} = \frac{1}{x^{1\frac{7}{12}}} = \frac{1}{x^1 \cdot x^{\frac{7}{12}}} = \frac{1}{x \cdot \sqrt[12]{x^7}}$

Uitdagende opdrachten

- U3** Gegeven is $x^a = p$ en $x^b = q$.
Druk uit in p en/of q .

- a** $x^{\frac{1}{2}a}$
- b** $x^{\frac{2}{3}b}$
- d** $x^{\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b}$
- c** $x^{2a - \frac{2}{5}b}$

- U4**
- a** Bereken p in het geval $\sqrt[10]{2^6} = \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt{2}$.
 - b** Geef een formule voor het verband tussen a en b in het geval $\sqrt[6]{2^a} = 2\sqrt{2}$.

2.3 Machtsformules

Je leert

- wat een machtsformule is en hoe de grafiek bij een machtsformule eruitziet

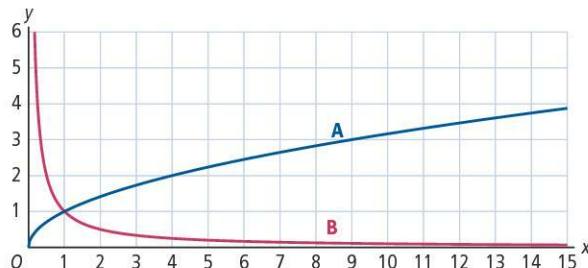
Leerroutes

- ondersteunend: 22—23—24—25—26—027—28—29
- doorlopend: 22—23—24—25—26—27—28—29
- uitdagend: 23—25—26—27—28—29—U5—U6

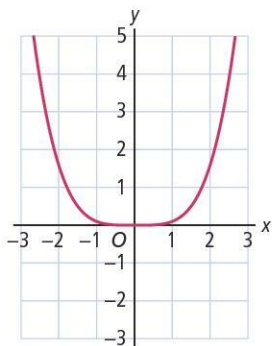
Gegeven zijn de grafieken bij de formules

$$y = x^{-1} \text{ en } y = x^{\frac{1}{2}}.$$

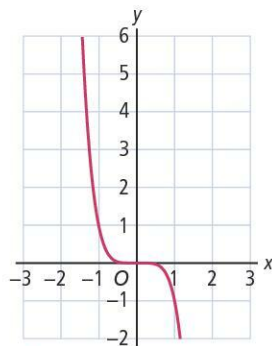
- Onderzoek welke grafiek bij welke formule hoort.



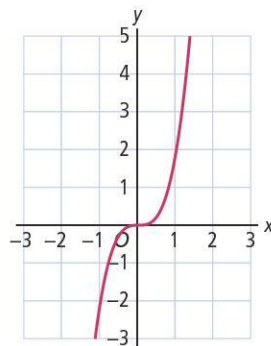
- 22** Gegeven zijn de grafieken bij de formules $y = 2x^3$, $y = 0,1x^4$, $y = -x^5$ en $y = x^6$.



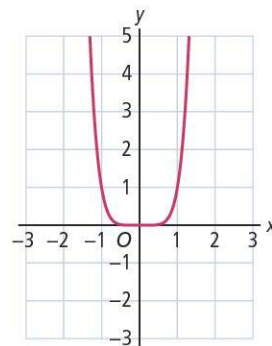
1



2



3

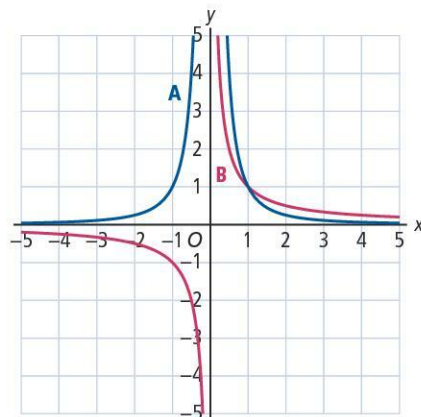


4

- Geef bij elke grafiek de juiste formule.
- Welke van de grafieken zijn lijnsymmetrisch?
- Welke van de grafieken zijn puntsymmetrisch?

- 23** Gegeven zijn de formules $y = x^{-1}$ en $y = x^{-2}$.

- Schrijf de formules zonder negatieve exponent.
- Welke grafiek hoort bij de formule $y = x^{-1}$? En welke bij de formule $y = x^{-2}$? Waarom?
- Beide grafieken hebben zowel een verticale als een horizontale asymptoot. Geef van beide asymptoten een vergelijking.
- Van welke formule is de grafiek lijnsymmetrisch?
- Van welke formule is de grafiek puntsymmetrisch?



Theorie

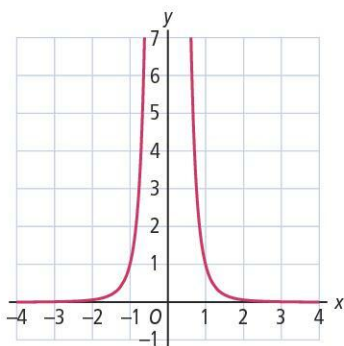
Formules van de vorm $y = x^n$ heten **machtsformules**.
Machtsformules van de vorm $y = x^{-n}$ met n een positief geheel getal kun je schrijven als $y = \frac{1}{x^n}$. Deze machtsformules zijn voorbeelden van **gebroken formules**.
De grafiek bij de formule $y = x^{-n}$ heeft de x -as als horizontale asymptoot en de y -as als verticale asymptoot.

Voorbeeld

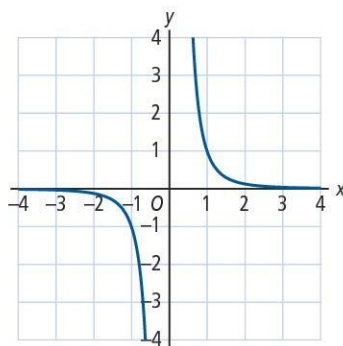
$y = x^{-3}$ kun je schrijven als $y = \frac{1}{x^3}$

$y = x^{-4}$ kun je schrijven als $y = \frac{1}{x^4}$

- 24** Gegeven zijn de grafieken bij de formules $y = x^{-3}$ en $y = x^{-4}$.



A

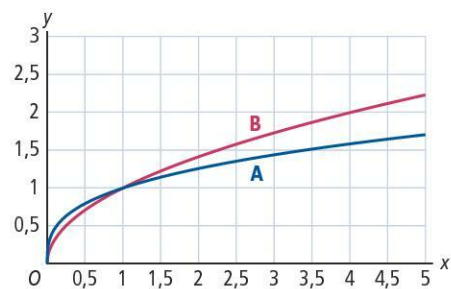


B

- a Onderzoek welke grafiek bij welke formule hoort.
- b Van welke formule is de grafiek lijnsymmetrisch?
- c Van welke formule is de grafiek puntsymmetrisch?
- d Gegeven is verder de formule $y = x^{-12}$.
Is de grafiek bij deze formule lijn- of puntsymmetrisch?
Verklaar je antwoord.

- 25** Gegeven zijn de formules $y = x^{\frac{1}{2}}$ en $y = x^{\frac{1}{3}}$.

- a Schrijf de formules zonder gebroken exponent.
- b Welke grafiek hoort bij de formule $y = x^{\frac{1}{2}}$? En welke bij de formule $y = x^{\frac{1}{3}}$? Verklaar je antwoord.



Theorie

Machtsformules van de vorm $y = x^{\frac{1}{n}}$ ($x \geq 0$) met n een positief geheel getal zijn te schrijven als $y = \sqrt[n]{x}$ en heten daarom ook wel **wortelformules**.

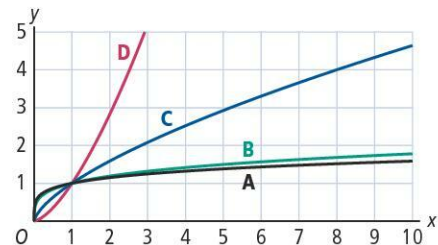
Voorbeeld

Voor $x \geq 0$ kun je

$y = x^{\frac{1}{4}}$ schrijven als $y = \sqrt[4]{x}$ en

$y = x^{\frac{2}{3}}$ schrijven als $y = \sqrt[3]{x^2}$.

- 26** Gegeven zijn de grafieken bij de formules $y = x^{\frac{3}{2}}$, $y = x^{\frac{2}{3}}$, $y = x^{\frac{1}{4}}$ en $y = x^{\frac{1}{5}}$.
- Bereken bij elke formule de waarde van y als $x = 4$.
 - Onderzoek welke grafiek bij welke formule hoort.
 - De vier grafieken hebben twee punten gemeenschappelijk. Welke twee punten zijn dat?
 - Gegeven is verder de formule $y = x^{\frac{3}{4}}$. Liggen de twee punten uit opdracht c ook op de grafiek bij deze formule?



Ondersteunende route → maak opdracht 027

- 27** De formule $y = x^{1\frac{1}{2}}$ kun je schrijven als $y = x\sqrt{x}$.

H

Schrijf voor $x \geq 0$ in de vorm $y = x^a \cdot \sqrt[n]{x^m}$.

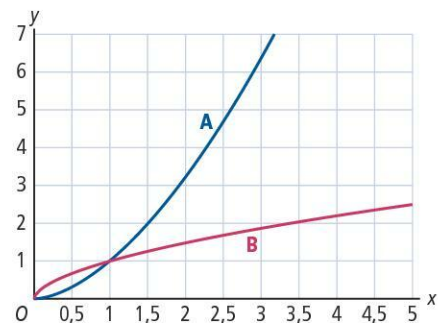
- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| a $y = x^{2\frac{1}{2}}$ | d $y = x^{3\frac{2}{5}}$ |
| b $y = x^{4\frac{1}{3}}$ | e $y = x^{1\frac{2}{3}}$ |
| c $y = x^{3\frac{1}{5}}$ | f $y = x^{2\frac{4}{7}}$ |

- 28** De exponent van een macht kan ook een decimaal getal zijn.

Zo is $3^{0,57} = 3^{\frac{57}{100}} = \sqrt[100]{3^{57}}$.

De grafieken horen bij de formules $y = x^{0,57}$ en $y = x^{1,68}$.

- Bereken bij beide formules de waarde van y als $x = 3$.
- Onderzoek welke grafiek bij welke formule hoort.
- Verder is gegeven de formule $y = x^{1,2}$.
Ga na dat de grafiek bij deze formule, net als de grafieken A en B, door de punten $(0, 0)$ en $(1, 1)$ gaat.
- Omschrijf de ligging van de grafiek bij de formule $y = x^{1,2}$ ten opzichte van de grafieken A en B.



- 29** Er bestaat een verband tussen de diameter d van de stam van een boom en zijn hoogte h , beide in meters. Bij benadering geldt de formule $h = c \cdot d^{0,65}$. De waarde van de constante c hangt af van de soort boom.

- Voor een grove den geldt $c = 44$.
Bereken de hoogte van een grove den in meters als de diameter 36 cm is. Rond af op één decimaal.
- Voor een boomsoort geldt dat bij een hoogte van 18 meter de diameter gelijk is aan 20 cm.
Bereken de waarde van c . Rond je antwoord af op een geheel getal.



Uitdagende route → maak opdracht U5 en U6

Ondersteunende opdrachten

027 Op het eerste blaadje zie je hoe je de formule $y = x^2 \cdot \sqrt[5]{x^3}$ als machtsformule kunt schrijven.

a Welke rekenregel voor machten is er bij de laatste stap gebruikt?

b Op het tweede blaadje is een begin gemaakt met het schrijven van de formule $y = x^{4\frac{2}{3}}$ in de vorm

$$y = x^a \cdot \sqrt[n]{x^m}.$$

Bij stap 2 gebruik je de rekenregel $g^{a+b} = g^a \cdot g^b$.

Welk getal komt daar op de puntjes te staan?

c Vul ook stap 3 in.

Schrijf voor $x \geq 0$ in de vorm $y = x^a \cdot \sqrt[n]{x^m}$.

d $y = x^{1\frac{1}{5}}$

g $y = x^{7\frac{3}{7}}$

e $y = x^{2\frac{1}{2}}$

h $y = x^{4\frac{4}{5}}$

f $y = x^{1\frac{1}{3}}$

i $y = x^{3\frac{5}{9}}$

☐	$y = x^2 \cdot \sqrt[5]{x^3}$	
☐	$y = x^2 \cdot x^{\frac{3}{5}}$	
☐	$y = x^{2\frac{3}{5}}$	

☐	$y = x^{4\frac{2}{3}}$	
☐	$y = x^{4+\frac{2}{3}}$	1
☐	$y = x^4 \cdot x^{\dots}$	2
☐	$y = x^{\dots} \cdot \sqrt[n]{x^{\dots}}$	3

Uitdagende opdrachten

U5 Gegeven is de formule $y = c \cdot x^a$. De grafiek bij de formule gaat door de punten (1, 6) en (4, 48).

Toon aan dat $c = 6$ en bereken a .

U6 Grafiek A hoort bij de formule $y = 0,5 \cdot x^a$ en grafiek B bij de formule $y = c \cdot x^b$.

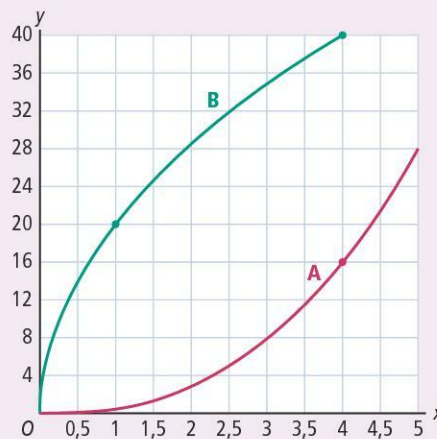
a Grafiek A gaat door het punt (4, 16).

Toon daarmee aan dat $a = 2\frac{1}{2}$.

b Grafiek B gaat door de punten (1, 20) en (4, 40).

Bereken hiermee b en c .

c De grafieken snijden elkaar rechts van de lijn $x = 5$. Onderzoek of het snijpunt links of rechts van de lijn $x = 8$ ligt.



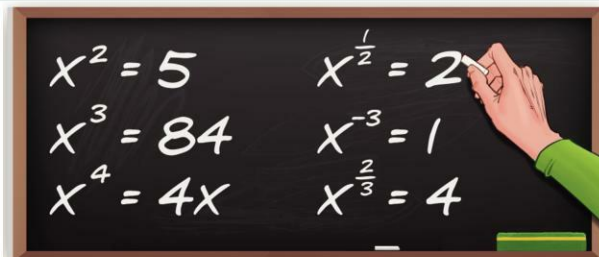
2.4 Vergelijkingen oplossen

Je leert • hoe je een vergelijking met machten oplost

Leerroutes • ondersteunend: 30—31—32—033—34—35—36—37—38—039—39
 • doorlopend: 30—31—32—33—34—35—36—37—38—39—40
 • uitdagend: 30—32—33—34—35—36—37—38—40—U7—U8

Een docent schrijft een aantal vergelijkingen met machtsformules op.

- Onderzoek of $x = 0$, $x = 4$, $x = 1$, $x = \sqrt{5}$, $x = \sqrt[3]{5}$, $x = -\sqrt{5}$ en $x = 8$ oplossingen zijn van een of meer vergelijkingen.



- 30**
- Schets de grafiek bij de formule $y = x^4$.
 - Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^4 = 16$?
 - Ga na dat $x = 2$ en $x = -2$ oplossingen zijn van $x^4 = 16$.
 - Ga na dat $x = -2$ de enige oplossing is van $x^5 = -32$.
 - De vergelijking $x^3 = -1000$ heeft als enige oplossing $x = \sqrt[3]{-1000}$.
 Ga na dat $\sqrt[3]{-1000} = -\sqrt[3]{1000}$.

Theorie

De oplossing van de vergelijking $x^n = c$ met n positief en geheel is:

- $x = \sqrt[n]{c}$ als n oneven is;
- $x = \sqrt[n]{c}$ of $x = -\sqrt[n]{c}$ als n even is en $c \geq 0$.
- geen oplossing als n even is en $c < 0$.

Voorbeeld

Los op $2x^3 = 54$.

Oplossing

$$2x^3 = 54$$

$$x^3 = 27$$

n is oneven, dus één oplossing.

$$x = \sqrt[3]{27} \text{ dus } x = 3$$

Los op $p^6 + 5 = 12$.

Oplossing

$$p^6 + 5 = 12$$

$$p^6 = 7$$

n is even, dus twee oplossingen ($7 > 0$).

$$p = \sqrt[6]{7} \text{ of } p = -\sqrt[6]{7}$$

- 31** Los op.

H

- $x^5 = 32$
- $p^4 = 20$
- $7 + 2k^8 = 4$
- $0,2x^3 = -12$

- 32** Op het blaadje is een begin gemaakt met het oplossen van de vergelijking $x^{-5} = 3$.

- Leg uit wat er bij de stappen 1 en 2 gebeurt.
- Los de vergelijking verder op.
- Laat zien dat je de vergelijking ook op kunt lossen door links en rechts te vermenigvuldigen met x^5 .

•	$x^{-5} = 3$ geeft	$\frac{1}{x^5} = 3$	1
•	dus	$3x^5 = 1$	2

Ondersteunende route → maak opdracht 033

33 Los op.

a $x^{-5} = 8$

c $6x^{-3} = 4$

b $x^{-4} = 3$

d $8x^{-1} + 9 = 10$

34 Op het blaadje is de vergelijking $x^{\frac{2}{3}} = 5$ opgelost.

- a In stap 1 is links en rechts tot de macht $\frac{3}{2}$ verheven.
Waarom is het handig om $x^{\frac{2}{3}}$ tot de macht $\frac{3}{2}$ te verheffen?
- b Uit welke rekenregel volgt dat $(x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ gelijk is aan x ?
- c De oplossing $\sqrt{125}$ kun je nog vereenvoudigen tot $p\sqrt{5}$.
Bereken p .

●	$x^{\frac{2}{3}} = 5$		
●	$(x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{3}{2}}$		1
●	$x^1 = 5^{\frac{3}{2}}$		2
●	$x = \sqrt{5^3} = \sqrt{125}$		3

35 Los op voor $x \geq 0$.

H

a $x^{\frac{3}{7}} = 8$

d $5x^{\frac{4}{5}} = 10$

b $x^{\frac{5}{9}} = 6$

e $4x^{-\frac{3}{4}} = 8$

c $x^{1\frac{1}{2}} = 4$

f $3x^{-2\frac{1}{2}} + 8 = 14$

36 Ook een machtsvergelijking met een decimaal getal als exponent kun je op de manier van opdracht 34 oplossen. Op het blaadje is een begin gemaakt met het oplossen van $x^{1,35} = 15$.

- a Waarom is het handig om links en rechts tot de macht $\frac{1}{1,35}$ te verheffen?
- b Geef de oplossing van $x^{1,35} = 15$ in twee decimalen.

●	$x^{1,35} = 15$		
●	$(x^{1,35})^{\frac{1}{1,35}} = 15^{\frac{1}{1,35}}$		
●	$x \approx \dots$		

Theorie

Vergelijkingen van de vorm $x^a = p$ waarin a een gebroken getal is, los je op met de regel:

Uit $x^a = c$ volgt $x = c^{\frac{1}{a}}$, met $c > 0$.

Voorbeeld

Lop op $x^{1,7} = 10$.
Rond af op twee decimalen.

Oplossing

Verhef links en rechts tot de macht $\frac{1}{1,7}$.
Dit geeft $x = 10^{\frac{1}{1,7}} \approx 3,87$.

37 Los op. Rond af op twee decimalen.

a $x^{3,26} = 42$

c $5x^{1,8} = 100$

b $x^{-0,35} = 0,975$

d $45 - 8x^{0,3498} = 0$

- 38** Nelleke gaat de vergelijking $8x^5 = x^7$ oplossen. Op het blaadje zie je hoe ze begint.
- Maak de berekening af.
 - Linda lost de vergelijking op $8x^5 = x^7$ door links en rechts door x^5 te delen. Welke vergelijking houdt ze dan over?
 - Linda doet het fout. Welke oplossing vindt zij namelijk niet?

	Nelleke
$8x^5 = x^7$	
$8x^5 - x^7 = 0$	
$x^5(8 - \dots) = 0$	

Theorie

Een vergelijking met twee machtsformules kun je oplossen door gebruik te maken van:

- Uit $A \cdot B = 0$ volgt $A = 0$ of $B = 0$. Daartoe herleid je de vergelijking eerst op nul en haal je een zo groot mogelijke macht van x buiten haakjes.
- Uit $A \cdot B = A \cdot C$ volgt $A = 0$ of $B = C$.

Voorbeeld 1

Los op $x^5 = -4x^2$.

Oplossing

$$\begin{aligned} x^5 + 4x^2 &= 0 \\ x^2(x^3 + 4) &= 0 \\ x^2 &= 0 \text{ of } x^3 + 4 = 0 \\ x &= 0 \text{ of } x^3 = -4 \\ x &= 0 \text{ of } x = \sqrt[3]{-4} (= -\sqrt[3]{4}) \end{aligned}$$

Voorbeeld 2

Los op $x^6 = 2x^2$.

Oplossing

$$\begin{aligned} x^4 \cdot x^2 &= 2 \cdot x^2 \\ x^2 &= 0 \text{ of } x^4 = 2 \\ x &= 0 \text{ of } x = \sqrt[4]{2} \text{ of } x = -\sqrt[4]{2} \end{aligned}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 039

- 39** Los op.

H

- | | |
|----------------------------|--------------------------------------|
| a $x^6 = 4x^4$ | d $\frac{1}{2}x^9 + 5x^5 = 0$ |
| b $-3x^{13} = 9x^8$ | e $12x^2 - 3x^5 = 0$ |
| c $5x^3 = 80x^7$ | f $x^2 = 2x^{1\frac{1}{2}}$ |

- 40** Los op.

- | | |
|--|-----------------------------------|
| a $5x^{-3} = 80x^7$ | c $4x^{\frac{3}{4}} = 48$ |
| b $2x^{\frac{3}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}} = 0$ | d $3x^{-\frac{1}{2}} = 15$ |

Uitdagende route → maak opdracht U7 en U8

Ondersteunende opdrachten

033 Je gaat in deze opdracht de vergelijking $2x^{-4} - 7 = 5$ oplossen.

a Laat zien dat de vergelijking te herleiden is tot $x^{-4} = 6$.

b Schrijf x^{-4} zonder negatieve exponent.

c Vul in: uit $x^{-4} = 6$ volgt $\frac{1}{x^4} = 6$ en dus $6x^4 = \dots$

d Schrijf de vergelijking in de vorm $x^4 = c$. Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking?

e Vul in: de oplossing is $x = \sqrt[4]{\dots}$ of $x = -\sqrt[4]{\dots}$.

Los op.

f $x^{-3} = 8$

h $8x^{-5} = 1$

g $x^{-2} = \frac{1}{4}$

i $79 - 4x^{-4} = 15$

039 Op het blaadje is een begin gemaakt met het oplossen van de vergelijking $12x^3 = 4x^7$. Bij stap 1 is de vergelijking op nul herleid, bij stap 2 is de tweeterm ontbonden in factoren.

a Omdat de vergelijking op nul herleid is en ontbonden in factoren, kun je de regel 'Uit $A \cdot B = 0$ volgt $A = 0$ of $B = 0$ ' toepassen. Vul in wat op de puntjes moet staan.

b De eerste vergelijking $4x^3 = 0$ heeft $x = 0$ als oplossing. De tweede vergelijking is te herleiden is tot $x^4 = 3$. Hoeveel oplossingen heeft deze tweede vergelijking?

c Vul in: de oplossing is $x = 0$ of $x = \sqrt[4]{\dots}$ of $x = -\sqrt[4]{\dots}$.

☐	$12x^3 = 4x^7$	
☐	$12x^3 - 4x^7 = 0$	1
☐	$4x^3(3 - x^4) = 0$	2
☐	$4x^3 = 0$ of $\dots$	3

Uitdagende opdrachten

U7 Gegeven zijn de formules $y = 5x^3$ en $y = x^5$.

Behalve in $(0, 0)$ snijden de grafieken bij de formules elkaar in de punten A en B .

Bereken AB .

U8 Los op. Geef indien mogelijk een exact antwoord.

a $2x^{3,67} - 5x^{2,44} = 0$

e $3x^2 = 12x\sqrt{x}$

b $x^3 + 2x^2 + x = 0$

f $x^2 = 2 \cdot \sqrt[3]{x}$

c $x^{3,45} + 2x^{2,45} + x^{1,45} = 0$

g $(x^{7,1} + 1)(x - 3) = (x^{4,7} + 1)(x - 3)$

d $x^{-3} - 32x^2 = 0$

h $3x^{2,45} = x$

2.5 Herleiden

Je leert

- hoe je een machtsformule vereenvoudigt
- hoe je een machtsformule herleidt waarbij je de ene variabele uitdrukt in de andere

Leerroutes

- ondersteunend: 41—042—42—43—44—045—47
- doorlopend: 41—42—43—44—45—46—47
- uitdagend: 41—43—44—45—47—U9—U10

De huidoppervlakte van een mens is onder andere afhankelijk van het gewicht en de lengte. Een formule voor het verband tussen de huidoppervlakte H in m^2 en de lengte L in cm voor een man van 80 kg is $H = 0,0463 \cdot L^{0,725}$. De formule wordt ook wel geschreven als $L = 69,3636 \cdot H^{1,379}$.

- Ga na of beide formules voor een man van 1.90 m dezelfde huidoppervlakte opleveren.



- 41**
- a** Gegeven is de formule $y = x \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}$.
Laat zien dat je de formule kunt herleiden tot $y = x^{1\frac{5}{6}}$.
- b** Gegeven is de formule $y = \frac{3}{\sqrt{x}} \cdot x^4 \cdot 5x^{-2}$.
Laat zien dat je de formule voor $x > 0$ kunt herleiden tot $y = 15x^{1\frac{1}{2}}$.
- c** Waarom geldt de herleiding van de formule bij opdracht b niet voor $x \leq 0$?

Theorie

Formules waarin machten van de variabele voorkomen, kun je met behulp van de rekenregels voor machten herleiden tot eenvoudigere vormen.

Voorbeeld

Herleid $y = \frac{(4x^2)^3}{8x^3 \cdot \sqrt[5]{x^2}}$ voor $x > 0$ tot de vorm $y = b \cdot x^a$.

Oplossing

$$y = \frac{(4x^2)^3}{8x^3 \cdot \sqrt[5]{x^2}} \text{ geeft } y = \frac{64x^6}{8x^3 \cdot x^{\frac{2}{5}}}$$

$$\text{en dus } y = \frac{64x^6}{8x^{3\frac{2}{5}}} \text{ ofwel } y = 8x^{2\frac{3}{5}}.$$

Ondersteunende route → maak opdracht 042

42 Herleid voor $x > 0$ de formules tot de vorm $y = b \cdot x^a$.

H

a $y = 2x^3 \cdot \sqrt{x}$	c $y = 7x^{-2} \cdot 3\sqrt{x}$
b $y = \frac{(2x)^3}{16x^{-\frac{1}{2}}}$	d $y = \frac{10x \cdot \sqrt[3]{x}}{2x^3}$

43 Herleid voor $x > 0$ de formules tot de vorm $y = b \cdot x^a$.

a $y = \frac{8x^2 \cdot \sqrt[3]{x^3}}{2x^3}$	c $y = \frac{6\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x^3}}{2x^2}$
b $y = \frac{(5x)^2}{x^3 \cdot \sqrt{x}}$	d $y = \frac{3\sqrt[4]{x}}{4x \cdot x^{-5}}$

44 In de formule $p = 10 \cdot q^{1,25}$ is de variabele p uitgedrukt in de variabele q . In deze opdracht ga je de formule herleiden tot een vorm waarin q is uitgedrukt in p .

a Je ziet op het blaadje dat in stap 1 de linkerkant en de rechterkant verwisseld zijn.

Leg uit wat er in stap 2 is gebeurd.

b In stap 3 is de regel toegepast:

Uit $x^a = c$ volgt $x = c^{\frac{1}{a}}$.

Welke rekenregel is in stap 4 toegepast?

c Maak de herleiding af. Rond zo nodig af op twee decimalen.

	$p = 10 \cdot q^{1,25}$	
	$10 \cdot q^{1,25} = p$	1
	$q^{1,25} = \frac{1}{10} p$	2
	$q = \left(\frac{1}{10} p\right)^{\frac{1}{1,25}}$	3
	$q = \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{1,25}} \cdot p^{\frac{1}{1,25}}$	4
	$q \approx \dots \cdot p^{\dots}$	5

Theorie

Bij het herleiden van machtsformules waarbij je de ene variabele uit wilt drukken in de andere, gebruik je dezelfde regel als bij het oplossen van vergelijkingen:

Uit $x^a = c$ volgt $x = c^{\frac{1}{a}}$.

Voorbeeld

Herleid $P = 0,7 \cdot Q^{2,5}$ tot de vorm $Q = a \cdot P^b$. Rond de waarden van a en b zo nodig af op twee decimalen.

Oplossing

$0,7Q^{2,5} = P$ geeft $Q^{2,5} = \frac{1}{0,7}P$ (ofwel $Q^{2,5} = 1,428\dots P$)

$Q = \left(\frac{1}{0,7}P\right)^{\frac{1}{2,5}}$ ofwel $Q = \left(\frac{1}{0,7}P\right)^{0,4}$

$Q = \left(\frac{1}{0,7}\right)^{0,4} \cdot P^{0,4}$ en dus $Q \approx 1,15 \cdot P^{0,4}$

Ondersteunende route → maak opdracht 045

- 45** Herleid de formules tot de vorm $Q = a \cdot P^b$.
 Rond de waarden van a en b zo nodig af op twee decimalen.

H

- a** $P = Q^{\frac{1}{4}}$ **d** $P = 0,01 \cdot Q^{0,375}$
b $P = \frac{1}{16} \cdot Q^4$ **e** $P = 1,46 \cdot Q^{-0,76}$
c $P = 25 \cdot Q^{3,5}$ **f** $P = 1000 \cdot Q^{-3}$

- 46** Herleid de formules tot de vorm $T = a \cdot N^b$.
 Geef exacte waarden van a en b .

- a** $N = 4 \cdot \sqrt[3]{T} \left(= 4 \cdot T^{\frac{1}{3}} \right)$ **c** $N = 243 \cdot \sqrt[3]{T^5}$
b $N = \frac{1}{8} T \sqrt{T}$ **d** $N = 0,001 \cdot \sqrt[4]{T^3}$

- 47** Bij volwassen zoogdieren blijkt een verband te bestaan tussen het gemiddelde lichaamsgewicht L van een zoogdiersoort en het gemiddelde hersengewicht H van die soort, beide in kg. Dit verband kan bij benadering worden weergegeven met de formule $H = 0,012 \cdot L^{0,67}$.

- a** Giraffes hebben een gemiddeld hersengewicht van 750 gram. Bereken het gemiddelde lichaamsgewicht van een giraffe.
b Beredeneer wat er gebeurt met H als het lichaamsgewicht verdubbelt.
c Herleid de gegeven formule tot de vorm $L = p \cdot H^q$. Rond de waarden van p en q af op twee decimalen.
d Een ree is gemiddeld 10 kg zwaarder dan een vos, een bruine beer is gemiddeld 10 kg zwaarder dan een leeuw. Beredeneer voor welk tweetal het verschil in hersengewicht het grootste is.



Uitdagende route → maak opdracht U9 en U10

Ondersteunende opdrachten

042 Je gaat in deze opdracht de formule $y = \frac{8x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}{(2x^3)^2}$ herleiden tot de vorm $y = b \cdot x^a$.

- Schrijf $\sqrt[3]{x}$ als macht van x .
- Neem in de teller de machten van x samen door de exponenten op te tellen.
- Vul in: de noemer $(2x^3)^2$ is gelijk aan $2^2 \cdot (x^3)^2$ en dus gelijk aan $\dots x \dots$
- Controleer dat je de formule nu geschreven hebt als

$y = \frac{8x^{2\frac{1}{3}}}{4x^6}$ en gebruik de rekenregel $\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$ om de formule te herleiden tot de vorm $y = b \cdot x^a$.

045 Op het blaadje is een begin gemaakt met de herleiding van de formule $P = 0,5 \cdot Q^{0,4}$ tot de vorm $Q = a \cdot P^b$.

- In stap 1 zijn de linkerkant en de rechterkant verwisseld. Leg uit wat er in stap 2 gebeurd is.
- Gebruik in stap 3 de regel: 'Uit $x^a = c$ volgt $x = c^{\frac{1}{a}}$ ' om het juiste getal op de puntjes in te vullen.
- In stap 4 wordt de rekenregel $(p \cdot q)^c = p^c \cdot q^c$ gebruikt. Maak de herleiding tot de vorm $Q = a \cdot P^b$ verder af. Geef a in twee decimalen.

Herleid de formules tot de vorm $Q = a \cdot P^b$.

Rond de waarden van a en b zo nodig af op twee decimalen.

- | | |
|--|-------------------------------------|
| d $P = Q^{\frac{1}{3}}$ | g $P = 0,25 \cdot Q^{0,125}$ |
| e $P = \frac{1}{64} \cdot Q^3$ | h $P = 0,72 \cdot Q^{-1,4}$ |
| f $P = 10 \cdot Q^{2\frac{1}{2}}$ | i $P = 100 \cdot Q^{-5}$ |

☐	$P = 0,5 \cdot Q^{0,4}$	
☐	$0,5 \cdot Q^{0,4} = P$	1
☐	$Q^{0,4} = 2 \cdot P$	2
☐	$Q = (2 \cdot P)^{\dots}$	3
☐	$Q = 2^{\dots} \cdot P^{\dots}$	4
☐	$Q \approx \dots \cdot P^{\dots}$	5

Uitdagende opdrachten

U9 **a** Gegeven zijn de formules $y = \frac{1}{8}p^2$ en $x = \frac{1}{4}\sqrt[3]{p^2}$.

Toon aan dat $y = 8x^3$.

b Gegeven zijn de formules $y = p\sqrt{p}$ en $t = \frac{1}{64} \cdot \sqrt[4]{p^3}$.

Druk y uit in t en schrijf het verband in de vorm $y = a \cdot t^b$.

U10 De formule $P = m \cdot Q^{1\frac{1}{3}}$ is te herleiden tot de vorm $Q = \frac{1}{8} \cdot P^b$.

Bereken de waarde van m en van b .

2.6 Gemengde opdrachten

- 48** Schrijf zo eenvoudig mogelijk, zonder negatieve en gebroken exponent, met $p > 0$.

a $\frac{(2p)^5}{3p^3 \cdot p^4}$

c $\frac{p^{-5} \cdot p^0}{p^{0,25}}$

b $\frac{8p^{-4}}{(4p)^2}$

d $\frac{p^{\frac{4}{5}}}{p^{1\frac{1}{6}}}$

- 49** Schrijf zonder wortel en als één macht.

a $3\sqrt[3]{3}$

c $\sqrt[5]{a^2} \cdot a^3\sqrt[3]{a^7}$

b $\frac{7}{\sqrt[9]{7^5}}$

d $\frac{p\sqrt{p}}{\sqrt[6]{p^5}}$

- 50** Los op. Geef exacte antwoorden.

a $2x^{13} = 5$

d $100 - 5k^4 = 60$

b $4p^{\frac{2}{7}} = 5$

e $y^3\sqrt[3]{y} = 12$

c $x^6 - 5x^4 = 0$

f $3x^5 = -12x^2$

- 51** Conservenblikken hebben meestal de vorm van een cilinder. Voor de inhoud van een cilinder met straal r en hoogte h geldt $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ met r en h in cm en V in cm^3 .

- a Een blik heeft een straal van 8 cm en een hoogte van 10 cm. Bereken de inhoud van het blik.
- b Bereken de hoogte van een 1-literblik met een straal van 9 cm.
- c Voor een 1-literblik geldt voor het verband tussen de straal r en de hoogte h de formule $h = 318,3 \cdot r^{-2}$. Toon aan dat deze formule af te leiden is uit $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$.
- d Wat weet je van een 1-literblik met een heel kleine straal?
- e Geef voor een halfliterblik de formule van h uitgedrukt in r .



- 52** Het energieverbruik E in joules van een vis die in stilstaand water zwemt, is afhankelijk van de snelheid v van de vis in km per uur en de tijd t in uren. De formule $E = 0,15 \cdot v^3 \cdot t$ geeft het verband weer tussen v en t .
- a Bereken het energieverbruik van een vis die in stilstaand water een afstand van 5 kilometer aflegt met een snelheid van 2 km per uur.
- b Een vis zwemt 30 minuten en verbruikt daarbij 2 joule energie. Bereken de snelheid van de vis in km per uur.
- c Als een vis gedurende 1 uur met een constante snelheid van v km per uur in stilstaand water zwemt, dan geldt $v = 1,88 \cdot \sqrt[3]{E}$. Toon dit aan.

- 53** Mosselen bestaan voor een deel uit schelp en voor een deel uit vlees. Elk jaar wordt onderzoek gedaan naar het verband tussen de schelpenlengte L in mm en het gewicht van het vlees W in grammen. In de tabel zie je de resultaten voor het jaar 2006.

L in mm	30	40	50	60	70
W in grammen	0,12	0,28	0,55	0,95	1,51

Voor het verband tussen L en W geldt een formule van de vorm $W = a \cdot L^b$.

Door $L = 30$ en $L = 60$ en de bijbehorende waarden van W in de formule in te vullen, krijg je twee vergelijkingen waaruit de vergelijking $2^b = \frac{0,95}{0,12}$ is af te leiden.

a Laat die afleiding zien.

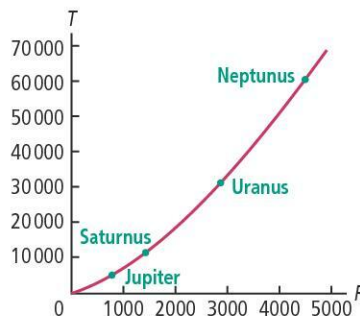
b Zoek uit hoe groot de waarden van a en b zijn.

(Ontleend aan het pilotexamen havo wiskunde B 2011 2e tijdvak)



- 54** In de tabel staat voor een aantal planeten in ons zonnestelsel de gemiddelde afstand R tot de zon in miljoenen kilometers en de omlooptijd T in dagen. Naast de tabel zijn de gegevens verwerkt in een grafiek.

planeet	R	T
Jupiter	778	4329
Saturnus	1427	10753
Uranus	2870	30660
Neptunus	4497	60150



Op basis van de vorm van de grafiek ontstaat het vermoeden dat het verband tussen R en T van de vorm $T = c \cdot R^a$ is waarbij de waarde van a ligt tussen 1,4 en 1,7.

- a** Onderzoek welke waarde van a en van c het beste passen bij de gegevens.
- b** Bereken op basis van je antwoord bij opdracht a de gemiddelde afstand van de aarde tot de zon.

Theorie

Machten met een negatieve of gebroken exponent

Voor machten met een negatieve of gebroken exponent geldt:

$$g^{-n} = \frac{1}{g^n}$$

$$g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}, \text{ met } g \geq 0 \text{ en } n \text{ een positief geheel getal}$$

$$g^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{g^m}, \text{ met } g \geq 0 \text{ en } m \text{ en } n \text{ positieve gehele getallen}$$

Voorbeeld

$$7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$$

$$32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2$$

$$3^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{3^5} = \sqrt[6]{243}$$

S1 Schrijf zonder negatieve en gebroken exponent en zonder exponent nul.

a $p^{-2} \cdot p^5 \cdot p^{-8}$

c $4x^{\frac{4}{5}}$

b $7x^{-3}$

d $4a^{-\frac{2}{3}}$

Theorie

Machtsformules, gebroken formules en wortelformules

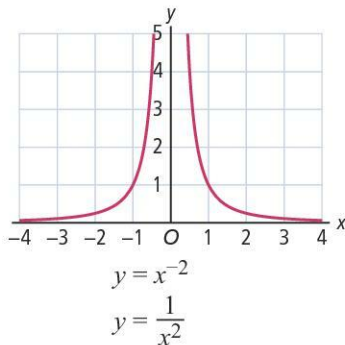
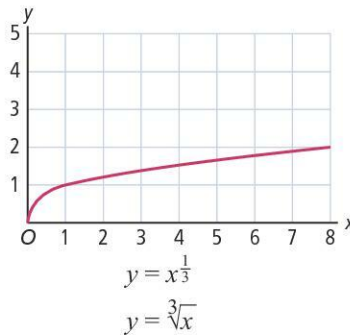
Formules van de vorm $y = x^a$ heten machtsformules.

Machtsformules van de vorm $y = x^{-n}$ met n een positief geheel getal kun je schrijven als $y = \frac{1}{x^n}$

Deze machtsformules zijn voorbeelden van gebroken formules.

Machtsformules van de vorm $y = x^{\frac{1}{n}}$ ($x \geq 0$) met n een positief geheel getal zijn te schrijven als $y = \sqrt[n]{x}$ en heten daarom ook wel wortelformules.

Voorbeeld



- S2** Gegeven zijn de formules $y = 2x^3$, $y = 4x^{\frac{1}{3}}$ en $y = 5x^{-2}$.
- Welke van de drie formules geeft alleen uitkomsten voor $x \geq 0$?
 - Schrijf de formules $y = 4x^{\frac{1}{3}}$ en $y = 5x^{-2}$ zonder negatieve en gebroken exponent.
 - De grafiek bij de formule $y = 5x^{-2}$ heeft twee asymptoten. Geef van elke asymptoot een vergelijking.

Vaardigheid

Je kunt rekenen met machten met een negatieve exponent.

Bij het rekenen met machten met een negatieve exponent kun je gebruik maken van de regel $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$

Voorbeeld

Herleid $\frac{12x^5 \cdot 8x^4}{(2x^3)^4}$ tot de vorm $a \cdot x^b$.

Oplossing

$$\frac{12x^5 \cdot 8x^4}{(2x^3)^4} = \frac{96x^9}{16x^{12}} = 6x^{-3}$$

- S3** Herleid tot de vorm $a \cdot x^b$.

a $\frac{18}{9x^5}$

c $\frac{24x^3}{9x \cdot 4x^6}$

b $\frac{6}{(x^4)^2}$

d $\frac{13}{x^{-9}}$

Vaardigheid

Je kunt rekenen met machten met een gebroken exponent.

Bij het rekenen met machten met een gebroken exponent kun je gebruik maken van de regel $g^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{g^m}$, met $g \geq 0$ en m en n positieve gehele getallen

Voorbeeld

Herleid $a^{\frac{3}{4}} \cdot 4a^{\frac{1}{6}}$ tot een vorm zonder gebroken exponenten ($a > 0$).

Oplossing

$$a^{\frac{3}{4}} \cdot 4a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{9}{12}} \cdot 4 \cdot a^{\frac{2}{12}} = 4 \cdot a^{\frac{9}{12} + \frac{2}{12}} = 4 \cdot a^{\frac{11}{12}} = 4 \cdot \sqrt[12]{a^{11}}$$

- S4** Herleid tot een vorm zonder gebroken exponent ($a > 0$).

a $3^{\frac{4}{7}}$

c $5^{1\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{2}{3}}$

b $a^{\frac{3}{4}}$

d $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{2\frac{2}{5}}$

Vaardigheid

Je kunt een vergelijking met machten oplossen.

De oplossing van de vergelijking $x^n = c$ met n positief en geheel is:

- $x = \sqrt[n]{c}$ als n oneven is;
- $x = \sqrt[n]{c}$ of $x = -\sqrt[n]{c}$ als n even is en $c \geq 0$,
- geen oplossing als n even is en $c < 0$.

Vergelijkingen van de vorm $x^a = c$ waarin a een gebroken getal is, los je op met de regel:

Uit $x^a = c$ volgt $x = c^{\frac{1}{a}}$, met $c > 0$.

Een vergelijking met twee machtsformules kun je oplossen door gebruik te maken van:

- Uit $A \cdot B = 0$ volgt $A = 0$ of $B = 0$. Daartoe herleid je de vergelijking eerst op nul en haal je een zo groot mogelijke macht van x buiten haakjes.
- Uit $A \cdot B = A \cdot C$ volgt $A = 0$ of $B = C$.

Voorbeeld 1

Los op $5x^{-4} = 30$.

Oplossing

$$x^{-4} = 6$$

$$\frac{1}{x^4} = 6$$

$$x^4 = \frac{1}{6}$$

$$x = -\sqrt[4]{\frac{1}{6}} \text{ of } x = \sqrt[4]{\frac{1}{6}}$$

Voorbeeld 2

Los op $x^{\frac{5}{7}} + 1 = 3$ (met $x \geq 0$).

Oplossing

$$x^{\frac{5}{7}} = 2$$

$$\left(x^{\frac{5}{7}}\right)^{\frac{7}{5}} = 2^{\frac{7}{5}}$$

$$x = 2^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{2^7}$$

$$x = \sqrt[5]{128}$$

Voorbeeld 3

Los op $4x^5 - x^2 = 0$.

Oplossing

$$x^2(4x^3 - 1) = 0$$

$$x^2 = 0 \text{ of } 4x^3 - 1 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } 4x^3 = 1$$

$$x = 0 \text{ of } x^3 = \frac{1}{4}$$

$$x = 0 \text{ of } x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

S5 Los op. Geef indien mogelijk een exact antwoord.

a $3x^4 + 1 = 19$

d $18 + 5x^{1,37} = 63$

b $2x^{-3} = \frac{1}{32}$

e $8x^2 - x^4 = 0$

c $x^{\frac{2}{3}} = 3$

f $9x^5 = 18x^2$

Vaardigheid

Je kunt een machtsformule vereenvoudigen.

Gebruik de rekenregels om de formule te vereenvoudigen.

Voorbeeld

Herleid $y = \frac{(2x^3)^4 \cdot \sqrt{x}}{32 \cdot \sqrt[4]{x}}$ voor $x > 0$ tot de vorm $y = b \cdot x^a$.

Oplossing

$$y = \frac{(2x^3)^4 \cdot \sqrt{x}}{32 \cdot \sqrt[4]{x}} \text{ geeft } y = \frac{16x^{12} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{32x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{en dus } y = \frac{16x^{12\frac{1}{2}}}{32x^{\frac{1}{4}}} \text{ ofwel } y = \frac{1}{2}x^{12\frac{1}{4}}.$$

S6 Herleid voor $x > 0$ tot de vorm $y = b \cdot x^a$.

a $y = 10x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[5]{x^2}$

b $y = 4x^{-3} \cdot 3\sqrt{x}$

Vaardigheid

Je kunt een machtsformule herleiden waarbij je de ene variabele uitdrukt in de andere.

Gebruik de regel:

$$\text{Uit } x^a = c \text{ volgt } x = c^{\frac{1}{a}}.$$

Voorbeeld

Herleid $s = 1,25 \cdot r^{0,25}$ tot de vorm $r = a \cdot s^b$. Rond de waarden van a en b zo nodig af op twee decimalen.

Oplossing

$$1,25 \cdot r^{0,25} = s \text{ geeft } r^{0,25} = \frac{1}{1,25} s$$

$$r = \left(\frac{1}{1,25} s\right)^{\frac{1}{0,25}} \text{ ofwel } r = \left(\frac{1}{1,25} s\right)^4$$

$$r = \left(\frac{1}{1,25}\right)^4 \cdot s^4 \text{ en dus } r \approx 0,41 \cdot s^4.$$

S7 Herleid tot de vorm $r = a \cdot s^b$. Rond de waarden van a en b zo nodig af op twee decimalen.

a $s = 0,1 \cdot r^{0,125}$

b $s = 400 \cdot r^{-1\frac{1}{2}}$

T1 Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk.

a $\frac{(2x)^3}{4x}$

c $\frac{6x^7}{3x^2}$

b $\left(\frac{4x^3}{x^2}\right)^2$

d $\frac{18x^2 \cdot x^6}{(3x^2)^3}$

T2 Herleid tot de vorm $B = p \cdot A^q$.

a $A = B^6$

d $A = 5 \cdot B^{0,81}$

b $A = 4 \cdot B^{-3}$

e $A = \sqrt[3]{B^2}$

c $A = \frac{1}{2} \cdot B^{\frac{3}{5}}$

f $A = 4\sqrt[4]{B}$

T3 Los op.

a $x^5 = -8$

e $3z^{\frac{2}{3}} = 12$

b $y^6 = 20$

f $x^3 = 2x^4$

c $p^{\frac{1}{4}} = 10$

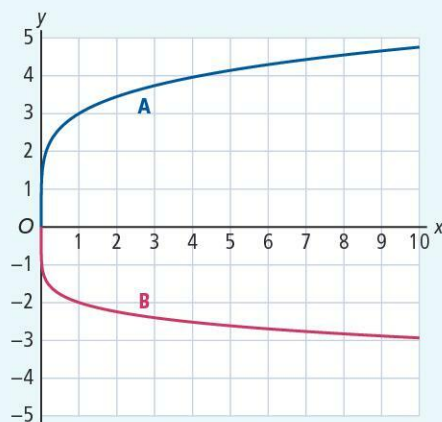
g $13 - 6 \cdot p^{1,25} = 1$

d $x^{-4} = -3$

h $3x^2 + 2x^5 = 0$

T4 Gegeven zijn de grafieken bij de formules $y = 3 \cdot x^{\frac{1}{5}}$ en $y = -2 \cdot \sqrt[6]{x}$.

- a** Zoek uit welke grafiek bij welke formule hoort.
- b** Bereken de coördinaten van het snijpunt van grafiek A met de lijn $y = 15$.
- c** Bereken de coördinaten van het snijpunt van grafiek B met de lijn $y = -4$.
- d** Hoeveel snijpunten heeft grafiek A met de lijn $y = x$? En hoeveel grafiek B?
- e** Bereken de coördinaten van de snijpunten van grafiek A met de lijn $y = x$.



T5 Vereenvoudig tot één macht.

a $\frac{c^5 \cdot c^2}{c^4}$

c $\frac{4w^5}{2w^3}$

b $\frac{(d^2)^6}{d^7}$

d $\frac{2k \cdot k^{11}}{3k^7}$

T6 Vereenvoudig de uitdrukkingen (met $x > 0$) en schrijf ze zonder negatieve en gebroken exponent.

a $2x^{\frac{2}{3}} \cdot 7x^{-4}$

e $x^{-1\frac{1}{3}}$

b $x^{\frac{1}{5}}$

f $2x^{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{x}$

c $3x^{\frac{3}{4}}$

g $(3x^{\frac{1}{3}})^2$

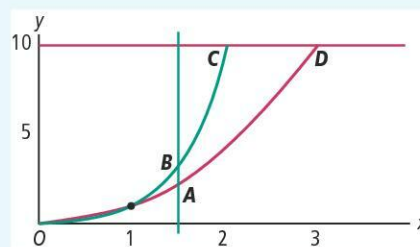
d $\frac{3x^{-1} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^2}$

h $\frac{6x^3}{2\sqrt{x}}$

T7 Gegeven zijn de grafieken bij de formules $y = x^2$ en $y = x^3$. Bekijk deze formules voor $x \geq 0$.

a De lijn $x = 1\frac{1}{2}$ snijdt de grafiek van $y = x^2$ in punt A en de grafiek van $y = x^3$ in punt B . Bereken AB .

b De lijn $y = 10$ snijdt de grafiek van $y = x^2$ in punt D en de grafiek van $y = x^3$ in punt C . Bereken CD . Geef je antwoord in twee decimalen.



T8 Het draagvermogen van een vliegtuig is het maximale gewicht van het vliegtuig, inclusief personen en vracht, waarmee gevlogen mag worden. Dit draagvermogen hangt onder meer af van de oppervlakte van de vleugels. Er geldt $Q = 0,1 \cdot G^{0,67}$, waarbij Q de oppervlakte van de vleugels in m^2 is en G het draagvermogen in kg.

- Bereken het vleugeloppervlak van een Boeing 747, waarvan het draagvermogen 360 000 kg bedraagt.
- De formule $Q = 0,1 \cdot G^{0,67}$ is ook te schrijven als $G = a \cdot Q^b$. Bereken de waarden van a en b in twee decimalen.
- Een vliegtuig weegt 150 000 kg en heeft een vleugeloppervlak van $350 m^2$. Bereken hoeveel kg personen en vracht dit vliegtuig maximaal mag meenemen.



T9 De hoeveelheid vloeistof die per seconde door een buis stroomt, hangt af van de straal van de buis. Maar ook het drukverschil en de vloeistofdikte hebben invloed. Bij een vast drukverschil geldt de formule $V = p \cdot R^4$. In deze formule is V de hoeveelheid vloeistof in liters per seconde die door de buis stroomt en is R de straal van de buis in cm. In de formule is p een constante die afhangt van het drukverschil en de vloeistofdikte. Bereken met welk percentage de hoeveelheid vloeistof toeneemt als de straal van de buis 20% groter wordt genomen.

Je kunt rekenen met machten met een negatieve exponent.

- E1** Vereenvoudig en schrijf het antwoord zonder negatieve exponent.

a a^{-4}

d $\frac{d^4 \cdot d^{-10}}{d^{-3}}$

b $\frac{1}{b^3} \cdot b^{-4}$

e $\frac{4e^2 \cdot 2e^{-1}}{16e^0}$

c $\frac{12c^2}{18c^5}$

f $\frac{3x^4 \cdot 2x^{-4}}{10x^{-5}}$

Je kunt rekenen met machten met een gebroken exponent.

- E2** Vereenvoudig en schrijf het antwoord zonder negatieve en gebroken exponent.

a $p^{\frac{4}{11}}$

c $m^{-6\frac{1}{2}}$

b $\frac{4x^{-3} \cdot x}{8x^2}$

d $\frac{(4a^{-2})^3}{16a\sqrt{a}}$

Je kunt een vergelijking met machten oplossen.

- E3** Los op. Geef indien mogelijk een exact antwoord.

a $2p^4 = 11$

e $7q^{0,4} = 4$

b $3t^{-2} + 4 = 9$

f $x^{-0,2} = \frac{1}{5}$

c $25r^3 = 50r^2$

g $18x^5 = 6x^3$

d $x^{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$

h $3x^{2\frac{1}{2}} - 4\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = 0$

Je kunt een machtsformule vereenvoudigen.

- E4** Herleid voor $x > 0$ de formule tot de vorm $y = x^b$.

a $y = \frac{x^8 \cdot \sqrt[4]{x}}{x^2}$

c $y = \frac{\sqrt{x} \cdot x^{-2}}{x^{-\frac{2}{3}}}$

b $y = x^{-3} \cdot (x^5)^2$

d $y = x^4 \cdot x \cdot \sqrt[3]{x^2}$

Je kunt een machtsformule herleiden waarbij je de ene variabele uitdrukt in de andere.

- E5** Herleid tot de vorm $K = a \cdot N^b$. Geef de waarden van a en b zo nodig in twee decimalen.

a $N = 0,25 \cdot K^5$

d $N = 1,2 \cdot K^{-0,3}$

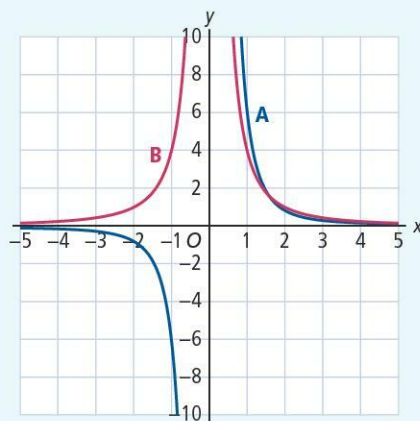
b $N = \frac{1}{2} \cdot K^{\frac{1}{3}}$

e $N = 2,8 \cdot K^{1,67}$

c $N = 8 \cdot K^{2,5}$

f $N = 0,01 \cdot K^{-1\frac{1}{2}}$

- E6** Grafiek A hoort bij de formule $y = 6x^{-3}$ en grafiek B bij de formule $y = 4x^{-2}$.
- Welke lijnen zijn asymptoten van grafiek A?
 - Is de grafiek A lijnsymmetrisch of puntsymmetrisch?
 - Is de grafiek B lijnsymmetrisch of puntsymmetrisch?
 - Bereken de coördinaten van het snijpunt van grafiek A met de lijn $y = -18$.
 - Bereken de coördinaten van de snijpunten van grafiek B met de lijn $y = \frac{1}{9}$.
 - Bereken de coördinaten van het snijpunt van grafiek A met grafiek B.

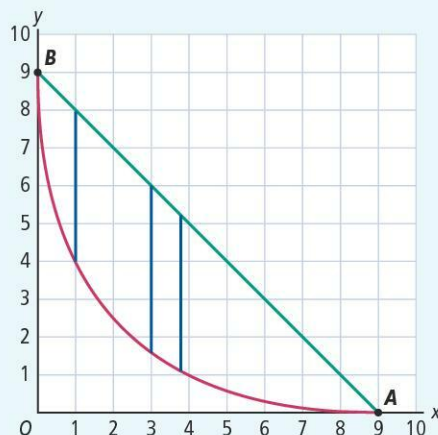


- E7** Het materiaal waar zwempakleding van is gemaakt heeft invloed op de weerstand ten opzichte van het water. Voor de zwempakken A en B gelden de formules $I_A = 23,47 \cdot v^{2,28}$ en $I_B = 21,83 \cdot v^{2,21}$. Hierin is I de inspanning in Newton en v de snelheid in meters per seconde.
- Femke zwemt in zwempak A met een snelheid van 1,5 m/s. Inge zwemt met dezelfde snelheid in zwempak B. Hoeveel Newton is het verschil in hun inspanningen?
 - Pieter haalt met zwempak A een snelheid van 1,65 m/s. Bereken welke snelheid hij met dezelfde inspanning kan halen als hij zwempak B draagt.
 - De verhouding $K = \frac{I_B}{I_A}$ geeft aan hoeveel keer zo groot de vereiste inspanning is wanneer je in zwempak B zwemt ten opzichte van zwempak A. Deze formule is te herleiden tot de vorm $K = p \cdot v^q$. Geef deze herleiding en bereken p en q in twee decimalen.



- E8** Gegeven is voor $0 \leq x \leq 9$ de grafiek bij de formule $y = (3 - \sqrt{x})^2$.

Tevens is het lijnstuk AB getekend met $A(9, 0)$ en $B(0, 9)$. Tussen de gegeven grafiek en het lijnstuk AB worden verticale verbindingslijnstukken getekend. In de figuur zijn enkele van deze lijnstukken getekend. Toon aan dat de lengte van een verticaal verbindingslijnstuk te berekenen is met de formule $L = 6\sqrt{x} - 2x$.



Rekenen met Diophantus

Voor de Griekse wiskundigen zoals Euclides (ca 400 v. Chr.) was de wiskunde voornamelijk meetkundig georiënteerd: getallen waren lengten van lijnstukken, tweede machten oppervlakten van vierkanten – vandaar de naam kwadraat (= vierkant) en derde machten inhouden van kubussen. Negatieve getallen waren onbekend en de ons vertrouwde symbolen zoals +, – en = werden pas in de 16e eeuw algemeen gebruikt. Voor die tijd werden er gewoon (Latijnse) woorden gebruikt, zoals *plus* en *minus* en *est*.

Diophantus van Alexandrië (ca 250 na Chr.) is de eerste Griekse wiskundige die zich bezig hield met vergelijkingen zonder daarbij aan meetkunde te denken. In zijn werk *Arithmetica* voert hij als eerste symbolen in voor een variabele en de machten van een variabele.

Hoe loste Diophantus een vergelijking op?

Diophantus geeft geen algemene bewijzen. Hij formuleert een vraagstuk en geeft dan een voorbeeld van een aanpak. Eén van de beroemdste vraagstukken uit de *Arithmetica* luidt:

Verdeel een kwadraat in twee kwadraten.

(Wij zouden zeggen: Vind voor gegeven z de oplossing van $x^2 + y^2 = z^2$.)

Diophantus lost het vraagstuk alleen op voor $z = 4$:

Op onze manier geschreven gaat dat zo:

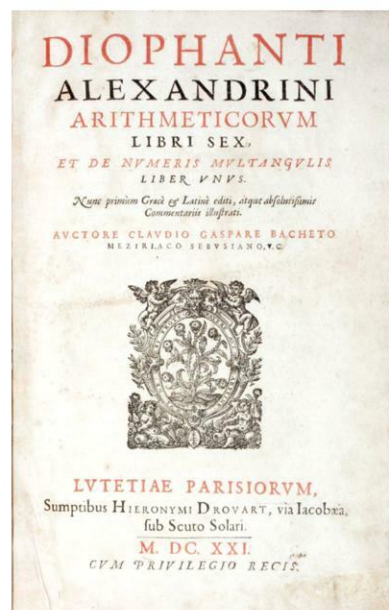
$$x^2 + y^2 = 16$$

- Eén van de gezochte kwadraten is: x^2 .
- $y^2 = 16 - x^2$ is ook een kwadraat.
- Neem een kwadraat van de vorm $(mx - 4)^2$, bijvoorbeeld $y^2 = (2x - 4)^2$.
- $(2x - 4)^2 = 16 - x^2$ geeft $4x^2 - 16x = -x^2$ ofwel $x(5x - 16) = 0$.
- $x = \frac{16}{5}$ en $y = 2x - 4 = \frac{12}{5}$

Over Diophantus zelf is weinig bekend. In een puzzelboek uit de 5e eeuw staat dit raadsel, waaruit je kunt opmaken hoe oud hij werd.

Opdracht

Hoe oud werd Diophantus?



Een zesde deel van zijn leven was hij een jongen. Na nog een twaalfde deel kreeg hij een baard. Na weer een zevende deel trouwde hij en in het vijfde jaar kreeg hij een zoon. Helaas stierf het kind toen hij half zo oud was als zijn vader werd. Na vier jaar van verdriet bereikte hij zelf het eind van zijn leven.

SE

CE

K

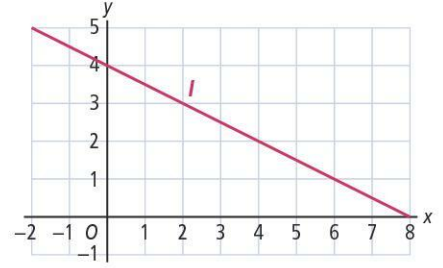
In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Lineaire vergelijkingen opstellen
- Rekenen met wortels
- Rekenen met breuken



Lineaire vergelijkingen opstellen

- 1 Lijn l is de grafiek bij een lineaire formule.
 - a Lees het startgetal en de richtingscoëfficiënt van l af.
 - b Stel de lineaire formule op die bij l past.
 - c Lijn k loopt evenwijdig aan l en snijdt de y -as in $(0, 7)$.
Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van k ?
 - d Stel een lineaire formule op die bij k uit opdracht c past.
 - e Lijn m gaat door de punten $(0, 4)$ en $(2, 7)$.
Bereken de richtingscoëfficiënt van m en stel een formule op van deze lijn.
 - f Stel een formule op van de verticale lijn n door $(2, 8)$.



Theorie

Bij de lineaire formule $y = ax + b$ is de bijbehorende grafiek een rechte lijn. Een formule noem je ook wel een vergelijking. Bij een horizontale lijn is $a = 0$ en is de vergelijking $y = b$. Bij een verticale lijn is de vergelijking $x = c$.

- 2 Stel een vergelijking op van de lijn in de volgende gevallen.
 - a Lijn l gaat door $(0, 8)$ en heeft richtingscoëfficiënt -2 .
 - b Lijn m gaat door $(0, 3)$ en $(6, 3)$.
 - c Lijn n gaat door de oorsprong en $(8, 96)$.
 - d Lijn k gaat door $(8, 3)$ en $(8, 27)$.
- 3 Lijn k gaat door de punten $A(13, 14)$ en $B(19, 41)$.
 - a Leg uit dat de richtingscoëfficiënt van k gelijk is aan $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
 - b Bereken de richtingscoëfficiënt van k .
 - c Bereken de richtingscoëfficiënt van de lijn m door de punten $(-2, 12)$ en $(14, 36)$.
- 4 Lijn k met richtingscoëfficiënt $4\frac{1}{2}$ gaat door het punt $R(19, 41)$. Op het blaadje zie je hoe het startgetal van k berekend wordt.
Maak de berekening af en stel een vergelijking van k op.
- 5 Stel een vergelijking op van de lijn door de twee punten.

a $(3, 10)$ en $(17, 52)$	d $(10, 4)$ en $(10, -1)$
b $(-2, 8)$ en $(2, 10)$	e $(3, 3)$ en $(8, 3)$
c $(25, 89)$ en $(21, 29)$	f $(0, 7)$ en $(-2, 35)$

De vergelijking is
 $y = 4\frac{1}{2}x + b$
 met b als startgetal.
 Lijn k gaat door $(19, 41)$,
 dus als je $x = 19$ invult,
 moet er $y = 41$ uitkomen.
 $41 = 4\frac{1}{2} \cdot 19 + b$
 $41 = \dots + b$
 $b = \dots$

Rekenen met wortels

6 Bereken zonder rekenmachine.

a $\sqrt{121}$

d $\sqrt{225}$

b $\sqrt{\frac{1}{4}}$

e $\sqrt{169}$

c $\sqrt{0,36}$

f $\sqrt{\frac{1}{100}}$

Theorie

Voor het rekenen met wortels kun je gebruik maken van de volgende rekenregels:

- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (a \geq 0, b \geq 0)$

- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geq 0, b > 0)$

Voorbeeld 1

Bereken.

$$(2\sqrt{3})^2 = 4 \cdot 3 = 12$$

$$5\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{7} = 30\sqrt{14}$$

Voorbeeld 2

Schrijf als één wortel.

$$3\sqrt{5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{45}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{76} = \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{76} = \sqrt{19}$$

7 Bereken.

a $(6\sqrt{2})^2$

c $5\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{12}$

b $4\sqrt{7} \cdot 8\sqrt{3}$

d $(7\sqrt{3})^2$

8 Schrijf als één wortel.

a $7\sqrt{2} = \sqrt{\dots} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{\dots}$

c $2\frac{1}{2}\sqrt{8} = \sqrt{\dots}$

b $9\sqrt{5} = \sqrt{\dots}$

d $\frac{1}{2}\sqrt{32} = \sqrt{\dots}$

9 Met behulp van de rekenregels kun je ook wortels vereenvoudigen. Zo is $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. Vereenvoudig op dezelfde manier.

a $\sqrt{72} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = \dots$

f $\sqrt{125}$

b $\sqrt{54} = \sqrt{\dots} \cdot \sqrt{\dots} = \dots$

g $3\sqrt{24}$

c $\sqrt{200}$

h $2\sqrt{45}$

d $\sqrt{75}$

i $8\sqrt{63}$

e $\sqrt{98}$

j $80\sqrt{80}$

Hiernaast zie je het begin van de lijst kwadraten.

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1 \\ 2^2 &= 4 \\ 3^2 &= 9 \\ 4^2 &= 16 \end{aligned}$$

Bij het vereenvoudigen van wortels maak je vaak gebruik van deze lijst.

$$\begin{aligned} 5^2 &= 25 \\ 6^2 &= 36 \\ 7^2 &= 49 \\ 8^2 &= 64 \end{aligned}$$

Theorie

Optellen en aftrekken van wortels kan alleen maar als de wortels gelijksoortig zijn. Soms zie je na het vereenvoudigen van wortels dat ze gelijksoortig zijn.

Voorbeeld

Schrijf korter $\sqrt{48} - \sqrt{27}$.

Oplossing

$$\sqrt{48} - \sqrt{27} = 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

10 Schrijf korter.

a $\sqrt{32} - \sqrt{2}$

d $\sqrt{180} - 2\sqrt{80}$

b $4\sqrt{3} + \sqrt{27}$

e $8\sqrt{6} + \sqrt{54}$

c $\sqrt{45} + \sqrt{20}$

f $18\sqrt{2} - 2\sqrt{18}$

11 a Herleid de formule $y = \sqrt{4x} + \sqrt{9x}$ tot $y = 5\sqrt{x}$.

b Herleid op dezelfde manier.

A $y = \sqrt{16x} + \sqrt{169x}$

C $y = \sqrt{100x} - \sqrt{16x}$

B $y = \sqrt{18x} + \sqrt{50x}$

D $y = \sqrt{\frac{1}{4}x} + \sqrt{25x}$

12 Bekijk het voorbeeld. De eerste opdracht is om $\sqrt{\frac{3}{5}}$ te herleiden tot een wortelvorm waar onder het wortelteken een geheel getal staat.

Waarom is het dan handig om de teller en de noemer van de breuk onder het wortelteken beide te vermenigvuldigen met 5?

Voorbeeld

1 Laat zien dat $\sqrt{\frac{3}{5}}$ gelijk is aan $\frac{1}{5}\sqrt{15}$.

Oplossing

$$\sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{5}} = \sqrt{\frac{15}{25}} =$$

$$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{15}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{15}$$

2 Laat zien dat $\frac{30}{\sqrt{5}}$ gelijk is aan $6\sqrt{5}$.

Oplossing

$$\frac{30}{\sqrt{5}} = \frac{30}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{30\sqrt{5}}{5} = 6\sqrt{5}$$

13 Herleid. Laat geen breuk onder het wortelteken staan en ook geen wortelvormen in de noemer.

a $\sqrt{\frac{5}{7}} = \sqrt{\frac{5}{7} \cdot \frac{\dots}{\dots}} =$

d $\frac{10}{\sqrt{6}}$

b $\sqrt{\frac{3}{8}}$

e $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$

c $\frac{18}{\sqrt{3}} = \frac{18}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} =$

f $\frac{24}{3\sqrt{2}}$

Rekenen met breuken

14 Bereken en schrijf het antwoord als één breuk.

a $\frac{3}{4} + \frac{7}{8}$

d $3 - 1\frac{6}{7}$

b $\frac{5}{9} - \frac{2}{4}$

e $2\frac{3}{7} + 1\frac{1}{2}$

c $\frac{11}{9} - \frac{1}{3}$

f $-1\frac{5}{8} + 2\frac{3}{4}$

Breuken optellen:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \dots$$

$$\frac{1}{7} + \frac{3}{5} = \frac{5}{35} + \frac{21}{35} = \dots \text{ want}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{1 \times 5}{7 \times 5} \text{ en } \frac{3}{5} = \frac{3 \times 7}{5 \times 7}$$

Theorie

Breuken kun je bij elkaar **optellen** en van elkaar **afrekken** als ze gelijknamig zijn. Bij ongelijknamige breuken maak je eerst de noemers gelijk.

Breuken kun je met elkaar **vermenigvuldigen** door de tellers met elkaar te vermenigvuldigen en de noemers met elkaar te vermenigvuldigen.

Bij het **vereenvoudigen** van breuken kun je de teller en de noemer met hetzelfde getal vermenigvuldigen of door hetzelfde getal delen.

Voorbeeld

Optellen

$$\frac{3}{9} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\frac{2}{p} + \frac{3}{p} = \frac{5}{p}$$

Vermenigvuldigen

$$-\frac{3}{8} \times \frac{9}{2} = -\frac{3 \times 9}{8 \times 2} = -\frac{27}{16}$$

$$\frac{2}{p} \times \frac{3}{p} = \frac{2 \times 3}{p \times p} = \frac{6}{p^2}$$

Vereenvoudigen

$$\frac{45}{72} = \frac{5 \times 9}{8 \times 9} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{3pq}{p^2} = \frac{3 \times p \times q}{p \times p} = \frac{3q}{p}$$

- 15** Bereken en schrijf het antwoord als één breuk. Vereenvoudig indien mogelijk het antwoord.

a $\frac{3}{8} + \frac{5}{9}$

e $\frac{2}{p} \times \frac{5}{p}$

b $\frac{7}{9} - \frac{2}{5}$

f $\frac{a}{6} \times \frac{5}{a}$

c $\frac{8}{x} + \frac{4}{x}$

g $\frac{3p}{13} \times \frac{2p}{-3}$

d $\frac{6}{17} \times \frac{-3}{4}$

h $\frac{3a}{2b} \times \frac{4b}{7a}$

- 16** Peter gaat de breuken $\frac{5}{24}$ en $\frac{7}{36}$ bij elkaar optellen. Hij maakt de breuken gelijknamig door de noemers te vermenigvuldigen. Hiernaast zie je zijn berekening. Na het optellen moet de breuk nog vereenvoudigd worden. Hoe kun je de breuken $\frac{5}{24}$ en $\frac{7}{36}$ gelijknamig maken waarbij je niet de noemers 24 en 36 met elkaar vermenigvuldigt?

					Peter
	$\frac{5}{24} + \frac{7}{36} = \frac{180}{864} + \frac{168}{864} =$				
	$\frac{348}{864} = \frac{174}{432} = \frac{87}{216} = \frac{29}{72}$				

- 17** In het voorbeeld zie je hoe je twee breuken met variabelen er in gelijknamig maakt om ze te kunnen optellen. Bereken op dezelfde manier.

a $\frac{8}{q} + \frac{4}{5q}$

d $\frac{3}{7p} + \frac{q}{p}$

b $\frac{12}{8a} - \frac{1}{2a}$

e $\frac{8}{a} - \frac{7}{a^2}$

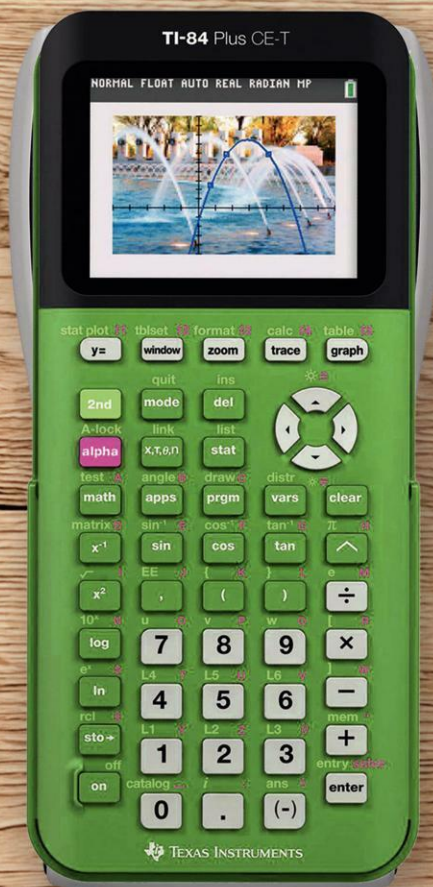
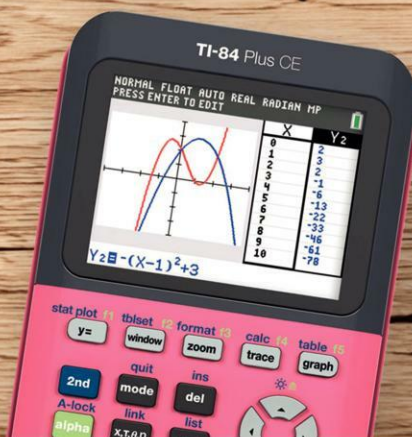
c $\frac{6}{4a} + \frac{5}{7a}$

f $\frac{2}{3a^2} + \frac{4}{7a}$

Voorbeeld

$$\frac{5}{3a} + \frac{7}{2a} = \frac{5 \times 2}{3a \times 2} + \frac{7 \times 3}{2a \times 3} =$$

$$\frac{10}{6a} + \frac{21}{6a} = \frac{31}{6a}$$



De grafische rekenmachine

SE

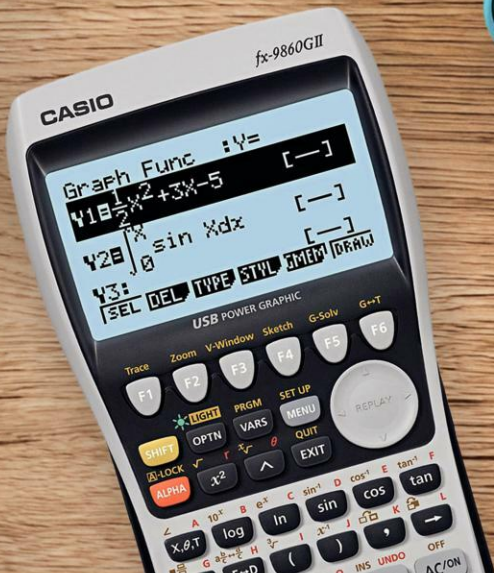
CE

K

In dit hoofdstuk

In de bovenbouw werk je bij het vak wiskunde met een grafische rekenmachine. In dit hoofdstukje vind je een algemene introductie voor het werken met een grafische rekenmachine. De informatie voor het werken met een grafische rekenmachine van een specifiek merk vind je online.

Rond alle antwoorden van de opdrachten in dit hoofdstukje af op twee decimalen.



Grafieken op de rekenmachine

- 1 Voer de formule $y = x^2 - 4x$ in op je rekenmachine. Laat de grafiek op je scherm verschijnen. Maak een schets.

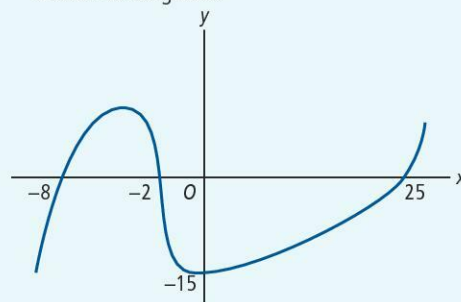
Theorie

Je kunt een grafische rekenmachine of een computerprogramma een grafiek laten tekenen. Dat heet **plotten**.

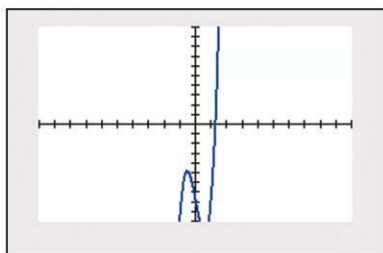
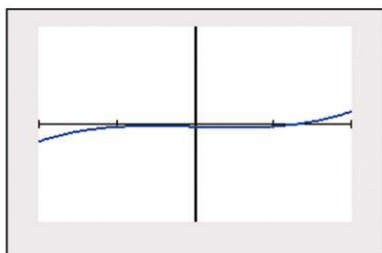
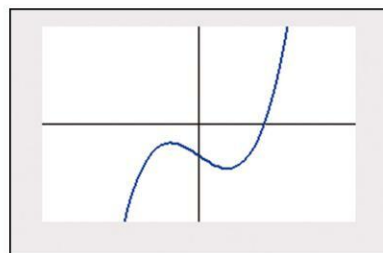
Schetsen houdt in dat je het verloop van de grafiek en de snijpunten met de assen aangeeft in je tekening.

Tekenen houdt in dat je nauwkeurig werkt. Het is dan nodig om méér punten van de grafiek te bepalen, bijvoorbeeld met een tabel. Je moet alle berekende punten van de grafiek nauwkeurig in het assenstelsel aangeven.

Schets van een grafiek



- 2 Gegeven is de formule $y = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$. Plot de grafiek bij deze formule. Neem de horizontale as van -4 tot 5 en de verticale as van -20 tot 15 . Schets de grafiek.
- 3 De grafiek bij de formule $y = 10x^3 - 9x - 8$ is drie keer geplot.
- a In welke plot is de grafiek volgens jou het beste in beeld?
 - b In de tweede plot is de bovenste helft van het venster vrijwel leeg. Om dat te voorkomen, kun je de maximale y -waarde veranderen. Moet deze waarde hoger of lager worden?

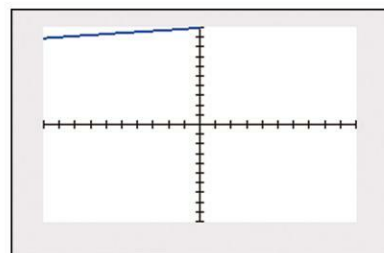


Vensterinstelling en tabellen maken

- 4 Gegeven is de formule $y = -\frac{1}{2}x^2 + 40x$.
- Geert maakt een tabel bij deze formule die begint bij $x = 0$ met stapgrootte 1.
Waarom is dit geen verstandige keuze?
 - Geef een betere keuze voor de startwaarde en de stapgrootte.
 - Teken een assenstelsel en gebruik de gegevens van de tabel om de grafiek bij de formule te tekenen.

Door het veranderen van de vensterinstelling kun je de grafiek beter in beeld krijgen. Daarbij is het vaak handig eerst met je rekenmachine een tabel te maken.

- 5 De grafiek bij de formule $y = \sqrt{2x + 100}$ is geplot.
- Wat is de kleinste waarde van x die je bij deze formule kunt invullen?
 - Welke instelling van het venster kies je om de grafiek bij de formule goed in beeld te krijgen?
- 6 De hoogte van een afgeschoten projectiel kun je berekenen met de formule $h = 15t - 4,9t^2$. Hierbij is h de hoogte in meters en is t de tijd in seconden.
- Waarom hoef je in dit geval voor de instelling van je venster alleen maar waarden groter dan of gelijk aan 0 te kiezen?
 - Welke waarden kunnen h en t ongeveer aannemen?
Maak zo nodig eerst een tabel.
 - Plot en schets een grafiek bij de hoogte van het projectiel.



Theorie

Je moet de **vensterinstelling** van je rekenmachine zo kiezen, dat je een goed beeld krijgt van de grafiek. Je let daarbij op de volgende punten:

- Van enkele formules ken je de vorm van de bijbehorende grafiek. Kies waarden van x en y waarvoor je die vorm goed in beeld krijgt.
- Bij veel formules is het maken van een tabel een goed hulpmiddel om te ontdekken welke uitkomsten kunnen voorkomen.
- Als de variabelen een praktische betekenis hebben, zoals tijd of hoogte, neem je alleen waarden waarvoor de variabelen zinvol zijn.

De standaard
vensterinstelling is:
 $X_{\min} = -10$
 $X_{\max} = 10$
 $Y_{\min} = -10$
 $Y_{\max} = 10$

- 7 Geef bij deze formules een vensterinstelling waarbij de plot een goed beeld van de grafiek geeft.

a $y = (x + 12)(x - 10)$ c $y = 20 \cdot 1,05^x$
 b $y = 100 + \frac{3}{x}$ d $y = \frac{5}{x + 2}$

Toppen en snijpunten

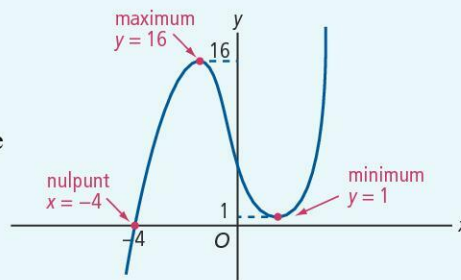
- 8 Gegeven is de formule $y = x^3 - 6x^2 - x - 5$.
- a Plot de grafiek. Neem de verticale as en de horizontale as van -10 tot 10 . Pas je instellingen daarna aan totdat je een goed beeld van de grafiek krijgt. Bij welke instellingen is dat het geval?
- b Zoek uit hoe je op jouw rekenmachine de coördinaten van de toppen en de snijpunten met beide assen kunt vinden en geef de coördinaten van deze punten.

Theorie

Een **nulpunt** van een formule is de waarde van x waarbij de uitkomst van de formule gelijk is aan 0 . Bij een nulpunt snijdt de grafiek bij de formule de x -as.

De formule waarvan hiernaast de grafiek staat heeft één nulpunt. De grafiek heeft twee toppen. De y -coördinaat van de top is een maximum of een minimum van de formule.

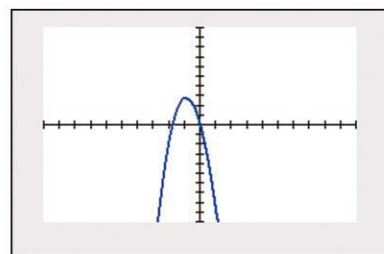
Maximum en minimum heten ook wel **extreme waarden**.



- 9 Gegeven is de formule $y = -\frac{1}{2}x^4 + 5x - 1$.
- a Bereken de nulpunten van deze formule.
- b Bereken de coördinaten van de top van de grafiek.

- 10 Susan heeft de grafiek bij de formule $y = 0,2x^3 - 3x^2 - 6x$ geplot en denkt dat er twee nulpunten zijn. Carl beweert dat er drie nulpunten zijn.

- a Welke aanwijzing zal Carl aan Susan geven zodat zij ook het derde nulpunt kan vinden?
- b Bereken met je rekenmachine de drie nulpunten. Schrijf op hoe je de rekenmachine hebt gebruikt om de drie nulpunten te vinden.



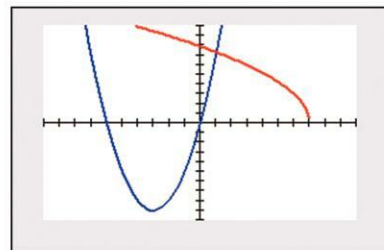
Vergelijkingen oplossen

De vergelijking $x^2 + 6x = 3\sqrt{-x + 7}$ kun je niet oplossen met algebra.

Je kunt de oplossingen wel vinden door met je rekenmachine de coördinaten te berekenen van de snijpunten van de grafieken van de formules $y = x^2 + 6x$ en $y = 3\sqrt{-x + 7}$.

De x -coördinaten van de snijpunten zijn de oplossingen van de vergelijking.

- 11 De grafieken van $y = x^2 + 6x$ en $y = 3\sqrt{-x + 7}$ zijn geplot.
- Bij de standaardinstelling van je venster krijg je niet alle snijpunten van de grafieken in beeld. Geef een vensterinstelling waarbij dat wel het geval is.
 - Los de vergelijking $x^2 + 6x = 3\sqrt{-x + 7}$ met je rekenmachine op.
 - Los ook op $x^2 + 6x < 3\sqrt{-x + 7}$.



Theorie

Als je de rekenmachine gebruikt om bijvoorbeeld nulpunten te bepalen of om vergelijkingen op te lossen, doe je **verslag** van de manier waarop je de rekenmachine hebt gebruikt. Daarbij moet je de volgende onderdelen opnemen: Invoer, Vensterinstelling en de gebruikte Opties.

Voorbeeld 1

Bereken de coördinaten van de toppen van de grafiek van $y = x^4 - 5x^2 - 3x + 2$.

Oplossing

Invoer: $y_1 = x^4 - 5x^2 - 3x + 2$

Venster: $-10 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 10$

Opties: minimum en maximum

De toppen zijn $(-1,40; 0,24)$, $(1,71; -9,20)$ en $(-0,31; 2,46)$.

Voorbeeld 2

Los op $x^2 + 12x = 2\sqrt{x + 27}$.

Oplossing

Invoer: $y_1 = x^2 + 12x$ en $y_2 = 2\sqrt{x + 27}$

Venster: $-30 \leq x \leq 10$, $-40 \leq y \leq 20$

Optie: snijpunten

De oplossingen zijn $x = -12,60$ en $x = 0,82$.

- 12 Bereken met de rekenmachine voor elke formule de nulpunten en de coördinaten van de toppen van de grafiek. Doe verslag van de manier waarop je de rekenmachine hebt gebruikt.
- $y = x^2 + 4x - 7$
 - $y = 200x^3 - 50x$
 - $y = 1000 - 11 \cdot 1,43^x$
 - $y = 19 - 3\sqrt{x}$



SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In voorgaande hoofdstukken heb je allerlei formules gezien, grafieken bij formules getekend en vergelijkingen leren oplossen.

In dit hoofdstuk worden formules gekoppeld aan functies, een centraal begrip in de wiskunde. Je tekent grafieken van functies en lost vergelijkingen op om de coördinaten van snijpunten van grafieken te berekenen. Dat mag in sommige gevallen met de rekenmachine, in andere situaties moet je een exacte oplossing geven met behulp van algebra.

Het werken met functies is zo belangrijk dat het terug komt in bijna alle hoofdstukken van dit boek en ook op het examen een hoofdrol speelt.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Probleemoplossen en analytisch denken* opdracht 44
- *Modelleren en algebraïseren* intro paragraaf 3.5
- *Logisch redeneren en bewijzen* opdracht 27



V1 Gegeven zijn de lineaire formules A: $y = 4 - 3x$ en B: $y = 3x$.

- Vul de tabellen in.
- Geef van formule A het startgetal en de richtingscoëfficiënt.
- Hoe groot is het startgetal van formule B?
- Welke tabel is een verhoudingstabel?
- Waarom noem je het verband tussen x en y in de onderste tabel recht evenredig?

A	x	-1	0	1	2	3
	y	7	...	...	...	...
B	x	0	1	2	3	4
	y	0	...	...	...	...

V2 Gegeven is de formule $q = \frac{10}{p}$

- Waarom heeft de formule geen uitkomst als $p = 0$?
- Teken een grafiek bij de formule. Neem voor p de waarden van -10 tot 10 .
- Leg uit dat je het verband tussen p en q ook kunt schrijven als $p \times q = 10$.
- Hoe noem je dit verband?

V3 Gegeven is de formule $y = 8 + 2x^2$.

- Reken de waarden in tabel A na en vul de tabel verder in.
- Hoe noem je de grafiek die bij deze formule hoort?
- Bij tabel B hoort een lineaire formule. Geef een formule bij deze tabel.

A	x	-2	-1	0	1	2	3
	y	16	10	...	...	...	...
B	x	-2	4				
	y	16	10				

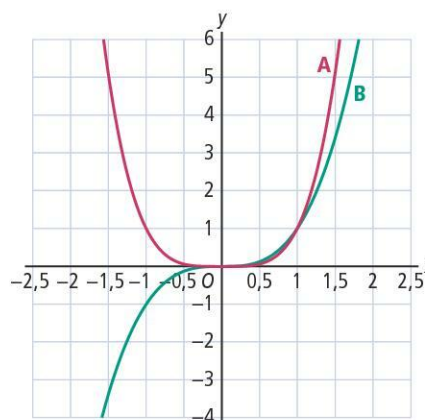
V4 De formule $y = \frac{5}{x} + 1$ heeft als grafiek een hyperbool.

- Vul de tabel verder in.
- Waarom heeft de formule geen uitkomst als $x = 0$?
- Bereken y bij $x = 0,0001$ en bij $x = -0,0001$.
- Hoe ziet de grafiek eruit in de buurt van $x = 0$?
- En hoe als x steeds verder van 0 ligt?
- Teken de grafiek. Neem de horizontale as van -20 tot 20 .

x	-10	-5	-1	0	1	5	10
y	...	...	...	-	...	...	...

V5 De grafieken horen bij de machtsformules $y = x^3$ en $y = x^4$.

- Welke grafiek hoort bij de formule $y = x^3$?
- Leg uit bij welke formule de grafiek lijnsymmetrisch is in de y -as.
- Teken de grafiek bij de formule $y = -0,25x^4$.



V6 Gegeven is de formule $y = \sqrt{x+2}$.

- Bij welke waarden van x geeft de formule uitkomsten?
- Welke uitkomsten zijn er mogelijk bij deze formule?

Theorie

Verschillende verbanden zoals lineaire, kwadratische, exponentiële, omgekeerd evenredige, wortel- en machtsverbanden kun je herkennen aan de grafiek of aan de formule. Soms kun je het verband ook herkennen aan de tabellen bij de verbanden.

- Bij een **lineair verband** is de toename of afname per eenheid steeds hetzelfde.
- Bij een **omgekeerd evenredig verband** is het product van de getallen die boven elkaar staan in de tabel steeds gelijk.

Voorbeeld 1

x	0	1	2	3
y	-5	-2	1	4

$\xrightarrow{+3}$ $\xrightarrow{+3}$ $\xrightarrow{+3}$ is constant

Lineair verband met hellingsgetal 3 en startgetal -5.
Formule: $y = 3x - 5$

Voorbeeld 2

x	1	2	3	4
y	30	15	10	7,5

$1 \times 30 = 30$, $2 \times 15 = 30$, $3 \times 10 = 30$, $4 \times 7,5 = 30$
Er geldt $x \cdot y = 30$, dus het verband tussen x en y is omgekeerd evenredig. Formule: $y = \frac{30}{x}$

V7 a Zoek bij elke tabel uit of het gaat om een lineair verband of een omgekeerd evenredig verband.

A

x	1	2	3	4
y	36	28	20	12

C

x	1	2	3	4
y	6	3	2	1,5

B

x	1	2	3	4
y	36	18	12	9

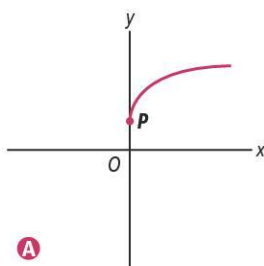
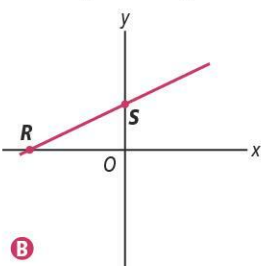
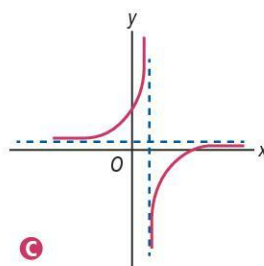
D

x	1	3	4	7
y	20	32	38	56

b Geef bij elke tabel een formule.

V8 a Zoek bij elke grafiek de daarbij horende formule.

b Geef de coördinaten van de punten P , R en S .



1 $y = 0,5x + 2$

2 $y = \frac{1}{6-4x} + 1$

3 $y = \sqrt{x} + 4$

3.1 Functie en functiewaarde

Je leert

- wat een functie is

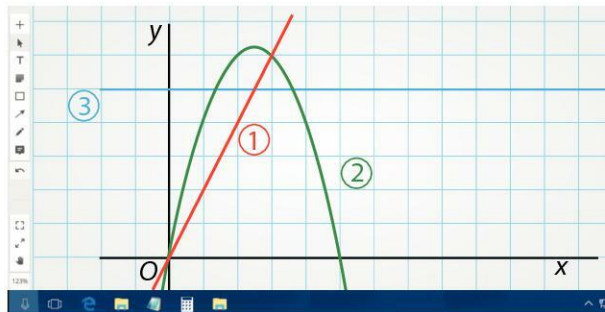
Leerroutes

- ondersteunend: 1–2–3–04–5–6–7
- doorlopend: 1–2–3–4–5–6–7
- uitdagend: 1–3–4–5–7–U1–U2

Op het schoolbord staan drie grafieken.

- Geef bij elke grafiek aan welke formule erbij hoort. Kies uit:

- | | |
|---------------|-------------------|
| A $y = 2x$ | E $x = 5$ |
| B $y = 5 - x$ | F $y = -x^2 + 5$ |
| C $y = -2x$ | G $y = x^2 - 5x$ |
| D $y = 5$ | H $y = -x^2 + 5x$ |



- 1 De remweg van een auto is afhankelijk van de snelheid op het moment van remmen. Voor een droge weg kun je de formule $R = 0,0075v^2$ gebruiken. Hierin is v de snelheid in km per uur en R de remweg in meters.

- Bereken de remweg bij een snelheid van 70 km per uur.
- Vul de tabel in. Rond de remweg af op hele meters.
- Vul de zinnen aan.

Bij een snelheid $v = 80$ hoort de remweg $R = \dots$.
 Bij een snelheid $v = \dots$ hoort de remweg $R = 27$.

v	70	80	90	100	110	120
R	...	...	...	...	...	...

Theorie

In de formule $R = 0,0075v^2$ hangt de remweg af van de snelheid. In de wiskunde zeg je dat de remweg een **functie** is van de snelheid. Je schrijft dit ook wel als $R(v) = 0,0075v^2$.

Deze laatste notatie heet het **functievoorschrift**.

Bij $v = 80$ hoort $R = 48$, kort genoteerd als $R(80) = 48$.

De uitkomst 48 heet de **functiewaarde** bij $v = 80$.

Het punt $(80, 48)$ ligt op de grafiek van de functie R .

Om functies uit elkaar te houden, worden ze vaak aangegeven met een letter zoals f of g , bijvoorbeeld: $f(x) = 3x^2 + 7$ en $g(x) = 2x + 5$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 2x^2 - 5$.

a Bereken $f(5)$.

b Schrijf met de $f(x)$ -notatie:

‘Bij $x = 1$ is de uitkomst -3 .’

Oplossing

a $f(5) = 2 \cdot 5^2 - 5 = 50 - 5 = 45$

b $f(1) = -3$

- 2 Gegeven is de formule $v = -3t + 7$.
- Geef het functievoorschrift $v(t)$ bij deze formule.
 - Vul in: $v(3) = -3 \cdot 3 + 7 = \dots$
 - Bereken de functiewaarden $v(-1)$ en $v(0)$.
 - Welke functiewaarde hoort bij $t = 6$?
Vul in: $v(\dots) = \dots$
- 3 Met de functie $L(m) = 3m + 16$ kun je van een veer de lengte L in cm berekenen als er een massa van m kg aan hangt.
- Bereken de functiewaarden $L(3)$ en $L(10)$.
 - Welke betekenis hebben je antwoorden bij opdracht a?
 - Ab berekent bij welke massa de veer 31 cm lang is. Maak de berekening op het blaadje af.
 - Bereken op dezelfde manier voor welke waarde van m geldt dat $L(m) = 17,5$.

					Ab
●	$L(m) = 3m + 16$				
●	$31 = 3m + 16$				
●	$3m = \dots$				
●	$m = \dots$				

Theorie

Een formule als $y = 2x - 3$ wordt in de functienotatie geschreven als $f(x) = 2x - 3$.
Bij de opdracht 'Bereken $f(4)$.' vul je $x = 4$ in de functie in.
Bij de opdracht 'Los $f(x) = 4$ op.' stel je het functievoorschrift gelijk aan 4 en bereken je x .

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 2x - 3$.
Bereken $f(4)$ en los $f(x) = 4$ op.

Oplossing

$$f(4) = 2 \times 4 - 3$$

$$f(4) = 5$$

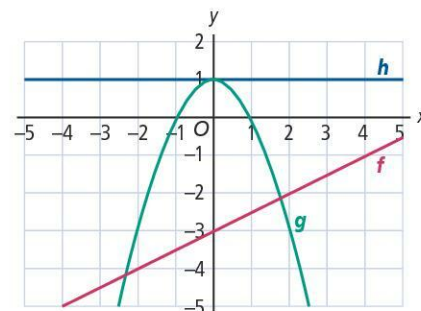
$$4 = 2x - 3$$

$$2x = 7$$

$$x = 3\frac{1}{2}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 04

- 4 In het assenstelsel zie je de grafieken van de functies
- H** $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$ en $g(x) = -x^2 + 1$. Ook is de horizontale lijn door het punt $(0, 1)$ getekend.
- Bereken de functiewaarden $f(10)$ en $g(8)$.
 - Bij welke waarde van x is $f(x) = -1$?
 - Los op $f(x) = 44$.
 - Lees in de grafiek af bij welke waarden van x geldt dat $g(x) = -3$.
 - Leg uit dat het functievoorschrift $h(x) = 1$ bij de horizontale lijn hoort.



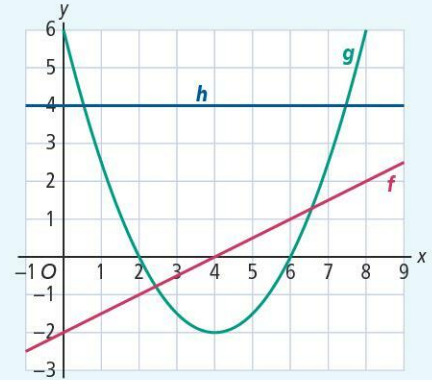
Theorie

De functie $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ is een **lineaire functie**,

$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$ is een **kwadratische functie** en

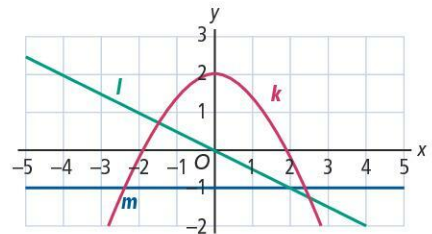
$h(x) = 4$ is een **constante functie**.

De grafiek van h is een horizontale lijn door het punt $(0, 4)$.
In het assenstelsel wordt bij de verticale as niet $f(x)$, $g(x)$ of $h(x)$, maar y geschreven. Bij de grafiek schrijf je bij welke functie de grafiek hoort.



5 Gegeven zijn de grafieken van de functies k , l en m .

- Vul in: $k(0) = \dots$, $l(2) = \dots$ en $m(-2) = \dots$
- Wat voor soort functie is k ?
- Bij welke waarden van x is $k(x) = 0$?
- Stel het functievoorschrift op van l .
- Geef het functievoorschrift van m .



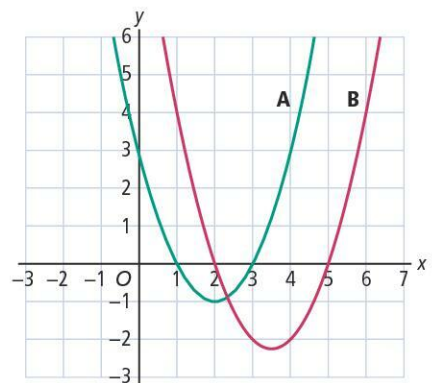
6 Van een lineaire functie f is bekend dat $f(0) = 3$ en $f(4) = 11$.

- Teken de grafiek van f .
- Bereken de richtingscoëfficiënt van deze grafiek.
- Geef het functievoorschrift van f .
- Onderzoek hoe het functievoorschrift verandert als de grafiek vijf eenheden naar rechts verschoven wordt.

7 De grafieken horen bij de kwadratische functies

$$f(x) = x^2 - 7x + 10 \text{ en } g(x) = x^2 - 4x + 3.$$

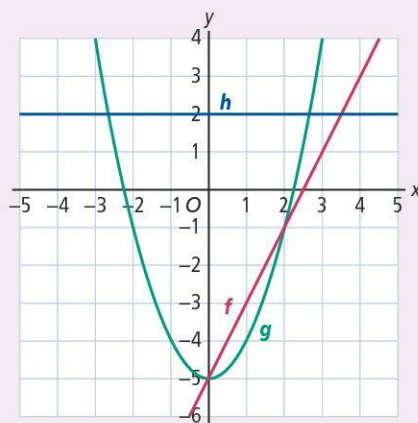
- Leg uit welke grafiek bij g hoort.
- Bereken $f(0)$.
- Voor welke x -waarden geldt $f(x) = 0$?
- Leg uit wat het verschil is tussen de opdrachten b en c.
- Bereken $g(0)$.
- Voor welke waarden van x geldt $g(x) = 0$?
- Voor welke waarden van x geldt $g(x) < 0$?



Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2

Ondersteunende opdrachten

- 04** Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x) = 2x - 5$ en $g(x) = x^2 - 5$ en de horizontale lijn door het punt $(0, 2)$.
- a** Vul in: $f(3) = 2 \cdot 3 - 5 = \dots$, dus de functiewaarde van f bij $x = 3$ is $\dots$
 - b** Bereken de functiewaarden $f(1)$ en $g(1)$.
 - c** Om uit te rekenen bij welke waarde van x de functiewaarde van f gelijk is aan 13, moet je de vergelijking $2x - 5 = 13$ oplossen.
Bij welke waarde van x is $f(x) = 13$?
 - d** Schrijf de vergelijking op die hoort bij de opdracht: 'Bij welke waarde van x is $g(x) = 31$?'
 - e** Bij welke waarden van x is $g(x) = 31$?
 - f** Bereken $f(10)$ en los $f(x) = 10$ op.
 - g** De horizontale lijn is de grafiek van een functie h .
Op de lijn liggen alleen punten waarvoor geldt dat de y -coördinaat 2 is. De functiewaarden van h moeten dus allemaal 2 zijn.
Vul in: het functievoorschrift van h is $h(x) = \dots$



Uitdagende opdrachten

- U1** Van de kwadratische functie g is $g(0) = 8$ en $g(5) = 8$.
De grafiek van g is een parabool waarvan de top op de grafiek van de functie $k(x) = x + 4$ ligt.
Bereken de coördinaten van de top van de parabool.
- U2** Gegeven is de functie $g(x) = -6x + b$.
- a** Bereken b in het geval $g(3) = 0$.
 - b** Bereken b in het geval $g(b) = 20$.
 - c** Bereken b in het geval $g(5) = 5b$.

3.2 Domein en bereik

Je leert

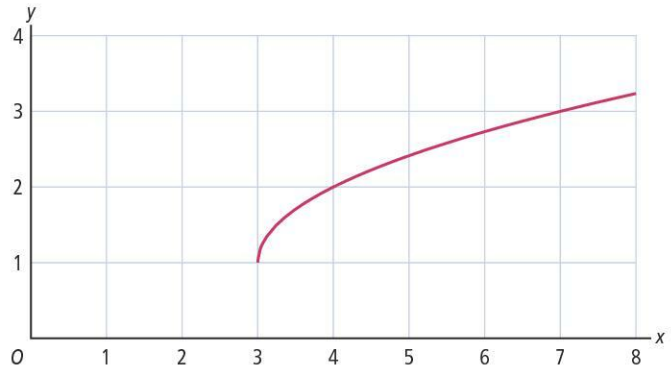
- wat de intervalnotatie is
- hoe je het domein en bereik van een functie vaststelt

Leerroutes

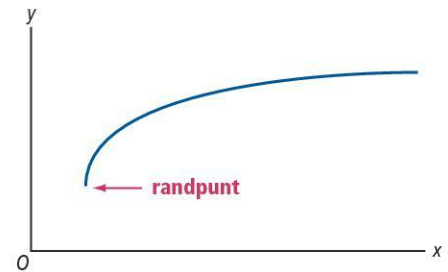
- ondersteunend: 8—09—10—11—12—13—014—14—15
- doorlopend: 8—9—10—11—12—13—14—15—16
- uitdagend: 8—9—11—12—14—15—16—U3—U4

In het assenstelsel zie je de grafiek van de functie $f(x) = \dots + \sqrt{x - \dots}$

- Welke getallen moeten er op de puntjes staan?



- 8 Gegeven is een schets van de grafiek van de functie $f(x) = 2 + \sqrt{x - 4}$.
- Leg uit waarom $f(1)$ niet bestaat.
 - Voor welke waarden van x bestaat er een functiewaarde?
 - Welke functiewaarden zijn bij deze functie mogelijk?
 - Welke coördinaten heeft het randpunt?



Ondersteunende route → maak opdracht 09

- 9 Gegeven is de functie $g(x) = 5 + \frac{4}{x}$.
- Plot en schets de grafiek van g .
 - Welke waarde kun je niet voor x invullen?
 - Leg uit waarom de functiewaarde $g(x) = 5$ voor geen enkele waarde van x voorkomt.

Theorie

Alle waarden van x waarvoor een functiewaarde $f(x)$ bestaat, vormen samen het **domein** van f . Alle functiewaarden die kunnen voorkomen, vormen het **bereik** van de functie. Soms zijn er voor het domein of het bereik geen beperkingen: alle getallen kunnen worden ingevuld of zijn als uitkomst mogelijk. Domein of bereik noteer je dan als $\mathbb{R}$, het symbool voor de reële getallen. $\mathbb{R}$ bevat alle getallen op de getallenlijn. Het bereik van een functie kun je vaak met een plot bepalen.

Voorbeeld 1

Geef het domein en het bereik van de functie $f(x) = 2 + \sqrt{3-x}$.

Oplossing

Voor het domein moet gelden $3-x \geq 0$, dus het domein is $x \leq 3$.

$\sqrt{3-x}$ kan geen negatieve uitkomst hebben, dus $f(x) \geq 2$. Het bereik is $y \geq 2$.

Voorbeeld 2

Geef het domein en het bereik van de functie $f(x) = -0,4x^2 + 4x - 1$.

Oplossing

Je kunt voor x elk getal invullen, dus het domein is $\mathbb{R}$.

De grafiek is een bergparabool. Als je de grafiek plot, vind je de top $(5, 9)$.

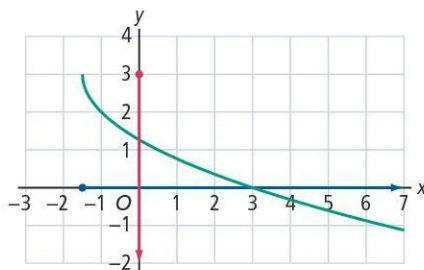
Het bereik is $y \leq 9$.

10 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ en $g(x) = x^2 - 2x - 8$.

- Leg uit dat voor beide functies geldt: het domein is $\mathbb{R}$.
- Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x -as.
- Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van g .
- Geef het bereik van f .
- Geef het bereik van g .

11 Gegeven is de grafiek van de functie $h(x) = 3 - \sqrt{2x+3}$.

- Welke coördinaten heeft het randpunt?
- De blauwe pijl op de x -as geeft domein van h aan. Schrijf het domein van h op.
- Op de y -as is met de rode pijl het bereik aangegeven. Schrijf ook het bereik van h op. Welke waarden kan $h(x)$ hebben?

**Theorie**

Op de getallenlijn zijn de getallen vanaf 2 tot 4 aangegeven. Zo'n stuk van de getallenlijn heet een **interval**. Het getal 2 hoort er wel bij (dicht rondje), het getal 4 niet (open rondje). Dit interval noteer je kort met de **intervalnotatie**: $[2, 4)$.

De **rechte** haak betekent dat de grenswaarde meedoet, een **puntige** haak wil zeggen dat de grenswaarde niet meedoet. Als er aan één zijde geen grens is, geef je dit aan met een pijl en een puntige haak.

Voorbeeld 1

ongelijkheid $2 \leq x < 4$

interval

intervalnotatie $[2, 4)$

Voorbeeld 2

ongelijkheid $x \leq -2$

interval

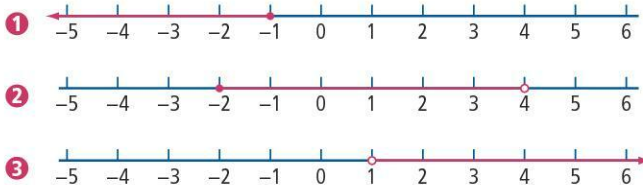
intervalnotatie $\langle \leftarrow, -2]$

- 12 a** Op de getallenlijnen zijn drie intervallen aangegeven.

Bij welke van onderstaande ongelijkheden horen ze?

A $x \geq -1$ C $x > 1$ E $x \geq 1$
 B $x \leq -1$ D $-2 \leq x < 4$ F $-2 < x \leq 4$

- b** Noteer de intervallen die op de getallenlijnen zijn aangegeven in de intervalnotatie.



- 13** Vul de tabel in.

<i>ongelijkheid</i>	$-2 \leq x < 6$		
<i>interval</i>			
<i>intervalnotatie</i>			$\langle \leftarrow, 0 \rangle$

Ondersteunende route → maak opdracht 014

- 14 a** Geef zonder de grafiek te plotten van elke functie het domein en het bereik in de intervalnotatie.

$$f(x) = 6 + \sqrt{x + 12} \qquad g(x) = 2 - (3x - 1)^2$$

- b** Geef van elke functie het domein en het bereik in de intervalnotatie. Plot zo nodig de grafiek.

$$h(x) = 21 - \sqrt{6 - 2x} \qquad k(x) = \frac{6}{x^2 + 1}$$

- 15** Gegeven zijn de functies $f(x) = 7 - x^4$,
 $g(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$ en $h(x) = 2(x + 1)^6 - 7$.

- a** Plot en schets de grafieken van deze drie functies.
b Geef het domein van elke functie.
c Geef het bereik van elke functie.

- 16** Geef een voorbeeld van een functie waarbij

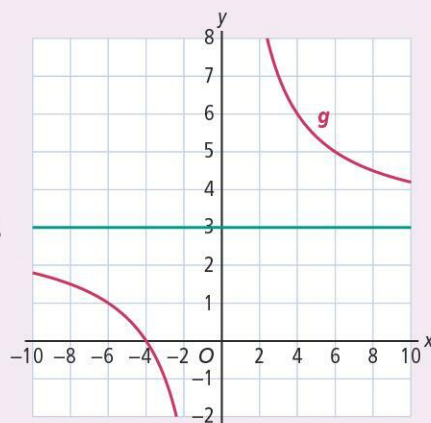
- a** het domein $\mathbb{R}$ is en het bereik $\mathbb{R}$ is.
b het domein $\mathbb{R}$ is en het bereik niet $\mathbb{R}$ is.
c het domein en het bereik beide niet $\mathbb{R}$ zijn.

Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4

Ondersteunende opdrachten

09 Gegeven is de functie $g(x) = 3 + \frac{12}{x}$

- Leg uit waarom je voor x niet de waarde 0 kunt invullen.
- Bereken $g(10)$, $g(100)$, $g(1000)$ en $g(1\,000\,000)$.
- De uitkomsten bij opdracht b komen steeds dichterbij een bepaalde waarde.
Welke waarde is dat?
- Laat zien dat de uitkomsten tot hetzelfde getal naderen, als je voor x de waarden -10 , -100 en -1000 invult.
- Welk getal kan niet als functiewaarde van g voorkomen?



014 Gegeven zijn de functies

$$f(x) = (x - 3)^2 - 10 \text{ en } g(x) = \frac{4}{\sqrt{x - 4}}$$

- Kun je bij de functie f voor x elk getal invullen?
Wat is dus het domein?
- Om het bereik van f te bepalen, bekijk je eerst een deel van het functievoorschrift.
Welke uitkomsten kan de formule $y = (x - 3)^2$ hebben?
Wat volgt daaruit voor het bereik van f ?
- De functie g heeft alleen uitkomsten als $x - 4$ positief is.
Wat volgt hieruit voor het domein van g ?
- Gebruik een plot van de grafiek van g om het bereik te bepalen. Geef het bereik van g in de intervalnotatie.

Uitdagende opdrachten

U3 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ en

$$g(x) = \sqrt{(2 - x)(x - 10)}.$$

- Leg uit waarom $[-4, 4]$ het domein van f is.
- Geef het bereik van f .
- Geef het domein en het bereik van g .

U4 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2b - 3 + \sqrt{a - 5x}$.

- Voor welke waarde van a is het domein van f gelijk aan $\langle -\infty, 4 \rangle$?
- Voor welke waarde van b is het bereik van f gelijk aan $[-7, \infty)$?

3.3 Gebroken functies

Je leert

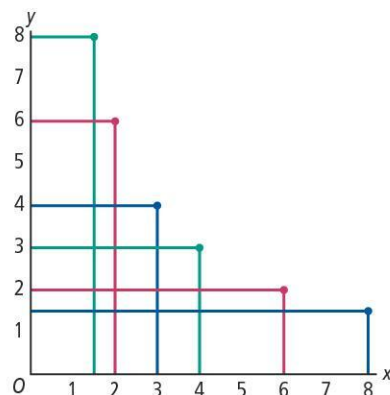
- wat een gebroken functie is
- hoe je vergelijkingen van de asymptoten van een grafiek van een gebroken functie vindt

Leerroutes

- ondersteunend: 17–18–19–020–021–21–23
- doorlopend: 17–18–19–20–21–22–23
- uitdagend: 17–19–20–22–23–U5–U6

In het assenstelsel zijn rechthoeken getekend met oppervlakte 12. Van elke rechthoek ligt één zijde op de x -as en één zijde op de y -as. De hoekpunten die met een stip zijn aangegeven liggen op de grafiek van een functie.

- Welk functievoorschrift kan deze functie hebben?



17 Gegeven is de functie $k(x) = \frac{6}{x-3} + 2$.

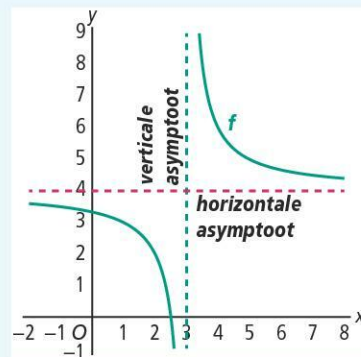
- Vul de tabel in en teken de grafiek.
- Waarom is er geen functiewaarde bij $x = 3$?
- Leg uit wat er met de functiewaarde gebeurt als je voor x een waarde dicht bij 3 kiest.
- Bereken de functiewaarde bij $x = -10$ en bij $x = -100$.
- Wat gebeurt er met de functiewaarden als je voor x waarden kiest die ver van 0 liggen?

x	-5	-1	0	1	2	2,9	3	3,1	10	100
$k(x)$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

18 a Plot en schets de grafiek van de functie $f(x) = \frac{15}{x^2 - 4}$
 b Welke waarden kun je niet voor x invullen?

Theorie

Bij **gebroken functies** komt de variabele in de noemer voor. Bij de grafieken van gebroken functies zijn er vaak lijnen waar de grafiek op den duur willekeurig dicht naar nadert. Zulke lijnen heten **asymptoten**.



- 19** Gegeven is de functie $g(x) = 1 + \frac{1}{6 - 2x}$
- Maak een tabel bij de functie. Neem voor x de waarden $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ en 5 .
 - Geef het domein van g .
 - Teken de grafiek van g . Stippel de asymptoten.
 - Geef van elke asymptoot een vergelijking.
 - Geef het bereik van g .

Theorie

Bij een gebroken functie

- kun je onderzoeken of er een **horizontale asymptoot** is door waarden van x die ver van 0 liggen in te vullen.
- kijk je voor een **verticale asymptoot** naar waarden van x waarvoor de noemer van de breuk gelijk is aan 0.
- bestaat het domein uit alle waarden van x waarvoor de noemer niet gelijk is aan 0.

Als het domein uit meer dan één interval bestaat, wordt het symbool $\cup$ (vereniging) gebruikt.

Voorbeeld 1

Stel vergelijkingen op van de asymptoten

van de grafiek van $f(x) = 1 + \frac{8}{x + 2}$

Oplossing

$x + 2 = 0$ als $x = -2$, dus de verticale asymptoot is $x = -2$.

Als voor x waarden worden ingevuld die ver van 0 liggen,

komt de waarde van $\frac{8}{x + 2}$ dicht bij 0, dus $f(x)$

komt dicht bij 1.

De horizontale asymptoot is $y = 1$.

Voorbeeld 2

Bepaal het domein van de functie

$$f(x) = 3 + \frac{1}{8 + 4x}$$

Oplossing

$f(x)$ heeft alleen uitkomsten als $8 + 4x \neq 0$, dus als $x \neq -2$.

Het domein is $\langle \leftarrow, -2 \rangle \cup \langle -2, \rightarrow \rangle$.

Ondersteunende route → maak opdracht O20

- 20** De grafiek van elk van deze functies heeft één of meerdere asymptoten.

H Stel van elke asymptoot een vergelijking op.

a $f(x) = 4 + \frac{5}{x - 2}$

c $h(x) = \frac{12}{x^2 + 9}$

b $g(x) = 18 - \frac{6}{7x + 14}$

d $k(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$

Ondersteunende route → maak opdracht 021

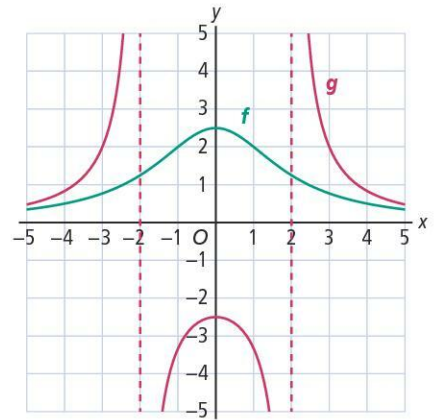
- 21** Geef het domein en het bereik van elke functie in de intervalnotatie. Plot zo nodig de grafiek.

H

a $f(x) = 2 + \frac{5}{x-9}$ **c** $h(x) = 7 - \frac{1}{x^2}$
b $g(x) = \sqrt{5-2x} + 4$ **d** $k(x) = 3 + \frac{21}{\sqrt{x+2}}$

- 22** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{10}{x^2+4}$ en $g(x) = \frac{10}{x^2-4}$

- a** Leg uit waarom de grafiek van f geen verticale asymptoot heeft en de grafiek van g wel.
b Onderzoek of er bij deze grafieken horizontale asymptoten voorkomen.



- 23** Een telecombedrijf verstuurt iedere maand een rekening naar de familie Jansen. De gemiddelde prijs per belminuut wordt lager naarmate het aantal gebelde minuten groter is. Daarbij hoort de functie $G(x) = 0,09 + \frac{5}{x}$

G is de gemiddelde prijs in euro's per belminuut en x het aantal belminuten.

- a** In een maand is er 3 uur en 20 minuten gebeld. Bereken de gemiddelde prijs per belminuut.
b Bereken de totale kosten per maand voor dit aantal belminuten.
c Wat gebeurt er met de functiewaarde van G als x steeds groter wordt?
d Stel een vergelijking op van de horizontale asymptoot van de grafiek van G .
e Wat is de praktische betekenis van de horizontale asymptoot in deze situatie?



Uitdagende route → maak opdracht U5 en U6

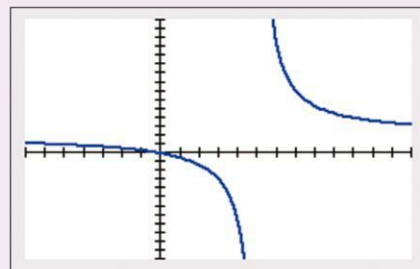
Ondersteunende opdrachten

- 020** Gegeven is de functie $f(x) = 5 + \frac{24}{x^2 - 1}$
- Voor welke waarden van x is de noemer gelijk aan 0?
 - Welke verticale asymptoten heeft de grafiek van f ?
 - Bereken $f(-100)$, $f(-1000)$, $f(100)$ en $f(1000)$.
 - Welke lijn is de horizontale asymptoot van de grafiek van f ?

De grafiek van elke functie heeft één of meerdere asymptoten. Stel van elke asymptoot een vergelijking op.

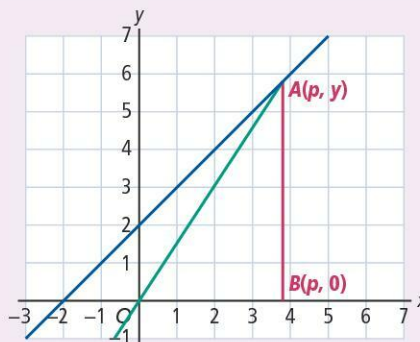
e $g(x) = 2 - \frac{2}{x+1}$ g $k(x) = \frac{40}{5+x^2}$
 f $h(x) = \frac{x}{2x-13}$ h $l(x) = \frac{30}{x^2-2x-15}$

- 021** Gegeven is de functie $g(x) = 2 + \frac{30}{3x-15}$
- Waarom behoort $x = 5$ niet tot het domein van g ?
 - Vul in: het domein van g is $\langle \dots, \dots \rangle \cup \langle \dots, \dots \rangle$.
 - Bereken $g(10)$, $g(100)$, $g(1000)$, $g(-10)$, $g(-100)$ en $g(-1000)$.
 - Tot welke waarde nadert $g(x)$ als je voor x waarden invult die steeds verder van 0 liggen?
 - Vul in: het bereik van g is $\langle \dots, \dots \rangle \cup \langle \dots, \dots \rangle$.



Uitdagende opdrachten

- U5** Punt $A(p, p+2)$ ligt op de lijn $y = x + 2$. Punt $B(p, 0)$ ligt op de x -as en $\angle OBA = 90^\circ$. De richtingscoëfficiënt van lijn OA kun je schrijven als een functie $r(p)$.
- Geef het functievoorschrift van r .
 - Tot welke waarde nadert $r(p)$ als p steeds groter wordt?
 - Tot welke grootte nadert $\angle AOB$ dan?



- U6** Voor elke waarde van c is gegeven de functie $h(x) = \frac{2}{x^2 + c}$
- Onderzoek voor welke waarden van c de grafiek van h twee verticale asymptoten heeft.
 - Geef met behulp van een plot het bereik van h voor $c = \frac{1}{3}$.
 - Onderzoek voor welke waarde van c het bereik van h gelijk is aan $\langle 0, 4 \rangle$.

3.4 Soorten functies

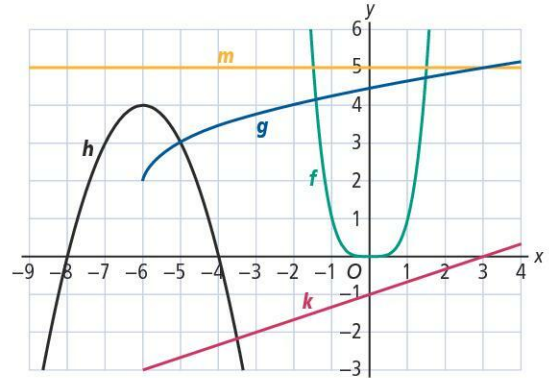
Je leert

- de namen van een aantal soorten functies
- wat veeltermfuncties zijn en wat de graad van een veeltermfunctie is

Leerroutes

- ondersteunend: 24—25—026—26—27—28
- doorlopend: 24—25—26—27—28—29
- uitdagend: 24—25—27—29—U7—U8

- Van welke soorten functies herken je de grafiek?



24 Gegeven zijn de functies

$$f(x) = 3 - x + 2x^2 \quad p(x) = 4 - \sqrt{12 - x}$$

$$g(x) = x^4 \quad q(x) = 13 - \frac{1}{2}x$$

$$h(x) = 12 + 3\sqrt{3x - 4} \quad r(x) = x^3 - 7x + 2$$

$$k(x) = -0,2x + 5,5 \quad s(x) = 12$$

- Welke van deze functies zijn lineaire functies?
- Welke andere soorten functies komen er in deze opdracht voor?

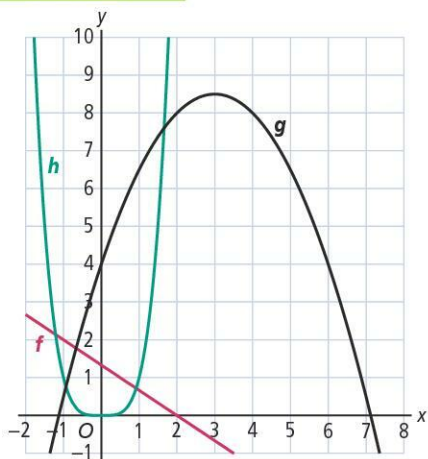
Theorie

Tot dusver heb je kennis gemaakt met de volgende soorten functies:

- **constante functies:** $f(x) = a$. De grafiek is een horizontale lijn.
- **lineaire functies:** $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$). Hierin is a het hellingsgetal of de richtingscoëfficiënt en is b het startgetal. De grafiek is een rechte lijn.
- **kwadratische functies:** $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). De grafiek is een parabool.
- **machtsfuncties:** $f(x) = x^m$.
- **wortelfuncties:** de variabele komt onder het wortelteken voor, bijvoorbeeld $f(x) = a + \sqrt{bx + c}$.
- **gebroken functies:** de variabele komt in de noemer voor, bijvoorbeeld

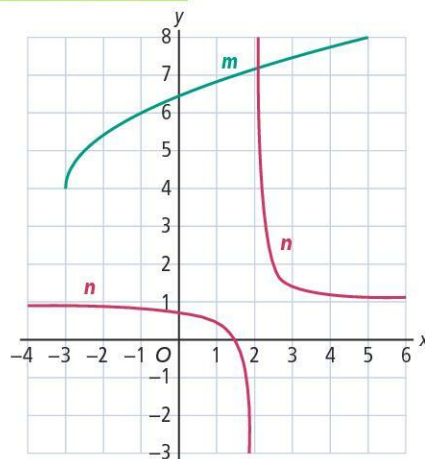
$$f(x) = \frac{a}{bx + c}$$

Voorbeeld 1



$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3} && \text{lineaire functie} \\ g(x) &= -0,5x^2 + 3x + 4 && \text{kwadratische functie} \\ h(x) &= x^4 && \text{machtsfunctie} \end{aligned}$$

Voorbeeld 2



$$\begin{aligned} m(x) &= 4 + \sqrt{2x+6} && \text{wortelfunctie} \\ n(x) &= \frac{1}{2x-4} + 1 && \text{gebroken functie} \end{aligned}$$

25 Gegeven zijn de functies

$$f(x) = (x-3)(x+5),$$

$$g(x) = (x^2-2)(x^2-3) \text{ en}$$

$$h(x) = 2x^2(3-x) + 6\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1\right).$$

Schrijf de functievoorschriften van f , g en h zonder haakjes en zo kort mogelijk.

Theorie

Lineaire functies $f(x) = ax + b$ met $a \neq 0$ heten ook wel **eerstegraads functies**.

Een andere naam voor kwadratische functies is **tweedegraads functies**.

Als x^3 de hoogste macht in een functie is, spreek je van een derdegraads functie, enzovoort.

Veeltermfuncties zijn functies met de vorm

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$. Hierbij zijn n en alle andere exponenten gehele getallen. De hoogste macht in een veeltermfunctie is de **graad** van die functie.

Een constante functie $f(x) = k$ heeft graad 0.

Voorbeeld

Eerstegraadsfunctie:

$$f(x) = 1\frac{1}{2}x - 12$$

Tweedegraadsfunctie:

$$g(x) = 3x^2 - 5x + 8$$

Zevendegraadsfunctie:

$$h(x) = -3x^7 + 2x^3 + 4x^2$$

Constante functie:

$$k(x) = 13$$

Ondersteunende route → maak opdracht 026

26 Gegeven zijn de functies**H**

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{3}x^3 - 2x,$$

$$g(x) = -x^4 + 3x^2 + 4,$$

$$h(x) = (x + 5)^2 - (x - 4)^2 \text{ en}$$

$$k(x) = (x^2 - 4)(x^3 - 1).$$

- a** Laat zien dat h en k veeltermfuncties zijn.
- b** Geef de graad van f , g , h en k .

27 Het functievoorschrift van een tweedegraads functie kun je in verschillende vormen tegenkomen:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = a(x - m)(x - n)$$

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

- a** Bij welke van deze vormen is de top van de grafiek eenvoudig af te lezen?
- b** Bij welke vorm van het functievoorschrift weet je zeker dat de grafiek de x -as snijdt?
- c** Wat weet je over de getallen a , p en q als gegeven is dat de grafiek de x -as niet snijdt?

28 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2x^3$ en $g(x) = 3x^2\sqrt{x}$.

- a** Van welke soort zijn deze functies?
- b** Geef het domein en bereik van beide functies.
- c** Plot en schets de grafieken van f en g in één figuur.
- d** Bereken de coördinaten van de snijpunten.

29 In deze paragraaf heb je kennis gemaakt met een aantal soorten functies:

lineaire functies, kwadratische functies, veeltermfuncties, wortelfuncties, machtsfuncties en gebroken functies.

Bij welke van deze soorten functies is het domein niet altijd $\mathbb{R}$?

Licht je antwoord toe.

Uitdagende route → maak opdracht U7 en U8

Ondersteunende opdrachten

026

Gegeven zijn de functies

$$f(x) = -x^2 + 3x^3 - 2x,$$

$$g(x) = 1 - 2x - 3x^2,$$

$$h(x) = (x^3 - 1)(x^3 - 8) \text{ en}$$

$$k(x) = 3x(x - 2)(2x + 7).$$

- a Welke graad hebben f en g ?
- b Schrijf het functievoorschrift van h zonder haakjes.
- c Welke graad heeft h ?
- d Laat zien dat het functievoorschrift van k geschreven kan worden als $k(x) = 3x(2x^2 + 3x - 14)$.
- e Schrijf het functievoorschrift van k zonder haakjes.
- f Welke graad heeft k ?

Uitdagende opdrachten

U7

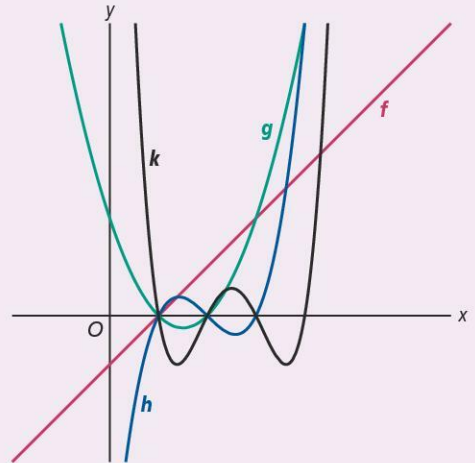
De grafieken van de functies

$$f(x) = x - 1, g(x) = (x - 1)(x - 2),$$

$$h(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) \text{ en}$$

$$k(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) \text{ zijn getekend.}$$

- a Er is één punt dat op de grafieken van alle vier functies ligt. Verklaar dit met behulp van de functievoorschriften.
- b Er zijn nog twee punten die op de grafieken van twee of drie van deze functies liggen. Welke punten zijn dat?
- c Geef de graad van elke functie.



U8

De grafiek van een tweedegraads functie f gaat door de punten $(-2, 0)$, $(4, 0)$ en $(6, 12)$.
Stel het functievoorschrift van f op.

3.5 Vergelijkingen oplossen

Je leert

- hoe je uit de vraagstelling opmaakt of je een vergelijking met je rekenmachine mag oplossen

Leerroutes

- ondersteunend: 30—031—31—32—34—035—36—37—38
- doorlopend: 30—31—32—33—34—35—36—37—38
- uitdagend: 30—31—33—34—35—37—38—U9—U10

Opa Joost heeft drie kleinkinderen, Eric, Bo en Kevin.

Eric is vier jaar ouder dan Bo en Bo is vier jaar ouder dan Kevin. De leeftijd van Opa Joost is het kwadraat van de leeftijd van Kevin.

Opa Joost, Eric, Bo en Kevin zijn samen precies honderd jaar oud.

- Hoe oud zijn Opa Joost, Eric, Bo en Kevin?



30 Annet en Yvonne lossen de vergelijking $18x^2 - 17x = 15$ op.

Annet gebruikt de *abc*-formule en vindt $x = -\frac{5}{9}$ en $x = 1\frac{1}{2}$.

Yvonne vindt met haar rekenmachine $x = -0,56$ en $x = 1,5$.

Welk oplossing is juist? Of zijn beide oplossingen juist?

Theorie

Je kunt vergelijkingen oplossen met de rekenmachine. Soms krijg je daarbij exacte antwoorden, maar in de veel gevallen krijg je benaderingen.

Als er staat: **Bereken exact** ... of: **Los algebraïsch op** ..., dan moet je het probleem met algebra oplossen. Bij 'bereken exact' moet je bovendien een exact antwoord geven.

Als in de opdracht staat: **Bereken** ... of: **Los op** ..., dan heb je de keuze tussen algebraïsch oplossen en oplossen met de rekenmachine.

Voorbeeld 1

Los algebraïsch op $x^2 - 4x = 1$.
Rond je antwoord af op twee decimalen.

Oplossing

$$x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$D = 16 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 20$$

$$x = \frac{4 - \sqrt{20}}{2} = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{20} \text{ of } x = 2 + \frac{1}{2}\sqrt{20}$$

In twee decimalen:

$$x \approx -0,24 \text{ of } x \approx 4,24$$

Voorbeeld 2

$$\text{Los exact op } 2x - 1 = \sqrt{x + 2\frac{1}{2}}.$$

Oplossing

$$(2x - 1)^2 = x + 2\frac{1}{2} \quad (\text{gekwadrateerd})$$

$$4x^2 - 4x + 1 = x + 2\frac{1}{2}$$

$$4x^2 - 5x - 1\frac{1}{2} = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 4 \cdot -1\frac{1}{2} = 49$$

$$x = \frac{5 + 7}{8} = 1\frac{1}{2} \text{ of } x = \frac{5 - 7}{8} = -\frac{1}{4}$$

Alleen de eerste oplossing voldoet: $x = 1\frac{1}{2}$.

Ondersteunende route → maak opdracht 031

31 Los exact op.

H **a** $x - \frac{3}{x} = -4$ **c** $x - 1 = \sqrt{x - 1}$
b $2x(x^2 - 3x) = 2x^3 - 4x$ **d** $\frac{2}{x} - 1 = x$

32 Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van de functie met de x -as.

a $f(x) = 3 - \sqrt{5 + 2x^2}$ **c** $h(x) = 1 - \frac{4}{2x^2 + x + 3}$
b $g(x) = \sqrt{x^2 + x - 1}$ **d** $k(x) = (x^2 - 3)(x^2 - 4)$

- 33** **a** Bereken exact de omtrek en oppervlakte van een cirkel met straal $1\frac{1}{2}$.
b De diameter van de aarde bedraagt ongeveer 12 732 km. Bereken de lengte van de evenaar in hele kilometers.
c Waarom is het niet zinvol om naar de exacte omtrek van de aarde te vragen?

De omtrek van een cirkel met straal r is $2\pi r$.
De oppervlakte van een cirkel met straal r is πr^2 .

34 Je gaat de vergelijking $x^3 + 6x^2 = 4(x + 6)$ op twee manieren oplossen.

- a** Los de vergelijking op door de grafieken van $f(x) = x^3 + 6x^2$ en $g(x) = 4(x + 6)$ te plotten en de snijpunten te bepalen.
b Los de vergelijking exact op door deze in de vorm $A \cdot B = A \cdot C$ te schrijven.

Bij het oplossen van vergelijkingen kun je soms kiezen tussen het oplossen met algebra of het oplossen met je rekenmachine. Soms is het oplossen met algebra sneller dan het oplossen met je rekenmachine. Daarbij kan het handig zijn om de vergelijking eerst te herleiden of te vereenvoudigen. Veel vergelijkingen kun je alleen maar met je rekenmachine oplossen.

Ondersteunende route → maak opdracht 035

35 Gegeven zijn de vergelijkingen

A $x^3 + 2x^2 = 15$

B $2x^4 - 5x^3 + 2x^2 = 0$

C $\frac{4}{x-4} = \frac{x^2}{x-1}$

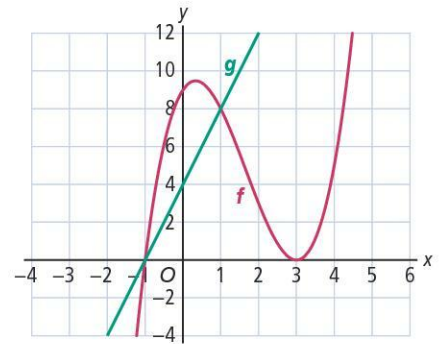
D $2x + 1 = \sqrt{4x + 10}$

- Welke van deze vergelijkingen kunnen exact worden opgelost? Los deze vergelijkingen op.
- Los de andere vergelijkingen op. Rond je antwoord af op twee decimalen.

36 In het assenstelsel zie je de grafieken van de functies

$$f(x) = (x + 1)(x - 3)^2 \text{ en } g(x) = 4(x + 1).$$

- Lees twee oplossingen van de vergelijking $f(x) = g(x)$ af en controleer de oplossingen door invullen.
- Onderzoek of er een derde oplossing is.



37 Los exact op. Schrijf de vergelijkingen eerst in de vorm

H $A \cdot B = A \cdot C.$

a $(x - 2)^2(2x + 1) = (x - 2)^2(x + 2)$

b $(x - 2)^2(2x + 1) = (x - 2)^3$

c $x^3 = 13x^2 - 36x$

d $x^2(4x + 1) = 16x + 4$

38 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x + 6}$ en

$$g(x) = \sqrt{x + 2}.$$

- Geef het domein van f .
- Plot en schets de grafieken van f en g .
- Los exact op $f(x) < g(x)$.

Uitdagende route → maak opdracht U9 en U10

Ondersteunende opdrachten

031

Op het blaadje staan drie vergelijkingen.

- a Vermenigvuldig beide kanten van vergelijking A met x en los de vergelijking die je dan krijgt exact op.
- b Schrijf vergelijking B zonder haakjes.
- c Waarom mag je bij vergelijking B links en rechts niet delen door x ?
- d Los vergelijking B exact op.
- e Kwadrateer beide kanten van vergelijking C en los de vergelijking exact op.
- f Je vindt bij opdracht e twee uitkomsten. Waarom voldoet één van de uitkomsten niet als oplossing?

$$A \quad \frac{5}{x} = 2x + 3$$

$$B \quad x^2(x - 1) = 2x$$

$$C \quad x = \sqrt{4x + 12}$$

035

Op het blaadje staan vijf vergelijkingen.

- a Waarom weet je zeker dat je de vergelijkingen A en B exact kunt oplossen?
- b Los vergelijkingen A en B exact op.
- c Los de andere drie vergelijkingen op met je rekenmachine. Rond je antwoord af op twee decimalen.
- d Als je in vergelijking E de haakjes wegwerkt, blijkt dat je deze vergelijking ook exact kunt oplossen. Laat zien dat dit juist is en los de vergelijking exact op.

$$A \quad 0,2x + 7 = 0,3x - 1$$

$$B \quad 2x^2 - 5x = 7$$

$$C \quad x^3 + x^2 = 43$$

$$D \quad \frac{10}{x^2 - 1} = x^3$$

$$E \quad (x - 1)(x - 2)(x - 3) = -6$$

Uitdagende opdrachten

U9

Gegeven is de functie $f(x) = 3 + x + \frac{12}{x^3 + 4}$.

- a Bereken de coördinaten van de toppen van de grafiek van f .
- b Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de lijn $y = x + 4$.
- c Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de lijn $y = 2x$. Rond af op één decimaal.

U10

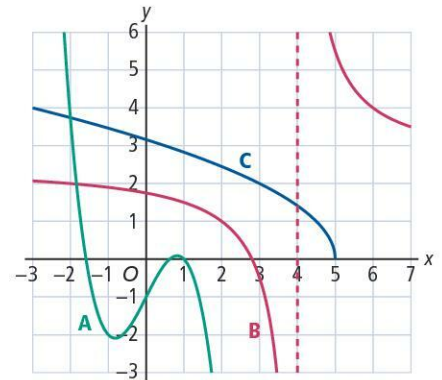
Gegeven zijn de functie $f(x) = x^2 - 4x$ en de functies

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 + p.$$

- a Bereken voor $p = -3\frac{1}{2}$ exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en van g .
- b Voor welke waarde van p heeft de vergelijking $f(x) = g(x)$ precies één oplossing?

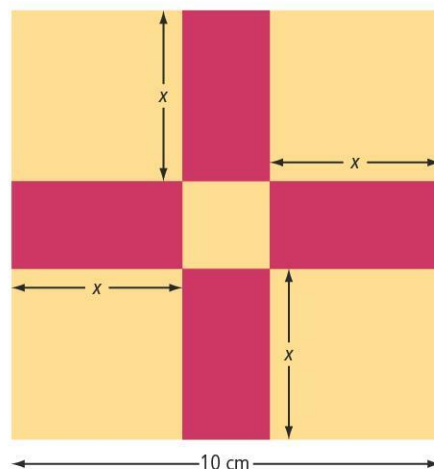
3.6 Gemengde opdrachten

- 39** Gegeven zijn de functies $f(x) = -3x^2 + 8x - 1$ en $g(x) = x^2 + 2x - 1$.
- Plot de grafieken van f en g .
 - Welke vensterinstelling heb je gebruikt?
 - Los de vergelijking $-3x^2 + 8x - 1 = x^2 + 2x - 1$ exact op.
 - Lees af voor welke waarden van x geldt $f(x) > g(x)$.
Schrijf je oplossing in de intervalnotatie.
- 40** Gegeven is de functie $f(x) = 2 - \frac{3}{x+1}$
- Plot en schets de grafiek van f .
 - Geef het domein en het bereik van f .
 - Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de lijn $y = -3x - 1$.
 - Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f en de parabool $y = 2x^2 - x - 5$.
- 41** Gegeven is de functie $h(x) = 3 - \frac{6}{x^2 - 5}$
- Bereken exact het domein van h .
 - Stel vergelijkingen op van de verticale asymptoten van de grafiek van h .
 - Stel ook een vergelijking op van de horizontale asymptoot.
 - Geef het bereik van h . Plot zo nodig de grafiek.
- 42** In het assenstelsel staan de grafieken van de functies
- $$f(x) = -x^3 + 2x - 1$$
- $$g(x) = \frac{5x - 14}{2x - 8}$$
- $$h(x) = \sqrt{10 - 2x}$$
- Welke grafiek hoort bij welke functie?
 - Geef van elk van de functies het domein en het bereik.



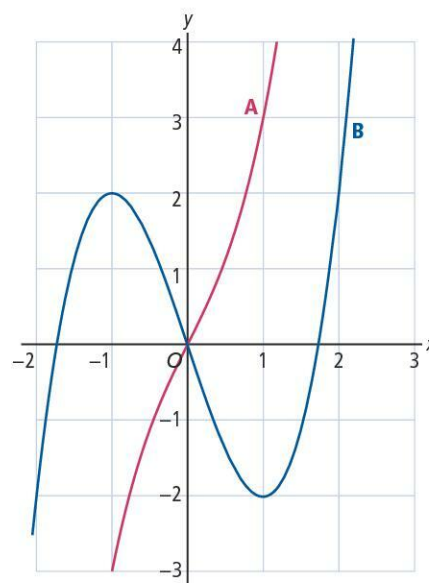
- 43** In een vierkant van 10 bij 10 cm wordt een gekleurd kruis getekend. Iedere arm van dit kruis is x cm lang. De totale oppervlakte van de rode delen hangt af van de waarde van x . Dit geldt ook voor de totale oppervlakte van de gele delen.

Druk alle lengtes uit in x en onderzoek algebraïsch of er een waarde van x bestaat waarvoor de totale oppervlakte van de rode delen gelijk is aan de totale oppervlakte van de gele delen.



- 44** Deze opdracht gaat over derdegraadsfuncties van de vorm $f(x) = x^3 + ax + b$.

- Wat weet je van de waarden van a en b als gegeven is dat de grafiek van f door de oorsprong gaat?
- Wat weet je van de waarden van a en b als gegeven is dat de grafiek zowel door de oorsprong als door het punt $(1, 3)$ gaat, zoals grafiek A?
- Wat weet je van de waarden van a en b als gegeven is dat de grafiek van f door de oorsprong gaat en de x -as ook in twee andere punten snijdt, zoals grafiek B?



Theorie

Functie en functievoorschrift

In de formule $y = 3x + 5$ is y een functie van x . Je schrijft ook wel $f(x) = 3x + 5$, het functievoorschrift van de functie f .

Bij de opdracht 'Bereken $f(14)$,' vul je $x = 14$ in de functie in.

De uitkomst heet de functiewaarde bij $x = 14$.

De functie $f(x) = 3x + 5$ is een lineaire functie,

$g(x) = x^2 + x - 12$ is een kwadratische functie,

$h(x) = 5$ is een constante functie. De grafiek van h is een horizontale lijn door het punt $(0, 5)$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 3x + 5$.

Bereken $f(14)$ en los op $f(x) = 14$.

Oplossing

$$f(14) = 3 \cdot 14 + 5 = 47$$

$$f(x) = 14 \text{ geeft } 3x + 5 = 14$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

S1 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 5x$.

a Bereken $f(6)$.

b Los op $f(x) = 6$.

Theorie

Intervalnotatie

Op de getallenlijn zijn de getallen groter dan 3 en kleiner dan of gelijk aan 7 aangegeven. Zo'n interval noteer je als $\langle 3, 7]$.

De puntige haak betekent dat de grenswaarde niet meedoet, de rechte haak betekent dat de grenswaarde wel meedoet.

Als er aan één zijde geen grens is, geef je dit aan met een pijl en een puntige haak.

Bij meerdere intervallen gebruik je het verenigingssteken: $\cup$.

Voorbeeld

ongelijkheid $3 < x \leq 7$



interval $\langle 3, 7]$

S2 Geef bij elke ongelijkheid de bijbehorende intervalnotatie.

a $-30 \leq x \leq 70$

b $x > 28$

c $x \leq 0$

d $x \neq -1$

Theorie

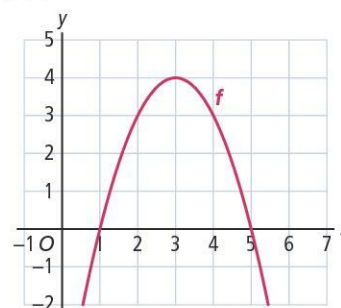
Domein en bereik, het symbool $\mathbb{R}$

Alle waarden van x waarvoor een functiewaarde $f(x)$ bestaat vormen samen het domein van die functie. Alle uitkomsten vormen het bereik.

Als er voor het domein of bereik geen beperkingen zijn, dan noteer je dit als $\mathbb{R}$, dat is de verzameling van alle (reële) getallen.

Voorbeeld

$$f(x) = -x^2 + 6x - 5$$



De top van de grafiek is (3, 4).

Het domein is $\mathbb{R}$, het bereik is $\langle \leftarrow, 4 \rangle$.

S3 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2\sqrt{x+1}$ en $g(x) = \frac{6}{x^2+3}$

Van welke functie is het domein $\mathbb{R}$?

Theorie

Soorten functies

- constante functies: $f(x) = a$
- lineaire of eerstegraads functies: $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$)
- kwadratische of tweedegraads functies:
 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)
- machtsfuncties: $f(x) = x^m$
- veeltermfuncties:
 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$
De hoogste macht in een veeltermfunctie is de graad van die functie.
- wortelfuncties: de variabele komt voor onder het wortelteken.
- gebroken functies: de variabele komt in de noemer voor.

S4 Geef van elke functie aan van welke soort de functie is.

a $f(x) = (2x - 1)(x + 5)$

d $k(x) = \sqrt{5 - 6x}$

b $g(x) = \sqrt{7}$

e $m(x) = x^{11}$

c $h(x) = \frac{2x}{x^2 + 12}$

f $m(x) = 2 + 3x - x^3 + x^4$

Vaardigheid

Je kunt het domein en het bereik van een functie vaststellen.

Kijk goed naar de kenmerken van de verschillende soorten functies en maak zo nodig een plot of schets van de grafiek.

Voorbeeld 1

Bepaal het domein en het bereik van

$$f(x) = 4 + \sqrt{10 - 2x}.$$

Oplossing

f heeft alleen functiewaarden als $10 - 2x \geq 0$, dus als $x \leq 5$. Het domein is $\langle \leftarrow, 5 \rangle$.

$\sqrt{10 - 2x}$ kan geen negatieve waarden aannemen.

Het bereik is $[4, \rightarrow)$.

Voorbeeld 2

Bepaal het domein en het bereik van

$$g(x) = 8 + \frac{3}{1 - x}$$

Oplossing

$g(1)$ bestaat niet. Het domein is $\langle \leftarrow, 1 \rangle \cup \langle 1, \rightarrow \rangle$.

De tweede term van $g(x)$ kan alle waarden aannemen behalve 0.

Het bereik van g is $\langle \leftarrow, 8 \rangle \cup \langle 8, \rightarrow \rangle$.

- S5** Geef van elke functie het domein en het bereik. Schrijf je antwoord in de intervalnotatie.

a $f(x) = -1 + 2\sqrt{x + 6}$

b $g(x) = 5 + \frac{8}{2x - 5}$

Vaardigheid

Je kunt vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek van een gebroken functie vinden.

Bij gebroken functies heeft de grafiek een verticale asymptoot bij de waarde van x waarvoor de noemer gelijk is aan 0.

De grafiek van een functie heeft een horizontale asymptoot als de functiewaarden voor waarden van x die steeds verder van 0 liggen, tot een bepaalde waarde naderen.

Voorbeeld

Welke asymptoten heeft de grafiek van de functie

$$f(x) = -6 + \frac{25}{3x - 15}?$$

Oplossing

De noemer van $f(x)$ is gelijk aan 0 als $3x = 15$.

De verticale asymptoot is $x = 5$.

Als x steeds verder van 0 ligt, komen de functiewaarden steeds dichterbij -6 .

De horizontale asymptoot is $y = -6$.

- S6** Stel voor elke functie vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek op.

a $h(x) = 3 - \frac{15}{2x - 9}$

b $k(x) = 10 + \frac{8}{x^2 - 4}$

Vaardigheid

Je kunt uit de vraagstelling opmaken of je een vergelijking met je rekenmachine mag oplossen.

Als in de opdracht staat: Bereken exact of: Los algebraïsch op, dan moet je het probleem met algebra oplossen. Bij 'bereken exact' moet je bovendien een exact antwoord geven.

In alle andere gevallen mag je ervoor kiezen een vergelijking op te lossen met de rekenmachine.

Voorbeeld

Los exact op $x - 2 = \sqrt{x}$.

Oplossing

$$(x - 2)^2 = x$$

$$x^2 - 4x + 4 = x$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x - 1)(x - 4) = 0$$

$$x = 1 \text{ of } x = 4$$

Alleen de oplossing $x = 4$ voldoet.

- S7** **a** Los exact op $4 + \frac{10}{3x - 1} = 3x$.
- b** Los op $4 + \frac{10}{3x - 1} = -x + 9$. Rond af op twee decimalen.

T1 Geef van elke functie het domein en het bereik.
Schrijf je antwoord in de intervalnotatie.

a $f(x) = \frac{1}{x-4}$

c $h(x) = \frac{5}{2x-9} - 7$

b $g(x) = \sqrt{4x+10} - 6$

d $k(x) = 2 + \frac{5}{\sqrt{5x+20}}$

T2 De grafieken van de functies $g(x) = -2 + \frac{5}{6-2x}$ en $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$ hebben één of meer asymptoten.

Geef van elke asymptoot een vergelijking.

T3 **a** Welke van de vergelijkingen A, B, C, D, E en F zijn exact op te lossen?
b Los deze vergelijkingen exact op.
c Los de andere vergelijking(en) op met je rekenmachine.

A $3\sqrt{4x-1} = 5$

D $16x^2 + 9 = 24x$

B $8(x+2)^2 = x^3 + 1$

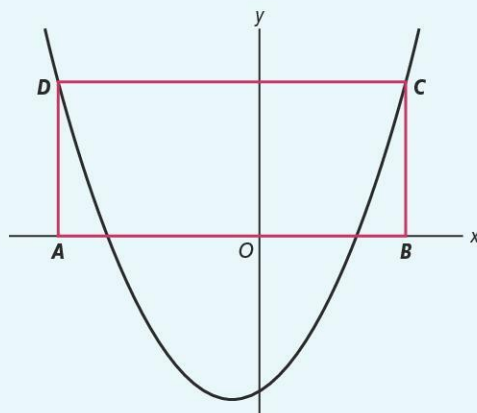
E $8 + \sqrt{4-x} = 10$

C $x^4 + 8x = 0$

F $\frac{x-4}{x-3} = x$

T4 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 10$.
Van een rechthoek $ABCD$ liggen de hoekpunten A en B op de x -as, de hoekpunten C en D liggen op de grafiek van f .
 $AB = 14$.

- a** Toon met een berekening aan dat het punt $(-1, -10\frac{1}{2})$ de top van de parabool is.
b Welke coördinaten heeft B ?
c Bereken exact de hoogte van de rechthoek.



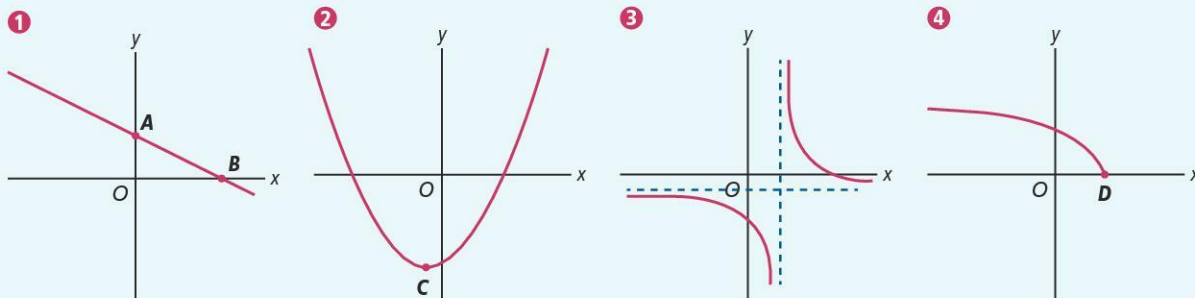
T5 De grafieken horen bij de functievoorschriften:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 3$$

$$g(x) = \sqrt{9 - 2x}$$

$$h(x) = -1 + \frac{1}{x-2}$$

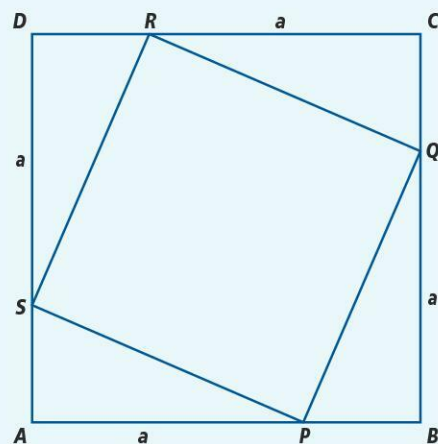
$$k(x) = 3 - \frac{1}{2}x$$



- Welke grafiek hoort bij welk functievoorschrift?
- Bereken exact de coördinaten van de punten die met de letters A , B , C of D zijn aangegeven.
- Eén grafiek heeft asymptoten.
Geef van elke asymptoot een vergelijking.
- Geef het domein en het bereik van elk van de vier functies.
- Los op $g(x) < 4$.

T6 In de tekening is vierhoek $ABCD$ een vierkant met $AB = 6$ en $AP = BQ = CR = DS = a$.

- Druk AS en de oppervlakte van $\triangle APS$ uit in a .
- De oppervlakte O van vierkant $PQRS$ is een functie van a .
Toon aan dat $O(a) = 2a^2 - 12a + 36$.
- Bereken de minimale oppervlakte van vierkant $PQRS$ en de waarde van a waarvoor dit minimum wordt bereikt.
- Welke waarden kan a aannemen?
- Welke waarden kan O aannemen?
- Bereken voor welke waarden van a de oppervlakte van vierkant $PQRS$ groter is dan 30.



Je kunt het domein en het bereik van een functie vaststellen.

- E1** Geef het domein en het bereik.
Geef je antwoorden in de intervalnotatie.

a $f(x) = x^2 - 8x$ **c** $h(x) = -2 + \sqrt{4x - 30}$
b $g(x) = \frac{45}{x^2 + 9}$ **d** $k(x) = \frac{2}{3}(x - 6)^2 + 7$

Je kunt de vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek van een gebroken functie vinden.

- E2** De grafieken van de functies hebben één of meer asymptoten.
Geef van elke asymptoot een vergelijking.

a $f(x) = 4 + \frac{5}{x - 2}$ **c** $h(x) = \frac{12}{x^2 + 9}$
b $g(x) = 18 - \frac{6}{7x + 14}$ **d** $k(x) = \frac{6}{x^2 - 9} - 9$

Je kunt uit de vraagstelling opmaken of je een vergelijking met je rekenmachine mag oplossen.

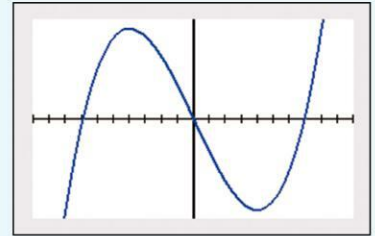
- E3** **a** Los exact op. **b** Los op.
A $-\frac{2}{x} + x = 1$ **C** $0,3x^3 - 8x^2 + x = 10$
B $(x - 5)\sqrt{x + 1} = 6\sqrt{x + 1}$ **D** $5x\sqrt{3x + 1} = 4$

- E4** **a** Welke van de vergelijkingen A, B, C, D, E, F, G en H zijn exact op te lossen?
b Los deze vergelijkingen exact op.
c Los de andere vergelijkingen op met je rekenmachine.

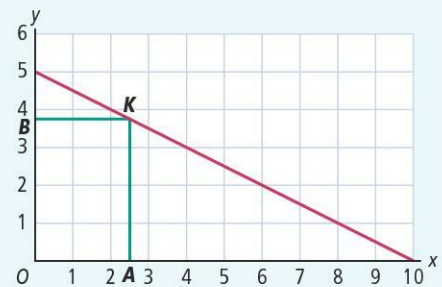
A $2x^3 + 3x = 5x^2$ **E** $(x - 3)(2x + 1) = x^2 - 9$
B $(2x - 3)^4 = \sqrt{x + 20}$ **F** $2x - 5 = \sqrt{10 - x^2}$
C $x = 2 + \sqrt{x - 1}$ **G** $x^3 + 2x^2 = 9x + 18$
D $\frac{x}{x + 4} = \frac{5}{x - 3}$ **H** $\frac{3}{x + 1} = -4x^2 + 2x + 6$

- E5** Gegeven is de functie $f(x) = -2 + \sqrt{4 - 3x}$.
- Bereken de coördinaten van het randpunt van de grafiek.
 - Schrijf het domein en het bereik van f in de intervalnotatie.
 - Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de x -as.
 - Los exact op $f(x) = 3$.
 - Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de grafiek van de functie $g(x) = -x - 2$.
 - Plot de grafieken van f en g en los exact op $f(x) > g(x)$.

- E6** Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 48x$.
- Met welke instellingen van het venster van je rekenmachine krijg je een plot van de grafiek zo in beeld?
 - Bereken exact de nulpunten van f .
 - Los op $f(x) = 95$.
Rond je antwoord af op twee decimalen.
 - Los op $f(x) < -125$.
Geef je antwoord in de intervalnotatie en rond af op twee decimalen.



- E7** In de figuur ligt punt K op de lijn met vergelijking $y = -\frac{1}{2}x + 5$. Punt K is een hoekpunt van de rechthoek $OAKB$ waarbij A op de positieve x -as en B op de positieve y -as ligt.
- Neem $A(3, 0)$.
Bereken exact de coördinaten van B en K en de oppervlakte van rechthoek $OAKB$.
 - Neem $A(\sqrt{2}, 0)$ en bereken de exacte oppervlakte van rechthoek $OAKB$.
 - Kies $A(p, 0)$.
Geef het functievoorschrift van de functie O die bij de oppervlakte van rechthoek $OAKB$ hoort.
 - Geef het domein van O .
 - Bereken exact bij welke waarde van p de oppervlakte maximaal is. Hoe groot is de maximale oppervlakte?





SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In de onderbouw heb je kennis gemaakt met exponentiële groei en hoe je daarbij een exponentiële formule opstelt. Je hebt geleerd hoe je de groeifactor bij een exponentieel verband kunt berekenen.

In dit hoofdstuk leer je hoe de grafiek van een exponentiële functie eruit ziet en hoe je de groeifactor kunt bepalen voor een andere tijdseenheid. Je leert welke gevolgen het verschuiven van een grafiek of het vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as heeft voor het functievoorschrift. Verder ontdek je wanneer en hoe je een exponentiële vergelijking of ongelijkheid exact oplost.

In de praktijk worden exponentiële functies gebruikt als je werkt met groeipercentages. De kennis van exponentiële functies krijgt een vervolg in deel 2, in hoofdstuk 8 Logaritmische functies.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Formules manipuleren* opdracht 24
- *Modelleren en algebraïseren* opdracht 42
- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 43



V1 Vul in.

- a 60% van €80,- = $0,60 \times €80,- = € \dots$
- b 79% van €12,50 = $0, \dots \times \dots = € \dots$
- c 51% van €98,- = $\dots \times \dots = \dots$
- d $2,5\%$ van €950,- = $\dots$

- V2
- a Je krijgt 25% korting op een broek van €89,-. Met welk getal moet je de prijs vermenigvuldigen om de nieuwe prijs te vinden?
 - b Bereken de nieuwe prijs van de broek.
 - c Op een nota is de prijs exclusief btw €39,87. Bereken met een vermenigvuldiging de prijs inclusief 21% btw.

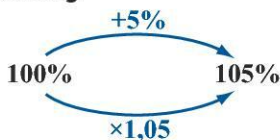
Theorie

Als een hoeveelheid met een bepaald percentage toeneemt of afneemt kun je de nieuwe hoeveelheid berekenen met de **groeifactor**, dat is het getal waar je de hoeveelheid mee vermenigvuldigt.

Voorbeeld

Bereken de groeifactoren bij een toename van 5% en bij een afname van 8%.

Oplossing



Bij een toename van 5% hoort een groeifactor 1,05.



Bij een afname van 8% hoort een groeifactor 0,92.

V3 Bereken de groeifactor bij de gegeven tijdseenheid.

- a De dagelijkse toename van een bacteriepopulatie is 3%.
- b Sara's salaris groeit met 0,7% per jaar.
- c De visstand in een meer neemt elke vijf jaar af met 17%.
- d Het aantal cellen neemt iedere tien minuten met 200% toe.

V4 Paul wil een stofzuiger aanschaffen. Hij komt in een winkel een demonstratiemodel tegen waarop 25% korting wordt gegeven. Hij besluit het apparaat te kopen. Aan de kassa berekent de verkoper het eindbedrag door eerst de korting af te trekken en daarna de btw (21%) erbij op te tellen. Paul protesteert: 'Dat lijkt me niet eerlijk. Moet het niet andersom: eerst de btw erbij en dan de korting eraf?' Reken na wat voor Paul voordeliger is, de methode van de verkoper of die van hemzelf.

- V5** Johan opent op 1 januari 2020 een spaardeposito van €5.000,- met een vast rentepercentage van 1,05% per jaar.
- Bereken het saldo na twee jaar en na vijf jaar.
 - Leg uit dat je het saldo na t jaar kunt berekenen met de formule $S = 5000 \cdot 1,0105^t$.

Theorie

Een groeiproces waarbij de hoeveelheid per tijdseenheid met hetzelfde positieve getal wordt vermenigvuldigd heet een **exponentieel groeiproces**.

De hoeveelheid op tijdstip $t = 0$ heet de **beginhoeveelheid**. Bij exponentiële groei met b als beginhoeveelheid en g als groeifactor per tijdseenheid hoort de exponentiële formule $N = b \cdot g^t$.

Voorbeeld

Het aantal bacteriën in een schaalpje is op $t = 0$ gelijk aan 2000. Elk kwartier neemt dit aantal met 5% toe. Stel een formule op voor het aantal bacteriën N op tijdstip t , met t in uren.

Oplossing

De beginhoeveelheid is 2000.

De groeifactor per kwartier is 1,05.

De groeifactor per uur is $1,05^4 \approx 1,22$.

Een formule voor het aantal bacteriën met t in uren is $N = 2000 \cdot 1,22^t$.

- V6** Bij een groeiproces is de groeifactor per uur gelijk aan 1,078.
- Hoe groot is het groeipercentage per uur?
 - Hoe groot zijn de groeifactor en het groeipercentage per twee uur?
 - Hoe groot zijn de groeifactor en het groeipercentage per week?
- V7** Stel een formule op. Vermeld de gebruikte tijdseenheid.
- De dagelijkse toename van een bacteriepopulatie is 13,2% en de beginhoeveelheid is 216 miljoen.
 - De visstand in een groot meer neemt elke vijf jaar af met 14%. Het meer bevat nu nog 5000 ton vis.

4.1 Grafieken van exponentiële functies

Je leert

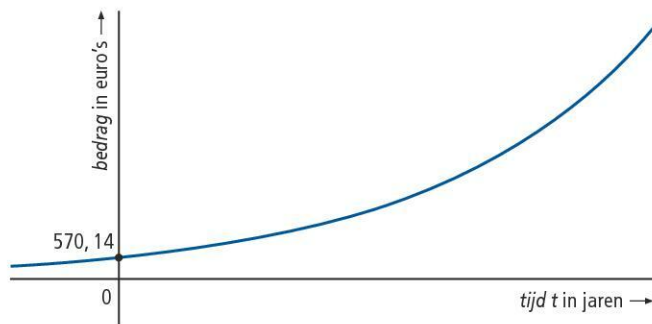
- hoe de grafiek van een exponentiële functie eruitziet
- hoe je de groeifactor aanpast aan een andere tijdseenheid

Leerroutes

- ondersteunend: 1–2–3–4–05–6–07–7–8–9
- doorlopend: 1–2–3–4–5–6–7–8–9–10
- uitdagend: 1–2–4–5–6–8–9–10–U1–U2

Sonja krijgt op haar spaarrekening elk jaar 1,1% rente. Ze is begonnen met een vast bedrag en verder worden geen bedragen bijgestort. Op haar twaalfde verjaardag staat er 570,14 euro op haar rekening. In de grafiek zie je het verloop van haar saldo.

- Wat betekent $t = 0$ hier en wat geeft het deel van de grafiek links van de y -as weer?



- Een onderneming moet worden ingeschreven bij de Kamer van Koophandel (KvK). De onderneming van Fieke loopt goed. Haar onderneming maakt jaarlijks een verdubbeling van de omzet mee. In 2017 schrijft ze zich in bij de KvK. De jaaromzet bedraagt in dat jaar € 10.000,-.

 - Welk getal komt er bij de pijltjes onder de tabel te staan?
 - Leg uit dat de formule $O = 10 \cdot 2^t$ met O in duizenden euro's en t in jaren de jaaromzet van Fieke beschrijft.
 - Hoe hoog zal volgens de formule de jaaromzet in 2030 zijn?
 - Teken een grafiek bij de tabel.
 - Er is sprake van een stijging. Hoe kun je dit aan de formule zien?

jaar	2017	2018	2019	2020
t in jaren	0	1	2	3
omzet O in duizenden euro's	10	...	...	...

Below the table, there are three curved arrows pointing from the '10' in the first row to the '...', '...', and '...' in the subsequent rows, each labeled with 'x ...'.

- De jaaromzet verdubbelde zich ook al enkele jaren voor 2017.

 - Welk getal komt er bij de pijltjes onder de tabel te staan?
 - Hoe hoog was de jaaromzet in 2010?
 - Vul de tabel in.
 - Plot en schets de grafiek van $O = 10 \cdot 2^t$ voor $t = -3$ tot en met $t = 3$.

jaar	2014	2015	2016	2017
t in jaren	-3	-2	-1	0
omzet O in duizenden euro's	...	...	...	10

Below the table, there are three curved arrows pointing from the '10' in the first row to the '...', '...', and '...' in the subsequent rows, each labeled with 'x ...'.

- Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 \cdot 3^x$, $g(x) = 0,5 \cdot 1,65^x$, $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $k(x) = 10 \cdot 0,7^x$ en $m(x) = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

 - Plot de grafiek van elk van deze functies en leg uit hoe je aan het functievoorschrift kunt zien of de functie stijgend of dalend is.
 - Welke lijn is asymptoot van alle vijf grafieken?
 - Geef het domein en het bereik van elk van deze functies.

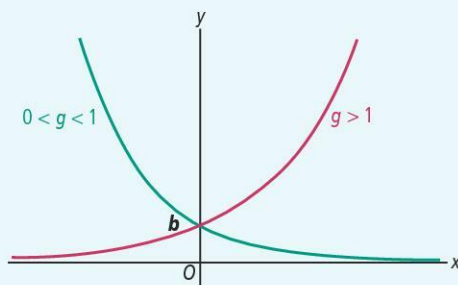
Theorie

Een **exponentiële functie** heeft de vorm $f(x) = b \cdot g^x$. Voor $b > 0$ geldt dat de functie stijgend is als $g > 1$ en dalend als $0 < g < 1$. Omdat $f(0) = b$ snijdt de grafiek van f de y -as in het punt $(0, b)$.

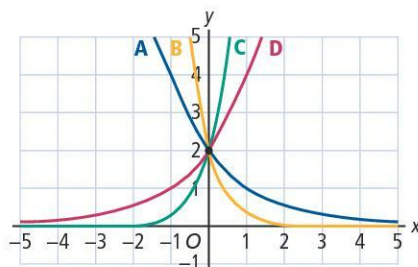
De grafiek van f heeft de x -as als horizontale asymptoot.

Het domein van f is $\mathbb{R}$.

Het bereik van f is $\langle 0, \infty \rangle$.



- 4** Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x) = 2 \cdot 2^x$, $g(x) = 2 \cdot 6^x$, $h(x) = 2 \cdot 0,5^x$ en $i(x) = 2 \cdot 0,1^x$.
- Door welk punt gaan alle grafieken? Hoe kun je dit zien in de functievoorschriften?
 - Welke grafiek hoort bij welke functie?
 - Alle vier grafieken hebben dezelfde horizontale asymptoot. Geef een vergelijking van deze asymptoot.



Ondersteunende route → maak opdracht 05

- 5** Gegeven zijn vier exponentiële functies.
- Welke van de functies zijn stijgend?
 - Van welke functie gaat de bijbehorende grafiek door het punt $(0, 1)$?
 - Geef het domein en het bereik van h .
 - Plot en schets de grafiek van k .
 - Geef een vergelijking van de asymptoot van de grafiek van k .

$f(x) = 20 \cdot 1,5^x$	$g(x) = 0,9^x$
$h(x) = 3 \cdot 0,7^x$	$k(x) = 2 \cdot 1,01^x$

- 6** Het aantal algen A in een sloot wordt per week twee keer zo groot. Op het tijdstip $t = 0$ zijn er 500 algen per cm^3 .
- Hoe groot is de groeifactor per week?
 - Geef het bijbehorende functievoorschrift met t in weken.
 - Vul de tabel in.
 - Laat zien dat de groeifactor per halve week $2^{\frac{1}{2}}$ is.
 - Met welke macht van 2 bereken je de groeifactor per dag?
 - Bereken de groeifactor per dag in drie decimalen.

t in weken	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2
aantal algen A	...	...	...	...	...
	×	×	×	×	×

Theorie

Voor groeifactoren geldt:

Als g de groeifactor per tijdseenheid is, dan is $g^{\frac{1}{n}}$

(ook te schrijven als $\sqrt[n]{g}$) de groeifactor voor

een n -de deel van die tijdseenheid. Zo is bijvoorbeeld

$g^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{g} = \sqrt{g}$ de groeifactor voor een halve tijdseenheid.

Voorbeeld

De groeifactor per jaar is 3,25. Hoe groot is de groeifactor per maand, per week en per dag?

Geef je antwoord in drie decimalen.

Oplossing

De groeifactor per maand is $3,25^{\frac{1}{12}} \approx 1,103$.

De groeifactor per week is $3,25^{\frac{1}{52}} \approx 1,023$.

De groeifactor per dag is $3,25^{\frac{1}{365}} \approx 1,003$.

Ondersteunende route → maak opdracht 07

- 7** Bij een groeiproses is 1,5 de groeifactor per dag.

H Geef je antwoord in drie decimalen.

- a** Bereken de groeifactor per week.
- b** Bereken de groeifactor per halve dag.
- c** Bereken de groeifactor per acht uur.
- d** Bereken de groeifactor per uur.

- 8** Een bacteriekolonie groeit met 15% per halve dag.

- a** Hoe groot is de groeifactor per halve dag?
- b** Bereken de groeifactor per uur.
- c** Met hoeveel procent neemt het aantal bacteriën per uur toe?
Rond af op één decimaal.

- 9** **a** Een insectenpopulatie neemt exponentieel toe met 60% per etmaal.

Bereken de procentuele toename per acht uur.

- b** Een vispopulatie neemt exponentieel af met 4% per vijf jaar.

Bereken de procentuele afname per 15 jaar.

- c** Het aantal inwoners van een land groeit exponentieel met 70% per 20 jaar.

Hoe groot is de jaarlijkse procentuele groei?



- 10** De tabel hoort bij een exponentieel groeiproses.

- a** Stel een functievoorschrift van f op met t in jaren.
- b** Stel een functievoorschrift op voor de functie g die hetzelfde groeiproses beschrijft maar nu met t in maanden.

t in jaren	2	6
$f(t)$	36	2916

Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2

Ondersteunende opdrachten

- 05** Gegeven zijn de functies $f(x) = 7 \cdot 0,8^x$ en $g(x) = 1,4^x$.
- Plot de grafiek van f en bepaal hiermee of de functie stijgend of dalend is.
 - Hoe zie je aan de groeifactor van f of de functie stijgend of dalend is?
 - Zijn er waarden van x waarvoor er geen functiewaarde $f(x)$ bestaat?
 - Welke functiewaarden kunnen worden verkregen?
 - Gebruik de tekst op het blaadje om het domein en het bereik van f te bepalen.
 - De groeifactor van g is 1,4. Is g stijgend of dalend?
 - Geef ook het domein en het bereik van g .
 - Geef vergelijkingen van de asymptoten van de grafieken van f en g .

Alle waarden van x waarvoor de functiewaarde $f(x)$ bestaat, vormen samen het domein van f . Alle functiewaarden die kunnen voorkomen, vormen het bereik van de functie.

- 07** Bij een exponentieel verband is de groeifactor 1,03 per uur.
- Leg uit dat voor de groeifactor per zeven uur geldt:
 $1,03 \times 1,03 \times 1,03 \times 1,03 \times 1,03 \times 1,03 \times 1,03 = 1,03 \dots\dots$
 - Bereken de groeifactor per zeven uur in drie decimalen.
 - Voor de groeifactor g per kwartier geldt:
 $g \times g \times g \times g = g^4 = 1,03$.
 Vul in: $g = 1,03 \dots = \dots$ en bereken g in drie decimalen.
 - Bereken in vijf decimalen de groeifactor per minuut.

Uitdagende opdrachten

- U1** Een muggenpopulatie groeit. In de tabel zie je het aantal muggen op 1 juni, op 18 juni en op 30 juni. Laat zien dat hier bij benadering sprake kan zijn van exponentiële groei en bereken de procentuele toename per week.

<i>dag</i>	1 juni	18 juni	30 juni
<i>aantal muggen</i>	2360	7180	15 750

- U2** EPO is een van de verboden middelen op de dopinglijst bij verschillende topsporten. Kort gezegd zorgt EPO voor de aanmaak van meer rode bloedcellen. Als EPO wordt ingespoten heeft het een halfwaardetijd van 8 uur.
- Toon aan dat de groeifactor per uur ongeveer 0,917 is.
 - Bereken hoelang het duurt tot er nog maar 1% van de ingespoten hoeveelheid stof aanwezig is in het lichaam.

De halfwaardetijd is de tijd waarna van een hoeveelheid stof nog de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid aanwezig is.

4.2 Transformaties

Je leert

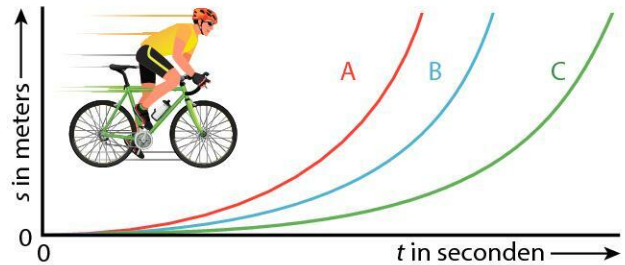
- hoe je na een verschuiving het functievoorschrift opstelt van de beeldgrafiek
- hoe je na een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as het functievoorschrift opstelt van de beeldgrafiek

Leerroutes

- ondersteunend: 11–12–013–13–14–15–16–17–018
- doorlopend: 11–12–13–14–15–16–17–18–19
- uitdagend: 11–13–14–15–16–17–18–19–U3

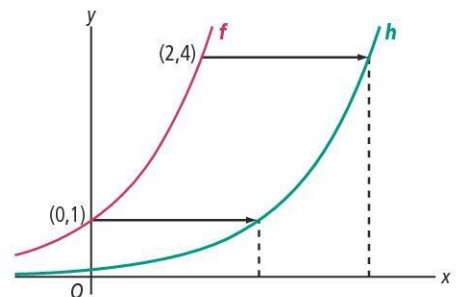
De wielrenners Robert, Bram en Steven rijden een tijdrit. De grafieken geven het verband tussen de tijd en de afgelegde afstand gedurende de eerste 20 seconden. Bram legt elke seconde twee keer zoveel meters af als Steven. Robert rijdt net zo snel als Bram, maar bij de start had hij enkele seconden vertraging.

- Leg uit welke grafiek bij welke wielrenner hoort.



- 11**
- Plot en schets in één figuur de grafieken van $f(x) = 3^x$ en $g(x) = 3^x - 5$.
 - Geef vergelijkingen van de asymptoten van beide grafieken.
 - Omschrijf hoe je de grafiek van g uit de grafiek van f kunt laten ontstaan.

- 12** Gegeven zijn de grafieken van $f(x) = 2^x$ en $h(x) = 2^{x-3}$.
- De grafiek van f gaat door de punten $(0, 1)$ en $(2, 4)$, want $f(0) = 2^0 = 1$ en $f(2) = 2^2 = 4$.
Voor welke waarde van x geldt $h(x) = 1$? En $h(x) = 4$?
 - Vul in: de grafiek van h ontstaat door de grafiek van f ... naar ... te verschuiven.
 - Geef vergelijkingen van de asymptoten van beide grafieken.



Theorie

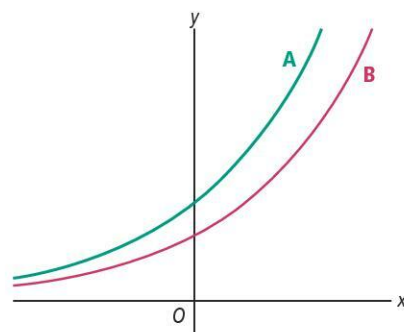
Als de grafiek van een functie f de afstand d omhoog wordt verschoven, worden alle functiewaarden d groter.
Het functievoorschrift van de beeldgrafiek is $g(x) = f(x) + d$.
Als de grafiek van een functie f de afstand van c naar rechts wordt verschoven, dan is $g(x) = f(x - c)$ het functievoorschrift van de beeldgrafiek.
Een verschuiving heet ook wel een **translatie**.

Voorbeeld

De grafiek van $f(x) = 2^x$ wordt 4 eenheden omlaag verschoven.
Het functievoorschrift van de beeldgrafiek is $g(x) = 2^x - 4$.
De grafiek van $f(x) = 2^x$ wordt 4 eenheden naar links verschoven.
Het functievoorschrift van de beeldgrafiek is $h(x) = 2^{x+4}$.

Ondersteunende route → maak opdracht 013

- 13** Gegeven is de functie $f(x) = 1,5^x$.
H Geef het functievoorschrift en een vergelijking van de asymptoot van de beeldgrafiek van f na:
- a een translatie 2 naar rechts.
 - b een translatie 5 omlaag.
 - c translaties 4 omhoog en daarna 2 naar links.
 - d translaties 3 naar rechts en daarna 5 omlaag.
- 14** Geef de translaties waarbij de grafiek van $g(x) = 0,6^{x+4} - 3$ de beeldgrafiek is van $f(x) = 0,6^x$.
- 15** Gegeven zijn de grafieken van $f(x) = 2^x$ en $g(x) = 1,5 \cdot 2^x$.
- a Beschrijf welke grafiek bij welke functie hoort.
 - b Geef van beide grafieken de coördinaten van het snijpunt met de y -as.
 - c Op de grafiek van f ligt het punt $(6, 64)$, want $f(6) = 2^6 = 64$. Op de grafiek van g ligt ook een punt met x -coördinaat 6.
Bereken de y -coördinaat van dat punt.
 - d Wat kun je zeggen over de y -coördinaten van twee punten op de grafieken van f en g met gelijke x -coördinaat?
 - e Plot en schets de grafieken van $f(x) = 2^x$ en $h(x) = -2^x$.
 - f Hoe liggen de grafieken van f en h ten opzichte van elkaar?



Theorie

Bij een **vermenigvuldiging van de grafiek** van een functie f **ten opzichte van de x -as** met factor a worden alle functiewaarden met factor a vermenigvuldigd. Het functievoorschrift van de beeldgrafiek is $g(x) = a \cdot f(x)$. Een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor -1 komt overeen met een spiegeling in de x -as. Verschuivingen, vermenigvuldigingen en spiegelingen zijn voorbeelden van **transformaties**.

Voorbeeld

De grafiek van g ontstaat door de grafiek van $f(x) = 1,5^x$ te vermenigvuldigen met 3 ten opzichte van de x -as. Geef het functievoorschrift $h(x)$ van de beeldgrafiek.

Oplossing

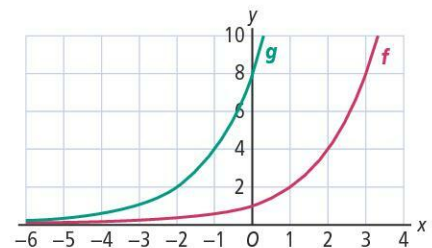
$$h(x) = 3 \cdot f(x) \text{ dus}$$

$$h(x) = 3 \cdot 1,5^x$$

- 16** Gegeven is de functie $f(x) = 1,2^x$.
H Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek na:
- een vermenigvuldiging met factor 5 ten opzichte van de x -as.
 - een vermenigvuldiging met factor 2 ten opzichte van de x -as.
 - een spiegeling in de x -as.
- 17** De grafiek van de functie $f(x) = 2^x$ wordt achtereenvolgens met 3 vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as en 4 omhoog verschoven.
- Geef het functievoorschrift $g(x)$ van de beeldgrafiek.
 - Geef het functievoorschrift $h(x)$ van de beeldgrafiek als de grafiek van f eerst 4 omhoog wordt verschoven en vervolgens wordt vermenigvuldigd met 3 ten opzichte van de x -as.

Ondersteunende route → maak opdracht 018

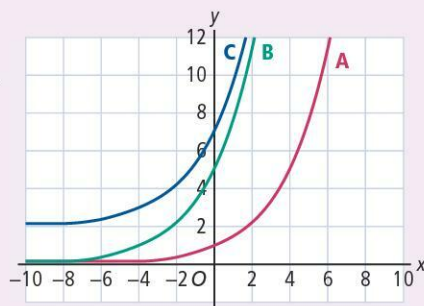
- 18** Er zijn twee manieren om met behulp van transformaties ervoor te zorgen dat de grafiek van $g(x) = 3 - 5 \cdot 2^x$ de beeldgrafiek is van $f(x) = 2^x$. Geef deze twee manieren.
- 19** Gegeven zijn twee grafieken. Eén grafiek is van de functie $f(x) = 2^x$. De grafiek van de functie g is verkregen uit die van f door een verschuiving van 3 naar links.
- Geef het functievoorschrift van g .
 - Je kunt de grafiek van f ook ten opzichte van de x -as vermenigvuldigen om de grafiek van g te krijgen. Met welke factor?



Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

- 013** Bij grafiek A hoort de functie $f(x) = 1,5^x$. Grafiek B is ontstaan uit grafiek A door een verschuiving van 4 naar links. Grafiek C is ontstaan door grafiek B 2 omhoog te verschuiven.



- Vul in: bij een verschuiving van 4 naar links moet je in het functievoorschrift x vervangen door $\dots$, dus bij grafiek B hoort het functievoorschrift $g(x) = 1,5^{\dots}$
- Vul in: bij een verschuiving van 2 omhoog tel je bij het functievoorschrift $\dots$ op, dus bij grafiek C hoort het functievoorschrift $h(x) = 1,5^{\dots} + \dots$
- De asymptoot van grafiek B is de lijn $y = 0$.
Geef een vergelijking van de asymptoot van grafiek C.

- 018** Gegeven is de functie $g(x) = 4 + 2 \cdot 3^x$. De grafiek van g is de beeldgrafiek van $f(x) = 3^x$. Je gaat de transformaties geven waarmee de beeldgrafiek is ontstaan.

- Vul in: als je het functievoorschrift van $f(x) = 3^x$ vermenigvuldigt met 2, dan wordt de grafiek met $\dots$ vermenigvuldigd ten opzichte van de $\dots$
- Vul in: als je bij een functievoorschrift 4 optelt, dan wordt de grafiek $\dots$ naar $\dots$ verschoven.
- Geef de transformaties waarmee de beeldgrafiek is ontstaan, let op de volgorde.
- Vul in: als je 2 optelt bij het functievoorschrift van f , dan wordt de grafiek $\dots$ naar $\dots$ verschoven en wordt het functievoorschrift van de beeldgrafiek $h(x) = \dots + 3^x$.
- Vul in: als je het functievoorschrift van opdracht d vermenigvuldigt met 2, dan wordt de grafiek met $\dots$ vermenigvuldigd ten opzichte van de $\dots$ en wordt het functievoorschrift van de beeldgrafiek $k(x) = 2 \cdot (2 + 3^x)$.
- Vergelijk het functievoorschrift van k met dat van g .
Wat valt je op?

Uitdagende opdrachten

- U3** Gegeven is de functie $f(x) = 0,5^x$.
De grafiek van f wordt eerst a naar links verschoven en daarna vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as met 16.
De beeldgrafiek valt vervolgens samen met de grafiek van f zelf.
Bereken a .

4.3 Herleiden

Je leert

- hoe je het functievoorschrift van een exponentiële functie herleidt tot de vorm $f(x) = b \cdot g^x$

Leerroutes

- ondersteunend: 20—21—22—023—23—024—25—26—27
- doorlopend: 20—21—22—23—24—25—26—27—28
- uitdagend: 20—21—22—24—25—26—28—U4—U5

Een kweker heeft twee nieuwe vijvers gemaakt. In de eerste vijver zet hij vijf vissen uit. Het aantal vissen verdubbelt ongeveer per jaar. Bij deze situatie wordt een grafiek getekend. Voor het aantal vissen in de tweede vijver wordt ook een grafiek getekend. Ten opzichte van de eerste grafiek is deze 3 naar links verschoven en met 2 vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as.

- Welke beginhoeveelheid en welke groeifactor hoort bij het aantal vissen in de tweede vijver?



- 20** Gegeven is de functie $f(t) = 2 \cdot 3^{-t-2}$.
- Ab zegt dat de beginhoeveelheid 2 en de groeifactor 3 is. Toon aan dat de uitspraken van Ab niet juist zijn.
 - Vul de tabel in met exacte waarden.
 - Bereken exact de beginhoeveelheid en de groeifactor. Je kunt hierbij gebruik maken van de tabel.
 - Schrijf het functievoorschrift van f in de vorm $f(t) = b \cdot g^t$.

t	0	1	2	3	4
$f(t)$	...	...	...	...	...

- 21** Welke herleidingen zijn onjuist?
- $4 \cdot 2^x = 8^x$
 - $4 \cdot 2^x = 2^2 \cdot 2^x = 2^{x+2}$
 - $4^x \cdot 2^x = (4 \cdot 2)^x = 8^x$
 - $4 + 2^x = 2^2 + 2^x = 2^{2+x}$
 - $4^x \cdot 2^x = 2^{2x} \cdot 2^x = 2^{2x^2}$
 - $4 \cdot 2^x = 2^2 \cdot 2^x = 2^{2x}$

- 22** Gegeven is de functie $f(x) = 2^{1-3x}$.
- Vul in: $2^{1-3x} = 2^{\dots} \cdot 2^{\dots} = \dots \cdot (2^{\dots})^x$
 - Het functievoorschrift van f is te schrijven als $f(x) = b \cdot g^x$. Welke waarden hebben b en g ?
 - Leid uit het antwoord van opdracht b af of f stijgend of dalend is.

Theorie

Het is mogelijk een functievoorschrift van een exponentiële functie met behulp van rekenregels tot de vorm $f(x) = b \cdot g^x$ te **herleiden**. Hierbij maak je gebruik van de rekenregels van machten.

Uit deze vorm kun je de beginhoeveelheid b en de groeifactor g aflezen. Ook kun je dan vaststellen of de functie stijgend of dalend is.

$g^0 = 1$	$g^{\frac{1}{2}} = \sqrt{g}$
$g^1 = g$	$g^p \cdot g^q = g^{p+q}$
$g^{-n} = \frac{1}{g^n}$	$\frac{g^p}{g^q} = g^{p-q}$
$g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$	$(g^p)^q = g^{p \cdot q}$

Voorbeeld 1

Herleid $f(t) = 3 \cdot 5^{2t+4}$ tot de vorm $f(t) = b \cdot g^t$ en geef de beginhoeveelheid en de groeifactor.

Oplossing

$$f(t) = 3 \cdot 5^{2t+4}$$

$$f(t) = 3 \cdot 5^{2t} \cdot 5^4$$

$$f(t) = 3 \cdot (5^2)^t \cdot 5^4$$

$$f(t) = 3 \cdot 625 \cdot 25^t$$

$$f(t) = 1875 \cdot 25^t$$

De beginhoeveelheid is 1875 en de groeifactor is 25.

Voorbeeld 2

Herleid $g(x) = 10 \cdot 4^{2-\frac{1}{2}x}$ tot de vorm $g(x) = b \cdot g^x$ en geef de beginhoeveelheid en de groeifactor.

Oplossing

$$g(x) = 10 \cdot 4^{2-\frac{1}{2}x}$$

$$g(x) = 10 \cdot 4^2 \cdot 4^{-\frac{1}{2}x}$$

$$g(x) = 10 \cdot 16 \cdot (4^{-\frac{1}{2}})^x$$

$$g(x) = 160 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

De beginhoeveelheid is 160 en de groeifactor is $\frac{1}{2}$.

Ondersteunende route → maak opdracht 023

23

H

Bereken met behulp van herleiden van elke functie de beginhoeveelheid en de groeifactor. Geef ook aan of de functie stijgend of dalend is.

a $f(x) = 3^{4x+2}$

d $g(t) = 4 \cdot 3^{2t+1}$

b $h(t) = 3^{-5t+7}$

e $k(x) = 0,6 \cdot 1,44^{2+0,5x}$

c $p(t) = 0,25^{3t-2}$

f $f(x) = 4^{0,5(x+1)}$

Ondersteunende route → maak opdracht 024

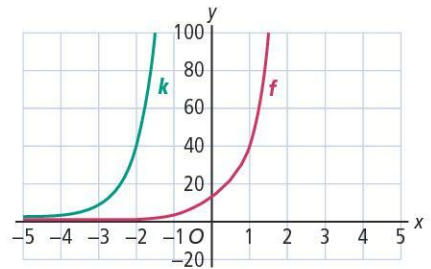
24

a Laat zien dat de functies $f(x) = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{4x}$ en $g(x) = 3^{2-4x}$ hetzelfde zijn.

b Dezelfde opdracht voor de functies $h(x) = 6 \cdot 2^{-x-3}$ en

$$k(x) = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

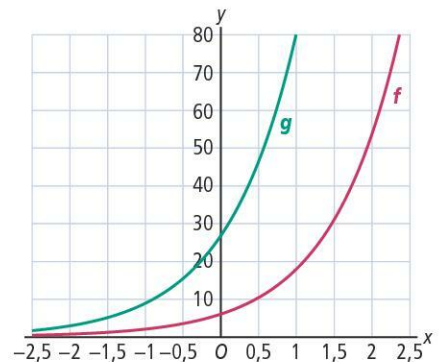
- 25** De grafiek van de functie $f(x) = 8 \cdot 5^x$ wordt 3 naar links verschoven.
- Geef het functievoorschrift $k(x)$ van de beeldgrafiek.
 - Toon aan dat het functievoorschrift van de beeldgrafiek te schrijven is als $k(x) = 1000 \cdot 5^x$.
 - De beeldgrafiek kan ook uit de grafiek van f ontstaan door een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as. Met welke factor wordt er dan vermenigvuldigd?



- 26** De grafiek van de functie $g(x) = 15 \cdot 2^x$ wordt achtereenvolgens
- 3 naar rechts verschoven
 - vermenigvuldigd met factor 4 ten opzichte van de x -as.
- Geef het functievoorschrift $k(x)$ van de beeldgrafiek.
 - Schrijf het functievoorschrift van de beeldgrafiek in de vorm $k(x) = b \cdot g^x$.

- 27** De grafiek van de functie $f(x) = 2 - 3^x$ wordt achtereenvolgens
- gespiegeld in de x -as
 - met factor 2 ten opzichte van de x -as vermenigvuldigd.
- Geef het functievoorschrift $g(x)$ van de beeldgrafiek.
 - Herschrijf $g(x)$ in de vorm $g(x) = a + b \cdot g^x$.

- 28** De grafiek van $g(x) = 27 \cdot 3^x$ is de beeldgrafiek van de grafiek van $f(x) = 6 \cdot 3^x$. De grafiek van g kan ontstaan zijn door een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as.
- Bereken de factor.
 - De grafiek van g kan ook ontstaan door een verschuiving 2 naar links gevolgd door een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as. Welke vermenigvuldiging is dat? Laat met een berekening zien dat je dezelfde grafiek krijgt.



Uitdagende route → maak opdracht U4 en U5

Ondersteunende opdrachten

- 023**
- Plot en schets de grafiek van de functie $f(x) = 3 \cdot 6^{2-x}$.
 - De beginhoeveelheid is niet 3, maar 108. Reken dit na door $x = 0$ in te vullen.
 - Er is een begin gemaakt aan de herleiding van $f(x)$. Geef bij elke stap aan van welke rekenregel gebruik is gemaakt.
 - Maak de herleiding af en schrijf het functievoorschrift in de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.
 - Is f stijgend of dalend?

$f(x) = 3 \cdot 6^{2-x}$	
$f(x) = 3 \cdot 6^2 \cdot 6^{-x}$	1
$f(x) = 3 \cdot 6^2 \cdot (6^{-1})^x$	2
$f(x) = 3 \cdot 36 \cdot (\frac{1}{6})^x$	3

- 024** Gegeven zijn de functies $f(x) = 4 \cdot (\frac{1}{2})^{2x}$ en $g(x) = 2^{2-2x}$.

Je gaat onderzoeken of de functies f en g hetzelfde zijn.

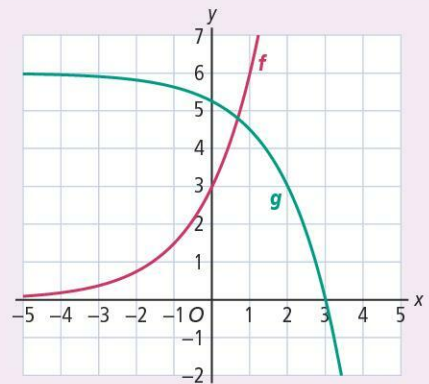
- Schrijf het functievoorschrift van f in de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.
- Schrijf het functievoorschrift van g in de vorm $g(x) = b \cdot g^x$.
- Zijn de functies f en g hetzelfde?
- Laat zien dat de functies $h(x) = 5 \cdot 3^{2-x}$ en $k(x) = 405 \cdot (\frac{1}{3})^{2+x}$ hetzelfde zijn.
- Dezelfde vraag voor $i(x) = 32 \cdot 4^{2x}$ en $j(x) = 2^{4x+5}$.

Uitdagende opdrachten

- U4** Gegeven is de functie $f(x) = 3 \cdot 2^x$. De grafiek van g is ontstaan door de grafiek van f te spiegelen in de x -as gevolgd door twee verschuivingen. Schrijf het functievoorschrift van g in de vorm $g(x) = b \cdot g^x + c$.

- U5** De grafiek van een exponentiële functie $f(x) = b \cdot g^x$ kan verschillende transformaties ondergaan. Leg uit in welke van de volgende gevallen het functievoorschrift van de beeldgrafiek weer herleid kan worden tot de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

- Een verticale verschuiving.
- Een horizontale verschuiving.
- Een spiegeling in de x -as.
- Een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as.



4.4 Vergelijkingen en ongelijkheden

Je leert

- hoe je een exponentiële vergelijking exact oplost

Leerroutes

- ondersteunend: 29—30—031—31—32—33—34—035
- doorlopend: 29—30—31—32—33—34—35—36
- uitdagend: 29—30—32—33—34—36—U6—U7

Een blad papier wordt twee keer zo dik als je het dubbelvouwt. Als je het opnieuw dubbelvouwt, heb je vier lagen papier. Neem aan dat het papier 0,1 mm dik is en dat je kunt blijven vouwen.

De Eiffeltoren is tot aan de top van de vlaggenstok ongeveer 317 meter hoog.

- Is het mogelijk om een stuk papier zo vaak dubbel te vouwen dat de dikte de hoogte van de Eiffeltoren overtreft?



- 29**
- a** Voor welke waarde van x is $2^x = 8$?
- b** Welke vergelijkingen kun je zonder rekenmachine oplossen? Geef van deze vergelijkingen de oplossing.
- A $2^x = 12$ D $2^x = \sqrt{2}$
- B $2^x = 5$ E $3^x = 81$
- C $2^x = \frac{1}{2}$ F $3^x = 16$
- c** Gebruik je rekenmachine om de overige vergelijkingen op te lossen. Rond af op twee decimalen.
- 30** In deze opdracht ga je de vergelijking $3 \cdot 4^{x+5} = 24$ exact oplossen.
- a** Vereenvoudig de vergelijking door links en rechts door hetzelfde getal te delen.
- b** Laat zien dat je de vergelijking die je bij opdracht a hebt gekregen, kunt herleiden tot $2^{2x+10} = 2^3$.
- c** Los de vergelijking op.

Aanpak

Hoe los je een exponentiële vergelijking exact op?

- 1 Deel zo mogelijk linker- en rechterkant van de vergelijking door hetzelfde getal.
- 2 Schrijf de linker- en de rechterkant van de vergelijking als machten met hetzelfde grondtal.
- 3 Stel de exponenten gelijk en los hiermee de vergelijking op.

Voorbeeld 1

Los exact op $2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{1-3x} = 250$.

Oplossing

- 1 $\left(\frac{1}{5}\right)^{1-3x} = 125$ (links en rechts : 2)
- 2 $\left(5^{-1}\right)^{1-3x} = 5^3$ (machten van 5)
 $5^{-1+3x} = 5^3$
- 3 $-1 + 3x = 3$ (exponenten gelijkgesteld)
 $3x = 4$
 $x = 1\frac{1}{3}$

Voorbeeld 2

Los exact op $14 \cdot 4^t = 7 \cdot 2^{3t}$.

Oplossing

- 1 $2 \cdot 4^t = 2^{3t}$ (links en rechts : 7)
- 2 $2^1 \cdot (2^2)^t = 2^{3t}$ (machten van 2)
 $2^1 \cdot 2^{2t} = 2^{3t}$
 $2^{1+2t} = 2^{3t}$
- 3 $1 + 2t = 3t$ (exponenten gelijkgesteld)
 $t = 1$

Ondersteunende route → maak opdracht 031

31 Los exact op.

- | | |
|---|--|
| H a $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$ | e $0,1^{2x} = 10^x$ |
| b $3^x = \frac{1}{27}$ | f $32 \cdot 2^x = 4^{3x}$ |
| c $0,25^x = 16$ | g $3 \cdot 0,5^x = 24 \cdot 8^x$ |
| d $\left(\frac{1}{7}\right)^{x+3} = 1$ | h $\sqrt{2^x} = \left(\frac{1}{64}\right)^x$ |

32 Ga bij elke vergelijking na of de vergelijking exact kan worden opgelost of niet. Geef de exacte oplossing als dat mogelijk is.

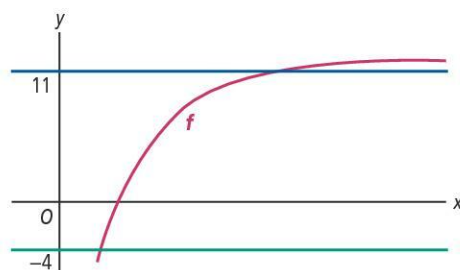
H Gebruik je rekenmachine om voor de andere gevallen een benadering in twee decimalen te geven.

- | | |
|---|---|
| a $36 \cdot 3^{\frac{1}{2}x-1} = 12$ | e $10^x = 5^x$ |
| b $6^{4x-1} = 36$ | f $9^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}$ |
| c $300 \cdot 4^x = 20 \cdot 5^x$ | g $5x^4 = 80$ |
| d $\left(\frac{1}{8}\right)^x = \sqrt{2}$ | h $(\sqrt{6})^{2-x} = 6$ |

- 33** Gegeven zijn de functies $f(x) = 27 \cdot 3^{2-x}$ en $g(x) = (\sqrt{3})^x$.
- Plot en schets de grafieken van f en g in één assenstelsel.
 - Bereken exact de x -coördinaat van het snijpunt van de grafieken van f en g .
 - Geef de exacte oplossing van $f(x) > g(x)$.

Een ongelijkheid kun je oplossen door gebruik te maken van een plot. Voer beide functies in de rekenmachine in en los de bijbehorende vergelijking exact of met de rekenmachine op. Met behulp van de plot kun je dan de oplossing van de ongelijkheid geven.

- 34** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = 12 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$ en de lijnen $y = -4$ en $y = 11$.
- Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met elk van de lijnen $y = -4$ en $y = 11$.
 - Wat is de oplossing van de ongelijkheid $f(x) > 11$?
 - Voor welke waarden van x ligt de waarde van $f(x)$ tussen -4 en 11 ?



Ondersteunende route → maak opdracht 035

- 35** Los op. Rond af op twee decimalen.

- H**
- $50 \cdot 0,7^t < 12$
 - $50 \cdot 1,2^t > 12$
 - $800 \cdot 0,933^x > 100$
 - $0,7^x < 0,24$

- 36**
- Waarom kun je de vergelijking $\left(\frac{1}{3}\right)^t = 9 \cdot 2^t$ niet exact oplossen?
 - Geef een benadering van de oplossing van deze vergelijking in twee decimalen.
 - Los op $\left(\frac{1}{3}\right)^t < 9 \cdot 2^t$.
 - Los exact op $\left(\frac{1}{3}\right)^t \leq 3\sqrt{3}$.

Uitdagende route → maak opdracht U6 en U7

Ondersteunende opdrachten

- 031** Je gaat de vergelijking $3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 24$ exact oplossen.
- Vereenvoudig de vergelijking door links en rechts door 3 te delen.
 - Om de vergelijking verder op te kunnen lossen, moet je links en rechts schrijven als een macht met hetzelfde grondtal. Op het blaadje is daarmee een begin gemaakt. Waarom wordt er gekozen voor het grondtal 2?
 - Vul in wat er op de puntjes moet staan.
 - Als de machten hetzelfde grondtal hebben, kun je de exponenten aan elkaar gelijk stellen. Doe dit en los de vergelijking op.

●	$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$					
●	$\left(2^{\dots}\right)^x = 2^{\dots}$					
●	$2^{\dots} = 2^{\dots}$					

- 035** Gegeven is de ongelijkheid $45 \cdot 0,6^x < 13$.
- Welke twee functies horen bij deze ongelijkheid?
 - Plot de grafieken van beide functies.
 - Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken.
 - Bepaal met behulp van de plot uit opdracht b voor welke waarden van x geldt $45 \cdot 0,6^x < 13$.

Los op. Rond af op twee decimalen.

- e** $0,9^x < 0,36$ **g** $4 \cdot 5^x > 3$
f $750 \cdot 0,834^x > 98$ **h** $57 \cdot 0,36^x < 1,3^x$

Uitdagende opdrachten

- U6** Gegeven zijn de functies $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en $g(x) = 4^x$. Op de grafiek van g ligt punt A met x -coördinaat 3. De grafiek van f wordt 3 naar rechts verschoven en vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as met 2. Op de beeldgrafiek ligt een punt B op dezelfde hoogte als punt A . Bereken de afstand tussen A en B .
- U7** Gegeven is de functie $f(x) = 3^x$ en de lineaire functie $h(x)$ waarvan de grafiek door de punten $(1, 6)$ en $(4, 42)$ gaat. Los in twee decimalen op $f(x) > h(x)$.

4.5 Gemengde opdrachten

- 37** Gegeven is de functie $f(x) = 12 \cdot 0,5^x$.
Geef het functievoorschrift en een vergelijking van de asymptoot van de beeldgrafiek van f na:
- a een translatie 6 naar links.
 - b translaties 3 omlaag en 2 naar rechts.
 - c een spiegeling in de x -as.
 - d een translatie 3 naar rechts, daarna een vermenigvuldiging met factor 4 ten opzichte van de x -as.

- 38** Los exact op.

a $4 \cdot 2^{x+3} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	d $8 \cdot (\sqrt{2})^{x-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
b $\frac{1}{3} \cdot 3^{-2x+3} = 27^x$	e $6^{2x} = 2^{1-x} \cdot 9^x$
c $\left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot 3^x = \frac{1}{3} \cdot 3^{-x}$	f $2^x + 2^x = 4^{x+2}$

- 39** Los exact op.

a $16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x \geq \frac{1}{16}$	c $16 \cdot 0,5^a > 0,125$
b $32 \cdot 2^t < \frac{1}{4}$	d $5^{2t} \leq 125^{1-t}$

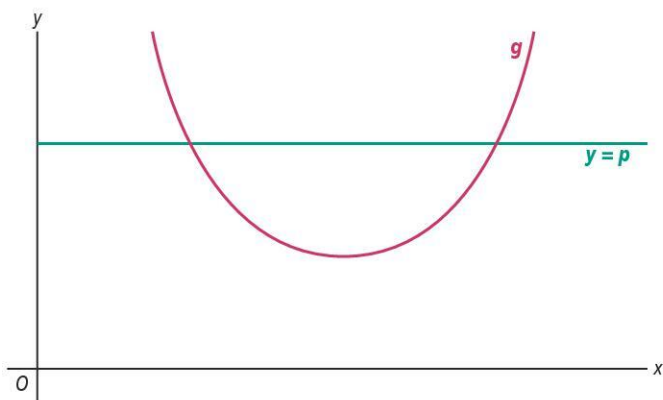
- 40** In een meer worden van een vissoort 1000 vissen uitgezet. Elk half jaar neemt het aantal vissen met 60% toe.
- a Met welk functievoorschrift kun je het aantal vissen per maand berekenen?
 - b Een bioloog gebruikt voor het berekenen van het aantal vissen het functievoorschrift $f(t) = 1000 \cdot 1,6^{\frac{1}{2}t}$. Welke tijdseenheid wordt hier gebruikt?

- 41** De groei van een boom kun je beschrijven met de formule $H = 8 - 7 \cdot 0,8^t$, met H de hoogte in meters en t de tijd in jaren.
- a Plot en schets de grafiek van H .
 - b Hoe hoog zal de boom volgens de formule op den duur worden?
 - c Bereken hoeveel jaar het duurt om van een hoogte van 5 meter te groeien naar een hoogte van 6 meter. En hoelang duurt dat van 6 meter naar een hoogte van 7 meter?
 - d Hoe wordt de formule als de tijd niet in jaren, maar in maanden wordt uitgedrukt?
 - e Waarom is het berekenen van een groeifactor per maand hier eigenlijk niet zinvol?





- 42** Een patiënt krijgt vier dagen achter elkaar elke ochtend om 8.00 uur door middel van een injectie 2 mL van een geneesmiddel toegediend. Door afbraak in het lichaam neemt de hoeveelheid van het geneesmiddel per 24 uur met 60% af.
- a** Onderzoek hoeveel van het geneesmiddel vlak na de vierde injectie nog aanwezig is.
 - b** Na deze vierde injectie duurt het enige tijd voordat het geneesmiddel uit het lichaam is. Onderzoek hoelang het ongeveer duurt tot er minder dan 0,001 mL van het geneesmiddel over is.
- 43** Gegeven is de grafiek van de functie $g(x) = 2^{x^2-4x+5}$. Een horizontale lijn met vergelijking $y = p$ snijdt de grafiek in de punten A en B . De lengte van lijnstuk AB is 3. Onderzoek welke exacte waarde p heeft.



Theorie

Grafieken van exponentiële functies

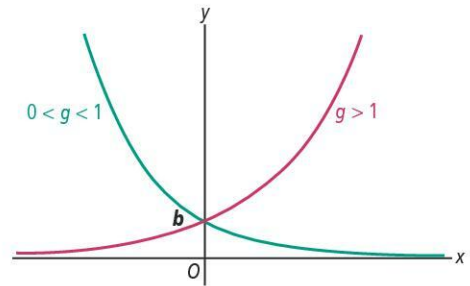
Een exponentiële functie heeft de vorm $f(x) = b \cdot g^x$. Als $b > 0$ geldt: de functie is stijgend als $g > 1$ en dalend als $0 < g < 1$.

De grafiek van f snijdt de verticale as in $(0, b)$.

Het domein van f is $\mathbb{R}$.

Het bereik van f is $\langle 0, \infty \rangle$.

De x -as is de horizontale asymptoot van f .



S1 Geef aan of de functie stijgend of dalend is.

a $f(x) = 2 \cdot 3^x$

b $g(x) = 3 \cdot 0,5^x$

Theorie

Translaties, transformaties en beeldgrafiek

Een translatie is een ander woord voor een verschuiving.

Verschuivingen, vermenigvuldigingen en spiegelingen zijn voorbeelden van transformaties.

De grafiek die ontstaat na een transformatie heet de beeldgrafiek.

S2 Gegeven is de functie $f(x) = 6 \cdot 0,5^x$.

a Teken de grafiek van f . Neem voor x de waarden -2 tot en met 8 .

b Teken de beeldgrafiek na spiegeling in de x -as.

c Teken de beeldgrafiek na een translatie 4 omhoog.

Vaardigheid

Je kunt een groeifactor aanpassen aan een andere tijdseenheid.

Als g de groeifactor per tijdseenheid is, dan is $g^{\frac{1}{n}} (= \sqrt[n]{g})$

de groeifactor voor een n -de deel van die tijdseenheid. Zo is

bijvoorbeeld $g^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{g} = \sqrt{g}$ de groeifactor voor de halve tijdseenheid.

Voorbeeld

Een zwerm sprinkhanen neemt elke maand met 20% toe.

Bereken de groeifactor per dag.

Oplossing

De groeifactor per maand is $1,2$.

De groeifactor per dag is

$$1,2^{\frac{1}{30}} = 1,0060... \approx 1,006.$$

- S3**
- Gegeven is een groeifactor van 1,3 per week.
Bereken de groeifactor per dag.
 - Het aantal vissen in een meer neemt elk halfjaar met 60% af.
Bereken met welk percentage het aantal vissen per week afneemt. Rond af op twee decimalen.

Vaardigheid

Je kunt na een verschuiving het functievoorschrift opstellen van de beeldgrafiek.

De grafiek van een functie f kun je op twee manieren verschuiven:

- verticaal verschuiven over de afstand d omhoog;
het functievoorschrift van de beeldgrafiek is $g(x) = f(x) + d$
- horizontaal verschuiven over de afstand c naar rechts;
het functievoorschrift van de beeldgrafiek is $g(x) = f(x - c)$.

Voorbeeld

De grafiek van $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ wordt 1 naar rechts en 2 omhoog verschoven. Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek.

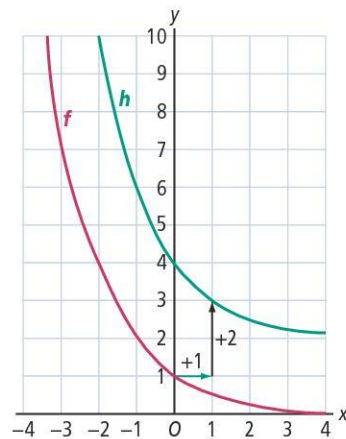
Oplossing

Bij een verschuiving van 1 naar rechts vervang je x door $x - 1$.

Je krijgt de grafiek van $g(x) = f(x - 1)$ of wel $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$.

Bij een verschuiving van 2 omhoog tel je bij het functievoorschrift 2 op.

Je krijgt de grafiek van $h(x) = g(x) + 2$ ofwel $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$.



- S4**
- Gegeven is de functie $f(x) = 2^x$.
Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek na:
- een translatie 3 naar links.
 - translaties 2 omhoog en 4 naar rechts.

Vaardigheid

Je kunt na een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as het functievoorschrift opstellen van de beeldgrafiek.

Bij een vermenigvuldiging met a ten opzichte van de x -as geldt voor het functievoorschrift van de beeldgrafiek

$$g(x) = a \cdot f(x).$$

Een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor -1 komt overeen met een spiegeling in de x -as.

- S5** Gegeven is de functie $f(x) = 2^x$.
Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek na:
- een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor $0,5$.
 - een spiegeling van de grafiek in de x -as.

Vaardigheid

Je kunt het functievoorschrift van een exponentiële functie herleiden tot de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

Door gebruik te maken van de rekenregels van machten kun je het functievoorschrift herleiden tot de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

$g^0 = 1$	$g^{\frac{1}{2}} = \sqrt{g}$
$g^1 = g$	$g^p \cdot g^q = g^{p+q}$
$g^{-n} = \frac{1}{g^n}$	$\frac{g^p}{g^q} = g^{p-q}$
$g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$	$(g^p)^q = g^{p \cdot q}$

Voorbeeld

Schrijf $f(x) = 4 \cdot 3^{-2x+5}$ in de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

Oplossing

$$f(x) = 4 \cdot 3^{-2x+5}$$

$$f(x) = 4 \cdot 3^{-2x} \cdot 3^5$$

$$f(x) = 4 \cdot (3^{-2})^x \cdot 3^5$$

$$f(x) = 972 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^x$$

- S6** Herleid tot de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

a $f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$

b $f(x) = 6 \cdot 3^{5-x}$

Vaardigheid

Je kunt een exponentiële vergelijking exact oplossen.

- 1 Deel zo mogelijk linker- en rechterkant van de vergelijking door hetzelfde getal.
- 2 Schrijf de linker- en de rechterkant van de vergelijking als machten met hetzelfde grondtal.
- 3 Stel de exponenten gelijk en los hiermee de vergelijking op.

Voorbeeld 1

Los exact op $\frac{1}{9} \cdot 3^{2t} = 81$.

Oplossing

$$\frac{1}{9} \cdot 3^{2t} = 81$$

$$\frac{1}{3^2} \cdot 3^{2t} = 3^4$$

$$3^{-2} \cdot 3^{2t} = 3^4$$

$$3^{2t-2} = 3^4$$

$$2t - 2 = 4$$

$$2t = 6$$

$$t = 3$$

Voorbeeld 2

Los exact op $2^{3x+2} = (\sqrt{8})^x$.

Oplossing

$$2^{3x+2} = (\sqrt{2^3})^x$$

$$2^{3x+2} = 2^{\frac{3}{2}x}$$

$$3x + 2 = 1\frac{1}{2}x$$

$$1\frac{1}{2}x = -2$$

$$x = -\frac{4}{3}$$

S7 Los exact op.

a $2^{x+3} = 32$

b $4^{x-1} = 8^x$

- T1** In een laboratorium wordt de groei van een bacteriesoort bestudeerd.
Het blijkt dat de hoeveelheid bacteriën in milligrammen elke 12 uur verdubbelt. Bij een eerste meting, om 9.30 uur 's morgens, werd 32 milligram bacteriën gemeten.
- Hoeveel milligram bacteriën werd om 21.30 uur gemeten?
 - Bereken de groeifactor van het aantal bacteriën per uur. Rond af op vier decimalen.
 - Stel een functievoorschrift $H(t)$ op in de vorm $H(t) = b \cdot g^t$. Hierbij is H de hoeveelheid bacteriën in milligram en t is de tijd in uren met $t = 0$ om 9.30 uur.
 - Hoeveel milligram bacteriën zal er om 10.00 uur geweest zijn? En om 8.00 uur?

- T2** Koraal is een verzamelnaam voor diertjes van enkele millimeters. Deze diertjes leven veelal in kolonies. Meerdere kolonies bij elkaar noemt je een koraalrif. De koraalriffen beslaan ongeveer 0,2% van de totale oceaانبodem, dat is ongeveer 720 000 km². Door natuurlijke en menselijke oorzaken verdwijnt een deel van dit koraal. De hoeveelheid koraalrif neemt daardoor exponentieel af. De verwachting is dat er na 30 jaar ongeveer 60% van het koraalrif is verdwenen.
- Bereken de procentuele afname per jaar.
 - Bereken na hoeveel jaar er voor het eerst minder dan 1000 km² koraalrif over zal zijn.



- T3** Geef bij elke functie aan door welke transformaties de grafiek kan ontstaan uit de grafiek van $f(x) = 1,3^x$.
- $g(x) = 1,3^{x+1} + 2$
 - $h(x) = 3 \cdot 1,3^{x-1}$
 - $k(x) = -1,3^x + 2$
 - $l(x) = 15 - 6 \cdot 1,3^x$
- T4** De grafiek van $f(x) = 3 \cdot 3^x + 2$ wordt ten opzichte van de x -as met factor p vermenigvuldigd. De beeldgrafiek is de grafiek van een functie g . De grafiek van g bevat het punt $(-2, 7)$.
- Bereken exact de waarde van p .
 - Geef het functievoorschrift $g(x)$.
 - De grafieken van f en g hebben beide een horizontale asymptoot. Geef van beide asymptoten een vergelijking.

- T5** Een groeiproces wordt beschreven door de functie $N(t) = 4,32 \cdot 1,44^{0,5t-1}$ met t in uren.
- Is N stijgend of dalend? Leg uit hoe je aan je antwoord komt.
 - Gegeven is de functie $M(t) = 4,32 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{2-t}$. Laat met behulp van herleiden zien dat de functies N en M hetzelfde zijn.

- T6** Los exact op.
- $25 \cdot 5^t = 0,04$
 - $1000^x = 0,01^{x-1}$
 - $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3} = 16^{2+2x}$
 - $3^t \cdot 9^{t+4} = 27$

- T7** Los op. Rond af op één decimaal.
- $24 \cdot 2,3^t < 100$
 - $0,03 \cdot 1,78^x > 2$
 - $5 \cdot 2^n > 0,1^n$
 - $3 \cdot 5^{x+3} < 21$

- T8** De bepaling van de ouderdom van allerlei opgegraven voorwerpen en beenderen is een belangrijk onderdeel van de archeologie. Een bekende methode daarvoor is de C14-datering. Deze methode werkt als volgt. Ieder levend organisme bevat koolstof-14, en wel 0,000 001 mg C14 per kg organisch materiaal. De hoeveelheid C14 daalt na afsterving door radioactief verval. Na 5730 jaar is de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid C14 over.

- Hoeveel C14 bevat een boom van 1000 kg, 5730 jaar nadat deze is doodgegaan? En na 11 460 jaar?
- Na hoeveel jaar is er nog $\frac{1}{8}$ deel van de hoeveelheid C14 over?
- Na hoeveel jaar is $\frac{31}{32}$ deel van de hoeveelheid C14 verdwenen?
- In een archeologische vondst blijkt nog 4% van de oorspronkelijke hoeveelheid C14 aanwezig te zijn. Hoe oud is die vondst ongeveer?

Er is een oude lijkwade die volgens de overlevering van Aegidius, een Romeinse generaal, is geweest. In 1997 bleek het C14 gehalte van deze lijkwade 86,19% te zijn. Aegidius is in het jaar 464 overleden.

- Kan dit de lijkwade van Aegidius geweest zijn?



Je kunt een groeifactor aanpassen aan een andere tijdseenheid.

- E1** Bij een groeiproses is de groeifactor per dag gelijk aan 8.
- a** Hoe groot is de groeifactor per week?
 - b** Bereken de groeifactor per halve dag.
 - c** Met hoeveel procent neemt het aantal per uur toe?
Rond af op hele procenten.

Je kunt het functievoorschrift opstellen na een verschuiving van een grafiek.

- E2** Geef van de grafiek van elke functie aan hoe deze uit de grafiek van $y = 3^x$ kan ontstaan. Geef ook een vergelijking van de asymptoot.
- a** $f(x) = 3^x - 2$
 - b** $f(x) = 3^{x-2}$
 - c** $f(x) = 3^{x-4} + 5$
 - d** $f(x) = 4 + 3^{x-2}$

Je kunt het functievoorschrift opstellen na een vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as.

- E3** Geef van de grafiek van elke functie aan hoe deze uit de grafiek van $y = 5^x$ kan ontstaan.
- a** $f(x) = 3 \cdot 5^x$
 - b** $f(x) = -5^x$
 - c** $f(x) = -0,36 \cdot 5^x$
 - d** $f(x) = 5^x \cdot 8$

Je kunt het functievoorschrift van een exponentiële functie herleiden tot de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

- E4** Herleid tot de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.
- a** $f(x) = 6^{4+x}$
 - b** $f(x) = 8 \cdot 4^{-3+2x}$
 - c** $f(x) = 9 \cdot 0,3^{-2x}$
 - d** $f(x) = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5-x}$

Je kunt een exponentiële vergelijking exact oplossen.

- E5** Los exact op.
- a** $9^t = 3 \cdot 3^{2+t}$
 - b** $4^{t-1} = 8^t$
 - c** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-t+1} = 2^{-t+2}$
 - d** $\frac{1}{2} \cdot 2^{3t} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3+t}$
- E6** Een groeiproses wordt beschreven door $f(t) = 0,25^{t-3}$.
- a** Schrijf $f(t)$ in de vorm $f(t) = b \cdot g^t$.
 - b** Hoe groot is de beginhoeveelheid?

E7 Geef van de grafiek van elke functie aan hoe deze uit de grafiek van $y = 7^x$ kan ontstaan. Geef ook een vergelijking van de asymptoot.

- a** $f(x) = 4 \cdot 7^{x+2}$ **c** $f(x) = 3 \cdot 7^x + 6$
b $f(x) = -2 \cdot 7^{x+1}$ **d** $f(x) = 1 - 5 \cdot 7^x$

E8 Voor een operatie wordt 800 milligram van een verdovingsmiddel toegediend. Elke minuut wordt er 0,4% van dit middel in het lichaam van de patiënt afgebroken.

- a** $H(t)$ is de hoeveelheid verdovingsmiddel in mg dat na t minuten nog aanwezig is.
 Stel het functievoorschrift voor H op.
b Hoeveel milligram verdovingsmiddel is er na één uur nog aanwezig in het lichaam van de patiënt?
c Na hoeveel minuten is er nog 500 milligram van het verdovingsmiddel in het lichaam van de patiënt over?
d Na hoeveel minuten is de helft over?



E9 Los de ongelijkheden, zo mogelijk exact, op.

- a** $25 \cdot 1,3^t < 40$ **c** $10 \cdot 12^t > 4 \cdot 3^{2+t}$
b $5 \cdot 6^{t-3} > 60$ **d** $4 \cdot 3^t < 12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t$

E10 Een ingenieur denkt na over het schoon regenen van een asfaltweg. Hij slaagt er in de volgende functie op te stellen:
 $P(t) = 100(1 - 0,779^t)$.

Hierbij is P het percentage van de aanwezige hoeveelheid vuil dat bij een regenbui wegspoelt. Dit percentage hangt af van het aantal uren t dat de regenbui duurt.

- a** Plot en schets de grafiek van P .
b De grafiek van P heeft een horizontale asymptoot.
 Geef de betekenis van deze asymptoot.
c Bereken het aantal minuten dat een regenbui duurt waarin de helft van het vuil wegspoelt.

E11 Gegeven is de functie $f(x) = 1 - 3^x$.

Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek en een vergelijking van de asymptoot na elke transformatie.

- a** Een translatie 3 naar links gevolgd door een spiegeling in de x -as.
b Een translatie 2 naar rechts gevolgd door een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor 3.
c Een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor 6 gevolgd door een translatie 4 omhoog.

Lijnen op een bol

Euclides leefde ongeveer 300 jaar voor Christus en wordt vaak 'de vader van de meetkunde' genoemd. Hij was een Hellenistische wiskundige die werkte in de bibliotheek van Alexandrië. Zijn belangrijkste werk heet 'De Elementen'. Dit geeft in 13 boeken de oudste systematische verhandeling over de meetkunde.

Uitspraken zoals: 'er gaat precies één lijn door twee verschillende punten' en 'door een punt buiten een lijn gaat precies één lijn evenwijdig aan de gegeven lijn' zal je wel logisch vinden. Al deze uitspraken gelden in een plat vlak. Echter de aarde waarop wij leven is niet plat, maar bolvormig.

Geldt de uitspraken van Euclides ook voor punten en lijnen op een bol?

In een vlak is de kortste verbinding tussen twee punten een (rechte) lijn. Op een bol wordt daarom een lijn gedefinieerd als de kortste verbinding over de oppervlakte van de bol tussen twee punten A en B . Dat is een deel van een zogenaamde grootcirkel. Deze cirkel ligt op de bol en heeft hetzelfde straal en middelpunt als de bol.

Lijnen op een bol zijn dus grootcirkels. Alle meridianen zijn halve grootcirkels en alle parallellen, op de evenaar na, zijn dus geen lijnen. Deze keuze heeft echter wel gevolgen.

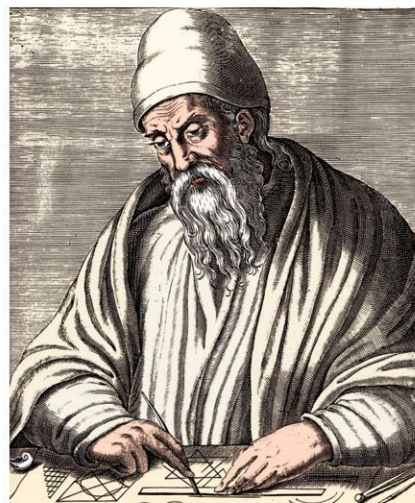
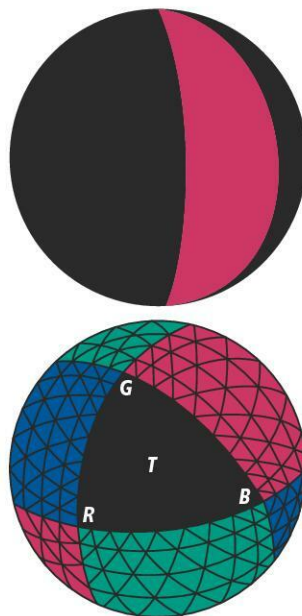
In de gewone (Euclidische) meetkunde is de veelhoek met het minste aantal hoekpunten een driehoek. Op een bol kun je echter al van een tweehoek spreken, want twee lijnen sluiten daar zelfs al een figuur in. Deze tweehoek heet een *lune* (maan). Als je goed kijkt, dan zie dat twee lijnen op een bol zelfs vier lunes insluiten.

Bij drie lijnen wordt het beeld complexer.

In de Euclidische meetkunde vormen drie elkaar snijdende lijnen, die niet door één punt gaan, precies één driehoek. Op de bol echter niet. In de figuur ligt het voor de hand om op de bol daarvoor de zwarte driehoek BGR te kiezen. Er zijn echter veel meer driehoeken die door deze drie lijnen worden gevormd.

Opdracht

- Is het groene deel één driehoek?
- Hoeveel driehoeken vormen de drie lijnen?
- Gaat door twee verschillende punten op een bol precies één lijn?
- Bestaan er evenwijdige lijnen op de bol? Leg uit.



SE

CE

K

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Rekenen met breuken
- Haakjes wegwerken en bijzondere producten
- Vergelijkingen oplossen
- Ongelijkheden oplossen



Rekenen met breuken

- 1 Bereken en schrijf het antwoord in een breuk. Vereenvoudig, indien mogelijk, het antwoord.

a $\frac{3}{6} - \frac{2}{5}$

d $\frac{3}{p} \times \frac{4}{p}$

b $\frac{7}{x} + \frac{2}{3x}$

e $\frac{3p}{4} \times \frac{2p}{-5}$

c $\frac{3}{13} \times \frac{-2}{5}$

f $\frac{2a}{5b} \times \frac{3b}{4a}$

- 2 a Leg uit hoe je het getal $3\frac{5}{7}$ kunt herleiden tot de breuk $\frac{26}{7}$.

b Maak verder af: $\frac{3}{x} + 2 = \frac{3}{x} + \frac{2}{1} = \frac{3}{x} + \frac{\dots}{x} = \frac{3 + \dots}{x}$

- c Herleid tot één breuk:

A $5\frac{3}{8}$

C $7 - \frac{4}{x}$

B $\frac{5}{p} + 4$

D $8 + \frac{2}{3x}$

Theorie

Breuken kun je vereenvoudigen door de teller en de noemer met hetzelfde getal te vermenigvuldigen of door hetzelfde getal te delen.

Voorbeeld 1

Vereenvoudig $\frac{40}{56}$

Oplossing

$$\frac{40}{56} = \frac{5 \times 8}{7 \times 8} = \frac{5}{7}$$

Voorbeeld 2

Vereenvoudig $\frac{4}{\frac{1}{3}}$

Oplossing

$$\frac{4}{\frac{1}{3}} = \frac{4 \times 3}{\frac{1}{3} \times 3} = \frac{12}{1} = 12$$

Voorbeeld 3

Vereenvoudig $\frac{\frac{3}{5}}{7}$

Oplossing

$$\frac{\frac{3}{5}}{7} = \frac{\frac{3}{5} \times 5}{7 \times 5} = \frac{3}{35}$$

- 3 Vereenvoudig. Neem aan dat $p \neq 0$.

a $\frac{5p}{3p}$

e $\frac{\frac{3}{p}}{\frac{1}{3}}$

b $\frac{36}{\frac{3}{7}}$

f $\frac{p}{\frac{1}{2}}$

c $\frac{8p}{12p}$

g $\frac{\frac{8}{9}}{4}$

d $\frac{2p}{\frac{1}{p}}$

h $\frac{4p^2}{\frac{2}{p}}$

Haakjes wegwerken en bijzondere producten

4 Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk.

- | | |
|------------------------|--|
| a $-(a+5) - 3$ | e $\left(\frac{1}{2}n + 4\right)\left(\frac{1}{2}n - 8\right)$ |
| b $(-2v + 3)(3v + 8)$ | f $-17(3u + 5) + 6u$ |
| c $(p^3 + 2)(p - 3)$ | g $(2p + 4)(8 - 3p^2)$ |
| d $(3h - 2)(2h^2 - 4)$ | h $-5,7(3,5x + 6,2)$ |

5 Schrijf de producten zonder haakjes en zo kort mogelijk.

- | | |
|----------------------|--|
| a $(2h + 1)(2h + 1)$ | e $(5 + p)(5 - p)$ |
| b $(w - 9)(w - 9)$ | f $(2e - 3)(2e + 3)$ |
| c $(p + 4)^2$ | g $(5 - q)^2$ |
| d $(r - 4)^2$ | h $\left(v - \frac{1}{3}\right)\left(v - \frac{1}{3}\right)$ |

Theorie

Voor het product van tweetermen geldt

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Bijzondere gevallen zijn:

- 1 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- 2 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- 3 $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

Voorbeeld 1

Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk: $(x + 3)(x^2 - 4)$

Oplossing

Geen bijzonder geval

$$(x + 3)(x^2 - 4) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$$

Voorbeeld 2

Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk: $(x - 3)^2$

Oplossing

Bijzonder geval 2

$$(x - 3)^2 = x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2 = x^2 - 6x + 9$$

Voorbeeld 3

Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk: $(x + 3)(x - 3)$

Oplossing

Bijzonder geval 3

$$(x + 3)(x - 3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$$

6 Schrijf zonder haakjes.

- | | |
|-----------------------|-------------------------------------|
| a $(p + 5)^2$ | f $(3u - 0,5)^2$ |
| b $(2v - 4)^2$ | g $\left(\frac{1}{2}r + 2\right)^2$ |
| c $(b + 5)(b - 5)$ | h $(p^2 - 5)(p^2 + 5)$ |
| d $(3x - 6)(3x + 6)$ | i $x(x + 1)^2$ |
| e $(2l + 3)(l^2 - 7)$ | j $(x - y^2)(x + y^2)$ |

Vergelijkingen oplossen

- 7 a Op het blaadje is een begin gemaakt met het oplossen van de vergelijking $(x + 3)^2 = 4(x + 2) + 1$.
Los deze vergelijking verder op.
b Los ook de vergelijking $(x + 4)(x - 4) = x(x + 8)$ op.

☐	$(x + 3)^2 = 4(x + 2) + 1$		
☐	$x^2 + 6x + 9 = 4x + 8 + 1$		
☐	$x^2 + 2x = 0$		
☐	$x(\dots + \dots) = 0$		

- 8 Los exact op.
- a $3k = 2(k + 5)$ c $2(t + 5)^2 = 14 + 2t$
b $(c + 2)(c - 2) = 5$ d $(b - 10)(b + 1) = 12$

Theorie

Bij het oplossen van vergelijkingen moet je soms eerst de haakjes wegwerken. In een aantal gevallen is het handiger om juist niet de haakjes weg te werken.

- 9 a Welke van de vergelijkingen A tot en met F kun je exact oplossen zonder eerst de haakjes weg te werken? Los deze vergelijkingen op.
b Los de overige vergelijkingen ook exact op. Soms moet je daarbij de *abc*-formule gebruiken.
- 10 Je gaat in deze opdracht de vergelijking $(3x + 6)(x - 4) = 15(x - 4)$ oplossen.
a De oplossing van $3x + 6 = 15$ is een oplossing van $(3x + 6)(x - 4) = 15(x - 4)$. Leg uit waarom.
b De oplossing van $x - 4 = 0$ is ook een oplossing van $(3x + 6)(x - 4) = 15(x - 4)$. Leg uit waarom.
c Los de vergelijking $(3x + 6)(x - 4) = 15(x - 4)$ op zonder eerst de haakjes weg te werken.

- A $(x + 2)(0,2x - 8) = 0$
B $(2x - 5)(2x + 5) = 24$
C $(2x + 3)^2 + 2x = 3$
D $(x + 7)^2 - 11 = 25$
E $(-4x + 1)(4x + 1) = 17$
F $6x(x - 1) = 1 - 5x$

Theorie

Bij het oplossen van vergelijkingen moet je eerst goed naar de vergelijking kijken. Vaak is het nodig dat je de vergelijking eerst op nul herleid. Soms is er een handigere manier. Je mag gebruik maken van de regels hiernaast.

$A \cdot B = 0$ dus $A = 0$ of $B = 0$
 $A \cdot B = A \cdot C$ dus $A = 0$ of $B = C$
 $A^2 = B^2$ dus $A = B$ of $A = -B$

Voorbeeld 1

Los op
 $(2x + 3)(x - 4) = 0$
 $2x + 3 = 0$ of $x - 4 = 0$
 $2x = -3$ of $x = 4$
 $x = -1\frac{1}{2}$ of $x = 4$

Voorbeeld 2

Los op
 $(2x + 3)(x - 4) = 6(2x + 3)$
 $2x + 3 = 0$ of $x - 4 = 6$
 $2x = -3$ of $x = 10$
 $x = -1\frac{1}{2}$ of $x = 10$

Voorbeeld 3

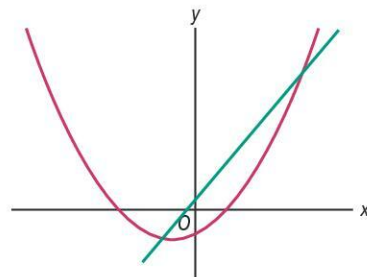
Los op
 $(2x + 3)^2 = 16$
 $2x + 3 = 4$ of $2x + 3 = -4$
 $2x = 1$ of $2x = -7$
 $x = \frac{1}{2}$ of $x = -3\frac{1}{2}$

- 11** Los op de manier van voorbeeld 2 de vergelijkingen op.
- a** $(2x + 5)(x - 1) = 3(x - 1)$ **c** $(3x - 4)(2x - 3) = (x + 1)(2x - 3)$
b $x^2(2x - 9) = 7x^2$ **d** $(5x + 3)(x^2 - 9) = 7(5x + 3)$

- 12** Los exact op.
- a** $2 - (x - 4)^2 = 1$ **c** $(x + 2)^2 - (3 - 2x)^2 = 0$
b $(5x - 125)(x^2 - 81) = 0$ **d** $(0,5x + 2)^2 - 2x = 20$

Ongelijkheden oplossen

- 13** De grafieken van de functies $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ en $g(x) = 7x + 1$ zijn geschetst.
- a** Los exact op $f(x) = g(x)$.
b Bij welke waarden van x ligt de grafiek van f boven de grafiek van g ? Geef je antwoord in de intervalnotatie.
c Welke van de ongelijkheden hoort bij opdracht b: $f(x) < g(x)$ of $f(x) > g(x)$?



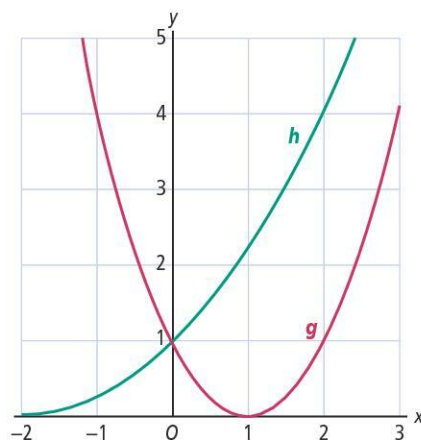
Theorie

Bij het oplossen van een ongelijkheid stel je eerst de bijbehorende functies aan elkaar gelijk en los je de verkregen vergelijking (eventueel exact) op. Vervolgens lees je uit de grafieken van de functies of uit een plot de oplossing van de ongelijkheid af.

- 14** Gegeven zijn de functies $g(x) = (1 - x)^2$ en $h(x) = (\frac{1}{2}x + 1)^2$.
- a** Voor welke waarden van x geldt $g(x) < 5$?
b Controleer met een berekening dat het punt $(0, 1)$ een snijpunt is van de grafieken van g en h .
c Beredeneer dat de grafieken nóg een snijpunt hebben.
d Waarom weet je zeker dat er niet nog een derde snijpunt is?
e Voor welke waarden van x geldt $h(x) > g(x)$?

- 15** Gegeven zijn de functies $h(x) = 4x + 3$ en $k(x) = \sqrt{4 - 2x}$.
- a** Geef het domein en het bereik van k .
b Plot en schets de grafieken van h en k .
c Los op $h(x) > k(x)$.

- 16** Gegeven zijn de functies $f(x) = -\frac{12}{2x + 5}$ en $g(x) = 3$.
- a** Plot en schets de grafieken van f en g .
b Los op $f(x) < g(x)$.





SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In de onderbouw heb je gewerkt met lijnen. Je leerde hoe je grafieken bij lineaire formules tekent en hoe je de formule van een lijn opstelt. Ook heb je gezien hoe je de coördinaten van het snijpunt van twee lijnen kunt berekenen.

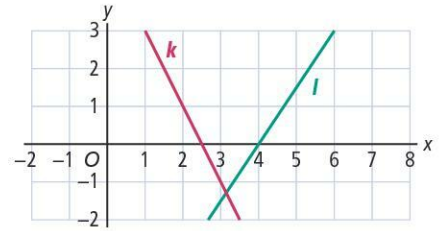
In dit hoofdstuk ga je de hoek tussen twee lijnen berekenen, de vergelijking van een (middel)loodlijn opstellen en de afstanden tussen punten en lijnen berekenen.

Het werken met lijnen komt terug in hoofdstukken over functies zoals hoofdstuk 6 en in hoofdstukken over meetkunde zoals hoofdstuk 9.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- | | |
|--|---------------------|
| • <i>Probleemoplossen en analytisch denken</i> | opdracht 50 |
| • <i>Modelleren en algebraïseren</i> | intro paragraaf 5.2 |
| • <i>Ordenen en structureren</i> | opdracht 9 |
| • <i>Logisch redeneren en bewijzen</i> | opdracht 29 |

- V1** Lijn k is de grafiek bij de formule $y = -2x + 5$.
- Hoe groot is het startgetal van k ? En hoe groot is het hellingsgetal van k ?
 - Leg uit hoe je het hellingsgetal uit de grafiek kunt aflezen.
 - Hoe groot is het hellingsgetal van lijn l ?
 - Bereken het startgetal van l en stel een formule van l op.
 - Lijn m is evenwijdig met k en gaat door het punt $(-3, -4)$. Stel een formule van m op.
 - Lijn n gaat door de punten $(-2, 0)$ en $(6, 4)$. Stel een formule van n op.



Theorie

Formules van de vorm $y = mx + n$ zijn **lineaire formules**, waarbij m het hellingsgetal is en n het startgetal. Een ander woord voor hellingsgetal is **richtingscoëfficiënt**. De lineaire formule die bij een lijn hoort noem je ook wel een **vergelijking** van een lijn.

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de lijn l door de punten $A(3, 2)$ en $B(6, 6)$.

Oplossing

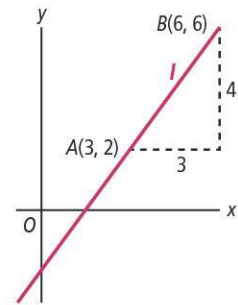
Tussen A en B neemt de x -coördinaat met 3 toe en de y -coördinaat met 4. Als x met 1 toeneemt, dan is de toename van y gelijk aan $\frac{4}{3}$.

Een vergelijking van l is van de vorm $y = \frac{4}{3}x + b$.

Invullen van de coördinaten van $A(3, 2)$ in $y = \frac{4}{3}x + b$ geeft

$$2 = \frac{4}{3} \cdot 3 + b \text{ ofwel } 2 = 4 + b \text{ dus } b = -2.$$

Een vergelijking van l is $y = \frac{4}{3}x - 2$.



- V2** Stel een vergelijking op van lijn l .
- l gaat door $(0, 7)$ en heeft richtingscoëfficiënt -3 .
 - l gaat door $(0, 0)$ en $(40, 30)$.
 - l gaat door $(0, -13\frac{1}{2})$ en $(1, -5)$.
 - l gaat door $(1, 4\frac{1}{2})$ en is evenwijdig aan de lijn met vergelijking $y = -\frac{1}{2}x + 17$.
 - l gaat door $(-2, 1)$ en $(4, 4)$.
 - l gaat door $(4, 1)$ en $(-1, -1)$.

- V3** Gegeven is de vergelijking $2x - 3y = 12$.
Laat zien dat dit de vergelijking van een lijn is door de vergelijking te herleiden tot $y = \frac{2}{3}x - 4$.

V4 Herleid de vergelijkingen waarbij je y uitdrukt in x .

a $6x - 4y = 24$

c $3(x + 2y) = 1$

b $x = 3y + 17$

d $3y - 2x = x + 5y - 4$

V5 a In de formule $y = 5t - 7$ is y uitgedrukt in t .

In de formule $t = 2x + 3$ is t uitgedrukt in x .

Om y uit te drukken in x moet je de formule $t = 2x + 3$ substitueren in de formule $y = 5t - 7$. Op het blaadje is daarmee een begin gemaakt.

Werk de haakjes weg en vereenvoudig de formule.

b Substitueer $t = x + 4$ in $y = -\frac{1}{2}t + \frac{3}{4}$.

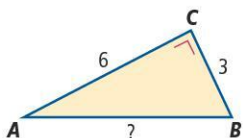
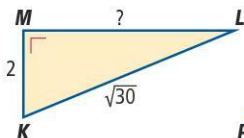
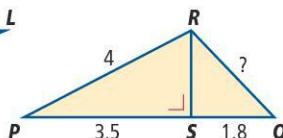
Vereenvoudig je antwoord zoveel mogelijk.

c Substitueer $t = 2x - 5$ in $3t = 2y + 7$ en druk y uit in x .

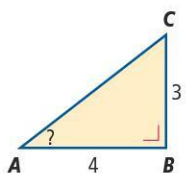
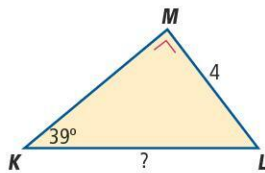
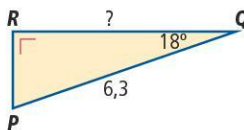
Vereenvoudig je antwoord zoveel mogelijk.

●	Substitutie van $t = 2x + 3$ in
●	$y = 5t - 7$ geeft
●	$y = 5(2x + 3) - 7$
●	$y = \dots$ (haakjes weggewerkt)
●	$y = \dots$ (vereenvoudigd)

V6 Bereken van de driehoeken de exacte lengte van de zijde waarbij een vraagteken staat.



V7 Bereken van de driehoeken met behulp van de sinus, de cosinus of de tangens de grootte van de hoek en de lengte van de zijden met een vraagteken. Rond de hoek af op hele graden en de lengten op één decimaal.



5.1 Vergelijking van een lijn

Je leert

- welke vormen er zijn voor de vergelijking van een lijn
- hoe je de vergelijking van een lijn herleidt tot een andere vorm

Leerroutes

- ondersteunend: 1–2–3–4–05–5–6–7–08
- doorlopend: 1–2–3–4–5–6–7–8–9
- uitdagend: 1–3–4–6–7–8–9–U1–U2

De tijd die nodig is voor een bergwandeling is te berekenen met de regel van Naismith:

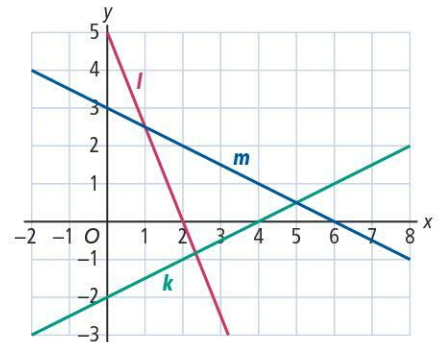
neem de tijd die voor dezelfde afstand op een vlakke weg nodig is en tel er 20 minuten per 100 meter stijging bij op.

Freek en Yael maken een wandeling van 4 uur. Op vlak terrein is hun wandeltempo 5 km per uur.

- Leg uit dat het verband tussen de afstand a in km en het aantal gestegen meters h wordt gegeven door de formule $4 = \frac{1}{5}a + \frac{1}{300}h$.



- 1 Bij lijn l hoort de vergelijking $y = -2\frac{1}{2}x + 5$.
 - a Geef het startgetal en de richtingscoëfficiënt van l .
 - b Controleer met een berekening dat l de x -as snijdt in $(2, 0)$ en de y -as in $(0, 5)$.
 - c Stel een vergelijking op van lijn m .
 - d Stel een vergelijking op van lijn k .



- 2 De vergelijking $y = -2\frac{1}{2}x + 5$ van l uit opdracht 1 kun je schrijven als $2\frac{1}{2}x + y = 5$ en ook als $5x + 2y = 10$. Schrijf ook de vergelijkingen van m en k in de vorm $ax + by = c$ met a , b en c gehele getallen.
- 3 Ook deze opdracht gaat over de lijnen uit opdracht 1. Door de vergelijking $5x + 2y = 10$ links en rechts door 10 te delen ontstaat de vergelijking $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$.
 - a Omschrijf hoe je in de laatste vergelijking de coördinaten van de snijpunten van l met de beide assen kunt herkennen.
 - b Schrijf de vergelijkingen van m en k in de vorm $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.
 - c In welke punten snijdt lijn n : $\frac{x}{-6} + \frac{y}{3} = 1$ de assen?
 - d Lijn j snijdt de assen in de punten $(9, 0)$ en $(0, -4)$. Geef een passende vergelijking bij j .

Theorie

Een vergelijking van een lijn kun je op verschillende manieren weergeven.

- Een vergelijking van een lijn kun je schrijven als $ax + by = c$.
- Als de lijn niet evenwijdig is aan de verticale as, kun je de vergelijking ook schrijven als $y = mx + n$ waarbij m de richtingscoëfficiënt en n het startgetal is.
- Als een lijn de assen snijdt in $(p, 0)$ en $(0, q)$ met $p \neq 0$ én $q \neq 0$, dan kun je de vergelijking schrijven als $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

Een verticale lijn heeft vergelijking $x = c$ en een horizontale lijn $y = c$.

Voorbeeld

Lijn l snijdt de assen in $(-4, 0)$ en $(0, 8)$.

Geef een vergelijking van l in de vormen $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$, $ax + by = c$ en $y = mx + n$.

Oplossing

Er geldt $l: \frac{x}{-4} + \frac{y}{8} = 1$.

Links en rechts vermenigvuldigen met 8 geeft $-2x + y = 8$, dus $y = 2x + 8$.

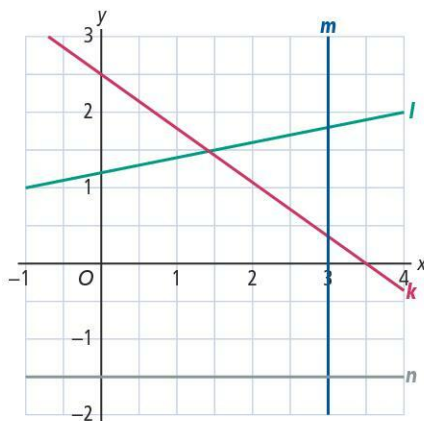
4 a Schrijf $y = -\frac{2}{3}x + 7$ in de vorm $ax + by = c$.

H b Schrijf $y = -2x + 3$ in de vorm $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

c Schrijf $\frac{x}{2\frac{1}{2}} + \frac{y}{-1} = 1$ in de vorm $y = mx + n$.

Ondersteunende route → maak opdracht 05

5 Geef een vergelijking bij elk van de lijnen in het assenstelsel.



6 Geef een vergelijking in drie vormen van de lijn door de twee punten.

a $(6, 0)$ en $(0, 18)$

d $(-5, 0)$ en $(0, -7\frac{1}{2})$

b $(0, 4)$ en $(1, 3)$

e $(-4, 2)$ en $(2, -7)$

c $(-4, 0)$ en $(0, 20)$

f $(9, -1)$ en $(-1, 4)$

- 7** Bij een lijn hoort de vergelijking $3x - 4y = -18$.
- a** Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijn met de y -as door $x = 0$ in te vullen.
 - b** Bereken ook de coördinaten van het snijpunt met de x -as.
 - c** Teken de lijn in een assenstelsel.
 - d** Bij een andere lijn hoort de vergelijking $7y - 5x = 21$. Bereken de coördinaten van de snijpunten met de assen.
 - e** Teken deze lijn in het assenstelsel van opdracht c.

Ondersteunende route → maak opdracht O8

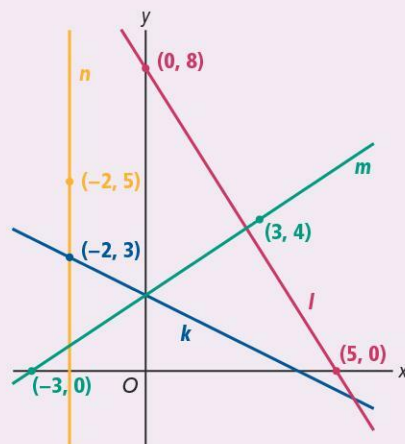
- 8** Gegeven zijn de lijnen $l: y = 4x - 5$ en $m: \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.
Onderzoek wat het verband is tussen p en q in het geval de lijnen evenwijdig zijn.

- 9** Bij een lijn hoort een vergelijking van de vorm $ax + by = c$.
- a** Wat kun je over de ligging van de lijn in het assenstelsel vertellen als a gelijk is aan nul en b en c niet?
 - b** Wat kun je over de ligging van de lijn in het assenstelsel vertellen als b gelijk is aan nul en a en c niet?
 - c** Van wat voor soort verband is er sprake als c gelijk is aan nul en a en b niet?
 - d** Onderzoek wat er aan de hand is als van a , b en c in de vergelijking $ax + by = c$ er twee gelijk zijn aan nul en één niet.

Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2

Ondersteunende opdrachten

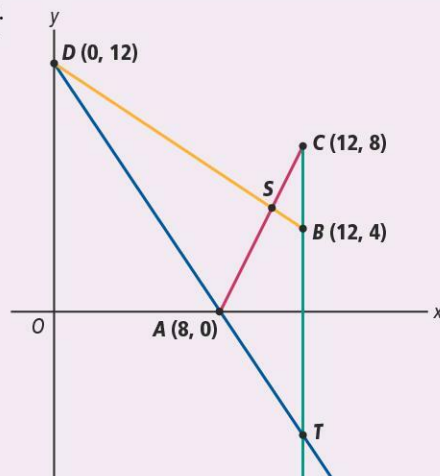
- 05**
- a** Lijn k gaat door $(-2, 3)$ en heeft richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{2}$.
Waarom is het handig om voor een vergelijking van k de vorm $y = ax + b$ te gebruiken?
 - b** Stel een vergelijking op van k .
 - c** Lijn l snijdt de x -as in $(5, 0)$ en de y -as in $(0, 8)$.
Waarom is de vorm $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ handig voor l ?
 - d** Stel een vergelijking op van l .
 - e** Lijn m snijdt de x -as in $(-3, 0)$ en gaat door $(3, 4)$.
Kies een handige vorm en stel een vergelijking van m op.
 - f** Lijn n gaat door de punten $(-2, 3)$ en $(-2, 5)$.
Leg uit dat bij n een vergelijking van de vorm $x = c$ hoort.
 - g** Geef een vergelijking van n .



- 08** Gegeven zijn de lijnen $k: 3x + 2y = 7$ en $l: \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$.
- a** Bereken van beide lijnen de richtingscoëfficiënt.
 - b** Wat weet je nu van deze twee lijnen?
 - c** Gegeven zijn de lijnen $m: y = -5x + 1$ en $n: \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.
Onderzoek wat het verband is tussen p en q in het geval de lijnen evenwijdig zijn.

Uitdagende opdrachten

- U1** Gegeven zijn de punten $A(8, 0)$, $B(12, 4)$, $C(12, 8)$ en $D(0, 12)$.
- a** Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen AC en BD .
 - b** De lijnen AD en BC snijden elkaar in het punt T .
Bereken de coördinaten van T .
- U2**
- a** Gegeven zijn de lijnen $p(x - 3) + q(y - 4) = 0$ waarbij p en q willekeurige getallen zijn.
Waarom ligt het punt $(3, 4)$ op elk van de lijnen?
 - b** Neem $p = 2$ en bereken voor welke waarde van q de lijn door het punt $(0, 0)$ gaat.
 - c** Gegeven zijn de lijnen $p(x + y - 3) + q(2x + y + 2) = 0$ waarbij p en q willekeurige getallen zijn.
Teken voor $p = 1$ en $q = 1$ de bijbehorende lijn.
Doe dat ook voor $p = 2$ en $q = -1$.
 - d** Toon aan dat alle lijnen met vergelijking $p(x + y - 3) + q(2x + y + 2) = 0$ door één punt gaan.



5.2 Stelsels lineaire vergelijkingen

Je leert • hoe je een stelsel vergelijkingen oplost

Leerroutes • ondersteunend: 10—011—12—13—14—15—16—017—17
• doorlopend: 10—11—12—13—14—15—16—17—18
• uitdagend: 10—11—12—14—15—16—17—18—U3

Vier volwassenen en drie kinderen gaan naar de film. Ze betalen 51 euro. Twee volwassenen en twee kinderen betalen 28 euro.

- Hoe duur zijn de kaartjes?



- 10** Gegeven zijn de lijnen $k: 4x + y = 9$ en $l: 6x - 2y = 3$.
- Schrijf de vergelijking $4x + y = 9$ in de vorm $y = mx + n$.
 - Schrijf de vergelijking $6x - 2y = 3$ in de vorm $y = mx + n$.
 - Teken k en l in een assenstelsel.
 - Bereken de coördinaten van het snijpunt van k en l . Gebruik daarbij de vergelijkingen die je bij de opdrachten a en b gevonden hebt.

Theorie

$5x + 2y = 18$ en $3x - y = 2$ zijn vergelijkingen van lijnen.

Een **stelsel vergelijkingen** noteer je als
$$\begin{cases} 5x + 2y = 18 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

De oplossing van een stelsel vergelijkingen is de combinatie van waarden van x en y die aan beide vergelijkingen voldoen. De oplossing van het stelsel vergelijkingen geeft de coördinaten van het snijpunt van de lijnen die bij de vergelijkingen horen, in dit geval het punt $(2, 4)$.

Voorbeeld

Los het stelsel
$$\begin{cases} 8a - 2b = 5 \\ 3a + 4b = 28 \end{cases}$$
 op.

Oplossing

$8a - 2b = 5$ herleid je tot $b = 4a - 2\frac{1}{2}$

$3a + 4b = 28$ herleid je tot $b = -\frac{3}{4}a + 7$.

Gelijkstellen:

$$4a - 2\frac{1}{2} = -\frac{3}{4}a + 7$$

$$16a - 10 = -3a + 28$$

$$19a = 38 \text{ geeft } a = 2.$$

Invullen bij $b = 4a - 2\frac{1}{2}$ geeft $b = 5\frac{1}{2}$.

Oplossing: $a = 2$ en $b = 5\frac{1}{2}$

Ondersteunende route → maak opdracht 011

- 11** Los de stelsels vergelijkingen op.

H

a
$$\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ y = -4x + 3 \end{cases}$$

c
$$\begin{cases} 6x - y = 14 \\ 2x + 3y = 18 \end{cases}$$

b
$$\begin{cases} y + 3x = 0 \\ 5x + y = 4 \end{cases}$$

d
$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ -2x + y = 7 \end{cases}$$

- 12** Gegeven zijn de vergelijkingen $-3x + 2y = 8$ en $8x - 3y = -5$.
- Schrijf de vergelijking $-3x + 2y = 8$ in de vorm $y = mx + n$.
 - Substitueer de bij opdracht a gevonden vergelijking in de vergelijking $8x - 3y = -5$ en bereken de waarden van x en y .

Theorie

Bij het oplossen van een stelsel vergelijkingen kun je gebruik maken van

- herleiden van vergelijkingen
- substitutie

Voorbeeld

Los het stelsel $\begin{cases} y = 2x - 8 \\ 3x + 5y = 12 \end{cases}$ op.

Oplossing

Substitutie van $y = 2x - 8$ in $3x + 5y = 12$ geeft

$$3x + 5(2x - 8) = 12$$

$$13x - 40 = 12$$

$$13x = 52 \text{ ofwel } x = 4$$

$$y = 2 \cdot 4 - 8 = 0$$

Oplossing: $x = 4$ en $y = 0$

- 13**
- Bekijk het stelsel vergelijkingen in het voorbeeld. Laat zien dat de vergelijking $3x + 5y = 12$ te herleiden is tot $y = -0,6x + 2,4$.
 - Laat met een berekening zien dat je bij gelijkstellen van $y = 2x - 8$ en $y = -0,6x + 2,4$ dezelfde oplossing vindt.
 - Welke methode vind je in dit geval het handigst?

- 14** Gegeven zijn vier stelsels vergelijkingen.

H

A $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ y = \frac{1}{2}x - 2 \end{cases}$

C $\begin{cases} 3x + 2y + 2 = 0 \\ x = y - 4 \end{cases}$

B $\begin{cases} x + y = -2 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$

D $\begin{cases} 7x - 4y + 2 = 0 \\ 2x + 5y + 19 = 0 \end{cases}$

- Bij welke stelsels is substitutie de handigste methode?
- Los de stelsels op.

15 Op het blaadje wordt het stelsel $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 4 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ opgelost.

- Klopt de bewering $0 \cdot x = 0$ voor $x = 3$?
Welke waarde van y hoort hierbij?
- Klopt de bewering $0 \cdot x = 0$ ook voor $x = -4$?
Welke oplossing van het stelsel hoort hierbij?
- Voor welke waarden van x is de bewering $0 \cdot x = 0$ waar?
Hoeveel oplossingen kent het stelsel dus?
- Wat volgt hieruit voor de lijnen die bij het stelsel horen?

- 16**
- Substitutie van $y = -\frac{1}{2}x + 4$ in $x + 2y = 6$ geeft $0 \cdot x = -2$.
Laat dat zien.
 - Waarom volgt hieruit dat het stelsel $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 4 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$ geen oplossingen heeft?
 - Wat volgt hieruit voor de lijnen die bij het stelsel horen?

Theorie

Je kunt bij het oplossen van een stelsel vergelijkingen uitkomen op een vergelijking van de vorm $0 \cdot x = a$ (of $0 \cdot y = a$).

Als $a = 0$, dan heeft het stelsel oneindig veel oplossingen en vallen de bijbehorende lijnen samen.

Als $a \neq 0$ dan heeft het stelsel géén oplossingen en zijn de bijbehorende lijnen evenwijdig.

$0 \cdot x = 0$
oneindig veel
oplossingen



$0 \cdot x = a$ met $a \neq 0$
géén oplossingen



Ondersteunende route → maak opdracht 017

17 Onderzoek voor elk stelsel het aantal oplossingen.

- $\begin{cases} y = -2\frac{1}{2}x + 3 \\ 2x + 5y = 6 \end{cases}$
- $\begin{cases} 3x - 2y = 1\frac{1}{2} \\ y = 1\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \end{cases}$
- $\begin{cases} 8(x - y) = 4x - 3 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} y = 1\frac{1}{2}x + 21 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 7 \end{cases}$

18 Een parabool met vergelijking $y = x^2 + bx + c$ gaat door de punten $A(-2, -11)$ en $B(3, 4)$.

- Leg uit dat voor b en c geldt: $4 - 2b + c = -11$.
- Bereken exact b en c en geef de vergelijking van de parabool.

Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

011 Gegeven is het stelsel $\begin{cases} 4x + y = 3 \\ 3x - 4y = 26 \end{cases}$

- Herleid beide vergelijkingen tot de vorm $y = ax + b$.
- Bereken x door de vergelijkingen aan elkaar gelijk te stellen en de ontstane vergelijking op te lossen.
- Gebruik een van de twee vergelijkingen om y te berekenen.
- Gebruik de andere vergelijking om je oplossing van het stelsel te controleren.

Los op.

$$\begin{array}{ll} \mathbf{e} \quad \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 3y = 11 \end{cases} & \mathbf{g} \quad \begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \\ \mathbf{f} \quad \begin{cases} -x + 3y = 17 \\ 4x + 5y = 17 \end{cases} & \mathbf{h} \quad \begin{cases} 4x - 2y = 11 \\ 2x - 7y = 2\frac{1}{2} \end{cases} \end{array}$$

017 Gegeven is het stelsel $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ y = -\frac{2}{3}x + 2 \end{cases}$

- Op het blaadje is een begin gemaakt met het oplossen van het stelsel. Laat zien dat je in de laatste regel uitkomt op $0 \cdot x = 0$.
- Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $0 \cdot x = 0$?
- Hoeveel oplossingen heeft het stelsel?

d Gegeven is het stelsel $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ y = -\frac{2}{3}x + 3 \end{cases}$

Laat op de manier van opdracht a zien dat substitutie van de tweede vergelijking in de eerste leidt tot $0 \cdot x = -3$.

- e Welke conclusie volgt hieruit voor het aantal oplossingen van het stelsel vergelijkingen?

$$2x + 3(\dots) = 6$$
$$2x \dots = 6$$
$$\dots \cdot x = \dots$$

Uitdagende opdrachten

U3 Gegeven is het stelsel $\begin{cases} py - x = 9 \\ 3y + px = 45 \end{cases}$

De bijbehorende lijnen snijden elkaar in een punt dat op de lijn $y = x$ ligt.

Bereken exact de waarde van p .

5.3 De hoek tussen twee lijnen

Je leert

- hoe je de hoek tussen twee lijnen berekent

Leerroutes

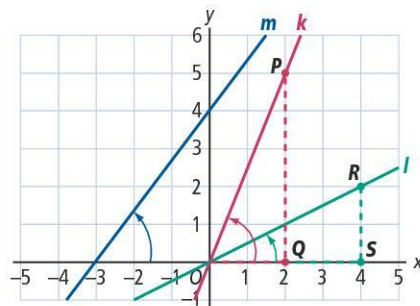
- ondersteunend: 19–20–021–22–23–24–25–026–26
- doorlopend: 19–20–21–22–23–24–25–26–27
- uitdagend: 19–20–21–22–23–25–26–27–U4

De helling van een weg kan op verschillende manieren worden weergegeven. Op verkeersborden zie je meestal een percentage of een verhouding.

- Welke helling is het steilst? Kies uit een helling van 20%, een helling van 1 : 5 of een helling van 20° .



- 19 In het assenstelsel zijn de lijnen k , l en m getekend.
- Geef de richtingscoëfficiënt van k .
 - Bereken $\tan(\angle POQ)$ in $\triangle OPQ$. Leg uit waarom $\tan(\angle POQ)$ gelijk is aan de richtingscoëfficiënt van k .
 - Bereken de scherpe hoek die k maakt met de x -as. Rond af op hele graden.
 - Bereken de scherpe hoek die l maakt met de x -as.
 - Bereken de scherpe hoek die m maakt met de x -as.
- 20 a Schets in een assenstelsel de lijn n : $y = -\frac{1}{3}x$.
b Bereken in hele graden de scherpe hoek die n met de x -as maakt.

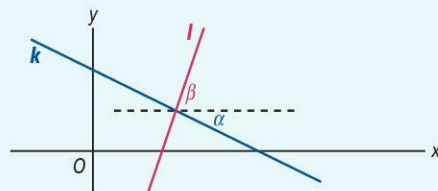


Theorie

De **hoek tussen twee lijnen** is de scherpe of rechte hoek tussen die lijnen.

De hoek tussen de lijnen k en l noteer je met $\angle(k, l)$.

De hoek α tussen een lijn en een horizontale lijn kun je berekenen met behulp van de richtingscoëfficiënt van de lijn.



Voorbeeld

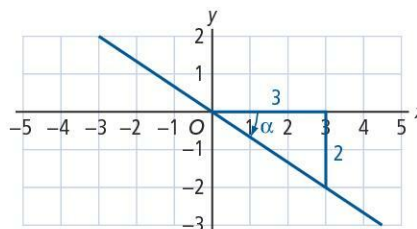
Bereken de hoek die lijn l : $2x + 3y = 0$ maakt met de x -as.

Oplossing

$2x + 3y = 0$ kun je herleiden tot $y = -\frac{2}{3}x$.

De richtingscoëfficiënt van l is dus $-\frac{2}{3}$.

Uit $\tan(\alpha) = \frac{2}{3}$ volgt $\alpha \approx 34^\circ$.



Ondersteunende route → maak opdracht 021

- 21** Gegeven zijn de lijnen $k: 4x + 5y = 0$, $m: 4x = y + 2$ en

H $n: \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y = 1$.

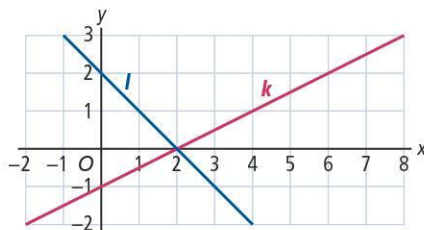
Bereken in hele graden de hoeken die k , m en n maken met de x -as.

- 22** a Er zijn twee lijnen door $(0, 0)$ die een hoek van 45° maken met de x -as. Geef van beide lijnen een vergelijking.
b Doe dit ook bij een hoek van 30° .
c Geef een vergelijking van de lijn door $(0, 0)$ die een hoek van 0° maakt met de x -as.

De grootte van hoeken moet je vaak afronden op hele graden. Een andere formulering die daarvoor gebruikt wordt is: 'Bereken in graden nauwkeurig'.

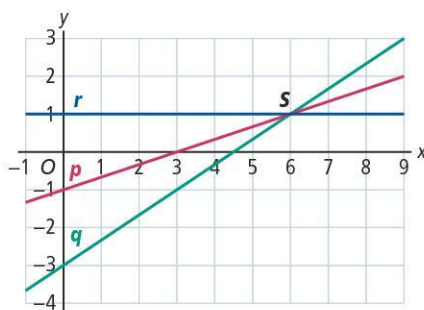
- 23** De lijnen $k: y = \frac{1}{2}x - 1$ en $l: y = -x + 2$ snijden elkaar in $(2, 0)$.

- a Bereken $\angle(k, x\text{-as})$.
b Bereken $\angle(l, x\text{-as})$.
c Bereken $\angle(k, l)$ in graden nauwkeurig.



- 24** In het assenstelsel zijn de lijnen $p: x - 3y = 3$ en $q: 2x - 3y = 9$ getekend. De lijnen snijden elkaar in punt $S(6, 1)$. Door punt S is een horizontale lijn r getekend.

- a Bereken $\angle(p, r)$ en $\angle(q, r)$.
b Bereken $\angle(p, q)$ in graden nauwkeurig.



- 25** Gegeven zijn de lijnen $m: y + 1 = x$ en $n: 4y + x = 16$.

- a Teken m en n in één assenstelsel.
b Teken een horizontale lijn k door het snijpunt van m en n .
c Bereken $\angle(m, k)$ en $\angle(n, k)$.
d Bereken $\angle(m, n)$ in graden nauwkeurig.

Aanpak

Hoe bereken je de hoek tussen twee lijnen?

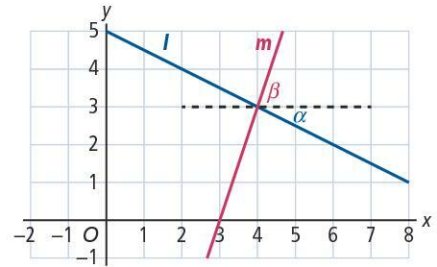
- 1 Maak een schets met de beide lijnen.
- 2 Bereken van elke lijn de richtingscoëfficiënt.
- 3 Bereken met behulp van de richtingscoëfficiënt voor elke lijn de hoek met een horizontale lijn.
- 4 Gebruik de schets en bereken in hele graden de scherpe of de rechte hoek die de lijnen met elkaar maken.

Voorbeeld

Bereken in hele graden de hoek tussen de lijnen $l: y = -\frac{1}{2}x + 5$ en $m: y = 3x - 9$.

Oplossing

- 1 Zie hiernaast.
- 2 De richtingscoëfficiënt van l is $-\frac{1}{2}$, die van m is 3.
- 3 Uit $\tan(\alpha) = \frac{1}{2}$ volgt $\alpha = 26,56\dots^\circ$.
Uit $\tan(\beta) = 3$ volgt $\beta = 71,56\dots^\circ$.
Rond tussendoor niet af.
- 4 $\alpha + \beta = 26,56\dots^\circ + 71,56\dots^\circ \approx 98,12^\circ$ dus $\angle(l, m) \approx 180^\circ - 98^\circ = 82^\circ$.



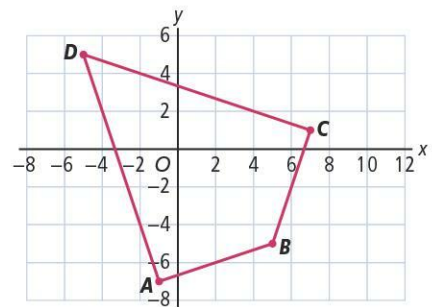
Ondersteunende route → maak opdracht 026

- 26 Bereken in hele graden de hoek tussen de lijnen.

- H**
- a $3x - \frac{1}{2}y = 4$ en $2y + 3x = 6$
 - b $y = \frac{2}{5}x + 4$ en $2y + 5x = 1$

- 27 Van vierhoek $ABCD$ zijn de hoekpunten $A(-1, -7)$, $B(5, -5)$, $C(7, 1)$ en $D(-5, 5)$.

- a Bereken $\angle B$.
- b Bereken $\angle D$ in graden nauwkeurig.
- c Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen AC en DC .

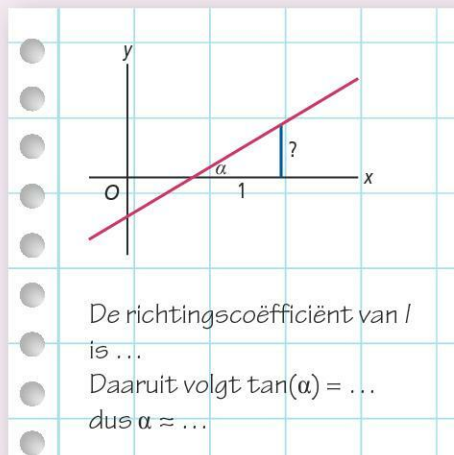


Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten

021 Gegeven zijn de lijnen $l: 3x - 5y = 5$, $m: 2y = -5x + 4$ en $n: \frac{1}{4}x - \frac{1}{6}y = 1$.

- Bereken de richtingscoëfficiënt van l .
- Op het blaadje is l getekend. De horizontale rechthoekszijde van de getekende driehoek is 1. Hoe lang is de verticale rechthoekszijde?
- De hoek die l maakt met de x -as is aangegeven met α . Geef $\tan(\alpha)$.
- Bereken α . Rond af op hele graden.
- Bereken op dezelfde manier de hoeken die m en n met de x -as maken.

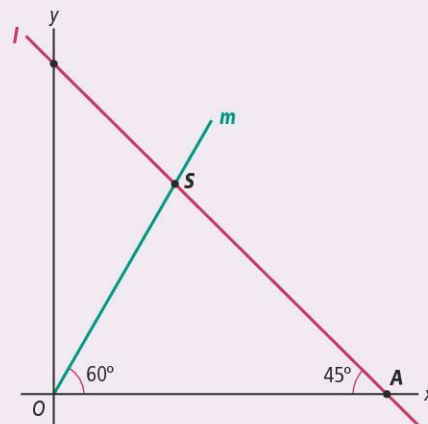


026 Gegeven zijn de lijnen $l: y = -3x + 5$ en $m: 2x + 3y = 8$.

- Herleid $2x + 3y = 8$ tot de vorm $y = ax + b$.
- Schets beide lijnen in een assenstelsel. Teken een horizontale lijn n door het snijpunt van l en m .
- Geef de richtingscoëfficiënt van l .
- Bereken $\angle(l, n)$.
- Bereken de richtingscoëfficiënt van m .
- Bereken $\angle(m, n)$.
- Gebruik je schets om de hoek tussen l en m te berekenen.

Uitdagende opdrachten

- U4** Lijn l gaat door punt $A(10, 0)$. De hoek tussen l en de x -as is 45° .
 Lijn m gaat door de oorsprong en maakt een hoek van 60° met de x -as.
 Bereken de coördinaten van het snijpunt S van beide lijnen.
 Rond af op één decimaal.



5.4 Loodrecht

Je leert

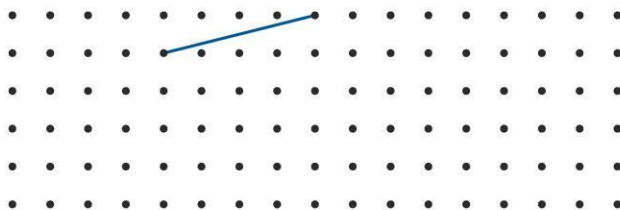
- wat het verband is tussen de richtingscoëfficiënten van twee elkaar loodrecht snijdende lijnen
- hoe je bij een lijn een vergelijking van de loodlijn door een gegeven punt opstelt
- wat een middelloodlijn is

Leerroutes

- ondersteunend: 28—29—30—31—032—32—034—35—36
- doorlopend: 28—29—30—31—32—33—34—35—36
- uitdagend: 28—29—30—32—33—35—36—U5—U6

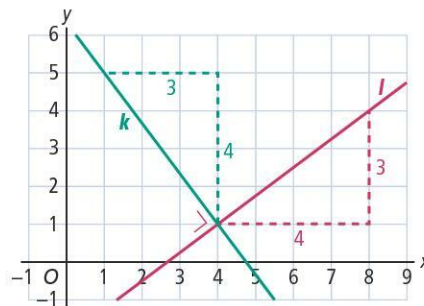
Het lijnstuk in het rooster is de zijde van een vierkant.

- Hoe gebruik je het rooster om de andere zijden van het vierkant te vinden?



- 28** De lijnen k en l snijden elkaar loodrecht.
 m_1 en m_2 zijn de richtingscoëfficiënten van k en l .

- Bereken m_1 .
- Bereken m_2 .
- Bereken $m_1 \cdot m_2$.

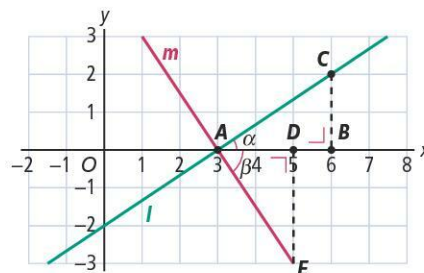


- 29** In opdracht 28 heb je gezien dat het product van de richtingscoëfficiënten gelijk is aan -1 als twee lijnen loodrecht op elkaar staan. In deze opdracht ga je het omgekeerde aantonen.

Gegeven zijn lijn l : $3y - 2x + 6 = 0$ en lijn m : $2y + 3x - 9 = 0$.

In de figuur zijn $\triangle ABC$ en $\triangle ADE$ getekend met daarin de hoeken α en β .

- Bereken het product van de richtingscoëfficiënten van l en m .
- Leg uit waarom $\triangle ABC$ en $\triangle EDA$ gelijkvormig zijn.
- Beredeneer dat in $\triangle ABC$ geldt dat $\angle ACB = \beta$.
- Leg uit dat $\alpha + \beta$.
- Beredeneer dat l en m elkaar loodrecht snijden.



Theorie

Als voor twee lijnen k en l met richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 geldt $m_1 \cdot m_2 = -1$, dan staan k en l **loodrecht** op elkaar.

Notatie: $k \perp l$.

Het omgekeerde is ook waar:

Als twee lijnen k en l met richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 loodrecht op elkaar staan, dan geldt $m_1 \cdot m_2 = -1$.

- 30** Onderzoek welke lijnen loodrecht op elkaar staan.

H $k: y = -2x + 7$ $n: x - 2y = 5$

$l: \frac{x}{3} + \frac{y}{9} = 1$ $p: \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$

$m: x = \frac{1}{2}y - 4$ $q: -3x + y = -5$

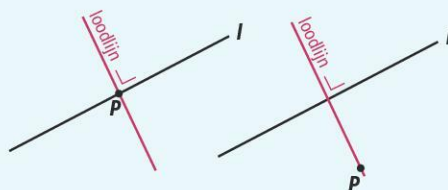
- 31** Gegeven zijn lijn $l: 2y - x = 1$ en punt $P(5, -4)$.

- Toon aan dat de lijn met vergelijking $y = -2x + b$ voor elke waarde van b loodrecht op l staat.
- Vul de coördinaten van P in en bereken b .
- Geef een vergelijking van de loodlijn door P op l .

Aanpak

Hoe stel je een vergelijking op van de loodlijn door punt P op lijn l ?

- Bereken de richtingscoëfficiënt m_1 van l .
- Bereken de richtingscoëfficiënt m_2 van de loodlijn met behulp van de regel $m_1 \cdot m_2 = -1$.
- Een vergelijking van de loodlijn is $y = m_2 \cdot x + b$.
- Bereken b door de coördinaten van punt P in te vullen.



Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de loodlijn door $P(1, 2)$ op lijn $l: x + 3y = 7$.

Oplossing

1 $x + 3y = 7$, dus $3y = -x + 7$ ofwel $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$.

De richtingscoëfficiënt van l is $-\frac{1}{3}$.

2 Als m de richtingscoëfficiënt van de loodlijn is, dan is $-\frac{1}{3} \cdot m = -1$, dus $m = 3$.

3 Loodlijn $y = 3x + b$

4 Coördinaten van P invullen geeft $2 = 3 \cdot 1 + b$, dus $b = -1$.
Een vergelijking van de loodlijn is $y = 3x - 1$.

Ondersteunende route → maak opdracht 032

- 32**
- H**
- Gegeven zijn lijn $k: 2x - 3y = 5$ en punt $P(-2, -1)$.
Stel een vergelijking op van de loodlijn l door P op k .
 - Gegeven zijn lijn $m: 6x - 5y = 15$ en punt $Q(-1, 3)$.
Stel een vergelijking op van de loodlijn n door Q op m .

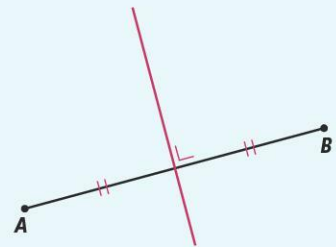
- 33** Gegeven zijn de lijnen $l: y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$ en $m: px + qy = 3$.
 m gaat door het punt $P(4, 1)$ en $m \perp l$.
 Je gaat de waarden van p en q berekenen.
- Druk de richtingscoëfficiënt van m uit in p en q .
 - Toon aan dat uit $m \perp l$ volgt dat $3p = -4q$.
 - m gaat door P .
Welke verband tussen p en q volgt hieruit?
 - Bereken exact p en q en geef een vergelijking van m .

Ondersteunende route → maak opdracht 034

- 34** Gegeven zijn de punten $A(2, -5)$ en $B(-4, 7)$.
- Stel een vergelijking op van de lijn door A en B .
 - Punt M is het midden van lijnstuk AB .
Bereken de coördinaten van M .
 - Stel een vergelijking op van de lijn k door M , die loodrecht staat op lijnstuk AB .

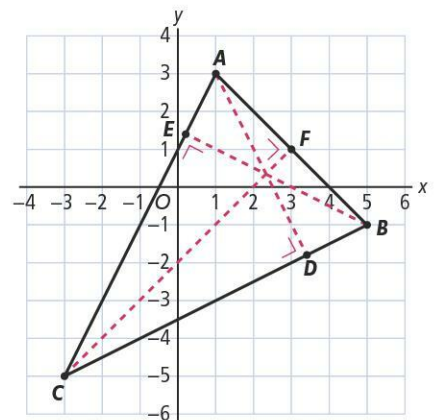
Theorie

De **middelloodlijn** van lijnstuk AB is de lijn die door het midden van lijnstuk AB gaat en loodrecht op lijnstuk AB staat.



- 35** Gegeven zijn de punten $A(4, 4)$, $B(2, -2)$ en $C(-12, 4)$.
 Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van lijnstuk AB en van lijnstuk AC .

- 36** De coördinaten van de hoekpunten van $\triangle ABC$ zijn $A(1, 3)$, $B(5, -1)$ en $C(-3, -5)$.
 Lijn AD gaat door A en staat loodrecht op zijde BC . Een dergelijke lijn in een driehoek heet een hoogtelijn.
 In een driehoek kun je drie verschillende hoogtelijnen tekenen.
- Stel een vergelijking op van de lijn door B en C .
 - Stel een vergelijking op van de hoogtelijn AD .
 - Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van lijnstuk AB .
 - Toon aan dat de middelloodlijn van AB door C gaat.
 - Wat volgt hieruit voor $\triangle ABC$?



Uitdagende route → maak opdracht U5 en U6

Ondersteunende opdrachten

032 Gegeven zijn lijn $l: 2x + 3y = 8$ en punt $P(6, 4)$. In deze opdracht ga je een vergelijking van de loodlijn m door P op l opstellen.

- Op het blaadje is een begin gemaakt met de berekening van de richtingscoëfficiënt van l . Maak de berekening verder af.
- Bereken de richtingscoëfficiënt van m .
- Een vergelijking van m is $y = ax + b$.
Vul hierin de richtingscoëfficiënt in die je bij opdracht b hebt berekend.
- Vul de coördinaten van P in om b te berekenen.
- Geef een vergelijking van de loodlijn m .

●	$2x + 3y = 8$, dus $3y = \dots$
●	ofwel $y = \dots$
●	Daaruit volgt $rc_l = \dots$
●	$l \perp m$ dus $rc_l \cdot rc_m = -1$
●	dus $rc_m = \dots$

034 Gegeven zijn de punten $A(1, 7)$ en $B(5, -1)$.

- Stel een vergelijking op van de lijn door A en B .
- Teken lijnstuk AB in een assenstelsel. Geef de coördinaten van het midden M van AB .
- Hoe kun je de coördinaten van M berekenen met behulp van de coördinaten van A en B ?
- Geef een vergelijking van de lijn k door M , die loodrecht staat op lijnstuk AB .

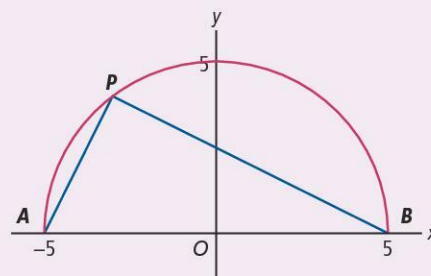
Uitdagende opdrachten

U5 Gegeven zijn de lijnen $k: 3x - y = 1$ en $l: 2x - 5y + 8 = 0$.
 k en l snijden elkaar in het punt $S(1, 2)$.

- Lijn m staat loodrecht op k en gaat door S .
Stel een vergelijking van m op.
- Lijn n is de loodlijn op l die door S gaat.
Stel een vergelijking op van n .
- Teken k , l , m en n in een assenstelsel.
- Beredeneer dat de hoek tussen m en n gelijk is aan de hoek tussen k en l .

U6 De halve cirkel heeft vergelijking $y = \sqrt{25 - x^2}$.
De punten A en B liggen op de x -as, lijnstuk AB is de middellijn. Op de halve cirkel ligt het punt $P(-3, 4)$.

- Laat zien dat $AP \perp BP$.
- Stel het punt $X(p, q)$ ligt op de halve cirkel.
Druk de richtingscoëfficiënten van de lijnen AX en BX uit in p .
- Laat zien dat $AX \perp BX$ voor elk punt $X(p, q)$.



5.5 Afstanden

Je leert

- hoe je de afstand tussen twee punten berekent
- hoe je de afstand van een punt tot een lijn berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 37—38—39—040—41—042—42—44
- doorlopend: 37—38—39—40—41—42—43—44
- uitdagend: 38—39—40—41—42—43—44—U7

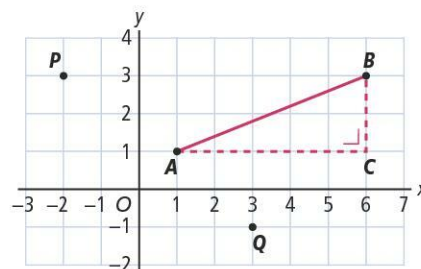
Er wordt een nieuwe mast voor mobiele telefonie geplaatst op gelijke afstand van de drie dorpen Rottum, Kantens en Eppenhuisen.

- Waar zou jij de mast neerzetten?



- 37** In het assenstelsel zijn de punten $A(1, 1)$, $B(6, 3)$, $P(-2, 3)$ en $Q(3, -1)$ getekend.

- Bereken exact AB .
- Bereken exact PQ .
- Bereken exact de afstand tussen de punten $S(-5, -6)$ en $T(7, -11)$.

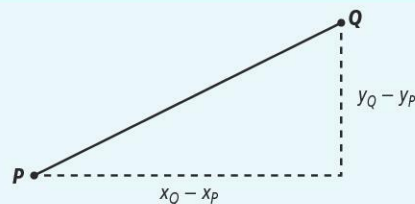


Theorie

De **afstand tussen twee punten** $P(x_P, y_P)$ en $Q(x_Q, y_Q)$ bereken je met de stelling van Pythagoras.

De afstand is $PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$.

De afstand tussen P en Q noteer je ook wel met $d(P, Q)$ waarbij d komt van distance.



- 38** Gegeven zijn de punten $A(1, 0)$, $B(5, 2)$ en $C(2, -2)$.
- Bereken exact AB , AC en BC .
 - Toon met behulp van de antwoorden van opdracht a aan dat $\triangle ABC$ een rechthoekige driehoek is.
 - Welke hoek is de rechte hoek?

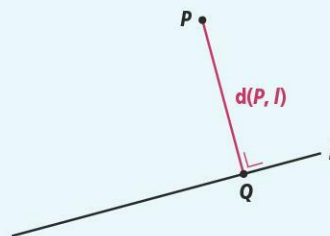
- 39** Gegeven zijn lijn $l: x + 2y = 10$ en het punt $P(3, 1)$.
- Stel een vergelijking op van de loodlijn door P op l .
 - Bereken de coördinaten van het snijpunt Q van de loodlijn met l .
 - Bereken exact PQ , de afstand van P tot l .

Aanpak

Hoe bereken je de afstand van een punt P tot een lijn l ?

- 1 Stel een vergelijking op van de loodlijn m door P op l .
- 2 Bereken de coördinaten van het snijpunt Q van m en l .
- 3 Bereken PQ .

Deze afstand is de gevraagde afstand $d(P, l)$.



Voorbeeld

Bereken exact de afstand van punt $P(3, -2)$ tot lijn $l: y = 2x - 3$.

Oplossing

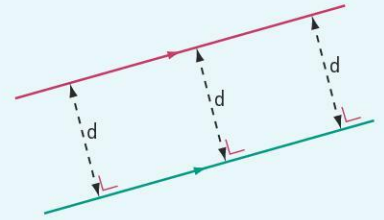
- 1 De loodlijn door P op l heeft vergelijking $y = -\frac{1}{2}x + b$. Invullen van de coördinaten van P hierin geeft $-2 = -\frac{1}{2} \cdot 3 + b$ dus $b = -\frac{1}{2}$. Een vergelijking van de loodlijn is $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.
- 2 Snijpunt van l en m : $2x - 3 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ geeft $2\frac{1}{2}x = 2\frac{1}{2}$ ofwel $x = 1$.
Hieruit volgt $y = 2 \cdot 1 - 3 = -1$, dus het snijpunt is $Q(1, -1)$.
- 3 De gevraagde afstand is $d(P, l) = PQ = \sqrt{(1 - 3)^2 + (-1 - (-2))^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$.

Ondersteunende route → maak opdracht 040

- 40**
- H**
- a Gegeven zijn punt $P(1, -2\frac{1}{2})$ en lijn $l: \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}y = -1$.
Bereken exact $d(P, l)$.
 - b Gegeven zijn punt $Q(-2, 2)$ en lijn $m: 2x - 3y = 3$.
Bereken exact $d(Q, m)$.
- 41**
- Gegeven zijn de lijnen $l: y = 2x - 7$ en $m: 2x - y = -3$.
- a Toon aan dat l en m evenwijdig zijn.
 - b Toon aan dat punt $P(3, -1)$ op l ligt.
 - c Bereken exact $d(P, m)$.
 - d Als je een ander punt P op l gekozen had, had je dan een andere afstand gevonden? Waarom?

Theorie

De afstand tussen twee evenwijdige lijnen is de afstand van een willekeurig punt op de ene lijn tot de andere lijn.



Ondersteunende route → maak opdracht 042

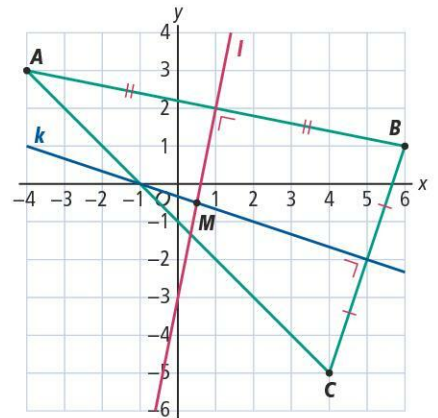
- 42** Bereken exact de afstand tussen de lijnen.

H

- a $y = \frac{1}{2}x - 3$ en $y = \frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$
 b $2x - 8y = 21$ en $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$
 c $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$ en $y = -2\frac{1}{2}x + 5$

- 43** Gegeven zijn de punten $A(-2, 3)$ en $B(6, 1)$.
 a Stel een vergelijking op van de middelloodlijn k van lijnstuk AB .
 b Laat zien dat het punt $P(4, 10)$ op k ligt.
 c Laat met een berekening zien dat $PA = PB$.

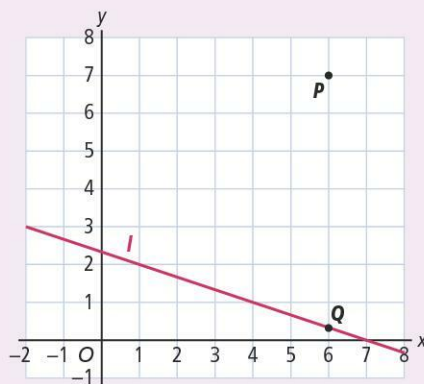
- 44** In het assenstelsel is $\triangle ABC$ getekend met $A(-4, 3)$, $B(6, 1)$ en $C(4, -5)$. Ook zijn de middelloodlijnen k en l van respectievelijk de zijden BC en AB getekend.
 a Stel een vergelijking op van l .
 b Stel een vergelijking op van k .
 c Bereken exact de coördinaten van het snijpunt M van k en l .
 d Toon aan dat de middelloodlijn van lijnstuk AC ook door punt M gaat.
 e Bereken exact AM , BM en CM .
 f Door de hoekpunten van $\triangle ABC$ kun je een cirkel tekenen. Leg uit waarom M het middelpunt is van die cirkel.



Uitdagende route → maak opdracht U7

Ondersteunende opgaven

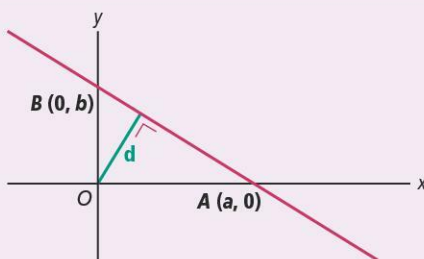
- 040** Gegeven zijn lijn $l: y = -\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$ en de punten P en Q .
- Bereken PQ .
 - Waarom is de afstand van P tot l niet gelijk aan PQ ?
 - Met welk lijnstuk bereken je wel de juiste afstand?
 - Stel een vergelijking op van de loodlijn door P op l .
 - Bereken exact de coördinaten van het snijpunt S van deze loodlijn met l .
 - Bereken exact PS .
 - Hoe groot is de afstand van P tot l ?
 - Bereken op dezelfde manier de afstand tussen $R(6, -3)$ en de lijn $m: x - 4y = -16$.



- 042** Gegeven zijn de lijnen $l: 3x + 2y = -28$ en $m: y = -\frac{3}{2}x + 12$. Je gaat in deze opdracht $d(l, m)$ berekenen.
- Laat zien dat l en m evenwijdig zijn.
 - Laat zien dat $P(2, 9)$ op m ligt.
 - Bereken exact $d(P, l)$.
 - Hoe groot is $d(l, m)$?

Uitdagende opdrachten

- U7** Gegeven is lijn $l: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ met $a > 0$ en $b > 0$. In deze opdracht ga je laten zien dat voor de afstand d van $O(0, 0)$ tot l geldt $d = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
- Leg uit dat de oppervlakte van $\triangle OAB$ gelijk is aan $\frac{1}{2}ab$.
 - Druk AB uit in a en b .
 - Neem lijnstuk AB als basis van $\triangle OAB$. Leg uit dat de oppervlakte van $\triangle OAB$ gelijk is aan $\frac{1}{2}d \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$.
 - Uit opdracht a en c volgt een vergelijking. Gebruik die om d uit te drukken in a en b .

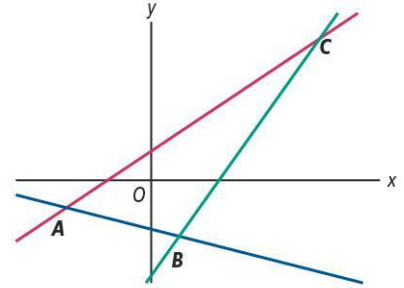


5.6 Gemengde opdrachten

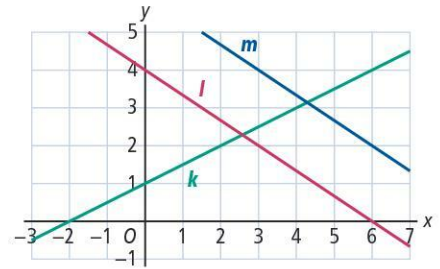
- 45** Geef een vergelijking van de lijn in drie vormen
- door de punten $(3, 0)$ en $(0, -5)$.
 - door het punt $(-3, 0)$ met richtingscoëfficiënt $\frac{2}{3}$.
 - door de punten $(1, 3)$ en $(-5, -6)$.
 - door het punt $(0, 2\frac{1}{2})$ evenwijdig met de lijn $4x + 5y = 6$.

- 46** Gegeven zijn de punten $A(-3, -1)$, $B(1, -2)$ en $C(6, 8)$.

- Bereken exact de lengte van de zijden van $\triangle ABC$.
- Bereken de grootte van de hoeken van $\triangle ABC$. Rond af op hele graden.
- Bereken exact $d(B, AC)$.



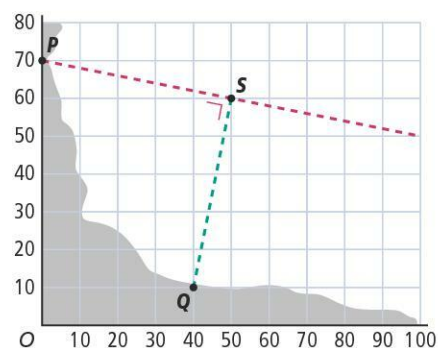
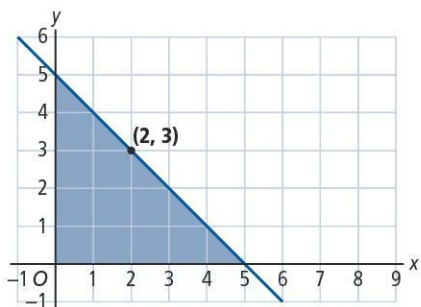
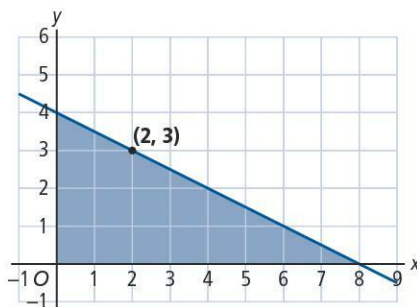
- 47** In een assenstelsel zijn de lijnen k , l en m getekend.
- Stel een vergelijking op van elk van de lijnen k , l en m .
 - Bereken $\angle(k, l)$ in graden nauwkeurig.
 - Bereken algebraïsch $d(l, m)$. Rond je antwoord af op één decimaal.
 - Er is een lijn n die evenwijdig loopt met l en waarvan de afstand tot l even groot is als de afstand van m tot l . Stel een vergelijking van n op.



- 48** Gegeven zijn de lijnen $k: 5x - 2y = 3$, $l_p: px + y = -6$ en $m_q: y = 2\frac{1}{2}x + q$.
- Bereken de coördinaten van het snijpunt van l_2 en m_3 .
 - Bereken voor welke waarde van p de lijnen k en l_p evenwijdig zijn.
 - Voor welke waarden van p heeft het stelsel $\begin{cases} 5x - 2y = 3 \\ px + y = -6 \end{cases}$ precies één oplossing?
 - Bereken voor welke waarde van q het stelsel $\begin{cases} 5x - 2y = 3 \\ y = 2\frac{1}{2}x + q \end{cases}$ oneindig veel oplossingen heeft.



- 49** De afstand tussen de roosterlijnen op de kaart is in werkelijkheid 10 km.
 Een schip vertrekt 's morgens om 9.00 uur vanuit P .
 De schipper vaart een rechte koers met een constante snelheid van 16 km/uur. De koers van het schip is op de kaart met een rode stippellijn aangegeven.
 Om 11.15 uur vertrekt vanuit Q een patrouilleboot van de douane die de papieren van de schipper wil controleren. De patrouilleboot volgt de koers die met de groene stippellijn is aangegeven.
 Onderzoek met welke gemiddelde snelheid in km/uur de patrouilleboot moet varen om het schip in punt S te ontmoeten. Rond je antwoord af op één decimaal.



- 50** Door het punt $(2, 3)$ zijn oneindig veel lijnen met negatieve richtingscoëfficiënt te tekenen. Elk van die lijnen vormt met de positieve x -as en de positieve y -as een driehoek. Hierboven zijn twee voorbeelden getekend.
 Onderzoek wat de minimale oppervlakte van een dergelijke driehoek is.

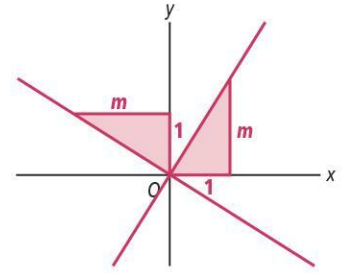
Theorie

Loodrecht

Twee lijnen $y = m_1x + n_1$ en $y = m_2x + n_2$ staan loodrecht op elkaar als $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Het omgekeerde is ook waar:

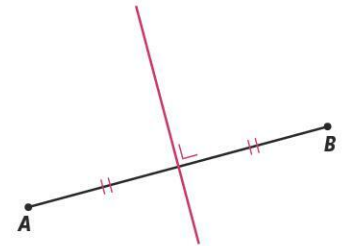
Als twee lijnen k en l met richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 loodrecht op elkaar staan, dan geldt $m_1 \cdot m_2 = -1$.



- S1 Lijn l heeft richtingscoëfficiënt $\frac{5}{7}$. Lijn m staat loodrecht op l . Bereken de richtingscoëfficiënt van m .

Theorie

De middelloodlijn van lijnstuk AB is de lijn die door het midden van lijnstuk AB gaat en loodrecht op lijnstuk AB staat.



- S2 Gegeven zijn de punten $A(4, 7)$ en $B(2, 4)$. Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van AB .

Vaardigheid

Je kunt een vergelijking van een lijn herleiden tot een andere vorm.

Een vergelijking van een lijn kun je in verschillende vormen geven.

- Een vergelijking van een lijn kun je schrijven als $ax + by = c$.
- Als de lijn niet evenwijdig is aan de verticale as, kun je de vergelijking ook schrijven als $y = mx + n$.
- Als de lijn de assen snijdt in $(p, 0)$ en $(0, q)$ met $p \neq 0$ én $q \neq 0$, dan kun je de vergelijking schrijven als $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

- S3 a Herleid $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$ tot de vorm $y = ax + b$.
- b Herleid $y = \frac{3}{7}x - 2$ tot de vorm $ax + by = c$.

Vaardigheid

Je kunt een stelsel vergelijkingen oplossen.

- door herleiden van de vergelijkingen
- met behulp van substitutie

Voorbeeld 1

$$\text{Los op } \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x - 5y = 7 \end{cases}$$

Oplossing

Herschrijven van beide vergelijkingen geeft

$$y = -1\frac{1}{2}x + 2 \text{ en } y = \frac{1}{5}x - 1\frac{2}{5}$$

$$\text{Gelijkstellen geeft } -1\frac{1}{2}x + 2 = \frac{1}{5}x - 1\frac{2}{5}$$

$$\text{ofwel } -1\frac{7}{10}x = -3\frac{2}{5}, \text{ dus } x = 2.$$

$$y = -1\frac{1}{2} \cdot 2 + 2 = -1$$

De oplossing van het stelsel is $x = 2$ en $y = -1$.

Voorbeeld 2

$$\text{Los op } \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x - 5y = 7 \end{cases}$$

Oplossing

Herschrijven van $x - 5y = 7$ geeft $x = 5y + 7$.

Substitueren in $3x + 2y = 4$ geeft

$$3(5y + 7) + 2y = 4, \text{ ofwel } 17y + 21 = 4,$$

$$\text{dus } y = -1.$$

$$x = 5 \cdot -1 + 7 = 2$$

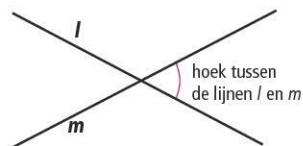
De oplossing van het stelsel is $x = 2$ en $y = -1$.

- S4 a** Los op $\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ 4x - y = 11 \end{cases}$
- b** Gegeven is het stelsel $\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ y = \frac{3}{4}x + 5 \end{cases}$
- Hoeveel oplossingen zijn er?

Vaardigheid

Je kunt de hoek tussen twee lijnen berekenen.

- 1 Maak een schets met de beide lijnen.
- 2 Bereken van elke lijn de richtingscoëfficiënt.
- 3 Bereken met behulp van de richtingscoëfficiënt voor elke lijn de hoek met een horizontale lijn.
- 4 Gebruik de schets en bereken in hele graden de scherpe of de rechte hoek die de lijnen met elkaar maken.

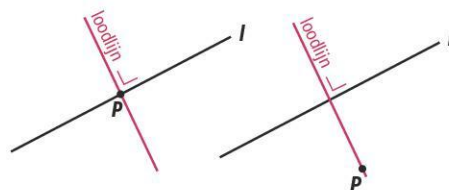


- S5** Gegeven zijn de lijnen $k: y = 3x - 2$, $l: 2x + 3y = 4$ en $m: x - 2y = 17$.
- Bereken in graden nauwkeurig $\angle(k, l)$ en $\angle(k, m)$.

Vaardigheid

Je kunt bij een lijn l een vergelijking van de loodlijn door een punt P opstellen.

- 1 Bereken de richtingscoëfficiënt m_1 van l .
- 2 Bereken de richtingscoëfficiënt m_2 van de loodlijn met behulp van de regel $m_1 \cdot m_2 = -1$.
- 3 Een vergelijking van de loodlijn is $y = m_2 \cdot x + b$.
- 4 Bereken b door de coördinaten van punt P in te vullen.



Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de loodlijn k door $P(-4, 1)$ op lijn $l: 4x + 3y = 12$.

Oplossing

- 1 $m_1 = -\frac{4}{3}$
- 2 $k \perp l$ dus $m_2 = \frac{3}{4}$.
- 3 Een vergelijking van k is $y = \frac{3}{4}x + b$.
- 4 Uit $1 = \frac{3}{4} \cdot -4 + b$ volgt $b = 4$ en dus is $k: y = \frac{3}{4}x + 4$.

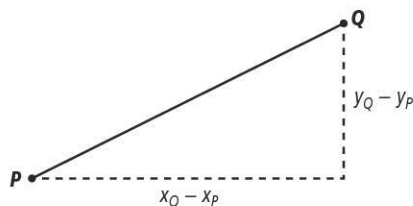
- S6** Stel een vergelijking op van de loodlijn door punt $P(1, 3)$ op lijn $m: 2x - 3y = 7$.

Vaardigheid

Je kunt de afstand tussen twee punten berekenen.

De afstand tussen twee punten $P(x_P, y_P)$ en $Q(x_Q, y_Q)$ is gelijk

$$\text{aan } PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}.$$



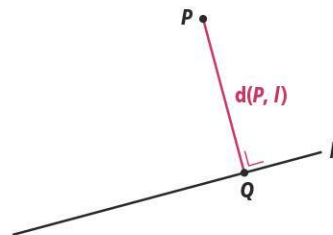
- S7** Bereken exact de afstand tussen $P(-5, 1)$ en $Q(2, 5)$.

Vaardigheid

Je kunt de afstand van een punt P tot een lijn l berekenen.

- 1 Stel een vergelijking op van de loodlijn m door P op l .
- 2 Bereken de coördinaten van het snijpunt Q van m en l .
- 3 Bereken PQ .

Deze afstand is de gevraagde afstand $d(P, l)$.



Voorbeeld

Bereken exact de afstand van punt $P(7, 5)$ tot lijn $l: 3x + y = 6$.

Oplossing

- 1 De richtingscoëfficiënt van l is -3 dus de richtingscoëfficiënt van loodlijn m is $\frac{1}{3}$.
 m heeft als vergelijking $y = \frac{1}{3}x + b$. De coördinaten van P invullen geeft $5 = \frac{7}{3} + b$, dus $b = 2\frac{2}{3}$.
Een vergelijking van m is $y = \frac{1}{3}x + 2\frac{2}{3}$.
- 2 Substitutie van $y = \frac{1}{3}x + 2\frac{2}{3}$ in $3x + y = 6$ geeft
 $3x + \frac{1}{3}x + 2\frac{2}{3} = 6$ ofwel $x = 1$. Hieruit volgt $y = \frac{1}{3} \cdot 1 + 2\frac{2}{3} = 3$,
dus het snijpunt van l en m is $Q(1, 3)$.
- 3 De afstand is
 $d(P, l) = PQ = \sqrt{(7-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{40} (= 2\sqrt{10})$.

S8 Gegeven zijn punt $P(1, 5)$ en de lijnen $l: x + 2y = -4$ en

$m: y = -\frac{1}{2}x + 8$.

- a Bereken exact $d(P, l)$.
- b Bereken exact $d(l, m)$.

T1 Gegeven zijn de lijnen $k: \frac{x}{2\frac{1}{2}} + \frac{y}{4} = 1$ en $l: 2x - 3y = 6$.

- Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van k en l met de beide assen.
- Schrijf de vergelijking van k in de vorm $ax + by = c$ en in de vorm $y = mx + n$.
- Schrijf de vergelijking van l in de vorm $y = mx + n$ en in de vorm $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.
- Lijn n is evenwijdig aan k en gaat door het punt $(5, 12)$. Geef een vergelijking van n .
- Lijn r staat loodrecht op l en gaat door het punt $(3, -2)$. Geef een vergelijking van r .

T2 Los exact op.

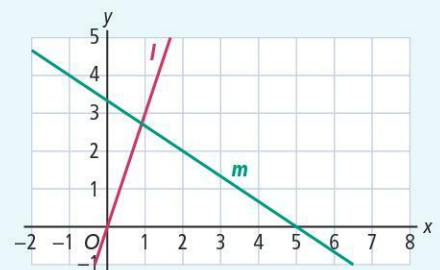
- | | |
|---|---|
| $\mathbf{a} \quad \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ | $\mathbf{c} \quad \begin{cases} 3x + 2y + 1 = 0 \\ -2x + 5y = 7 \end{cases}$ |
| $\mathbf{b} \quad \begin{cases} x + 2y = 2 \\ \frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$ | $\mathbf{d} \quad \begin{cases} \frac{x}{-1} + \frac{y}{2} = 1 \\ y = \frac{2}{3}x + 1 \end{cases}$ |

T3 **a** Onderzoek hoeveel oplossingen het stelsel

$$\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ y = -0,75x + 4 \end{cases} \text{ heeft.}$$

- b** Bij het stelsel horen twee lijnen met vergelijkingen $3x + 4y = 12$ en $y = -0,75x + 4$.
Wat kun je naar aanleiding van het antwoord bij opdracht a zeggen over de onderlinge ligging van de twee lijnen?

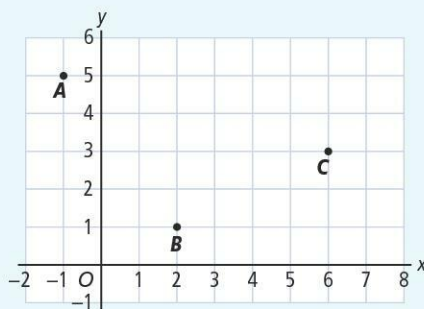
T4 De lijnen l en m vormen samen met de x -as een driehoek. Bereken de grootte van de hoeken van deze driehoek in graden nauwkeurig.



T5 Gegeven zijn lijn $l: 4x - 10y = 158$ en punt $P(1, 2)$.

- Stel een vergelijking op van loodlijn m door P op l .
- Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van l en m .

- T6** Gegeven is lijn $l: 2x + 3y = 6$ en punt $P(8, 1)$.
Bereken $d(P, l)$.
- T7** Lijn l gaat door de punten $(4, 10)$ en $(7, 9)$. Lijn m gaat door de punten $(-10, 12)$ en $(-3, a)$.
Bereken a in het geval dat $l \perp m$.
- T8** Gegeven is het stelsel vergelijkingen
$$\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$
- Los het stelsel exact op.
 - Bij het stelsel kun je in een assenstelsel twee lijnen tekenen.
Bereken de hoek die deze twee lijnen met elkaar maken in graden nauwkeurig.
- T9** Getekend zijn de punten $A(-1, 5)$, $B(2, 1)$ en $C(6, 3)$.
Lijn l gaat door A en B en lijn m door B en C .
- Stel vergelijkingen op van l en m .
 - Bereken $\angle(l, m)$ in graden nauwkeurig.
 - Stel vergelijkingen op van de middelloodlijnen van de lijnstukken AB en BC .
 - Bereken de hoek tussen beide middelloodlijnen.
Wat valt je op?



- T10**
- Bereken exact de coördinaten van de punten op de lijn met vergelijking $y = 3x - 7$ die op afstand 4 van de x -as liggen.
 - Bereken exact de coördinaten van de punten op de lijn met vergelijking $x + 2y = 8$ die even ver van beide assen liggen.

Je kunt een vergelijking van een lijn herleiden tot een andere vorm.

- E1** Gegeven zijn vergelijkingen van drie verschillende lijnen. Zoek de vergelijkingen die bij dezelfde lijn horen bij elkaar.

A $y = \frac{1}{2}x + 7$

E $x = \frac{2}{7}y + 2$

B $7x - 2y = 14$

F $y = 3\frac{1}{2}x - 7$

C $2x + 7y = 14$

G $x - 2y = -14$

D $\frac{x}{7} + \frac{y}{2} = 1$

H $y = -\frac{2}{7}x + 2$

Je kunt een stelsel vergelijkingen oplossen.

- E2** Los exact op.

a $\begin{cases} y = 1\frac{1}{2}x - 4 \\ y = -x + 11 \end{cases}$

c $\begin{cases} 2x - 3y = 17 \\ x = 6y + 7 \end{cases}$

b $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$

d $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{-1} = 1 \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} \end{cases}$

Je kunt de hoek tussen twee lijnen berekenen.

- E3** Gegeven lijn l : $x + 3y = 6$ en lijn m : $y = \frac{2}{3}x + 1$.

- Bereken de hoek die l maakt met de x -as.
- Bereken de hoek die m maakt met de x -as.
- Bereken de hoek die l en m met elkaar maken.

Je kunt bij een lijn l een vergelijking van de loodlijn door een punt P opstellen.

- E4** a Gegeven zijn lijn l : $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3\frac{1}{2}} = 1$ en punt $P(14, 2)$.

Stel een vergelijking op van de loodlijn door P op l .

- b Gegeven zijn lijn n : $2x - 5y = 3$ en punt $P(2, 3)$.
Geef een vergelijking van de loodlijn door P op n .

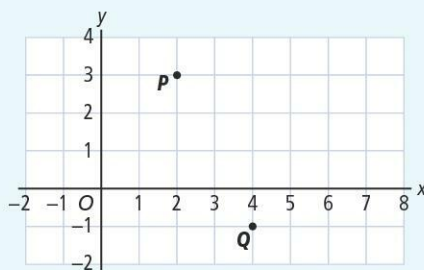
Je kunt de afstand tussen twee punten berekenen.

- E5** Bereken exact de afstand tussen de punten $A(3, 7)$ en $B(-2, 14)$.

Je kunt de afstand van een punt P tot een lijn l berekenen.

- E6** a Bereken exact de afstand van punt $P(-3, 7)$ tot lijn l : $3x + 2y = 44$.
b Lijn m is de lijn door de punten $(3, 2)$ en $(-6, 14)$.
Verder is gegeven punt $Q(10, 1)$.
Bereken exact $d(Q, m)$.

- E7** Gegeven zijn de punten $P(2, 3)$ en $Q(4, -1)$.
- Bereken exact PQ .
 - Stel een vergelijking op van de lijn l door P en Q .
 - Stel een vergelijking op van de loodlijn door de oorsprong O op l .
 - Bereken de afstand van de oorsprong tot l in één decimaal.



- E8** De punten $A(-1, -1)$, $B(2, 5)$ en $C(5, -3)$ zijn de hoekpunten van $\triangle ABC$.
Bereken exact de lengte van de hoogtelijn uit B in deze driehoek.
- E9** De lijnen $l: 2x - y = 1$, $m: x + 2y = 10$ en $n: y = -3x - 5$ sluiten een driehoek in.
- Laat zien dat de driehoek rechthoekig is.
 - Laat zien dat de driehoek gelijkbenig is.
- E10** De punten $A(-1, 1)$, $B(4, -1)$ en $C(1, 5)$ vormen de hoekpunten van een driehoek.
- Bereken exact de lengten van de zijden van $\triangle ABC$.
 - Gebruik de antwoorden van opdracht a om uit te zoeken wat de grootste hoek is van $\triangle ABC$.
 - Bereken die grootste hoek.
- E11** De lijnen $k: 3x - y = 4$ en $l: 3x - y = 24$ sluiten samen met de lijnen m en n een vierkant in dat geheel boven de x -as ligt.
Eén van de hoekpunten is $A(3, 5)$.
Stel vergelijkingen op van m en n .
- E12** De punten $A(-1, 1)$, $B(5, -1)$ en $C(2, 4)$ zijn de hoekpunten van een driehoek.
- Bereken de omtrek van $\triangle ABC$ in één decimaal.
 - Bereken de afstand van C tot zijde AB .
 - Toon aan dat de oppervlakte van $\triangle ABC$ gelijk is aan 12.
 - Toon aan dat de drie hoogtelijnen van de driehoek elkaar in één punt snijden.



SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In de vorige klas heb je geleerd hoe je de coördinaten van de top van de grafiek van een kwadratische functie kunt berekenen.

In dit hoofdstuk maak je kennis met de differentiaalrekening. Deze methode, ontwikkeld door de Engelse wiskundige Sir Isaac Newton (1643 – 1727) en de Duitse wiskundige Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), maakt het mogelijk om de helling van een grafiek in een willekeurig punt te berekenen. Zo kun je ook van grafieken van andere dan kwadratische functies de toppen opsporen.

In de volgende delen zul je nog veel meer leren over dit onderwerp, dat ook bij de natuurkunde een belangrijke rol speelt.

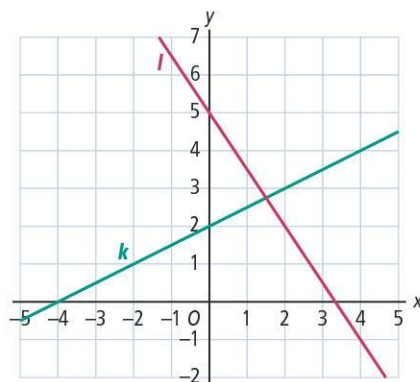
Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Probleem oplossen en analytisch denken*
- *Ordenen en structureren*
- *Logisch redeneren en bewijzen*

opdracht 50
opdracht 25
opdracht 36



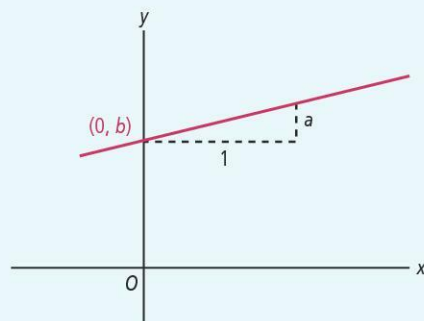
- V1** In een assenstelsel zijn de lijnen l en k getekend.
- Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van lijn l ?
En hoe groot is het startgetal?
 - Stel een formule op van l .
 - Stel ook een formule op van k .
 - Lijn m is evenwijdig aan l en snijdt de y -as in het punt $(0, 11)$.
Stel een formule op van m .



- V2** Gegeven is lijn l : $y = 0,5x + 2$. Op l liggen punt A met x -coördinaat -2 en punt B met x -coördinaat 4 .
- Teken l met daarop A en B in een assenstelsel.
Neem voor x waarden van -6 tot en met 6 .
 - Kies twee punten op l waarvan de y -coördinaten 2 verschillen.
Hoeveel verschillen de x -coördinaten van deze twee punten?
 - Hoe kun je aan de formule zien hoe groot het verschil tussen de y -coördinaten is als het verschil tussen de x -coördinaten gelijk is aan 1 ?

Theorie

Bij een **lineaire formule** zoals $y = ax + b$ hoort als grafiek een rechte lijn l . $y = ax + b$ heet ook wel een **vergelijking** van l . b is het startgetal. l snijdt de y -as in het punt $(0, b)$. a is de richtingscoëfficiënt of het hellingsgetal van l : de toename van de y -coördinaat als de x -coördinaat met 1 toeneemt. Evenwijdige lijnen hebben dezelfde richtingscoëfficiënt.



Voorbeeld

Geef de richtingscoëfficiënt van de lijn door de punten $(2, 83)$ en $(7, 18)$.

Oplossing

De toename van de y -coördinaat is $18 - 83 = -65$. De toename van de x -coördinaat is $7 - 2 = 5$.

De richtingscoëfficiënt $a = \frac{\text{verticale toename}}{\text{horizontale toename}} = \frac{-65}{5} = -13$.

- V3** Lijn l gaat door de punten $A(4, 9)$ en $B(8, 12)$.
- a** Stel een vergelijking op van l .
 - b** Lijn m is evenwijdig met l en gaat door het punt $(0, 2)$.
Stel een vergelijking op van m .
 - c** Lijn n staat loodrecht op l en gaat door het punt $(-12, 4)$.
Stel een vergelijking op van n .

- V4**
- a** Lijn l gaat door $(0, 12)$ en is evenwijdig aan de lijn met vergelijking $y = 2(0, 6x - 3)$.
Geef een vergelijking van l .
 - b** Lijn m gaat door het punt $(22, 14)$ en heeft richtingscoëfficiënt $-0,4$.
Bereken het startgetal van m .

- V5** Stel bij elke lijn een vergelijking op.
- a** Lijn l door het punt $(1, 4)$ met richtingscoëfficiënt 4 .
 - b** Lijn m door het punt $(6, -7)$ en evenwijdig aan de lijn met vergelijking $y = -\frac{2}{3}x + 2$.
 - c** Lijn n door de punten $(2, 5)$ en $(5, -4)$.
 - d** Lijn k door de punten $(3, 3)$ en $(-12, 0)$.

- V6** Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk.

- a** $y = (x^2 - 2)(x + 3)$
- b** $y = (x^2 - 5)^2$
- c** $y = (x^2 + 2)(x^2 - 2)$
- d** $y = (3x^2 - 4)(6x + 4)$
- e** $y = (x^2 + 1)^2$
- f** $y = (x + 1)(x^2 + 2x + 1)$

6.1 Toenamediagrammen

Je leert

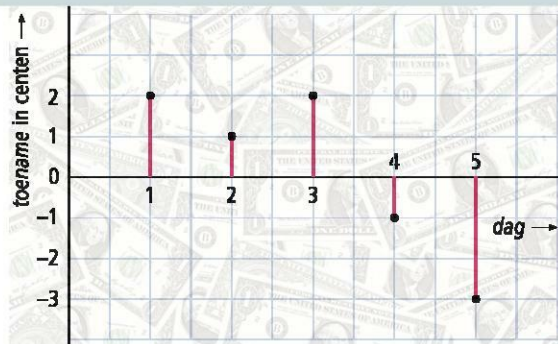
- wat een toenamediagram is
- hoe je een toenamediagram maakt

Leerroutes

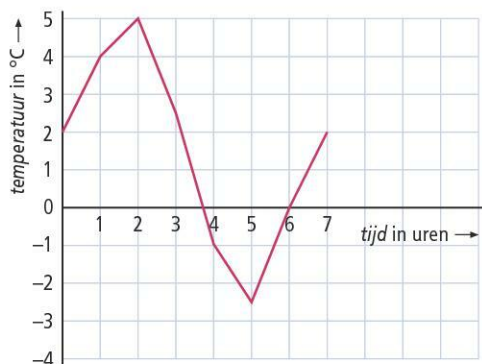
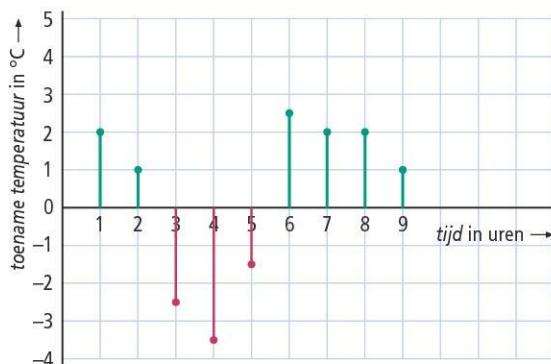
- ondersteunend: 1—2—03—4—5
- doorlopend: 1—2—3—4—5
- uitdagend: 1—2—3—4—U1

De dollarkoers schommelt ten opzichte van de euro. In de grafiek zie je hoe aan het eind van elke dag de koersverandering is ten opzichte van het einde van de vorige dag.

- Is de koers van de dollar aan het eind van de vijfde dag hoger of lager dan aan het begin van de eerste dag? Hoeveel hoger of lager?



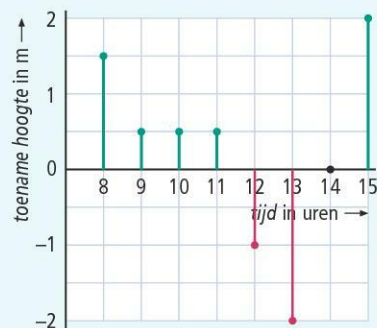
- 1 In de linker grafiek zie je het verloop van de temperatuur gedurende enkele uren.



- Welk uur is de temperatuur het meest toegenomen?
- In de rechter grafiek is met staafjes aangegeven hoeveel de temperatuur elk uur is veranderd. Wat betekent het dat het staafje bij 6 uur lengte 2,5 heeft?
- Wat betekent het als een staafje rood gekleurd is?
- Gebruik beide grafieken en geef de temperatuur om 8 uur en om 9 uur.

Theorie

In een **toenamediagram** kun je toename en afname zichtbaar maken. Bij toename worden de staafjes omhoog getekend, bij afname omlaag. In dit toenamediagram geeft het staafje bij 8 uur aan dat over de periode van 7 uur tot 8 uur de hoogte met 1,5 meter is toegenomen.



Voorbeeld

Teken het toenamediagram bij de grafiek.

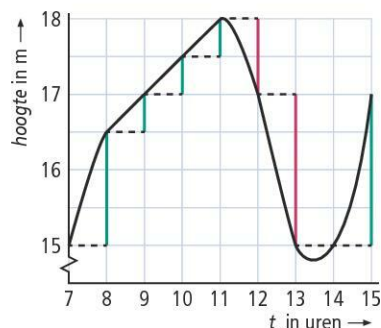
Oplossing

In de grafiek zijn de toenames met groen aangegeven en de afnamen met rood.

In de tabel staan de toenames van de hoogte.

<i>tijd</i>	8	9	10	11	12	13	14	15
<i>toename hoogte</i>	1,5	0,5	0,5	0,5	-1	-2	0	2

Naast de theorie hierboven zie je het toenamediagram.



- 2 In de tabel is de lengte van Phil in de eerste zes jaar van zijn leven gegeven.

<i>leeftijd in jaren</i>	0	1	2	3	4	5	6
<i>lengte in cm</i>	57	78	94	102	111	119	126

- Teken het toenamediagram bij deze tabel.
- Van zijn zesde tot zijn negende verjaardag groeide Phil steeds 6 cm per jaar.
Verwerk deze gegevens in je toenamediagram.
- Hoe lang was Phil op z'n negende verjaardag?

Ondersteunende route → maak opdracht 03

- 3 Maak bij elke formule het toenamediagram met stapgrootte 1.
Neem op de horizontale as waarden van 0 tot en met 6.
Maak eerst een tabel met je rekenmachine en lees daar de toename uit af.

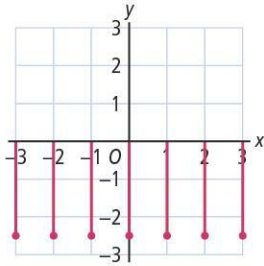
- $R = 2p + 1$
- $K = 20 \cdot 0,8^t$
- $h = -a^2 + 6a$

- 4 De toenamedigrammen horen bij de functies:

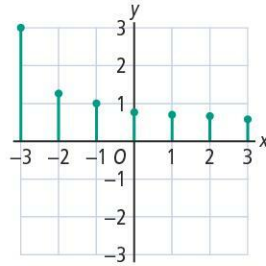
$$f(x) = 0,75 \cdot 2^x \quad h(x) = 16 - 2,5x$$

$$g(x) = 3\sqrt{x+4} \quad k(x) = 0,4x^2$$

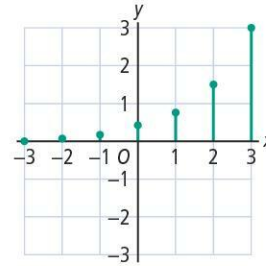
Bereken welk toenamedigram bij welke functie hoort.



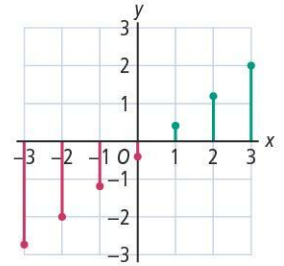
A



B



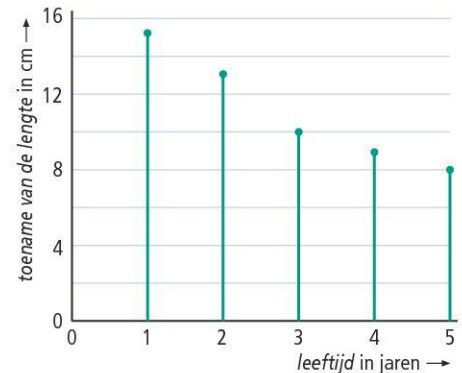
C



D

- 5 In het toenamedigram zie je hoeveel Titia de eerste vijf jaar van haar leven groeide.

- Hoeveel centimeter is Titia in de eerste vijf jaar van haar leven in totaal gegroeid?
- Waarom kun je nu nog niet berekenen hoe lang Titia was toen ze vijf werd?
- Hoe zie je aan het toenamedigram dat Titia steeds minder snel groeide?
- Na vijf jaar was Titia's lengte 112 cm. Hoe lang was ze bij de geboorte?
- In de periode van vijf tot tien jaar nam de toename van de lengte per jaar telkens met 1 cm af. Teken het toenamedigram van vijf tot en met tien jaar en bereken de lengte van Titia toen ze tien jaar werd.
- Bereken hoe het toenamedigram van de lengte van Titia er uit ziet in de periode van 25 tot 35 jaar.



Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

03 Gegeven is de formule $a = 5b^2 - b^3 + 1$.

a Maak een tabel met je rekenmachine en vul de tabel in.

b	0	1	2	3	4	5
a	1	5	...	...	...	...
toename		4	...	...	...	...

b Maak het toenamediagram af.

Neem op de horizontale as waarden van 0 tot en met 5.

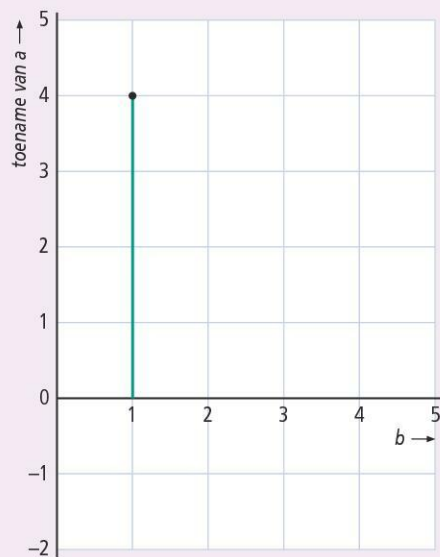
Maak eventueel een tabel zoals in opdracht a en teken bij elke formule een toenamediagram met stapgrootte 1.

Neem op de horizontale as waarden van 0 tot en met 5.

c $p = 8 - 2q$

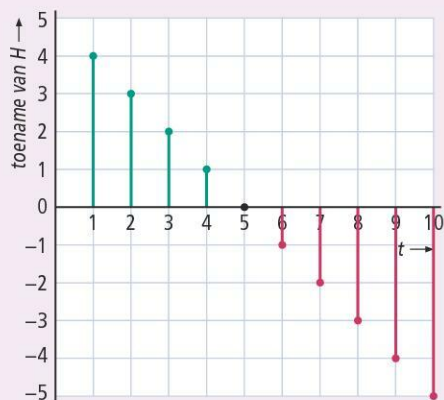
d $T = n^2 - 4n$

e $H = 10 \cdot 1,2^t$



Uitdagende opdrachten

U1 In het toenamediagram zijn met stapgrootte 1 de toenames van een hoeveelheid H getekend voor $t = 1$ tot en met $t = 10$.



De grafiek van H gaat door de oorsprong.
Schets een mogelijke grafiek van H .

6.2 Gemiddelde verandering

Je leert · wat een differentiequotiënt is

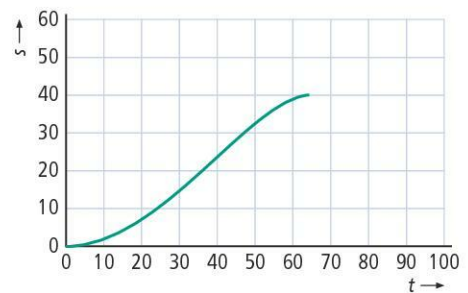
Leerroutes · ondersteunend: 6—7—08—9—10—11—12—13
 · doorlopend: 6—7—8—9—10—11—12—13
 · uitdagend: 6—7—9—10—11—13—U2—U3

Op de A13 controleert de politie op snelheid met behulp van trajectcontrole. Alle auto's worden aan het begin en het eind van een traject gefotografeerd en via nummerbordherkenning gaat de politie na of er te hard is gereden. Stel dat er op zo'n traject van 2 km een maximum snelheid van 120 km/h geldt.

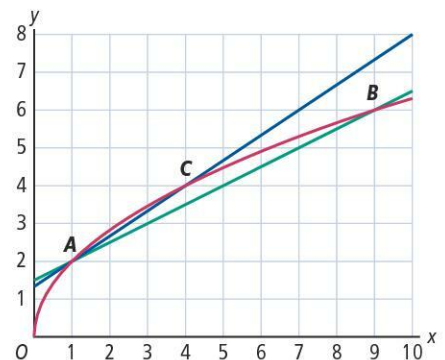
- Heeft een automobilist die over dat traject 55 seconden doet, te hard gereden?
- En iemand die er 65 seconden over doet?



- 6** Jurjen fietst 40 kilometer. De afgelegde afstand in kilometers na t minuten wordt beschreven met functie $s(t) = -0,000002t^4 + 0,018t^2$.
- Leg uit hoe je in de grafiek kunt zien dat de gemiddelde snelheid tussen de 30e en 40e minuut groter was dan tussen de 10e en de 20e minuut.
 - Hoe zou de grafiek eruit hebben gezien als Jurjen met constante snelheid had gereden?
 - Bereken $s(15)$ en schrijf de betekenis van deze uitkomst op.
 - Welke betekenis heeft $s(30) - s(15)$?
 - Laat met een berekening zien dat de gemiddelde snelheid van Jurjen van $t = 15$ tot $t = 30$ ongeveer 0,71 km per minuut is.
 - Hoeveel kilometer per uur is dat?



- 7** Gegeven is de functie $f(x) = 2\sqrt{x}$.
- Bereken de toename van $f(x)$ als x toeneemt van 1 tot 9.
 - Leg uit dat je de gemiddelde toename van $f(x)$ over het interval $[1, 9]$ kunt berekenen met $\frac{f(9) - f(1)}{9 - 1}$
 - Bereken de richtingscoëfficiënt van de lijn door de punten $A(1, 2)$ en $B(9, 6)$. Wat valt je op?
 - Bereken de gemiddelde toename van $f(x)$ over het interval $[1, 4]$.
 - Van welke lijn heb je nu de richtingscoëfficiënt berekend?



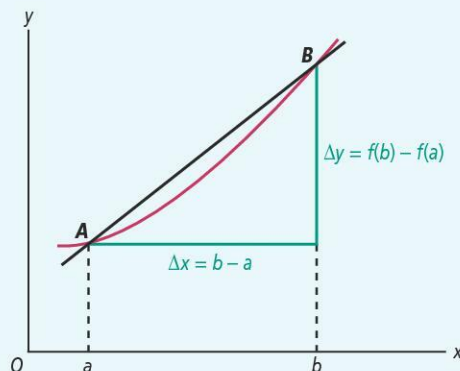
Theorie

Veranderingen van x en y geef je aan met Δx (delta x) en Δy . Een verandering is het verschil tussen een eindwaarde en een beginwaarde. Daarom spreek je ook wel van een **differentie** (verschil) in plaats van een verandering.

De **gemiddelde verandering** van $f(x)$ over een interval $[a, b]$

is het **differentiequotiënt**
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Het differentiequotiënt is gelijk aan de richtingscoëfficiënt of het hellingsgetal van de lijn door de punten $A(a, f(a))$ en $B(b, f(b))$.



Voorbeeld 1

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 3$.
Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ over het interval $[1, 4]$.

Oplossing

$f(1) = 4$ en $f(4) = 19$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{19 - 4}{4 - 1} = \frac{15}{3} = 5$$

Het differentiequotiënt is 5.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie $g(x) = x^3 - 5$.
Bereken de gemiddelde verandering van $g(x)$ over het interval $[-1, 2]$.

Oplossing

$g(-1) = -6$ en $g(2) = 3$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - (-6)}{2 - (-1)} = \frac{9}{3} = 3$$

De gemiddelde verandering is 3.

Ondersteunende route → maak opdracht 08

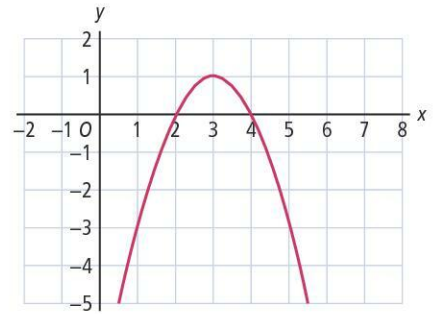
- 8 Gegeven is de functie $f(x) = \left(3 - \frac{1}{2}x\right)^2$.
- a Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ over het interval $[0, 6]$.
 - b Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ over het interval $[1, 4]$.
 - c Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ over het interval $[2, 10]$.

- 9 a Bereken het differentiequotiënt van $f(x) = 8 - 3x$ over het interval $[-2, 5]$.

H

- b Had je het antwoord op opdracht a kunnen voorspellen?
- c Bereken het differentiequotiënt van $g(x) = \sqrt{25 - 2x}$ over het interval $[8, 12]$.
- d Bereken het differentiequotiënt van $h(x) = \frac{1}{x}$ over het interval $\left[\frac{1}{4}, 4\right]$.

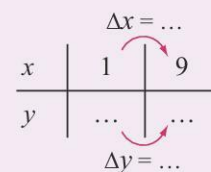
- 10** Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 6x$.
- Laat met een berekening zien dat het differentiequotient van $f(x)$ over het interval $[1, 5]$ gelijk is aan 0.
 - Welke conclusie trek je uit opdracht a over de functiewaarden voor $x = 1$ en $x = 5$?
 - Geef zonder berekening, maar met een redenering, nog twee intervallen waarop het differentiequotient 0 is.
- 11** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = -x^2 + 6x - 8$.
- Leg met behulp van de grafiek uit dat de differentiequotienten van $f(x)$ over de intervallen $[1, 2]$, $[1, 3]$ en $[1, 4]$ steeds kleiner worden.
 - Leg met behulp van de grafiek uit welk differentiequotient groter is: dat over het interval $[2, 2\frac{1}{2}]$ of dat over het interval $[2\frac{1}{2}, 3]$.
 - Het differentiequotient van $f(x)$ over het interval $[2, 3]$ is gelijk aan 1.
Leid uit dit gegeven en de grafiek het differentiequotient over het interval $[3, 4]$ af.
- 12** Kijk nog eens naar de grafiek van de tijdsrit uit opdracht 6.
- Bereken het differentiequotient van $s(t)$ uit opdracht 6 over het interval $[30, 45]$ in twee decimalen.
 - Waarom is het antwoord bij a gelijk aan de gemiddelde snelheid in het derde kwartier in km per minuut?
- 13** W Veronderstel dat Jurjen uit opdracht 6 na 30 minuten blijft doorrijden met de snelheid die hij op dat moment heeft. Teken de grafiek die daarbij hoort.
- Lees uit de grafiek af na hoeveel minuten hij dan zou aankomen.
 - Geef met behulp van een berekening een schatting van de snelheid van Jurjen op $t = 30$ in km per minuut en ook in km per uur.



Uitdagende route → maak opdracht U2 en U3

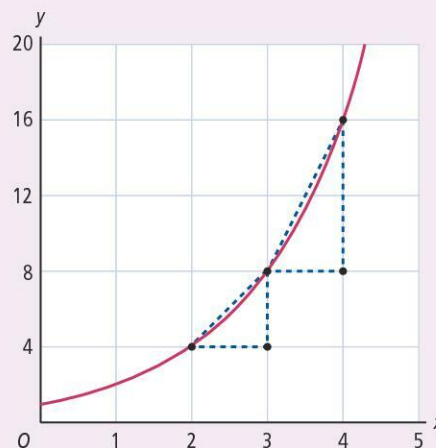
Ondersteunende opdrachten

- 08**
- a** Plot en schets de grafiek bij de functie $f(x) = \sqrt{x}$.
 - b** Bereken de y -waarde voor $x = 1$ en $x = 9$.
 - c** Bereken de verandering van y als x toeneemt van 1 tot 9.
 - d** Vul in het schema op de puntjes de ontbrekende getallen in.
 - e** De gemiddelde toename van y is gelijk aan de verandering van y gedeeld door de verandering van x .
Bereken de gemiddelde verandering van y over het interval $[1, 9]$ en vergelijk de uitkomst met de helling van de lijn door de punten $A(1, 1)$ en $B(9, 3)$.
 - f** Bereken de gemiddelde verandering van y over het interval $[1, 4]$.
 - g** Bereken het differentiequotiënt van $g(x) = 6x - x^2$ over het interval $[1, 3]$.
 - h** Bereken het differentiequotiënt van $g(x)$ over het interval $[-1, 5]$.



Uitdagende opdrachten

- U2** Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.
Over het interval $[4, p]$ is het differentiequotiënt van $f(x)$ twee keer zo groot als het differentiequotiënt van $f(x)$ over het interval $[1, 4]$.
Bereken p .
- U3** Gegeven is de functie $f(x) = 2^x$.
- a** In de figuur lijkt het alsof het differentiequotiënt van $f(x)$ over het interval $[3, 4]$ twee keer zo groot is als het differentiequotiënt van $f(x)$ over het interval $[2, 3]$.
Toon met een berekening aan dat dat juist is.
 - b** De eigenschap die je bij opdracht a hebt gevonden geldt ook voor andere intervallen.
Toon aan dat het differentiequotiënt van $f(x)$ over het interval $[p + 1, p + 2]$ exact twee keer zo groot is als het differentiequotiënt van $f(x)$ over het interval $[p, p + 1]$.



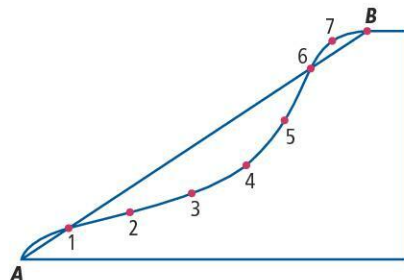
6.3 Hellingen benaderen

Je leert · hoe je de helling van een grafiek in een punt benadert

Leerroutes · ondersteunend: 14—15—16—17—018—18—20
 · doorlopend: 14—15—16—17—18—19—20
 · uitdagend: 14—15—16—17—18—20—U4

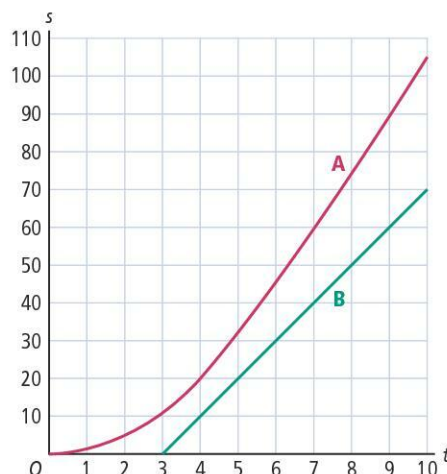
Langs de glijbaan staan genummerde merktekens.

- Bij welke nummers is glijbaan steiler dan de helling van lijn AB ?
- Waar is de helling van de glijbaan ongeveer gelijk aan de helling van lijn AB ?



- 14** Grafiek A geeft het verband weer tussen de afgelegde weg s in meters en de tijd t in seconden van een optrekkende auto nadat deze heeft stilgestaan bij een stoplicht. Grafiek B geeft het verband tussen de afgelegde weg van een bromfiets ten opzichte van het stoplicht en de tijd.

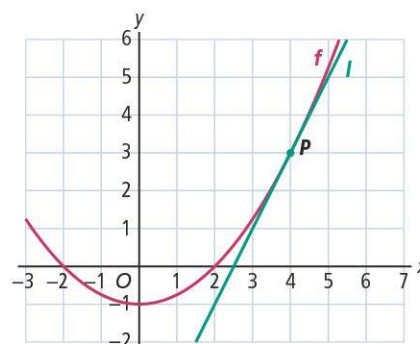
- Hoe zie je aan de grafiek dat de snelheid van de auto na $t = 6$ constant is?
- Bereken de snelheid van de auto in meters per seconde na $t = 6$.
- Hoe kun je zien dat de bromfiets niet heeft stil gestaan bij het stoplicht?
- Bereken de snelheid van de bromfiets in meters per seconde.
- Op welk moment is de snelheid van de bromfiets gelijk aan die van de auto?



- 15** Lijn l raakt in het punt $P(4, 3)$ aan de grafiek van de functie

H $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$.

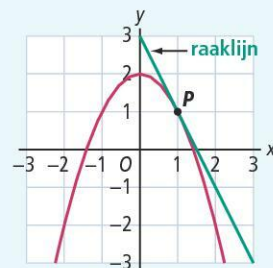
- Lees uit de figuur af hoe groot de richtingscoëfficiënt van l is.
- Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ over de intervallen $[4; 5]$, $[4; 4,5]$, $[4; 4,1]$ en $[4; 4,01]$.
- Komt de helling van de grafiek van f in P overeen met de helling van l ? Verklaar je antwoord.



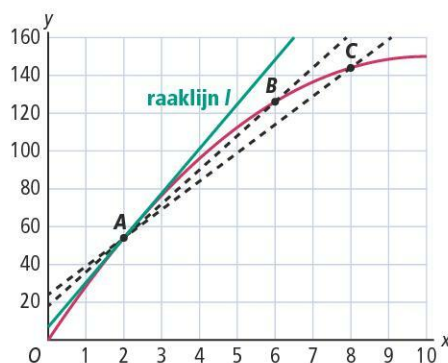
Theorie

De **helling van een grafiek** in een punt P is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de lijn die de grafiek raakt in punt P . Deze lijn heet de **raaklijn**.

In de figuur is de raaklijn aan de parabool in punt P getekend. De richtingscoëfficiënt van deze raaklijn is -2 , dus de helling van de parabool in punt P is -2 .



- 16** In het assenstelsel is de grafiek van de functie $f(x) = -1,5x^2 + 30x$ getekend.
- De gemiddelde verandering van $f(x)$ over het interval $[2, 8]$ is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de lijn AC . Bereken die richtingscoëfficiënt.
 - Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ over het interval $[2, 6]$.
Van welke lijn is dit de richtingscoëfficiënt?
 - Door de gemiddelde verandering over een steeds kleiner interval te berekenen, krijg je een steeds betere benadering van de helling van de grafiek in A . De bijbehorende lijnen gaan dan steeds meer lijken op de raaklijn in punt A . Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ over het interval $[2; 2,001]$.
 - Hoe groot is de helling van de grafiek van f in A vermoedelijk?



Theorie

Je kunt de **helling** van een grafiek in een punt P **benaderen** door de gemiddelde verandering over een klein interval te berekenen. Hoe kleiner het interval, des te beter is de benadering.

In een tijd-afstand grafiek is de helling van de grafiek gelijk aan de **snelheid**.

Voorbeeld

Een pijl wordt vanaf een toren recht omhoog geschoten. De hoogte h in meters na t seconden kun je berekenen met de functie $h(t) = 10 + 30t - 5t^2$. Benader de snelheid na twee seconden.

Oplossing

Kies een klein interval bij $t = 2$, bijvoorbeeld $[2; 2,001]$ en bereken het differentiequotiënt:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(2,001) - h(2)}{0,001} = 9,995. \text{ De snelheid is vermoedelijk } 10 \text{ m/s.}$$

- 17** a Benader ook de snelheid van de pijl in het voorbeeld na vijf seconden.
 b Gaat de pijl op $t = 5$ omhoog of omlaag? Verklaar je antwoord.

Ondersteunende route → maak opdracht 018

- 18** Benader de helling van de grafiek van de functie f in het gegeven punt.
- $f(x) = x^2$ in het punt $(2, 4)$.
 - $f(x) = 3\sqrt{x}$ in het punt $(9, 3)$.
 - $f(x) = \frac{6}{x}$ in het punt $(-2, -3)$.

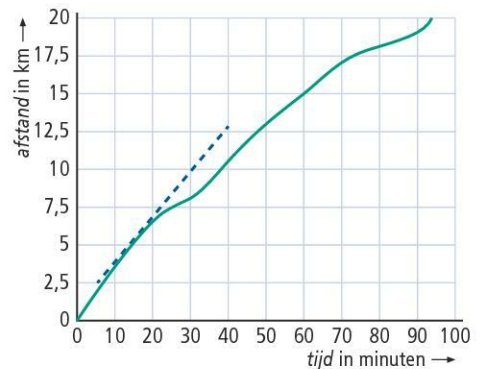
- 19** Om na te gaan hoe hard er op een weg wordt gereden, legt de politie twee luchtslangen over de weg. Rijd je over die slangen, dan wordt de tijd gemeten tussen het passeren van de slangen. De slangen liggen 50 cm uit elkaar.
- Waarom kan op deze manier de snelheid van de auto op dat moment worden benaderd?
 - Bij een passerende auto wordt 0,025 seconden gemeten. Hoe hard reed die auto in m/s?
 - Hoeveel is dat in km/uur?



- 20** Ineke doet mee aan een halve marathon. In de grafiek zie je hoe zij de wedstrijd heeft gelopen.

W

- Bereken de gemiddelde snelheid in km per minuut tussen $t = 10$ en $t = 30$.
- Om de snelheid op $t = 15$ te berekenen is een lijn getrokken die de grafiek raakt in het punt met $t = 15$. Bereken de snelheid van Ineke op tijdstip $t = 15$.
- Bereken op deze manier ook haar snelheid in km per minuut op het tijdstip $t = 80$.



Uitdagende route → maak opdracht U4

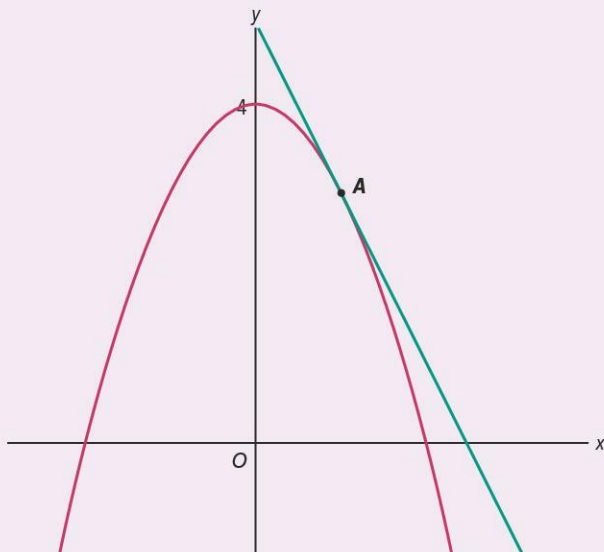
Ondersteunende opdrachten

018

Gegeven is de functie $f(x) = 4 - x^2$

Je gaat de helling van de grafiek van f in het punt $A(1, 3)$ benaderen.

Dat doe je door de gemiddelde verandering van $f(x)$ over een klein interval, bijvoorbeeld $[1; 1,001]$, te berekenen.



- Bereken $f(1,001)$.
- Bereken $\Delta y = f(1,001) - f(1)$.
- Bereken het differentiequotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ over het interval $[1; 1,001]$.
- Hoe groot is de helling van de grafiek van f in A vermoedelijk?

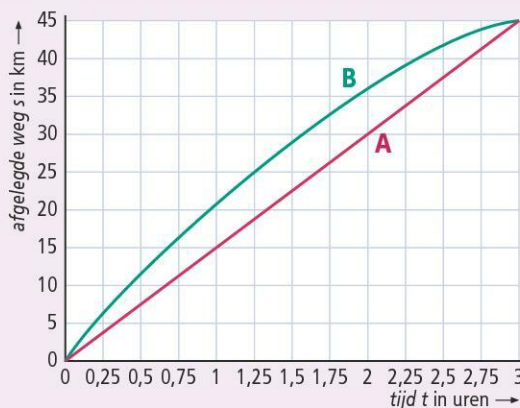
		$\Delta x = \dots$
x	1	1,001
y	$\dots$	$\dots$
		$\Delta y = \dots$

Uitdagende opdrachten

U4

Twee fietsers hebben hetzelfde traject van 45 km afgelegd. In de grafiek kun je zien dat ze dat niet op dezelfde manier hebben gedaan.

- Leg uit dat beide fietsers het traject hebben afgelegd met dezelfde gemiddelde snelheid.
- Lees uit de grafieken af op welk tijdstip de snelheid van beide fietsers even groot is.
- Bij de grafieken passen de formules $s = 15t$ en $s = -3t^2 + 24t$ met t in uren en s in km. Controleer je antwoord op opdracht b door de snelheid van beide fietsers over een interval met $\Delta x = 0,001$ te berekenen.



6.4 De afgeleide functie

Je leert

- wat een differentiaalquotiënt is
- wat een afgeleide functie is

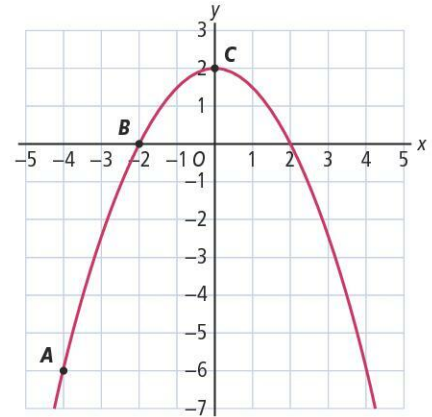
Leerroutes

- ondersteunend: 21—022—23—24—25—26—027—28
- doorlopend: 21—22—23—24—25—26—27—28
- uitdagend: 21—22—23—24—25—26—27—U5

Op de parabool liggen de punten $A(-4, -6)$, $B(-2, 0)$ en $C(0, 2)$.

- Hoe groot is de helling van de grafiek in C ?
- De hellingen van de grafiek in A en B zijn respectievelijk 4 en 2.

In welke punten kun je nu ook de helling bepalen? Hoe groot zijn de hellingen in die punten?



- 21 Gegeven is de functie $f(x) = 2x^3$.
- Bereken de differentiequotiënten van $f(x)$ over de intervallen $[1; 1,01]$, $[1; 1,001]$ en $[1; 1,0001]$.
 - Als je het differentiequotiënt van $f(x)$ over een steeds kleiner interval uitrekent, nadert het differentiequotiënt naar de exacte waarde van de helling van de grafiek bij $x = 1$. Naar welke waarde nadert het differentiequotiënt?
 - Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ over het interval $[1; 1,000\ 001]$.
 - Klopt je antwoord met het antwoord van opdracht b?

Theorie

Als de waarde van Δx nadert naar 0, notatie $\Delta x \rightarrow 0$, gaat het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ over in het **differentiaalquotiënt** $\frac{dy}{dx}$ (spreek uit: d-ij-d-x).

Het differentiaalquotiënt is de exacte waarde van de helling van de grafiek in een punt.

Voorbeeld

Gegeven is $f(x) = 12\sqrt{x}$.

Bereken $\frac{dy}{dx}$ voor $x = 9$

Oplossing

Over $[9; 9,001]$ is

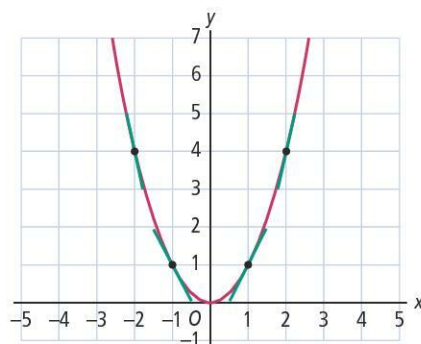
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{12\sqrt{9,001} - 12\sqrt{9}}{0,001} \approx 1,99994.$$

Vermoedelijk geldt $\frac{dy}{dx} = 2$.

Ondersteunende route → maak opdracht 022

- 22** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{10 - x}$.
- H** a Bereken het differentiequotiënt over de intervallen $[6; 6,01]$, $[6; 6,001]$ en $[6; 6,0001]$.
- b Wat is het differentiaalquotiënt voor $x = 6$?
Schrijf je antwoord als een breuk.
- c Bereken $\frac{dy}{dx}$ ook voor $x = -6$.

- 23** Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.
- a Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ over het interval $[1; 1,001]$.
- b Hoe groot is het differentiaalquotiënt voor $x = 1$?
- c Bereken ook het differentiaalquotiënt voor $x = 2$.
- d Hoe groot is de helling van de grafiek in de punten $(1, 1)$ en $(2, 4)$?
- e Vanwege de symmetrie in de y -as weet je ook de helling van twee andere punten van de grafiek.
Welke twee punten zijn dat en hoe groot is de helling in elk van die punten?



Met je rekenmachine kun je een tabel maken met de hellingen van de grafiek van een functie in verschillende punten. Hoe je zo'n tabel maakt, is afhankelijk van het type rekenmachine.

X	Y1	Y2			
-2	4	-4			
-1	1	-2			
0	0	0			
1	1	2			
2	4	4			
3	9	6			
4	16	8			
5	25	10			
6	36	12			
7	49	14			
8	64	16			

X=-2

Instructie rekenmachine | hellingen

- 24** a Plot en schets de grafiek van de functie $f(x) = 1,5x^2 - 7,5x + 3$.
- b Welke coördinaten heeft de top?
- c Maak een tabel van de functiewaarden en de hellingen en vul de tabel in.
- d Bij welke waarde van x is de helling gelijk aan 18?
- e Hoe kun je de kolom met hellingen gebruiken om de coördinaten van de top te vinden?

x	$f(x)$	$helling$
-2	24	-13,5
-1	12	-10,5
0	3	...
1	...	...
2	...	...
3	...	...
4	...	...

- 25** In de tabel zie je functiewaarden en hellingen bij de functie $f(x) = x^2$.
- Welke regelmaat herken je in de kolom met de hellingen?
 - Hoe groot is de helling in het punt waarvoor $x = 5$?
 - Hoe groot is de helling in het punt waarvoor $x = 10$?
 - Welke formule hoort bij de hellingen van de grafiek van f ?
 - In welk punt van de grafiek is de helling gelijk aan 7?

x	$f(x)$	<i>helling</i>
-2	4	-4
-1	1	-2
0	0	0
1	1	2
2	4	4
3	9	6

Theorie

Bij een functie f hoort een functie waarmee je de helling in een punt van de grafiek van f exact kunt berekenen. Die functie heet de **hellingfunctie** of **afgeleide functie** van f of kortweg **afgeleide** van f , notatie f' (spreek uit als f -accent) of $\frac{dy}{dx}$. Zo is de afgeleide functie van $f(x) = x^2$ gelijk aan $f'(x) = 2x$. De helling in een punt noem je ook wel de **afgeleide waarde**. In een tijd-afstand situatie is de afgeleide waarde gelijk aan de snelheid op dat moment.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = x^2$. Bereken de exacte helling van de grafiek van f in het punt $(-1,7; 2,89)$.

Oplossing

De afgeleide functie is $f'(x) = 2x$.
De helling in $(-1,7; 2,89)$ is
 $f'(-1,7) = 2 \cdot -1,7 = -3,4$.

- 26** Gegeven is $f(x) = x^2$.
- H**
- Bereken exact de helling in het punt $(-5, 25)$.
 - Bereken exact $\frac{dy}{dx}$ voor $x = 2,9$.
 - In welk punt van de grafiek is de helling 9?

Ondersteunende route → maak opdracht 027

- 27** Gegeven is de functie $f(x) = 7x$.
- De grafiek van f is een rechte lijn. Hoe groot is de helling van de grafiek voor $x = 2$?
 - En voor $x = -3$?
 - Geef een functievoorschrift van f' .
 - Geef een functievoorschrift van de hellingfunctie van $g(x) = 7$.

- 28** Voor de afgelegde weg van een auto geldt voor de eerste tien seconden de formule $s = t^2$ met s de afgelegde weg in meters en t de tijd in seconden. Bereken de snelheid van de auto op $t = 5$.

Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

- 022** Gegeven is de functie $f(x) = 2\sqrt{x}$.
- Bereken het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ over het interval $[9; 9,01]$.
 - Bereken ook het differentiequotiënt over het interval $[9; 9,001]$.
 - Naar welke waarde nadert $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ voor $x = 9$?
Schrijf je antwoord als een breuk.
 - Hoe groot is het differentiaalquotiënt voor $x = 9$ vermoedelijk?
 - Bereken het differentiaalquotiënt van $f(x)$ voor $x = 4$.

		$\Delta x = \dots$
x	9	9,01
y	...	...
		$\Delta y = \dots$

- 027**
- Teken in een assenstelsel de grafiek van $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$.
 - Hoe groot is de helling van de grafiek in het punt $(0, 2)$?
 - Hoe groot is de helling van de grafiek in het punt $(2, 3)$?
 - Wat kun je zeggen over de helling van de grafiek in een willekeurig punt van de grafiek?
 - Geef het functievoorschrift van de hellingfunctie van f .
 - Teken de grafiek van de functie $g(x) = -2$.
 - Hoe groot is de helling van de grafiek van g in een willekeurig punt?
 - Geef een functievoorschrift voor g' .

Uitdagende opdrachten

- U5** Tijdens de lancering van een raket is de afgelegde weg s in km een functie van de tijd t in minuten. Er geldt:
 $s(t) = 28t^2$ met $1 \leq t \leq 8$.
- Hoe groot schat je de snelheid van de raket 5 minuten na 'ignition' ($t = 0$)?
 - Maak voor $1 \leq t \leq 8$ een tabel van functiewaarden en hellingen bij s en geef een formule voor s' .



6.5 Differentiëren

Je leert

- hoe je de afgeleide van een machtsfunctie bepaalt
- hoe je de vergelijking van een raaklijn in een punt van de grafiek opstelt

Leerroutes

- ondersteunend: 29—30—031—32—033—33—34
- doorlopend: 29—30—31—32—33—34—35
- uitdagend: 29—30—31—33—34—35—U6

Met behulp van de rekenmachine zijn voor de punten met x -coördinaat 1, 2, 3 en 4 in de kolommen Y3 en Y4 de hellingen van de grafieken van de functies $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ en $g(x) = \frac{1}{4}x^4$ berekend.

X	Y1	Y2	Y3	Y4
1	.33333	.25	1	1
2	2.6667	4	4	8
3	9	20.25	9	27
4	21.333	64	16	64

- Welke helling, denk jij, hebben de grafieken in het punt met x -coördinaat 5?

- 29 Deze opdracht gaat over de afgeleide functie van $f(x) = x^3$.
- Vul in de tabel de kolommen van $f(x)$ en van $f'(x)$ in.
 - Vul ook de kolom voor $g(x) = x^2$ in en vergelijk deze met de kolom van $f'(x)$.
 - Het functievoorschrift van f' heeft de vorm $f'(x) = a \cdot x^2$.
Welke waarde heeft a ?
 - Bereken de helling van de grafiek van f in het punt (10, 1000).
 - In welke punten van de grafiek van f is de helling 75?

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$
-3	-27	27	9
-2	-8	...	4
-1	...	...	...
0	...	...	...
1	...	...	...
2	...	...	...
3	...	...	...

Theorie

Voor de machtsfuncties $f(x) = x^n$ geldt $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.
Het bepalen van een afgeleide functie heet **differentiëren**.

functie	hellingfunctie
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^4$	$f'(x) = 4x^3$
$f(x) = x^5$	$f'(x) = 5x^4$

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie $f(x) = x^7$.
Bereken exact de helling van de grafiek van f in het punt $(-2, -128)$.

Oplossing

De afgeleide functie is $f'(x) = 7x^6$.
De helling in $(-2, -128)$ is dus
 $f'(-2) = 7 \cdot (-2)^6 = 448$.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie $g(x) = x^8$.
In welk punt is de helling gelijk aan 1024?

Oplossing

De afgeleide functie is $g'(x) = 8x^7$.
De helling is gelijk aan 1024 als $g'(x) = 1024$.
 $8x^7 = 1024$ geeft $x^7 = 128$ dus $x = 2$.
 $g(2) = 2^8 = 256$ dus het gevraagde punt is $(2, 256)$.

30 Differentieer.

a $f(x) = x^{15}$

b $f(x) = x^{51}$

c $f(x) = x^{999}$

Ondersteunende route → maak opdracht 031

31 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^4$ en $g(x) = x^5$.

H

- a** Differentieer f en bereken de helling van de grafiek van f in het punt $(1, 1)$.
- b** Hoe groot is de helling van de grafiek van f in het punt $(-1, 1)$?
- c** Differentieer g en bereken de helling van de grafiek van g in het punt $(2, 32)$.
- d** In welk(e) punt(en) van de grafiek van g is de helling gelijk aan 405?

32 Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.

- a** Differentieer f en bereken de helling van de grafiek van f in het punt $P(3, 9)$.

De lijn $l: y = ax + b$ raakt de grafiek van f in P .

- b** Welke waarde heeft a ?
- c** Vul de coördinaten van P in de vergelijking van l in en bereken b .
- d** Geef een vergelijking van l .

Aanpak

Hoe stel je een vergelijking op van de raaklijn l in een punt $P(p, q)$ van de grafiek van een functie f ?

- 1** Differentieer f en bereken $f'(p)$.
- 2** Een vergelijking van l is $y = ax + b$ met $a = f'(p)$.
Vul de coördinaten van P in de vergelijking van l in en bereken b .
- 3** Stel een vergelijking op van l .

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de raaklijn l in het punt $P(2, 8)$ van de grafiek van de functie $f(x) = x^3$.

Oplossing

- 1** $f'(x) = 3x^2$ en $f'(2) = 12$
- 2** $l: y = 12x + b$
Invullen van $x = 2$ en $y = 8$
geeft $8 = 12 \cdot 2 + b$, dus $b = -16$.
- 3** Een vergelijking van l is
 $y = 12x - 16$.

- 33** Op de grafiek van f ligt een punt P . Stel een vergelijking op van de raaklijn l in punt P aan de grafiek van f .

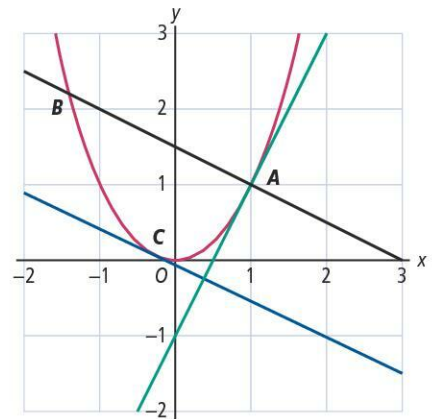
H

- a $f(x) = x^3$ en $P(-1, -1)$
- b $f(x) = x^4$ en $P(2, 16)$
- c $f(x) = x^{33}$ en $P(1, 1)$
- d $f(x) = x^{100}$ en $P(0, 0)$

Ondersteunende route → maak opdracht 034

- 34** Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = x^3$.
- a Punt P ligt op de grafiek van f . De raaklijn l in P aan de grafiek van f heeft richtingscoëfficiënt 7. Stel een vergelijking van l op.
 - b In een punt Q op de grafiek van g heeft de raaklijn m aan de grafiek richtingscoëfficiënt 12. Stel een vergelijking van m op (er zijn twee oplossingen).

- 35** Gegeven is de functie $f(x) = x^2$. Op de grafiek van f ligt punt $A(1, 1)$.
- a Stel een vergelijking op van de raaklijn l in A aan de grafiek van f .
 - b De lijn door A loodrecht op l snijdt de grafiek van f , behalve in A , ook nog in een punt B . Bereken de helling van de grafiek in B .
 - c Een lijn evenwijdig aan lijn AB raakt de grafiek in C . Bereken de coördinaten van C .
 - d Er liggen twee punten D en E op de grafiek van f , zodat de raaklijnen in D en E aan de grafiek elkaar loodrecht snijden in een punt op de y -as. Bereken de coördinaten van D en E .



Uitdagende route → maak opdracht U6

Ondersteunende opdrachten

031 Gegeven is de functie $f(x) = x^6$. Op de grafiek van f ligt het punt A met x -coördinaat 2.

- Geef het functievoorschrift van f' .
- Bereken exact de y -coördinaat van A .
- De helling van de grafiek in A is $f'(2)$. Bereken deze helling exact.

In een punt P is de helling van de grafiek van f gelijk aan -6 .

- Bereken de x -coördinaat van P door de vergelijking $f'(x) = -6$ op te lossen.
- Bereken de y -coördinaat van P door de oplossing van opdracht d in te vullen in $f(x)$.
- Differentieer de functie $g(x) = x^3$ en bereken de helling van de grafiek van g in het punt $(3, 27)$.
- In welk(e) punt(en) van de grafiek van g is de helling gelijk aan 108?

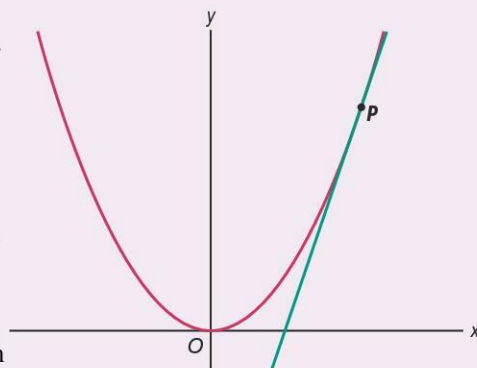
functie $f(x) = x^n$

afgeleide $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Voor $f(x) = x^6$ neem je $n = 6$.

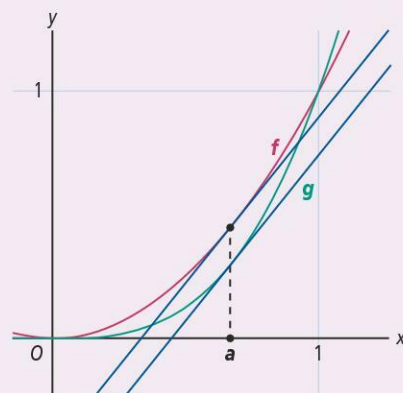
034 Gegeven is de functie $f(x) = x^2$. De raaklijn l aan de grafiek van f in een punt P van de grafiek heeft richtingscoëfficiënt 8. Je gaat een vergelijking van l opstellen.

- Hoe groot is de helling van de grafiek van f in P ?
- Differentieer f .
- Los de vergelijking $f'(x) = 8$ op. Je vindt de x -coördinaat van P .
- Vul, om de y -coördinaat van P te vinden, de gevonden x -coördinaat bij $f(x)$ in.
- Schrijf de coördinaten van P op.
- Een vergelijking van l heeft de vorm $y = 8x + b$. Bereken b door de coördinaten van P in de vergelijking in te vullen en geef een vergelijking van l .



Uitdagende opdrachten

U6 De grafieken van $f(x) = x^2$ en $g(x) = x^3$ snijden elkaar in de punten $(0, 0)$ en $(1, 1)$. Voor een waarde $x = a$ met $0 < a < 1$ hebben de grafieken van f en g precies dezelfde helling. Bereken exact hoe groot die helling is.



6.6 Regels voor differentiëren

Je leert

- hoe je de afgeleide van een veeltermfunctie bepaalt
- hoe je de coördinaten van een top van een grafiek berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 36—37—38—39—040—41—42—043
- doorlopend: 36—37—38—39—40—41—42—43
- uitdagend: 36—37—38—40—41—42—43—U7

Op Schiphol moet je vaak grote afstanden afleggen om van je vliegtuig naar de aankomsthal te komen. Op veel stukken kun je dat doen via een lopende band. Die band beweegt met een snelheid van 1 m/s.

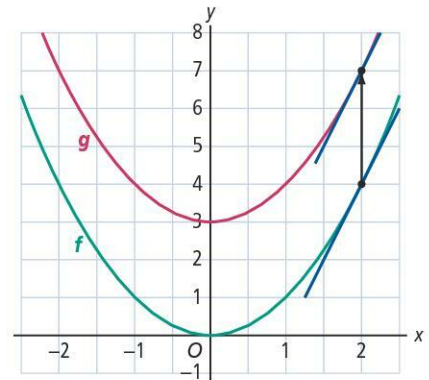
- Als je zelf op die band gaat lopen met een snelheid van 1,5 m/s, met welke snelheid beweeg je je dan door de gang?
- Met welke snelheid beweeg je je door de gang als je op die band met 1,5 m/s de verkeerde kant oploopt (streng verboden!)?



36 Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.

Door de grafiek van f drie omhoog te schuiven ontstaat de grafiek van de functie $g(x) = x^2 + 3$.

- Wat weet je van de hellingen van de grafieken van f en g voor $x = 2$?
- Leg uit dat voor elke waarde van x geldt $f'(x) = g'(x)$.



37 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = 3x^2$.

- Maak een tabel met de hellingen van de grafieken van f en g voor $x = 0$ tot $x = 10$.
- Met welk getal moet de helling van de grafiek van f in de tabel telkens vermenigvuldigd worden om de helling van de grafiek van g te krijgen?
- Geef een functievoorschrift van g' .

- 38** Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ en de somfunctie $s(x) = f(x) + g(x) = x^2 + x^3$.
- Bereken de gemiddelde toename van $f(x)$, $g(x)$ en $s(x)$ op het interval $[1, 3]$.
 - Welk verband is er tussen deze gemiddelde toenames?
 - Bereken exact $f'(1)$ en $g'(1)$.
 - Bereken met je rekenmachine $s'(1)$.
 - Welk verband bestaat er tussen $f'(1)$, $g'(1)$ en $s'(1)$?

Theorie

Regels voor het differentiëren

functie	afgeleide functie
$g(x) = f(x) + c$	$g'(x) = f'(x)$
$g(x) = c \cdot f(x)$	$g'(x) = c \cdot f'(x)$
$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$ (somregel)
$s(x) = f(x) - g(x)$	$s'(x) = f'(x) - g'(x)$

Met deze regels kun je elke veeltermfunctie differentiëren.

Voorbeeld

Differentieer de functies

$$f(x) = -2x^4, g(x) = 3x^7 \text{ en}$$

$$h(x) = -2x^4 + 3x^7 + 12$$

Oplossing

$$f'(x) = -2 \cdot 4x^3 = -8x^3$$

$$g'(x) = 3 \cdot 7x^6 = 21x^6$$

$$h'(x) = -8x^3 + 21x^6 + 0, \text{ dus}$$

$$h'(x) = -8x^3 + 21x^6$$

- 39** Differentieer de veeltermfuncties.

- | | |
|---|--|
| H a $f(x) = 20x^3 - 3x^2$ | d $q(p) = \frac{5}{6}p^6 - 8p^4 + 7p$ |
| b $h(x) = -4x + 6$ | e $k(x) = 5$ |
| c $s(t) = 5t^4 + 2t^2 - 9$ | f $z(t) = t^{2001} + 200t^{10}$ |

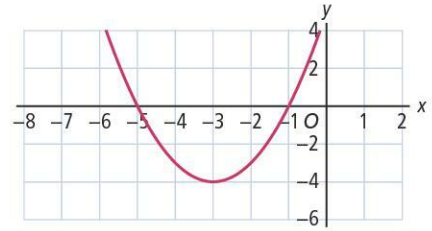
Ondersteunende route → maak opdracht 040

- 40** Bereken met behulp van de afgeleide functie exact de helling van de grafiek in het punt met x -coördinaat 1. Als er haakjes in het functievoorschrift staan moet je deze eerst wegwerken.

H

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| a $f(x) = -6x^2 + 5x - 1$ | d $k(x) = x^2(5 - x^3)$ |
| b $g(x) = -2x^5 + 3x^2 + 4x$ | e $l(x) = (7x - 2)^2$ |
| c $h(x) = (2x - 6)(5x + 1)$ | f $m(x) = (x^2 + 1)(5x - 8)$ |

- 41** Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 6x + 5$.
- Differentieer f .
 - Bereken de coördinaten van het punt waarvoor geldt $f'(x) = 0$.
 - Van welk bijzonder punt heb je in opdracht b de coördinaten berekend?



Theorie

In een top van de grafiek van een functie f is de **raaklijn evenwijdig aan de x -as**. De helling van de grafiek is daar 0. Een top van de grafiek van f kun je dus vinden door de vergelijking $f'(x) = 0$ op te lossen.

Voorbeeld

Bereken exact de coördinaten van de top van de grafiek van de

$$\text{functie } f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 7.$$

Oplossing

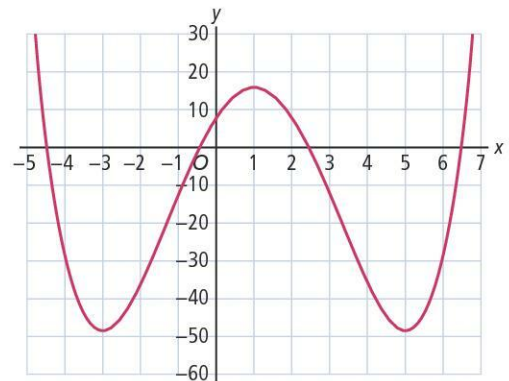
$$f'(x) = x + 3$$

$$f'(x) = 0, \text{ als } x = -3$$

$$f(-3) = \frac{1}{2} \cdot 9 + 3 \cdot -3 - 7 = -11\frac{1}{2}$$

De top is het punt $(-3, -11\frac{1}{2})$.

- 42** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 6\frac{1}{2}x^2 + 15x + 8$.
- Lees uit de grafiek af bij welke waarden van x de grafiek een horizontale raaklijn heeft.
 - Geef het functievoorschrift $f'(x)$ en controleer de antwoorden bij opdracht a.



Ondersteunende route → maak opdracht 043

- 43** Bereken met behulp van differentiëren de coördinaten van de top(pen) van de grafiek van de functie f .

H

- $f(x) = -3x^2 + 18x - 20$
- $f(x) = x^3 - 12x$
- $f(x) = x^4 - 2x^2 - 4$

Uitdagende route → maak opdracht U7

Ondersteunende opdrachten

040

Gegeven is de functie $f(x) = (3x - 8)^2$.

Je gaat de helling van de grafiek van f berekenen in het punt met x -coördinaat -1 .

a Schrijf $(3x - 8)^2$ zonder haakjes.

b Differentieer f .

c Bereken de helling met $f'(-1)$.

Bereken met behulp van de afgeleide functie exact de helling van de grafiek in het punt met x -coördinaat 1 . Als er haakjes in het functievoorschrift staan moet je deze eerst wegwerken.

d $f(x) = -3x^2 + 4x - 5$

g $k(x) = x(2x - x^4)$

e $g(x) = -9x^6 + 8x^5 + 7x$

h $l(x) = (5x + 7)^2$

f $h(x) = (4x + 3)(3x - 4)$

i $m(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$

●	$(3x - 8)^2 = (3x - 8)(3x - 8)$
●	$= 9x^2 - 24x - \dots + \dots$
●	$= 9x^2 - \dots x + \dots$
●	

043

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 1$.

Je gaat de coördinaten van de toppen van de grafiek van f berekenen.

a Controleer dat $f'(x) = x^2 - 4x$.

b In de toppen van de grafiek is de helling 0 .

Los op $f'(x) = 0$.

c Vul de gevonden x -waarden in:

$$f(x) = \frac{1}{3}(\dots)^3 - 2(\dots)^2 + 1$$

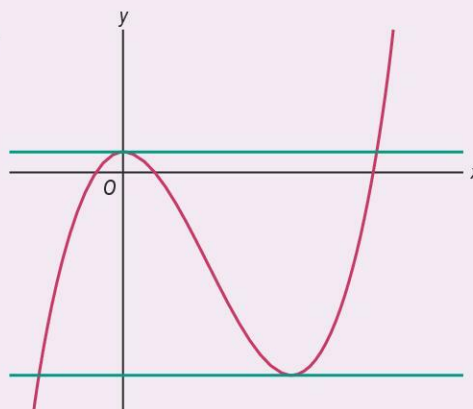
d Geef de coördinaten van beide toppen.

Bereken met behulp van differentiëren de coördinaten van de top(pen) van de grafiek van f .

e $f(x) = -4x^2 + 12x - 18$

f $f(x) = 6x - 2x^3$

g $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 16x + 20$



Uitdagende opdrachten

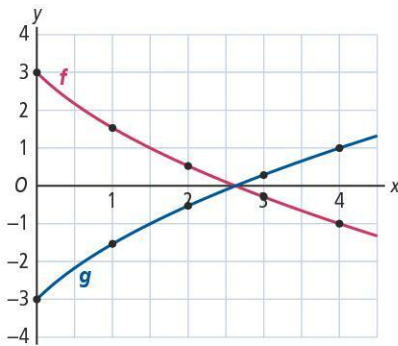
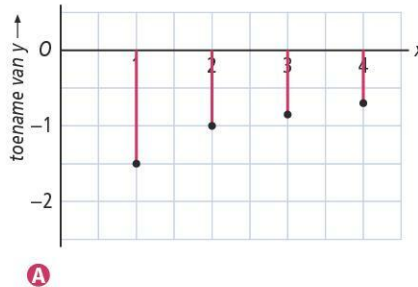
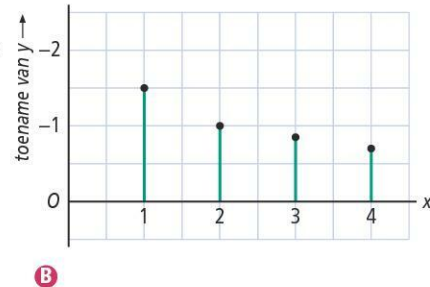
U7

Van een functie f is de afgeleide functie $f'(x) = x^2 + 2x$.

De grafiek van f gaat door het punt $(3, 7)$.

Geef een functievoorschrift van f .

44 Welk toenamediagram hoort bij welke grafiek?



45 Differentieer. Werk zo nodig eerst de haakjes weg.

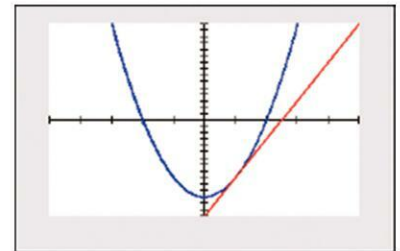
- | | |
|---------------------------|-------------------------------|
| a $f(x) = 3x + 2\sqrt{3}$ | d $f(x) = (3x + 1)(1 - 3x)$ |
| b $f(x) = -x^2 + 4x - 11$ | e $f(x) = -3x^4 \cdot 2x$ |
| c $f(x) = (x + 2)^2 - 17$ | f $f(x) = (x^2 + 4)(x^2 - 3)$ |

46 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 8x$.

- Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.
- Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek.
- Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt met $x = 3$.

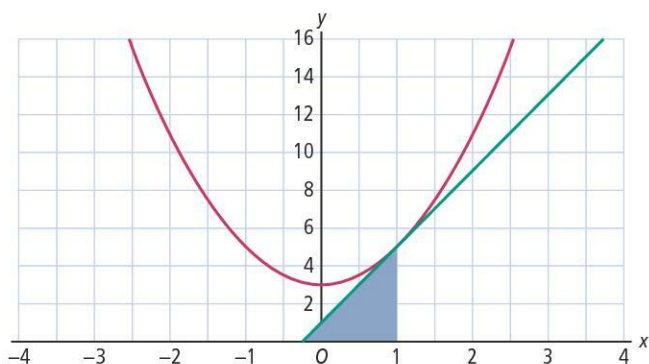
47 In de plot zie je de grafiek van de functie $f(x) = 3x^2 - 12$ en de lijn $l: y = 6x - 15$. l lijkt de grafiek van f te raken.

- Als l de grafiek raakt, hoe groot is dan de helling van de grafiek in het raakpunt?
- Bereken de coördinaten van het punt op de grafiek van f waarin de helling gelijk is aan de in a gevonden waarde.
- Raakt l aan de grafiek van f ?

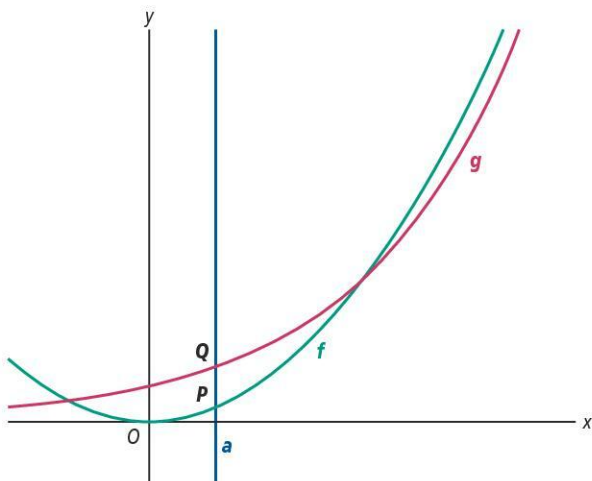


48 Rutger heeft een tocht van twee uur op zijn racefiets gereden. Het verband tussen de afgelegde afstand A in km en de tijd t in uren wordt gegeven door de functie $A(t) = 3t^3 - 10t^2 + 28t$.

- Hoeveel kilometer heeft Rutger tijdens zijn tocht afgelegd en hoe groot was zijn gemiddelde snelheid?
- Bereken met behulp van de afgeleide functie met welke snelheid Rutger aan het begin van de tocht reed.
- Hoe snel reed Rutger aan het eind van de tocht?
- Bereken tussen welke twee tijdstippen de snelheid van Rutger kleiner was dan zijn gemiddelde snelheid. Rond af op één decimaal.



- 49** Gegeven is de functie $f(x) = 2x^2 + 3$. De raaklijn aan de grafiek in het punt met x -coördinaat 1 sluit samen met de x -as en de lijn $x = 1$ een driehoek in. Onderzoek of de oppervlakte van deze driehoek groter is dan 3.



- 50** Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = 2^x$. Een lijn $x = a$ snijdt de grafiek van f in een punt P en de grafiek van g in een punt Q . Onderzoek of er waarden van a zijn waarvoor de helling van de grafiek van f in P gelijk is aan de helling van de grafiek van g in Q . Zo ja, geef dan de coördinaten van P en Q in twee decimalen.

Theorie

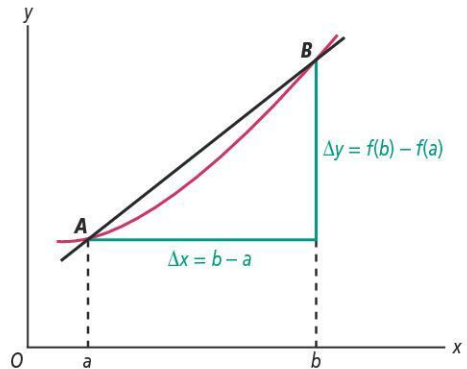
Differentiequotiënt, het symbool Δ

Veranderingen van x en y geef je aan met Δx en Δy .

De gemiddelde verandering van $f(x)$ over een interval $[a, b]$ is

$$\text{het differentiequotiënt } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Het differentiequotiënt is gelijk aan de richtingscoëfficiënt of het hellingsgetal van de lijn door de punten $A(a, f(a))$ en $B(b, f(b))$.



S1 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{12}{x+1}$

- Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ over het interval $[0, 3]$.
- Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ over het interval $[-13, -2]$.

Vaardigheid

Je kunt een toenamediagram maken.

In een toenamediagram kun je toename en afname zichtbaar maken. Bij toename worden de staafjes omhoog getekend, bij afname omlaag.

Voorbeeld

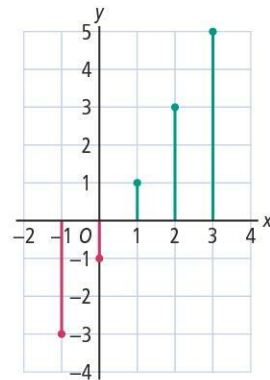
Teken het toenamediagram bij de functie $f(x) = x^2$ met stapgrootte 1. Neem x van -2 tot en met 3 .

Oplossing

Maak een tabel:

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4	1	0	1	4	9
toename		-3	-1	1	3	5

Teken het toenamediagram bij de tabel.



S2 Maak een toenamediagram met stapgrootte 1. Neem x van 0 tot en met 6.

- $f(x) = 5 - \frac{1}{2}x$
- $g(x) = 2\sqrt{x+3}$

Vaardigheid

Je kunt de helling van een grafiek in een punt benaderen.

Als de waarde van Δx naar 0 nadert, notatie $\Delta x \rightarrow 0$, gaat het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ over in het differentiaalquotiënt $\frac{dy}{dx}$

(spreek uit: d-ij-d-x).

Het differentiaalquotiënt is de exacte waarde van de helling van de grafiek in een punt.

Voorbeeld

Benader de helling van de grafiek van de functie $f(x) = \frac{6}{x+2}$ in het punt $P(-3, -6)$.

Oplossing

Bereken $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ over $[-3; -2,9999]$

$$f(-2,9999) = -6,00060006$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-0,00060006}{0,0001} \approx -6, \text{ dus } \frac{dy}{dx} = -6.$$

De helling van de grafiek in P is -6 .

- S3**
- a** Benader de helling van de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{x}$ in het punt $(4, 2)$. Neem $\Delta x = 0,001$.
 - b** Gedurende de eerste 10 seconden wordt de afgelegde weg s van een auto gegeven door de formule $s = 1,5t\sqrt{t}$ met de tijd t in seconden en s in meters.
Bereken de snelheid van de auto op $t = 4$ in m/s.

Vaardigheid

Je kunt de afgeleide functie van een machtsfunctie bepalen.

Met de afgeleide functie f' van een functie f is de helling van de grafiek van f in een punt exact te berekenen.

Voor de machtsfuncties $f(x) = x^n$ geldt $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Het berekenen van een afgeleide functie heet differentiëren.

<i>functie</i>	<i>hellingfunctie</i>
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^4$	$f'(x) = 4x^3$

S4 Differentieer.

a $f(x) = x^6$

c $s(t) = t^{12}$

b $p(q) = q^{25}$

d $g(z) = z^{2000}$

Vaardigheid

Je kunt de afgeleide van een veeltermfunctie bepalen.

Met de volgende regels differentieer je een veelterm.

$f(x) = c$

$f'(x) = 0$

$f(x) = mx$

$f'(x) = m$

$f(x) = x^n$

$f'(x) = nx^{n-1}$

$g(x) = f(x) + c$

$g'(x) = f'(x)$

$g(x) = c \cdot f(x)$

$g'(x) = c \cdot f'(x)$

$s(x) = f(x) + g(x)$

$s'(x) = f'(x) + g'(x)$

Voorbeeld

Differentieer de functie

$f(x) = 11x^9 - 3x^7 + 12x + 5.$

Oplossing

$f'(x) = 99x^8 - 21x^6 + 12$

S5 Differentieer de veeltermfuncties.

a $f(x) = x^{100} - 10x^{10} + 100x - 1000$

b $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 8x - 10$

Vaardigheid

Je kunt een vergelijking van de raaklijn l in een punt $P(p, q)$ van de grafiek van een functie f opstellen.

- 1 Differentieer f en bereken $f'(p)$.
- 2 Een vergelijking van l is $y = ax + b$ met $a = f'(p)$.
Vul de coördinaten van P in de vergelijking van l in en bereken b .
- 3 Stel een vergelijking op van l .

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de raaklijn l aan de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 8x$ in het punt $P(-3, -15)$.

Oplossing

- 1 $f'(x) = x^2 - 8$ en $f'(-3) = 1$
- 2 $l: y = x + b$
Invullen van $x = -3$ en $y = 15$ geeft $15 = -3 + b$, dus $b = 18$.
- 3 Een vergelijking van l is $y = x + 18$.

- S6** Stel een vergelijking op van de raaklijn in het punt P van de grafiek van de functie f .

- a $f(x) = x^5 - 3x^3 + 2$ en $P(2, 10)$
- b $f(x) = 12 - 6x - 3x^2$ in $P(-4, -12)$

Vaardigheid

Je kunt de coördinaten van een top van een grafiek berekenen.

In een top van de grafiek van een functie f is de raaklijn evenwijdig aan de x -as. De helling van de grafiek is daar 0. Een top van de grafiek van f kun je dus vinden door de vergelijking $f'(x) = 0$ op te lossen.

Voorbeeld

Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van de functie

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x + 4.$$

Oplossing

$$f'(x) = -1\frac{1}{2}x + 3$$

$$f'(x) = 0 \text{ als } x = 2$$

$$f(2) = -\frac{3}{4} \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 4 = 7$$

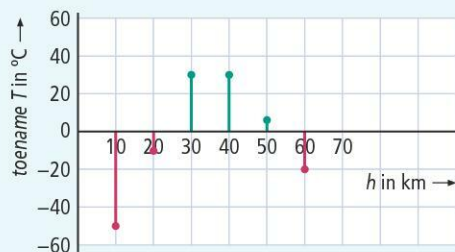
De top is het punt $(2, 7)$.

- S7** Bereken de coördinaten van de toppen van de grafiek van de functie $f(x) = 12x - x^3$.

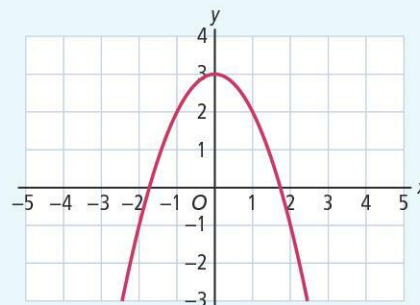
- T1** In het toenamediagram zie je hoe de temperatuur in de dampkring verandert op verschillende hoogten.
- Hoe kun je in dit toenamediagram zien op welke hoogte de temperatuur ongeveer het hoogst was?
 - Op 0 km hoogte is de temperatuur 0 °C.
Hoe hoog is de temperatuur op een hoogte van 30 km?
 - In de tabel zie je de temperatuur van de dampkring op hoogten vanaf 60 km.

h in km	60	70	80	90	100	110	120	130	140
T in °C	-15	-40	-70	-65	-35	-10	30	80	130

Maak het toenamediagram af.



- T2** Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 3$.
- Bereken exact de helling van de grafiek in het punt met x -coördinaat -1 .
 - Bereken exact de coördinaten van het punt van de grafiek waarin de helling gelijk is aan 6.
 - Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek in het punt $P(4, -13)$.

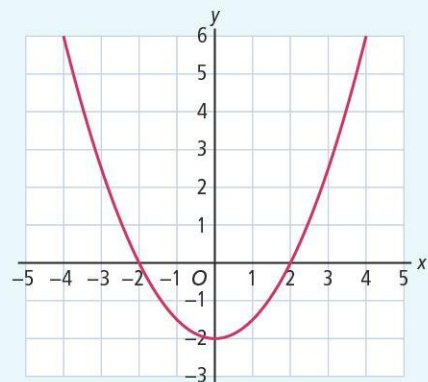


- T3** Differentieer.
- $p(x) = -\frac{1}{2}x^8 + 8\frac{1}{2}$
 - $d(p) = (3p)^5$
 - $f(x) = 0,2x - 0,1 - 0,1x^{20}$
 - $s(t) = (4t + 4)^2 - 4$
 - $h(t) = (2 - \frac{1}{3}t)^2 + \frac{2}{9}t$
 - $N(t) = (3t - 5)(3t + 5)$
 - $A(u) = 999 - u$
 - $h(r) = \pi r^3 - \pi^3 r$

- T4** Gegeven is de functie $f(x) = 8x - \frac{1}{10}x^5$.
- Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.
 - Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek.
 - In een punt A van de grafiek van f heeft de helling van de grafiek de grootste waarde.
Stel een vergelijking op van de raaklijn in A aan de grafiek.

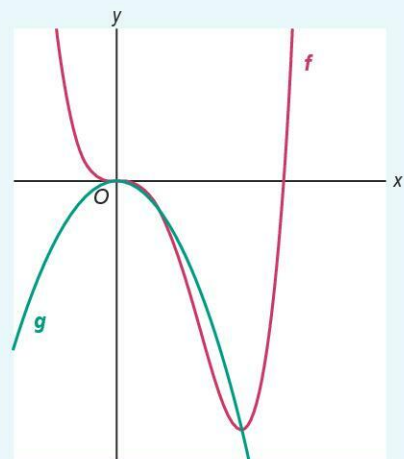
- T5** Gegeven twee functies g en h waarvan de grafieken in het punt $P(a, b)$ dezelfde helling hebben.
Wat kun je nu zeggen over $g(a)$, $g'(a)$, $h(a)$ en $h'(a)$?

- T6** De grafiek hoort bij de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$. De functie f is de afgeleide van een functie g .
- Voor welke waarden van x heeft de grafiek van g een top?
 - Schets een mogelijke grafiek van g .



- T7** Een steen valt van 45 meter hoogte omlaag. Tijdens de val is de hoogte h in meters na t seconden te berekenen met de formule $h = 45 - 4,9t^2$.
- Bereken algebraïsch de gemiddelde valsnelheid in m/s van de steen. Rond af op één decimaal.
 - Bereken algebraïsch de snelheid in m/s waarmee de steen de grond raakt. Rond af op één decimaal.
 - Bereken algebraïsch het tijdstip waarop de snelheid van de steen gelijk is aan de gemiddelde snelheid. Rond af op één decimaal.
- T8** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4$.
- Plot en schets de grafiek van f .
 - Hoeveel raaklijnen zijn er aan de grafiek van f die door $(0, 0)$ gaan?
 - Gegeven is lijn l met formule $y = ax$. Gebruik de afgeleide van f om te onderzoeken voor welke exacte waarden van a lijn l de grafiek van f raakt.

- T9** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - 2x^3$ en $g(x) = -x^2$.
- Bereken exact de x -coördinaat van de punten op de grafiek van f waarin de helling van de grafiek gelijk is aan 0.
 - In de figuur kun je zien dat er maar bij één van de in opdracht a gevonden punten sprake is van een top. Bereken de y -coördinaat van die top.
 - Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g .
 - Bereken algebraïsch voor elk snijpunt in graden nauwkeurig de hoek die de raaklijnen aan de grafieken van f en g in dat punt met elkaar maken.



Je kunt een toenamediagram maken.

- E1** Maak een toenamediagram met stapgrootte 1. Neem op de horizontale as waarden van 0 tot en met 5.

a $y = 10 - \frac{1}{2}x^2$

b $H = 10 \cdot 0,6^x$

Je kunt de helling van een grafiek in een punt benaderen.

- E2** Gegeven is de functie $f(x) = 2^x - 4x$.

a Benader de helling van de grafiek van f in het punt $(-1, 2)$ met een differentiequotient over een klein interval.

Rond je antwoord af op twee decimalen.

b Benader de helling in het punt $(2, 0)$ in twee decimalen.

Je kunt de afgeleide van een machtsfunctie bepalen.

- E3** Differentieer.

a $f(x) = x^{17}$

c $f(x) = 78$

b $f(x) = 5 - 3x$

d $f(x) = x^{2020}$

Je kunt de afgeleide van een veeltermfunctie bepalen.

- E4** Differentieer.

a $f(x) = 4 - 7x$

c $f(t) = (4t - 3)(2t + 6)$

b $h(x) = -3x^2 + 1\frac{1}{4}x^4 - 600x^5$

d $g(t) = (5t - 9)^2$

Je kunt een vergelijking van de raaklijn l in een punt $P(p, q)$ van de grafiek van een functie f opstellen.

- E5** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 8x$.

Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt met x -coördinaat 1.

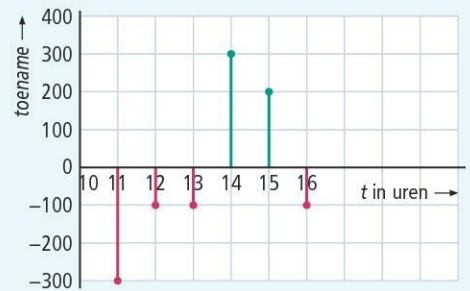
Je kunt de coördinaten van een top van een grafiek berekenen.

- E6** Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek.

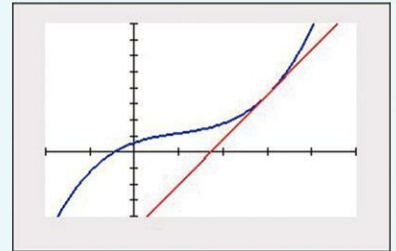
a $f(x) = x^3 - 3x^2$

b $k(x) = 5x^4 - 2x^5$

- E7** In het diagram zie je de toename van het aantal bezoekers in een museum. Op de horizontale as staat de tijd t in uren. Om 13 uur waren er 100 mensen in het museum. Schets de grafiek van het aantal mensen in het museum van 10 uur tot 16 uur.



- E8** Jos rijdt weg op de fiets. De afgelegde afstand s in meters na t seconden wordt beschreven door de formule $s = \frac{20t^2}{3t + 20}$
- Bereken exact de gemiddelde snelheid van Jos in meters per seconde in de eerste minuut.
 - Bereken het differentiequotiënt over het interval $[10; 10,01]$ in één decimaal en geef de praktische betekenis van dit getal.
 - Bereken bij benadering de snelheid in km/uur van Jos na één minuut.
- E9** Bereken exact de coördinaten van de punten op de grafiek van $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x$ waarin de helling gelijk is aan 12.
- E10** Gegeven is een plot van de grafiek van de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 3$ en de lijn $l: y = 14x - 24$.
- l lijkt de grafiek van f te raken. Ga met een berekening na of l een raaklijn aan de grafiek van f is.
 - Stel een vergelijking op van de raaklijn in het snijpunt van de grafiek van f met de y -as.
 - Bereken exact met behulp van de afgeleide in welk punt de grafiek de kleinste helling heeft.
- E11** Als een druppel olie op een glad oppervlak valt, verspreidt deze zich tot een cirkel. Van een oliesoort wordt de straal r in cm van de oliedruppel na t seconden gegeven door de formule $r = 1 + 3\sqrt{t}$. Rond je antwoorden af op één decimaal.
- Met welke gemiddelde snelheid in cm/s verandert de straal van de cirkel tussen $t = 4$ en $t = 6$?
 - Met welke snelheid in cm/s neemt de straal toe op tijdstip $t = 4$?
 - Hoe groot is de bedekte oppervlakte op tijdstip $t = 4$?
 - Hoe snel neemt de bedekte oppervlakte toe op tijdstip $t = 4$?



Oneindig klein

Hoewel veel wiskundigen over de hele wereld aan de ontwikkeling van de differentiaalrekening hebben bijgedragen worden Isaac Newton (1642-1727) en Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) beschouwd als de grondleggers van de differentiaalrekening. Over wie de eerste was, zijn de meningen verdeeld. Leibniz publiceerde zijn theorie in 1684, hetgeen veel protesten van Engelse wiskundigen opleverde. Zij beschuldigden hem ervan dat hij de ideeën van Newton had gestolen. Newton publiceerde zijn bevindingen pas in 1687, terwijl hij de 'theory of fluxions' vermoedelijk al in 1665 en 1666 ontwikkelde. Een overdreven vrees voor kritiek had Newton ervan weerhouden om zijn bevindingen al eerder te publiceren.



Newton



Leibniz

Een differentiaalquotiënt wordt meestal uitgerekend voor een bepaalde waarde van x en daarbij laat je Δx naar 0 naderen. Het bezwaar dat critici uit de tijd van Newton en Leibniz hadden, was het benoemen van Δx . De Engelse filosoof bisschop Berkeley schreef in 1734 hierover: 'Het zijn noch eindige hoeveelheden, noch oneindig kleine hoeveelheden, noch iets anders. Zouden we ze niet beter spookverschijningen kunnen noemen van verdwenen hoeveelheden?'

Het werken met steeds kleinere hoeveelheden leverde ook in de oudheid al problemen op. De filosoof Zeno van Elea (490-425 v. Chr.) gebruikte het in zijn beroemde paradox (schijnbare tegenstrijdigheid) van Achilles en de schildpad:

Achilles en de schildpad deden een hardlooppwedstrijd. Achilles liep 10 keer zo snel als de schildpad. De schildpad kreeg een voorsprong van 100 meter.

Als Achilles het startpunt van de schildpad bereikt heeft, dan heeft de schildpad ondertussen 10 meter afgelegd en is dan 110 meter van het beginpunt van Achilles verwijderd. En als Achilles dit punt heeft bereikt, dan is de schildpad hem nog 1 meter voor. Bereikt Achilles dat punt, dan is de schildpad al weer verder. Volgens Zeno zou Achilles de schildpad dus nooit inhalen.



Opdracht

Natuurlijk wist Zeno ook wel dat Achilles de schildpad inhaalt. Wat is er dan mis aan zijn redenering?

SE

CE

K

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Breuken en wortels herleiden
- Lineaire en exponentiële formules
- Meetkunde
- Substitutie

8 nm

7.9 nm

EZY9AK
RYR6132 298.6 kts 8600 ft
350.6 kts 14150 ft

WZZ4AB 268.8 kts 4000 ft
SAS532 248.6 kts 9400 ft
KLM1052 460.5 kts 29000 ft

Elstree
SHT13J
246.9 kts 6675 ft

FIN838M CY
205.2 kts 5425 ft

Breuken en wortels herleiden

- 1** Bereken en schrijf het antwoord als één breuk. Vereenvoudig indien mogelijk het antwoord.

a $\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{9} - \frac{1}{3}$

d $\frac{2a}{3} \cdot \frac{6}{4a} - \frac{1}{2}$

b $\frac{2}{-11} \cdot \frac{-3}{7} + \frac{2}{7}$

e $\frac{3p}{7\frac{1}{2}} \cdot \frac{2p}{-3}$

c $\frac{2}{3p} \cdot \frac{3}{p} + \frac{1}{2p}$

f $\frac{5}{4b^2} \cdot \frac{2b}{5a}$

- 2** Vereenvoudig de breuken.

a $\frac{9a}{27a}$

d $\frac{2p}{\frac{4}{3p}}$

b $\frac{9q}{7\frac{1}{2}q}$

e $\frac{\frac{9}{11}}{3}$

c $\frac{12}{\frac{p}{3}}$

f $\frac{\frac{3}{p}}{8p}$

- 3** Schrijf als één breuk. Vereenvoudig indien mogelijk.

a $\frac{2}{a} - \frac{a}{2}$

d $\frac{4(x+1)}{x} - \frac{1}{4}x$

b $\frac{a}{b} + \frac{b}{2a}$

e $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$

c $\frac{3}{x} \cdot \frac{x+1}{3x}$

f $(2x + x^2) \cdot \frac{1}{x^3}$

- 4** Bereken.

a $(5\sqrt{3})^2$

c $7\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{32}$

b $3\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{5}$

d $(5\sqrt{\frac{3}{11}})^2$

- 5** Schrijf in de vorm $a\sqrt{b}$ met b een geheel getal.

a $\frac{12}{\sqrt{7}}$

d $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$

b $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

e $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1,25}}$

c $\frac{36}{4\sqrt{3}}$

f $\frac{5}{\sqrt{6}}$

Voorbeeld

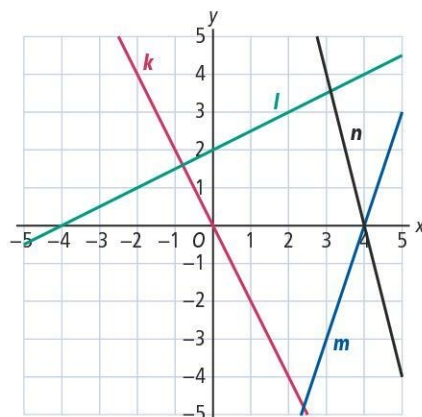
Schrijf $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$ in de vorm $a\sqrt{b}$.

Oplossing

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{14}}{7} = \frac{1}{7}\sqrt{14}$$

Lineaire en exponentiële formules

- 6** In het assenstelsel zijn vier lijnen getekend. Stel bij elk van de lijnen een formule op.
- 7** Stel een vergelijking op van de lijn in de volgende gevallen.
- Lijn p gaat door $(3, 7)$ en heeft richtingscoëfficiënt -3 .
 - Lijn q gaat door $(-2, 1)$ en $(2, 16)$.
 - Lijn r is evenwijdig aan lijn k : $y = -0,25x + 6$ en gaat door $(16, -12)$.
 - Lijn s gaat door $(12, 8)$ en $(12, -9)$.
 - Lijn t gaat door $(8, 9)$ en is evenwijdig aan de x -as.
- 8** Een volle rol elektriciteitsdraad bevat 100 meter draad. Om te weten te komen hoeveel meter er op een aangebroken rol zit, kun je de rol wegen. De lege rol weegt 2,8 kg en een volle rol 10,8 kg.
- Waarom is er sprake van een lineair verband tussen de lengte en het gewicht?
 - Geef een formule bij dit lineaire verband.
- 9** De tabellen horen bij een exponentieel verband. Stel bij beide tabellen een formule op.



A

t	0	1	2	3	4
N	500	400	320	256	204,8

B

t	2	3	4	5	6
N	4500	5400	6480	7776	9331,2

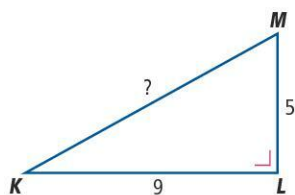
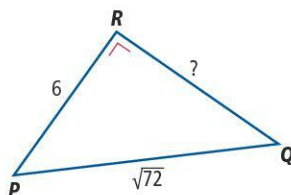
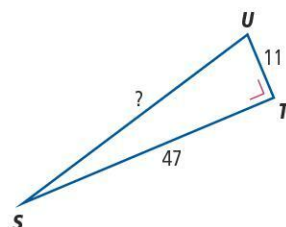
- 10** De tabel hoort bij een exponentieel groeiproces. Hierin is t de tijd in jaren en A het aantal.
- Bereken de groeifactor per vier jaar.
 - Bereken de groeifactor per jaar.
 - Hoe groot is het groeipcentage per jaar?
 - Stel een formule op met t in jaren.
 - Stel ook een formule op met t in maanden. Rond daarbij de groeifactor af op drie decimalen.

t in jaren	2	6
A	36	2916

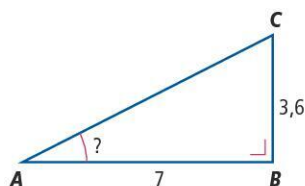
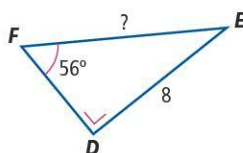
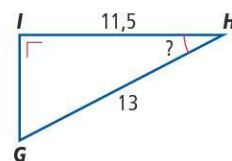
- 11**
- De groeifactor per jaar is 1,6. Bereken in twee decimalen de groeifactor per maand.
 - De groeifactor per vier weken is 1,5. Bereken in twee decimalen de groeifactor per week.
 - De groeifactor per jaar is 1,02. Bereken in twee decimalen de groeifactor per 10 jaar.
 - De groeifactor per half jaar is 2,3. Bereken in twee decimalen de groeifactor per zeven maanden.

Meetkunde

- 12** Bereken in elke driehoek met behulp van de stelling van Pythagoras de lengte van de zijde met het vraagteken. Geef een exact antwoord.



- 13** Bereken in elke driehoek in één decimaal de lengte van de zijde of in hele graden de grootte van de hoek met het vraagteken.



Substitutie

- 14** Als je in de formule $y = 4x^2 - 2x + 8$ de formule $x = \frac{1}{2}t - 1$ substitueert, dan krijg je $y = 4(\frac{1}{2}t - 1)^2 - 2(\frac{1}{2}t - 1) + 8$.

- Vul in: door de substitutie verandert de formule waarbij y uitgedrukt is in x in een formule waarbij ...
- Vereenvoudig de formule die door de substitutie verkregen is.

- 15** Druk y uit in t .

- | | | |
|---|--|-----------------|
| a | A: $y = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3$ | B: $x = 2t^5$ |
| b | A: $y = \frac{x^2}{x+1}$ | B: $x = t - 1$ |
| c | A: $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 4x + 4}$ | B: $x = t + 2$ |
| d | A: $y = 2x^{-2} - 3x^{-1} + 4$ | B: $x = t^{-1}$ |

Theorie

Je kunt substitutie gebruiken bij het oplossen van vergelijkingen. In het voorbeeld zie je hoe je de vergelijking $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ oplost met behulp van de substitutie $x^2 = t$. De vierdegraads vergelijking gaat hierdoor over in een tweedegraads vergelijking.

Voorbeeld

Los exact op $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$.

Oplossing

Neem $x^2 = t$.

$$t^2 - 7t + 12 = 0$$

$$(t - 4)(t - 3) = 0$$

$$t = 4 \text{ of } t = 3$$

$$x^2 = 4 \text{ of } x^2 = 3$$

$$x = -2 \text{ of } x = 2 \text{ of } x = -\sqrt{3} \text{ of } x = \sqrt{3}$$

- 16** a Los de vergelijking $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$ exact op met behulp van de substitutie $x^3 = t$.
b Los de vergelijking $4(2x - 1)^2 + 8(2x - 1) - 5 = 0$ exact op met behulp van de substitutie $2x - 1 = t$.

- 17** a Los exact op door middel van ontbinden: $4p^2 - p = 0$.
b Op het blaadje is begonnen met het oplossen van de vergelijking $4 \cdot 2^{2x} - 2^x = 0$ met de substitutie $2^x = p$. Waarom is de tweede regel gelijkwaardig met de eerste?
c Door in regel 5 de p weer te vervangen door 2^x vind je de vergelijkingen $2^x = 0$ en $2^x = \frac{1}{4}$. Welke van deze twee vergelijkingen heeft geen oplossing?
d Geef de exacte oplossing van $4 \cdot 2^{2x} - 2^x = 0$.

☐	$4 \cdot 2^{2x} - 2^x = 0$		1
☐	$4 \cdot (2^x)^2 - 2^x = 0$		2
☐	Neem $2^x = p$.		
☐	$4p^2 - p = 0$		3
☐	$p(4p - 1) = 0$		4
☐	$p = 0$ of $p = \frac{1}{4}$		5
☐	$2^x = 0$ of $2^x = \frac{1}{4}$		6

- 18** Gegeven is de vergelijking $3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$.
a Welke substitutie moet je gebruiken om de vergelijking op te lossen?
b Los nu de vergelijking op.

- 19** Los exact op.

- a $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$ d $5^{2x} - 20 \cdot 5^x = 125$
b $4^{2x} - 4^x - 12 = 0$ e $(4^x - 1)(4^x + 1) = 3$
c $(2^x - 2\sqrt{2})(2^x - \frac{1}{8}) = 0$ f $2^x(2^x - 1) = 32(2^x - 1)$

- A** *abc*-formule 18
afgeleide 216
afgeleide functie 216
afgeleide waarde 216
afronden 12
afstand tussen evenwijdige lijnen 186
afstand tussen twee punten 184
afstand van een punt tot een lijn 185
algebra 14
algebraïsch 114
asymptoten 106
- B** beeldgrafiek 137
beginhoeveelheid 131
benadering 111
bereik 102
bereken exact 114
- C** constante functie 100
- D** derdemachtswortel 51
differentiaalquotiënt 214
differentie 207
differentiequotiënt 207
differentiëren 218
discriminant 18
domein 102
- E** eerstegraads functie 111
eerstegraads vergelijking 14
exponentieel groeiproses 131
exponentiële functie 133
exponentiële vergelijking 144
- F** functie 98
functievoorschrift 98
functiewaarde 98
- G** gebroken exponent 57
gebroken formules 61
gebroken functie 106
gebroken vergelijking 27
gemiddelde verandering 207
graad 111
groeifactor 130
- H** hellingfunctie 216
hellingsgetal 15
helling van een grafiek 211
herleiden 141
hoek tussen twee lijnen 176
horizontale asymptoot 107
- I** interval 103
intervalnotatie 103
- K** kwadratische functie 100
kwadratische vergelijking 18
- L** lineaire formule 166
lineaire functie 100
lineaire vergelijking 14
lineair verband 97
loodlijn 181
loodrecht 180
- M** machtsformules 61
machtsfuncties 110
middelloodlijn 182
- N** negatieve exponent 53
- O** omgekeerd evenredig verband 97
ongelijkheid 31
ontbinden in factoren 18
- R** raaklijn 211
raaklijn evenwijdig aan de x -as 224
reële getallen 102
regels voor het differentiëren 223
rekenregels voor machten 50
richtingscoëfficiënt 15
- S** somregel 223
stelsel vergelijkingen 172
substitueren 35
- T** toenamediaagram 203
transformaties 138
translatie 137
tweedegraads functie 111
tweedegraads vergelijking 18

U uitgedrukt in 34

V veeltermfunctie 111
vergelijking van een lijn 169
vermenigvuldigen ten opzichte van
de x -as 138
verticale asymptoot 107
vierdemachtswortel 51

W wortelformule 61
wortelfuncties 110
wortelvergelijking 22

Ontwerp omslag G2K, Groningen/Amsterdam

Fotografie omslag Getty Images

Ontwerp binnenwerk Ebel Kuipers, Sappemeer

Illustraties Peter Fitzverploegh, Utrecht

Technisch tekenwerk Integra Software Services, India

Beeldresearch Daliz, Den Haag

Fotoverantwoording

Google Earth: p. 6

Alamy/Image Select, Wassenaar: p. 10-11, 68, 82-83, 114, 158, 158-159, 236-237, 236l

Shutterstock, New York: p. 14, 18, 30, 48-49, 52, 56, 62, 70, 73, 79, 81, 94-95, 108, 128-129, 134, 140, 144, 149, 154, 155, 157, 164-165, 168, 172, 176, 198-199, 202, 208, 222

PO3 Spencer Roberts/Defense.gov: p. 22

E+/ Getty Images, Londen: p. 25

iStockphoto/Getty Images, Londen: p. 72

Daliz, Den Haag: p. 88-89, 212

Marcel de Vries/Nationale Beeldbank, Den Haag: p. 189

Dijkstra B.V./ANP Photo, Den Haag: p. 206

ESA/Nasa, Washington: p. 217

Universal Images Group Editorial/Getty Images, Londen: p. 236r



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.

Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.

Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.

Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.



www.modernewiskunde.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-89228-9



9 789001 892289