

MODERNE WISKUNDE

B



Noordhoff


$$h = 4,9 t^2$$

12e editie

Moderne Wiskunde

Uitwerkingen bij havo B deel 1

Ontwerp omslag G2K Designers, Groningen/Amsterdam
Ontwerp binnenwerk Ebel Kuipers, Sappemeer
Technisch tekenwerk Integra Software services Pvt. Ltd., India

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB
Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleen.

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 20

© 2020 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsenauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978 9001 89263 0

12e editie

Moderne Wiskunde

Uitwerkingen bij havo B deel 1

Bert Boon

Wim Doekes

Arjan Eikelboom

Jan Elemans

Ilse de Jong

Ron Sinkeldam

Carolijn Tacken

- H1 Vergelijkingen 6
- H2 Machtsformules 44

Vaardigheden 1 68

De grafische rekenmachine 71

- H3 Functies en grafieken 74
- H4 Exponentiële formules 99

Vaardigheden 2 125

- H5 Lijnen en afstanden 129
- H6 Afgeleide functies 159

Vaardigheden 3 188

Meer oefenen 193
Oefenproefwerken 215

1 Vergelijkingen

Voorkennis

V1 a $4\frac{5}{9} \approx 4,56$; $1\frac{7}{12} \approx 1,58$ en $\frac{12}{35} \approx 0,34$

b $\sqrt{8} = 2,8284\dots$, dus in $\sqrt{8} = 2,83$ is het gelijktteken onjuist.
 $\sqrt{8} \approx 2,828$ is waar.

V2 a Dat is fout, omdat het vijfde cijfer achter de komma een 4 is, dan moet er naar boven worden afgerond $23,237\,548 \approx 23,237\,5$.

b $832,3\,149621 \approx 832,3\,150$

V3 a $3x + 5 = 9$
 $3x = 4$
 $x = 1\frac{1}{3} \approx 1,33$

b $8 - 9p = 1$
 $9p = 7$
 $p = \frac{7}{9} \approx 0,78$

c $15 = 6q - 1$

$6q = 16$
 $q = 2\frac{2}{3} \approx 2,67$

d $35a + 12 = 4a + 3$
 $31a = -9$
 $a = -\frac{9}{31} \approx -0,29$

V4 a $y = 7(2x + 3)$
 $y = 14x + 21$

b $y = 5(18 - 4x)$
 $y = 90 - 20x$

c $y = 3x(2x + 9)$
 $y = 6x^2 + 27x$

d $y = -4x(7x + 3)$
 $y = -28x^2 - 12x$

e $y = -9x(2 - 5x)$
 $y = -18x + 45x^2$

f $y = -9x(2 - 5x^2)$
 $y = -18x + 45x^3$

V5 a $y = (x + 6)(x + 2)$
 $y = x^2 + 2x + 6x + 12$
 $y = x^2 + 8x + 12$

b $y = (x + 7)(x - 3) - 3$
 $y = x^2 - 3x + 7x - 21 - 3$
 $y = x^2 + 4x - 24$

c $y = 3x^2 + 5x(x - 2)$
 $y = 3x^2 + 5x^2 - 10x$
 $y = 8x^2 - 10x$

d $y = (3x + 9)(1 - x) + 7x$
 $y = 3x - 3x^2 + 9 - 9x + 7x$
 $y = -3x^2 + x + 9$

e $y = 6x^2 - (5x - 1)$
 $y = 6x^2 - 5x + 1$

V6 a $h = 5p^2 + 15p$
 $h = 5p(p + 3)$

b $K = -3q^2 - 27q$
 $K = -3q(q + 9)$

c $W = 26t^2 + 13t$
 $W = 13t(2t + 1)$

d $p = 5q^6 - 30q^4$
 $p = 5q^4(q^2 - 6)$

e $y = x^2 + x$
 $y = x(x + 1)$

f $L = 3m - 12m^2$
 $L = 3m(1 - 4m)$

g $a = 35p^2 - 21p$
 $a = 7p(5p - 3)$

h $k = 18u^2 - 12$
 $k = 6(3u^2 - 2)$

$$\begin{aligned} \text{V7 a } y &= x^2 + 8x + 12 \\ y &= (x + 2)(x + 6) \\ \text{b } y &= x^2 + 100x + 900 \\ y &= (x + 10)(x + 90) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } N &= t^2 - 25t - 150 \\ N &= (t + 5)(t - 30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } Q &= p^2 + p + \frac{1}{4} \\ Q &= \left(p + \frac{1}{2}\right)^2 \\ \text{e } k &= 65 - 18m + m^2 \\ k &= m^2 - 18m + 65 \\ k &= (m - 5)(m - 13) \\ \text{f } y &= 1 + x^2 + 2x \\ y &= x^2 + 2x + 1 \\ y &= (x + 1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{V8 a } p &= n^2 + 8n \\ p &= n(n + 8) \\ \text{b } u &= 6b^2 - 3b \\ u &= 3b(2b - 1) \\ \text{c } y &= 15 + 8x + x^2 \\ y &= x^2 + 8x + 15 \\ y &= (x + 3)(x + 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } w &= t^2 - 12t - 28 \\ w &= (t + 2)(t - 14) \\ \text{e } q &= -8p^2 + 8p \\ q &= -8p(p - 1) \\ \text{f } y &= 5c^2 - 15 \\ y &= 5(c^2 - 3) \end{aligned}$$

1.1 Lineaire vergelijkingen

intro De kaars is opgebrand als $12 - 0,2t = 0$ ofwel $60 - t = 0$, dus na 60 uur.
De kaars is voor de helft opgebrand na 30 uur.

$$\begin{aligned} \text{1 a } &\text{De haakjes zijn weggewerkt.} \\ \text{b } &\text{Links en rechts van het } = \text{-teken wordt } 2x \text{ opgeteld.} \\ \text{c } &-5x + 30 = 10 \\ &-5x = -20 \\ &x = \frac{-20}{-5} = 4 \\ \text{d } &3 \times 4 + 5(6 - 2 \times 4) = 14 - 4\left(\frac{1}{2} \times 4 + 1\right) \\ &12 + 5 \times -2 = 14 - 4 \times 3 \\ &12 - 10 = 14 - 12 \\ &2 = 2, \text{ klopt.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2 a } &8x - 4 = 3x + 7 \\ &5x - 4 = 7 \\ &5x = 11 \\ &x = \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5} \\ \text{b } &-12x + 6 = 3 - 5x \\ &-12x = -3 - 5x \\ &-7x = -3 \\ &x = \frac{-3}{-7} = \frac{3}{7} \\ \text{c } &\frac{1}{2}x - 5 = \frac{2}{3}x + 1 \\ &3x - 30 = 4x + 6 \\ &-x - 30 = 6 \\ &-x = 36 \\ &x = -36 \\ \text{d } &1\frac{3}{7}x + 1 = 2x - 3 \\ &10x + 7 = 14x - 21 \\ &-4x = -28 \\ &x = 7 \\ \text{e } &15 - (2x - 6) = 7x + 4 \\ &15 - 2x + 6 = 7x + 4 \\ &-2x + 21 = 7x + 4 \\ &-9x = -17 \\ &x = \frac{-17}{-9} = 1\frac{8}{9} \\ \text{f } &9x = 6x - 5(2 - 3x) \\ &9x = 6x - 10 + 15x \\ &9x = 21x - 10 \\ &-12x = -10 \\ &x = \frac{-10}{-12} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

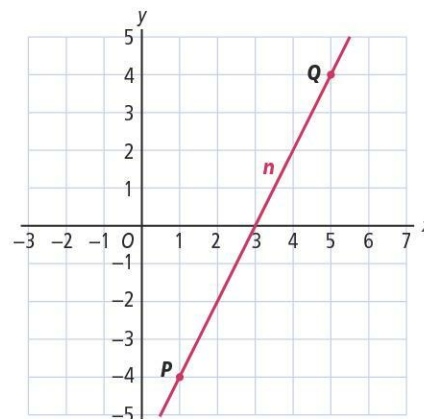
1 Vergelijkingen

g $10 - (3 + 4x) = -7x + 1$
 $10 - 3 - 4x = -7x + 1$
 $7 - 4x = -7x + 1$
 $3x = -6$
 $x = -2$

h $\frac{3}{5}x + 1\frac{7}{10} = 1\frac{1}{5}x - \frac{3}{10}$
 $6x + 17 = 12x - 3$
 $-6x = -20$
 $x = \frac{-20}{-6} = 3\frac{1}{3}$

- 3 a** Het hellingsgetal is het getal dat voor de x staat, dus $-\frac{1}{2}$
b Van $(0, 4)$ naar $(8, 0)$ is 8 naar rechts en 4 naar beneden ofwel 1 naar rechts en $\frac{1}{2}$ naar beneden.
c Van $(0, -1)$ naar $(4, 7)$ is 4 naar rechts en 8 naar boven ofwel 1 naar rechts en 2 naar boven. De richtingscoëfficiënt van lijn k is dus 2.
d Lijn k snijdt de y -as in het punt $(0, -1)$, dus het startgetal is -1 .
 De richtingscoëfficiënt van lijn k is 2, dus $k: y = 2x - 1$.
e $4 - \frac{1}{2}x = 2x - 1$
 $8 - x = 4x - 2$
 $-5x = -10$
 $x = 2$ en $y = 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 4 - 1 = 3$
 De coördinaten van het snijpunt van l en k is het punt $(2, 3)$.

- 4 a** Zie hiernaast.
b Het hellingsgetal is 2, dus $y = 2x + b$.
c De coördinaten van punt $Q(5, 4)$ invullen geeft $4 = 2 \cdot 5 + b$ ofwel $4 = 10 + b$, dus $b = -6$.
d $n: y = 2x - 6$



- 5 a** De richtingscoëfficiënt is 5, dus $y = 5x + b$.
 $(2, -3)$ invullen geeft $-3 = 5 \cdot 2 + b$, dus $b = -13$.
 $l: y = 5x - 13$
b Als x met 3 toeneemt, neemt y met 6 toe.
 De richtingscoëfficiënt is $\frac{6}{3} = 2$, dus $y = 2x + b$.
 $(1, 6)$ invullen geeft $6 = 2 \cdot 1 + b$, dus $b = 4$.
 $l: y = 2x + 4$
c Als x met 2 toeneemt, neemt y met -18 toe.
 De richtingscoëfficiënt is $\frac{-18}{2} = -9$, dus $y = -9x + b$.
 $(3, 8)$ invullen geeft $8 = -9 \cdot 3 + b$, dus $b = 35$.
 $l: y = -9x + 35$
d De richtingscoëfficiënt is -2 en het startgetal $4\frac{1}{2}$.
 $l: y = -2x + 4\frac{1}{2}$
e Als x met 15 toeneemt, neemt y met 90 toe.
 De richtingscoëfficiënt is $\frac{90}{15} = 6$ en het startgetal is 0.
 $l: y = 6x$
f Als x met 8 toeneemt, neemt y met 20 toe.
 De richtingscoëfficiënt is $\frac{20}{8} = 2\frac{1}{2}$ dus $y = 2\frac{1}{2}x + b$.
 $(-4, -2)$ invullen geeft $-2 = 2\frac{1}{2} \cdot -4 + b$, dus $b = 8$.
 $l: y = 2\frac{1}{2}x + 8$

- 6 a** $2x - 1 = 8 - 1\frac{1}{2}x$
 $3\frac{1}{2}x = 9$
 $x = \frac{18}{7} = 2\frac{4}{7}$
b Voor waarden van $x > 2\frac{4}{7}$ ligt l boven m , dus $x > 2\frac{4}{7}$

7 Voor het snijpunt van l met de x -as geldt $y = 0$.

$$-\frac{2}{3}x + 2 = 0$$

$$-2x + 6 = 0$$

$$-2x = -6$$

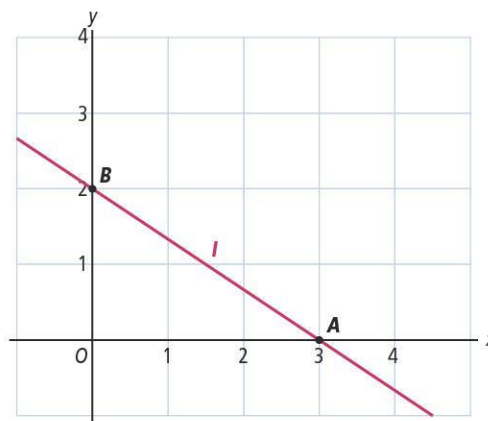
$$x = 3, \text{ dus } A(3, 0)$$

Voor het snijpunt van l met de y -as geldt $x = 0$.

$$y = -\frac{2}{3} \cdot 0 + 2$$

$$y = 2, \text{ dus } B(0, 2)$$

$$\text{Oppervlakte } \triangle OAB \text{ is } \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$$



02 a In stap 1 zijn de haakjes weggewerkt.

b $7x = 21$

$$x = 3$$

c $9 - (x - 7) = 5x + 2$

$$9 - x + 7 = 5x + 2$$

$$16 - x = 5x + 2$$

$$16 - 6x = 2$$

$$-6x = -14$$

$$x = \frac{-14}{-6} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$$

d $-11x - 4 = 9 + 2x$

$$-13x - 4 = 9$$

$$-13x = 13$$

$$x = -1$$

g $-3x - 2(2x - 8) = 5x - 6$

$$-3x - 4x + 16 = 5x - 6$$

$$-7x + 16 = 5x - 6$$

$$-12x + 16 = -6$$

$$-12x = -22$$

$$x = \frac{-22}{-12} = \frac{11}{6} = 1\frac{5}{6}$$

h $0,2x - (4 - x) = 20$

$$0,2x - 4 + x = 20$$

$$1,2x - 4 = 20$$

$$1,2x = 24$$

$$12x = 240$$

$$x = 20$$

e $2(3x - 4) = 5(4 - 3x)$

$$6x - 8 = 20 - 15x$$

$$21x - 8 = 20$$

$$21x = 28$$

$$x = \frac{28}{21} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

i $1\frac{1}{7}x - \frac{5}{14} = \frac{2}{7}x + 1\frac{3}{14}$

$$\frac{8}{7}x - \frac{5}{14} = \frac{2}{7}x + \frac{17}{14}$$

$$16x - 5 = 4x + 17$$

$$12x - 5 = 17$$

$$12x = 22$$

$$x = \frac{22}{12} = \frac{11}{6} = 1\frac{5}{6}$$

f $18x = 36 - (15 - 12x)$

$$18x = 36 - 15 + 12x$$

$$6x = 21$$

$$x = \frac{21}{6} = 3\frac{1}{2}$$

j $1\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2} = \frac{1}{3}x + 14$

$$9x + 21 = 2x + 84$$

$$7x = 63$$

$$x = 9$$

05 a m is evenwijdig aan l , dus de richtingscoëfficiënten van l en m zijn gelijk, en de richtingscoëfficiënt van l is gelijk aan -4 .

b $-8 = -12 + b$

$$b = 4$$

$$m : y = -4x + 4$$

1 Vergelijkingen

U1 a Voor het snijpunt van de lijn met de x -as geldt $y = 0$.

$$-\frac{2}{3}x + b = 0$$

$$-2x + 3b = 0$$

$$-2x = -3b$$

$$x = 1\frac{1}{2}b, \text{ dus } P(1\frac{1}{2}b, 0)$$

Voor het snijpunt van de lijn met de y -as geldt $x = 0$.

$$y = -\frac{2}{3} \cdot 0 + b$$

$$y = b, \text{ dus } Q(0, b)$$

De oppervlakte van $\triangle OPQ$ is $\frac{1}{2} \cdot b \cdot 1\frac{1}{2}b = \frac{3}{4}b^2$

$$\frac{3}{4}b^2 = 27$$

$$3b^2 = 108$$

$$b^2 = 36$$

$$b = 6 \text{ of } b = -6$$

U2 a Invullen van de coördinaten $(-2, 6)$ in de vergelijking geeft

$$2 \cdot -2 + 6a = 7$$

$$6a = 11$$

$$a = \frac{11}{6} = 1\frac{5}{6}$$

b Invullen van $S(3, 5)$ in k geeft $2 \cdot 3 + a \cdot 5 = 7$ ofwel $6 + 5a = 7$.

$$\text{Dit geeft } 5a = 1 \text{ dus } a = \frac{1}{5}$$

Invullen in m geeft $6 \cdot 3 - 5 \cdot 5 = b \cdot 3$ ofwel $18 - 25 = 3b$.

$$\text{Dit geeft } -7 = 3b \text{ dus } b = \frac{-7}{3} = -2\frac{1}{3}$$

c $b = 14$ invullen geeft m : $6x - 5y = 14x$ ofwel $-5y = 8x$ dus $y = -\frac{8}{5}x$.

De vergelijking van k kun je herleiden tot $ay = -2x + 7$ ofwel $y = \frac{-2}{a}x + \frac{7}{a}$

De lijnen snijden elkaar niet, dus k is evenwijdig met m en dus zijn de

$$\text{richtingscoëfficiënten gelijk: } -\frac{8}{5} = -\frac{2}{a}$$

Links en recht vermenigvuldigen met $-5a$ geeft $8a = 10$, dus $a = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

1.2 Kwadratische vergelijkingen

intro Op de grond geldt $h = 0$, dus $-5t^2 + 5t + 3 = 0$ oplossen.

Oplossen met de abc -formule geeft $D = 5^2 - 4 \cdot -5 \cdot 3 = 85$.

$$t = \frac{-5 - \sqrt{85}}{2 \cdot -5} \approx 1,42 \text{ of } t = \frac{-5 + \sqrt{85}}{2 \cdot -5} \approx -0,42 \text{ (hier geen betekenis)}$$

De bal komt op de grond na ongeveer 1,42 seconden, dus bij deze formule hoort geen snelle opslag.

8 a $(x - 3)(2x - 10) = 0$

$$x - 3 = 0 \text{ of } 2x - 10 = 0$$

$$x = 3 \text{ of } 2x = 10$$

$$x = 3 \text{ of } x = 5$$

b $(p - 10)(p + 3) = 0$

$$p - 10 = 0 \text{ of } p + 3 = 0$$

$$p = 10 \text{ of } p = -3$$

c Deze vergelijking is niet te ontbinden in factoren, omdat er geen twee gehele getallen zijn te vinden met product -13 en som 7 .

d $4a^2 + 24a = 0$
 $4a(a + 6) = 0$
 $4a = 0$ of $a + 6 = 0$
 $a = 0$ of $a = -6$

9 a $x^2 - x - 16 = -4$
 $x^2 - x - 12 = 0$
 $(x - 4)(x + 3) = 0$
 $x - 4 = 0$ of $x + 3 = 0$
 $x = 4$ of $x = -3$

b $x(x - 1) = 4x$
 $x^2 - x = 4x$
 $x^2 - 5x = 0$
 $x(x - 5) = 0$
 $x = 0$ of $x - 5 = 0$
 $x = 0$ of $x = 5$

c $2t^2 - 10t + 12 = 0$
 $t^2 - 5t + 6 = 0$
 $(t - 2)(t - 3) = 0$
 $t - 2 = 0$ of $t - 3 = 0$
 $t = 2$ of $t = 3$

d $(a + 7)(a - 1) = 20$
 $a^2 - a + 7a - 7 = 20$
 $a^2 + 6a - 27 = 0$
 $(a + 9)(a - 3) = 0$
 $a + 9 = 0$ of $a - 3 = 0$
 $a = -9$ of $a = 3$

e $5x^2 - x = 4$
 $5x^2 - x - 4 = 0$
 $D = (-1)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -4 = 1 + 80 = 81$
 $x = \frac{1 + \sqrt{81}}{10} = 1$ of $x = \frac{1 - \sqrt{81}}{10} = -\frac{4}{5}$

f $(4x + 2)^2 = (5 - 2x)^2$
 $16x^2 + 16x + 4 = 25 - 20x + 4x^2$
 $12x^2 + 36x - 21 = 0$
 $4x^2 + 12x - 7 = 0$
 $D = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot -7 = 256$
 $x = \frac{-12 - \sqrt{256}}{2 \cdot 4} = -3\frac{1}{2}$ of $x = \frac{-12 + \sqrt{256}}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}$

10 a $(3x + 4)^2 = 25$
 $3x + 4 = 5$ of $3x + 4 = -5$
 $3x = 1$ of $3x = -9$
 $x = \frac{1}{3}$ of $x = -3$
b $x + 5 = -3x$

11 a $(x - 8)^2 = 9$
 $x - 8 = 3$ of $x - 8 = -3$
 $x = 11$ of $x = 5$
b $(7a + 8)^2 = (a + 8)^2$
 $7a + 8 = a + 8$ of $7a + 8 = -(a + 8)$
 $6a = 0$ of $7a + 8 = -a - 8$
 $a = 0$ of $8a = -16$
 $a = 0$ of $a = -2$
c $(4 - p)^2 = (5p + 16)^2$
 $4 - p = 5p + 16$ of
 $4 - p = -(5p + 16)$
 $-6p = 12$ of $4 - p = -5p - 16$
 $p = -2$ of $4p = -20$
 $p = -2$ of $p = -5$

d $(5x + 6)^2 = x^2$
 $5x + 6 = x$ of $5x + 6 = -x$
 $4x = -6$ of $6x = -6$
 $x = -1\frac{1}{2}$ of $x = -1$
e $9p^2 = (12 - p)^2$
 $(3p)^2 = (12 - p)^2$
 $3p = 12 - p$ of $3p = -(12 - p)$
 $4p = 12$ of $3p = -12 + p$
 $p = 3$ of $2p = -12$
 $p = 3$ of $p = -6$
f $(x^2 - 5x)^2 = 36$
 $x^2 - 5x = 6$ of $x^2 - 5x = -6$
 $x^2 - 5x - 6 = 0$ of $x^2 - 5x + 6 = 0$
 $(x + 1)(x - 6) = 0$ of $(x - 2)(x - 3) = 0$
 $x = -1$ of $x = 2$ of $x = 3$ of $x = 6$

1 Vergelijkingen

12 a $x = 7$ is een oplossing, want als je $x = 7$ invult krijg je

$$4 \cdot 7(7 - 7) = 5(7 - 7)$$

$$28 \cdot 0 = 5 \cdot 0$$

$$0 = 0 \text{ en dat klopt.}$$

b $4x = 5$, dus $x = 1\frac{1}{4}$

13 a $(2x - 5)(x + 4) = 7(x + 4)$

$$x + 4 = 0 \text{ of } 2x - 5 = 7$$

$$x = -4 \text{ of } 2x = 12$$

$$x = -4 \text{ of } x = 6$$

c $x(2x - 9) = 7x^2$

$$x(2x - 9) = 7x \cdot x$$

$$x = 0 \text{ of } 2x - 9 = 7x$$

$$x = 0 \text{ of } -5x = 9$$

$$x = 0 \text{ of } x = -1\frac{4}{5}$$

b $(5t + 3)(t^2 - 4) = 5(5t + 3)$

$$5t + 3 = 0 \text{ of } t^2 - 4 = 5$$

$$5t = -3 \text{ of } t^2 = 9$$

$$t = -\frac{3}{5} \text{ of } t = -3 \text{ of } t = 3$$

d $(2x + 7)(x - 5) = (x - 5)^2$

$$(2x + 7)(x - 5) = (x - 5)(x - 5)$$

$$x - 5 = 0 \text{ of } 2x + 7 = x - 5$$

$$x = 5 \text{ of } x = -12$$

14 a $(x - 4)^2 = (5x + 6)^2$

$$x - 4 = 5x + 6 \text{ of } x - 4 = -(5x + 6)$$

$$-4x = 10 \text{ of } x - 4 = -5x - 6$$

$$x = -2\frac{1}{2} \text{ of } 6x = -2$$

$$x = -2\frac{1}{2} \text{ of } x = -\frac{1}{3}$$

e $(x - 6)^2 + 6 = 22$

$$(x - 6)^2 = 16$$

$$x - 6 = 4 \text{ of } x - 6 = -4$$

$$x = 10 \text{ of } x = 2$$

b $(t + 3)(t - 1) = 32$

$$t^2 - t + 3t - 3 = 32$$

$$t^2 + 2t - 35 = 0$$

$$(t + 7)(t - 5) = 0$$

$$t = -7 \text{ of } t = 5$$

f $x^2 = 7x$

$$x^2 - 7x = 0$$

$$x(x - 7) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 7$$

c $(t + 3)(t - 4) = 2t(t + 3)$

$$t + 3 = 0 \text{ of } t - 4 = 2t$$

$$t = -3 \text{ of } -t = 4$$

$$t = -3 \text{ of } t = -4$$

g $8x(2x + 1) = x(x - 2)$

$$x = 0 \text{ of } 8(2x + 1) = x - 2$$

$$x = 0 \text{ of } 16x + 8 = x - 2$$

$$x = 0 \text{ of } 15x = -10$$

$$x = 0 \text{ of } x = -\frac{2}{3}$$

d $8x^2 - 2x = 1$

$$8x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 8 \cdot -1 = 4 + 32 = 36$$

$$x = \frac{2 + \sqrt{36}}{16} = \frac{1}{2} \text{ of } x = \frac{2 - \sqrt{36}}{16} = -\frac{1}{4}$$

h $(4x - 10)^2 = 25x^2$

$$4x - 10 = 5x \text{ of } 4x - 10 = -5x$$

$$-10 = x \text{ of } 9x = 10$$

$$x = -10 \text{ of } x = 1\frac{1}{9}$$

011 a Anders staat er $-3 - q$ en dat is niet goed.

b $8q = 3$ of $6q = -3$

$$q = \frac{3}{8} \text{ of } q = -\frac{1}{2}$$

c $(6a - 3)^2 = (a + 3)^2$

$$6a - 3 = a + 3 \text{ of } 6a - 3 = -a - 3$$

$$5a = 6 \text{ of } 7a = 0$$

$$a = 1\frac{1}{5} \text{ of } a = 0$$

e $(2b - 3)^2 = b^2$

$$2b - 3 = b \text{ of } 2b - 3 = -b$$

$$b = 3 \text{ of } 3b = 3$$

$$b = 3 \text{ of } b = 1$$

d $(x - 4)^2 = 5^2$

$$x - 4 = 5 \text{ of } x - 4 = -5$$

$$x = 9 \text{ of } x = -1$$

f $(x - 6)^2 = 49$

$$x - 6 = 7 \text{ of } x - 6 = -7$$

$$x = 13 \text{ of } x = -1$$

$$\begin{aligned} \text{g } (2-3p)^2 &= (4p-12)^2 \\ 2-3p &= 4p-12 \text{ of} \\ 2-3p &= -4p+12 \\ -7p &= -14 \text{ of } p=10 \\ p &= 2 \text{ of } p=10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h } (x^2+5x+3)^2 &= 9 \\ x^2+5x+3 &= 3 \text{ of } x^2+5x+3 = -3 \\ x^2+5x &= 0 \text{ of } x^2+5x+6 = 0 \\ x(x+5) &= 0 \text{ of } (x+2)(x+3) = 0 \\ x &= 0 \text{ of } x = -5 \text{ of } x = -2 \text{ of } x = -3 \end{aligned}$$

013 a $2t-7=0$ of $t^2-2=7$
 $2t=7$ of $t^2=9$
 $t=3\frac{1}{2}$ of $t=-3$ of $t=3$

b $(x+3)(x-4)=2x(x+3)$
 $x+3=0$ of $x-4=2x$
 $x=-3$ of $-x=4$
 $x=-3$ of $x=-4$

c $x(5x-16)=4x^2$
 $x(5x-16)=x \cdot 4x$
 $x=0$ of $5x-16=4x$
 $x=0$ of $x=16$

d $(2x-4)(x+5)=8(x+5)$
 $x+5=0$ of $2x-4=8$
 $x=-5$ of $2x=12$
 $x=-5$ of $x=6$

e $(3x+5)(x+3)=(x+3)^2$
 $x+3=0$ of $3x+5=x+3$
 $x=-3$ of $2x=-2$
 $x=-3$ of $x=-1$

U3 a $c=1$ invullen geeft $y=x^2-4x+1$.
 De coördinaten van de snijpunten met de horizontale as bereken je door $x^2-4x+1=0$ op te lossen.
 $D=(-4)^2-4 \cdot 1 \cdot 1=16-4=12$
 $D>0$, dus de parabool heeft twee snijpunten met de x -as.

b Precies één snijpunt betekent dat $D=0$ moet zijn.
 $D=(-4)^2-4 \cdot 1 \cdot c=16-4c$
 $16-4c=0$ voor $c=4$, dus voor $c=4$

c De symmetrieas van de parabool is de lijn met vergelijking $x=2$.
 Dus A en B liggen beide op $3\frac{1}{2}:2=1\frac{3}{4}$ van de symmetrieas op de x -as.
 A is het punt $(\frac{1}{4}, 0)$ en B het punt $(3\frac{3}{4}, 0)$.
 Invullen van $A(\frac{1}{4}, 0)$ geeft $0=(\frac{1}{4})^2-4 \cdot \frac{1}{4}+c$
 $0=\frac{1}{16}-1+c$, dus $c=\frac{15}{16}$

U4 $x=5$ is een oplossing, dus $(5-2a)^2=4$
 $5-2a=-2$ of $5-2a=2$
 $-2a=-7$ of $-2a=-3$
 $a=3\frac{1}{2}$ of $a=1\frac{1}{2}$

$a=3\frac{1}{2}$ geeft $(x-7)^2=4$
 $x-7=2$ of $x-7=-2$
 $x=9$ (of $x=5$)

$a=1\frac{1}{2}$ geeft $(x-3)^2=4$
 $x-3=2$ of $x-3=-2$
 $(x=5 \text{ of } x=1)$

1.3 Wortelvergelijkingen

intro Op grotere hoogte is het kouder, dus T kleiner.

Als je in de formule voor T een kleiner getal invult, dan wordt de uitkomst v kleiner. De snelheid van het geluid is dus kleiner.

Het vliegtuig dat op 1 km hoogte vliegt heeft dus de grootste snelheid op het moment dat beiden een supersonische knal produceren.

15 a De wortel van een negatief getal bestaat niet.

b $2x - 5 \geq 0$ geeft $2x \geq 5$ dus $x \geq 2\frac{1}{2}$

c $2x - 5 = 4$

$$2x = 9$$

$$x = 4\frac{1}{2}$$

d De wortel uit een getal is nooit negatief.

e $\sqrt{6 - \frac{1}{2}x} = 3\frac{1}{2}$

$$6 - \frac{1}{2}x = \left(3\frac{1}{2}\right)^2$$

$$6 - \frac{1}{2}x = 12\frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{2}x = 6\frac{1}{4}$$

$$x = -12\frac{1}{2}$$

16 a $\sqrt{x} - 5 = 7$

$$\sqrt{x} = 12$$

$$x = 144$$

d $5 - \sqrt{6 - 3x} = 2\frac{1}{2}$

$$\sqrt{6 - 3x} = 2\frac{1}{2}$$

$$6 - 3x = 6\frac{1}{4}$$

$$-3x = \frac{1}{4}$$

$$x = -\frac{1}{12}$$

b $2 + \sqrt{3p} - 5 = 11$

$$\sqrt{3p} = 14$$

$$3p = 196$$

$$p = 65\frac{1}{3}$$

e $\sqrt{\frac{1}{3}p - 5} = \sqrt{11}$

$$\frac{1}{3}p - 5 = 11$$

$$\frac{1}{3}p = 16$$

$$p = 48$$

c $\sqrt{6 - \frac{1}{2}x} = \sqrt{3}$

$$6 - \frac{1}{2}x = 3$$

$$\frac{1}{2}x = 3$$

$$x = 6$$

f $\sqrt{35 - 2x} + 8 = 13$

$$\sqrt{35 - 2x} = 5$$

$$35 - 2x = 25$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

17 a In stap 1 is aan beide kanten x afgetrokken.

In stap 2 is aan beide kanten gekwadeerd.

b $x = (2 - x)^2$

$$x = 4 - 4x + x^2$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x - 4)(x - 1) = 0$$

$$x = 4 \text{ of } x = 1$$

controle: $x = 4$ invullen geeft $4 + \sqrt{4} = 2$, dit klopt niet.

$x = 1$ invullen geeft $1 + \sqrt{1} = 2$, dit klopt wel.

c De oplossing is $x = 1$.

18 a $9 + 3\sqrt{x} = 17$

$$3\sqrt{x} = 8$$

$$\sqrt{x} = \frac{8}{3}$$

$$x = \left(\frac{8}{3}\right)^2$$

$$x = \frac{64}{9} = 7\frac{1}{9}$$

b Bart heeft niet door 3 gedeeld, maar aan beide kanten gekwadrateerd.

$$9x = 64$$

$$x = \frac{64}{9} = 7\frac{1}{9}$$

19 a $\sqrt{x-3} + 2 = 5$

$$\sqrt{x-3} = 3$$

$$x-3 = 9$$

$$x = 12$$

controle: $\sqrt{12-3} + 2 = 5$, klopt.

De oplossing is $x = 12$.

b $2 + 4\sqrt{2x+3} = 0$

$$4\sqrt{2x+3} = -2$$

$$\sqrt{2x+3} = -\frac{1}{2}$$

Geen oplossing: een wortel kan niet negatief zijn.

c $4 - \sqrt{3-x} = 2x - 1$

$$-\sqrt{3-x} = 2x - 5$$

$$\sqrt{3-x} = -2x + 5$$

$$3-x = (-2x+5)^2$$

$$3-x = 4x^2 - 20x + 25$$

$$4x^2 - 19x + 22 = 0$$

$$D = (-19)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 22 = 9$$

$$x = \frac{19 + \sqrt{9}}{2 \cdot 4} = 2\frac{3}{4} \text{ of } x = \frac{19 - \sqrt{9}}{2 \cdot 4} = 2$$

controle: $x = 2\frac{3}{4}$ geeft $4 - \sqrt{3 - 2\frac{3}{4}} = 2 \cdot 2\frac{3}{4} - 1 \Rightarrow 3\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$, klopt niet.

$x = 2$ geeft $4 - \sqrt{3-2} = 2 \cdot 2 - 1 \Rightarrow 3 = 3$, klopt.

De oplossing is $x = 2$.

d $2\sqrt{1+x} + 4 = 7$

$$2\sqrt{1+x} = 3$$

$$\sqrt{1+x} = 1\frac{1}{2}$$

$$1+x = 2\frac{1}{4}$$

$$x = 1\frac{1}{4}$$

controle: $2\sqrt{1+1\frac{1}{4}} + 4 = 7$, klopt.

De oplossing is $x = 1\frac{1}{4}$

1 Vergelijkingen

e $\sqrt{x} = x - 6$
 $x = (x - 6)^2$
 $x = x^2 - 12x + 36$
 $x^2 - 13x + 36 = 0$
 $(x - 4)(x - 9) = 0$
 $x = 4$ of $x = 9$
controle: $x = 4$ geeft $\sqrt{4} = 4 - 6$, klopt niet.
 $x = 9$ geeft $\sqrt{9} = 9 - 6$, klopt.
De oplossing is $x = 9$.

f $\sqrt{4 + x^2} - 1 = x$
 $\sqrt{4 + x^2} = x + 1$
 $4 + x^2 = (x + 1)^2$
 $4 + x^2 = x^2 + 2x + 1$
 $2x = 3$
 $x = 1\frac{1}{2}$
controle: $\sqrt{4 + 2\frac{1}{4}} - 1 = 1\frac{1}{2}$ klopt.
De oplossing is $x = 1\frac{1}{2}$

g $\sqrt{2x^2 - x} = 3x - 2$
 $2x^2 - x = (3x - 2)^2$
 $2x^2 - x = (3x - 2)(3x - 2)$
 $2x^2 - x = 9x^2 - 12x + 4$
 $7x^2 - 11x + 4 = 0$
 $D = 11^2 - 4 \cdot 7 \cdot 4 = 9$
 $x = \frac{11 + \sqrt{9}}{2 \cdot 7} = 1$ of $x = \frac{11 - \sqrt{9}}{2 \cdot 7} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$
controle: $x = 1$ geeft $\sqrt{2 - 1} = 3 - 2$, klopt.
 $x = \frac{4}{7}$ geeft $\sqrt{\frac{32}{49} - \frac{4}{7}} = \frac{12}{7} - 2$, klopt niet.
De oplossing is $x = 1$.

h $x + \sqrt{2x + 4} = 10$
 $\sqrt{2x + 4} = 10 - x$
 $2x + 4 = (10 - x)^2$
 $2x + 4 = 100 - 20x + x^2$
 $x^2 - 22x + 96 = 0$
 $(x - 16)(x - 6) = 0$
 $x = 16$ of $x = 6$
controle: $x = 16$ geeft $16 + \sqrt{36} = 10$, klopt niet.
 $x = 6$ geeft $6 + \sqrt{16} = 10$, klopt.
De oplossing is $x = 6$.

- 20** Eerst bereken je de x -coördinaat van het snijpunt.

$$1 + \sqrt{x-3} = \frac{1}{2}x - 2$$

$$\sqrt{x-3} = \frac{1}{2}x - 3$$

$$x - 3 = \left(\frac{1}{2}x - 3\right)^2$$

$$x - 3 = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 9$$

$$\frac{1}{4}x^2 - 4x + 12 = 0$$

$$x^2 - 16x + 48 = 0$$

$$(x-4)(x-12) = 0$$

$$x = 4 \text{ of } x = 12$$

controle: $x = 4$ geeft $1 + \sqrt{4-3} = \frac{1}{2} \cdot 4 - 2$ ofwel $2 = 0$, klopt niet.

$x = 12$ geeft $1 + \sqrt{12-3} = \frac{1}{2} \cdot 12 - 2$, klopt wel.

De x -coördinaat van het snijpunt is dus 12.

De y -coördinaat is $y = \frac{1}{2} \cdot 12 - 2 = 4$

De coördinaten van het snijpunt zijn (12, 4).

- 21** Eerst de coördinaten van P berekenen:

$$x\sqrt{x+18} = 2x$$

$$x = 0 \text{ of } \sqrt{x+18} = 2$$

$$x = 0 \text{ of } x + 18 = 4$$

$$x = 0 \text{ of } x = -14$$

$$P(-14, -28)$$

$$OP = \sqrt{14^2 + 28^2} = \sqrt{980}$$

- 016 a** Er is een bordje gelegd op $\sqrt{2-p}$.

- b** Er is aan beide kanten gekwadrateerd.

c $2 - p = 4$

$$p = -2$$

d $\sqrt{x-17} = 5$

$$x - 17 = 25$$

$$x = 42$$

g $\sqrt{\frac{1}{7}q - 4} = \sqrt{8}$

$$\frac{1}{7}q - 4 = 8$$

$$\frac{1}{7}q = 12$$

$$q = 84$$

e $1 + \sqrt{5q-4} = 7$

$$\sqrt{5q-4} = 6$$

$$5q - 4 = 36$$

$$5q = 40$$

$$q = 8$$

f $\sqrt{7-8x} = \sqrt{55}$

$$7 - 8x = 55$$

$$8x = -48$$

$$x = -6$$

i $1 + \sqrt{2x-3} = 8$

$$\sqrt{2x-3} = 7$$

$$2x - 3 = 49$$

$$2x = 52$$

$$x = 26$$

- 019 a** Er staan haakjes, omdat je de hele vorm moet kwadrateren.

b $2x + 3 = 36 - 12x + x^2$

$$x^2 - 14x + 33 = 0$$

$$(x-3)(x-11) = 0$$

$$x = 3 \text{ of } x = 11$$

controle: $3 + \sqrt{2 \cdot 3 + 3} = 6$ ofwel $3 + \sqrt{9} = 6$, klopt.

$11 + \sqrt{2 \cdot 11 + 3} = 6$ ofwel $11 + \sqrt{25} = 6$, klopt niet.

De oplossing is $x = 3$

1 Vergelijkingen

c $\sqrt{4x-3} + 2 = 3$

$$\sqrt{4x-3} = 1$$

$$4x - 3 = 1$$

$$4x = 4$$

$$x = 1$$

controle: $\sqrt{4 \cdot 1 - 3} + 2 = 3$, klopt.

De oplossing is $x = 1$

d $6 - \sqrt{7x+3} = 0$

$$\sqrt{7x+3} = 6$$

$$7x + 3 = 36$$

$$7x = 33$$

$$x = \frac{33}{7} = 4\frac{5}{7}$$

controle: $6 - \sqrt{7 \cdot 4\frac{5}{7} + 3} = 6 - \sqrt{36} = 0$, klopt.

De oplossing is $x = 4\frac{5}{7}$

e $3\sqrt{1-x} = 1\frac{1}{2}x + 3$

$$\sqrt{1-x} = \frac{1}{2}x + 1$$

$$1-x = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2$$

$$1-x = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$$

$$\frac{1}{4}x^2 + 2x = 0$$

$$\frac{1}{4}x(x+8) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -8$$

controle: $3\sqrt{1-0} = 1\frac{1}{2} \cdot 0 + 3$ ofwel $3\sqrt{1} = 3$, klopt.

$3\sqrt{1-(-8)} = 1\frac{1}{2} \cdot (-8) + 3$ ofwel $3\sqrt{9} = -12 + 3$, klopt niet.

De oplossing is $x = 0$

f $3 + \sqrt{x+17} = x$

$$\sqrt{x+17} = x-3$$

$$x+17 = (x-3)^2$$

$$x+17 = x^2 - 6x + 9$$

$$x^2 - 7x - 8 = 0$$

$$(x+1)(x-8) = 0$$

$$x = -1 \text{ of } x = 8$$

controle: $3 + \sqrt{-1+17} = -1$ ofwel $3 + \sqrt{16} = -1$, klopt niet.

$3 + \sqrt{8+17} = 8$ ofwel $3 + \sqrt{25} = 8$, klopt.

De oplossing is $x = 8$

g $5\sqrt{4-x} = x+2$

$$25(4-x) = (x+2)^2$$

$$100 - 25x = x^2 + 4x + 4$$

$$x^2 + 29x - 96 = 0$$

$$(x+32)(x-3) = 0$$

$$x = -32 \text{ of } x = 3$$

controle: $5\sqrt{4-(-32)} = -32+2$ ofwel $5 \cdot \sqrt{36} = -30$, klopt niet

$5\sqrt{4-3} = 3+2$ ofwel $5 \cdot \sqrt{1} = 5$, klopt.

De oplossing is $x = 3$

$$\begin{aligned} \text{h} \quad & \sqrt{5+x^2} - 1 = x \\ & \sqrt{5+x^2} = x+1 \\ & 5+x^2 = (x+1)^2 \\ & 5+x^2 = x^2+2x+1 \\ & 2x = 4 \\ & x = 2 \end{aligned}$$

controle: $\sqrt{5+4} - 1 = 2$ ofwel $\sqrt{9} - 1 = 2$, klopt.

De oplossing is $x = 2$

$$\begin{aligned} \text{i} \quad & \sqrt{4x^2+3x} = 3x+4 \\ & 4x^2+3x = (3x+4)^2 \\ & 4x^2+3x = 9x^2+24x+16 \\ & 5x^2+21x+16 = 0 \end{aligned}$$

$$D = 21^2 - 4 \cdot 5 \cdot 16 = 121, \text{ dus } \sqrt{D} = 11$$

$$x = \frac{-21+11}{10} = -1 \text{ of } x = \frac{-21-11}{10} = -\frac{32}{10} = -3\frac{1}{5}$$

controle: $\sqrt{4 \cdot (-1)^2 + 3} = 3 \cdot (-1) + 4$ ofwel $\sqrt{4 \cdot 1 + 3} = -3 + 4$, klopt.

$\sqrt{4 \cdot (-3\frac{1}{5})^2 + 3} = 3 \cdot -3\frac{1}{5} + 4$ geeft rechts van het = teken een negatief getal, klopt dus niet.

De oplossing is $x = -1$

U5 Voor vliegtuig A geldt: $336,5 = 20\sqrt{273+T}$

$$336,5^2 = 400(273+T)$$

$$273+T = \frac{336,5^2}{400} \approx 283, \text{ dus } T \approx 10 \text{ }^\circ\text{C}$$

Vliegtuig B vliegt 8000 m hoger. Daar is de temperatuur $80 \text{ }^\circ\text{C}$ lager, dus $T = -70 \text{ }^\circ\text{C}$.

De snelheid van vliegtuig B is $20\sqrt{273-70} \approx 285 \text{ m/s}$.

1.4 Gebroken vergelijkingen

intro De teller x is altijd groter dan de noemer $x-4$, dus zal er nooit 1 uit de deling komen. Voor $x=4$ wordt de noemer nul en delen door nul kan niet.

22 a Als $x=5$ is de noemer nul en delen door nul is onmogelijk.

b Nee, er zijn geen andere waarden van x waardoor de formule geen uitkomst heeft.

$$\text{c} \quad 3x - 15 = 12$$

$$3x = 27$$

$$x = 9$$

$$\text{d} \quad \frac{120}{3x-15} = 6$$

$$3x-15 = 20$$

$$3x = 35$$

$$x = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}$$

$$\frac{120}{3x-15} = 15$$

$$3x-15 = 8$$

$$3x = 23$$

$$x = \frac{23}{3} = 7\frac{2}{3}$$

1 Vergelijkingen

- 23 a** $\frac{18}{7x+2} = 3$
 $7x+2 = 6$
 $7x = 4$
 $x = \frac{4}{7}$
- b** $\frac{-35}{10-3m} = 5$
 $10-3m = -7$
 $-3m = -17$
 $m = \frac{-17}{-3} = 5\frac{2}{3}$
- c** $\frac{56}{x^2+3} = 7$
 $x^2+3 = 8$
 $x^2 = 5$
 $x = -\sqrt{5}$ of $x = \sqrt{5}$
- d** $\frac{125}{6p-3} = -25$
 $6p-3 = -5$
 $6p = -2$
 $p = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$
- e** $\frac{30}{16-2p^2} - 2\frac{1}{2} = 5$
 $\frac{30}{16-2p^2} = 7\frac{1}{2}$
 $16-2p^2 = 4$
 $2p^2 = 12$
 $p^2 = 6$
 $p = -\sqrt{6}$ of $p = \sqrt{6}$
- f** $\frac{-45}{5t+3} + 1 = 10$
 $\frac{-45}{5t+3} = 9$
 $5t+3 = -5$
 $5t = -8$
 $t = \frac{-8}{5} = -1\frac{3}{5}$
- 24 a** Voor $x = -2\frac{1}{2}$, want dan is de noemer nul en delen door nul is niet mogelijk.
b De berekening van Fien is onjuist voor $x = -2\frac{1}{2}$
c $150 = 12x^2 + 30x$
 $12x^2 + 30x - 150 = 0$
 $D = 30^2 - 4 \cdot 12 \cdot -150 = 8100$
 $x = \frac{-30 + \sqrt{8100}}{2 \cdot 12} = 2\frac{1}{2}$ of $x = \frac{-30 - \sqrt{8100}}{2 \cdot 12} = -5$
- 25 a** $\frac{3}{x-2} = \frac{x}{x+2}$
 $\frac{3}{x-2} \cdot (x-2) \cdot (x+2) = \frac{x}{x+2} \cdot (x-2) \cdot (x+2)$
 $3(x+2) = x(x-2)$
 $3x+6 = x^2-2x$
b Voor $x = 2$ en $x = -2$ zijn de noemers nul en delen door nul is niet mogelijk.
c $3x+6 = x^2-2x$
 $x^2-5x-6 = 0$
 $(x-6)(x+1) = 0$
 $x-6 = 0$ of $x+1 = 0$
 $x = 6$ of $x = -1$

26 a $\frac{2}{3x-1} = \frac{x}{3x-2}$
 $2(3x-2) = x(3x-1)$
mits $x \neq \frac{1}{3}$ en $x \neq \frac{2}{3}$
 $6x-4 = 3x^2-x$
 $3x^2-7x+4=0$
 $D = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 1$
 $x = \frac{7+\sqrt{1}}{2 \cdot 3} = 1\frac{1}{3}$ of $x = \frac{7-\sqrt{1}}{2 \cdot 3} = 1$

b $\frac{18}{3x-1} = x$
 $18x = x(3x-1)$ mits $x \neq \frac{1}{3}$
 $18x = 3x^2 - x$
 $3x^2 - 19x = 0$
 $x(3x-19) = 0$
 $x = 0$ of $3x-19 = 0$
 $x = 0$ of $3x = 19$
 $x = 0$ of $x = \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}$

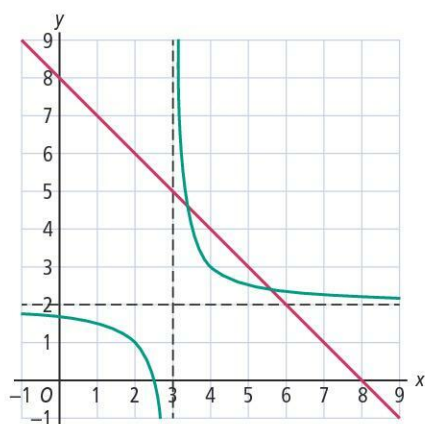
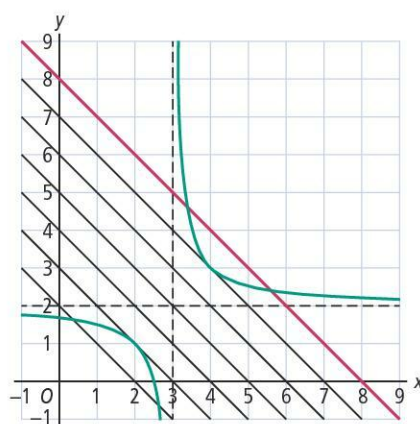
c $\frac{2x}{x-4} + 6 = 2x$
 $\frac{2x}{x-4} = 2x-6$
 $2x = (2x-6)(x-4)$ mits $x \neq 4$
 $2x = 2x^2 - 8x - 6x + 24$
 $2x^2 - 16x + 24 = 0$
 $x^2 - 8x + 12 = 0$
 $(x-6)(x-2) = 0$
 $x-6 = 0$ of $x-2 = 0$
 $x = 6$ of $x = 2$

d $x+10 = \frac{80}{x-8} + 2$
 $x+8 = \frac{80}{x-8}$
 $(x+8)(x-8) = 80$, mits $x \neq 8$
 $x^2 - 64 = 80$
 $x^2 = 144$
 $x = -12$ of $x = 12$

e $\frac{x-4}{x+6} = \frac{x+3}{x-1}$
 $(x-4)(x-1) = (x+3)(x+6)$
mits $x \neq -6$ en $x \neq 1$
 $x^2 - 5x + 4 = x^2 + 9x + 18$
 $-14x = 14$
 $x = -1$

f $\frac{1}{x} = \frac{4}{x^2}$
 $x^2 = 4x$ mits $x \neq 0$
 $x^2 - 4x = 0$
 $x(x-4) = 0$
 $x = 0$ of $x = 4$
aangezien $x \neq 0$ is de enige oplossing $x = 4$.

- 27 a** $l: y = 8 - x$ heeft startgetal 8 en richtingscoëfficiënt -1 .
Deze lijn is hieronder getekend en heeft twee snijpunten met de gegeven grafiek.



1 Vergelijkingen

- b** Op de vorige pagina zijn in de rechter figuur de lijnen

$y = 7 - x, y = 6 - x, y = 5 - x, y = 4 - x, y = 3 - x$ en $y = 2 - x$ getekend.

Het lijkt erop dat de lijnen $y = 7 - x$ en $y = 3 - x$ precies één punt met de grafiek gemeenschappelijk hebben. De eerste (4, 3) en de tweede (2, 1).

Om na te gaan of dat juist is, los je de vergelijkingen

$$2 + \frac{1}{x-3} = 7 - x \text{ en } 2 + \frac{1}{x-3} = 3 - x \text{ op.}$$

$$2 + \frac{1}{x-3} = 7 - x$$

$$\frac{1}{x-3} = 5 - x$$

$$1 = (5 - x)(x - 3), \text{ mits } x \neq 3$$

$$1 = 5x - 15 - x^2 + 3x$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$(x - 4)^2 = 0$$

$$x = 4$$

$$2 + \frac{1}{x-3} = 3 - x$$

$$\frac{1}{x-3} = 1 - x$$

$$1 = (1 - x)(x - 3), \text{ mits } x \neq 3$$

$$1 = x - 3 - x^2 + 3x$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$x = 2$$

Beide lijnen hebben dus precies één punt met de grafiek gemeenschappelijk.

Dus $a = 7$ en $a = 3$

- 023 a** In stap 1 is er links en rechts 2 opgeteld.

- b** Op de puntjes moet het getal 5 staan, want $15 : 5 = 3$.

- c** $8 - 3m = 5$

$$3m = 3$$

$$m = 1$$

- d** $\frac{24}{2-x} = 8$

$$2 - x = 3$$

$$x = -1$$

- g** $\frac{63}{p^2+3} = 9$

$$p^2 + 3 = 7$$

$$p^2 = 4$$

$$p = -2 \text{ of } p = 2$$

- e** $\frac{-33}{10-2a} = 11$

$$10 - 2a = -3$$

$$2a = 13$$

$$a = 6\frac{1}{2}$$

- h** $\frac{15}{5x-3} = 3$

$$5x - 3 = 5$$

$$5x = 8$$

$$x = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$$

- f** $\frac{28}{3-2x} + 3 = 7$

$$\frac{28}{3-2x} = 4$$

$$3 - 2x = 7$$

$$-2x = 4$$

$$x = -2$$

- i** $\frac{36}{(x-2)^2} - 3 = 1$

$$\frac{36}{(x-2)^2} = 4$$

$$(x-2)^2 = 9$$

$$x - 2 = -3 \text{ of } x - 2 = 3$$

$$x = -1 \text{ of } x = 5$$

- 026 a** In stap 1 is links en rechts van het gelijkteken $\frac{1}{3}$ afgetrokken.

- b** De regel: uit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ volgt $A \cdot D = B \cdot C$ mits $B \neq 0$ en $D \neq 0$.

- c** $3(x + 1) = 2(x - 1)$ mits $x \neq 1$

$$3x + 3 = 2x - 2$$

$$x = -5$$

$$\begin{aligned} \text{d} \quad \frac{6x}{2x-3} &= x \\ 6x &= x(2x-3) \text{ mits } x \neq 1\frac{1}{2} \\ 6x &= 2x^2 - 3x \\ 2x^2 - 9x &= 0 \\ 2x(x - 4\frac{1}{2}) &= 0 \\ x &= 0 \text{ of } x = 4\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e} \quad \frac{3-x}{x} &= 2x+4 \\ 3-x &= x(2x+4) \text{ mits } x \neq 0 \\ 3-x &= 2x^2+4x \\ 2x^2+5x-3 &= 0 \\ D &= 25-4 \cdot 2 \cdot -3 = 49 \\ x &= \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} \text{ of } x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} \\ x &= \frac{1}{2} \text{ of } x = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f} \quad \frac{x+1}{x} &= \frac{2x+2}{x+1} \\ (x+1)^2 &= x(2x+2) \\ \text{mits } x &\neq 0 \text{ en } x \neq -1 \\ x^2+2x+1 &= 2x^2+2x \\ x^2 &= 1 \\ x &= 1 \text{ (} x = -1 \text{ voldoet niet)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g} \quad \frac{x-2}{x+3} &= \frac{x+6}{x-2} \\ (x-2)^2 &= (x+3)(x+6) \\ \text{mits } x &\neq -3 \text{ en } x \neq 2 \\ x^2-4x+4 &= x^2+9x+18 \\ -13x &= 14 \\ x &= -\frac{14}{13} = -1\frac{1}{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h} \quad \frac{x^2}{x-1} &= 3x \\ x^2 &= 3x(x-1) \text{ mits } x \neq 1 \\ x^2 &= 3x^2-3x \\ 2x^2-3x &= 0 \\ x(2x-3) &= 0 \\ x &= 0 \text{ of } 2x-3=0 \\ x &= 0 \text{ of } x = 1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i} \quad \frac{\frac{1}{3}x+3}{x} &= \frac{3-x}{6x} \\ 6x(\frac{1}{3}x+3) &= x(3-x) \text{ mits } x \neq 0 \\ 2x^2+18x &= 3x-x^2 \\ 3x^2+15x &= 0 \\ 3x(x+5) &= 0 \\ x &= -5 \text{ (} x = 0 \text{ voldoet niet)} \end{aligned}$$

U6 Los de vergelijking $2 - \frac{x}{x-1} = ax - 2$ op.

$$\begin{aligned} -\frac{x}{x-1} &= ax-4 \\ -x &= (x-1)(ax-4) \text{ mits } x \neq 1 \\ -x &= ax^2 - ax - 4x + 4 \\ ax^2 - ax - 3x + 4 &= 0 \\ ax^2 + (-a-3)x + 4 &= 0 \\ \text{Deze vergelijking heeft precies één oplossing als } D &= 0. \\ (-a-3)^2 - 4 \cdot a \cdot 4 &= 0 \\ a^2 + 6a + 9 - 16a &= 0 \\ a^2 - 10a + 9 &= 0 \\ (a-1)(a-9) &= 0 \end{aligned}$$

Dus voor $a = 1$ of $a = 9$ heeft de lijn $y = ax - 2$ precies één snijpunt met de grafiek.

1.5 Ongelijkheden

intro Je moet hiervoor eerst de vergelijking $-\frac{1}{12}a(a-18) = 6$ oplossen.

$$\begin{aligned} a(a-18) &= -72 \\ a^2 - 18a + 72 &= 0 \\ (a-6)(a-12) &= 0 \\ a &= 6 \text{ of } a = 12 \end{aligned}$$

De balk mag maximaal $12 - 6 = 6$ meter lang zijn.

1 Vergelijkingen

- 28 a** $x^2 - 3x - 2 = 2$
 $x^2 - 3x - 4 = 0$
 $(x - 4)(x + 1) = 0$
 $x = 4$ of $x = -1$
- b** Uit de grafiek blijkt dat de uitkomst kleiner dan 2 is voor $-1 < x < 4$.

- 29 a** $-x^2 + 6x - 3 = x^2 - 5x + 6$
 $2x^2 - 11x + 9 = 0$
 $D = (-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 49$
 $x = \frac{11 + \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{18}{4} = 4\frac{1}{2}$ of $x = \frac{11 - \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{4}{4} = 1$
- b** Uit de grafiek blijkt dat dit geldt voor $1 < x < 4\frac{1}{2}$.

- 30 a** $-x^2 + 7x = 0$
 $x(-x + 7) = 0$
 $x = 0$ of $-x + 7 = 0$
 $x = 0$ of $x = 7$
Uit de grafiek blijkt dat de ongelijkheid geldt voor $0 < x < 7$.
- b** $2x + 4 = 0$
 $-2x = -4$
 $x = -2$
Uit de grafiek blijkt dat de ongelijkheid geldt voor $x \leq -2$.
- c** $2x + 4 = -x^2 + 7x$
 $x^2 - 5x + 4 = 0$
 $(x - 1)(x - 4) = 0$
 $x - 1 = 0$ of $x - 4 = 0$
 $x = 1$ of $x = 4$
Uit de grafiek blijkt dat de ongelijkheid geldt voor $x \leq 1$ of $x \geq 4$.

- 31 a** De wortelformule heeft uitkomsten voor $x \geq 1$.
- b** $\sqrt{x - 1} = 3$
 $x - 1 = 9$
 $x = 10$
- c** Uit de grafiek blijkt dat de ongelijkheid geldt voor $1 \leq x < 10$.

- 32** $\sqrt{x - 1}$ bestaat alleen voor $x \geq 1$.
 $-2 + 3\sqrt{x - 1} = -x + 9$
 $3\sqrt{x - 1} = -x + 11$
 $9(x - 1) = (-x + 11)^2$
 $9x - 9 = x^2 - 22x + 121$
 $x^2 - 31x + 130 = 0$
 $(x - 5)(x - 26) = 0$
 $x = 26$ of $x = 5$
controle: $-2 + 3\sqrt{26 - 1} = -26 + 9$ ofwel $-2 + 3 \cdot 5 = -17$, klopt niet.
 $-2 + 3\sqrt{5 - 1} = -5 + 9$ ofwel $-2 + 3 \cdot 2 = 4$, klopt.
De oplossing van de vergelijking is $x = 5$.
Uit de grafiek blijkt dat de ongelijkheid geldt voor $1 \leq x \leq 5$.

33 a $\sqrt{6-x}$ bestaat alleen voor $x \leq 6$.

$$\sqrt{6-x} = \sqrt{x^2+4}$$

$$6-x = x^2+4$$

$$x^2+x-2=0$$

$$(x+2)(x-1)=0$$

$$x = -2 \text{ of } x = 1 \text{ (beide voldoen)}$$

b Uit de grafiek blijkt dat de ongelijkheid geldt voor $-2 \leq x \leq 1$.

c $2x - \frac{1}{2} < 0$

$$2x - \frac{1}{2} = 0$$

$$2x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{4}$$

Uit de grafiek blijkt dat de ongelijkheid geldt voor $x < \frac{1}{4}$.

d $\sqrt{6-x}$ bestaat alleen voor $x \leq 6$.

$$\sqrt{6-x} = 10$$

$$6-x = 100$$

$$x = -94$$

Uit de grafiek blijkt dat de ongelijkheid geldt voor $-94 \leq x \leq 6$.

34 a $\sqrt{x+2}$ bestaat alleen voor $x \geq -2$.

$$-1 - x + 4\sqrt{x+2} = 3$$

$$4\sqrt{x+2} = 4 + x$$

$$16(x+2) = (4+x)^2$$

$$16x + 32 = 16 + 8x + x^2$$

$$x^2 - 8x - 16 = 0$$

$$D = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot -16 = 128, \sqrt{D} = \sqrt{128} = \sqrt{64 \cdot 2} = 8\sqrt{2}$$

$$x = \frac{8 + 8\sqrt{2}}{2 \cdot 1} = 4 + 4\sqrt{2} \text{ of } x = \frac{8 - 8\sqrt{2}}{2 \cdot 1} = 4 - 4\sqrt{2}$$

Uit de grafiek blijkt dat de ongelijkheid geldt voor $4 - 4\sqrt{2} \leq x \leq 4 + 4\sqrt{2}$.

b $\sqrt{x+2}$ bestaat alleen voor $x \geq -2$.

$$-1 - x + 4\sqrt{x+2} = 4$$

$$4\sqrt{x+2} = 5 + x$$

$$16(x+2) = (5+x)^2$$

$$16x + 32 = 25 + 10x + x^2$$

$$x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$(x+1)(x-7) = 0$$

$$x = -1 \text{ of } x = 7$$

Uit de grafiek blijkt dat de ongelijkheid geldt voor $-2 \leq x < -1$ of $x > 7$.

c De grafiek van $y = -1 - x + 4\sqrt{x+2}$ ligt in zijn geheel onder de grafiek van $y = 6$, dus de ongelijkheid $-1 - x + 4\sqrt{x+2} > 6$ heeft geen oplossing.

032 a op of hoger

b De formule heeft een uitkomst voor waarden van $x \geq 0$.

c $2\sqrt{x} = x - 3$

$$4x = (x-3)^2$$

$$4x = x^2 - 6x + 9$$

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$(x-1)(x-9) = 0$$

$$x = 1 \text{ of } x = 9$$

controle: $2\sqrt{1} = 1 - 3$, klopt niet.

$$2\sqrt{9} = 9 - 3, \text{ klopt.}$$

De oplossing is $x = 9$

1 Vergelijkingen

- d** Omdat de formule alleen een uitkomst heeft voor waarden van $x \geq 0$.
e $0 \leq x \leq 9$

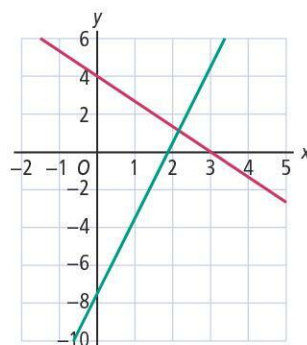
U7 De snijpunten van de grafieken liggen bij $x = -8$ en $x = 4$.
 $x = -8$ geeft $y = 15 - 2\sqrt{8 - (-8)} = 7$, dus snijpunt $(-8, 7)$.
 $x = 4$ geeft $y = 15 - 2\sqrt{8 - 4} = 11$, dus snijpunt $(4, 11)$.
De lijn $y = ax + b$ gaat door de punten $(-8, 7)$ en $(4, 11)$.
De richtingscoëfficiënt $a = \frac{11 - 7}{4 - (-8)} = \frac{1}{3}$
 $(4, 11)$ invullen in $y = \frac{1}{3}x + b$ geeft $11 = \frac{1}{3} \cdot 4 + b$, dus $b = 9\frac{2}{3}$

- U8 a** $y_1 = y_2$ geeft $0,5x(x - 2)(x - 6) = x(x - 6)$
 $x(x - 6) = 0$ of $0,5(x - 2) = 1$
 $x = 0$ of $x = 6$ of $x - 2 = 2$
 $x = 0$ of $x = 6$ of $x = 4$
Uit de grafiek blijkt dat de ongelijkheid geldt voor $x \leq 0$ of $4 \leq x \leq 6$.
b $y_1 \cdot y_2 \leq 0$ als $y_1 \leq 0$ en $y_2 \geq 0$ of als $y_1 \geq 0$ en $y_2 \leq 0$.
 $y_1 = 0$ geeft $x = 0$ of $x = 2$ of $x = 6$ en $y_2 = 0$ geeft $x = 0$ of $x = 6$.
Uit de grafiek blijkt dat de ongelijkheid geldt voor $x \leq 2$.

1.6 Herleiden

intro Vermenigvuldig je $y = 4 - \frac{2}{3}x$ links en rechts met 3, dan krijg je de vergelijking
 $3y = 12 - 2x$ ofwel $2x + 3y = 12$.
Deel je bij de vergelijking $2x + 3y = 12$ links en rechts door 12, dan krijg
je de vergelijking $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$. Bij de drie vergelijkingen hoort dezelfde lijn.

- 35 a** De tabel aanvullen met $-3\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, $8\frac{1}{2}$
b $-2y = -8x + 15$
c $y = 4x - 7\frac{1}{2}$
d $3y + 4x = 12$
 $3y = -4x + 12$
 $y = -1\frac{1}{3}x + 4$
De lijn gaat door $(0, 4)$ en $(3, 0)$.



- 36 a** $8p - 4q = 9$
 $-4q = -8p + 9$
 $q = 2p - 2\frac{1}{4}$
b $p + q = 0$
 $q = -p$
c $15p = 3q + 27$
 $3q = 15p - 27$
 $q = 5p - 9$
d $18q - 12 = 3p + 2(q - 1)$
 $18q - 12 = 3p + 2q - 2$
 $16q = 3p + 10$
 $q = \frac{3}{16}p + \frac{5}{8}$
e $3(q + 1) = 6p + 5$
 $3q + 3 = 6p + 5$
 $3q = 6p + 2$
 $q = 2p + \frac{2}{3}$
f $10p - 4q = 6p + 12$
 $-4q = -4p + 12$
 $q = p - 3$

$$\begin{aligned} 37 \text{ a } \frac{3}{b} &= 7a + 5 \\ 3 &= b \cdot (7a + 5) \\ b &= \frac{3}{7a + 5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } 8 + \frac{6}{b} &= 7a - 6 \\ \frac{6}{b} &= 7a - 14 \\ 6 &= b \cdot (7a - 14) \\ b &= \frac{6}{7a - 14} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } a &= \sqrt{b + 1} \\ a^2 &= b + 1 \\ b &= a^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } 2a &= \frac{8}{b + 4} \\ 2a \cdot (b + 4) &= 8 \\ b + 4 &= \frac{8}{2a} \\ b &= \frac{8}{2a} - 4 \\ b &= \frac{4}{a} - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } a - 9 &= \frac{16}{b - 4} \\ (a - 9)(b - 4) &= 16 \\ b - 4 &= \frac{16}{a - 9} \\ b &= \frac{16}{a - 9} + 4 \\ \text{f } a + 3 &= \sqrt{b - 2} \\ (a + 3)^2 &= b - 2 \\ b &= (a + 3)^2 + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 38 \text{ a } y &= 3(7x - 2) + 5 \\ y &= 21x - 6 + 5 \\ y &= 21x - 1 \\ \text{b } m &= 2a + 6 \text{ invullen in } b = 8m - 10 \text{ geeft} \\ b &= 8(2a + 6) - 10 \\ b &= 16a + 48 - 10 \\ b &= 16a + 38 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 39 \text{ a } y &= -5(19x + 18) + 89 \\ y &= -95x - 90 + 89 \\ y &= -95x - 1 \\ \text{b } y &= 8(5 - 2x) + 10 \\ y &= 40 - 16x + 10 \\ y &= -16x + 50 \\ \text{c } y &= 6 - 3(x^2 + 4) \\ y &= 6 - 3x^2 - 12 \\ y &= -3x^2 - 6 \\ \text{d } y &= (3x + 1)^2 + 9 \\ y &= 9x^2 + 6x + 1 + 9 \\ y &= 9x^2 + 6x + 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 40 \text{ a } p^2 + 5p + 6 &= 0 \\ \text{b } (p + 2)(p + 3) &= 0 \\ p + 2 &= 0 \text{ of } p + 3 = 0 \\ p &= -2 \text{ of } p = -3 \\ \text{c } 3x - 7 &= -2 \text{ of } 3x - 7 = -3 \\ 3x &= 5 \text{ of } 3x = 4 \\ x &= 1\frac{2}{3} \text{ of } x = 1\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 41 \text{ a } p^2 - 13p + 36 &= 0 \\ (p - 4)(p - 9) &= 0 \\ p &= 4 \text{ of } p = 9 \\ \text{b } x^2 &= 4 \text{ of } x^2 = 9 \\ x &= 2 \text{ of } x = -2 \text{ of } x = 3 \text{ of } x = -3 \end{aligned}$$

42 a $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$

Substitutie $x^2 = p$ geeft

$$p^2 - 17p + 16 = 0$$

$$(p - 1)(p - 16) = 0$$

$$p = 1 \text{ of } p = 16$$

Omdat $p = x^2$ geldt

$$x^2 = 1 \text{ of } x^2 = 16$$

$$x = -1 \text{ of } x = 1 \text{ of}$$

$$x = -4 \text{ of } x = 4$$

b $(x^2 - 3)^2 - 5(x^2 - 3) = 6$

Substitutie $x^2 - 3 = p$ geeft

$$p^2 - 5p - 6 = 0$$

$$(p + 1)(p - 6) = 0$$

$$p = -1 \text{ of } p = 6$$

Omdat $p = x^2 - 3$ geldt

$$x^2 - 3 = -1 \text{ of } x^2 - 3 = 6$$

$$x^2 = 2 \text{ of } x^2 = 9$$

$$x = -\sqrt{2} \text{ of } x = \sqrt{2} \text{ of}$$

$$x = -3 \text{ of } x = 3$$

c $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$

Substitutie $x^2 = p$ geeft

$$p^2 - 24p - 25 = 0$$

$$(p - 25)(p + 1) = 0$$

$$p = 25 \text{ of } p = -1$$

Omdat $p = x^2$ geldt

$$x^2 = 25 \text{ of } x^2 = -1$$

$$x = -5 \text{ of } x = 5$$

d $3x^4 - 8x^2 + 5 = 0$

Substitutie $x^2 = p$ geeft

$$3p^2 - 8p + 5 = 0$$

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 64 - 60 = 4$$

$$p = \frac{8 + \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = 1\frac{2}{3} \text{ of } p = \frac{8 - \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = 1$$

Omdat $p = x^2$ geldt

$$x^2 = 1\frac{2}{3} \text{ of } x^2 = 1$$

$$x = \sqrt{1\frac{2}{3}} \text{ of } x = -\sqrt{1\frac{2}{3}} \text{ of } x = 1 \text{ of } x = -1$$

e $(2x + 5)^2 + 3(2x + 5) = 18$

Substitutie $2x + 5 = p$ geeft

$$p^2 + 3p - 18 = 0$$

$$(p + 6)(p - 3) = 0$$

$$p = -6 \text{ of } p = 3$$

Omdat $p = 2x + 5$ geldt

$$2x + 5 = -6 \text{ of } 2x + 5 = 3$$

$$2x = -11 \text{ of } 2x = -2$$

$$x = -5\frac{1}{2} \text{ of } x = -1$$

f $(1 - 2x)^4 - 2(1 - 2x)^2 = 8$

Substitutie $(1 - 2x)^2 = p$ geeft

$$p^2 - 2p - 8 = 0$$

$$(p + 2)(p - 4) = 0$$

$$p = -2 \text{ of } p = 4$$

Omdat $p = (1 - 2x)^2$ geldt

$$(1 - 2x)^2 = -2 \text{ of } (1 - 2x)^2 = 4$$

$$1 - 2x = 2 \text{ of } 1 - 2x = -2$$

$$-2x = 1 \text{ of } -2x = -3$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ of } x = 1\frac{1}{2}$$

037 a In stap 1 wordt links en rechts gekwadraterd.

In stap 2 wordt links en rechts a opgeteld.

b In stap 1 wordt links en rechts vermenigvuldigd met $1 - b$.

c de eerste vergelijking

$$b = (5 + a)^2 + a$$

$$b = 25 + 10a + a^2 + a$$

$$b = a^2 + 11a + 25$$

de tweede vergelijking

$$1 - b = \frac{12}{2a + 3}$$

$$-b = \frac{12}{2a + 3} - 1$$

$$b = 1 - \frac{12}{2a + 3}$$

d $a = \sqrt{b + 3}$

$$a^2 = b + 3$$

$$b = a^2 - 3$$

e $\frac{2}{b} = 3a + 7$

$$2 = b(3a + 7)$$

$$b = \frac{2}{3a + 7}$$

$$\text{f } 2 + \frac{3}{b} = 4a - 8$$

$$\frac{3}{b} = 4a - 10$$

$$b(4a - 10) = 3$$

$$b = \frac{3}{4a - 10}$$

$$\begin{aligned} \text{g } a - 5 &= \sqrt{4b + 3} \\ (a - 5)^2 &= 4b + 3 \\ 4b &= (a - 5)^2 - 3 \\ b &= \frac{1}{4}(a - 5)^2 - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\text{h } ab = 4$$

$$b = \frac{4}{a}$$

$$\begin{aligned} \text{i } \frac{a}{2b} &= 4 + a \\ a &= 2b(4 + a) \\ 2b &= \frac{a}{4 + a} \\ b &= \frac{a}{8 + 2a} \end{aligned}$$

042 a $t = 2x + 1$

b $t^2 - t - 2 = 0$
 $(t + 1)(t - 2) = 0$
 $t = -1$ of $t = 2$

c $2x + 1 = -1$ of $2x + 1 = 2$
 $2x = -2$ of $2x = 1$
 $x = -1$ of $x = \frac{1}{2}$

d $x^4 - 8x^2 = 128$
 Substitutie $x^2 = t$ geeft
 $t^2 - 8t - 128 = 0$
 $(t + 8)(t - 16) = 0$
 $t = -8$ of $t = 16$
 Omdat $t = x^2$ geldt
 $x^2 = -8$ heeft geen oplossing
 $x^2 = 16$ geeft $x = -4$ of $x = 4$

e $(x^2 - 2)^2 - 7(x^2 - 2) + 12 = 0$
 Substitutie $x^2 - 2 = t$ geeft
 $t^2 - 7t + 12 = 0$
 $(t - 3)(t - 4) = 0$
 $t = 3$ of $t = 4$
 Omdat $t = x^2 - 2$ geldt
 $x^2 - 2 = 3$ of $x^2 - 2 = 4$
 $x^2 = 5$ of $x^2 = 6$
 $x = -\sqrt{5}$ of $x = \sqrt{5}$ of
 $x = -\sqrt{6}$ of $x = \sqrt{6}$

f $(3x + 4)^4 + (3x + 4)^2 = 2$
 Substitutie $(3x + 4)^2 = t$ geeft
 $t^2 + t - 2 = 0$
 $(t + 2)(t - 1) = 0$
 $t = -2$ of $t = 1$
 Omdat $t = (3x + 4)^2$ geldt
 $(3x + 4)^2 = -2$ geen oplossing
 $(3x + 4)^2 = 1$
 $3x + 4 = -1$ of $3x + 4 = 1$
 $3x = -5$ of $3x = -3$
 $x = -1\frac{2}{3}$ of $x = -1$

g $5(3 + x) = 6 - (3 + x)^2$
 Substitutie $3 + x = t$ geeft
 $5t = 6 - t^2$
 $t^2 + 5t - 6 = 0$
 $(t + 6)(t - 1) = 0$
 $t = -6$ of $t = 1$
 Omdat $t = 3 + x$ geldt
 $3 + x = -6$ of $3 + x = 1$
 $x = -9$ of $x = -2$

U9 a $\frac{3}{ab} = 7a + 5$
 $\frac{3}{7a + 5} = ab$
 $b = \frac{3}{7a^2 + 5a}$

b $8 + \frac{6}{b + 1} = 7a - 6$
 $\frac{6}{b + 1} = 7a - 14$
 $b + 1 = \frac{6}{7a - 14}$
 $b = \frac{6}{7a - 14} - 1$
 $b = \frac{6 - (7a - 14)}{7a - 14} = \frac{20 - 7a}{7a - 14}$

1 Vergelijkingen

c $\sqrt{a+b+1} = 3-a$
 $a+b+1 = (3-a)^2$
 $b = (3-a)^2 - a - 1$
 $b = 9 - 6a + a^2 - a - 1$
 $b = a^2 - 7a + 8$

d $2a = \frac{5}{b+4a}$
 $b+4a = \frac{5}{2a}$
 $b = \frac{5}{2a} - 4a$

e $a-9 = \frac{16}{b-4a}$
 $b-4a = \frac{16}{a-9}$
 $b = \frac{16}{a-9} + 4a$
 $b = \frac{16 + 4a(a-9)}{a-9}$
 $b = \frac{4a^2 - 36a + 16}{a-9}$

f $a+3 = \sqrt{b-2a}$
 $(a+3)^2 = b-2a$
 $b = (a+3)^2 + 2a$
 $b = a^2 + 6a + 9 + 2a$
 $b = a^2 + 8a + 9$

U10 a Substitutie $1 + \sqrt{x} = t$ geeft
 $t^2 - 5t + 6 = 0$
 $(t-2)(t-3) = 0$
 $t = 2$ of $t = 3$

Omdat $t = 1 + \sqrt{x}$ geldt

$$1 + \sqrt{x} = 2 \text{ of } 1 + \sqrt{x} = 3$$

$$\sqrt{x} = 1 \text{ of } \sqrt{x} = 2$$

$$x = 1 \text{ of } x = 4$$

b Substitutie $x^2 = t$ geeft
 $t^2 - 7t - 8 = 0$
 $(t+1)(t-8) = 0$
 $t = -1$ of $t = 8$

Omdat $t = x^2$ geldt

$$x^2 = -1 \text{ of } x^2 = 8$$

$$x = -\sqrt{8} \text{ of } x = \sqrt{8}$$

c Substitutie $x^3 = t$ geeft
 $t^2 - 7t - 8 = 0$
 $(t+1)(t-8) = 0$
 $t = -1$ of $t = 8$

Omdat $t = x^3$ geldt

$$x^3 = -1 \text{ of } x^3 = 8$$

$$x = -1 \text{ of } x = 2$$

d Substitutie $\frac{1}{x} = t$ geeft
 $6t^2 - 5t + 1 = 0$
 $D = 25 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 1$
 $t = \frac{5 + \sqrt{1}}{2 \cdot 6} = \frac{1}{2}$ of $t = \frac{5 - \sqrt{1}}{2 \cdot 6} = \frac{1}{3}$

Omdat $t = \frac{1}{x}$ geldt

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \text{ of } \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$$

$$x = 2 \text{ of } x = 3$$

1.7 Gemengde opdrachten

43 a $3x + 12 = 1 - 2x$
 $5x = -11$
 $x = \frac{-11}{5}$
 $x = -2\frac{1}{5}$

b $\frac{18}{x-4} = -6x$
 $18 = -6x(x-4)$ mits $x \neq 4$
 $18 = -6x^2 + 24x$
 $6x^2 - 24x + 18 = 0$
 $x^2 - 4x + 3 = 0$
 $(x-3)(x-1) = 0$
 $x-3 = 0$ of $x-1 = 0$
 $x = 3$ of $x = 1$

$$\text{c } 2\sqrt{x-1} + 3 = 7$$

$$2\sqrt{x-1} = 4$$

$$\sqrt{x-1} = 2$$

$$x-1 = 4$$

$$x = 5$$

$$\text{d } (3x-1)(x+5) = -5$$

$$3x^2 + 15x - x - 5 = -5$$

$$3x^2 + 14x = 0$$

$$x(3x+14) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } 3x+14 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -\frac{14}{3} = -4\frac{2}{3}$$

$$\text{e } 4x(7-2x) = (x-3)(7-2x)$$

$$7-2x = 0 \text{ of } 4x = x-3$$

$$-2x = -7 \text{ of } 3x = -3$$

$$x = 3\frac{1}{2} \text{ of } x = -1$$

$$\text{f } \frac{x+4}{2x+1} = \frac{2x}{13-x}$$

$$(x+4)(13-x) = 2x(2x+1)$$

$$\text{mits } x \neq -\frac{1}{2} \text{ en } x \neq 13$$

$$13x - x^2 + 52 - 4x = 4x^2 + 2x$$

$$5x^2 - 7x - 52 = 0$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -52 = 1089$$

$$x = \frac{7 + \sqrt{1089}}{2 \cdot 5} = 4 \text{ of}$$

$$x = \frac{7 - \sqrt{1089}}{2 \cdot 5} = -2\frac{3}{5}$$

$$\text{g } (2x+1)^2 = (x-5)^2$$

$$2x+1 = x-5 \text{ of } 2x+1 = -x+5$$

$$x = -6 \text{ of } 3x = 4$$

$$x = -6 \text{ of } x = 1\frac{1}{3}$$

$$\text{h } (x-4)^2\sqrt{x^2-9} = 25\sqrt{x^2-9}$$

$$\sqrt{x^2-9} = 0 \text{ of } (x-4)^2 = 25$$

$$x^2 = 9 \text{ of } x-4 = 5 \text{ of } x-4 = -5$$

$$x = 3 \text{ of } x = -3 \text{ of } x = 9$$

$$(x = -1 \text{ voldoet niet})$$

$$44 \text{ a } \frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{v}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{b} + \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{8} - \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{5}{40} - \frac{4}{40}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{40}$$

$$b = 40$$

De beeldafstand is 40 cm.

$$\text{b } \frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{v}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{b} + \frac{1}{v}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{8} - \frac{1}{v}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{v}{8v} - \frac{8}{8v}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{v-8}{8v}$$

$$b = \frac{8v}{v-8}$$

$$45 \text{ a } \sqrt{x+2} = 8$$

$$x+2 = 64$$

$$x = 62$$

Uit de grafiek blijkt dat de ongelijkheid geldt voor $x > 62$.

$$\text{b } \sqrt{x+2} = 3\frac{1}{2}$$

$$x+2 = 12\frac{1}{4}$$

$$x = 10\frac{1}{4}$$

Uit de grafiek blijkt dat de ongelijkheid geldt voor $-2 \leq x < 10\frac{1}{4}$.

1 Vergelijkingen

- c** $\sqrt{x+2} = 11 - 2x$
 $x + 2 = (11 - 2x)^2$
 $x + 2 = 121 - 44x + 4x^2$
 $4x^2 - 45x + 119 = 0$
 $D = (-45)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 119 = 121, \sqrt{D} = 11$
 $x = \frac{45 + 11}{8} = 7$ of $x = \frac{45 - 11}{8} = 4\frac{1}{4}$
controle: $\sqrt{7+2} = 11 - 2 \cdot 7$ ofwel $\sqrt{9} = 11 - 14$, klopt niet.
 $\sqrt{4\frac{1}{4}+2} = 11 - 2 \cdot 4\frac{1}{4}$ ofwel $\sqrt{6\frac{1}{4}} = 11 - 8\frac{1}{2}$, klopt.
 $y = 11 - 2 \cdot 4\frac{1}{4} = 2\frac{1}{2}$ dus het snijpunt is $(4\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2})$
- d** Uit de grafiek blijkt dat de ongelijkheid geldt voor $-2 \leq x < 4\frac{1}{4}$.
- e** $x - 3y + 3 = 0$
 $-3y = -x - 3$
 $y = \frac{1}{3}x + 1$
Deze lijn gaat door de punten $(-3, 0)$, $(0, 1)$, $(3, 2)$, $(6, 3)$ enzovoort.
Een lijn door deze punten snijdt de grafiek van $y = \sqrt{x+2}$ twee keer.
- 46** $x^4 = -5x^2 + 6$
Substitutie: $x^2 = t$ geeft $t^2 + 5t - 6 = 0$.
 $(t+6)(t-1) = 0$
 $t = -6$ of $t = 1$
Omdat $t = x^2$ geldt $x^2 = -6$ (geen oplossing) of $x^2 = 1$
 $x = 1$ of $x = -1$
Uit de grafiek blijkt dat de ongelijkheid geldt voor $x < -1$ of $x > 1$.

Onderzoeksopdrachten

- 47 a** Eén keer heen en weer reizen (een retour) naar Amersfoort kost hem $2 \times \text{€ } 14,40 = \text{€ } 28,80$. Als x het aantal keer heen en weer reizen naar Amersfoort is, kun je de kosten berekenen met de formule $y = 28,80x$.
Met een abonnement betaal je in het weekend voor een retour $0,6 \times \text{€ } 28,80 = \text{€ } 17,28$. De kosten inclusief abonnement kun je berekenen met de formule $y = 23 + 17,28x$.
De kosten met en zonder abonnement zijn gelijk als $28,80x = 23 + 17,28x$.
 $11,52x = 23$ geeft $x = 1,996\dots$. Dus vanaf twee keer reizen in het weekend is het abonnement voordeliger.
- b** Een retour in de spits naar Amsterdam kost $2 \times \text{€ } 7,91 = \text{€ } 15,82$.
Is x het aantal reizen naar zijn werk in april, dan zijn de kosten y zonder abonnement, inclusief het weekend naar Amersfoort: $y = 28,80 + 15,82x$.
Met abonnement kost een retour naar Amsterdam $0,8 \times \text{€ } 7,91 + 0,6 \times \text{€ } 7,91 = \text{€ } 11,08$.
De kosten zijn dan te berekenen met de formule $y = 23 + 17,28 + 11,08x$.
De kosten met en zonder abonnement zijn gelijk als
 $28,80 + 15,82x = 23 + 17,28 + 11,08x$
 $28,80 + 15,82x = 40,28 + 11,08x$
 $4,74x = 11,48$ geeft $x = 2,42\dots$.
Carel moet in deze maand minstens drie keer met de trein reizen, dan is het abonnement voordeliger.

48 a $y = 4 + p\sqrt{16 - x}$

De grafiek gaat door $(-9, 14)$, dus

$$14 = 4 + p\sqrt{16 - (-9)}$$

$$14 = 4 + p\sqrt{25}$$

$$14 = 4 + p \cdot 5$$

$$5p = 10$$

$$p = 2$$

b Het randpunt van de grafiek bij de formule $y = 4 + p\sqrt{16 - x}$ is $(16, 4)$.

Een lijn die door $R(0, 8)$ en $(16, 4)$ gaat heeft twee snijpunten met de

wortelgrafiek. De richtingscoëfficiënt van deze lijn is $\frac{4 - 8}{16 - 0} = -\frac{1}{4}$

Met de grafiek zie je, dat als $a \geq -\frac{1}{4}$ de grafiek van $y = ax + 8$ de wortelgrafiek in $R(0, 8)$ en nog een ander punt snijdt.

Het kan ook zo zijn dat de lijn $y = ax + 8$ de wortelgrafiek raakt in $(0, 8)$.

Om deze waarde van a te berekenen mag de vergelijking $4 + \sqrt{16 - x} = ax + 8$ maar één oplossing hebben.

$$\sqrt{16 - x} = ax + 4$$

$$16 - x = (ax + 4)^2$$

$$16 - x = a^2x^2 + 8ax + 16$$

$$a^2x^2 + 8ax + x = 0$$

$$a^2x^2 + (8a + 1)x = 0$$

Eén oplossing als $D = 0$, dus als $(8a + 1)^2 - 4 \cdot a^2 \cdot 0 = 0$ ofwel $(8a + 1)^2 = 0$.

$$8a + 1 = 0, \text{ dus als } a = -\frac{1}{8}$$

Conclusie: voor $-\frac{1}{4} \leq a < -\frac{1}{8}$ snijdt de lijn $y = ax + 8$ de wortelgrafiek behalve in R in nog één ander punt.

Samenvatting

S1 a $2x + y = 3$ geeft $y = -2x + 3$.

b $3x - 2y = 4$ geeft $-2y = -3x + 4$ ofwel $y = 1\frac{1}{2}x - 2$.

S2 a $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot -9 = 72$ dus $D > 0$, er zijn twee oplossingen.

b $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -16$ dus $D < 0$, er zijn geen oplossingen.

S3 a $3(5 - x) = 5(3 - 2x) + 21$

$$15 - 3x = 15 - 10x + 21$$

$$7x = 21$$

$$x = 3$$

b $-4(x - 5) - 2(7 - 3x) = 4x$

$$-4x + 20 - 14 + 6x = 4x$$

$$-2x = -6$$

$$x = 3$$

S4 a De richtingscoëfficiënt is $\frac{2 - 7}{7 - -3} = -\frac{1}{2}$ dus $y = -\frac{1}{2}x + b$.

$(7, 2)$ invullen geeft $2 = -\frac{1}{2} \cdot 7 + b$ dus $b = 5\frac{1}{2}$

Een vergelijking van l is $y = -\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}$

b De richtingscoëfficiënt is -5 , dus $y = -5x + b$.

$(1, 10)$ invullen geeft $10 = -5 \cdot 1 + b$ dus $b = 15$.

Een vergelijking van l is $y = -5x + 15$.

1 Vergelijkingen

S5 a $(x+1)^2 = 4(x+1)$
 $x+1 = 0$ of $x+1 = 4$
 $x = -1$ of $x = 3$

b $4x^2 - 12x + 9 = 0$
 $D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$
 $x = \frac{12 - \sqrt{0}}{2 \cdot 4}$ of $x = \frac{12 + \sqrt{0}}{2 \cdot 4}$
 $x = \frac{12}{8} = 1\frac{1}{2}$

S6 a $2\sqrt{x-4} = 8 - \frac{1}{2}x$
 $4(x-4) = (8 - \frac{1}{2}x)^2$
 $4x - 16 = 64 - 8x + \frac{1}{4}x^2$
 $\frac{1}{4}x^2 - 12x + 80 = 0$
 $x^2 - 48x + 320 = 0$
 $(x-8)(x-40) = 0$
 $x = 8$ of $x = 40$
 $2\sqrt{8-4} = 8 - \frac{1}{2} \cdot 8$, klopt.
 $2\sqrt{40-4} = 8 - \frac{1}{2} \cdot 40$, klopt niet.
 De oplossing is $x = 8$.

S7 a $\frac{2}{3x-9} = \frac{1}{\frac{1}{2}x+4}$
 $2(\frac{1}{2}x+4) = 3x-9$
 mits $x \neq 3$ en $x \neq -8$
 $x+8 = 3x-9$
 $-2x = -17$
 $x = 8\frac{1}{2}$

S8 a $-x^2 - 2x + 8 = 0$
 $x^2 + 2x - 8 = 0$
 $(x+4)(x-2) = 0$
 $x = -4$ of $x = 2$
 Uit de grafiek blijkt dat de ongelijkheid geldt voor $x < -4$ of $x > 2$.
b $-x^2 - 2x + 8 = 5x$
 $x^2 + 7x - 8 = 0$
 $(x+8)(x-1) = 0$
 $x = -8$ of $x = 1$
 Uit de grafiek blijkt dat de ongelijkheid geldt voor $-8 \leq x \leq 1$.

c $(3x-12)^2 = (6-2x)^2$
 $3x-12 = 6-2x$ of
 $3x-12 = -6+2x$
 $5x = 18$ of $x = 6$
 $x = 3\frac{3}{5}$ of $x = 6$

d $(2x-3)(2x+1) = 4(2x+1)$
 $2x+1 = 0$ of $2x-3 = 4$
 $2x = -1$ of $2x = 7$
 $x = -\frac{1}{2}$ of $x = 3\frac{1}{2}$

b $x + 2\sqrt{-1-x} = -4$
 $\sqrt{-1-x} = -2 - \frac{1}{2}x$
 $-1-x = (-2 - \frac{1}{2}x)^2$
 $-1-x = 4 + 2x + \frac{1}{4}x^2$
 $\frac{1}{4}x^2 + 3x + 5 = 0$
 $x^2 + 12x + 20 = 0$
 $(x+2)(x+10) = 0$
 $x = -2$ of $x = -10$
 $\frac{1}{2} \cdot -2 + \sqrt{-1 - -2} = -2$, klopt niet.
 $\frac{1}{2} \cdot -10 + \sqrt{-1 - -10} = -2$, klopt.
 De oplossing is $x = -10$.

b $\frac{x+1}{4x-3} = x$
 $x+1 = x(4x-3)$ mits $x \neq \frac{3}{4}$
 $x+1 = 4x^2-3x$
 $4x^2-4x-1 = 0$
 $D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot -1 = 32$
 $x = \frac{4 - \sqrt{32}}{2 \cdot 4}$ of $x = \frac{4 + \sqrt{32}}{2 \cdot 4}$
 $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ of $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$

S9 a $\frac{p+2q}{2p+q} = 3$
 $p+2q = 3(2p+q)$
 $p+2q = 6p+3q$
 $-5p = q$
 $p = -\frac{1}{5}q$

b $q - \sqrt{p-2q} = 3$
 $q-3 = \sqrt{p-2q}$
 $(q-3)^2 = p-2q$
 $p = (q-3)^2 + 2q$
 $p = q^2 - 4q + 9$

S10 a $(1-2x)^2 + (1-2x) - 12 = 0$
 Substitutie $1-2x = t$ geeft
 $t^2 + t - 12 = 0$
 $(t+4)(t-3) = 0$
 $t = -4$ of $t = 3$
 Omdat $t = 1-2x$ geldt
 $1-2x = -4$ of $1-2x = 3$
 $-2x = -5$ of $-2x = 2$
 $x = 2\frac{1}{2}$ of $x = -1$

b $(x+2)^3 = 4(x+2)^2$
 Substitutie $x+2 = t$ geeft
 $t^3 = 4t^2$
 $t \cdot t^2 = 4 \cdot t^2$
 $t^2 = 0$ of $t = 4$
 Omdat $t = x+2$ geldt
 $(x+2)^2 = 0$ of $x+2 = 4$
 $x = -2$ of $x = 2$

Test jezelf

T1 a $13+2x = 3(x-5) + 7x$
 $13+2x = 3x-15+7x$
 $13+2x = 10x-15$
 $28 = 8x$
 $x = \frac{28}{8} = 3\frac{1}{2}$

b $\frac{1}{5}p + 3 = \frac{3}{10}p - 8$
 $2p + 30 = 3p - 80$
 $110 = p$
 $p = 110$

c $3\frac{2}{3}x - 3 = 2(\frac{1}{6}x + 1)$
 $3\frac{2}{3} - 3 = \frac{1}{3}x + 2$
 $11x - 9 = x + 6$
 $10x = 15$
 $x = \frac{15}{10} = 1\frac{1}{2}$

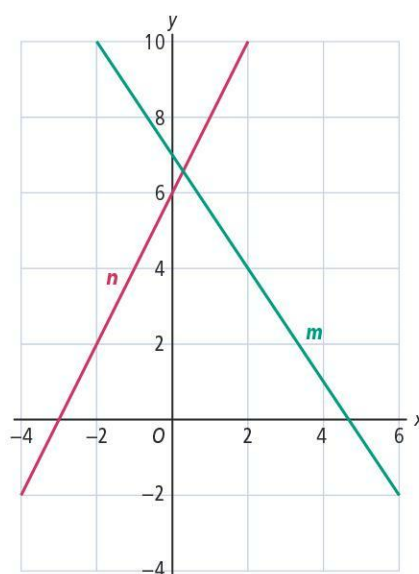
T2 a Eerst de vergelijking oplossen.
 $-\frac{1}{2}x + 4 = 2x - 1$
 $-x + 8 = 4x - 2$
 $10 = 5x$
 $x = 2$
 Uit de grafieken blijkt de oplossing: $x \leq 2$

b Zie de figuur hiernaast.

c Eerst de vergelijking oplossen.

$-1,5x + 7 = 2x + 6$
 $-3x + 14 = 4x + 12$
 $-7x = -2$
 $x = \frac{2}{7}$

Uit de grafieken van opdracht b blijkt dat $-1,5x + 7 \geq 2x + 6$ voor $x \leq \frac{2}{7}$



1 Vergelijkingen

T3 a $a^2 = 9a + 22$
 $a^2 - 9a - 22 = 0$
 $(a - 11)(a + 2) = 0$
 $a - 11 = 0$ of $a + 2 = 0$
 $a = 11$ of $a = -2$

b $\sqrt{x^2 + 4} - 1 = x$
 $\sqrt{x^2 + 4} = x + 1$
 $x^2 + 4 = (x + 1)^2$
 $x^2 + 4 = x^2 + 2x + 1$
 $4 = 2x + 1$
 $2x = 3$
 $x = 1\frac{1}{2}$ (voldoet)

c $(2x - 3)^2 = (1 - 8x)^2$
 $2x - 3 = 1 - 8x$ of $2x - 3 = -1 + 8x$
 $10x = 4$ of $-6x = 2$
 $x = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ of $x = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

d $\frac{-3x}{x+1} = x - 4$
 $-3x = (x - 4)(x + 1)$ mits $x \neq -1$
 $-3x = x^2 - 3x - 4$
 $x^2 = 4$
 $x = -2$ of $x = 2$

e $\frac{x+4}{x-2} = \frac{x+2}{x}$
 $(x+4)x = x^2 - 4$
mits $x \neq 2$ en $x \neq 0$
 $x^2 + 4x = x^2 - 4$
 $4x = -4$
 $x = -1$

f $x^2 - 2 = \frac{1}{x^2 - 2}$
 $(x^2 - 2)^2 = 1$
mits $x \neq \sqrt{2}$ en $x \neq -\sqrt{2}$
 $x^2 - 2 = 1$ of $x^2 - 2 = -1$
 $x^2 = 3$ of $x^2 = 1$
 $x = -\sqrt{3}$ of $x = \sqrt{3}$ of
 $x = -1$ of $x = 1$

g $(x^2 - 8)^2 = x^2 - 8$
substitutie $x^2 - 8 = p$
 $p^2 = p$ ofwel $p \cdot p = p \cdot 1$
 $p = 0$ of $p = 1$
omdat $p = x^2 - 8$ geldt
 $x^2 - 8 = 0$ of $x^2 - 8 = 1$
 $x^2 = 8$ of $x^2 = 9$
 $x = -\sqrt{8}$ of $x = \sqrt{8}$ of
 $x = -3$ of $x = 3$

h $\sqrt{2x-1} \cdot \sqrt{3-5x} = 0$
 $2x - 1 = 0$ of $3 - 5x = 0$
 $x = \frac{1}{2}$ of $x = \frac{3}{5}$
 $\sqrt{2 \cdot \frac{1}{2} - 1} \cdot \sqrt{3 - 5 \cdot \frac{1}{2}} = 0$, klopt.
 $\sqrt{2 \cdot \frac{3}{5} - 1} \cdot \sqrt{3 - 5 \cdot \frac{3}{5}} = 0$, klopt.
De oplossing is $x = \frac{1}{2}$ of $x = \frac{3}{5}$

T4 a De richtingscoëfficiënt is $\frac{7-5}{0-2} = -1$ dus $y = -x + b$.

l gaat door $(0, 7)$, dus het startgetal is 7.

Een vergelijking van l is $y = -x + 7$.

b De richtingscoëfficiënt is $\frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$ dus $l: y = -\frac{1}{2}x$.

c De richtingscoëfficiënt is -3 dus $y = -3x + b$.
 $(3, -5)$ invullen geeft $-5 = -3 \cdot 3 + b$ dus $b = 4$.
Een vergelijking van l is $y = -3x + 4$.

d l gaat door de punten $(2, 40)$ en $(6, 10)$.

De richtingscoëfficiënt is $\frac{10-40}{6-2} = -7\frac{1}{2}$ dus $y = -7\frac{1}{2}x + b$.

$(2, 40)$ invullen geeft $40 = -7\frac{1}{2} \cdot 2 + b$, dus $b = 55$.

Een vergelijking van l is $y = -7\frac{1}{2}x + 55$.

T5 a $2(q+1) = 4p - 5$

$$2q + 2 = 4p - 5$$

$$4p = 2q + 7$$

$$p = \frac{1}{2}q + 1\frac{3}{4}$$

b $4 + \frac{3}{p} = q + 5$

$$\frac{3}{p} = q + 1$$

$$p = \frac{3}{q+1}$$

c $q + 8 - \frac{1}{p+6} = 0$

$$q + 8 = \frac{1}{p+6}$$

$$q + 6 = \frac{1}{q+8}$$

$$p = \frac{1}{q+8} - 6$$

d $7 - 2\sqrt{p+6} = q$

$$-2\sqrt{p+6} = q - 7$$

$$\sqrt{p+6} = -\frac{1}{2}q + 3\frac{1}{2}$$

$$p+6 = \left(-\frac{1}{2}q + 3\frac{1}{2}\right)^2$$

$$p = \left(-\frac{1}{2}q + 3\frac{1}{2}\right)^2 - 6$$

$$p = \frac{1}{4}q^2 - 3\frac{1}{2}q + 12\frac{1}{4} - 6$$

$$p = \frac{1}{4}q^2 - 3\frac{1}{2}q + 6\frac{1}{4}$$

T6 $t = 2x - 1$ substitueren in $y = (3t - 4)^2 + 6t$ geeft

$$y = (3(2x - 1) - 4)^2 + 6(2x - 1)$$

$$y = (6x - 7)^2 + 12x - 6$$

$$y = 36x^2 - 84x + 49 + 12x - 6$$

$$y = 36x^2 - 72x + 43$$

T7 a $(3x - 1)^2 - 5(3x - 1) = 6$

Substitutie $3x - 1 = p$ geeft $p^2 - 5p = 6$.

$$p^2 - 5p - 6 = 0$$

$$(p+1)(p-6) = 0$$

$$p = -1 \text{ of } p = 6$$

Omdat $p = 3x - 1$ geldt $3x - 1 = -1$ of $3x - 1 = 6$.

$$3x = 0 \text{ of } 3x = 7$$

$$x = 0 \text{ of } x = 2\frac{1}{3}$$

b $x^4 = 13x^2 - 36$

Substitutie $x^2 = p$ geeft $p^2 = 13p - 36$.

$$p^2 - 13p + 36 = 0$$

$$(p-4)(p-9) = 0$$

$$p = 4 \text{ of } p = 9$$

Omdat $p = x^2$ geldt $x^2 = 4$ of $x^2 = 9$.

$$x = -2 \text{ of } x = 2 \text{ of } x = -3 \text{ of } x = 3$$

c $(4x + 2)^2 - 10 = 3(4x + 2)$

Substitutie $4x + 2 = p$ geeft $p^2 - 10 = 3p$.

$$p^2 - 3p - 10 = 0$$

$$(p-5)(p+2) = 0$$

$$p = 5 \text{ of } p = -2$$

Omdat $p = 4x + 2$ geldt $4x + 2 = 5$ of $4x + 2 = -2$.

$$4x = 3 \text{ of } 4x = -4$$

$$x = \frac{3}{4} \text{ of } x = -1$$

1 Vergelijkingen

d $9x^2 - 2 = 4x^4$

Substitutie $x^2 = p$ geeft $9p - 2 = 4p^2$.

$$4p^2 - 9p + 2 = 0$$

$$D = (-9)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 49$$

$$p = \frac{9 + \sqrt{49}}{2 \cdot 4} = 2 \text{ of } p = \frac{9 - \sqrt{49}}{2 \cdot 4} = \frac{1}{4}$$

Omdat $p = x^2$ geldt $x^2 = 2$ of $x^2 = \frac{1}{4}$

$$x = -\sqrt{2} \text{ of } x = \sqrt{2} \text{ of } x = -\frac{1}{2} \text{ of } x = \frac{1}{2}$$

T8 a $(x + 2)^2 - 3 = 2$

$$(x + 2)^2 = 5$$

$$x + 2 = \sqrt{5} \text{ of } x + 2 = -\sqrt{5}$$

$$x = -2 + \sqrt{5} \text{ of } x = -2 - \sqrt{5}$$

De snijpunten zijn $(-2 + \sqrt{5}, 2)$ en $(-2 - \sqrt{5}, 2)$.

b Schrijf de formule van m : $x - 2y = 1$ eerst in de vorm $y = ax + b$.

$$x - 2y = 1$$

$$2y = x - 1$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

Dit substitueren in de formule van de parabool geeft

$$(x + 2)^2 - 3 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$x^2 + 4x + 4 - 3 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$x^2 + 3\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2} = 0$$

$$(x + 3)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$x = -3 \text{ of } x = -\frac{1}{2}$$

$$x = -3 \text{ geeft } y = \frac{1}{2} \cdot -3 - \frac{1}{2} = -2 \text{ en } x = -\frac{1}{2} \text{ geeft } y = \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$$

De snijpunten zijn $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ en $(-3, -2)$.

c Invullen van $(0, 5)$ geeft $5 = (0 + p)^2 - 3$, dus $5 = p^2 - 3$

$$p^2 = 8$$

$$p = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ of } p = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$$

d De ongelijkheid $(x + 4)^2 - 3 < a$ heeft geen oplossing als de top van de dalparabool $y = (x + 4)^2 - 3$ boven de lijn $y = a$ ligt.

De top is het punt $(-4, -3)$ en deze ligt boven de lijn $y = a$ als $a < -3$.

T9 a De ongelijkheid is oplosbaar voor $x \geq -2$.

$$2 - x + 4\sqrt{x + 2} = 7$$

$$4\sqrt{x + 2} = x + 5$$

$$16(x + 2) = (x + 5)^2$$

$$16x + 32 = x^2 + 10x + 25$$

$$x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$(x + 1)(x - 7) = 0$$

$$x = -1 \text{ of } x = 7$$

Uit de grafiek blijkt dat de ongelijkheid geldt voor $-2 \leq x < -1$ of $x > 7$.

- b** De ongelijkheid is oplosbaar voor $x \geq -2$.

$$2 - x + 4\sqrt{x+2} = x$$

$$4\sqrt{x+2} = 2x - 2$$

$$2\sqrt{x+2} = x - 1$$

$$4(x+2) = (x-1)^2$$

$$4x + 8 = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$(x+1)(x-7) = 0$$

$$x = -1 \text{ of } x = 7$$

controle: $x = -1$ geeft $2 - (-1) + 4\sqrt{-1+2} = -1$ ofwel $3 + 4\sqrt{1} = -1$, klopt niet.

$x = 7$ geeft $2 - 7 + 4\sqrt{7+2} = 7$ ofwel $-5 + 12 = 7$, klopt.

Uit de grafiek blijkt dat de ongelijkheid geldt voor $-2 \leq x \leq 7$.

- c** De ongelijkheid is oplosbaar voor $x \geq -2$.

$$2 - x + 4\sqrt{x+2} = -2x$$

$$4\sqrt{x+2} = -x - 2$$

$$16(x+2) = (-x-2)^2$$

$$16(x+2) = (x+2)^2$$

$$x+2 = 0 \text{ of } 16 = x+2$$

$$x = -2 \text{ of } x = 14$$

controle: $x = -2$ geeft $2 - (-2) + 4\sqrt{-2+2} = -2 \cdot -2$ ofwel $4 + 4\sqrt{0} = 4$, klopt.

$x = 14$ geeft $2 - 14 + 4\sqrt{14+2} = -2 \cdot -14$ ofwel $-12 + 4\sqrt{16} = 28$, klopt niet.

Uit de grafiek blijkt dat de ongelijkheid geldt voor $x = -2$.

- T10 a** Als $A(a, 0)$, dan is $K(a, -\frac{1}{2}a + 5)$ en $B(0, -\frac{1}{2}a + 5)$.

b $V = a(-\frac{1}{2}a + 5)$

c $a(-\frac{1}{2}a + 5) = 6\frac{3}{8}$

$$-\frac{1}{2}a^2 + 5a - 6\frac{3}{8} = 0$$

$$4a^2 - 40a + 51 = 0$$

$$D = 40^2 - 4 \cdot 4 \cdot 51 = 784$$

$$a = \frac{40 + \sqrt{784}}{2 \cdot 4} \text{ of } a = \frac{40 + \sqrt{784}}{2 \cdot 4}$$

$$a = \frac{40 + 28}{8} = 8\frac{1}{2} \text{ of } a = \frac{40 - 28}{8} = 1\frac{1}{2}$$

Extra oefening

- E1 a** $4(2x - 5) + 4 = 1 - 3(8 - x)$

$$8x - 20 + 4 = 1 - 24 + 3x$$

$$8x - 16 = -23 + 3x$$

$$5x - 16 = -23$$

$$5x = -7$$

$$x = -\frac{7}{5} = -1\frac{2}{5}$$

- b** $\frac{2}{3}(\frac{1}{2}x - 6) = -2x + \frac{1}{3}(x + 12)$

$$\frac{1}{3}x - 4 = -2x + \frac{1}{3}x + 4$$

$$\frac{1}{3}x - 4 = -1\frac{2}{3}x + 4$$

$$2x - 4 = 4$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

1 Vergelijkingen

E2 a De richtingscoëfficiënt is $\frac{-2-20}{-3-6} = \frac{-22}{-9} = 2\frac{4}{9}$, dus $y = 2\frac{4}{9}x + b$.

$(6, 20)$ invullen geeft $20 = 2\frac{4}{9} \cdot 6 + b$ dus $b = 20 - 14\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3}$

$l: y = 2\frac{4}{9}x + 5\frac{1}{3}$

b De richtingscoëfficiënt is $\frac{11-8}{2-4} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$, dus $y = -\frac{3}{2}x + b$.

$(2, 11)$ invullen geeft $11 = -\frac{3}{2} \cdot 2 + b$ dus $b = 10$.

$l: y = -\frac{3}{2}x + 10$

c Beide punten hebben dezelfde y -coördinaat.

$l: y = 9$

d Evenwijdige lijnen hebben dezelfde richtingscoëfficiënt, dus $y = 1\frac{1}{2}x + b$.

$(8, -4)$ invullen geeft $-4 = 1\frac{1}{2} \cdot 8 + b$ dus $b = -16$.

$l: y = 1\frac{1}{2}x - 16$

E3 a $8 = 3x - \frac{1}{4}x^2$

$\frac{1}{4}x^2 - 3x + 8 = 0$

$x^2 - 12x + 32 = 0$

$(x-4)(x-8) = 0$

$x = 4$ of $x = 8$

c $7x - 15^2 = 19x - 7x^2$

$-12x - 8x^2 = 0$

$-4x(3 + 2x) = 0$

$-4x = 0$ of $3 + 2x = 0$

$x = 0$ of $2x = -3$

$x = 0$ of $x = -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$

b $(4k-3)^2 = 100k^2$

$(4k-3)^2 = (10k)^2$

$4k-3 = 10k$ of $4k-3 = -10k$

$-6k = 3$ of $14k = 3$

$k = -\frac{1}{2}$ of $k = \frac{3}{14}$

d $6x^2(x-2) = 30(x-2)$

$6x^2 = 30$ of $x-2 = 0$

$x^2 = 5$ of $x = 2$

$x = \sqrt{5}$ of $x = -\sqrt{5}$ of $x = 2$

E4 a $2\sqrt{6-2x} = 18$

$\sqrt{6-2x} = 9$

$6-2x = 81$

$-2x = 75$

$x = -37\frac{1}{2}$

c $3x - 2\sqrt{x} = 0$

$3x = 2\sqrt{x}$

$9x^2 = 4x$

$9x \cdot x = 4 \cdot x$

$x = 0$ of $9x = 4$

$x = 0$ of $x = \frac{4}{9}$

b $\sqrt{4+x} - 2 = 5x$

$\sqrt{4+x} = 5x + 2$

$4+x = (5x+2)^2$

$4+x = 25x^2 + 20x + 4$

$25x^2 + 19x = 0$

$x(25x+19) = 0$

$x = 0$ of $25x+19 = 0$

$x = 0$ of $x = -\frac{19}{25}$

$\sqrt{4+0} - 2 = 5 \cdot 0$, klopt.

$\sqrt{4+(-\frac{19}{25})} - 2 = 5 \cdot (-\frac{19}{25})$, klopt niet.

De oplossing is $x = 0$.

d $2x + \sqrt{x-7} = 20$

$\sqrt{x-7} = 20-2x$

$x-7 = (20-2x)^2$

$x-7 = 400 - 80x + 4x^2$

$4x^2 - 81x + 407 = 0$

$D = (-81)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 407 = 49$

$x = \frac{81 - \sqrt{49}}{2 \cdot 4} = 9\frac{1}{4}$ of $x = \frac{81 + \sqrt{49}}{2 \cdot 4} = 11$

$2 \cdot 9\frac{1}{4} + \sqrt{9\frac{1}{4} - 7} = 20$, klopt.

$2 \cdot 11 + \sqrt{11 - 7} = 20$, klopt niet.

De oplossing is $x = 9\frac{1}{4}$.

E5 a $\frac{18}{5p+3} = 6$
 $6(5p+3) = 18$ mits $p \neq -\frac{3}{5}$
 $30p + 18 = 18$
 $30p = 0$
 $p = 0$

b $\frac{3}{x+2} = \frac{x}{2x-1}$
 $3(2x-1) = x(x+2)$
mits $x \neq -2$ en $x \neq \frac{1}{2}$
 $6x - 3 = x^2 + 2x$
 $x^2 - 4x + 3 = 0$
 $(x-1)(x-3) = 0$
 $x = 1$ of $x = 3$

c $\frac{-45}{2a+1} = 1 - 7a$
 $-45 = (1-7a)(2a+1)$ mits $a \neq -\frac{1}{2}$
 $-45 = 2a + 1 - 14a^2 - 7a$
 $14a^2 + 5a - 46 = 0$
 $D = 5^2 - 4 \cdot 14 \cdot -46 = 2601$

$$a = \frac{-5 + \sqrt{2601}}{2 \cdot 14} \text{ of } a = \frac{-5 - \sqrt{2601}}{2 \cdot 14}$$

$$a = \frac{23}{14} = 1\frac{9}{14} \text{ of } a = -2$$

d $\frac{2}{x} + 1 = 2x + 4$

$$\frac{2}{x} = 2x + 3$$

$$2 = x(2x + 3) \text{ mits } x \neq 0$$

$$2 = 2x^2 + 3x$$

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25$$

$$x = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} \text{ of } x = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = -2$$

E6 a Zie de figuur hiernaast.

b Eerst de vergelijking oplossen.

$$-\frac{2}{5}x + 10 = \frac{1}{3}x - 2$$

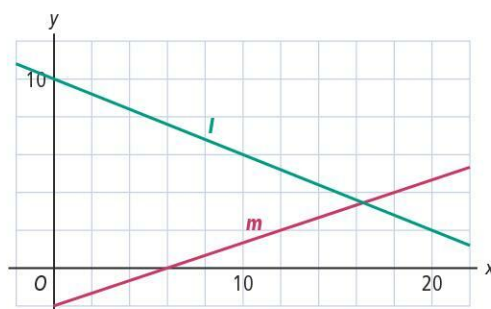
$$-6x + 150 = 5x - 30$$

$$180 = 11x$$

$$x = \frac{180}{11} = 16\frac{4}{11}$$

Uit de grafiek blijkt

dat $-\frac{2}{5}x + 10 > \frac{1}{3}x - 2$ voor $x < 16\frac{4}{11}$



E7 a $3m = \sqrt{2+k} - 6$
 $3m + 6 = \sqrt{2+k}$
 $(3m+6)^2 = 2+k$
 $k = (3m+6)^2 - 2$
 $k = 9m^2 + 36m + 34$

b $y = (2(3k-5) + 10)^2 - 3(3k-5)$
 $y = (6k - 10 + 10)^2 - 9k + 15$
 $y = 36k^2 - 9k + 15$

E8 a $(1-3x)^2 = 24 - 5(1-3x)$
Substitutie $1-3x = p$
 $p^2 = 24 - 5p$
 $p^2 + 5p - 24 = 0$
 $(p+8)(p-3) = 0$
 $p = -8$ of $p = 3$
Omdat $p = 1-3x$ geldt
 $1-3x = -8$ of $1-3x = 3$
 $3x = 9$ of $3x = -2$
 $x = 3$ of $x = -\frac{2}{3}$

b $2x^4 + 3 = 5x^2$
Substitutie $x^2 = p$
 $2p^2 + 3 = 5p$
 $2p^2 - 5p + 3 = 0$
 $D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$
 $p = \frac{5 - \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = 1$ of $p = \frac{5 + \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = 1\frac{1}{2}$
Omdat $p = x^2$ geldt
 $x^2 = 1$ of $x^2 = 1\frac{1}{2}$
 $x = -1$ of $x = 1$ of $x = -\sqrt{1\frac{1}{2}}$ of $x = \sqrt{1\frac{1}{2}}$

1 Vergelijkingen

- E9 a** $S(3, 5)$ ligt op lijn k , dus $2 \cdot 3 + a \cdot 5 = 7$ ofwel $5a = 1$, dus $a = \frac{1}{5}$
 S ligt ook op lijn m , dus $6 \cdot 3 - 5 \cdot 5 = b \cdot 3$ ofwel $-7 = 3b$, dus $b = -\frac{7}{3} = -2\frac{1}{3}$
b $b = 14$ geeft $m: 6x - 5y = 14x$ ofwel $-5y = 8x$, dus $y = -1\frac{3}{5}x$.
 $k: 2x + ay = 7$ ofwel $ay = -2x + 7$, dus $y = -\frac{2}{a}x + \frac{7}{a}$

De lijnen snijden elkaar niet als ze evenwijdig zijn, dus als de richtingscoëfficiënten gelijk zijn.

$$-\frac{2}{a} = -1\frac{3}{5}$$

$$-2 = -1\frac{3}{5}a$$

$$-10 = -8a, \text{ dus } a = 1\frac{1}{4}$$

- E10 a** Eerst de vergelijking van l in de vorm $y = ax + b$ zetten.

$$4x + 2y = 45$$

$$2y = -4x + 45$$

$y = -2x + 22\frac{1}{2}$ substitueren in de vergelijking van de parabool geeft

$$-2x + 22\frac{1}{2} = -2x(x - 8)$$

$$-2x + 22\frac{1}{2} = -2x^2 + 16x$$

$$2x^2 - 18x + 22\frac{1}{2} = 0$$

$$D = (-18)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 22\frac{1}{2} = 144$$

$$x = \frac{18 + \sqrt{144}}{2 \cdot 2} = 7\frac{1}{2} \text{ of } x = \frac{18 - \sqrt{144}}{2 \cdot 2} = 1\frac{1}{2}$$

$$x = 7\frac{1}{2} \text{ geeft } y = -2 \cdot 7\frac{1}{2} + 22\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$$

$$x = 1\frac{1}{2} \text{ geeft } y = -2 \cdot 1\frac{1}{2} + 22\frac{1}{2} = 19\frac{1}{2}$$

De snijpunten zijn $(7\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2})$ en $(1\frac{1}{2}, 19\frac{1}{2})$.

- b** De coördinaten van punt A krijg je door $x = 6$ in te vullen in $y = -2x(x - 8)$.

$$y = -2 \cdot 6(6 - 8) = 24, \text{ de coördinaten van punt } A \text{ zijn } (6, 24).$$

De coördinaten van punt B krijg je door $x = 6$ in te vullen in $l: 4x + 2y = 45$.

$$4 \cdot 6 + 2y = 45$$

$$2y = 21$$

$$y = 10\frac{1}{2}, \text{ de coördinaten van punt } B \text{ zijn } (6, 10\frac{1}{2}).$$

$$AB = 24 - 10\frac{1}{2} = 13\frac{1}{2}$$

- c** $x = p$ invullen in $y = -2x(x - 8)$ geeft $y = -2 \cdot p(p - 8) = -2p^2 + 16p$.

De coördinaten van punt A zijn $(p, -2p^2 + 16p)$.

$$x = p \text{ invullen in } l: 4x + 2y = 45 \text{ geeft } l: 4 \cdot p + 2y = 45$$

$$2y = 45 - 4p$$

$$y = 22\frac{1}{2} - 2p, \text{ de coördinaten van punt } B \text{ zijn } (p, 22\frac{1}{2} - 2p).$$

$$AB = (-2p^2 + 16p) - (22\frac{1}{2} - 2p)$$

$$AB = -2p^2 + 16p - 22\frac{1}{2} + 2p$$

$$AB = -2p^2 + 18p - 22\frac{1}{2}, \text{ en als } AB = 5\frac{1}{2} \text{ dan geldt}$$

$$-2p^2 + 18p - 22\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}$$

$$2p^2 - 18p + 28 = 0$$

$$p^2 - 9p + 14 = 0$$

$$(p - 2)(p - 7) = 0$$

$$p = 2 \text{ of } p = 7$$

E11 a $y = 2 \cdot -8 - \sqrt{-8 + 8} = -16 - 0 = -16$ en $y = 2 \cdot 17 - \sqrt{17 + 8} = 34 - 5 = 29$

De lijn gaat dus door $A(-8, -16)$ en $B(17, 29)$.

De richtingscoëfficiënt is $\frac{29 - (-16)}{17 - (-8)} = \frac{45}{25} = \frac{9}{5}$ dus $y = \frac{9}{5}x + b$.

$x = 17$ en $y = 29$ invullen geeft $29 = \frac{9}{5} \cdot 17 + b$, dus $b = 29 - \frac{153}{5} = -1\frac{3}{5}$

De vergelijking is $y = 1\frac{4}{5}x - 1\frac{3}{5}$

b $2x - \sqrt{x + 8} = 12$

$2x - 12 = \sqrt{x + 8}$

$(2x - 12)^2 = x + 8$

$4x^2 - 48x + 144 = x + 8$

$4x^2 - 49x + 136 = 0$

$D = (-49)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 136 = 225$

$x = \frac{49 - \sqrt{225}}{2 \cdot 4} = 4\frac{1}{4}$ of $x = \frac{49 + \sqrt{225}}{2 \cdot 4} = 8$

$x = 4\frac{1}{4}$ invullen geeft $2 \cdot 4\frac{1}{4} - \sqrt{4\frac{1}{4} + 8} = 8\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2} \neq 12$, klopt niet.

$x = 8$ invullen geeft $2 \cdot 8 - \sqrt{8 + 8} = 16 - 4 = 12$, klopt.

De oplossing is $x = 8$.

E12 a $x + 5 = -4x$ $-4x = 2x - 6$

$5x = 5$

$-6x = -6$

$x + 5 = 2x - 6$

linker snijpunt $x = -1$ middelste snijpunt $x = 1$ rechter snijpunt $x = 11$

b Uit de figuur blijkt dat de ongelijkheid geldt voor $x > -1$.

c $2x - 6 = 0$ oplossen geeft $x = 3$.

Uit de figuur blijkt dat de ongelijkheid geldt voor $3 \leq x < 11$.

d $(x + 5)^2 = (2x - 6)^2$

$x + 5 = 2x - 6$ of $x + 5 = -2x + 6$

$x = 11$ of $3x = 1$

$x = 11$ of $x = \frac{1}{3}$

e $-4x(x + 5) = (x + 5)(2x - 6)$

$x + 5 = 0$ of $-4x = 2x - 6$

$x = -5$ of $-6x = -6$

$x = -5$ of $x = 1$

2 Machtsformules

Voorkennis

V1 a $2^3 \cdot 2^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$

b $a^4 \cdot a^3 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^7$

c $x^3 \cdot x^6 = x^9$

d $(2^3)^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2^{12}$

e $(x^3)^3 = x^9$

f $(2x^3)^4 = 2x^3 \cdot 2x^3 \cdot 2x^3 \cdot 2x^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 = 16x^{12}$

g $(3x^4)^5 = 243x^{20}$

V2 a $3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$

b $7^2 \cdot 7^7 \cdot 7^3 = 7^{2+7+3} = 7^{12}$

c $\frac{2^7}{2^2} = 2^{7-2} = 2^5$

d $(5^3)^2 \cdot 5^6 = 5^6 \cdot 5^6 = 5^{6+6} = 5^{12}$

e $11 \cdot 11^3 \cdot 11^4 \cdot 11^2 = 11^{1+3+4+2} = 11^{10}$

f $\frac{6 \cdot (6^2)^4}{6^3 \cdot 6^3} = \frac{6 \cdot 6^{2 \cdot 4}}{6^{3+3}} = \frac{6 \cdot 6^8}{6^6} = \frac{6^{1+8}}{6^6} = \frac{6^9}{6^6} = 6^{9-6} = 6^3$

V3 a $K = p^3 \cdot p^4$

$K = p^7$

b $b = (a^4)^2$

$b = a^8$

c $N = g^4 \cdot g^2 \cdot (g^3)^5$

$N = g^4 \cdot g^2 \cdot g^{15}$

$N = g^{21}$

d $P = (q^2)^5 \cdot q^2$

$P = q^{10} \cdot q^2$

$P = q^{12}$

e $r = a \cdot (a^2)^4$

$r = a \cdot a^8$

$r = a^9$

f $h = q^3 \cdot q^2 \cdot q \cdot q^2$

$h = q^8$

V4 a $y = (3x^3)^4$

$y = 3^4 \cdot (x^3)^4$

$y = 81x^{12}$

b $g = (5p^2)^2$

$g = 5^2 \cdot (p^2)^2$

$g = 25p^4$

e $j = (a^4)^2 \cdot 2a^3$

$j = a^8 \cdot 2a^3$

$j = 2a^{11}$

f $k = (-2x^3)^3 \cdot (5x)^2$

$k = -8x^9 \cdot 25x^2$

$k = -200x^{11}$

c $h = \left(\frac{-4}{u^2}\right)^3$

$h = \frac{(-4)^3}{(u^2)^3}$

$h = \frac{-64}{u^6}$

d $i = \left(\frac{3}{p^4}\right)^2$

$i = \frac{3^2}{(p^4)^2}$

$i = \frac{9}{p^8}$

g $l = \frac{18t^2 \cdot t^3}{t^4}$

$l = \frac{18t^5}{t^4}$

$l = 18t$

h $m = \left(\frac{4}{3x^2}\right)^3 \cdot 9x^5$

$m = \frac{4^3}{(3x^2)^3} \cdot 9x^5$

$m = \frac{64}{27x^6} \cdot 9x^5$

$m = \frac{64}{3x}$

V5 a Bij de formule $y = x^3$ hoort grafiek B.

b De vergelijking $x^4 = 81$ heeft twee oplossingen, want de lijn $y = 81$ snijdt de grafiek van $y = x^4$ twee keer.

- c De vergelijking $x^3 = 125$ heeft één oplossing, want de lijn $y = 125$ snijdt de grafiek van $y = x^3$ één keer.
- d $x^3 = 125$ $x^4 = 81$
 $x = 5$ $x = 3$ of $x = -3$
- e De lijn $y = -81$ snijdt de grafiek van $y = x^4$ niet, dus $x^4 = -81$ heeft geen oplossingen.
 De lijn $y = -125$ snijdt de grafiek van $y = x^3$ één keer, dus de vergelijking $x^3 = -125$ heeft één oplossing.
- f $x^3 = -125$
 $x = -5$

V6 a $\sqrt[5]{243} = 3$, want $3^5 = 243$.

b $\sqrt[3]{-27} = -3$, want $(-3)^3 = -27$.

V7 a $\sqrt{169} = 13$, want $13^2 = 169$

e $\sqrt[5]{-1} = -1$, want $(-1)^5 = -1$

b $\sqrt[4]{10000} = 10$, want $10^4 = 10000$

f $\sqrt[4]{81} = 3$, want $3^4 = 81$

c $\sqrt[3]{125} = 5$, want $5^3 = 125$

g $\sqrt[10]{1} = 1$, want $1^{10} = 1$

d $\sqrt[3]{-8} = -2$, want $(-2)^3 = -8$

h $\sqrt[4]{-16}$ bestaat niet, want $-16 < 0$

2.1 Negatieve exponenten

intro In 2012 waren er 300 konijnen, dus in 2011 waren er $300 : 2 = 150$ konijnen en in 2010 waren er $150 : 2 = 75$ konijnen.

Ja, dat klopt met de formule, want invullen van $t = -2$ geeft $A = 300 \times 2^{-2} = 75$.

1 a b

3^5	3^4	3^3	3^2	3^1	3^0	3^{-1}	3^{-2}
243	81	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
	$\curvearrowright$	$\curvearrowright$	$\curvearrowright$	$\curvearrowright$	$\curvearrowright$	$\curvearrowright$	
	:3	:3	:3	:3	:3	:3	

c $3^{-3} = \frac{1}{27}$ en $3^{-4} = \frac{1}{81}$

d $a^0 = 1$ en $a^{-1} = \frac{1}{a}$ en $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

2 a $5^0 = 1$, $4^0 = 1$, $3^0 = 1$, $2^0 = 1$ en $1^0 = 1$

Volgens dit rijtje zou de uitkomst $0^0 = 1$ kunnen zijn.

b $0^5 = 0$, $0^4 = 0$, $0^3 = 0$, $0^2 = 0$ en $0^1 = 0$

Volgens dit rijtje zou de uitkomst $0^0 = 0$ kunnen zijn.

c Op grond van opdracht a zou $k^0 = 1$ kunnen zijn, maar op grond van opdracht b zou $k^0 = 0$ kunnen zijn. In het geval dat $k = 0$ krijg je twee verschillende mogelijke uitkomsten, dus bestaat k^0 dan niet.

3 a $t^{-3} = \frac{1}{t^3}$

d $2a^{-8} = \frac{2}{a^8}$

b $a^2 \cdot a^{-6} = a^{-4} = \frac{1}{a^4}$

e $7a^4 \cdot 3a^2 \cdot a^{-8} = 21a^{-2} = \frac{21}{a^2}$

c $\frac{5p \cdot p^0}{(p^2)^3} = \frac{5p}{p^6} = \frac{5}{p^5}$

f $\frac{8x^4}{2x \cdot x^3} = \frac{8x^4}{2x^4} = 4x^0 = 4 \cdot 1 = 4$

2 Machtsformules

$$4 \text{ a } \frac{5}{a^8} = 5 \cdot \frac{1}{a^8} = 5 \cdot a^{-8} = 5a^{-8}$$

$$\frac{1}{4p^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{4} \cdot p^{-2} = \frac{1}{4}p^{-2}$$

$$b \text{ A } \frac{3}{p^3} = 3 \cdot \frac{1}{p^3} = 3p^{-3}$$

$$B \frac{2}{9a^8} = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{a^8} = \frac{2}{9}a^{-8}$$

$$C \frac{1}{6x^4} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x^4} = \frac{1}{6}x^{-4}$$

$$D \frac{1}{2u^5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u^5} = \frac{1}{2}u^{-5}$$

$$5 \text{ a } \frac{6x^2}{8x^9} = \frac{6}{8} \cdot x^{-7} = \frac{3}{4}x^{-7}$$

$$b \frac{1}{(x^2)^3} = \frac{1}{x^6} = x^{-6}$$

$$c \frac{x^0}{x^7} = \frac{1}{x^7} = x^{-7}$$

$$d \frac{18x^4}{3x^2 \cdot 2x^3} = \frac{18x^4}{6x^5} = \frac{18}{6} \cdot \frac{x^4}{x^5} = 3x^{-1}$$

$$e \frac{6x}{3x^9} = \frac{6}{3} \cdot \frac{x}{x^9} = 2 \cdot x^{-8} = 2x^{-8}$$

$$f \frac{6x^2 \cdot (x^3)^2}{3x} = \frac{6x^2 \cdot x^6}{3x} = \frac{6x^8}{3x} = 2x^7$$

$$6 \text{ a } \text{Er geldt } \frac{7}{a^{-3}} = \frac{7 \cdot 1}{a^{-3}} \text{ en } 1 = a^0. \text{ Invullen daarvan geeft } \frac{7}{a^{-3}} = \frac{7 \cdot 1}{a^{-3}} = \frac{7 \cdot a^0}{a^{-3}}$$

Dat is handig, omdat er dan zowel in de teller als in de noemer een macht van a komt te staan.

b Bert komt aan zijn antwoord door de teller en de noemer met a^3 te vermenigvuldigen.

c -

$$7 \text{ a } \frac{8}{a^{-9}} = \frac{8 \cdot a^0}{a^{-9}} = 8 \cdot a^{0-(-9)} = 8a^9$$

$$\text{of } \frac{8}{a^{-9}} = \frac{8 \cdot a^9}{a^{-9} \cdot a^9} = \frac{8a^9}{a^0} = \frac{8a^9}{1} = 8a^9$$

$$b \frac{-12}{d^{-7}} = \frac{-12 \cdot d^0}{d^{-7}} = -12 \cdot d^{0-(-7)} = -12d^7$$

$$\text{of } \frac{-12}{d^{-7}} = \frac{-12 \cdot d^7}{d^{-7} \cdot d^7} = \frac{-12d^7}{d^0} = \frac{-12d^7}{1} = -12d^7$$

$$c \frac{4}{2x^{-3}} = \frac{4}{2} \cdot \frac{x^0}{x^{-3}} = 2 \cdot x^{0-(-3)} = 2x^3$$

$$\text{of } \frac{4}{2x^{-3}} = \frac{4 \cdot x^3}{2x^{-3} \cdot x^3} = \frac{4x^3}{2x^0} = \frac{4x^3}{2 \cdot 1} = 2x^3$$

$$d \frac{21}{7x^{-2}} = \frac{21}{7} \cdot \frac{x^0}{x^{-2}} = 3 \cdot x^{0-(-2)} = 3x^2$$

$$\text{of } \frac{21}{7x^{-2}} = \frac{21 \cdot x^2}{7x^{-2} \cdot x^2} = \frac{21x^2}{7x^0} = \frac{21x^2}{7 \cdot 1} = 3x^2$$

$$e \frac{-1}{2p^{-3}} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{p^0}{p^{-3}} = -\frac{1}{2} \cdot p^{0-(-3)} = -\frac{1}{2}p^3$$

$$\text{of } \frac{-1}{2p^{-3}} = \frac{-1 \cdot p^3}{2p^{-3} \cdot p^3} = \frac{-1 \cdot p^3}{2p^0} = \frac{-1 \cdot p^3}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}p^3$$

$$f \frac{2}{4a^{-4}} = \frac{2}{4} \cdot \frac{a^0}{a^{-4}} = \frac{1}{2} \cdot a^{0-(-4)} = \frac{1}{2}a^4$$

$$\text{of } \frac{2}{4a^{-4}} = \frac{2a^4}{4a^{-4} \cdot a^4} = \frac{2a^4}{4a^0} = \frac{2a^4}{4 \cdot 1} = \frac{1}{2}a^4$$

$$8 \text{ a } \frac{r^4 \cdot r^6}{r^3} = \frac{r^{10}}{r^3} = r^7$$

$$d \frac{d^7 \cdot d^{-1}}{d^8} = \frac{d^6}{d^8} = d^{-2} = \frac{1}{d^2}$$

$$b \frac{(b^2)^4}{b^6} = \frac{b^8}{b^6} = b^2$$

$$e \frac{(q^5)^{-2}}{q^4} = \frac{q^{-10}}{q^4} = q^{-14} = \frac{1}{q^{14}}$$

$$c \frac{8p^3}{p^{-2}} = \frac{8}{1} \cdot \frac{p^3}{p^{-2}} = 8p^5$$

$$f \frac{5x^5 \cdot x^{-3}}{10x^{-7}} = \frac{5}{10} \cdot \frac{x^2}{x^{-7}} = \frac{1}{2}x^9$$

$$9 \text{ a } (2a)^3 = 2 \cdot a \cdot 2 \cdot a \cdot 2 \cdot a = 2^3 \cdot a^3 = 8a^3$$

$$b (-3x)^5 = (-3)^5 \cdot x^5 = -243x^5$$

$$c (-5p)^4 = (-5)^4 \cdot p^4 = 625p^4$$

$$10 \text{ a } (3x^2)^5 = 3^5 \cdot (x^2)^5 = 243x^{10}$$

$$b x^2 \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)^4 = x^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot x^4 = \frac{1}{16}x^6$$

$$c \left(\frac{5}{2^2 \cdot x^3}\right)^3 = \frac{5^3}{(2^2)^3 \cdot (x^3)^3} = \frac{125}{2^6 x^9} = \frac{125}{64x^9} = 1\frac{61}{64}x^{-9}$$

$$d \quad (-4x)^6 = (-4)^6 \cdot x^6 = 4096x^6$$

$$e \quad x^{-5} \cdot \left(-\frac{1}{3}x^2\right)^4 = x^{-5} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^4 \cdot (x^2)^4 = x^{-5} \cdot \frac{1}{81} \cdot x^8 = \frac{1}{81}x^3$$

$$f \quad \frac{6x^2 \cdot (-2x)^5}{4(x^2)^3} = \frac{6x^2 \cdot (-2)^5 \cdot x^5}{4x^6} = \frac{6x^2 \cdot -32x^5}{4x^6} = \frac{-192}{4} \cdot \frac{x^7}{x^6} = -48x$$

03 A = F, rekenregel 4

B = J, rekenregel 1

C = I, rekenregel 3

D = H, rekenregel 5

E = G, rekenregels 3, 1 en 2

05 a Bij stap 1 heeft ze de rekenregels $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$ en $g^0 = 1$ gebruikt.

b Bij stap 2 heeft ze de rekenregel $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$ gebruikt.

c En bij stap 3 heeft ze de rekenregel $\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$ gebruikt.

$$d \quad \frac{24x \cdot x^2}{6x^9} = \frac{24}{6} \cdot \frac{x^3}{x^9} = 4x^{-6}$$

$$g \quad \frac{32(x^4)^2}{8x^2 \cdot 2x^4} = \frac{32x^8}{16x^6} = \frac{32}{16} \cdot \frac{x^8}{x^6} = 2x^2$$

$$e \quad \frac{5x^6}{(x^3)^3} = \frac{5}{1} \cdot \frac{x^6}{x^9} = 5x^{-3}$$

$$h \quad \frac{15x^5}{3x^2} = \frac{15}{3} \cdot \frac{x^5}{x^2} = 5x^3$$

$$f \quad \frac{x^3 \cdot x^0}{x^4} = \frac{x^3 \cdot 1}{x^4} = \frac{x^3}{x^4} = x^{-1}$$

$$i \quad \frac{45(x^2)^3 \cdot (x^3)^4}{9x^2 \cdot x^0} = \frac{45x^6 \cdot x^{12}}{9x^2 \cdot 1} = \frac{45}{9} \cdot \frac{x^{18}}{x^2} = 5x^{16}$$

$$U1 \quad a \quad x^{a+b} = x^a \cdot x^b = p \cdot q$$

$$d \quad x^{a-b} = \frac{x^a}{x^b} = \frac{p}{q}$$

$$b \quad x^{3b} = (x^b)^3 = q^3$$

$$e \quad x^{2a+b} = x^{2a} \cdot x^b = (x^a)^2 \cdot x^b = p^2 \cdot q$$

$$c \quad (x^5)^a = x^{5a} = (x^a)^5 = p^5$$

$$f \quad (x^3)^{-2a+5b} = x^{-6a+15b} = x^{-6a} \cdot x^{15b} = (x^a)^{-6} \cdot (x^b)^{15} = p^{-6} \cdot q^{15}$$

$$U2 \quad \frac{(x^q)^2 \cdot px^{13} \cdot x^{-5}}{4 \cdot (x^{-3})^q \cdot x \cdot 3x^2} = \frac{x^{2q} \cdot px^{13} \cdot x^{-5}}{4 \cdot x^{-3q} \cdot x \cdot 3x^2} = \frac{px^{2q+8}}{12x^{-3q+3}} = \frac{p}{12} \cdot \frac{x^{2q+8}}{x^{-3q+3}} =$$

$$\frac{p}{12} x^{2q+8-(-3q+3)} = \frac{p}{12} x^{2q+8+3q-3} = \frac{p}{12} x^{5q+5}$$

Als dit voor elke waarde van x gelijk moet zijn aan 1, dan moet $\frac{p}{12} = 1$ ofwel $p = 12$ zijn.

Ook moet dan $5q + 5 = 0$ ofwel $q = \frac{-5}{5} = -1$ zijn.

2.2 Gebroken exponenten

intro De groeifactor per uur is $900 : 100 = 9$. Dat zou betekenen dat de groeifactor per half uur keer de groeifactor per half uur 9 zou moeten zijn.

Je weet dat $3 \cdot 3 = 9$, dus de waarde van $9^{\frac{1}{2}} = 3$.

$$11 \quad a \quad 3^{\frac{1}{2}} \approx 1,7$$

$$b \quad \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3^{\frac{1}{2} \cdot 2} = 3^1 = 3$$

c Er geldt ook dat $(\sqrt{3})^2 = 3$. Zowel $3^{\frac{1}{2}}$ als $\sqrt{3}$ zijn positief en daaruit volgt dat $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

d Er geldt dat $\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 4^{\frac{1}{3} \cdot 3} = 4^1 = 4$ en $\left(\sqrt[3]{4}\right)^3 = 4$. Daaruit volgt dat $4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$.

12 a $\sqrt[5]{6} = 6^{\frac{1}{5}}$

b $\sqrt[10]{11} = 11^{\frac{1}{10}}$

c $\sqrt[7]{a} = a^{\frac{1}{7}}$

d $\sqrt{k} = k^{\frac{1}{2}}$

e $k\sqrt{k} = k^1 \cdot k^{\frac{1}{2}} = k^{\frac{3}{2}}$

f $p^3\sqrt[4]{p} = p^3 \cdot p^{\frac{1}{4}} = p^{\frac{13}{4}}$

13 a $4^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{4}$

b $7^{\frac{1}{5}} = 7^1 \cdot 7^{\frac{1}{5}} = 7\sqrt[5]{7}$

c $a^{\frac{2}{7}} = a^2 \cdot a^{\frac{1}{7}} = a^2\sqrt[7]{a}$

d $(6^2)^{\frac{1}{8}} = 6^{\frac{2}{8}} = 6^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{6}$

e $3^{\frac{1}{8}} \cdot 3 = 3\sqrt[8]{3}$

f $5 \cdot (5^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = 5 \cdot 5^{\frac{1}{6}} = 5\sqrt[6]{5}$

14 a $5^{\frac{2}{3}} = (5^2)^{\frac{1}{3}}$

b Er geldt dat $g^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{g}$ en als $g = 5^2$, dan krijg je $5^{\frac{2}{3}} = (5^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$.

15 a Ja, beide berekeningen kunnen kloppen.

b Op grond van deze berekeningen kan $(-8)^{\frac{1}{3}}$ zowel 2 als -2 zijn.

Dat kan niet, dus kun je geen waarde aan $(-8)^{\frac{1}{3}}$ toekennen.

16 a $7^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{7^2}$

b $5^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{5^5}$

c $8^{\frac{2}{3}} = 8^2\sqrt[3]{8^3} = 64\sqrt[3]{512}$

d $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

e $a^{\frac{1}{3}} = a^1 \cdot a^{\frac{2}{3}} = a\sqrt[3]{a^2}$

f $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^2 = \sqrt{a} \cdot a^2 = a^2\sqrt{a}$

g $a^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$

h $a^{-\frac{2}{7}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{a^2}}$

17 a $\sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}$

b $\sqrt[4]{7^3} = 7^{\frac{3}{4}}$

c $\frac{1}{\sqrt[5]{6}} = \frac{1}{6^{\frac{1}{5}}} = 6^{-\frac{1}{5}}$

d $\sqrt[8]{a^3} = a^{\frac{3}{8}}$

e $\sqrt[10]{a^6} = a^{\frac{6}{10}} = a^{\frac{3}{5}}$

f $\frac{1}{\sqrt[5]{a^3}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{5}}} = a^{-\frac{3}{5}}$

18 a $\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[12]{2^5} = 2^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{5}{12}} = 2^{\frac{2}{12} + \frac{4}{12} + \frac{5}{12}} = 2^{\frac{11}{12}}$

b $\sqrt[4]{5^2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{2}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 5^{\frac{4}{3}}$

c $\frac{\sqrt[3]{7^2} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt[6]{7^5}} = \frac{7^{\frac{2}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{5}{6}}} = \frac{7^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}}{7^{\frac{5}{6}}} = \frac{7^{\frac{4}{6} + \frac{3}{6}}}{7^{\frac{5}{6}}} = \frac{7^{\frac{7}{6}}}{7^{\frac{5}{6}}} = 7^{\frac{7}{6} - \frac{5}{6}} = 7^{\frac{2}{6}} = 7^{\frac{1}{3}}$

19 a $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{4} + \frac{2}{4}} = 3^{\frac{3}{4}}$

b $\frac{\sqrt[5]{6^3}}{6\sqrt{6}} = \frac{6^{\frac{3}{5}}}{6^1 \cdot 6^{\frac{1}{2}}} = \frac{6^{\frac{3}{5}}}{6^{\frac{3}{2}}} = 6^{\frac{3}{5} - 1\frac{1}{2}} = 6^{-\frac{9}{10}}$

c $\frac{1}{p^{\frac{5}{3}}\sqrt[5]{p^3}} = \frac{1}{p^1 \cdot p^{\frac{3}{5}}} = \frac{1}{p^{\frac{8}{5}}} = p^{-1\frac{3}{5}}$

d $\sqrt[3]{7^2} \cdot \sqrt[6]{7} = 7^{\frac{2}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{6}} = 7^{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}} = 7^{\frac{4}{6} + \frac{1}{6}} = 7^{\frac{5}{6}}$

e $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{3}}} = 3^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{6} - \frac{2}{6}} = 3^{\frac{1}{6}}$

f $\frac{\sqrt{p}}{p^{\frac{1}{4}}\sqrt[4]{p}} = \frac{p^{\frac{1}{2}}}{p^1 \cdot p^{\frac{1}{4}}} = \frac{p^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{5}{4}}} = p^{\frac{1}{2} - 1\frac{1}{4}} = p^{-\frac{3}{4}}$

20 a $a^2 \cdot a^{-\frac{1}{2}} = a^2 \cdot a^{-\frac{1}{2}} = a^{2-\frac{1}{2}} = a^{1\frac{1}{2}} = a^1 \cdot a^{\frac{1}{2}} = a\sqrt{a}$

b $(a^{-\frac{1}{3}})^5 \cdot a = a^{-\frac{5}{3}} \cdot a^1 = a^{-\frac{5}{3}+1} = a^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$

c $\frac{(2a)^2}{3\sqrt{a}} = \frac{4a^2}{3a^{\frac{1}{2}}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{a^2}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{4}{3} a^{2-\frac{1}{2}} = \frac{4}{3} a^{1\frac{1}{2}} = \frac{4}{3} a^1 \cdot a^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3} a\sqrt{a}$

d $(a^{-3})^{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{a} = a^{-\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{-\frac{3}{5}+\frac{1}{2}} = a^{-\frac{6}{10}+\frac{5}{10}} = a^{-\frac{1}{10}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{10}}} = \frac{1}{\sqrt[10]{a}}$

e $a^{-2} \cdot (\sqrt{a})^3 \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{-2} \cdot (a^{\frac{1}{2}})^3 \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{-2} \cdot a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{-2+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} = a^0 = 1$

f $a \cdot a^3 \cdot \frac{1}{a\sqrt{a}} = a^1 \cdot a^3 \cdot \frac{1}{a^1 \cdot a^{\frac{1}{2}}} = a^4 \cdot \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = a^4 \cdot a^{-\frac{1}{2}} = a^{4-\frac{1}{2}} = a^{3\frac{1}{2}} = a^3 \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^3\sqrt{a}$

21 a Bij een gewicht van 40 gram oftewel 0,04 kg is de huidoppervlakte $\sqrt[3]{729,0 \cdot 0,04^2} = \sqrt[3]{1,1664} = 1,0526... \text{ dm}^2$ en dat is ongeveer 105 cm^2 .

b Bij de mens is $H = \sqrt[3]{1404,9 \cdot G^2} = \sqrt[3]{1404,9} \cdot \sqrt[3]{G^2} \approx 11,1999 G^{\frac{2}{3}}$, dus $a \approx 11,2$ en $b = \frac{2}{3}$.

c Bij de egel is $H = \sqrt[3]{421,9 \cdot G^2} = \sqrt[3]{421,9} \cdot \sqrt[3]{G^2} \approx 7,5001 G^{\frac{2}{3}}$, dus $a \approx 7,5$ en $b = \frac{2}{3}$.

016 a $5^{\frac{3}{8}}$ is gelijk aan $(5^3)^{\frac{1}{8}}$ en dus gelijk aan $\sqrt[8]{5^3}$

b $7^{\frac{3}{2}}$ is gelijk aan $7^3 \cdot 7^{\frac{2}{2}}$ en dus gelijk aan $343 \sqrt[5]{7^2}$

c $a^{-\frac{1}{3}}$ is gelijk aan $\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}$ en dus gelijk aan $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$

d $10^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{10^3} = \sqrt[7]{1000}$

e $8^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{8^3} = \sqrt[4]{512}$

f $6^{\frac{2}{5}} = 6^2 \sqrt[5]{6} = 36 \sqrt[5]{6}$

g $9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

h $a^{\frac{2}{4}} = a^2 \cdot a^{\frac{3}{4}} = a^2 \sqrt[4]{a^3}$

i $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^3 = a^3 \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^3 \cdot \sqrt[3]{a^2}$

j $a^{-\frac{1}{7}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{a}}$

k $a^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{a^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{a^5}}$

020 a $x^{-\frac{1}{3}} \cdot x = x^{-\frac{1}{3}} \cdot x^1 = x^{-\frac{1}{3}+1} = x^{\frac{2}{3}}$

b $x^2 \cdot \sqrt[4]{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^{2+\frac{1}{4}} = x^{2\frac{1}{4}}$

c De breuk heeft nu de vorm $\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{4}}}$. Dat is te schrijven als $x^{\frac{2}{3}-\frac{2}{4}} = x^{\frac{8}{12}-\frac{2}{12}} = x^{-\frac{1}{6}}$

d $x^{-\frac{7}{12}} = \frac{1}{x^{\frac{7}{12}}} = \frac{1}{x^1 \cdot x^{\frac{7}{12}}} = \frac{1}{x \cdot \sqrt[12]{x^7}}$

U3 a $x^{\frac{1}{2}a} = (x^a)^{\frac{1}{2}} = p^{\frac{1}{2}}$

b $x^{\frac{2}{3}b} = (x^b)^{\frac{2}{3}} = q^{\frac{2}{3}}$

c $x^{\frac{1}{3}a+\frac{1}{4}b} = x^{\frac{1}{3}a} \cdot x^{\frac{1}{4}b} = (x^a)^{\frac{1}{3}} \cdot (x^b)^{\frac{1}{4}} = p^{\frac{1}{3}} \cdot q^{\frac{1}{4}}$

d $x^{2a-\frac{2}{5}b} = \frac{x^{2a}}{x^{\frac{2}{5}b}} = \frac{(x^a)^2}{(x^b)^{\frac{2}{5}}} = \frac{p^2}{q^{\frac{2}{5}}}$

U4 a Er geldt dat $\sqrt[10]{2^6} = 2^{\frac{6}{10}}$ en $\sqrt[p]{2} \cdot \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{p}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}$. De grondtallen zijn gelijk, dus de exponenten moeten dan ook gelijk zijn en dat geeft $\frac{6}{10} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}$. Hieruit volgt $\frac{1}{p} = \frac{1}{10}$ ofwel $p = 10$.

2 Machtsformules

- b** Er geldt dat $\sqrt[b]{2^a} = 2^{\frac{a}{b}}$ en $2\sqrt{2} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1\frac{1}{2}}$. De grondtallen zijn gelijk, dus de exponenten moeten dan ook gelijk zijn en dat geeft $\frac{a}{b} = 1\frac{1}{2}$.

Een formule voor het verband tussen a en b is $\frac{a}{b} = 1\frac{1}{2}$ ofwel $a = 1\frac{1}{2}b$.

2.3 Machtsformules

intro Invullen van bijvoorbeeld $x = 0$ bij $y = x^{-1}$ geeft $y = 0^{-1} = \frac{1}{0}$ en dat kan niet, dus grafiek B hoort bij $y = x^{-1}$.

Invullen van bijvoorbeeld $x = 0$ bij $y = x^{\frac{1}{2}}$ geeft $y = 0^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0} = 0$, dus grafiek A hoort bij $y = x^{\frac{1}{2}}$.

- 22 a** Bij grafiek 1 hoort $y = 0,1x^4$, bij grafiek 2 hoort $y = -x^5$, bij grafiek 3 hoort $y = 2x^3$ en bij grafiek 4 hoort $y = x^6$.
b De grafieken 1 en 4 zijn lijnsymmetrisch.
c De grafieken 2 en 3 zijn puntsymmetrisch.

23 a $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ en $y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

- b** Grafiek B hoort bij $y = \frac{1}{x}$, want bijvoorbeeld $x = -1$ invullen geeft $y = \frac{1}{-1} = -1$.

Grafiek A hoort bij $y = \frac{1}{x^2}$, want bijvoorbeeld $x = -1$ invullen geeft $y = \frac{1}{(-1)^2} = \frac{1}{1} = 1$.

- c** Van beide grafieken is de verticale asymptoot de lijn $x = 0$ en de horizontale asymptoot de lijn $y = 0$.
d De grafiek van $y = x^{-1}$ is lijnsymmetrisch in de lijnen $y = x$ en $y = -x$.
De grafiek van $y = x^{-2}$ is lijnsymmetrisch in de y -as.
e De grafiek van $y = x^{-1}$ is puntsymmetrisch in de oorsprong.

- 24 a** Grafiek A hoort bij $y = x^{-4}$, want bijvoorbeeld $x = -1$ invullen geeft $y = (-1)^{-4} = \frac{1}{(-1)^4} = \frac{1}{1} = 1$. Grafiek B hoort bij $y = x^{-3}$, want bijvoorbeeld $x = -1$

invullen geeft $y = (-1)^{-3} = \frac{1}{(-1)^3} = \frac{1}{-1} = -1$.

- b** De grafiek van $y = x^{-4}$ is lijnsymmetrisch in de y -as.
c De grafiek van $y = x^{-3}$ is puntsymmetrisch in de oorsprong.
d De grafiek bij deze formule is lijnsymmetrisch. Je kunt $y = x^{-12}$

schrijven als $y = \frac{1}{x^{12}}$ en dan zie je dat de uitkomst bij $x = a$ altijd gelijk is aan de

uitkomst bij $x = -a$, want $\frac{1}{(-a)^{12}} = \frac{1}{(-1)^{12} \cdot a^{12}} = \frac{1}{1 \cdot a^{12}} = \frac{1}{a^{12}}$

25 a $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ en $y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.

- b** Grafiek B hoort bij $y = x^{\frac{1}{2}}$, want bijvoorbeeld $x = 4$ invullen geeft $y = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

En grafiek A hoort bij $y = x^{\frac{1}{3}}$, want bijvoorbeeld $x = 4$ invullen geeft $y = 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4} \approx 1,6$

26 a $y = 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$

$y = 4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16} \approx 2,52$

$y = 4^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{4} \approx 1,41$

$y = 4^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{4} \approx 1,32$

- b Grafiek A hoort bij $y = x^{\frac{1}{5}}$, grafiek B hoort bij $y = x^{\frac{1}{4}}$, grafiek C hoort bij $y = x^{\frac{2}{3}}$ en grafiek D hoort bij $y = x^{\frac{3}{2}}$.
- c De vier grafieken hebben de punten (0, 0) en (1, 1) gemeenschappelijk.
- d Ja, de twee punten uit opdracht c liggen ook op de grafiek van $y = x^{\frac{3}{4}}$, want $y = 0^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{0^3} = \sqrt[4]{0} = 0$ en $y = 1^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{1^3} = \sqrt[4]{1} = 1$.

27 a $y = x^{\frac{1}{2}}$
 $y = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}$
 $y = x^2 \cdot \sqrt{x}$

b $y = x^{\frac{4}{3}}$
 $y = x^4 \cdot x^{\frac{1}{3}}$
 $y = x^4 \cdot \sqrt[3]{x}$

c $y = x^{\frac{3}{5}}$
 $y = x^3 \cdot x^{\frac{1}{5}}$
 $y = x^3 \cdot \sqrt[5]{x}$

d $y = x^{\frac{3}{5}}$
 $y = x^3 \cdot x^{\frac{2}{5}}$
 $y = x^3 \cdot \sqrt[5]{x^2}$

e $y = x^{\frac{1}{3}}$
 $y = x^1 \cdot x^{\frac{2}{3}}$
 $y = x \cdot \sqrt[3]{x^2}$

f $y = x^{\frac{2}{7}}$
 $y = x^2 \cdot x^{\frac{4}{7}}$
 $y = x^2 \cdot \sqrt[7]{x^4}$

- 28 a** $y = 3^{0,57} \approx 1,87$ en $y = 3^{1,68} \approx 6,33$.
- b** Grafiek A hoort bij $y = x^{1,68}$ en grafiek B hoort bij $y = x^{0,57}$.
- c** $y = 0^{1,2} = 0$ en $y = 1^{1,2} = 1$ dus de grafiek van $y = x^{1,2}$ gaat door (0, 0) en (1, 1).
- d** De grafiek van $y = x^{1,2}$ ligt tussen de grafieken van $y = x^{0,57}$ en $y = x^{1,68}$.

- 29 a** Invullen van $c = 44$ en $d = 0,36$ in de formule geeft dat hoogte van de boom $h = 44 \times 0,36^{0,65} \approx 22,6$ meter is.
- b** Invullen van $h = 18$ en $d = 0,20$ in de formule geeft $c \cdot 0,20^{0,65} = 18$, dus $c = \frac{18}{0,20^{0,65}} \approx 51$.

- 027 a** Bij de laatste stap is de rekenregel $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$ gebruikt.
- b** Op de puntjes komt het getal $\frac{2}{3}$ te staan.
- c** $y = x^4 \cdot \sqrt[3]{x^2}$

d $y = x^{\frac{1}{5}}$
 $y = x^1 \cdot x^{\frac{1}{5}}$
 $y = x \cdot \sqrt[5]{x}$

e $y = x^{\frac{2}{2}}$
 $y = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}$
 $y = x^2 \cdot \sqrt{x}$

f $y = x^{\frac{1}{3}}$
 $y = x^1 \cdot x^{\frac{2}{3}}$
 $y = x \cdot \sqrt[3]{x^2}$

g $y = x^{\frac{7}{7}}$
 $y = x^7 \cdot x^{\frac{3}{7}}$
 $y = x^7 \cdot \sqrt[7]{x^3}$

h $y = x^{\frac{4}{5}}$
 $g(x) = x^4 \cdot x^{\frac{4}{5}}$
 $y = x^4 \cdot \sqrt[5]{x^4}$

i $y = x^{\frac{3}{9}}$
 $y = x^3 \cdot x^{\frac{5}{9}}$
 $y = x^3 \cdot \sqrt[9]{x^5}$

- U5** Invullen van $x = 1$ en $y = 6$ geeft $6 = c \cdot 1^a$, dus $c = 6$.
 Invullen van $c = 6$, $x = 4$ en $y = 48$ geeft $48 = 6 \cdot 4^a$, ofwel $4^a = 8$.
 Dat is te schrijven als $(2^2)^a = 2^3$, ofwel $2^{2a} = 2^3$, dus $2a = 3$ en $a = 1\frac{1}{2}$.

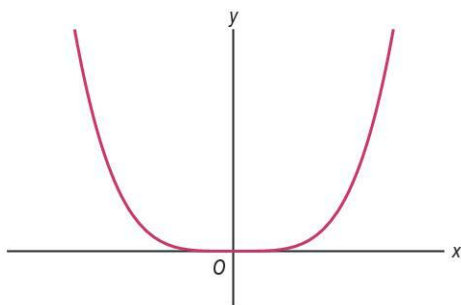
2 Machtsformules

- U6 a** Grafiek A gaat door het punt (4, 16). Invullen van $x = 4$ en $y = 16$ in $y = 0,5 \cdot x^a$ geeft $16 = 0,5 \cdot 4^a$, ofwel $4^a = 32$. Dat is te schrijven als $(2^2)^a = 2^5$, ofwel $2^{2a} = 2^5$, dus $2a = 5$ en $a = 2\frac{1}{2}$.
- b** Grafiek B gaat door het punt (1, 20).
Invullen van $x = 1$ en $y = 20$ in $y = c \cdot x^b$ geeft $20 = c \cdot 1^b$, dus $c = 20$.
Grafiek B gaat ook door het punt (4, 40).
Invullen van $c = 20$, $x = 4$ en $y = 40$ geeft $40 = 20 \cdot 4^b$, ofwel $4^b = 2$.
Dat is te schrijven als $(2^2)^b = 2^1$, ofwel $2^{2b} = 2^1$, dus $2b = 1$ en $b = \frac{1}{2}$.
- c** Invullen van $x = 8$ geeft $y = 0,5 \cdot 8^{2,5} \approx 90,5$ en $y = 20 \cdot 8^{0,5} \approx 56,6$.
Bij $x = 4$ ligt grafiek A onder grafiek B en bij $x = 8$ ligt grafiek A boven grafiek B.
Dus het snijpunt ligt tussen $x = 4$ en $x = 8$ en dat is links van de lijn $x = 8$.

2.4 Vergelijkingen oplossen

- intro** $x = 0$ is een oplossing van de vergelijking $x^4 = 4x$.
 $x = 4$ is een oplossing van de vergelijking $x^{\frac{1}{2}} = 2$.
 $x = 1$ is een oplossing van de vergelijking $x^{-3} = 1$.
 $x = \sqrt{5}$ is een oplossing van de vergelijking $x^2 = 5$.
 $x = \sqrt[3]{5}$ is geen oplossing van één van de vergelijkingen.
 $x = -\sqrt{5}$ is een oplossing van de vergelijking $x^2 = 5$.
 $x = 8$ is een oplossing van de vergelijking $x^{\frac{2}{3}} = 4$.

30 a



- b** De vergelijking $x^4 = 16$ heeft twee oplossingen.
c Invullen van $x = 2$ geeft $2^4 = 16$ en dat klopt en invullen van $x = -2$ geeft $(-2)^4 = 16$ en dat klopt ook.
d Invullen van $x = -2$ geeft $(-2)^5 = -32$ en dat klopt.
Het is de enige oplossing, want een positief getal tot de macht 5 heeft een positief getal als uitkomst.
e $\sqrt[3]{-1000} = -10$ en $-\sqrt[3]{1000} = -10$, dus $\sqrt[3]{-1000} = -\sqrt[3]{1000}$.
- 31 a** $x^5 = 32$
 $x = \sqrt[5]{32} = 2$
- b** $p^4 = 20$
 $p = \sqrt[4]{20}$ of $p = -\sqrt[4]{20}$
- c** $7 + 2k^8 = 4$
 $2k^8 = -3$
 $k^8 = -1,5$
geen oplossing
- d** $0,2x^3 = -12$
 $x^3 = -60$
 $x = \sqrt[3]{-60}$
- 32 a** Bij stap 1 is de rekenregel $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$ gebruikt en bij stap 2 dat uit $\frac{A}{B} = C$ volgt dat $B \cdot C = A$
- b** $3x^5 = 1$
 $x^5 = \frac{1}{3}$
 $x = \sqrt[5]{\frac{1}{3}}$

$$\begin{aligned} \text{c } x^{-5} &= 3 \\ x^{-5} \cdot x^5 &= 3 \cdot x^5 \\ 1 &= 3x^5 \\ x^5 &= \frac{1}{3} \\ x &= \sqrt[5]{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 33 \text{ a } x^{-5} &= 8 \\ \frac{1}{x^5} &= 8 \\ 8x^5 &= 1 \\ x^5 &= \frac{1}{8} \\ x &= \sqrt[5]{\frac{1}{8}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } x^{-4} &= 3 \\ \frac{1}{x^4} &= 3 \\ 3x^4 &= 1 \\ x^4 &= \frac{1}{3} \\ x &= \sqrt[4]{\frac{1}{3}} \text{ of } x = -\sqrt[4]{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } 6x^{-3} &= 4 \\ \frac{6}{x^3} &= 4 \\ 4x^3 &= 6 \\ x^3 &= 1\frac{1}{2} \\ x &= \sqrt[3]{1\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } 8x^{-1} + 9 &= 10 \\ \frac{8}{x} + 9 &= 10 \\ \frac{8}{x} &= 1 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

- 34 a Het is handig om $x^{\frac{2}{3}}$ tot de macht $\frac{3}{2}$ te verheffen, omdat je dan als macht $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$ krijgt.
b Dat volgt uit de rekenregel $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$.
c Er geldt $\sqrt{125} = \sqrt{25 \cdot 5} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$, dus $p = 5$.

$$\begin{aligned} 35 \text{ a } x^{\frac{3}{7}} &= 8 \\ \left(x^{\frac{3}{7}}\right)^{\frac{7}{3}} &= 8^{\frac{7}{3}} \\ x^1 &= 8^{\frac{7}{3}} \\ x &= \sqrt[3]{8^7} = 128 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } x^{\frac{5}{9}} &= 6 \\ \left(x^{\frac{5}{9}}\right)^{\frac{9}{5}} &= 6^{\frac{9}{5}} \\ x^1 &= 6^{\frac{9}{5}} \\ x &= \sqrt[5]{6^9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } x^{1\frac{1}{2}} &= 4 \\ \left(x^{1\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} &= 4^{\frac{2}{3}} \\ x^1 &= 4^{\frac{2}{3}} \\ x &= \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } 5x^{\frac{4}{5}} &= 10 \\ x^{\frac{4}{5}} &= 2 \\ \left(x^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{5}{4}} &= 2^{\frac{5}{4}} \\ x^1 &= 2^{\frac{5}{4}} \\ x &= \sqrt[4]{2^5} = \sqrt[4]{32} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } 4x^{-\frac{3}{4}} &= 8 \\ x^{-\frac{3}{4}} &= 2 \\ \left(x^{-\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{4}{3}} &= 2^{-\frac{4}{3}} \\ x^1 &= \frac{1}{2^{\frac{4}{3}}} \\ x &= \frac{1}{\sqrt[3]{2^4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{16}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } 3x^{-2\frac{1}{2}} + 8 &= 14 \\ 3x^{-2\frac{1}{2}} &= 6 \\ x^{-2\frac{1}{2}} &= 2 \\ \left(x^{-2\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{5}} &= 2^{-\frac{2}{5}} \\ x^1 &= \frac{1}{2^{\frac{2}{5}}} \\ x &= \frac{1}{\sqrt[5]{2^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{4}} \end{aligned}$$

2 Machtsformules

36 a Het is handig om links en rechts tot de macht $\frac{1}{1,35}$ te verheffen, omdat je dan als macht $1,35 \cdot \frac{1}{1,35} = 1$ krijgt.

b $x = 15^{1,35}$, dus $x \approx 7,43$

37 a $x^{3,26} = 42$

$$x = 42^{\frac{1}{3,26}} \approx 3,15$$

b $x^{-0,35} = 0,975$

$$x = 0,975^{-\frac{1}{0,35}} \approx 1,08$$

c $5x^{1,8} = 100$

$$x^{1,8} = 20$$

$$x = 20^{\frac{1}{1,8}} \approx 5,28$$

d $45 - 8x^{0,3498} = 0$

$$8x^{0,3498} = 45$$

$$x^{0,3498} = 5,625$$

$$x = 5,625^{\frac{1}{0,3498}} \approx 139,45$$

38 a $8x^5 = x^7$

$$8x^5 - x^7 = 0$$

$$x^5(8 - x^2) = 0$$

$$x^5 = 0 \text{ of } 8 - x^2 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x^2 = 8$$

$$x = 0 \text{ of } x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ of } x = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$$

b Linda houdt dan de vergelijking $8 = x^2$ over.

c Linda vindt de oplossing $x = 0$ niet.

39 a $x^6 = 4x^4$

$$x^6 - 4x^4 = 0$$

$$x^4(x^2 - 4) = 0$$

$$x^4 = 0 \text{ of } x^2 - 4 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x^2 = 4$$

$$x = 0 \text{ of } x = 2 \text{ of } x = -2$$

b $-3x^{13} = 9x^8$

$$-3x^{13} - 9x^8 = 0$$

$$-3x^8(x^5 + 3) = 0$$

$$-3x^8 = 0 \text{ of } x^5 + 3 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x^5 = -3$$

$$x = 0 \text{ of } x = \sqrt[5]{-3}$$

c $5x^3 = 80x^7$

$$x^3 \cdot 5 = x^3 \cdot 80x^4$$

$$x^3 = 0 \text{ of } 5 = 80x^4$$

$$x = 0 \text{ of } 16x^4 = 1$$

$$x = 0 \text{ of } x^4 = \frac{1}{16}$$

$$x = 0 \text{ of } x = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2} \text{ of}$$

$$x = -\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = -\frac{1}{2}$$

d $\frac{1}{2}x^9 + 5x^5 = 0$

$$\frac{1}{2}x^5(x^4 + 10) = 0$$

$$\frac{1}{2}x^5 = 0 \text{ of } x^4 + 10 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x^4 = -10$$

$$x = 0$$

e $12x^2 - 3x^5 = 0$

$$3x^2(4 - x^3) = 0$$

$$3x^2 = 0 \text{ of } 4 - x^3 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x^3 = 4$$

$$x = 0 \text{ of } x = \sqrt[3]{4}$$

f $x^2 = 2x^{\frac{1}{2}}$

$$x^2 - 2x^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{3}{2}} - 2) = 0$$

$$x^{\frac{1}{2}} = 0 \text{ of } x^{\frac{3}{2}} - 2 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x^{\frac{3}{2}} = 2$$

$$x = 0 \text{ of } x = 2^2 = 4$$

40 a $5x^{-3} = 80x^7$

$$5 = 80x^{10}$$

$$x^{10} = \frac{5}{80} = \frac{1}{16}$$

$$x = \sqrt[10]{\frac{1}{16}} \text{ of } x = -\sqrt[10]{\frac{1}{16}}$$

b $2x^{3\frac{1}{2}} - 5x^{2\frac{1}{2}} = 0$

$$x^{2\frac{1}{2}}(2x - 5) = 0$$

$$x^{2\frac{1}{2}} = 0 \text{ of } 2x - 5 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 2\frac{1}{2}$$

c $4x^{3\frac{1}{4}} = 48$

$$x^{\frac{13}{4}} = 12$$

$$x = 12^{\frac{4}{13}}$$

$$x = \sqrt[13]{12^4}$$

d $3x^{-\frac{1}{2}} = 15$

$$x^{-\frac{1}{2}} = 5$$

$$x = 5^{-2}$$

$$x = \frac{1}{25}$$

033 a $2x^{-4} - 7 = 5$

$$2x^{-4} = 12$$

$$x^{-4} = 6$$

b $x^{-4} = \frac{1}{x^4}$

c Uit $x^{-4} = 6$ volgt $\frac{1}{x^4} = 6$ en dus $6x^4 = 1$

d $x^4 = \frac{1}{6}$. De exponent is even en $\frac{1}{6} > 0$, dus de vergelijking heeft twee oplossingen.

e De oplossing is $x = \sqrt[4]{\frac{1}{6}}$ of $x = -\sqrt[4]{\frac{1}{6}}$

f $x^{-3} = 8$

$$\frac{1}{x^3} = 8$$

$$8x^3 = 1$$

$$x^3 = \frac{1}{8}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

g $x^{-2} = \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \text{ of } x = -2$$

h $8x^{-5} = 1$

$$\frac{8}{x^5} = 1$$

$$x^5 = 8$$

$$x = \sqrt[5]{8}$$

i $79 - 4x^{-4} = 15$

$$79 - \frac{4}{x^4} = 15$$

$$\frac{4}{x^4} = 64$$

$$64x^4 = 4$$

$$x^4 = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$$

$$x = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2} \text{ of } x = -\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = -\frac{1}{2}$$

039 a Op de puntjes moet $3 - x^4 = 0$ staan.

b De exponent is even en $3 > 0$, dus vergelijking $x^4 = 3$ heeft twee oplossingen.

c De oplossing is $x = 0$ of $x = \sqrt[4]{3}$ of $x = -\sqrt[4]{3}$.

U7 $5x^3 = x^5$

$$5x^3 = x^2 \cdot x^3$$

$$x^3 = 0 \text{ of } 5 = x^2$$

$$x = 0 \text{ of } x = \sqrt{5} \text{ of } x = -\sqrt{5}$$

De coördinaten van A en B zijn $(-\sqrt{5}, -25\sqrt{5})$ en $(\sqrt{5}, 25\sqrt{5})$.

$$AB = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + (50\sqrt{5})^2} = \sqrt{12520}$$

2 Machtsformules

U8 a $2x^{3,67} - 5x^{2,44} = 0$

$$x^{2,44}(2x^{1,23} - 5) = 0$$

$$x^{2,44} = 0 \text{ of } 2x^{1,23} - 5 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } 2x^{1,23} = 5$$

$$x = 0 \text{ of } x^{1,23} = 2,5$$

$$x = 0 \text{ of } x = 2,5^{\frac{1}{1,23}} \approx 2,11$$

b $x^3 + 2x^2 + x = 0$

$$x(x^2 + 2x + 1) = 0$$

$$x(x+1)(x+1) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x+1 = 0 \text{ of } x+1 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -1$$

c $x^{3,45} + 2x^{2,45} + x^{1,45} = 0$

$$x^{1,45}(x^2 + 2x + 1) = 0$$

$$x^{1,45}(x+1)(x+1) = 0$$

$$x^{1,45} = 0 \text{ of } x+1 = 0 \text{ of } x+1 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -1$$

d $x^{-3} - 32x^2 = 0$

$$1 - 32x^5 = 0$$

$$32x^5 = 1$$

$$x^5 = \frac{1}{32}$$

$$x = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$$

e $3x^2 = 12x\sqrt{x}$

$$3x^2 - 12x^{1\frac{1}{2}} = 0$$

$$3x^{1\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} - 4) = 0$$

$$3x^{1\frac{1}{2}} = 0 \text{ of } x^{\frac{1}{2}} - 4 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } \sqrt{x} = 4$$

$$x = 0 \text{ of } x = 16$$

f $x^2 = 2\sqrt[3]{x}$

$$x^2 - 2x^{\frac{1}{3}} = 0$$

$$x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{2}{3}} - 2) = 0$$

$$\sqrt[3]{x} = 0 \text{ of } x^{\frac{2}{3}} - 2 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x^{\frac{2}{3}} = 2$$

$$x = 0 \text{ of } x = 2^{\frac{3}{2}}$$

$$x = 0 \text{ of } x = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8}$$

g $(x^{7,1} + 1)(x - 3) = (x^{4,7} + 1)(x - 3)$

$$x^{7,1} + 1 = x^{4,7} + 1 \text{ of } x - 3 = 0$$

$$x^{7,1} = x^{4,7} \text{ of } x = 3$$

$$x^{4,7} \cdot x^{2,4} = x^{4,7} \text{ of } x = 3$$

$$x^{4,7} = 0 \text{ of } x^{2,4} = 1 \text{ of } x = 3$$

$$x = 0 \text{ of } x = 1 \text{ of } x = 3$$

h $3x^{2,45} = x$

$$3x \cdot x^{1,45} = x$$

$$x \cdot x^{1,45} = \frac{1}{3}x$$

$$x = 0 \text{ of } x^{1,45} = \frac{1}{3}$$

$$x = 0 \text{ of } x = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{1,45}} \approx 0,47$$

2.5 Herleiden

intro Invullen van $L = 190$ geeft $H = 0,0463 \cdot 190^{0,725} \approx 2,08$ en

$$190 = 69,3636 \cdot H^{1,379}, \text{ oftewel } H^{1,379} = \frac{190}{69,3636}, \text{ dus } H = \left(\frac{190}{69,3636}\right)^{\frac{1}{1,379}} \approx 2,08.$$

Ja, beide formules leveren (ongeveer) dezelfde huidoppervlakte op.

41 a $y = x \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}$

$$y = x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}}$$

$$y = x^{1\frac{5}{6}}$$

b $= \frac{3}{\sqrt{x}} \cdot x^4 \cdot 5x^{-2}$

$$y = \frac{3}{x^{\frac{1}{2}}} \cdot x^4 \cdot 5x^{-2}$$

$$y = 3x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^4 \cdot 5x^{-2}$$

$$y = 15x^{-\frac{1}{2}+4-2}$$

$$y = 15x^{1\frac{1}{2}}$$

- c De herleiding geldt niet voor $x = 0$, omdat er dan 0 in de noemer van de breuk komt en delen door 0 kan niet. En de herleiding geldt niet voor $x < 0$, omdat de wortel van een negatief getal niet bestaat.

42 a $y = 2x^3 \cdot \sqrt{x}$

$$y = 2x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

$$y = 2x^{3\frac{1}{2}}$$

b $y = \frac{(2x)^3}{16x^{-\frac{1}{2}}}$

$$y = \frac{8x^3}{16x^{-\frac{1}{2}}}$$

$$y = \frac{1}{2}x^{3\frac{1}{2}}$$

c $y = 7x^{-2} \cdot 3\sqrt{x}$

$$y = 7x^{-2} \cdot 3 \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

$$y = 21x^{-1\frac{1}{2}}$$

d $y = \frac{10x \cdot \sqrt[3]{x}}{2x^3}$

$$y = \frac{10x \cdot x^{\frac{1}{3}}}{2x^3}$$

$$y = \frac{10x^{1\frac{1}{3}}}{2x^3}$$

$$y = 5x^{-1\frac{2}{3}}$$

43 a $y = \frac{8x^2 \cdot \sqrt[7]{x^3}}{2x^3}$

$$y = \frac{8x^2 \cdot x^{\frac{3}{7}}}{2x^3}$$

$$y = \frac{8x^{2\frac{3}{7}}}{2x^3}$$

$$y = 4x^{-\frac{4}{7}}$$

b $y = \frac{(5x)^2}{x^3 \cdot \sqrt{x}}$

$$y = \frac{25x^2}{x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}}}$$

$$y = \frac{25x^2}{x^{3\frac{1}{2}}}$$

$$y = 25x^{-1\frac{1}{2}}$$

c $y = \frac{6\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x^3}}{2x^2}$

$$y = \frac{6x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{4}}}{2x^2}$$

$$y = \frac{6x^{1\frac{1}{4}}}{2x^2}$$

$$y = 3x^{-\frac{3}{4}}$$

d $y = \frac{3\sqrt[4]{x}}{4x \cdot x^{-5}}$

$$y = \frac{3x^{\frac{1}{4}}}{4x^{-4}}$$

$$y = \frac{3}{4}x^{4\frac{1}{4}}$$

- 44 a** In stap 2 is rechts en links door 10 gedeeld.

- b** In stap 4 is de rekenregel $(p \cdot q)^a = p^a \cdot q^a$ toegepast.

- c** $q \approx 0,16 \cdot p^{0,8}$

45 a $P = Q^{\frac{1}{4}}$

$$Q^{\frac{1}{4}} = P$$

$$Q = P^4$$

b $P = \frac{1}{16} Q^4$

$$Q^4 = 16P$$

$$Q = 16^{\frac{1}{4}} \cdot P^{\frac{1}{4}}$$

$$Q = 2 \cdot P^{\frac{1}{4}}$$

2 Machtsformules

c $P = 25 \cdot Q^{3,5}$

$$Q^{3,5} = \frac{1}{25} \cdot P$$

$$Q = \left(\frac{1}{25} \cdot P\right)^{\frac{1}{3,5}}$$

$$Q = \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3,5}} \cdot P^{\frac{1}{3,5}}$$

$$Q \approx 0,40 \cdot P^{0,29}$$

d $P = 0,01 \cdot Q^{0,375}$

$$Q^{0,375} = 100 \cdot P$$

$$Q = (100 \cdot P)^{\frac{1}{0,375}}$$

$$Q = 100^{\frac{1}{0,375}} \cdot P^{\frac{1}{0,375}}$$

$$Q \approx 215\,443,47 \cdot P^{2,67}$$

e $P = 1,46 \cdot Q^{-0,76}$

$$Q^{-0,76} = \frac{1}{1,46} \cdot P$$

$$Q = \left(\frac{1}{1,46} \cdot P\right)^{-\frac{1}{0,76}}$$

$$Q = \left(\frac{1}{1,46}\right)^{-\frac{1}{0,76}} \cdot P^{-\frac{1}{0,76}}$$

$$Q \approx 1,65 \cdot P^{-1,32}$$

f $P = 1000 \cdot Q^{-3}$

$$Q^{-3} = \frac{1}{1000} \cdot P$$

$$Q = \left(\frac{1}{1000} \cdot P\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$Q = \left(\frac{1}{1000}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot P^{-\frac{1}{3}}$$

$$Q \approx 10 \cdot P^{-0,33}$$

46 a $N = 4 \cdot T^{\frac{1}{3}}$

$$T^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4} N$$

$$T = \left(\frac{1}{4} N\right)^3$$

$$T = \frac{1}{64} \cdot N^3$$

c $N = 243 \cdot \sqrt[3]{T^5}$

$$N = 243 \cdot T^{\frac{5}{3}}$$

$$T^{\frac{5}{3}} = \frac{1}{243} N$$

$$T = \left(\frac{1}{243} N\right)^{\frac{3}{5}}$$

$$T = \left(\frac{1}{243}\right)^{\frac{3}{5}} \cdot N^{\frac{3}{5}}$$

$$T = \frac{1}{27} \cdot N^{\frac{3}{5}}$$

b $N = \frac{1}{8} T \sqrt{T}$

$$N = \frac{1}{8} T^{\frac{3}{2}}$$

$$T^{\frac{3}{2}} = 8N$$

$$T = (8N)^{\frac{2}{3}}$$

$$T = 8^{\frac{2}{3}} \cdot N^{\frac{2}{3}}$$

$$T = 4 \cdot N^{\frac{2}{3}}$$

d $N = 0,001 \cdot \sqrt[4]{T^3}$

$$N = 0,001 \cdot T^{\frac{3}{4}}$$

$$T^{\frac{3}{4}} = 1000N$$

$$T = (1000N)^{\frac{4}{3}}$$

$$T = 1000^{\frac{4}{3}} \cdot N^{\frac{4}{3}}$$

$$T = 10\,000 \cdot N^{\frac{4}{3}}$$

47 a Invullen van $H = 0,750$ geeft $0,750 = 0,012 \cdot L^{0,67}$ ofwel $L^{0,67} = 62,5$ dus

$$L = 62,5^{\frac{1}{0,67}} = 479,0909 \dots$$

Het gemiddelde lichaamsgewicht van een giraffe is ongeveer 479 kg.

b In de formule L door $2L$ vervangen geeft $H = 0,012 \cdot (2L)^{0,67}$ ofwel

$$H = 0,012 \cdot 2^{0,67} \cdot L^{0,67}$$

Als het lichaamsgewicht verdubbelt, dan wordt H met $2^{0,67} \approx 1,59$ vermenigvuldigd. Dat is een toename van H met ongeveer 59%.

c $0,012 \cdot L^{0,67} = H$

$$L^{0,67} = \frac{1}{0,012} \cdot H$$

$$L = \left(\frac{1}{0,012} \cdot H\right)^{\frac{1}{0,67}}$$

$$L = \left(\frac{1}{0,012}\right)^{\frac{1}{0,67}} \cdot H^{\frac{1}{0,67}}$$

$$L \approx 736,03 \cdot H^{1,49}$$

d De grafiek van H stijgt steeds minder snel dus voor zwaardere dieren geldt dat een verschil van 10 kg in lichaamsgewicht een kleiner verschil in hersengewicht geeft. Het verschil in hersengewicht zal daarom het grootst zijn voor een ree en een vos.

042 a $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

b $8x^2 \cdot \sqrt[3]{x} = 8x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = 8x^{2\frac{1}{3}}$

c De noemer $(2x^3)^2$ is gelijk aan $2^2 \cdot (x^3)^2$ en dus gelijk aan $4x^6$.

d $y = \frac{8x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}{(2x^3)^2}$

$$y = \frac{8x^{2\frac{1}{3}}}{4x^6}$$

$$y = 2 \cdot x^{2\frac{1}{3}-6}$$

$$y = 2 \cdot x^{-3\frac{2}{3}}$$

045 a In stap 2 is links en rechts door 0,5 gedeeld (of met 2 vermenigvuldigd).

b $Q = (2 \cdot P)^{\frac{1}{0,4}}$

$$Q = (2 \cdot P)^{2,5}$$

c $Q = 2^{2,5} \cdot P^{2,5}$

$$Q \approx 5,66 \cdot P^{2,5}$$

d $P = Q^{\frac{1}{3}}$

$$Q^{\frac{1}{3}} = P$$

$$Q = P^3$$

g $P = 0,25 \cdot Q^{0,125}$

$$0,25 \cdot Q^{0,125} = P$$

$$Q^{0,125} = 4 \cdot P$$

$$Q = (4 \cdot P)^{\frac{1}{0,125}}$$

$$Q = 4^{\frac{1}{0,125}} \cdot P^{\frac{1}{0,125}}$$

$$Q = 65\,536 \cdot P^8$$

h $P = 0,72 \cdot Q^{-1,4}$

$$0,72 \cdot Q^{-1,4} = P$$

$$Q^{-1,4} = \frac{1}{0,72} \cdot P$$

$$Q = \left(\frac{1}{0,72} \cdot P\right)^{-\frac{1}{1,4}}$$

$$Q = \left(\frac{1}{0,72}\right)^{-\frac{1}{1,4}} \cdot P^{-\frac{1}{1,4}}$$

$$Q \approx 0,79 \cdot P^{-0,71}$$

i $P = 100 \cdot Q^{-5}$

$$100 \cdot Q^{-5} = P$$

$$Q^{-5} = \frac{1}{100} \cdot P$$

$$Q = \left(\frac{1}{100} \cdot P\right)^{-\frac{1}{5}}$$

$$Q = \left(\frac{1}{100}\right)^{-\frac{1}{5}} \cdot P^{-\frac{1}{5}}$$

$$Q \approx 2,51 \cdot P^{-0,2}$$

U9 a $x = \frac{1}{4} \sqrt[3]{p^2}$

$$\frac{1}{4} \sqrt[3]{p^2} = x$$

$$p^{\frac{2}{3}} = 4x$$

$$p = (4x)^{\frac{3}{2}}$$

Invullen bij $y = \frac{1}{8} p^2$ geeft

$$y = \frac{1}{8} ((4x)^{\frac{3}{2}})^2$$

$$y = \frac{1}{8} \cdot (4x)^3$$

$$y = \frac{1}{8} \cdot 4^3 \cdot x^3$$

$$y = 8x^3$$

2 Machtsformules

$$\begin{aligned} \text{b } t &= \frac{1}{64} \cdot \sqrt[4]{p^3} \\ \frac{1}{64} \cdot \sqrt[4]{p^3} &= t \\ p^{\frac{3}{4}} &= 64t \\ (p^{\frac{3}{4}})^2 &= (64t)^2 \\ p^{1\frac{1}{2}} &= 4096t^2 \\ \text{Invullen bij } y = p\sqrt{p} = p^{1\frac{1}{2}} &\text{ geeft } y = 4096t^2 \end{aligned}$$

$$\text{U10 } P = m \cdot Q^{1\frac{1}{3}}$$

$$m \cdot Q^{1\frac{1}{3}} = P$$

$$Q^{1\frac{1}{3}} = \frac{1}{m} \cdot P$$

$$Q = \left(\frac{1}{m} \cdot P\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$Q = \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot P^{\frac{3}{4}}$$

Er moet gelden dat $\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{8}$ ofwel $(m^{-1})^{\frac{3}{4}} = 8^{-1}$ dus $m^{-\frac{3}{4}} = 8^{-1}$.

Dit geeft $m = (8^{-1})^{-\frac{4}{3}}$, ofwel $m = 8^{\frac{4}{3}} = 8^{1\frac{1}{3}} = 8^1 \cdot 8^{\frac{1}{3}} = 8 \cdot \sqrt[3]{8} = 8 \cdot 2 = 16$.

Verder geldt dat $b = \frac{3}{4}$.

2.6 Gemengde opdrachten

$$48 \text{ a } \frac{(2p)^5}{3p^3 \cdot p^4} = \frac{32p^5}{3p^7} = \frac{32}{3p^2}$$

$$\text{c } \frac{p^{-5} \cdot p^0}{p^{0,25}} = \frac{1}{p^5 \cdot p^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{p^5 \cdot \sqrt[4]{p}}$$

$$\text{b } \frac{8p^{-4}}{(4p)^2} = \frac{8p^{-4}}{16p^2} = \frac{1}{2p^6}$$

$$\text{d } \frac{p^{\frac{4}{9}}}{p^{\frac{1}{6}}} = \frac{p^{\frac{8}{18}}}{p^{\frac{3}{18}}} = \frac{1}{p^{\frac{13}{18}}} = \frac{1}{\sqrt[18]{p^{13}}}$$

$$49 \text{ a } 3\sqrt[3]{3} = 3^1 \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3^{1\frac{1}{3}}$$

$$\text{b } \frac{7}{\sqrt[9]{7^5}} = \frac{7^1}{7^{\frac{5}{9}}} = 7^{\frac{4}{9}}$$

$$\text{c } \sqrt[5]{a^2} \cdot a^3 \sqrt[3]{a^7} = a^{\frac{2}{5}} \cdot a^1 \cdot a^{\frac{7}{3}} = a^{\frac{6}{15} + 1 + \frac{7}{3}} = a^{\frac{11}{15}}$$

$$\text{d } \frac{p\sqrt{p}}{\sqrt[6]{p^5}} = \frac{p^{1\frac{1}{2}}}{p^{\frac{5}{6}}} = p^{1\frac{1}{2} - \frac{5}{6}} = p^{1\frac{3}{6} - \frac{5}{6}} = p^{\frac{4}{6}} = p^{\frac{2}{3}}$$

$$50 \text{ a } 2x^{13} = 5$$

$$x^{13} = 2\frac{1}{2}$$

$$x = \left(2\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{13}}$$

$$x = \sqrt[13]{2\frac{1}{2}}$$

$$\text{b } 4p^{\frac{2}{7}} = 5$$

$$p^{\frac{2}{7}} = 1\frac{1}{4}$$

$$p = \left(1\frac{1}{4}\right)^{\frac{7}{2}}$$

$$p = \sqrt{\left(1\frac{1}{4}\right)^7}$$

$$\text{c } x^6 - 5x^4 = 0$$

$$x^4(x^2 - 5) = 0$$

$$x^4 = 0 \text{ of } x^2 = 5$$

$$x = 0 \text{ of } x = \sqrt{5} \text{ of } x = -\sqrt{5}$$

$$\text{d } 100 - 5k^4 = 60$$

$$5k^4 = 40$$

$$k^4 = 8$$

$$k = \sqrt[4]{8} \text{ of } k = -\sqrt[4]{8}$$

$$\text{e } y^{\sqrt[3]{y}} = 12$$

$$y^1 \cdot y^{\frac{1}{3}} = 12$$

$$y^{\frac{4}{3}} = 12$$

$$y = 12^{\frac{3}{4}}$$

$$y = \sqrt[4]{12^3}$$

$$\text{f } 3x^5 = -12x^2$$

$$3x^5 + 12x^2 = 0$$

$$3x^2(x^3 + 4) = 0$$

$$3x^2 = 0 \text{ of } x^3 = -4$$

$$x = 0 \text{ of } x = \sqrt[3]{-4}$$

$$\text{51 a } V = \pi \cdot 8^2 \cdot 10 = 640\pi \approx 2011 \text{ cm}^3$$

$$\text{b } V = 1000 \text{ en } r = 9 \text{ geeft } 1000 = \pi \cdot 9^2 \cdot h$$

$$\text{dus } h = \frac{1000}{81\pi} \approx 3,9 \text{ cm}$$

$$\text{c } V = 1000 \text{ geeft } 1000 = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$h = \frac{1000}{\pi \cdot r^2}$$

$$h = \frac{1000}{\pi} \cdot r^{-2}$$

$$h \approx 318,3 \cdot r^{-2}$$

$$\text{d } \text{De inhoud blijft 1 L, dus hoe kleiner de straal hoe groter de hoogte.}$$

$$\text{e } h = \frac{500}{\pi} \cdot r^{-2}$$

$$h \approx 159,2 \cdot r^{-2}$$

$$\text{52 a } \text{Een vis die met een snelheid van 2 km per uur zwemt doet 2,5 uur over 5 km.}$$

$$v = 2 \text{ en } t = 2,5 \text{ invullen geeft } E = 0,15 \cdot 2^3 \cdot 2,5 = 3 \text{ joules.}$$

$$\text{b } t = 0,5 \text{ en } E = 2 \text{ geeft } 2 = 0,15 \cdot v^3 \cdot 0,5.$$

$$v^3 = \frac{2}{0,075} = 26\frac{2}{3} \text{ dus } v = \left(26\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 3 \text{ km per uur.}$$

$$\text{c } t = 1 \text{ geeft } E = 0,15 \cdot v^3$$

$$v^3 = \frac{1}{0,15} \cdot E$$

$$v = \left(\frac{1}{0,15}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot E^{\frac{1}{3}}$$

$$v \approx 1,88 \cdot \sqrt[3]{E}$$

Onderzoeksoopdrachten

$$\text{53 a } \text{Invullen van } L = 30 \text{ en } W = 0,12 \text{ geeft } 0,12 = a \cdot 30^b \text{ ofwel } a = \frac{0,12}{30^b}$$

$$\text{Invullen van } L = 60 \text{ en } W = 0,95 \text{ geeft } 0,95 = a \cdot 60^b \text{ ofwel } a = \frac{0,95}{60^b}$$

$$\text{Het is in beide formules dezelfde } a, \text{ dus er moet gelden dat } \frac{0,12}{30^b} = \frac{0,95}{60^b}$$

$$\frac{60^b}{30^b} = \frac{0,95}{0,12}$$

$$\left(\frac{60}{30}\right)^b = \frac{0,95}{0,12}$$

$$2^b = \frac{0,95}{0,12}$$

2 Machtsformules

b $2^b = \frac{0,95}{0,12} = 7,916\dots$

Proberen van enkele waarden van b geeft

$$2^3 = 8, 2^{2,9} = 7,464\dots, 2^{2,98} = 7,889\dots, 2^{2,99} = 7,944\dots, 2^{2,985} = 7,917\dots$$

$$\text{Dus } b \approx 2,985 \text{ en } a = \frac{0,12}{30^b} = \frac{0,12}{30^{2,985}} \approx 4,68 \cdot 10^{-6}.$$

54 a $R = 778$ en $T = 4329$ geeft $4329 = c \cdot 778^a$ dus $c = \frac{4329}{778^a}$

$$R = 1427 \text{ en } T = 10753 \text{ geeft } 10753 = c \cdot 1427^a \text{ dus } c = \frac{10753}{1427^a}$$

$$\text{Daaruit volgt } \frac{4329}{778^a} = \frac{10753}{1427^a}$$

$$\frac{1427^a}{778^a} = \frac{10753}{4329}$$

$$\left(\frac{1427}{778}\right)^a = \frac{10753}{4329} = 2,4839\dots$$

Proberen van waarden van a tussen 1,4 en 1,7 geeft $\left(\frac{1427}{778}\right)^{1,5} = 2,484\dots$, dus $a \approx 1,5$

$$\text{en voor } c \text{ geldt dan } c = \frac{4329}{778^{1,5}} \approx 0,2.$$

b $T = 365$ invullen geeft $365 = 0,2 \cdot R^{1,5}$

$$1825 = R^{1,5}$$

$$R = 1825^{\frac{1}{1,5}} \approx 149,3 \text{ miljoen km}$$

Samenvatting

S1 a $p^{-2} \cdot p^5 \cdot p^{-8} = p^{-5} = \frac{1}{p^5}$

b $7x^{-3} = \frac{7}{x^3}$

c $4x^{\frac{4}{5}} = 4\sqrt[5]{x^4}$

d $4a^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{4}{\sqrt[3]{a^2}}$

S2 a De formule $y = 5x^{-2}$ geeft alleen uitkomsten voor $x \neq 0$.

b $y = 4x^{\frac{1}{3}}$

$$y = 5x^{-2}$$

$$y = 4\sqrt[3]{x}$$

$$y = \frac{5}{x^2}$$

c De twee asymptoten zijn de lijnen $x = 0$ en $y = 0$.

S3 a $\frac{18}{9x^5} = 2x^{-5}$

c $\frac{24x^3}{9x \cdot 4x^6} = \frac{24x^3}{36x^7} = \frac{2}{3x^4} = \frac{2}{3} \cdot x^{-4}$

b $\frac{6}{(x^4)^2} = \frac{6}{x^8} = 6x^{-8}$

d $\frac{13}{x^{-9}} = 13x^{-(-9)} = 13x^9$

S4 a $3^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{3^4} = \sqrt[7]{81}$

c $5^{1\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{3}{2} + \frac{4}{6}} = 5^{\frac{21}{6} + \frac{4}{6}} = 5^{\frac{25}{6}} = 5^2 \cdot 5^{\frac{1}{6}} = 25 \cdot \sqrt[6]{5}$

b $a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$

d $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{5}{15} + \frac{6}{15}} = a^{\frac{11}{15}} = a^2 \cdot a^{\frac{11}{15}} = a^2 \cdot \sqrt[15]{a^{11}}$

S5 a $3x^4 + 1 = 19$

$$3x^4 = 18$$

$$x^4 = 6$$

$$x = \sqrt[4]{6} \text{ of } x = -\sqrt[4]{6}$$

b $2x^{-3} = \frac{1}{32}$

$$\frac{2}{x^3} = \frac{1}{32}$$

$$x^3 = 64$$

$$x = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$\text{c } x^{\frac{2}{5}} = 3$$

$$\left(x^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{5}{2}} = 3^{\frac{5}{2}}$$

$$x = \sqrt[5]{3^5} = \sqrt[5]{243}$$

$$\text{d } 18 + 5x^{1,37} = 63$$

$$5x^{1,37} = 45$$

$$x^{1,37} = 9$$

$$(x^{1,37})^{\frac{1}{1,37}} = 9^{\frac{1}{1,37}}$$

$$x = 9^{\frac{1}{1,37}} \approx 4,97$$

$$\text{e } 8x^2 - x^4 = 0$$

$$x^2(8 - x^2) = 0$$

$$x^2 = 0 \text{ of } 8 - x^2 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x^2 = 8$$

$$x = 0 \text{ of } x = 2\sqrt{2} \text{ of } x = -2\sqrt{2}$$

$$\text{f } 9x^5 = 18x^2$$

$$9x^3 \cdot x^2 = 18 \cdot x^2$$

$$x^2 = 0 \text{ of } 9x^3 = 18$$

$$x = 0 \text{ of } x^3 = 2$$

$$x = 0 \text{ of } x = \sqrt[3]{2}$$

$$\text{S6 a } y = 10x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[5]{x^2}$$

$$y = 10x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{5}}$$

$$y = 10x^{2+\frac{5}{10}+\frac{4}{10}}$$

$$y = 10 \cdot x^{2\frac{9}{10}}$$

$$\text{b } y = 4x^{-3} \cdot 3\sqrt{x}$$

$$y = 4x^{-3} \cdot 3x^{\frac{1}{2}}$$

$$y = 12 \cdot x^{-2\frac{1}{2}}$$

$$\text{S7 a } s = 0,1 \cdot r^{0,125}$$

$$0,1 \cdot r^{0,125} = s$$

$$r^{0,125} = 10 \cdot s$$

$$r = (10 \cdot s)^{\frac{1}{0,125}}$$

$$r = 10^{\frac{1}{0,125}} \cdot s^{\frac{1}{0,125}}$$

$$r = 100\,000\,000 \cdot s^8$$

$$\text{b } s = 400 \cdot r^{-1\frac{1}{2}}$$

$$400 \cdot r^{-1\frac{1}{2}} = s$$

$$r^{-1\frac{1}{2}} = \frac{1}{400} \cdot s$$

$$r = \left(\frac{1}{400} \cdot s\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$r = \left(\frac{1}{400}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot s^{-\frac{2}{3}}$$

$$r \approx 54,29 \cdot s^{-0,67}$$

Test jezelf

$$\text{T1 a } \frac{(2x)^3}{4x} = \frac{8x^3}{4x} = 2x^2$$

$$\text{b } \left(\frac{4x^3}{x^2}\right)^2 = \frac{16x^6}{x^4} = 16x^2$$

$$\text{c } \frac{6x^7}{3x^2} = 2x^5$$

$$\text{d } \frac{18x^2 \cdot x^6}{(3x^2)^3} = \frac{18x^8}{27x^6} = \frac{2}{3}x^2$$

$$\text{T2 a } A = B^6$$

$$B^6 = A$$

$$B = A^{\frac{1}{6}}$$

$$\text{c } A = \frac{1}{2} \cdot B^{\frac{3}{5}}$$

$$\frac{1}{2} \cdot B^{\frac{3}{5}} = A$$

$$B^{\frac{3}{5}} = 2 \cdot A$$

$$B = 2^{\frac{5}{3}} \cdot A^{\frac{5}{3}}$$

$$B = \sqrt[3]{32} \cdot A^{1\frac{2}{3}}$$

$$\text{d } A = 5 \cdot B^{0,81}$$

$$5 \cdot B^{0,81} = A$$

$$B^{0,81} = \frac{1}{5} \cdot A$$

$$B = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{0,81}} \cdot A^{\frac{1}{0,81}}$$

$$B \approx 0,14 \cdot A^{1,23}$$

2 Machtsformules

e $A = \sqrt[3]{B^2}$

$$\sqrt[3]{B^2} = A$$

$$B^{\frac{2}{3}} = A$$

$$B = A^{\frac{3}{2}}$$

$$B = A^{1\frac{1}{2}}$$

f $A = 4\sqrt[4]{B}$

$$4\sqrt[4]{B} = A$$

$$B^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot A$$

$$B = \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot A^4$$

$$B = \frac{1}{256} \cdot A^4$$

T3 a $x^5 = -8$

$$x = (-8)^{\frac{1}{5}}$$

$$x = \sqrt[5]{-8}$$

b $y^6 = 20$

$$y = \sqrt[6]{20} \text{ of } y = -\sqrt[6]{20}$$

c $p^{\frac{1}{4}} = 10$

$$p = 10^4$$

$$p = 10\,000$$

d $x^{-4} = -3$

$$\frac{1}{x^4} = -3$$

geen oplossing

e $3z^{\frac{2}{3}} = 12$

$$z^{\frac{2}{3}} = 4$$

$$z = 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = 8$$

f $x^3 = 2x^4$

$$x^3 = 2x \cdot x^3$$

$$x^3 = 0 \text{ of } 1 = 2x$$

$$x = 0 \text{ of } x = \frac{1}{2}$$

g $13 - 6 \cdot p^{1,25} = 1$

$$6 \cdot p^{1,25} = 12$$

$$p^{1,25} = 2$$

$$p = 2^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{2^4} = \sqrt[5]{16}$$

h $3x^2 + 2x^5 = 0$

$$x^2(3 + 2x^3) = 0$$

$$x^2 = 0 \text{ of } 3 + 2x^3 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } 2x^3 = -3$$

$$x = 0 \text{ of } x^3 = -1\frac{1}{2}$$

$$x = 0 \text{ of } x = \sqrt[3]{-1\frac{1}{2}}$$

T4 a Invullen van $x = 1$ geeft $y = 3 \cdot 1^{\frac{1}{5}} = 3 \cdot 1 = 3$ en $y = -2 \cdot \sqrt[6]{1} = -2 \cdot 1 = -2$.

Grafiek A hoort bij $y = 3 \cdot x^{\frac{1}{5}}$ en grafiek B bij $y = -2 \cdot \sqrt[6]{x}$

b $3 \cdot x^{\frac{1}{5}} = 15$

$$x^{\frac{1}{5}} = 5$$

$$x = 5^5 = 3125$$

De coördinaten van het snijpunt zijn (3125, 15).

c $-2 \cdot \sqrt[6]{x} = -4$

$$\sqrt[6]{x} = 2$$

$$x = 2^6 = 64$$

De coördinaten van het snijpunt zijn (64, -4).

d De lijn $y = x$ heeft twee snijpunten met grafiek A en één snijpunt met grafiek B.

e $3 \cdot x^{\frac{1}{5}} = x$

$$3 \cdot x^{\frac{1}{5}} = x^{\frac{1}{5}} \cdot x^{\frac{4}{5}}$$

$$x^{\frac{1}{5}} = 0 \text{ of } 3 = x^{\frac{4}{5}}$$

$$x = 0 \text{ of } x = 3^{\frac{5}{4}}$$

$$x = 0 \text{ of } x = \sqrt[4]{3^5} = \sqrt[4]{243}$$

De coördinaten van de snijpunten zijn (0, 0) en $(\sqrt[4]{243}, \sqrt[4]{243})$.

T5 a $\frac{c^5 \cdot c^2}{c^4} = \frac{c^7}{c^4} = c^3$

c $\frac{4w^5}{2w^3} = 2w^2$

b $\frac{(d^2)^6}{d^7} = \frac{d^{12}}{d^7} = d^5$

d $\frac{2k \cdot k^{11}}{3k^7} = \frac{2k^{12}}{3k^7} = \frac{2}{3}k^5$

$$\text{T6 a } 2x^{2\frac{1}{2}} \cdot 7x^{-4} = 14x^{-1\frac{1}{2}} = \frac{14}{x^{1\frac{1}{2}}} = \frac{14}{x\sqrt{x}}$$

$$\text{b } x^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x}$$

$$\text{c } 3x^{\frac{3}{4}} = 3 \cdot \sqrt[4]{x^3}$$

$$\text{d } \frac{3x^{-1} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^2} = \frac{3x^{-\frac{1}{2}}}{x^2} = 3x^{-2\frac{1}{2}} = \frac{3}{x^2\sqrt{x}}$$

$$\text{e } x^{-1\frac{1}{3}} = \frac{1}{x^{1\frac{1}{3}}} = \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$$

$$\text{f } 2x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{x} = 2x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{7}{6}} = 2 \cdot \sqrt[6]{x^7}$$

$$\text{g } (3x^{\frac{1}{3}})^2 = 9x^{\frac{2}{3}} = 9 \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

$$\text{h } \frac{6x^3}{2\sqrt{x}} = \frac{6x^3}{2x^{\frac{1}{2}}} = 3x^{2\frac{1}{2}} = 3x^2\sqrt{x}$$

$$\text{T7 a } \text{De } y\text{-coördinaat van } A \text{ is } y = \left(1\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\text{De } y\text{-coördinaat van } B \text{ is } y = \left(1\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$$

$$AB = \frac{27}{8} - \frac{9}{4} = \frac{27}{8} - \frac{18}{8} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$$

$$\text{b } x^2 = 10 \quad x^3 = 10$$

$$x = \sqrt{10} \quad x = \sqrt[3]{10}$$

$$CD = \sqrt{10} - \sqrt[3]{10} \approx 1,01$$

T8 a Invullen van $G = 360\,000$ geeft dat het vleugeloppervlak

$$Q = 0,1 \times 360\,000^{0,67} \approx 528 \text{ m}^2 \text{ is.}$$

$$\text{b } Q = 0,1 \cdot G^{0,67}$$

$$0,1 \cdot G^{0,67} = Q$$

$$G^{0,67} = 10 \cdot Q$$

$$G = (10 \cdot Q)^{\frac{1}{0,67}}$$

$$G = 10^{\frac{1}{0,67}} \cdot Q^{\frac{1}{0,67}}$$

$$G \approx 31,08 \cdot Q^{1,49}$$

$$\text{dus } a \approx 31,08 \text{ en } b \approx 1,49$$

$$\text{c } \text{Invullen van } Q = 350 \text{ geeft } G = 10^{\frac{1}{0,67}} \times 350^{\frac{1}{0,67}} = 194\,829,08\dots$$

Dit vliegtuig mag maximaal $194\,829,08\dots - 150\,000 \approx 44\,800$ kg personen en vracht meenemen.

T9 Als de straal R van de buis 20% groter wordt, dan wordt de straal $1,2R$.

Invullen in de formule geeft $V = p \cdot (1,2R)^4$, ofwel $V = p \cdot 1,2^4 \cdot R^4$, of

$$V = 2,0736 \cdot p \cdot R^4$$

De hoeveelheid vloeistof wordt dan 2,0736 keer zo groot.

De hoeveelheid vloeistof neemt met 107,36% toe.

Extra oefening

$$\text{E1 a } a^{-4} = \frac{1}{a^4}$$

$$\text{b } \frac{1}{b^3} \cdot b^{-4} = \frac{1}{b^3} \cdot \frac{1}{b^4} = \frac{1}{b^7}$$

$$\text{c } \frac{12c^2}{18c^5} = \frac{2}{3c^3}$$

$$\text{d } \frac{d^4 \cdot d^{-10}}{d^{-3}} = \frac{d^{-6}}{d^{-3}} = \frac{1}{d^3}$$

$$\text{e } \frac{4e^2 \cdot 2e^{-1}}{16e^0} = \frac{8e^1}{16} = \frac{1}{2}e$$

$$\text{f } \frac{3x^4 \cdot 2x^{-4}}{10x^{-5}} = \frac{6x^0}{10x^{-5}} = \frac{3}{5x^{-5}} = \frac{3}{5}x^5$$

$$\text{E2 a } p^{\frac{4}{11}} = \sqrt[11]{p^4}$$

$$\text{c } m^{-6\frac{1}{2}} = \frac{1}{m^{6\frac{1}{2}}} = \frac{1}{m^6\sqrt{m}}$$

$$\text{b } \frac{4x^{-3} \cdot x}{8x^2} = \frac{x^{-2}}{2x^2} = \frac{1}{2x^4}$$

$$\text{d } \frac{(4a^{-2})^3}{16a\sqrt{a}} = \frac{64a^{-6}}{16a^{\frac{1}{2}}} = \frac{4}{a^{\frac{13}{2}}}$$

E3 a $2p^4 = 11$

$$p^4 = 5\frac{1}{2}$$

$$p = \sqrt[4]{5\frac{1}{2}} \text{ of } p = -\sqrt[4]{5\frac{1}{2}}$$

b $3t^{-2} + 4 = 9$

$$\frac{3}{t^2} = 5$$

$$t^2 = \frac{3}{5}$$

$$t = \sqrt{\frac{3}{5}} \text{ of } t = -\sqrt{\frac{3}{5}}$$

c $25r^3 = 50r^2$

$$r^3 - 2r^2 = 0$$

$$r^2(r - 2) = 0$$

$$r^2 = 0 \text{ of } r - 2 = 0$$

$$r = 0 \text{ of } r = 2$$

d $x^{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$

$$x = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$x = \frac{16}{81}$$

E4 a $y = \frac{x^8 \cdot \sqrt[4]{x}}{x^2}$

$$y = \frac{x^8 \cdot x^{\frac{1}{4}}}{x^2}$$

$$y = x^{8\frac{1}{4}-2}$$

$$y = x^{6\frac{1}{4}}$$

b $y = x^{-3} \cdot (x^5)^2$

$$y = x^{-3} \cdot x^{10}$$

$$y = x^7$$

E5 a $N = 0,25 \cdot K^5$

$$0,25 \cdot K^5 = N$$

$$K^5 = 4 \cdot N$$

$$K = 4^{\frac{1}{5}} \cdot N^{\frac{1}{5}}$$

$$K \approx 1,32 \cdot N^{0,20}$$

b $N = \frac{1}{2} \cdot K^{\frac{1}{3}}$

$$\frac{1}{2} \cdot K^{\frac{1}{3}} = N$$

$$K^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot N$$

$$K = 2^3 \cdot N^3$$

$$K = 8 \cdot N^3$$

c $N = 8 \cdot K^{2,5}$

$$8 \cdot K^{2,5} = N$$

$$K^{2,5} = \frac{1}{8} \cdot N$$

$$K = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2,5}} \cdot N^{\frac{1}{2,5}}$$

$$K \approx 0,44 \cdot N^{0,40}$$

e $7q^{0,4} = 4$

$$q^{\frac{2}{5}} = \frac{4}{7}$$

$$q = \left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{5}{2}} \approx 0,25$$

f $x^{-0,2} = \frac{1}{5}$

$$x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{0,2}}$$

$$x = 3125$$

g $18x^5 = 6x^3$

$$18x^2 \cdot x^3 = 6 \cdot x^3$$

$$x^3 = 0 \text{ of } 18x^2 = 6$$

$$x = 0 \text{ of } x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x = 0 \text{ of } x = \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ of } x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$$

h $3x^{\frac{1}{2}} - 4\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = 0$

$$1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}(2x^2 - 3) = 0$$

$$1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = 0 \text{ of } 2x^2 - 3 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x^2 = 1\frac{1}{2}$$

$$x = 0 \text{ of } x = \sqrt{1\frac{1}{2}} \text{ of } x = -\sqrt{1\frac{1}{2}}$$

c $y = \frac{\sqrt{x} \cdot x^{-2}}{x^{-\frac{2}{3}}}$

$$y = \frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-2}}{x^{-\frac{2}{3}}}$$

$$y = x^{-1\frac{1}{2}-(-\frac{2}{3})}$$

$$y = x^{-1\frac{3}{6}+\frac{4}{6}}$$

$$y = x^{-\frac{5}{6}}$$

d $y = x^4 \cdot x \cdot \sqrt[3]{x^2}$

$$y = x^4 \cdot x^1 \cdot x^{\frac{2}{3}}$$

$$y = x^{5\frac{2}{3}}$$

d $N = 1,2 \cdot K^{-0,3}$

$$1,2 \cdot K^{-0,3} = N$$

$$K^{-0,3} = \frac{1}{1,2} \cdot N$$

$$K = \left(\frac{1}{1,2}\right)^{-\frac{1}{0,3}} \cdot N^{-\frac{1}{0,3}}$$

$$K \approx 1,84 \cdot N^{-3,33}$$

e $N = 2,8 \cdot K^{1,67}$

$$2,8 \cdot K^{1,67} = N$$

$$K^{1,67} = \frac{1}{2,8} \cdot N$$

$$K = \left(\frac{1}{2,8}\right)^{\frac{1}{1,67}} \cdot N^{\frac{1}{1,67}}$$

$$K \approx 0,54 \cdot N^{0,60}$$

f $N = 0,01 \cdot K^{-1\frac{1}{2}}$

$$0,01 \cdot K^{-1\frac{1}{2}} = N$$

$$K^{-1\frac{1}{2}} = 100 \cdot N$$

$$K = 100^{-\frac{2}{3}} \cdot N^{-\frac{2}{3}}$$

$$K \approx 0,05 \cdot N^{-0,67}$$

E6 a De lijnen $x = 0$ en $y = 0$ zijn asymptoten van grafiek A.

b Grafiek A is puntsymmetrisch.

c Grafiek B is lijnsymmetrisch.

d $6x^{-3} = -18$

$$\frac{6}{x^3} = -18$$

$$x^3 = -\frac{1}{3}, \text{ dus } x = \left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{3}}$$

De coördinaten van het snijpunt zijn $\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{3}}, -18\right)$.

e $4x^{-2} = \frac{1}{9}$

$$\frac{4}{x^2} = \frac{1}{9}$$

$$x^2 = 36, \text{ dus } x = 6 \text{ of } x = -6$$

De coördinaten van de snijpunten zijn $\left(6, \frac{1}{9}\right)$ en $\left(-6, \frac{1}{9}\right)$.

f $6x^{-3} = 4x^{-2}$

$$6 = 4x$$

$$x = 1\frac{1}{2}$$

$$x = 1\frac{1}{2} \text{ geeft } y = 4 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^{-2} = 1\frac{7}{9}$$

De coördinaten van het snijpunt zijn $\left(1\frac{1}{2}, 1\frac{7}{9}\right)$.

E7 a Voor Femke geldt $I_A = 23,47 \cdot 1,5^{2,28} \approx 59,156... \text{ N}$

Voor Inge geldt $I_B = 21,83 \cdot 1,5^{2,21} \approx 53,482... \text{ N}$

Het verschil is $59,156... - 53,482... \approx 5,7 \text{ N}$

b Invullen van $v = 1,65$ geeft $I_A = 23,47 \cdot 1,65^{2,28} = 73,515...$

Als hij zwempak B draagt, dan geldt $73,515... = 21,83 \cdot v^{2,21}$, ofwel $v^{2,21} = \frac{73,515...}{21,83}$, dus

$$v = \left(\frac{73,515...}{21,83}\right)^{\frac{1}{2,21}} = 1,732...$$

Met dezelfde inspanning kan hij een snelheid van ongeveer 1,73 m/s halen.

c $K = \frac{21,83 \cdot v^{2,21}}{23,47 \cdot v^{2,28}}$

$$K = \frac{21,83}{23,47} \cdot v^{-0,07}$$

$$K \approx 0,93 \cdot v^{-0,07}, \text{ dus } p \approx 0,93 \text{ en } q \approx -0,07$$

E8 De richtingscoëfficiënt van lijn AB is -1 .

Een vergelijking van lijn AB is $y = -x + 9$.

De lengte van een verticaal verbindingslijnstuk is dan

$$L = -x + 9 - (3 - \sqrt{x})^2$$

$$L = -x + 9 - (9 - 6\sqrt{x} + x)$$

$$L = 6\sqrt{x} - 2x$$

- 1 a** Lijn l snijdt de y -as in het punt $(0, 4)$ dus het startgetal is 4.
Als x met 1 toeneemt is de afname van y gelijk aan 0,5. De richtingscoëfficiënt van lijn l is $-0,5$.
- b** De formule die hierbij past is $y = -0,5x + 4$.
- c** Evenwijdige lijnen hebben gelijke richtingscoëfficiënten, dus de richtingscoëfficiënt van k is ook $-0,5$.
- d** Lijn k snijdt de y -as in $(0, 7)$ dus het startgetal is 7.
Een formule voor lijn k is $y = -0,5x + 7$.
- e** Als x met 2 toeneemt is de toename van y gelijk aan 3.
Als x met 1 toeneemt is de toename van y gelijk aan 1,5, dus de richtingscoëfficiënt is 1,5.
Het snijpunt met de y -as is $(0, 4)$ dus het startgetal is 4.
Een formule van lijn m is $y = 1,5x + 4$.
- f** Een formule van een verticale lijn is van de vorm $x = c$.
Een formule van lijn n is $x = 2$.
- 2 a** De richtingscoëfficiënt is -2 en het startgetal is 8, dus $l: y = -2x + 8$.
- b** m is een horizontale lijn door $(0, 3)$, dus $m: y = 3$.
- c** n gaat door de oorsprong, dus $n: y = ax$.
De richtingscoëfficiënt is $\frac{96}{8} = 12$, dus $n: y = 12x$.
- d** k is een verticale lijn door $(8, 3)$, dus $k: x = 8$.
- 3 a** De richtingscoëfficiënt is $\frac{\text{verticale toename}}{\text{horizontale toename}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
- b** De richtingscoëfficiënt van k is $\frac{41 - 14}{19 - 13} = \frac{27}{6} = 4\frac{1}{2}$
- c** De richtingscoëfficiënt van m is $\frac{36 - 12}{14 - -2} = \frac{24}{16} = 1\frac{1}{2}$
- 4** $k: y = 4\frac{1}{2}x + b$
 $41 = 4\frac{1}{2} \cdot 19 + b$ geeft $41 = 85\frac{1}{2} + b$.
 $b = -44\frac{1}{2}$, dus een vergelijking van k is $y = 4\frac{1}{2}x - 44\frac{1}{2}$
- 5 a** De richtingscoëfficiënt is $\frac{52 - 10}{17 - 3} = 3$.
 $l: y = 3x + b$ door $(3, 10)$ geeft $10 = 3 \cdot 3 + b$ dus $b = 1$.
 $l: y = 3x + 1$.
- b** De richtingscoëfficiënt is $\frac{10 - 8}{2 - -2} = \frac{1}{2}$
 $l: y = \frac{1}{2}x + b$ door $(-2, 8)$ geeft $8 = \frac{1}{2} \cdot -2 + b$ dus $b = 9$.
 $l: y = \frac{1}{2}x + 9$
- c** De richtingscoëfficiënt is $\frac{29 - 89}{21 - 25} = 15$.
 $l: y = 15x + b$ door $(25, 89)$ geeft $89 = 15 \cdot 25 + b$ dus $b = -286$.
 $l: y = 15x - 286$
- d** Een richtingscoëfficiënt is er niet, want het is een verticale lijn, dus $l: x = 10$.
- e** De richtingscoëfficiënt is 0, want het is een horizontale lijn, dus $l: y = 3$.
- f** De richtingscoëfficiënt is $\frac{35 - 7}{-2 - 0} = -14$ en het startgetal is 7, dus $l: y = -14x + 7$

6 a $\sqrt{121} = 11$

b $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

c $\sqrt{0,36} = 0,6$

d $\sqrt{225} = 15$

e $\sqrt{169} = 13$

f $\sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10}$

7 a $(6\sqrt{2})^2 = 36 \cdot 2 = 72$

b $4\sqrt{7} \cdot 8\sqrt{3} = 32\sqrt{21}$

c $5\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{12} = 10\sqrt{36} = 10 \cdot 6 = 60$

d $(7\sqrt{3})^2 = 49 \cdot 3 = 147$

8 a $7\sqrt{2} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{98}$

b $9\sqrt{5} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{405}$

c $2\frac{1}{2}\sqrt{8} = \sqrt{6\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{50}$

d $\frac{1}{2}\sqrt{32} = \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{32} = \sqrt{8}$

9 a $\sqrt{72} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

b $\sqrt{54} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$

c $\sqrt{200} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

d $\sqrt{75} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

e $\sqrt{98} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

f $\sqrt{125} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

g $3\sqrt{24} = 3 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{6} = 6\sqrt{6}$

h $2\sqrt{45} = 2 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

i $8\sqrt{63} = 8 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{7} = 8 \cdot 3 \cdot \sqrt{7} = 24\sqrt{7}$

j $80\sqrt{80} = 80 \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 80 \cdot 4 \cdot \sqrt{5} = 320\sqrt{5}$

10 a $\sqrt{32} - \sqrt{2} =$
 $4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

b $4\sqrt{3} + \sqrt{27} =$
 $4\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

c $\sqrt{45} + \sqrt{20} =$
 $3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

d $\sqrt{180} - 2\sqrt{80} =$
 $6\sqrt{5} - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{5} =$
 $6\sqrt{5} - 8\sqrt{5} = -2\sqrt{5}$

e $8\sqrt{6} + \sqrt{54} =$
 $8\sqrt{6} + 3\sqrt{6} = 11\sqrt{6}$

f $18\sqrt{2} - 2\sqrt{18} =$
 $18\sqrt{2} - 2 \cdot 3\sqrt{2} =$
 $18\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

11 a $y = \sqrt{4x} + \sqrt{9x}$
 $y = 2\sqrt{x} + 3\sqrt{x}$
 $y = 5\sqrt{x}$

b A $y = \sqrt{16x} + \sqrt{169x}$
 $y = 4\sqrt{x} + 13\sqrt{x}$
 $y = 17\sqrt{x}$

B $y = \sqrt{18x} + \sqrt{50x}$
 $y = 3\sqrt{2x} + 5\sqrt{2x}$
 $y = 8\sqrt{2x}$

C $y = \sqrt{100x} - \sqrt{16x}$
 $y = 10\sqrt{x} - 4\sqrt{x}$
 $y = 6\sqrt{x}$

D $y = \sqrt{\frac{1}{4}x} + \sqrt{25x}$
 $y = \frac{1}{2}\sqrt{x} + 5\sqrt{x}$
 $y = 5\frac{1}{2}\sqrt{x}$

12 Dan komt er in de noemer een kwadraat te staan en kun je de breuk voor het wortelteken halen.

13 a $\sqrt{\frac{5}{7}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 7}{7 \cdot 7}} = \sqrt{\frac{35}{49}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{35}}{7} = \frac{1}{7}\sqrt{35}$

b $\sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8}{8 \cdot 8}} = \sqrt{\frac{24}{64}} = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{64}} = \frac{\sqrt{24}}{8} = \frac{1}{8}\sqrt{24} = \frac{1}{8} \cdot 2\sqrt{6} = \frac{1}{4}\sqrt{6}$

c $\frac{18}{\sqrt{3}} = \frac{18}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}$

$$d \quad \frac{10}{\sqrt{6}} = \frac{10}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{10\sqrt{6}}{6} = 1\frac{2}{3}\sqrt{6}$$

$$e \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}} \cdot \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{33}}{11} = \frac{1}{11}\sqrt{33}$$

$$f \quad \frac{24}{3\sqrt{2}} = \frac{24}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{24\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{24\sqrt{2}}{6} = 4\sqrt{2}$$

$$14 \quad a \quad \frac{3}{4} + \frac{7}{8} = \frac{6}{8} + \frac{7}{8} = \frac{13}{8} = 1\frac{5}{8}$$

$$b \quad \frac{5}{9} - \frac{2}{4} = \frac{20}{36} - \frac{18}{36} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$c \quad \frac{11}{9} - \frac{1}{3} = \frac{11}{9} - \frac{3}{9} = \frac{8}{9}$$

$$d \quad 3 - 1\frac{6}{7} = \frac{3}{1} - \frac{13}{7} = \frac{21}{7} - \frac{13}{7} = \frac{8}{7} = 1\frac{1}{7}$$

$$e \quad 2\frac{3}{7} + 1\frac{1}{2} = \frac{17}{7} + \frac{3}{2} = \frac{34}{14} + \frac{21}{14} = \frac{55}{14} = 3\frac{13}{14}$$

$$f \quad -1\frac{5}{8} + 2\frac{3}{4} = -\frac{13}{8} + \frac{11}{4} = -\frac{13}{8} + \frac{22}{8} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$$

$$15 \quad a \quad \frac{3}{8} + \frac{5}{9} = \frac{27}{72} + \frac{40}{72} = \frac{67}{72}$$

$$b \quad \frac{7}{9} - \frac{2}{5} = \frac{35}{45} - \frac{18}{45} = \frac{17}{45}$$

$$c \quad \frac{8}{x} + \frac{4}{x} = \frac{12}{x}$$

$$d \quad \frac{6}{17} \times \frac{-3}{4} = -\frac{18}{68} = -\frac{9}{34}$$

$$e \quad \frac{2}{p} \times \frac{5}{p} = \frac{10}{p^2}$$

$$f \quad \frac{a}{6} \times \frac{5}{a} = \frac{5a}{6a} = \frac{5}{6}$$

$$g \quad \frac{3p}{13} \times \frac{2p}{-3} = -\frac{6p^2}{39} = -\frac{2p^2}{13}$$

$$h \quad \frac{3a}{2b} \times \frac{4b}{7a} = \frac{12ab}{14ab} = \frac{6}{7}$$

16 door 72 als gemeenschappelijke noemer te nemen

$$17 \quad a \quad \frac{8}{q} + \frac{4}{5q} = \frac{8 \times 5}{5q} + \frac{4}{5q} = \frac{40}{5q} + \frac{4}{5q} = \frac{44}{5q}$$

$$b \quad \frac{12}{8a} - \frac{1}{2a} = \frac{12}{8a} - \frac{4}{8a} = \frac{8}{8a} = \frac{1}{a}$$

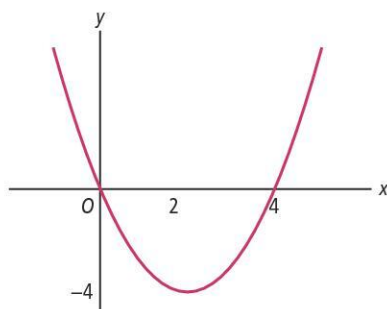
$$c \quad \frac{6}{4a} + \frac{5}{7a} = \frac{6 \times 7}{4a \times 7} + \frac{5 \times 4}{7a \times 4} = \frac{42}{28a} + \frac{20}{28a} = \frac{62}{28a} = \frac{31}{14a}$$

$$d \quad \frac{3}{7p} + \frac{q}{p} = \frac{3}{7p} + \frac{7q}{7p} = \frac{3+7q}{7p}$$

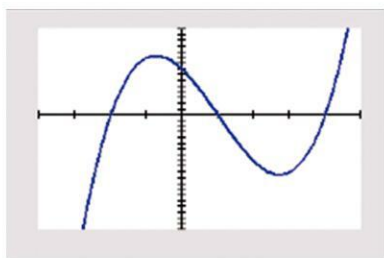
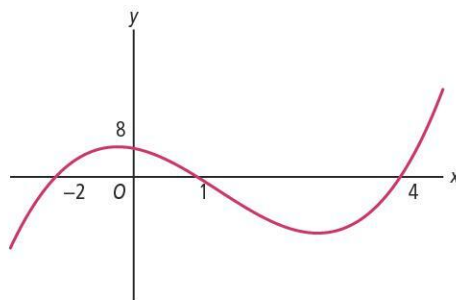
$$e \quad \frac{8}{a} - \frac{7}{a^2} = \frac{8a}{a^2} - \frac{7}{a^2} = \frac{8a-7}{a^2}$$

$$f \quad \frac{2}{3a^2} + \frac{4}{7a} = \frac{2 \times 7}{3a^2 \times 7} + \frac{4 \times 3a}{7a \times 3a} = \frac{14}{21a^2} + \frac{12a}{21a^2} = \frac{14+12a}{21a^2}$$

1



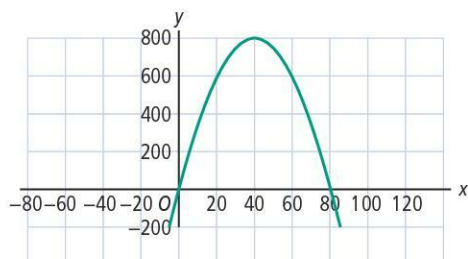
2



- 3 a Bij de derde plot is de grafiek het best in beeld.
b Deze waarde moet lager worden.

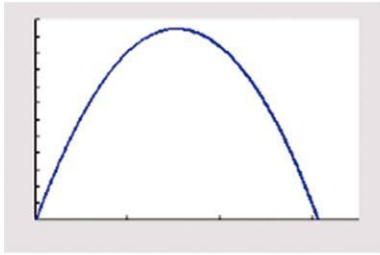
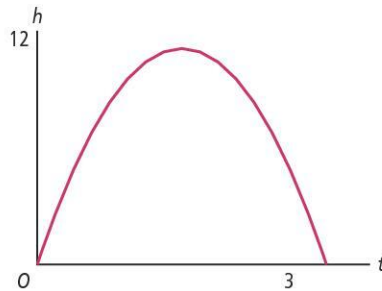
- 4 a De grafiek is een bergparabool. Als je bij $x = 0$ begint met stapgrootte 1 blijven de y -waarden heel lang oplopen. Je kunt beter een stapgrootte nemen die groter is en dan kijken waar de y -waarden gaan dalen. Zo kun je sneller de top vinden, want bij deze stapgrootte duurt dat erg lang.
b bijvoorbeeld: startwaarde 0 en stapgrootte 10

c



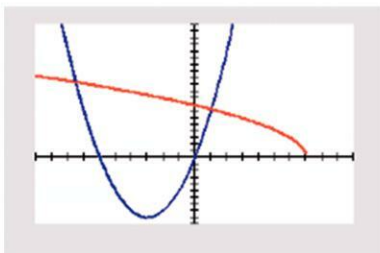
- 5 a Je vindt deze kleinste waarde van x door te berekenen voor welke waarde van x geldt: $2x + 100 = 0$.
Dat is het geval als $x = -50$.
Je kunt deze waarde ook vinden door een tabel te maken.
b bijvoorbeeld: $X_{\min} = -60$, $X_{\max} = 60$, $Y_{\min} = -10$, $Y_{\max} = 25$
- 6 a Als het projectiel op tijdstip $t = 0$ wordt afgeschoten, hebben negatieve waarden van t geen betekenis.
Ook de hoogte h kan niet negatief zijn.
b Maak een tabel met startwaarde 0 en stapgrootte 0,5. Dan blijkt dat de waarde $h = 0$ wordt bereikt tussen $t = 3$ en $t = 3,5$.
De grootste waarde van h in deze tabel is 11,475.
De waarden van t liggen tussen 0 en 3,5; de waarden van h tussen 0 en 12.

c



- 7** a Bijvoorbeeld: $X_{\min} = -15$, $X_{\max} = 15$, $Y_{\min} = -130$, $Y_{\max} = 50$
 b Bijvoorbeeld: $X_{\min} = -2$, $X_{\max} = 2$, $Y_{\min} = -10$, $Y_{\max} = 200$
 c Bijvoorbeeld: $X_{\min} = -15$, $X_{\max} = 15$, $Y_{\min} = -10$, $Y_{\max} = 50$
 d Bijvoorbeeld: $X_{\min} = -10$, $X_{\max} = 10$, $Y_{\min} = -10$, $Y_{\max} = 10$
- 8** a Bijvoorbeeld: $X_{\min} = -5$, $X_{\max} = 10$, $Y_{\min} = -50$, $Y_{\max} = 10$
 b Met de optie: waarde. Het snijpunt met de y -as is $(0, -5)$.
 Met de optie: nulpunt. Het snijpunt met de x -as is ongeveer $(6,29; 0)$.
 Met de opties: minimum en maximum.
 De toppen zijn ongeveer $(-0,08; 4,96)$ en $(4,08; -41,04)$.
- 9** a Met de optie: nulpunt vind je $x \approx 0,20$ en $x \approx 2,08$.
 b Met de optie: minimum vind je de top $(1,36; 4,09)$.
- 10** a Om het derde nulpunt te vinden zal Carl de aanwijzing geven om de vensterinstelling te veranderen.
 b Voer in: $y_1 = 0,2x^3 - 3x^2 - 6x$ met vensterinstelling bijvoorbeeld $X_{\min} = -10$, $X_{\max} = 25$, $Y_{\min} = -200$, $Y_{\max} = 105$
 Gebruik de optie: nulpunten.
 De nulpunten zijn $x = -1,79$; $x = 0$ en $x = 16,79$.
- 11** a Bijvoorbeeld: $-10 \leq x \leq 10$ en $-10 \leq y \leq 20$
 b Voer in $y_1 = x^2 + 6x$ en $y_2 = 3\sqrt{-x + 7}$
 Kies de optie: snijpunten.
 De oplossingen zijn $x = -7,52$ en $x = 1,04$

c



Uit de plot lees je de oplossing af: $-7,52 < x < 1,04$.

- 12** a invoer: $y_1 = x^2 + 4x - 7$
 venster: $-10 \leq x \leq 10$ en $-10 \leq y \leq 20$
 optie: nulpunten
 De nulpunten zijn $x = -5,32$ en $x = 1,32$.
 optie: minimum
 De top is $(-2, -11)$.

- b** invoer: $y_1 = 200x^3 - 50x$
venster: $-2 \leq x \leq 2$ en $-10 \leq y \leq 10$
optie: nulpunten
De nulpunten zijn $x = -0,5$ en $x = 0$ en $x = 0,5$.
opties: minimum en maximum
De toppen zijn $(-0,29; 9,62)$ en $(0,29; -9,62)$.
- c** invoer: $y_1 = 1000 - 11 \times 1,43^x$
venster: $-10 \leq x \leq 20$ en $-1000 \leq y \leq 1500$
optie: nulpunt
Het nulpunt is $x = 12,61$.
De grafiek heeft geen toppen.
- d** invoer: $y_1 = 19 - 3\sqrt{x}$
venster: $-10 \leq x \leq 60$ en $-10 \leq y \leq 20$
optie: nulpunt
Het nulpunt is $x = 40,11$.
De grafiek begint in het randpunt $(0, 19)$, dit is het hoogste punt van de grafiek.

3 Functies en grafieken

Voorkennis

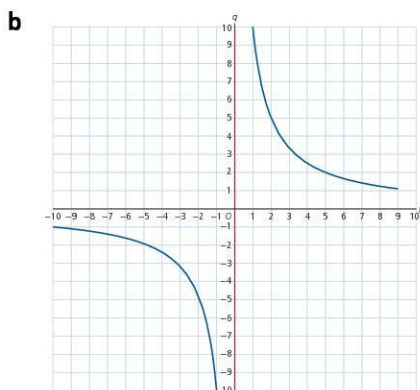
V1 a

A	x	-1	0	1	2	3
	y	7	4	1	-2	-5

B	x	0	1	2	3	4
	y	0	3	6	9	12

- b** Het startgetal is 4 en de richtingscoëfficiënt is -3 .
c Het startgetal van formule B is 0.
d Tabel B is een verhoudingstabel.
e Er komt steeds hetzelfde uit als je y deelt door x .

V2 a Als $p = 0$ krijg je $q = \frac{10}{0}$ en dit heeft geen uitkomst, omdat je niet kunt delen door 0.



- c** $q = \frac{10}{p}$ links en rechts vermenigvuldigen met p geeft $p \times q = 10$.
d Dit noem je een omgekeerd evenredig verband.

V3 a

x	-2	-1	0	1	2	3
y	16	10	8	10	16	26

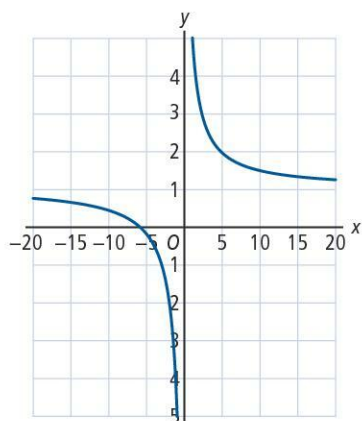
- b** De grafiek die hierbij hoort, noem je een dalparabool.
c De richtingscoëfficiënt is $\frac{10 - 16}{4 - -2} = \frac{-6}{6} = -1$, dus de formule is van de vorm $y = -x + b$. Invullen van $(10, 4)$ geeft $4 = -10 + b$ dus $b = 14$.
 De formule is $y = -x + 14$.

V4 a

x	-10	-5	-1	0	1	5	10
y	0,5	0	-4	-	6	2	1,5

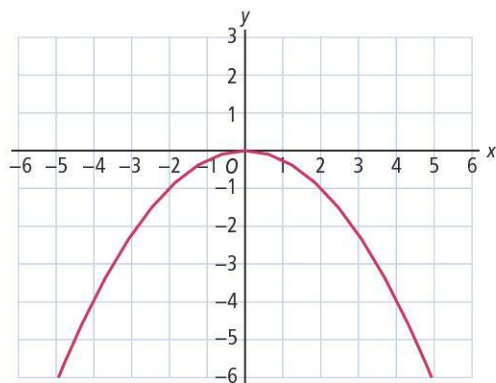
- b** De formule heeft geen uitkomst bij $x = 0$ omdat je niet kan delen door 0.
c $x = 0,0001$ invullen geeft $y = \frac{5}{0,0001} + 1 = 50\,000 + 1 = 50\,001$.
 $x = -0,0001$ invullen geeft $y = \frac{5}{-0,0001} + 1 = -50\,000 + 1 = -49\,999$.
d Links van $x = 0$ heel erg laag en rechts van $x = 0$ heel erg hoog.
e Als x steeds verder van 0 ligt, is de grafiek bijna horizontaal en komt steeds dichterbij $y = 1$.

f



- V5 a Bij de formule $y = x^3$ hoort grafiek B.
 b Bij de formule $y = x^4$ want de y -waarden van twee tegengestelde x -waarden zijn bij deze formule gelijk.

c



- V6 a De wortel van een negatief getal bestaat niet, dus de formule geeft alleen uitkomsten als $x + 2 \geq 0$, dus als $x \geq -2$.
 b $y \geq 0$

- V7 a A: lineair verband, want de afname per eenheid is steeds 8.
 B: omgekeerd evenredig verband, want er geldt steeds $x \cdot y = 36$.
 C: omgekeerd evenredig, want er geldt steeds $x \cdot y = 6$.
 D: lineair verband, want de toename per eenheid is steeds 6.

b A: $y = 44 - 8x$

B: $y = \frac{36}{x}$

C: $y = \frac{6}{x}$

D: $y = 6x + 14$

- V8 a Grafiek A heeft een vorm die hoort bij een wortelformule, dus formule 3.
 Grafiek B is een rechte lijn, dus daar hoort een lineair verband bij, formule 1.
 Grafiek C heeft de vorm van een hyperbool, dus daar hoort een omgekeerd evenredig verband bij, formule 2.
 b $x = 0$ invullen in $y = \sqrt{x} + 4$ geeft $y = \sqrt{0} + 4 = 4$, dus $P(0, 4)$.
 $y = 0$ invullen in $y = 0,5x + 2$ geeft $0 = 0,5x + 2$ ofwel $x = -4$, dus $R(-4, 0)$.
 $x = 0$ invullen in $y = 0,5x + 2$ geeft $y = 0,5 \cdot 0 + 2 = 2$, dus $S(0, 2)$.

3.1 Functie en functiewaarde

intro Grafiek 1 is lineair en stijgend, dus daar hoort formule A bij.
 Grafiek 2 is een bergparabool die door de oorsprong gaat, dus daar hoort formule H bij en grafiek 3 is een horizontale lijn, dus daar hoort formule D bij.

- 1 a** Invullen van $v = 70$ geeft $R = 0,0075 \cdot 70^2 = 36,75$, dus bij een snelheid van 70 km per uur hoort een remweg van 36,75 meter.

b

v	70	80	90	100	110	120
R	37	48	61	75	91	108

- c** Bij een snelheid $v = 80$ hoort de remweg $R = 48$.
 $0,0075v^2 = 27$
 $v^2 = 3600$
 $v = \sqrt{3600} = 60$ (de oplossing $v = -60$ voldoet hier niet)
 Bij een snelheid $v = 60$ hoort de remweg $R = 27$.

2 a $v(t) = -3t + 7$

b $v(3) = -3 \cdot 3 + 7 = -2$

c $v(-1) = -3 \cdot -1 + 7 = 10$

$v(0) = -3 \cdot 0 + 7 = 7$

d $v(6) = -3 \cdot 6 + 7 = -11$

3 a $L(3) = 3 \cdot 3 + 16 = 25$

$L(10) = 3 \cdot 10 + 16 = 46$

- b** De lengte van de veer als er een gewicht van 3 kg en 10 kg aan hangt.

c $31 = 3m + 16$

$3m = 15$

$m = 5$

d $17,5 = 3m + 16$

$3m = 1,5$

$m = 0,5$

4 a $f(10) = \frac{1}{2} \cdot 10 - 3 = 2$

$g(8) = -8^2 + 1 = -63$

b $-1 = \frac{1}{2}x - 3$

$\frac{1}{2}x = 2$

$x = 4$

c $44 = \frac{1}{2}x - 3$

$\frac{1}{2}x = 47$

$x = 94$

d $g(x) = -3$ bij $x = -2$ en $x = 2$.

- e** Het startgetal van de lijn is 1 en de richtingscoëfficiënt is 0, dus de formule van de lijn is $y = 1$ en het bijbehorende functievoorschrift $h(x) = 1$.

5 a $k(0) = 2$, $l(2) = -1$ en $m(-2) = -1$

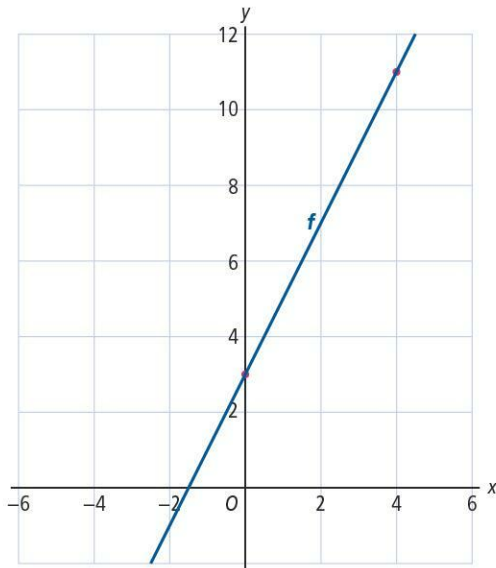
- b** k is een kwadratische functie.

c $k(x) = 0$ bij $x = -2$ en $x = 2$.

d De richtingscoëfficiënt is $-\frac{1}{2}$ en het startgetal is 0, dus $l(x) = -\frac{1}{2}x$.

e $m(x) = -1$

6a



- b De richtingscoëfficiënt $= \frac{11 - 3}{4 - 0} = \frac{8}{4} = 2$.
- c $f(0) = 3$ dus het startgetal is 3. Het functievoorschrift is $f(x) = 2x + 3$.
- d Vijf eenheden naar rechts, dan moet in het functievoorschrift x vervangen worden door $x - 5$. Dit geeft $f(x) = 2(x - 5) + 3$ ofwel $f(x) = 2x - 7$.

7 a $g(0) = 0 - 7 \cdot 0 + 3 = 3$, dus grafiek A hoort bij g .

b $f(0) = 0^2 - 7 \cdot 0 + 10 = 10$

c $x^2 - 7x + 10 = 0$

$(x - 2)(x - 5) = 0$

$x - 2 = 0$ of $x - 5 = 0$

$x = 2$ of $x = 5$

d Bij opdracht b gaat het om het snijpunt met de y -as en bij opdracht c gaat het om de snijpunten met de x -as.

e $g(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3$

f $x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x - 1)(x - 3) = 0$

$x - 1 = 0$ of $x - 3 = 0$

$x = 1$ of $x = 3$

g In de grafiek zie je dat $g(x) < 0$ voor $1 < x < 3$.

04 a $f(3) = 2 \cdot 3 - 5 = 1$, dus de functiewaarde van f bij $x = 3$ is 1.

b $f(1) = 2 \cdot 1 - 5 = -3$

$g(1) = 1^2 - 5 = -4$

c $2x - 5 = 13$

$2x = 18$

$x = 9$

d $g(x) = 31$ geeft de vergelijking $x^2 - 5 = 31$.

e $x^2 - 5 = 31$

$x^2 = 36$

$x = -6$ of $x = 6$

f $f(10) = 2 \cdot 10 - 5 = 15$

$f(x) = 10$

$2x - 5 = 10$

$2x = 15$

$x = 7\frac{1}{2}$

g Het functievoorschrift van h is $h(x) = 2$.

3 Functies en grafieken

- U1** De x -waarde van de top zit precies tussen $(0, 8)$ en $(5, 8)$ in, dus $x = 2\frac{1}{2}$.
Voor de y -waarde van de top moet $x = 2\frac{1}{2}$ ingevuld worden in $k(x) = x + 4$.
 $k(2\frac{1}{2}) = 2\frac{1}{2} + 4 = 6\frac{1}{2}$. De coördinaten van de top zijn $(2\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2})$.

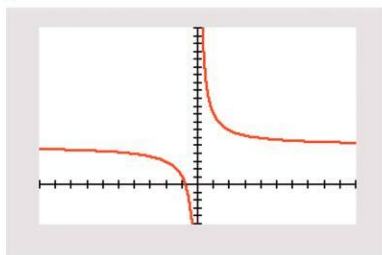
- U2 a** $-6 \cdot 3 + b = 0$
 $-18 + b = 0$
 $b = 18$
b $-6 \cdot b + b = 20$
 $-5b = 20$
 $b = -4$
c $-6 \cdot 5 + b = 5b$
 $-30 = 4b$
 $b = -7\frac{1}{2}$

3.2 Domein en bereik

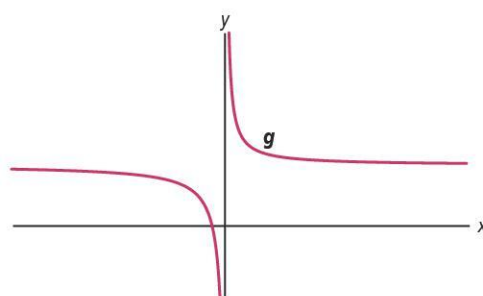
intro Het randpunt van de grafiek is het punt $(3, 1)$, dus het functievoorschrift is $f(x) = 1 + \sqrt{x - 3}$. Op de puntjes moeten dus de getallen 1 en 3 staan.

- 8 a** $f(1) = 2 + \sqrt{1 - 4}$ ofwel $f(1) = 2 + \sqrt{-3}$ en de wortel van een negatief getal bestaat niet.
b $x - 4 \geq 0$ dus voor $x \geq 4$ bestaan er functiewaarden.
c $f(x) \geq 2$, want $\sqrt{x - 4} \geq 0$ dus $2 + \sqrt{x - 4} \geq 2$
d Het randpunt heeft coördinaten $(4, 2)$.

- 9 a** plot



schets



- b** Delen door nul kan niet, dus voor x mag niet de waarde nul worden ingevuld.
c $g(x) = 5$
 $5 + \frac{4}{x} = 5$
 $\frac{4}{x} = 0$ dus $x = \frac{4}{0}$ en dit heeft geen oplossing, want delen door nul kan niet.
10 a Alle getallen kunnen ingevuld worden voor x .
b $x^2 - 2x - 8 = 0$
 $(x + 2)(x - 4) = 0$
 $x + 2 = 0$ of $x - 4 = 0$
 $x = -2$ of $x = 4$
De snijpunten van g met de x -as zijn $(-2, 0)$ en $(4, 0)$.

- c De symmetrie-as ligt tussen $(-2, 0)$ en $(4, 0)$.

$$\text{Dus } x_{top} = \frac{-2+4}{2} = 1 \text{ en } y_{top} = g(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 8 = -9$$

De coördinaten van de top zijn $(1, -9)$.

- d Het bereik van f is $\mathbb{R}$.

- e De grafiek van g is een dalparabool waarvan de top het punt $(1, -9)$ is, dus het bereik van g is $y \geq -9$

- 11 a $2x + 3 = 0$

$$2x = -3$$

$$x = -1\frac{1}{2}$$

$$h\left(-1\frac{1}{2}\right) = 3 - \sqrt{2 \cdot -1\frac{1}{2} + 3} = 3 - \sqrt{0} = 3$$

Het randpunt heeft coördinaten $\left(-1\frac{1}{2}, 3\right)$.

- b Het domein van h is $x \geq -1\frac{1}{2}$

- c Het bereik van h is $y \leq 3$

$h(x)$ kan waarden hebben die kleiner dan of gelijk zijn aan drie.

- 12 a Interval 1 hoort bij ongelijkheid B.

Interval 2 hoort bij ongelijkheid D.

Interval 3 hoort bij ongelijkheid C.

- b interval 1: $\langle \leftarrow, -1 \rangle$

interval 2: $[-2, 4)$

interval 3: $\langle 1, \rightarrow \rangle$

13

ongelijkheid	$-2 \leq x < 6$	$x > -9$	$x < 0$	$-2 < x \leq 1$
getallenlijn				
interval	$[-2, 6)$	$\langle -9, \rightarrow \rangle$	$\langle \leftarrow, 0 \rangle$	$\langle -2, 1 \rangle$

- 14 a $x + 12 \geq 0$ als $x \geq -12$ dus het domein van f is $[-12, \rightarrow)$.

Het bereik van f is $[6, \rightarrow)$.

Bij functie g mag je voor x elke waarde invullen, dus het domein is $\mathbb{R}$.

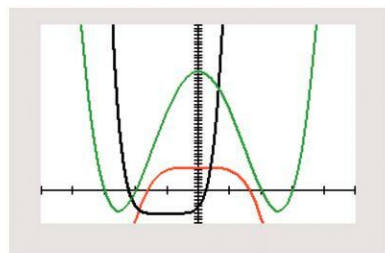
Omdat $(3x - 1)^2 \geq 0$ is $2 - (3x - 1)^2 \leq 2$, dus het bereik van g is $\langle \leftarrow, 2 \rangle$.

- b $6 - 2x \geq 0$ als $x \leq 3$ dus het domein van h is $\langle \leftarrow, 3 \rangle$ en het bereik $\langle \leftarrow, 21 \rangle$.

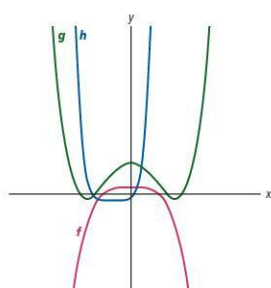
De noemer van k zal nooit nul worden, dus het domein van k is $\mathbb{R}$.

Uit een plot blijkt dat de top van de grafiek het punt $(0, 6)$ is en de x -as de horizontale asymptoot is, het bereik van k is daarom $\langle 0, 6 \rangle$.

- 15 a plot



schets



3 Functies en grafieken

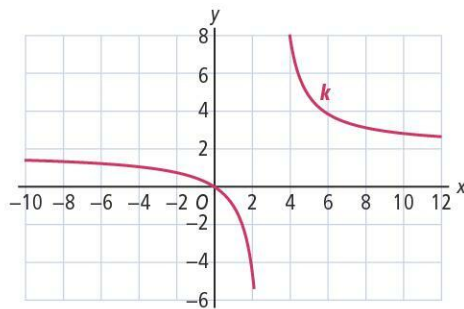
- b** Het domein van alle drie functies is $\mathbb{R}$.
- c** Het bereik van f is $\langle \leftarrow, 7 \rangle$, het bereik van g is $\left[-6\frac{1}{4}, \rightarrow \right)$ en het bereik van h is $\left[-7, \rightarrow \right)$.
- 16 a** Een voorbeeld van een functie waarbij het domein en bereik $\mathbb{R}$ is, is $f(x) = 2x - 3$.
- b** Een voorbeeld van een functie waarbij het domein $\mathbb{R}$ is, en het bereik niet $\mathbb{R}$ is, is $g(x) = x^2 - 3$.
- c** Een voorbeeld van een functie waarbij het domein en bereik beiden niet $\mathbb{R}$ zijn, is $h(x) = \sqrt{5x - 10} + 8$.
- 09 a** Je kunt voor x de waarde 0 niet invullen, omdat je niet kunt delen door 0.
- b** $g(10) = 3 + \frac{12}{10} = 4,2$, $g(100) = 3 + \frac{12}{100} = 3,12$
 $g(1000) = 3 + \frac{12}{1000} = 3,012$ en $g(1\,000\,000) = 3 + \frac{12}{1\,000\,000} = 3,000\,012$
- c** De uitkomsten komen steeds dichterbij $y = 3$.
- d** $g(-10) = 1,8$; $g(-100) = 2,88$; $g(-1000) = 2,988$
- e** Het getal 3 kan niet als functiewaarde van g voorkomen.
- 014 a** Ja, je kunt voor x elk getal invullen.
Omdat je voor x elk getal kunt invullen is het domein van f gelijk aan $\mathbb{R}$.
- b** Iets in het kwadraat is altijd groter dan of gelijk aan nul, dus $y \geq 0$.
Voor het bereik van f moet je hier nog 10 afhalen, dus het bereik is $\left[-10, \rightarrow \right)$.
- c** $x - 4 > 0$ ofwel $x > 4$, dus het domein van g is $\langle 4, \rightarrow \rangle$.
- d** Uit de plot van g blijkt dat de lijn $y = 0$ de horizontale asymptoot is.
Het bereik van g is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.
- U3 a** $16 - x^2 \geq 0$
 $x^2 \leq 16$
Hieruit volgt dat het domein van f het interval $[-4, 4]$ is.
- b** Het bereik van f is $[0, 4]$.
- c** $(2 - x)(x - 10) = 0$
 $x = 2$ of $x = 10$
Het domein van g is $[2, 10]$ en uit een plot blijkt dat het bereik $[0, 4]$ is.
- U4 a** Voor het domein geldt $a - 5x \geq 0$ en als het domein $\langle \leftarrow, 4 \rangle$ is, dan is $a - 5 \cdot 4 = 0$
 $a = 20$
- b** Als het bereik $\left[-7, \rightarrow \right)$ is, dan is $2b - 3 = -7$
 $2b = -4$
 $b = -2$

3.3 Gebroken functies

intro Als de oppervlakte 12 is, dan moet gelden $x \cdot y = 12$ ofwel $y = \frac{12}{x}$.
Het functievoorschrift kan $A(x) = \frac{12}{x}$ zijn.

17 a

x	-5	-1	0	1	2	2,9	3	3,1	10	100
$k(x)$	$1\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	-4	-58	-	62	$2\frac{6}{7}$	$2\frac{6}{97}$



b $k(3) = \frac{6}{3-3} + 2 = \frac{6}{0} + 2$ en delen door 0 mag niet.

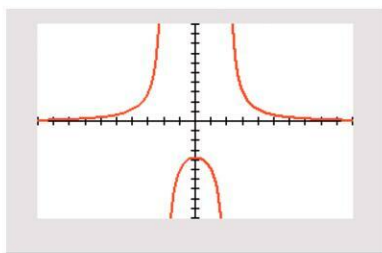
c Als je vanaf links heel dicht bij 3 komt, wordt de functiewaarde heel erg klein en kom je vanaf rechts, dan wordt de functiewaarde heel erg groot.

d $k(-10) = \frac{6}{-10-3} + 2 = \frac{6}{-13} + 2 = 1\frac{7}{13}$

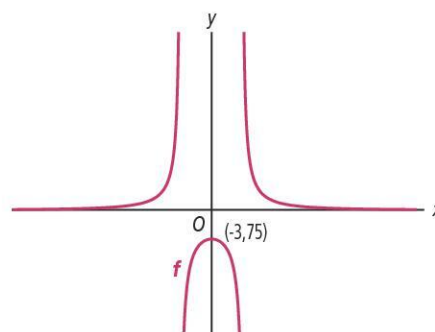
$k(-100) = \frac{6}{-100-3} + 2 = \frac{6}{-103} + 2 = 1\frac{97}{103}$

e In dat geval komen de functiewaarden steeds dichterbij 2 te liggen.

18 a plot



schets

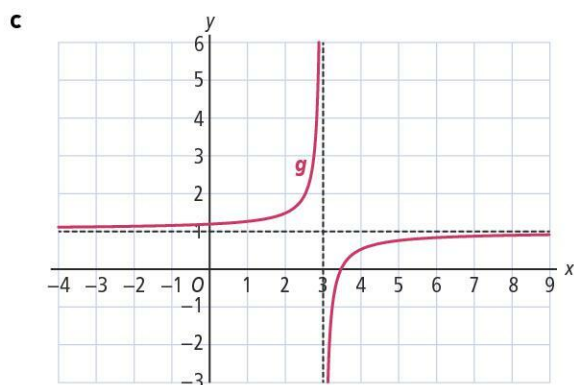


b De noemer mag niet nul worden, dus je kunt niet $x = -2$ en $x = 2$ invullen.

19 a

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	$1\frac{1}{10}$	$1\frac{1}{8}$	$1\frac{1}{6}$	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	-	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$

b Omdat de noemer niet nul mag zijn, is het domein van g $\langle -\infty, 3 \rangle$ en $\langle 3, \infty \rangle$.



d De vergelijkingen van de asymptoten zijn $x = 3$ en $y = 1$.

e Het bereik van g is $\langle -\infty, 1 \rangle$ en $\langle 1, \infty \rangle$.

20 a $x - 2 = 0$ als $x = 2$, dus $x = 2$ en $y = 4$.

b $7x + 14 = 0$ als $x = -2$, dus $x = -2$ en $y = 18$.

c $x^2 + 9 = 0$ heeft geen oplossing, dus alleen maar $y = 0$.

d $x^2 - 9 = 0$ als $x = -3$ of $x = 3$, dus $x = -3$, $x = 3$ en $y = 1$.

21 a Het domein is $\langle -\infty, 9 \rangle \cup \langle 9, \infty \rangle$ en het bereik is $\langle -\infty, 2 \rangle \cup \langle 2, \infty \rangle$.

b Het domein is $\langle -\infty, 2\frac{1}{2} \rangle$ en het bereik is $[4, \infty)$.

c Het domein is $\langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 0, \infty \rangle$ en het bereik is $\langle -\infty, 7 \rangle$.

d Het domein is $\langle -2, \infty \rangle$ en het bereik is $\langle 3, \infty \rangle$.

22 a De noemer van f is $x^2 + 4$ en $x^2 + 4 = 0$ heeft geen oplossingen.

De noemer van g is $x^2 - 4$ en $x^2 - 4 = 0$ heeft twee oplossingen, namelijk $x = -2$ en $x = 2$.

b Ja, beide grafieken hebben als horizontale asymptoot de x -as ofwel $y = 0$.

23 a 3 uur en 20 minuten zijn $3 \cdot 60 + 20 = 200$ minuten.

$$G(200) = 0,09 + \frac{5}{200} = 0,115.$$

De gemiddelde prijs per belminuut is dan 0,115 euro.

b De totale kosten per maand zijn hiervoor $0,115 \cdot 200 = 23$ euro.

c Als x steeds groter wordt, komt de functiewaarde van G steeds dichterbij 0,09.

d De horizontale asymptoot heeft als vergelijking $y = 0,09$.

e De gemiddelde prijs per belminuut zal bij heel veel belminuten per maand dalen tot bijna 0,09 euro.

020 a De noemer is gelijk aan 0 als $x = 1$ en $x = -1$.

b De verticale asymptoten zijn $x = 1$ en $x = -1$.

$$\mathbf{c} \quad f(-100) = 5 + \frac{24}{(-100)^2 - 1} = 5 + \frac{24}{9999} = 5\frac{8}{3333}$$

$$f(-1000) = 5 + \frac{24}{(-1000)^2 - 1} = 5 + \frac{24}{999999} = 5\frac{8}{333333}$$

$$f(100) = 5 + \frac{24}{100^2 - 1} = 5 + \frac{24}{9999} = 5\frac{8}{3333}$$

$$f(1000) = 5 + \frac{24}{1000^2 - 1} = 5 + \frac{24}{999999} = 5\frac{8}{333333}$$

- d Voor x -waarden ver van 0 komen de functiewaarden steeds dichterbij 5 te liggen, dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 5$.
- e $x + 1 = 0$ als $x = -1$, dus de asymptoten zijn $x = -1$ en $y = 2$.
- f $2x - 13 = 0$
 $2x = 13$
 $x = 6\frac{1}{2}$
 De asymptoten zijn $x = 6\frac{1}{2}$ en $y = \frac{1}{2}$.
- g $5 + x^2 = 0$ heeft geen oplossing, dus de enige asymptoot is $y = 0$.
- h $x^2 - 2x - 15 = 0$
 $(x - 5)(x + 3) = 0$
 $x = 5$ of $x = -3$
 De asymptoten zijn $x = 5$, $x = -3$ en $y = 0$.

021 a $g(5) = 2 + \frac{30}{3 \cdot 5 - 15} = 2 + \frac{30}{0}$, dus de noemer is dan 0 en dat mag niet.

b Het domein van g is $\langle \leftarrow, 5 \rangle \cup \langle 5, \rightarrow \rangle$

c $g(10) = 2 + \frac{30}{3 \cdot 10 - 15} = 2 + \frac{30}{15} = 4$

$$g(100) = 2 + \frac{30}{3 \cdot 100 - 15} = 2 + \frac{30}{285} = 2\frac{2}{19}$$

$$g(1000) = 2 + \frac{30}{3 \cdot 1000 - 15} = 2 + \frac{30}{2985} = 2\frac{2}{199}$$

$$g(-10) = 2 + \frac{30}{3 \cdot -10 - 15} = 2 + \frac{30}{-45} = 1\frac{1}{3}$$

$$g(-100) = 2 + \frac{30}{3 \cdot -100 - 15} = 2 + \frac{30}{-315} = 1\frac{19}{21}$$

$$g(-1000) = 2 + \frac{30}{3 \cdot -1000 - 15} = 2 + \frac{30}{-3015} = 1\frac{199}{201}$$

d Als je voor x waarden invult die steeds verder van 0 liggen, dan nadert $g(x)$ tot 2.

e Het bereik van g is $\langle \leftarrow, 2 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$.

U5 a $r(p) = \frac{p+2}{p}$

b Als p steeds groter wordt, nadert $r(p)$ tot de waarde 1.

c Als de richtingscoëfficiënt nadert tot 1, nadert $\angle AOB$ naar 45 graden.

U6 a $c < 0$, want dan heeft $x^2 + c = 0$ twee oplossingen.

b Met een plot zijn de top $(0, 6)$ en de asymptoot $y = 0$ te vinden. Het bereik is dan $\langle 0, 6 \rangle$.

c Als het bereik $\langle 0, 4 \rangle$ is, dan zijn de coördinaten van de top $(0, 4)$.

$$\frac{2}{0^2 + c} = 4 \text{ geeft } \frac{2}{c} = 4 \text{ dus } c = \frac{1}{2}$$

3.4 Soorten functies

intro f : machtsfunctie (even macht)

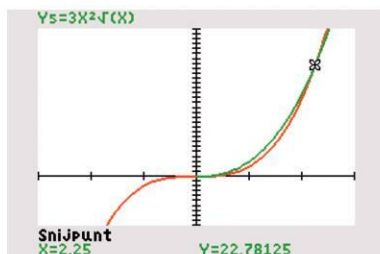
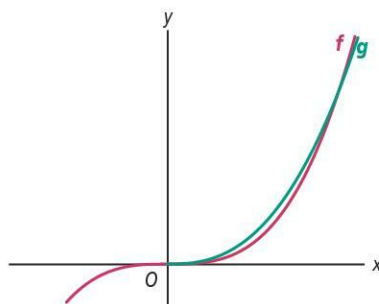
g : wortelfunctie

h : kwadratische functie

k : lineaire functie

m : constante functie

- 24 a** De functies k en q zijn lineair.
- b** Andere soorten functies zijn: kwadratische functie (f), machtsfunctie (g en r), wortelfunctie (h en p) en een constante functie (s).
- 25**
- $$f(x) = (x - 3)(x + 5)$$
- $$f(x) = x^2 - 3x + 5x - 15$$
- $$f(x) = x^2 + 2x - 15$$
- $$g(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 3)$$
- $$g(x) = x^4 - 3x^2 - 2x^2 + 6$$
- $$g(x) = x^4 - 5x^2 + 6$$
- $$h(x) = 2x^2(3 - x) + 6\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1\right)$$
- $$h(x) = 6x^2 - 2x^3 + 2x^3 - 6x^2 + 6$$
- $$h(x) = 6$$
- 26 a**
- $$h(x) = (x + 5)^2 - (x - 4)^2$$
- $$h(x) = x^2 + 5x + 5x + 25 - (x^2 - 4x - 4x + 16)$$
- $$h(x) = x^2 + 5x + 5x + 25 - x^2 + 4x + 4x - 16$$
- $$h(x) = 18x + 9$$
- $$k(x) = (x^2 - 4)(x^3 - 1)$$
- $$k(x) = x^5 - x^2 - 4x^3 + 4$$
- b**
- f : derdegraads functie
 g : vierdegraads functie
 h : eerstegraads functie
 k : vijfdegraads functie
- 27 a** Bij de vorm $f(x) = a(x - p)^2 + q$ is de top (p, q) eenvoudig af te lezen.
- b** Bij de vorm $f(x) = a(x - m)(x - n)$ weet je zeker dat de grafiek de x -as snijdt. De snijpunten zijn dan $(m, 0)$ en $(n, 0)$.
- c** Als bij een dalparabool de top boven de x -as ligt, snijdt de parabool de x -as niet. In dat geval is $a > 0$ en $q > 0$ (de waarde van p maakt niet uit). Als bij een bergparabool de top onder de x -as ligt, snijdt de parabool de x -as niet. In dat geval is $a < 0$ en $q < 0$ (de waarde van p maakt niet uit).
- 28 a** Functie f is een veeltermfunctie en functie g een wortelfunctie.
- b** Van functie f is het domein en bereik $\mathbb{R}$.
 Van functie g is het domein $[0, \rightarrow)$ en het bereik $[0, \rightarrow)$.
- c** plot schets



d $2x^3 = 3x^2\sqrt{x}$
 $2x \cdot x^2 = 3\sqrt{x} \cdot x^2$
 $x^2 = 0$ of $2x = 3\sqrt{x}$
 $x = 0$ of $4x^2 = 9x$
 $x = 0$ of $4x^2 - 9x = 0$
 $x = 0$ of $x(4x - 9) = 0$
 $x = 0$ of $x = 2\frac{1}{4}$
 $f(0) = 2 \cdot 0^3 = 0$ en $f(2\frac{1}{4}) = 2 \cdot (2\frac{1}{4})^3 = 2 \cdot 11\frac{25}{64} = 22\frac{25}{32}$
 De coördinaten van de snijpunten zijn $(0,0)$ en $(2\frac{1}{4}, 22\frac{25}{32})$.

of met behulp van GR benaderen:
 Invoer: $y_1 = 2x^3$ en $y_2 = 3x^2\sqrt{x}$
 Venster: $-3 \leq x \leq 3$, $-10 \leq y \leq 30$
 Opties: snijpunten
 De snijpunten zijn $(0,0)$ en $(2,25; 22,78)$.

- 29** Het domein is niet altijd $\mathbb{R}$ bij wortelfuncties, omdat onder het wortelteken alleen positieve getallen mogen voorkomen.
 Ook bij gebroken functies is het domein niet altijd $\mathbb{R}$, omdat de noemer geen nul mag zijn.

026 a f heeft een derde graad en g heeft een tweede graad.

b $h(x) = (x^3 - 1)(x^3 - 8)$
 $h(x) = x^6 - 8x^3 - x^3 + 8$
 $h(x) = x^6 - 9x^3 + 8$
 c h heeft een zesde graad.
 d $k(x) = 3x(x - 2)(2x + 7)$
 $k(x) = 3x(2x^2 + 7x - 4x - 14)$
 $k(x) = 3x(2x^2 + 3x - 14)$
 e $k(x) = 6x^3 + 9x^2 - 42x$
 f k heeft een derde graad.

- U7 a** In elke functie komt de factor $x - 1$ voor, dus hebben alle functies hetzelfde snijpunt met de x -as, namelijk $(1, 0)$.
 b De factor $x - 2$ komt voor bij de functies g , h en k dus het punt $(2, 0)$ ligt op de grafieken van deze drie functies.
 De factor $x - 3$ komt voor bij de functies h en k dus het punt $(3, 0)$ ligt op de grafieken van deze twee functies.
 c f : eerste graad
 g : tweede graad
 h : derde graad
 k : vierde graad

- U8** De grafiek gaat door de punten $(-2, 0)$ en $(4, 0)$ dus het functievoorschrift heeft de vorm $f(x) = a(x + 2)(x - 4)$.
 Invullen van het de coördinaten van het punt $(6, 12)$ geeft
 $12 = a(6 + 2)(6 - 4)$
 $12 = a \cdot 8 \cdot 2$
 $12 = 16a$
 $a = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$
 $f(x) = \frac{3}{4}(x + 2)(x - 4)$

3.5 Vergelijkingen oplossen

intro Neem voor de leeftijd de beginletters van de namen, dan geldt:

$$B + 4 = E \text{ en } K + 4 = B \text{ dus } K = B - 4$$

$$K^2 = O \text{ dus } (B - 4)^2 = O$$

Dit voor K en O substitueren in $O + B + E + K = 100$ geeft

$$(B - 4)^2 + B + (B + 4) + (B - 4) = 100$$

$$B^2 - 5B - 84 = 0$$

$$(B - 12)(B + 7) = 0$$

$$B = 12 \text{ (} B = -7 \text{ voldoet hier niet)}$$

Opa Joost is 64, Eric 16, Bo 12 en Kevin 8 jaar oud.

- 30** De oplossingen van Annet zijn juist, Yvonne geeft de oplossingen afgerond op twee decimalen. Ook had Yvonne bij haar oplossingen het ongeveer-teken moeten gebruiken.

31 a $x - \frac{3}{x} = -4$

$$x + 4 = \frac{3}{x}$$

$$x^2 + 4x = 3$$

$$x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$D = 16 - 4 \cdot 1 \cdot -3 = 28$$

$$x = \frac{-4 - \sqrt{28}}{2} \text{ of } x = \frac{-4 + \sqrt{28}}{2}$$

$$x = -2 + \frac{1}{2}\sqrt{28} \text{ of } x = -2 - \frac{1}{2}\sqrt{28}$$

b $2x(x^2 - 3x) = 2x^3 - 4x$

$$2x^3 - 6x^2 = 2x^3 - 4x$$

$$-6x^2 + 4x = 0$$

$$x(-6x + 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } -6x + 4 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } -6x = -4$$

$$x = 0 \text{ of } x = \frac{2}{3}$$

c $x - 1 = \sqrt{x - 1}$

$$x^2 - 2x + 1 = x - 1$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x - 1)(x - 2) = 0$$

$$x = 1 \text{ of } x = 2 \text{ beide voldoen}$$

d $\frac{2}{x} - 1 = x$

$$\frac{2}{x} = x + 1$$

$$2 = x^2 + x$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x - 1)(x + 2) = 0$$

$$x = 1 \text{ of } x = -2$$

32 a $3 - \sqrt{5 + 2x^2} = 0$

$$\sqrt{5 + 2x^2} = 3$$

$$5 + 2x^2 = 9$$

$$2x^2 = 4$$

$$x^2 = 2$$

$$x = -\sqrt{2} \text{ of } x = \sqrt{2}$$

$$(-\sqrt{2}, 0) \text{ en } (\sqrt{2}, 0)$$

b $\sqrt{x^2 + x - 1} = 0$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 5$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ of } x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ of } x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}, 0\right) \text{ en } \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, 0\right)$$

$$\text{c } 1 - \frac{4}{2x^2 + x + 3} = 0$$

$$\frac{4}{2x^2 + x + 3} = 1$$

$$2x^2 + x + 3 = 4$$

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot -1 = 9$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{9}}{4} \text{ of } x = \frac{-1 + \sqrt{9}}{4}$$

$$x = -1 \text{ of } x = \frac{1}{2}$$

$$(-1, 0) \text{ en } \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\text{d } (x^2 - 3)(x^2 - 4) = 0$$

$$x^2 - 3 = 0 \text{ of } x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 3 \text{ of } x^2 = 4$$

$$x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}, x = -2 \text{ of } x = 2$$

$$(-\sqrt{3}, 0), (\sqrt{3}, 0), (-2, 0) \text{ en } (2, 0)$$

33 a De omtrek is $2 \cdot \pi \cdot 1\frac{1}{2} = 3\pi$ en de oppervlakte is $\pi \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{4}\pi$.

b De lengte van de evenaar is de omtrek van een cirkel met de diameter van de aarde, dus $2 \cdot \pi \cdot \frac{12732}{2} = 39998,75 \dots \approx 39999 \text{ km}$.

c De aarde heeft geen vlak oppervlak, denk aan bergen en dalen.

34 a invoer: $y_1 = x^3 + 6x^2$ en $y_2 = 4(x + 6)$

venster: $-10 \leq x \leq 10, -10 \leq y \leq 50$

optie: snijpunten

De snijpunten zijn $(-6, 0)$, $(-2, 16)$ en $(2, 32)$.

b $x^3 + 6x^2 = 4(x + 6)$

$$x^2(x + 6) = 4(x + 6)$$

$$x^2 = 4 \text{ of } x + 6 = 0$$

$$x = -2, x = 2 \text{ of } x = -6$$

35 a Vergelijkingen B en D kunnen exact worden opgelost.

$$\text{B: } 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 = 0$$

$$x^2(2x^2 - 5x + 2) = 0$$

$$x^2 = 0 \text{ of } 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$$

$$x = 0 \text{ of } x = \frac{5 - \sqrt{9}}{4} = \frac{1}{2} \text{ of } x = \frac{5 + \sqrt{9}}{4} = 2$$

$$\text{D: } 2x + 1 = \sqrt{4x + 10}$$

$$(2x + 1)^2 = 4x + 10$$

$$4x^2 + 4x + 1 = 4x + 10$$

$$4x^2 = 9$$

$$x^2 = \frac{9}{4}$$

$$x = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \text{ (} x = -\sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2} \text{ voldoet niet)}$$

b vergelijking A:

$$\text{invoer: } y_1 = x^3 + 2x^2 \text{ en } y_2 = 15$$

$$\text{venster: } -5 \leq x \leq 5, -10 \leq y \leq 20$$

optie: snijpunten

De oplossing is $x \approx 1,95$

vergelijking C:

$$\text{invoer: } y_1 = \frac{x^2}{x-4} \text{ en } y_2 = \frac{x^2}{x-1}$$

$$\text{venster: } -10 \leq x \leq 10, -10 \leq y \leq 10$$

optie: snijpunten

De oplossingen zijn $x \approx -1,32$ of $x \approx 0,65$ of $x \approx 4,67$.

- 36 a** Aflezen $x = -1$ en invullen geeft:

$$f(-1) = (-1 + 1)(-1 - 3)^2 = 0 \cdot 16 = 0 \text{ en } g(-1) = 4(-1 + 1) = 4 \cdot 0 = 0$$

Aflezen $x = 1$ en invullen geeft:

$$f(1) = (1 + 1)(1 - 3)^2 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ en } g(1) = 4(1 + 1) = 4 \cdot 2 = 8$$

b $(x + 1)(x - 3)^2 = 4(x + 1)$

$$x + 1 = 0 \text{ of } (x - 3)^2 = 4$$

$$x = -1 \text{ of } x - 3 = -2 \text{ of } x - 3 = 2$$

$$x = -1 \text{ of } x = 1 \text{ of } x = 5$$

De derde oplossing is dus $x = 5$.

37 a $(x - 2)^2(2x + 1) = (x - 2)^2(x + 2)$

$$(x - 2)^2 = 0 \text{ of } 2x + 1 = x + 2$$

$$x - 2 = 0 \text{ of } x = 1$$

$$x = 2 \text{ of } x = 1$$

b $(x - 2)^2(2x + 1) = (x - 2)^3$

$$(x - 2)^2(2x + 1) = (x - 2)^2(x - 2)$$

$$(x - 2)^2 = 0 \text{ of } 2x + 1 = x - 2$$

$$x - 2 = 0 \text{ of } x = -3$$

$$x = 2 \text{ of } x = -3$$

c $x^3 = 13x^2 - 36x$

$$x \cdot x^2 = x \cdot (13x - 36)$$

$$x = 0 \text{ of } x^2 = 13x - 36$$

$$x = 0 \text{ of } x^2 - 13x + 36 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } (x - 4)(x - 9) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 4 \text{ of } x = 9$$

d $x^2(4x + 1) = 16x + 4$

$$x^2(4x + 1) = 4(4x + 1)$$

$$x^2 = 4 \text{ of } 4x + 1 = 0$$

$$x = -2 \text{ of } x = 2 \text{ of } 4x = -1$$

$$x = -2 \text{ of } x = 2 \text{ of } x = -\frac{1}{4}$$

38 a $-x^2 + 5x + 6 = 0$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

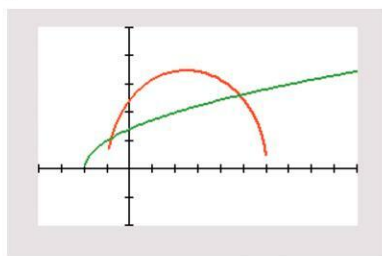
$$(x - 6)(x + 1) = 0$$

$$x = 6 \text{ of } x = -1$$

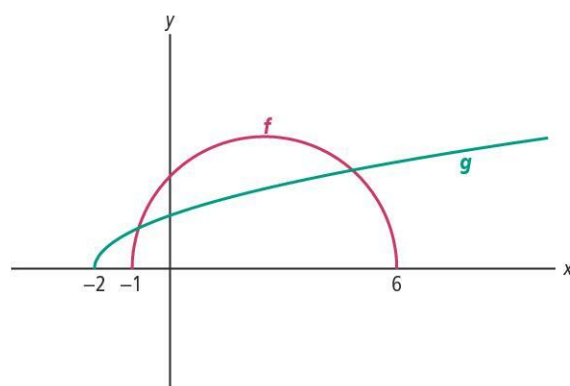
Deze bergparabool snijdt de x -as bij $x = 6$ en $x = -1$, daartussen komen er uit $-x^2 + 5x + 6$ alleen maar positieve waarden.

Het domein is daarom $[-1, 6]$.

- b** plot



schets



$$\begin{aligned}
\text{c } \sqrt{-x^2 + 5x + 6} &= \sqrt{x + 2} \\
-x^2 + 5x + 6 &= x + 2 \\
-x^2 + 4x + 4 &= 0 \\
D &= 16 - 4 \cdot (-1) \cdot 4 = 32 \\
x &= \frac{-4 - \sqrt{32}}{-2} \text{ of } x = \frac{-4 + \sqrt{32}}{-2} \\
x &= 2 + \frac{1}{2}\sqrt{32} \text{ of } x = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{32} \\
\text{Uit de schets volgt } f(x) < g(x) &\text{ als } -1 \leq x < 2 - \frac{1}{2}\sqrt{32} \text{ of } 2 + \frac{1}{2}\sqrt{32} < x \leq 6.
\end{aligned}$$

031 a $\frac{5}{x} = 2x + 3$

$$\begin{aligned}
5 &= 2x^2 + 3x \\
2x^2 + 3x - 5 &= 0 \\
D &= 9 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 49 \\
x &= \frac{-3 - \sqrt{49}}{4} \text{ of } x = \frac{-3 + \sqrt{49}}{4} \\
x &= -2\frac{1}{2} \text{ of } x = 1
\end{aligned}$$

b $x^2(x - 1) = 2x$

$$x^3 - x^2 = 2x$$

c Als de oplossing $x = 0$ zou zijn, dan mag dat niet omdat je anders deelt door 0.

d $x^2(x - 1) = 2x$

$$\begin{aligned}
x^3 - x^2 &= 2x \\
x^3 - x^2 - 2x &= 0 \\
x(x^2 - x - 2) &= 0 \\
x = 0 \text{ of } x^2 - x - 2 &= 0 \\
x = 0 \text{ of } (x + 1)(x - 2) &= 0 \\
x = 0 \text{ of } x = -1 \text{ of } x &= 2
\end{aligned}$$

e $x = \sqrt{4x + 12}$

$$\begin{aligned}
x^2 &= 4x + 12 \\
x^2 - 4x - 12 &= 0 \\
(x + 2)(x - 6) &= 0 \\
x &= -2 \text{ of } x = 6
\end{aligned}$$

f $x = -2$ voldoet niet als oplossing, omdat de uitkomst van een wortel niet negatief kan zijn.

035 a Je weet zeker dat je vergelijking A kunt oplossen, omdat deze lineair is en vergelijking B omdat deze met de *abc*-formule opgelost kan worden.

b A: $0,2x + 7 = 0,3x - 1$ B: $2x^2 - 5x = 7$

$$\begin{aligned}
-0,1x &= -8 & 2x^2 - 5x - 7 &= 0 \\
x &= 80 & D &= 25 - 4 \cdot 2 \cdot (-7) = 81 \\
& & x &= \frac{5 - \sqrt{81}}{4} \text{ of } x = \frac{5 + \sqrt{81}}{4} \\
& & x &= -1 \text{ of } x = 3\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

c C: invoer: $y_1 = x^3 + x^2$ en $y_2 = 43$
venster: $-5 \leq x \leq 5$, $-10 \leq y \leq 60$
optie: snijpunt
De oplossing is $x \approx 3,20$

3 Functies en grafieken

D: invoer: $y_1 = \frac{10}{x^2 + 1}$ en $y_2 = x^3$

venster: $-5 \leq x \leq 5$, $-10 \leq y \leq 10$

optie: snijpunt

De oplossing is $x \approx 1,47$

E: invoer: $y_1 = (x-1)(x-2)(x-3)$ en $y_2 = -6$

venster: $-5 \leq x \leq 5$, $-10 \leq y \leq 10$

optie: snijpunt

De oplossing is $x = 0$

d $(x-1)(x-2)(x-3) = -6$

$$(x^2 - 3x + 2)(x-3) = -6$$

$$x^3 - 3x^2 - 3x^2 + 9x + 2x - 6 = -6$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x = 0$$

$$x(x^2 - 6x + 11) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x^2 - 6x + 11 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } D = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 11 = -8 \text{ dus geen oplossingen.}$$

U9 a invoer: $y_1 = 3 + x + \frac{12}{x^3 + 4}$

venster: $-10 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 10$

opties: minimum en maximum

De toppen zijn $(-2,73; -0,46)$, $(-0,63; 5,57)$, $(0,73; 6,46)$ en $(2,6)$.

b $3 + x + \frac{12}{x^3 + 4} = x + 4$

$$\frac{12}{x^3 + 4} = 1$$

$$12 = x^3 + 4$$

$$x^3 = 8$$

$$x = 2 \text{ en } y = 2 + 4 = 6$$

De coördinaten van het snijpunt zijn $(2, 6)$.

c invoer: $y_2 = 2x$

opties: snijpunten

De coördinaten van de snijpunten zijn ongeveer $(-1,9; -3,7)$ en $(3,3; 6,6)$.

U10 a $x^2 - 4x = \frac{1}{2}x^2 - 3\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}x^2 - 4x + 3\frac{1}{2} = 0$$

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$(x-1)(x-7) = 0$$

$$x = 1 \text{ of } x = 7$$

$$f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 = -3 \text{ en } f(7) = 7^2 - 4 \cdot 7 = 21$$

De coördinaten van de snijpunten zijn $(1, -3)$ en $(7, 21)$.

b $x^2 - 4x = \frac{1}{2}x^2 + p$

$$\frac{1}{2}x^2 - 4x - p = 0$$

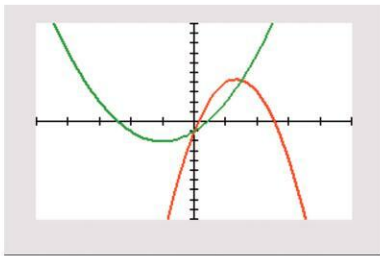
$$D = 16 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot -p = 16 + 2p$$

De vergelijking mag maar 1 oplossing hebben, dus moet $D = 0$.

$$16 + 2p = 0 \text{ dus } p = -8.$$

3.6 Gemengde opdrachten

39 a



b $-5 \leq x \leq 5, -10 \leq y \leq 10$

c $-3x^2 + 8x - 1 = x^2 + 2x - 1$
 $-4x^2 + 6x = 0$

$$2x(-2x + 3) = 0$$

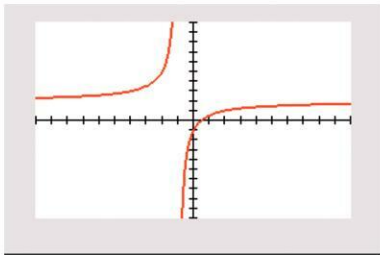
$$2x = 0 \text{ of } -2x + 3 = 0$$

$$2x = 0 \text{ of } -2x = -3$$

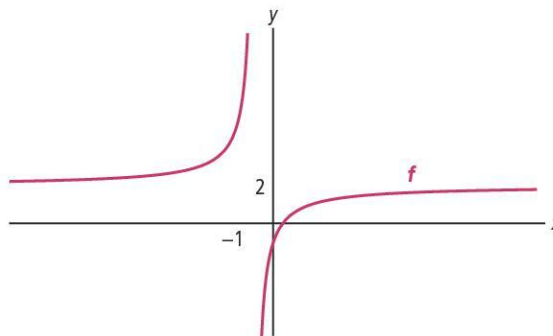
$$x = 0 \text{ of } x = 1\frac{1}{2}$$

d $f(x) > g(x)$ voor x -waarden uit het interval $\langle 0, 1\frac{1}{2} \rangle$.

40 a plot



schets



b Het domein van f is $\langle \leftarrow, -1 \rangle \cup \langle -1, \rightarrow \rangle$ en het bereik $\langle \leftarrow, 2 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$.

c $2 - \frac{3}{x+1} = -3x - 1$

$$-\frac{3}{x+1} = -3x - 3$$

$$\frac{3}{x+1} = 3x + 3$$

$$(x+1)(3x+3) = 3$$

$$3x^2 + 3x + 3x + 3 = 3$$

$$3x^2 + 6x = 0$$

$$3x(x+2) = 0$$

$$3x = 0 \text{ of } x+2 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -2$$

$$y = -3 \cdot 0 - 1 = -1 \text{ en } y = -3 \cdot -2 - 1 = 5$$

De coördinaten van de snijpunten zijn $(0, -1)$ en $(-2, 5)$.

d invoer: $y_1 = 2 - \frac{3}{x+1}$ en $y_2 = 2x^2 - x - 5$

venster: $-10 \leq x \leq 10, -10 \leq y \leq 10$

optie: snijpunten

De coördinaten van de snijpunten zijn $(-2, 5)$, $(-\frac{1}{2}, -4)$ en $(2, 1)$.

3 Functies en grafieken

- 41 a** $x^2 - 5 = 0$
 $x^2 = 5$
 $x = -\sqrt{5}$ of $x = \sqrt{5}$
Het domein van h is $\langle \leftarrow, -\sqrt{5} \rangle \cup \langle -\sqrt{5}, \sqrt{5} \rangle \cup \langle \sqrt{5}, \rightarrow \rangle$.
- b** De verticale asymptoten van h zijn $x = -\sqrt{5}$ en $x = \sqrt{5}$.
- c** Een vergelijking van de horizontale asymptoot is $y = 3$.
- d** Het bereik van h is $\langle \leftarrow, 3 \rangle \cup \langle 3, \rightarrow \rangle$.
- 42 a** A: is een grafiek van een veeltermfunctie, dus hier hoort $f(x)$ bij.
B: is een grafiek van een gebroken functie, dus hier hoort $g(x)$ bij.
C: is een grafiek van een wortelfunctie, dus hier hoort $h(x)$ bij.
- b** Van functie f is het domein en bereik $\mathbb{R}$.
Van functie g is het domein $\langle \leftarrow, 4 \rangle \cup \langle 4, \rightarrow \rangle$ en het bereik $\langle \leftarrow, 2\frac{1}{2} \rangle \cup \langle 2\frac{1}{2}, \rightarrow \rangle$.
Van functie h is het domein $\langle \leftarrow, 5 \rangle$ en het bereik $[0, \rightarrow)$.

Onderzoeksoopdrachten

- 43** De lengte van een rode rechthoek is x en de breedte is $10 - x - x = 10 - 2x$.
De lengte en breedte van de grote gele vierkanten zijn x .
de lengte en breedte van de kleine gele vierkanten zijn $10 - 2x$.
De totale oppervlakte van de rode delen is $4 \cdot (10 - 2x) \cdot x$.
De totale oppervlakte van de gele delen is $4 \cdot x^2 + (10 - 2x)(10 - 2x)$.
oppervlakte rood = oppervlakte geel als
 $4 \cdot (10 - 2x) \cdot x = 4 \cdot x^2 + (10 - 2x)(10 - 2x)$
 $40x - 8x^2 = 4x^2 + 100 - 40x + 4x^2$
 $16x^2 - 80x + 100 = 0$
 $4x^2 - 20x + 25 = 0$
 $(2x - 5)^2 = 0$
 $2x - 5 = 0$
 $x = 2\frac{1}{2}$
- 44 a** a kan alle waarden aannemen en $b = 0$, omdat je dan $x^3 + ax = 0$ kunt oplossen met $x(x^2 + a) = 0$ waarbij $x = 0$ een oplossing is.
- b** $b = 0$ en $3 = 1^3 + a \cdot 1$
 $3 = 1 + a$
 $a = 2$
- c** $b = 0$ en $a < 0$ omdat dan $x(x^2 + a) = 0$ behalve $x = 0$ nog twee oplossingen heeft, namelijk $x = -\sqrt{-a}$ en $x = \sqrt{-a}$.

Samenvatting

- S1 a** $f(6) = 6^2 - 5 \cdot 6 = 6$
- b** $x^2 - 5x = 6$
 $x^2 - 5x - 6 = 0$
 $(x + 1)(x - 6) = 0$
 $x = -1$ of $x = 6$

S2 a $[-30, 70]$

b $\langle 28, \rightarrow \rangle$

c $\langle \leftarrow, 0 \rangle$

d $\langle \leftarrow, -1 \rangle \cup \langle -1, \rightarrow \rangle$

S3 Van de functie g is het domein $\mathbb{R}$, omdat de noemer voor alle waarden van x ongelijk aan nul is.

S4 a kwadratische functie

b constante functie

c gebroken functie

d wortelfunctie

e machtsfunctie

f veeltermfunctie

S5 a f heeft alleen functiewaarden als $x + 6 \geq 0$, dus als $x \geq -6$.

Het domein is $[-6, \rightarrow)$.

$\sqrt{x+6}$ kan geen negatieve waarden aannemen, dus het bereik is $[-1, \rightarrow)$.

b $g(2\frac{1}{2})$ bestaat niet, omdat dan de noemer nul wordt.

Het domein is $\langle \leftarrow, 2\frac{1}{2} \rangle \cup \langle 2\frac{1}{2}, \rightarrow \rangle$.

De tweede term van $g(x)$ kan alle waarden aannemen behalve nul, dus het bereik is $\langle \leftarrow, 5 \rangle \cup \langle 5, \rightarrow \rangle$.

S6 a De noemer van $h(x)$ is gelijk aan nul als $2x - 9 = 0$ ofwel $x = 4\frac{1}{2}$.

De verticale asymptoot is $x = 4\frac{1}{2}$.

Als x steeds verder van nul ligt, komen de functiewaarden steeds dichterbij 3 te liggen. De horizontale asymptoot is $y = 3$.

b De noemer van $k(x)$ is gelijk aan nul als $x^2 - 4 = 0$ ofwel $x = -2$ of $x = 2$.

De verticale asymptoten zijn $x = -2$ en $x = 2$.

Als x steeds verder van nul ligt, komen de functiewaarden steeds dichterbij 10 te liggen. De horizontale asymptoot is $y = 10$.

S7 a $4 + \frac{10}{3x-1} = 3x$

$$\frac{10}{3x-1} = 3x - 4$$

$$(3x-1)(3x-4) = 10$$

$$9x^2 - 12x - 3x + 4 = 10$$

$$9x^2 - 15x - 6 = 0$$

$$D = 225 - 4 \cdot 9 \cdot -6 = 441$$

$$x = \frac{15 - \sqrt{441}}{18} = -\frac{1}{3} \text{ of } x = \frac{15 + \sqrt{441}}{18} = 2$$

b invoer: $y_1 = 4 + \frac{10}{3x-1}$ en $y_2 = -x + 9$

venster: $-10 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 10$

optie: snijpunten

De oplossingen zijn $x \approx 1,21$ en $x \approx 4,12$.

Test Jezelf

T1 a $x - 4 = 0$ als $x = 4$, dus het domein is $\langle \leftarrow, 4 \rangle \cup \langle 4, \rightarrow \rangle$.

Het bereik is $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$.

b $4x + 10 \geq 0$ als $x \geq -2\frac{1}{2}$, dus het domein is $[-2\frac{1}{2}, \rightarrow)$.

Het bereik is $[-6, \rightarrow)$.

c $2x - 9 = 0$ als $x = 4\frac{1}{2}$, dus het domein is $\langle \leftarrow, 4\frac{1}{2} \rangle \cup \langle 4\frac{1}{2}, \rightarrow \rangle$.

Het bereik is $\langle \leftarrow, -7 \rangle \cup \langle -7, \rightarrow \rangle$.

d $5x + 20 \geq 0$ als $x \geq -4$, en delen door 0 mag niet, dus het domein is $\langle -4, \rightarrow \rangle$.

Het bereik is $\langle 2, \rightarrow \rangle$.

T2 $6 - 2x = 0$ als $x = 3$, dus de verticale asymptoot van g is $x = 3$.

Als x steeds verder van nul ligt, komen de functiewaarden steeds dichterbij $y = -2$ te liggen, dus de horizontale asymptoot van g is de lijn $y = -2$.

Omdat $x^2 + 3$ altijd positief is, mogen alle waarden van x voorkomen en is er geen verticale asymptoot bij functie h .

Als x steeds verder van nul ligt, komen de functiewaarden steeds dichterbij $y = 0$ te liggen, dus de horizontale asymptoot van h is de lijn $y = 0$.

T3 a De vergelijkingen A, C, D, E en F zijn exact op te lossen.

b A: $3\sqrt{4x-1} = 5$ E: $8 + \sqrt{4-x} = 10$

$$\sqrt{4x-1} = \frac{5}{3}$$

$$\sqrt{4-x} = 2$$

$$4x-1 = \frac{25}{9}$$

$$4-x = 4$$

$$4x = 3\frac{7}{9}$$

$$x = 0$$

$$x = \frac{17}{18}$$

C: $x^4 + 8x = 0$

F: $\frac{x-4}{x-3} = x$

$$x(x^3 + 8) = 0$$

$$x(x-3) = x-4$$

$$x = 0 \text{ of } x^3 + 8 = 0$$

$$x^2 - 3x = x - 4$$

$$x = 0 \text{ of } x^3 = -8$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -2$$

$$(x-2)^2 = 0$$

$$x = 2$$

D: $16x^2 + 9 = 24x$

$$16x^2 - 24x + 9 = 0$$

$$(4x-3)^2 = 0$$

$$4x-3 = 0$$

$$4x = 3$$

$$x = \frac{3}{4}$$

c B: invoer: $y_1 = 8(x+2)^2$ en $y_2 = x^3 + 1$

venster: $-20 \leq x \leq 20$, $-2000 \leq y \leq 2000$

optie: snijpunten

De oplossing is $x \approx 11,13$.

T4 a De x -waarde van de top is $x_{top} = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{1} = -1$

De y -waarde van de top is $f(-1) = \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + -1 - 10 = -10\frac{1}{2}$

b Als $AB = 14$ dan geldt $x_B = -1 + 7 = 6$, dus de coördinaten zijn $B(6, 0)$.

c $f(6) = \frac{1}{2} \cdot 6^2 + 6 - 10 = 14$, dus de hoogte van de rechthoek is 14.

- T5 a** Grafiek 1 hoort bij een lineaire functie, dus bij $k(x)$.
 Grafiek 2 is een dalparabool en hoort bij een kwadratische functie, dus bij $f(x)$.
 Grafiek 3 is een hyperbool en hoort bij een gebroken functie, dus bij $h(x)$.
 Grafiek 4 is de grafiek bij een wortelfunctie en hoort dus bij $g(x)$.

b A: het snijpunt van k met de x -as

$$k(0) = 3 - \frac{1}{2} \cdot 0 = 3 \text{ dus punt } A(0, 3).$$

B: het snijpunt van k met de y -as

$$3 - \frac{1}{2}x = 0$$

$$-\frac{1}{2}x = -3$$

$$x = 6 \text{ dus punt } B(6, 0).$$

C: de top van f

$$x_{top} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$$

$$y_{top} = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} - 3 = -3\frac{1}{8} \text{ dus punt } C\left(-\frac{1}{2}, -3\frac{1}{8}\right).$$

D: het randpunt van g

$$9 - 2x = 0$$

$$x = 4\frac{1}{2}$$

$$g\left(4\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ dus punt } D\left(4\frac{1}{2}, 0\right).$$

c Grafiek 3 horend bij functie h heeft twee asymptoten:

$x - 2 = 0$ als $x = 2$, dus de verticale asymptoot is de lijn $x = 2$.

Als x steeds verder van nul ligt, naderen de functiewaarden -1 , dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = -1$.

d Het domein van f is $\mathbb{R}$ en het bereik is $\left[-3\frac{1}{8}, \rightarrow\right)$.

Het domein van g is $\left\langle -\infty, 4\frac{1}{2} \right]$ en het bereik is $\left[0, \rightarrow\right)$.

Het domein van h is $\left\langle -\infty, 2 \right\rangle \cup \left\langle 2, \rightarrow \right\rangle$ en het bereik is $\left\langle -\infty, -1 \right\rangle \cup \left\langle -1, \rightarrow \right\rangle$.

Het domein van k is $\mathbb{R}$ en het bereik is $\mathbb{R}$.

e $\sqrt{9 - 2x} = 4$

$$9 - 2x = 16$$

$$-2x = 7$$

$$x = -3\frac{1}{2}$$

Uit de grafiek volgt dat $g(x) < 4$ voor x -waarden uit het interval $\left\langle -3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2} \right]$.

T6 a $AS = 6 - a$ en de oppervlakte van $\triangle APS$ is $\frac{1}{2} \cdot a \cdot (6 - a) = 3a - \frac{1}{2}a^2$.

b $O(a) = 6^2 - 4 \cdot \left(3a - \frac{1}{2}a^2\right) = 36 - 12a + 2a^2$

c De grafiek van $O(a) = 2a^2 - 12a + 36$ is een dalparabool en heeft dus een

$$\text{minimum: } a_{top} = \frac{12}{2 \cdot 2} = 3 \text{ en } O(3) = 2 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 36 = 18$$

De minimale oppervlakte van vierkant $PQRS$ is 18.

d a kan alle waarden aannemen uit het interval $[0, 6]$.

e O kan alle waarden aannemen uit het interval $[18, 36]$.

f $2a^2 - 12a + 36 = 30$

$$2a^2 - 12a + 6 = 0$$

$$a^2 - 6a + 3 = 0$$

$$D = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 24$$

$$a = \frac{6 - \sqrt{24}}{2} \text{ of } a = \frac{6 + \sqrt{24}}{2}$$

$$a = 3 - \frac{1}{2}\sqrt{24} \text{ of } a = 3 + \frac{1}{2}\sqrt{24}$$

$$O(a) > 30 \text{ als } 0 \leq a < 3 - \frac{1}{2}\sqrt{24} \text{ en } 3 + \frac{1}{2}\sqrt{24} < a \leq 6$$

Extra oefening

E1 a De grafiek van f is een dalparabool, het domein is $\mathbb{R}$.

$$x_{top} = \frac{8}{2 \cdot 1} = 4 \text{ en } y_{top} = f(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 = -16, \text{ dus het bereik is } [-16, \rightarrow).$$

b De noemer van deze gebroken functie kan geen nul worden, dus het domein van g is $\mathbb{R}$.
Voor waarden van x die ver van nul liggen naderen de functiewaarden tot nul en

$$\text{als } x = 0 \text{ dan } g(0) = \frac{45}{0^2 + 9} = 5. \text{ Het bereik is } \langle 0, 5].$$

c $4x - 30 = 0$ als $4x = 30$ ofwel $x = 7\frac{1}{2}$, dus het domein van deze wortelfunctie is $[7\frac{1}{2}, \rightarrow)$.
Het bereik is $[-2, \rightarrow)$.

d De top van deze dalparabool is het punt $(6, 7)$, dus het domein is $\mathbb{R}$ en het bereik is $[7, \rightarrow)$.

E2 a $x - 2 = 0$ als $x = 2$, dus de verticale asymptoot is de lijn $x = 2$.

Voor waarden van x die ver van nul liggen naderen de functiewaarden tot 4, dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 4$.

b $7x + 14 = 0$ als $x = -2$, dus de verticale asymptoot is de lijn $x = -2$.

Voor waarden van x die ver van nul liggen naderen de functiewaarden tot 18, dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 18$.

c De noemer van deze gebroken functie kan geen nul worden, dus er is geen verticale asymptoot.

Voor waarden van x die ver van nul liggen naderen de functiewaarden tot nul, dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 0$.

d $x^2 - 9 = 0$ als $x = -3$ of $x = 3$, dus de verticale asymptoten zijn de lijnen $x = -3$ en $x = 3$.

Voor waarden van x die ver van nul liggen naderen de functiewaarden tot -9 , dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = -9$.

E3 a A $-\frac{2}{x} + x = 1$

$$-\frac{2}{x} = 1 - x$$

$$-2 = x - x^2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x = -1 \text{ of } x = 2$$

B $(x - 5)\sqrt{x + 1} = 6\sqrt{x + 1}$

$$x - 5 = 6 \text{ of } \sqrt{x + 1} = 0$$

$$x = 11 \text{ of } x = -1$$

b C invoer: $y_1 = 0,3x^3 - 8x^2 + x$ en $y_2 = 10$

venster: $-10 \leq x \leq 50, -10 \leq y \leq 20$

optie: snijpunt

De oplossing is $x \approx 26,59$

D invoer: $y_1 = 5x\sqrt{3x + 1}$ en $y_2 = 4$

venster: $-2 \leq x \leq 2, -10 \leq y \leq 5$

optie: snijpunt

De oplossing is $x \approx 0,50$

E4 a De vergelijkingen A, C, D, E, F en G zijn exact op te lossen.

b A $2x^3 + 3x = 5x^2$

$$2x^3 - 5x^2 + 3x = 0$$

$$x(2x^2 - 5x + 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } 2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$$

$$x = 0 \text{ of } x = \frac{5 - \sqrt{1}}{4} = 1 \text{ of } x = \frac{5 + \sqrt{1}}{4} = 1\frac{1}{2}$$

$$C \quad x = 2 + \sqrt{x-1}$$

$$x - 2 = \sqrt{x-1}$$

$$(x-2)^2 = x-1$$

$$x^2 - 4x + 4 = x - 1$$

$$x^2 - 5x + 5 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 5$$

$$x = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \text{ of } x = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ (voldoet niet) of } x = 2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$D \quad \frac{x}{x+4} = \frac{5}{x-3}$$

$$x(x-3) = 5(x+4)$$

$$x^2 - 3x = 5x + 20$$

$$x^2 - 8x - 20 = 0$$

$$(x+2)(x-10) = 0$$

$$x = -2 \text{ of } x = 10$$

$$F \quad 2x - 5 = \sqrt{10 - x^2}$$

$$4x^2 - 20x + 25 = 10 - x^2$$

$$5x^2 - 20x + 15 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

$$x = 1 \text{ (voldoet niet) of } x = 3$$

$$E \quad (x-3)(2x+1) = x^2 - 9$$

$$(x-3)(2x+1) = (x-3)(x+3)$$

$$x-3 = 0 \text{ of } 2x+1 = x+3$$

$$x = 3 \text{ of } x = 2$$

$$G \quad x^3 + 2x^2 = 9x + 18$$

$$x^2(x+2) = 9(x+2)$$

$$x^2 = 9 \text{ of } x+2 = 0$$

$$x = -3 \text{ of } x = 3 \text{ of } x = -2$$

c B invoer: $y_1 = (2x-3)^4$ en $y_2 = \sqrt{x+20}$

venster: $-5 \leq x \leq 5$, $-5 \leq y \leq 10$

optie: snijpunten

De oplossingen zijn $x \approx 0,77$ en $x \approx 2,24$.

H invoer: $y_1 = \frac{3}{x+1}$ en $y_2 = -4x^2 + 2x + 6$

venster: $-5 \leq x \leq 5$, $-10 \leq y \leq 10$

optie: snijpunten

De oplossingen zijn $x = -1,5$ en $x \approx -0,37$ en $x \approx 1,37$.

E5 a $4 - 3x = 0$

$$3x = 4$$

$$x = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

$$f\left(1\frac{1}{3}\right) = -2, \text{ dus de coördinaten van het randpunt zijn } \left(1\frac{1}{3}, -2\right).$$

b Het domein is $\left\langle \leftarrow, 1\frac{1}{3} \right\rangle$ en het bereik is $[-2, \rightarrow)$.

c $-2 + \sqrt{4-3x} = 0$

$$\sqrt{4-3x} = 2$$

$$4 - 3x = 4$$

$$x = 0$$

De coördinaten van het snijpunt met de x -as zijn $(0,0)$.

d $-2 + \sqrt{4-3x} = 3$

$$\sqrt{4-3x} = 5$$

$$4 - 3x = 25$$

$$-3x = 21$$

$$x = -7$$

e $-2 + \sqrt{4-3x} = -x - 2$

$$\sqrt{4-3x} = -x$$

$$4 - 3x = x^2$$

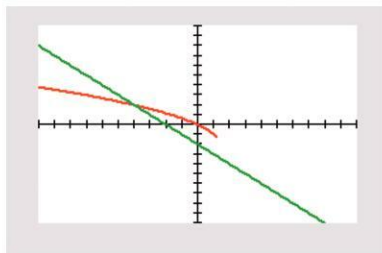
$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$(x + 4)(x - 1) = 0$$

$$x = -4 \text{ of } x = 1 (\text{voldoet niet})$$

$$g(-4) = -4 - 2 = -6, \text{ dus het snijpunt is het punt } (-4, -6).$$

f



Uit de plot volgt dat $f(x) > g(x)$ voor x -waarden uit het interval $\langle -4, 1\frac{1}{3} \rangle$.

E6 a $-10 \leq x \leq 10, -150 \leq y \leq 150$

b $x^3 - 48x = 0$

$$x(x^2 - 48) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x^2 - 48 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x^2 = 48$$

$$x = 0 \text{ of } x = -\sqrt{48} \text{ of } x = \sqrt{48}$$

c invoer: $y_1 = x^3 - 48x$ en $y_2 = 95$

venster: $-10 \leq x \leq 10, -150 \leq y \leq 150$

optie: snijpunten

De oplossingen zijn $x \approx -5,56$ of $x \approx -2,20$ of $x \approx 7,76$.

d invoer: $y_3 = -125$

optie: snijpunten

Dit geeft $x \approx -7,98$ of $x \approx 3,49$ of $x \approx 4,49$.

$f(x) < -125$ voor x -waarden uit het interval $\langle -\infty; -7,98 \rangle$ en $\langle 3,49; 4,49 \rangle$.

E7 a $y_K = -\frac{1}{2} \cdot 3 + 5 = 3\frac{1}{2}$

$$B(0, 3\frac{1}{2}) \text{ en } K(3, 3\frac{1}{2})$$

De oppervlakte van rechthoek OKB is $3 \cdot 3\frac{1}{2} = 10\frac{1}{2}$

b $y_k = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + 5 = 5 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$

De oppervlakte van rechthoek OKB is $\sqrt{2} \cdot (5 - \frac{1}{2}\sqrt{2}) = 5\sqrt{2} - 1$.

c $O(p) = p \cdot (-\frac{1}{2}p + 5) = -\frac{1}{2}p^2 + 5p$

d Het domein van O is $\langle 0, 10 \rangle$.

e $O(p) = -\frac{1}{2}p^2 + 5p$

De grafiek die hierbij hoort is een bergparabool waarvan $p_{top} = \frac{-5}{2 \cdot -\frac{1}{2}} = 5$.

De maximale oppervlakte is $O(5) = -\frac{1}{2} \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 = 12\frac{1}{2}$

4 Exponentiële formules

Voorkennis

- V1**
- a 60% van € 80,- = $0,6 \times € 80,- = € 48,-$
 - b 79% van € 12,50 = $0,79 \times € 12,50 = € 9,88$
 - c 51% van € 98,- = $0,51 \times € 98,- = € 49,98$
 - d $2,5\%$ van € 950,- = $0,025 \times € 950,- = € 23,75$
- V2**
- a De oorspronkelijke prijs is 100%. Er gaat 25% af. Je houdt 75% over.
Het getal waarmee je moet vermenigvuldigen is dus $75 : 100 = 0,75$.
 - b De nieuwe prijs van de broek is $0,75 \times € 89,- = € 66,75$.
 - c De prijs inclusief btw is $1,21 \times € 39,87 = € 48,24$.
- V3**
- a $100\% + 3\% = 103\%$. De groeifactor per dag is $103 : 100 = 1,03$.
 - b $100\% + 0,7\% = 100,7\%$. De groeifactor per jaar is $100,7 : 100 = 1,007$.
 - c $100\% - 17\% = 83\%$. De groeifactor per vijf jaar is $83 : 100 = 0,83$.
 - d $100\% + 200\% = 300\%$. De groeifactor per tien minuten is $300 : 100 = 3$.
- V4**
- De verkoper vermenigvuldigt de oorspronkelijke prijs van de stofzuiger eerst met 0,75, omdat hij 25% korting geeft. Daarna vermenigvuldigt hij met 1,21 omdat er btw moet worden betaald. Als je eerst de btw zou berekenen en daarna pas de korting zou berekenen, verandert dat het eindbedrag niet, omdat de volgorde waarin je vermenigvuldigt niet van belang is. De manier van berekenen van Paul geeft dus dezelfde uitkomst als die van de verkoper.
- V5**
- a De groeifactor van het saldo is 1,0105 per jaar.
Na twee jaar is het saldo $5000 \times 1,0105^2 = 5105,55$ euro.
Na vijf jaar is het saldo $5000 \times 1,0105^5 = 5268,07$ euro.
 - b Telkens als er een jaar voorbij is, wordt het bedrag met 1,0105 vermenigvuldigd.
Als er t jaar voorbij gegaan zijn, is er t keer met 1,0105 vermenigvuldigd.
Je hebt dan dus een saldo van $5000 \times 1,0105^t$.
- V6**
- a $1,078 \times 100\% = 107,8\%$
Het groeipcentage is $107,8\% - 100\% = 7,8\%$ per uur.
 - b De groeifactor per twee uur is $1,078^2 \approx 1,162$.
 $1,162 \times 100\% - 100\% = 16,2\%$
Het groeipcentage per twee uur is 16,2%.
 - c Een week heeft $7 \times 24 = 168$ uur.
De groeifactor per week is $1,078^{168} \approx 301\,961,67$.
 $301\,961,67 \times 100\% - 100\% = 30\,196\,067\%$
Het groeipcentage per week is 30 196 067%.
- V7**
- a De groeifactor per dag is $(100 + 13,2) : 100 = 1,132$.
Een formule is $N = 216 \cdot 1,132^t$ met t in dagen en N in miljoenen.
 - b De groeifactor per vijf jaar is $(100 - 14) : 100 = 0,86$.
Een formule is $G = 5000 \cdot 0,86^t$ met t in perioden van vijf jaar en G de hoeveelheid vis in tonnen.

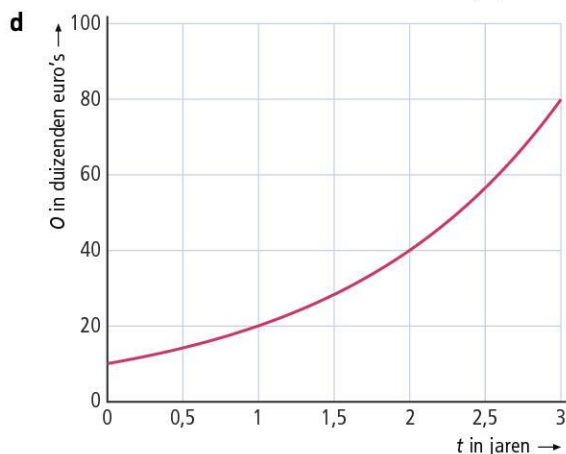
4 Exponentiële formules

4.1 Grafieken van exponentiële functies

intro $t = 0$ komt overeen met de 12e verjaardag van Sonja.

Het deel van de grafiek links van de y -as geeft de hoogte van het saldo weer in de jaren vóór haar 12e verjaardag.

- 1 a Er wordt steeds met 2 vermenigvuldigd. Bij de pijltjes komt dus 2 te staan.
- b De beginhoeveelheid is 10 duizend euro. De groeifactor is 2. Dus de formule is $O = 10 \cdot 2^t$.
- c Bij het jaar 2030 hoort $t = 13$. De jaaromzet in 2030 zal volgens de formule $O = 10 \cdot 2^{13} = 81\,920$ duizend euro zijn, dat is 81,92 miljoen euro.



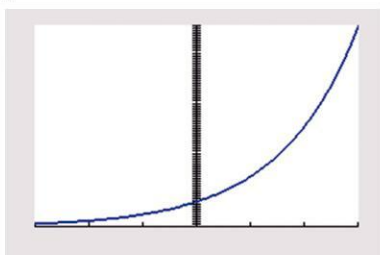
- e Je kunt dit aan de formule zien, want de groeifactor is groter dan 1.

- 2 a Bij de pijltjes komt 0,5 te staan.
- b In 2010 was de jaaromzet $10 \cdot 0,5^7 = 0,078125$ duizend euro, dus ongeveer 78 euro.

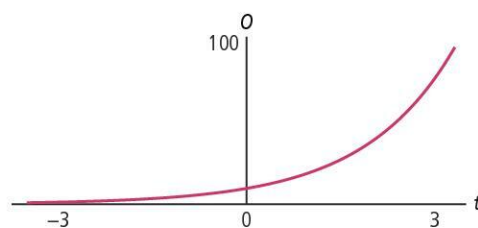
c

jaar	2014	2015	2016	2017
t in jaren	-3	-2	-1	0
omzet O in duizenden euro's	1,25	2,5	5	10

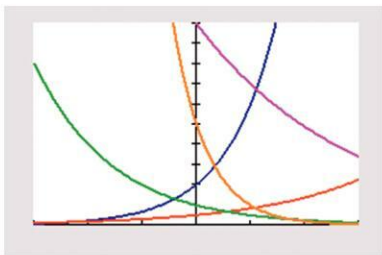
d plot



schets



3 a



Als de groeifactor groter is dan 1, dan stijgt de functie en als de groeifactor kleiner is dan 1 dan daalt de functie.

b De x -as is de horizontale asymptoot van alle grafieken.

c Van elk van deze functies is het domein $\mathbb{R}$.

Van elk van deze functies is het bereik $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

4 a Alle grafieken gaan door het punt $(0, 2)$. De beginhoeveelheid b is bij elke functie gelijk aan 2.

b Grafiek A hoort bij functie h .

Grafiek B hoort bij functie i .

Grafiek C hoort bij functie g .

Grafiek D hoort bij functie f .

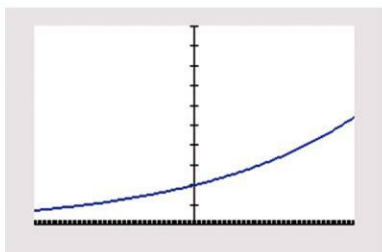
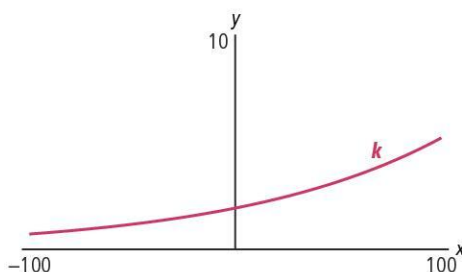
c Bij elke grafiek is de horizontale asymptoot de lijn $y = 0$.

5 a De functies f en k zijn stijgend, want de groeifactor van deze functies is groter dan 1.

b De grafiek van g gaat door het punt $(0, 1)$ want $g(0) = 0,9^0 = 1$.

c Het domein van h is $\mathbb{R}$ en het bereik is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

d plot schets



e De asymptoot is de x -as en de vergelijking die bij de x -as hoort is $y = 0$.

6 a De groeifactor per week is 2.

b Het functievoorschrift is $A(t) = 500 \cdot 2^t$ met t in weken.

t in weken	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2
aantal algen A	500	707,1	1000	1414,2	2000

d De groeifactor per halve week is $\frac{A(\frac{1}{2})}{A(0)} = \frac{500 \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{500} = 2^{\frac{1}{2}}$

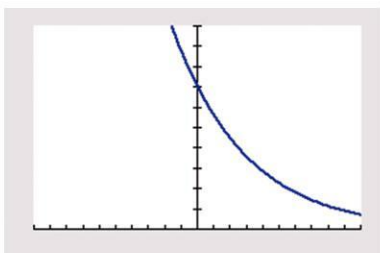
e Eén dag is $\frac{1}{7}$ deel van een week, dus met $2^{\frac{1}{7}}$ bereken je de groeifactor per dag.

f $2^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{2} \approx 1,104$

4 Exponentiële formules

- 7 a** De groeifactor per week is $1,5^7 \approx 17,086$.
- b** De groeifactor per halve dag is $1,5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1,5} \approx 1,225$.
- c** Acht uren is een derde gedeelte van een dag. De groeifactor per 8 uur is dus $1,5^{\frac{1}{3}} \approx 1,145$.
- d** Eén uur is $\frac{1}{24}$ deel van een dag. De groeifactor per uur is dus $1,5^{\frac{1}{24}} \approx 1,017$.
- 8 a** De groeifactor per halve dag is 1,15.
- b** De groeifactor per uur is $1,15^{\frac{1}{12}} \approx 1,012$.
- c** $1,012 \times 100\% - 100\% = 1,2\%$
Het aantal bacteriën neemt met ongeveer 1,2% per uur toe.
- 9 a** De groeifactor per etmaal is 1,6. Per acht uur is de groeifactor $1,6^{\frac{1}{3}} \approx 1,170$.
 $1,170 \times 100\% - 100\% = 17,0\%$
De procentuele toename per acht uur is ongeveer 17%.
- b** De groeifactor per vijf jaar is 0,96, dus de groeifactor per 15 jaar is $0,96^3 \approx 0,885$.
 $0,885 \times 100\% - 100\% = -11,5\%$
De procentuele afname is dus ongeveer 11,5%.
- c** De groeifactor is 1,70 per 20 jaar. Per jaar is de groeifactor $1,70^{\frac{1}{20}} \approx 1,027$.
 $1,027 \times 100\% - 100\% = 2,7\%$
De procentuele groei per jaar is ongeveer 2,7%.
- 10 a** De groeifactor per 4 jaar is $2916 : 36 = 81$. De groeifactor per jaar is $81^{\frac{1}{4}} = 3$.
De beginhoeveelheid is $36 : 3^2 = 4$, dus $f(t) = 4 \cdot 3^t$.
- b** De groeifactor per maand is $3^{\frac{1}{12}} \approx 1,0959$. Het functievoorschrift is dan $g(t) = 4 \cdot 1,0959^t$.
Je kunt het functievoorschrift van g ook exact opschrijven: $g(t) = 4 \cdot 3^{\frac{1}{12}t}$.

05 a



Functie f is dalend.

- b** De groeifactor is kleiner dan 1.
- c** Nee, bij elke waarde van x bestaat er een functiewaarde $f(x)$.
- d** Alle functiewaarden groter dan 0 kunnen voorkomen.
- e** Het domein van f is $\mathbb{R}$ en het bereik van f is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.
- f** Omdat $1,4 > 1$ is functie g stijgend.
- g** Het domein van g is $\mathbb{R}$ en het bereik van g is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.
- h** De asymptoot van beide functies is de x -as, de vergelijking hiervan is $y = 0$.
- 07 a** Elk uur opnieuw moet de hoeveelheid vermenigvuldigd worden met 1,03.
Na zeven uur is er dan zeven keer met 1,03 vermenigvuldigd, dus de groeifactor is $1,03 \times 1,03 \times 1,03 \times 1,03 \times 1,03 \times 1,03 \times 1,03 = 1,03^7$.
- b** De groeifactor per zeven uur is $1,03^7 \approx 1,230$.

c $g^4 = 1,03$ geeft $g = 1,03^{\frac{1}{4}} \approx 1,007$.

d Een minuut is $\frac{1}{60}$ deel van een uur. De groeifactor per minuut is $1,03^{\frac{1}{60}} \approx 1,00049$.

U1 Tussen 1 juni en 18 juni zitten 17 dagen. Als er sprake is van exponentiële groei, dan is de groeifactor per 17 dagen $\frac{7180}{2360} = 3,042 \dots$

De groeifactor per dag is dan $\left(\frac{7180}{2360}\right)^{\frac{1}{17}} = 1,0676 \dots$

Tussen 18 juni en 30 juni zitten 12 dagen. Als er sprake is van exponentiële groei, dan is het aantal muggen op 30 juni $7180 \times 1,0676 \dots^{12} \approx 15\,748$ en dat komt redelijk overeen met het aantal 15\,750 in de tabel.

De groeifactor per week is $\left(\frac{7180}{2360}\right)^{\frac{7}{17}} \approx 1,581$, dus de procentuele toename per week is ongeveer 58,1%.

U2 a Bij een halvering hoort een groeifactor 0,5.

De groeifactor is 0,5 per acht uur, dus de groeifactor per uur is $0,5^{\frac{1}{8}} \approx 0,917$.

b De hoeveelheid EPO in het lichaam moet teruglopen van 100% naar 1%, dus je moet de vergelijking $100 \cdot 0,917^t = 1$ oplossen met t in uren.

Met de rekenmachine:

invoer: $y_1 = 100 \cdot 0,917^x$ en $y_2 = 1$

venster: $0 \leq x \leq 60$, $0 \leq y \leq 2$

optie: snijpunten

De oplossing is $x \approx 53,1$.

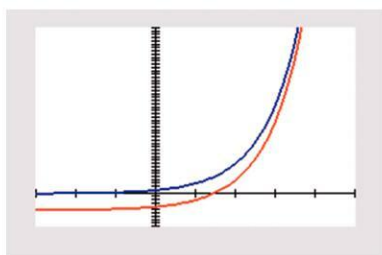
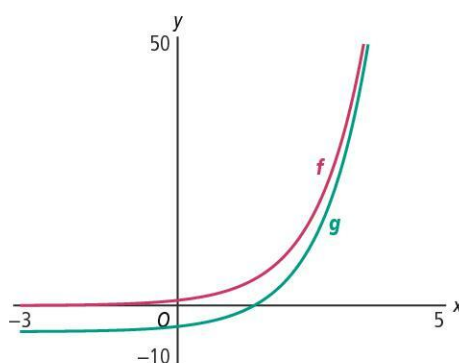
Na ongeveer 53 uur is nog maar 1% van de ingespoten EPO aanwezig in het lichaam.

4.2 Transformaties

intro Robert start later dan Bram. Daar hoort grafiek C bij, want die is naar rechts verschoven. Bram rijdt sneller dan Steven. Daar hoort grafiek A bij, want die loopt steiler dan grafiek B. Grafiek B hoort dus bij Steven.

11 a plot

schets



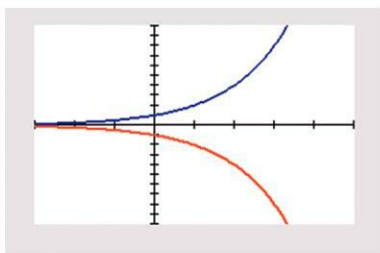
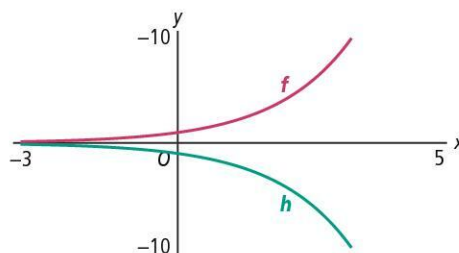
b De grafiek van f heeft de x -as, met vergelijking $y = 0$, als asymptoot.

De grafiek van g heeft de lijn met vergelijking $y = -5$ als asymptoot.

c Als je de grafiek van f vijf omlaag verschuift, krijg je de grafiek van g .

4 Exponentiële formules

- 12 a** Als $h(x) = 1$ dan geldt $x - 3 = 0$, dus $x = 3$.
 Als $h(x) = 4$, dan geldt $x - 3 = 2$, dus $x = 5$.
- b** De grafiek van h ontstaat door de grafiek van f drie naar rechts te verschuiven.
- c** Beide grafieken hebben als asymptoot de lijn $y = 0$.
- 13 a** Bij de beeldgrafiek hoort de functie $g(x) = 1,5^{x-2}$
 Een vergelijking van de asymptoot is $y = 0$.
- b** Bij de beeldgrafiek hoort de functie $g(x) = 1,5^x - 5$
 Een vergelijking van de asymptoot is $y = -5$.
- c** Bij de beeldgrafiek hoort de functie $g(x) = 4 + 1,5^{x+2}$
 Een vergelijking van de asymptoot is $y = 4$.
- d** Bij de beeldgrafiek hoort de functie $g(x) = -5 + 1,5^{x-3}$
 Een vergelijking van de asymptoot is $y = -5$.
- 14** Je moet de grafiek van f vier naar links en drie omlaag verschuiven.
- 15 a** Grafiek B hoort bij functie f en grafiek A bij functie g .
- b** De grafiek van f snijdt de y -as in het punt $(0, 1)$.
 De grafiek van g snijdt de y -as in het punt $(0; 1,5)$.
- c** De y -coördinaat is $g(6) = 1,5 \cdot 2^6 = 1,5 \cdot 64 = 96$.
- d** De y -coördinaat van het punt op de grafiek van g is 1,5 maal zo groot als de y -coördinaat van het punt op de grafiek van f .
- e** plot schets



- f** De grafieken zijn elkaars spiegelbeeld in de x -as.
- 16 a** $g(x) = 5 \cdot 1,2^x$
- b** $g(x) = 2 \cdot 1,2^x$
- c** $g(x) = -1,2^x$
- 17 a** $g(x) = 3 \cdot 2^x + 4$
- b** $h(x) = 3 \cdot (2^x + 4)$ ofwel $h(x) = 3 \cdot 2^x + 12$
- 18** Manier 1:
- Vermenigvuldig de grafiek van f met -5 ten opzichte van de x -as. Het resultaat is de grafiek van $h(x) = -5 \cdot 2^x$.
 - Verschuif de grafiek van h drie omhoog. Je krijgt de grafiek van $g(x) = -5 \cdot 2^x + 3$ ofwel $g(x) = 3 - 5 \cdot 2^x$.
- Manier 2:
- Verschuif de grafiek van f met $\frac{3}{5}$ omlaag. Het resultaat is de grafiek van $h(x) = 2^{x-\frac{3}{5}}$.
 - Vermenigvuldig de grafiek van h met -5 ten opzichte van de x -as. Je krijgt de grafiek van $g(x) = -5(2^{x-\frac{3}{5}})$ ofwel $g(x) = -5 \cdot 2^x + 3$ ofwel $g(x) = 3 - 5 \cdot 2^x$.

19 a $g(x) = 2^{x+3}$

b De grafiek van f gaat door $(0, 1)$ en de grafiek van g gaat door $(0, 8)$.

Als je de grafiek van f met 8 vermenigvuldigt ten opzichte van de x -as, krijg je de grafiek van g . Of $g(x) = 2^{x+3} = 2^x \cdot 2^3 = 2^x \cdot 8 = 8 \cdot f(x)$

013 a Bij een verschuiving 4 naar links moet je in het functievoorschrift x vervangen door $x + 4$, dus bij grafiek B hoort het functievoorschrift $g(x) = 1,5^{x+4}$

b Bij een verschuiving van 2 omhoog tel je bij het functievoorschrift 2 op, dus bij grafiek C hoort het functievoorschrift $h(x) = 1,5^{x+4} + 2$.

c Een vergelijking van de asymptoot van grafiek C is $y = 2$.

018 a Als je het functievoorschrift $f(x) = 3^x$ vermenigvuldigt met 2, dan wordt de grafiek met 2 vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as.

b Als je bij een functievoorschrift 4 optelt, dan wordt de grafiek 4 naar boven verschoven.

c De grafiek van f is met 2 vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as en vervolgens 4 omhoog verschoven.

d Als je 2 optelt bij het functievoorschrift van f , dan wordt de grafiek 2 naar boven verschoven en wordt het functievoorschrift $h(x) = 2 + 3^x$

e Als je het functievoorschrift van opdracht d vermenigvuldigt met 2, dan wordt de grafiek met 2 vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as en wordt het functievoorschrift van de beeldgrafiek $k(x) = 2 \cdot (2 + 3^x)$.

f De functies g en k zijn hetzelfde, want je kunt $k(x) = 2 \cdot (2 + 3^x)$ schrijven als $k(x) = 4 + 2 \cdot 3^x$

U3 a eenheden naar links geeft de grafiek van $h(x) = 0,5^{x+a}$

Daarna vermenigvuldigen met 16 ten opzichte van de x -as geeft de grafiek van $g(x) = 16 \cdot 0,5^{x+a}$

Als geldt $g(x) = f(x)$, dan is $0,5^x = 16 \cdot 0,5^{x+a}$

$$0,5^x = 16 \cdot 0,5^a \cdot 0,5^x$$

$$16 \cdot 0,5^a = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^a = \frac{1}{16}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^a = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$a = 4$$

4.3 Herleiden

intro Bij de grafiek van de eerste vijver hoort het functievoorschrift $f(x) = 5 \cdot 2^x$

Een verschuiving van drie naar links geeft de grafiek van $g(x) = 5 \cdot 2^{x+3}$ ofwel

$$g(x) = 5 \cdot 2^3 \cdot 2^x, \text{ dus } g(x) = 40 \cdot 2^x$$

Vervolgens vermenigvuldigen met 2 ten opzichte van de x -as geeft de grafiek van

$$h(x) = 2 \cdot 40 \cdot 2^x \text{ ofwel } h(x) = 80 \cdot 2^x$$

De beginhoeveelheid is 80 vissen en de groeifactor is 2 per jaar.

20 a De beginhoeveelheid is gelijk aan $f(0) = 2 \cdot 3^{-0-2} = 2 \cdot 3^{-2} = 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$

$$\text{Verder is } f(1) = 2 \cdot 3^{-3} = 2 \cdot \frac{1}{27} = \frac{2}{27}$$

Er geldt dat $f(1) = \frac{1}{3} \cdot f(0)$, dus de groeifactor is $\frac{1}{3}$

4 Exponentiële formules

b	t	0	1	2	3	4
	$f(t)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{2}{243}$	$\frac{2}{729}$

- c** Uit de tabel volgt dat de groeifactor $\frac{1}{3}$ is en de beginhoeveelheid $\frac{2}{9}$
d $f(t) = \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t$

- 21** **a** fout, want $4 \cdot 2^x = 2^2 \cdot 2^x = 2^{2+x}$ en $8^x = (2^3)^x = 2^{3x}$
b goed
c goed
d fout, want neem bijvoorbeeld $x = 0$, dan krijg je $4 + 1 = 4 + 1 = 4$
e fout, want $2^{2x} \cdot 2^x = 2^{3x}$
f fout, opdracht b laat zien dat $4 \cdot 2^x = 2^{2+x}$
- 22** **a** $2^{1-3x} = 2^1 \cdot 2^{-3x} = 2 \cdot (2^{-3})^x$
b Dan is $b = 2$ en $g = 2^{-3} = \frac{1}{8}$
c De groeifactor is $\frac{1}{8}$ dus f is dalend.
- 23** **a** $f(x) = 3^{4x+2}$
 $f(x) = 3^{4x} \cdot 3^2$
 $f(x) = 9 \cdot (3^4)^x$
 $f(x) = 9 \cdot 81^x$
De beginhoeveelheid is 9 en de groeifactor is 81. De functie is stijgend.
- b** $h(t) = 3^{-5t+7}$
 $h(t) = 3^{-5t} \cdot 3^7$
 $h(t) = 2187 \cdot (3^{-5})^t$
 $h(t) = 2187 \cdot \left(\frac{1}{243}\right)^t$
De beginhoeveelheid is 2187 en de groeifactor is $\frac{1}{243}$. De functie is dalend.
- c** $p(t) = 0,25^{3t-2}$
 $p(t) = 0,25^{-2} \cdot 0,25^{3t}$
 $p(t) = 16 \cdot (0,25^3)^t$
 $p(t) = 16 \cdot \left(\frac{1}{64}\right)^t$
De beginhoeveelheid is 16 en de groeifactor is $\frac{1}{64}$. De functie is dalend.
- d** $g(t) = 4 \cdot 3^{2t+1}$
 $g(t) = 4 \cdot 3^1 \cdot 3^{2t}$
 $g(t) = 12 \cdot (3^2)^t$
 $g(t) = 12 \cdot 9^t$
De beginhoeveelheid is 12 en de groeifactor is 9. De functie is stijgend.
- e** $k(x) = 0,6 \cdot 1,44^{2+0,5x}$
 $k(x) = 0,6 \cdot 1,44^2 \cdot 1,44^{0,5x}$
 $k(x) = 0,6 \cdot 1,44^2 \cdot (1,44^{0,5})^x$
 $k(x) = 1,24416 \cdot 1,2^x$
De beginhoeveelheid is 1,24416 en de groeifactor is 1,2. De functie is stijgend.
- f** $f(x) = 4^{0,5(x+1)}$
 $f(x) = (4^{0,5})^{x+1}$
 $f(x) = 2^{x+1}$
 $f(x) = 2^1 \cdot 2^x$
 $f(x) = 2 \cdot 2^x$
De beginhoeveelheid is 2 en de groeifactor is 2. De functie is stijgend.

$$\begin{aligned}
 24 \text{ a } f(x) &= 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{4x} \\
 f(x) &= 3^2 \cdot (3^{-1})^{4x} \\
 f(x) &= 3^2 \cdot 3^{-4x} \\
 f(x) &= 3^{2-4x}
 \end{aligned}$$

Het functievoorschrift van f is te herleiden tot dat van g .

De functies f en g zijn dus hetzelfde.

$$\begin{aligned}
 \text{b } h(x) &= 6 \cdot 2^{-x-3} \\
 h(x) &= 6 \cdot 2^{-3} \cdot 2^{-x} \\
 h(x) &= 6 \cdot \frac{1}{8} \cdot (2^{-1})^x \\
 h(x) &= \frac{6}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \\
 h(x) &= \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x
 \end{aligned}$$

Het functievoorschrift van h is te herleiden tot dat van k .

De functies h en k zijn dus hetzelfde.

$$25 \text{ a } \text{Het functievoorschrift van de beeldgrafiek is } k(x) = 8 \cdot 5^{x+3}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b } k(x) &= 8 \cdot 5^{x+3} \\
 k(x) &= 8 \cdot 5^3 \cdot 5^x \\
 k(x) &= 8 \cdot 125 \cdot 5^x \\
 k(x) &= 1000 \cdot 5^x
 \end{aligned}$$

c Dan moet er met $1000 : 8 = 125$ worden vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as.

$$26 \text{ a } 3 \text{ naar rechts verschuiven geeft de grafiek van } h(x) = 15 \cdot 2^{x-3}$$

Vervolgens vermenigvuldigen met 4 ten opzichte van de x -as geeft de grafiek van $k(x) = 4 \cdot 15 \cdot 2^{x-3}$ ofwel $k(x) = 60 \cdot 2^{x-3}$

$$\begin{aligned}
 \text{b } k(x) &= 60 \cdot 2^{-3} \cdot 2^x \\
 k(x) &= 60 \cdot \frac{1}{8} \cdot 2^x \\
 k(x) &= 7\frac{1}{2} \cdot 2^x
 \end{aligned}$$

$$27 \text{ a } \text{Spiegelen in de } x\text{-as geeft de grafiek van } h(x) = -(2 - 3^x) \text{ ofwel}$$

$$h(x) = -2 + 3^x$$

Vervolgens met factor 2 vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as geeft de grafiek van $g(x) = 2 \cdot (-2 + 3^x)$.

$$\begin{aligned}
 \text{b } g(x) &= 2 \cdot (-2 + 3^x) \\
 g(x) &= -4 + 2 \cdot 3^x
 \end{aligned}$$

$$28 \text{ a } \text{De factor is } 27 : 6 = 4\frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{b } g(x) = 27 \cdot 3^x & f(x) = 6 \cdot 3^x \\
 g(x) = 3^3 \cdot 3^x & f(x) = 2 \cdot 3^1 \cdot 3^x \\
 g(x) = 3^{x+3} & f(x) = 2 \cdot 3^{x+1}
 \end{array}$$

Als je de grafiek van f eerst 2 naar links verschuift en vervolgens met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigt ten opzichte van de x -as, dan krijg je de grafiek van g .

$$f(x) = 6 \cdot 3^x$$

$$h(x) = 6 \cdot 3^{x+2}$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3^{x+2}$$

$$g(x) = 3 \cdot 3^2 \cdot 3^x$$

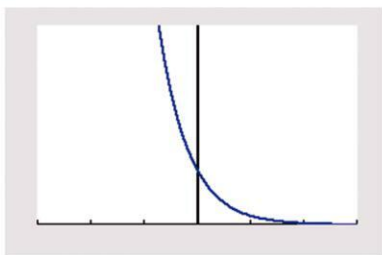
$$g(x) = 27 \cdot 3^x$$

(2 naar links verschoven)

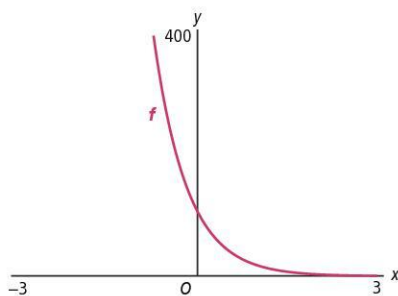
(met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as)

4 Exponentiële formules

023 a plot



schets



b $f(0) = 3 \cdot 6^{2-0} = 3 \cdot 36 = 108$, klopt.

c Bij stap 1 is gebruik gemaakt van de regel $g^{a+b} = g^a \cdot g^b$

Bij stap 2 is gebruik gemaakt van de regel $g^{a \cdot b} = (g^a)^b$

Bij stap 3 is gebruik gemaakt van de regel $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$

d $f(x) = 3 \cdot 36 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x$

$$f(x) = 108 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x$$

e Omdat de groeifactor kleiner is dan 1, is f dalend.

024 a $f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$

$$f(x) = 4 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^x$$

$$f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

b $g(x) = 2^{2-2x}$

$$g(x) = 2^2 \cdot 2^{-2x}$$

$$g(x) = 4 \cdot (2^{-2})^x$$

$$g(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

c Ja, de functies f en g zijn hetzelfde.

d $h(x) = 5 \cdot 3^{2-x}$

$$h(x) = 5 \cdot 3^2 \cdot 3^{-x}$$

$$h(x) = 5 \cdot 9 \cdot (3^{-1})^x$$

$$h(x) = 45 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

De functies zijn hetzelfde.

e $i(x) = 32 \cdot 4^{2x}$

$$i(x) = 32 \cdot (4^2)^x$$

$$i(x) = 32 \cdot 16^x$$

De functies zijn hetzelfde.

$$k(x) = 405 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2+x}$$

$$k(x) = 405 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$k(x) = 405 \cdot \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$k(x) = 45 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$j(x) = 2^{4x+5}$$

$$j(x) = 2^{4x} \cdot 2^5$$

$$j(x) = (2^4)^x \cdot 32$$

$$j(x) = 32 \cdot 16^x$$

U4

Als je de grafiek van $f(x) = 3 \cdot 2^x$ spiegelt in de x -as, krijg je de grafiek van

$h(x) = -3 \cdot 2^x$. Deze grafiek heeft de horizontale asymptoot $y = 0$.

De gegeven grafiek van g heeft als horizontale asymptoot de lijn $y = 6$, dus de grafiek van h moet in ieder geval 6 omhoog verschoven worden. Dan krijg je de grafiek van $k(x) = -3 \cdot 2^x + 6$. De grafiek van k gaat door het punt $(0, 3)$. De grafiek van g gaat door het punt $(2, 3)$, dus om de grafiek van g te krijgen, verschuif je de grafiek van k nog 2 naar rechts. Je krijgt dan de grafiek van $g(x) = -3 \cdot 2^{x-2} + 6$.

Herleiden:

$$g(x) = -3 \cdot 2^{x-2} + 6$$

$$g(x) = -3 \cdot 2^x \cdot 2^{-2} + 6$$

$$g(x) = -3 \cdot 2^x \cdot \frac{1}{4} + 6$$

$$g(x) = -\frac{3}{4} \cdot 2^x + 6$$

- U5 a** Nee, want het functievoorschrift heeft dan de vorm $f(x) = b \cdot g^x + c$ met c een constante.
- b** Ja, want dan krijgt het functievoorschrift de vorm $f(x) = b \cdot g^{x+c}$, dat te herleiden is tot $f(x) = (b \cdot g^c) \cdot g^x$.
Dus alleen de beginhoeveelheid zal veranderen.
- c** Ja, het functievoorschrift krijgt dan de vorm $f(x) = -b \cdot g^x$. En dat is weer van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$. De beginhoeveelheid is nu tegengesteld.
- d** Ja, als je ten opzichte van de x -as vermenigvuldigt met het getal k , dan krijgt het functievoorschrift de vorm $f(x) = k \cdot b \cdot g^x$. Dat is weer van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$. De beginhoeveelheid is met k vermenigvuldigd.

4.4 Vergelijkingen en ongelijkheden

intro $317 \text{ m} = 317\,000 \text{ mm}$

Na 20 keer vouwen is de dikte $0,1 \cdot 2^{20} \approx 104\,858 \text{ mm}$.

Na 21 keer vouwen is de dikte $0,1 \cdot 2^{21} \approx 209\,715 \text{ mm}$.

Na 22 keer vouwen is de dikte $0,1 \cdot 2^{22} \approx 419\,430 \text{ mm}$.

Na 22 keer vouwen is de dikte al meer dan de hoogte van de Eiffeltoren, dus het is in theorie mogelijk.

- 29 a** $2^3 = 8$, dus $x = 3$
- b** C: $2^x = \frac{1}{2}$ geeft $2^x = 2^{-1}$ en dus $x = -1$
D: $2^x = \sqrt{2}$ geeft $2^x = 2^{\frac{1}{2}}$ en dus $x = \frac{1}{2}$
E: $3^x = 81$ geeft $3^x = 3^4$ en dus $x = 4$
- c** Met je rekenmachine:
A: invoer: $y_1 = 2^x$ en $y_2 = 12$
venster: $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 15$
optie: snijpunt
De oplossing is $x \approx 3,58$.
B: invoer: $y_1 = 2^x$ en $y_2 = 5$
venster: $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 15$
optie: snijpunt
De oplossing is $x \approx 2,32$.
F: invoer: $y_1 = 3^x$ en $y_2 = 16$
venster: $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 20$
optie: snijpunt
De oplossing is $x \approx 2,52$.

- 30 a** Links en rechts delen door 3 geeft de vergelijking $4^{x+5} = 8$.
- b** $4^{x+5} = 8$
 $(2^2)^{x+5} = 2^3$ en dus $2^{2x+10} = 2^3$
- c** $2x + 10 = 3$
 $2x = -7$
 $x = -3\frac{1}{2}$

- 31 a** $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$
 $(3^{-1})^x = 3^2$
 $3^{-x} = 3^2$
 $-x = 2$
 $x = -2$
- b** $3^x = \frac{1}{27}$
 $3^x = 3^{-3}$
 $x = -3$

4 Exponentiële formules

c $0,25^x = 16$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = 4^2$$

$$(4^{-1})^x = 4^2$$

$$4^{-x} = 4^2$$

$$-x = 2$$

$$x = -2$$

d $\left(\frac{1}{7}\right)^{x+3} = 1$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{x+3} = \left(\frac{1}{7}\right)^0$$

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

e $0,1^{2x} = 10^x$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{2x} = 10^x$$

$$(10^{-1})^{2x} = 10^x$$

$$10^{-2x} = 10^x$$

$$-2x = x$$

$$-3x = 0$$

$$x = 0$$

f $32 \cdot 2^x = 4^{3x}$

$$2^5 \cdot 2^x = (2^2)^{3x}$$

$$2^{5+x} = 2^{6x}$$

$$5 + x = 6x$$

$$5 = 5x$$

$$x = 1$$

g $3 \cdot 0,5^x = 24 \cdot 8^x$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8 \cdot 8^x$$

$$(2^{-1})^x = 2^3 \cdot (2^3)^x$$

$$2^{-x} = 2^3 \cdot 2^{3x}$$

$$2^{-x} = 2^{3+3x}$$

$$-x = 3 + 3x$$

$$-4x = 3$$

$$x = -\frac{3}{4}$$

h $\sqrt{2^x} = \left(\frac{1}{64}\right)^x$

$$(2^x)^{\frac{1}{2}} = (2^{-6})^x$$

$$2^{\frac{1}{2}x} = 2^{-6x}$$

$$\frac{1}{2}x = -6x$$

$$6\frac{1}{2}x = 0$$

$$x = 0$$

32 a Kan exact.

$$36 \cdot 3^{\frac{1}{2}x-1} = 12$$

$$3^1 \cdot 3^{\frac{1}{2}x-1} = 1$$

$$3^{1+\frac{1}{2}x-1} = 3^0$$

$$\frac{1}{2}x = 0$$

$$x = 0$$

b Kan exact.

$$6^{4x-1} = 36$$

$$6^{4x-1} = 6^2$$

$$4x - 1 = 2$$

$$4x = 3$$

$$x = \frac{3}{4}$$

d Kan exact.

$$\left(\frac{1}{8}\right)^x = \sqrt{2}$$

$$(2^{-3})^x = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$2^{-3x} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$-3x = \frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{6}$$

e Kan exact.

$$10^x = 5^x$$

$$(2 \cdot 5)^x = 5^x$$

$$2^x \cdot 5^x = 5^x$$

$$2^x \cdot 5^x - 5^x = 0$$

$$5^x(2^x - 1) = 0$$

$$2^x = 1 \quad (5^x \neq 0)$$

$$x = 0$$

f Kan exact.

$$9^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}$$

$$(3^2)^x = (3^{-1})^{2x-1}$$

$$3^{2x} = 3^{-2x+1}$$

$$2x = -2x + 1$$

$$4x = 1$$

$$x = \frac{1}{4}$$

c Met de rekenmachine:

invoer: $y_1 = 300 \cdot 4^x$ en

$$y_2 = 20 \cdot 5^x$$

venster: $10 \leq x \leq 15, 0 \leq y \leq 10^{10}$

opties: snijpunt

De oplossing is $x \approx 12,14$.

g Kan exact.

$$5x^4 = 80$$

$$x^4 = 16$$

$$x = -\sqrt[4]{16} \text{ of } x = \sqrt[4]{16}$$

$$x = -2 \text{ of } x = 2$$

h Kan exact.

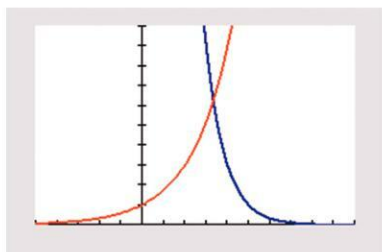
$$(\sqrt{6})^{2-x} = 6$$

$$(\sqrt{6})^{2-x} = (\sqrt{6})^2$$

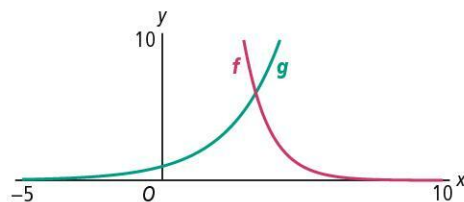
$$2 - x = 2$$

$$x = 0$$

33 a plot



schets



b $27 \cdot 3^{2-x} = (\sqrt{3})^x$

$$3^3 \cdot 3^{2-x} = (3^{\frac{1}{2}})^x$$

$$3^{5-x} = 3^{\frac{1}{2}x}$$

$$5 - x = \frac{1}{2}x$$

$$-1\frac{1}{2}x = -5$$

$$3x = 10$$

$$x = 3\frac{1}{3}$$

c In de schets lees je de oplossing van de ongelijkheid af: $x < 3\frac{1}{3}$

34 a $12 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = -4$

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 16$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 4$$

$$(2^{-1})^{x-3} = 2^2$$

$$2^{-x+3} = 2^2$$

$$-x + 3 = 2$$

$$x = 1$$

De snijpunten zijn (1, -4) en (5, 11).

b De grafiek van f ligt dan hoger dan de lijn $y = 11$ als $x > 5$.

c Dan ligt de grafiek van f tussen de twee horizontale lijnen. Dat is het geval als $1 < x < 5$.

$$12 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 11$$

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$x - 3 = 2$$

$$x = 5$$

35 a $50 \cdot 0,7^t < 12$

met de rekenmachine:

invoer: $y_1 = 50 \cdot 0,7^x$ en $y_2 = 12$

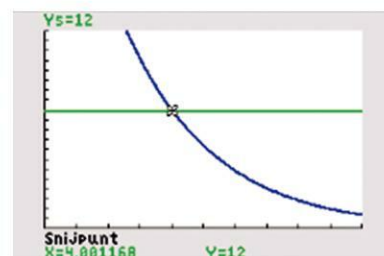
venster: $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 20$

optie: snijpunt

De grafieken snijden elkaar bij $x \approx 4,00$.

Zie de plot hiernaast.

De oplossing is $t > 4,00$.



4 Exponentiële formules

b $50 \cdot 1,2^t > 12$

met de rekenmachine:

invoer: $y_1 = 50 \cdot 1,2^x$ en $y_2 = 12$

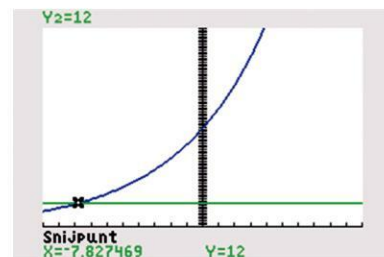
venster: $-10 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 100$

optie: snijpunt

De grafieken snijden elkaar bij $x \approx -7,83$.

Zie de plot hiernaast.

De oplossing is $t > -7,83$.



c $800 \cdot 0,933^x > 100$

met de rekenmachine:

invoer: $y_1 = 800 \cdot 0,933^x$ en $y_2 = 100$

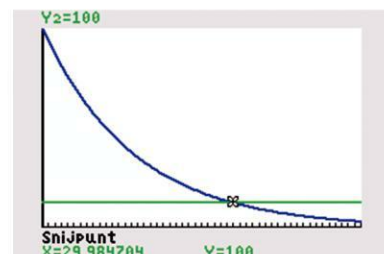
venster: $0 \leq x \leq 50$, $0 \leq y \leq 800$

optie: snijpunt

De grafieken snijden elkaar bij $x \approx 29,98$.

Zie de plot hiernaast.

De oplossing is $x < 29,98$.



d $0,7^x < 0,24$

met de rekenmachine:

invoer: $y_1 = 0,7^x$ en $y_2 = 0,24$

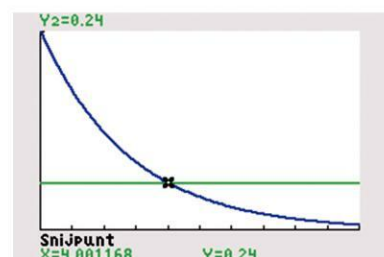
venster: $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 1$

optie: snijpunt

De grafieken snijden elkaar bij $x \approx 4,00$.

Zie de plot hiernaast.

De oplossing is $x > 4,00$.



36 a Dat komt omdat de grondtallen $\frac{1}{3}$ en 2 geen machten van elkaar zijn met een geheel getal als exponent.

b met de rekenmachine:

invoer: $y_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ en $y_2 = 9 \cdot 2^x$

venster: $-5 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 10$

optie: snijpunt

De grafieken snijden elkaar bij $x \approx -1,23$.

De oplossing is $t \approx -1,23$.

c Zie de plot hiernaast.

De oplossing is $t > -1,23$.

d $\left(\frac{1}{3}\right)^t \leq 3\sqrt{3}$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^t = 3\sqrt{3}$$

$$(3^{-1})^t = 3^1 \cdot 3^{\frac{1}{2}}$$

$$3^{-t} = 3^{1\frac{1}{2}}$$

$$-t = 1\frac{1}{2}$$

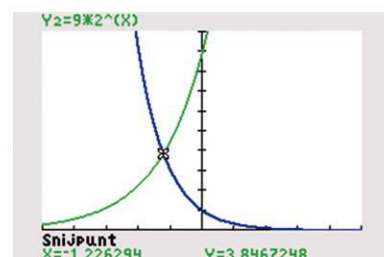
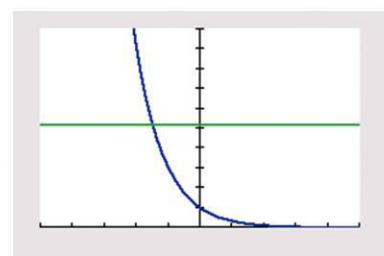
$$t = -1\frac{1}{2}$$

invoer: $y_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ en $y_2 = 3\sqrt{3}$

venster: $-5 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 10$

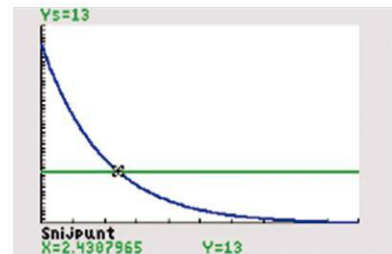
Zie de plot hiernaast.

De oplossing is $t \geq -1\frac{1}{2}$

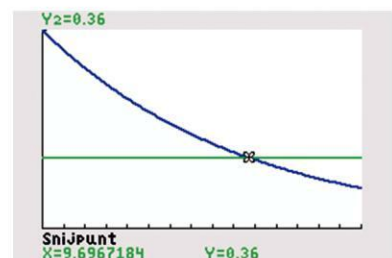


- 031** a $3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 24$ geeft na links en rechts delen door 3 de vergelijking $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$.
 b Zowel $\frac{1}{2}$ als 8 is te schrijven als een macht van 2.
 c $(2^{-1})^x = 2^3$
 $2^{-x} = 2^3$
 d $-x = 3$
 $x = -3$

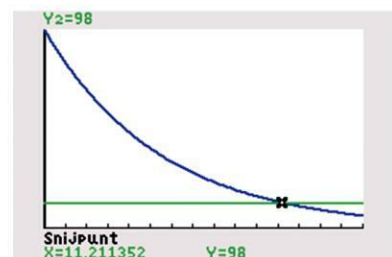
- 035** a $f(x) = 45 \cdot 0,6^x$ en $g(x) = 13$
 b invoer: $y_1 = 45 \cdot 0,6^x$ en $y_2 = 13$
 venster: $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 50$
 c optie: snijpunt
 De grafieken snijden elkaar in het punt (2,43; 13).
 d De oplossing is $x > 2,43$.



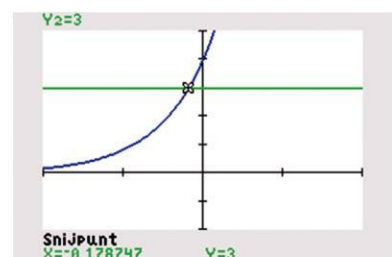
- e $0,9^x < 0,36$
 met de rekenmachine:
 invoer: $y_1 = 0,9^x$ en $y_2 = 0,36$
 venster: $0 \leq x \leq 15$, $0 \leq y \leq 1$
 optie: snijpunt
 De grafieken snijden elkaar bij $x \approx 9,70$.
 Zie de plot hiernaast.
 De oplossing is $x > 9,70$.



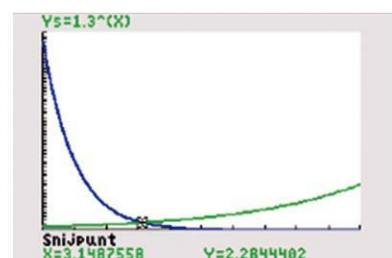
- f $750 \cdot 0,834^x > 98$
 met de rekenmachine:
 invoer: $y_1 = 750 \cdot 0,834^x$ en $y_2 = 98$
 venster: $0 \leq x \leq 15$, $0 \leq y \leq 750$
 optie: snijpunt
 De grafieken snijden elkaar bij $x \approx 11,21$.
 Zie de plot hiernaast.
 De oplossing is $x < 11,21$.



- g $4 \cdot 5^x > 3$
 met de rekenmachine:
 invoer: $y_1 = 4 \cdot 5^x$ en $y_2 = 3$
 venster: $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 5$
 optie: snijpunt
 De grafieken snijden elkaar bij $x \approx -0,18$.
 Zie de plot hiernaast.
 De oplossing is $x > -0,18$.



- h $57 \cdot 0,36^x > 1,3^x$
 met de rekenmachine:
 invoer: $y_1 = 57 \cdot 0,36^x$ en $y_2 = 1,3^x$
 venster: $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 60$
 optie: snijpunt
 De grafieken snijden elkaar bij $x \approx 3,15$.
 Zie de plot hiernaast.
 De oplossing is $x < 3,15$.



4 Exponentiële formules

- U6** $g(3) = 4^3 = 64$ dus A is het punt $(3, 64)$.
De beeldgrafiek hoort bij de functie $h(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$
Voor punt B geldt $y = 64$ en $h(x) = 64$.

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 64$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 32$$

$$(2^{-1})^{x-3} = 2^5$$

$$2^{-x+3} = 2^5$$

$$-x + 3 = 5$$

$x = -2$ dus B is het punt $(-2, 64)$.

De afstand tussen A en B is $AB = 3 - (-2) = 5$.

- U7** De richtingscoëfficiënt van h is $\frac{42-6}{4-1} = 12$.
 $x = 1$ en $y = 6$ invullen bij $y = 12x + b$ geeft $6 = 12 \times 1 + b$
ofwel $b = -6$.

$$h(x) = 12x - 6$$

$$f(x) > h(x) \text{ geeft } 3^x > 12x - 6$$

met de rekenmachine:

$$\text{invoer: } y_1 = 3^x \text{ en } y_2 = 12x - 6$$

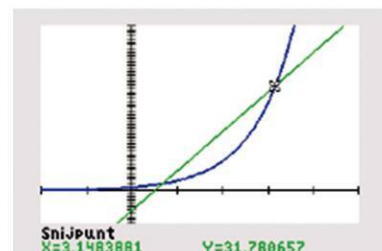
$$\text{venster: } -2 \leq x \leq 5, -10 \leq y \leq 50$$

opties: snijpunt

De grafieken snijden elkaar bij $x \approx 0,67$ en $x \approx 3,15$.

Zie de plot hiernaast.

De oplossing is $x < 0,67$ en $x > 3,15$.



4.5 Gemengde opdrachten

- 37 a** Bij de beeldgrafiek hoort de functie $g(x) = 12 \cdot 0,5^{x+6}$
Een vergelijking van de asymptoot is $y = 0$.
- b** Bij de beeldgrafiek hoort de functie $g(x) = 12 \cdot 0,5^{x-2} - 3$
Een vergelijking van de asymptoot is $y = -3$.
- c** Bij de beeldgrafiek hoort de functie $g(x) = -12 \cdot 0,5^x$
Een vergelijking van de asymptoot is $y = 0$.
- d** Bij de beeldgrafiek hoort de functie $g(x) = 48 \cdot 0,5^{x-3}$
Een vergelijking van de asymptoot is $y = 0$.
- 38 a** $4 \cdot 2^{x+3} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
 $2^2 \cdot 2^{x+3} = (2^{-1})^x$
 $2^{x+5} = 2^{-x}$
 $x + 5 = -x$
 $2x = -5$
 $x = -2\frac{1}{2}$
- b** $\frac{1}{3} \cdot 3^{-2x+3} = 27^x$
 $3^{-1} \cdot 3^{-2x+3} = (3^3)^x$
 $3^{-2x+2} = 3^{3x}$
 $-2x + 2 = 3x$
 $-5x = -2$
 $x = \frac{2}{5}$

$$\begin{aligned}\text{c} \quad & \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot 3^x = \frac{1}{3} \cdot 3^{-x} \\ & (3^{-1})^x \cdot 3^x = 3^{-1} \cdot 3^{-x} \\ & 3^{-x} \cdot 3^x = 3^{-1-x} \\ & 3^0 = 3^{-1-x} \\ & 0 = -1 - x \\ & x = -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{d} \quad & 8 \cdot (\sqrt{2})^{x-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^x \\ & 2^3 \cdot \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{x-2} = (2^{-1})^x \\ & 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}x-1} = 2^{-x} \\ & 2^{\frac{1}{2}x+2} = 2^{-x} \\ & \frac{1}{2}x + 2 = -x \\ & 1\frac{1}{2}x = -2 \\ & 3x = -4 \\ & x = \frac{-4}{3} = -1\frac{1}{3}\end{aligned}$$

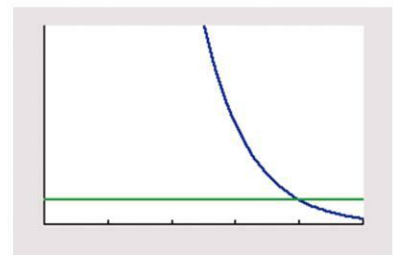
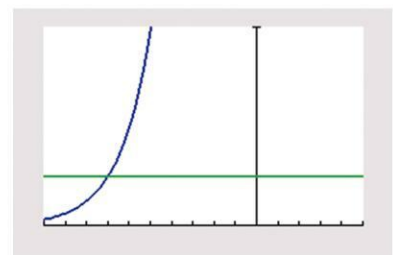
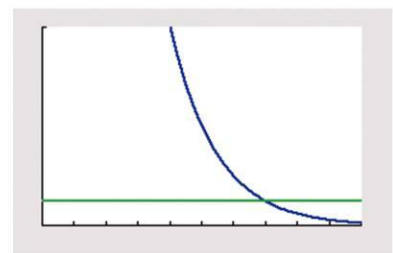
$$\begin{aligned}\text{e} \quad & 6^{2x} = 2^{1-x} \cdot 9^x \\ & (2 \cdot 3)^{2x} = 2^{1-x} \cdot (3^2)^x \\ & 2^{2x} \cdot 3^{2x} = 2^{1-x} \cdot 3^{2x} \\ & 2^{2x} = 2^{1-x} \\ & 2x = 1 - x \\ & 3x = 1 \\ & x = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{f} \quad & 2^x + 2^x = 4^{x+2} \\ & 2 \cdot 2^x = (2^2)^{x+2} \\ & 2^{x+1} = 2^{2(x+2)} \\ & x + 1 = 2x + 4 \\ & x = -3\end{aligned}$$

39 a $16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x \geq \frac{1}{16}$
 $16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{16}$
 $2^4 \cdot (2^{-2})^x = 2^{-4}$
 $2^{4-2x} = 2^{-4}$
 $4 - 2x = -4$
 $-2x = -8$
 $x = 4$
 invoer: $y_1 = 16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$ en $y_2 = \frac{1}{16}$
 venster: $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 0,5$
 Zie de plot hiernaast.
 De oplossing is $x \leq 4$.

b $32 \cdot 2^t < \frac{1}{4}$
 $32 \cdot 2^t = \frac{1}{4}$
 $2^5 \cdot 2^t = 2^{-2}$
 $2^{5+t} = 2^{-2}$
 $5 + t = -2$ dus $t = -7$
 invoer: $y_1 = 32 \cdot 2^x$ en $y_2 = \frac{1}{4}$
 venster: $-10 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 1$
 Zie de plot hiernaast.
 De oplossing is $t < -7$.

c $16 \cdot 0,5^a > 0,125$
 $16 \cdot 0,5^a = 0,125$
 $2^4 \cdot (2^{-1})^a = \frac{1}{8}$
 $2^4 \cdot 2^{-a} = 2^{-3}$
 $2^{4-a} = 2^{-3}$
 $4 - a = -3$
 $a = 7$
 invoer: $y_1 = 16 \cdot 0,5^x$ en $y_2 = 0,125$
 venster: $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 1$
 Zie de plot hiernaast.
 De oplossing is $a < 7$.



4 Exponentiële formules

d $5^{2t} \leq 125^{1-t}$

$$5^{2t} = 125^{1-t}$$

$$5^{2t} = (5^3)^{1-t}$$

$$5^{2t} = 5^{3-3t}$$

$$2t = 3 - 3t$$

$$5t = 3$$

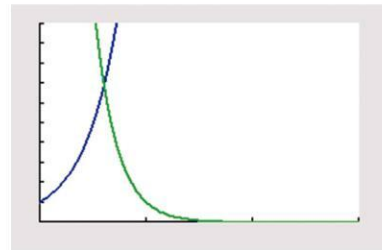
$$t = \frac{3}{5}$$

invoer: $y_1 = 5^{2x}$ en $y_2 = 125^{1-x}$

venster: $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 10$

Zie de plot hiernaast.

De oplossing is $t \leq \frac{3}{5}$



- 40 a De groeifactor per half jaar is 1,6. De groeifactor per maand is dus

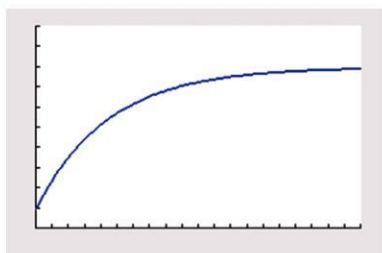
$$1,6^{\frac{1}{6}} \approx 1,0815.$$

De beginhoeveelheid is 1000, dus het functievoorschrift is

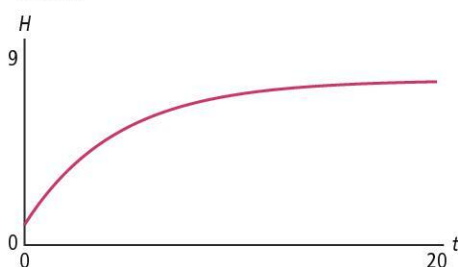
$$f(t) = 1000 \cdot 1,0815^t \text{ met } t \text{ in maanden.}$$

- b De tijdseenheid is dan $\frac{1}{26}$ deel van een half jaar, dat is een week.

- 41 a plot



schets



- b Op den duur wordt de uitdrukking achter het minteken vrijwel nul, dus dan is de hoogte van de boom vrijwel gelijk aan 8 meter.

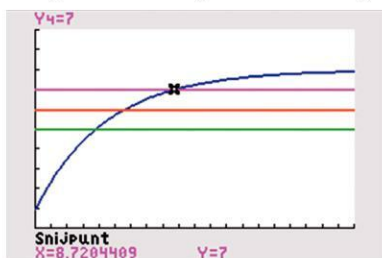
- c met de rekenmachine:

$$\text{invoer: } y_1 = 8 - 7 \cdot 0,8^x, y_2 = 5, y_3 = 6 \text{ en } y_4 = 7$$

$$\text{venster: } 0 \leq x \leq 20, 0 \leq y \leq 10$$

opties: snijpunt

De grafieken snijden elkaar bij $x \approx 3,80$, $x \approx 5,61$ en $x \approx 8,72$.



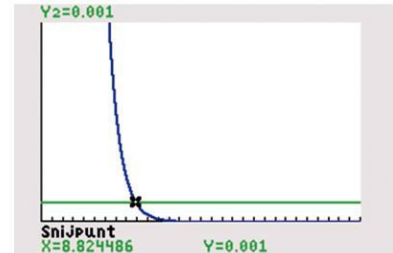
Om van 5 meter hoog te groeien naar een hoogte van 6 meter duurt dus $5,61 - 3,80 = 1,81$ jaar.

Om van 6 naar 7 meter hoogte te groeien duurt $8,72 - 5,61 = 3,11$ jaar.

- d De groeifactor per maand is $0,8^{\frac{1}{12}} \approx 0,9816$, dus de formule is dan $H = 8 - 7 \cdot 0,9816^t$ met t in maanden.
- e Een boom groeit niet elke maand even snel. In het voorjaar en in de zomermaanden groeit een boom sneller dan in de wintermaanden.

Onderzoeksoopdrachten

- 42 a** Een afname met 60% per 24 uur geeft een groeifactor 0,4 per 24 uur.
 Na 24 uur is er nog $2 \cdot 0,4 = 0,8$ mL van de eerste injectie over.
 Direct na de tweede injectie zit er $0,8 + 2 = 2,8$ mL in het lichaam.
 Na 48 uur is daar $2,8 \cdot 0,4 = 1,12$ mL van over.
 Direct na de derde injectie zit er $1,12 + 2 = 3,12$ mL in het lichaam.
 Na 72 uur is daar $3,12 \cdot 0,4 = 1,248$ mL van over.
 Direct na de vierde injectie zit er $1,248 + 2 = 3,248$ mL in het lichaam.
- b** Voor de hoeveelheid geneesmiddel h in mL geldt $h = 3,248 \cdot 0,4^t$ met t de tijd in uren.
 $3,248 \cdot 0,4^t < 0,001$
 met de rekenmachine:
 invoer: $y_1 = 3,248 \cdot 0,4^x$ en $y_2 = 0,001$
 venster: $0 \leq x \leq 30$, $0 \leq y \leq 0,01$
 optie: snijpunt geeft $x \approx 8,82$.
 Na ongeveer 8,8 uur is er minder dan 0,001 mL over.

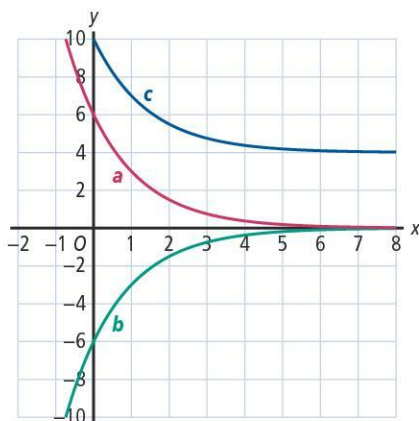


- 43** De functie $g(x) = 2^{x^2-4x+5}$ heeft een minimum als $y = x^2 - 4x + 5$ een minimum heeft.
 $x^2 - 4x + 5 = 5$
 $x^2 - 4x = 0$
 $x(x - 4) = 0$
 $x = 0$ of $x = 4$
 De top ligt bij $x = (4 + 0):2 = 2$.
 De grafiek van g is symmetrisch in de lijn $x = 2$.
 $AB = 3$ dus punt A ligt $1\frac{1}{2}$ links van de lijn $x = 2$ en punt B ligt $1\frac{1}{2}$ rechts van de lijn $x = 2$.
 $2 - 1\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ en $g(\frac{1}{2}) = 2^{\frac{1}{4}-2+5} = 2^{\frac{3}{4}} = 8\sqrt[4]{2}$
 Dus $p = 8\sqrt[4]{2}$

Samenvatting

- S1 a** De groeifactor is groter dan 1, dus de functie is stijgend.
b De groeifactor is kleiner dan 1, dus de functie is dalend.

S2 a b c



4 Exponentiële formules

- S3 a** De groeifactor per dag is $1,3^{\frac{1}{7}} \approx 1,038$.
b De groeifactor per halfjaar is 0,4.
De groeifactor per week is $0,4^{\frac{1}{26}} \approx 0,9654$.
De afname per week is ongeveer 3,46%.

- S4 a** $g(x) = 2^{x+3}$
b $g(x) = 2^{x-4} + 2$

- S5 a** $g(x) = 0,5 \cdot 2^x$
b $g(x) = -2^x$

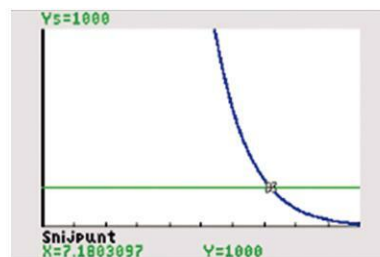
- S6 a** $f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$
 $f(x) = 2 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^x$
 $f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^x$
b $f(x) = 6 \cdot 3^{5-x}$
 $f(x) = 6 \cdot 3^5 \cdot 3^{-x}$
 $f(x) = 1458 \cdot (3^{-1})^x$
 $f(x) = 1458 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$

- S7 a** $2^{x+3} = 32$
 $2^{x+3} = 2^5$
 $x + 3 = 5$
 $x = 2$
b $4^{x-1} = 8^x$
 $(2^2)^{x-1} = (2^3)^x$
 $2^{2x-2} = 2^{3x}$
 $2x - 2 = 3x$
 $x = -2$

Test jezelf

- T1 a** 21.30 uur is 12 uur na 9.30 uur.
De hoeveelheid is dan verdubbeld, dus 64 milligram.
b De groeifactor per uur is gelijk aan $2^{\frac{1}{12}} \approx 1,0595$.
c $H(t) = 32 \cdot 1,0595^t$
d Om 10.00 uur is er een half uur voorbij gegaan.
 $H\left(\frac{1}{2}\right) = 32 \cdot 1,0595^{\frac{1}{2}} \approx 32,9$
Om 10.00 uur zal er ongeveer 32,9 mg bacteriën geweest zijn.
Voor het tijdstip 08.00 uur geldt $t = -1,5$.
 $H(-1,5) = 32 \cdot 1,0595^{-1,5} \approx 29,3$
Om 08.00 uur zal er ongeveer 29,3 mg bacteriën geweest zijn.
- T2 a** De groeifactor per 30 jaar is 0,4.
De groeifactor per jaar is $0,4^{\frac{1}{30}} = 0,969\dots$
 $0,969\dots \times 100\% - 100\% = -3,00\dots\%$
De afname per jaar is ongeveer 3%.

- b** $720\,000 \cdot 0,4^x = 1000$ met x de tijd in perioden van 30 jaar.
 met de rekenmachine:
 invoer: $y_1 = 720\,000 \cdot 0,4^x$ en $y_2 = 1000$
 venster: $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 5000$
 optie: snijpunt
 De oplossing is $x \approx 7,180$.
 Na $7,180 \times 30 \approx 215$ jaar zal er minder dan 1000 km^2 koraalrif over zijn.



- T3 a** een translatie van 1 naar links en 2 omhoog.
b een translatie van 1 naar rechts gevolgd door een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor 3.
c spiegeling in de x -as gevolgd door een translatie van 2 omhoog.
d een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor -6 , gevolgd door een translatie van 15 omhoog.

T4 a Er moet gelden $p \cdot (3 \cdot 3^{-2} + 2) = 7$

$$p \cdot (3^{-1} + 2) = 7$$

$$p \cdot \left(\frac{1}{3} + 2\right) = 7$$

$$2\frac{1}{3}p = 7$$

$$p = 3$$

b $g(x) = 3 \cdot (3 \cdot 3^x + 2)$

$$g(x) = 3 \cdot (3^{x+1} + 2)$$

$$g(x) = 3^{x+2} + 6$$

- c** De asymptoot van de grafiek van f is de lijn $y = 2$, want als x een groot negatief getal is, is de term voor het plusteken vrijwel nul.
 De asymptoot van de grafiek van g is de lijn $y = 6$ vanwege de vermenigvuldiging met 3 ten opzichte van de x -as.

T5 a $N(t) = 4,32 \cdot 1,44^{0,5t-1}$

$$N(t) = 4,32 \cdot 1,44^{0,5t} \cdot 1,44^{-1}$$

$$N(t) = \frac{4,32}{1,44} \cdot (1,44^{0,5})^t$$

$$N(t) = 3 \cdot 1,2^t$$

De functie is stijgend want de groeifactor is groter dan 1.

b $M(t) = 4,32 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{2-t}$

$$M(t) = 4,32 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-t}$$

$$M(t) = 4,32 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(\left(\frac{5}{6}\right)^{-1}\right)^t$$

$$M(t) = 3 \cdot 1,2^t$$

De functievoorschriften van N en M zijn beide te herleiden tot hetzelfde functievoorschrift, dus de functies zijn hetzelfde.

T6 a $25 \cdot 5^t = 0,04$

$$5^2 \cdot 5^t = \frac{1}{25}$$

$$5^{2+t} = 5^{-2}$$

$$2 + t = -2$$

$$t = -4$$

b $1000^x = 0,01^{x-1}$

$$(10^3)^x = (10^{-2})^{x-1}$$

$$10^{3x} = 10^{-2x+2}$$

$$3x = -2x + 2$$

$$5x = 2$$

$$x = \frac{2}{5}$$

4 Exponentiële formules

$$\begin{aligned} \text{c} \quad & \left(\frac{1}{4}\right)^{x-3} = 16^{2+2x} \\ & (4^{-1})^{x-3} = (4^2)^{2+2x} \\ & 4^{-x+3} = 4^{4+4x} \\ & -x + 3 = 4 + 4x \\ & -5x = 1 \\ & x = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d} \quad & 3^t \cdot 9^{t+4} = 27 \\ & 3^t \cdot (3^2)^{t+4} = 3^3 \\ & 3^t \cdot 3^{2t+8} = 3^3 \\ & 3^{3t+8} = 3^3 \\ & 3t + 8 = 3 \\ & 3t = -5 \\ & t = -\frac{5}{3} = -1\frac{2}{3} \end{aligned}$$

T7 a met de rekenmachine:

invoer: $y_1 = 24 \cdot 2,3^x$ en $y_2 = 100$

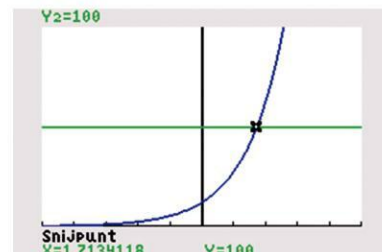
venster: $-5 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 200$

optie: snijpunt

Er is een snijpunt bij $x \approx 1,7$.

Zie de plot hiernaast.

De oplossing is $t < 1,7$.



b met de rekenmachine:

invoer: $y_1 = 0,03 \cdot 1,78^x$ en $y_2 = 2$

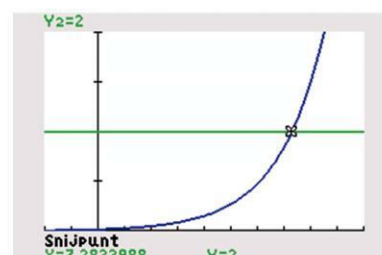
venster: $-2 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 4$

optie: snijpunt

Er is een snijpunt bij $x \approx 7,3$.

Zie de plot hiernaast.

De oplossing is $x > 7,3$.



c met de rekenmachine:

invoer: $y_1 = 5 \cdot 2^x$ en $y_2 = 0,1^x$

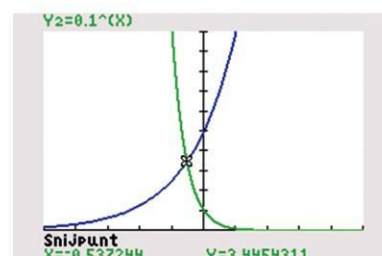
venster: $-5 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 10$

optie: snijpunt

Er is een snijpunt bij $x \approx -0,5$.

Zie de plot hiernaast.

De oplossing is $n > -0,5$.



d met de rekenmachine:

invoer: $y_1 = 3 \cdot 5^{x+3}$ en $y_2 = 21$

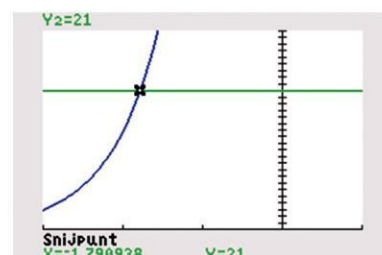
venster: $-3 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 30$

optie: snijpunt

Er is een snijpunt bij $x \approx -1,8$.

Zie de plot hiernaast.

De oplossing is $x < -1,8$.



T8 a De hoeveelheid C14 is $1000 \times 0,000001 = 0,001$ mg.

Na een periode van 5730 jaar is de hoeveelheid gehalveerd en dus gelijk aan 0,000 5 mg.

Na 11 460 jaar, is de beginhoeveelheid twee keer gehalveerd. Dan is er dus nog 0,000 25 mg over.

b Dan is er drie keer gehalveerd, dus dan zijn er drie perioden van 5730 jaar voorbij gegaan. Dat is $3 \times 5730 = 17190$ jaar.

c Dan is er dus nog $\frac{1}{32}$ deel over. De hoeveelheid C14 is dan vijf keer gehalveerd, want

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

Er is dan een periode van $5 \times 5730 = 28650$ jaar voorbij.

- d** Je lost op $\left(\frac{1}{2}\right)^t = 0,04$.
 met de rekenmachine:
 invoer: $y_1 = 0,5^x$ en $y_2 = 0,04$
 venster: $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 0,2$
 optie: snijpunt
 Er is een snijpunt bij $x = 4,643\dots$
 De vondst is dan dus ongeveer $4,643\dots \times 5730 \approx 26\,609$ jaar oud.
- e** Je lost op $\left(\frac{1}{2}\right)^t = 0,8619$.
 met de rekenmachine:
 invoer: $y_1 = 0,5^x$ en $y_2 = 0,8619$
 venster: $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 1$
 optie: snijpunt
 Er is een snijpunt bij $x = 0,214\dots$
 Die lijkwade is dus ongeveer $0,214\dots \times 5730 \approx 1229$ jaar oud en zal dus ongeveer uit het jaar $1997 - 1229 = 768$ afkomstig zijn. Dus die lijkwade kan niet van Aegidius geweest zijn.

Extra oefening

- E1** **a** De groeifactor per week is $8^7 = 2\,097\,152$.
b De groeifactor per halve dag is $8^{\frac{1}{2}} \approx 2,83$.
c De groeifactor per uur is $8^{\frac{1}{24}} \approx 1,090\,5$, dus is de toename ruim 9% per uur.
- E2** **a** een translatie 2 omlaag; een vergelijking van de asymptoot is $y = -2$.
b een translatie 2 naar rechts; een vergelijking van de asymptoot is $y = 0$.
c translaties 4 naar rechts en 5 omhoog; een vergelijking van de asymptoot is $y = 5$.
d translaties 2 naar rechts en 4 omhoog; een vergelijking van de asymptoot is $y = 4$.
- E3** **a** een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor 3.
b een spiegeling in de x -as.
c een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor $-0,36$.
d een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor 8.
- E4** **a** $f(x) = 6^{4+x}$
 $f(x) = 6^4 \cdot 6^x$
 $f(x) = 1296 \cdot 6^x$
- b** $f(x) = 8 \cdot 4^{-3+2x}$
 $f(x) = 8 \cdot 4^{-3} \cdot 4^{2x}$
 $f(x) = 8 \cdot \frac{1}{64} \cdot (4^2)^x$
 $f(x) = \frac{1}{8} \cdot 16^x$
- c** $f(x) = 9 \cdot 0,3^{-2x}$
 $f(x) = 9 \cdot (0,3^{-2})^x$
 $f(x) = 9 \cdot 11\frac{1}{9}^x$
- d** $f(x) = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5-x}$
 $f(x) = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$
 $f(x) = 81 \cdot \frac{1}{243} \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right)^x$
 $f(x) = \frac{1}{3} \cdot 3^x$

4 Exponentiële formules

E5 a $9^t = 3 \cdot 3^{2+t}$
 $(3^2)^t = 3^1 \cdot 3^{2+t}$
 $3^{2t} = 3^{3+t}$
 $2t = 3 + t$
 $t = 3$

b $4^{t-1} = 8^t$
 $(2^2)^{t-1} = (2^3)^t$
 $2^{2t-2} = 2^{3t}$
 $2t - 2 = 3t$
 $t = -2$

c $\left(\frac{1}{2}\right)^{-t+1} = 2^{-t+2}$
 $(2^{-1})^{-t+1} = 2^{-t+2}$
 $2^{t-1} = 2^{-t+2}$
 $t - 1 = -t + 2$
 $2t = 3$
 $t = 1\frac{1}{2}$

d $\frac{1}{2} \cdot 2^{3t} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3+t}$
 $2^{-1} \cdot 2^{3t} = (2^{-1})^{3+t}$
 $2^{-1+3t} = 2^{-3-t}$
 $-1 + 3t = -3 - t$
 $4t = -2$
 $t = -\frac{1}{2}$

E6 a $f(t) = 0,25^{t-3}$
 $f(t) = 0,25^t \cdot 0,25^{-3}$
 $f(t) = 64 \cdot 0,25^t$

b De beginhoeveelheid is 64.

- E7 a** een translatie 2 naar links en een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor 4. Een vergelijking van de asymptoot is $y = 0$.
b een translatie 1 naar links en een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor -2 . Een vergelijking van de asymptoot is $y = 0$.
c een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor 3 en een translatie 6 omhoog. Een vergelijking van de asymptoot is $y = 6$.
d een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor -5 en een translatie 1 omhoog. Een vergelijking van de asymptoot is $y = 1$.

E8 a De beginhoeveelheid is 800 mg en de groeifactor is 0,996.

Dus $H(t) = 800 \cdot 0,996^t$.

b Na 1 uur is $t = 60$.

$H(60) = 800 \cdot 0,996^{60} \approx 629$, dus na 1 uur is er nog ongeveer 629 mg verdovingsmiddel aanwezig.

c $800 \cdot 0,996^t = 500$

met de rekenmachine:

invoer: $y_1 = 800 \cdot 0,996^x$ en $y_2 = 500$

venster: $0 \leq x \leq 200$, $0 \leq y \leq 1000$

optie: snijpunt

Er is een snijpunt bij $x = 117,265\dots$

De oplossing is $t \approx 117$.

Dus na ongeveer 117 minuten is er nog 500 mg verdovingsmiddel over.

d De helft van 800 mg is 400 mg.

$800 \cdot 0,996^t = 400$

met de rekenmachine:

invoer: $y_1 = 800 \cdot 0,996^x$ en $y_2 = 400$

venster: $0 \leq x \leq 200$, $0 \leq y \leq 1000$

optie: snijpunt

Er is een snijpunt bij $x = 172,939\dots$

De oplossing is $t \approx 173$.

Dus na ongeveer 173 minuten is er nog de helft van het verdovingsmiddel over.

E9 a $25 \cdot 1,3^t < 40$

met de rekenmachine:

invoer: $y_1 = 25 \cdot 1,3^x$ en $y_2 = 40$

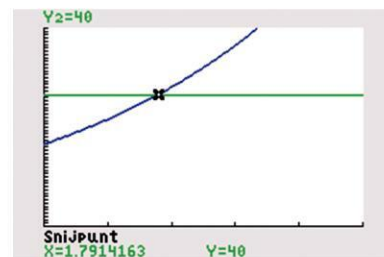
venster: $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 60$

optie: snijpunt

Er is een snijpunt bij $x = 1,791\dots$

Zie de plot hiernaast.

De oplossing is $t < 1,79$.



b $5 \cdot 6^{t-3} > 60$

met de rekenmachine:

invoer: $y_1 = 5 \cdot 6^{x-3}$ en $y_2 = 60$

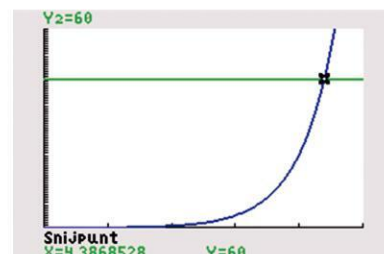
venster: $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 80$

optie: snijpunt

Er is een snijpunt bij $x = 4,386\dots$

Zie de plot hiernaast.

De oplossing is $t > 4,39$.



c $10 \cdot 12^t > 4 \cdot 3^{2+t}$

met de rekenmachine:

invoer: $y_1 = 10 \cdot 12^x$ en $y_2 = 4 \cdot 3^{2+x}$

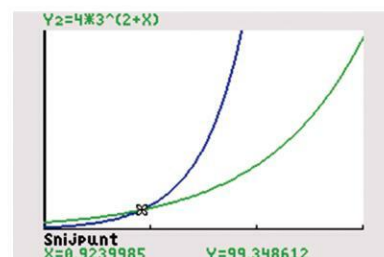
venster: $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 1000$

optie: snijpunt

Er is een snijpunt bij $x = 0,923\dots$

Zie de plot hiernaast.

De oplossing is $t > 0,92$.



d $4 \cdot 3^t < 12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t$

Kan exact.

$$4 \cdot 3^t = 12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t$$

$$3^t = 3 \cdot (3^{-1})^t$$

$$3^t = 3 \cdot 3^{-t}$$

$$3^t = 3^{1-t}$$

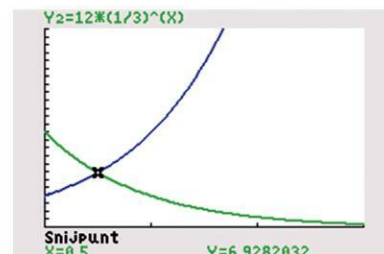
$$t = 1 - t$$

$$2t = 1$$

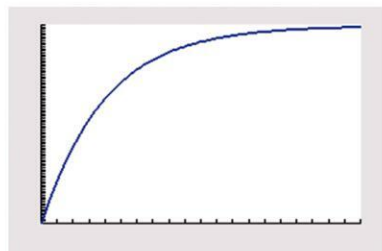
$$t = \frac{1}{2}$$

Zie de plot hiernaast.

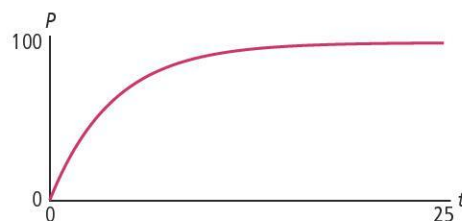
De oplossing is $t < \frac{1}{2}$



E10 a plot



schets

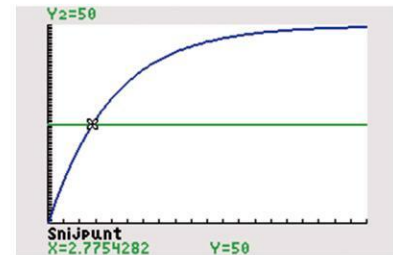


b De horizontale asymptoot geeft het resultaat als het erg lang heeft geregend.

Dan zal vrijwel al het vuil (= 100%) zijn weggespoeld.

De horizontale asymptoot is $P = 100$.

- c $100(1 - 0,779^t) = 50$
 met de rekenmachine:
 invoer: $y_1 = 100(1 - 0,779^x)$ en $y_2 = 50$
 venster: $0 \leq x \leq 25$, $0 \leq y \leq 100$
 optie: snijpunt
 Er is een snijpunt bij $x = 2,775\dots$
 Zie de schets hiernaast.
 De oplossing is $t = 2,775\dots$
 Zo'n bui duurt ongeveer $2,775\dots \times 60 \approx 167$ minuten.



- E11 a $g(x) = -(1 - 3^{x+3})$ ofwel $g(x) = -1 + 3^{x+3}$
 Een vergelijking van de asymptoot is $y = -1$.
 b $g(x) = 3(1 - 3^{x-2})$ ofwel $g(x) = 3 - 3^1 \cdot 3^{x-2}$ dus $g(x) = 3 - 3^{x-1}$
 Een vergelijking van de asymptoot is $y = 3$.
 c $g(x) = 6(1 - 3^x) + 4$ ofwel $g(x) = 6 - 6 \cdot 3^x + 4$ dus $g(x) = 10 - 6 \cdot 3^x$
 Een vergelijking van de asymptoot is $y = 10$.

$$1 \text{ a } \frac{3}{6} - \frac{2}{5} = \frac{15}{30} - \frac{12}{30} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$$

$$\text{b } \frac{7}{x} + \frac{2}{3x} = \frac{21}{3x} + \frac{2}{3x} = \frac{23}{3x}$$

$$\text{c } \frac{3}{13} \times \frac{-2}{5} = \frac{-6}{65} = -\frac{6}{65}$$

$$\text{d } \frac{3}{p} \times \frac{4}{p} = \frac{12}{p^2}$$

$$\text{e } \frac{3p}{4} \times \frac{2p}{-5} = \frac{6p^2}{-20} = -\frac{3p^2}{10}$$

$$\text{f } \frac{2a}{5b} \times \frac{3b}{4a} = \frac{6ab}{20ab} = \frac{3}{10}$$

$$2 \text{ a } 3 = \frac{3}{1} = \frac{3 \times 7}{1 \times 7} = \frac{21}{7} \text{ dus } 3\frac{5}{7} = \frac{21}{7} + \frac{5}{7} = \frac{26}{7}$$

$$\text{b } \frac{3}{x} + 2 = \frac{3}{x} + \frac{2}{1} = \frac{3}{x} + \frac{2x}{x} = \frac{3+2x}{x}$$

$$\text{c } \text{A } 5\frac{3}{8} = \frac{5 \times 8 + 3}{8} = \frac{43}{8}$$

$$\text{B } \frac{5}{p} + 4 = \frac{5}{p} + \frac{4p}{p} = \frac{5+4p}{p}$$

$$\text{C } 7 - \frac{4}{x} = \frac{7x}{x} - \frac{4}{x} = \frac{7x-4}{x}$$

$$\text{D } 8 + \frac{2}{3x} = \frac{24x}{3x} + \frac{2}{3x} = \frac{24x+2}{3x}$$

$$3 \text{ a } \frac{5p}{3p} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

$$\text{b } \frac{36}{\frac{3}{7}} = \frac{36 \times 7}{3} = \frac{252}{3} = 84$$

$$\text{c } \frac{8p}{12p} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\text{d } \frac{2p}{\frac{1}{p}} = \frac{2p \times p}{1} = 2p^2$$

$$\text{e } \frac{\frac{3}{p}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{3}{p} \times 3p}{\frac{1}{3} \times 3p} = \frac{9}{p}$$

$$\text{f } \frac{p}{\frac{1}{2}} = \frac{2p}{1} = 2p$$

$$\text{g } \frac{\frac{8}{9}}{4} = \frac{\frac{8}{9} \times 9}{4 \times 9} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

$$\text{h } \frac{4p^2}{\frac{2}{p}} = \frac{4p^2 \times p}{\frac{2}{p} \times p} = \frac{4p^3}{2} = 2p^3$$

$$4 \text{ a } -(a+5) - 3 = -a - 5 - 3 = -a - 8$$

$$\text{b } (-2v+3)(3v+8) = -6v^2 - 16v + 9v + 24 = -6v^2 - 7v + 24$$

$$\text{c } (p^3+2)(p-3) = p^4 - 3p^3 + 2p - 6$$

$$\text{d } (3h-2)(2h^2-4) = 6h^3 - 12h - 4h^2 + 8 = 6h^3 - 4h^2 - 12h + 8$$

$$\text{e } \left(\frac{1}{2}n+4\right)\left(\frac{1}{2}n-8\right) = \frac{1}{4}n^2 - 4n + 2n - 32 = \frac{1}{4}n^2 - 2n - 32$$

$$\text{f } -17(3u+5) + 6u = -51u - 85 + 6u = -45u - 85$$

$$\text{g } (2p+4)(8-3p^2) = 16p - 6p^3 + 32 - 12p^2 = -6p^3 - 12p^2 + 16p + 32$$

$$\text{h } -5,7(3,5x+6,2) = -19,95x - 35,34$$

$$5 \text{ a } (2h+1)(2h+1) = 4h^2 + 4h + 1$$

$$\text{b } (w-9)(w-9) = w^2 - 18w + 81$$

$$\text{c } (p+4)^2 = p^2 + 8p + 16$$

$$\text{d } (r-4)^2 = r^2 - 8r + 16$$

$$\text{e } (5+p)(5-p) = 25 - p^2$$

$$\text{f } (2e-3)(2e+3) = 4e^2 - 9$$

$$\text{g } (5-q)^2 = 25 - 10q + q^2$$

$$\text{h } \left(v - \frac{1}{3}\right)\left(v - \frac{1}{3}\right) = v^2 - \frac{2}{3}v + \frac{1}{9}$$

$$6 \text{ a } (p+5)^2 = p^2 + 10p + 25$$

$$\text{b } (2v-4)^2 = 4v^2 - 16v + 16$$

$$\text{c } (b+5)(b-5) = b^2 - 25$$

$$\text{d } (3x-6)(3x+6) = 9x^2 - 36$$

$$\text{f } (3u-0,5)^2 = 9u^2 - 3u + 0,25$$

$$\text{g } \left(\frac{1}{2}r+2\right)^2 = \frac{1}{4}r^2 + 2r + 4$$

$$\text{h } (p^2-5)(p^2+5) = p^4 - 25$$

$$\text{i } x(x+1)^2 = x(x^2+2x+1) = x^3+2x^2+x$$

$$\text{e } (2l+3)(l^2-7) = 2l^3 - 14l + 3l^2 - 21 = 2l^3 + 3l^2 - 14l - 21$$

$$\text{j } (x-y^2)(x+y^2) = x^2 - y^4$$

7 a $(x + 3)^2 = 4(x + 2) + 1$

$$x^2 + 6x + 9 = 4x + 8 + 1$$

$$x^2 + 2x = 0$$

$$x(x + 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x + 2 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -2$$

b $(x + 4)(x - 4) = x(x + 8)$

$$x^2 - 16 = x^2 + 8x$$

$$8x = -16$$

$$x = -2$$

8 a $3k = 2(k + 5)$

$$3k = 2k + 10$$

$$k = 10$$

c $2(t + 5)^2 = 14 + 2t$

$$2(t^2 + 10t + 25) = 14 + 2t$$

$$2t^2 + 20t + 50 = 14 + 2t$$

$$2t^2 + 18t + 36 = 0$$

$$t^2 + 9t + 18 = 0$$

$$(t + 3)(t + 6) = 0$$

$$t + 3 = 0 \text{ of } t + 6 = 0$$

$$t = -3 \text{ of } t = -6$$

b $(c + 2)(c - 2) = 5$

$$c^2 - 4 = 5$$

$$c^2 = 9$$

$$c = 3 \text{ of } c = -3$$

d $(b - 10)(b + 1) = 12$

$$b^2 - 9b - 10 = 12$$

$$b^2 - 9b - 22 = 0$$

$$(b - 11)(b + 2) = 0$$

$$b - 11 = 0 \text{ of } b + 2 = 0$$

$$b = 11 \text{ of } b = -2$$

9 a Vergelijking A en D kun je oplossen zonder eerst de haakjes weg te werken.

A $(x + 2)(0,2x - 8) = 0$

$$x + 2 = 0 \text{ of } 0,2x - 8 = 0$$

$$x = -2 \text{ of } x = 40$$

D $(x + 7)^2 - 11 = 25$

$$(x + 7)^2 = 36$$

$$x + 7 = 6 \text{ of } x + 7 = -6$$

$$x = -1 \text{ of } x = -13$$

b B $(2x - 5)(2x + 5) = 24$

$$4x^2 - 25 = 24$$

$$4x^2 = 49$$

$$2x = 7 \text{ of } 2x = -7$$

$$x = 3\frac{1}{2} \text{ of } x = -3\frac{1}{2}$$

C $(2x + 3)^2 + 2x = 3$

$$4x^2 + 12x + 9 + 2x = 3$$

$$4x^2 + 14x + 6 = 0$$

$$2x^2 + 7x + 3 = 0$$

$$D = 49 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49 - 24 = 25$$

$$x = \frac{-7 + \sqrt{25}}{4} = \frac{-7 + 5}{4} = -\frac{1}{2} \text{ of } x = \frac{-7 - \sqrt{25}}{4} = \frac{-7 - 5}{4} = -3$$

E: $(-4x + 1)(4x + 1) = 17$

$$-16x^2 + 1 = 17$$

$$-16x^2 = 16$$

$$x^2 = -1, \text{ geen oplossing}$$

$$F: 6x(x-1) = 1 - 5x$$

$$6x^2 - 6x = 1 - 5x$$

$$6x^2 - x - 1 = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot -1 = 1 + 24 = 25$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{25}}{12} = \frac{1 + 5}{12} = \frac{1}{2} \text{ of } x = \frac{1 - \sqrt{25}}{12} = \frac{1 - 5}{12} = -\frac{1}{3}$$

- 10 a** Als $3x + 6 = 15$, dan kun je links $3x + 6$ door 15 vervangen.

Dan staat er links en rechts hetzelfde, dus klopt het.

- b** Als $x - 4 = 0$, dan kun je links en rechts $x - 4$ door 0 vervangen. Dan komt links en rechts 0 te staan, dus klopt het ook.

- c** $(3x + 6)(x - 4) = 15(x - 4)$

$$3x + 6 = 15 \text{ of } x - 4 = 0$$

$$3x = 9 \text{ of } x = 4$$

$$x = 3 \text{ of } x = 4$$

- 11 a** $(2x + 5)(x - 1) = 3(x - 1)$

$$2x + 5 = 3 \text{ of } x - 1 = 0$$

$$2x = -2 \text{ of } x = 1$$

$$x = -1 \text{ of } x = 1$$

- c** $(3x - 4)(2x - 3) = (x + 1)(2x - 3)$

$$3x - 4 = x + 1 \text{ of } 2x - 3 = 0$$

$$2x = 5 \text{ of } 2x = 3$$

$$x = 2\frac{1}{2} \text{ of } x = 1\frac{1}{2}$$

- b** $x^2(2x - 9) = 7x^2$

$$x^2 = 0 \text{ of } 2x - 9 = 7$$

$$x = 0 \text{ of } 2x = 16$$

$$x = 0 \text{ of } x = 8$$

- d** $(5x + 3)(x^2 - 9) = 7(5x + 3)$

$$5x + 3 = 0 \text{ of } x^2 - 9 = 7$$

$$5x = -3 \text{ of } x^2 = 16$$

$$x = -\frac{3}{5} \text{ of } x = 4 \text{ of } x = -4$$

- 12 a** $2 - (x - 4)^2 = 1$

$$(x - 4)^2 = 1$$

$$x - 4 = 1 \text{ of } x - 4 = -1$$

$$x = 5 \text{ of } x = 3$$

- c** $(x + 2)^2 - (3 - 2x)^2 = 0$

$$(x + 2)^2 = (3 - 2x)^2$$

$$x + 2 = 3 - 2x \text{ of } x + 2 = -3 + 2x$$

$$3x = 1 \text{ of } -x = -5$$

$$x = \frac{1}{3} \text{ of } x = 5$$

- b** $(5x - 125)(x^2 - 81) = 0$

$$5x - 125 = 0 \text{ of } x^2 - 81 = 0$$

$$5x = 125 \text{ of } x^2 = 81$$

$$x = 25 \text{ of } x = 9 \text{ of } x = -9$$

- d** $(0,5x + 2)^2 - 2x = 20$

$$0,25x^2 + 2x + 4 - 2x = 20$$

$$0,25x^2 = 16$$

$$x^2 = 64$$

$$x = 8 \text{ of } x = -8$$

- 13 a** $2x^2 + 3x - 5 = 7x + 1$

$$2x^2 - 4x - 6 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$x - 3 = 0 \text{ of } x + 1 = 0$$

$$x = 3 \text{ of } x = -1$$

- b** De grafiek van f ligt boven de grafiek van g bij x -waarden uit het interval $\langle \leftarrow, -1 \rangle \cup \langle 3, \rightarrow \rangle$.

- c** $f(x) > g(x)$

- 14 a** $(1 - x)^2 = 5$

$$1 - x = \sqrt{5} \text{ of } 1 - x = -\sqrt{5}$$

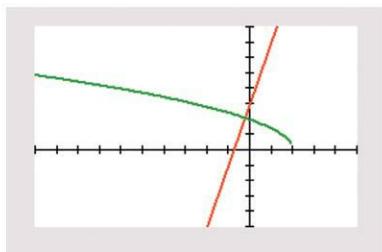
$$x = 1 - \sqrt{5} \approx -1,24 \text{ of } x = 1 + \sqrt{5} \approx 3,24$$

Uit de grafiek blijkt $g(x) < 5$ voor $1 - \sqrt{5} < x < 1 + \sqrt{5}$.

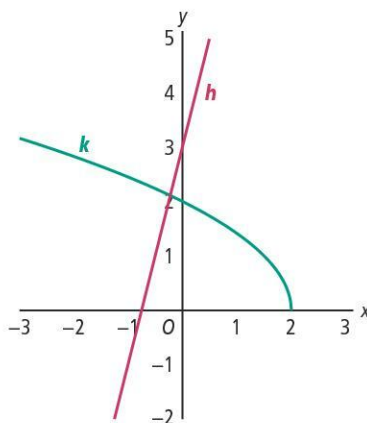
- b** $g(0) = (1 - 0)^2 = 1^2 = 1$ en $h(0) = \left(\frac{1}{2} \cdot 0 + 1\right)^2 = 1^2 = 1$, klopt.
Dus het punt $(0, 1)$ is een snijpunt van de grafieken van g en h .
- c** Een kwadratische vergelijking heeft alleen één oplossing als de snijpunten samenvallen. Dat is hier niet het geval, dus moet er nog een snijpunt zijn.
- d** Een kwadratische vergelijking heeft maximaal twee oplossingen.
- e** $(1 - x)^2 = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2$
 $1 - x = \frac{1}{2}x + 1$ of $1 - x = -\frac{1}{2}x - 1$
 $-1\frac{1}{2}x = 0$ of $-\frac{1}{2}x = -2$
 $x = 0$ of $x = 4$, dus het tweede snijpunt ligt bij $x = 4$.
 Uit de grafieken blijkt dat $h(x) > g(x)$ voor $0 < x < 4$.

- 15 a** Voor het domein geldt: $4 - 2x \geq 0$ ofwel $2x \leq 4$ dus $x \leq 2$.
Het domein is $\langle \leftarrow, 2 \rangle$ en het bereik is $[0, \rightarrow)$.

- b** invoer: $y_1 = 4x + 3$ en $y_2 = \sqrt{4 - 2x}$
 venster: $-10 \leq x \leq 5$, $-5 \leq y \leq 8$
 plot:

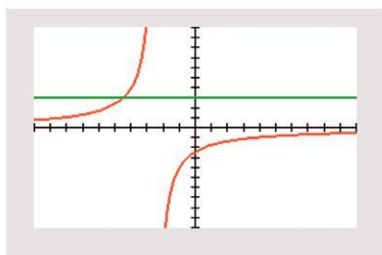


schets:

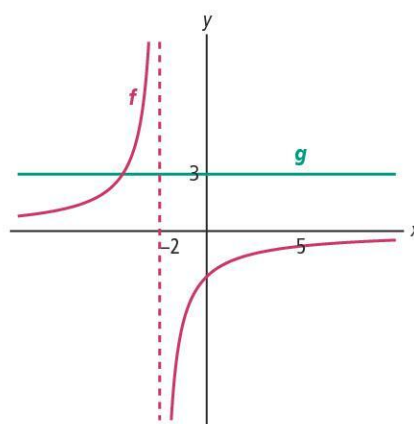


- c** optie: snijpunt
 Voor het snijpunt geldt $x \approx -0,22$.
 $h(x) > k(x)$ voor $-0,22 < x \leq 2$.

- 16 a** invoer: $y_1 = -\frac{12}{2x + 5}$ en $y_2 = 3$
 venster: $-10 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 10$
 plot:



schets:



- b** Het domein van f is $\langle \leftarrow, -2\frac{1}{2} \rangle \cup \langle -2\frac{1}{2}, \rightarrow \rangle$.
 optie: snijpunt
 $x = -4\frac{1}{2}$.
 Uit de grafiek blijkt $f(x) < g(x)$ voor $\langle \leftarrow, -4\frac{1}{2} \rangle \cup \langle -2\frac{1}{2}, \rightarrow \rangle$.

5 Lijnen en afstanden

Voorkennis

- V1 a** Het startgetal van k is 5.
Het hellingsgetal van k is -2 .
- b** Je kijkt hoeveel de grafiek omhoog gaat per eenheid naar rechts.
- c** Het hellingsgetal van l is $1\frac{1}{2}$, want de lijn gaat 3 omhoog per 2 naar rechts.
- d** l gaat door het punt $(4, 0)$. Om het snijpunt met de y -as te vinden moet je 4 naar links. Per 4 naar links gaat de lijn $4 \times 1\frac{1}{2} = 6$ omlaag, dus de lijn snijdt de y -as in $(0, -6)$, dus het startgetal is -6 .
Een formule voor l is $y = 1\frac{1}{2}x - 6$.
- e** Lijn m heeft hetzelfde hellingsgetal als k , dus het hellingsgetal is -2 .
Een formule voor m heeft de vorm $y = -2x + b$.
 $(-3, -4)$ invullen geeft $-4 = -2 \cdot -3 + b$ ofwel $-4 = 6 + b$, dus $b = -10$.
Een formule van m is $y = -2x - 10$.
- f** Het hellingsgetal is $\frac{4 - 0}{6 - -2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.
Een formule voor n heeft de vorm $y = \frac{1}{2}x + b$.
 $(-2, 0)$ invullen geeft $0 = \frac{1}{2} \cdot -2 + b$ ofwel $0 = -1 + b$, dus $b = 1$.
Een formule van n is $y = \frac{1}{2}x + 1$.
- V2 a** Door $(0, 7)$, dus het startgetal is 7. Een vergelijking van l is $y = -3x + 7$.
- b** De richtingscoëfficiënt van l is $\frac{30}{40} = \frac{3}{4}$ en het startgetal is 0.
De vergelijking is $y = \frac{3}{4}x$.
- c** De richtingscoëfficiënt van l is $\frac{-5 - -13\frac{1}{2}}{1 - 0} = 8\frac{1}{2}$.
Een vergelijking van l is van de vorm $y = 8\frac{1}{2}x + b$.
 $(1, -5)$ invullen geeft $-5 = 8\frac{1}{2} \cdot 1 + b$ dus $b = -13\frac{1}{2}$.
De vergelijking is $y = 8\frac{1}{2}x - 13\frac{1}{2}$.
- d** De richtingscoëfficiënt van l is $-\frac{1}{2}$.
Een vergelijking van l is van de vorm $y = -\frac{1}{2}x + b$.
 $(1, 4\frac{1}{2})$ invullen geeft $4\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \cdot 1 + b$ dus $b = 5$.
De vergelijking is $y = -\frac{1}{2}x + 5$.
- e** De richtingscoëfficiënt van l is $\frac{4 - 1}{4 - -2} = \frac{1}{2}$.
Een vergelijking van l is van de vorm $y = \frac{1}{2}x + b$.
 $(-2, 1)$ invullen geeft $1 = \frac{1}{2} \cdot -2 + b$ dus $b = 2$.
De vergelijking is $y = \frac{1}{2}x + 2$.
- f** De richtingscoëfficiënt van l is $\frac{-1 - 1}{-1 - 4} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$.
Een vergelijking van l is van de vorm $y = \frac{2}{5}x + b$.
 $(4, 1)$ invullen geeft $1 = \frac{2}{5} \cdot 4 + b$ dus $b = 1 - \frac{2}{5} \cdot 4 = -\frac{3}{5}$.
De vergelijking is $y = \frac{2}{5}x - \frac{3}{5}$.
- V3** $2x - 3y = 12$
 $-3y = -2x + 12$ (beide zijden $2x$ afgetrokken)
 $y = \frac{2}{3}x - 4$ (beide zijden gedeeld door -3)

V4 a $6x - 4y = 24$
 $-4y = -6x + 24$
 $y = 1\frac{1}{2}x - 6$

b $x = 3y + 17$
 $-3y = -x + 17$
 $y = \frac{1}{3}x - 5\frac{2}{3}$

c $3(x + 2y) = 1$
 $3x + 6y = 1$
 $6y = -3x + 1$
 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$

d $3y - 2x = x + 5y - 4$
 $-2y = 3x - 4$
 $y = -1\frac{1}{2}x + 2$

V5 a $y = 5(2x + 3) - 7$
 $y = 10x + 15 - 7$
 $y = 10x + 8$

b $y = -\frac{1}{2}(x + 4) + \frac{3}{4}$
 $y = -\frac{1}{2}x - 2 + \frac{3}{4}$
 $y = -\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{4}$

c $3(2x - 5) = 2y + 7$
 $6x - 15 = 2y + 7$
 $-2y = -6x + 22$
 $y = 3x - 11$

V6 $AB^2 = 6^2 + 3^2 = 45$ dus $AB = \sqrt{45}$
 $LM^2 + 2^2 = (\sqrt{30})^2$ dus $LM^2 = 30 - 4 = 26$ en $LM = \sqrt{26}$
 $3,5^2 + RS^2 = 4^2$ dus $RS^2 = 16 - 12,25 = 3,75$
 $QR^2 = 1,8^2 + RS^2$
 $QR^2 = 3,24 + 3,75 = 6,99$
 $QR = \sqrt{6,99}$

V7 $\tan(\angle A) = \frac{3}{4} = 0,75$, dus $\angle A \approx 37^\circ$
 $\sin(39^\circ) = \frac{4}{KL}$, dus $KL = \frac{4}{\sin(39^\circ)} \approx 6,4$
 $\cos(18^\circ) = \frac{QR}{6,3}$, dus $QR = 6,3 \cdot \cos(18^\circ) \approx 6,0$

5.1 Vergelijking van een lijn

intro Op de vlakke weg lopen ze 5 km per uur, dus leggen ze a km af in $\frac{1}{5}a$ uur.
 100 meter stijgen kost 20 minuten oftewel $\frac{1}{3}$ uur.
 1 meter stijgen kost dus $\frac{1}{300}$ uur en h meter stijgen $\frac{1}{300}h$ uur.
 Voor de wandeling van 4 uur geldt dus $4 = \frac{1}{5}a + \frac{1}{300}h$.

- 1 a** Het startgetal is 5 en de richtingscoëfficiënt is $-2\frac{1}{2}$
b $x = 2$ invullen geeft $y = -2\frac{1}{2} \cdot 2 + 5 = -5 + 5 = 0$, dus de lijn gaat door $(2, 0)$.
 $x = 0$ invullen geeft $y = -2\frac{1}{2} \cdot 0 + 5 = 5$, dus de lijn gaat door $(0, 5)$.
c De richtingscoëfficiënt van m is $\frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$ en de lijn gaat door $(0, 3)$.
 Een vergelijking is $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

- d** De richtingscoëfficiënt van k is $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ en de lijn gaat door $(0, -2)$.
Een vergelijking is $y = \frac{1}{2}x - 2$.

2 $m: y = -\frac{1}{2}x + 3$ $k: y = \frac{1}{2}x - 2$
 $\frac{1}{2}x + y = 3$ $-\frac{1}{2}x + y = -2$
 $x + 2y = 6$ $-x + 2y = -4$

- 3 a** De noemers 2 en 5 zijn respectievelijk de x -coördinaat van het snijpunt met de x -as en de y -coördinaat van het snijpunt met de y -as.

- b** $m: x + 2y = 6$ (deel links en rechts door 6)

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$$

- $k: -x + 2y = -4$ (deel links en rechts door -4)

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-2} = 1$$

- c** Lijn n snijdt de assen in de punten $(-6, 0)$ en $(0, 3)$.

- d** $\frac{x}{9} + \frac{y}{-4} = 1$ (of $\frac{x}{9} - \frac{y}{4} = 1$)

4 a $y = -\frac{2}{3}x + 7$
 $\frac{2}{3}x + y = 7$
 $2x + 3y = 21$

b $y = -2x + 3$
 $2x + y = 3$

$$\frac{x}{1\frac{1}{2}} + \frac{y}{3} = 1$$

c $\frac{x}{2\frac{1}{2}} + \frac{y}{-1} = 1$
 $2x - 5y = 5$
 $-5y = -2x + 5$
 $y = \frac{2}{5}x - 1$

- 5** Lijn k snijdt de assen in $(0, 2\frac{1}{2})$ en $(3\frac{1}{2}, 0)$, dus een vergelijking van lijn k is

$$\frac{x}{3\frac{1}{2}} + \frac{y}{2\frac{1}{2}} = 1.$$

Lijn l heeft richtingscoëfficiënt $\frac{\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$, dus een vergelijking is $y = \frac{1}{5}x + b$.

$(-1, 1)$ invullen geeft $1 = \frac{1}{5} \cdot -1 + b$ dus $b = 1\frac{1}{5}$

Een vergelijking van lijn l is $y = \frac{1}{5}x + 1\frac{1}{5}$

m is een verticale lijn met vergelijking $x = 3$

n is een horizontale lijn met vergelijking $y = -1\frac{1}{2}$

- 6 a** De lijn snijdt de assen in $(6, 0)$ en $(0, 18)$, dus $\frac{x}{6} + \frac{y}{18} = 1$.

Door vermenigvuldigen met 18 krijg je $3x + y = 18$.

De derde vorm is $y = -3x + 18$.

- b** De richtingscoëfficiënt is $\frac{-1}{1} = -1$ en de lijn gaat door $(0, 4)$, dus $y = -x + 4$.

De andere vormen zijn $x + y = 4$ en $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$.

5 Lijnen en afstanden

- c De lijn snijdt de assen in $(-4, 0)$ en $(0, 20)$, dus $\frac{x}{-4} + \frac{y}{20} = 1$.

Door vermenigvuldigen met -20 krijg je $5x - y = -20$.

De derde vorm is $y = 5x + 20$.

- d De lijn snijdt de assen in $(-5, 0)$ en $(0, -7\frac{1}{2})$, dus $\frac{x}{-5} + \frac{y}{-7\frac{1}{2}} = 1$.

Door vermenigvuldigen met -15 krijg je $3x + 2y = -15$.

Uit $2y = -3x - 15$ volgt de derde vorm: $y = -1\frac{1}{2}x - 7\frac{1}{2}$

- e De richtingscoëfficiënt is $\frac{-9}{6} = -1\frac{1}{2}$ dus een vergelijking is $y = -1\frac{1}{2}x + b$.

Invullen van $(-4, 2)$ geeft $2 = -1\frac{1}{2} \cdot -4 + b$, dus $b = -4$.

De vergelijking is $y = -1\frac{1}{2}x - 4$.

$1\frac{1}{2}x + y = -4$ geeft $3x + 2y = -8$.

Delen door -8 geeft de derde vorm: $\frac{x}{-2\frac{2}{3}} + \frac{y}{-4} = 1$.

- f De richtingscoëfficiënt is $\frac{5}{-10} = -\frac{1}{2}$, dus een vergelijking is $y = -\frac{1}{2}x + b$.

Invullen van $(-1, 4)$ geeft $4 = -\frac{1}{2} \cdot -1 + b$, dus $b = 3\frac{1}{2}$

De vergelijking is $y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$

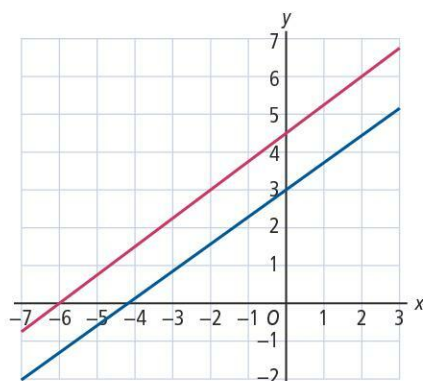
$\frac{1}{2}x + y = 3\frac{1}{2}$ geeft $x + 2y = 7$.

Delen door 7 geeft de derde vorm: $\frac{x}{7} + \frac{y}{3\frac{1}{2}} = 1$.

- 7 a y -as: $x = 0$ geeft $-4y = -18$ dus $y = 4\frac{1}{2}$. Snijpunt $(0, 4\frac{1}{2})$.

- b x -as: $y = 0$ geeft $3x = -18$ dus $x = -6$. Snijpunt $(-6, 0)$

c



- d x -as: $y = 0$ geeft $-5x = 21$ dus $x = -4\frac{1}{5}$. Snijpunt $(-4\frac{1}{5}, 0)$

y -as: $x = 0$ geeft $7y = 21$ dus $y = 3$. Snijpunt $(0, 3)$.

- e Zie opdracht c.

- 8 Herleid $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ tot $\frac{y}{q} = -\frac{x}{p} + 1$ en $y = -\frac{q}{p}x + q$.

Als de lijnen evenwijdig zijn, zijn de richtingscoëfficiënten gelijk, dus geldt

$$-\frac{q}{p} = 4 \text{ en daardoor } q = -4p.$$

- 9 a Als $a = 0$ dan is de vergelijking $ax + by = c$ te herleiden tot $by = c$ ofwel

$y = -\frac{c}{b}$. Dit is een horizontale lijn en het is niet de x -as.

- b Als $b = 0$ dan is de vergelijking $ax + by = c$ te herleiden tot $ax = c$ ofwel

$x = -\frac{c}{a}$. Dit is een verticale lijn en het is niet de y -as.

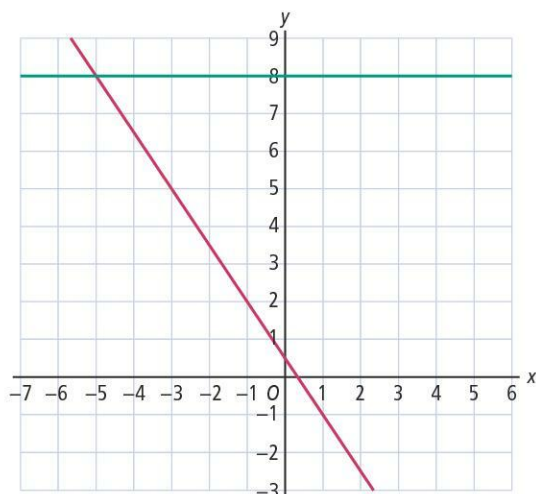
- c Als $c = 0$, dan is de vergelijking $ax + by = c$ te herleiden tot $ax + by = 0$.
Deze lijn gaat door $(0, 0)$, is niet verticaal of horizontaal; er is sprake van een recht evenredig verband.
- d Als a en b beide nul zijn en c niet, krijg je $0 = c$ en dat kan niet als $c \neq 0$.
Als a en c beide nul zijn en b niet, krijg je $by = 0$ dus $y = 0$, dat is de x -as.
Als b en c beide nul zijn en a niet, krijg je $ax = 0$ dus $x = 0$, dat is de y -as.

- 05** a Omdat je de richtingscoëfficiënt weet.
- b De vergelijking heeft de vorm $y = -\frac{1}{2}x + b$.
Invullen van $(-2, 3)$ geeft $3 = -\frac{1}{2} \cdot -2 + b$ ofwel $3 = 1 + b$ dus $b = 2$.
Een vergelijking van k is $y = -\frac{1}{2}x + 2$.
- c Omdat je de snijpunten met de x -as en de y -as weet.
- d $\therefore \frac{x}{5} + \frac{y}{8} = 1$
- e De richtingscoëfficiënt van m is $\frac{4-0}{3-(-3)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
De vergelijking heeft de vorm $y = \frac{2}{3}x + b$.
Invullen van $(-3, 0)$ geeft $0 = \frac{2}{3} \cdot -3 + b$ ofwel $0 = -2 + b$ dus $b = 2$.
Een vergelijking van m is $y = \frac{2}{3}x + 2$.
- f n is een verticale lijn, dus alle punten op lijn n hebben dezelfde x -coördinaat.
- g De vergelijking van lijn n is $x = -2$.

- 08** a Herleid $3x + 2y = 7$ tot $2y = -3x + 7$ en tot $y = -1\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$
Herleid $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$ tot $\frac{y}{6} = -\frac{x}{4} + 1$.
Door nu beide kanten met 6 te vermenigvuldigen krijg je $y = -1\frac{1}{2}x + 6$.
De richtingscoëfficiënten van beide lijnen is $-1\frac{1}{2}$
- b Deze twee lijnen zijn evenwijdig.
- c Lijn n snijdt de assen in $(p, 0)$ en $(0, q)$.
De richtingscoëfficiënt van n is gelijk aan $\frac{q-0}{0-p} = \frac{q}{-p}$
Als m en n evenwijdig zijn, zijn de richtingscoëfficiënten gelijk, dus $\frac{q}{-p} = -5$.
Dit is ook te schrijven als $q = 5p$.

- U1** a De richtingscoëfficiënt van AC is $\frac{8-0}{12-8} = 2$ dus een vergelijking heeft de vorm $y = 2x + b$. Invullen van $(8, 0)$ geeft $0 = 2 \cdot 8 + b$, dus $b = -16$.
Een vergelijking van AC is $y = 2x - 16$.
De richtingscoëfficiënt van BD is $\frac{12-4}{0-12} = -\frac{2}{3}$ dus een vergelijking heeft de vorm $y = -\frac{2}{3}x + b$. Een vergelijking van BD is $y = -\frac{2}{3}x + 12$.
Om punt S te vinden moet $2x - 16 = -\frac{2}{3}x + 12$ opgelost worden.
 $2\frac{2}{3}x = 28$ ofwel $8x = 84$ dus $x = 10\frac{1}{2}$. Dit invullen geeft $y = 2 \cdot 10\frac{1}{2} - 16 = 5$.
Het snijpunt is $S(10\frac{1}{2}, 5)$.
- b De vergelijking van BC is $x = 12$.
De richtingscoëfficiënt van AD is $\frac{0-12}{8-0} = -1\frac{1}{2}$ dus een vergelijking heeft de vorm $y = -1\frac{1}{2}x + b$. Een vergelijking van AD is $y = -1\frac{1}{2}x + 12$.
Voor het snijpunt geldt $x = 12$ en $y = -1\frac{1}{2} \cdot 12 + 12 = -6$.
Het snijpunt is $T(12, -6)$.

- U2 a** Als je $x = 3$ en $y = 4$ invult, krijg je $p(3 - 3) + q(4 - 4) = 0$, dus $p \cdot 0 + q \cdot 0 = 0$ en dat klopt voor alle waarden van p en q .
- b** Als $p = 2$ wordt de vergelijking $2(x - 3) + q(y - 4) = 0$.
De lijn gaat door $(0, 0)$, dus $2(0 - 3) + q(0 - 4) = 0$.
 $-6 - 4q = 0$
 $4q = -6$
 $q = -1\frac{1}{2}$
- c** $p = 1$ en $q = 1$ invullen geeft $x + y - 3 + 2x + y + 2 = 0$ ofwel $3x + 2y = 1$, wat ook te schrijven is als $y = -1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
 $p = 2$ en $q = -1$ invullen geeft $2(x + y - 3) - 1(2x + y + 2) = 0$ ofwel $2x + 2y - 6 - 2x - y - 2 = 0$, wat ook te schrijven is als $y = 8$.



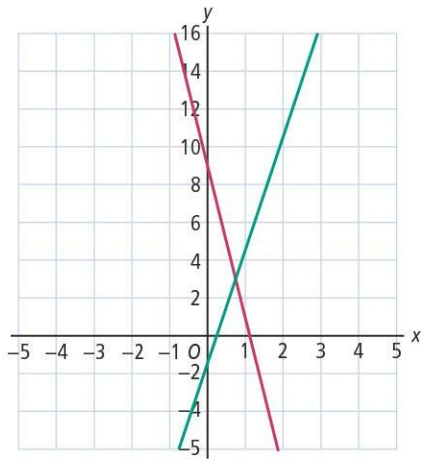
- d** Omdat $p \cdot 0 + q \cdot 0 = 0$ vind je dat punt door $x + y - 3 = 0$ en $2x + y + 2 = 0$ op te lossen.
 Uit de eerste vergelijking volgt $y = -x + 3$.
 Dit invullen in de andere vergelijking geeft $2x + -x + 3 + 2 = 0$ ofwel $x = -5$.
 Dit invullen in $y = -x + 3$ geeft $y = 8$.
 Het ene punt waar alle lijnen doorheen gaan is het punt $(-5, 8)$, dit klopt ook met opgave c.

5.2 Stelsels lineaire vergelijkingen

intro Twee volwassenen en twee kinderen betalen 28 euro, dus vier volwassenen en vier kinderen zouden 56 euro moeten betalen.
 Vier volwassenen en drie kinderen betalen 51 euro, dus één kind betaalt 5 euro.
 Twee kinderen betalen 10 euro, dus twee volwassenen betalen 18 euro.
 Een kaartje voor een volwassene kost dus 9 euro.

- 10 a** $y = -4x + 9$
b $6x - 2y = 3$ dus $-2y = -6x + 3$ en $y = 3x - 1\frac{1}{2}$

c



d $3x - 1\frac{1}{2} = -4x + 9$

$7x = 10\frac{1}{2}$ dus $x = 1\frac{1}{2}$ en $y = 3 \cdot 1\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 3$, het snijpunt is $(1\frac{1}{2}, 3)$.

11 a Herleid $4x + 3y = 1$ tot $3y = -4x + 1$ dus $y = -1\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

gelijkstellen: $-4x + 3 = -1\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

$-2\frac{2}{3}x = -2\frac{2}{3}$ dus $x = 1$ en $y = -4 \cdot 1 + 3 = -1$

De oplossing van het stelsel is $x = 1$ en $y = -1$

b Herleid $y + 3x = 0$ tot $y = -3x$ en herleid $5x + y = 4$ tot $y = -5x + 4$.

gelijkstellen: $-3x = -5x + 4$

$2x = 4$ dus $x = 2$ en $y = -3 \cdot 2 = -6$

De oplossing van het stelsel is $x = 2$ en $y = -6$

c Herleid $6x - y = 14$ tot $y = 6x - 14$.

Herleid $2x + 3y = 18$ tot $3y = -2x + 18$ dus $y = -\frac{2}{3}x + 6$.

gelijkstellen: $6x - 14 = -\frac{2}{3}x + 6$ ofwel $6\frac{2}{3}x = 20$ dus $x = 3$ en

$y = 6 \cdot 3 - 14 = 4$

De oplossing van het stelsel is $x = 3$ en $y = 4$

d Herleid $3x + 2y = 14$ tot $2y = -3x + 14$ dus $y = -1\frac{1}{2}x + 7$.

Herleid $-2x + y = 7$ tot $y = 2x + 7$.

gelijkstellen: $2x + 7 = -1\frac{1}{2}x + 7$

$3\frac{1}{2}x = 0$ dus $x = 0$ en $y = 2 \cdot 0 + 7 = 7$

De oplossing van het stelsel is $x = 0$ en $y = 7$

12 a Uit $-3x + 2y = 8$ volgt $2y = 3x + 8$ dus $y = 1\frac{1}{2}x + 4$.

b $8x - 3(1\frac{1}{2}x + 4) = -5$

$8x - 4\frac{1}{2}x - 12 = -5$

$3\frac{1}{2}x = 7$ dus $x = 2$ en $y = 1\frac{1}{2} \cdot 2 + 4 = 7$

13 a $3x + 5y = 12$

$5y = -3x + 12$

$y = -0,6x + 2,4$

b $2x - 8 = -0,6x + 2,4$

$2,6x = 10,4$

$x = 4$ en $y = -0,6 \cdot 4 + 2,4 = -2,4 + 2,4 = 0$

c -

- 14 a** Bij A en C, omdat y daar is uitgedrukt in x of x is uitgedrukt in y .
- b** A: $y = \frac{1}{2}x - 2$ substitueren geeft
 $2x + \frac{1}{2}x - 2 = 3$
 $2\frac{1}{2}x = 5$ dus $x = 2$
 $y = \frac{1}{2} \cdot 2 - 2 = -1$
 oplossing: $x = 2$ en $y = -1$
- B: $x + y = -2$ dus $y = -x - 2$
 $3x - 2y = 4$ dus $-2y = -3x + 4$
 en $y = 1\frac{1}{2}x - 2$
 gelijkstellen: $-x - 2 = 1\frac{1}{2}x - 2$
 $-2\frac{1}{2}x = 0$ dus $x = 0$
 $y = -0 - 2 = -2$
 oplossing: $x = 0$ en $y = -2$
- C: $x = y - 4$ substitueren geeft
 $3(y - 4) + 2y + 2 = 0$
 $3y - 12 + 2y + 2 = 0$
 $5y = 10$ dus $y = 2$
 $x = 2 - 4 = -2$
 oplossing: $x = -2$ en $y = 2$
- D: $7x - 4y + 2 = 0$ dus $4y = 7x + 2$ en
 $y = 1\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$
 $2x + 5y + 19 = 0$ dus $5y = -2x - 19$ en
 $y = -\frac{2}{5}x - 3\frac{4}{5}$
 gelijkstellen: $1\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = -\frac{2}{5}x - 3\frac{4}{5}$
 $35x + 10 = -8x - 76$
 $43x = -86$ dus $x = -2$ en
 $y = 1\frac{3}{4} \cdot -2 + \frac{1}{2} = -3$
 oplossing: $x = -2$ en $y = -3$

- 15 a** $0 \cdot 3 = 0$ dus het klopt. Als $x = 3$, dan is $y = -\frac{1}{2} \cdot 3 + 4 = 2\frac{1}{2}$
- b** $0 \cdot -4 = 0$, klopt ook. Als $x = -4$, dan is $y = -\frac{1}{2} \cdot -4 + 4 = 6$
- c** voor alle waarden van x , dus oneindig veel oplossingen.
- d** De bijbehorende lijnen vallen samen.

- 16 a** $x + 2(-\frac{1}{2}x + 4) = 6$
 $x - x + 8 = 6$
 $0 \cdot x = -2$
- b** Er is geen enkele waarde van x waarvoor $0 \cdot x = -2$.
- c** De lijnen hebben geen snijpunt, dus ze zijn evenwijdig.

- 17 a** Substitueer $y = -2\frac{1}{2}x + 3$ in de andere vergelijking:
 $2x + 5(-2\frac{1}{2}x + 3) = 6$
 $-10\frac{1}{2}x + 15 = 6$, er is één oplossing.
- b** Substitueer $y = 1\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ in de andere vergelijking:
 $3x - 2(1\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}) = 1\frac{1}{2}$
 $3x - 3x + 1\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$
 $0 \cdot x = 0$, er zijn oneindig veel oplossingen.
- c** Herleid de onderste vergelijking tot $x = 2y + 2$ en substitueer:
 $8(2y + 2 - y) = 4(2y + 2) - 3$
 $16y + 16 - 8y = 8y + 8 - 3$
 $0 \cdot y = -11$, er zijn geen oplossingen.
- d** Substitueer $y = 1\frac{1}{2}x + 21$ in de andere vergelijking:
 $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}(1\frac{1}{2}x + 21) = 7$
 $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + 7 = 7$
 $0 \cdot x = 0$, er zijn oneindig veel oplossingen.

18 a Punt $(-2, -11)$ invullen in $y = x^2 + bx + c$ geeft $-11 = 4 - 2b + c$.

b Punt $(3, 4)$ invullen in $y = x^2 + bx + c$ geeft $4 = 9 + 3b + c$.

Dit geeft het stelsel
$$\begin{cases} -2b + c = -15 \\ 3b + c = -5 \end{cases}$$

Uit de bovenste vergelijking volgt $c = 2b - 15$, dit substitueren in de onderste vergelijking geeft $3b + 2b - 15 = -5$ ofwel $5b = 10$ dus $b = 2$.

$$c = 2 \cdot 2 - 15 = -11$$

De vergelijking van de parabool is $y = x^2 + 2x - 11$.

011 a $4x + y = 3$

$$y = -4x + 3$$

$$3x - 4y = 26$$

$$-4y = -3x + 26$$

$$y = \frac{3}{4}x - 6\frac{1}{2}$$

b $-4x + 3 = \frac{3}{4}x - 6\frac{1}{2}$

$$-4\frac{3}{4}x = -9\frac{1}{2}$$

$$x = 2$$

c $y = -4 \cdot 2 + 3 = -5$

d $3 \cdot 2 - 4 \cdot -5 = 6 + 20 = 26$ en dat klopt.

e $2x + y = 7$

$$y = -2x + 7$$

$$-2x + 7 = -\frac{1}{3}x + 3\frac{2}{3}$$

$$-1\frac{2}{3}x = -3\frac{1}{3}$$

$$x = 2 \text{ en } y = -2 \cdot 2 + 7 = 3$$

$$x + 3y = 11$$

$$3y = -x + 11$$

$$y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{2}{3}$$

f $-x + 3y = 17$

$$3y = x + 17$$

$$y = \frac{1}{3}x + 5\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3}x + 5\frac{2}{3} = -\frac{4}{5}x + 3\frac{2}{5}$$

$$1\frac{2}{15}x = -2\frac{4}{15}$$

$$x = -2 \text{ en } y = \frac{1}{3} \cdot -2 + 5\frac{2}{3} = 5$$

$$4x + 5y = 17$$

$$5y = -4x + 17$$

$$y = -\frac{4}{5}x + 3\frac{2}{5}$$

g $3x + 4y = 12$

$$4y = -3x + 12$$

$$y = -\frac{3}{4}x + 3$$

$$-\frac{3}{4}x + 3 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$-1\frac{1}{4}x = -2\frac{1}{2}$$

$$x = 2 \text{ en } y = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$$

$$x - 2y = -1$$

$$-2y = -x - 1$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

h $4x - 2y = 11$

$$-2y = -4x + 11$$

$$y = 2x - 5\frac{1}{2}$$

$$2x - 5\frac{1}{2} = \frac{2}{7}x - \frac{5}{14}$$

$$1\frac{5}{7}x = 5\frac{1}{7}$$

$$x = 3 \text{ en } y = 2 \cdot 3 - 5\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$2x - 7y = 2\frac{1}{2}$$

$$-7y = -2x + 2\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{2}{7}x - \frac{5}{14}$$

017 a $2x + 3\left(-\frac{2}{3}x + 2\right) = 6$

$$2x - 2x + 6 = 6$$

$$0 \cdot x = 0$$

b De vergelijking $0 \cdot x = 0$ heeft oneindig veel oplossingen.

c Het stelsel heeft ook oneindig veel oplossingen.

5 Lijnen en afstanden

- d $2x + 3\left(-\frac{2}{3}x + 3\right) = 6$
 $2x - 2x + 9 = 6$
 $0 \cdot x = -3$
- e Het stelsel vergelijkingen heeft geen oplossingen.

U3 Stel de coördinaten van het snijpunt zijn (a, a) .

$$\text{Dan moet gelden } \begin{cases} pa - a = 9 \\ 3a + pa = 45 \end{cases}$$

Uit de eerste vergelijking volgt $pa = a + 9$

Dit invullen in de tweede vergelijking geeft $3a + a + 9 = 45$

$$4a = 36, \text{ dus } a = 9$$

$$p \cdot 9 = 9 + 9$$

$$9p = 18, \text{ dus } p = 2$$

5.3 De hoek tussen twee lijnen

intro Een helling 1 : 5 is hetzelfde als een helling met een stijging van 20%. De tangens van 20° is 0,363..., dat betekent dat bij een helling van 20° een stijgingspercentage van 36% hoort. De helling van 20° is het steilst.

19 a De richtingscoëfficiënt van k is $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

b $\tan(\angle POQ) = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

De richtingscoëfficiënt is gelijk aan $\frac{\text{toename } y - \text{coördinaat}}{\text{toename } x - \text{coördinaat}}$ en dat is gelijk

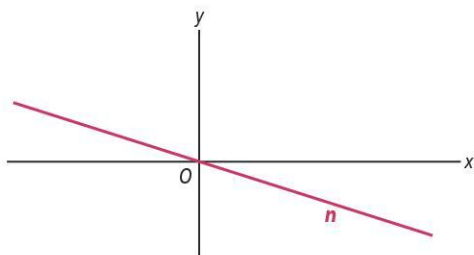
aan $\frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}}$, dus gelijk aan de tangens.

c $\angle POQ = \tan^{-1}\left(2\frac{1}{2}\right) \approx 68^\circ$

d De richtingscoëfficiënt van l is $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. De hoek is $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 27^\circ$.

e De richtingscoëfficiënt van m is $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$. De hoek is $\tan^{-1}\left(1\frac{1}{3}\right) \approx 53^\circ$.

20 a



b De hoek is $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 18^\circ$.

21 Herleid $4x + 5y = 0$ tot $5y = -4x$ en tot $y = -\frac{4}{5}x$.

De richtingscoëfficiënt van k is $\frac{4}{5}$. De hoek is $\tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \approx 39^\circ$.

Herleid $4x = y + 2$ tot $y = 4x - 2$.

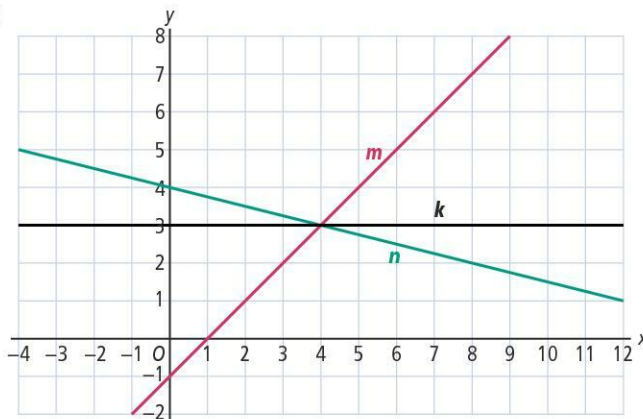
De richtingscoëfficiënt van m is 4. De hoek is $\tan^{-1}(4) \approx 76^\circ$.

Herleid $\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y = 1$ tot $\frac{1}{5}y = -\frac{1}{3}x + 1$ en tot $y = -1\frac{2}{3}x + 5$.

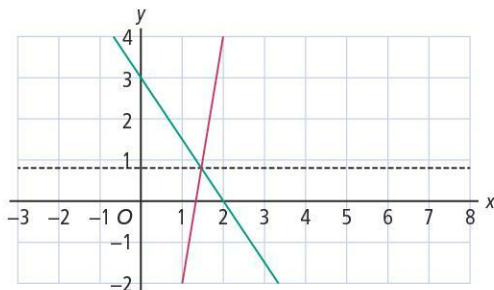
De richtingscoëfficiënt van n is $-1\frac{2}{3}$. De hoek is $\tan^{-1}\left(1\frac{2}{3}\right) \approx 59^\circ$.

- 22 a** Dat zijn de lijnen met vergelijking $y = x$ en $y = -x$.
- b** De richtingscoëfficiënten van deze lijnen zijn $\tan(30^\circ) \approx 0,577$ en $-\tan(30^\circ) \approx -0,577$.
De vergelijkingen zijn $y \approx 0,577x$ en $y \approx -0,577x$.
- c** Dat is de x -as, dus de vergelijking is $y = 0$.
- 23 a** De richtingscoëfficiënt van k is $\frac{1}{2}$. De hoek is $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26,565...^\circ$
- b** De richtingscoëfficiënt van l is -1 . De hoek is $\tan^{-1}(1) = 45^\circ$.
- c** $\angle(k, l) = 26,565... + 45 \approx 72^\circ$
- 24 a** Uit $x - 3y = 3$ volgt $-3y = -x + 3$ en $y = \frac{1}{3}x - 1$
 $\angle(p, r) = \angle(p, x\text{-as}) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 18,434...^\circ$
Uit $2x - 3y = 9$ volgt $-3y = -2x + 9$ en $y = \frac{2}{3}x - 3$
 $\angle(q, r) = \angle(q, x\text{-as}) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33,690...^\circ$
- b** $\angle(p, q) = 33,690... - 18,434... \approx 15^\circ$

25 ab

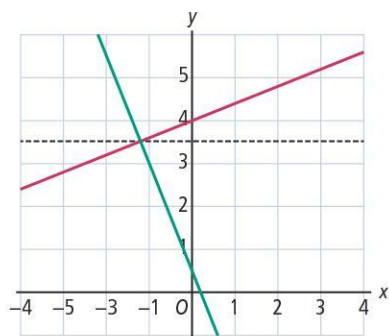


- c** Uit $y + 1 = x$ volgt $y = x - 1$.
 $\angle(m, k) = \angle(m, x\text{-as}) = \tan^{-1}(1) = 45^\circ$
Uit $4y + x = 16$ volgt $4y = -x + 16$ en $y = -\frac{1}{4}x + 4$.
 $\angle(n, k) = \angle(n, x\text{-as}) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 14,036...^\circ$
- d** $\angle(m, n) = 45 + 14,036... \approx 59^\circ$
- 26 a** Herleid $3x - \frac{1}{2}y = 4$ tot $-\frac{1}{2}y = -3x + 4$ en tot $y = 6x - 8$.
Herleid $2y + 3x = 6$ tot $2y = -3x + 6$ en tot $y = -1\frac{1}{2}x + 3$.



De richtingscoëfficiënten zijn 6 en $-1\frac{1}{2}$
De hoeken zijn $\tan^{-1}(6) = 80,537...^\circ$ en $\tan^{-1}\left(1\frac{1}{2}\right) = 56,309...^\circ$
De hoek tussen de lijnen is $180^\circ - (80,537... + 56,309...) \approx 43^\circ$.

- b** Herleid $2y + 5x = 1$ tot $2y = -5x + 1$ en tot $y = -2\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$



De richtingscoëfficiënten zijn $\frac{2}{5}$ en $-2\frac{1}{2}$

De hoeken zijn $\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = 21,801\dots^\circ$ en $\tan^{-1}\left(2\frac{1}{2}\right) = 68,198\dots^\circ$

De hoek tussen de lijnen is $21,801\dots + 68,198\dots = 90^\circ$.

- 27 a** De richtingscoëfficiënt van AB is $\frac{-5 - -7}{5 - -1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ en de richtingscoëfficiënt van BC is $\frac{1 - -5}{7 - 5} = \frac{6}{2} = 3$.

De hoeken met de x -as zijn $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 18,434\dots^\circ$ en $\tan^{-1}(3) = 71,565\dots^\circ$

De scherpe hoek tussen de lijn AB en BC is $71,565\dots - 18,434\dots$

$= 53,130\dots^\circ$, dus $\angle B \approx 180 - 53,130\dots \approx 127^\circ$.

- b** De richtingscoëfficiënt van DA is $\frac{5 - -7}{-5 - -1} = \frac{12}{-4} = -3$ en de

richtingscoëfficiënt van CD is $\frac{5 - 1}{-5 - 7} = \frac{4}{-12} = -\frac{1}{3}$

De hoeken met de x -as zijn $\tan^{-1}(3) = 71,565\dots^\circ$ en $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 18,434\dots^\circ$

$\angle D = 71,565\dots - 18,434\dots \approx 53^\circ$.

- c** De richtingscoëfficiënt van AC is $\frac{1 - -7}{7 - -1} = \frac{8}{8} = 1$ en de richtingscoëfficiënt van DC is $-\frac{1}{3}$

De hoeken met de x -as zijn $\tan^{-1}(1) = 45^\circ$ en $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 18,434\dots^\circ$

De hoek tussen AC en DC is $45 + 18,434\dots \approx 63^\circ$.

- 021 a** Herleid $3x - 5y = 5$ tot $-5y = -3x + 5$ en tot $y = \frac{3}{5}x - 1$.

De richtingscoëfficiënt van l is $\frac{3}{5}$

- b** De verticale rechthoekszijde is $\frac{3}{5}$

c $\tan(\alpha) = \frac{\frac{3}{5}}{1} = \frac{3}{5}$

d $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 31^\circ$

- e** Herleid $2y = -5x + 4$ tot $y = -2\frac{1}{2}x + 2$. De richtingscoëfficiënt is $-2\frac{1}{2}$
 $\tan(\alpha) = 2\frac{1}{2}$, dus de hoek van m met de x -as is $\alpha = \tan^{-1}\left(2\frac{1}{2}\right) \approx 68^\circ$.

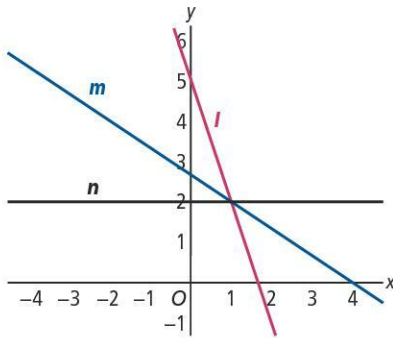
Herleid $\frac{1}{4}x - \frac{1}{6}y = 1$ tot $-\frac{1}{6}y = -\frac{1}{4}x + 1$ en tot $y = 1\frac{1}{2}x - 6$.

De richtingscoëfficiënt van n is $1\frac{1}{2}$

$\tan(\alpha) = 1\frac{1}{2}$ dus de hoek van n met de x -as is $\alpha = \tan^{-1}\left(1\frac{1}{2}\right) \approx 56^\circ$.

026 a $2x + 3y = 8$ geeft $3y = -2x + 8$ dus $y = -\frac{2}{3}x + 2\frac{2}{3}$

b



c De richtingscoëfficiënt van l is -3

d $\angle(l, n) = \tan^{-1}(3) = 71,565\dots \approx 72^\circ$

e Zie opdracht a, de richtingscoëfficiënt van m is $-\frac{2}{3}$

f $\angle(m, n) = \tan^{-1}(\frac{2}{3}) = 33,690\dots \approx 34^\circ$

g De hoek tussen l en m is $71,565\dots - 33,690\dots \approx 38^\circ$.

U4 De richtingscoëfficiënt van l is -1 , dus de vergelijking van l is $y = -x + 10$.

De richtingscoëfficiënt van m is $\tan(60^\circ) \approx 1,73$

dus de vergelijking van m is $y = 1,73x$

$$1,73x = -x + 10$$

$$2,73x = 10$$

$$x = \frac{10}{2,73} \approx 3,7 \text{ en } y \approx -3,7 + 10 = 6,3$$

Het snijpunt is $S(3,7; 6,3)$

5.4 Loodrecht

intro Het getekende lijnstuk gaat per 4 naar rechts één omhoog.

De twee zijden die daar loodrecht op staan gaan per één naar rechts 4 omlaag.

De vierde zijde is weer evenwijdig aan de eerste.

28 a $m_1 = \frac{-4}{3} = -1\frac{1}{3}$

b $m_2 = \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

c $m_1 \cdot m_2 = \frac{-4}{3} \cdot \frac{3}{4} = -\frac{12}{12} = -1$

29 a Herleid $3y - 2x + 6 = 0$ tot $3y = 2x - 6$ en tot $y = \frac{2}{3}x - 2$

Herleid $2y + 3x - 9 = 0$ tot $2y = -3x + 9$ en tot $y = -1\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$

De richtingscoëfficiënten zijn $\frac{2}{3}$ en $-1\frac{1}{2}$

Het product van de richtingscoëfficiënten is $\frac{2}{3} \cdot -1\frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot -\frac{3}{2} = -1$.

b In $\triangle ADE$ geldt $\tan(\beta) = \frac{3}{2}$ en in $\triangle ABC$ geldt $\tan(\angle ACB) = \frac{3}{2}$
dus $\angle ACB = \beta$

c $\angle ABC = \angle ADE = 90^\circ$ en $\angle ACB = \angle DAE = \beta$, dus de driehoeken ABC en EDA zijn gelijkvormig.

d De drie hoeken van $\triangle ABC$ zijn samen 180° en $\angle ACB = \beta$, dus $\alpha + \beta = 90^\circ$.

e De hoek tussen l en m is gelijk aan $\alpha + \beta$ en in opdracht d heb je gezien dat $\alpha + \beta = 90^\circ$, dus snijden l en m elkaar loodrecht.

- 30** De richtingscoëfficiënt van k is -2 .

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{9} = 1 \text{ herleid je tot } \frac{y}{9} = -\frac{x}{3} + 1 \text{ en } y = -3x + 9.$$

De richtingscoëfficiënt van l is -3 .

$$x = \frac{1}{2}y - 4 \text{ herleid je tot } \frac{1}{2}y = x + 4 \text{ en } y = 2x + 8.$$

De richtingscoëfficiënt van m is 2 .

$$x - 2y = 5 \text{ herleid je tot } -2y = -x + 5 \text{ en } y = \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$$

De richtingscoëfficiënt van n is $\frac{1}{2}$

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1 \text{ herleid je tot } \frac{y}{2} = -\frac{x}{4} + 1 \text{ en } y = -\frac{1}{2}x + 2.$$

De richtingscoëfficiënt van p is $-\frac{1}{2}$

$$-3x + y = -5 \text{ herleid je tot } y = 3x - 5.$$

De richtingscoëfficiënt van q is 3 .

Omdat $-2 \cdot \frac{1}{2} = -1$ en $2 \cdot -\frac{1}{2} = -1$ geldt $k \perp n$ en $m \perp p$.

- 31 a** Herleid $2y - x = 1$ tot $2y = x + 1$ en tot $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
De richtingscoëfficiënt van l is $\frac{1}{2}$. Omdat $-2 \cdot \frac{1}{2} = -1$ staan de lijnen met vergelijking $y = -2x + b$ loodrecht op l .
- b** $P(5, -4)$ invullen in $y = -2x + b$ geeft $-4 = -2 \cdot 5 + b$, dus $b = 6$.
- c** Een vergelijking van de loodlijn door P op l is $y = -2x + 6$.

- 32 a** Herleid $2x - 3y = 5$ tot $-3y = -2x + 5$ en tot $y = \frac{2}{3}x - 1\frac{2}{3}$
De richtingscoëfficiënt van k is $\frac{2}{3}$, dus de richtingscoëfficiënt van de loodlijn is $-\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$. Een vergelijking van de loodlijn is $y = -1\frac{1}{2}x + b$.
 $P(-2, -1)$ invullen geeft $-1 = -1\frac{1}{2} \cdot -2 + b$ dus $b = -4$.
Een vergelijking van l is $y = -1\frac{1}{2}x - 4$.
- b** Herleid $6x - 5y = 15$ tot $-5y = -6x + 15$ en tot $y = 1\frac{1}{5}x - 3$.
De richtingscoëfficiënt van m is $1\frac{1}{5} = \frac{6}{5}$ dus de richtingscoëfficiënt van de loodlijn is $-\frac{5}{6}$. Een vergelijking van de loodlijn is $y = -\frac{5}{6}x + b$.
 $Q(-1, 3)$ invullen geeft $3 = -\frac{5}{6} \cdot -1 + b$ dus $b = 2\frac{1}{6}$
Een vergelijking van n is $y = -\frac{5}{6}x + 2\frac{1}{6}$

- 33 a** Herleid $px + qy = 3$ tot $qy = -px + 3$ en tot $y = -\frac{p}{q}x + \frac{3}{q}$
De richtingscoëfficiënt van m is $-\frac{p}{q}$
- b** De richtingscoëfficiënt van l is $-\frac{3}{4}$
Als $m \perp l$ moet gelden $-\frac{p}{q} \cdot -\frac{3}{4} = -1$ dus $\frac{3p}{4q} = -1$ ofwel $3p = -4q$
- c** $P(4, 1)$ invullen geeft $p \cdot 4 + q \cdot 1 = 3$ dus $4p + q = 3$.
- d** Uit de vergelijking van opdracht c volgt $q = -4p + 3$ en dit invullen in $3p = -4q$ geeft $3p = -4(-4p + 3)$ ofwel $3p = 16p - 12$.
 $-13p = -12$ dus $p = \frac{12}{13}$
 $3p = -4q$ dus $\frac{36}{13} = -4q$ waaruit volgt $q = -\frac{9}{13}$
De vergelijking van m is $\frac{12}{13}x - \frac{9}{13}y = 3$.

- 34 a** De richtingscoëfficiënt van AB is $\frac{7 - -5}{-4 - 2} = \frac{12}{-6} = -2$, dus een vergelijking is $y = -2x + b$.
 $A(2, -5)$ invullen geeft $-5 = -2 \cdot 2 + b$, dus $b = -1$.
Een vergelijking van AB is $y = -2x - 1$.
- b** De coördinaten van M zijn $x = \frac{1}{2}(2 + -4) = -1$ en $y = \frac{1}{2}(-5 + 7) = 1$ dus $M(-1, 1)$.

- c De richtingscoëfficiënt van k is $\frac{1}{2}$, omdat $-2 \cdot \frac{1}{2} = -1$.

Een vergelijking van k is $y = \frac{1}{2}x + b$.

$M(-1, 1)$ invullen geeft $1 = \frac{1}{2} \cdot -1 + b$, dus $b = 1\frac{1}{2}$

Een vergelijking van k is $y = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$

- 35** De richtingscoëfficiënt van AB is $\frac{-2-4}{2-4} = \frac{-6}{-2} = 3$, dus van de middelloodlijn

is de richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{3}$ en een vergelijking is van de vorm $y = -\frac{1}{3}x + b$.

Het midden van AB is $(3, 1)$ en dit invullen geeft $1 = -\frac{1}{3} \cdot 3 + b$, dus $b = 2$.

Een vergelijking van de middelloodlijn van AB is $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

De richtingscoëfficiënt van AC is $\frac{4-4}{-12-4} = \frac{0}{-16} = 0$, dus de middelloodlijn

van AC is een verticale lijn. Het midden van AC is $(-4, 4)$.

Een vergelijking van de middelloodlijn van AC is $x = -4$.

- 36 a** De richtingscoëfficiënt van BC is $\frac{-5-1}{-3-5} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4}$ dus een vergelijking is

$y = \frac{3}{4}x + b$. Invullen van $(5, -1)$ geeft $-1 = \frac{3}{4} \cdot 5 + b$, dus $b = -3\frac{1}{4}$

Een vergelijking van BC is $y = \frac{3}{4}x - 3\frac{1}{4}$

- b De richtingscoëfficiënt van AD is -2 , want $-2 \cdot \frac{1}{2} = -1$.

Een vergelijking van AD is $y = -2x + b$.

Invullen van $A(1, 3)$ geeft $3 = -2 \cdot 1 + b$, dus $b = 5$.

Een vergelijking van AD is $y = -2x + 5$.

- c Het midden van AB is $F(3, 1)$ en de richtingscoëfficiënt van AB is $\frac{-4}{4} = -1$.

Een vergelijking van de middelloodlijn is dus $y = x + b$ en invullen van $F(3, 1)$ geeft $1 = 3 + b$, dus $b = -2$.

Een vergelijking van middelloodlijn van AB is $y = x - 2$.

- d Invullen van de coördinaten van $C(-3, -5)$ geeft $-5 = -3 - 2$ en dit klopt, dus C ligt op de middelloodlijn van AB .

- e $\triangle ABC$ is gelijkbenig met $AC = BC$.

- 032 a** $2x + 3y = 8$, dus $3y = -2x + 8$ ofwel $y = -\frac{2}{3}x + 2\frac{2}{3}$

Daaruit volgt $rc_l = -\frac{2}{3}$

- b $l \perp m$ dus $rc_l \cdot rc_m = -1$

dus $rc_m = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

- c $y = 1\frac{1}{2}x + b$

- d $P(6, 4)$ invullen geeft $4 = 1\frac{1}{2} \cdot 6 + b$ dus $4 = 9 + b$ en $b = -5$.

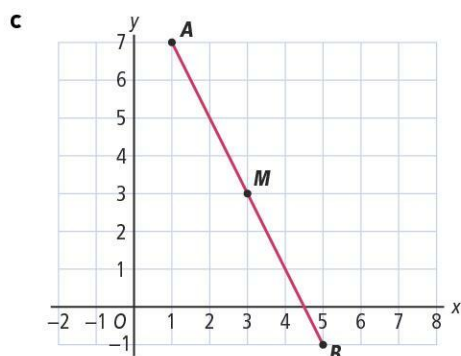
- e $y = 1\frac{1}{2}x - 5$

- 034 a** De richtingscoëfficiënt van AB is $\frac{-1-7}{5-1} = \frac{-8}{4} = -2$, dus een vergelijking is

$y = -2x + b$. $A(1, 7)$ invullen geeft $7 = -2 \cdot 1 + b$ dus $b = 9$.

Een vergelijking van AB is $y = -2x + 9$.

- b door het gemiddelde van de x -coördinaten en van de y -coördinaten van de punten A en B te berekenen



Het midden van AB is $M((3, 3))$.

- d De richtingscoëfficiënt van k is $\frac{1}{2}$, want $\frac{1}{2} \cdot -2 = -1$.

Een vergelijking van k is $y = \frac{1}{2}x + b$.

Invullen van $M(3, 3)$ geeft $3 = \frac{1}{2} \cdot 3 + b$ dus $b = 1\frac{1}{2}$ en $k: y = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$

- U5 a Herleid de vergelijking van k tot $y = 3x - 1$.

De richtingscoëfficiënt van m is dus $-\frac{1}{3}$ en een vergelijking is $y = -\frac{1}{3}x + b$.

$S(1, 2)$ invullen geeft $2 = -\frac{1}{3} \cdot 1 + b$, dus $b = 2\frac{1}{3}$

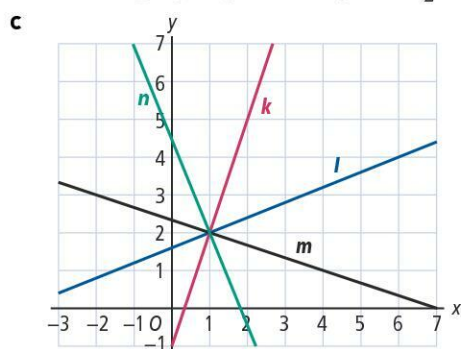
Een vergelijking van m is $y = -\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$

- b Herleid de vergelijking van l tot $-5y = -2x - 8$ en tot $y = \frac{2}{5}x + 1\frac{3}{5}$

De richtingscoëfficiënt van n is dus $-\frac{5}{2} = -2\frac{1}{2}$ en een vergelijking is

$y = -2\frac{1}{2}x + b$. $S(1, 2)$ invullen geeft $2 = -2\frac{1}{2} \cdot 1 + b$, dus $b = 4\frac{1}{2}$

Een vergelijking van n is $y = -2\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$



- d De lijnen m en n zijn ontstaan door de lijnen k en l te draaien over 90° om het snijpunt. Daardoor is de hoek tussen m en n gelijk aan de hoek tussen k en l .

- U6 a De coördinaten van A en B zijn $(-5, 0)$ en $(5, 0)$. De richtingscoëfficiënt van

AP is $\frac{4}{2} = 2$ en de richtingscoëfficiënt van BP is $\frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$

Het product van deze richtingscoëfficiënten is -1 , dus $AP \perp BP$.

- b Als $X(p, q)$ op de cirkel ligt, geldt $OX = \sqrt{p^2 + q^2}$

De straal is 5, dus $\sqrt{p^2 + q^2} = 5$ ofwel $p^2 + q^2 = 25$ ofwel $q = \sqrt{25 - p^2}$

De richtingscoëfficiënt van AX is $\frac{q}{p - (-5)} = \frac{q}{p + 5} = \frac{\sqrt{25 - p^2}}{p + 5}$

De richtingscoëfficiënt van BX is $\frac{-q}{5 - p} = \frac{-\sqrt{25 - p^2}}{5 - p}$

- c Het product van deze richtingscoëfficiënten is $\frac{\sqrt{25 - p^2}}{p + 5} \cdot \frac{-\sqrt{25 - p^2}}{5 - p}$

Het product wordt $\frac{-(25 - p^2)}{25 - p^2} = -1$ en daaruit volgt $AX \perp BX$.

5.5 Afstanden

intro Verbind de drie dorpen met lijnstukken. Teken de loodlijnen door de middens van de drie lijnstukken. Deze lijnen gaan door één punt en dat is de beste plaats voor de mast.

- 37 a** $AB^2 = 5^2 + 2^2$, dus $AB^2 = 29$ en $AB = \sqrt{29}$
b $PQ^2 = 5^2 + 4^2$, dus $PQ^2 = 41$ en $PQ = \sqrt{41}$
c $ST^2 = 12^2 + 5^2$, dus $ST^2 = 169$ en $ST = \sqrt{169} = 13$
- 38 a** $AB = \sqrt{(5-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$
 $AC = \sqrt{(2-1)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$
 $BC = \sqrt{(2-5)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
b $AB^2 + AC^2 = 20 + 5 = 25$ en $BC^2 = 25$, dus $AB^2 + AC^2 = BC^2$
en daarom is $\triangle ABC$ een rechthoekige driehoek.
c hoek A
- 39 a** Herleid de vergelijking van l tot $2y = -x + 10$ en tot $y = -\frac{1}{2}x + 5$.
Een vergelijking van de loodlijn is $y = 2x + b$.
 $P(3, 1)$ invullen geeft $1 = 2 \cdot 3 + b$, dus $b = -5$.
Een vergelijking van de loodlijn is $y = 2x - 5$.
b $2x - 5 = -\frac{1}{2}x + 5$
 $2\frac{1}{2}x = 10$
 $x = 4$ en $y = 2 \cdot 4 - 5 = 3$ dus $Q(4, 3)$
c $d(P, l) = PQ = \sqrt{(4-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$
- 40 a** $\frac{1}{4}x - \frac{1}{3}y = -1$ kun je herleiden tot $-\frac{1}{3}y = -\frac{1}{4}x - 1$ dus $y = \frac{3}{4}x + 3$.
Een vergelijking van een lijn door P loodrecht op l is $y = -\frac{4}{3}x + b$.
 $P(1, -2\frac{1}{2})$ invullen geeft $-2\frac{1}{2} = -\frac{4}{3} \cdot 1 + b$ dus $b = -1\frac{1}{6}$ en een vergelijking van de loodlijn is $y = -\frac{4}{3}x - 1\frac{1}{6}$.
Het snijpunt van deze loodlijn met l berekenen:
 $\frac{3}{4}x + 3 = -\frac{4}{3}x - 1\frac{1}{6}$ (vermenigvuldigen met 12)
 $9x + 36 = -16x - 14$
 $25x = -50$ dus $x = -2$
 $y = \frac{3}{4} \cdot -2 + 3 = 1\frac{1}{2}$, het snijpunt is $S(-2, 1\frac{1}{2})$.
 $d(P, l) = PS = \sqrt{(-2-1)^2 + (1\frac{1}{2} - -2\frac{1}{2})^2} = \sqrt{25} = 5$
b Herleid $2x - 3y = 3$ tot $-3y = -2x + 3$ en $y = \frac{2}{3}x - 1$.
Een vergelijking van een lijn door Q loodrecht op m is $y = -1\frac{1}{2}x + b$.
 $Q(-2, 2)$ invullen geeft $2 = -1\frac{1}{2} \cdot -2 + b$ dus $b = -1$ en een vergelijking van de loodlijn is $y = -1\frac{1}{2}x - 1$.
Het snijpunt van deze loodlijn met m berekenen:
 $\frac{2}{3}x - 1 = -1\frac{1}{2}x - 1$
 $2\frac{1}{6}x = 0$ dus $x = 0$ en $y = \frac{2}{3} \cdot 0 - 1 = -1$, het snijpunt is $S(0, -1)$.
 $d(Q, m) = QS = \sqrt{(0 - -2)^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{13}$
- 41 a** Herleid $2x - y = -3$ tot $-y = -2x - 3$ en tot $y = 2x + 3$.
Beide lijnen hebben richtingscoëfficiënt 2, dus ze zijn evenwijdig.
b Invullen van $P(3, -1)$ in $y = 2x - 7$ geeft $-1 = 2 \cdot 3 - 7$ en dat klopt, dus ligt $P(3, -1)$ op l .

- c Je kunt de vergelijking van m schrijven als $y = 2x + 3$.
 De richtingscoëfficiënt van een loodlijn op m is $-\frac{1}{2}$ dus een vergelijking is $y = -\frac{1}{2}x + b$.
 $P(3, -1)$ invullen geeft $-1 = -\frac{1}{2} \cdot 3 + b$ dus $b = \frac{1}{2}$ en een vergelijking van de loodlijn is $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.
 Het snijpunt van deze loodlijn met m berekenen:
 $2x + 3 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
 $2\frac{1}{2}x = -2\frac{1}{2}$
 $x = -1$ en $y = 2 \cdot -1 + 3 = 1$, het snijpunt is $S(-1, 1)$.
 $d(P, m) = PS = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (1 - -1)^2} = \sqrt{20}$
- d Nee, je vindt altijd dezelfde afstand omdat de afstand tussen twee lijnen die evenwijdig zijn overal gelijk is.

- 42 a** De twee lijnen hebben dezelfde richtingscoëfficiënt, dus zijn evenwijdig.
 Kies een punt, bijvoorbeeld $(0, -3)$, op de eerste lijn.
 Een loodlijn door dit punt heeft als vergelijking $y = -2x - 3$.
 Het snijpunt van deze loodlijn met de andere lijn berekenen:
 $\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2} = -2x - 3$
 $2\frac{1}{2}x = -7\frac{1}{2}$ dus $x = -3$ en $y = -2 \cdot -3 - 3 = 3$, het snijpunt is $(-3, 3)$.
 De afstand tussen de lijnen is $\sqrt{(-3 - 0)^2 + (3 - -3)^2} = \sqrt{45}$
- b** Uit $2x - 8y = 21$ volgt $-8y = -2x + 21$ of $y = \frac{1}{4}x - 2\frac{5}{8}$
 De twee lijnen hebben dezelfde richtingscoëfficiënt, dus zijn evenwijdig. Kies een punt, bijvoorbeeld $(2, 0)$, op de tweede lijn.
 Een loodlijn door dit punt heeft de vergelijking $y = -4x + b$.
 Invullen van $(2, 0)$ geeft $0 = -4 \cdot 2 + b$ dus $b = 8$ en een vergelijking van de loodlijn is $y = -4x + 8$.
 Het snijpunt van deze loodlijn met de eerste lijn berekenen:
 $\frac{1}{4}x - 2\frac{5}{8} = -4x + 8$
 $4\frac{1}{4}x = 10\frac{5}{8}$ (vermenigvuldig met 8)
 $34x = 85$, dus $x = 2\frac{1}{2}$ en $y = -4 \cdot 2\frac{1}{2} + 8 = -2$, het snijpunt is $(2\frac{1}{2}, -2)$.
 De afstand tussen de lijnen is $\sqrt{(2\frac{1}{2} - 2)^2 + (-2 - 0)^2} = \sqrt{4\frac{1}{4}}$
- c** Uit $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$ volgt $\frac{y}{5} = -\frac{x}{2} + 1$ of $y = -2\frac{1}{2}x + 5$
 De twee lijnen hebben dezelfde vergelijking, de lijnen liggen op elkaar, dus de gevraagde afstand is 0.

- 43 a** Het midden van AB is $(2, 2)$ en de richtingscoëfficiënt is $\frac{1 - 3}{6 - -2} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$
 De middelloodlijn k heeft een vergelijking $y = 4x + b$.
 Invullen van $(2, 2)$ geeft $2 = 4 \cdot 2 + b$, dus $b = -6$.
 De vergelijking van k is $y = 4x - 6$.
- b** $P(4, 10)$ invullen geeft $10 = 4 \cdot 4 - 6$ of $10 = 16 - 6$, klopt dus P ligt op k .
- c** $PA = \sqrt{(4 - -2)^2 + (10 - 3)^2} = \sqrt{36 + 49} = \sqrt{85}$
 $PB = \sqrt{(4 - 6)^2 + (10 - 1)^2} = \sqrt{4 + 81} = \sqrt{85}$ dus $PA = PB$

- 44 a** De richtingscoëfficiënt van AB is $-\frac{1}{5}$ en het midden is $(1, 2)$.
 Een vergelijking van l is $y = 5x + b$.
 $(1, 2)$ invullen geeft $2 = 5 \cdot 1 + b$ dus $b = -3$.
 Een vergelijking van l is $y = 5x - 3$.

- b** De richtingscoëfficiënt van BC is 3 en het midden is $(5, -2)$.
 Een vergelijking van k is $y = -\frac{1}{3}x + b$.
 $(5, -2)$ invullen geeft $-2 = -\frac{1}{3} \cdot 5 + b$ dus $b = -\frac{1}{3}$.
 Een vergelijking van k is $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.
- c** $5x - 3 = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$
 $5\frac{1}{3}x = 2\frac{2}{3}$
 $x = \frac{1}{2}$ en $y = 5 \cdot \frac{1}{2} - 3 = -\frac{1}{2}$ dus de coördinaten van M zijn $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.
- d** De richtingscoëfficiënt van AC is -1 en het midden is $(0, -1)$.
 De middelloodlijn van AC heeft als vergelijking $y = x - 1$.
 $M(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ invullen geeft $-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1$, dit klopt, dus de middelloodlijn van AC gaat ook door punt M .
- e** $AM = \sqrt{(\frac{1}{2} - -4)^2 + (-\frac{1}{2} - 3)^2} = \sqrt{32\frac{1}{2}}$
 $BM = \sqrt{(\frac{1}{2} - 6)^2 + (-\frac{1}{2} - 1)^2} = \sqrt{32\frac{1}{2}}$
 $CM = \sqrt{(\frac{1}{2} - 4)^2 + (-\frac{1}{2} - -5)^2} = \sqrt{32\frac{1}{2}}$
- f** Omdat de afstand van M tot elk hoekpunt van driehoek ABC hetzelfde is, kun je een cirkel tekenen met middelpunt M die door A , B en C gaat.

- 040 a** Voor de coördinaten van Q geldt $x = 6$ en $y = -\frac{1}{3} \cdot 6 + 2\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$
 $PQ = 7 - \frac{1}{3} = 6\frac{2}{3}$
- b** omdat PQ niet loodrecht op l staat
- c** met het lijnstuk PS waarbij S het snijpunt is van l met de loodlijn door P op l
- d** De richtingscoëfficiënt van de loodlijn is 3, want $3 \cdot -\frac{1}{3} = -1$.
 Een vergelijking van de loodlijn is $y = 3x + b$.
 $P(6, 7)$ invullen geeft $7 = 3 \cdot 6 + b$ dus $b = -11$.
 Een vergelijking van de loodlijn door P op l is $y = 3x - 11$.
- e** $-\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3} = 3x - 11$
 $-3\frac{1}{3} = -13\frac{1}{3}$
 $x = 4$
 $y = 3 \cdot 4 - 11 = 1$, dus $S(4, 1)$
- f** $PS = \sqrt{(4 - 6)^2 + (1 - 7)^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}$
- g** De afstand van P tot l is de afstand van P tot S en is dus $\sqrt{40}$.
- h** Herleid $x - 4y = -16$ tot $-4y = -x - 16$ en tot $y = \frac{1}{4}x + 4$.
 De richtingscoëfficiënt van de loodlijn op m is -4 , want $-4 \cdot \frac{1}{4} = -1$.
 Een vergelijking van de loodlijn is $y = -4x + b$.
 $R(6, -3)$ invullen geeft $-3 = -4 \cdot 6 + b$ dus $b = 21$.
 Een vergelijking van de loodlijn is $y = -4x + 21$.
 Het snijpunt van deze loodlijn met lijn m berekenen:
 $\frac{1}{4}x + 4 = -4x + 21$
 $4\frac{1}{4}x = 17$
 $x = 4$ en $y = -4 \cdot 4 + 21 = 5$, het snijpunt is $S(4, 5)$.
 De afstand is de afstand tussen R en S en is $\sqrt{(4 - 6)^2 + (5 - -3)^2} = \sqrt{68}$

- 042 a** Uit $3x + 2y = -28$ volgt $2y = -3x - 28$ en $y = -1\frac{1}{2}x - 14$.
 De richtingscoëfficiënten van l en m zijn gelijk, dus de lijnen zijn evenwijdig.
- b** Invullen van $P(2, 9)$ geeft $9 = -\frac{3}{2} \cdot 2 + 12 = -3 + 12$. Dit klopt, dus P ligt op m .

- c** Een loodlijn door P op l heeft de vergelijking $y = \frac{2}{3}x + b$.
 Invullen van $P(2, 9)$ geeft $9 = \frac{2}{3} \cdot 2 + b$, dus $b = 7\frac{2}{3}$.
 Een vergelijking van de loodlijn door P op l is $y = \frac{2}{3}x + 7\frac{2}{3}$.
 Het snijpunt van deze loodlijn met lijn l berekenen: $-1\frac{1}{2}x - 14 = \frac{2}{3}x + 7\frac{2}{3}$
 $-2\frac{1}{6}x = 21\frac{2}{3}$ (vermenigvuldigen met -6)
 $13x = -130$, dus $x = -10$ en $y = -1\frac{1}{2} \cdot -10 - 14 = 1$, het snijpunt is $S(-10, 1)$
 $d(P, l) = PS = \sqrt{(-10 - 2)^2 + (1 - 9)^2} = \sqrt{208}$
- d** $d(l, m) = d(P, l) = PS = \sqrt{208}$

- U7 a** De oppervlakte van $\triangle OAB$ is $\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2}ab$
- b** $AB^2 = a^2 + b^2$ dus $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$
- c** Als AB de basis is, dan is d de hoogte uit hoekpunt O .
 De oppervlakte van $\triangle OAB$ is dan $\frac{1}{2} \cdot \text{hoogte} \cdot \text{basis} = \frac{1}{2} \cdot d \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$
- d** $\frac{1}{2}d \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2}ab$
 $d \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = ab$ dus $d = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

5.6 Gemengde opdrachten

- 45 a** $\frac{x}{3} + \frac{y}{-5} = 1$
 Door vermenigvuldigen met 15 vind je $5x - 3y = 15$.
 Uit $5x - 3y = 15$ volgt $-3y = -5x + 15$ dus $y = 1\frac{2}{3}x - 5$.
- b** Invullen van $(-3, 0)$ bij $y = \frac{2}{3}x + b$ geeft $0 = \frac{2}{3} \cdot -3 + b$, dus $b = 2$.
 De vergelijking is $y = \frac{2}{3}x + 2$.
 De lijn gaat door $(0, 2)$ en $(-3, 0)$, dus $\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1$.
 Door vermenigvuldigen met -6 vind je $2x - 3y = -6$.
- c** De richtingscoëfficiënt is $\frac{-6 - 3}{-5 - 1} = 1\frac{1}{2}$, dus een vergelijking is $y = 1\frac{1}{2}x + b$.
 $(1, 3)$ invullen geeft $3 = 1\frac{1}{2} \cdot 1 + b$, dus $b = 1\frac{1}{2}$.
 De vergelijking is $y = 1\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$.
 $1\frac{1}{2}x - y = -1\frac{1}{2}$ of $3x - 2y = -3$
 De lijn gaat door $(0, 1\frac{1}{2})$ en $(-1, 0)$, dus de derde vorm is $\frac{x}{-1} + \frac{y}{1\frac{1}{2}} = 1$.
- d** Uit $4x + 5y = 6$ volgt $5y = -4x + 6$ of $y = -\frac{4}{5}x + 1\frac{1}{5}$.
 De gevraagde lijn heeft vergelijking $y = -\frac{4}{5}x + 2\frac{1}{2}$.
 Hieruit volgt $\frac{4}{5}x + y = 2\frac{1}{2}$, dus $4x + 5y = 12\frac{1}{2}$.
 Door te delen door $12\frac{1}{2}$ vind je $\frac{x}{3\frac{1}{8}} + \frac{y}{2\frac{1}{2}} = 1$.
- 46 a** $AB = \sqrt{(1 - -3)^2 + (-2 - -1)^2} = \sqrt{17}$
 $BC = \sqrt{(6 - 1)^2 + (8 - -2)^2} = \sqrt{125}$
 $AC = \sqrt{(6 - -3)^2 + (8 - -1)^2} = \sqrt{162}$

- b** De richtingscoëfficiënten van de zijden zijn:

$$AB: \frac{-2 - -1}{1 - -3} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}, BC: \frac{8 - -2}{6 - 1} = \frac{10}{5} = 2 \text{ en } AC: \frac{8 - -1}{6 - -3} = \frac{9}{9} = 1$$

$$\angle(AB, x - as) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 14,036...^\circ, \angle(BC, x - as) = \tan^{-1}(2) = 63,434...^\circ$$

$$\angle(AC, x - as) = \tan^{-1}(1) = 45^\circ$$

$$\angle A = 45 + 14,036... \approx 59^\circ, \angle C = 63,434... - 45 \approx 18^\circ \text{ en}$$

$$\angle B = 180 - 59 - 18 = 103^\circ$$

- c** De richtingscoëfficiënt van AC is 1, dus een vergelijking van de lijn AC is $y = x + b$.

$$C(6, 8) \text{ invullen geeft } 8 = 6 + b \text{ dus } b = 2 \text{ en een vergelijking is } y = x + 2.$$

$$\text{De loodlijn uit } B \text{ heeft een vergelijking } y = -x + b.$$

$$B(1, -2) \text{ invullen geeft } -2 = -1 + b \text{ dus } b = -1.$$

$$\text{Een vergelijking van de loodlijn is } y = -x - 1.$$

$$\text{Deze loodlijn snijden met } AC: x + 2 = -x - 1$$

$$2x = -3 \text{ dus } x = -1\frac{1}{2} \text{ en } y = -1\frac{1}{2} + 2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Het snijpunt is } S\left(-1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

$$d(B, AC) = BS = \sqrt{\left(-1\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - -2\right)^2} = \sqrt{12\frac{1}{2}}$$

- 47 a** Een vergelijking van k is $y = \frac{1}{2}x + 1$.

$$\text{De richtingscoëfficiënt van } l \text{ en van } m \text{ is } -\frac{2}{3}$$

$$\text{Een vergelijking van } l \text{ is } y = -\frac{2}{3}x + 4.$$

$$m \text{ ligt twee eenheden hoger dus een vergelijking van } m \text{ is } y = -\frac{2}{3}x + 6.$$

- b** $\angle(k, x - as) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26,565...^\circ$

$$\angle(l, x - as) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33,690...^\circ$$

$$\angle(k, l) = 33,690... + 26,565... \approx 60^\circ$$

- c** De lijnen l en m zijn evenwijdig, dus kies willekeurig een punt op lijn l , bijvoorbeeld punt $(0, 4)$.

$$\text{Lijn } l \text{ heeft richtingscoëfficiënt } -\frac{2}{3} \text{ dus een loodlijn heeft richtingscoëfficiënt } 1\frac{1}{2}$$

$$\text{De loodlijn op } l \text{ door } (0, 4) \text{ heeft als vergelijking } y = 1\frac{1}{2}x + 4.$$

$$\text{Bereken het snijpunt van deze loodlijn met } m:$$

$$1\frac{1}{2}x + 4 = -\frac{2}{3}x + 6$$

$$2\frac{1}{6}x = 2$$

$$x = \frac{12}{13} \text{ en } y = 1\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{13} + 4 = 5\frac{5}{13}$$

$$\text{De afstand tussen } (0, 4) \text{ en } \left(\frac{12}{13}, 5\frac{5}{13}\right) \text{ is } d(l, m) = \sqrt{\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(5\frac{5}{13} - 4\right)^2} \approx 1,7$$

- d** Lijn n ligt aan de andere kant van l op dezelfde afstand als m .

$$m \text{ ligt 2 eenheden hoger dan } l, \text{ dus } n \text{ ligt 2 eenheden lager dan } l.$$

$$\text{De vergelijking van } n \text{ is } y = -\frac{2}{3}x + 2.$$

- 48 a** $l_2: 2x + y = -6$ en $m_3: y = 2\frac{1}{2}x + 3$

$$\text{De eerste vergelijking kun je ook schrijven als } y = -2x - 6.$$

$$-2x - 6 = 2\frac{1}{2}x + 3$$

$$-4\frac{1}{2}x = 9$$

$$x = -2 \text{ en } y = -2 \cdot -2 - 6 = -2, \text{ het snijpunt is } (-2, -2).$$

- b** Schrijf de vergelijking van k als $-2y = -5x + 3$ ofwel $y = 2\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$

$$l_p: px + y = -6 \text{ ofwel } l_p: y = -px - 6$$

$$\text{De lijnen zijn evenwijdig als } -p = 2\frac{1}{2} \text{ dus als } p = -2\frac{1}{2}$$

- c** Dat is het geval als de lijnen niet evenwijdig zijn, dus als $p \neq -2\frac{1}{2}$

- d Dan moeten de lijnen samenvallen.

$$5x - 2y = 3 \text{ kun je schrijven als } y = 2\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$$

$$\text{De lijn } y = 2\frac{1}{2}x + q \text{ valt hiermee samen als } q = -1\frac{1}{2}$$

Onderzoeksopdrachten

- 49 De coördinaten van S zijn $(50, 60)$.

De afstand PS is gelijk aan $\sqrt{10^2 + 50^2} = \sqrt{2600} \approx 50,99$ km.

$50,99 : 16 \approx 3,187$ en dat is gelijk aan 3 uur en 11 minuten en 13 seconden.

Het schip zal dus om 12.11 uur in punt S zijn.

De patrouilleboot moet de afstand QS afleggen in 56 minuten.

De afstand QS is eveneens $\sqrt{10^2 + 50^2} = \sqrt{2600} \approx 50,99$ km.

De vereiste snelheid van de patrouilleboot is $50,99 : 56 = 0,910\dots$ km/minuut en dat is gelijk aan $60 \times 0,910\dots \approx 54,6$ km/uur.

- 50 Stel de lijn snijdt de x -as in $(p, 0)$ en de y -as in $(0, q)$, met $q > 3$.

Een vergelijking van deze lijn is $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

Omdat $(2, 3)$ voldoet, geldt $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} = 1$ en daaruit volgt

$$\frac{3}{q} = -\frac{2}{p} + 1 \text{ ofwel } \frac{3}{q} = -\frac{2}{p} + \frac{p}{p} = \frac{p-2}{p}$$

$$\frac{q}{3} = \frac{p}{p-2} \text{ dus } q = \frac{3p}{p-2}$$

De oppervlakte van de driehoek is $\frac{1}{2} \cdot p \cdot q = \frac{1}{2} \cdot p \cdot \frac{3p}{p-2}$

Door dit als formule in je rekenmachine in te voeren en de optie minimum te gebruiken vind je dat er een minimum is als $p = 4$ en dit minimum is 12.

Samenvatting

- S1 Stel de richtingscoëfficiënt van lijn m is p .

Dan geldt $\frac{5}{7} \cdot p = -1$ en daaruit volgt $p = -\frac{7}{5} = -1\frac{2}{5}$.

- S2 Het midden van AB is $(3, 5\frac{1}{2})$ en de richtingscoëfficiënt is $\frac{4-7}{2-4} = 1\frac{1}{2}$

Een vergelijking van de middelloodlijn is $y = -\frac{2}{3}x + b$.

$(3, 5\frac{1}{2})$ invullen geeft $5\frac{1}{2} = -\frac{2}{3} \cdot 3 + b$, dus $b = 7\frac{1}{2}$

De vergelijking van de middelloodlijn is $y = -\frac{2}{3}x + 7\frac{1}{2}$

- S3 a Uit $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$ volgt $\frac{y}{5} = -\frac{x}{3} + 1$, dus $y = -1\frac{2}{3}x + 5$.

- b Uit $y = \frac{3}{7}x - 2$ volgt $7y = 3x - 14$, dus $3x - 7y = 14$.

S4 a Herleid de tweede vergelijking tot $y = 4x - 11$ en dit substitueren geeft

$$2x - 5(4x - 11) = 1$$

$$2x - 20x + 55 = 1$$

$$-18x = -54$$

$$x = 3 \text{ en } y = 4 \cdot 3 - 11 = 1$$

De oplossing van het stelsel is $x = 3$ en $y = 1$.

b Uit $3x - 4y = 5$ volgt $-4y = -3x + 5$ dus $y = \frac{3}{4}x - 1\frac{1}{4}$

De andere lijn is $y = \frac{3}{4}x + 5$, dus de lijnen zijn evenwijdig.

Dit stelsel heeft geen oplossingen.

S5 Herleid de vergelijking van l tot $3y = -2x + 4$ en tot $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

Herleid de vergelijking van m tot $-2y = -x + 17$ en tot $y = \frac{1}{2}x - 8\frac{1}{2}$

Voor de hoek die k met de x -as maakt geldt $\tan(\alpha) = 3$ dus $\alpha = 71,565\dots^\circ$

Voor de hoek die l met de x -as maakt geldt $\tan(\beta) = \frac{2}{3}$ dus $\beta = 33,690\dots^\circ$

Voor de hoek die m met de x -as maakt geldt $\tan(\gamma) = \frac{1}{2}$ dus $\gamma \approx 26,565\dots^\circ$

$$\angle(k, l) \approx 180 - 71,565\dots - 33,690\dots \approx 75^\circ$$

$$\angle(k, m) \approx 71,565\dots - 26,565\dots = 45^\circ$$

S6 Je kunt de vergelijking van m herleiden tot $-3y = -2x + 7$ en $y = \frac{2}{3}x - 2\frac{1}{3}$

De loodlijn heeft een vergelijking van de vorm $y = -1\frac{1}{2}x + b$.

$$P(1, 3) \text{ invullen geeft } 3 = -1\frac{1}{2} \cdot 1 + b \text{ dus } b = 4\frac{1}{2}$$

$$\text{Een vergelijking van de loodlijn is } y = -1\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$$

$$\mathbf{S7} \quad PQ = \sqrt{(2 - (-5))^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{65}$$

S8 a Je kunt de vergelijking van l herleiden tot $2y = -x - 4$ of $y = -\frac{1}{2}x - 2$.

Een loodlijn op l heeft een vergelijking van de vorm $y = 2x + b$.

$$P(1, 5) \text{ invullen geeft } 5 = 2 \cdot 1 + b \text{ dus } b = 3$$

Een vergelijking van de loodlijn is $y = 2x + 3$.

snijpunt berekenen:

$$2x + 3 = -\frac{1}{2}x - 2$$

$$2\frac{1}{2}x = -5 \text{ dus } x = -2 \text{ en } y = 2 \cdot -2 + 3 = -1, \text{ het snijpunt is } S(-2, -1).$$

$$d(P, l) = PS = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (-1 - 5)^2} = \sqrt{45}$$

b De lijnen l en m hebben dezelfde richtingscoëfficiënt, dus zijn evenwijdig.

Kies een punt op m , bijvoorbeeld $Q(0, 8)$.

Een loodlijn door Q op l heeft als vergelijking $y = 2x + 8$.

snijpunt berekenen:

$$2x + 8 = -\frac{1}{2}x - 2$$

$$2\frac{1}{2}x = -10 \text{ dus } x = -4 \text{ en } y = 2 \cdot -4 + 8 = 0, \text{ het snijpunt is } S(-4, 0).$$

$$d(l, m) = QS = \sqrt{(-4 - 0)^2 + (0 - 8)^2} = \sqrt{80}$$

Test jezelf

T1 a De snijpunten van k met de assen zijn $(2\frac{1}{2}, 0)$ en $(0, 4)$.

Vul $x = 0$ in bij de vergelijking van l : $2 \cdot 0 - 3y = 6$ geeft $y = -2$.

Vul $y = 0$ in bij de vergelijking van l : $2x - 3 \cdot 0 = 6$ geeft $x = 3$.

De snijpunten van l met de assen zijn $(3, 0)$ en $(0, -2)$.

- b** De vergelijking van k links en rechts met 20 vermenigvuldigen geeft $8x + 5y = 20$.
Dit kun je weer herleiden tot $5y = -8x + 20$ en $y = -1\frac{3}{5}x + 4$.
- c** Uit $2x - 3y = 6$ volgt $-3y = -2x + 6$ dus $y = \frac{2}{3}x - 2$.
Door $2x - 3y = 6$ links en recht door 6 te delen krijg je $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$.
- d** Een vergelijking van n is $y = -1\frac{3}{5}x + b$.
(5, 12) invullen geeft $12 = -1\frac{3}{5} \cdot 5 + b$ dus $b = 20$.
Een vergelijking van n is $y = -1\frac{3}{5}x + 20$.
- e** De richtingscoëfficiënt van l is $\frac{2}{3}$ dus die van r is $-1\frac{1}{2}$.
Een vergelijking van r is $y = -1\frac{1}{2}x + b$.
(3, -2) invullen geeft $-2 = -1\frac{1}{2} \cdot 3 + b$ dus $b = 2\frac{1}{2}$.
Een vergelijking van r is $y = -1\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$.

T2 a Vul $y = 2x - 1$ in bij de andere vergelijking.

$$x + 2(2x - 1) = 8$$

$$x + 4x - 2 = 8$$

$$5x = 10, \text{ dus } x = 2 \text{ en } y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

De oplossing van het stelsel is $x = 2$ en $y = 3$.

b Herleid de onderste vergelijking tot $-3x + 2y = 6$.

Uit $x + 2y = 2$ volgt $x = -2y + 2$ en dit invullen geeft

$$-3(-2y + 2) + 2y = 6$$

$$6y - 6 + 2y = 6$$

$$8y = 12, \text{ dus } y = 1\frac{1}{2} \text{ en } x = -2 \cdot 1\frac{1}{2} + 2 = -1$$

De oplossing van het stelsel is $x = -1$ en $y = 1\frac{1}{2}$.

c Uit $3x + 2y + 1 = 0$ volgt $2y = -3x - 1$ en $y = -1\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

Dit invullen in $-2x + 5y = 7$ geeft

$$-2x + 5\left(-1\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) = 7$$

$$-2x - 7\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2} = 7$$

$$-9\frac{1}{2}x = 9\frac{1}{2}$$

$$x = -1 \text{ en } y = -1\frac{1}{2} \cdot -1 - \frac{1}{2} = 1$$

De oplossing van het stelsel is $x = -1$ en $y = 1$.

d Herleid $\frac{x}{-1} + \frac{y}{2} = 1$ tot $-2x + y = 2$ en $y = 2x + 2$.

gelijkstellen aan de andere vergelijking: $2x + 2 = \frac{2}{3}x + 1$

$$1\frac{1}{3}x = -1 \text{ dus } x = -\frac{3}{4} \text{ en } y = 2 \cdot -\frac{3}{4} + 2 = \frac{1}{2}$$

De oplossing van het stelsel is $x = -\frac{3}{4}$ en $y = \frac{1}{2}$.

T3 a Vul de tweede vergelijking in bij de eerste.

$$3x + 4(-0,75x + 4) = 12$$

$$3x - 3x + 16 = 12$$

$0 \cdot x = -4$, dus het stelsel heeft geen oplossingen.

b De twee lijnen zijn evenwijdig.

T4 De richtingscoëfficiënt van l is 3, dus voor de hoek tussen l en de x -as geldt

$$\tan(\alpha) = 3, \text{ dus } \alpha = 71,565\dots^\circ$$

De richtingscoëfficiënt van m is $-\frac{2}{3}$ dus voor de hoek tussen m en de x -as geldt $\tan(\beta) = \frac{2}{3}$, dus $\beta = 33,690\dots^\circ$

De hoeken zijn 72° , 34° en $180 - 71,565\dots - 33,690 \approx 75^\circ$.

T5 a Herleid $4x - 10y = 158$ tot $-10y = -4x + 158$ en tot $y = \frac{2}{5}x - 15\frac{4}{5}$

De loodlijn heeft een vergelijking van de vorm $y = -2\frac{1}{2}x + b$.

Invullen van $P(1, 2)$ geeft $2 = -2\frac{1}{2} \cdot 1 + b$ dus $b = 4\frac{1}{2}$

Een vergelijking van de loodlijn is $y = -2\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$

b Substitueren van $y = -2\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$ in $4x - 10y = 158$ geeft

$$4x - 10\left(-2\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}\right) = 158$$

$$4x + 25x - 45 = 158$$

$$29x = 203$$

$$x = 7$$

$$y = -2\frac{1}{2} \cdot 7 + 4\frac{1}{2} = -13, \text{ dus het snijpunt is } (7, -13).$$

T6 a Herleid $2x + 3y = 6$ tot $3y = -2x + 6$ en tot $y = -\frac{2}{3}x + 2$.

Een vergelijking van de loodlijn uit P op l is $y = 1\frac{1}{2}x + b$.

$P(8, 1)$ invullen geeft $1 = 1\frac{1}{2} \cdot 8 + b$ dus $b = -11$.

Een vergelijking van de loodlijn uit P op l is $y = 1\frac{1}{2}x - 11$.

Deze loodlijn snijden met de lijn l :

$$1\frac{1}{2}x - 11 = -\frac{2}{3}x + 2$$

$$2\frac{1}{6}x = 13$$

$$x = 6 \text{ en } y = 1\frac{1}{2} \cdot 6 - 11 = -2 \text{ dus het snijpunt is } S(6, -2).$$

$$d(P, l) = PS = \sqrt{(8-6)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

T7 De richtingscoëfficiënt van l is $\frac{9-10}{7-4} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$, dus de richtingscoëfficiënt van m is 3.

De richtingscoëfficiënt van m is ook gelijk aan $\frac{a-12}{-3-(-10)} = \frac{a-12}{7}$

$$\frac{a-12}{7} = 3 \text{ dus } a-12 = 21 \text{ en } a = 33.$$

T8 a Uit de onderste vergelijking volgt $x = -2y + 5$.

Dit substitueren in de eerste vergelijking geeft

$$2(-2y + 5) - 3y = -4$$

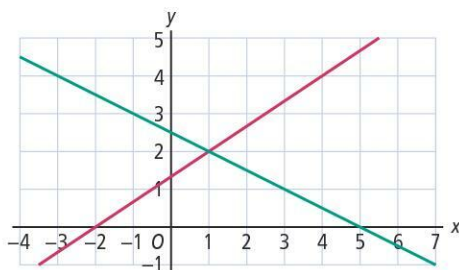
$$-4y + 10 - 3y = -4$$

$$-7y = -14 \text{ dus } y = 2 \text{ en } x = -2 \cdot 2 + 5 = 1$$

De oplossing van het stelsel is $y = 1$ en $y = 2$.

b Herleid $2x - 3y = -4$ tot $-3y = -2x - 4$ en tot $y = \frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$

Herleid $x + 2y = 5$ tot $2y = -x + 5$ en tot $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$



De hoeken met de x -as zijn $\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33,690\dots^\circ$ en $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26,565\dots^\circ$

De hoek tussen de lijnen is $33,690\dots + 26,565\dots \approx 60^\circ$.

- T9 a** De richtingscoëfficiënt van AB is $\frac{1-5}{2-1} = -1\frac{1}{3}$
 dus een vergelijking van l is $y = -1\frac{1}{3}x + b$.
 Invullen van $B(2, 1)$ geeft $1 = -1\frac{1}{3} \cdot 2 + b$, dus $b = 3\frac{2}{3}$
 De vergelijking van l is $y = -1\frac{1}{3}x + 3\frac{2}{3}$
 De richtingscoëfficiënt van BC is $\frac{3-1}{6-2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
 dus een vergelijking van m is $y = \frac{1}{2}x + b$.
 Invullen van $B(2, 1)$ geeft $1 = \frac{1}{2} \cdot 2 + b$, dus $b = 0$.
 De vergelijking van m is $y = \frac{1}{2}x$.
- b** $\angle(l, x\text{-as}) = \tan^{-1}\left(1\frac{1}{3}\right) = 53,130\dots^\circ$
 $\angle(m, x\text{-as}) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26,565\dots^\circ$
 $\angle(l, m) \approx 26,565\dots + 53,130\dots \approx 80^\circ$
- c** Het midden van AB is $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ en een vergelijking van de middelloodlijn is
 $y = \frac{3}{4}x + b$. Invullen van $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ geeft $3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + b$, dus $b = 2\frac{5}{8}$
 De vergelijking van de middelloodlijn van lijnstuk AB is $y = \frac{3}{4}x + 2\frac{5}{8}$
 Het midden van BC is $(4, 2)$ en een vergelijking van de middelloodlijn is
 $y = -2x + b$. Invullen van $(4, 2)$ geeft $2 = -2 \cdot 4 + b$, dus $b = 10$.
 De vergelijking van de middelloodlijn van lijnstuk BC is $y = -2x + 10$.
- d** De hoek tussen de middelloodlijn van AB en de x -as is $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 36,869\dots^\circ$
 De hoek tussen de middelloodlijn van BC en de x -as is $\tan^{-1}(2) = 63,434\dots^\circ$
 De hoek tussen de middelloodlijnen is $36,869\dots + 63,434\dots \approx 100^\circ$, dus de scherpe hoek is gelijk aan 80° . Het valt op dat dit gelijk is aan de hoek tussen l en m .

- T10 a** Voor deze punten geldt $y = 4$ of $y = -4$.
 $4 = 3x - 7$ geeft $3x = 11$ dus $x = 3\frac{2}{3}$
 $-4 = 3x - 7$ geeft $3x = 3$ dus $x = 1$
 De punten zijn $\left(3\frac{2}{3}, 4\right)$ en $(1, -4)$.
- b** Punten die even ver van beide assen liggen, die liggen op de lijnen met vergelijking $y = x$ of $y = -x$.
 $y = x$ invullen in $x + 2y = 8$ geeft
 $x + 2x = 8$ ofwel $3x = 8$ dus $x = 2\frac{2}{3}$
 $y = -x$ invullen in $x + 2y = 8$ geeft
 $x - 2x = 8$ ofwel $-x = 8$ dus $x = -8$
 De punten zijn $\left(2\frac{2}{3}, 2\frac{2}{3}\right)$ en $(-8, 8)$.

Extra oefening

- E1** Je kunt $y = \frac{1}{2}x - 7$ herleiden tot $-\frac{1}{2}x + y = 7$ of $x - 2y = -14$, dus A en G horen bij dezelfde lijn.
 Je kunt $7x - 2y = 14$ herleiden tot $-2y = -7x + 14$ ofwel $y = 3\frac{1}{2}x - 7$.
 Je kunt $x = \frac{2}{7}y + 2$ herleiden tot $7x = 2y + 14$ of $7x - 2y = 14$, dus B, E en F horen bij dezelfde lijn.
 Je kunt $2x + 7y = 14$ door te delen door 14 herleiden tot $\frac{x}{7} + \frac{y}{2} = 1$ en je kunt
 $2x + 7y = 14$ ook herleiden tot $7y = -2x + 14$ ofwel $y = -\frac{2}{7}x + 2$.
 en ook tot $7y = -2x + 14$ of $y = -\frac{2}{7}x + 2$, dus C, D en H horen bij dezelfde lijn.
 Conclusie: A en G horen bij dezelfde lijn, B, E en F horen bij dezelfde lijn en C, D en H horen bij dezelfde lijn.

E2 a gelijkstellen: $1\frac{1}{2}x - 4 = -x + 11$

$$2\frac{1}{2}x = 15$$

$$x = 6 \text{ en } y = 1\frac{1}{2} \cdot 6 - 4 = 5$$

De oplossing van het stelsel is $x = 6$ en $y = 5$.

b Uit de eerste vergelijking volgt $y = 2x - 3$.

Dit substitueren in de tweede vergelijking geeft

$$3x + 2(2x - 3) = 8$$

$$3x + 4x - 6 = 8$$

$$7x = 14$$

$$x = 2 \text{ en } y = 2 \cdot 2 - 3 = 1$$

De oplossing van het stelsel is $x = 2$ en $y = 1$.

c $x = 6y + 7$ substitueren in de andere vergelijking geeft

$$2(6y + 7) - 3y = 17$$

$$12y + 14 - 3y = 17$$

$$9y = 3$$

$$y = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \text{ en } x = 6 \cdot \frac{1}{3} + 7 = 9$$

De oplossing van het stelsel is $x = 9$ en $y = \frac{1}{3}$

d Herleid $\frac{x}{3} + \frac{y}{-1} = 1$ tot $x - 3y = 3$.

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} \text{ substitueren in } x - 3y = 3 \text{ geeft}$$

$$x - 3\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}\right) = 3$$

$$x - x - 1\frac{1}{2} = 3$$

$$0 \cdot x = 4\frac{1}{2}$$

Er zijn geen oplossingen.

E3 a Herleid $x + 3y = 6$ tot $3y = -x + 6$ en tot $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

Voor de hoek tussen l en de x -as geldt $\tan(\alpha) = \frac{1}{3}$ dus $\alpha = 18,434\dots^\circ$

b De richtingscoëfficiënt van m is $\frac{2}{3}$.

Voor de hoek tussen m en de x -as geldt $\tan(\beta) = \frac{2}{3}$ dus $\beta = 33,690\dots^\circ$

c De hoek tussen l en m is $18,434\dots + 33,690\dots \approx 52^\circ$.

E4 a Herleid $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3\frac{1}{2}} = 1$ tot $\frac{y}{3\frac{1}{2}} = \frac{x}{2} + 1$ en tot $y = 1\frac{3}{4}x + 3\frac{1}{2}$

De richtingscoëfficiënt van l is $1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ dus de richtingscoëfficiënt van de loodlijn is $-\frac{4}{7}$ want $\frac{7}{4} \cdot -\frac{4}{7} = -1$.

Een vergelijking van de loodlijn is van de vorm $y = -\frac{4}{7}x + b$.

Substitueren van $P(14, 2)$ geeft $2 = -\frac{4}{7} \cdot 14 + b$ ofwel $2 = -8 + b$

dus $b = 10$ en de vergelijking van de loodlijn is $y = -\frac{4}{7}x + 10$.

b Herleid $2x - 5y = 3$ tot $-5y = -2x + 3$ en tot $y = \frac{2}{5}x - \frac{3}{5}$

De richtingscoëfficiënt van de loodlijn is $-2\frac{1}{2}$ want $-2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = -1$.

Een vergelijking van de loodlijn is van de vorm $y = -2\frac{1}{2}x + b$.

$P(2, 3)$ substitueren geeft $3 = -2\frac{1}{2} \cdot 2 + b$ ofwel $3 = -5 + b$ dus $b = 8$.

Een vergelijking van de loodlijn is $y = -2\frac{1}{2}x + 8$.

E5 $AB = \sqrt{(-2 - 3)^2 + (14 - 7)^2} = \sqrt{74}$

- E6 a** Herleid $3x + 2y = 44$ tot $2y = -3x + 44$ en tot $y = -1\frac{1}{2}x + 22$.
 Een vergelijking van de loodlijn is $y = \frac{2}{3}x + b$, want $\frac{2}{3} \cdot -1\frac{1}{2} = -1$.
 $P(-3, 7)$ invullen geeft $7 = \frac{2}{3} \cdot -3 + b$ dus $b = 9$.
 Een vergelijking van de loodlijn is $y = \frac{2}{3}x + 9$.
 Het snijpunt berekenen van l met deze loodlijn: $-1\frac{1}{2}x + 22 = \frac{2}{3}x + 9$
 $-2\frac{1}{6}x = -13$
 $x = 6$ en $y = -1\frac{1}{2} \cdot 6 + 22 = 13$, het snijpunt is $S(6, 13)$.
 $d(P, l) = PS = \sqrt{(6 - (-3))^2 + (13 - 7)^2} = \sqrt{117}$
- b** De richtingscoëfficiënt van m is $\frac{14 - 2}{-6 - 3} = \frac{12}{-9} = -\frac{4}{3}$ dus $m: y = -\frac{4}{3}x + b$.
 $(3, 2)$ invullen geeft $2 = -\frac{4}{3} \cdot 3 + b$ dus $b = 6$.
 Een vergelijking van m is $y = -\frac{4}{3}x + 6$.
 Een vergelijking van de loodlijn is $y = \frac{3}{4}x + b$, want $\frac{3}{4} \cdot -\frac{4}{3} = -1$.
 $Q(10, 1)$ invullen geeft $1 = \frac{3}{4} \cdot 10 + b$ dus $b = -6\frac{1}{2}$.
 Een vergelijking van de loodlijn is $y = \frac{3}{4}x - 6\frac{1}{2}$.
 Het snijpunt berekenen van m met deze loodlijn: $-1\frac{1}{3}x + 6 = \frac{3}{4}x - 6\frac{1}{2}$
 $-16x + 72 = 9x - 78$ dus $-25x = -150$
 $x = 6$ en $y = -1\frac{1}{3} \cdot 6 + 6 = -2$, het snijpunt is $S(6, -2)$.
 $d(Q, m) = QS = \sqrt{(6 - 10)^2 + (-2 - 1)^2} = 5$
- E7 a** $PQ = \sqrt{(4 - 2)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{20}$
- b** De richtingscoëfficiënt van PQ is $\frac{-1 - 3}{4 - 2} = \frac{-4}{2} = -2$.
 Een vergelijking van de lijn door PQ is $y = -2x + b$.
 $(2, 3)$ invullen geeft $3 = -2 \cdot 2 + b$ dus $b = 7$.
 Een vergelijking van l is $y = -2x + 7$.
- c** De loodlijn op l door de oorsprong heeft vergelijking $y = \frac{1}{2}x$.
- d** Deze loodlijn snijden met l :
 $-2x + 7 = \frac{1}{2}x$
 $-2\frac{1}{2}x = -7$ dus $x = 2\frac{4}{5}$ en $y = \frac{1}{2} \cdot 2\frac{4}{5} = 1\frac{2}{5}$. Het snijpunt is $S(2\frac{4}{5}, 1\frac{2}{5})$.
 De afstand van de oorsprong tot l is $d(O, l) = OS = \sqrt{(2\frac{4}{5})^2 + (1\frac{2}{5})^2} \approx 3,1$
- E8** De richtingscoëfficiënt van AC is $\frac{-3 - (-1)}{5 - (-1)} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$, dus van de hoogtelijn uit B is de richtingscoëfficiënt 3. Een vergelijking van AC is $y = -\frac{1}{3}x + b$.
 $A(-1, -1)$ invullen geeft $-1 = -\frac{1}{3} \cdot (-1) + b$ dus $b = -1\frac{1}{3}$.
 Een vergelijking van AC is $y = -\frac{1}{3}x - 1\frac{1}{3}$.
 Een vergelijking van de hoogtelijn uit B is $y = 3x + b$.
 $B(2, 5)$ invullen geeft $5 = 3 \cdot 2 + b$ dus $b = -1$.
 Een vergelijking van de hoogtelijn uit B is $y = 3x - 1$.
 Bereken het snijpunt van AC met deze hoogtelijn:
 $-\frac{1}{3}x - 1\frac{1}{3} = 3x - 1$ dus $-\frac{10}{3}x = \frac{2}{3}$
 $x = -\frac{1}{10}$ en $y = 3 \cdot -\frac{1}{10} - 1 = -1\frac{3}{10}$. Het snijpunt is $S(-\frac{1}{10}, -1\frac{3}{10})$.
 De lengte van de hoogtelijn uit B is $BS = \sqrt{(-\frac{1}{10} - 2)^2 + (-1\frac{3}{10} - 5)^2} = \sqrt{44,1}$

E9 a Herleid $l: 2x - y = 1$ tot $2x - 1 = y$ of $y = 2x - 1$ en herleid $m: x + 2y = 10$ tot $2y = -x + 10$ of $y = -\frac{1}{2}x + 5$. Het product van de richtingscoëfficiënten van l en m is $2 \cdot -\frac{1}{2} = -1$, dus de hoek tussen l en m is recht en de driehoek is rechthoekig.

b Bereken de snijpunten van de lijnen:

$$2x - 1 = -\frac{1}{2}x + 5$$

$$2\frac{1}{2}x = 6$$

$$x = 2\frac{2}{5} \text{ en } y = -\frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{5} + 5 = 3\frac{4}{5} \text{ dus het snijpunt is } A(2\frac{2}{5}, 3\frac{4}{5}).$$

$$2x - 1 = -3x - 5$$

$$5x = -4$$

$$x = -\frac{4}{5} \text{ en } y = 2 \cdot -\frac{4}{5} - 1 = -2\frac{3}{5} \text{ dus het snijpunt is } B(-\frac{4}{5}, -2\frac{3}{5}).$$

$$-\frac{1}{2}x + 5 = -3x - 5$$

$$2\frac{1}{2}x = -10$$

$$x = -4 \text{ en } y = -3 \cdot -4 - 5 = 7 \text{ dus het snijpunt is } C(-4, 7).$$

$$AB = \sqrt{(-\frac{4}{5} - 2\frac{2}{5})^2 + (-2\frac{3}{5} - 3\frac{4}{5})^2} = \sqrt{51,2}$$

$$AC = \sqrt{(-4 - 2\frac{2}{5})^2 + (7 - 3\frac{4}{5})^2} = \sqrt{51,2}$$

$AB = AC$, dus de driehoek is gelijkbenig.

(je hoeft de lengte van de derde zijde niet te berekenen, want dat is de zijde tegenover de rechte hoek en die is langer dan de rechthoekszijden)

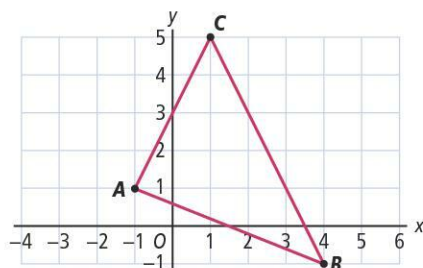
E10 a $AB = \sqrt{(4 - -1)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{29}$

$$BC = \sqrt{(1 - 4)^2 + (5 - -1)^2} = \sqrt{45}$$

$$AC = \sqrt{(1 - -1)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{20}$$

b De grootste hoek ligt tegenover de langste zijde, dus dat is hoek A .

c



De richtingscoëfficiënt van AB is $\frac{-1 - 1}{4 - -1} = -\frac{2}{5}$ dus

$$\angle(AB, x\text{-as}) = \tan^{-1}(\frac{2}{5}) = 21,801...^\circ$$

De richtingscoëfficiënt van AC is $\frac{5 - 1}{1 - -1} = 2$, dus

$$\angle(AC, x\text{-as}) = \tan^{-1}(2) = 63,434...^\circ$$

$$\angle A = 21,801... + 63,434... \approx 85^\circ$$

- E11** De richtingscoëfficiënt van k en van l is 3 en $A(3, 5)$ ligt op k .
 Stel een vergelijking op van de loodlijn uit A op l :
 $y = -\frac{1}{3}x + b$ en vul $A(3, 5)$ in, dit geeft $5 = -\frac{1}{3} \cdot 3 + b$ dus $b = 6$.
 Een vergelijking op van de loodlijn uit A op l is $m: y = -\frac{1}{3}x + 6$.
 Bereken met substitutie het snijpunt van deze lijn met l :
 $3x - (-\frac{1}{3}x + 6) = 24$
 $3\frac{1}{3}x - 6 = 24$
 $3\frac{1}{3}x = 30$
 $x = 9$ en $y = -\frac{1}{3} \cdot 9 + 6 = 3$ dus het tweede hoekpunt is $B(9, 3)$.
 Van A naar B is 6 naar rechts en 2 omlaag.
 De punten C en D vind je door van B en van A 2 naar rechts en 6 omhoog te gaan. Daaruit volgt $C(11, 9)$ en $D(5, 11)$.
 Lijn n gaat door C en D en de vergelijking is $n: y = -\frac{1}{3}x + 12\frac{2}{3}$

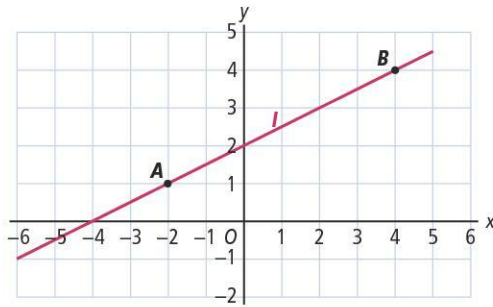
- E12 a** $AB = \sqrt{(5 - -1)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{40}$, $BC = \sqrt{(2 - 5)^2 + (4 - -1)^2} = \sqrt{34}$
 $AC = \sqrt{(2 - -1)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{18}$
 De omtrek is $\sqrt{40} + \sqrt{34} + \sqrt{18} \approx 16,4$.
- b** De richtingscoëfficiënt van AB is $\frac{-1 - 1}{5 - -1} = -\frac{1}{3}$ dus de richtingscoëfficiënt van de loodlijn is 3. Een vergelijking is $y = 3x + b$.
 $C(2, 4)$ invullen geeft $4 = 3 \cdot 2 + b$, dus $b = -2$.
 De loodlijn uit C op AB is $y = 3x - 2$.
 De vergelijking van AB is $y = -\frac{1}{3}x + b$.
 $A(-1, 1)$ invullen geeft $1 = -\frac{1}{3} \cdot -1 + b$, dus $b = \frac{2}{3}$ en de vergelijking is $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.
 Het snijpunt van AB met deze loodlijn berekenen
 $3x - 2 = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$
 $3\frac{1}{3}x = 2\frac{2}{3}$
 $x = \frac{4}{5}$ en $y = 3 \cdot \frac{4}{5} - 2 = \frac{2}{5}$, het snijpunt is $S(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$.
 $d(C, AB) = CS = \sqrt{(\frac{4}{5} - 2)^2 + (\frac{2}{5} - 4)^2} = \sqrt{14,4}$
- c** De oppervlakte van driehoek ABC is gelijk aan
 $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot CS = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{40} \cdot \sqrt{14,4} = \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{40} \cdot \sqrt{14,4} = \sqrt{144} = 12$
- d** De richtingscoëfficiënt van BC is $\frac{4 - -1}{2 - 5} = -\frac{5}{3}$, dus de richtingscoëfficiënt van de loodlijn is $\frac{3}{5}$. Een vergelijking is $y = \frac{3}{5}x + b$.
 Door invullen van $A(-1, 1)$ vind je $b = 1\frac{3}{5}$, dus de hoogtelijn is $y = \frac{3}{5}x + 1\frac{3}{5}$.
 De richtingscoëfficiënt van AC is $\frac{4 - 1}{2 - -1} = 1$, dus de richtingscoëfficiënt van de loodlijn is -1 . Een vergelijking is $y = -x + b$.
 Door invullen van $B(5, -1)$ vind je $b = 4$, dus de hoogtelijn is $y = -x + 4$.
 De hoogtelijnen uit C en B snijden: $3x - 2 = -x + 4$
 $4x = 6$ dus $x = 1\frac{1}{2}$ en $y = -1\frac{1}{2} + 4 = 2\frac{1}{2}$ het snijpunt van de hoogtelijnen uit C en B is $H(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$.
 $H(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$ invullen in $y = \frac{3}{5}x + 1\frac{3}{5}$ geeft $2\frac{1}{2} = \frac{3}{5} \cdot 1\frac{1}{2} + 1\frac{3}{5}$
 $2\frac{1}{2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{2} + \frac{8}{5} = \frac{9}{10} + \frac{16}{10} = \frac{25}{10}$ dit klopt, ook de derde hoogtelijn gaat door H .

6 Afgeleide functies

Voorkennis

- V1 a** Lijn l gaat 2 naar rechts en 3 omlaag, dus de richtingscoëfficiënt is $-1\frac{1}{2}$. Het snijpunt met de y -as is $(0, 5)$ dus het startgetal is 5.
- b** Een formule van l is $y = -1\frac{1}{2}x + 5$.
- c** De richtingscoëfficiënt is $\frac{1}{2}$ en het startgetal is 2 dus een formule van k is $y = \frac{1}{2}x + 2$.
- d** De richtingscoëfficiënt is ook $-1\frac{1}{2}$ en het startgetal is 11 dus een formule van m is $y = -1\frac{1}{2}x + 11$.

V2 a



- b** Kies bijvoorbeeld $(-4, 0)$ en $(0, 2)$.
De x -coördinaten verschillen $0 - (-4) = 4$.
- c** Dat is de richtingscoëfficiënt, dus 0,5

- V3 a** De richtingscoëfficiënt is $\frac{12-9}{8-4} = \frac{3}{4}$.
 $x = 4$ en $y = 9$ invullen bij $y = \frac{3}{4}x + b$ geeft $9 = \frac{3}{4} \cdot 4 + b$ ofwel $b = 6$.
Een vergelijking van l is $y = \frac{3}{4}x + 6$.

- b** De richtingscoëfficiënt van m is ook $\frac{3}{4}$. Het startgetal is 2.
Een vergelijking van m is $y = \frac{3}{4}x + 2$.

- c** De richtingscoëfficiënt van n is $-\frac{4}{3}$ want $-\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = -1$.
 $x = -12$ en $y = 4$ invullen bij $y = -\frac{4}{3}x + b$ geeft $4 = -\frac{4}{3} \cdot -12 + b$
ofwel $b = -12$. Een vergelijking van n is $y = -\frac{4}{3}x - 12$.

- V4 a** $y = 2(0,6x - 3)$ geeft $y = 1,2x - 6$.
De richtingscoëfficiënt van l is ook 1,2. Het startgetal is 12.
Een vergelijking van l is $y = 1,2x + 12$.
- b** $x = 22$ en $y = 14$ invullen bij $y = -0,4x + b$ geeft $14 = -0,4 \cdot 22 + b$.
 $14 = -8,8 + b$ dus $b = 22,8$.
Het startgetal van m is 22,8.

- V5 a** $x = 1$ en $y = 4$ invullen bij $y = 4x + b$ geeft $4 = 4 \cdot 1 + b$ ofwel $b = 0$.
Een vergelijking van l is $y = 4x$.
- b** De richtingscoëfficiënt van m is ook $-\frac{2}{3}$.
 $x = 6$ en $y = -7$ invullen bij $y = -\frac{2}{3}x + b$ geeft $-7 = -\frac{2}{3} \cdot 6 + b$ ofwel $b = -3$.
Een vergelijking van m is $y = -\frac{2}{3}x - 3$.

6 Afgeleide functies

- c** De richtingscoëfficiënt van n is $\frac{-4-5}{5-2} = -3$
 $x = 2$ en $y = 5$ invullen bij $y = -3x + b$ geeft $5 = -3 \cdot 2 + b$ ofwel $b = 11$
Een vergelijking van n is $y = -3x + 11$
- d** De richtingscoëfficiënt van k is $\frac{0-3}{-12-3} = \frac{1}{5}$
 $x = 3$ en $y = 3$ invullen bij $y = \frac{1}{5}x + b$ geeft $3 = \frac{1}{5} \cdot 3 + b$ ofwel $b = 2\frac{2}{5}$
Een vergelijking van k is $y = \frac{1}{5}x + 2\frac{2}{5}$

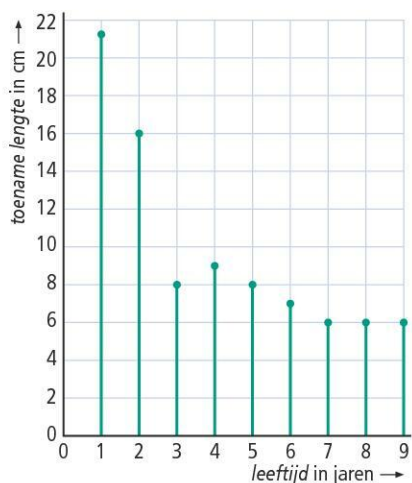
- V6 a** $y = (x^2 - 2)(x + 3)$
 $y = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$
- b** $y = (x^2 - 5)^2$
 $y = (x^2 - 5)(x^2 - 5)$
 $y = x^4 - 5x^2 - 5x^2 + 25$
 $y = x^4 - 10x^2 + 25$
- c** $y = (x^2 + 2)(x^2 - 2)$
 $y = x^4 - 2x^2 + 2x^2 - 4$
 $y = x^4 - 4$
- d** $y = (3x^2 - 4)(6x + 4)$
 $y = 18x^3 + 12x^2 - 24x - 16$
- e** $y = (x^2 + 1)^2$
 $y = (x^2 + 1)(x^2 + 1)$
 $y = x^4 + x^2 + x^2 + 1$
 $y = x^4 + 2x^2 + 1$
- f** $y = (x + 1)(x^2 + 2x + 1)$
 $y = x^3 + 2x^2 + x + x^2 + 2x + 1$
 $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

6.1 Toenamedigrammen

intro De waarde van de dollar is eerst met $2 + 1 + 2 = 5$ cent toegenomen en vervolgens met $1 + 3 = 4$ cent afgenomen. De koers van de dollar is aan het eind van de vijfde dag dus $5 - 4 = 1$ cent hoger dan aan het begin van de eerste dag.

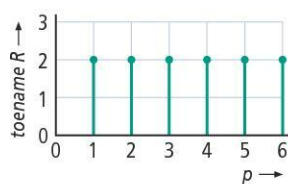
- 1 a** In het 6e uur dus tussen $t = 5$ en $t = 6$ nam de temperatuur het meest toe.
- b** In het 6e uur dus tussen $t = 5$ en $t = 6$ nam de temperatuur toe met $2,5^\circ\text{C}$.
- c** Bij een rood staafje is er sprake van afname.
- d** Uit de linker grafiek is af te lezen dat om 7 uur de temperatuur 2°C is.
Uit de rechter grafiek is af te lezen dat de toename van 7 tot 8 uur 2°C is, dus om 8 uur is het 4°C .
Uit de rechter grafiek is af te lezen dat de toename van 8 tot 9 uur 1°C is, dus om 9 uur is het 5°C .

2a b

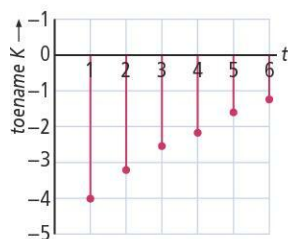


c Phil was toen $126 + 6 + 6 + 6 = 144$ cm lang.

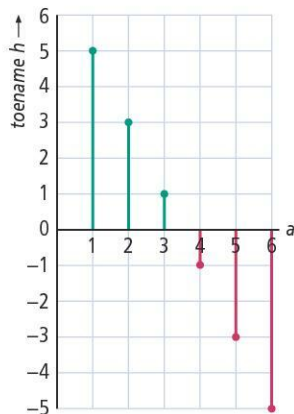
3 a



b



c



4

- A: constante daling, dus functie h
- B: afnemende stijging, dus functie g
- C: toenemende stijging, dus functie $.$
- D: afnemende daling gaat over in toenemende stijging, dus functie k .

5 a

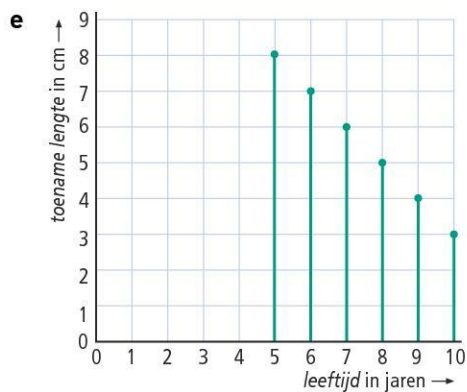
In de eerste vijf jaar groeide Titia $15 + 13 + 10 + 9 + 8 = 55$ cm.

b Je weet niet wat de lengte bij haar geboorte was.

c De toenames worden steeds kleiner.

d Bij de geboorte was de lengte van Titia $112 - 55 = 57$ cm.

6 Afgeleide functies

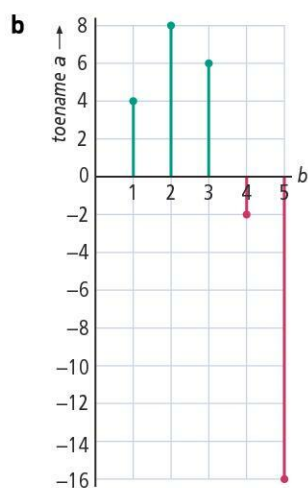


Op haar tiende was Titia $112 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 = 137$ cm lang.

- f** Dan neemt haar lengte niet meer toe, dus is de lengte van Titia constant.
Het toenamediaagram is een reeks stippen op niveau 0.

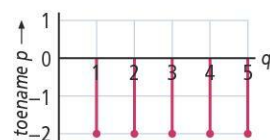
03 a

b	0	1	2	3	4	5
a	1	5	13	19	17	1
toename		4	8	6	-2	-16



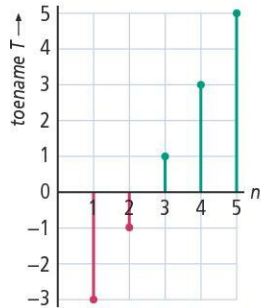
- c** $p = 8 - 2q$

q	0	1	2	3	4	5
p	8	6	4	2	0	-2
toename		-2	-2	-2	-2	-2



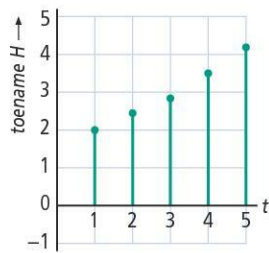
d $T = n^2 - 4n$

n	0	1	2	3	4	5
T	0	-3	-4	-3	0	5
toename		-3	-1	1	3	5



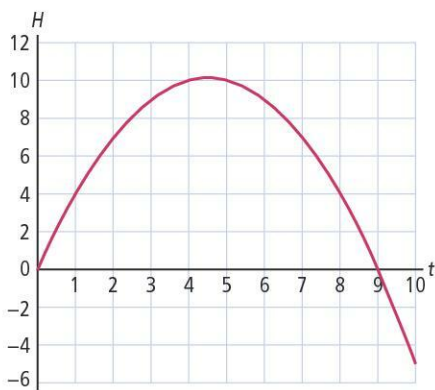
e $H = 10 \cdot 1,2^t$

t	0	1	2	3	4	5
H	10	12	14,4	17,28	20,736	24,883
toename		2	2,4	2,88	3,456	4,1472



U1

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
toename H		4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
H	0	4	7	9	10	10	9	7	4	0	-5



6.2 Gemiddelde verandering

intro 120 km/h is 2 km/min. Rijd je met de maximum toegestane snelheid, dan doe je dus één minuut over dat traject van 2 km. Doe je er 55 seconden over, dan heb je te hard gereden. Doe je er 65 seconden over, dan is je gemiddelde snelheid over dat traject minder dan 120 km/h en heb je niet te hard gereden.

- 6 a** De grafiek loopt tussen $t = 30$ en $t = 40$ steiler dan tussen $t = 10$ en $t = 20$, dus tussen $t = 30$ en $t = 40$ is de gemiddelde snelheid groter.
- b** Als Jurjen met constante snelheid had gereden, was de grafiek een rechte lijn.
- c** $s(15) \approx 3,95$ wat betekent dat de Jurjen na 15 minuten een afstand heeft afgelegd van bijna 4 km.
- d** Dat is de afgelegde afstand tussen $t = 15$ en $t = 30$.
- e** $\frac{s(30) - s(15)}{30 - 15} = \frac{14,58 - 3,94875}{15} \approx 0,71$ km per minuut
- f** $0,71 \times 60 \approx 42,6$ km/uur
- 7 a** De toename is $f(9) - f(1) = 2\sqrt{9} - 2\sqrt{1} = 6 - 2 = 4$.
- b** Bij $\frac{f(9) - f(1)}{9 - 1}$ staat in de teller de totale toename en in de noemer het aantal stappen, dus de breuk geeft de gemiddelde toename van $f(x)$ per stap van 1.
- c** De richtingscoëfficiënt is $\frac{6 - 2}{9 - 1} = 0,5$. Dit is gelijk aan de gemiddelde toename van $f(x)$ over het interval $[1, 9]$.
- d** De gemiddelde toename is $\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{4 - 2}{4 - 1} = \frac{2}{3}$
- e** Bij de gemiddelde toename op interval $[1, 4]$ bereken je de richtingscoëfficiënt van de rechte lijn door de punten $A(1, 2)$ en $C(4, 4)$.
- 8 a** $f(0) = 9$ en $f(6) = 0$
- $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 9}{6 - 0} = -1\frac{1}{2}$$
- De gemiddelde verandering is $-1\frac{1}{2}$
- b** $f(1) = 6\frac{1}{4}$ en $f(4) = 1$
- $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 6\frac{1}{4}}{3} = -1\frac{3}{4}$$
- Het differentiequotiënt is $-1\frac{3}{4}$
- c** $f(2) = 4$ en $f(10) = 4$
- $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 4}{8} = 0$$
- Het differentiequotiënt is 0.
- 9 a** $f(-2) = 14$ en $f(5) = -7$
- $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-7 - 14}{5 - (-2)} = -3$$
- Het differentiequotiënt is -3 .
- b** Ja, de grafiek van f is een rechte lijn en de gemiddelde verandering van $f(x)$ is over elk interval gelijk aan de richtingscoëfficiënt.

c $g(8) = 3$ en $g(12) = 1$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 3}{12 - 8} = -\frac{1}{2}$$

Het differentiequotiënt is $-\frac{1}{2}$

d $h(\frac{1}{4}) = 4$ en $h(4) = \frac{1}{4}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{4} - 4}{4 - \frac{1}{4}} = -1$$

Het differentiequotiënt is -1

10 a $f(1) = -5$ en $f(5) = -5$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-5 - (-5)}{5 - 1} = 0$$

Het differentiequotiënt is 0.

b De functiewaarden zijn gelijk.

c Bij een interval dat symmetrisch ligt ten opzichte van de symmetrieas van de grafiek van f is het differentiequotiënt gelijk aan 0.

De symmetrieas ligt bij $x = (1 + 5) : 2 = 3$ dus bijvoorbeeld bij de intervallen $[2, 4]$ en $[0, 6]$ is het differentiequotiënt gelijk aan 0.

11 a De rechte lijnen door het beginpunt $(1, -3)$ en het eindpunt hebben een steeds kleinere richtingscoëfficiënt.

b Het differentiequotiënt over interval $[2, 2\frac{1}{2}]$ is groter omdat de grafiek over dat interval steiler is dan over interval $[2\frac{1}{2}, 3]$.

c De stijging over interval $[2, 3]$ is even groot als de daling over interval $[3, 4]$ dus is het differentiequotiënt daar -1 .

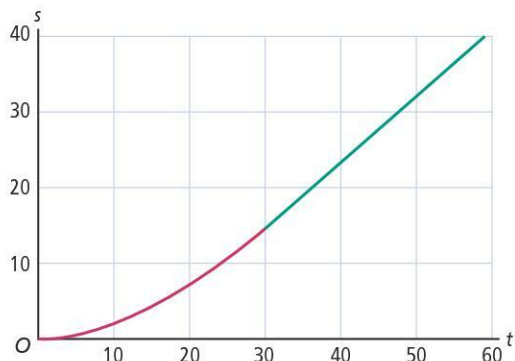
12 a $s(45) = 28,24875$ en $s(30) = 14,58$

$$\frac{s(45) - s(30)}{45 - 30} = \frac{28,24875 - 14,58}{15} \approx 0,91$$

Het differentiequotiënt is ongeveer 0,91.

b Het derde kwartier is van $t = 30$ tot $t = 45$. Je deelt de in die 15 minuten afgelegde weg in km door het aantal minuten en krijgt dan de snelheid.

13 a

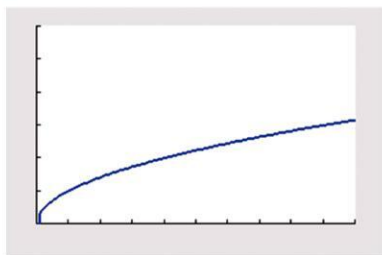


b Hij komt dan aan na ongeveer 60 minuten.

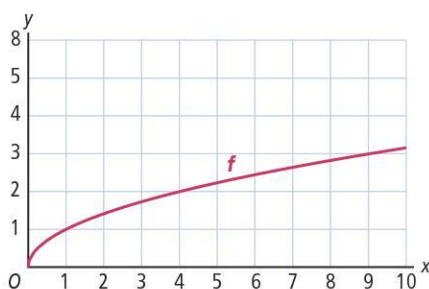
c $s(30) = 14,58$ en na 60 minuten is 40 km afgelegd.

De snelheid is dan $\frac{40 - 14,58}{60 - 30} \approx 0,85$ km per minuut, dat is ongeveer 51 km per uur.

08 a plot



schets



b $f(1) = \sqrt{1} = 1$ en $f(9) = \sqrt{9} = 3$

c $\Delta y = 3 - 1 = 2$

d

x	1	9
y	1	3

$\Delta x = 8$
 $\Delta y = 2$

e $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

De gemiddelde verandering is $\frac{1}{4}$

De helling van de lijn AB is $\frac{3-1}{9-1} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ en dus gelijk aan de gemiddelde verandering over het interval $[1, 9]$.

f $f(1) = 1$ en $f(4) = 2$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-1}{4-1} = \frac{1}{3}$$

De gemiddelde verandering is $\frac{1}{3}$

g $g(1) = 5$ en $g(3) = 9$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9-5}{3-1} = 2$$

Het differentiequotiënt is 2.

h $g(-1) = -7$ en $g(5) = 5$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-(-7)}{5-(-1)} = 2$$

Het differentiequotiënt is 2.

U2 $f(4) = 16$ en $f(p) = p^2$

Het differentiequotiënt over het interval $[4, p]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{p^2 - 16}{p - 4} = \frac{(p+4)(p-4)}{p-4} = p+4.$$

$f(1) = 1$ en $f(4) = 16$

Het differentiequotiënt over het interval $[1, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{16-1}{3} = 5.$

$p+4 = 2 \times 5$

$p+4 = 10$

$p = 6$

U3 a $f(2) = 4$, $f(3) = 8$ en $f(4) = 16$

Het differentiequotiënt over het interval $[3, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{16 - 8}{1} = 8$.

Het differentiequotiënt over het interval $[2, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8 - 4}{1} = 4$.

Klopt, want $8 = 2 \times 4$.

b $f(p) = 2^p$, $f(p+1) = 2^{p+1}$ en $f(p+2) = 2^{p+2}$

Het differentiequotiënt over het interval $[p, p+1]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2^{p+1} - 2^p}{1} = 2^{p+1} - 2^p$$

Het differentiequotiënt over het interval $[p+1, p+2]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2^{p+2} - 2^{p+1}}{(p+2) - (p+1)} = \frac{2^{p+2} - 2^{p+1}}{1} = 2^{p+2} - 2^{p+1}$$

$2(2^{p+1} - 2^p) = 2^1 \cdot 2^{p+1} - 2^1 \cdot 2^p = 2^{p+2} - 2^{p+1}$, klopt.

6.3 Hellingen benaderen

intro De glijbaan is steiler bij de nummers 5 en 6.

De helling van de glijbaan is ongeveer gelijk aan de helling van lijn AB bij de nummers 4 en 7.

14 a Na $t = 6$ is grafiek A een rechte lijn.

b De rechte lijn gaat door $(7, 60)$ en $(9, 90)$.

In 2 seconden legt de auto dan 30 meter af.

De snelheid van de auto is dan 15 m/s.

c Grafiek B heeft een constante helling dus de bromfiets heeft een constante snelheid.

d $\frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{70}{7} = 10 \text{ m/s}$

e Op $t = 4$ zijn de hellingen en daarmee de snelheden gelijk.

15 a Lijn l gaat één naar rechts en twee omhoog, dus de richtingscoëfficiënt van l is 2.

b $f(4) = 3$, $f(4,01) = 3,020025$, $f(4,1) = 3,2025$, $f(4,5) = 4,0625$, $f(5) = 5,25$

$$[4, 5]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5,25 - 3}{5 - 4} = 2,25$$

$$[4; 4,5]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4,0625 - 3}{4,5 - 4} = 2,125$$

$$[4; 4,1]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3,2025 - 3}{4,1 - 4} = 2,025$$

$$[4; 4,01]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3,020025 - 3}{4,01 - 4} = 2,0025$$

c Ja, want de raaklijn l is bijna dezelfde lijn als de lijn door $(4, 3)$ en $(4,01; 3,020025)$.

- 16 a** $f(2) = 54$ en $f(8) = 144$
De richtingscoëfficiënt van lijn AC is $\frac{144 - 54}{8 - 2} = 15$.
- b** $f(2) = 54$ en $f(6) = 126$
 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{126 - 54}{4} = 18$
De gemiddelde verandering over het interval $[2, 6]$ is 18 en dat is de richtingscoëfficiënt van lijn AB .
- c** $f(2) = 54$ en $f(2,001) = 54,0239985$
 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{54,0239985 - 54}{2,001 - 2} = 23,9985$
De gemiddelde verandering is 23,9985.
- d** De helling is vermoedelijk 24.
- 17 a** $h(5) = 35$ en $h(5,001) = 34,979995$
 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{34,979995 - 35}{5,001 - 5} = -20,005$
De snelheid van de pijl is vermoedelijk 20 m/s.
- b** De gemiddelde verandering is negatief, dus de pijl gaat omlaag.
- 18 a** $f(2) = 4$ en $f(2,001) = 4,004001$
 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4,004001 - 4}{2,001 - 2} = 4,001$. De helling is vermoedelijk 4.
- b** $f(9) = 9$ en $f(9,001) = 9,000499986\dots$
 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9,000499986\dots - 9}{9,001 - 9} = 0,499986\dots$. De helling is vermoedelijk 0,5.
- c** $f(-2) = -3$ en $f(-1,999) = -3,00150075\dots$
 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3,00150075\dots - -3}{-1,999 - -2} = -1,500750375\dots$
De helling is vermoedelijk -1,5.
- 19 a** Je meet de gemiddelde snelheid over een zeer korte periode, dat komt aardig overeen met de snelheid op dat moment.
- b** 50 cm in 0,025 seconden komt overeen met 1 meter is 0,05 seconden dus 20 meter in 1 seconde. De auto reed met een snelheid van 20 m/s.
- c** $20 \text{ m/s} = \frac{20 \times 3600}{1000} = 72 \text{ km/uur}$
- 20 a** De gemiddelde snelheid is $\frac{8 - 3}{30 - 10} = 0,25 \text{ km per minuut}$.
- b** Deze raaklijn gaat ongeveer door $(10, 3)$ en $(40, 12\frac{1}{2})$.
De snelheid op $t = 15$ is dus ongeveer $\frac{12\frac{1}{2} - 3}{40 - 10} \approx 0,32 \text{ km per minuut}$.
- c** De raaklijn zal ongeveer gaan door $(40, 15)$ en $(100, 20)$.
De snelheid op $t = 18$ is dus ongeveer $\frac{20 - 15}{100 - 40} \approx 0,083 \text{ km per minuut}$.
- 018 a** $f(1,001) = 4 - 1,001^2 = 2,997999$
- b** $f(1) = 4 - 1^2 = 3$, dus $\Delta y = f(1,001) - f(1) = 2,997999 - 3 = -0,002001$
- c** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-0,002001}{0,001} = -2,001$
- d** De helling van f in $A(1, 3)$ is vermoedelijk -2.

- U4 a** Beide fietsers hebben de afstand van 45 km in 3 uur afgelegd, dus is voor beide fietsers de gemiddelde snelheid $45 : 3 = 15$ km/h.
- b** Op $t = 1,5$ lopen de grafieken ongeveer even steil, dus op $t = 1,5$ uur is de snelheid van beide fietsers even groot.
- c** De grafiek bij $s = 15t$ is een rechte lijn met richtingscoëfficiënt 15, dus de snelheid van fietser A is op elk moment 15 km per uur.

Fietser B:

$$s(1,5) = 29,25 \text{ en } s(1,501) = 29,264997$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{29,264997 - 29,25}{1,501 - 1,5} = 14,997$$

De snelheid van fietser B op $t = 1,5$ is ook ongeveer 15 km per uur, dus klopt.

6.4 De afgeleide functie

intro In C is de helling 0.

In het punt $(2, 0)$ is de helling -2 en in het punt $(4, -6)$ is de helling -4 .

- 21 a** $f(1) = 2$, $f(1,01) = 2,060602$, $f(1,001) = 2,006006002$ en $f(1,0001) = 2,00060006002$

$$\text{Over } [1; 1,01] \text{ is } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2,060602 - 2}{0,01} = 6,0602$$

$$\text{Over } [1; 1,001] \text{ is } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2,006006002 - 2}{0,001} = 6,006002$$

$$\text{Over } [1; 1,0001] \text{ is } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2,00060006002 - 2}{0,0001} = 6,0006002$$

- b** Het differentiequotiënt nadert naar 6.

- c** $f(1,000001) \approx 2,000006$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{2,000006 - 2}{0,000001} = 6,000006$$

- d** ja

- 22 a** Over $[6; 6,01]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{10 - 6,01} - \sqrt{10 - 6}}{0,01} = -0,2501564456$

$$\text{Over } [6; 6,001] \text{ is } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{10 - 6,001} - \sqrt{10 - 6}}{0,001} = -0,250015627$$

$$\text{Over } [6; 6,0001] \text{ is } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{10 - 6,0001} - \sqrt{10 - 6}}{0,0001} = -0,250001563$$

- b** Het differentiaalquotiënt voor $x = 6$ is $-0,25$ ofwel $-\frac{1}{4}$

- c** Over $[-6; -5,999]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{10 - -5,999} - \sqrt{10 - -6}}{0,001} = -0,1250019532$

Het differentiaalquotiënt voor $x = -6$ is $-0,125$ ofwel $-\frac{1}{8}$

6 Afgeleide functies

23 a Over $[1; 1,001]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1,001^2 - 1^2}{0,001} = 2,001$.

b Het differentiaalquotiënt voor $x = 1$ is 2.

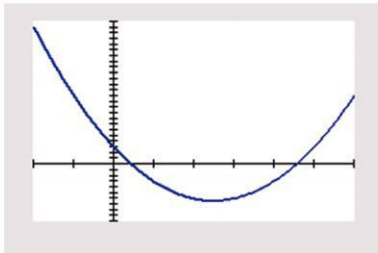
c Over $[2; 2,001]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2,001^2 - 2^2}{0,001} = 4,001$.

Het differentiaalquotiënt voor $x = 2$ is 4.

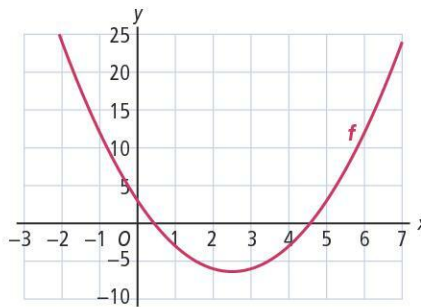
d De helling van de grafiek in $(1, 1)$ is 2 en die in $(2, 4)$ is 4.

e De helling van de grafiek in $(-1, 1)$ is -2 en die in $(-2, 4)$ is -4 .

24 a plot



schets



b Met de rekenmachine:

invoer: $y_1 = 1,5x^2 - 7,5x + 3$

venster: $-2 \leq x \leq 6, -10 \leq y \leq 25$

optie: minimum

De top is het punt $(2\frac{1}{2}, -6\frac{3}{8})$.

c

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	24	12	3	-3	-6	-6	-3
<i>helling</i>	-13,5	-10,5	-7,5	-4,5	-1,5	1,5	4,5

d Bij $x = 8,5$ is de helling 18.

e Er sprake van de top als de helling nul is.

25 a De helling is steeds twee keer zo groot als de x -waarde.

b De helling in het punt waarvoor $x = 5$ is dan 10.

c In het punt waarvoor $x = 10$ is de helling 20.

d De helling is ook te schrijven als $\frac{dy}{dx}$ dus $\frac{dy}{dx} = 2x$.

e In $(3\frac{1}{2}, 12\frac{1}{4})$ is de helling 7.

26 a $f'(x) = 2x$ dus de exacte helling in $(-5, 25)$ is $f'(-5) = 2 \cdot -5 = -10$.

b $\frac{dy}{dx} = 2x$, dus voor $x = 2,9$ is $\frac{dy}{dx} = 2 \cdot 2,9 = 5,8$.

c De helling is 9 dat wil zeggen $f'(x) = 9$ ofwel $2x = 9$ dus $x = 4\frac{1}{2}$

$f(4\frac{1}{2}) = (4\frac{1}{2})^2 = 20\frac{1}{4}$ dus in punt $(4\frac{1}{2}, 20\frac{1}{4})$ is de helling 9.

27 a De helling van de grafiek is in elk punt gelijk aan de richtingscoëfficiënt.

Voor $x = 2$ is de helling gelijk aan 7.

b Voor $x = -3$ is de helling ook 7.

c $f'(x) = 7$

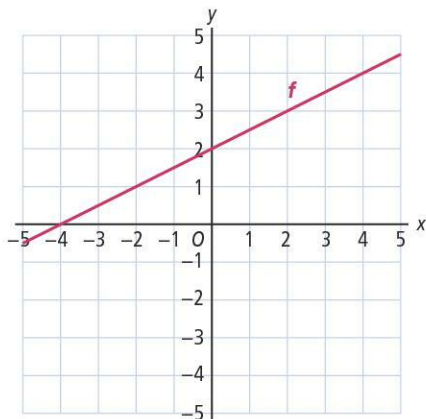
d De grafiek van g is een horizontale lijn met richtingscoëfficiënt 0, dus $g'(x) = 0$.

28 $s'(t) = 2t$

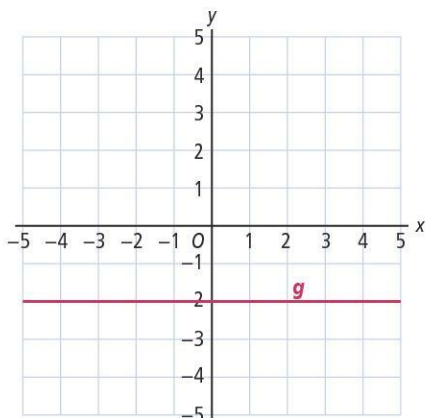
De snelheid van de auto op $t = 5$ is gelijk aan $s'(5) = 10$ m/s.

- 022 a** Over $[9; 9,01]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sqrt{9,01} - 2\sqrt{9}}{0,01} = 0,3332407921$
- b** Over $[9; 9,001]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sqrt{9,001} - 2\sqrt{9}}{0,001} = 0,3333240746$
- c** $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nadert voor $x = 9$ naar $0,333\dots$ ofwel $\frac{1}{3}$
- d** Het differentiaalquotiënt voor $x = 9$ is vermoedelijk $\frac{1}{3}$
- e** Over $[4; 4,001]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sqrt{4,001} - 2\sqrt{4}}{0,001} = 0,499968754$
- Het differentiaalquotiënt voor $x = 4$ is vermoedelijk $\frac{1}{2}$

027 a



- b** In $(0, 2)$ is de helling $\frac{1}{2}$
- c** In $(2, 3)$ is de helling $\frac{1}{2}$
- d** In elk punt van de grafiek is de helling gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de lijn, dus $\frac{1}{2}$
- e** $f'(x) = \frac{1}{2}$
- f**



- g** In elk punt van de grafiek is de helling gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de lijn, dus 0.
- h** $g'(x) = 0$

6 Afgeleide functies

U5 a Over $[5; 5,001]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{28 \cdot 5,001^2 - 28 \cdot 5^2}{0,001} = 280,028$

De snelheid na 5 minuten is ongeveer 280 km per minuut.

b met de rekenmachine:

invoer: $y_1 = 28x^2$ en $y_2 = \frac{d}{dx}(y_1)|_{x=5}$

optie: tabel

X	Y1	Y2		
1	28	56		
2	112	112		
3	252	168		
4	448	224		
5	700	280		
6	1008	336		
7	1372	392		
8	1792	448		
9	2268	504		
10	2800	560		
11	3388	616		

X=1

$$s'(t) = 56t$$

6.5 Differentiëren

intro De grafiek van f heeft helling 25 in het punt met x -coördinaat 5.

De grafiek van g heeft helling 125 in het punt met x -coördinaat 5.

29 a b

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$
-3	-27	27	9
-2	-8	12	4
-1	-1	3	1
0	0	0	0
1	1	3	1
2	8	12	4
3	27	27	9

c $a = 3$ want $f'(x) = 3 \cdot g(x)$

d De helling van de grafiek is daar $f'(10) = 3 \cdot 10^2 = 300$.

e $3x^2 = 75$

$$x^2 = 25$$

$$x = 5 \text{ of } x = -5$$

$$f(5) = 5^3 = 125 \text{ en } f(-5) = (-5)^3 = -125$$

dus in $(5, 125)$ en in $(-5, -125)$ is de helling 75.

30 a $f'(x) = 15x^{14}$

b $f'(x) = 51x^{50}$

c $f'(x) = 999x^{998}$

- 31 a** $f'(x) = 4x^3$ en $f'(1) = 4 \cdot 1^3 = 4$ dus de helling in $(1, 1)$ is 4.
b In $(-1, 1)$ is de helling $f'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 = -4$.
c $g'(x) = 5x^4$ en $g'(2) = 5 \cdot 2^4 = 80$ dus de helling in $(2, 32)$ is 80.
d $5x^4 = 405$ geeft $x^4 = \frac{405}{5} = 81$, dus $x = -3$ of $x = 3$.
 $g(-3) = (-3)^5 = -243$ en $g(3) = 3^5 = 243$
 In de punten $(3, 243)$ en $(-3, 243)$ is de helling 405.
- 32 a** $f'(x) = 2x$
 De helling in $P(3, 9)$ is $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$.
b a heeft de waarde van de helling van f in P , dus $a = 6$.
c $x = 3$ en $y = 9$ invullen bij $y = 6x + b$ geeft $9 = 6 \cdot 3 + b$ ofwel $b = -9$.
d $y = 6x - 9$
- 33 a** $f'(x) = 3x^2$ en $f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 = 3$
 $x = -1$ en $y = -1$ invullen bij $y = 3x + b$ geeft $-1 = 3 \cdot -1 + b$ ofwel $b = 2$.
 Een vergelijking van de raaklijn is $y = 3x + 2$.
b $f'(x) = 4x^3$ en $f'(2) = 4 \cdot 2^3 = 32$
 $x = 2$ en $y = 16$ invullen bij $y = 32x + b$ geeft $16 = 32 \cdot 2 + b$ ofwel $b = -48$.
 Een vergelijking van de raaklijn is $y = 32x - 48$.
c $f'(x) = 33x^{32}$ en $f'(1) = 33 \cdot 1^{32} = 33$
 $x = 1$ en $y = 1$ invullen bij $y = 33x + b$ geeft $1 = 33 \cdot 1 + b$ ofwel $b = -32$.
 Een vergelijking van de raaklijn is $y = 33x - 32$.
d $f'(x) = 100x^{99}$ en $f'(0) = 100 \cdot 0^{99} = 0$
 Als de helling nul is, dan is de raaklijn horizontaal.
 De raaklijn gaat door $(0, 0)$.
 Een vergelijking van de raaklijn is $y = 0$.
- 34 a** $f(x) = x^2$ dus $f'(x) = 2x$
 $2x = 7$ geeft $x = 3\frac{1}{2}$
 $f(3\frac{1}{2}) = 12\frac{1}{4}$ dus punt P is het punt $(3\frac{1}{2}, 12\frac{1}{4})$.
 $x = 3\frac{1}{2}$ en $y = 12\frac{1}{4}$ invullen bij $y = 7x + b$ geeft $12\frac{1}{4} = 7 \cdot 3\frac{1}{2} + b$ ofwel $b = -12\frac{1}{4}$
 Een vergelijking van l is $y = 7x - 12\frac{1}{4}$
b $g(x) = x^3$ dus $g'(x) = 3x^2$
 $3x^2 = 12$ geeft $x^2 = 4$ dus $x = -2$ of $x = 2$.
 $g(-2) = (-2)^3 = -8$ en $g(2) = 2^3 = 8$
 Punt Q is het punt $(-2, -8)$ of het punt $(2, 8)$.
 $x = -2$ en $y = -8$ invullen bij $y = 12x + b$ geeft $-8 = 12 \cdot -2 + b$ ofwel $b = 16$.
 $x = 2$ en $y = 8$ invullen bij $y = 12x + b$ geeft $8 = 12 \cdot 2 + b$ ofwel $b = -16$.
 Een vergelijking van m is $y = 12x + 16$ of $y = 12x - 16$.
- 35 a** $f(x) = x^2$ dus $f'(x) = 2x$ en $f'(1) = 2$
 $x = 1$ en $y = 1$ invullen bij $y = 2x + b$ geeft $1 = 2 \cdot 1 + b$ ofwel $b = -1$.
 Een vergelijking van de raaklijn is $y = 2x - 1$.

6 Afgeleide functies

- b** Een lijn loodrecht op l heeft richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{2}$ want $2 \cdot -\frac{1}{2} = -1$.
 $x = 1$ en $y = 1$ invullen bij $y = -\frac{1}{2}x + b$ geeft $1 = -\frac{1}{2} \cdot 1 + b$ ofwel $b = 1\frac{1}{2}$
Een vergelijking van de lijn AB is $y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$
Lijn AB snijden met de grafiek van f :
 $x^2 = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$
 $x^2 + \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2} = 0$
 $(x - 1)(x + 1\frac{1}{2}) = 0$
 $x - 1 = 0$ of $x + 1\frac{1}{2} = 0$
 $x = 1$ of $x = -1\frac{1}{2}$
 $x = 1$ geeft punt A , dus $x = -1\frac{1}{2}$ geeft punt B .
De helling in punt B is $f'(-1\frac{1}{2}) = 2 \cdot -1\frac{1}{2} = -3$.
- c** De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in C is gelijk aan die van lijn AB , dus $-\frac{1}{2}$
In punt C geldt daarom: $f'(x) = -\frac{1}{2}$
 $2x = -\frac{1}{2}$
 $x = -\frac{1}{4}$ en $y = f(-\frac{1}{4}) = \frac{1}{16}$
Punt C is het punt $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{16})$.
- d** Omdat de parabool symmetrisch is in de y -as, moeten deze raaklijnen richtingscoëfficiënten -1 en 1 hebben.
 $2x = -1$ geeft $x = -\frac{1}{2}$ en $2x = 1$ geeft $x = \frac{1}{2}$
 $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ en $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$
De punten D en E zijn $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.
- 031 a** Als $f(x) = x^6$ dan is $f'(x) = 6 \cdot x^{6-1}$ ofwel $f'(x) = 6x^5$
b $y = f(2) = 2^6 = 64$
c $f'(2) = 6 \cdot 2^5 = 192$
d $6x^5 = -6$
 $x^5 = -1$
 $x = -1$
e $y = f(-1) = (-1)^6 = 1$
f Als $g(x) = x^3$ dan is $g'(x) = 3 \cdot x^{3-1}$ ofwel $g'(x) = 3x^2$.
 $g'(3) = 3 \cdot 3^2 = 27$ dus de helling in $(3, 27)$ is 27 .
g De helling is 108 in het punt waarvoor geldt: $3x^2 = 108$
 $x^2 = 36$
 $x = -6$ of $x = 6$
 $g(-6) = (-6)^3 = -216$ en $g(6) = 6^3 = 216$
In de punten $(-6, -216)$ en $(6, 216)$ is de helling gelijk aan 108 .
- 034 a** De helling van de grafiek van f in P is ook 8 .
b $f'(x) = 2 \cdot x^{2-1} = 2x$
c $2x = 8$ dus $x = 4$
d $f(4) = 4^2 = 16$ dus $y = 16$
e $P(4, 16)$
f $x = 4$ en $y = 16$ invullen bij $y = 8x + b$ geeft $16 = 8 \cdot 4 + b$ ofwel $b = -16$.
Een vergelijking van l is $y = 8x - 16$.

- U6** $f'(x) = 2x$ en $g'(x) = 3x^2$
 Als f en g precies dezelfde helling hebben, dan moet $f'(x) = g'(x)$ ofwel $2x = 3x^2$
 $x = 0$ of $2 = 3x$
 $x = 0$ of $x = \frac{2}{3}$
 De helling is $f'(\frac{2}{3}) = 2 \cdot \frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$ (controle: $g'(\frac{2}{3}) = 3 \cdot (\frac{2}{3})^2 = 3 \cdot \frac{4}{9} = 1\frac{1}{3}$, klopt).

6.6 Regels voor differentiëren

intro Je beweegt je dan door de gang met een snelheid van $1 + 1,5 = 2,5$ m/s.
 Je beweegt je dan met $1 - 1,5 = -0,5$ m/s, ofwel 0,5 m/s de andere kant op.

- 36 a** Door een grafiek omhoog te verschuiven verandert de helling niet, dus die hellingen zijn gelijk.
b Voor elke waarde van x zijn de hellingen van de grafieken van f en g gelijk. Dus is $f'(x) = g'(x)$.

- 37 a** met de rekenmachine:
 invoer: $y_1 = x^2$, $y_2 = 3x^2$, $y_3 = \frac{d}{dx}(y_1)|_{x=x}$ en $y_4 = \frac{d}{dx}(y_2)|_{x=x}$

optie: tabel

De kolom Y3 geeft de hellingen van de grafiek van f en de kolom Y4 geeft die van de grafiek van g .

X	Y1	Y2	Y3	Y4
0	0	0	0	0
1	1	3	2	6
2	4	12	4	12
3	9	27	6	18
4	16	48	8	24
5	25	75	10	30
6	36	108	12	36
7	49	147	14	42
8	64	192	16	48
9	81	243	18	54
10	100	300	20	60

X=0

- b** Zie de kolommen Y3 en Y4; de helling van de grafiek van f moet met 3 vermenigvuldigd worden om de helling van de grafiek van g te krijgen.
c $g'(x) = 3 \cdot f'(x) = 3 \cdot 2x$ dus $g'(x) = 6x$
- 38 a** Voor f : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{2} = 4$
 Voor g : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g(3) - g(1)}{3 - 1} = \frac{27 - 1}{2} = 13$
 Voor s : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = \frac{36 - 2}{2} = 17$
- b** De gemiddelde toename van $s(x)$ over het interval $[1, 3]$ is gelijk aan de som van de gemiddelde toenames van $f(x)$ en $g(x)$ over dat interval.
- c** $f'(x) = 2x$, dus $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$
 $g'(x) = 3x^2$, dus $g'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$
- d** Met de optie $\frac{dy}{dx}$ vind je $s'(1) = 5$.
- e** $s'(1) = f'(1) + g'(1)$

- 39** a $f'(x) = 60x^2 - 6x$ d $q'(p) = 5p^5 - 32p^3 + 7$
 b $h'(x) = -4$ e $k'(x) = 0$
 c $s'(t) = 20t^3 + 4t$ f $z'(t) = 2001t^{2000} + 2000t^9$

- 40** a $f'(x) = -12x + 5$
 De helling is $f'(1) = -12 + 5 = -7$.
 b $g'(x) = -10x^4 + 6x + 4$
 De helling is $g'(1) = -10 + 6 + 4 = 0$.
 c $h(x) = (2x - 6)(5x + 1)$
 $h(x) = 10x^2 + 2x - 30x - 6$ ofwel $h(x) = 10x^2 - 28x - 6$
 $h'(x) = 20x - 28$
 De helling is $h'(1) = 20 - 28 = -8$.
 d $k(x) = x^2(5 - x^3)$
 $k(x) = 5x^2 - x^5$
 $k'(x) = 10x - 5x^4$
 De helling is $k'(1) = 10 - 5 = 5$.
 e $l(x) = (7x - 2)^2$
 $l(x) = 49x^2 - 28x + 4$
 $l'(x) = 98x - 28$
 De helling is $l'(1) = 98 - 28 = 70$.
 f $m(x) = (x^2 + 1)(5x - 8)$
 $m(x) = 5x^3 - 8x^2 + 5x - 8$
 $m'(x) = 15x^2 - 16x + 5$
 De helling is $m'(1) = 15 - 16 + 5 = 4$.

- 41** a $f'(x) = 2x + 6$
 b $2x + 6 = 0$
 $2x = -6$
 $x = -3$
 $f(-3) = (-3)^2 + 6 \cdot -3 + 5 = -4$, dus $y = -4$
 $f'(x) = 0$ geldt voor het punt $(-3, -4)$.
 c $(-3, -4)$ is de top van de parabool.

- 42** a De grafiek heeft een horizontale raaklijn bij $x = -3$, $x = 1$ en $x = 5$.
 b $f'(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$
 $f'(-3) = -27 - 27 + 39 + 15 = 0$, klopt.
 $f'(1) = 1 - 3 - 13 + 15 = 0$, klopt.
 $f'(5) = 125 - 75 - 65 + 15 = 0$, klopt.

- 43** a $f(x) = -3x^2 + 18x - 20$
 $f'(x) = -6x + 18$
 $f'(x) = 0$ als $-6x + 18 = 0$
 $-6x = -18$
 $x = 3$
 $f(3) = -3 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 - 20 = 7$
 De top is het punt $(3, 7)$.

- b** $f(x) = x^3 - 12x$
 $f'(x) = 3x^2 - 12$
 $f'(x) = 0$ als $3x^2 - 12 = 0$
 $3x^2 = 12$
 $x^2 = 4$
 $x = -2$ of $x = 2$
 $f(-2) = (-2)^3 - 12 \cdot -2 = 16$ en $f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 = -16$
De toppen zijn de punten $(-2, 16)$ en $(2, -16)$.
- c** $f(x) = x^4 - 2x^2 - 4$
 $f'(x) = 4x^3 - 4x$
 $f'(x) = 0$ als $4x^3 - 4x = 0$
 $4x(x^2 - 1) = 0$
 $4x = 0$ of $x^2 - 1 = 0$
 $x = 0$ of $x^2 = 1$
 $x = 0$ of $x = -1$ of $x = 1$
 $f(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^2 - 4 = -4$, $f(-1) = (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^2 - 4 = -5$ en
 $f(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^2 - 4 = -5$
De toppen zijn de punten $(0, -4)$, $(-1, -5)$ en $(1, -5)$.

- 040 a** $(3x - 8)^2 = (3x - 8)(3x - 8)$
 $= 9x^2 - 48x + 64$
- b** $f'(x) = 18x - 48$
- c** De helling is $f'(-1) = 18 \cdot -1 - 48 = -66$.
- d** $f(x) = -3x^2 + 4x - 5$
 $f'(x) = -6x + 4$
De helling is $f'(1) = -6 \cdot 1 + 4 = -2$.
- e** $g(x) = -9x^6 + 8x^5 + 7x$
 $g'(x) = -54x^5 + 40x^4 + 7$
De helling is $g'(1) = -54 + 40 + 7 = -7$.
- f** $h(x) = (4x + 3)(3x - 4)$
 $h(x) = 12x^2 - 16x + 9x - 12$ ofwel $h(x) = 12x^2 - 7x - 12$
 $h'(x) = 24x - 7$
De helling is $h'(1) = 24 - 7 = 17$.
- g** $k(x) = x(2x - x^4)$
 $k(x) = 2x^2 - x^5$
 $k'(x) = 4x - 5x^4$
De helling is $k'(1) = 4 - 5 = -1$.
- h** $l(x) = (5x + 7)^2$
 $l(x) = 25x^2 + 35x + 35x + 49$ ofwel $l(x) = 25x^2 + 70x + 49$
 $l'(x) = 50x + 70$
De helling is $l'(x) = 50 + 70 = 120$.
- i** $m(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$
 $m(x) = x^4 - x^2 + x^2 - 1$ ofwel $m(x) = x^4 - 1$
 $m'(x) = 4x^3$
De helling is $m'(1) = 4 \cdot 1^3 = 4$.

- 043 a** $f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{3}x^2 - 2 \cdot 2x + 0$ ofwel $f'(x) = x^2 - 4x$, klopt.

- b** $f'(x) = 0$
 $x^2 - 4x = 0$
 $x(x - 4) = 0$
 $x = 0$ of $x - 4 = 0$
 $x = 0$ of $x = 4$

6 Afgeleide functies

- c $f(0) = \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 1 = 1$
 $f(4) = \frac{1}{3} \cdot 4^3 - 2 \cdot 4^2 + 1 = -9\frac{2}{3}$
- d De toppen zijn de punten $(0, 1)$ en $(4, -9\frac{2}{3})$.
- e $f(x) = -4x^2 + 12x - 18$
 $f'(x) = -8x + 12$
 $f'(x) = 0$ als $-8x + 12 = 0$
 $-8x = -12$
 $x = 1\frac{1}{2}$
 $f(1\frac{1}{2}) = -4 \cdot (1\frac{1}{2})^2 + 12 \cdot 1\frac{1}{2} - 18 = -9$
De top is het punt $(1\frac{1}{2}, -9)$.
- f $f(x) = 6x - 2x^3$
 $f'(x) = 6 - 6x^2$
 $f'(x) = 0$ als $6 - 6x^2 = 0$
 $6x^2 = 6$
 $x^2 = 1$
 $x = -1$ of $x = 1$
 $f(-1) = 6 \cdot -1 - 2 \cdot (-1)^3 = -4$
 $f(1) = 6 \cdot 1 - 2 \cdot 1^3 = 4$
De toppen zijn de punten $(-1, -4)$ en $(1, 4)$.
- g $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 16x + 20$
 $f'(x) = 2x^3 - 16$
 $f'(x) = 0$ als $2x^3 - 16 = 0$
 $2x^3 = 16$
 $x^3 = 8$
 $x = 2$
 $f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^4 - 16 \cdot 2 + 20 = -4$
De top is het punt $(2, -4)$.

U7 Uit $f'(x) = x^2 + 2x$ volgt $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + c$, waarbij c een getal is.
 $f(3) = 7$ geeft $7 = \frac{1}{3} \cdot 3^3 + 3^2 + c$ ofwel $7 = 18 + c$, dus $c = -11$.
 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 11$

6.7 Gemengde opdrachten

- 44** f is een dalende grafiek, dus daar horen negatieve toenames bij.
 g is een stijgende grafiek, dus daar horen positieve toenames bij.
A hoort bij f en B hoort bij g .

- 45** a $f'(x) = 3$
b $f'(x) = -2x + 4$
c $f(x) = x^2 + 4x + 4 - 17$ ofwel $f(x) = x^2 + 4x - 13$
 $f'(x) = 2x + 4$
d $f(x) = 3x - 9x^2 + 1 - 3x$ ofwel $f(x) = -9x^2 + 1$
 $f'(x) = -18x$
e $f(x) = -6x^5$
 $f'(x) = -30x^4$
f $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4x^2 - 12$ ofwel $f(x) = x^4 + x^2 - 12$
 $f'(x) = 4x^3 + 2x$

46 a $\frac{2}{3}x^3 - 8x = 0$

$$x\left(\frac{2}{3}x^2 - 8\right) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } \frac{2}{3}x^2 - 8 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } \frac{2}{3}x^2 = 8$$

$$x = 0 \text{ of } x^2 = 12$$

$$x = 0 \text{ of } x = -\sqrt{12} \text{ of } x = \sqrt{12}$$

De grafiek van f snijdt de x -as in de punten $(0, 0)$, $(-\sqrt{12}, 0)$ en $(\sqrt{12}, 0)$.

b $f'(x) = 2x^2 - 8$

$$f'(x) = 0 \text{ als } 2x^2 - 8 = 0$$

$$2x^2 = 8$$

$$x^2 = 4$$

$$x = -2 \text{ of } x = 2$$

$$f(-2) = \frac{2}{3} \cdot (-2)^3 - 8 \cdot (-2) = 10\frac{2}{3}$$

$$f(2) = \frac{2}{3} \cdot 2^3 - 8 \cdot 2 = -10\frac{2}{3}$$

De toppen zijn de punten $(-2, 10\frac{2}{3})$ en $(2, -10\frac{2}{3})$.

c $f'(3) = 2 \cdot 3^2 - 8 = 10$ dus de richtingscoëfficiënt van de raaklijn is 10.

$$f(3) = \frac{2}{3} \cdot 3^3 - 8 \cdot 3 = -6 \text{ dus het raakpunt is het punt } (3, -6).$$

$$x = 3 \text{ en } y = -6 \text{ invullen bij } y = 10x + b \text{ geeft } -6 = 10 \cdot 3 + b \text{ ofwel } b = -36.$$

Een vergelijking van de raaklijn is $y = 10x - 36$.

47 a De helling van de grafiek in het raakpunt is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van l , dus 6.

b $f'(x) = 6x$

$$f'(x) = 6 \text{ als } 6x = 6 \text{ dus als } x = 1$$

$$f(1) = 3 \cdot 1^2 - 12 = -9$$

In het punt $(1, -9)$ is de helling van de grafiek van f gelijk aan 6.

c Het punt $(1, -9)$ ligt ook op l , want $-9 = 6 \cdot 1 - 15$.

Dus ja, l raakt aan de grafiek van f .

48 a $A(2) = 3 \cdot 2^3 - 10 \cdot 2^2 + 28 \cdot 2 = 40$, dus hij heeft 40 km afgelegd.

Zijn gemiddelde snelheid was $40 : 2 = 20$ km/uur.

b $A'(t) = 9t^2 - 20t + 28$

$$A'(0) = 28 \text{ dus in het begin was zijn snelheid } 28 \text{ km/uur.}$$

c $A'(2) = 9 \cdot 2^2 - 20 \cdot 2 + 28 = 24$ dus aan het eind was zijn snelheid 24 km/uur.

d $9t^2 - 20t + 28 < 20$

met de rekenmachine:

$$\text{invoer: } y_1 = 9x^2 - 20x + 28 \text{ en } y_2 = 20$$

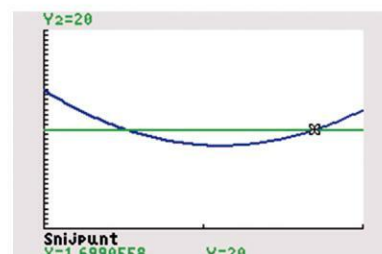
$$\text{venster: } 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 40$$

optie: snijpunten

De oplossingen zijn $x \approx 0,5$ en $x \approx 1,7$.

Zie de plot hiernaast.

Tussen $t \approx 0,5$ en $t \approx 1,7$ was zijn snelheid kleiner dan zijn gemiddelde snelheid.



Onderzoeksoopdrachten

- 49** $f(x) = 2x^2 + 3$, hieruit volgt $f(1) = 2 \cdot 1^2 + 3 = 5$, dus het raakpunt is $A(1, 5)$.
 $f'(x) = 4x$, hieruit volgt $f'(1) = 4$.
 $x = 1$ en $y = 5$ invullen bij $y = 4x + b$ geeft $5 = 4 \cdot 1 + b$ ofwel $b = 1$.
 Een vergelijking van de raaklijn is $y = 4x + 1$.
 Deze raaklijn snijden met x -as: $4x + 1 = 0$
 $4x = -1$
 $x = -\frac{1}{4}$
 De raaklijn snijdt de x -as in punt $B(-\frac{1}{4}, 0)$.
 Het derde punt van de driehoek is $C(1, 0)$.
 Hieruit volgt dat de oppervlakte van driehoek ABC is $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot 5 = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}$
 De oppervlakte is dus groter dan 3.

- 50** $f'(x) = 2x$
 Er moet gelden $f'(a) = g'(a)$, dus $2a = g'(a)$.
 met de rekenmachine:
 invoer: $y_1 = 2x$, $y_2 = 2^x$, $y_3 = \frac{d}{dx}(y_2)|_{x=x}$
 venster: $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 10$
 optie: snijpunten (van y_1 en y_3)
 De oplossingen zijn $x \approx 0,485$ en $x \approx 3,212$.
 De grafieken van y_1 en y_3 snijden elkaar twee keer, dus er zijn twee waarden van a waarvoor de helling van de grafiek van f in P gelijk is aan de helling van de grafiek van g in Q , namelijk $a \approx 0,485$ en $a \approx 3,212$.
 Bij $a \approx 0,485$ is $P(0,49; 0,24)$ en $Q(0,49; 1,40)$.
 Bij $a \approx 3,212$ is $P(3,21; 10,32)$ en $Q(3,21; 9,27)$.

Samenvatting

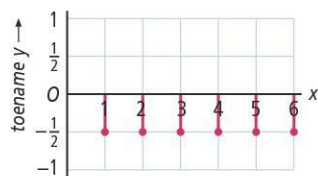
S1 a Over het interval $[0, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{3 - 12}{3} = -3$

- b** Het differentiequotient over het interval $[-13, -2]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(-2) - f(-13)}{-2 - (-13)} = \frac{-12 - (-1)}{11} = -1$$

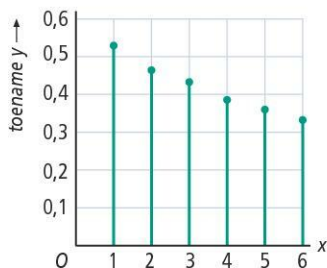
S2 a $f(x) = 5 - \frac{1}{2}x$

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	$4\frac{1}{2}$	4	$3\frac{1}{2}$	3	$2\frac{1}{2}$	2
toename		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$



b $g(x) = 2\sqrt{x+3}$

x	0	1	2	3	4	5	6
y	3,46	4	4,47	4,90	5,29	5,66	6
toename		0,54	0,47	0,43	0,39	0,37	0,34



S3 a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{4,001} - \sqrt{4}}{0,001} = 0,24998\dots$

De helling in (4, 2) is ongeveer 0,25.

b Over het interval $[4; 4,001]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1,5 \cdot 4,001 \cdot \sqrt{4,001} - 1,5 \cdot 4 \cdot \sqrt{4}}{0,001} = 4,500\dots$

De snelheid op $t = 4$ is 4,5 m/s.

S4 a $f'(x) = 6x^5$

c $s'(t) = 12t^{11}$

b $p'(q) = 25q^{24}$

d $g'(z) = 2000z^{1999}$

S5 a $f'(x) = 100x^{99} - 100x^9 + 100$

b $f'(x) = 12x^2 - 12x + 8$

S6 a $f'(x) = 5x^4 - 9x^2$ en $f'(2) = 5 \cdot 2^4 - 9 \cdot 2^2 = 44$

$x = 2$ en $y = 10$ invullen bij $y = 44x + b$ geeft $10 = 44 \cdot 2 + b$ ofwel $b = -78$.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = 44x - 78$.

b $f'(x) = -6 - 6x$ en $f'(-4) = -6 - 6 \cdot -4 = 18$

$x = -4$ en $y = -12$ invullen bij $y = 18x + b$ geeft $-12 = 18 \cdot -4 + b$ ofwel $b = 60$.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = 18x + 60$.

S7 $f(x) = 12x - x^3$

$f'(x) = 12 - 3x^2$

$f'(x) = 0$ als $12 - 3x^2 = 0$

$3x^2 = 12$

$x^2 = 4$ dus $x = -2$ of $x = 2$

$f(-2) = -16$ en $f(2) = 16$

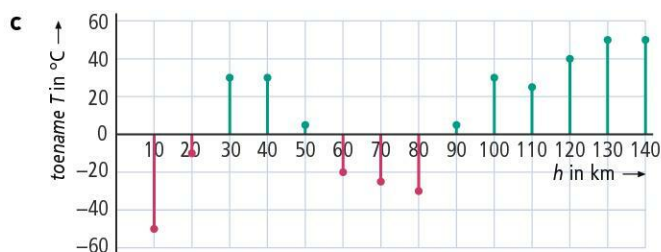
De toppen zijn de punten $(-2, -16)$ en $(2, 16)$.

Test jezelf

T1 a Bij de overgang van toenames naar afnames neemt de temperatuur niet meer toe en is de temperatuur ongeveer op zijn hoogst.

b Dan is de temperatuur $0 - 50 - 10 + 30 = -30^\circ\text{C}$.

6 Afgeleide functies



T2 a $f'(x) = -2x$

De helling is $f'(-1) = -2 \cdot -1 = 2$.

b Als de helling gelijk is aan 6, dan moet gelden: $-2x = 6$

$$x = -3$$

$$f(-3) = -9 + 3 = -6$$

De coördinaten zijn $(-3, -6)$.

c $f'(4) = -2 \cdot 4 = -8$

$x = 4$ en $y = -13$ invullen bij $y = -8x + b$ geeft $-13 = -8 \cdot 4 + b$ ofwel

$$b = 19$$

Een vergelijking van de raaklijn is $y = -8x + 19$.

T3 a $p(x) = -\frac{1}{2}x^8 + 8\frac{1}{2}$
 $p'(x) = -4x^7$

e $h(t) = 4 - 1\frac{1}{3}t + \frac{1}{9}t^2 + \frac{2}{9}t$
 $h(t) = \frac{1}{9}t^2 - 1\frac{1}{9}t + 4$

$$h'(t) = \frac{2}{9}t - 1\frac{1}{9}$$

b $d(p) = (3p)^5 = 243p^5$
 $d'(p) = 1215p^4$

f $N(t) = 9t^2 - 25$
 $N'(t) = 18t$

c $f'(x) = 0,2 - 2x^{19}$

g $A'(u) = -1$

d $s(t) = 16t^2 + 32t + 16 - 4$
 $s'(t) = 32t + 32$

h $h'(r) = 3\pi r^2 - \pi^3$

T4 a $8x - \frac{1}{10}x^5 = 0$
 $80x - x^5 = 0$

$$x(80 - x^4) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } 80 - x^4 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x^4 = 80$$

$$x = 0 \text{ of } x = -\sqrt[4]{80} \text{ of } x = \sqrt[4]{80}$$

De snijpunten met de x -as zijn $(0, 0)$, $(-\sqrt[4]{80}, 0)$ en $(\sqrt[4]{80}, 0)$.

b $f'(x) = 8 - \frac{1}{2}x^4$
 $8 - \frac{1}{2}x^4 = 0$
 $\frac{1}{2}x^4 = 8$
 $x^4 = 16$

$$x = -2 \text{ of } x = 2$$

$$f(-2) = -12\frac{4}{5} \text{ en } f(2) = 12\frac{4}{5}$$

De toppen zijn de punten $(-2, -12\frac{4}{5})$ en $(2, 12\frac{4}{5})$.

c $f'(x) = 8 - \frac{1}{2}x^4$

$f'(x)$ is maximaal 8 als $x = 0$.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = 8x$.

T5 De grafieken hebben een punt gemeenschappelijk, dus $g(a) = h(a)$.

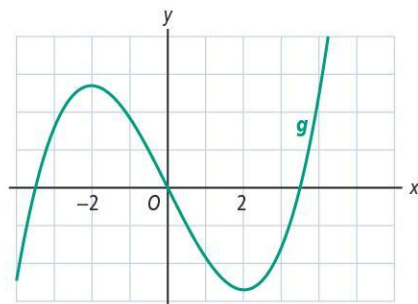
De twee grafieken hebben in het gemeenschappelijke punt dezelfde helling, dus $g'(a) = h'(a)$.

- T6 a** De grafiek van g heeft een top als de grafiek van g overgaat van dalen naar stijgen, dus als de grafiek van g' , dus f , van onder de x -as naar boven de x -as gaat. Dat is bij $x = 2$.

De grafiek van g heeft ook een top als de grafiek van g overgaat van stijgen naar dalen, dus als de grafiek van g' , dus f , van boven de x -as naar onder de x -as gaat. Dat is bij $x = -2$.

Je kunt ook zeggen dat functie g een top heeft als de afgeleide functie f nul is, en de nulpunten van f zijn $x = -2$ en $x = 2$.

- b** Een mogelijke grafiek:



- T7 a** De steen raakt de grond als $h = 0$.

$$45 - 4,9t^2 = 0$$

$$t^2 = \frac{45}{4,9}$$

$$t = \sqrt{\frac{45}{4,9}} = 3,0304\dots$$

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{0 - 45}{3,0304\dots} \approx -14,8$$

De gemiddelde valsnelheid is ongeveer 14,8 m/s omlaag.

- b** $\frac{dh}{dt} = -9,8t$

$$\text{Voor } t = 3,0304\dots \text{ is } \frac{dh}{dt} = -9,8 \cdot 3,0304\dots = -29,698\dots$$

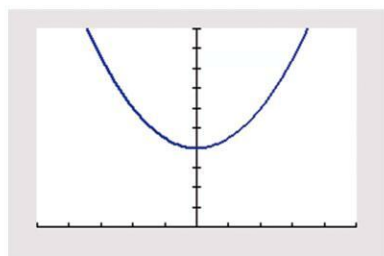
De snelheid van de steen is op dat moment ongeveer 29,7 m/s omlaag.

- c** $-9,8t = -14,9$

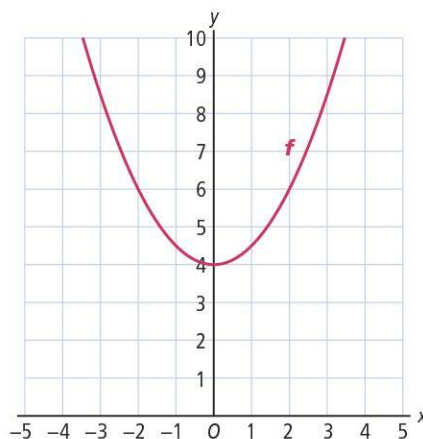
$$t = \frac{14,9}{9,8} \approx 1,5$$

Op $t \approx 1,5$ seconde is de snelheid van de steen gelijk aan de gemiddelde snelheid.

- T8 a** plot



schets



6 Afgeleide functies

- b** Er zijn twee raaklijnen die door $(0, 0)$ gaan.
c Er moet gelden: $ax = \frac{1}{2}x^2 + 4$ én $f'(x) = a$, dus $x = a$.
 Substitutie van $x = a$ in $ax = \frac{1}{2}x^2 + 4$ geeft $a^2 = \frac{1}{2}a^2 + 4$.
 $\frac{1}{2}a^2 = 4$ dus $a^2 = 8$
 $a = -\sqrt{8}$ of $a = \sqrt{8}$

T9 a Als de helling gelijk is aan 0, dan is $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 3x^3 - 6x^2$$

$$3x^3 - 6x^2 = 0$$

$$3x^2(x - 2) = 0$$

$$3x^2 = 0 \text{ of } x - 2 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 2$$

b Uit de grafiek is af te lezen dat de grafiek van f een top heeft bij $x = 2$.

$$f(2) = -4, \text{ dus } y = -4.$$

c $\frac{3}{4}x^4 - 2x^3 = -x^2$

$$3x^4 - 8x^3 + 4x^2 = 0$$

$$x^2(3x^2 - 8x + 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } 3x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } D = 64 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 16$$

$$x = 0 \text{ of } x = \frac{8 + \sqrt{16}}{6} = 2 \text{ of } x = \frac{8 - \sqrt{16}}{6} = \frac{2}{3}$$

$$g(0) = 0, g(2) = -4 \text{ en } g\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{9}$$

De snijpunten zijn $(0, 0)$, $(2, -4)$ en $\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{9}\right)$.

d in $(0, 0)$: $f'(0) = 0$, dus de raaklijn loopt horizontaal.

$g'(0) = 0$, dus ook deze raaklijn loopt horizontaal.

in $(0, 0)$ maken de raaklijnen een hoek van 0° met elkaar.

in $(2, -4)$: $f'(2) = 0$, dus de raaklijn loopt horizontaal.

$$g'(2) = -4 \text{ dus } \tan(\alpha) = 4 \text{ en } \alpha = 75,963\dots^\circ$$

in $(2, -4)$ maken de raaklijnen een hoek van ongeveer 76° met elkaar.

$$\text{in } \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{9}\right): f'\left(\frac{2}{3}\right) = -1\frac{7}{9}$$

$$\tan(\alpha) = 1\frac{7}{9} \text{ geeft } \alpha = 60,642\dots^\circ$$

$$g'\left(\frac{2}{3}\right) = -1\frac{1}{3}$$

$$\tan(\alpha) = 1\frac{1}{3} \text{ geeft } \alpha = 53,130\dots^\circ$$

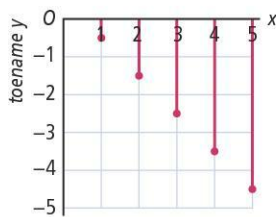
$$60,642\dots - 53,130 = 7,511\dots$$

in $\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{9}\right)$ maken de raaklijnen een hoek van ongeveer 8° met elkaar.

Extra oefening

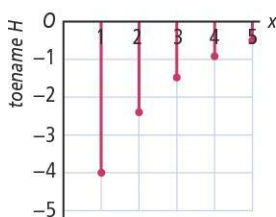
E1 a $y = 10 - \frac{1}{2}x^2$

x	0	1	2	3	4	5
y	10	$9\frac{1}{2}$	8	$5\frac{1}{2}$	2	$-2\frac{1}{2}$
<i>toename</i>		$-\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{2}$



b $H = 10 \cdot 0,6^x$

x	0	1	2	3	4	5
H	10	6	3,6	2,16	1,296	0,778
toename		-4	-2,4	-1,44	-0,864	-0,518



E2 a Over het interval $[-1; -0,999]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(-0,999) - f(-1)}{0,001} =$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4,496... - 4,5}{0,001} \approx -3,65$ dus de helling in $(1, -2)$ is ongeveer $-3,65$.

b Met de optie $\frac{dy}{dx}$ op je rekenmachine: de helling in $(2, 0)$ is ongeveer $-1,23$.

E3 a $f'(x) = 17x^{16}$

c $f'(x) = 0$

b $f'(x) = -3$

d $f'(x) = 2020x^{2019}$

E4 a $f'(x) = -7$

b $h'(x) = -6x + 5x^3 - 3000x^4$

c $f(t) = 8t^2 + 24t - 6t - 18$

$f(t) = 8t^2 + 18t - 18$

$f'(t) = 16t + 18$

d $g(t) = 25t^2 - 90t + 81$

$g'(t) = 50t - 90$

E5 $f'(x) = 1\frac{1}{2}x^2 - 8$

$f'(1) = 1\frac{1}{2} \cdot 1^2 - 8 = -6\frac{1}{2}$

Een vergelijking van de raaklijn is van de vorm $y = -6\frac{1}{2}x + b$.

$f(1) = 1\frac{1}{2} \cdot 1^3 - 8 \cdot 1 = -7\frac{1}{2}$

$x = 1$ en $y = -7\frac{1}{2}$ invullen geeft $-7\frac{1}{2} = -6\frac{1}{2} \cdot 1 + b$, dus $b = -1$.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = -6\frac{1}{2}x - 1$.

6 Afgeleide functies

E6 a $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$$f'(x) = 0 \text{ als } 3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x - 2) = 0$$

$$3x = 0 \text{ of } x - 2 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 2$$

$$f(0) = 0 \text{ en } f(2) = 8 - 12 = -4$$

De toppen zijn de punten $(0, 0)$ en $(2, -4)$.

b $k'(x) = 20x^3 - 10x^4$

$$k'(x) = 0 \text{ als } 20x^3 - 10x^4 = 0$$

$$10x^3(2 - x) = 0$$

$$10x^3 = 0 \text{ of } 2 - x = 0$$

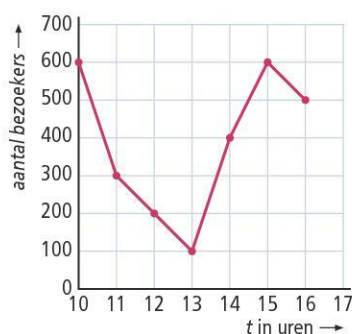
$$x = 0 \text{ of } x = 2$$

$$k(0) = 0 \text{ en } k(2) = 5 \cdot 16 - 2 \cdot 32 = 16$$

De toppen zijn de punten $(0, 0)$ en $(2, 16)$.

E7

t in uren	10	11	12	13	14	15	16
aantal bezoekers	600	300	200	100	400	600	500
toename		-300	-100	-100	300	200	-100



E8 a Op $t = 0$ is $s = 0$.

$$\text{Op } t = 60 \text{ is } s = \frac{20 \cdot 60^2}{3 \cdot 60 + 20} = \frac{72000}{200} = 360.$$

$$\text{De gemiddelde snelheid is } \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{360 - 0}{60} = 6 \text{ m/s.}$$

b Op $t = 10,01$ is $s = 40,056\dots$ en op $t = 10$ is $s = 40$.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{40,0056\dots - 40}{0,01} = \frac{0,0056\dots}{0,01} \approx 5,6$$

Na 10 seconden is de snelheid van Jos ongeveer 5,6 m/s.

c Op $t = 60,001$ is $s = 360,0066$; op $t = 60$ is $s = 360$.

$$\text{De snelheid van Jos is } \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{360,0066 - 360}{0,001} = \frac{0,0066}{0,001} = 6,6 \text{ m/s en dat is}$$

ongeveer 23,8 km/uur.

E9 $f'(x) = x^2 - 6x + 5$

$$\text{De helling is gelijk aan 12 als } x^2 - 6x + 5 = 12.$$

$$x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$(x + 1)(x - 7) = 0$$

$$x + 1 = 0 \text{ of } x - 7 = 0$$

$$x = -1 \text{ of } x = 7$$

$$f(-1) = -\frac{1}{3} - 3 - 5 = -8\frac{1}{3} \text{ en } f(7) = \frac{1}{3} \cdot 343 - 3 \cdot 49 + 35 = 2\frac{1}{3}$$

In de punten $(-1, -8\frac{1}{3})$ en $(7, 2\frac{1}{3})$ is de helling 12.

- E10 a** De helling van de grafiek van f moet gelijk zijn aan de richtingscoëfficiënt van l , dus 14.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 5$$

$$3x^2 - 6x + 5 = 14$$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x + 1)(x - 3) = 0$$

$$x + 1 = 0 \text{ of } x - 3 = 0$$

$$x = -1 \text{ of } x = 3$$

$$f(-1) = -1 - 3 - 5 + 3 = -6 \text{ en } f(3) = 27 - 27 + 15 + 3 = 18$$

Ligt $(-1, -6)$ op l ? Invullen geeft $-6 = 14 \cdot -1 - 24$. Dat klopt niet.

Ligt $(3, 18)$ op l ? Invullen geeft $18 = 14 \cdot 3 - 24$. Dat klopt wel, dus l raakt de grafiek van f .

- b** $f(0) = 3$, dus het snijpunt met de y -as is $(0, 3)$.

$f'(0) = 5$, een vergelijking van de raaklijn is $y = 5x + 3$.

- c** De kleinste helling is als $f'(x) = 3x^2 - 6x + 5$ een minimum heeft.

De grafiek van f' is een dalparabool en omdat $f'(-1) = 14$ en $f'(3) = 14$ (zie opdracht a), is de grafiek van f' symmetrisch in de lijn $x = 1$.

De grafiek heeft de kleinste helling bij $x = 1$.

$f(1) = 6$, dus in $(1, 6)$

- E11 a** Over het interval $[4, 6]$ is $\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r(6) - r(4)}{6 - 4} = \frac{8,348... - 7}{2} \approx 0,67$

De gemiddelde snelheid is 0,67 cm/s.

- b** Over het interval $[4; 4,0001]$ is

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r(4,0001) - r(4)}{0,0001} = \frac{7,0000749... - 7}{0,0001} \approx 0,75$$

De snelheid op $t = 4$ is 0,75 cm/s.

- c** $r(4) = 1 + 3\sqrt{4} = 7$ cm

$$\text{Opp} = \pi r^2 = \pi \cdot 7^2 \approx 154 \text{ cm}^2$$

- d** $\text{Opp}_{t=4} = \pi r^2 = \pi \cdot 7^2 \approx 153,93804 \text{ cm}^2$

$$\text{Opp}_{t=4,0001} = \pi r^2 = \pi \cdot 7,000075^2 \approx 153,9413387 \text{ cm}^2$$

$$\frac{\Delta \text{Opp}}{\Delta t} = \frac{153,9413387 - 153,93804}{0,0001} \approx 33$$

De oppervlakte neemt op $t = 4$ met 33 cm² per seconde toe.

$$1 \text{ a } \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{9} - \frac{1}{3} = \frac{21}{36} - \frac{1}{3} = \frac{7}{12} - \frac{4}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\text{b } \frac{2}{-11} \cdot \frac{-3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{-6}{-77} + \frac{2}{7} = \frac{6}{77} + \frac{22}{77} = \frac{28}{77} = \frac{4}{11}$$

$$\text{c } \frac{2}{3p} \cdot \frac{3}{p} + \frac{1}{2p} = \frac{6}{3p^2} + \frac{1}{2p} = \frac{12}{6p^2} + \frac{3p}{6p^2} = \frac{12+3p}{6p^2} = \frac{4+p}{2p^2}$$

$$\text{d } \frac{2a}{3} \cdot \frac{6}{4a} - \frac{1}{2} = \frac{12a}{12a} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{e } \frac{3p}{7\frac{1}{2}} \cdot \frac{2p}{-3} = \frac{6p^2}{-22\frac{1}{2}} = -\frac{12p^2}{45} = -\frac{4p^2}{15}$$

$$\text{f } \frac{5}{4b^2} \cdot \frac{2b}{5a} = \frac{10b}{20ab^2} = \frac{1}{2ab}$$

$$2 \text{ a } \frac{9a}{27a} = \frac{1}{3}$$

$$\text{d } \frac{2p}{\frac{4}{3p}} = \frac{2p \times 3p}{\frac{4}{3p} \times 3p} = \frac{6p^2}{4} = 1\frac{1}{2}p^2$$

$$\text{b } \frac{9q}{7\frac{1}{2}q} = \frac{18q}{15q} = \frac{6 \times 3 \times q}{5 \times 3 \times q} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$

$$\text{e } \frac{\frac{9}{11}}{3} = \frac{\frac{9}{11} \times 11}{3 \times 11} = \frac{9}{33} = \frac{3}{11}$$

$$\text{c } \frac{12}{\frac{p}{3}} = \frac{12 \times 3}{\frac{p}{3} \times 3} = \frac{36}{p}$$

$$\text{f } \frac{\frac{3}{p}}{8p} = \frac{\frac{3}{p} \times p}{8p \times p} = \frac{3}{8p^2}$$

$$3 \text{ a } \frac{2}{a} - \frac{a}{2} = \frac{4}{2a} - \frac{a^2}{2a} = \frac{4-a^2}{2a}$$

$$\text{b } \frac{a}{b} + \frac{b}{2a} = \frac{2a^2}{2ab} + \frac{b^2}{2ab} = \frac{2a^2+b^2}{2ab}$$

$$\text{c } \frac{3}{x} \cdot \frac{x+1}{3x} = \frac{3(x+1)}{3x^2} = \frac{x+1}{x^2}$$

$$\text{d } \frac{4(x+1)}{x} - \frac{1}{4}x = \frac{4(x+1)}{x} - \frac{x}{4} = \frac{16(x+1)}{4x} - \frac{x^2}{4x} = \frac{16x+16-x^2}{4x} = \frac{-x^2+16x+16}{4x}$$

$$\text{e } \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = \frac{x^2}{x^3} + \frac{x}{x^3} + \frac{1}{x^3} = \frac{x^2+x+1}{x^3}$$

$$\text{f } (2x+x^2) \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{2x+x^2}{x^3} = \frac{x(2+x)}{x \cdot x^2} = \frac{2+x}{x^2}$$

$$4 \text{ a } (5\sqrt{3})^2 = 5^2 \times (\sqrt{3})^2 = 25 \times 3 = 75$$

$$\text{b } 3\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{5} = 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{5} = 12\sqrt{30}$$

$$\text{c } 7\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{32} = 7 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{32} = 14\sqrt{64} = 14 \cdot 8 = 112$$

$$\text{d } (5\sqrt{\frac{3}{11}})^2 = 5^2 \cdot (\sqrt{\frac{3}{11}})^2 = 25 \cdot \frac{3}{11} = \frac{75}{11} = 6\frac{9}{11}$$

$$5 \text{ a } \frac{12}{\sqrt{7}} = \frac{12}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{12\sqrt{7}}{7} = 1\frac{5}{7}\sqrt{7}$$

$$\text{b } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{15}$$

$$\text{c } \frac{36}{4\sqrt{3}} = \frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$$

$$d \quad \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

$$e \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1,25}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1,25}} \cdot \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{60}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 15}}{5} = \frac{2\sqrt{15}}{5} = \frac{2}{5}\sqrt{15}$$

$$f \quad \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6} = \frac{5}{6}\sqrt{6}$$

- 6** Lijn k : richtingscoëfficiënt is -2 en startgetal is 0 , dus formule $y = -2x$.
 Lijn l : richtingscoëfficiënt is $0,5$ en startgetal is 2 , dus formule $y = 0,5x + 2$.
 Lijn m : richtingscoëfficiënt is 3 . De algemene vorm is $y = 3x + b$.
 m gaat door $(4, 0)$, dit substitueren geeft $0 = 3 \cdot 4 + b$. Hieruit volgt $b = -12$, dus een formule is $y = 3x - 12$.
 Lijn n : richtingscoëfficiënt is -4 . De algemene vorm is $y = -4x + b$.
 n gaat door $(4, 0)$, dit substitueren geeft $0 = -4 \cdot 4 + b$. Hieruit volgt $b = 16$, dus een formule is $y = -4x + 16$.

- 7 a** Een formule heeft de vorm $y = -3x + b$. Invullen van $x = 3$ en $y = 7$ geeft $7 = -3 \cdot 3 + b$. Hieruit volgt $b = 16$, dus een vergelijking van de lijn is $y = -3x + 16$.

b De richtingscoëfficiënt is $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{16 - 1}{2 - -2} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$

Een vergelijking heeft de vorm $y = 3\frac{3}{4}x + b$. Invullen van $x = 2$ en $y = 16$ geeft $16 = 3\frac{3}{4} \cdot 2 + b$. Hieruit volgt $b = 8\frac{1}{2}$, dus een vergelijking van de lijn is $y = 3\frac{3}{4}x + 8\frac{1}{2}$

- c** De richtingscoëfficiënt is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van k , dus $-0,25$.
 Een vergelijking heeft de vorm $y = -0,25x + b$. Invullen van $x = 16$ en $y = -12$ geeft $-12 = -0,25 \cdot 16 + b$. Hieruit volgt $b = -8$, dus een vergelijking van de lijn is $y = -0,25x - 8$.
d s is een verticale lijn, dus een vergelijking van de lijn is $x = 12$.
e t is een horizontale lijn, dus een vergelijking van de lijn is $y = 9$.

- 8 a** Elke meter draad weegt evenveel, dus er komt bij elke meter een vast gewicht bij.
b $100 \text{ meter draad weegt } 10,8 \text{ kg} - 2,8 \text{ kg} = 8 \text{ kg}$.
 Dan weegt één meter draad 8 kg : $100 = 0,08 \text{ kg}$.
 Een formule is $G = 0,08m + 2,8$. Hierbij is G het gewicht van de rol in kilogrammen als er nog m meter draad op zit.

- 9** Bij tabel A is de beginwaarde 0 en de groeifactor $400 : 500 = 0,8$
 Een formule bij tabel A is $N = 500 \cdot 0,8^t$
 Bij tabel B is de groeifactor $5400 : 4500 = 1,2$
 Bij $t = 2$ is $N = 4500$. Dan is de waarde bij $t = 0$ gelijk aan $4500 : 1,2^2 = 3125$. Een formule bij tabel B is $N = 3125 \cdot 1,2^t$

- 10 a** De groeifactor per vier jaar is $2916 : 36 = 81$.
- b** De groeifactor per jaar is $81^{\frac{1}{4}} = 3$
- c** Eerst is er 100%. Na een jaar is er drie keer zoveel, dus 300%.
Het groeipcentage is $300\% - 100\% = 200\%$.
- d** Op $t = 2$ is het aantal 36. Op $t = 0$ is het aantal dan $36 : 3^2 = 4$
Een formule is dus $A = 4 \cdot 3^t$
- e** De groeifactor per maand is $3^{\frac{1}{12}} \approx 1,096$ dus een formule is $A = 4 \cdot 1,096^t$
- 11 a** De groeifactor per maand is $1,6^{\frac{1}{12}} \approx 1,04$
- b** De groeifactor per week is $1,5^{\frac{1}{4}} \approx 1,11$
- c** De groeifactor per 10 jaar is $1,02^{10} \approx 1,22$
- d** De groeifactor per maand is $2,3^{\frac{1}{6}}$ dus de groeifactor per zeven maanden is $(2,3^{\frac{1}{6}})^7 \approx 2,64$
- 12**
- | | | |
|----------------------|------------------------------|----------------------|
| $KM^2 = KL^2 + LM^2$ | $QR^2 = PQ^2 - PR^2$ | $SU^2 = ST^2 + TU^2$ |
| $KM^2 = 9^2 + 5^2$ | $QR^2 = (\sqrt{72})^2 - 6^2$ | $SU^2 = 47^2 + 11^2$ |
| $KM^2 = 106$ | $QR^2 = 36$ | $SU^2 = 2330$ |
| $KM = \sqrt{106}$ | $QR = \sqrt{36} = 6$ | $SU = \sqrt{2330}$ |
- 13**
- | | | |
|----------------------------------|--|------------------------------------|
| $\tan(\angle A) = \frac{BC}{AB}$ | $\sin(\angle F) = \frac{DE}{EF}$ | $\cos(\angle H) = \frac{HI}{GH}$ |
| $\tan(\angle A) = \frac{3,6}{7}$ | $\sin(56^\circ) = \frac{8}{EF}$ | $\cos(\angle H) = \frac{11,5}{13}$ |
| $\angle A \approx 27^\circ$ | $EF = \frac{8}{\sin 56^\circ} \approx 9,6$ | $\angle H \approx 28^\circ$ |
- 14 a** Door substitutie verandert de formule waarbij y uitgedrukt is in x in een formule waarbij y uitgedrukt is in t .
- b** $y = 4\left(\frac{1}{2}t - 1\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}t - 1\right) + 8$
 $y = 4\left(\frac{1}{4}t^2 - t + 1\right) - t + 2 + 8$
 $y = t^2 - 4t + 4 - t + 10$
 $y = t^2 - 5t + 14$
- 15 a** $y = \frac{1}{8}(2t^5)^4 - \frac{1}{2}(2t^5)^3$
 $y = \frac{1}{8} \cdot 16t^{20} - \frac{1}{2} \cdot 8t^{15}$
 $y = 2t^{20} - 4t^{15}$
- c** $y = \frac{(t+2)^2 + (t+2)}{(t+2)^2 - 4(t+2) + 4}$
 $y = \frac{t^2 + 4t + 4 + t + 2}{t^2 + 4t + 4 - 4t - 8 + 4}$
 $y = \frac{t^2 + 5t + 6}{t^2}$
- b** $y = \frac{(t-1)^2}{t-1+1}$
 $y = \frac{t^2 - 2t + 1}{t}$
- d** $y = 2(t^{-1})^{-2} - 3(t^{-1})^{-1} + 4$
 $y = 2t^2 - 3t + 4$

16 a $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

Substitutie van $x^3 = t$ dus $x^6 = t^2$ geeft

$$t^2 + 7t - 8 = 0$$

$$(t - 1)(t + 8) = 0$$

$$t = 1 \text{ of } t = -8$$

Substitutie van $t = x^3$ geeft

$$x^3 = 1 \text{ of } x^3 = -8$$

$$x = 1 \text{ of } x = -2$$

b $4(2x - 1)^2 + 8(2x - 1) - 5 = 0$

Substitutie van $2x - 1 = t$ geeft

$$4t^2 + 8t - 5 = 0$$

$$t = \frac{-8 - \sqrt{144}}{2 \times 4} \text{ of } t = \frac{-8 + \sqrt{144}}{2 \times 4}$$

$$t = -2\frac{1}{2} \text{ of } t = \frac{1}{2}$$

Substitutie van $t = 2x - 1$ geeft

$$2x - 1 = -2\frac{1}{2} \text{ of } 2x - 1 = \frac{1}{2}$$

$$2x = -1\frac{1}{2} \text{ of } 2x = 1\frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{3}{4} \text{ of } x = \frac{3}{4}$$

17 a $4p^2 - p = 0$

$$p(4p - 1) = 0$$

$$p = 0 \text{ of } 4p - 1 = 0$$

$$p = 0 \text{ of } 4p = 1$$

$$p = 0 \text{ of } p = \frac{1}{4}$$

b $(2^x)^2 = 2^x \cdot 2^x = 2^{x+x} = 2^{2x}$

c De vergelijking $2^x = 0$ heeft geen oplossing.

d De vergelijking $2^x = \frac{1}{4}$ is te schrijven als $2^x = \frac{1}{2^2}$

Dan is $2^x = 2^{-2}$, dus $x = -2$.

De oplossing van de vergelijking $4 \cdot 2^{2x} - 2^x = 0$ is daarom $x = -2$.

18 a $3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$ is gelijk aan $(3^x)^2 - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$

Substitutie van $3^x = p$ geeft $p^2 - 10p + 9 = 0$

b $p^2 - 10p + 9 = 0$

$$(p - 9)(p - 1) = 0$$

$$p - 9 = 0 \text{ of } p - 1 = 0$$

$$p = 9 \text{ of } p = 1$$

$$3^x = 9 \text{ of } 3^x = 1$$

$$3^x = 3^2 \text{ of } 3^x = 3^0$$

$$x = 2 \text{ of } x = 0$$

19 a Substitutie van $3^x = p$ geeft $p^2 - 12p + 27 = 0$

$$(p - 9)(p - 3) = 0$$

$$p - 9 = 0 \text{ of } p - 3 = 0$$

$$p = 9 \text{ of } p = 3$$

Substitutie van $p = 3^x$ geeft

$$3^x = 9 \text{ of } 3^x = 3$$

$$3^x = 3^2 \text{ of } 3^x = 3^1$$

De oplossing is $x = 2$ of $x = 1$.

- b** Substitutie van $4^x = p$ geeft $p^2 - p - 12 = 0$
 $(p - 4)(p + 3) = 0$
 $p = 4$ of $p = -3$
 Substitutie van $p = 4^x$ geeft
 $4^x = 4$ of $4^x = -3$
 $x = 1$ geen oplossing
 De oplossing is $x = 1$.
- c** Substitutie van $2^x = p$ geeft $(p - 2\sqrt{2})(p - \frac{1}{8}) = 0$
 $p - 2\sqrt{2} = 0$ of $p - \frac{1}{8} = 0$
 $p = 2\sqrt{2}$ of $p = \frac{1}{8}$
 Substitutie van $p = 2^x$ geeft
 $2^x = 2\sqrt{2}$ of $2^x = \frac{1}{8}$
 $2^x = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$ of $2^x = \frac{1}{2^3}$
 $2^x = 2^{1\frac{1}{2}}$ of $2^x = 2^{-3}$
 De oplossing is $x = 1\frac{1}{2}$ of $x = -3$.
- d** Substitutie van $5^x = p$ geeft $p^2 - 20p = 125$
 $p^2 - 20p - 125 = 0$
 $(p - 25)(p + 5) = 0$
 $p - 25 = 0$ of $p + 5 = 0$
 $p = 25$ of $p = -5$
 Substitutie van $p = 5^x$ geeft
 $5^x = 25$ of $5^x = -5$
 $5^x = 5^2$ of geen oplossing
 De oplossing is $x = 2$.
- e** Substitutie van $4^x = p$ geeft $(p - 1)(p + 1) = 3$
 $p^2 - 1 = 3$
 $p^2 = 4$
 $p = 2$ of $p = -2$
 Substitutie van $p = 4^x$ geeft
 $4^x = 2$ of $4^x = -2$
 $(2^2)^x = 2$ of geen oplossing
 $2^{2x} = 2^1$
 $2x = 1$
 De oplossing is $x = \frac{1}{2}$.
- f** Substitutie van $2^x = p$ geeft $p(p - 1) = 32(p - 1)$
 $p^2 - p = 32p - 32$
 $p^2 - 33p + 32 = 0$
 $(p - 32)(p - 1) = 0$
 $p - 32 = 0$ of $p - 1 = 0$
 $p = 32$ of $p = 1$
 Substitutie van $p = 2^x$ geeft
 $2^x = 32$ of $2^x = 1$
 $2^x = 2^5$ of $2^x = 2^0$
 De oplossing is $x = 5$ of $x = 0$.

- 2 a** $5x - 2 = 2x + 5$
 $3x = 7$
 $x = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$
- b** $17x + 8 = 17 + 11x$
 $6x = 9$
 $x = 1\frac{1}{2}$
- c** $\frac{1}{3}x + 3 = \frac{2}{3}x - 2$
 $x + 9 = 2x - 6$
 $x = 15$
- d** $2(x - 3) + 5 = 3x + 3(5 - 2x)$
 $2x - 6 + 5 = 3x + 15 - 6x$
 $2x - 1 = -3x + 15$
 $5x = 16$
 $x = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$
- e** $21 - (3x + 2) = -6x + 4$
 $21 - 3x - 2 = -6x + 4$
 $19 - 3x = -6x + 4$
 $3x = -15$
 $x = -5$
- f** $11x = 7x - 3(1 - 5x)$
 $11x = 7x - 3 + 15x$
 $11x = 22x - 3$
 $11x = 3$
 $x = \frac{3}{11}$
- g** $10 - (2 + 3x) = -6x + 2$
 $10 - 2 - 3x = -6x + 2$
 $8 - 3x = -6x + 2$
 $3x = -6$
 $x = -2$
- h** $\frac{2}{7}x + 1\frac{3}{14} = 1\frac{1}{7}x - \frac{5}{14}$
 $4x + 17 = 16x - 5$
 $22 = 12x$
 $x = \frac{22}{12} = \frac{11}{6} = 1\frac{5}{6}$
- 5 a** De richtingscoëfficiënt is -2 , dus $y = -2x + b$.
 $(-1, 4)$ invullen geeft $4 = -2 \cdot -1 + b$, dus $b = 2$.
 $l: y = -2x + 2$
- b** De richtingscoëfficiënt is $\frac{12 - 0}{0 - 12} = -1$, dus $y = -x + b$.
De lijn gaat door $(0, 12)$ dus het startgetal is 12.
 $l: y = -x + 12$
- c** Beide punten liggen op de lijn $l: y = 7$.
- d** De richtingscoëfficiënt is $4\frac{1}{2}$, dus $y = 4\frac{1}{2}x + b$.
 $(5, -2)$ invullen geeft $-2 = 4\frac{1}{2} \cdot 5 + b$, dus $b = -24\frac{1}{2}$
 $l: y = 4\frac{1}{2}x - 24\frac{1}{2}$
- 9 a** $4a^2 + 13 = 29$
 $4a^2 = 16$
 $a^2 = 4$
 $a = -2$ of $a = 2$
- b** $x(x + 2) = 5x$
 $x = 0$ of $x + 2 = 5$
 $x = 0$ of $x = 3$
- c** $q^2 - 17q = 200$
 $q^2 - 17q - 200 = 0$
 $(q + 8)(q - 25) = 0$
 $q = -8$ of $q = 25$
- d** $3t^2 + 9t + 6 = 0$
 $t^2 + 3t + 2 = 0$
 $(t + 1)(t + 2) = 0$
 $t = -1$ of $t = -2$
- e** $(a + 6)(a - 2) = 20$
 $a^2 + 4a - 12 = 20$
 $a^2 + 4a - 32 = 0$
 $(a + 8)(a - 4) = 0$
 $a = -8$ of $a = 4$
- f** $x^2 - x - 36 = -6$
 $x^2 - x - 30 = 0$
 $(x + 5)(x - 6) = 0$
 $x = -5$ of $x = 6$

- 11 a** $(6a + 3)^2 = (a + 3)^2$
 $6a + 3 = a + 3$ of $6a + 3 = -a - 3$
 $5a = 0$ of $7a = -6$
 $a = 0$ of $a = -\frac{6}{7}$
- b** $(x - 6)^2 = 25^2$
 $x - 6 = 25$ of $x - 6 = -25$
 $x = 31$ of $x = -19$
- c** $25p^2 = (3 - p)^2$
 $5p = 3 - p$ of $5p = -3 + p$
 $6p = 3$ of $4p = -3$
 $p = \frac{1}{2}$ of $p = -\frac{3}{4}$
- f** $(x^2 - 6x)^2 = 49$
 $x^2 - 6x = 7$ of $x^2 - 6x = -7$
 $x^2 - 6x - 7 = 0$ of $x^2 - 6x + 7 = 0$
 $(x + 1)(x - 7) = 0$ $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 8$
 $x = -1$ of $x = 7$ $x = \frac{6 - \sqrt{8}}{2}$ of $x = \frac{6 + \sqrt{8}}{2}$
 $x = -1$ of $x = 7$ of $x = 3 - \sqrt{2}$ of $x = 3 + \sqrt{2}$
- d** $(2x + 3)^2 = x^2$
 $2x + 3 = x$ of $2x + 3 = -x$
 $x = -3$ of $3x = -3$
 $x = -3$ of $x = -1$
- e** $(2 - 3p)^2 = (4p + 12)^2$
 $2 - 3p = 4p + 12$ of $2 - 3p = -4p - 12$
 $-10 = 7p$ of $p = -14$
 $p = -1\frac{3}{7}$ of $p = -14$
- 13 a** $x(5x - 11) = 4x^2$
 $x = 0$ of $5x - 11 = 4x$
 $x = 0$ of $x = 11$
- b** $(2t + 7)(t^2 - 2) = 7(2t + 7)$
 $2t + 7 = 0$ of $t^2 - 2 = 7$
 $2t = -7$ of $t^2 = 9$
 $t = -3\frac{1}{2}$ of $t = -3$ of $t = 3$
- c** $(3x - 4)(x + 5) = 8(x + 5)$
 $x + 5 = 0$ of $3x - 4 = 8$
 $x = -5$ of $3x = 12$
 $x = -5$ of $x = 4$
- d** $(3x + 5)(x - 3) = (x - 3)^2$
 $x - 3 = 0$ of $3x + 5 = x - 3$
 $x = 3$ of $2x = -8$
 $x = 3$ of $x = -4$
- 16 a** $\sqrt{x} - 3 = 2$
 $\sqrt{x} = 5$
 $x = 25$
- b** $1 + \sqrt{5p - 3} = 7$
 $\sqrt{5p - 3} = 6$
 $5p - 3 = 36$
 $5p = 39$
 $p = 7\frac{4}{5}$
- c** $\sqrt{7 - \frac{1}{4}x} = \sqrt{5}$
 $7 - \frac{1}{4}x = 5$
 $\frac{1}{4}x = 2$
 $x = 8$
- d** $3 - \sqrt{2 - x} = 1\frac{1}{2}$
 $\sqrt{2 - x} = 1\frac{1}{2}$
 $2 - x = 2\frac{1}{4}$
 $x = -\frac{1}{4}$
- e** $\sqrt{\frac{1}{7}p - 4} = \sqrt{8}$
 $\frac{1}{7}p - 4 = 8$
 $\frac{1}{7}p = 12$
 $p = 84$
- f** $\sqrt{x^2 - x - 17} = 5$
 $x^2 - x - 17 = 25$
 $x^2 - x - 42 = 0$
 $(x + 6)(x - 7) = 0$
 $x = -6$ of $x = 7$

19 a $3 + \sqrt{x+17} = x$
 $\sqrt{x+17} = x-3$
 $x+17 = (x-3)^2$
 $x+17 = x^2 - 6x + 9$
 $x^2 - 7x - 8 = 0$
 $(x+1)(x-8) = 0$
 $x = -1$ of $x = 8$
 $3 + \sqrt{-1+17} = -1$, klopt niet.
 $3 + \sqrt{8+17} = 8$, klopt.
 De oplossing is $x = 8$.

b $\sqrt{4x^2 - 12x} - 3 + x = 0$
 $\sqrt{4x^2 - 12x} = 3 - x$
 $4x^2 - 12x = (3-x)^2$
 $4x^2 - 12x = 9 - 6x + x^2$
 $3x^2 - 6x - 9 = 0$
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x+1)(x-3) = 0$
 $x = -1$ of $x = 3$
 $\sqrt{4 \cdot 1 + 12} - 3 - 1 = 0$, klopt.
 $\sqrt{4 \cdot 9 - 36} - 3 + 3 = 0$, klopt.
 De oplossing is $x = -1$ of $x = 3$.

c $1 + \sqrt{2-x} = x + 11$
 $\sqrt{2-x} = x + 10$
 $2-x = (x+10)^2$
 $2-x = x^2 + 20x + 100$
 $x^2 + 21x + 98 = 0$
 $(x+7)(x+14) = 0$
 $x = -7$ of $x = -14$
 $1 + \sqrt{9} = -7 + 11$, klopt.
 $1 + \sqrt{16} = -14 + 11$, klopt niet.
 De oplossing is $x = -7$.

23 a $\frac{15}{5x-3} = 3$
 $5x-3 = 5$
 $5x = 8$
 $x = 1\frac{3}{5}$

b $\frac{-75}{5x+2} = 25$
 $5x+2 = -3$
 $5x = -5$
 $x = -1$

d $\sqrt{x^2 - 3x} = \frac{1}{2}x$
 $x^2 - 3x = \frac{1}{4}x^2$
 $\frac{3}{4}x^2 = 3x$
 $3x^2 = 12x$
 $x = 0$ of $3x = 12$
 $x = 0$ of $x = 4$
 $\sqrt{0-0} = \frac{1}{2} \cdot 0$, klopt.
 $\sqrt{16-12} = \frac{1}{2} \cdot 4$, klopt.
 De oplossing is $x = 0$ of $x = 4$.

e $x + \sqrt{2x+3} = 6$
 $\sqrt{2x+3} = 6-x$
 $2x+3 = (6-x)^2$
 $2x+3 = 36 - 12x + x^2$
 $x^2 - 14x + 33 = 0$
 $(x-3)(x-11) = 0$
 $x = 3$ of $x = 11$
 $3 + \sqrt{2 \cdot 3 + 3} = 6$, klopt.
 $11 + \sqrt{22 + 3} = 6$, klopt niet.
 De oplossing is $x = 3$

f $\sqrt{10-3x} = -x$
 $10-3x = x^2$
 $x^2 + 3x - 10 = 0$
 $(x+5)(x-2) = 0$
 $x = -5$ of $x = 2$
 $\sqrt{10+15} = 5$, klopt.
 $\sqrt{10-6} = -2$, klopt niet.
 De oplossing is $x = -5$.

c $\frac{81}{p^2-3} = 9$
 $p^2-3 = 9$
 $p^2 = 12$
 $p = \sqrt{12}$ of $p = -\sqrt{12}$
 $p = 2\sqrt{3}$ of $p = -2\sqrt{3}$

d $\frac{30}{8-m^2} + 1 = -1\frac{1}{2}$
 $\frac{30}{8-m^2} = -2\frac{1}{2}$
 $8-m^2 = -12$
 $m^2 = 20$
 $m = \sqrt{20}$ of $m = -\sqrt{20}$
 $m = 2\sqrt{5}$ of $m = -2\sqrt{5}$

26 a $\frac{4}{6x-2} = \frac{2x}{6x-4}$
 $4(6x-4) = 2x(6x-2)$
mits $x \neq \frac{1}{3}$ en $x \neq \frac{2}{3}$
 $24x - 16 = 12x^2 - 4x$
 $12x^2 - 28x + 16 = 0$
 $3x^2 - 7x + 4 = 0$
 $D = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 1$
 $x = \frac{7 + \sqrt{1}}{2 \cdot 3} = 1\frac{1}{3}$ of $x = \frac{7 - \sqrt{1}}{2 \cdot 3} = 1$

b $\frac{9x}{x+5} = 3x$
 $3x \cdot \frac{3}{x+5} = 3x \cdot 1$
 $3x = 0$ of $\frac{3}{x+5} = 1$
 $x = 0$ of $x + 5 = 3$
 $x = 0$ of $x = -2$

c $\frac{4x}{x+1} + 4 = 2x + 1$
 $\frac{4x}{x+1} = 2x - 3$
 $4x = (2x - 3)(x + 1)$, mits $x \neq -1$
 $4x = 2x^2 - x - 3 = 0$
 $2x^2 - 5x - 3 = 0$
 $D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -3 = 49$
 $x = \frac{5 - \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2}$ of $x = \frac{5 + \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = 3$

d $\frac{x-5}{x+3} = \frac{x+7}{x-5}$
 $(x-5)^2 = (x+3)(x+7)$
mits $x \neq -3$ en $x \neq 5$
 $x^2 - 10x + 25 = x^2 + 10x + 21$
 $20x = 4$
 $x = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

31 a De formule heeft uitkomsten als $14 - 2x \geq 0$, dus als $x \leq 7$.

b $2\sqrt{14 - 2x} = 6$
 $\sqrt{14 - 2x} = 3$
 $14 - 2x = 9$
 $2x = 5$
 $x = 2\frac{1}{2}$

c Uit de grafiek blijkt dat de ongelijkheid geldt voor $2\frac{1}{2} < x \leq 7$.

36 a $2(q-1) = 3p-4$
 $2q-2 = 3p-4$
 $2q = 3p-2$
 $q = 1\frac{1}{2}p - 1$

b $\frac{2}{7}p - \frac{1}{2}q = 0$
 $4p - 7q = 0$
 $7q = 4p$
 $q = \frac{4}{7}p$

c $9p + 3q = 5p - 11$
 $3q = -4p - 11$
 $q = -1\frac{1}{3}p - 3\frac{2}{3}$

d $13q - 16 = 2p + 3(q-7)$
 $13q - 16 = 2p + 3q - 21$
 $10q = 2p - 5$
 $q = \frac{1}{5}p - \frac{1}{2}$

e $4p + 7q = 14$
 $7q = -4p + 14$
 $q = -\frac{4}{7}p + 2$

f $25p = 5q - 11$
 $5q = 25p + 11$
 $q = 5p + 2\frac{1}{5}$

37 a $\frac{4}{b} + 1 = 2a + 9$
 $\frac{4}{b} = 2a + 8$
 $b = \frac{4}{2a+8}$

b $a = \sqrt{2b+3}$
 $a^2 = 2b+3$
 $2b = a^2 - 3$
 $b = \frac{1}{2}a^2 - 1\frac{1}{2}$

c $1 + \frac{3}{b-1} = 5a - 6$
 $\frac{3}{b-1} = 5a - 7$
 $\frac{3}{5a-7} = b-1$
 $b = \frac{3}{5a-7} + 1$

d $a+1 = \sqrt{b+3}$
 $(a+1)^2 = b+3$
 $b = (a+1)^2 - 3$
 $b = a^2 + 2a - 2$

$$\begin{aligned} \text{e } a - 3 &= \frac{14}{b - 5} \\ b - 5 &= \frac{14}{a - 3} \\ b &= \frac{14}{a - 3} + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } a &= \frac{4}{\frac{1}{2}b + 2} \\ \frac{1}{2}b + 2 &= \frac{4}{a} \\ \frac{1}{2}b &= \frac{4}{a} - 2 \\ b &= \frac{8}{a} - 4 \end{aligned}$$

39 a $t = 13x + 9$ substitueren in $y = -2t + 71$ geeft

$$y = -2(13x + 9) + 71$$

$$y = -26x - 18 + 71$$

$$y = -26x + 53$$

b $p = 3 - 2x$ substitueren in $y = p^2 + 16$ geeft

$$y = (3 - 2x)^2 + 16$$

$$y = 9 - 12x + 4x^2 + 16$$

$$y = 4x^2 - 12x + 25$$

42 a $x^4 - 30x^2 - 31 = 0$

Substitutie $x^2 = p$ geeft

$$p^2 - 30p - 31 = 0$$

$$(p + 1)(p - 31) = 0$$

$$p = -1 \text{ of } p = 31$$

Omdat $p = x^2$ geldt

$$x^2 = -1 \text{ (geen oplossing) of } x^2 = 31$$

$$x = \sqrt{31} \text{ of } x = -\sqrt{31}$$

b $(3x + 4)^2 - 5(3x + 4) + 6 = 0$

Substitutie $3x + 4 = p$ geeft

$$p^2 - 5p + 6 = 0$$

$$(p - 2)(p - 3) = 0$$

$$p = 2 \text{ of } p = 3$$

Omdat $p = 3x + 4$ geldt

$$3x + 4 = 2 \text{ of } 3x + 4 = 3$$

$$3x = -2 \text{ of } 3x = -1$$

$$x = -\frac{2}{3} \text{ of } x = -\frac{1}{3}$$

c $(5x - 3)^2 = 20x - 12$

$$(5x - 3)^2 = 4(5x - 3)$$

Substitutie $5x - 3 = p$ geeft

$$p^2 = 4p$$

$$p = 0 \text{ of } p = 4$$

Omdat $p = 5x - 3$ geldt

$$5x - 3 = 0 \text{ of } 5x - 3 = 4$$

$$5x = 3 \text{ of } 5x = 7$$

$$x = \frac{3}{5} \text{ of } x = 1\frac{2}{5}$$

d $2x^4 - 15x^2 - 27 = 0$

Substitutie $x^2 = p$ geeft

$$2p^2 - 15p - 27 = 0$$

$$D = (-15)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -27 = 441$$

$$p = \frac{15 - \sqrt{441}}{2 \cdot 2} \text{ of } p = \frac{15 + \sqrt{441}}{2 \cdot 2}$$

$$p = -1\frac{1}{2} \text{ of } p = 9$$

Omdat $p = x^2$ geldt

$$x^2 = -1\frac{1}{2} \text{ (geen oplossing) of } x^2 = 9$$

$$x = -3 \text{ of } x = 3$$

Hoofdstuk 2 Machtsformules

3 a $a^{-5} = \frac{1}{a^5}$

b $2b^2 \cdot 3b^{-3} = 6b^{-1} = \frac{6}{b}$

c $\frac{8a \cdot a^0}{2a^6} = \frac{8a}{2a^6} = \frac{4}{a^5}$

d $\frac{1}{2}p^{-3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^3} = \frac{1}{2p^3}$

e $2d^3 \cdot 6d \cdot \frac{1}{2}d^{-8} = 6d^{-4} = \frac{6}{d^4}$

f $\frac{(3x)^2}{3x \cdot x^{-1}} = \frac{9x^2}{3x^0} = 3x^2$

10 a $a \cdot (-2a^3)^2 = a \cdot (-2)^2 \cdot (a^3)^2 = a \cdot 4 \cdot a^6 = 4a^7$

b $6x^4 \cdot (2x)^3 = 6x^4 \cdot 2^3 \cdot x^3 = 6x^4 \cdot 8 \cdot x^3 = 48x^7$

$$c \left(\frac{2x^0}{x^2 \cdot x^3} \right)^4 = \left(\frac{2}{x^5} \right)^4 = \frac{2^4}{(x^5)^4} = \frac{16}{x^{20}}$$

$$d (-5p)^3 = (-5)^3 \cdot p^3 = -125p^3$$

$$e (2u)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}u^2\right)^4 = 2^3 \cdot u^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot (u^2)^4 = 8 \cdot u^3 \cdot \frac{1}{16} \cdot u^8 = \frac{1}{2}u^{11}$$

$$f \frac{-7q^3 \cdot -2q^5}{4(q^{-2})^{-1}} = \frac{14q^8}{4q^2} = 3\frac{1}{2}q^6$$

$$13 a 12^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{12}$$

$$b 3^{2\frac{1}{4}} = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{4}} = 9 \cdot \sqrt[4]{3}$$

$$c x^{3\frac{1}{2}} = x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^3 \sqrt{x}$$

$$d (a^3)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$$

$$e 5^{\frac{1}{4}} \cdot 5^3 = 125 \cdot \sqrt[4]{5}$$

$$f 8 \cdot (8^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} = 8 \cdot 8^{\frac{1}{12}} = 8 \cdot \sqrt[12]{8}$$

$$17 a \sqrt[7]{3^2} = 3^{\frac{2}{7}} \text{ of } 9^{\frac{1}{7}}$$

$$b \sqrt[9]{5^7} = 5^{\frac{7}{9}}$$

$$c \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{-\frac{1}{3}}$$

$$d \sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}}$$

$$e \sqrt[7]{a^3} = a^{\frac{3}{7}}$$

$$f \frac{1}{\sqrt[7]{a^4}} = \frac{1}{a^{\frac{4}{7}}} = a^{-\frac{4}{7}}$$

$$20 a (a^2)^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[4]{a} = a^1 \cdot a^{-\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = a^{1-\frac{4}{12}+\frac{3}{12}} = a^{\frac{11}{12}} = \sqrt[12]{a^{11}}$$

$$b a^2 \cdot (a^{-2})^{-1} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^2 \cdot a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{4\frac{1}{2}} = a^4 \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^4 \sqrt{a}$$

$$c \frac{a^3 \cdot 6a^2}{3\sqrt[4]{a}} = \frac{6a^5}{3a^{\frac{1}{4}}} = 2a^{4\frac{1}{2}} = 2a^4 \cdot a^{\frac{1}{2}} = 2a^4 \sqrt{a}$$

$$d \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[5]{a^2} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{2}{5}} = a^{\frac{5}{15}+\frac{6}{15}} = a^{\frac{11}{15}} = \sqrt[15]{a^{11}}$$

$$e a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot a^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{6}+\frac{3}{12}-\frac{4}{6}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$$

$$f \frac{1}{a^2 \cdot \sqrt[4]{a}} \cdot a^{-2} = \frac{1}{a^2 \cdot a^{\frac{1}{4}}} \cdot a^{-2} = \frac{1}{a^{2\frac{1}{4}}} \cdot a^{-2} = a^{-2\frac{1}{4}} \cdot a^{-2} = a^{-4\frac{1}{4}} = \frac{1}{a^4 \sqrt[4]{a}}$$

$$27 a y = x^{1\frac{1}{4}}$$

$$y = x^1 \cdot x^{\frac{1}{4}}$$

$$y = x \cdot \sqrt[4]{x}$$

$$b y = x^{3\frac{2}{5}}$$

$$y = x^3 \cdot x^{\frac{2}{5}}$$

$$y = x^3 \cdot \sqrt[5]{x^2}$$

$$c y = x^{7\frac{3}{5}}$$

$$y = x^7 \cdot x^{\frac{3}{5}}$$

$$y = x^7 \cdot \sqrt[5]{x^3}$$

$$d y = x^{1\frac{1}{6}}$$

$$y = x^1 \cdot x^{\frac{1}{6}}$$

$$y = x \cdot \sqrt[6]{x}$$

$$e y = x^{5\frac{3}{10}}$$

$$y = x^5 \cdot x^{\frac{3}{10}}$$

$$y = x^5 \cdot \sqrt[10]{x^3}$$

$$f y = x^{\frac{8}{3}}$$

$$y = x^2 \cdot x^{\frac{2}{3}}$$

$$y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

$$31 a x^6 = 64$$

$$x = \sqrt[6]{64} = 2 \text{ of } x = -\sqrt[6]{64} = -2$$

$$b x^3 = 12$$

$$x = \sqrt[3]{12}$$

$$c x^5 = -12$$

$$x = \sqrt[5]{-12}$$

$$d x^4 + 18 = 29$$

$$x^4 = 11$$

$$x = \sqrt[4]{11} \text{ of } x = -\sqrt[4]{11}$$

$$e 4x^3 - 14 = 50$$

$$4x^3 = 64$$

$$x^3 = 16$$

$$x = \sqrt[3]{16}$$

$$f 7x^2 + 15 = 50$$

$$7x^2 = 35$$

$$x^2 = 5$$

$$x = \sqrt{5} \text{ of } x = -\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} \text{g } 0,2x^4 + 3 &= 16 \\ 0,2x^4 &= 13 \\ x^4 &= 65 \\ x &= \sqrt[4]{65} \text{ of } x = -\sqrt[4]{65} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 35 \text{ a } 6x^{\frac{2}{9}} &= 12 \\ x^{\frac{2}{9}} &= 2 \\ \left(x^{\frac{2}{9}}\right)^{\frac{9}{2}} &= 2^{\frac{9}{2}} \\ x &= 2^{\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2}} \\ x &= 2^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 16\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } x^{\frac{1}{5}} + 1 &= 4 \\ x^{\frac{1}{5}} &= 3 \\ \left(x^{\frac{1}{5}}\right)^5 &= 3^5 \\ x &= 3^5 = 243 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } x^{2\frac{1}{2}} &= 9 \\ \left(x^{2\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{5}} &= 9^{\frac{2}{5}} \\ x &= \sqrt[5]{9^2} = \sqrt[5]{81} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 39 \text{ a } 3x^4 - x^3 &= 0 \\ x^3(3x - 1) &= 0 \\ x^3 &= 0 \text{ of } 3x - 1 = 0 \\ x &= 0 \text{ of } 3x = 1 \\ x &= 0 \text{ of } x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } 12x^{12} - 3x^8 &= 0 \\ 3x^8(4x^4 - 1) &= 0 \\ 3x^8 &= 0 \text{ of } 4x^4 - 1 = 0 \\ x &= 0 \text{ of } 4x^4 = 1 \\ x &= 0 \text{ of } x^4 = \frac{1}{4} \\ x &= 0 \text{ of } x = \sqrt[4]{\frac{1}{4}} \text{ of } x = -\sqrt[4]{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } 3x^5 &= 24x^2 \\ 3x^3 \cdot x^2 &= 24 \cdot x^2 \\ 3x^3 &= 24 \text{ of } x^2 = 0 \\ x^3 &= 8 \text{ of } x = 0 \\ x &= \sqrt[3]{8} = 2 \text{ of } x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } 32x &= -x^6 \\ x^6 + 32x &= 0 \\ x(x^5 + 32) &= 0 \\ x &= 0 \text{ of } x^5 + 32 = 0 \\ x &= 0 \text{ of } x^5 = -32 \\ x &= 0 \text{ of } x = \sqrt[5]{-32} = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h } 100 - \frac{1}{4}x^9 &= 0 \\ \frac{1}{4}x^9 &= 100 \\ x^9 &= 400 \\ x &= \sqrt[9]{400} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } 5x^{\frac{3}{5}} + 25 &= 100 \\ 5x^{\frac{3}{5}} &= 75 \\ x^{\frac{3}{5}} &= 15 \\ \left(x^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{5}{3}} &= 15^{\frac{5}{3}} \\ x &= \sqrt[3]{15^5} = \sqrt[3]{759\,375} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } 4 - x^{-\frac{1}{4}} &= 1 \\ x^{-\frac{1}{4}} &= 3 \\ \left(x^{-\frac{1}{4}}\right)^{-4} &= 3^{-4} \\ x &= \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } 18 - 2x^{-3\frac{1}{2}} &= 14 \\ 2x^{-3\frac{1}{2}} &= 4 \\ x^{-3\frac{1}{2}} &= 2 \\ \left(x^{-3\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{7}} &= 2^{-\frac{2}{7}} \\ x &= \frac{1}{2^{\frac{2}{7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{2^2}} = \frac{1}{\sqrt[7]{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } x^7 + \frac{1}{8}x^4 &= 0 \\ x^4\left(x^3 + \frac{1}{8}\right) &= 0 \\ x^4 &= 0 \text{ of } x^3 + \frac{1}{8} = 0 \\ x &= 0 \text{ of } x^3 = -\frac{1}{8} \\ x &= 0 \text{ of } x = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } 5x^3 - 20x^6 &= 0 \\ 5x^3(1 - 4x^3) &= 0 \\ 5x^3 &= 0 \text{ of } 1 - 4x^3 = 0 \\ x &= 0 \text{ of } 4x^3 = 1 \\ x &= 0 \text{ of } x^3 = \frac{1}{4} \\ x &= 0 \text{ of } x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g } x^3 - 2x^{1\frac{1}{2}} &= 0 \\ x^{1\frac{1}{2}}\left(x^{1\frac{1}{2}} - 2\right) &= 0 \\ x^{1\frac{1}{2}} &= 0 \text{ of } x^{1\frac{1}{2}} - 2 = 0 \\ x &= 0 \text{ of } x^{1\frac{1}{2}} = 2 \\ x &= 0 \text{ of } x = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h } 5x^{\frac{3}{2}} &= 10x \\ 5x^{\frac{2}{2}} \cdot x &= 10 \cdot x \\ 5x^{\frac{2}{2}} &= 10 \text{ of } x = 0 \\ x^{\frac{2}{2}} &= 2 \text{ of } x = 0 \\ x &= 2^{\frac{2}{2}} \text{ of } x = 0 \\ x &= \sqrt[5]{2^2} = \sqrt[5]{4} \text{ of } x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 42 \text{ a } y &= 4x^2 \cdot 5x\sqrt{x} \\ y &= 4x^2 \cdot 5x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} \\ y &= 20 \cdot x^{3\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } y &= \frac{4x \cdot (3x)^2}{9x^{-1\frac{1}{3}}} \\ y &= \frac{4x \cdot 9x^2}{9x^{-1\frac{1}{3}}} \\ y &= \frac{4x^3}{x^{-1\frac{1}{3}}} \\ y &= 4 \cdot x^{4\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 45 \text{ a } P &= \frac{1}{4} \cdot Q^3 \\ \frac{1}{4} \cdot Q^3 &= P \\ Q^3 &= 4P \\ Q &= (4P)^{\frac{1}{3}} \\ Q &= 4^{\frac{1}{3}} \cdot P^{\frac{1}{3}} \\ Q &\approx 1,59 \cdot P^{0,33} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } P &= 10 \cdot Q^{-2,5} \\ 10 \cdot Q^{-2,5} &= P \\ Q^{-2,5} &= \frac{1}{10} P \\ Q &= \left(\frac{1}{10} P\right)^{-\frac{2}{5}} \\ Q &= \left(\frac{1}{10}\right)^{-\frac{2}{5}} \cdot P^{-\frac{2}{5}} \\ Q &\approx 2,51 \cdot P^{-0,4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } P &= \frac{1}{3} \cdot Q^{1,25} \\ \frac{1}{3} \cdot Q^{1,25} &= P \\ Q^{1,25} &= 3P \\ Q &= (3P)^{\frac{1}{1,25}} \\ Q &= 3^{\frac{1}{1,25}} \cdot P^{\frac{1}{1,25}} \\ Q &\approx 2,41 \cdot P^{0,8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } y &= 6x^{-1\frac{1}{2}} \cdot 2\sqrt{x} \\ y &= 12 \cdot x^{-1\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \\ y &= 12 \cdot x^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } y &= \frac{6x \cdot \sqrt[5]{x}}{12x^3} \\ y &= \frac{6x \cdot x^{\frac{1}{5}}}{12x^3} \\ y &= \frac{6x^{1\frac{1}{5}}}{12x^3} \\ y &= \frac{1}{2} \cdot x^{-1\frac{4}{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } P &= \frac{3}{7} \cdot Q^{1\frac{3}{5}} \\ \frac{3}{7} \cdot Q^{1\frac{3}{5}} &= P \\ Q^{1\frac{3}{5}} &= \frac{7}{3} P \\ Q &= \left(\frac{7}{3} P\right)^{\frac{5}{8}} \\ Q &= \left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{5}{8}} \cdot P^{\frac{5}{8}} \\ Q &\approx 1,70 \cdot P^{0,63} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } P &= 2,6 \cdot Q^{-0,45} \\ 2,6 \cdot Q^{-0,45} &= P \\ Q^{-0,45} &= \frac{1}{2,6} P \\ Q &= \left(\frac{1}{2,6} P\right)^{-\frac{1}{0,45}} \\ Q &= \left(\frac{1}{2,6}\right)^{-\frac{1}{0,45}} \cdot P^{-\frac{1}{0,45}} \\ Q &\approx 8,36 \cdot P^{-2,22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } P &= 0,0001 \cdot Q^4 \\ 0,0001 \cdot Q^4 &= P \\ Q^4 &= 10\,000 P \\ Q &= (10\,000 P)^{\frac{1}{4}} \\ Q &= 10\,000^{\frac{1}{4}} \cdot P^{\frac{1}{4}} \\ Q &= 10 \cdot P^{0,25} \end{aligned}$$

Hoofdstuk 3 Functies en grafieken

$$4 \text{ a } f\left(2\frac{1}{2}\right) = \left(2\frac{1}{2}\right)^2 - 8 \cdot 2\frac{1}{2} + 12 = -1\frac{3}{4} \text{ en } g(8) = -2 \cdot 8 + 7 = -9$$

$$\begin{aligned} \text{b } x^2 - 8x + 12 &= -4 \\ x^2 - 8x + 16 &= 0 \\ (x - 4)^2 &= 0 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } x^2 - 8x + 12 &= 24 \\ x^2 - 8x - 12 &= 0 \\ D &= 64 - 4 \cdot 1 \cdot -12 = 112 \\ x &= \frac{8 - \sqrt{112}}{2} \text{ of } x = \frac{8 + \sqrt{112}}{2} \\ x &= 4 - \frac{1}{2}\sqrt{112} \text{ of } x = 4 + \frac{1}{2}\sqrt{112} \end{aligned}$$

- d $x^2 - 8x + 12 = -2x + 7$
 $x^2 - 6x + 5 = 0$
 $(x - 1)(x - 5) = 0$
 $x = 1$ of $x = 5$
 $g(1) = -2 \cdot 1 + 7 = 5$ en $g(5) = -2 \cdot 5 + 7 = -3$
- e De horizontale lijn heeft als vergelijking $y = 5$, dus het functievoorschrift is $h(x) = 5$.

- 14 a Het domein is $\mathbb{R}$ en het bereik is $[-5, \rightarrow)$.
 b Het domein is $\mathbb{R}$ en het bereik is $\mathbb{R}$.
 c Het domein is $\langle \leftarrow, -6 \rangle \cup \langle -6, \rightarrow \rangle$ en het bereik is $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$.
 d Het domein is $\langle \leftarrow, 10]$ en het bereik is $[9, \rightarrow)$.
 e Het domein is $\langle \leftarrow, 4]$ en het bereik is $\langle \leftarrow, 8]$.
 f Het domein is $\mathbb{R}$ en het bereik is $\langle 0, 1]$.

- 20 a De noemer is nul als $x = 0$, dus de verticale asymptoot is de lijn $x = 0$.
 Als x steeds verder van nul ligt naderen de functiewaarden 16, dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 16$.
- b De noemer is nul als $16 - x^2 = 0$, dus als $x = -4$ of $x = 4$, de verticale asymptoten zijn daarom de lijnen $x = -4$ en $x = 4$.
 Als x steeds verder van nul ligt naderen de functiewaarden 0, dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 0$.
- c De noemer is nul als $18 - 2x^2 = 0$ ofwel $2x^2 = 18$ ofwel $x^2 = 9$ dus als $x = -3$ of $x = 3$. De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = -3$ en $x = 3$.
 Als x steeds verder van nul ligt naderen de functiewaarden 0, dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 0$.
- d De noemer is nul als $1 - 2x = 0$ ofwel $2x = 1$ ofwel $x = \frac{1}{2}$, de verticale asymptoot is de lijn $x = \frac{1}{2}$. Als x steeds verder van nul ligt naderen de functiewaarden 2, dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 2$.

- 21 a Het domein is $\langle \leftarrow, 2 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$ en het bereik is $\langle \leftarrow, 5 \rangle \cup \langle 5, \rightarrow \rangle$.
 b Het domein is $\mathbb{R}$ en het bereik is $\langle \leftarrow, 7]$.
 c Het domein is $\langle 2, \rightarrow \rangle$ en het bereik is $\langle 4, \rightarrow \rangle$.
 d Het domein is $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$ en het bereik is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

- 26 $f(x) = 6x^3 + 2x^2 - x$
 Functie f is van de derde graad.
 $g(x) = -x(x^4 + 3)$
 $g(x) = -x^5 - 3x$
 Functie g is van de vijfde graad.
 $h(x) = (x - 5)(2x^2 + 3)$
 $h(x) = 2x^3 + 3x - 10x^2 - 15$
 $h(x) = 2x^3 - 10x^2 + 3x - 15$
 Functie h is van de derde graad.
- $k(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$
 $k(x) = x^4 - 1$
 Functie k is van de vierde graad.
 $m(x) = (x - 2)^2 - (x + 2)^2$
 $m(x) = (x^2 - 4x + 4) - (x^2 + 4x + 4)$
 $m(x) = x^2 - 4x + 4 - x^2 - 4x - 4$
 $m(x) = -8x$
 Functie m is van de eerste graad.
 $n(x) = x^3 + 7 - \frac{1}{2}x(4 + 2x^2)$
 $n(x) = x^3 + 7 - 2x - x^3$
 $n(x) = 7 - 2x$
 Functie n is van de eerste graad.

31 a $2x - 4 = \sqrt{x^2 - 5}$
 $(2x - 4)^2 = x^2 - 5$
 $4x^2 - 16x + 16 = x^2 - 5$
 $3x^2 - 16x + 21 = 0$
 $D = 256 - 4 \cdot 3 \cdot 21 = 4$
 $x = \frac{16 - \sqrt{4}}{6}$ of $x = \frac{16 + \sqrt{4}}{6}$
 $x = 2\frac{1}{3}$ of $x = 3$ (beide oplossingen voldoen)

b $\frac{20}{x-1} = 3x + 4$
 $20 = (3x + 4)(x - 1)$
 $20 = 3x^2 - 3x + 4x - 4$
 $3x^2 + x - 24 = 0$
 $D = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot -24 = 289$
 $x = \frac{-1 - \sqrt{289}}{6}$ of $x = \frac{-1 + \sqrt{289}}{6}$
 $x = -3$ of $x = 2\frac{2}{3}$

c $\frac{1}{2}x(2x - 5) = x^2 - 3x - 11$
 $x^2 - 2\frac{1}{2}x = x^2 - 3x - 11$
 $\frac{1}{2}x = -11$
 $x = -22$

d $x - \sqrt{x+5} = 1$
 $x - 1 = \sqrt{x+5}$
 $(x-1)^2 = x+5$
 $x^2 - 2x + 1 = x + 5$
 $x^2 - 3x - 4 = 0$
 $(x+1)(x-4) = 0$
 $x = -1$ (voldoet niet) of $x = 4$

37 a $x(x+3) = x(2x-5)$
 $x = 0$ of $x+3 = 2x-5$
 $x = 0$ of $-x = -8$
 $x = 0$ of $x = 8$

b $(5-2x)(3+x) = (6+2x)(5-2x)$
 $(5-2x)(3+x) = (5-2x)(6+2x)$
 $5-2x = 0$ of $3+x = 6+2x$
 $-2x = -5$ of $-x = 3$
 $x = 2\frac{1}{2}$ of $x = -3$

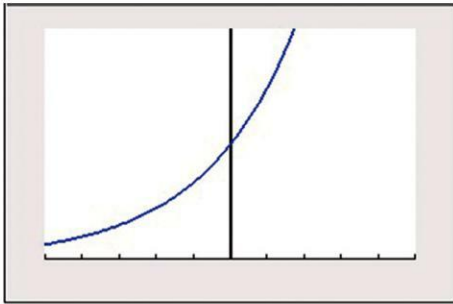
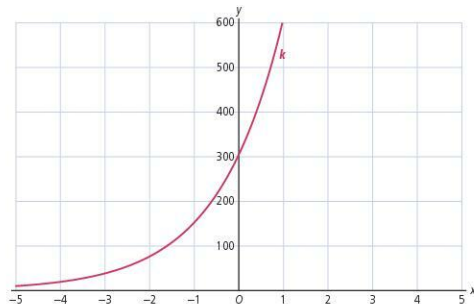
c $30x^4 = 6x^3(x+8)$
 $6x^3 \cdot 5x = 6x^3 \cdot (x+8)$
 $6x^3 = 0$ of $5x = x+8$
 $x = 0$ of $4x = 8$
 $x = 0$ of $x = 2$

d $\frac{x}{x^2-5} = \frac{x}{11}$
 $x \cdot (x^2-5) = x \cdot 11$
 $x = 0$ of $x^2-5 = 11$
 $x = 0$ of $x^2 = 16$
 $x = 0$ of $x = -4$ of $x = 4$

Hoofdstuk 4 Exponentiële functies

- 5 a Van de functie f gaat de grafiek door $(0, 1)$, want $f(0) = 1$.
b De functies f , h en k zijn stijgend, want de groeifactor van deze functies is groter dan 1.

c



- d De grafiek van k heeft horizontale asymptoot $y = 0$
e Het domein is $\mathbb{R}$ en het bereik is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.
- 7 a De groeifactor per twee uur is $0,9^2 = 0,81$.
b De groeifactor per half uur is $0,9^{\frac{1}{2}} \approx 0,9487$.
c De groeifactor per etmaal is $0,9^{24} \approx 0,0798$.
d De groeifactor per kwartier is $0,9^{\frac{1}{4}} \approx 0,9740$.
e De groeifactor per 45 minuten is $0,9^{\frac{3}{4}} \approx 0,9240$.
- 13 a Het functievoorschrift van de beeldgrafiek is $h(x) = 2 \cdot 3^{x-4}$
De asymptoot is $y = 0$.
b Het functievoorschrift van de beeldgrafiek is $k(x) = 6 + 1,5 \cdot 0,7^{x+2}$
De asymptoot is $y = 6$.
c Het functievoorschrift van de beeldgrafiek is $m(x) = -5 + 20 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{x-2}$
De asymptoot is $y = -5$.
- 16 a Het functievoorschrift van de beeldgrafiek is $f(x) = 3 \cdot 4,5 \cdot 1,75^x$ ofwel $f(x) = 13,5 \cdot 1,75^x$
b Het functievoorschrift van de beeldgrafiek is $g(x) = \frac{1}{3} \cdot 4,5 \cdot 1,75^x$ ofwel $g(x) = 1,5 \cdot 1,75^x$
c Het functievoorschrift van de beeldgrafiek is $h(x) = -4,5 \cdot 1,75^x$
d Het functievoorschrift van de beeldgrafiek is $m(x) = -2 \cdot 4,5 \cdot 1,75^x$ ofwel $m(x) = -9 \cdot 1,75^x$
- 23 a $f(x) = 2^{x+1}$
 $f(x) = 2^1 \cdot 2^x$
 $f(x) = 2 \cdot 2^x$
De beginhoeveelheid is 2, de groeifactor is 2, de functie is stijgend.
b $h(p) = 4^{-0,5p+2}$
 $h(p) = 4^2 \cdot 4^{-0,5p}$
 $h(p) = 16 \cdot (4^{-0,5})^p$
 $h(p) = 16 \cdot \frac{1}{2}^p$
De beginhoeveelheid is 16, de groeifactor is $\frac{1}{2}$, de functie is dalend.

c $q(a) = 1,25^{3-2a}$

$$q(a) = 1,25^3 \cdot 1,25^{-2a}$$

$$q(a) = 1,953125 \cdot (1,25^{-2})^a$$

$$q(a) = 1,953125 \cdot 0,64^a$$

De beginhoeveelheid is 1,953125 , de groeifactor is 0,64 , de functie is dalend.

d $k(x) = 25 \cdot 2^{3x+4}$

$$k(x) = 25 \cdot 2^4 \cdot 2^{3x}$$

$$k(x) = 400 \cdot (2^3)^x$$

$$k(x) = 400 \cdot 8^x$$

De beginhoeveelheid is 400, de groeifactor is 8, de functie is stijgend.

e $m(t) = 2,5 \cdot 0,36^{\frac{1}{2}t+1}$

$$m(t) = 2,5 \cdot 0,36^1 \cdot 0,36^{\frac{1}{2}t}$$

$$m(t) = 0,9 \cdot (0,36^{\frac{1}{2}})^t$$

$$m(t) = 0,9 \cdot 0,6^t$$

De beginhoeveelheid is 0,9 , de groeifactor is 0,6 , de functie is dalend.

f $g(x) = 9^{1,5(x+2)}$

$$g(x) = 9^{1,5x+3}$$

$$g(x) = 9^3 \cdot 9^{1,5x}$$

$$g(x) = 729 \cdot (9^{1,5})^x$$

$$g(x) = 729 \cdot 27^x$$

De beginhoeveelheid is 729 , de groeifactor is 27, de functie is stijgend.

31 a $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16$

$$(2^{-1})^x = 2^4$$

$$2^{-x} = 2^4$$

$$-x = 4$$

$$x = -4$$

e $3^t = \left(\frac{1}{9}\right)^{t-1}$

$$3^t = (3^{-2})^{t-1}$$

$$3^t = 3^{-2t+2}$$

$$t = -2t + 2$$

$$3t = 2$$

$$t = \frac{2}{3}$$

b $4^x = \frac{1}{256}$

$$4^x = 256^{-1}$$

$$4^x = (4^4)^{-1}$$

$$4^x = 4^{-4}$$

$$x = -4$$

f $27 \cdot 3^t = 3$

$$3^3 \cdot 3^t = 3$$

$$3^{3+t} = 3^1$$

$$3 + t = 1$$

$$t = -2$$

c $2^{x+4} = \frac{1}{8}$

$$2^{x+4} = 2^{-3}$$

$$x + 4 = -3$$

$$x = -7$$

g $15 \cdot 9^t = 5 \cdot 3^{3t}$

$$3 \cdot (3^2)^t = 3^{3t}$$

$$3^1 \cdot 3^{2t} = 3^{3t}$$

$$3^{1+2t} = 3^{3t}$$

$$1 + 2t = 3t$$

$$t = 1$$

d $0,4^{2x-6} = 1$

$$0,4^{2x-6} = 0,4^0$$

$$2x - 6 = 0$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

h $\sqrt{5^x} = \frac{1}{125}$

$$(5^x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5^3}$$

$$5^{\frac{1}{2}x} = 5^{-3}$$

$$\frac{1}{2}x = -3$$

$$x = -6$$

32 a Kan exact.

$$2^{\frac{1}{2}x-1} = \frac{1}{16}$$

$$2^{\frac{1}{2}x-1} = 2^{-4}$$

$$\frac{1}{2}x - 1 = -4$$

$$\frac{1}{2}x = -3$$

$$x = -6$$

b met de rekenmachine:

$$\text{invoer: } y_1 = 3^{5x+2} \text{ en } y_2 = 15$$

$$\text{venster: } 0 \leq x \leq 0,5, 0 \leq y \leq 30$$

optie: snijpunt

De oplossing is $x \approx 0,09$.

c Kan exact.

$$4^x \cdot 5^x = 10^x$$

$$20^x = 10^x$$

$$x = 0$$

d Kan exact.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(2^{-2}\right)^x = \left(2^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$2^{-2x} = 2^{-\frac{1}{2}}$$

$$-2x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{4}$$

e Kan exact.

$$60 \cdot 5^{3x-5} = 12$$

$$5 \cdot 5^{3x-5} = 1$$

$$5^1 \cdot 5^{3x-5} = 5^0$$

$$5^{3x-4} = 5^0$$

$$3x - 4 = 0$$

$$3x = 4$$

$$x = 1\frac{1}{3}$$

f met de rekenmachine:

$$\text{invoer: } y_1 = 3^{2+x} \text{ en } y_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}$$

$$\text{venster: } -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 10$$

optie: snijpunt

De oplossing is $x \approx -0,61$.

35 a $450 \cdot 0,78^t < 125$

met de rekenmachine:

$$\text{invoer: } y_1 = 450 \cdot 0,78^x \text{ en } y_2 = 125$$

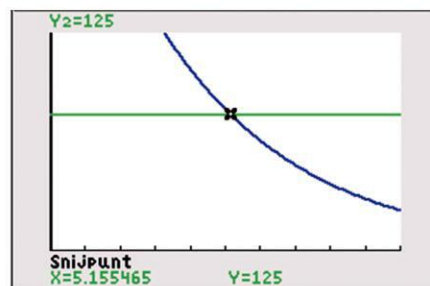
$$\text{venster: } 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 200$$

optie: snijpunt

De grafieken snijden elkaar bij $x \approx 5,16$.

Zie de plot hiernaast.

De oplossing is $t > 5,16$.



b $8 \cdot 1,05^t > 10$

met de rekenmachine:

$$\text{invoer: } y_1 = 8 \cdot 1,05^x \text{ en } y_2 = 10$$

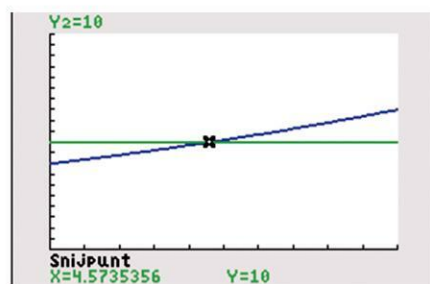
$$\text{venster: } 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 20$$

optie: snijpunt

De grafieken snijden elkaar bij $x \approx 4,57$.

Zie de plot hiernaast.

De oplossing is $t > 4,57$.



c $0,025 \cdot 1,01^x > 1$

met de rekenmachine:

$$\text{invoer: } y_1 = 0,025 \cdot 1,01^x \text{ en } y_2 = 1$$

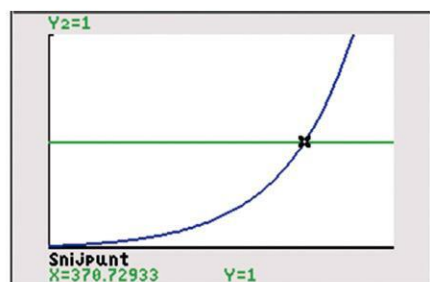
$$\text{venster: } 0 \leq x \leq 500, 0 \leq y \leq 2$$

optie: snijpunt

De grafieken snijden elkaar bij $x \approx 370,73$.

Zie de plot hiernaast.

De oplossing is $x > 370,73$.



d $200 \cdot 1,7^x < 25$

met de rekenmachine:

invoer: $y_1 = 200 \cdot 1,7^x$ en $y_2 = 25$

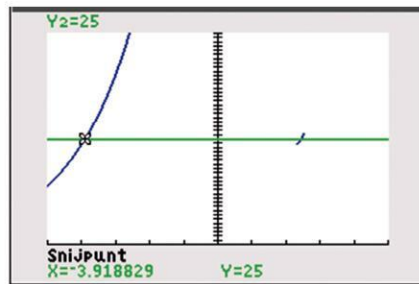
venster: $-5 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 50$

optie: snijpunt

De grafieken snijden elkaar bij $x \approx -3,92$.

Zie de plot hiernaast.

De oplossing is $x < -3,92$.



Hoofdstuk 5 Lijnen en afstanden

4 a $y = -4x + 8$ dus $4x + y = 8$ en delen door 8 geeft $\frac{x}{2} + \frac{y}{8} = 1$.

b $\frac{x}{3\frac{1}{3}} + \frac{y}{1\frac{1}{2}} = 1$

$$\frac{y}{1\frac{1}{2}} = -\frac{x}{3\frac{1}{3}} + 1$$

$$y = -\frac{1\frac{1}{2}}{3\frac{1}{3}} \cdot x + 1\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{9}{20}x + 1\frac{1}{2}$$

c $y = 1\frac{2}{3}x - 5$ dus $-1\frac{2}{3}x + y = -5$ en maal -3 geeft $5x - 3y = 15$.

6 a De snijpunten met de assen zijn $(3, 0)$ en $(0, 8)$ dus $\frac{x}{3} + \frac{y}{8} = 1$.

De andere twee vormen zijn $2\frac{2}{3}x + y = 8$ en $y = -2\frac{2}{3}x + 8$.

b De richtingscoëfficiënt is $\frac{11-3}{-5-1} = \frac{8}{-4} = -2$.

De vergelijking heeft de vorm $y = -2x + b$.

Invullen van $(-1, 3)$ geeft $3 = -2 \cdot -1 + b$ dus $b = 1$ en $y = -2x + 1$.

De andere twee vormen zijn $2x + y = 1$ en $\frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{1} = 1$.

c De richtingscoëfficiënt is $\frac{17-3}{12-8} = \frac{14}{4} = 3.5$.

De vergelijking heeft de vorm $y = 3.5x + b$.

Invullen van $(8, -3)$ geeft $-3 = 3.5 \cdot 8 + b$ dus $b = -43$ en $y = 3.5x - 43$.

De andere twee vormen zijn $-5x + y = -43$ en $\frac{x}{8\frac{3}{5}} - \frac{y}{43} = 1$.

d De richtingscoëfficiënt is $\frac{2-6}{2-0} = \frac{-4}{2} = -2$.

De vergelijking heeft de vorm $y = -2x + b$.

De lijn gaat door $(0, 6)$, dus de vergelijking is $y = -2x + 6$.

De andere twee vormen zijn $2x + y = 6$ en $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$.

e De richtingscoëfficiënt is $\frac{-129-51}{65-20} = \frac{-180}{45} = -4$.

De vergelijking heeft de vorm $y = -4x + b$.

Invullen van $(20, 51)$ geeft $51 = -4 \cdot 20 + b$ dus $b = 131$ en $y = -4x + 131$.

De andere twee vormen zijn $4x + y = 131$ en $\frac{x}{32\frac{3}{4}} + \frac{y}{131} = 1$.

- f De snijpunten met de assen zijn $(-7,0)$ en $(0, 35)$ dus $\frac{x}{-7} + \frac{y}{35} = 1$.

De andere twee vormen zijn $-5x + y = 35$ en $y = 5x + 35$.

- 11 a Substitueren van de tweede vergelijking in de eerste vergelijking geeft:

$$3x + (-2x - 4) = 5$$

$$3x - 2x - 4 = 5$$

$$x = 9 \text{ en } y = -2 \cdot 9 - 4 = -22$$

De oplossing van het stelsel is $x = 9$ en $y = -22$.

- b Uit de tweede vergelijking volgt $y = -2x$, dit invullen in de eerste geeft:

$$4x + -2x = 14$$

$$2x = 14$$

$$x = 7 \text{ en } y = -2 \cdot 7 = -14$$

De oplossing van het stelsel is $x = 7$ en $y = -14$.

- c Uit de tweede vergelijking volgt $y = 7x - 13$, dit invullen in de eerste geeft:

$$3x - 2(7x - 13) = 4$$

$$3x - 14x + 26 = 4$$

$$-11x = -22$$

$$x = 2 \text{ en } y = 7 \cdot 2 - 13 = 1$$

De oplossing van het stelsel is $x = 2$ en $y = 1$.

- d Uit $a - b = 22$ volgt $a = b + 22$, dit invullen in de tweede vergelijking geeft:

$$b + 22 + b = -21$$

$$2b = -43$$

$$b = -21\frac{1}{2} \text{ en } a = -21\frac{1}{2} + 22 = \frac{1}{2}$$

De oplossing van het stelsel is $a = \frac{1}{2}$ en $b = -21\frac{1}{2}$.

- e Uit $c + d = 7$ volgt $c = -d + 7$, dit invullen in de eerste vergelijking geeft:

$$3(-d + 7) - 4d = -4$$

$$-3d + 21 - 4d = -4$$

$$-7d = -25$$

$$d = 3\frac{4}{7} \text{ en } c = -3\frac{4}{7} + 7 = 3\frac{3}{7}$$

De oplossing van het stelsel is $c = 3\frac{3}{7}$ en $d = 3\frac{4}{7}$.

- f Uit $0,3p + 1,2q = 3$ volgt $3p + 12q = 30$ dus $p = -4q + 10$, dit invullen geeft:

$$1,5(-4q + 10) - 2q = 3$$

$$-6q + 15 - 2q = 3$$

$$-8q = -12$$

$$q = 1\frac{1}{2} \text{ en } p = -4 \cdot 1\frac{1}{2} + 10 = 4$$

De oplossing van het stelsel is $p = 4$ en $q = 1\frac{1}{2}$.

- g Uit $x - 2y = 3$ volgt $x = 2y + 3$, dit invullen in de eerste vergelijking geeft:

$$1,2(2y + 3) + y = 7$$

$$2,4y + 3,6 + y = 7$$

$$3,4y = 3,4$$

$$y = 1 \text{ en } x = 2 \cdot 1 + 3 = 5$$

De oplossing van het stelsel is $x = 5$ en $y = 1$.

- h Uit $2x + y = -8$ volgt $y = -2x - 8$, dit invullen in de eerste vergelijking geeft:

$$x + 1\frac{1}{3}(-2x - 8) = 6$$

$$x - 2\frac{2}{3}x - 10\frac{2}{3} = 6$$

$$-1\frac{2}{3}x = 16\frac{2}{3}$$

$$x = -10 \text{ en } y = -2 \cdot -10 - 8 = 12$$

De oplossing van het stelsel is $x = -10$ en $y = 12$.

- 14 a** Bij de stelsels B en D is substitutie het handigst, omdat daar al één van de variabelen is vrijgemaakt.

b A: herleid $4x - 5y - 13 = 0$ tot $-5y = -4x + 13$ en tot $y = \frac{4}{5}x - 2\frac{3}{5}$

Herleid $3x + 7y + 1 = 0$ tot $7y = -3x - 1$ en tot $y = -\frac{3}{7}x - \frac{1}{7}$

Gelijkstellen geeft $\frac{4}{5}x - 2\frac{3}{5} = -\frac{3}{7}x - \frac{1}{7}$ (vermenigvuldig met 35)

$28x - 91 = -15x - 5$

$43x = 86$, dus $x = 2$ en $y = \frac{4}{5} \cdot 2 - 2\frac{3}{5} = -1$

De oplossing van het stelsel is $x = 2$ en $y = -1$.

B: substitueren van de eerste vergelijking in de tweede vergelijking geeft:

$3(2y + 2) - 5y = 8$

$6y + 6 - 5y = 8$

$y = 2$ en $x = 2 \cdot 2 + 2 = 6$

De oplossing van het stelsel is $x = 6$ en $y = 2$.

C: uit $x + y = -3$ volgt $y = -x - 3$, dit substitueren in de tweede vergelijking

geeft: $4x + 3(-x - 3) = -3$

$4x - 3x - 9 = -3$

$x = 6$ en $y = -6 - 3 = -9$

De oplossing van het stelsel is $x = 6$ en $y = -9$.

D: substitueren van de tweede vergelijking in de eerste vergelijking geeft:

$2x - (1\frac{1}{2}x - 5) = 8$

$2x - 1\frac{1}{2}x + 5 = 8$

$\frac{1}{2}x = 3$

$x = 6$ en $y = 1\frac{1}{2} \cdot 6 - 5 = 4$

De oplossing van het stelsel is $x = 6$ en $y = 4$.

21 lijn k: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 1$

$\frac{1}{4}y = -\frac{1}{2}x + 1$ ofwel $y = -2x + 4$

Voor de hoek ϕ met de x -as geldt: $\tan(\phi) = 2$ dus de hoek is 63° .

lijn m: $4x + 6y = 1$

$6y = -4x + 1$ ofwel $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}$

Voor de hoek ϕ met de x -as geldt: $\tan(\phi) = \frac{2}{3}$ dus de hoek is 34° .

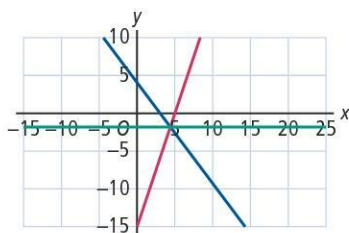
lijn n: $1\frac{1}{2}x = y + 2$

$-y = -1\frac{1}{2}x + 2$ ofwel $y = 1\frac{1}{2}x - 2$

Voor de hoek ϕ met de x -as geldt: $\tan(\phi) = 1\frac{1}{2}$ dus de hoek is 56° .

26 a Herleid $x - \frac{1}{3}y = 5$ tot $\frac{1}{3}y = x - 5$ dus $y = 3x - 15$.

Herleid $3y + 4x = 12$ tot $3y = -4x + 12$ dus $y = -\frac{4}{3}x + 4$.



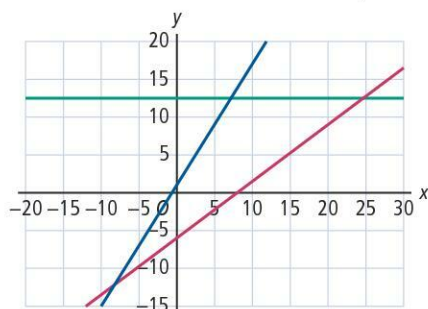
De hoeken met de horizontale lijn zijn $\tan^{-1}(3) = 71,565...^\circ$ en

$\tan^{-1}(\frac{4}{3}) = 53,130...^\circ$.

De hoek tussen de lijnen is $180 - (71,565... + 53,130...) \approx 55^\circ$.

- b** Herleid $2y - 3x = 1$ tot $2y = 3x + 1$ dus $y = 1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

De hoek tussen de lijnen $y = \frac{3}{4}x - 6$ en $y = 1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ wordt gevraagd.

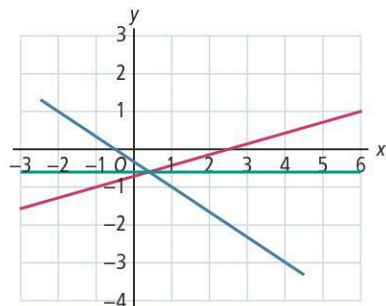


De hoeken met de horizontale lijn zijn $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 36,869...^\circ$ en $\tan^{-1}\left(1\frac{1}{2}\right) = 56,309...^\circ$.

De hoek tussen de lijnen is $56,309... - 36,869... \approx 19^\circ$.

- c** Herleid $2x - 7y = 5$ tot $7y = 2x - 5$ dus $y = \frac{2}{7}x - \frac{5}{7}$

Herleid $2x + 3y = -1$ tot $3y = -2x - 1$ dus $y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$



De hoeken met de horizontale lijn zijn $\tan^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) = 15,945...^\circ$ en $\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33,690...^\circ$.

De hoek tussen de lijnen is $15,945... + 33,690... \approx 50^\circ$.

- 30** Herleid alle vergelijkingen tot de vorm $y = ax + b$.

$k: y = \frac{1}{3}x - 5$ $l: \frac{x}{1} + \frac{y}{3} = 1$ wordt $\frac{y}{3} = -\frac{x}{1} + 1$ dus $y = -3x + 3$

$m: y = \frac{5}{3}x + 1$ $n: 3x - y = 5$ wordt $-y = -3x + 5$ dus $y = 3x - 5$

$p: 5x - 3y = 1$ wordt $-3y = -5x + 1$ dus $y = \frac{5}{3}x - \frac{1}{3}$

$q: x = 3y + 5$ wordt $-3y = -x + 5$ dus $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$

Omdat $\frac{1}{3} \cdot -3 = -1$, staan k en l loodrecht op elkaar en staan q en l loodrecht op elkaar.

- 32 a** Herleid $5y = 7 - 2x$ tot $y = -\frac{2}{5}x + 1\frac{2}{5}$

De loodlijn op l heeft richtingscoëfficiënt $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ dus de vergelijking is van de vorm $y = 2\frac{1}{2}x + b$.

Invullen van $P(2, -5)$ geeft $-5 = 2\frac{1}{2} \cdot 2 + b$ dus $b = -10$.

Een vergelijking van de loodlijn is $y = 2\frac{1}{2}x - 10$.

- b** Herleid $8x + 9y = 12$ tot $9y = -8x + 12$ en tot $y = -\frac{8}{9}x + 1\frac{1}{3}$

De loodlijn op m heeft richtingscoëfficiënt $\frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$ dus de vergelijking is van de vorm $y = 1\frac{1}{8}x + b$.

Invullen van $Q(1, 12)$ geeft $12 = 1\frac{1}{8} \cdot 1 + b$ dus $b = 10\frac{7}{8}$

Een vergelijking van de loodlijn is $y = 1\frac{1}{8}x + 10\frac{7}{8}$

- 40 a** Herleid $m: 3x + y = 2$ tot $y = -3x + 2$.

Een loodlijn op m is van de vorm $y = \frac{1}{3}x + b$.

$$Q(-1, -5) \text{ invullen geeft } -5 = \frac{1}{3} \cdot -1 + b \text{ dus } b = -4\frac{2}{3}$$

Een vergelijking van de loodlijn op m is $y = \frac{1}{3}x - 5\frac{1}{3}$

Bereken het snijpunt van deze loodlijn met m :

$$-3x + 2 = \frac{1}{3}x - 4\frac{2}{3}$$

$$-3\frac{1}{3}x = -6\frac{2}{3}$$

$$x = 2 \text{ en } y = -3 \cdot 2 + 2 = -4. \text{ Het snijpunt is } S(2, -4).$$

$$d(Q, m) = QS = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (-5 - (-4))^2} = \sqrt{10}$$

- b** Herleid $l: \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y = 1$ tot $\frac{1}{3}y = -\frac{1}{6}x + 1$ of $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

Een loodlijn op l is van de vorm $y = 2x + b$.

$$P(4, 6) \text{ invullen geeft } 6 = 2 \cdot 4 + b \text{ dus } b = -2.$$

Een vergelijking van de loodlijn op l is $y = 2x - 2$.

Bereken het snijpunt van deze loodlijn met l :

$$2x - 2 = -\frac{1}{2}x + 3$$

$$2\frac{1}{2}x = 5$$

$$x = 2 \text{ en } y = 2 \cdot 2 - 2 = 2. \text{ Het snijpunt is } S(2, 2).$$

$$d(P, l) = PS = \sqrt{(4 - 2)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{20}$$

- 42 a** Kies een punt, bijvoorbeeld $P(0, 15)$, op de lijn $y = 2\frac{1}{2}x + 15$.

Een loodlijn hier op is $y = -\frac{2}{5}x + 15$.

Bereken met substitutie hiervan het snijpunt met de eerste lijn:

$$5x - 2(-\frac{2}{5}x + 15) = -1$$

$$5x + \frac{4}{5}x - 30 = -1$$

$$5\frac{4}{5}x = 29$$

$$x = 5 \text{ en } y = -\frac{2}{5} \cdot 5 + 15 = 13 \text{ dus het snijpunt is } Q(5, 13).$$

$$d(2 \text{ lijnen}) = PQ = \sqrt{(0 - 5)^2 + (15 - 13)^2} = \sqrt{29}$$

- b** Kies het punt, bijvoorbeeld $P(0, 8)$, op de lijn $y = -\frac{1}{2}x + 8$.

Een loodlijn hier op is $y = 2x + 8$.

Bereken door gelijk te stellen het snijpunt hiervan met de eerste lijn:

$$-\frac{1}{2}x + 3 = 2x + 8$$

$$-2\frac{1}{2}x = 5$$

$$x = -2 \text{ en } y = 2 \cdot -2 + 8 = 4 \text{ dus het snijpunt is } Q(-2, 4).$$

$$d(2 \text{ lijnen}) = PQ = \sqrt{(0 - (-2))^2 + (8 - 4)^2} = \sqrt{20}$$

- c** Herleiden van $2x + 8y = 15$ geeft $8y = -2x + 15$ ofwel $y = -\frac{1}{4}x + 1\frac{7}{8}$

Herleiden van $x + 4y = -18$ geeft $4y = -x - 18$ ofwel $y = -\frac{1}{4}x - 4\frac{1}{2}$

De richtingscoëfficiënt van beide lijnen is $-\frac{1}{4}$, dus zijn ze evenwijdig.

Kies een punt, bijvoorbeeld, $P(-2, -4)$ op de tweede lijn.

Een loodlijn hier op is van de vorm $y = 4x + b$.

$$\text{Invullen van } P(-2, -4) \text{ geeft } -4 = 4 \cdot -2 + b \text{ dus } b = 4.$$

Een vergelijking van de loodlijn is $y = 4x + 4$.

Bereken met substitutie het snijpunt van deze loodlijn met de eerste lijn:

$$2x + 8(4x + 4) = 15$$

$$2x + 32x + 32 = 15$$

$$34x = -17$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ en } y = 4 \cdot -\frac{1}{2} + 4 = 2 \text{ dus het snijpunt is } Q(-\frac{1}{2}, 2).$$

$$d(2 \text{ lijnen}) = PQ = \sqrt{(-\frac{1}{2} - (-2))^2 + (2 - (-4))^2} = \sqrt{38\frac{1}{4}}$$

- d Kies een punt, bijvoorbeeld $P(0, 5)$, op de tweede lijn.

Een loodlijn hier op is $y = \frac{3}{5}x + 5$.

Bereken met substitutie het snijpunt van deze loodlijn met de eerste lijn:

$$5x + 3\left(\frac{3}{5}x + 5\right) = -19$$

$$5x + 1\frac{4}{5}x + 15 = -19$$

$$6\frac{4}{5}x = -34$$

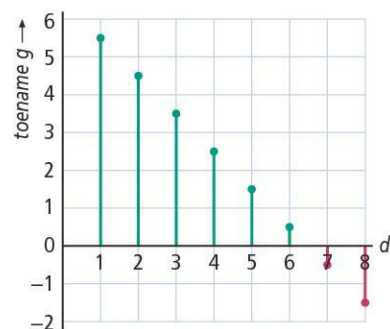
$$x = -5 \text{ en } y = \frac{3}{5} \cdot -5 + 5 = 2 \text{ dus het snijpunt is } Q(-5, 2).$$

$$d(2\text{lijnen}) = PQ = \sqrt{(0 - (-5))^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{34}$$

Hoofdstuk 6 Afgeleide functies

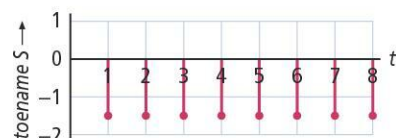
- 3 a $g = -0,5d^2 + 6d$

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8
g	0	5,5	10	13,5	16	17,5	18	17,5	16
toename		5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5	-0,5	-1,5



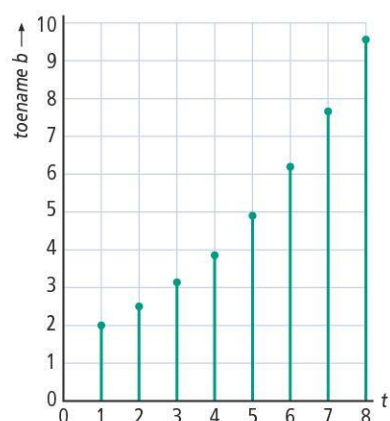
- b $S = 12 - 1,5t$

Dit is een rechte lijn. De afname is steeds 1,5.



- c $b = 8 \cdot 1,25^t$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
b	8	10	12,5	15,625	19,531	24,414	30,518	38,147	47,684
toename		2	2,5	3,125	3,9063	4,8828	6,1035	7,6294	9,5367



9 a $f(-7) = -30,4$ en $f(1) = -1,6$

Het differentiequotiënt over het interval $[-7, 1]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1,6 - (-30,4)}{1 - (-7)} = 3,6$.

b Ja, want de grafiek van f is een rechte lijn, dus de gemiddelde toename is over elk interval gelijk aan de richtingscoëfficiënt en die is 3,6.

c $g(9) = 18$ en $g(30) = 150$

Het differentiequotiënt over het interval $[9, 30]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{150 - 18}{30 - 9} \approx 6,29$.

d $h\left(3\frac{1}{2}\right) = 35$ en $h(6) = 30$

Het differentiequotiënt over het interval $\left[3\frac{1}{2}, 6\right]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{30 - 35}{6 - 3\frac{1}{2}} = -2$.

15 a De richtingscoëfficiënt van lijn l is 2.

b Gemiddelde helling op $[-3; -2]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(-2) - f(-3)}{1} = \frac{3\frac{2}{3} - 2}{1} = 1\frac{2}{3}$

Gemiddelde helling op $[-3; -2,5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(-2,5) - f(-3)}{0,5} \approx \frac{2,917 - 2}{0,5} \approx 1,83$

Gemiddelde helling op $[-3; -2,9]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(-2,9) - f(-3)}{0,1} \approx \frac{2,197 - 2}{0,1} \approx 1,97$

Gemiddelde helling op $[-3; -2,99]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(-2,99) - f(-3)}{0,01} \approx \frac{2,01997 - 2}{0,01} \approx 1,997$

c Hoe kleiner het interval wordt, hoe meer de gemiddelde helling nadert naar 2. Dus ja, de helling van de grafiek in het punt $(-3, 2)$ komt overeen met de helling van lijn l .

22 a Over het interval $[4; 4,01]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4,01) - f(4)}{0,01} \approx \frac{6,012498 - 6}{0,01} \approx 1,2498$

Over het interval $[4; 4,001]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4,001) - f(4)}{0,001} \approx \frac{6,00124998 - 6}{0,001} \approx 1,24998$

Over het interval $[4; 4,0001]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4,0001) - f(4)}{0,0001} \approx \frac{6,000125 - 6}{0,0001} \approx 1,25$

b De uitkomsten van opdracht a naderen naar 1,25. Het differentiaalquotiënt voor $x = 4$ is dus $1\frac{1}{4}$

c Over het interval $[4; 4,000001]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4,000001) - f(4)}{0,000001} \approx \frac{6,00000125 - 6}{0,000001} \approx 1,25$, klopt.

26 a $f'(x) = 2x$

De helling is $f'\left(-1\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot -1\frac{1}{2} = -3$

b $f'(10) = 2 \cdot 10 = 20$

c Voor $x = -4,7$ is $\frac{dy}{dx} = 2 \cdot -4,7 = -9,4$

d De helling is -8 , als $f'(x) = -8$.

$2x = -8$

$x = -4$

$f(-4) = (-4)^2 = 16$, dus in het punt $(-4, 16)$

31 a $f'(x) = 3x^2$

De helling in het punt (2, 8) is $f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$.

b $g'(x) = 10x^9$

De helling in het punt (-2, 1024) is $g'(-2) = 10 \cdot (-2)^9 = -5120$.

c De helling van de grafiek van f is 75 als $f'(x) = 75$.

$$3x^2 = 75$$

$$x^2 = 25$$

$$x = -5 \text{ of } x = 5$$

$$f(-5) = (-5)^3 = -125 \text{ en } f(5) = 5^3 = 125$$

In de punten (-5, -125) en (5, 125) is de helling 75.

33 a $f'(x) = 3x^2$ en $f'(3) = 27$

$x = 3$ en $y = 27$ invullen bij $y = 27x + b$ geeft $27 = 27 \cdot 3 + b$ ofwel $b = -54$.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = 27x - 54$.

b $f'(x) = 5x^4$ en $f'(-1) = 5$

$x = -1$ en $y = -1$ invullen bij $y = 5x + b$ geeft $-1 = 5 \cdot -1 + b$ ofwel $b = 4$.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = 5x + 4$.

c $f'(x) = 9x^8$ en $f'(2) = 2304$

$x = 2$ en $y = 512$ invullen bij $y = 2304x + b$ geeft $512 = 2304 \cdot 2 + b$ ofwel

$$b = -4096.$$

Een vergelijking van de raaklijn is $y = 2304x - 4096$.

39 a $f'(x) = 30x^2$

e $s'(t) = 0$

b $g'(x) = 75x^2 + 40$

f $s'(t) = 15t^5 - 9t^2$

c $h'(t) = 12t - 14t^3$

g $p'(r) = -5$

d $k'(t) = 45t^9 - 12$

h $q'(t) = 3t^5 - 6t^9$

40 a $f(x) = -2x^3 + 3x - 1$

$$f'(x) = -6x^2 + 3$$

De helling is $f'(2) = -6 \cdot 2^2 + 3 = -24 + 3 = -21$.

b $g(x) = -3x^2 + 5x - 7$

$$g'(x) = -6x + 5$$

De helling is $g'(2) = -6 \cdot 2 + 5 = -12 + 5 = -7$.

c $h(x) = (3x - 8)(-2x + 1)$

$$h(x) = -6x^2 + 3x + 16x - 8 \text{ ofwel } h(x) = -6x^2 + 19x - 8$$

$$h'(x) = -12x + 19$$

De helling is $h'(2) = -12 \cdot 2 + 19 = -24 + 19 = -5$.

d $k(x) = (4x - 7)^2 = (4x - 7)(4x - 7)$

$$k(x) = 16x^2 - 28x - 28x + 49 \text{ ofwel } k(x) = 16x^2 - 56x + 49$$

$$k'(x) = 32x - 56$$

De helling is $k'(2) = 32 \cdot 2 - 56 = 64 - 56 = 8$.

e $l(x) = x^3(6 - x^2)$

$$l(x) = 6x^3 - x^5$$

$$l'(x) = 18x^2 - 5x^4$$

De helling is $l'(2) = 18 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2^4 = 72 - 80 = -8$.

f $m(x) = (3x^2 + 1)(x^2 - 3)$

$$m(x) = 3x^4 - 9x^2 + x^2 - 3 \text{ ofwel } m(x) = 3x^4 - 8x^2 - 3$$

$$m'(x) = 12x^3 - 16x$$

De helling is $m'(2) = 12 \cdot 2^3 - 16 \cdot 2 = 96 - 32 = 64$.

43 a $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 6x - 2$

$$f'(x) = -1\frac{1}{2}x + 6$$

$$f'(x) = 0 \text{ als } -1\frac{1}{2}x + 6 = 0$$

$$-1\frac{1}{2}x = -6$$

$$x = 4$$

$$f(4) = 10$$

De top is het punt (4, 10).

b $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x$

$$f'(x) = x^2 - 2x - 8$$

$$f'(x) = 0 \text{ als } x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x - 4)(x + 2) = 0$$

$$x - 4 = 0 \text{ of } x + 2 = 0$$

$$x = 4 \text{ of } x = -2$$

$$f(4) = -26\frac{2}{3} \text{ en } f(-2) = 9\frac{1}{3}$$

De toppen zijn de punten $(-2, 9\frac{1}{3})$ en $(4, -26\frac{2}{3})$.

1 Vergelijkingen

1 a $7\frac{1}{2}u - 15 = 10 - 5u$

$$12\frac{1}{2}u - 15 = 10$$

$$12\frac{1}{2}u = 25$$

$$u = 2$$

b $3k + 1 = 10 - 5(k - 3)$

$$3k + 1 = 10 - 5k + 15$$

$$8k + 1 = 25$$

$$8k = 24$$

$$k = 3$$

c $g^2 - 11g - 12 = 0$

$$(g - 12)(g + 1) = 0$$

$$g - 12 = 0 \text{ of } g + 1 = 0$$

$$g = 12 \text{ of } g = -1$$

d $(x - 1)(x + 4) = (2x + 5)(x + 4)$

$$x + 4 = 0 \text{ of } x - 1 = 2x + 5$$

$$x = -4 \text{ of } x = -6$$

2 a Het is lijn n .

Je ziet dat lijn n de y -as snijdt in een punt met een positieve y -coördinaat.

Als je in de vergelijking van lijn n voor x het getal 0 invult, krijg je $2y = 16$, dus $y = 8$. Dit klopt met de figuur, dus bij de vergelijking hoort lijn n .

b $2y + 3x = 16$

$$2y = -3x + 16$$

$$y = -1\frac{1}{2}x + 8$$

c $3y - 2x + 2 = 0$

$$3y = 2x - 2$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

d De richtingscoëfficiënt van l is gelijk aan $\frac{2 - (-4)}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2$.

Een vergelijking heeft dus de vorm $y = 2x + b$.

$x = 1$ en $y = -4$ invullen geeft $-4 = 2 \cdot 1 + b$, dus $b = -6$.

Een vergelijking van l is $y = 2x - 6$.

e Lijn k is evenwijdig aan lijn n en heeft dus ook richtingscoëfficiënt $-1\frac{1}{2}$

Het startgetal van k is 5, dus een vergelijking is $y = -1\frac{1}{2}x + 5$.

3 a $s = 4t + 28$

$$4t = s - 28$$

$$t = \frac{1}{4}s - 7$$

b $\frac{4s}{t + 5} = 20$

$$4s = 20(t + 5)$$

$$t + 5 = \frac{4s}{20}$$

$$t = \frac{4s}{20} - 5 \text{ ofwel } t = \frac{1}{5}s - 5$$

c $3s - t + 1 = -2(3t + 4)$

$$3s - t + 1 = -6t - 8$$

$$3s + 1 = -5t - 8$$

$$5t = -3s - 9$$

$$t = -\frac{3}{5}s - \frac{9}{5} \text{ ofwel } t = -\frac{3}{5}s - 1\frac{4}{5}$$

4 a $y = -9(-5x - 4) + 10$

$$y = 45x + 36 + 10$$

$$y = 45x + 46$$

b $y = 4(x + 1)^2 + 2(x + 1)$

$$y = 4(x^2 + 2x + 1) + 2x + 2$$

$$y = 4x^2 + 8x + 4 + 2x + 2$$

$$y = 4x^2 + 10x + 6$$

5 a $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$, substitueer $x^3 = p$

$$p^2 - 7p - 8 = 0$$

$$(p - 8)(p + 1) = 0$$

$$p = 8 \text{ of } p = -1, \text{ omdat } p = x^3 \text{ geldt}$$

$$x^3 = 8 \text{ of } x^3 = -1$$

$$x = 2 \text{ of } x = -1$$

b $(x^2 - 4)^2 + 2(x^2 - 4) - 8 = 0$, substitueer $x^2 - 4 = p$

$$p^2 + 2p - 8 = 0$$

$$(p + 4)(p - 2) = 0$$

$$p = -4 \text{ of } p = 2, \text{ omdat } p = x^2 - 4$$

$$x^2 - 4 = -4 \text{ of } x^2 - 4 = 2$$

$$x^2 = 0 \text{ of } x^2 = 6$$

$$x = 0 \text{ of } x = -\sqrt{6} \text{ of } x = \sqrt{6}$$

6 a $(3x - 4)^2 = 16$

$$3x - 4 = -4 \text{ of } 3x - 4 = 4$$

$$3x = 0 \text{ of } 3x = 8$$

$$x = 0 \text{ of } x = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

b $(2p + 5)^2 = (p - 2)^2$

$$2p + 5 = p - 2 \text{ of } 2p + 5 = -p + 2$$

$$p = -7 \text{ of } 3p = -3$$

$$p = -7 \text{ of } p = -1$$

c $2a = \frac{42}{a} - 5$

$$2a + 5 = \frac{42}{a}$$

$$a(2a + 5) = 42$$

$$2a^2 + 5a = 42$$

$$2a^2 + 5a - 42 = 0$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot -42 = 361$$

$$a = \frac{-5 + \sqrt{361}}{2 \cdot 2} \text{ of } a = \frac{-5 - \sqrt{361}}{2 \cdot 2}$$

$$a = \frac{-5 + 19}{4} = 3\frac{1}{2} \text{ of } a = \frac{-5 - 19}{4} = -6$$

d $\frac{2c - 5}{c + 2} = \frac{c - 3}{2c}$

$$2c(2c - 5) = (c + 2)(c - 3)$$

$$4c^2 - 10c = c^2 - c - 6$$

$$3c^2 - 9c + 6 = 0$$

$$c^2 - 3c + 2 = 0$$

$$(c - 1)(c - 2) = 0$$

$$c - 1 = 0 \text{ of } c - 2 = 0$$

$$c = 1 \text{ of } c = 2$$

$$\begin{aligned}
7 \text{ a } \sqrt{7-2x} &\leq 1 \\
\sqrt{7-2x} &= 1 \\
7-2x &= 1 \\
2x &= 6 \\
x &= 3
\end{aligned}$$

De grafiek bij de formule bevindt zich onder of op de horizontale lijn $y = 1$ als $x \geq 3$.

Je moet er ook nog rekening mee houden, dat de formule $y = \sqrt{7-2x}$ alleen uitkomsten heeft wanneer $7-2x \geq 0$, dus als $x \leq 3\frac{1}{2}$

De oplossing van de ongelijkheid is dus $3 \leq x \leq 3\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
b \quad \sqrt{7-2x} &= 2x-1 \\
7-2x &= (2x-1)^2 \\
7-2x &= 4x^2-4x+1 \\
4x^2-2x-6 &= 0 \\
x &= \frac{2 \pm \sqrt{4-4 \cdot 4 \cdot -6}}{2 \cdot 4} = \frac{12}{8} = 1\frac{1}{2} \text{ of } x = \frac{2 - \sqrt{4-4 \cdot 4 \cdot -6}}{8} = \frac{-8}{8} = -1
\end{aligned}$$

controle: $x = -1$ voldoet niet, $x = 1\frac{1}{2}$ wel.

De oplossing is $x = 1\frac{1}{2}$

c Uit de grafieken blijkt dat de oplossing $x < 1\frac{1}{2}$ is.

$$8 \text{ a } AC = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25 \text{ cm}$$

b Volgens de stelling van Pythagoras geldt $AC = \sqrt{BC^2 + AB^2}$
 Als je de lengten van de zijden invult, krijg je $x+8 = \sqrt{x^2 + 15^2}$, dus
 $x+8 = \sqrt{x^2 + 225}$. De lengte van een lijnstuk is een positief getal, dus je
 zoekt een waarde van x waarvoor geldt $x > 0$.

c Beide kanten kwadrateren geeft $(x+8)^2 = x^2 + 225$

$$x^2 + 16x + 64 = x^2 + 225$$

$$16x = 161$$

$$x = 10\frac{1}{16}$$

d Op dezelfde manier krijg je nu de vergelijking $x+16 = \sqrt{x^2 + 225}$

$$e \quad (x+16)^2 = x^2 + 225$$

$$x^2 + 32x + 256 = x^2 + 225$$

$$32x = -31$$

$$x = -\frac{31}{32} < 0$$

Maar de lengte van BC is een positief getal, dus zo'n driehoek is er niet.

2 Machtsformules

$$1 \text{ a } \frac{24x \cdot x^{-2}}{x^{-7}} = \frac{24x^{-1}}{x^{-7}} = 24x^{-1-(-7)} = 24x^6$$

$$b \quad \frac{(2a^{-3})^2}{2a} = \frac{2^2 \cdot (a^{-3})^2}{2a} = \frac{4a^{-6}}{2a^1} = 2a^{-6-1} = 2a^{-7} = \frac{2}{a^7}$$

$$2 \text{ a } \frac{t^3 \cdot t^{-\frac{1}{2}}}{t\sqrt{t}} = \frac{t^{\frac{5}{2}}}{t^{\frac{3}{2}}} = t$$

$$b \quad \frac{3\sqrt{p}}{(3p^2)^{-1}} = \frac{3\sqrt{p}}{3^{-1} \cdot (p^2)^{-1}} = \frac{3p^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{3}p^{-2}} = 9p^{2\frac{1}{2}} = 9p^2\sqrt{p}$$

3 a $y^4 = 17$

$$y = -\sqrt[4]{17} \approx -2,03 \text{ of } y = \sqrt[4]{17} \approx 2,03$$

b $5a^{-\frac{3}{4}} = 2$

$$a^{-\frac{3}{4}} = \frac{2}{5}$$

$$a = \left(\frac{2}{5}\right)^{-\frac{4}{3}} \approx 3,39$$

c $4p^{1,5} - 12 = 8$

$$4p^{1,5} = 20$$

$$p^{\frac{3}{2}} = 5$$

$$p = 5^{\frac{2}{3}} \approx 2,92$$

d $3 - 0,5x^{-\frac{1}{5}} = 1,75$

$$0,5x^{-\frac{1}{5}} = 1,25$$

$$x^{-\frac{1}{5}} = 2,5$$

$$x = 2,5^{-5} \approx 0,01$$

4 a Bij formule A hoort een grafiek die puntsymmetrisch is, want de exponent -3 is oneven.

b De grafiek heeft één snijpunt met de lijn $y = 8$.

$$x^{-3} = 8$$

$$x = 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

Het snijpunt is $\left(\frac{1}{2}, 8\right)$.

c De grafiek bij formule B heeft twee snijpunten met de lijn $x = 8$.

$$\frac{1}{2}x^4 = 8$$

$$x^4 = 16$$

$$x = -\sqrt[4]{16} = -2 \text{ of } x = \sqrt[4]{16} = 2$$

De snijpunten zijn $(-2, 8)$ en $(2, 8)$.

d $x^{-3} = \frac{1}{2}x^4$

$$\frac{1}{x^3} = \frac{1}{2}x^4$$

$$1 = \frac{1}{2}x^7$$

$$x^7 = 2$$

$$x = \sqrt[7]{2}$$

5 a $0,5 \cdot K^{\frac{1}{3}} = N$

$$K^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot N$$

$$K = 2^3 \cdot N^3$$

$$K = 8 \cdot N^3$$

b $81 \cdot K^4 = N$

$$K^4 = \frac{1}{81} \cdot N$$

$$K = \left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot N^{\frac{1}{4}}$$

$$K = \frac{1}{3} \cdot N^{\frac{1}{4}}$$

$$6 \text{ a } y = \left(32x^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{5}}$$

$$y = 32^{\frac{3}{5}} \cdot \left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{5}}$$

$$y = 8 \cdot x^{-\frac{2}{5}}$$

$$b \quad y = \frac{2x}{4x^{2\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}$$

$$y = \frac{2x}{4x^3}$$

$$y = \frac{1}{2x^2}$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot x^{-2}$$

$$7 \text{ a } x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} = 0$$

$$x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}} - 1) = 0$$

$$x^{\frac{1}{3}} = 0 \text{ of } x^{\frac{1}{3}} - 1 = 0$$

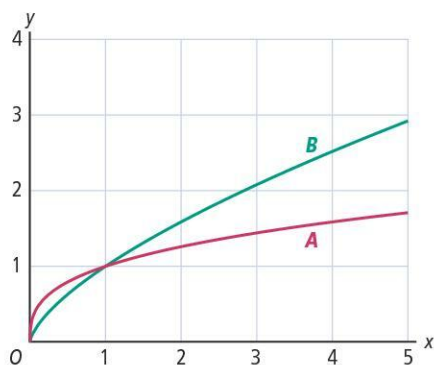
$$x = 0 \text{ of } x^{\frac{1}{3}} = 1$$

$$x = 0 \text{ of } x = 1$$

$x = 0$ geeft $y = 0^{\frac{1}{3}} = 0$ en $x = 1$ geeft $y = 1^{\frac{1}{3}} = 1$.

De snijpunten zijn $(0, 0)$ en $(1, 1)$.

b een schets van de grafieken:



$$x^{\frac{1}{3}} > x^{\frac{2}{3}} \text{ voor } 0 < x < 1$$

c $x^{\frac{1}{3}} = 2$ geeft $(x^{\frac{1}{3}})^2 = 2^2$ ofwel $x = 8$, dus de grafiek van A snijdt de lijn $y = 2$ in het punt $P(8, 2)$.

$x^{\frac{2}{3}} = 2$ geeft $(x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$ ofwel $x = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$, dus de grafiek van B snijdt de lijn $y = 2$ in het punt $Q(\sqrt{8}, 2)$.

De lengte van lijnstuk PQ is $8 - \sqrt{8} \approx 5,17$.

d Omdat $x^{\frac{2}{3}} > 0$ voor alle waarden van $x > 0$ geldt $x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}} > x^{\frac{1}{3}}$

De grafiek van formule C ligt dus boven de grafiek van A voor alle waarden van $x > 0$.

$$8 \text{ a } V = 0,45 \text{ invullen geeft } 0,45 = 0,015 \cdot L^{0,45}$$

$$L^{0,45} = 30$$

$$L = 30^{\frac{1}{0,45}} = 1916,424\dots$$

De verlichtingssterkte is ongeveer 1916 lux.

- b** De verlichtingssterkte gaat van L naar $0,5L$

Het spanningsverschil gaat van $V = 0,015 \cdot L^{0,45}$ naar $V = 0,015 \cdot (0,5L)^{0,45}$

$$V = 0,015 \cdot (0,5L)^{0,45} \text{ geeft } V = 0,015 \cdot (0,5)^{0,45} \cdot L^{0,45} \text{ ofwel}$$

$$V \approx 0,732 \cdot 0,015 \cdot L^{0,45}$$

Van het spanningsverschil is dus ongeveer 73,2% over. Dat komt overeen met een afname van 26,8%.

- c** $V = 0,015 \cdot L^{0,45}$

$$0,015 \cdot L^{0,45} = V$$

$$L^{0,45} = \frac{1}{0,015} V$$

$$L = \left(\frac{1}{0,015} V \right)^{\frac{1}{0,45}}$$

$$L = \left(\frac{1}{0,015} \right)^{\frac{1}{0,45}} \cdot V^{\frac{1}{0,45}}$$

$$L \approx 11\,301 \cdot V^{2,22}$$

3 Functies en grafieken

1 a $f(-2) = \frac{15}{(-2)^2 + 2} = \frac{15}{6} = 2\frac{1}{2}$ en $f(2) = \frac{15}{2^2 + 2} = \frac{15}{6} = 2\frac{1}{2}$

b $f(3) = \frac{15}{3^2 + 2} = \frac{15}{11} = 1\frac{4}{11}$ en $g(3) = \frac{3+7}{3-1} = \frac{10}{2} = 5$

dus ligt $(3, 5)$ op de grafiek van g en niet op de grafiek van f .

c $g(-7) = \frac{-7+7}{-7-1} = \frac{0}{-8} = 0$ en $g(0) = \frac{0+7}{0-1} = \frac{7}{-1} = -7$

- d** $g(1)$ heeft geen betekenis omdat bij $x = 1$ de noemer nul is.

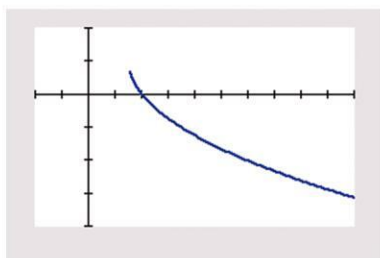
- e** De noemer $x^2 + 2$ is voor geen enkele waarde van x gelijk aan nul.

- f** De horizontale asymptoot van de grafiek van f is de lijn $y = 0$.

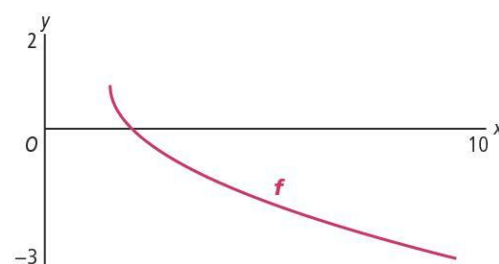
- g** Voor x -waarden die ver van nul liggen naderen de functiewaarden tot 1, dus de horizontale asymptoot is $y = 1$

- h** De noemer $x - 1 = 0$ als $x = 1$, dus de verticale asymptoot is de lijn $x = 1$.

- 2 a** plot



schets



- b** f heeft alleen functiewaarden als $2x - 3 \geq 0$ ofwel $2x \geq 3$ dus als $x \geq 1\frac{1}{2}$
Het domein is $[1\frac{1}{2}, \rightarrow)$.

$$\sqrt{2x-3} \geq 0 \text{ dus } 1 - \sqrt{2x-3} \leq 1, \text{ het bereik is daarom } \langle \leftarrow, 1 \rangle.$$

c $1 - \sqrt{2x-3} = 0$

$$\sqrt{2x-3} = 1$$

$$2x - 3 = 1$$

$$2x = 4$$

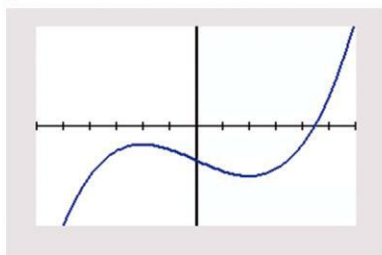
$$x = 2$$

Het snijpunt met de x -as is $(2, 0)$.

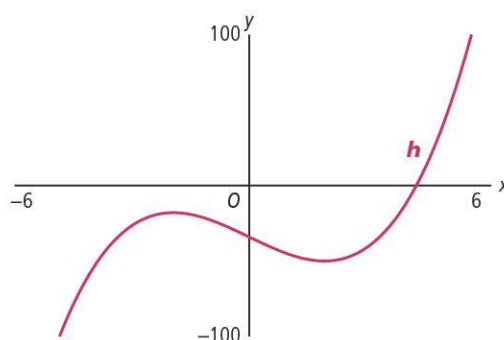
- d Zie de schets bij opdracht a, het domein bij opdracht b en de berekening bij opdracht c.

De oplossing van $f(x) \geq 0$ is $\left[1\frac{1}{2}, 2\right]$.

3 a plot



schets



venster: $-6 \leq x \leq 6$, $-100 \leq y \leq 100$

b invoer: $y_1 = x^3 - 12x - 34$

venster: $-6 \leq x \leq 6$, $-100 \leq y \leq 100$

optie: nulpunt

Het nulpunt is $x \approx 4,43$.

c optie: minimum en maximum

De coördinaten van de toppen zijn $(-2, -18)$ en $(2, -50)$.

4 a Voor het domein geldt $13 - 2x \geq 0$ ofwel $-2x \geq -13$ dus $x \leq 6\frac{1}{2}$.
Het domein is $\left(\leftarrow, 6\frac{1}{2}\right]$.

$\sqrt{13 - 2x} \geq 0$ dus $-1 + \sqrt{13 - 2x} \geq -1$ dus het bereik is $[-1, \rightarrow)$.

b invoer: $y_1 = -1 + \sqrt{13 - 2x}$ en $y_2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

venster: $-10 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 10$

optie: snijpunt

De oplossing is $x \approx 2,59$.

5 a De vergelijkingen A, C en D zijn exact op te lossen.

A $10(x + 4)(x - 1) = -3(x + 11)$

$$10(x^2 - x + 4x - 4) = -3(x + 11)$$

$$10x^2 + 30x - 40 = -3x - 33$$

$$10x^2 + 33x - 7 = 0$$

$$D = 33^2 - 4 \cdot 10 \cdot -7 = 1369$$

$$x = \frac{-33 - \sqrt{1369}}{20} \text{ of } x = \frac{-33 + \sqrt{1369}}{20}$$

$$x = \frac{-33 - 37}{20} \text{ of } x = \frac{-33 + 37}{20}$$

$$x = -3\frac{1}{2} \text{ of } x = \frac{1}{5}$$

C $\frac{24}{3x + 5} = 2x + 1$

$$24 = (2x + 1)(3x + 5)$$

$$24 = 6x^2 + 10x + 3x + 5$$

$$6x^2 + 13x - 19 = 0$$

$$D = 13^2 - 4 \cdot 6 \cdot -19 = 625$$

$$x = \frac{-13 - \sqrt{625}}{12} \text{ of } x = \frac{-13 + \sqrt{625}}{12}$$

$$x = \frac{-13 - 25}{12} \text{ of } x = \frac{-13 + 25}{12}$$

$$x = -3\frac{1}{6} \text{ of } x = 1$$

D $9 - \sqrt{5 - 2x} = 7$

$$\sqrt{5 - 2x} = 2$$

$$5 - 2x = 4$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

b B invoer: $y_1 = (x + 1)^4$ en $y_2 = \frac{1}{2}x + 1$

venster: $-10 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 10$

optie: snijpunt

De oplossing is $x \approx -1,65$ of $x = 0$.

6 a $5 + \frac{3}{2x + 5} = 0$

$$\frac{3}{2x + 5} = -5$$

$$2x + 5 = -\frac{3}{5}$$

$$2x = -5\frac{3}{5}$$

$$x = -2\frac{4}{5}$$

b $f(0) = 5 + \frac{3}{2 \cdot 0 + 5} = 5 + \frac{3}{5} = 5\frac{3}{5}$ dus het snijpunt met de y -as is $(0, 5\frac{3}{5})$.

c $2x + 5 = 0$ als $2x = -5$ ofwel $x = -2\frac{1}{2}$. De verticale asymptoot is $x = -2\frac{1}{2}$ want voor die waarde is de noemer gelijk aan 0.

Voor waarden van x die ver van 0 liggen, nadert $\frac{3}{2x + 5}$ naar nul en

$5 + \frac{3}{2x + 5}$ nadert dan naar 5. De horizontale asymptoot is $y = 5$.

d invoer: $y_1 = 5 + \frac{3}{2x + 5}$ en $y_2 = \frac{1}{5}x^3$

venster: $-10 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 10$

optie: snijpunt

Snijpunten voor $x \approx -2,67$ en $x \approx 2,98$.

Uit de schets is af te lezen dat $f(x) < g(x)$ voor x -waarden uit de intervallen $\langle -2,67; -2\frac{1}{2} \rangle$ en $\langle 2,98; \rightarrow \rangle$.

7 a In Q geldt $a = 4$.

$$v(4) = \sqrt{29 \cdot 4 - 5 \cdot 4^2} = \sqrt{36} = 6$$

Hieruit volgt dat de snelheid in punt Q is 6 m/s.

b invoer: $y_1 = \sqrt{29x - 5x^2}$

venster: $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 10$

optie: maximum

De grafiek heeft een top bij $x \approx 2,9$.

Bij $a \approx 2,9$ is de snelheid van Ernie maximaal.

c Los eerst op $\frac{1}{4}a^2 - 2a + 4 = 2$

$$\frac{1}{4}a^2 - 2a + 2 = 0$$

$$a^2 - 8a + 8 = 0$$

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 32$$

$$a = \frac{8 + \sqrt{32}}{2} \approx 6,83 \text{ (voldoet niet, want } a \text{ is maximaal 4) of}$$

$$a = \frac{8 - \sqrt{32}}{2} = 1,171\dots$$

$v(1,171\dots) = 5,206\dots$ dus de snelheid is op dat moment ongeveer 5,21 m/s.

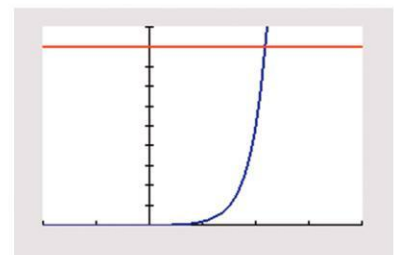
4 Exponentiële functies

1 a $3 \cdot 27^x = \frac{1}{3}$
 $3^1 \cdot (3^3)^x = 3^{-1}$
 $3^{1+3x} = 3^{-1}$
 $1 + 3x = -1$
 $3x = -2$
 $x = -\frac{2}{3}$

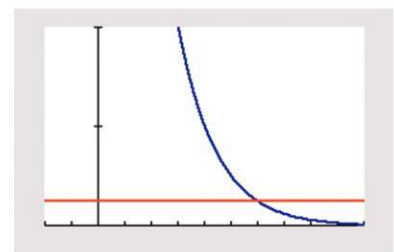
b $0,125^{2x} = 32\sqrt{2}$
 $\left(\frac{1}{8}\right)^{2x} = 2^5 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$
 $(2^{-3})^{2x} = 2^{5+\frac{1}{2}}$
 $2^{-6x} = 2^{5\frac{1}{2}}$
 $-6x = 5\frac{1}{2}$
 $x = -\frac{11}{12}$

c $5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} = 5$
 $5^1 \cdot (5^{-1})^{x-2} = 5^1$
 $5^1 \cdot 5^{-x+2} = 5^1$
 $5^{-x+3} = 5^1$
 $-x + 3 = 1$
 $x = 2$

d $(3\sqrt{3})^{2x-3} \geq 9$
 $(3\sqrt{3})^{2x-3} = 9$
 $\left(3^1 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{2x-3} = 3^2$
 $\left(3^{1\frac{1}{2}}\right)^{2x-3} = 3^2$
 $3^{3x-4\frac{1}{2}} = 3^2$
 $3x - 4\frac{1}{2} = 2$
 $3x = 6\frac{1}{2}$
 $x = 2\frac{1}{6}$
Zie de plot hiernaast.
De oplossing is $x \geq 2\frac{1}{6}$



e $16 \cdot 2^{-x} < \frac{1}{4}$
 $16 \cdot 2^{-x} = \frac{1}{4}$
 $2^4 \cdot 2^{-x} = 2^{-2}$
 $2^{4-x} = 2^{-2}$
 $4 - x = -2$
 $x = 6$
Zie de plot hiernaast.
De oplossing is $x > 6$.



- 2 a** invoer: $y_1 = 250 \cdot 0,783^x$ en $y_2 = 625$
 venster: $-5 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 750$
 optie: snijpunt
 Snijpunt bij $x \approx -3,75$
 De oplossing is $x \approx -3,75$.
- b** invoer: $y_1 = 11 \cdot 3^{2x}$ en $y_2 = 20$
 venster: $-5 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 30$
 optie: snijpunt
 Snijpunt bij $x \approx 0,27$
 De oplossing is $x \approx 0,27$.
- 3 a** N is dalend want de groeifactor is kleiner dan 1.
- b** Op 17 januari om 7.00 uur is één dag en achttien uur later, dus $t = 1\frac{3}{4}$
 $N(1\frac{3}{4}) \approx 1,32$ dus het aantal bacteriën is op dat moment 1,32 miljoen.
- c** De groeifactor per uur is $0,79^{\frac{1}{24}} \approx 0,990$.
- d** De groeifactor per week is $0,79^7 \approx 0,192$ dus een afname met 80,8%.
- e** $2 \cdot 0,79^t = 0,5$
 Met de rekenmachine:
 invoer: $y_1 = 2 \cdot 0,79^x$ en $y_2 = 0,5$
 venster: $0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 2$
 optie: snijpunt
 Snijpunt bij $x \approx 5,881$
 De oplossing is $t \approx 5,881$, dus na 5 dagen, 21 uur en ruim 8 minuten.
 In uren nauwkeurig: 21 januari om 10.00 uur.
- 4 a** $g(x) = 2^{x+3}$
- b** $g(x) = -4 + 2^x$
- c** $g(x) = 3 + 2^{x-4}$
- d** $g(x) = -2^{x-2}$
- e** $g(x) = 8 \cdot 2^x$
- f** De grafieken van $g(x) = 2^{x+3}$ en $g(x) = 8 \cdot 2^x$ vallen samen.
 Immers: $2^{x+3} = 2^x \cdot 2^3 = 8 \cdot 2^x$
- 5 a** $g(x) = \frac{1}{2} \cdot (8 - 2^x)$ dus $g(x) = 4 - \frac{1}{2} \cdot 2^x$
- b** Een translatie 4 omlaag en een translatie 1 naar rechts want
 $g(x) = 8 - 2^{x-1} - 4$
 $g(x) = 4 - 2^{-1} \cdot 2^x$
 $g(x) = 4 - \frac{1}{2} \cdot 2^x$
- 6 a** Bij zijn eerste telling waren er 8500 per m^2 , dus $\frac{1}{7}t - 10 = 0$ bij het begin van de telling.
 $\frac{1}{7}t - 10 = 0$
 $\frac{1}{7}t = 10$
 $t = 70$
 De bioloog is dus 70 dagen na het begin van de plaag gaan tellen.

b $N(0) = 2,1380\dots$ en $N(1) = 2,1805\dots$

De groeifactor per dag is $\frac{2,1805\dots}{2,1380\dots} \approx 1,0199$

$N(0) = 2,1380\dots$ en $N(7) = 2,4543\dots$

De groeifactor per week is $\frac{2,4543\dots}{2,1380\dots} = 1,148$

c $N = 8,5 \cdot 1,148^{\frac{1}{7}t-10}$

$N = 8,5 \cdot 1,148^{\frac{1}{7}t} \cdot 1,148^{-10}$

$N = 8,5 \cdot (1,148^{\frac{1}{7}})^t \cdot 1,148^{-10}$

$N \approx 2,14 \cdot 1,02^t$

d $8,5 \cdot 1,148^{\frac{1}{7}t-10} = 20$

Oplossen met de rekenmachine:

invoer: $y_1 = 8,5 \cdot 1,148^{\frac{1}{7}x-10}$ en $y_2 = 20$

venster: $0 \leq x \leq 200$, $0 \leq y \leq 30$

optie: snijpunt

Snijpunt bij $x \approx 113,4$

De oplossing is $t \approx 113,4$ dus na 114 dagen voor het eerst meer dan 20 000 sprinkhanen.

7 a $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^{x-2} - 1\frac{1}{2}$

$f(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^x \cdot 3^{-2} - 1\frac{1}{2}$

$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \cdot 3^x - 1\frac{1}{2}$

$f(x) = \frac{1}{18} \cdot 3^x - 1\frac{1}{2}$

b De lijn $y = -1\frac{1}{2}$ is een horizontale asymptoot.

c $\frac{1}{18} \cdot 3^x - 1\frac{1}{2} = 0$

$\frac{1}{18} \cdot 3^x = 1\frac{1}{2}$

$3^x = 27$

$3^x = 3^3$

$x = 3$ is het nulpunt van f .

d $f(2) = \frac{1}{18} \cdot 3^2 - 1\frac{1}{2} = -1$

Het punt $(2, -1)$ heeft dus als beeld het punt $(2, 4)$.

Hieruit volgt dat de factor -4 is.

e $g(x) = -4 \cdot \left(\frac{1}{18} \cdot 3^x - 1\frac{1}{2}\right)$ dus $g(x) = -\frac{2}{9} \cdot 3^x + 6$

f g is dalend want de stijgende grafiek van functie f wordt met een negatief getal vermenigvuldigd.

5 Lijnen en afstanden

1 a $y = 1\frac{1}{3}x - 3$

$-1\frac{1}{3}x + y = -3$

$-4x + 3y = -9$

b $y = 5 - \frac{1}{2}x$

$$\frac{1}{2}x + y = 5$$

Beide kanten delen door 5 geeft $\frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1$.

c $\frac{x}{6} + \frac{y}{-1\frac{1}{2}} = 1$ aan beide kanten vermenigvuldigen met 6 geeft $x - 4y = 6$.

$$-4y = -x + 6$$

$$y = \frac{1}{4}x - 1\frac{1}{2}$$

2 $k: y = 5$

Lijn l gaat door $(0, 1)$ en $(4, 6)$, de richtingscoëfficiënt is dus $\frac{6-1}{4-0} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

Het snijpunt met de y -as is $(0, 1)$, dus $l: y = 1\frac{1}{4}x + 1$.

$$m: x = -2$$

n gaat door $(3, 0)$ en $(1, 7)$, de richtingscoëfficiënt is dus $\frac{0-7}{3-1} = -3\frac{1}{2}$

Dit geeft $y = -3\frac{1}{2}x + b$.

Hierin $x = 3$ en $y = 0$ invullen geeft $0 = -3\frac{1}{2} \cdot 3 + b$, dus $b = 10\frac{1}{2}$

$$n: y = -3\frac{1}{2}x + 10\frac{1}{2}$$

3 a De richtingscoëfficiënt van lijn AB is $\frac{-9}{2} = -4\frac{1}{2}$, dit geeft $y = -4\frac{1}{2}x + 7$.

$4\frac{1}{2}x + y = 7$ vermenigvuldigen met 2 geeft de tweede vorm $9x + 2y = 14$.

Door te delen door 14 krijg je de derde vorm $\frac{x}{1\frac{5}{9}} + \frac{y}{7} = 1$.

b De richtingscoëfficiënt van lijn BC is $\frac{3}{3} = 1$, dit geeft $y = x + b$.

Hierin $x = 5$ en $y = 1$ invullen geeft $1 = 5 + b$ dus $b = -4$.

Dus $y = x - 4$. De tweede vorm is $-x + y = -4$ en delen door -4 geeft de

derde vorm $\frac{x}{4} + \frac{y}{-4} = 1$.

c De richtingscoëfficiënt van lijn AB is $-4\frac{1}{2}$ (zie opdracht a).

$\tan(\alpha) = 4\frac{1}{2}$ geeft $\alpha \approx 77,47^\circ$

De hoek die lijn AB met de x -as maakt is ongeveer $77,47^\circ$

4 a Substitueren van $y = 3 - \frac{1}{2}x$ in $5x + 3y = 10$ geeft $5x + 3(3 - \frac{1}{2}x) = 10$

$$5x + 9 - 1\frac{1}{2}x = 10$$

$$3\frac{1}{2}x = 1$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$y = 3 - \frac{1}{2}x \text{ dus } y = 3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} = 3 - \frac{1}{7}, \text{ dus } y = 2\frac{6}{7}$$

De oplossing van het stelsel is $x = \frac{2}{7}$ en $y = 2\frac{6}{7}$

b $2x = y - 6$ geeft $y = 2x + 6$.

Substitueren van $y = 2x + 6$ in $0,2x + 0,3y - 1 = 0$ geeft

$$0,2x + 0,3(2x + 6) - 1 = 0$$

$$0,2x + 0,6x + 1,8 - 1 = 0$$

$$0,8x = -0,8$$

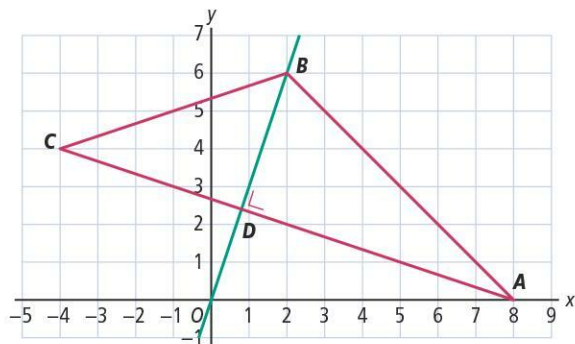
$$x = -1$$

$$y = 2x + 6 \text{ dus } y = 2 \cdot -1 + 6 = 4$$

De oplossing van het stelsel is $x = -1$ en $y = 4$.

- 5 a** Het stelsel kan geschreven worden als
- $$\begin{cases} 10x + 4y = 7 \\ 5x + 2y = 30 \text{ (met 10 vermenigvuldigd)} \end{cases}$$
- De onderste vergelijking vermenigvuldigen met 2 geeft het stelsel
- $$\begin{cases} 10x + 4y = 7 \\ 10x + 4y = 60 \end{cases}$$
- $4y = 60 - 10x$ substitueren in $10x + 4y = 7$ geeft $10x + 60 - 10x = 7$, ofwel $0 \cdot x = -53$.
- Dit stelsel heeft geen oplossingen.
- b** Uit de bovenste vergelijking volgt $y = px + 2$.
- Dit substitueren in de onderste vergelijking geeft $8x + 3(px + 2) = 6$.
- $$8x + 3px + 6 = 6$$
- $$8x + 3px = 0$$
- $$(8 + 3p)x = 0$$
- Er zijn oneindig veel oplossingen als $0 \cdot x = 0$, dus als $8 + 3p = 0$.
- $$3p = -8 \text{ dus } p = -2\frac{2}{3}$$
- c** Precies één oplossing als $8 + 3p \neq 0$, dus als $p \neq -2\frac{2}{3}$
- 6 a** De richtingscoëfficiënt van AB is $\frac{-3 - 5}{7 - 1} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$ en de richtingscoëfficiënt van BC is $\frac{0 - -3}{11 - 7} = \frac{3}{4}$
- Het product van de richtingscoëfficiënten is $-\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = -\frac{12}{12} = -1$, dus zijde AB staat loodrecht op zijde BC .
- b** $AB = \sqrt{(7 - 1)^2 + (-3 - 5)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$ en $BC = \sqrt{(11 - 7)^2 + (0 - -3)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$.
- Hieruit volgt dat $\tan(\angle A) = \frac{5}{10}$, dus $\angle A \approx 27^\circ$.
- Omdat de drie hoeken van driehoek ABC samen 180° zijn, volgt hieruit dat $\angle C \approx 180 - 90 - 27 \approx 63^\circ$.
- c** De richtingscoëfficiënt van BC is $\frac{3}{4}$ (zie opdracht a) zodat voor lijn BC geldt $y = \frac{3}{4}x + b$.
- $x = 11$ en $y = 0$ invullen geeft $0 = \frac{3}{4} \cdot 11 + b$ ofwel $0 = 8\frac{1}{4} + b$ dus $b = -8\frac{1}{4}$ en $P(0, -8\frac{1}{4})$.
- 7 a** De richtingscoëfficiënt van lijn p is -4 .
- De vergelijking van q is te herleiden tot $4x + y = 8$ (beide kanten vermenigvuldigd met 8).
- Ofwel $y = -4x + 8$, dus de richtingscoëfficiënt van q is ook gelijk aan -4 .
- De lijnen p en q hebben dezelfde richtingscoëfficiënt en zijn dus evenwijdig.
- b** Kies een punt P op lijn p , bijvoorbeeld $P(0, 3)$.
- p heeft richtingscoëfficiënt -4 , dus een loodlijn op p door P heeft richtingscoëfficiënt $\frac{1}{4}$, dus $y = \frac{1}{4}x + 3$.
- Deze loodlijn snijden met p : $-4x + 8 = \frac{1}{4}x + 3$
- $$-16x + 32 = x + 12$$
- $$-17x = -20$$
- $$x = \frac{20}{17} \text{ en dit invullen bij } y = -4x + 8 \text{ geeft } y = 3\frac{5}{17}$$
- Dus het snijpunt is $S(\frac{20}{17}, 3\frac{5}{17})$.
- $$d(p, q) = PS = \sqrt{(\frac{20}{17} - 0)^2 + (3\frac{5}{17} - 3)^2} = \sqrt{(\frac{20}{17})^2 + (\frac{5}{17})^2} = \sqrt{\frac{425}{289}}$$
- De afstand tussen de lijnen p en q is $\sqrt{\frac{425}{289}}$

8 a



De richtingscoëfficiënt van AC is $\frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$ dus $AC: y = -\frac{1}{3}x + b$.

$x = 8$ en $y = 0$ invullen geeft $0 = -\frac{1}{3} \cdot 8 + b$ dus $b = 2\frac{2}{3}$ en $AC: y = -\frac{1}{3}x + 2\frac{2}{3}$

Omdat de richtingscoëfficiënt van AC $-\frac{1}{3}$ is en BD loodrecht staat op AC is de richtingscoëfficiënt van BD gelijk aan 3, dus $BD: y = 3x + b$.

$x = 2$ en $y = 6$ invullen geeft $6 = 3 \cdot 2 + b$ dus $b = 0$ en $BD: y = 3x$.

De lijnen AC en BD snijden:

$$-\frac{1}{3}x + 2\frac{2}{3} = 3x$$

$$3\frac{1}{3}x = 2\frac{2}{3}$$

$$10x = 8$$

$$x = \frac{4}{5}$$

Dit invullen in $y = 3x$ geeft $y = 3 \cdot \frac{4}{5} = 2\frac{2}{5}$, dus $D(\frac{4}{5}, 2\frac{2}{5})$.

De lengte van lijnstuk BD is gelijk aan $\sqrt{(2 - \frac{4}{5})^2 + (6 - 2\frac{2}{5})^2} = \sqrt{14\frac{2}{5}}$

b Het midden van zijde BC is het punt $M(-1, 5)$.

De richtingscoëfficiënt van BC is $\frac{1}{3}$ dus de richtingscoëfficiënt van de middelloodlijn is -3 .

Voor de middelloodlijn van BC geldt $y = -3x + b$.

$M(-1, 5)$ invullen geeft $5 = -3 \cdot -1 + b$ dus $b = 2$.

Een vergelijking van de middelloodlijn van zijde BC is $y = -3x + 2$.

c Uit $AB = AC$ volgt dat de middelloodlijn van zijde BC door $A(p, 0)$ gaat.

A ligt ook op de x -as, dus A is het snijpunt van de middelloodlijn van zijde BC met de x -as.

De middelloodlijn van BC snijden met de x -as geeft:

$$0 = -3x + 2$$

$$3x = 2 \text{ ofwel } x = \frac{2}{3} \text{ en dus ook } p = \frac{2}{3}$$

- d Stel hoek C is een rechte hoek, dan $AC \perp BC$ en is het product van de richtingscoëfficiënten gelijk aan -1 , dus

$$\frac{4}{-4-p} \cdot \frac{1}{3} = -1$$

$$\frac{4}{-12-3p} = -1$$

$$12 + 3p = 4$$

$3p = -8$ dus voor $p = -2\frac{2}{3}$ is hoek C een rechte hoek.

Stel hoek A is een rechte hoek, dan $AC \perp AB$ en geldt

$$\frac{4}{-4-p} \cdot \frac{6}{2-p} = -1$$

$$\frac{24}{(-4-p)(2-p)} = -1$$

$$(-4-p)(2-p) = -24$$

$$-8 + 4p - 2p + p^2 = -24$$

$$p^2 + 2p + 16 = 0$$

$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 < 0$ geen oplossing, dus hoek A zal niet recht zijn.

Stel hoek B is een rechte hoek, dan $CB \perp AB$ en geldt

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{2-p} = -1$$

$$\frac{6}{6-3p} = -1$$

$$6 - 3p = -6$$

$-3p = -12$ dus voor $p = 4$ is hoek B een rechte hoek.

- 9 a $3y = x + 7$ geeft $y = \frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$

De richtingscoëfficiënt van lijn l is $\frac{1}{3}$

$\tan(\alpha) = \frac{1}{3}$ geeft $\alpha \approx 18^\circ$.

De hoek die l met de x -as maakt is ongeveer 18° .

De hoek tussen l en de y -as is dan ongeveer $90^\circ - 18^\circ = 72^\circ$.

- b De richtingscoëfficiënt van l is gelijk aan $\frac{1}{3}$

De richtingscoëfficiënt van m gelijk is aan $-\frac{2}{3}$

$\tan(\alpha) = \frac{1}{3}$ geeft $\alpha = 18,434\dots^\circ$

$\tan(\beta) = \frac{2}{3}$ geeft $\beta = 33,690\dots^\circ$

De hoek tussen l en m is dus $18,434\dots + 33,690\dots \approx 52^\circ$.

- c $l: y = \frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$ en $m: y = -\frac{2}{3}x$

snijden: $\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3} = -\frac{2}{3}x$

$$x + 7 = -2x$$

$$3x = -7$$

$$x = -2\frac{1}{3}$$

$$y = -\frac{2}{3}x = -\frac{2}{3} \cdot -\frac{7}{3} = \frac{14}{9} = 1\frac{5}{9}$$

Het snijpunt is $S(-2\frac{1}{3}, 1\frac{5}{9})$.

- d Er geldt dat de richtingscoëfficiënt van l gelijk is aan $\frac{1}{3}$.

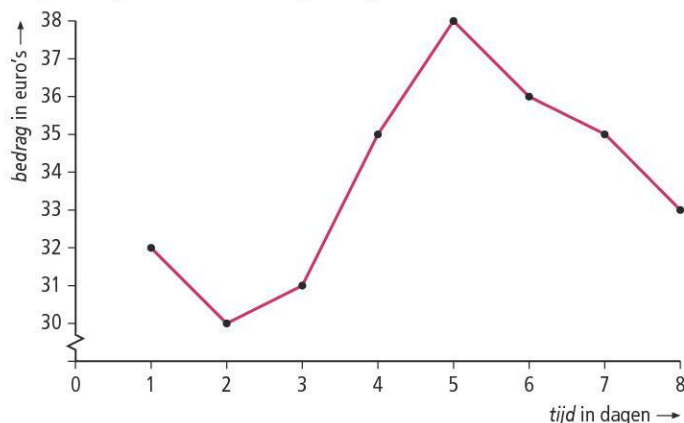
Een lijn loodrecht op l heeft een richtingscoëfficiënt van -3 .

$P(3, -2)$ substitueren in $y = -3x + b$ geeft $-2 = -3 \cdot 3 + b$, dus $b = 7$.

Een vergelijking van de lijn door P loodrecht op l is $y = -3x + 7$.

6 Afgeleide functies

- 1 a De totale toename over de dagen is: $-2 + 1 + 4 + 3 - 2 - 1 - 2 = 1$.
Het bedrag is met dus met 1 euro toegenomen na 7 dagen.
- b Nee, het hoogste bedrag is direct na de laatste toename en deze laatste toename is op dag 4.
Dus is het hoogste bedrag na afloop van dag 4 en niet dag 3.
- c Begin dag 1 : 32 euro, begin dag 2 : 30 euro, begin dag 3 : 31 euro, begin dag 4 : 35 euro, begin dag 5 : 38 euro, begin dag 6 : 36 euro, begin dag 7 : 35 euro, begin dag 8 : 33 euro.



- 2 a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{12 - 0}{2 - 0} = \frac{12}{2} = 6$
- b Het interval $[0, 2]$ heeft een helling van 6, vanwege symmetrie heeft het interval $[2, 4]$ een helling van -6 .
- c $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = \frac{3a(4 - a) - 0}{a} = 3 \cdot (4 - a)$
 $3 \cdot (4 - a) = 3$
 $4 - a = 1$
 $a = 3$
- d $f(x) = 12x - 3x^2$ dus $f'(x) = 12 - 6x$
- e $f'(3) = 12 - 6 \cdot 3 = -6$, de helling van de raaklijn is gelijk aan -6 .
 $x = 3$ en $y = 9$ substitueren in $y = -6x + b$ geeft $9 = -6 \cdot 3 + b$ dus $b = 27$.
 Een vergelijking van de raaklijn is $y = -6x + 27$.

- 3 a De lijn l gaat door de punten $(0, 2)$ en $(8, 6)$.
 De richtingscoëfficiënt van l is gelijk aan $\frac{6 - 2}{8 - 0} = \frac{1}{2}$
- b $h(0) = 0$ en $h(1) = 2$. De snelheid waarmee de hoogte is veranderd is gelijk aan 2 km per minuut, dat is 120 km per uur.
- c $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1,001) - f(1)}{0,001} = \frac{2,00099975... - 2}{0,001} = 0,99975...$
 De snelheid is ongeveer 1 km per minuut, dat is 60 km per uur.
- d $h(t) = 6$
 $2\sqrt{t} = 6$
 $\sqrt{t} = 3$
 $t = 9$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}$ voor $t = 9$ (met je rekenmachine) in km/minuut, ofwel 20 km/uur.

4 a $f(x) = 2x - 6$

$f'(x) = 2$

b $g'(x) = \frac{1}{2}x^5$

c $k'(x) = 6x - 1$

d $h(x) = 4x^2 - 9$

$h'(x) = 8x$

e $m(x) = 64 - 32x + 4x^2$

$m'(x) = -32 + 8x$

5 a $TW(500) = -0,02 \cdot 500^2 + 60 \cdot 500 - 10\,000 = 15\,000$ en

$TW(1000) = -0,02 \cdot 1000^2 + 60 \cdot 1000 - 10\,000 = 30\,000$

De totale winst neemt dan met 15 000 euro toe.

b Bij 500 opdrachten is de gemiddelde winst $15\,000 : 500 = 30$ euro per opdracht.

Bij 1000 opdrachten is de gemiddelde winst $30\,000 : 1000 = 30$ euro per opdracht.

De gemiddelde winst per opdracht is niet veranderd.

c $GW = \frac{\text{totale winst}}{\text{aantal producten}} = \frac{TW}{q} = \frac{-0,02 \cdot q^2 + 60 \cdot q - 10\,000}{q}$

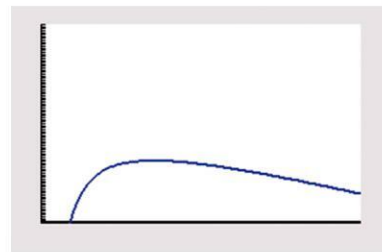
d invoer: $y_1 = (-0,02x^2 + 60x - 10\,000)/x$

venster: $0 \leq x \leq 2000, 0 \leq y \leq 100$

optie: maximum

Er is een maximum bij $x \approx 707,10$.

Bij 707 opdrachten is de gemiddelde winst maximaal.



6 a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{1 - 5}{2 - 0} = \frac{-4}{2} = -2$

b $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1,001) - f(1)}{0,001} = \frac{2,997000001 - 3}{0,001} = -2,999999$, dus $\frac{dy}{dx} = -3$

c De helling van de grafiek van g is 2. Er moet dus gelden $f'(x) = 2$

$3x^2 - 6x = 2$

$3x^2 - 6x - 2 = 0$

$D = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -2 = 60$

$x_P = \frac{6 + \sqrt{60}}{6} \approx 2,3$ en $x_Q = \frac{6 - \sqrt{60}}{6} \approx -0,3$

d $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(2) = 12 - 12 = 0$

De helling in het punt $(2, 1)$ is 0, dus heeft de grafiek van f daar een top.

Dat wil zeggen dat de raaklijn door $(2, 1)$ horizontaal loopt en de vergelijking ervan is $y = 1$.

e Er moet dan gelden $f'(x) > 2$.

In opdracht c is berekend dat $f'(x) = 2$ als $x \approx -0,3$ en $x \approx 2,3$.

Kijk vervolgens in de grafiek waar de helling van de grafiek van f groter is dan die van de grafiek van g .

$f(x)$ neemt sneller toe dan $g(x)$ voor $x < -0,3$ en $x > 2,3$.



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.
Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.
Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.