

MODERNE WISKUNDE

B



Noordhoff

$$\sin_1(x) = \cos(x - \tfrac{1}{2}\pi)$$

12e editie

Moderne Wiskunde

havo B deel 2

Serieoverzicht Tweede Fase

	havo		vwo		
klas 4	A 1	B 1	AC 1		B 1
klas 5	A 2	B 2	AC 2		B 2
klas 6	A 3	B 3	A 3	C 3	B 3
			A 4	C 4	B 4

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontlelen.



0 / 20

© 2020 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsenauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-89229-6

12e editie

Moderne Wiskunde

havo B deel 2

Harm Bakker
Bert Boon
Ferdinand Doddema
Wim Doekes
Gerben van der Hoek
Ilse de Jong
Gerard van Proosdij
Rindert Reijenga
Geertrui Schaberg
Ron Sinkeldam
Carolijn Tacken

Moderne Wiskunde

havo B deel 2

7 Periodieke functies 6

Voorkennis 8

7.1 Radialen 10

7.2 Sinusfunctie 14

7.3 Cosinusfunctie 18

7.4 Transformaties 22

7.5 Algemene vorm van een sinusoidale 26

7.6 Gemengde opdrachten 30

Onderzoeksopdrachten 31

Samenvatting 32

Test jezelf 36

Extra oefening 38

8 Logaritmische functies 40

Voorkennis 42

8.1 Logaritmen 44

8.2 Logaritmen berekenen 48

8.3 Grafieken van logaritmische functies 52

8.4 Rekenregels voor logaritmen 56

8.5 Formules herleiden 60

8.6 Vergelijkingen en ongelijkheden 64

8.7 Gemengde opdrachten 68

Onderzoeksopdrachten 69

Samenvatting 70

Test jezelf 74

Extra oefening 76

Vaardigheden 4 78

Rekenen met machten, wortels
en breuken 80

Differentiëren 81

Vergelijkingen oplossen 81

Formules herleiden 83

9 Afstanden en hoeken 84

- Voorkennis 86
- 9.1 Gelijkvormigheid 88
- 9.2 Sinusregel 92
- 9.3 Cosinusregel 96
- 9.4 Meetkunde in een rooster 100
- 9.5 Een aanpak kiezen 104
- 9.6 Gemengde opdrachten 108
 - Onderzoeksopdrachten 109
 - Samenvatting 110
 - Test jezelf 114
 - Extra oefening 116

10 Functies bewerken 118

- Voorkennis 120
- 10.1 Translaties 122
- 10.2 Vermenigvuldigen van grafieken 126
- 10.3 Asymptotisch gedrag 130
- 10.4 Formules herleiden 134
- 10.5 Parameters 138
- 10.6 Samengestelde functies 142
- 10.7 Gemengde opdrachten 146
 - Onderzoeksopdrachten 147
 - Samenvatting 148
 - Test jezelf 152
 - Extra oefening 154

Vaardigheden 5 156

- Rekenen met haakjes 158
- Rekenen met machten 158
- Vergelijking van een lijn 159
- Kwadratische formules 159
- Meetkunde 160

11 Differentiëren 162

- Voorkennis 164
- 11.1 Machtsfuncties differentiëren 166
- 11.2 De kettingregel 170
- 11.3 Raaklijnen 174
- 11.4 Maxima en minima 178
- 11.5 Redeneren met de afgeleide 182
- 11.6 Gemengde opdrachten 186
 - Onderzoeksopdrachten 187
 - Samenvatting 188
 - Test jezelf 192
 - Extra oefening 194

Vaardigheden 6 196

- Meetkunde 198
- Rekenen met breuken 199
- Rekenen met wortels 200
- Exponentiële en logaritmische vergelijkingen 201

Keuzeonderwerpen 202

- Praktische opdracht - Muziek 204
- Praktische opdracht - Vlakvullingen 208

Trefwoorden 212



SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In klas 3 heb je kennis gemaakt met periodieke grafieken en heb je gezien wat de betekenis is van de amplitude, de periode en de evenwichtsstand. Ook heb je geleerd te werken met de sinus en de cosinus van een hoek.

In dit hoofdstuk worden de sinus en cosinus op een andere manier geïntroduceerd. De sinus- en cosinusfunctie worden gebruikt om periodieke verschijnselen te beschrijven. Daarbij wordt ook een nieuwe maat voor hoeken ingevoerd, de radiaal. Je leert ook welk gevolg het verschuiven en vermenigvuldigen van de grafieken van zulke functies heeft op het functievoorschrift.

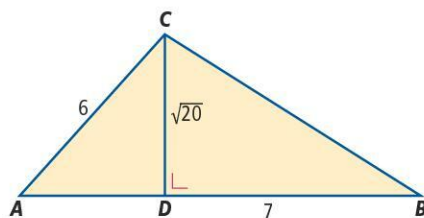
In deel 3 zal de kennis van sinus- en cosinusfuncties verder worden uitgebreid.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Probleemoplossen en analytisch denken* intro van paragraaf 7.1
- *Modelleren en algebraïseren* opdracht 39
- *Ordenen en structureren* opdracht 25



- V1** In $\triangle ABC$ is de hoogtelijn CD getekend.
 $AC = 6$, $CD = \sqrt{20}$ en $BD = 7$.
 Bereken met behulp van de stelling van Pythagoras
 AD en BC exact.



Theorie

Bij het berekenen van een onbekende zijde in een rechthoekige driehoek kun je gebruik maken van de stelling van Pythagoras. Bij berekeningen waarbij hoeken een rol spelen gebruik je vaak sinus, cosinus of tangens.

In een rechthoekige driehoek ABC geldt:

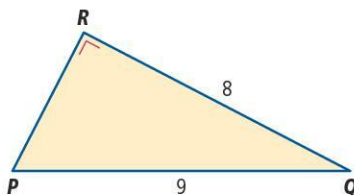
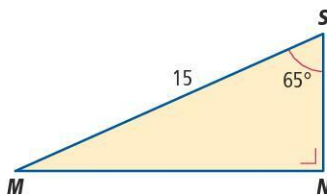
$$\sin(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van hoek } A}{\text{langste zijde}}$$

$$\cos(\angle A) = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde van hoek } A}{\text{langste zijde}}$$

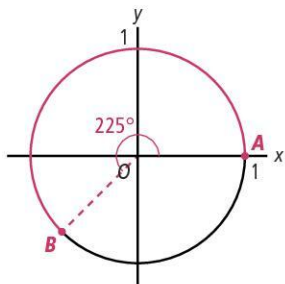
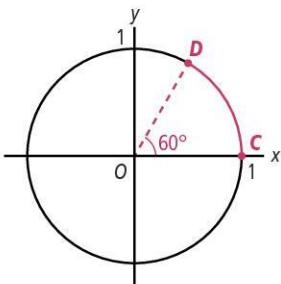
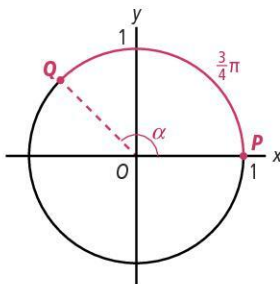
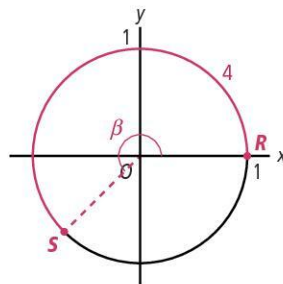
$$\tan(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van hoek } A}{\text{aanliggende rechthoekszijde van hoek } A}$$



- V2** Bereken in deze driehoeken
 $\angle Q$, PR , $\angle M$, MN en SN .



- V3**
- Bereken de omtrek van de cirkel met middelpunt $(0, 0)$ en straal 1.
 - Bereken de lengte van boog AB en van boog CD .
 - De lengte van boog PQ is $\frac{3}{4}\pi$ en die van boog RS is 4. Bereken α en β .



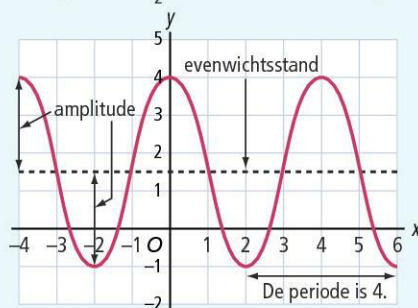
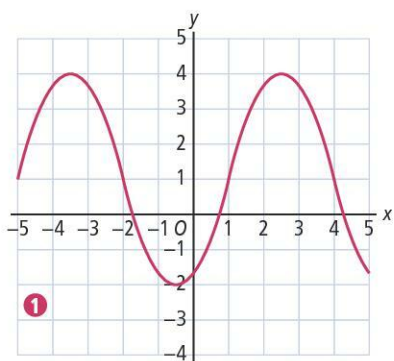
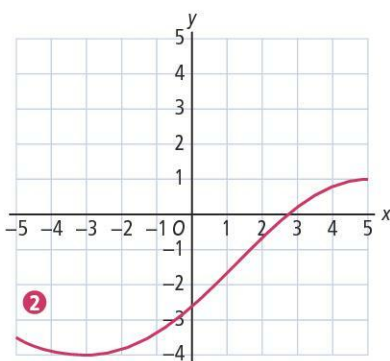
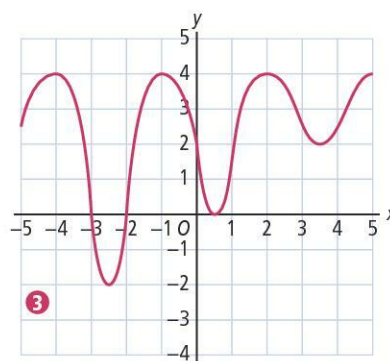
Theorie

Versijnselen die zichzelf steeds herhalen heten **periodieke** versijnselen en de bijbehorende grafieken zijn **periodieke grafieken**. De **periode** is de kleinste afstand waarover je een grafiek horizontaal kunt verschuiven zodat deze weer samenvalt met zichzelf.

De **evenwichtsstand** is de horizontale lijn die het gemiddelde niveau aangeeft, dus $y = \frac{\text{maximum} + \text{minimum}}{2}$

De **amplitude** is grootste afwijking ten opzichte van de evenwichtsstand, dus $\text{amplitude} = \frac{\text{maximum} - \text{minimum}}{2}$

De amplitude is $2\frac{1}{2}$. De evenwichtsstand is $y = 1\frac{1}{2}$.

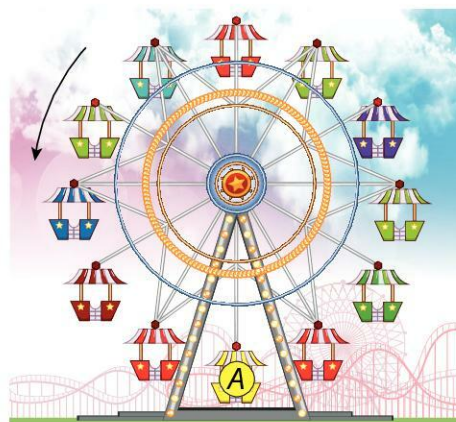


V4 De grafieken 1 en 2 zijn een deel van een periodieke grafiek.

- Waarom is grafiek 3 niet periodiek?
- Geef van de periodieke grafieken de evenwichtsstand en de amplitude.

V5 Op volle snelheid draait dit reuzenrad in één minuut één keer rond. Punt A is het ophangpunt van de onderste cabine.

- Na hoeveel seconden is punt A voor het eerst op de hoogte van de as?
- En hoeveel seconden later weer?
- Over hoeveel graden is punt A gedraaid na 20 seconden?
- De diameter van het rad is 40 meter.
Bereken welke afstand punt A in één minuut aflegt.



7.1 Radialen

Je leert

- wat radialen zijn en hoe je graden omrekent naar radialen en omgekeerd
- wat de sinusfunctie is en hoe de bijbehorende grafiek eruit ziet

Leerroutes

- ondersteunend: 1—2—3—04—5—6—07
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7
- uitdagend: 1—2—3—4—5—7—U1

De London Eye is een reuzenrad naast de rivier de Thames in Londen, gebouwd in 1999. Lange tijd was dit het grootste reuzenrad ter wereld, het is 135 meter hoog en één rondgang duurt 30 minuten. Neem voor de hoogte van het instappunt 0 meter.

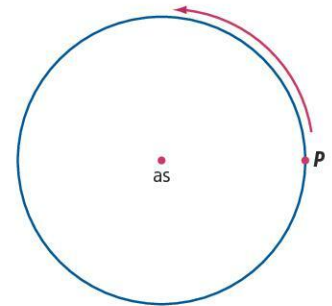
- Over hoeveel graden draait dit reuzenrad per minuut?
- Je hebt een goed uitzicht gedurende één derde deel van een omwenteling. Op welk hoogte bevind je je dan minimaal?



- 1** Een wiel met een straal van 1 meter draait met constante snelheid rond. Op de rand van het wiel bevindt zich een stip P . Op $t = 0$ bevindt P zich op gelijke hoogte met de as van het wiel.

De stip draait rond met een snelheid van 1 meter per seconde.

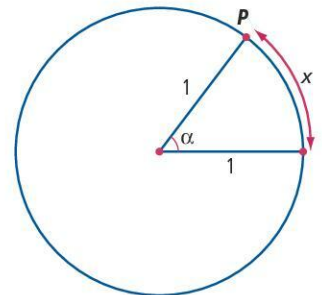
- Bereken de omtrek van het wiel. Rond af op twee decimalen.
- Hoeveel seconden doet de stip over één omwenteling?
- Waar bevindt de stip zich na π ($\approx 3,14$) seconden?
- Na hoeveel seconden bevindt de stip zich op het hoogste punt? Rond af op twee decimalen.



- 2** Het wiel uit opdracht 1 is op te vatten als een cirkel met straal 1.

In de cirkel is de afstand die stip P over de cirkel heeft afgelegd aangegeven met x .

- Hoe groot is α als $x = \pi$? En als $x = 2\pi$?
- Neem $x = \frac{1}{4}\pi$.
Leg uit dat in dat geval $\alpha = 45^\circ$.
- Bereken α in het geval dat $x = \frac{5}{12}\pi$.
- Hoe groot is α als $x = 1$? Geef zowel een exact antwoord als een benadering in twee decimalen

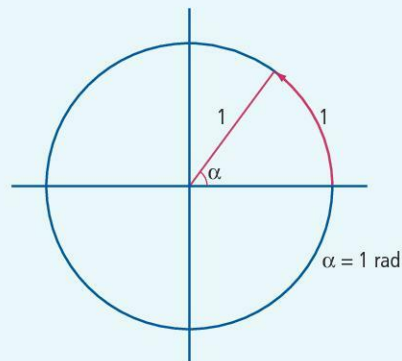


Theorie

Een cirkel met straal 1 heet een **eenheidscirkel**. Bij een draaiing over 180° hoort een **booglengte** π . Daaruit volgt dat

een booglengte 1 hoort bij een draaiing over $\frac{180}{\pi} \approx 57,3^\circ$.

Deze hoek wordt in de wiskunde vaak gebruikt als hoekmaat en heet **radiaal**, dus $1 \text{ rad} \approx 57,3^\circ$. Stel vanaf nu in dit hoofdstuk je rekenmachine in op radialen (RAD).



Voorbeeld 1

Hoeveel radialen komen overeen met 225° ?

Oplossing

Gebruik een verhoudingstabel.

aantal graden	180	1	225
aantal radialen	π	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{180} \cdot 225 = 1\frac{1}{4}\pi$

Voorbeeld 2

Hoeveel graden komen overeen met 1,3 radialen?

Oplossing

Gebruik een verhoudingstabel.

aantal graden	180	$\frac{180}{\pi}$	$\frac{180}{\pi} \cdot 1,3 \approx 74,5$
aantal radialen	π	1	1,3

→ Instructie rekenmachine | Graden en radialen

- 3** Bereken de ontbrekende getallen in de tabel.
Geef exacte antwoorden.

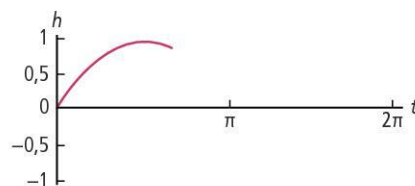
aantal graden	0	30	...	60	90	180
aantal radialen	...	...	$\frac{1}{4}\pi$	...	...	π

Ondersteunende route → maak opdracht 04

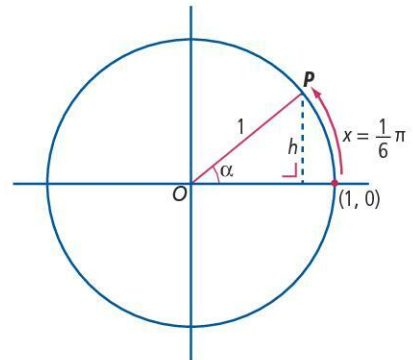
- 4** Vul de tabel in. Rond graden af op een geheel getal en radialen op twee decimalen.

aantal graden	...	15	...	60	...	107	...
aantal radialen	0,1	...	1	...	2	...	3

- 5** Bekijk nogmaals het wiel uit opdracht 1. Op $t = 0$ bevindt P zich op gelijke hoogte met de as van het wiel.
- Wat is het eerste tijdstip na $t = 0$ waarop stip P zich weer op gelijke hoogte met de as bevindt? En het tweede tijdstip?
 - Op welk tijdstip bevindt P zich op het laagste punt?
 - Van de hoogte van de stip ten opzichte van de as van het wiel wordt een grafiek gemaakt. Hiernaast zie je een begin.
Maak de grafiek af voor één omwenteling van het wiel.
Hoe groot is de periode van de grafiek?



- 6 In de tekening is $x = \frac{1}{6}\pi$.
- Hoe groot is α uitgedrukt in radialen? En in graden?
 - Door in de tekening de hoogte van P aan te geven, ontstaat er een rechthoekige driehoek waarvan de langste zijde lengte 1 heeft. De hoogte is dus de y -coördinaat van P .
Bereken met behulp van $\sin(\alpha)$ de y -coördinaat van P .
 - Bereken ook de y -coördinaat van P als $x = \frac{1}{3}\pi$.
Rond je antwoord af op twee decimalen.



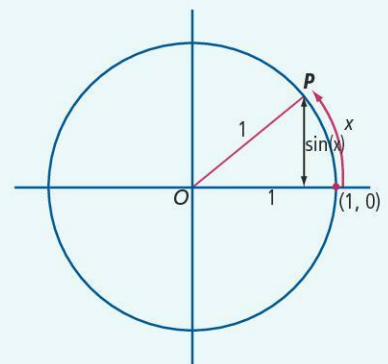
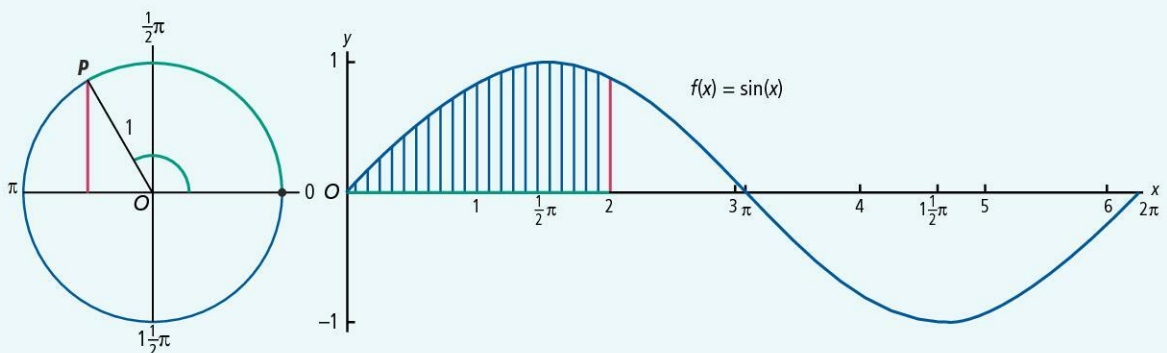
Theorie

Een punt P beweegt over een eenheidscirkel vanaf het punt $(1, 0)$ in een positieve draairichting, dat is linksom. Bij een afgelegde afstand x over de cirkel kun je de y -coördinaat van het punt berekenen met de **sinusfunctie** $f(x) = \sin(x)$.

Als $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}\pi$ geldt $\sin(\alpha) = \frac{y_P}{1}$ en $\cos(\alpha) = \frac{x_P}{1}$, dus

$y_P = \sin(\alpha)$ en $x_P = \cos(\alpha)$.

Ook voor hoeken in de andere kwadranten wordt gedefinieerd $\sin(\alpha) = y_P$ en $\cos(\alpha) = x_P$.



Ondersteunende route → maak opdracht O7

- 7 Bij een negatieve draairichting loopt het punt vanaf het beginpunt $(1, 0)$ rechtsonder over de cirkel.
- De hoogte van de stip is bij $x = \frac{1}{6}\pi$ gelijk aan $\frac{1}{2}$.
Hoe hoog is de stip bij $x = -\frac{1}{6}\pi$?
 - Waarom is $\sin(\frac{2}{3}\pi)$ gelijk aan $\sin(-\frac{1}{3}\pi)$?

Uitdagende route → maak opdracht U1

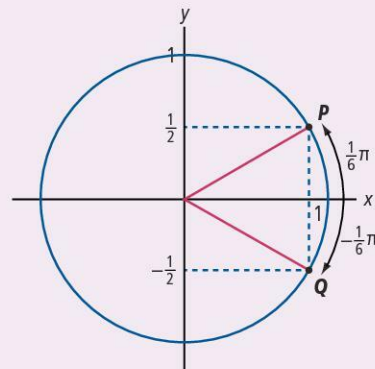
Ondersteunende opdrachten

- 04**
- a** Vul in: een volledige rondgang over een cirkel betekent een draaiing over ... graden ofwel ... radialen.
 - b** Vul in: in een verhoudingstabel met graden en radialen komt 180° overeen met ... radialen.
 - c** Welke getallen moeten er bij de pijltjes staan?
 - d** Vul de verhoudingstabellen in.
Rond het aantal graden af op een geheel getal en het aantal radialen op twee decimalen.

hoek in graden	180	10	75	240
hoek in radialen	...	...	...	...

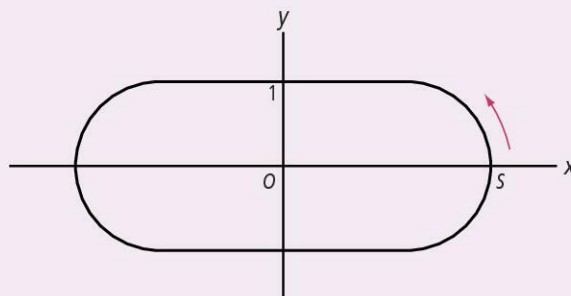
hoek in graden	180	...	...	...
hoek in radialen	...	1	4	6

- 07**
- Bij een negatieve draairichting loopt de stip vanaf het beginpunt $(1, 0)$ rechtsonder over de cirkel.
- De hoogte van de stip in punt P is $\frac{1}{2}$ dus $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$.
- a** Welke negatieve draaihoek hoort bij punt Q ?
 - b** Vul in: de hoogte van de stip in Q is ..., daaruit volgt $\sin(\dots) = \dots$.
 - c** Welke positieve draaihoek α hoort bij Q ?
 - d** Hoe groot is $\sin(\alpha)$?
 - e** Leg met behulp van punt P uit dat $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(-1\frac{5}{6}\pi\right)$.
 - f** Waarom is $\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)$ gelijk aan $\sin\left(-1\frac{1}{4}\pi\right)$?



Uitdagende opdrachten

- U1**
- In deze tekening staat een vereenvoudigd model van een atletiekbaan, geplaatst in een assenstelsel. De baan bestaat uit twee halve cirkels met straal 1 meter en twee rechte stukken met lengte π meter.
- Een punt beweegt met een constante snelheid van 1 m/s over de baan. Op $t = 0$ bevindt het punt zich in S .
- De y -coördinaat van het punt is een functie van de tijd t , noem deze functie h .



- a** Wat zijn de coördinaten van punt S ?
- b** Hoeveel keer doorloopt het punt deze baan in één uur?
- c** Teken de grafiek van h voor één omloop.

7.2 Sinusfunctie

Je leert

- wat de eigenschappen zijn van de sinusfunctie
- welke exacte waarden van $\sin(x)$ je moet kennen

Leerroutes

- ondersteunend: 8—9—010—11—12—013
- doorlopend: 8—9—10—11—12—13
- uitdagend: 9—10—11—13—U2—U3

De afstand van het middelpunt van deze torenklok tot de punt van de grote wijzer is precies 1 meter.

Stel je voor dat er een horizontale lijn loopt door het midden van de klok.

- Hoeveel cm bevindt de punt van de grote wijzer zich boven deze horizontale lijn om tien over vijf?
- Geef ook een schatting voor deze afstand om vijf voor zes.



8 Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$.

- Plot en schets de grafiek van f op het interval $[0, 2\pi]$.
- In de tabel staan functiewaarden van $f(x) = \sin(x)$. De toppen van de grafiek vind je niet in de tabel. Wat zijn de exacte coördinaten van de toppen?
- De bij opdracht a geplote grafiek is puntsymmetrisch. Geef de coördinaten van het punt van symmetrie.
- Plot de grafiek van f op het interval $[0, 3\pi]$. De grafiek is symmetrisch in een lijn. Geef een vergelijking van deze lijn.
- Hoe groot is de periode van f ?
- Waarom is de grafiek van f ook symmetrisch in de lijnen $x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = 2\frac{1}{2}\pi$?

X	Y1			
0	0			
.3	.29552			
.6	.56464			
.9	.78333			
1.2	.93204			
1.5	.99749			
1.8	.97385			
2.1	.86321			
2.4	.67546			
2.7	.42738			
3	.14112			
X=0				

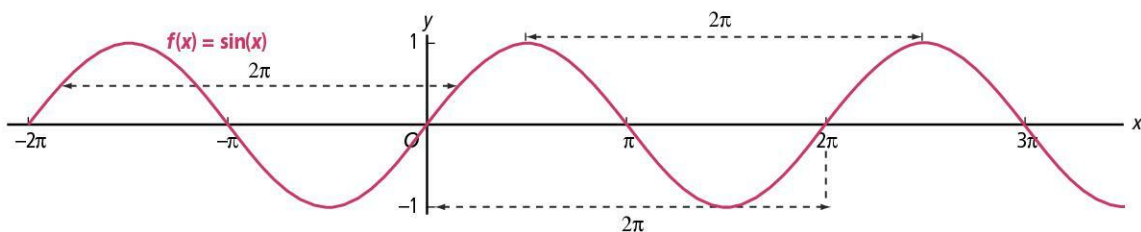
Theorie

Voor de grafiek van de **sinusfunctie** $f(x) = \sin(x)$ geldt:

- De **evenwichtsstand** van de grafiek van f is de lijn $y = 0$.
- De **amplitude** is 1.
- De **periode** is 2π .
- In het punt $(0, 0)$ gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand.

De verticale lijnen door de toppen zijn assen van symmetrie van de grafiek.

De snijpunten van de grafiek met de x -as zijn punten van symmetrie.



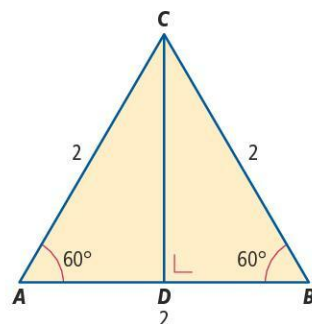
- 9 Hierboven staat een *deel* van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$.
- Geef het domein en het bereik van $f(x) = \sin(x)$.
 - Welke lijnen zijn symmetrieassen van de grafiek van f ?
Kies uit:
 $x = 2\frac{1}{2}\pi$, $x = 4\pi$, $x = 22\pi$ en $x = 101\frac{1}{2}\pi$
 - Welke punten zijn punten van symmetrie van de grafiek?
Kies uit:
 $(3\pi, 0)$, $(3\frac{1}{2}\pi, 0)$, $(34\pi, 0)$ en $(-53\pi, 0)$
 - Hoeveel perioden van de grafiek passen er in het interval $[0, 1000\pi]$? En in het interval $[0, 1000]$?
 - Bereken, zonder de rekenmachine te gebruiken:

$$\begin{array}{ll} f(1\frac{1}{2}\pi) = \dots & f(5\pi) = \dots \\ f(-2\pi) = \dots & f(8\frac{1}{2}\pi) = \dots \\ f(-6\frac{1}{2}\pi) = \dots & f(18\pi) = \dots \end{array}$$

De waarden die je in opdracht 9e hebt gevonden zijn exact. In de volgende opdrachten vind je andere waarden van x waarvoor je de waarde van $\sin(x)$ ook exact kunt berekenen.

Ondersteunende route → maak opdracht 010

- 10 Gegeven is een gelijkzijdige driehoek ABC met zijde 2. Ook is de hoogtelijn CD getekend.
- Bereken exact CD .
 - Laat hiermee zien dat $\sin(60^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
 - Welke exacte waarde heeft $\sin(30^\circ)$?

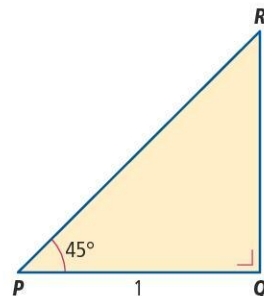


- 11 In $\triangle PQR$ is $\angle P = 45^\circ$, $\angle Q = 90^\circ$ en $PQ = 1$.

a Leg uit waarom $QR = 1$ en bereken PR exact.

b Leg uit dat $\sin(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

c Laat zien dat je dit kunt herleiden tot $\sin(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.



Theorie

Voor enkele waarden van x moet je de exacte waarde van $\sin(x)$ kennen. Met behulp van de opdrachten 10 en 11 zijn de waarden in de tabel berekend. Andere exacte waarden van $\sin(x)$ bereken je door gebruik te maken van de tabel en de symmetrie-eigenschappen van de sinusgrafiek.

graden	0°	30°	45°	60°	90°
radialen	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Voorbeeld

Bereken de exacte waarde van

$$\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right), \sin\left(1\frac{1}{6}\pi\right) \text{ en } \sin\left(1\frac{5}{6}\pi\right).$$

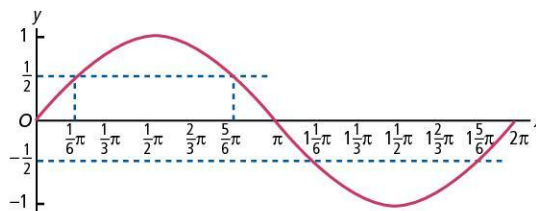
Oplossing

Volgens de tabel is $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$.

Vanwege de symmetrie in de lijn $x = \frac{1}{2}\pi$ is $\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$.

Vanwege de symmetrie in het punt $(\pi, 0)$ is

$$\sin\left(1\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2} \text{ en is } \sin\left(1\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}.$$



- 12 a Gebruik de periodicititeit van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ om de exacte waarde van $\sin\left(2\frac{1}{6}\pi\right)$ te geven.
- b Wat is de exacte waarde van $\sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right)$? En van $\sin\left(7\frac{5}{6}\pi\right)$?

Ondersteunende route → maak opdracht 013

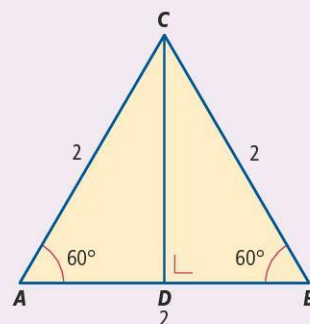
- 13 Vul in. Maak daarbij gebruik van de grafiek op de vorige bladzijde en van bovenstaande tabel. Geef alleen exacte antwoorden.

- a $\sin\left(-1\frac{5}{6}\pi\right) = \dots$ d $\sin\left(2\frac{1}{3}\pi\right) = \dots$
 b $\sin\left(1\frac{1}{4}\pi\right) = \dots$ e $\sin(-3\pi) = \dots$
 c $\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \dots$ f $\sin\left(2\frac{3}{4}\pi\right) = \dots$

Uitdagende route → maak opdracht U2 en U3

Ondersteunende opdrachten

- 010** $\triangle ABC$ is een gelijkzijdige driehoek met zijde 2 en hoogtelijn CD .
- Waarom zijn de hoeken van deze driehoek 60° ?
 - Leg uit dat geldt $CD^2 = 3$ en bereken exact CD .
 - Leg uit dat geldt $\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, dus $\sin(60^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
 - Welke hoeken in de figuur zijn gelijk aan 30° ?
 - Welke exacte waarde heeft $\sin(30^\circ)$?



- 013**
- Plot en schets de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ op het interval $[-2\pi, 4\pi]$ en teken hierin de assen van symmetrie van de grafiek.
 - Geef ook de punten van symmetrie aan in de grafiek.
 - Zet een stip in het punt $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ dat op de grafiek ligt.
 - Geef de coördinaten van alle punten met y -coördinaat $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ die binnen het gegeven interval op de grafiek van f liggen.

Vul in. Gebruik de grafiek en de tabel op de vorige bladzijde.

- | | |
|--|---|
| e $\sin(-\frac{5}{6}\pi) = \dots$ | g $\sin(-1\frac{1}{3}\pi) = \dots$ |
| f $\sin(3\frac{1}{4}\pi) = \dots$ | h $\sin(3\frac{1}{2}\pi) = \dots$ |

Uitdagende opdrachten

- U2** Zijn de beweringen waar of niet waar? Geef een toelichting.
- $\sin(\frac{1}{2}\pi - x) = \sin(\frac{1}{2}\pi + x)$
 - $\sin(x) = \sin(-x)$
 - $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- U3** Als $x = 1,12$ dan is, afgerond op vier decimalen, $\sin(x) = 0,9001$.
- Er zijn meer waarden van x waarvoor $\sin(x)$ afgerond op vier decimalen ook weer gelijk is aan $0,9001$.
Beredeneer voor welke van deze waarden dit geldt:

$x = 1,12 + \frac{1}{2}\pi$	$x = -1,12 + \frac{1}{2}\pi$
$x = 1,12 + \pi$	$x = -1,12 + \pi$
 - Schrijf alle oplossingen van $\sin(x) = 0,9001$ op het interval $[10\frac{1}{2}\pi, 12\frac{1}{2}\pi]$ in de vorm $x = 1,12 + k \cdot \pi$ of $x = -1,12 + k \cdot \pi$ met k een geheel getal.

7.3 Cosinusfunctie

Je leert

- wat de eigenschappen zijn van de cosinusfunctie
- welke exacte waarden van $\cos(x)$ je moet kennen

Leerroutes

- ondersteunend: 14–15–16–17–018–19
- doorlopend: 14–15–16–17–18–19
- uitdagend: 14–15–16–18–19–U4

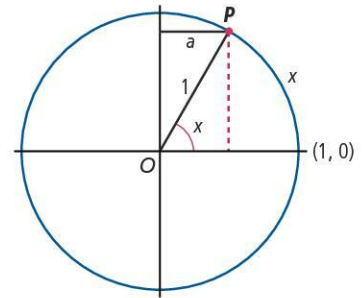
De uitwijking van de slinger van een klok ten opzichte van de evenwichtsstand is een periodiek verschijnsel. Een slinger heeft een periode van twee seconden en een maximale uitwijking van 5 cm. Op $t = 0$ is de uitwijking 5 cm naar rechts. Een uitwijking naar links wordt met een negatief getal aangegeven.

- Schets een grafiek van de uitwijking in cm als functie van de tijd in seconden.



- 14** In de eenheidscirkel is de lengte van de boog tussen $(1, 0)$ en P gelijk aan $\frac{1}{3}\pi$, dus geldt $x = \frac{1}{3}\pi$.

- De x -coördinaat van punt P kun je berekenen met behulp van $\cos(\frac{1}{3}\pi)$.
Welke waarde heeft $\cos(\frac{1}{3}\pi)$?
- Als P links van de verticale as is, dan is de x -coördinaat negatief.
Welke waarde heeft $\cos(\frac{2}{3}\pi)$?
- Welke coördinaten heeft punt P als $x = \frac{2}{3}\pi$?



Theorie

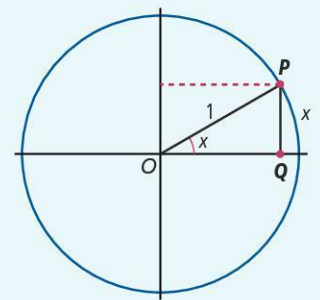
Met de sinusfunctie bereken je y -coördinaat van een punt op de eenheidscirkel. Met de **cosinusfunctie** bereken je de x -coördinaat van dat punt.

De grafiek van de cosinusfunctie $g(x) = \cos(x)$ heeft de volgende eigenschappen:

- De evenwichtsstand van de grafiek van g is de lijn $y = 0$.
- De amplitude is 1.
- De periode is 2π .
- Het punt $(0, 1)$ is een hoogste punt van de grafiek.

De verticale lijnen door de toppen zijn assen van symmetrie van de grafiek. De snijpunten van de grafiek met de x -as zijn punten van symmetrie.

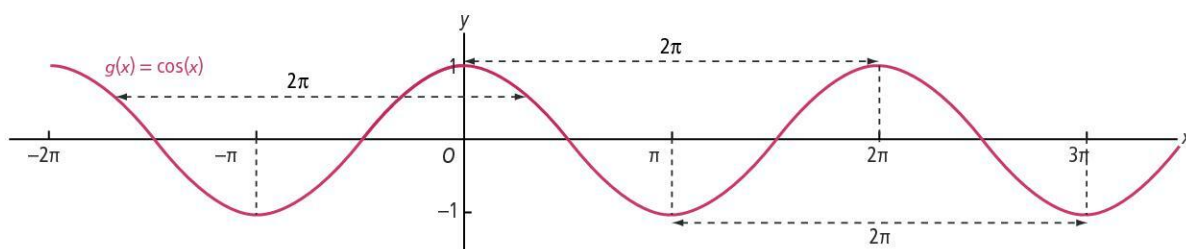
De cosinusgrafiek en de sinusgrafiek zijn ten opzichte van elkaar horizontaal over een kwart periode verschoven.



$$\sin(x) = \frac{PQ}{1} \text{ dus } PQ = \sin(x)$$

$$\cos(x) = \frac{OQ}{1} \text{ dus } OQ = \cos(x)$$

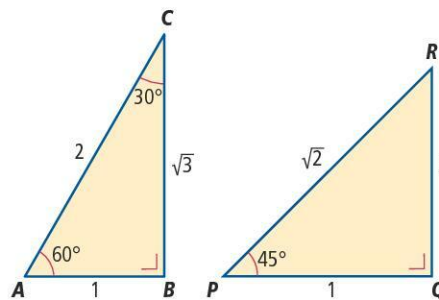
$$P(\cos(x), \sin(x))$$



- 15**
- Bart beweert: 'Als je de sinusgrafiek $\frac{1}{2}\pi$ naar links verschuift, dan krijg je de cosinusgrafiek'. Heeft Bart gelijk?
 - Noem een afstand waarover je de sinusgrafiek naar rechts kunt verschuiven om de cosinusgrafiek te krijgen.
 - Noem drie verschillende afstanden waarover je de cosinusgrafiek naar links of rechts kunt verschuiven, zodat je de sinusgrafiek krijgt.

- 16** Met behulp van de driehoeken kun je de exacte waarden van $\cos(x)$ voor enkele waarden van x berekenen.

- Bereken $\cos(60^\circ)$ met behulp van de linker driehoek.
- Geef de exacte waarde van $\cos(30^\circ)$.
- Laat met behulp van de rechter driehoek zien dat $\cos(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.
- Leg met behulp van de linker driehoek uit dat $\cos(30^\circ) = \sin(60^\circ)$ en dat $\cos(60^\circ) = \sin(30^\circ)$.



Theorie

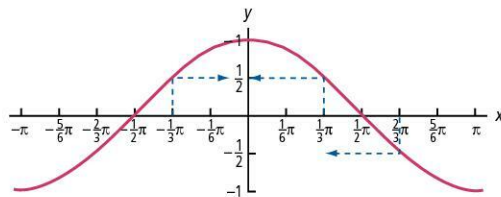
In de tabel staan voor enkele waarden van x de **exacte waarden van $\sin(x)$ en $\cos(x)$** .

Voor het berekenen van de exacte waarde van de sinus en de cosinus van veel andere hoeken kun je gebruik maken van de waarden in deze tabel en van de symmetrie en de periodiciteit van de bijbehorende grafieken.

graden	0°	30°	45°	60°	90°
radialen	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

- 17** Gegeven is de grafiek van $f(x) = \cos(x)$ op het interval $[-\pi, \pi]$. In de tabel staat $\cos(\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}$.

- a** Uit welke soort symmetrie volgt dat ook geldt $\cos(-\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}$?
- b** In de tabel staat $\cos(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
Geef de exacte waarde van $\cos(-\frac{1}{6}\pi)$.
- c** Met welke soort symmetrie kun je de exacte waarde van $\cos(\frac{2}{3}\pi)$ afleiden uit die van $\cos(\frac{1}{3}\pi)$?
- d** Geef de exacte waarde van $\cos(\frac{2}{3}\pi)$.



Ondersteunende route → maak opdracht 018

- 18** **a** Met welke eigenschap kun je de exacte waarde van $\cos(2\frac{1}{3}\pi)$ afleiden uit die van $\cos(\frac{1}{3}\pi)$?
Geef de exacte waarde van $\cos(2\frac{1}{3}\pi)$.
- b** Geef de exacte waarde van $\cos(8\frac{1}{4}\pi)$.
- c** Geef de exacte waarde van $\cos(5\frac{1}{6}\pi)$. Gebruik de tabel en ook de grafiek op de vorige bladzijde.

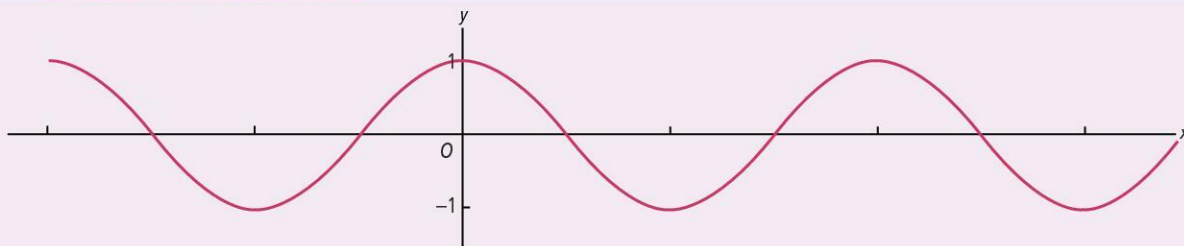
- 19** Vul exacte waarden in. Maak daarbij gebruik van de grafiek en de tabel met exacte waarden.

H

- | | |
|--|---|
| a $\cos(-1\frac{5}{6}\pi) = \cos(\frac{1}{6}\pi) = \dots$ | f $\sin(3\frac{2}{3}\pi) = \dots$ |
| b $\cos(1\frac{1}{4}\pi) = \dots$ | g $\cos(-1\frac{3}{4}\pi) = \dots$ |
| c $\cos(-\frac{2}{3}\pi) = \dots$ | h $\sin(2\frac{3}{4}\pi) = \dots$ |
| d $\cos(3\frac{1}{2}\pi) = \dots$ | i $\cos(4\frac{1}{6}\pi) = \dots$ |
| e $\cos(-2\frac{1}{3}\pi) = \dots$ | j $\sin(-5\frac{1}{6}\pi) = \dots$ |

Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten



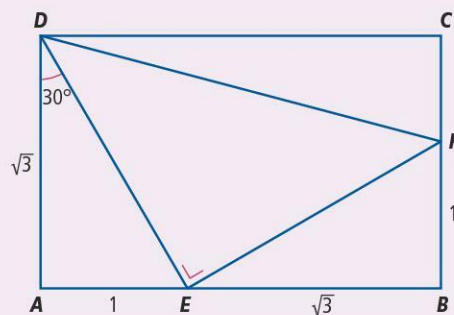
- 018** De grafiek van de functie $g(x) = \cos(x)$ is getekend op het interval $[-2\pi, 3\frac{1}{2}\pi]$.
- Eén van de assen van symmetrie van de grafiek is al in de grafiek getekend.
Teken ook de andere assen van symmetrie op dit interval.
 - Het punt $(\frac{1}{2}\pi, 0)$ is een punt van symmetrie van de grafiek.
Geef ook de andere punten van symmetrie aan in de grafiek.
 - Zet een stip in het punt $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2})$, dat op de grafiek ligt.
 - Geef de coördinaten van alle punten met y -coördinaat $\frac{1}{2}$ die binnen het gegeven interval op de grafiek van g liggen.
 - Geef de coördinaten van alle punten met y -coördinaat $-\frac{1}{2}$ die binnen het gegeven interval op de grafiek van g liggen.
 - Geef de exacte waarde van $\cos(2\frac{1}{3}\pi)$ en van $\cos(-1\frac{2}{3}\pi)$.
 - Geef de exacte waarde van $\cos(6\frac{1}{4}\pi)$.

Uitdagende opdrachten

- U4** Gegeven zijn vier rechthoekige driehoeken die samen precies een rechthoek vormen.

$AE = BF = 1$, $AD = EB = \sqrt{3}$ en $\angle ADE = 30^\circ$.

- Bereken DE , EF en DF .
- Bereken CD en CF .
- Hoe groot zijn de hoeken van $\triangle CDF$?
- Gebruik de figuur om aan te tonen dat $\sin(15^\circ) = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$.
- Bereken exact $\cos(15^\circ)$, $\sin(75^\circ)$ en $\cos(75^\circ)$.



7.4 Transformaties

Je leert

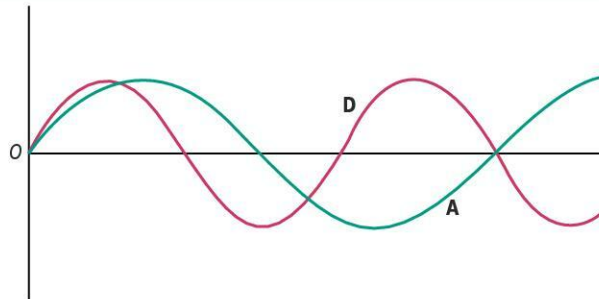
- hoe het functievoorschrift verandert als de grafiek wordt verschoven of vermenigvuldigd
- hoe je de kenmerken van een sinusgrafiek uit het functievoorschrift afleidt

Leerroutes

- ondersteunend: 20—21—022—22—24—25—26—027—28
- doorlopend: 20—21—22—23—24—25—26—27—28
- uitdagend: 21—22—24—25—26—27—28—U5—U6

Met een toongenerator kunnen tonen worden gemaakt. Toonhoogte A heeft een frequentie van 440 Hz (trillingen per seconde) en de frequentie van de toonhoogte D is 660 Hz.

- Welk verband is er tussen de grafieken voor de trillingen bij toonhoogte A en bij toonhoogte D?



- 20 a Plot en schets de grafieken van $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = 2 + \sin(x)$ en $h(x) = -3 + \sin(x)$.
- b Beschrijf het verband tussen de grafieken van g en h en de grafiek van $f(x) = \sin(x)$.
- c Geef een functievoorschrift van een sinusgrafiek met evenwichtsstand $y = 4$.
- 21 a Plot voor $a = 3$, $a = 5$ en $a = 0,5$ de grafiek van $g(x) = a \cdot \sin(x)$.
Welk kenmerk van de sinusgrafiek verandert als je het getal a verschillende waarden geeft?
- b Welk effect heeft een negatieve waarde van a op de grafiek?

Theorie

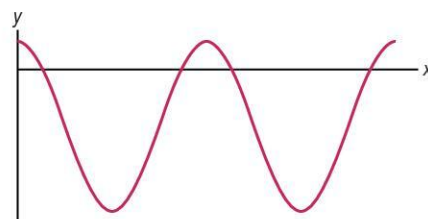
Door op de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ transformaties toe te passen, veranderen de kenmerken van de grafiek.

- De grafiek van de functie $g(x) = d + \sin(x)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een verticale verschuiving d . De evenwichtsstand is in dat geval de lijn $y = d$.
- De grafiek van de functie $h(x) = a \cdot \sin(x)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor a .
De amplitude wordt groter als $a > 1$ en kleiner als $0 < a < 1$.
Als het getal a negatief is, dan wordt de grafiek bovendien in de x -as gespiegeld.

Hetzelfde geldt voor $g(x) = d + \cos(x)$ en $h(x) = a \cdot \cos(x)$.

Voorbeeld

Hieronder staat de grafiek van $f(x) = -2 + 3 \cos(x)$.
Geef de amplitude en de evenwichtsstand van de grafiek.



Oplossing

$d = -2$, dus de evenwichtsstand is $y = -2$.
 $a = 3$, dus de amplitude is 3.

Ondersteunende route → maak opdracht 022

- 22** Geef de evenwichtsstand en de amplitude van de grafieken en het bereik van deze functies.

H

- a $f(x) = 2 + 3 \sin(x)$ d $f(x) = -17 - 20 \cos(x)$
 b $f(x) = -3 + 8 \cos(x)$ e $f(x) = 0,3 + 0,7 \cos(x)$
 c $f(x) = 10 - 3 \sin(x)$ f $f(x) = 24 + \cos(x)$

- 23** a Geef drie verschillende functievoorschriften van een grafiek met evenwichtsstand 5 en amplitude 6.
 b De grafiek van de functie $f(x) = \sin(x)$ wordt gespiegeld in de x -as en vervolgens drie eenheden omlaag verschoven. Geef een functievoorschrift van de beeldgrafiek.

- 24** a De grafiek van $g(x) = \sin(x - 2)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een horizontale verschuiving. Over hoeveel eenheden is er verschoven en welke kant op?
 b De grafiek van $f(x) = \sin(x)$ gaat in $(0, 0)$ stijgend door de evenwichtsstand. Welke coördinaten heeft het overeenkomstige punt op de grafiek van $g(x) = \sin(x + 1)$?
 c De grafiek van $h(x) = \cos(x)$ heeft een top $(0, 1)$. Welke coördinaten heeft het overeenkomstige punt op de grafiek van $k(x) = \cos\left(x + \frac{1}{6}\pi\right)$?

- 25** a Plot voor $b = 2$, $b = 3$ en $b = 0,5$ de grafiek van $g(x) = \sin(bx)$. Welk kenmerk van de sinusgrafiek verandert als je het getal b verschillende waarden geeft?
 b Welk verschil zie je tussen $0 < b < 1$ en $b > 1$?
 c Vul de tabel in.
 d Welk verband bestaat er tussen b en de periode van $g(x) = \sin(bx)$?

b	0,5	1	π	2π
periode	...	...	...	...

Theorie

- De grafiek van de functie $g(x) = \sin(x - c)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door de horizontale verschuiving c .
- De grafiek van de functie $h(x) = \sin(bx)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door de vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met factor $\frac{1}{b}$. De sinusgrafiek wordt in horizontale richting uitgerekt als $0 < b < 1$ en in elkaar gedrukt als $b > 1$. Als het getal b negatief is, dan wordt de grafiek bovendien gespiegeld in de y -as. Het verband tussen b en de periode is: $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$ of $\text{periode} = \frac{2\pi}{b}$ ($b > 0$).

Hetzelfde geldt voor $g(x) = \cos(x - c)$ en $h(x) = \cos(bx)$.

Voorbeeld 1

Door welke transformatie ontstaat de grafiek van $g(x) = \cos(5x)$ uit de grafiek van $f(x) = \cos(x)$?
Bereken ook de periode van g .

Oplossing

De grafiek van g ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de y -as te vermenigvuldigen met $\frac{1}{5}$.
De periode van g is $\frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$.

Voorbeeld 2

Door welke transformaties ontstaat de grafiek van $g(x) = -2 \sin(x + \frac{1}{4}\pi)$ uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$?

Oplossing

De grafiek van $h(x) = \sin(x + \frac{1}{4}\pi)$ ontstaat uit die van f door een verschuiving over $\frac{1}{4}\pi$ naar links. Vervolgens is de grafiek van h vermenigvuldigd met -2 ten opzichte van de x -as.

26 Bereken de periode.

H

- a** $g(x) = \cos(3x)$ **c** $g(x) = \sin(-\pi x)$
b $g(x) = 3 \cos(\frac{1}{4}x)$ **d** $g(x) = -4 \sin(0,1\pi x)$

Ondersteunende route → maak opdracht 027

27 Door welke transformaties ontstaan de grafieken van deze functies uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ of $h(x) = \cos(x)$?

H

Geef ook de coördinaten van de toppen op het interval $[0, 2\pi]$.

- a** $g(x) = \cos(x + 3) + 2$ **c** $g(x) = -\cos(x + 5\pi)$
b $g(x) = 2 \sin(x - \frac{1}{2}\pi)$ **d** $g(x) = 5 \sin(2x) + 1$

28 Een functie $f(x) = \sin(bx)$ heeft periode 5.
Bereken b .

Uitdagende route → maak opdracht U5 en U6

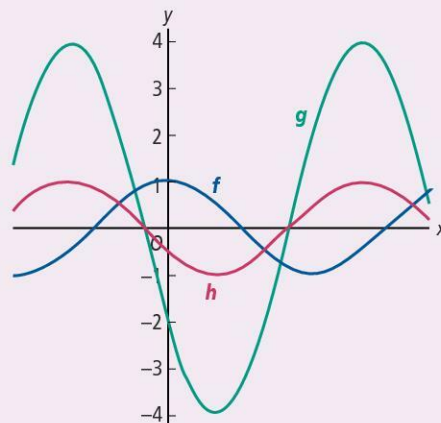
Ondersteunende opdrachten

- 022** Gegeven is de functie $f(x) = -1\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2}\cos(x)$.
- Geef de evenwichtsstand van de grafiek van f .
 - Geef de amplitude van de grafiek van f .
 - Wat zijn de maximale en de minimale waarde van $f(x)$?
 - Geef het bereik van f in de intervalnotatie.

- 027** Gegeven is de functie $g(x) = 4\cos\left(x + \frac{2}{3}\pi\right)$.
- De grafiek van $f(x) = \cos(x)$ heeft een top $(0, 1)$.
Welk getal kun je in $h(x) = \cos\left(x + \frac{2}{3}\pi\right)$ invullen om de uitkomst 1 te krijgen?
 - Welke verschuiving moet je op de grafiek van f toepassen om de grafiek van h te krijgen?
 - Hoe ontstaat de grafiek van g uit die van h ?

Door welke transformaties ontstaan de grafieken van deze functies uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ of $h(x) = \cos(x)$? Geef ook de coördinaten van de toppen op het interval $[0, 2\pi]$.

- d** $g(x) = \cos(x - 1) - 2$ **f** $g(x) = -4\cos(x + 3\pi)$
e $g(x) = 2\sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$ **g** $g(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$



Uitdagende opdrachten

- U5** De grafiek van $f(x) = \cos(x)$ op het interval $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$ wordt ten opzichte van de x -as met -2 vermenigvuldigd en vervolgens 3 omhoog verschoven.
- Geef de coördinaten van de toppen van de beeldgrafiek.
 - Beantwoord opdracht a ook voor het geval dezelfde twee transformaties in omgekeerde volgorde worden toegepast.

- U6** Trillingen waarvan de grafiek de vorm van een sinusgrafiek heeft worden harmonische trillingen genoemd en beschreven met de formule $u = A \cdot \sin(2\pi f t)$. Hierin is A de maximale uitwijking en f is de frequentie in Hertz (Hz), dus het aantal trillingen per seconde.
- Bereken de frequentie en de periode van een trilling van een gitaarsnaar met de formule $u = 0,15 \cdot \sin(1750t)$.
 - De gitaarsnaar van opdracht a wordt in het midden vastgedrukt en de halve snaar wordt in trilling gebracht. De toon is nu een octaaf hoger, wat betekent dat de frequentie is verdubbeld.
Stel de bijbehorende formule op.

7.5 Algemene vorm van een sinusoid

Je leert

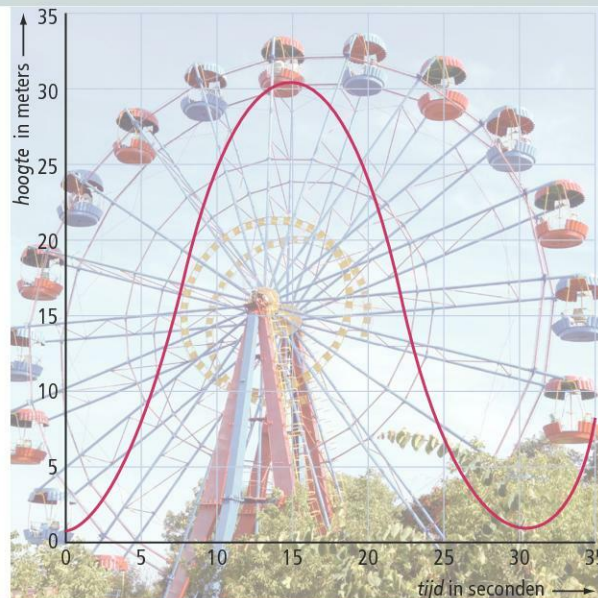
- wat een sinusoid is en welke kenmerken je kunt afleiden uit het functievoorschrift
- hoe je een functievoorschrift opstelt bij een gegeven sinusoid

Leerroutes

- ondersteunend: 29—030—31—032—32
- doorlopend: 29—30—31—32—33
- uitdagend: 29—31—33—U7—U8

In het assenstelsel zie je de tijd-hoogte grafiek van een gondel in een reuzenrad.

- Wat kun je met behulp van de grafiek over het reuzenrad te weten komen?



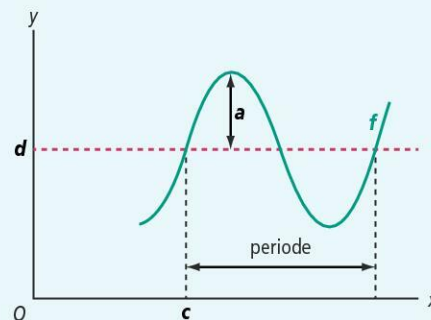
- 29 a Plot de grafiek van $g(x) = 3 \sin(x - 2) + 4$.
Geef de amplitude, de evenwichtsstand en de periode.
- b Doe hetzelfde voor de grafiek van
- A $h(x) = -1 + 1,5 \cos(3x)$
 - B $k(x) = 100 - 55 \sin(x - 20)$
 - C $m(x) = 0,25 + 0,75 \cos(0,2\pi x)$
 - D $n(x) = 900 - 45 \cos(x + 100)$

Theorie

Sinusoiden zijn grafieken van functies met functievoorschrift $f(x) = d + a \sin(b(x - c))$ of $g(x) = d + a \cos(b(x - c))$.

Hierbij geldt:

- De amplitude is a als $a > 0$ en de amplitude is $-a$ als $a < 0$.
- Voor het verband tussen b (met $b > 0$) en de periode geldt:
$$b = \frac{2\pi}{\text{periode}} \text{ of } \text{periode} = \frac{2\pi}{b}$$
- De grafiek is over een afstand c naar rechts verschoven.
- De evenwichtsstand is de lijn $y = d$.



Voorbeeld

Gegeven is de functie $g(x) = -8 - 6 \sin(\frac{1}{2}(x + 4))$.

Geef de amplitude, de evenwichtsstand en

de periode van de grafiek van g .

Beschrijf hoe de grafiek ontstaan is uit

de grafiek van $f(x) = -8 - 6 \sin(\frac{1}{2}x)$.

Oplossing

$a = -6$, dus de amplitude is 6.

$d = -8$, de evenwichtsstand is de lijn $y = -8$.

$b = \frac{1}{2}$, dus de periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

$c = -4$, dus de grafiek van g is ontstaan uit die van $f(x) = -8 - 6 \sin(\frac{1}{2}x)$ door de verschuiving 4 naar links.

Ondersteunende route → maak opdracht 030

30 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 + 4\cos(\frac{1}{2}\pi(x - 3))$,

H $g(x) = 3\sin(2x) + 1$ en $h(x) = -8\cos(\pi x) + 6$.

Bepaal van de grafiek van elk van deze functies de amplitude, de periode en de evenwichtsstand.

31 De sinusöide is de grafiek van een functie

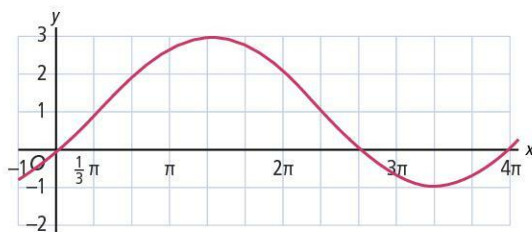
$f(x) = d + a \sin(b(x - c))$.

a Lees uit de grafiek het maximum en minimum af en leg uit dat $d = 1$ en $a = 2$.

b Lees uit de grafiek de periode af en laat zien dat $b = 0,5$.

c Welke coördinaten heeft het punt waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat?

d Geef het functievoorschrift van f .



Aanpak

Hoe stel je een functievoorschrift $f(x) = d + a \sin(b(x - c))$ op bij een gegeven sinusöide?

1 Lees uit de grafiek het maximum en minimum af.

2 Bereken hiermee de evenwichtsstand d en amplitude a .

3 Lees uit de grafiek de periode af en bereken de waarde van b met $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$

4 Lees uit de grafiek de horizontale verschuiving af en bereken hiermee de waarde van c .

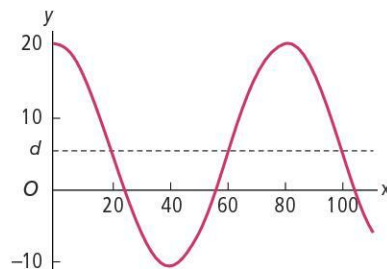
5 Schrijf een functievoorschrift op.

Voorbeeld

Stel een functievoorschrift $f(x) = d + a \sin(b(x - c))$ op bij deze sinusoid.

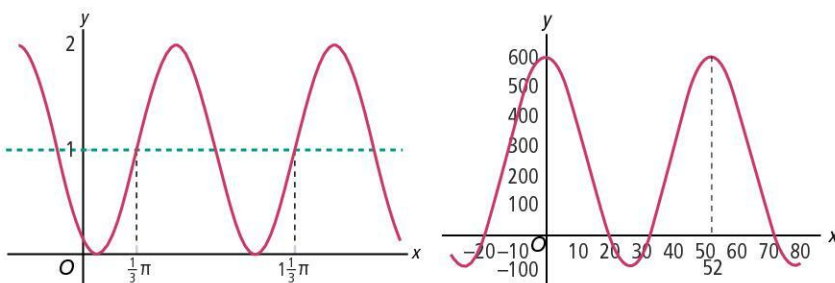
Oplossing

- 1 Het maximum is gelijk aan 20 en het minimum is gelijk aan -10 .
- 2 $d = \frac{20 + (-10)}{2} = 5$ en $a = 20 - 5 = 15$.
- 3 De periode is 80 dus $b = \frac{2\pi}{80} = \frac{1}{40}\pi$.
- 4 De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $x = 60$, dus $c = 60$.
- 5 $f(x) = 5 + 15 \sin\left(\frac{1}{40}\pi(x - 60)\right)$



Ondersteunende route → maak opdracht O32

- 32** Stel passende functievoorschriften op bij de sinusoiden.
H Maak bij beide sinusoiden zowel een functievoorschrift met een sinus als een functievoorschrift met een cosinus.



- 33** De hoeveelheid lucht in de longen is bij regelmatige ademhaling een periodiek verschijnsel. Een model hiervoor is $h = 1,2 + 0,7\sin(1,25t)$ met t in seconden en h in liters.
- a Hoe groot is de periode in hele seconden?
 - b Hoeveel lucht blijft er bij het uitademen in de longen minimaal achter?
 - c Na het leveren van een inspanning is de ademfrequentie 1,5 keer zo snel en de maximale longinhoud is 2,4 liter geworden. De minimale longinhoud is gelijk gebleven. Geef een formule die hierbij past.

Uitdagende route → maak opdracht U7 en U8

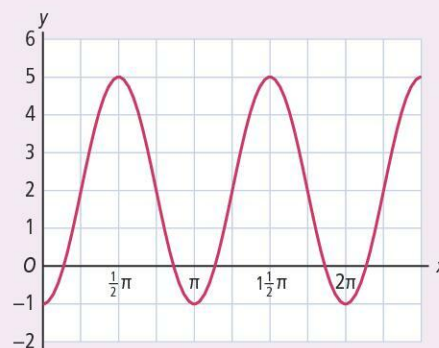
Ondersteunende opdrachten

- 030** Gegeven is de functie $h(x) = -1 - 3\sin\left(\frac{2}{3}(x - 5)\right)$.
- Het functievoorschrift heeft de vorm $h(x) = d + a\sin(b(x - c))$.
Welke waarden hebben a , b , c en d bij de functie h ?
 - Plot de grafieken van h en van $g(x) = -1 - 3\sin\left(\frac{2}{3}x\right)$ in één figuur. Gebruik de plot om het blaadje in te vullen.
 - Welke van de parameters a , b , c en d bepaalt de amplitude? En welke de evenwichtsstand?
 - Geef de amplitude en de evenwichtsstand van de grafiek van h .
 - Gegeven zijn de functies $k(x) = 2 + 3\sin(5x)$,
 $m(x) = -4\cos(\pi(x + 2)) + 7$ en
 $n(x) = -5 - \sin\left(2\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)\right)$.

Bepaal van de grafiek van elk van deze functies de amplitude, de periode en de evenwichtsstand.

●	$h(x) = -1 - 3\sin\left(\frac{2}{3}(x - 5)\right)$
●	De periode is $\frac{2\pi}{\dots} = \dots$
●	De grafiek van h ontstaat uit de grafiek van $g(x) = -1 - 3\sin\left(\frac{2}{3}x\right)$ door een verschuiving van $\dots$ naar $\dots$
●	
●	
●	

- 032** In deze opdracht ga je een functievoorschrift $f(x) = d + a\sin(b(x - c))$ opstellen bij de sinusoïde.
- Lees in de grafiek het maximum en het minimum af.
 - Bereken de evenwichtsstand d .
 - Bereken de amplitude a .
 - Lees de periode af in de grafiek en bereken hiermee b .
 - Lees de horizontale verschuiving af door te kijken in welk punt de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.
Welke waarde heeft c ?
 - Schrijf een functievoorschrift bij de sinusoïde op.



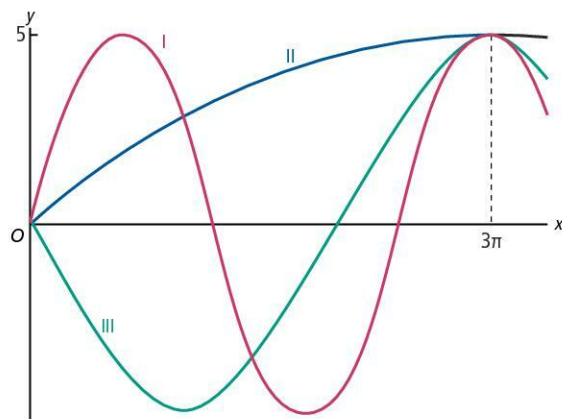
Uitdagende opdrachten

- U7**
- Een sinusoïde heeft als twee opeenvolgende toppen de punten $(2, 18)$ en $(10, 2)$.
Geef een functievoorschrift dat hierbij past.
 - Een sinusoïde heeft onder andere als toppen de punten $(-3\pi, -11)$ en $(9\pi, -2)$.
Geef twee verschillende functievoorschriften met een sinus die hierbij passen.
- U8** Geef van elke functie het maximum en het minimum en de exacte waarden van x waarvoor deze worden bereikt op het interval $[0, 2\pi]$.
- $f(x) = 3\sin(2x)$
 - $g(x) = 8\cos(\pi x) + 6$
 - $h(x) = -2 + 7\cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$
 - $k(x) = 3\sin\left(1\frac{1}{2}x + \pi\right) + 1$

7.6 Gemengde opdrachten

- 34** De grafieken van enkele functies met het functievoorschrift $f(x) = p \cdot \sin(qx)$ gaan door het punt $(3\pi, 5)$.

- Bereken p en q voor grafiek I.
- Bereken p en q voor grafiek II.
- Bereken p en q voor grafiek III.
- Kies $p = -2$ en $q = 5$.
Bereken de periode en de amplitude.

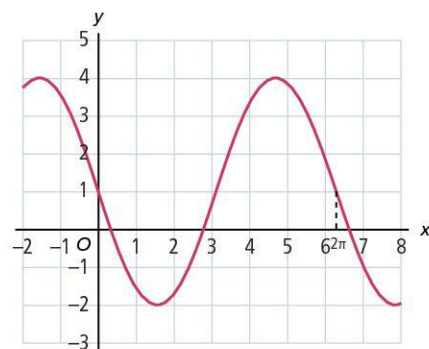


- 35** Geef de exacte waarden van:

- | | |
|----------------------------|-----------------------------|
| a $\sin(8\frac{3}{4}\pi)$ | d $\sin(-10\frac{1}{2}\pi)$ |
| b $\cos(5\frac{1}{3}\pi)$ | e $\cos(-9\pi)$ |
| c $\cos(-1\frac{5}{6}\pi)$ | f $\sin(3\frac{2}{3}\pi)$ |

- 36** In een assenstelsel is een sinusoïde getekend.

- Stel een functievoorschrift op van een sinusfunctie die bij deze grafiek hoort.
- Stel een functievoorschrift op van een cosinusfunctie die bij deze grafiek hoort.
- Verschuif de grafiek zo, dat $(0, 3)$ een top van de grafiek wordt.
Welk functievoorschrift kan bij de beeldgrafiek horen?
- De gegeven grafiek wordt ten opzichte van de x -as met 2 vermenigvuldigd en daarna $\frac{1}{6}\pi$ naar links verschoven.
Geef een functievoorschrift van de beeldgrafiek.



- 37** De productie van voedsel is afhankelijk van de lengte van het groeiseizoen. Onder het groeiseizoen wordt verstaan het aantal dagen per jaar dat de gemiddelde dagtemperatuur hoger is dan een bepaalde temperatuur. Voor veel gewassen in Nederland is die temperatuur 5°C .

De gemiddelde dagtemperatuur T gedurende een jaar in ons land wordt vrij goed benaderd door de formule

$$T = 9,5 - 10,5 \cos\left(\frac{1}{6}\pi x\right).$$

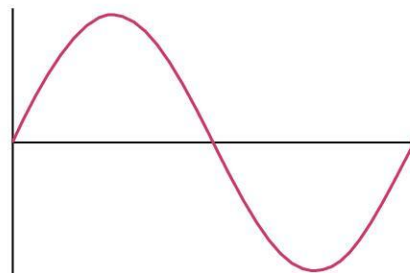
Hierin is x de tijd in maanden na 1 januari.

- Bereken hoe lang het groeiseizoen duurt.
- Een bepaald gewas heeft wat meer warmte nodig.
De gemiddelde dagtemperatuur moet voor dit gewas boven 6°C liggen.
Bereken hoeveel dagen korter het groeiseizoen voor dit gewas is.

- 38** Gegeven is de functie $f(x) = \cos(x) \cdot \sin\left(x + \frac{1}{6}\pi\right)$ op het interval $[0, 2\pi]$.
- Plot de grafiek van f en geef de coördinaten van de toppen in twee decimalen.
 - De grafiek blijkt een sinusoïde te zijn.
Het functievoorschrift van f is van de vorm $f(x) = d + a \sin(b(x - c))$.
Geef mogelijke waarden van a , b , c en d .
 - Gegeven is de functie $f_a(x) = \cos(x) \cdot \sin(x + a)$. Neem voor a steeds andere getallen, bijvoorbeeld π , $\frac{1}{2}\pi$ of $\frac{1}{4}\pi$.
Heeft de grafiek van f_a steeds dezelfde vorm?
Voor welke waarden van a heeft $f_a(x)$ geen negatieve uitkomsten?
Voor welke waarden van a is $y = 0$ de evenwichtsstand?



- 39** Op een oscilloscoop kunnen trillingen zichtbaar worden gemaakt, met de tijd op de horizontale as en de uitwijking op de verticale as. Het scherm heeft een breedte van 10 cm en een hoogte van 8 cm, met een raster van 1 cm. Een trilling heeft een amplitude van 2 mm en een frequentie van 50 Hz.
Hoe moet je de eenheden op de beide assen kiezen om te zorgen dat op het scherm precies één periode van de trilling past?



Theorie

Eenheidscirkel, radialen

In een eenheidscirkel, dat is een cirkel met straal 1, komt een draaihoek van 180° overeen met een cirkelboog met lengte π . Daaruit volgt dat een cirkelboog met lengte 1 hoort bij een hoek van $\frac{180}{\pi} \approx 57^\circ$. De grootte van deze hoek wordt gebruikt als hoekmaat en heet radiaal. In de eenheidscirkel is een hoek van één radiaal de draaihoek die hoort bij een booglengte 1.

- S1**
- Hoeveel radialen zijn de hoeken van een gelijkzijdige driehoek?
 - Hoeveel radialen zijn de hoeken van een gelijkbenige rechthoekige driehoek?

Theorie

Sinus en cosinus, sinusoiden

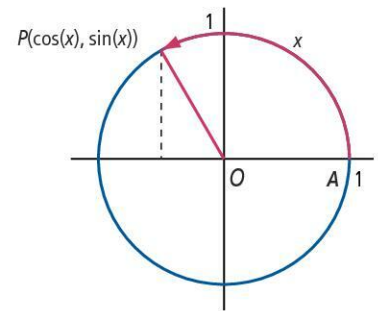
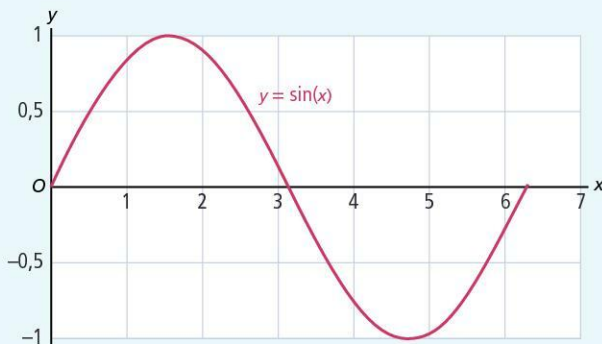
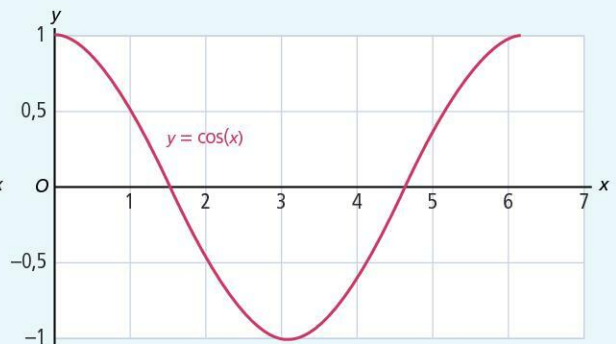
Voor een punt dat vanuit het punt $(1, 0)$ over de eenheidscirkel beweegt is bij een afgelegde afstand x de hoogte, dus de y -coördinaat, te berekenen met $\sin(x)$.

De x -coördinaat van het punt is $\cos(x)$.

De grafieken van $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ zijn voorbeelden van sinusoiden.

Deze grafieken hebben de volgende kenmerken:

- De periode is 2π .
- De evenwichtsstand is de x -as, dus $y = 0$.
- De amplitude, dat is de grootste afwijking ten opzichte van de evenwichtsstand, is 1.
- De verticale lijnen door de toppen zijn symmetrieassen van de grafieken, de snijpunten met de evenwichtsstand zijn punten van symmetrie.



- S2** a Noem drie punten van symmetrie op de grafiek van $f(x) = \sin(x)$.
 b Noem drie assen van symmetrie van de grafiek van $g(x) = \cos(x)$.

Theorie

Exacte waarden van sinus en cosinus

Voor enkele waarden van x moet je de exacte waarden van $\sin(x)$ en $\cos(x)$ kennen. Deze waarden staan in de tabel. Je maakt gebruik van de symmetrie en de periode om $\sin(x)$ en $\cos(x)$ voor andere waarden van x hieruit af te leiden.

<i>graden</i>	0°	30°	45°	60°	90°
<i>radialen</i>	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
<i>sinus</i>	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
<i>cosinus</i>	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Voorbeeld

Bereken de exacte waarde van $\sin(5\frac{3}{4}\pi)$.

Oplossing

$$\begin{aligned} \sin(5\frac{3}{4}\pi) &= \sin(3\frac{3}{4}\pi) = \sin(1\frac{3}{4}\pi) = \sin(-\frac{1}{4}\pi) && \text{(periode is } 2\pi) \\ \sin(-\frac{1}{4}\pi) &= -\sin(\frac{1}{4}\pi) && \text{(puntsymmetrisch in } (0, 0)) \\ \sin(\frac{1}{4}\pi) &= \frac{1}{2}\sqrt{2} && \text{(tabel met exacte waarden)} \\ \text{Dus } \sin(5\frac{3}{4}\pi) &= -\frac{1}{2}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

- S3** Bereken met behulp van de grafiek en de tabel de exacte waarde van:

a $\sin(1\frac{3}{4}\pi)$ b $\cos(-1\frac{5}{6}\pi)$

Vaardigheid

Je kunt graden omrekenen naar radialen en omgekeerd.

Gebruik dat 180 graden overeenkomt met π radialen en maak zo nodig een verhoudingstabel.

- S4** Vul de tabel in.

<i>aantal graden</i>	140	...	1,3	...
<i>aantal radialen</i>	...	$1\frac{2}{3}\pi$	...	2,5

Vaardigheid

Je kunt de kenmerken van een sinusoiden uit het functievoorschrift afleiden.

De algemene vorm voor het functievoorschrift bij een sinusoiden is $f(x) = d + a\sin(b(x - c))$ of $g(x) = d + a\cos(b(x - c))$. Daarbij geldt:

- De amplitude is a als $a > 0$ en de amplitude is $-a$ als $a < 0$.
- Voor het verband tussen b (met $b > 0$) en de periode geldt:

$$b = \frac{2\pi}{\text{periode}} \text{ of } \text{periode} = \frac{2\pi}{b}$$

- De evenwichtsstand is de lijn $y = d$.
- Er is een horizontale verschuiving c naar rechts.

Voorbeeld

Geef de kenmerken van de grafiek van de functie

$$f(x) = 3\sin\left(\frac{1}{2}\pi(x - 2)\right) + 8.$$

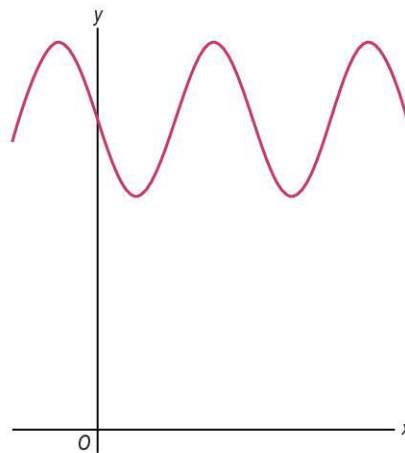
Oplossing

De amplitude is 3.

De evenwichtsstand is $y = 8$.

De periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 4$.

De grafiek is 2 naar rechts verschoven.



- S5** Geef de amplitude, de evenwichtsstand en de periode van de functies $f(x) = 3 + 5\cos\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)\right)$ en $g(x) = -3\sin\left(\frac{1}{3}\pi x\right) + 10$.

Vaardigheid

Je kunt een functievoorschrift $f(x) = d + a \sin(b(x - c))$ opstellen bij een gegeven sinusoïde.

- 1 Lees uit de grafiek het maximum en minimum af.
- 2 Bereken hiermee de evenwichtsstand d en amplitude a .
- 3 Lees uit de grafiek de periode af en bereken de waarde van b
met $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$
- 4 Lees uit de grafiek de horizontale verschuiving af en bereken hiermee de waarde van c .
- 5 Schrijf een functievoorschrift op.

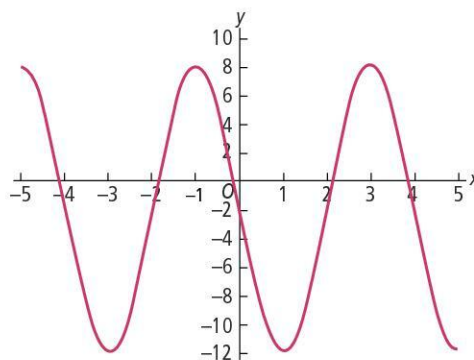
Voorbeeld

Stel een functievoorschrift op bij de gegeven sinusoïde.

Oplossing

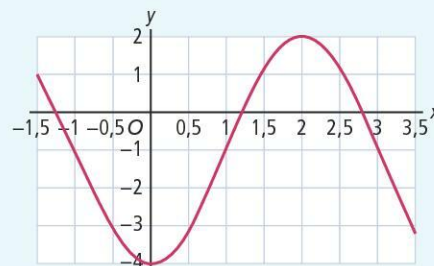
Het functievoorschrift wordt $f(x) = d + a \sin(b(x - c))$.

- 1 Het maximum is 8 en het minimum is -12.
- 2 De evenwichtsstand is $d = -2$ en de amplitude $a = 8 - (-2) = 10$.
- 3 De periode is 4, dus $b = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$.
- 4 De grafiek gaat bij $x = -2$ stijgend door de evenwichtsstand, dus $c = -2$.
- 5 Een functievoorschrift is $f(x) = -2 + 10 \sin(\frac{1}{2}\pi(x + 2))$.



S6 Stel een passend functievoorschrift op:

- a bij de gegeven sinusoïde.
- b bij een sinusoïde met periode 12, evenwichtsstand $y = -2$ en een top $(5, 4)$.



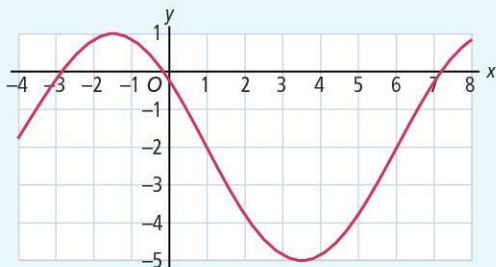
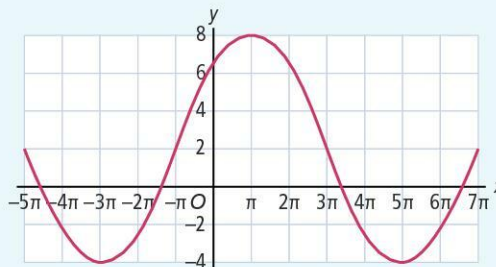
T1 Vul de tabel in. Rond indien nodig af op twee decimalen.

α in graden	45	125	...	...	600	...
α in radialen	...	...	0,52	4	...	1,75

T2 Vul in. Geef exacte waarden. Maak gebruik van de grafiek en de tabel met exacte waarden.

- | | |
|--|--|
| a $\sin\left(3\frac{1}{3}\pi\right) = \dots$ | e $\cos\left(2\frac{3}{4}\pi\right) = \dots$ |
| b $\sin\left(-2\frac{1}{2}\pi\right) = \dots$ | f $\cos\left(-1\frac{2}{3}\pi\right) = \dots$ |
| c $\cos\left(4\frac{5}{6}\pi\right) = \dots$ | g $\sin(-3\pi) = \dots$ |
| d $\sin(8\pi) = \dots$ | h $\sin\left(-3\frac{5}{6}\pi\right) = \dots$ |

T3 Stel een functievoorschrift op bij deze grafieken.



T4 Gegeven is de functie $f(x) = 2\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$.

- Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f uit de grafiek van $h(x) = \sin(x)$?
- Hoe moet je de grafiek van f verschuiven zodat de beeldgrafiek samenvalt met de grafiek van $g(x) = -2\cos(x)$?

T5 Bij een trilling is de uitwijking u ten opzichte van de ruststand een sinusfunctie. Per seconde zijn er 20 trillingen en de maximale uitwijking is 5 mm.

- Geef de periode en de amplitude van deze trilling.
- Geef een functievoorschrift van u als functie van de tijd t in seconden.
- Gedurende hoeveel tijd in één periode is de uitwijking groter dan 4 mm?

- T6** a De grafiek van $g(x) = \cos(bx)$ heeft periode 5π .
Bereken b .
- b Geef een functievoorschrift van een sinusfunctie waarvan de grafiek periode 5π en amplitude 2 heeft en die in het punt $(3, -4)$ stijgend door de evenwichtsstand gaat.

- T7** Gegeven zijn de functies $f(x) = -7\cos\left(x + \frac{1}{6}\pi\right)$ en $g(x) = -1 + 3\sin\left(2\left(x - \frac{1}{8}\pi\right)\right)$.
- a Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f uit de grafiek van $h(x) = \cos(x)$?
- b Bepaal de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as op het interval $[0, 2\pi]$. Geef exacte antwoorden.
- c Bepaal het bereik van g .
- d Geef de exacte coördinaten van de toppen van de grafiek van g op het interval $[0, \pi]$.

- T8** a Bereken exact de waarde van a als de grafiek van $f(x) = a\sin(x)$ door het punt $\left(\frac{2}{3}\pi, 1\right)$ gaat.
- b Bereken exact de waarde van b als de grafiek van $g(x) = \cos(bx)$ periode $\frac{2}{3}\pi$ heeft.
- c Geef een functievoorschrift van een sinusïde met periode π , waarbij $\left[-1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right]$ het bereik van de functie is.



- T9** De grafiek is de getijdekromme van 5 mei 2003 van het K13A Platform dat voor de Nederlandse kust is gelegen. Hiernaast staan belangrijke gegevens in een tabel. Geef een functievoorschrift waarvan de grafiek de kromme redelijk goed benadert. Neem $t = 0$ op tijdstip 0:00.

hoog en laagwater		
04:10	LW	-78 cm
10:14	HW	58 cm
16:30	LW	-76 cm
22:45	HW	45 cm
tijden in zomertijd		

Je kunt graden omrekenen naar radialen en omgekeerd.

- E1** Vul de tabel in. Rond indien nodig af op twee decimalen.

α in graden	...	30	77	135	...	...
α in radialen	0,35	...	...	...	$1\frac{1}{6}\pi$	23

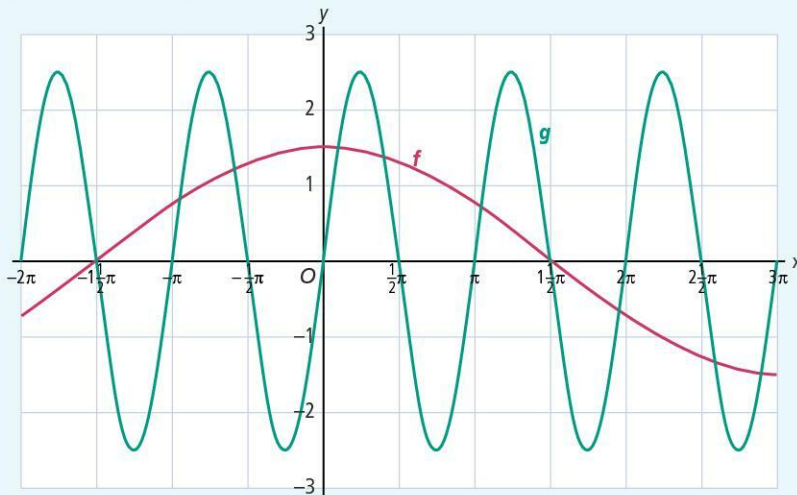
Je kunt de kenmerken van een sinusöide uit het functievoorschrift afleiden.

- E2** Gegeven zijn de functies $f(x) = 5\cos(x) + 3$ en

$$g(x) = -2\sin\left(\frac{1}{3}(x-4)\right).$$

- Geef de amplitude en de evenwichtsstand van de grafiek van f .
- Geef de periode en de amplitude van de grafiek van g .
- Door welke transformaties is de grafiek van f ontstaan uit de grafiek van $h(x) = \cos(x)$?
- Door welke transformaties is de grafiek van g ontstaan uit de grafiek van $k(x) = \sin(x)$?

Je kunt een functievoorschrift $f(x) = d + a\sin(b(x-c))$ opstellen bij een gegeven sinusöide.



- E3** De grafieken van de functies f en g zijn getekend.
- Geef van beide functies de periode en de amplitude van de grafiek.
 - Stel voor elk van de functies een functievoorschrift op.

E4 a Vul de tabel in.

x	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$1\frac{1}{4}\pi$	$1\frac{1}{2}\pi$	$1\frac{2}{3}\pi$
$\sin(x)$	...	...	...	...	...
$\cos(x)$	...	...	...	...	...

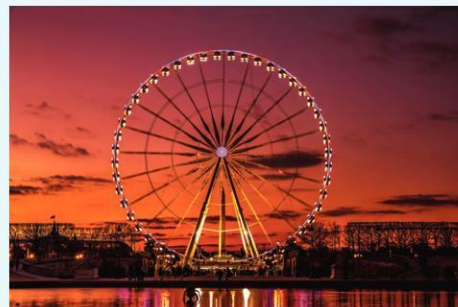
b Bereken, zonder je rekenmachine te gebruiken, de exacte waarden van $\sin(17\frac{1}{2}\pi)$, $\sin(-1\frac{5}{6}\pi)$, $\sin(1\frac{3}{4}\pi)$ en $\sin(-1\frac{1}{3}\pi)$.

E5 De functie $f(x) = -3\cos(bx)$ heeft periode 24.

- a** Bereken de exacte waarde van b .
- b** Hoe groot is de amplitude van de grafiek van f ?
- c** Hoeveel keer snijdt de grafiek van f de x -as op het interval $[0, 6000]$?
- d** Geef de exacte coördinaten van alle toppen op het interval $[-5, 30]$.

E6 Rogier zit in een reuzenrad dat met constante snelheid draait. Zijn hoogte ten opzichte van de grond wordt gegeven door de formule $H = 13 + 12\sin(4\pi(t - 0,125))$. Hierin is H de hoogte in meters en t de tijd in minuten met $t = 0$ op het moment van instappen.

- a** In hoeveel seconden draait het rad precies één keer rond?
- b** Op welke hoogte stapt Rogier in?
- c** Hoe hoog komt Rogier maximaal?
- d** Bereken op welke hoogte Rogier zich na 10 seconden bevindt.
- e** Geef de formule als de tijd niet in minuten maar in seconden wordt gegeven.



E7 **a** Voor een sinusöide geldt: de periode is 4π , de amplitude is 7 en $(0, 10)$ is een hoogste punt. Geef een functievoorschrift dat hierbij past.

b Van een sinusöide zijn de punten $(2, 7)$ en $(7, -5)$ twee opeenvolgende toppen. Geef een functievoorschrift bij deze sinusöide.



SE

CE

K

In de hoofdstuk

In hoofdstuk 4 heb je kennis gemaakt met exponentiële functies. Je hebt geleerd hoe de grafiek eruitziet, hoe je de groeifactor bepaalt en hoe je vergelijkingen exact oplost door links en rechts hetzelfde grondtal te nemen.

In dit hoofdstuk ga je exponentiële vergelijkingen oplossen waarbij je niet aan beide kanten hetzelfde grondtal kunt schrijven. Hiervoor heb je logaritmen nodig. Je leert wat logaritmen zijn en waarvoor je ze kunt gebruiken.

Logaritmen komen in de volgende analysehoofdstukken ook weer aan de orde.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Logisch redeneren en bewijzen* opdracht 14
- *Formules manipuleren* opdracht 35
- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 56

- V1** De dagwaarde van een bepaald type auto neemt exponentieel af. In de tabel is de dagwaarde W in euro's na t jaar voor een aantal waarden van t af te lezen.

t in jaren	0	1	2	3	4	5
W in euro's	25 000	...	20 250	...	16 403	14 762

- Bereken met behulp van de tabel de groeifactor van de dagwaarde per jaar.
- Met hoeveel procent neemt de dagwaarde per jaar af?
- Laat zien dat de formule $W = 25000 \cdot 0,9^t$ met t in jaren het verband tussen W en t redelijk benadert.
- Bereken de groeifactor van de dagwaarde per 10 jaar.
- Tot welke dagwaarde nadert W ?

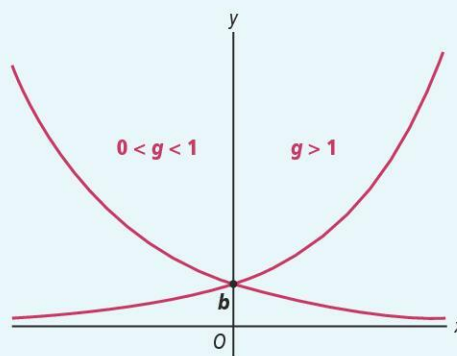


Theorie

Een **exponentiële functie** heeft de vorm $f(x) = b \cdot g^x$. Hierin is b de beginhoeveelheid op tijdstip $t = 0$ en g de groeifactor per tijdseenheid. Voor $b > 0$ geldt dat de functie stijgend is als $g > 1$ en dalend als $0 < g < 1$. Omdat $f(0) = b$ snijdt de grafiek van f de y -as in het punt $(0, b)$.

De grafiek van f heeft de x -as als horizontale asymptoot.

Het domein van f is $\mathbb{R}$ en het bereik van f is $\langle 0, \infty \rangle$.



- V2** Geef in elke situatie het functievoorschrift.
- Een hoeveelheid neemt wekelijks af met 0,5%. Op 1 januari 2010 ($t = 0$) was de hoeveelheid 37 980.
 - Bij een groeiproces neemt de hoeveelheid met 25% per dag toe. Na twee dagen is de hoeveelheid 12 500.
 - Van een exponentieel groeiproces is bekend dat de hoeveelheid op tijdstip $t = 2$ gelijk is aan 134 780. Op tijdstip $t = 5$ is de hoeveelheid gedaald tot 37 014.

- V3** Herleid en schrijf zonder negatieve exponent.

- $5^3 \cdot 5^4$
- $(5^3)^2 \cdot 5^5$
- $2^{-4} \cdot 3^{-4}$
- 7^{-3}
- $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$
- $a^{-3} \cdot a^{-5} \cdot a^{12}$

Theorie

Door gebruik te maken van de rekenregels voor machten kun je een functievoorschrift herleiden tot de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

$$g^0 = 1 \quad g^1 = g \quad g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g} \quad g^{-n} = \frac{1}{g^n}$$

$$g^p \cdot g^q = g^{p+q} \quad (g^p)^q = g^{p \cdot q} \quad \frac{g^p}{g^q} = g^{p-q}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Voorbeeld

Schrijf $f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4+x}$ in de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

Oplossing

$$f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4+x}$$

$$f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$f(x) = 2 \cdot \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$f(x) = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

V4 Schrijf in de vorm $N(t) = b \cdot g^t$.

a $N(t) = 2^{3+t}$

c $N(t) = 3^{-2+3t}$

b $N(t) = 15 \cdot 2^{t+4}$

d $N(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-t}$

Theorie

Exponentiële vergelijkingen kun je exact oplossen, als je de uitdrukkingen aan weerskanten van het gelijkteken kunt schrijven als machten van hetzelfde grondtal. Lukt dat niet, dan kun je de vergelijking met de rekenmachine oplossen.

Voorbeeld 1

Los exact op $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} = 2$.

Oplossing

$$(2^{-1})^{3x} = 2^1 \quad \left(\frac{1}{2} = 2^{-1}\right)$$

$$2^{-3x} = 2^1 \quad ((g^p)^q = g^{p \cdot q})$$

$$-3x = 1 \quad (\text{exponenten gelijkgesteld})$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

Voorbeeld 2

Los op $4 \cdot 3^{-\frac{1}{4}x} = 16$.

Oplossing

$3^{-\frac{1}{4}x} = 4$ (links en rechts : 4)

Het lukt niet om 3 als macht van 4 of 4 als macht van 3 te schrijven.

Met de rekenmachine:

$y_1 = 3^{-\frac{1}{4}x}$ en $y_2 = 4$

Venster: standaard

Optie: snijpunt geeft als oplossing

$x = -5,047\dots \approx -5,05$.

V5 Los indien mogelijk exact op. Geef waar dat niet mogelijk is een antwoord afgerond op twee decimalen.

a $3^{-t} = 9$

d $8 \cdot 4^p = 2$

b $5^{2t-8} = \frac{1}{25}$

e $5^{2t} \cdot 2^{2t} = 100$

c $4^{3t} = 116$

f $5^{2t} \cdot 5^{3t} = 1$

8.1 Logaritmen

Je leert

- wat logaritmen zijn
- hoe je vergelijkingen met logaritmen exact oplost

Leerroutes

- ondersteunend: 1—2—3—04—4—5—6—7—08—9
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7—8—9—10
- uitdagend: 1—3—4—5—6—7—8—9—10—U1

Sommige waterplanten groeien onder gunstige omstandigheden exponentieel.

Voor de oppervlakte A in m^2 van een dergelijke plant geldt $A = 6 \cdot 3^t$ met t in weken.

- Leg uit waarom je de vergelijking $A = 4374$ wel exact kunt oplossen en de vergelijking $A = 6000$ niet.



- 1 Gegeven is de vergelijking $3^x = 18$.
 - a Waarom kun je deze vergelijking niet exact oplossen?
 - b Toon aan dat voor de oplossing geldt: $2,6 < x < 2,7$.
 - c Geef de oplossing in twee decimalen.
- 2 Welke vergelijkingen kun je exact oplossen? Los die vergelijkingen exact op.
 - a $2^x = 10$
 - b $3^x = 25$
 - c $10^x = \frac{1}{10}$
 - d $5^x = \sqrt{5}$
 - e $2^x = 256$
 - f $3^x = \frac{1}{36}$
- 3
 - a Tussen welke gehele getallen ligt de oplossing van $3^x = 25$?
 - b Beredeneer welk getal groter is: de oplossing van $3^x = 26$ of de oplossing van $6^x = 38$.

Theorie

De exacte oplossing van de vergelijking $g^x = a$ heet de **logaritme** van a voor het grondtal g .

Je noteert deze oplossing als $x = {}^g\log(a)$ en je spreekt ${}^g\log(a)$ uit als 'g-log a'.

Basisregel: Uit $g^b = a$ volgt $b = {}^g\log(a)$ en omgekeerd:

uit ${}^g\log(a) = b$ volgt $a = g^b$.

Hierbij is $a > 0$, $g > 0$ en $g \neq 1$.

Er geldt: ${}^g\log(1) = 0$ voor elke waarde van $g > 0$ (mits $g \neq 1$).

$$\begin{array}{c} \text{tot de macht} \\ \text{10} \log(1000) = 3 \\ \text{is} \end{array}$$

Voorbeeld 1

Los exact op $4^x = 13$.

Oplossing

$4^x = 13$ heeft als grondtal 4, dit geldt dan ook voor de logaritme.

Uit $4^x = 13$ volgt $x = {}^4\log(13)$.

Voorbeeld 2

Los exact op $2^{5-x} = 17$.

Oplossing

$2^{5-x} = 17$ heeft als grondtal 2, dit geldt dan ook voor de logaritme.

Uit $2^{5-x} = 17$ volgt $5-x = {}^2\log(17)$.

Dus $x = 5 - {}^2\log(17)$.

Ondersteunende route → maak opdracht 04

4 Los exact op, dus schrijf de oplossing met een logaritme.

H

a $7^x = 4$

d $3^{x-2} = 14$

b $7^x = 10$

e $5^{x+1} = 100$

c $\left(\frac{1}{7}\right)^x = 13$

f $5^{2x+3} = 0,5$

5 Vul in:

a ${}^3\log(27) = \dots$ want $27 = 3^{\dots}$.

b ${}^2\log\left(\frac{1}{8}\right) = \dots$ want $\frac{1}{8} = 2^{\dots}$.

c ${}^5\log(5\sqrt{5}) = \dots$ want $5\sqrt{5} = 5^{\dots}$.

d ${}^7\log(1) = \dots$ want $1 = 7^{\dots}$.

6 Bereken exact.

H

a ${}^2\log(8)$

d ${}^{\frac{1}{4}}\log(64)$

b ${}^7\log(49)$

e ${}^2\log(2\sqrt{2})$

c ${}^3\log\left(\frac{1}{3}\right)$

f ${}^{\frac{1}{5}}\log(5\sqrt{5})$

7 Gegeven de rij ${}^5\log(1)$, ${}^5\log(2)$, ${}^5\log(3)$, ${}^5\log(4)$,

${}^5\log(1000)$.

Welke van deze logaritmen zijn gelijk aan een geheel getal?

Verklaar je antwoord.

Theorie

Vergelijkingen met logaritmen kun je oplossen met de regel:
 Uit ${}^g\log(a) = b$ volgt $a = g^b$.

Voorbeeld

Los exact op ${}^2\log(2x - 4) = 3$.

Oplossing

Uit ${}^2\log(2x - 4) = 3$ volgt $2x - 4 = 2^3$.
 $2x - 4 = 8$ dus $x = 6$.

Ondersteunende route → maak opdracht O8

8 Los exact op.

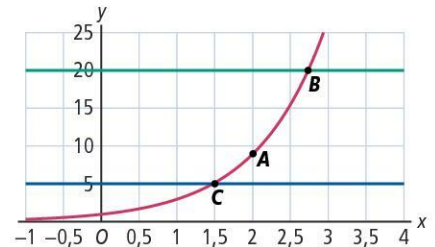
- H**
- | | |
|-----------------------------|--|
| a ${}^5\log(x) = 3$ | d ${}^3\log(x + 10) = 2$ |
| b ${}^5\log(x) = -1$ | e ${}^4\log\left(\frac{1}{2}x - 2\right) = 2$ |
| c ${}^2\log(2x) = 4$ | f ${}^{\frac{1}{2}}\log(4 - x) = -3$ |

9 Los exact op.

- a** ${}^5\log(x^2 + 4) = 3$
b ${}^6\log(x^2 - 13) = 2$
c ${}^{16}\log(x^3 - 23) = \frac{1}{2}$

10 Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = 3^x$.

- a** Geef de exacte coördinaten van het punt A op de grafiek van f .
b De grafiek van f snijdt de lijn $y = 5$ in punt C .
 Harm beweert dat $\left(1\frac{1}{2}, 5\right)$ de exacte coördinaten van C zijn.
 Is dit juist? Zo niet, wat zijn dan de exacte coördinaten van C ?
c Geef de exacte coördinaten van het snijpunt B van de lijn $y = 20$ en de grafiek van f .
d Van twee punten P en Q op de grafiek van f verschillen de x -coördinaten 2 en de y -coördinaten 16.
 Bereken de exacte coördinaten van P en van Q .



Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

- 04** Je gaat de vergelijking $2^x = 6$ exact oplossen.
- a** Gebruik de regel 'Uit $g^b = a$ volgt $b = {}^g\log(a)$ ' en vul in:
Uit $2^x = 6$ volgt $x = {}^2\log \dots$

Je gaat de vergelijking $6^{2x+3} = 24$ exact oplossen.

- b** Gebruik de regel 'Uit $g^b = a$ volgt $b = {}^g\log(a)$ ' en vul in:
Uit $6^{2x+3} = 24$ volgt $2x + 3 = \dots \log \dots$
- c** Laat zien dat uit opdracht b volgt:
 $x = -1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^6\log(24)$.

- 08** Je gaat de vergelijking ${}^2\log(x) = 3$ exact oplossen.
- a** Gebruik de regel 'Uit ${}^g\log(a) = b$ volgt $a = g^b$ ' en vul in:
Uit ${}^2\log(x) = 3$ volgt $x = 2^{\dots}$.
- b** Voor welke waarde van x geldt ${}^2\log(x) = 3$?

Je gaat de vergelijking ${}^3\log(x - 2) = 2$ exact oplossen.

- c** Gebruik de regel 'Uit ${}^g\log(a) = b$ volgt $a = g^b$ ' en vul in:
Uit ${}^3\log(x - 2) = 2$ volgt $x - 2 = \dots$
- d** Laat zien dat uit opdracht c volgt: $x = 11$.

Los exact op.

- e** ${}^2\log(x + 3) = 4$ **h** ${}^{\frac{1}{2}}\log(x + 1) = -2$
- f** ${}^4\log(x - 4) = 2$ **i** ${}^3\log\left(\frac{1}{3}x - 1\right) = 4$
- g** ${}^9\log\left(\frac{1}{3}x + 3\right) = 2$ **j** ${}^{\frac{1}{2}}\log(8 - x) = -1$

Uitdagende opdrachten

- U1** Gegeven is de vergelijking $2^t = 8$. De oplossing van de vergelijking is ${}^2\log(8)$, dat is de groeitijd die nodig is om de hoeveelheid 8 keer zo groot te maken bij een groeifactor van 2.
- a** Wat is in termen van groeitijd de betekenis van ${}^2\log(16)$?
- b** Laat zien dat geldt ${}^2\log(8) + {}^2\log(16) = {}^2\log(8 \cdot 16)$.
- c** Leg met behulp van groeitijden uit dat moet gelden ${}^2\log(5) + {}^2\log(7) = {}^2\log(5 \cdot 7)$.
- d** Leg met behulp van groeitijden uit dat moet gelden ${}^2\log(a) + {}^2\log(b) = {}^2\log(a \cdot b)$.

8.2 Logaritmen berekenen

Je leert

- hoe je logaritmen met je rekenmachine berekent
- hoe je een logaritme herschrijft naar een logaritme met een ander grondtal

Leerroutes

- ondersteunend: 11–12–013–14–15–16–17–018
- doorlopend: 11–12–13–14–15–16–17–18
- uitdagend: 11–13–14–15–16–17–18–U2

In ${}^g\log(a)$ kun je verschillende getallen voor a en g invullen. Dat geeft niet altijd een zinvolle uitdrukking. Zo zijn ${}^5\log(-5)$, ${}^3\log(0)$ en ${}^1\log(4)$ niet zinvol.

- Leg uit waarom.



- 11
- Zoek de log-toets op je rekenmachine en benader $\log(2)$, $\log(5)$, $\log(10)$, $\log(25)$ en $\log(100)$. Rond af op twee decimalen.
 - Voor welke waarde van x is $\log(x) = 3$?
 - Waaruit blijkt dat 10 het grondtal van de log-toets op je rekenmachine is?
 - Bereken $\log(1\,000\,000)$ en $\log(0,0001)$ en verklaar de uitkomsten.

Theorie

Op rekenmachines zit een log-toets. Op de meeste rekenmachines wordt daarbij het grondtal niet vermeld. Het grondtal bij deze logaritme is 10. Als ergens $\log(\dots)$ staat, wordt ${}^{10}\log(\dots)$ bedoeld.

Voorbeeld 1

Bereken $\log(0,01)$ en $\log(50)$ indien nodig afgerond op twee decimalen en controleer je antwoorden.

Oplossing

Met de rekenmachine: $\log(0,01) = -2$;
controle $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$
 $\log(50) \approx 1,70$; controle $10^{1,70} \approx 50$.

Voorbeeld 2

Los $10^{5x} = 17$ exact op en geef ook een benadering in twee decimalen nauwkeurig.

Oplossing

$10^{5x} = 17$ dus $5x = {}^{10}\log(17) = \log(17)$
dus $x = \frac{1}{5} \cdot \log(17)$
Op twee decimalen afgerond $x \approx 0,25$.

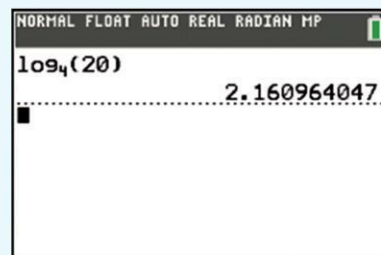
- 12
- Bereken met je rekenmachine $\log(3)$, $\log\left(\frac{1}{1000}\right)$, $\log(1)$ en $\log(123456)$.
 - Los $10^{2x} = 5$ exact op. Geef ook een benadering in twee decimalen.

Ondersteunende route → maak opdracht 013

- 13** De exacte oplossing van $10^x = 5$ is $x = \log(5)$. Als je dit antwoord invult in de vergelijking $10^x = 5$ krijg je $10^{\log(5)} = 5$.
- Geef zonder de rekenmachine te gebruiken de uitkomsten van $10^{\log(564)}$, $10^{\log(0,1)}$ en $10^{\log(0,08)}$.
 - Schrijf de getallen 14, 400 en 0,003 als een macht met grondtal 10.
- 14** De oplossing van de vergelijking $5^x = 12$ is $x = {}^5\log(12)$. Je kunt de getallen 5 en 12 beide schrijven als macht van 10. Zo is $5 = 10^{\log(5)}$ en is $12 = 10^{\log(12)}$.
- Laat zien dat uit de vergelijking $5^x = 12$ volgt dat $10^{x \cdot \log(5)} = 10^{\log(12)}$.
 - Druk de oplossing x uit in $\log(5)$ en $\log(12)$.
 - Waarom volgt uit deze berekening dat ${}^5\log(12) = \frac{\log(12)}{\log(5)}$?

Theorie

Logaritmen als ${}^4\log(20)$ kun je met de rekenmachine benaderen. Met behulp van de rekenregel ${}^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$ kun je ${}^4\log(20)$ benaderen door gebruik te maken van de 'log-toets' op je rekenmachine. Op je rekenmachine bevindt zich ook een optie om logaritmen te benaderen zonder gebruik te maken van deze rekenregel.



Voorbeeld 1

Bereken ${}^7\log(4)$ en ${}^{\frac{1}{2}}\log(0,7)$ in twee decimalen.

Oplossing

$${}^7\log(4) = \frac{\log(4)}{\log(7)} = 0,712... \approx 0,71$$

$${}^{\frac{1}{2}}\log(0,7) = \frac{\log(0,7)}{\log(\frac{1}{2})} = 0,514... \approx 0,51$$

Voorbeeld 2

Los de vergelijking $5^t = 23$ op. Geef ook een benadering in twee decimalen.

Oplossing

Uit $5^t = 23$ volgt $t = {}^5\log(23)$. Dit is het exacte antwoord. Een benadering in twee decimalen vind je met

$$t = \frac{\log(23)}{\log(5)} = 1,948... \approx 1,95.$$

→ Instructie rekenmachine | Logaritmen

15

- 

16

-

17

- a**

aan dat $x = {}^5\log(12) = \frac{{}^b\log(12)}{{}^b\log(5)}$

Th

Vc

$g|c$

M
lo

Vc

3

O

91

Or

18

$${}^8\log(128) = 2\frac{1}{3}.$$

- b**

Ui

Ondersteunende opdrachten

013 De oplossing van $2^x = 32$ is $x = 5$. Dus $2^5 = 32$.

- Vul in: De oplossing van $2^x = 25$ is $x = \dots \log(\dots)$.
Dus $2^{\dots} = 25$.
- Controleer met je rekenmachine dat $\log(5) = 0,698 \dots$
- Ga met je rekenmachine na dat $10^{0,698 \dots} = 5$.
- Blijkbaar is $10^{\log(5)} = 5$.
Ga met je rekenmachine na dat $10^{\log(247)} = 247$.
- Kies een positief getal a en ga na dat $10^{\log(a)} = a$.
- Met de regel uit opdracht e kun je elk getal schrijven als macht van 10. Zo is $7 = 10^{\log(7)}$.
Schrijf de getallen 29, 600 en 0,2 als een macht met grondtal 10. Geef de exponenten als exact getal en ook als benadering in twee decimalen.

018 Op het blaadje wordt ${}^4\log(128)$ berekend door gebruik te maken van de rekenregel ${}^g\log(a) = \frac{{}^b\log(a)}{{}^b\log(g)}$

- a** In de berekening is gekozen om het grondtal 4 van de logaritme te wijzigen in 2.
Leg uit waarom dat in dit geval handig is.
- b** Maak de berekening op het blaadje af.
- c** Nu ga je ${}^9\log(27)$ met dezelfde regel berekenen.
Hiervoor moet je een grondtal b kiezen zodat ${}^b\log(27)$ en ${}^b\log(9)$ zonder rekenmachine te berekenen zijn.
Leg uit dat $b = 3$ in dat geval een goede keuze is.
- d** Vul in en bereken ${}^9\log(27) = \frac{{}^3\log(27)}{{}^3\log(9)} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$
- e** Bereken ${}^{16}\log(64)$, ${}^{\frac{1}{2}}\log(27)$, ${}^{\frac{1}{2}}\log(8)$ door op andere grondtallen over te gaan.

$$4 \log(128) = \frac{2 \log(128)}{2 \log(4)}$$

$$2 \log(128) = 7 \text{ want } 2^7 = 128$$

$$2 \log(4) = 2 \text{ want } 2^2 = 4$$

$$\text{dus } 4 \log(128) = \frac{7}{2} = 3.5$$

Uitdagende opdrachten

U2 Bewijs.

- $$\begin{aligned} \mathbf{a} \quad & \frac{{}^3\log(32)}{{}^3\log(4)} = 2\frac{1}{2} \\ \mathbf{b} \quad & {}^{12}\log(20) = \frac{1}{{}^{20}\log(12)} \\ \mathbf{c} \quad & {}^{\frac{1}{2}}\log(15) = -{}^2\log(15) \end{aligned}$$

8.3 Grafieken van logaritmische functies

Je leert

- grafieken van logaritmische functies onderzoeken
- hoe je het domein, bereik, nulpunt en asymptoten bij logaritmische functies bepaalt

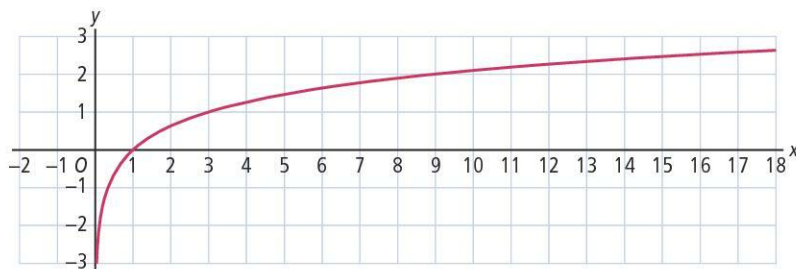
Leerroutes

- ondersteunend: 19—20—21—22—23—024—25
- doorlopend: 19—20—21—22—23—24—25
- uitdagend: 19—21—22—24—25—U3—U4

De grafiek hoort bij een functie

$$f(x) = {}^8\log(x).$$

- Hoe kun je met behulp van de grafiek nagaan welke waarde het grondtal g heeft?



19 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x$ en $g(x) = {}^2\log(x)$.

a Vul in.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	...	...	...	...	...	...

b Vul in.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$g(x)$	...	...	...	...	...	...

- c** Schets de grafieken van f en g in één figuur.
- d** In welke lijn moet je de grafiek van f spiegelen om de grafiek van g te krijgen?
- e** Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f en welke lijn is de asymptoot van de grafiek van g ?

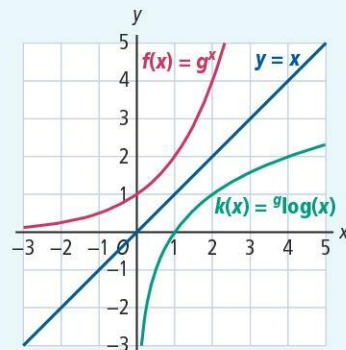
20 Gegeven zijn de functies $f(x) = 5^x$ en $k(x) = {}^5\log(x)$.

- a** Plot en schets de grafieken van f en k .
- b** Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as.
- c** Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van k met de x -as.
- d** Geef het domein en het bereik van beide functies.
- e** Elk van deze grafieken heeft een asymptoot. Geef een vergelijking van elke asymptoot.

Theorie

De grafieken van $f(x) = g^x$ en $k(x) = {}^g\log(x)$ zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

functie:	$f(x) = g^x$	$k(x) = {}^g\log(x)$
domein:	$D_f = \mathbb{R}$	$D_k = \langle 0, \rightarrow \rangle$
bereik:	$B_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$	$B_k = \mathbb{R}$
asymptoot:	$y = 0$	$x = 0$
snijpunt assen:	$(0, 1)$	$(1, 0)$



- 21** Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^{1,2}\log(x)$ en $g(x) = {}^{0,8}\log(x)$.
- Plot de grafieken van f en g . Welk punt ligt op beide grafieken?
 - De grafieken van h en k zijn de spiegelbeelden van de grafieken van f en g bij spiegelen in de lijn $y = x$. Geef de functievoorschriften van h en k .
 - Voor welke waarden van het grondtal g is de functie $m(x) = {}^g\log(x)$ stijgend en voor welke waarden van g is de functie dalend?

Theorie

Voor een logaritmische functie geldt, net als bij exponentiële functies, dat het grondtal g altijd positief is, maar niet gelijk aan 1.

Voor $0 < g < 1$ is de functie $f(x) = {}^g\log(x)$ dalend en voor $g > 1$ stijgend.

Voorbeeld

stijgend	dalend
$f(x) = {}^{1,2}\log(x)$	$k(x) = {}^{0,9}\log(x)$
$g(x) = {}^{\frac{3}{2}}\log(x)$	$l(x) = {}^{\frac{3}{4}}\log(x)$
$h(x) = {}^{\sqrt{2}}\log(x)$	$m(x) = {}^{0,01}\log(x)$

- 22** Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^3\log(5 - x)$, $g(x) = {}^3\log(x)$ en $h(x) = {}^{0,5}\log(x)$.
- Geef van functie g en h aan of ze stijgend of dalend zijn.
 - Op het blaadje staat een begin van een redenering waarom de functie $f(x) = {}^3\log(5 - x)$ dalend is. Vul bij elke stap op de puntjes het woord 'af' of 'toe' in.
 - De functie $f(p) = {}^{0,5}\log(p)$ is dalend, want het grondtal g is kleiner dan 1. Leg uit hoe stap 2 op het blaadje moet worden aangepast als je het grondtal 3 in 0,5 verandert.
 - Schrijf de redenering van stap 3 op voor $f(x) = {}^{0,5}\log(5 - x)$.

•	$k(x) = 5 - x$ is dalend, want	1
•	als x toeneemt, neemt $5 - x$...	
•	$f(p) = {}^3\log(p)$ is stijgend,	2
•	dus als p toeneemt, neemt	
•	${}^3\log(p)$... en als p afneemt,	
•	neemt ${}^3\log(p)$...	
•	$f(x) = {}^3\log(5 - x)$ is dalend,	3
•	want als x toeneemt, neemt	
•	$5 - x$... en dus neemt	
•	$f(x) = {}^3\log(5 - x)$...	

23 Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^2\log(x)$, $g(x) = {}^2\log(x + 3)$ en $h(x) = {}^{0,3}\log(x)$.

H

- Geef van elke functie aan of deze stijgend of dalend is.
- Geef het domein en de verticale asymptoot van f en h .
- Hoe ontstaat de grafiek van g uit de grafiek van f ?
- Geef het domein van g .
- Welke lijn is de verticale asymptoot van de grafiek van g ?

Theorie

Het domein van een functie $g(x) = {}^s\log(x + b)$ volgt uit $x + b > 0$, dus het domein is $x > -b$ of $\langle -b, \rightarrow \rangle$.

De verticale asymptoot heeft vergelijking $x = -b$.

Het nulpunt van g volgt uit $x + b = 1$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $g(x) = {}^3\log(2x + 8)$.

Bepaal het domein, het nulpunt en de verticale asymptoot van de grafiek van g .

Oplossing

Het domein volgt uit $2x + 8 > 0$, dus het domein is $x > -4$.

Uit ${}^3\log(2x + 8) = 0$ volgt $2x + 8 = 3^0 = 1$.

Het nulpunt is $x = -3\frac{1}{2}$.

Een verticale asymptoot volgt uit $2x + 8 = 0$, dus dat is de lijn $x = -4$.

Ondersteunende route → maak opdracht 024

24 Geef het domein, het nulpunt en een vergelijking van de asymptoot van de grafiek.

H

- $m(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$
- $j(x) = {}^5\log(x - 7)$
- $k(x) = {}^3\log(2x + 5)$

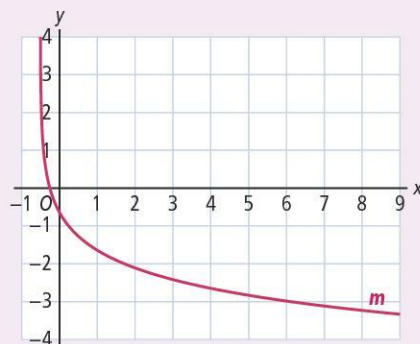
25 Gegeven is de functie $h(x) = -7 + {}^3\log(10 + x)$.

- Geef het domein van h .
- Geef een vergelijking van de asymptoot van de grafiek van h .

Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4

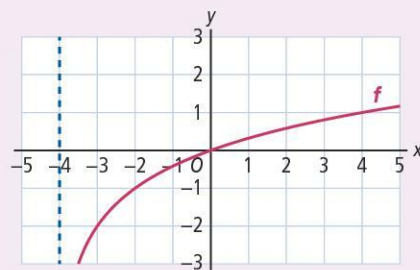
Ondersteunende opdrachten

- 024** Gegeven is de functie $m(x) = \frac{1}{3}\log(4x + 2)$.
- a** Voor het domein van m moet gelden $4x + 2 > 0$.
Geef het domein van m .
 - b** Voor het nulpunt van m geldt $\frac{1}{3}\log(4x + 2) = 0$.
Bereken het nulpunt van m .
 - c** De verticale asymptoot van de grafiek volgt uit $4x + 2 = 0$.
Geef een vergelijking van de verticale asymptoot.
- Geef van de volgende functies het domein, het nulpunt en een vergelijking van de asymptoot van de grafiek.
- d** $f(x) = \frac{1}{4}\log(x)$
 - e** $g(x) = \frac{1}{3}\log(x - 5)$
 - f** $h(x) = \frac{1}{5}\log(3x + 6)$



Uitdagende opdrachten

- U3** Gegeven is de grafiek van een functie $f(x) = p + {}^2\log(x + q)$. Gegeven is dat de lijn $x = -4$ de asymptoot is van de grafiek van f en dat de grafiek door de oorsprong gaat. Onderzoek met behulp van een berekening of het punt $(12, 2)$ op de grafiek van f ligt.



- U4** Gegeven is de functie $f(x) = {}^2\log(x^2 - x)$.
- a** Beredeneer dat de grafiek van f twee asymptoten heeft en geef van beide asymptoten een vergelijking.
 - b** De grafiek van f snijdt de x -as in de punten A en B .
Bereken exact de afstand tussen A en B .

8.4 Rekenregels voor logaritmen

Je leert

- wat de rekenregels van logaritmen zijn

Leerroutes

- ondersteunend: 26—27—028—28—30—31—032—32
- doorlopend: 26—27—28—29—30—31—32—33
- uitdagend: 26—27—28—29—30—32—33—U5

Gegeven zijn de functies:

$$f(x) = 3 \cdot {}^4\log(x) - {}^4\log(6),$$

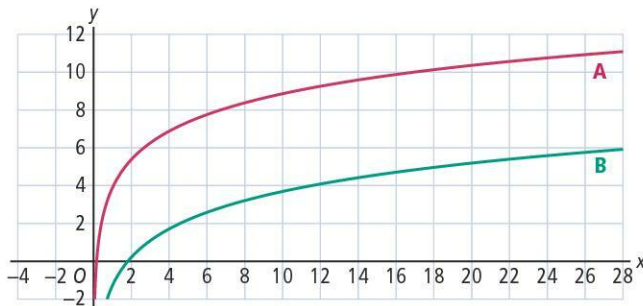
$$g(x) = {}^4\log\left(\frac{1}{6}x^3\right),$$

$$h(x) = 3 \cdot ({}^4\log(x) + {}^4\log(6)) \text{ en}$$

$$k(x) = {}^4\log(216x^3).$$

Tevens zijn twee grafieken gegeven.

- Welke functie hoort bij welke grafiek?
- Wat valt je op?



- 26** a $x = {}^3\log(11)$ is de exacte oplossing van $3^x = 11$.
Wat is dus de waarde van $3^{{}^3\log(11)}$?
- b Omgekeerd geldt $4 = 6^{{}^6\log(4)}$ of ook $4 = (0,3)^{{}^{0,3}\log(4)}$. Zo kun je 4 schrijven als een macht van 6 en ook als een macht van 0,3.
Schrijf op dezelfde manier het getal 7 als macht van 2, als macht van 12 en als macht van p .

Net als voor machten en exponenten gelden ook voor logaritmen rekenregels. Die regels worden afgeleid in deze paragraaf. Bij de afleiding gebruik je steeds de basisregel van logaritmen 'uit $g^b = a$ volgt $b = {}^g\log(a)$ ' en omgekeerd.

- 27** Op het blaadje is een begin gemaakt met het bewijs dat ${}^2\log(3) + {}^2\log(7) = {}^2\log(3 \cdot 7) = {}^2\log(21)$.
- a Vul in regel 3 op de puntjes een macht van 2 in.
- b Leg uit dat uit regel 3 volgt $p + q = {}^2\log(21)$.
- c Waarom heb je nu bewezen dat ${}^2\log(3) + {}^2\log(7) = {}^2\log(21)$?
- d ${}^5\log(7) + {}^5\log(70) = {}^5\log(a)$. Welke waarde heeft a ?
- e Bereken de waarde van b in ${}^5\log(70) - {}^5\log(7) = {}^5\log(b)$ door deze vergelijking zo te schrijven dat je de manier van opdracht a en opdracht b kunt gebruiken.
- f Toon aan: $4 \cdot {}^3\log(2) = {}^3\log(16)$.

•	Stel ${}^2\log(3) = p$ en ${}^2\log(7) = q$	1
•	Dan geldt: $3 = 2^p$ en $7 = 2^q$	2
•	en $21 = 3 \cdot 7 = 2^p \cdot 2^q = \dots$	3

Theorie

Voor het rekenen met logaritmen gelden de volgende **rekenregels**.

$${}^s\log(a) + {}^s\log(b) = {}^s\log(a \cdot b)$$

$${}^s\log(a) - {}^s\log(b) = {}^s\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$p \cdot {}^s\log(a) = {}^s\log(a^p)$$

$$g^{{}^s\log(a)} = a$$

$${}^s\log(m) = \frac{{}^n\log(m)}{{}^n\log(g)}$$

met $g > 0$, $g \neq 1$, $a > 0$, $b > 0$, $n > 0$, $n \neq 1$ en $m > 0$.

Voorbeeld 1

Schrijf als één logaritme ${}^4\log(3) + \frac{1}{2} \cdot {}^4\log(36)$.

Oplossing

$${}^4\log(3) + \frac{1}{2} \cdot {}^4\log(36) =$$

$${}^4\log(3) + {}^4\log(36^{\frac{1}{2}}) =$$

$${}^4\log(3) + {}^4\log(6) =$$

$${}^4\log(18)$$

Voorbeeld 2

Schrijf als één logaritme $3 \cdot {}^2\log(7x) - {}^2\log(7)$.

Oplossing

$$3 \cdot {}^2\log(7x) - {}^2\log(7) =$$

$${}^2\log(7x)^3 - {}^2\log(7) =$$

$${}^2\log(343x^3) - {}^2\log(7) =$$

$${}^2\log\left(\frac{343x^3}{7}\right) = {}^2\log(49x^3)$$

Ondersteunende route → maak opdracht 028

28 Schrijf als één logaritme.

H

a ${}^2\log(7) + {}^2\log(3)$

b ${}^7\log(42) - {}^7\log(3) + {}^7\log(2)$

c ${}^7\log(42) - ({}^7\log(3) + {}^7\log(2))$

d $2 \cdot {}^5\log(4) + {}^5\log(a)$

e ${}^5\log(a) + {}^5\log(a+1)$

f $3 \cdot {}^{0,5}\log(p) - {}^{0,5}\log(p^2)$

29 Er geldt: $-{}^2\log(9) + {}^2\log(18) = 1$.

a Joost toont dat aan door gebruik te maken van de derde en de eerste rekenregel uit de theorie op deze pagina.

Laat zien hoe Joost dat heeft gedaan.

b Jessica maakt op een handige manier gebruik van de tweede rekenregel.

Hoe heeft zij de berekening uitgevoerd?

30 Gegeven zijn de functies $f(x) = \log(x)$, $g(x) = \log(1000x)$ en $h(x) = \log(0,01x)$.

- Toon aan dat $g(x) = 3 + f(x)$.
- Toon aan dat $h(x) = -2 + f(x)$.
- Er geldt $h(x) = a + g(x)$.
Bereken de waarde van a .
- Schrijf als één logaritme $k(x) = 4 + f(x)$.
- Schrijf als één logaritme $m(x) = 6 + {}^2\log(x)$.

31 Gegeven zijn de functies $f(x) = 5 \cdot \log(x)$ en $g(x) = 2 \cdot \log(x)$.
Voor de getallen a en b geldt $f(a) + g(b) = 3$, dus
 $5 \cdot \log(a) + 2 \cdot \log(b) = 3$.

- Laat zien dat geldt $\log(a^5 \cdot b^2) = 3$.
- Schrijf het verband tussen a^5 en b^2 zonder logaritme.

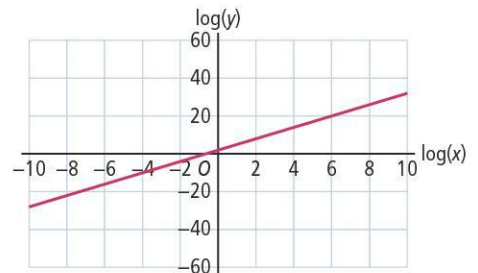
Ondersteunende route → maak opdracht O32

- 32** **H**
- Het verband tussen de variabelen R en S voldoet aan de formule $4 \cdot \log(S) - 2 \cdot \log(R) = 1$.
Toon algebraïsch aan dat $S^4 = 10R^2$.
 - Het verband tussen de variabelen P en Q voldoet aan de formule ${}^2\log(P) + 2 \cdot {}^2\log(Q) = -1$.
Schrijf het verband tussen deze variabelen als een formule zonder logaritmen.

33 Gegeven is de grafiek bij de formule $\log(y) = 3 \cdot \log(x) + 2$.
Kijk goed naar de aanduiding bij de assen.

- Laat zien dat de formule klopt bij de grafiek.
- Schrijf de formule in een vorm zonder logaritme.

Uitdagende route → maak opdracht U5



Ondersteunende opdrachten

- 028** Als je een uitdrukking met logaritmen korter wilt schrijven, moet je niet alleen rekening houden met de rekenregels, maar ook met de rekenvolgorde.

Gegeven is ${}^3\log(36) - ({}^3\log(6) + {}^3\log(1\frac{1}{2}))$.

- Welk deel van de uitdrukking moet je als eerste gaan herschrijven en welke rekenregel gebruik je hiervoor?
- Schrijf de uitdrukking als één logaritme.
- Gegeven $3 \cdot ({}^3\log(10) - {}^3\log(5))$.
Welk deel van de uitdrukking moet je als eerst gaan herschrijven en welke rekenregel gebruik je hiervoor?
- Welke rekenregel kun je als tweede stap gebruiken?
- Schrijf als één logaritme.

Voor de volgorde bij berekeningen geldt:

- eerst uitrekenen wat tussen haakjes staat
- dan vermenigvuldigen
- dan optellen en aftrekken van links naar rechts.

- 032** Tussen de variabelen I en J geldt het verband $7 \cdot {}^3\log(I) - 4 \cdot {}^3\log(J) = -2$.

Je gaat aantonen dat geldt $I^7 = \frac{J^4}{9}$. Op het blaadje is daarmee een begin gemaakt.

- Welke rekenregel is gebruikt bij stap 1?
- Welke rekenregel is gebruikt bij stap 2? Vul in.
- Wat moet er op de puntjes bij stap 3 staan?
- Toon aan dat geldt $I^7 = \frac{J^4}{9}$

	$7 \cdot {}^3\log(I) - 4 \cdot {}^3\log(J) = -2$	
	${}^3\log(I^7) - {}^3\log(J^4) = -2$	1
	${}^3\log(\frac{\dots}{\dots}) = -2$	2
	$\frac{\dots}{\dots} = 3 \cdot \dots = \frac{1}{9}$	3

Uitdagende opdrachten

- U5** Gegeven $\log(2) \approx 0,3010$ en $\log(3) \approx 0,4771$.
- Bereken met dit gegeven en zonder rekenmachine $\log(4)$, $\log(6)$, $\log(8)$ en $\log(9)$.
 - Toon aan dat $\log(5) = 1 - \log(2)$.
 - Voor welke getallen tussen 10 en 21 kun je met deze gegevens de 10-logaritme berekenen?

8.5 Formules herleiden

Je leert

- hoe je een logaritmische formule herleidt tot een exponentiële formule
- hoe je een exponentiële formule herleidt tot een logaritmische formule

Leerroutes

- ondersteunend: 34—035—36—037—37—38—39—40
- doorlopend: 34—35—36—37—38—39—40—41
- uitdagend: 34—35—37—38—39—40—41—U6

Een bepaalde heteluchtballon kan bij buitentemperatuur van 0°C ongeveer 334 kg tillen. Als de temperatuur 10 graden stijgt, wordt dit gewicht 12% minder. Er bestaat een verband tussen het gewicht G in kg en de temperatuur T in graden Celcius.

- Hoe kun je aan de hand van het gewicht dat de ballon kan tillen de buitentemperatuur bepalen?



- 34** Een batterij verliest bij gebruik 4% van zijn lading per uur. De batterij is onbruikbaar als er minder dan 20% van de lading over is.
- Stel een formule op voor het percentage P van de lading na t uren gebruik.
 - Bereken algebraïsch het aantal uren dat de batterij te gebruiken is. Rond af op hele uren.
 - Bereken algebraïsch de tijdstippen in uren nauwkeurig waarop er tussen 50% en 30% van de oorspronkelijke lading over is.
 - Toon aan dat geldt $t = {}^{0,96}\log\left(\frac{P}{100}\right)$.



Theorie

Een logaritmische formule kun je herleiden tot een exponentiële formule. Omgekeerd kun je een logaritmische formule tot een exponentiële formule herleiden. Je gebruikt de basisregel:
uit $g^b = a$ volgt $b = {}^g\log(a)$
en omgekeerd: uit ${}^g\log(a) = b$ volgt $a = g^b$.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $R = 2 + 3 \cdot 5^t$.
Druk t uit in R .

Oplossing

$$\begin{aligned} 2 + 3 \cdot 5^t &= R \\ 3 \cdot 5^t &= R - 2 && (\text{links en rechts } - 2) \\ 5^t &= \frac{1}{3}R - \frac{2}{3} && (\text{links en rechts } : 3) \\ t &= {}^5\log\left(\frac{1}{3}R - \frac{2}{3}\right) && (g^b = a \text{ geeft } b = {}^g\log(a)) \end{aligned}$$

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $Z = 4 + {}^2\log(3a)$.
Druk a uit in Z .

Oplossing

$$\begin{aligned} 4 + {}^2\log(3a) &= Z \\ {}^2\log(3a) &= Z - 4 && (\text{links en rechts } - 4) \\ 3a &= 2^{Z-4} && ({}^g\log(a) = b \text{ geeft } a = g^b) \\ a &= \frac{1}{3} \cdot 2^{Z-4} && (\text{links en rechts } : 3) \end{aligned}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 035

35 Druk t uit in N .

- H**
- a $N = 3 \cdot 4^t$
 - b $N = -16 + 4 \cdot 5^t$
 - c $3N - 2 = \frac{1}{12} \cdot 4^t$
 - d $4N \cdot 6^t = 5$
 - e $7^{tN} = 10$
 - f $3^t = 9^N$

36 Gegeven is de formule $T = {}^4\log(2a)$.

- a Laat zien dat je de formule ook kunt schrijven als $a = \frac{1}{2} \cdot 4^T$.
- b Laat zien dat je de formule ook kunt schrijven als $a = 2^{2T-1}$.

Ondersteunende route → maak opdracht 037

37 Druk p uit in q .

- H**
- a $q = -2 + {}^5\log(p)$
 - b $q = 1 + \frac{1}{2} \cdot {}^4\log(p)$
 - c $q = \log(6p - 12)$
 - d $6 = {}^5\log(p) + {}^5\log(q)$
 - e $10 = \log\left(\frac{p}{q}\right)$
 - f $4q \cdot {}^3\log(p) = 8$

38 Een populatie bacteriën verdubbelt zich per dag. Op het tijdstip $t = 0$ is het aantal bacteriën gelijk aan 600.

- a Geef een formule N die bij dit groeiproces hoort. Neem de tijd t in dagen.
- b Geef een formule die t in N uitdrukt.
- c Na hoeveel dagen zijn er 30 000 bacteriën? Geef eerst de exacte waarde en daarna een benadering in twee decimalen.



- 39** a Vul in: $2 = {}^3\log(3^2) = {}^3\log(\dots)$
 b Gegeven is de functie $f(x) = 2 + {}^3\log(x + 5)$.
 Het functievoorschrift van f is te herleiden tot $f(x) = {}^3\log(ax + b)$.
 Bereken exact de waarden van a en b .
 c Herleid het functievoorschrift $g(x) = -2 + {}^2\log(10 - x)$ tot de vorm $g(x) = {}^2\log(ax + b)$.

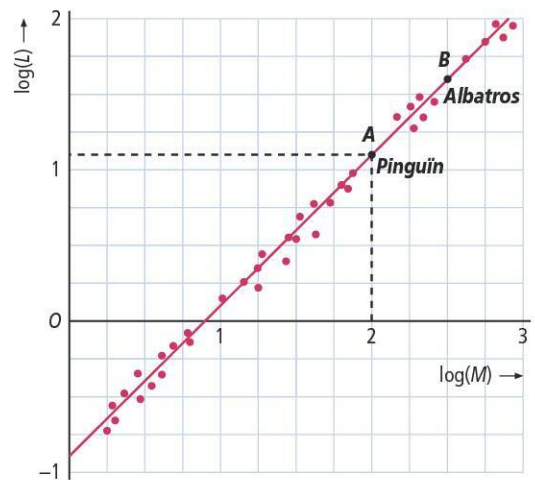
- 40** Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^5\log(4x)$,
 $g(x) = 2 \cdot {}^5\log\left(\frac{1}{x^2}\right)$ en $h(x) = f(x) + g(x)$.

Toon met behulp van de rekenregels aan dat geldt
 $h(x) = 2 \cdot {}^5\log(2) - 3 \cdot {}^5\log(x)$.

- 41** Als een ei wordt uitgebreed, verliest het embryo gedurende het broeden water. De massa van het ei in grammen noem je M . De hoeveelheid water in grammen die verloren gaat noem je L . In de grafiek is het verband tussen $\log(M)$ en $\log(L)$ weergegeven. De grafiek is gebaseerd op data die verkregen zijn van 65 soorten eieren.

De meetpunten liggen min of meer op een rechte lijn.

- a Bij punt A horen de meetgegevens van de *pinguïn*.
 Hoeveel gram is de massa van een ei van de pinguïn en hoeveel gram bedraagt het waterverlies van het embryo?
 b Ongeacht de lengte van broedtijd en de massa van het ei is het verlies aan water van het embryo ongeveer 13% van de massa van het ei. Ga na of dit voor de *pinguïn* geldt.
 c Klopt dit ook voor de *albatros* (punt B)?
 d Een formule die bij de rechte lijn hoort is $\log(L) = 1,031 \cdot \log(M) - 0,885$.
 Deze formule is ook te schrijven als $L = a \cdot M^b$.
 Bereken algebraïsch de waarden van a en b in drie decimalen.



Uitdagende route → maak opdracht U6

Ondersteunende opdrachten

035

Gegeven is de formule $y = 4 \cdot 5^x - 8$.

Je gaat x uitdrukken in y , hiervoor moet je gebruik maken van de basisregel 'uit $g^b = a$ volgt $b = {}^g\log(a)$ '. Om deze te kunnen gebruiken moet de formule eerst herleid worden tot de vorm $g^b = a$. Op het blaadje is een begin gemaakt.

- a Vul het blaadje verder in.
- b Gebruik de basisregel om vervolgens x uit te drukken in y .
- c Gegeven is de formule $5 \cdot 2^{xy} = 45$. Je gaat opnieuw x uitdrukken in y .
Vul in: $2^{xy} = \dots$
- d Schrijf xy als een logaritme.
- e Druk x uit in y .

Druk x uit in y .

- f $y = 2 \cdot 5^x$
- g $2y - 7 = \frac{1}{10} \cdot 3^x$
- h $2y \cdot 3^x = 9$
- i $5^{xy} = 12$
- j $y = -12 + 3 \cdot 4^x$
- k $4^x = 16^y$

	$y = 4 \cdot 5^x - 8$			
	$4 \cdot 5^x - 8 = y$			1
	$4 \cdot 5^x = \dots$			2
	$5^x = \dots$			3

037

Gegeven is de formule $y = 4 \cdot \log(x) - 8$.

Je gaat x uitdrukken in y , hiervoor moet je gebruik maken van de basisregel 'uit $b = {}^g\log(a)$ volgt $g^b = a$ '. Om deze te kunnen gebruiken moet de formule eerst herleid worden tot de vorm $b = {}^g\log(a)$.

- a Vul in: $\log(x) = \dots$
- b Wat is hier het grondtal?
- c Gebruik de basisregel om x uit te drukken in y .

Uitdagende opdrachten

U6

- a Het verband tussen de variabelen K en M is gegeven door ${}^9\log(K) + {}^{27}\log(M) = 2$.
Druk K uit in M .
- b Tussen de variabelen R en S bestaat het verband ${}^2\log(R) = 4,45 - 2,31S$. Deze formule is ook te schrijven als $R = b \cdot g^S$.
Bereken algebraïsch de waarden van b en g in twee decimalen.

8.6 Vergelijkingen en ongelijkheden

Je leert

- wat een halveringstijd en een verdubbelingstijd is
- hoe je een vergelijking met een logaritme exact oplost
- hoe je een ongelijkheid met een logaritme oplost

Leerroutes

- ondersteunend: 42–43–044–44–45–47–48–49
- doorlopend: 42–43–44–45–46–47–48–49
- uitdagend: 42–43–44–45–47–48–49–U7

Door de aanwezige hoeveelheid C14 te meten kun je bepalen hoelang geleden het gevonden organisme gestorven is. Elke 5730 jaar halveert de hoeveelheid C14. In 2018 werd het oudste kindergraf ooit in Nederland opgegraven. Het skelet was zo'n 6000 jaar oud.

- Hoeveel procent van de oorspronkelijke stof C14 was hier nog aanwezig?



42 Los exact op.

a ${}^3\log(x) = \frac{1}{2}$

c ${}^4\log\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}$

b ${}^{\frac{1}{2}}\log(x) = 3$

d ${}^6\log(x^3) = 4$

43 Gegeven is de vergelijking ${}^5\log(3x - 7) = 2$.

a Leg uit dat $3x - 7 = 25$.

b Los de vergelijking exact op.

Theorie

Van de logaritmische vergelijking ${}^g\log(x) = c$ is $x = g^c$ de exacte oplossing. Met behulp van deze regel en de rekenregels voor logaritmen los je logaritmische vergelijkingen exact op.

Controleer zo nodig of je oplossing voldoet.

Omgekeerd is $c = {}^g\log(x)$ de exacte oplossing van $g^c = x$.

Voorbeeld 1

Los exact op
 $2^{1-3x} = 7$.

Oplossing

$$1 - 3x = {}^2\log(7)$$

$$-3x = -1 + {}^2\log(7)$$

$$x = \frac{-1 + {}^2\log(7)}{-3}$$

$$\left(= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(7)\right)$$

Voorbeeld 2

Los exact op
 ${}^3\log(x^2 - 7) = {}^3\log(6x)$.

Oplossing

$$x^2 - 7 = 6x$$

$$x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$(x + 1)(x - 7) = 0$$

$$x = -1 \text{ of } x = 7$$

${}^3\log(6 \cdot -1)$ bestaat niet dus alleen $x = 7$ voldoet.

Voorbeeld 3

Los exact op
 ${}^4\log(x) + {}^{16}\log(x) = 3$.

Oplossing

$${}^4\log(x) + \frac{{}^4\log(x)}{{}^4\log(16)} = 3$$

$${}^4\log(x) + \frac{1}{2} \cdot {}^4\log(x) = 3$$

$$1\frac{1}{2} \cdot {}^4\log(x) = 3$$

$${}^4\log(x) = 2$$

$$x = 4^2 = 16$$

44 Los exact op.

H **a** $^3\log(2x - 3) = 4$ **e** $^{\frac{1}{3}}\log(4x) - ^{\frac{1}{3}}\log(6) = -2$

b $2^{-x+7} = 5$ **f** $^5\log\left(\frac{1}{x}\right) = 2 + ^5\log(x)$

c $\log(2x - 4) - \log(7) = 1$ **g** $5^{4x+2} = 1000$

d $^2\log(x - 3) = 1 - ^2\log(x + 3)$ **h** $^{16}\log(3x + 4) + ^{64}\log(3x + 4) = 2\frac{1}{2}$

45 Gegeven zijn de grafieken van $f(x) = ^4\log(x)$ en $g(x) = ^4\log(-x)$ en de lijn $y = 1\frac{1}{2}$.

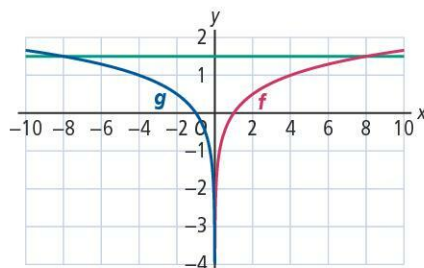
a Geef het domein van f en het domein van g .

b Los exact op $f(x) = 1\frac{1}{2}$.

c Voor welke waarden van x geldt $f(x) < 1\frac{1}{2}$?

d Voor welke waarden van x is $g(x) < 1\frac{1}{2}$?

e Los exact op $f(x) \leq -2$.



Theorie

Bij het oplossen van een ongelijkheid los je eerst de bijbehorende vergelijking op. Voor het trekken van de juiste conclusie over de oplossing van de ongelijkheid speelt ook het domein van de functie een belangrijke rol. Een schets of plot van de grafieken kan daarbij helpen.

Voorbeeld

Los exact op $^4\log(x - 5) \leq 2$.

Oplossing

$$^4\log(x - 5) = 2$$

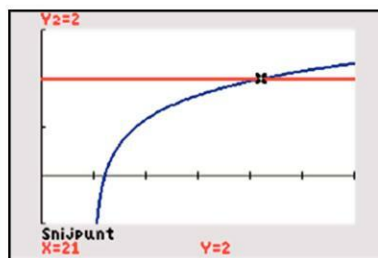
$$x - 5 = 4^2$$

$$x = 21$$

In de plot staan de grafiek van $f(x) = ^4\log(x - 5)$ en de lijn $y = 2$.

Het domein van f is $\langle 5, \rightarrow \rangle$.

De oplossing van de ongelijkheid is $5 < x \leq 21$.



46 Gegeven is de functie $f(x) = ^{\frac{1}{2}}\log(x + 2) + 4$ en de lijn $y = 5$.

H **a** Plot en schets de grafieken in één assenstelsel.

b Geef het domein van f .

c Los exact op $f(x) > 5$.

47 Los de ongelijkheden exact op.

- H**
- a** ${}^2\log(2x + 1) > 5$
- b** $-2 + 3 \cdot \log(x) \leq 1$

48 Bij een exponentieel groeiproces hoort de functie

$$A(t) = 600 \cdot (0,8)^t.$$

De beginhoeveelheid is 600 en t is in uren.

- a** Bereken algebraïsch hoelang het duurt voordat die hoeveelheid is gehalveerd. Rond af op twee decimalen.
- b** Op een gegeven moment is de hoeveelheid nog maar gelijk aan 100. Bereken hoelang het duurt totdat die hoeveelheid is afgenomen tot 50.
- c** Leg uit: de 'halveringstijd' is de oplossing van de vergelijking $0,8^t = 0,5$.

Theorie

Bij een exponentieel groeiproces met groeifactor g is de **verdubbelingstijd** de tijd die nodig is om een hoeveelheid te verdubbelen.

Deze tijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = 2$.

De **halveringstijd** is de tijd die nodig is om een hoeveelheid te halveren.

Deze tijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = \frac{1}{2}$.

Voorbeeld

Een groeiproces wordt beschreven door de formule $A = 30 \cdot 1,4^t$.

Bereken de verdubbelingstijd, afgerond op twee decimalen.

Oplossing

$$g = 1,4 \text{ dus los op } 1,4^t = 2.$$

$$t = {}^{1,4}\log(2) \approx 2,06$$

49 Bereken steeds de verdubbelingstijd of de halveringstijd. Rond af op twee decimalen.

- H**
- a** Bereken de verdubbelingstijd bij een groeifactor 1,3.
- b** Bereken de halveringstijd bij een groeifactor 0,6.
- c** Bereken de verdubbelingstijd bij een groeifactor 7.

50 Het volume van de stam van een spar neemt per jaar met gemiddeld 5% toe.

- a** Stel een vergelijking op waarmee je de verdubbelingstijd voor het volume kunt vinden.
- b** Benader deze verdubbelingstijd in hele jaren.
- c** Na hoeveel jaar is het volume van de spar verviervoudigd?

Uitdagende route → maak opdracht U7

Ondersteunende opdrachten

- 044** Je gaat de vergelijking ${}^2\log(3x + 4) = 2 + {}^2\log(x)$ exact oplossen. Op het blaadje is een begin gemaakt.
- Leg uit wat er is gebeurd in stap 1.
 - In stap 2 is de rechterkant van de vergelijking als één logaritme geschreven. Vul in wat er op de puntjes moet staan.
 - Als aan beide kanten van de vergelijking één logaritme staat met hetzelfde grondtal, kun je de delen achter de logaritme aan elkaar gelijk stellen.
Vul stap 3 in.
 - Los de vergelijking op.
 - Controleer je antwoord.
 - Je gaat nu exact de logaritmische vergelijking ${}^9\log(x) + {}^3\log(x) = 6$ oplossen. Er is opnieuw een begin gemaakt.
Van welke rekenregel wordt gebruik gemaakt in stap 1?
 - Leg uit waarom het hier handig is om als grondtal 3 te kiezen.
 - Leg uit wat er in stap 2 is gebeurd.
 - Schrijf als één logaritme en los de vergelijking verder op.

☐	${}^2\log(3x + 4) = 2 + {}^2\log(x)$		
☐	${}^2\log(3x + 4) = {}^2\log(4) + {}^2\log(x)$	1	
☐	${}^2\log(3x + 4) = {}^2\log(\dots)$	2	
☐	$3x + 4 = \dots$	3	

☐	${}^9\log(x) + {}^3\log(x) = 6$		
☐	$\frac{{}^3\log(x)}{{}^3\log(9)} + {}^3\log(x) = 6$	1	
☐	$\frac{1}{2} \cdot {}^3\log(x) + {}^3\log(x) = 6$	2	

Uitdagende opdrachten

- U7** Geluid bestaat uit golven. De frequentie van de golf, dat is het aantal trillingen per seconde, bepaalt de toonhoogte van het geluid. Hoe hoger de frequentie, des te hoger de toon.
- Twee geluidsgolven met verschillende frequenties f_1 en f_2 Hz (hertz) hebben een verschil in toon, de toonafstand. Deze toonafstand wordt uitgedrukt in cent.
- Het verband tussen de frequenties van de twee geluidsgolven en de toonafstand T wordt gegeven door de formule: $T = 1200 \cdot {}^2\log\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$.
- De toonafstand tussen twee tonen is één octaaf als de frequenties van de tonen zich verhouden als 1: 2.
Hoeveel cent is de toonafstand tussen twee tonen die een octaaf verschillen?
 - De toonafstand tussen twee tonen is 386,3137 cent.
De frequentie van één van de twee tonen is 440 Hz.
Bereken de mogelijke frequenties van de andere toon.
 - Twee tonen hebben een toonafstand van 701,955 cent.
Bereken de frequentieverhouding $f_2 : f_1$ van de bijbehorende tonen. Schrijf de frequentieverhouding als een verhouding van twee gehele getallen.



8.7 Gemengde opdrachten

- 51** Gegeven is de functie $f(x) = 2 - {}^3\log(2x + 4)$.
- Plot en schets de grafiek van f .
 - Geef het domein en het bereik van f .
 - Bereken exact het nulpunt van f .
 - Los op $f(x) > 0$.
- 52** Gegeven is de functie $f(x) = \log(x^2 - 6x + 8)$.
- Bereken het domein van f .
 - Geef vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek van f .
 - Plot en schets de grafiek van f .
 - Los exact op $f(x) < 0$.
- 53** Gegeven is de functie $f(x) = 1 + 4 \cdot {}^3\log(x)$.
- Het functievoorschrift van f kan worden geschreven in de vorm $f(x) = {}^3\log(px^q)$ met $x > 0$.
Bereken exact de waarden van p en q .
 - Los exact op $f(x) = 7$.
 - Gegeven is de functie $g(x) = 1 + {}^3\log(9x^2)$.
Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g .
- 54** Een patiënt krijgt 100 mg geneesmiddel toegediend door inspuiting in het bloed. Per dag wordt door het lichaam 25% van de aanwezige hoeveelheid afgebroken.
- Stel het functievoorschrift op waarmee de nog aanwezige hoeveelheid medicijn $y(t)$ na t dagen berekend kan worden.
 - Bereken na hoeveel tijd er nog 15 mg geneesmiddel in het bloed zit. Geef je antwoord in uren nauwkeurig.
 - Schrijf de halveringstijd van dit afbraakproces als een logaritme.
 - Benader deze halveringstijd in uren nauwkeurig.
- 55** Los exact op.
- | | |
|---|---|
| a $16 \cdot 2^{x-6} = \sqrt{2}$ | d ${}^4\log(2x) + {}^4\log(7) \geq 3$ |
| b $1 - {}^2\log(4x + 1) = -4$ | e $15 \cdot 3^x < 75$ |
| c ${}^{\frac{1}{10}}\log(x^2 + x) = {}^{10}\log\left(\frac{1}{6}\right)$ | f ${}^{\frac{1}{2}}\log(2x + 3) \leq -3$ |





- 56** De snelwegen in Nederland zijn vooral asfaltbetonwegen. De meest voorkomende zijn de dichte asfaltbetonwegen (DAB-wegen) en de zeer open asfaltbetonwegen (ZOAB-wegen). Voor beide soorten wegen is een formule op te stellen voor het verband tussen het geluidsniveau D in dB van het verkeer en de snelheid v in km/uur van het verkeer.

Voor een DAB-weg geldt de formule $D = 35,9 \cdot \log(v) + 4,1$.

- a** Onderzoek wat er met D gebeurt als de snelheid twee keer zo groot wordt.

- b** Voor een ZOAB-weg geldt de formule

$$D = 28,1 \cdot \log(v) + 16,0.$$

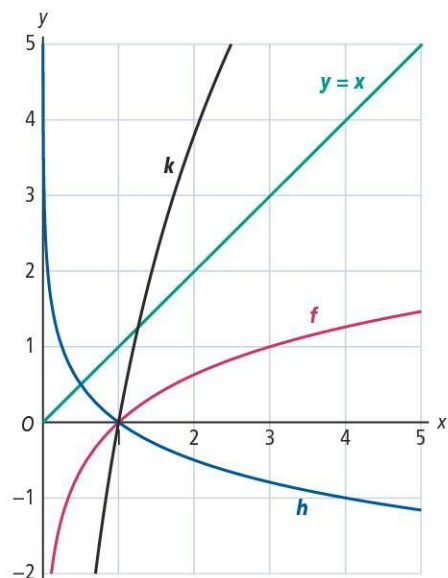
Onderzoek bij welke snelheden van het verkeer een ZOAB-weg een lager geluidsniveau heeft dan een DAB-weg.

(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2004 tijdvak 2)

- 57** Gegeven $f(x) = {}^g\log(x)$ met $g > 0$ en $g \neq 1$. In het assenstelsel staan de grafieken met $g = 3$, $g = \frac{1}{4}$ en $g = 1,2$ en de lijn $y = x$.

- a** Neem $g = 2$ en onderzoek of de grafiek de lijn $y = x$ snijdt. Doe hetzelfde voor $g = 5$ en voor $g = \frac{1}{2}$.

- b** Onderzoek voor welke waarde van g de grafiek van f precies één gemeenschappelijk punt heeft met de lijn $y = x$. Rond af op één decimaal.



Theorie

Logaritme

De exacte oplossing van $g^x = a$ is $x = {}^g\log(a)$, de logaritme van a voor het grondtal g .

Omgekeerd volgt uit ${}^g\log(a) = b$ dat $g^b = a$.

Dus geldt $g^{{}^g\log(a)} = a$.

Hierin is $a > 0$, $g > 0$ en $g \neq 1$.

tot de macht

$$10^{\log(1000)} = 1000$$

is

- S1 a Van welke exponentiële vergelijking is ${}^3\log(7)$ de oplossing?
 b Geef de exacte oplossing van $3^x = 25$.

Theorie

Grafieken van logaritmische functies

De grafieken van $f(x) = g^x$ en $k(x) = {}^g\log(x)$ zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

functie: $f(x) = g^x$ $k(x) = {}^g\log(x)$

domein: $D_f = \mathbb{R}$ $D_k = \langle 0, \rightarrow \rangle$

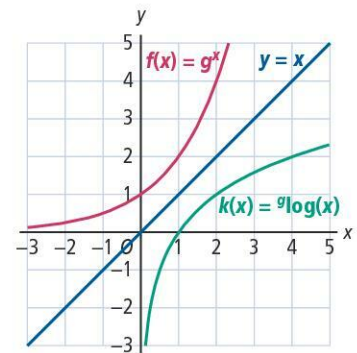
bereik: $B_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$ $B_k = \mathbb{R}$

asymptoot: $y = 0$ $x = 0$

snijpunt assen: $(0, 1)$ $(1, 0)$

stijgend als $g > 1$ stijgend als $g > 1$

dalend als $0 < g < 1$ dalend als $0 < g < 1$



- S2 Gegeven zijn $f(x) = {}^3\log(x + 6)$ en $g(x) = {}^{0,6}\log(3 - x)$.
 a Berekendeer of f stijgend of dalend is.
 b Berekendeer of g stijgend of dalend is.

Theorie

Halveringstijd en verdubbelingstijd

Bij een exponentieel groeiproces met groeifactor g is de verdubbelingstijd de tijd die nodig is om een hoeveelheid te verdubbelen. Deze tijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = 2$.

De halveringstijd is de tijd die nodig is om een hoeveelheid te halveren. Deze tijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = \frac{1}{2}$.

Voorbeeld

Bereken de verdubbelingstijd bij een groeipercentage van 15%. Rond af op twee decimalen.

Oplossing

De groeifactor is 1,15.

Er moet gelden $1,15^t = 2$.

$t = {}^{1,15}\log(2) = 4,959... \approx 4,96$.

- S3 a Bereken de halveringstijd bij een groeifactor 0,8.
 b Bereken de verdubbelingstijd bij een groeifactor 2,3.

Theorie**Rekenregels voor logaritmen**

$${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$$

$${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$$

$$g^{{}^g\log(a)} = a$$

$${}^g\log(m) = \frac{{}^n\log(m)}{{}^n\log(g)}$$

met $g > 0$, $g \neq 1$, $a > 0$, $b > 0$, $n > 0$, $n \neq 1$ en $m > 0$.

Voorbeeld

$${}^9\log(3) + {}^9\log(27) = {}^9\log(3 \cdot 27) =$$

$${}^9\log(81) = 2$$

$${}^4\log(2) - {}^4\log(8) = {}^4\log\left(\frac{2}{8}\right) =$$

$${}^4\log\left(\frac{1}{4}\right) = -1$$

$$3 \cdot {}^8\log(2) = {}^8\log(2^3) = {}^8\log(8) = 1$$

$$2^{{}^2\log(5)} = 5$$

$${}^4\log(8) = \frac{{}^2\log(8)}{{}^2\log(4)} = \frac{3}{2}$$

S4 Schrijf als één logaritme.

a $8 + {}^2\log(x)$

b $4 \cdot {}^3\log(x) - 1$

Vaardigheid**Je kunt logaritmen met je rekenmachine berekenen.**

Met behulp van de rekenregel ${}^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$ kun je elke logaritme met alleen de log-toets van je rekenmachine berekenen.

Voorbeeld

Bereken in drie decimalen ${}^7\log(845)$.

Oplossing

$${}^7\log(845) = \frac{\log(845)}{\log(7)} \approx 3,463$$

S5 Bereken in drie decimalen.

a ${}^5\log(90)$

c ${}^{12}\log(0,01)$

b ${}^{10}\log(12480)$

d ${}^{0,78}\log(2)$

Vaardigheid**Je kunt een logaritme herschrijven naar een logaritme met een ander grondtal.**

Met de rekenregel ${}^g\log(a) = \frac{{}^b\log(a)}{{}^b\log(g)}$ ($b > 0$ en $b \neq 1$)

kun je elke logaritme schrijven als een logaritme met een ander grondtal.

Voorbeeld

Bereken exact ${}^{32}\log(8)$ zonder gebruik te maken van je rekenmachine.

Oplossing

$${}^{32}\log(8) = \frac{{}^2\log(8)}{{}^2\log(32)} = \frac{3}{5}$$

S6 Bereken exact door over te gaan op een ander grondtal.

a ${}^9\log(243)$

b ${}^{\frac{1}{4}}\log(32)$

Vaardigheid

Je kunt het domein, bereik, nulpunt en asymptoten bij logaritmische functies bepalen.

Het domein van een functie $f(x) = {}^g\log(x + b)$ volgt uit $x + b > 0$.

De verticale asymptoot heeft vergelijking $x = -b$.

Het nulpunt van g volgt uit $x + b = 1$.

- S7** Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^{\frac{1}{5}}\log(x)$ en $g(x) = {}^2\log(4x - 3)$.
Geef van elke functie het domein en het nulpunt en een vergelijking van de asymptoot van de grafiek.

Vaardigheid

Je kunt exponentiële en logaritmische formules herleiden.

Een logaritmische formule kun je herleiden tot een exponentiële formule of omgekeerd door het gebruiken van de regel: uit $g^b = a$ volgt $b = {}^g\log(a)$ of omgekeerd.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $p = 16 + {}^4\log(2q)$.
Druk q uit in p .

Oplossing

$$16 + {}^4\log(2q) = p$$

$${}^4\log(2q) = p - 16$$

$$2q = 4^{p-16}$$

$$q = \frac{1}{2} \cdot 4^{p-16}$$

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $r = 4 \cdot 1,5^s$.
Druk s uit in r .

Oplossing

$$4 \cdot 1,5^s = r$$

$$1,5^s = \frac{1}{4}r$$

$$s = {}^{1,5}\log\left(\frac{1}{4}r\right)$$

- S8** Druk q uit in p .
- a** $p = {}^5\log\left(\frac{1}{3}q\right)$ **c** $p = 5 + 2 \cdot 3^q$
b $1 - {}^2\log(q + 2) = p$ **d** $p = 6^q - 3$

Vaardigheid

Je kunt vergelijkingen met een logaritme exact oplossen.

Van de logaritmische vergelijking ${}^g\log(x) = a$ is $x = g^a$ de exacte oplossing. Met behulp van deze regel en de rekenregels voor logaritmen los je logaritmische vergelijkingen exact op.

Controleer zo nodig of je oplossing voldoet.

Omgekeerd is $a = {}^g\log(x)$ de exacte oplossing van $g^a = x$.

Voorbeeld 1

Los exact op ${}^3\log(2x) - 5 = -2$.

Oplossing

$${}^3\log(2x) - 5 = -2$$

$${}^3\log(2x) = 3$$

$$2x = 3^3$$

$$x = \frac{27}{2} = 13\frac{1}{2}$$

Voorbeeld 2

Los exact op ${}^2\log(x^2) = {}^2\log(x)$.

Oplossing

$${}^2\log(x^2) = {}^2\log(x)$$

$$x^2 = x \text{ geeft } x^2 - x = 0$$

$$x(x - 1) = 0 \text{ dus } x = 0 \text{ of } x = 1$$

De oplossing $x = 0$ voldoet niet aan de vergelijking want ${}^2\log(0)$ bestaat niet.

De oplossing van de vergelijking is $x = 1$.

S9 Los exact op.

a $2 - {}^{11}\log(x) = 1$

b ${}^{\frac{1}{2}}\log(x + 2) = -3 + {}^{\frac{1}{2}}\log(2x)$

Vaardigheid

Je kunt een ongelijkheid met een logaritme exact oplossen.

Bij het oplossen van een ongelijkheid moet je eerst de bijbehorende vergelijking oplossen. Voor het trekken van de juiste conclusie over de oplossing van de ongelijkheid speelt ook het domein van de functie een belangrijke rol. Een plot van de grafieken kan daarbij helpen.

Voorbeeld

Los exact op $3 - {}^2\log(x + 2) > 7$.

Oplossing

$$3 - {}^2\log(x + 2) = 7$$

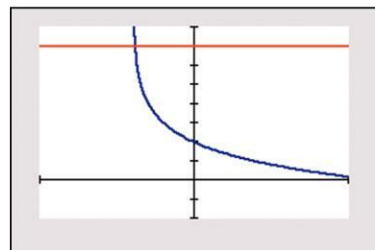
$${}^2\log(x + 2) = -4$$

$$x + 2 = 2^{-4} = \frac{1}{16} \text{ dus } x = -1\frac{15}{16}$$

De logaritme bestaat alleen als $x > -2$.

Zie de plot hiernaast.

De oplossing is $-2 < x < -1\frac{15}{16}$.



S10 Los exact op.

a ${}^3\log(10x) < 2$

b ${}^3\log(10 - x) > -1$

T1 Bereken zonder rekenmachine.

- a** ${}^3\log(\sqrt{3})$ **c** ${}^{\frac{1}{5}}\log(125)$
b ${}^2\log\left(\frac{1}{8}\right)$ **d** ${}^{\frac{1}{3}}\log(1)$

T2 Gegeven zijn vier vergelijkingen.

- A** $7^t = 4$ **C** $4^{2k} = 16$
B $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16$ **D** $\left(\frac{1}{5}\right)^p = 3\sqrt{2}$

- a** Welke vergelijking heeft een positief geheel getal als antwoord? Los de vergelijking op.
b Welke vergelijking heeft een negatief geheel getal als antwoord? Los de vergelijking op.
c Los ook de andere vergelijking(en) op. Rond af op twee decimalen.

T3 Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^3\log(2x - 1)$,

$g(x) = {}^3\log(1 - 2x)$ en $h(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log(1 - 2x)$.

- a** Geef van elke functie aan of deze stijgend of dalend is.
b De drie functies hebben dezelfde verticale asymptoot. Toon dit aan en geef een vergelijking van de verticale asymptoot.
c Geef van elke functie het domein.
d Bereken exact van elke functie het nulpunt.

T4 Gegeven is de functie $f(x) = {}^3\log(27x^2)$.

- a** Plot en schets de grafiek van f .
b Geef het domein van f .
c Toon aan dat voor $x > 0$ het functievoorschrift van f te schrijven is als $f(x) = 3 + 2 \cdot {}^3\log(x)$.

T5 Druk t uit in R .

- a** $R = 4 - \frac{1}{2} \cdot 3^t$ **c** ${}^5\log(3t) + {}^5\log(R) = 2$
b $R = 2 - {}^3\log(2t)$ **d** $2^{tR} = 10$

T6 Toon met substitutie aan dat $x = {}^2\log(18)$ een oplossing is van de vergelijking $2^x \cdot (x - 2 \cdot {}^2\log(3)) = 18$.

T7 Los algebraïsch op. Geef eerst de exacte oplossing en daarna waar nodig een benadering in twee decimalen.

- | | |
|---|--|
| a $0,36^{x-2} = 4,23$ | d ${}^5\log(x+3) = 2 + {}^5\log(x)$ |
| b $5 + 3 \cdot 1,4^x = \sqrt{3}$ | e $3 - \log(x+2) = 2\frac{1}{3}$ |
| c ${}^2\log(2-x) = \frac{1}{2}$ | f ${}^6\log(x) = {}^{36}\log(3x-2)$ |

T8 Los exact op.

- | | |
|--|---|
| a ${}^2\log(3x-2) < 7$ | c ${}^2\log(4-3x) \leq 3$ |
| b ${}^{\frac{1}{2}}\log(3x) > -1$ | d ${}^3\log(-x) \geq 1\frac{1}{2}$ |

T9 Voor de geluidsterkte D van een toongenerator geldt:

$$D = 10 \cdot \log\left(\frac{4,9 \cdot 10^5}{r^2}\right)$$

Hierin is r de afstand in meters tot de generator.

- Bereken de geluidsterkte op de afstanden 5 m, 7 m, 10 m en 20 m.
- De formule is te herleiden tot de vorm $D = a + b \cdot \log(r)$, waarbij a en b constanten zijn.
Laat dit zien en bereken de waarde van a en van b .
- Bereken exact op welke afstand de geluidsterkte gelijk is aan 0.

- T10** Een patiënt krijgt een geneesmiddel toegediend door inspuiting in het bloed. Per dag wordt door het lichaam 40% van de nog aanwezige hoeveelheid geneesmiddel afgebroken. Na een zekere tijd t_h is nog precies de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid medicijn over.
- Met welke vergelijking kun je t_h berekenen?
 - Los de vergelijking van opdracht a op.
 - Na hoeveel uur is er nog 25% van het geneesmiddel over?



Je kunt logaritmen met je rekenmachine berekenen.

E1 Bereken in drie decimalen.

- a $^{100}\log(175)$ c $^{0,3}\log(23,78)$
b $^{1,5}\log(75)$ d $^{\frac{1}{4}}\log(15)$

Je kunt een logaritme herschrijven naar een logaritme met een ander grondtal.

E2 Bereken door op een ander grondtal over te gaan.

- a $^4\log(8)$
b $^{27}\log\left(\frac{1}{9}\right)$
c $^{\frac{1}{25}}\log(125)$

Je kunt het domein, bereik, nulpunt en asymptoten bij logaritmische functies bepalen.

E3 Gegeven is de functie $h(x) = 3 + {}^7\log(13 - 3x)$.

- a Geef het domein van h .
b Geef de vergelijking van de verticale asymptoot van de grafiek van h .
c Onderzoek, zonder de rekenmachine te gebruiken, of h stijgend is.

Je kunt exponentiële en logaritmische formules herleiden.

E4 Druk t uit in P .

- a $P = 4^t - 3$
b $2P - 4 \cdot 3^{2t} = 0$
c $\log(P) - \log(t) = 1$ met $P > 0$ en $t > 0$
d $P = 4 \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log(2t)$ met $t > 0$

Je kunt vergelijkingen met een logaritme exact oplossen.

E5 Los exact op.

- a $\log(-2x + 3) = -1$
b $^4\log(x) = {}^{16}\log(x + 6)$
c $\log(4x - 2) - \log\left(\frac{1}{2}\right) = 2$
d $^{\frac{1}{3}}\log(x - 3) - {}^{\frac{1}{3}}\log(5) = -2$

Je kunt een ongelijkheid met een logaritme exact oplossen.

E6 Los de ongelijkheden exact op.

- a ${}^2\log(-2x + 1) > 5$
b ${}^3\log(7 - 2x) < -1$
c $2 - 3 \cdot \log(x) < 1$

- E7** Schrijf als één logaritme.
- a** $2 \cdot \log(11) - 3 \cdot \log(4)$
 - b** $2 \cdot ({}^4\log(15) - {}^4\log(5)) + {}^4\log(3)$
 - c** $3 \cdot {}^5\log(x) + 1$
 - d** ${}^{\frac{1}{4}}\log(x) + 2$
- E8** Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^2\log(4 - 2x)$ en $g(x) = 2 + {}^2\log(x + 4)$.
Los exact op.
- a** $f(x) = g(x)$
 - b** $f(x) \cdot g(x) = 0$
- E9** Gegeven is de functie $f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(3 - x)$.
- a** Los exact op $f(x) = 0$.
 - b** Teken in een assenstelsel de grafiek van f en de bijbehorende asymptoot.
 - c** Los exact op $-3 < f(x) < 2$.
- E10** Op de grafiek van de functie $f(x) = {}^a\log(x + b) + c$ liggen de punten $(-1, 0)$ en $(1, 1)$.
De asymptoot van de grafiek van f is de lijn $x = -3$.
- a** Welke waarde heeft b ?
 - b** Bereken met behulp van de coördinaten van de gegeven punten de waarde van a en van c .
- E11** Tussen de variabelen x en y bestaat het verband $\log(y) = 2 + 4,3 \cdot \log(x)$.
Herleid dit verband tot een verband waarin geen logaritmen voorkomen.
- E12** Van een bepaalde hoeveelheid radioactief materiaal is er een verband tussen de intensiteit I van de straling en de tijd t in dagen volgens de formule $\log(I) = -0,009t + 1$.
Het verband tussen I en t kan geschreven worden in de vorm $I = b \cdot g^t$.
- a** Toon dat aan en bereken de waarde van b en van g .
 - b** Bereken na hoeveel dagen de intensiteit is gehalveerd.

De geschiedenis van sin en cos

Waar komt de naam sinus vandaan?

Kies je de straal van de cirkel gelijk aan 1, dan is een halve koorde precies gelijk aan de sinus van de halve middelpuntshoek. De middelpuntshoek is $\angle AMB$.

$$\sin(\angle M_1) = \frac{AS}{AM} = AS.$$

Rond 500 na Chr. berekende de Indiase wiskundige Aryabhata halve koorden. Het woord voor halve koorde is jyā. In latere Arabische vertalingen werd dat jyb, dat gelezen werd als jayb, het Arabische woord voor golf. In een vertaling van het Arabisch naar het Latijn werd dat het Latijnse woord voor golf: sinus.

Cosinus is een samentrekking van complementi sinus: de sinus van het complement. Twee hoeken zijn elkaars complement als zij samen 90° zijn.

Sinus- en cosinusfuncties worden gebruikt als wiskundig model voor periodieke verschijnselen.

De Franse wiskundige Joseph Fourier (1768 – 1830) publiceerde in 1822 een baanbrekend boek over warmtetheorie: *Théorie analytique de la chaleur*. Daarbij ontwikkelde hij een methode om periodieke functies te benaderen met een (oneindige) som van sinussen en cosinussen.

Opdracht

Bij de blok golf hoort de functie

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}\pi & \text{als } 0 < t < \pi \\ -\frac{1}{4}\pi & \text{als } \pi < t < 2\pi \end{cases} \quad (\text{periode } 2\pi)$$

Plot de lijn $y = \frac{1}{4}\pi$ en in hetzelfde scherm de grafieken van:

$$y = \sin(t), \quad y = \sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t) \quad \text{en}$$

$$y = \sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t) + \frac{1}{7}\sin(7t)$$

Hoe meer termen van de vorm $\frac{1}{2n+1}\sin((2n+1)t)$ je toevoegt, des te nauwkeuriger wordt je benadering.

Opdracht

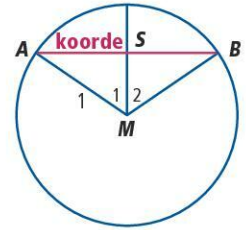
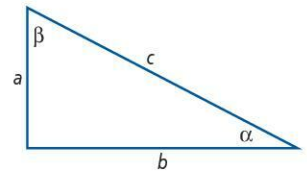
De grafiek van $g(t) = \sin(t) - \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{3}\sin(3t) - \frac{1}{4}\sin(4t)$ is een benadering van een zaagtandgrafiek.

Daarbij hoort de functie $f(t) = \frac{1}{2}t$ als $-\pi < t < \pi$.

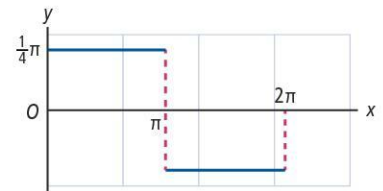
Plot de grafieken van f en g in één figuur.

Breid het functievoorschrift van g uit met nog een tiental termen en geef met behulp van die uitbreiding van g een

benadering van $\frac{1}{4}\pi = f\left(\frac{1}{2}\pi\right)$.



$$\cos(\alpha) = \sin(\beta)$$



In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Rekenen met machten, wortels en breuken
- Differentiëren
- Vergelijkingen oplossen
- Formules herleiden

Departures

Flt No.	Remarks
Gate Opens 16:50	
Gate Opens 16:40	
Gate Opens 16:50	
Gate Opens 16:55	
Gate Opens 16:55	
Gate Opens 17:00	
Gate Opens 17:00	
Gate Opens 17:10	
Gate Opens 17:15	
Gate Opens 17:15	
Gate Opens 17:15	
Gate Opens 17:15	
Gate Opens 17:15	

Departures

Time	Destination	Flt No.	Remarks
20:05	Vienna		Gate Open
20:05	Bergamo		Gate Open
20:05	Barcelona		Gate Open
20:10	Cologne		Gate Open
20:10	Bologna		Gate Open
20:20	Hanover		Gate Open
20:25	Stuttgart		Gate Open
20:25	Wroclaw		Gate Open

Rekenen met machten, wortels en breuken

1 Schrijf als een macht van 2.

a $128 = 2 \dots$

d $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

b $\sqrt{2}$

e $16\sqrt[3]{2}$

c $\frac{1}{16}$

f $\frac{1}{2}\sqrt{8}$

2 Schrijf de producten als één macht.

a $x^3 \cdot x^2$

d $(x^{2a})^3$

b $(x^4)^3$

e $x^{3a} \cdot (x^a)^2$

c $x^{-3} \cdot x^3$

f $(x^{2a} \cdot x^{3a})^3$

3 Schrijf in de vorm $b \cdot a^p$.

a $(4a^3)^3$

d $(a^2 \cdot 2a^3)^4$

b $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[3]{a}$

e $a \cdot \sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt{a}$

c $\frac{6a}{2\sqrt{a}}$

f $\frac{3}{a^2} \cdot \frac{a^5}{a\sqrt[4]{a^3}}$

4 Vereenvoudig.

a $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$

e $4\sqrt{7} + 3\sqrt{7}$

b $5\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{2}$

f $8\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} + 7\sqrt{6}$

c $(3\sqrt{2})^2$

g $(\sqrt{6})^2 + 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

d $(-2\sqrt{5})^4$

h $(5\sqrt{6})^3$

5 Omdat $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2}$ geldt $\sqrt{8} = \sqrt{4} \times \sqrt{2}$ dus $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
Vul in.

a Omdat $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2}$ geldt $\sqrt{18} = \sqrt{\dots} \times \sqrt{2}$ dus
 $\sqrt{18} = \dots \sqrt{2}$.

b $\sqrt{48}$ kun je eenvoudiger schrijven, want
 $\sqrt{48} = \sqrt{\dots} \times \sqrt{3} = \dots \sqrt{\dots}$.

6 Vereenvoudig.

a $\sqrt{200}$

e $\sqrt{125}$

b $\sqrt{63}$

f $\sqrt{72}$

c $\sqrt{108}$

g $\sqrt{99}$

d $\sqrt{20}$

h $\sqrt{52}$

7 Vereenvoudig.

a $\sqrt{20} + \sqrt{45}$

d $\sqrt{75} - \sqrt{48}$

b $\frac{\sqrt{98}}{7}$

e $\frac{1}{4}\sqrt{32}$

c $\frac{\sqrt{40} + \sqrt{90}}{5}$

f $\frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{28} + \sqrt{63}}$

8 Bereken en schrijf het antwoord als één breuk. Vereenvoudig indien mogelijk het antwoord.

a $\frac{13}{2p} - \frac{7}{3p}$

e $\frac{3}{2a} \times \frac{4}{5a}$

b $\frac{a}{3b} + \frac{4}{3b}$

f $\frac{4d}{11} \times \frac{d}{3}$

c $\frac{9}{5a} - \frac{b}{3a}$

g $\frac{2a}{5} \times \frac{2}{7a}$

d $\frac{11}{4a^2} - \frac{4}{2a}$

h $\frac{3a}{2b} \times \frac{4b}{7a}$

Differentiëren

9 Differentieer.

a $f(x) = 4x^2 - 6x + 13$

c $k(x) = 8x^3 - x + 6$

b $g(x) = (3x + 7)(8 - x)$

d $m(x) = 4x^3(x^2 + 7)$

10 Bereken de helling van de grafiek van de functie in het gegeven punt.

a $f(x) = 3x^2 + 6$ in $(1, 9)$

c $h(x) = x - x^2$ in $(0, 0)$

b $g(x) = 2x^3$ in $(-2, -16)$

d $k(x) = 5x(x^2 - x^4)$ in $(1, 0)$

Vergelijkingen oplossen

11 Los exact op.

a $3x - 2 = -2x + 7$

e $(x - 6)(2x + 7) = 0$

b $3(2p - 4) = 5p - 3$

f $(5p - 10)(p - 3) = 18(p - 3)$

c $\frac{1}{2}m - \frac{1}{3} = 1\frac{1}{4}m + 4\frac{1}{6}$

g $(8a + 1)^2 = 81$

d $2(3 - 1,4x) = -2,3x$

h $r(2r - 6) = (r - 3)^2$

- 12** Los algebraïsch op met behulp van de *abc*-formule. Rond je antwoorden indien nodig af op twee decimalen.

a $x^2 + 3x - 1 = 0$ **c** $0,5x^2 - x + 2 = 0$
b $2x^2 + 5x + 2 = 0$ **d** $3x^2 + 3x = 5x + 4$

- 13** Los de machtsvergelijkingen algebraïsch op. Geef een exact antwoord en ook een benadering in twee decimalen.

a $p^3 = 100$ **e** $1,5b^4 = -10$
b $-2x^2 = -34$ **f** $8 + 3x^{\frac{1}{3}} = 14$
c $p^4 - 12 = 9$ **g** $15 - 3p^{\frac{2}{3}} = 9$
d $0,2x^5 = -10$ **h** $8 + 0,5x^{0,25} = 9$

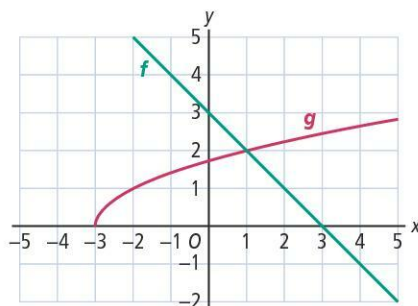
- 14** Los de exponentiële vergelijkingen exact op.

a $2^x = 8\sqrt{2}$ **e** $7 \cdot 7^{3x+7} = 49\sqrt[3]{7}$
b $\frac{1}{3} \cdot 3^x = 27$ **f** $1000 \cdot 0,1^{x+10} = 0,01 \cdot (\sqrt[5]{100})^x$
c $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 8 \cdot 2^x$ **g** $15 \cdot 3^{7x+9} = 5 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{8-x}$
d $25 \cdot 5^{4x-1} = 5\sqrt{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$ **h** $21 \cdot 9^{6-x} = 63 \cdot 27^{\frac{1}{2}x+4}$

- 15** De grafieken horen bij de functies $f(x) = -x + 3$ en

$g(x) = \sqrt{x+3}$.

- a** Geef het domein en het bereik van g .
b De x -coördinaat van het snijpunt van beide grafieken bereken je door de vergelijking $\sqrt{x+3} = -x + 3$ op te lossen. Door links en rechts te kwadrateren, kun je deze vorm herleiden tot $x^2 - 7x + 6 = 0$. Toon dat aan.
c Bereken de oplossingen van de vergelijking $x^2 - 7x + 6 = 0$ en laat zien dat slechts één van de oplossingen de x -coördinaat van het snijpunt is.



- 16** Los exact op.

a $\sqrt{x-8} = 5$ **e** $2 + \sqrt{q-2} = 6$
b $\sqrt{2a+3} = 5$ **f** $\sqrt{6a-5} = a$
c $3 + \sqrt{2p+4} = 10$ **g** $\sqrt{3d+1} = 2 + d$
d $3 + \sqrt{x} = x - 3$ **h** $6x + \sqrt{x} = 7x - 20$

- 17** Gegeven is de gebroken vergelijking $\frac{5x}{x-3} + 6 = x - 6$.
- a** Laat zien dat je de vergelijking voor $x \neq 3$ kunt herleiden tot de vergelijking $5x = (x - 12)(x - 3)$.
- b** Los de vergelijking verder op.

- 18** Los de gebroken vergelijkingen exact op.
- a** $\frac{2}{x-3} = \frac{1}{2}$ **d** $\frac{4}{k+3} = 3k - 2$
- b** $\frac{1}{h+4} + 8 = 8\frac{1}{2}$ **e** $\frac{3x^2}{x+1} = x$
- c** $\frac{7}{2a-3} = 2a + 3$ **f** $\frac{1}{p-3} = \frac{1}{2p}$

- 19** Los de stelsels vergelijkingen exact op.
- a** $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ y = -4x + 3 \end{cases}$ **c** $\begin{cases} 4p - q = 10 \\ 13q - 7p = 5 \end{cases}$
- b** $\begin{cases} y + 3x = 0 \\ 5x + y = 4 \end{cases}$ **d** $\begin{cases} 8a - 12 = 3b \\ 6b - 7a + 2 = 0 \end{cases}$

Formules herleiden

- 20** Druk p uit in q .
- a** $q = 2p + 6$ **d** $q = -0,75p + 0,27$
- b** $q = 3p - 17$ **e** $q = -2\left(3 - \frac{1}{2}p\right) + 3$
- c** $q = 1\frac{1}{2}p - 6$ **f** $q = p - \frac{1}{5}(p - 1)$

- 21** Op het blaadje zie je hoe een gebroken vergelijking zo herleid wordt dat p is uitgedrukt in q .
Schrijf bij elke stap op wat er tussen de haakjes moet staan.

- 22** Druk p uit in q .
- a** $q - 1 = \frac{3}{p}$ **d** $\frac{3q - 12}{p + 4} = q - 3$
- b** $2q - \frac{8}{p} = 3q - 4$ **e** $\frac{p + 4}{q - p} = q$
- c** $\frac{4q - p}{p + 5} = \frac{3}{2}$ **f** $q + 5 = \frac{p + q}{p - q}$

$p = \frac{2p - 7}{q - 4}$			
$p(q - 4) = 2p - 7$	(.....)		
$pq - 4p = 2p - 7$	(.....)		
$pq - 6p = -7$	(.....)		
$p(q - 6) = -7$	(.....)		
$p = \frac{-7}{q - 6}$	(.....)		



SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In de voorafgaande jaren heb je geleerd te werken met gelijkvormige driehoeken, de stelling van Pythagoras en met de sinus, cosinus en tangens in rechthoekige driehoeken.

In dit hoofdstuk ga je gelijkvormigheid toepassen in allerlei figuren en je gaat formules leren waarmee je lengten en hoeken kunt berekenen in driehoeken die niet rechthoekig zijn. De formule voor de afstanden tussen twee punten in een assenstelsel ga je toepassen op meer ingewikkelde figuren. In de laatste paragraaf leer je dat er in veel gevallen meerdere manieren zijn om een meetkundig vraagstuk op te lossen.

De kennis over meetkundige onderwerpen uit dit hoofdstuk heb je nodig bij de laatste meetkunde hoofdstukken in deel 3.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 43
- *Ordenen en structureren* opdracht 44
- *Logisch redeneren en bewijzen* opdracht 17

- V1**
- Van een driehoek PQR is gegeven dat $\angle Q = 90^\circ$, $PQ = 14$ en $QR = 11$.
Bereken PR .
 - Van $\triangle ABC$ is gegeven $AB = 17$, $BC = 8$ en $\angle C = 90^\circ$.
Bereken AC .

Theorie

In rechthoekige driehoeken kun je de **stelling van Pythagoras** gebruiken. Noem je de lengten van de zijden van $\triangle ABC$ a , b en c , dan geldt:
als $\angle C = 90^\circ$ dan $a^2 + b^2 = c^2$
en ook omgekeerd geldt:
als $a^2 + b^2 = c^2$, dan is $\angle C = 90^\circ$.

Voorbeeld

In $\triangle FGH$ is $GH = 13$, $FG = 8$ en $FH = 10$.
Onderzoek of $\triangle FGH$ rechthoekig is.

Oplossing

$GH^2 = 169$, $FG^2 = 64$ en $FH^2 = 100$,
dus $GH^2 \neq FG^2 + FH^2$.
 $\triangle FGH$ is niet rechthoekig.

- V2** Bereken voor de driehoeken de lengte van de onbekende zijde. Geef je antwoord eerst exact en daarna zo nodig afgerond op één decimaal.
- $\triangle ABC$ met $\angle B = 90^\circ$, $AB = 33$ en $BC = 56$
 - $\triangle DEF$ met $\angle D = 90^\circ$, $DE = 7$ en $EF = 17$
- V3** Ga met een berekening na of de driehoeken rechthoekig zijn. Zo ja, geef aan bij welk hoekpunt de rechte hoek ligt.
- $\triangle PQR$ met $PR = 9$, $QR = 19$ en $PQ = 21$
 - $\triangle STU$ met $ST = 2\sqrt{14}$, $TU = 15$ en $SU = 13$
- V4** In een ruit $ABCD$ is $AC = 20$ en $BD = 16$.
- Maak een schets van deze ruit.
 - Bereken de lengte van de zijden van deze ruit.

Theorie

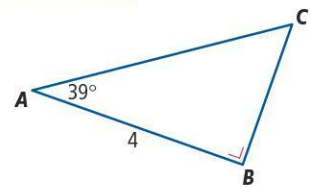
In een rechthoekige driehoek kun je de goniometrische verhoudingen **sinus**, **cosinus** en **tangens** gebruiken:

$$\sin(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van hoek } A}{\text{langste zijde}}$$

$$\cos(\angle A) = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde van hoek } A}{\text{langste zijde}}$$

$$\tan(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van hoek } A}{\text{aanliggende rechthoekszijde van hoek } A}$$

Voorbeeld



Bereken AC in één decimaal.

Oplossing

$$\cos(\angle A) = \frac{AB}{AC} \text{ geeft } \cos(39^\circ) = \frac{4}{AC}$$

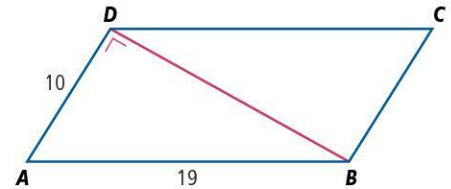
$$\text{dus } AC = \frac{4}{\cos(39^\circ)} \approx 5,1.$$

- V5** Bereken telkens de lengte van de onbekende zijden en de grootte van de scherpe hoeken. Rond lengten zo nodig af op één decimaal en hoeken op hele graden.

- a $\triangle ABC$ met $\angle A = 90^\circ$, $AB = 13$ en $BC = 14$
- b $\triangle DEF$ met $\angle F = 90^\circ$, $DE = 13$ en $\angle D = 28^\circ$
- c $\triangle GHK$ met $\angle H = 90^\circ$, $GK = 7,2$ en $GH = 3,1$
- d $\triangle PQR$ met $\angle R = 90^\circ$, $\angle Q = 57^\circ$ en $PR = 16$

- V6** Van het parallellogram $ABCD$ is gegeven dat $AB = 19$, $AD = 10$ en $\angle ADB = 90^\circ$.

- a Waarom is $\angle DBC$ ook gelijk aan 90° ?
- b Bereken BD in één decimaal.
- c Bereken in hele graden $\angle BDC$ en $\angle BCD$.



Theorie

Vergelijkingen van lijnen kunnen worden gegeven in

verschillende vormen: $y = mx + n$, $ax + by = c$ of $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

Als de lijnen $y = m_1x + n_1$ en $y = m_2x + n_2$ loodrecht op elkaar staan, dan geldt $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Om de hoek tussen twee lijnen te kunnen berekenen, stel je eerst vast hoe groot de hoeken zijn die de lijnen maken met een horizontale lijn door het snijpunt.

- V7** Gegeven is lijn l met vergelijking $\frac{x}{7} + \frac{y}{3} = 1$.

- a In welke punten snijdt l de x -as en de y -as?
- b Bereken de hoek die l maakt met de x -as.
Rond je antwoord af op hele graden.
- c Schrijf de vergelijking van l in de vorm $y = mx + n$.

- V8** Gegeven zijn de lijnen k : $y = 2\frac{1}{2}x + 5$ en m : $2x - 3y = 7$.

- a Bereken de coördinaten van het snijpunt van k en m .
- b Bereken in hele graden de hoek die l en m met elkaar maken.
- c Lijn n gaat door het punt $(4, -1)$ en staat loodrecht op k .
Stel een vergelijking van n op.

9.1 Gelijkvormigheid

Je leert

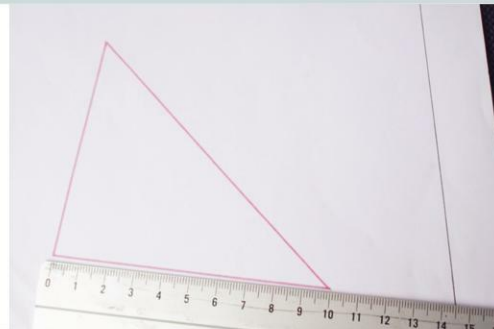
- wat gelijkvormigheid van twee figuren is
- hoe je gelijkvormigheid gebruikt om lengten te berekenen

Leerroutes

- ondersteunend: 1—2—03—4—5—06—6
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7
- uitdagend: 2—4—5—6—7—U1—U2

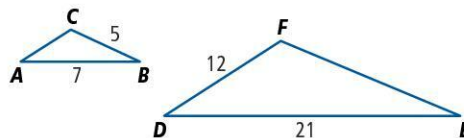
Op het papier dat uit het kopieerapparaat komt, staat een driehoek. De hoeken van deze driehoek zijn 83° , 41° en 56° . De zijden zijn 10 cm, 12 cm en 8 cm. Het kopieerapparaat was ingesteld op 80%.

- Hoeveel graden zijn de hoeken en hoe lang zijn de zijden van de originele tekening?



1 $\triangle DEF$ is een vergroting van $\triangle ABC$.

- Wat kun je zeggen over de hoeken van beide driehoeken?
- Bereken de factor van vergroting.
- Bereken AC en EF .



Theorie

Twee driehoeken zijn **gelijkvormig** als ze een vergroting (of een verkleining) zijn van elkaar. Dit is het geval:

- als overeenkomstige hoeken even groot zijn of
- als er een vaste verhouding tussen overeenkomstige zijden bestaat.

De gelijkvormigheid van de driehoeken ABC en DEF kun je noteren als $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. De volgorde van de hoekpunten geeft aan wat de overeenkomstige hoekpunten zijn.

Voorbeeld

In $\triangle ABC$ is $\angle CDE = \angle B$, $AB = 12$, $AC = 8$, $BC = 10$ en $CD = 6$.

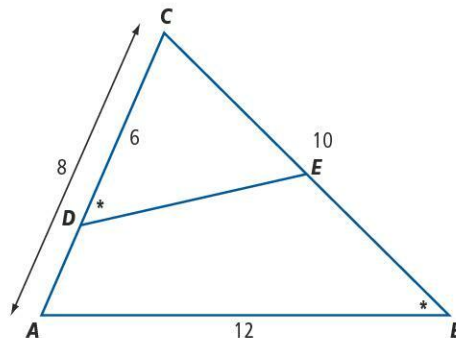
- Welke driehoeken zijn gelijkvormig?
- Bereken CE en BE .

Oplossing

- Omdat $\angle CDE = \angle B$ en hoek C in beide driehoeken voorkomt, is de derde hoek ook gelijk, dus $\triangle ABC \sim \triangle EDC$.

zijden $\triangle ABC$	$AB = 12$	$BC = 10$	$AC = 8$
zijden $\triangle EDC$	$ED = \dots$	$DC = 6$	$EC = \dots$

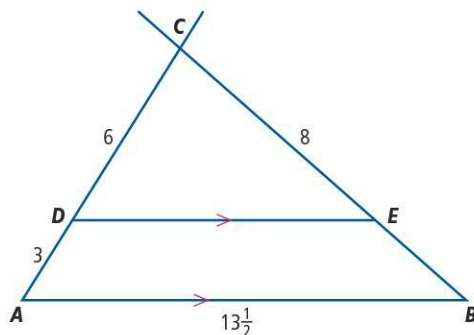
- De vergrotingsfactor van $\triangle ABC$ naar $\triangle EDC$ is $\frac{6}{10} = 0,6$, dus $CE = 8 \times 0,6 = 4,8$ en $BE = 10 - CE = 5,2$.



2 In $\triangle ABC$ is $AB \parallel DE$.

H

- Leg uit waarom de driehoeken ABC en DEC gelijkvormig zijn.
- Zet de zijden van de driehoeken in een verhoudingstabel en bereken daarmee DE en BC .
- Hoe lang is lijnstuk BE ?

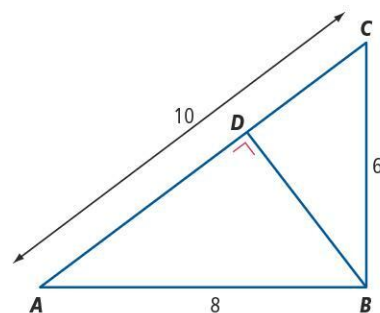


Ondersteunende route → maak opdracht 03

3 $\triangle ABC$ heeft zijden $AB = 8$, $BC = 6$ en $AC = 10$.

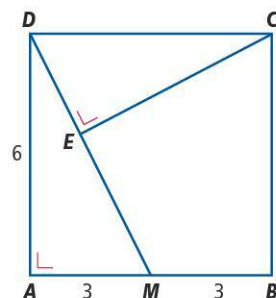
Lijn BD staat loodrecht op zijde AC .

- Leg uit dat $\triangle ABC$ rechthoekig is.
- Gebruik gelijkvormige driehoeken om AD te berekenen.
- Bereken BD .
- Vanuit D wordt een lijn loodrecht op zijde AB getekend. Het snijpunt van deze loodlijn met zijde AB is E . Bereken exact DE .



4 In het vierkant $ABCD$ met zijde 6 is punt M het midden van zijde AB . Punt E ligt op lijnstuk MD met $\angle DEC = 90^\circ$.

- Waarom geldt $\angle AMD = \angle CDM$?
- Leg uit waarom $\triangle ADM \sim \triangle ECD$.
- Bereken MD .
- Bereken EC en DE . Rond af op één decimaal.



5 Kijk nog eens naar de figuur van opdracht 4.

- Teken in de figuur een lijn door E , evenwijdig aan zijde AB . Het snijpunt van deze lijn met zijde AD is F .
- Bereken EF met behulp van gelijkvormige driehoeken.

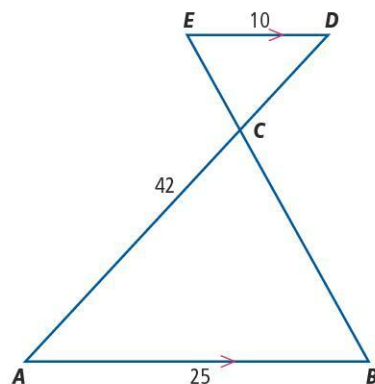
Soms weet je van gelijkvormige driehoeken niet de lengten van de zijden zelf, maar de totale lengte van twee zijden samen.

Je kunt dan op verschillende manieren te werk gaan. Daarover gaan de volgende opdrachten.

Ondersteunende route → maak opdracht O6

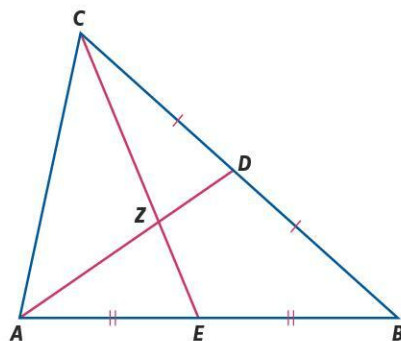
- 6** In de tekening is lijnstuk ED evenwijdig aan lijnstuk AB . De totale lengte van lijnstuk AD is 42, maar van de twee delen AC en CD weet je de lengte niet. Er zijn verschillende methoden om AC te berekenen.

- Leg uit waarom de driehoeken ABC en DEC gelijkvormig zijn.
- Manier 1: Stel $AC = x$, dan geldt $CD = 42 - x$. Maak een verhoudingstabel en bereken daarmee x .
- Manier 2: De verhouding tussen de zijden van de driehoeken is gelijk aan $AB : DE$. Geef deze verhouding en verdeel de lengte van lijnstuk AD volgens deze verhouding en bereken daarmee AC .
- Manier 3: Trek in de figuur een lijn door D evenwijdig aan lijnstuk BE en verleng zijde AB . Noem het snijpunt F . $\triangle AFD$ is gelijkvormig met $\triangle ABC$ en met $\triangle DEC$. Maak een nieuwe verhoudingstabel en bereken AC .



- 7** In $\triangle ABC$ zijn de zwaartelijnen AD en CE getekend, dat zijn de lijnstukken vanuit de hoekpunten A en B naar het midden van de tegenoverliggende zijde. Het snijpunt van de zwaartelijnen is Z . Verder is $AD = 10$, $CE = 12$ en $AC = 9$.

- Waarom is $\triangle ABC$ een vergroting van $\triangle EBD$ en wat is de vergrotingsfactor?
- Waarom volgt uit opdracht a dat de lijnstukken AC en ED evenwijdig zijn?
- Leg uit dat $\triangle AZC \sim \triangle DZE$.
- Bereken exact AZ , ZD , CZ en ZE .



Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2

Ondersteunende opdrachten

03 Gegeven is $\triangle PQR$ met $PQ = 25$, $PR = 24$ en $QR = 7$.

w

Op zijde PQ ligt punt S met $RS \perp PQ$.

- Laat met de stelling van Pythagoras zien dat $\triangle PQR$ een rechthoekige driehoek is.
- Welke hoek in $\triangle PQR$ is gelijk aan 90° ?
- $\triangle PRS$ is gelijkvormig met $\triangle PQR$.
Welke hoeken zijn de overeenkomstige hoeken?
- Vul de verhoudingstabel in en bereken de lengte van de zijden van $\triangle PRS$.

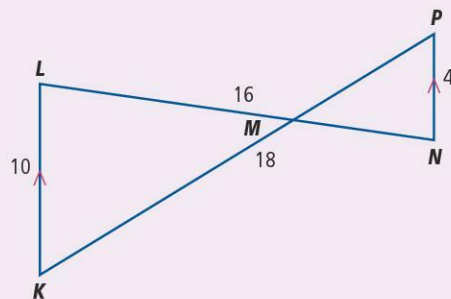
zijden $\triangle PRS$	... = ...	... = ...	... = ...
zijden $\triangle PQR$	$PQ = 25$	$PR = 24$	$QR = 7$

- Teken de loodlijn ST uit punt S loodrecht op zijde PR .
Leg uit dat $\triangle PST$ gelijkvormig is met $\triangle PQR$, maak een verhoudingstabel en bereken ST en PT .
Rond je antwoorden af op één decimaal.



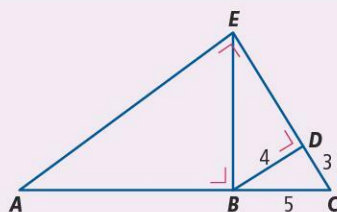
06 In de figuur is $KL \parallel NP$.
 $KL = 10$, $PN = 4$, $KP = 18$ en $LN = 16$.

- Leg uit dat $\triangle KML \sim \triangle PMN$.
- Waarom geldt $PM : KM = 4 : 10$?
- Bereken PM en KM . Gebruik de verhouding van opdracht b.
- Bereken ook LM en NM .

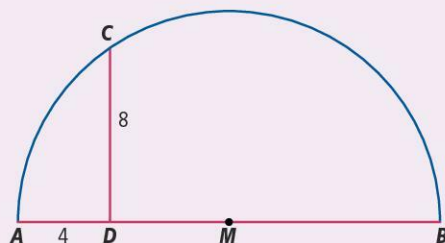


Uitdagende opdrachten

U1 In deze figuur geldt $BC = 5$, $CD = 3$, $BD = 4$
en $\angle AEC = \angle ABE = \angle BDE = 90^\circ$.
Bereken de lengte van alle andere lijnstukken in deze figuur.



- Gegeven is een halve cirkel met middellijn AB en middelpunt M . Punt C ligt op de cirkel en punt D ligt op lijnstuk AB , waarbij $CD \perp AB$. Verder is $AD = 4$ en $CD = 8$.
a Stel de straal van de cirkel is r , dus $AM = r$.
Druk DM uit in r .
- Gebruik $\triangle CDM$ om r te berekenen.
- Bereken AC , BD en BC .
- Toon aan dat $\angle ACB = 90^\circ$.



9.2 Sinusregel

Je leert

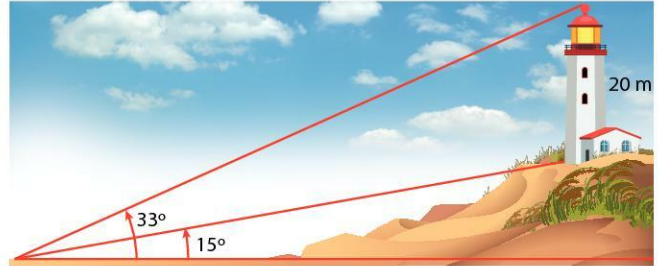
- wat de sinusregel is
- hoe je de sinusregel gebruikt om een lengte of een hoek te berekenen

Leerroutes

- ondersteunend: 8—9—010—10—11—012—13
- doorlopend: 8—9—10—11—12—13—14
- uitdagend: 8—9—10—12—13—14—U3

Een 20 meter hoge vuurtoren staat op een duintop. Vanaf een punt op het strand zie je de onderkant van de vuurtoren onder een hoek van 15° en de top onder een hoek van 33° .

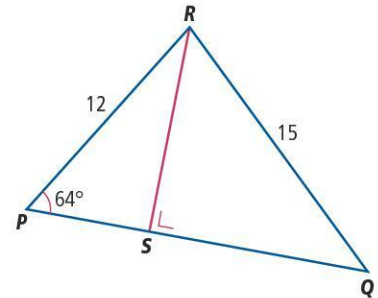
- Hoe zou je hulplijnen kunnen gebruiken om de hoogte van de duintop te berekenen?



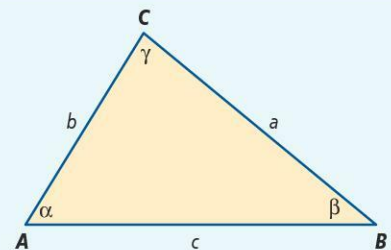
- 8 Gegeven is $\triangle PQR$ met $\angle P = 64^\circ$, $PR = 12$ en $QR = 15$. Lijnstuk RS is de hoogtelijn vanuit hoekpunt R .

- Bereken RS in twee decimalen.
- Bereken $\angle Q$ en $\angle PRQ$ in hele graden.
- Bereken PS , QS en PQ .
- Controleer dat bij benadering geldt

$$\frac{PQ}{\sin(\angle R)} = \frac{QR}{\sin(\angle P)} = \frac{PR}{\sin(\angle Q)}$$



In $\triangle ABC$ is $\angle A = \alpha$ en de lengte van de zijde tegenover hoekpunt A is a . Evenzo is $\angle B = \beta$ en $\angle C = \gamma$ en zijn b en c de lengten van de zijden tegenover deze hoeken.



- 9
- Teken een willekeurige driehoek ABC en zet de letters α , β , γ , a , b en c op de juiste plaats.
 - Teken de hoogtelijn CD in deze driehoek.
 - De lengte van hoogtelijn CD is h .
Leg uit dat $h = b \cdot \sin(\alpha)$ en $h = a \cdot \sin(\beta)$.
 - Verklaar dat uit opdracht c volgt: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$
 - Welke hoogtelijn heb je nodig om op dezelfde manier als in opdracht d te bewijzen dat $\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$?

Theorie

In elke driehoek geldt de **sinusregel**:

Als α , β en γ de hoeken zijn van een driehoek en de lengten van de tegenoverliggende zijden zijn a , b en c , dan geldt

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Je kunt de sinusregel gebruiken als je de lengte van een zijde en de grootte van de tegenoverliggende hoek kent.

Voorbeeld 1

In $\triangle ABC$ geldt $c = 8$, $\alpha = 52^\circ$ en $\gamma = 47^\circ$.
Bereken a en b .

Oplossing

$$c = 8, \text{ dus } \frac{a}{\sin(52^\circ)} = \frac{8}{\sin(47^\circ)}$$

$$\text{Daaruit volgt } a = \frac{8 \cdot \sin(52^\circ)}{\sin(47^\circ)} \approx 8,6.$$

$$\beta = 180^\circ - 52^\circ - 47^\circ = 81^\circ$$

$$\frac{b}{\sin(81^\circ)} = \frac{8}{\sin(47^\circ)} \text{ dus } b = \frac{8 \cdot \sin(81^\circ)}{\sin(47^\circ)} \approx 10,8.$$

Voorbeeld 2

In $\triangle PQR$ is $\angle P = 59^\circ$, $PQ = 17$ en $QR = 19$.
Bereken $\angle Q$ en $\angle R$.

Oplossing

Stel $PQ = c$, $PR = b$ en $QR = a$,

$$\text{dan geldt } \frac{19}{\sin(59^\circ)} = \frac{17}{\sin(\angle R)}$$

$$\text{Daaruit volgt } \sin(\angle R) = \frac{17 \cdot \sin(59^\circ)}{19} = 0,766...$$

$$\text{dus } \angle R \approx 50^\circ \text{ en } \angle Q \approx 180^\circ - 59^\circ - 50^\circ = 71^\circ.$$

Ondersteunende route → maak opdracht 010

10

H

Bereken de lengte van de onbekende zijden en de grootte van de hoeken van $\triangle ABC$. Maak zo nodig eerst een schets.

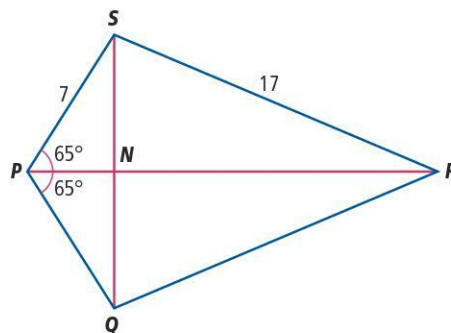
- a $a = 5$, $\alpha = 49^\circ$ en $\beta = 88^\circ$
- b $\alpha = 79^\circ$, $b = 13$ en $a = 17$
- c $AC = 45$, $\angle A = 67^\circ$ en $\angle C = 53^\circ$
- d $AB = 14$, $BC = 12$ en $\angle C = 82^\circ$

11

Van een vlieger $PQRS$ is gegeven:
 $PS = 7$, $RS = 17$ en $\angle QPR = \angle SPR = 65^\circ$.
Het snijpunt van de diagonalen is N .

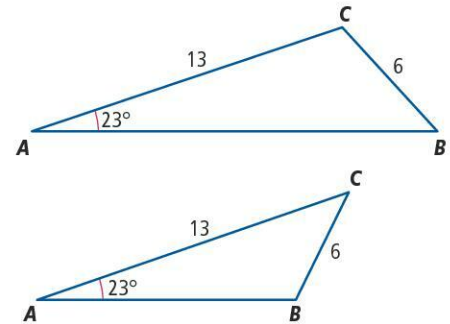
- a Bereken PN en SN in één decimaal.
- b Bereken RN en PR in één decimaal.
- c Bereken ook PR door de sinusregel toe te passen in $\triangle PRS$.

Rond bij alle berekeningen lengten af op één decimaal en hoeken op hele graden.



Ondersteunende route → maak opdracht 012

- 12** In beide driehoeken ABC geldt $\angle A = 23^\circ$, $AC = 13$ en $BC = 6$.
- Laat met een berekening zien dat in de bovenste driehoek geldt: $\angle B = 58^\circ$.
 - Bereken $\sin(\angle B)$ voor de onderste driehoek.
 - Ga met je rekenmachine na dat $\sin(180^\circ - 58^\circ) = \sin(58^\circ)$.
 - Hoe groot is $\angle B$ in de onderste driehoek?

**Theorie**

Voor een stompe hoek A geldt:

$$\sin(\angle A) = \sin(180^\circ - \angle A).$$

Daarom zijn er in sommige gevallen twee oplossingen mogelijk bij het rekenen met de sinusregel.

Voorbeeld

In de stomphoekige driehoek PQR is $PR = 10$, $QR = 7$ en $\angle P = 43^\circ$. Bereken $\angle Q$ en PQ .

Oplossing

De sinusregel geeft $\frac{7}{\sin(43^\circ)} = \frac{10}{\sin(\angle Q)}$, dus $\sin(\angle Q) = \frac{10 \cdot \sin(43^\circ)}{7} = 0,974\dots$

$\angle Q \approx 77^\circ$ (voldoet niet, want dan geldt $\angle R = 180^\circ - 43^\circ - 77^\circ = 60^\circ$ en dan is er geen stompe hoek)

of $\angle Q \approx 180^\circ - 77^\circ = 103^\circ$ en dus $\angle R = 180^\circ - 43^\circ - 103^\circ = 34^\circ$.

$$\frac{PQ}{\sin(34^\circ)} = \frac{7}{\sin(43^\circ)} \text{ dus } PQ = \frac{7 \cdot \sin(34^\circ)}{\sin(43^\circ)} \approx 5,7.$$

- 13** In $\triangle ABC$ geldt $\angle A = 30^\circ$, $AC = 12$ en $BC = 10$
H en in $\triangle DEF$ geldt $\angle D = 30^\circ$, $DF = 12$ en $EF = 6$.
 Eén van deze driehoeken is door deze gegevens vastgelegd, voor de andere driehoek zijn er twee mogelijkheden.
 Toon dit aan met tekeningen en berekeningen.

- 14** Gegeven $\triangle PQR$ met $\angle P = 30^\circ$ en $PR = 10$.
- Laat zien dat $\sin(\angle Q) = \frac{5}{QR}$
 - Leg uit waarom QR niet kleiner dan 5 kan zijn.
 - Welke waarden kan QR hebben als er twee verschillende driehoeken mogelijk zijn?

Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

010 In $\triangle ABC$ is $\alpha = 73^\circ$, $\beta = 32^\circ$ en $b = 10$.

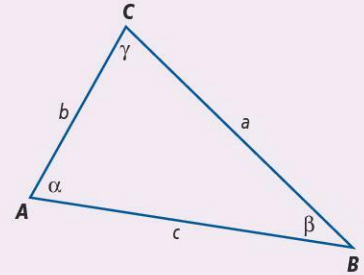
a Vul de gegevens in bij de sinusregel:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

b Bereken a .

c Bereken γ .

d Bereken c met behulp van $\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$



012 Van $\triangle ABC$ is gegeven: $AC = 8$, $BC = 5$ en $\angle A = 27^\circ$. In de tekening kun je zien dat er twee mogelijkheden zijn voor de plaats van punt B .

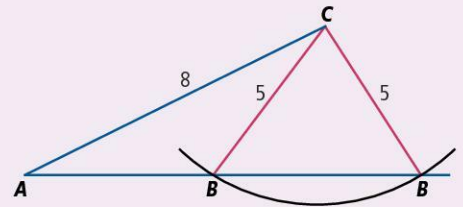
a Vul bij de sinusregel $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$ de gegevens in en

controleer met een berekening dat $\sin(\beta) \approx 0,726$.

b Bereken β .

c Bereken $180^\circ - \beta$ en controleer dat $\sin(180^\circ - \beta) = \sin(\beta)$.

d Bereken γ en AB voor elk van de twee mogelijke driehoeken.



Uitdagende opdrachten

U3 In $\triangle ABC$ zijn de punten D , E en F de middens van de zijden. De middelloodlijnen snijden elkaar in punt M .

Punt M is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van de driehoek. De straal van de omgeschreven cirkel is R .

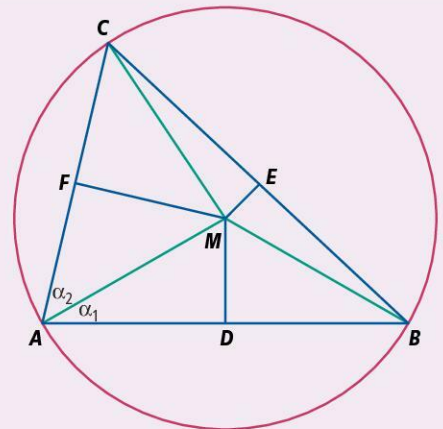
a Stel $\angle BAM = \alpha_1$, $\angle CAM = \alpha_2$ en $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$.

Welke hoek is gelijk aan α_1 ? En welke hoek is gelijk aan α_2 ?

b Druk $\angle BMC$ uit in α_1 en α_2 .

c Leg uit dat $\angle CME = \angle A = \alpha$.

d Laat zien dat $R = \frac{a}{2 \sin(\alpha)}$



9.3 Cosinusregel

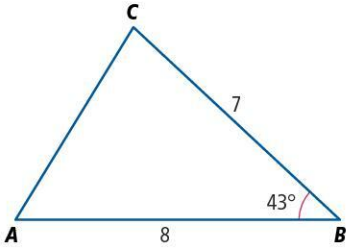
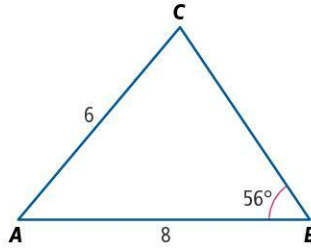
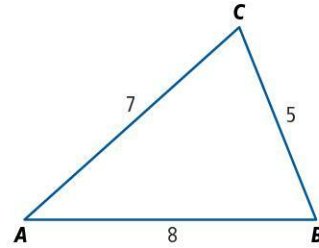
Je leert

- wat de cosinusregel is
- hoe je de cosinusregel gebruikt om een lengte of een hoek te berekenen

Leerroutes

- ondersteunend: 15—16—018—18—19—20—21—22
- doorlopend: 15—16—17—18—19—20—21—22
- uitdagend: 15—17—18—19—20—22—U4—U5

- Bij welke van deze driehoeken kun je $\angle C$ berekenen? Verklaar je antwoord.



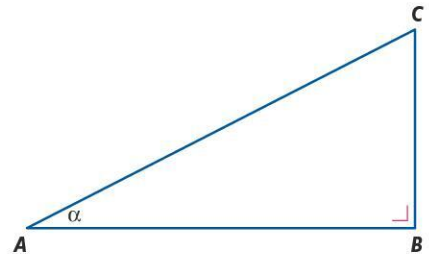
- 15** In $\triangle ABC$ is $\angle A = \alpha$ en $\angle B = 90^\circ$.

- Neem $\alpha = 40^\circ$ en $AC = 8$ en bereken $\angle C$, BC en AB .
- Voor elke waarde van α is $\sin(\alpha) = \frac{BC}{AC}$ en $\cos(\alpha) = \frac{AB}{AC}$

$$\text{Hieruit volgt: } (\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = \frac{BC^2 + AB^2}{AC^2}$$

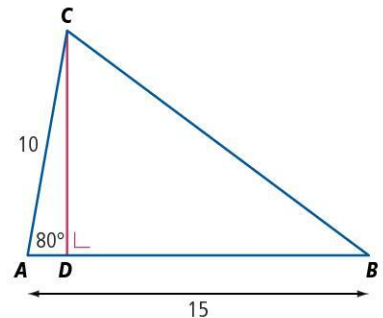
Leg dit uit.

- Toon aan dat uit opdracht b volgt dat voor elke waarde van α geldt dat $(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$.



- 16** In $\triangle ABC$ is $AC = 10$, $AB = 15$ en $\angle CAB = 80^\circ$. De driehoek wordt door de hoogtelijn CD in twee rechthoekige driehoeken opgedeeld.

- Bereken met behulp van $\sin(\angle A)$ de lengte van de hoogtelijn CD .
- Bereken AD en BD .
- Bereken BC nu in $\triangle BDC$.



17 Als b , c en α in $\triangle ABC$ bekend zijn, dan kun je een formule opstellen om a te berekenen. CD is de hoogtelijn uit punt C .

a Leg uit waarom $CD = b \cdot \sin(\alpha)$ en $BD = c - b \cdot \cos(\alpha)$.

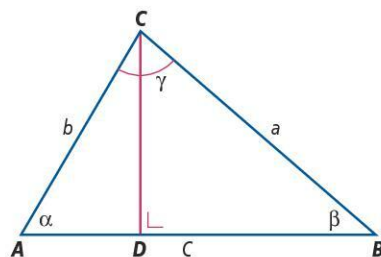
b In $\triangle BCD$ geldt $BC^2 = CD^2 + BD^2$.

Gebruik opdracht a om aan te tonen dat

$$a^2 = b^2 \cdot \sin^2(\alpha) + b^2 \cdot \cos^2(\alpha) - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) + c^2.$$

c Omdat $(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$ kun je het resultaat van opdracht b schrijven als $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$.

Laat dat zien.



Theorie

In een driehoek kun je de lengte van een zijde berekenen als je de lengte van de andere zijden en de grootte van de tegenoverliggende hoek kent. De regel die je gebruikt heet de **cosinusregel**.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$

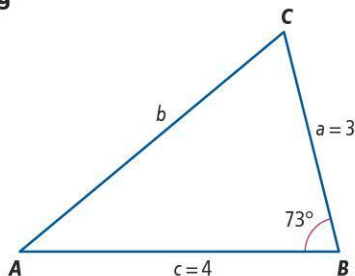
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

Je kunt deze formules ook gebruiken om de grootte van de hoeken te berekenen als je van een driehoek de lengte van alle drie zijden kent.

Voorbeeld 1

In $\triangle ABC$ is $AB = 4$, $BC = 3$ en $\angle B = 73^\circ$. Bereken AC .

Oplossing



Neem de cosinusregel met $b = AC$, dan geldt $b^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos(73^\circ) = 17,983...$
dus $AC = b = \sqrt{17,983...} \approx 4,2$.

Voorbeeld 2

In $\triangle ABC$ is $AB = 6$, $BC = 8$ en $AC = 9$. Bereken $\angle A$.

Oplossing

Neem de cosinusregel

met $\alpha = \angle A$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

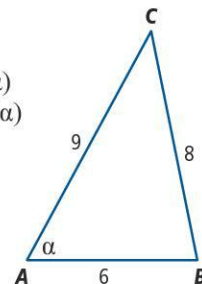
$$64 = 81 + 36 - 2 \cdot 9 \cdot 6 \cdot \cos(\alpha)$$

$$64 = 117 - 108 \cos(\alpha)$$

$$108 \cos(\alpha) = 53$$

$$\cos(\alpha) = \frac{53}{108} \text{ geeft } \alpha \approx 61^\circ.$$

dus $\angle A = 61^\circ$.



Ondersteunende route → maak opdracht 018

- 18** a Van $\triangle ABC$ is gegeven: $AB = 15$, $AC = 19$ en $\angle A = 39^\circ$.
Maak een schets en bereken BC .
- H** b Van $\triangle PQR$ is gegeven: $PQ = 35$, $PR = 13$ en $\angle P = 85^\circ$.
Bereken QR .
- c In $\triangle KLM$ is $KL = 15$, $LM = 18$ en $KM = 12$.
Bereken $\angle L$ en $\angle M$.
- 19** $\triangle ABC$ heeft zijden $a = 33$, $b = 56$ en $c = 65$.
- a Bereken γ .
- b Welke bijzonderheid heeft $\triangle ABC$?
- c De stelling van Pythagoras is eigenlijk een bijzonder geval van de cosinusregel.
Leg uit waarom dat zo is.
- 20** Gegeven is $\triangle DEF$ met $DE = 9$, $EF = 14$ en $DF = 8$.
- a Bereken $\angle F$ met de cosinusregel.
- b Bereken $\angle E$ met de sinusregel.
- c Laat met de cosinusregel zien dat $\cos(\angle D)$ negatief is.
- d Bereken $\angle D$ en controleer dat de som van de drie hoeken gelijk is aan 180° .

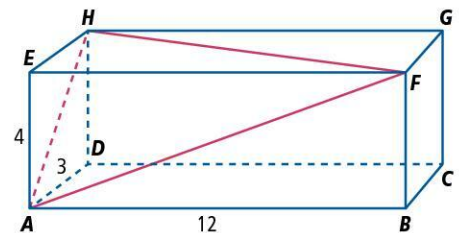
Theorie

De cosinus van een stompe hoek is negatief.
Voor een stompe hoek A geldt:
 $\cos(\angle A) = -\cos(180^\circ - \angle A)$.
Voor een rechte hoek geldt: $\cos(90^\circ) = 0$.

Voorbeeld

$$\begin{aligned}\cos(130^\circ) &= -\cos(50^\circ) \\ \cos(175^\circ) &= -\cos(5^\circ) \\ \cos(93^\circ) &= -\cos(87^\circ)\end{aligned}$$

- 21** Van een stomphoekige driehoek STU is gegeven: $ST = 13$, $TU = 6$ en $SU = 9$.
- a Tegenover welke zijde ligt de stompe hoek? Welke hoek is dus stomp?
- b Bereken de grootte van de stompe hoek.
- 22** Gegeven is de balk $ABCD.EFGH$ met $AD = 3$, $AB = 12$ en $AE = 4$.
- H** a Bereken exact AH , AF en FH .
- b Bereken de hoeken van $\triangle AFH$.



Uitdagende route → maak opdracht U4 en U5

018

Birk gaat PQ berekenen.

- Dennis moet ook een berekening maken over een ΔPOR .

d Welke waarde voor $\cos(\angle R)$ zal Dennis vinden?

e Bereken $\angle R$.

$\angle R = \gamma$, dus $QR = a$ en $PR = \dots$

Dan is $PQ = \dots$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

$$\dots = \dots + \dots - 2 \cdot \dots \cdot \dots \cdot \cos(\dots)$$

• • •

• • •

Kies $QR = a$, $PR = b$ und $PQ = c$.

Yulin:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

$$15^2 = \dots + \dots - 2 \cdot \dots \cdot \dots \cdot \cos(\angle R)$$

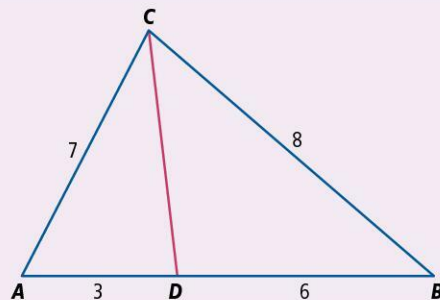
$$\dots \cos(\angle R) = \dots$$

$$\cos(\angle R) = \dots$$

U4

Op zijde AB ligt het punt D zodat $AD = 3$.

Bereken CD exact.



U5

- a** In $\triangle ABC$ geldt $AB = 15$, $AC = 10$ en $BC = 9$.
Bereken de grootte van de hoeken van deze driehoek.
- b** Als in een driehoek met zijden a , b en c geldt $a^2 > b^2 + c^2$
dan is $\angle A > 90^\circ$.
Verklaar de juistheid van deze bewering met behulp van de
cosinusregel.

9.4 Meetkunde in een rooster

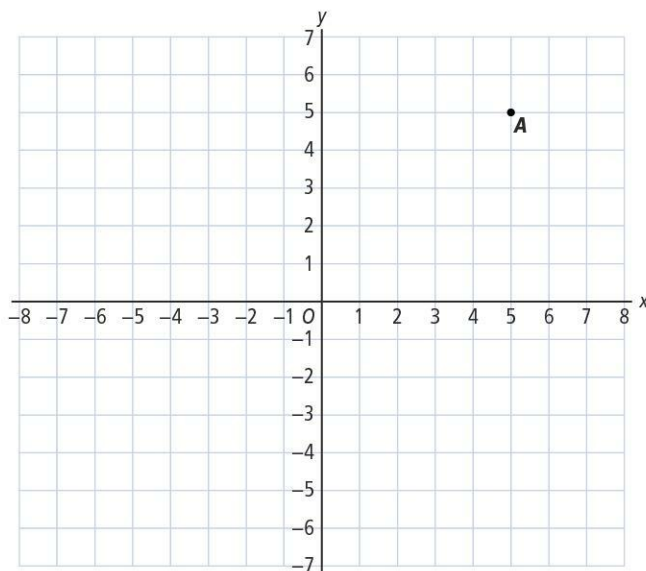
Je leert

- hoe je meetkundige vraagstukken in een rooster oplost

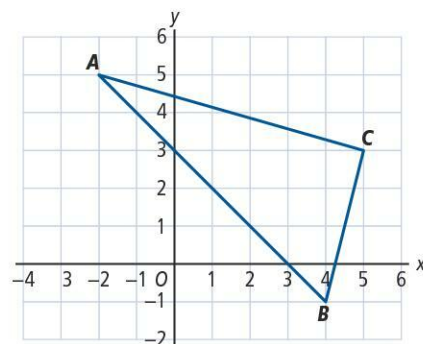
Leerroutes

- ondersteunend: 23—24—025—26—27—028—28—29
- doorlopend: 23—24—25—26—27—28—29—30
- uitdagend: 24—25—26—27—28—29—30—U6

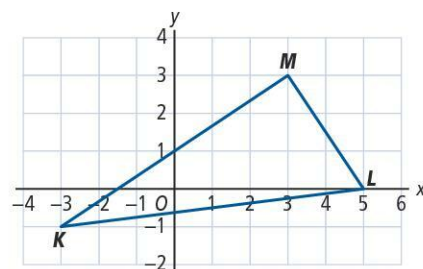
- W** In het assenstelsel is het roosterpunt $(5, 5)$ aangegeven. Er zijn nog meer roosterpunten die exact dezelfde afstand tot de oorsprong hebben als $(5, 5)$.
- Zoek al deze punten.



- 23** Gegeven zijn de punten $A(-2, 5)$, $B(4, -1)$ en $C(5, 3)$.
- Bereken de lengte van de zijden van $\triangle ABC$. Rond je antwoorden af op één decimaal.
 - Bereken $\angle B$.
 - Bereken ook de grootte van de andere twee hoeken van $\triangle ABC$.



- 24** Gegeven zijn de punten $K(-3, -1)$, $L(5, 0)$ en $M(3, 3)$.
- Bereken de lengte van de zijden van $\triangle KLM$.
 - Toon aan dat $\triangle KLM$ een rechthoekige driehoek is.
 - Bereken de oppervlakte van $\triangle KLM$.
 - Bereken de richtingscoëfficiënt van lijn KM en van lijn LM .
 - Toon met de richtingscoëfficiënten aan dat $\angle M = 90^\circ$.



Theorie

Meetkundige figuren kunnen gegeven zijn met behulp van coördinaten in een assenstelsel. Voor je berekeningen kun je dan onder andere gebruik maken van

- de formule $PQ = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$ voor de afstand tussen de punten P en Q .
- de richtingscoëfficiënt van een lijn
- de regel $m_1 \cdot m_2 = -1$ voor de richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 van twee lijnen die loodrecht op elkaar staan.

Voorbeeld

De hoekpunten van $\triangle ABC$ zijn $A(0, 4)$, $B(6, 1)$ en $C(7, 8)$.
Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van de zijde AB .

Oplossing

De richtingscoëfficiënt van de lijn AB is $\frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$, dus de richtingscoëfficiënt van de middelloodlijn is 2 en een vergelijking is $y = 2x + b$.

Het midden van zijde AB is $M(3, 2\frac{1}{2})$.

Door invullen van $x = 3$ en $y = 2\frac{1}{2}$ vind je $b = -3\frac{1}{2}$, dus een vergelijking van de middelloodlijn is $y = 2x - 3\frac{1}{2}$.

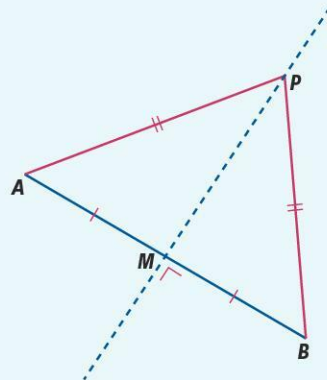
Ondersteunende route → maak opdracht 025

- 25** Gebruik dezelfde gegevens als in het voorbeeld.
- H**
- Stel een vergelijking op van de loodlijn uit C op zijde AB .
 - Bereken de afstand van C tot de zijde AB .
 - Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$.

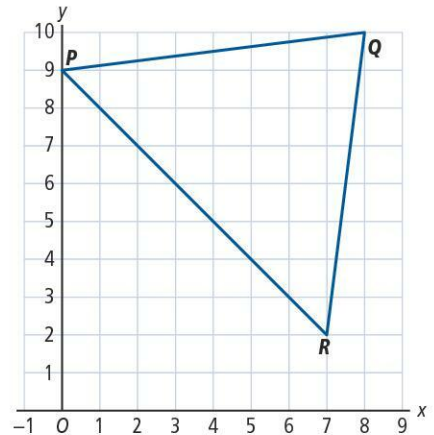
- 26** Gegeven zijn de punten $A(0, 2)$ en $B(6, 0)$ en lijn $m: y = 3x - 8$.
- Laat met een berekening zien dat m de middelloodlijn is van lijnstuk AB .
 - Kies een punt P dat op m ligt en toon aan dat $AP = BP$.
 - De coördinaten van een willekeurig punt X op m kun je noteren als $X(q, 3q - 8)$.
Toon aan dat $AX = \sqrt{10q^2 - 60q + 100}$.
 - Laat zien dat $AX = BX$ voor elke waarde van q .

Theorie

Alle punten op de middelloodlijn van een lijnstuk AB liggen op gelijke afstand van de punten A en B . Ook het omgekeerde geldt: als een punt op gelijke afstand van A en B ligt, dan ligt het punt op de middelloodlijn van lijnstuk AB .



- 27** Gegeven is $\triangle PQR$ met $P(0, 9)$, $Q(8, 10)$ en $R(7, 2)$.
- Toon aan dat $\triangle PQR$ een gelijkbenige driehoek is.
 - Stel een vergelijking op van de lijn n door Q die loodrecht op zijde PR staat.
 - Waarom is n de middelloodlijn van zijde PR ?
 - Er is een punt N op de x -as waarvoor geldt $PN = QN$. Bereken exact de coördinaten van N .



Ondersteunende route → maak opdracht O28

- 28** Op de lijn met vergelijking $y = 2x$ ligt een punt A . Verder is gegeven het punt $P(11, 0)$.
- Leg uit dat je de coördinaten van A kunt schrijven als $(a, 2a)$.
 - Druk AP uit in a .
 - Bereken exact de waarde(n) van a waarvoor geldt $AP = 13$.

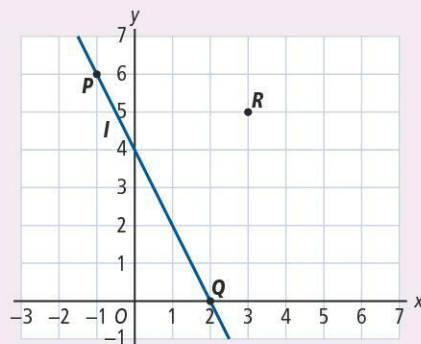
- 29** Gegeven is lijn m met vergelijking $2x + y = 10$.
- H**
 - Neem $x = p$ en toon aan dat elk punt P dat op lijn m ligt te schrijven is als $P(p, 10 - 2p)$.
 - Bereken p voor het geval dat $OP = 5$.
 - Bereken p voor het geval dat de lijn door O en P loodrecht op m staat.

- 30** Gegeven zijn de lijnen lijn l : $x + y = 4$, m : $y = 7x - 28$ en n : $y = -3x + 12$ en punt $P(2, 6)$.
- Toon aan dat P op n ligt.
 - Bereken $d(P, l)$ en $d(P, m)$.
 - Bereken de hoek tussen l en n .
 - Bereken de hoek tussen m en n .
 - Welke bijzondere lijn is n ?

Uitdagende route → maak opdracht U6

Ondersteunende opdrachten

- 025** In een assenstelsel liggen de punten $P(-1, 6)$, $Q(2, 0)$ en $R(3, 5)$. l is de lijn door P en Q .
- Bereken de richtingscoëfficiënt van l .
 - Stel een vergelijking op van l .
 - Gebruik de regel $m_1 \cdot m_2 = -1$ om de richtingscoëfficiënt van de loodlijn n uit R op l te berekenen.
 - Stel een vergelijking op van n .
 - Bereken de coördinaten van het snijpunt S van l en n .
 - Bereken exact de afstand van R tot l .
 - Bereken exact de oppervlakte van $\triangle PQR$. Gebruik je antwoord van opdracht f.



- 028** Gegeven de lijn l met vergelijking $y = x$ en punt $Q(0, 6)$.
- Neem $x = p$, dan is ook $y = p$.
 $P(p, p)$ is een punt op l .
 Er geldt $PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$.
 Laat zien dat hieruit volgt $PQ = \sqrt{2p^2 - 12p + 36}$.
 - Er zijn waarden van p waarvoor geldt $PQ = \sqrt{50}$.
 Bereken deze waarden van p .
 - Geef de coördinaten van de punten P .

Uitdagende opdrachten

- U6** Gegeven zijn de punten $A(3, 5)$ en $B(11, 3)$.
 In deze opdracht ga je langs algebraïsche weg zoeken naar alle punten P die even ver van A als van B liggen, dus waarvoor geldt $AP = BP$.
 Stel de coördinaten van P zijn (x, y) . Dan geldt $AP = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 5)^2}$.
- Druk ook de afstand BP uit in x en y .
 - Als een punt P even ver van A als van B ligt, geldt $AP = BP$. Op het blaadje is een begin gemaakt met de herleiding van de bijbehorende vergelijking.
 Maak deze herleiding af en toon daarmee aan dat alle punten P op een rechte lijn liggen.
 - Leg uit dat de lijn die je in opdracht b hebt gevonden de middelloodlijn van lijnstuk AB is.

•	$\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 5)^2} = \sqrt{(\dots)^2 + (\dots)^2}$
•	$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = (\dots)^2 + (\dots)^2$
•	$x^2 - 6x + 9 + y^2 - \dots + \dots = \dots$
•	
•	

9.5 Een aanpak kiezen

Je leert

- hoe je bij een meetkundig probleem verschillende oplossingsmethoden gebruikt

Leerroutes

- ondersteunend: 31–32–33–34–035–35–36
- doorlopend: 31–32–33–34–35–36–37
- uitdagend: 31–32–33–35–36–37–U7

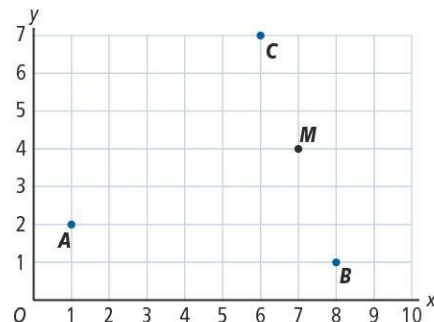
In het assenstelsel liggen de punten $A(1, 2)$,

$B(8, 1)$, $C(6, 7)$ en $M(7, 4)$.

Lijnstuk AM is de middelloodlijn van lijnstuk BC .

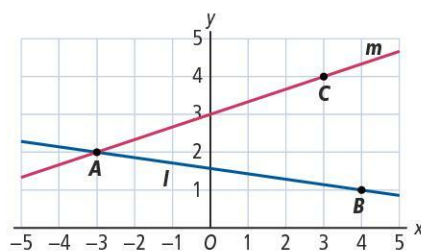
Er zijn verschillende manieren om dit aan te tonen.

- Op welke manieren zou dit kunnen?



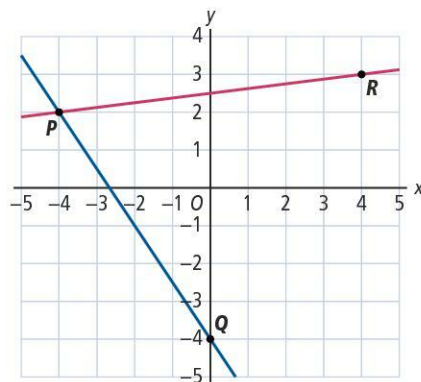
- 31** In een assenstelsel zijn gegeven de punten $A(-3, 2)$, $B(4, 1)$ en $C(3, 4)$. Lijn l gaat door A en B en lijn m gaat door A en C .

- Stel een vergelijking op van l .
- Stel een vergelijking op van m .
- Bereken de hoek tussen l en m .
- Bereken AB , AC en BC en toon aan dat $\triangle ABC$ een rechthoekige driehoek is.
- Bereken $\angle BAC$ door gebruik te maken van het feit dat $\triangle ABC$ rechthoekig is.



- 32** In een assenstelsel liggen de punten $P(-4, 2)$, $Q(0, -4)$ en $R(4, 3)$.

- Stel een vergelijking op van de lijn PQ .
- Stel een vergelijking op van de lijn PR .
- Bereken $\angle(PQ, PR)$.
- Toon met berekeningen aan dat $\triangle PQR$ gelijkbenig is.
- Bereken de coördinaten van het midden van lijnstuk PQ .
- Bereken $\angle QPR$ door $\triangle PQR$ te verdelen in twee rechthoekige driehoeken.



Theorie

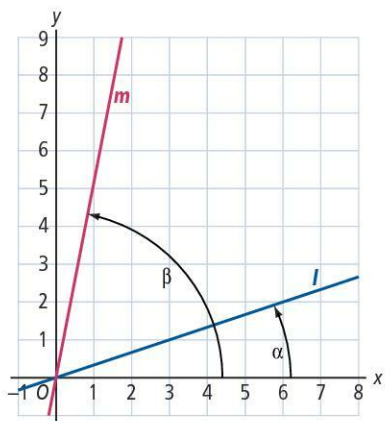
Bij het oplossen van meetkundige vraagstukken kun je gebruik maken van verschillende hulpmiddelen:

- de stelling van Pythagoras
- de sinus, cosinus of tangens in een rechthoekige driehoek
- de sinusregel of de cosinusregel
- het berekenen van de afstand tussen punten in een rooster
- het opstellen van een vergelijking van een (lood)lijn.

Voorbeeld 1

Gegeven zijn de lijnen $l: y = \frac{1}{3}x$ en $m: y = 5x$.
Bereken de hoek tussen l en m .

Oplossing



De richtingscoëfficiënt van l is $\frac{1}{3}$, dus $\tan(\alpha) = \frac{1}{3}$.

De richtingscoëfficiënt van m is 5, dus $\tan(\beta) = 5$.

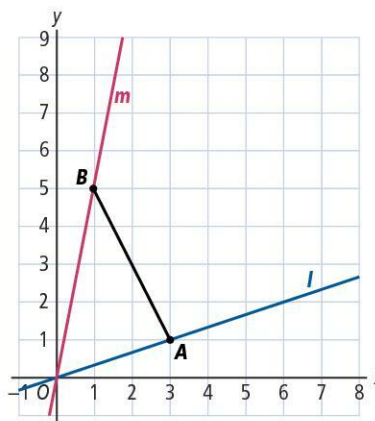
$\alpha \approx 18,4^\circ$ en $\beta \approx 78,7^\circ$

De hoek tussen l en m is $\beta - \alpha \approx 60^\circ$.

Voorbeeld 2

Gegeven zijn de lijnen $l: y = \frac{1}{3}x$ en $m: y = 5x$.
Bereken de hoek tussen l en m .

Oplossing



$A(3, 1)$ ligt op l en $B(1, 5)$ ligt op m .

$OA = \sqrt{10}$, $OB = \sqrt{26}$ en $AB = \sqrt{20}$

Pas de cosinusregel toe:

$$(\sqrt{20})^2 = (\sqrt{26})^2 + (\sqrt{10})^2 - 2 \cdot \sqrt{26} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos(\angle AOB)$$

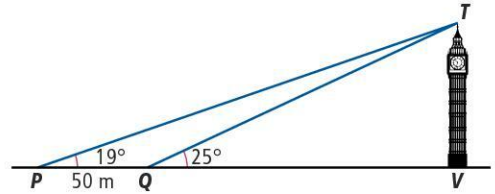
Hieruit volgt $\cos(\angle AOB) \approx 0,496$,

dus $\angle(l, m) = \angle AOB \approx 60^\circ$.

33 Gegeven is $\triangle ABC$ met $A(-3, 0)$, $B(10, -1)$ en $C(3, 1)$.

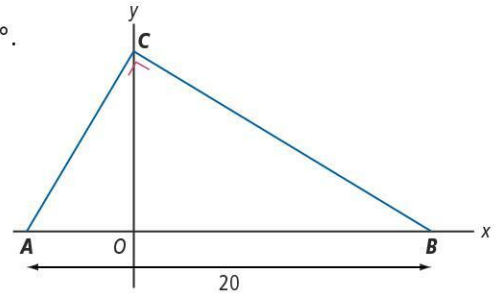
- Bereken de richtingscoëfficiënten van de zijden van $\triangle ABC$.
- Bereken de grootte van de drie hoeken van $\triangle ABC$ met behulp van de richtingscoëfficiënten.
- Bereken de grootte van de drie hoeken van $\triangle ABC$ opnieuw, maar nu door gebruik te maken van cosinusregel en/of sinusregel.

- 34** Vanaf een punt P zie je de top van de toren onder een hoek van 19° . Als je 50 meter in de richting van de toren bent gelopen, zie je de top van de toren onder een hoek van 25° . Bereken de hoogte van de toren. Rond af op hele meters.

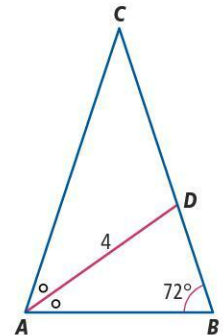


Ondersteunende route → maak opdracht 035

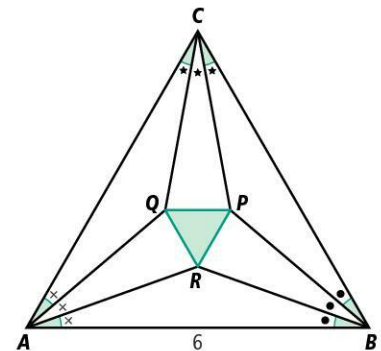
- 35** In een assenstelsel liggen de punten A en B op de x -as, waarbij $AB = 20$. Op de y -as ligt punt $C(0, 8)$ en $\angle ACB = 90^\circ$.
- Stel $B(b, 0)$ en druk de coördinaten van A uit in b .
 - Druk de richtingscoëfficiënten van AC en BC uit in b .
 - Gebruik de richtingscoëfficiënten om de waarden van b te berekenen.
 - Leg uit waarom $\triangle AOC \sim \triangle COB$.
 - Bereken de waarden van b opnieuw, nu door gebruik te maken van de gelijkvormigheid van opdracht d.



- 36** Gegeven is $\triangle ABC$ met $\angle A = \angle B = 72^\circ$. Lijnstuk AD is de bissectrice van hoek A en $AD = 4$. Bereken de lengte van de zijden van $\triangle ABC$.

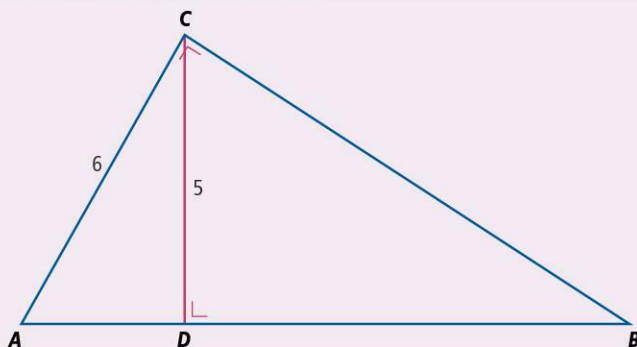


- 37** Trisectrices zijn lijnen die een hoek in drie gelijke hoeken verdelen. In de gelijkzijdige driehoek ABC met $AB = 6$ sluiten de trisectrices van de hoeken een gelijkzijdige driehoek PQR in. Bereken de lengte van de zijden van $\triangle PQR$.



Uitdagende route → maak opdracht U7

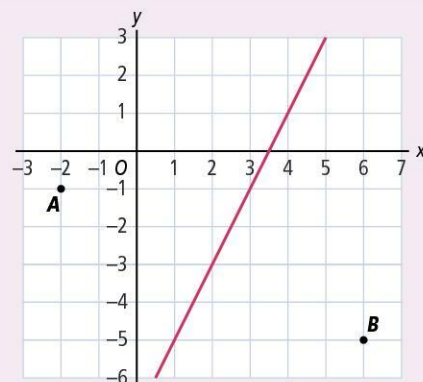
Ondersteunende opdrachten



- 035** Gegeven $\triangle ABC$ met $\angle C = 90^\circ$ en $AC = 6$.
De hoogtelijn CD heeft lengte 5.
- Bereken AD .
 - Waarom geldt $\angle CAD = \angle BCD$?
 - Leg uit waarom $\triangle CAD \sim \triangle BCD$.
 - Gebruik de gelijkvormigheid om BD te berekenen.

Uitdagende opdrachten

- U7** In een assenstelsel liggen de punten $A(-2, -1)$ en $B(6, -5)$.
- Toon aan dat lijn l met vergelijking $y = 2x - 7$ de middelloodlijn van lijnstuk AB is.
 - De coördinaten van een willekeurig punt X op de lijn l kun je noteren als $(p, 2p - 7)$.
Toon met een berekening aan dat $AX = BX$ voor elke waarde van p .
 - Bereken de waarden van p waarvoor geldt dat $\triangle ABX$ een rechthoekige driehoek is.
 - Bereken in één decimaal de waarden van p waarvoor geldt dat $\triangle ABX$ een gelijkzijdige driehoek is.



9.6 Gemengde opdrachten

- 38** Bereken de lengte van de onbekende zijden en de grootte van de overige hoeken van $\triangle ABC$.

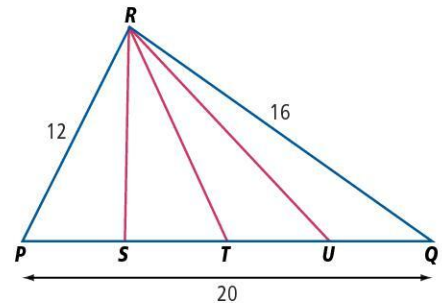
- a $a = 12, b = 13$ en $\beta = 93^\circ$
- b $AC = 14, \angle A = 22^\circ$ en $\angle C = 79^\circ$
- c $a = 3,3, b = 5,6$ en $c = 6,5$

- 39** In een assenstelsel liggen de punten $K(-7, 3), L(6, -3)$ en $M(5, 8)$.

- a Bereken KL, KM en LM .
- b Bereken de hoeken van $\triangle KLM$.
- c Bereken de lengte van de hoogtelijn MN .
- d Bereken de oppervlakte van $\triangle KLM$.

- 40** In $\triangle PQR$ geldt $PQ = 20, PR = 12$ en $QR = 16$. De punten S, T en U delen de zijde PQ in vier gelijke delen.

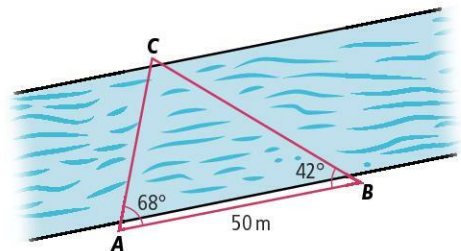
- a Laat zien dat uit de gegevens volgt dat $\angle PRQ = 90^\circ$.
- b Bereken de lengten van RS, RT en RU , afgerond op twee decimalen.



- 41** Gegeven zijn de lijnen $l_p: y = px$ en de punten $A(0, 10)$ en $B(0, 5)$.

- a Kies $p = -1$ en stel een vergelijking op van een lijn m door A en loodrecht op l_{-1} .
- b Bereken de coördinaten van het snijpunt S van l_{-1} en m .
- c Toon met een berekening aan dat $BS = 5$.
- d Kies nu $p = 4$ en stel een vergelijking op van een lijn m door A en loodrecht op l_4 .
- e Bereken BS voor de situatie van opdracht d.
- f Welk vermoeden kun je formuleren over de ligging van de punten S voor alle mogelijke waarden van p ?

- 42** Luuk wil de breedte van het kanaal weten. Langs de oevers van het kanaal staan de bomen A en B . De afstand tussen de bomen A en B is 50 meter. Aan de overkant van het kanaal staat een paal C . Luuk heeft twee hoeken gemeten, ze staan in de tekening. Bereken de breedte van het kanaal.



- 43** Van veel punten, bijvoorbeeld de toppen van kerktorens, zijn de coördinaten in Nederland vastgelegd door middel van de Rijksdriehoeksmeting.

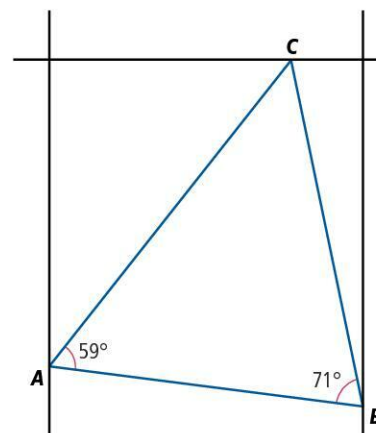
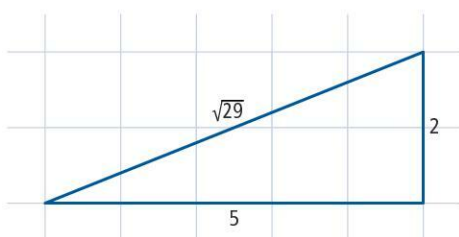
De tekening toont een landmeetkundig probleem.

Van twee punten A en B zijn de coördinaten bekend en de hoeken CAB en CBA zijn gemeten. Hiermee kunnen de coördinaten van C worden berekend.

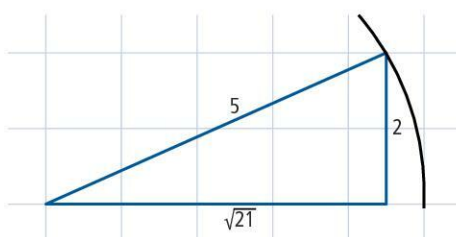
In dit geval zijn de gegevens:

$A(162, 384)$, $B(208, 375)$, $\angle CAB = 59^\circ$ en $\angle CBA = 71^\circ$.

Maak een plan voor alle tussenstappen en bereken de coördinaten van C . Rond af op één decimaal.



methode I



methode II

- 44** In een rooster kun je lijnstuk met lengte $\sqrt{29}$ construeren door een rechthoekige driehoek te tekenen waarvan de hoekpunten roosterpunten zijn. Een lijnstuk met lengte $\sqrt{21}$ kun je construeren door vanuit een roosterpunt een cirkel met straal 5 te tekenen en die te snijden met een horizontale lijn die twee eenheden hoger ligt.

a Construeer lijnstukken met lengte $\sqrt{34}$ en met lengte $\sqrt{7}$.

b Als het getal a een kwadraat is, dan is $\sqrt{a}$ een geheel getal en is een lijnstuk met lengte $\sqrt{a}$ eenvoudig te tekenen.

Voor andere gehele waarden van a is het tekenen van een lijnstuk met lengte $\sqrt{a}$ soms wel en soms niet mogelijk.

Beantwoord voor alle gehele getallen a van 1 tot en met 30 de volgende vragen.

- is het mogelijk een lengte $\sqrt{a}$ te construeren met methode I of met methode II?
- als het mogelijk is, kan het op één manier of zijn er meer mogelijkheden?

Vaardigheid

Je kunt gelijkvormigheid gebruiken om lengten te berekenen.

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze een vergroting (of een verkleining) zijn van elkaar. Dit is het geval als:

- overeenkomstige hoeken even groot zijn.
- als er een vaste verhouding tussen overeenkomstige zijden bestaat.

Voorbeeld

Van $\triangle ABC$ is gegeven dat $\angle A = \angle EDC = 58^\circ$.
Verder is gegeven: $CE = 4$, $CD = 3$, $DE = 4,8$ en $AB = 12$.
Bereken AE en BD .

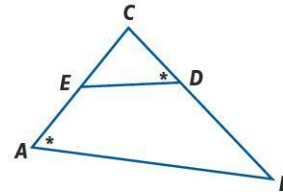
Oplossing

Omdat $\angle C$ in beide driehoeken voorkomt en beide driehoeken een hoek van 58° hebben, zijn $\triangle ABC$ en $\triangle DEC$ gelijkvormig.

De vergrotingsfactor is $12 : 4,8 = 2\frac{1}{2}$,

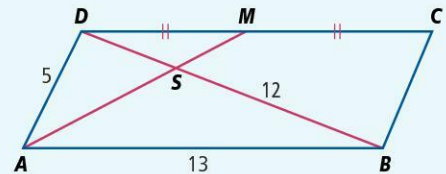
dus $BC = 2\frac{1}{2} \times 4 = 10$ en $AC = 2\frac{1}{2} \times 3 = 7\frac{1}{2}$

dus $BD = 10 - 3 = 7$ en $AE = 7\frac{1}{2} - 4 = 3\frac{1}{2}$



$AB = 12$	BC	AC
$DE = 4,8$	$CE = 4$	$CD = 3$

- S1** In parallellogram $ABCD$ is M het midden van zijde CD .
Punt S is het snijpunt van de lijnstukken AM en BD .
 $AB = 13$, $AD = 5$ en $BD = 12$.
Bereken BS en DS .



Vaardigheid

Je kunt de sinusregel gebruiken om een lengte of een hoek te berekenen.

In driehoeken geldt de sinusregel:

Als α , β , γ de grootte van de hoeken zijn van een driehoek en de lengten van de tegenoverliggende zijden zijn a , b en c , dan geldt:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Voor een stompe hoek A geldt:

$$\sin(\angle A) = \sin(180^\circ - \angle A).$$

Daarom zijn er in sommige gevallen twee oplossingen mogelijk bij het rekenen met de sinusregel.

Voorbeeld

Van een scherphoekige driehoek ABC is gegeven: $\angle C = 65^\circ$, $AB = 7$ en $AC = 4$.
Bereken de andere hoeken van $\triangle ABC$.

Oplossing

$$\frac{7}{\sin(65^\circ)} = \frac{4}{\sin(\angle B)}$$

$$\sin(\angle B) = \frac{4 \cdot \sin(65^\circ)}{7} \approx 0,517...$$

$$\angle B \approx 31^\circ$$

$$\angle A \approx 180^\circ - 65^\circ - 31^\circ = 84^\circ$$

- S2** a Van $\triangle ABC$ is gegeven: $\angle A = 42^\circ$, $\angle C = 81^\circ$ en $AB = 11$.
Bereken AC en BC .
- b Van $\triangle PQR$ is gegeven: $\angle P = 48^\circ$, $PQ = 13$ en $QR = 10$.
Bereken $\angle Q$ en PR .

Vaardigheid

Je kunt de cosinusregel gebruiken om een lengte of een hoek te berekenen.

In een driehoek kun je een zijde berekenen als je de lengte van de andere zijden en de grootte van de tegenoverliggende hoek kent. De regel die je gebruikt heet de cosinusregel.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

Je kunt deze formules ook gebruiken om in een driehoek de grootte van de hoeken te berekenen als je de lengte van alle zijden kent.

Voorbeeld 1

Van $\triangle ABC$ is gegeven: $a = 5$, $c = 7$ en $\beta = 122^\circ$.
Bereken b .

Oplossing

$$\begin{aligned} b^2 &= 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos(122^\circ) \approx \\ 25 + 49 - 37,09 &= 111,09 \\ \text{dus } b &\approx 10,5. \end{aligned}$$

Voorbeeld 2

Van $\triangle ABC$ is gegeven: $a = 5$, $b = 7$ en $c = 9$.
Bereken α .

Oplossing

$$\begin{aligned} 5^2 &= 7^2 + 9^2 - 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \cos(\alpha) \\ 25 &= 130 - 126 \cos(\alpha) \\ 126 \cos(\alpha) &= -105 \\ \cos(\alpha) &= \frac{-105}{126} \approx -0,833 \dots \text{ dus } \alpha \approx 146^\circ. \end{aligned}$$

- S3** a Van $\triangle ABC$ is gegeven: $AB = 5$, $BC = 7$ en $AC = 9$.
Bereken de grootte van de hoeken van $\triangle ABC$.
- b In $\triangle KLM$ geldt $\angle K = 117^\circ$, $KL = 15$ en $KM = 7$.
Bereken LM .

Vaardigheid

Je kunt meetkundige vraagstukken in een rooster oplossen.

Je kunt gebruik maken van

- de afstand tussen twee punten P en Q is $PQ = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$
- de richtingscoëfficiënt van een lijn
- de regel $m_1 \cdot m_2 = -1$ voor de richtingscoëfficiënten van twee lijnen die loodrecht op elkaar staan.

Voorbeeld

Op de lijn l met vergelijking $y = -3x + 20$ liggen twee punten waarvoor geldt dat de afstand tot de oorsprong gelijk is aan $\sqrt{50}$.

Bereken de coördinaten van deze punten.

Oplossing

Kies een punt P op l met coördinaten $P(a, -3a + 20)$.

De afstand tot de oorsprong is

$$OP = \sqrt{(a - 0)^2 + (-3a + 20 - 0)^2} = \sqrt{a^2 + 9a^2 - 120a + 400} = \sqrt{10a^2 - 120a + 400}$$

$$\sqrt{10a^2 - 120a + 400} = \sqrt{50}$$

$$10a^2 - 120a + 400 = 50$$

$$10a^2 - 120a + 350 = 0$$

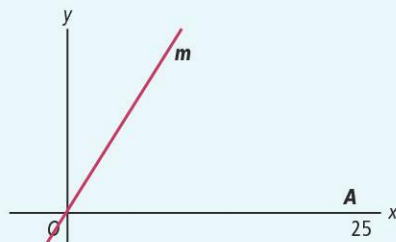
$$a^2 - 12a + 35 = 0$$

$$(a - 5)(a - 7) = 0$$

$$a = 5 \text{ of } a = 7$$

De coördinaten van de gezochte punten zijn $(5, 5)$ en $(7, -1)$.

- S4** In een assenstelsel is de lijn m met vergelijking $y = 2x$ getekend en het punt $A(25, 0)$. Op de lijn m liggen twee punten P en Q waarvoor geldt $AP = 2 \cdot OP$ en $AQ = 2 \cdot OQ$. Bereken coördinaten van P en van Q .



Vaardigheid

Je kunt bij een meetkundig probleem verschillende oplossingsmethoden gebruiken.

Bij het oplossen van meetkundige vraagstukken kun je gebruik maken van verschillende hulpmiddelen:

- de stelling van Pythagoras
- de sinus, cosinus of tangens in een rechthoekige driehoek
- de sinusregel of de cosinusregel
- het berekenen van de afstand tussen punten in een rooster
- het opstellen van een vergelijking van een (lood)lijn.

Voorbeeld

In het assenstelsel liggen een vierkant $OABC$ met zijde 6 en een gelijkzijdige driehoek ADB . Bereken CD .

Oplossing 1

$M(6, 3)$ is het midden van zijde AB .
Met de stelling van Pythagoras vind je

$$MD = \sqrt{27}, \text{ dus } D(6 + \sqrt{27}, 3).$$

$$CD^2 = (6 + \sqrt{27})^2 + 3^2 = 134,353\dots$$

$$CD \approx 11,6$$

Oplossing 2

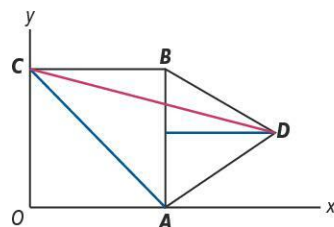
$\angle CAB = 45^\circ$ en $\angle BAD = 60^\circ$
dus $\angle CAD = 105^\circ$ en

$$AC = \sqrt{72}$$

cosinusregel:

$$CD^2 = (\sqrt{72})^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{72} \cdot \cos(105^\circ) = 134,353\dots$$

$$CD \approx 11,6$$

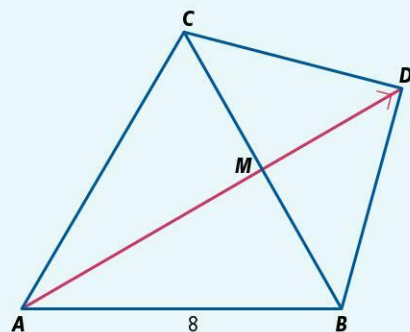


S5 Gegeven is een gelijkzijdige driehoek ABC met zijde 8 en een driehoek BCD met $BD = CD$ en $\angle D = 90^\circ$.

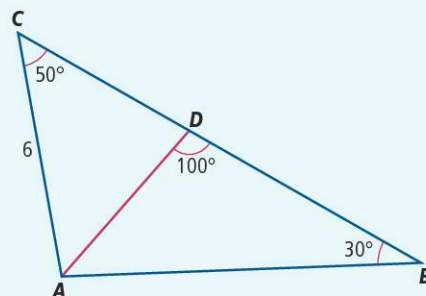
M is het midden van lijnstuk BC .

Je gaat AD berekenen op twee manieren.

- Bereken $\angle ABD$ en vervolgens AD .
- Leg uit waarom $\angle AMB = 90^\circ$ en bereken AM , MD en vervolgens AD .



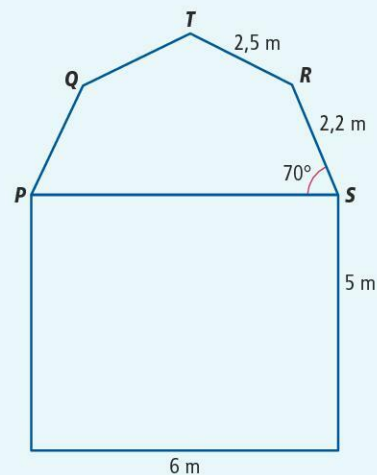
- T1** Gegeven is $\triangle ABC$ met $\angle B = 30^\circ$ en $\angle C = 50^\circ$.
Op zijde BC ligt een punt D zo dat $\angle ADB = 100^\circ$.
Verder geldt $AC = 6$.
- Bereken AB en BD .
 - Welke twee driehoeken in deze figuur zijn gelijkvormig?
 - Toon aan dat $AD \approx 4,67$.
 - Bereken de lengte van alle andere lijnstukken in deze figuur.



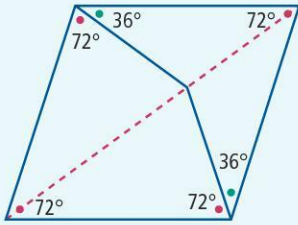
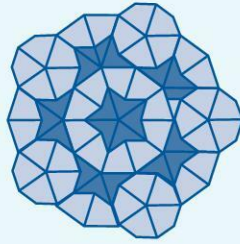
- T2** Gegeven $\triangle PQR$ met $\angle P = 83^\circ$, $PQ = 7$ en $QR = 12$.
- Bereken $\angle Q$ en $\angle R$.
 - Bereken PR .
 - In $\triangle ABC$ geldt $AB = 23$, $AC = 17$ en $\angle A = 56^\circ$.
Bereken BC .
 - In $\triangle PQR$ geldt $PQ = 13$, $QR = 9$ en $PR = 20$.
Bereken de hoeken van deze driehoek.

- T3** In een assenstelsel liggen de punten $D(-4, 4)$, $E(2, -6)$ en $F(7, -3)$.
- Bereken DE , EF en DF .
 - Toon aan dat $\triangle DEF$ een rechthoekige driehoek is.
 - Bereken de oppervlakte van $\triangle DEF$.
 - Bereken de afstand van punt E tot zijde DF .

- T4** De schets stelt de symmetrische voorgevel voor van een huis met een zogenaamd Mansarde-dak.
Een aantal lengtematen staat in de tekening. De hoek tussen de steilste dakdelen en een horizontale lijn is 70° .
Geef je antwoorden in meters en rond af op twee decimalen.
- Bereken de hoogte van de punten Q en R boven de lijn PS .
 - Bereken de lengte van QR .
 - Bereken de totale hoogte van het huis.



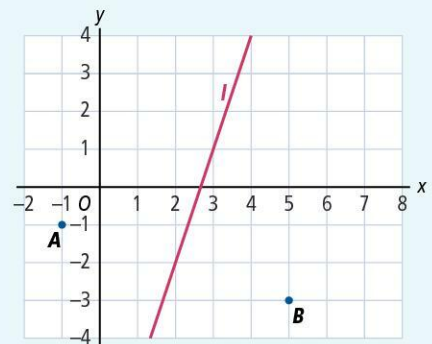
- T5** Van $\triangle PQR$ is gegeven: $\angle P = 39^\circ$, $PQ = 14$ en $QR = 11$.
- Laat zien dat met deze gegevens twee verschillende driehoeken kunnen worden getekend.
 - Bereken voor elk van deze driehoeken $\angle Q$ en $\angle R$.



- T6** Het patroon dat je hiernaast en hierboven ziet, is genoemd naar de Engelse wiskundige Sir Roger Penrose. De patronen zijn allemaal opgebouwd met behulp van de twee figuren die je hierboven ziet: een vlieger en een pijlpunt. De hoeken staan in de figuur. Neem aan dat de langste zijden van deze figuren een lengte van 25 cm hebben. Bereken de lengte van alle overige lijnstukken in de vlieger en de pijlpunt.

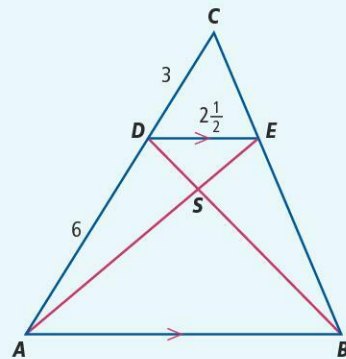


- T7** In een assenstelsel liggen de punten $O(0, 0)$, $Q(0, 13)$ en een punt P , dat in het tweede kwadrant ligt. Verder is gegeven $PQ = 7$ en $\angle OQP = 73^\circ$. Bereken de coördinaten van punt P .
- T8** Vanaf een punt P lopen twee wegen. Weg PQ gaat 1,5 km naar het zuiden en weg PR gaat 1,0 km naar het noordoosten.
- Hoe ver zijn de twee eindpunten Q en R van elkaar verwijderd?
 - Bereken $\angle PQR$.
 - Bereken $\angle PRQ$.
- T9** In een assenstelsel liggen de punten $A(-1, -1)$ en $B(5, -3)$.
- Toon aan dat lijn l met vergelijking $y = 3x - 8$ de middelloodlijn van AB is.
 - De coördinaten van een willekeurig punt X op de lijn l kun je noteren als $(p, 3p - 8)$. Toon met een berekening aan dat $AX = BX$ voor elke waarde van p .
 - Punt M is het midden van lijnstuk AB . Maak een tekening met de punten A , B , M en een willekeurig punt X op de middelloodlijn van AB .
 - Gebruik de driehoeken AMX en BMX om aan te tonen dat $AX = BX$.



Je kunt gelijkvormigheid gebruiken om lengten te berekenen.

- E1** Op de zijden van driehoek ABC liggen de punten D en E , waarbij $DE \parallel AB$.
 Verder geldt $AD = 6$, $CD = 3$, $DE = 2\frac{1}{2}$ en $BD = 7$.
- Waarom zijn de driehoeken ABC en DEC gelijkvormig?
 - Bereken AB .
 - Bereken BS en DS .



Je kunt de sinusregel gebruiken om een lengte of een hoek te berekenen.

- E2**
 - Van $\triangle ABC$ is gegeven: $AB = 22$, $\angle B = 12^\circ$ en $\angle C = 82^\circ$. Bereken AC en BC .
 - Van $\triangle DEF$ is gegeven: $DE = 14$, $\angle D = 21^\circ$ en $EF = 7$. Er zijn twee driehoeken die aan deze gegevens voldoen. Bereken voor elk van deze driehoeken $\angle E$ en $\angle F$.

Je kunt de cosinusregel gebruiken om een lengte of een hoek te berekenen.

- E3**
 - Van $\triangle KMN$ is gegeven: $\angle K = 47^\circ$, $KN = 13$ en $KM = 15$. Bereken MN .
 - Van $\triangle STU$ is gegeven: $ST = 17$, $TU = 8$ en $SU = 10$. Bereken de grootte van de hoeken van $\triangle STU$.

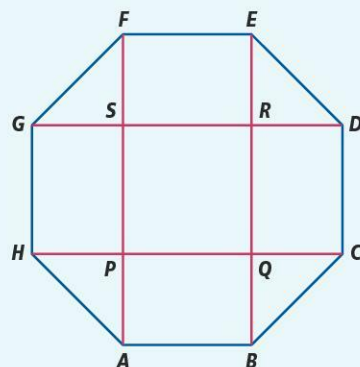
Je kunt meetkundige vraagstukken in een rooster oplossen.

- E4** In een assenstelsel liggen de punten $P(-3, 5)$, $Q(1, -2)$ en $R(5, 6)$.
- Bereken de lengte van de zijden van $\triangle PQR$ en toon aan dat $\triangle PQR$ gelijkbenig is.
 - Stel een vergelijking op van de loodlijn uit P op de lijn QR .

Je kunt bij een meetkundig probleem verschillende oplossingsmethoden gebruiken.

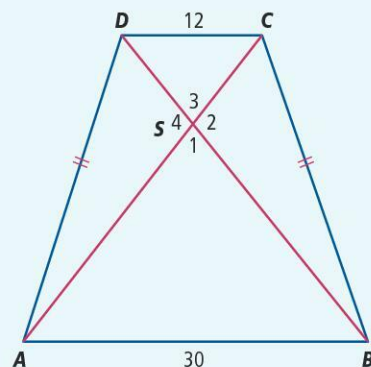
E5 Gegeven is de regelmatige achthoek $ABCDEFGH$ met zijde 4.

- Bereken $\angle DHC$ door een geschikt assenstelsel te kiezen en een richtingscoëfficiënt te gebruiken.
- Leg uit dat $\angle EHC = 45^\circ$ en gebruik dit om de exacte grootte van $\angle DHC$ te vinden.



E6 Vierhoek $ABCD$ is een gelijkbenig trapezium, dus $AD = BC$. $AB = 30$, $CD = 12$ en $AC = BD = 33$.

- Bereken AS en CS .
- Bereken de grootte van alle hoeken bij punt S .
- Bereken AD .



E7 Bij een speurtocht moet een afstand van 500 meter worden gelopen in noordoostelijke richting, en daarna 200 meter in zuidoostelijke richting.

Beschouw het startpunt als de oorsprong van een assenstelsel, met de x -as naar het oosten en de y -as naar het noorden.

- Maak een schets van deze situatie.
- Bereken de coördinaten van het punt, dat na het uitvoeren van deze opdracht is bereikt.

E8 In een assenstelsel ligt het punt $C(2, 5)$. Een punt D ligt op de x -as en heeft de coördinaten $D(a, 0)$. De afstand CD is gelijk aan 13.

- Druk de afstand CD uit in a .
- Bereken exact de waarde(n) van a .

E9 In een assenstelsel ligt het punt $P(-7, -4)$. De coördinaten van een punt R zijn $(1, a)$.

- Op welke lijn liggen alle punten R ?
- De afstand PR is gelijk aan 17.
Stel een vergelijking op waarmee je de waarde van a kunt berekenen en los deze vergelijking op.



SE

CE

K

In dit hoofdstuk

Inmiddels ken je alle soorten functies die voor het examen wiskunde B van belang zijn: lineaire functies, kwadratische functies, machtsfuncties, exponentiële functies, logaritmische functies en goniometrische functies. Ook weet je al het een en ander van het verband tussen de transformatie van een grafiek en het functievoorschrift van de beeldgrafiek.

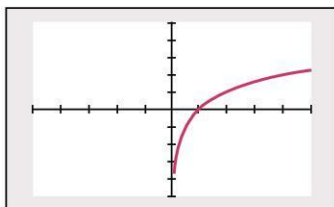
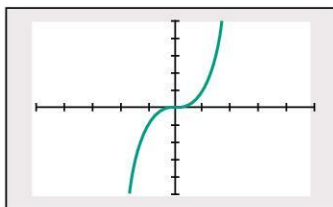
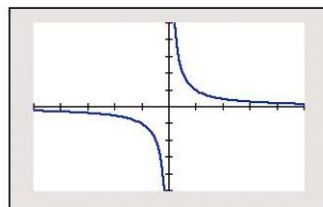
In dit hoofdstuk ga je met al deze functies aan de slag. De transformaties komen nog een keer uitgebreid langs. Je leert het asymptotisch gedrag van een functie te onderzoeken en maakt kennis met families van functies en grafiekenbundels. Ten slotte wordt er aandacht besteed aan gelijkwaardige formules en samengestelde functies.

Functies zijn de kern van wiskunde B. Je zult de begrippen uit dit hoofdstuk in bijna alle volgende hoofdstukken steeds weer tegenkomen.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- | | |
|--|----------------------|
| • <i>Ordenen en structureren</i> | intro paragraaf 10.4 |
| • <i>Formules manipuleren</i> | opdracht 28 |
| • <i>Logisch redeneren en bewijzen</i> | opdracht 45 |

V1



Voor de plots geldt dat $-5 \leq x \leq 5$ en $-5 \leq y \leq 5$.

Geef voor elk van de plots aan welke van de functies $f(x) = x^2$,

$g(x) = \sqrt{x}$, $k(x) = {}^2\log(x)$, $m(x) = \frac{1}{x}$ en $n(x) = x^3$ erbij hoort.

Theori

Alle mogelijke waarden van x waarvoor een functiewaarde bestaat, vormen samen het **domein** van de functie.

Alle functiewaarden die bij een functie voorkomen, vormen het **bereik** van de functie.

Bekende soorten functies zijn:

machtsfunctie: $f(x) = x^n$ met n geheel of gebroken

gebroken functie: $f(x) = \frac{1}{x}$

wortelfunctie: $f(x) = \sqrt{x}$

goniometrische functie: $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$

exponentiële functie: $f(x) = g^x$ met $g > 0$ en $g \neq 1$

logaritmische functie: $f(x) = {}^g\log(x)$ met $g > 0$ en $g \neq 1$

Voorbeeld

Bij welke van de in de theorie genoemde functies horen de grafieken A, B, C en D?

Geef van elk van die functies het domein en het bereik.

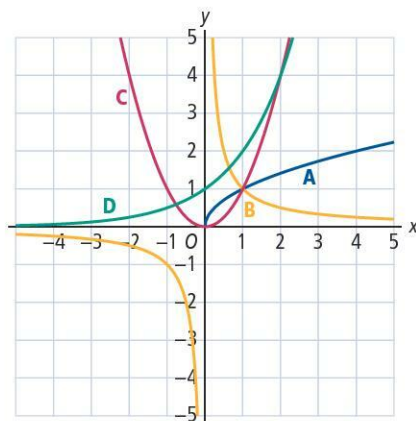
Oplossing

Grafiek A hoort bij $f(x) = \sqrt{x}$, domein en bereik: $[0, \rightarrow)$.

Grafiek B hoort bij $f(x) = \frac{1}{x}$, domein en bereik: $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$.

Grafiek C hoort bij $f(x) = x^2$, domein $\mathbb{R}$, bereik: $[0, \rightarrow)$.

Grafiek D hoort bij $f(x) = 2^x$, domein $\mathbb{R}$, bereik $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

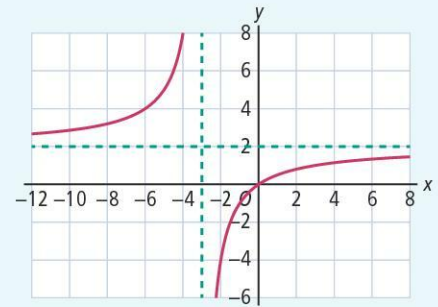


- V2** Geef het domein en het bereik van elke functie.
Noteer je antwoorden in intervalnotatie.

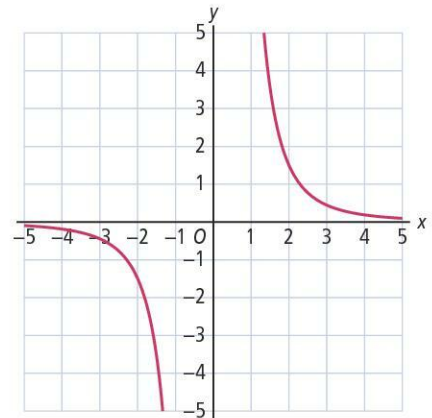
a $f(x) = {}^3\log(20 - 5x)$ **c** $h(x) = 14 - \sqrt{2x - 12}$
b $g(x) = 2 + 3^{x-1}$ **d** $k(x) = 10 - \frac{24}{5 - x}$

Theorie

Asymptoten van een grafiek zijn lijnen waar de grafiek op den duur willekeurig dicht naar nadert. De grafiek in de figuur heeft een verticale asymptoot met vergelijking $x = -3$ en een horizontale asymptoot met vergelijking $y = 2$.



- V3** Gegeven is de functie $f(x) = 7 + \frac{20}{2x - 3}$
- Bij welke waarde van x is er geen functiewaarde?
 - Welk getal komt niet als functiewaarde voor?
 - Stel vergelijkingen op van de asymptoten van de grafiek van f .
- V4** Gegeven zijn de functies $f(x) = 12x^n$ met n een geheel getal.
- Plot en schets de grafiek van f voor $n = 5$ en voor $n = -2$ en geef het domein en het bereik van beide functies.
 - De getekende grafiek hoort bij de functie f voor $n = -3$. Welke asymptoten heeft deze grafiek?
 - Voor welke negatieve waarden van n ligt de grafiek van f geheel boven de x -as?



- V5** Gegeven zijn de functies $f(x) = g^x$ en $h(x) = {}^g\log(x)$.
- Plot en schets de grafieken van f en h in één assenstelsel voor $g = 5$. Doe dat ook voor $g = \frac{1}{3}$.
 - Voor welke waarden van g zijn f en h stijgende functies? En voor welke waarden van g zijn de functies dalende functies?
 - Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f ?
 - Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van h ?

10.1 Translaties

Je leert

- hoe je een functievoorschrift opstelt bij de beeldgrafiek na een translatie

Leerroutes

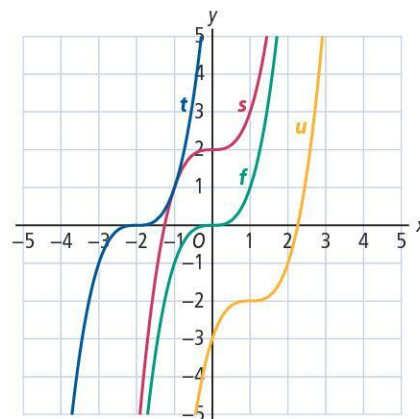
- ondersteunend: 1—2—3—04—5—6—07—7
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7—8
- uitdagend: 1—2—3—4—5—7—8—U1

In 1960 waren er 3 miljard mensen. De wereldbevolking is tussen 1960 tot 1990 gemiddeld toegenomen met 1,9% per jaar. De groei van de wereldbevolking kan beschreven worden met de formule $H = 3 \cdot 1,019^t$ met t de tijd in jaren, $t = 0$ in 1960 en H de bevolking in miljarden. De groei kan ook beschreven worden met de formule $H = 3 \cdot 1,019^{t-a}$, met t het jaartal.

- Welk getal moet er op de plaats van a staan?
- Hoe liggen de grafieken bij beide formules ten opzichte van elkaar?



- In het assenstelsel zijn de grafieken van de functies $f(x) = x^3$, $s(x) = x^3 + 2$, $t(x) = (x + 2)^3$ en $u(x) = (x - 1)^3 - 2$ getekend.
 - Door welke verschuiving kan de grafiek van s ontstaan uit de grafiek van f ?
 - Geef ook de verschuiving waardoor de grafiek van t is ontstaan uit de grafiek van f .
 - Door welke verschuivingen kan de grafiek van u ontstaan uit de grafiek van f ?
 - De grafiek van s wordt 5 omlaag verschoven. Daardoor ontstaat de grafiek van de functie g . Geef het functievoorschrift van g .



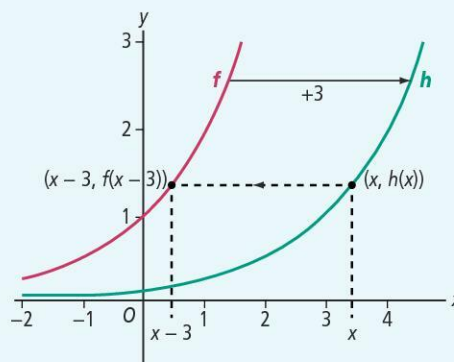
- De grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{x}$ wordt 3 naar rechts verschoven. Zo ontstaat de grafiek van de functie g .
 - Teken de grafieken van f en g in één assenstelsel.
 - Leg uit waarom $g(7) = f(4)$.
 - Voor welke waarde van p geldt $g(17) = f(p)$?
 - Voor f en g geldt $g(x) = f(x - a)$. Welke waarde heeft a ?

Theorie

Door de grafiek van een functie f te verschuiven ontstaat een **beeldgrafiek**. Daarbij verandert het functievoorschrift. Verschuif je de grafiek van f over een afstand a omhoog, dan ontstaat de grafiek van $g(x) = f(x) + a$.

Bij een verschuiving over een afstand a naar rechts vind je het functievoorschrift door elke x in het functievoorschrift van f te vervangen door $x - a$, dus $h(x) = f(x - a)$.

Een verschuiving heet ook wel een **translatie**.



Voorbeeld 1

De grafiek van de functie $f(x) = 3^x + 4x$ wordt 2 naar links en 7 omlaag verschoven. Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek.

Oplossing

Vervang x door $x + 2$ en trek van het resultaat 7

$$\text{af: } g(x) = f(x + 2) - 7.$$

Je krijgt dan $g(x) = 3^{x+2} + 4(x + 2) - 7$ ofwel

$$g(x) = 3^{x+2} + 4x + 1.$$

Voorbeeld 2

Bij welke translaties is de grafiek van $g(x) = {}^3\log(x - 4) + 6$ de beeldgrafiek van de grafiek van $f(x) = {}^3\log(x)$?

Oplossing

In het functievoorschrift van f is x vervangen door $x - 4$ en is er 6 bij opgeteld. De grafiek van f is 4 naar rechts en 6 omhoog verschoven.

3 Geef het functievoorschrift $g(x)$ van de beeldgrafiek.

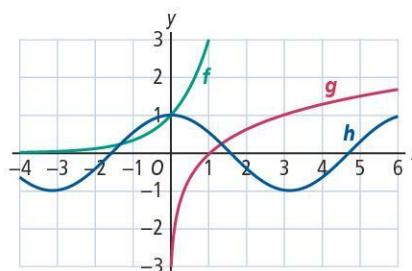
H

- $f(x) = 2\sqrt{x}$, translaties 3 naar rechts en 5 omlaag.
- $f(x) = 7x - 2$, translaties 4 naar links en 1 omhoog.
- $f(x) = {}^6\log(2x - 3) - 5x$, translaties 3 naar links en 5 omlaag.

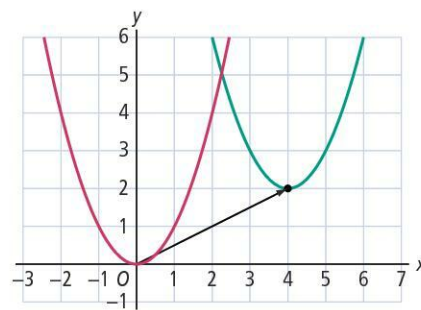
Ondersteunende route → maak opdracht 04

4 Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x) = 3^x$, $g(x) = {}^3\log(x)$ en $h(x) = \cos(x)$.

- Bij welke translaties is de grafiek van $p(x) = -2 + 3^{x-7}$ de beeldgrafiek van de grafiek van f ?
- Bij welke translaties is de grafiek van $r(x) = {}^3\log(x + 3) - 4$ de beeldgrafiek van de grafiek van g ?
- Bij welke translatie is de grafiek van $s(x) = \sin(x)$ de beeldgrafiek van de grafiek van h ?
- Bij welke translaties valt de grafiek van h samen met de beeldgrafiek?



- 5** Gegeven is de parabool met vergelijking $y = x^2$.
- Geef de coördinaten van de top van de parabool.
 - De parabool wordt 4 naar rechts en 2 omhoog verschoven. Geef een vergelijking bij de beeldgrafiek.
 - Geef de coördinaten van de top van de beeldgrafiek.
 - Maak de opdrachten a, b en c ook voor de parabool met vergelijking $y = 4x^2$.



De formule $y = a(x - r)^2 + s$ heet de topvergelijking van een parabool. Uit deze topvergelijking kun je de coördinaten van de top (r, s) aflezen.

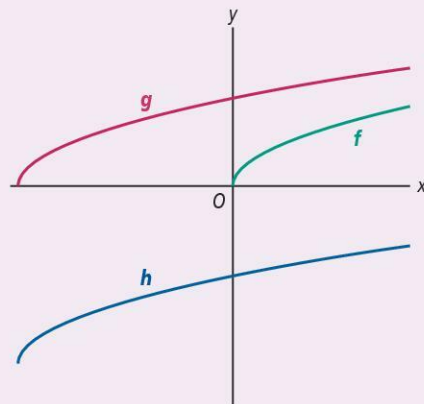
- 6** Geef de coördinaten van de top van de parabool.
- $y = 6(x - 5)^2 - 10$
 - $y = -(x + 1\frac{1}{2})^2 - 4\frac{1}{2}$
 - $y = 1\frac{1}{2}(x + 7)^2 + 35$
- Ondersteunende route → maak opdracht 07**
- 7** Bereken met behulp van de afgeleide de x -coördinaat van de top en geef de topvergelijking van de parabool.
- $y = x^2 + 6x + 4$
 - $y = -2x^2 - 12x + 3$
- 8** Bereken om de vragen te kunnen beantwoorden eerst de coördinaten van de top met behulp van de afgeleide.
- Bij welke translaties is de parabool $y = 3x^2 - 9x - 12$ de beeldgrafiek van de parabool $y = 3x^2$?
 - Bij welke translaties is de parabool $y = 100x - 20x^2$ de beeldgrafiek van de parabool $y = -20x^2$?

Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

04 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x+6}$ en $h(x) = -5 + \sqrt{x+6}$.

- $g(x) = f(x+6)$
Bij welke translatie is de grafiek van g het beeld van de grafiek van f ?
- $h(x) = -5 + g(x)$
Bij welke translatie is de grafiek van h het beeld van de grafiek van g ?
- Bij welke translaties is de grafiek van h dus het beeld van de grafiek van f ?
- Bij welke translaties is de grafiek van $q(x) = 5^{x-2} + 5$ de beeldgrafiek van de grafiek van $p(x) = 5^x$?
- Bij welke translaties is de grafiek van $s(x) = {}^5\log(x+5) - 3$ de beeldgrafiek van de grafiek van $r(x) = {}^5\log(x)$?
- Bij welke translatie is de grafiek van $w(x) = \sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$ de beeldgrafiek van de grafiek van $v(x) = \sin(x)$?



07 Gegeven is de parabool $p: y = x^2 - 6x + 3$.
Je gaat de topvergelijking opstellen van p .

- In de top van p is de helling 0.
Je moet dus de vergelijking $\frac{dy}{dx} = 0$ oplossen.

Ga na dat $\frac{dy}{dx} = 2x - 6$.

- Bereken de coördinaten van de top.
- Vul in: de topvergelijking van p is $y = (x - \dots)^2 - \dots$

Uitdagende opdrachten

U1 Voor elke waarde van a is gegeven de functie $f(x) = 8ax - 2x^2$.
De toppen van de grafieken van deze functies liggen op een parabool.
Stel op algebraïsche wijze een vergelijking op van deze parabool.

10.2 Vermenigvuldigen van grafieken

Je leert

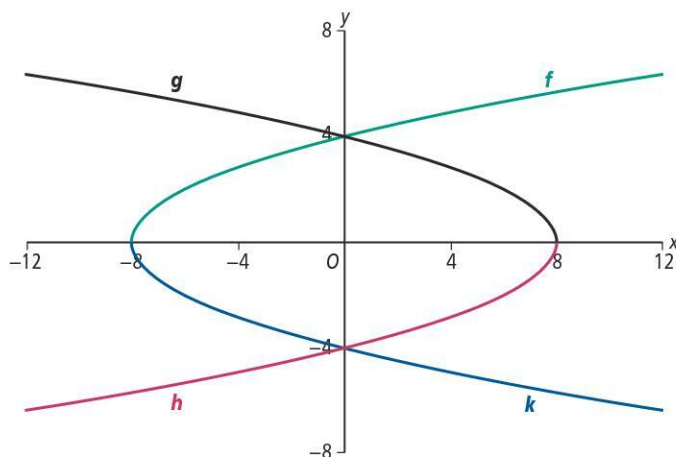
- hoe je een functievoorschrift opstelt na een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as
- hoe je een functievoorschrift opstelt na een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as

Leerroutes

- ondersteunend: 9–10–011–12–13–014–14–15
- doorlopend: 9–10–11–12–13–14–15–16
- uitdagend: 9–11–12–13–14–15–16–U2

In de figuur zie je de grafieken van de functies $f(x) = \sqrt{16 + 2x}$, $g(x) = \sqrt{16 - 2x}$, $h(x) = -\sqrt{16 - 2x}$ en $k(x) = -\sqrt{16 + 2x}$.

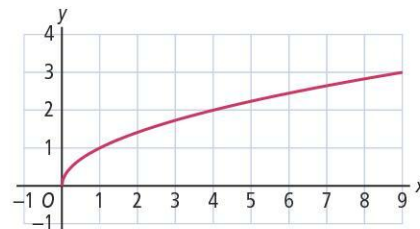
- Welke grafiek hoort bij welke functie?
- Hoe zijn de grafieken van g , h en k ontstaan uit de grafiek van f ?



9 Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{x}$.

W

- Teken in één figuur de grafieken van $g(x) = 3\sqrt{x}$ en $h(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$.
- Spiegel de grafiek van f in de x -as. Met welke factor moet je het functievoorschrift van f vermenigvuldigen om het functievoorschrift van de gespiegelde grafiek te krijgen?



Theorie

Als je de grafiek van een functie f **vermenigvuldigt ten opzichte van de x -as** met factor a , ontstaat de grafiek van de functie $g(x) = a \cdot f(x)$.

Voor $a = -1$ is de grafiek van g het beeld van de grafiek van f bij **spiegeling in de x -as**.

Translaties, vermenigvuldigingen en spiegelingen zijn voorbeelden van **transformaties** van grafieken.

Voorbeeld

Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek die ontstaat door de grafiek van $f(x) = 2x^2 - 8$ ten opzichte van de x -as met $-\frac{1}{2}$ te vermenigvuldigen.

Oplossing

Het functievoorschrift van de

beeldgrafiek is $g(x) = -\frac{1}{2}f(x)$ ofwel

$$g(x) = -\frac{1}{2}(2x^2 - 8).$$

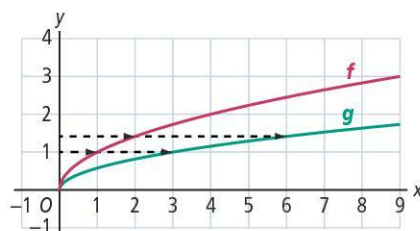
Dit geeft $g(x) = -x^2 + 4$.

- 10** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{x}$
- Teken de grafiek van f .
 - De grafiek van f wordt gespiegeld in de x -as en vervolgens ten opzichte van de x -as vermenigvuldigd met factor 3. Teken de beeldgrafiek in hetzelfde assenstelsel.
 - Geef het functievoorschrift dat bij de beeldgrafiek hoort.

Ondersteunende route → maak opdracht 011

- 11** Geef van elke functie het functievoorschrift van de beeldgrafiek na het toepassen van de gegeven transformaties.
- $f(x) = \sqrt{x} + 2$, een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor -2 , gevolgd door een translatie 5 omhoog.
 - $f(x) = \sqrt{x} + 2$, een translatie 5 omhoog, gevolgd door een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor -2 .
 - $g(x) = 5 - 2 \cdot 3^x$, een translatie 2 naar rechts, gevolgd door een spiegeling in de x -as.
 - $g(x) = 5 - 2 \cdot 3^x$, een spiegeling in de x -as, gevolgd door een translatie 2 naar rechts.
 - Bekijk je antwoorden op de vorige opdrachten. Is de volgorde waarin transformaties worden toegepast van belang?

- 12** De grafiek van de functie g is de beeldgrafiek van de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$ na een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as.
- Met welke factor is de grafiek van f ten opzichte van de y -as vermenigvuldigd?
 - Leg uit dat $g(12) = f(4)$.
 - Voor welke waarde van p is $g(33) = f(p)$?
 - Voor welke waarde van a is $g(x) = f(ax)$?



- 13** Gegeven is de functie $f(x) = {}^2\log(x)$.
- Teken de grafiek van f en spiegel de grafiek in de y -as.
 - Teken in hetzelfde assenstelsel de grafiek van $g(x) = {}^2\log(-x)$. Wat valt je op?

Theorie

Als je de grafiek van een functie f **vermenigvuldigt ten opzichte van de y -as** met factor b , ontstaat de grafiek van een functie g . Je krijgt het functievoorschrift van g door elke x in het functie voorschrift van f te vervangen door $\frac{x}{b}$

ofwel door $\frac{1}{b} \cdot x$, dus $g(x) = f\left(\frac{1}{b} \cdot x\right)$.

Voor $b = -1$ is de grafiek van g het beeld van de grafiek van f bij **spiegeling in de y -as**. Dan geldt dus $g(x) = f(-x)$. Je vervangt dan in het functievoorschrift van f elke x door $-x$.

Voorbeeld

Geef het functievoorschrift van de grafiek die ontstaat door de grafiek van $f(x) = 3x^2 - x$ ten opzichte van de y -as met -2 te vermenigvuldigen.

Oplossing

Het functievoorschrift is

$$g(x) = f\left(\frac{1}{-2} \cdot x\right) = f\left(-\frac{1}{2}x\right), \text{ dus}$$

$$g(x) = 3\left(-\frac{1}{2}x\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}x\right).$$

$$\text{Dit geeft } g(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

Ondersteunende route → maak opdracht 014

- 14** Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek na het toepassen van de gegeven transformatie.

H

- $g(x) = 2x^2 - 3x + 4$, vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met factor $\frac{1}{3}$.
- $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$, vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met factor 4.
- $h(x) = \left(\frac{1}{2}x - 5\right)^3$, spiegeling in de y -as.

- 15** Geef aan door welke transformaties de grafiek van g is ontstaan uit de grafiek van f . Let daarbij op de volgorde.

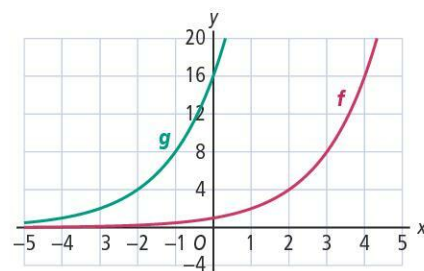
H

- $f(x) = \sin(2x)$ en $g(x) = 2\sin(-2x)$
- $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = 3\sqrt{3x}$
- $f(x) = x^2 - 3x$ en $g(x) = 4x^2 + 6x$

- 16** Gegeven is de functie $f(x) = 2^x$. De grafiek van de functie g is verkregen door de grafiek van f 4 naar links te verschuiven.

- Geef het functievoorschrift van g .
- Voor welke waarde van a geldt $2^{x+4} = a \cdot 2^x$?
- Met welke factor kun je de grafiek van f vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as om de grafiek van g te krijgen?

Uitdagende route → maak opdracht U2



Ondersteunende opdrachten

- 011** Gegeven is de functie $f(x) = \log(x - 3)$.
- a** Vul in: door de grafiek van f te vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as met factor 3 ontstaat de grafiek van de functie $g(x) = \dots \cdot f(\dots)$, dus $g(x) = \dots$
 - b** Vul in: door een verschuiving van 4 omhoog van de grafiek van g ontstaat de grafiek van de functie $h(x) = g(x) \dots$, dus $h(x) = \dots$
 - c** Vul in: door een verschuiving van 4 omhoog van de grafiek van f ontstaat de grafiek van de functie $p(x) = f(x) \dots$, dus $p(x) = \dots$
 - d** Vul in: door de grafiek van p te vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as met factor 3 ontstaat de grafiek van de functie $q(x) = \dots \cdot p(\dots)$, dus $q(x) = \dots$
 - e** De grafiek van de functie $k(x) = 5x^2 - 6$ wordt 3 naar links verschoven en vervolgens gespiegeld in de x -as. Zo ontstaat de grafiek van een functie m . Geef het functievoorschrift van m .
 - f** De grafiek van de functie $k(x) = 5x^2 - 6$ wordt gespiegeld in de x -as en vervolgens 3 naar links verschoven. Zo ontstaat de grafiek van een functie n . Geef het functievoorschrift van n .
 - g** Bekijk je antwoorden op de vorige opdrachten. Is de volgorde waarin transformaties worden toegepast van belang?

Verschuiving a omhoog:

$$g(x) = f(x) + a.$$

Vermenigvuldiging met b ten opzichten van de x -as:

$$g(x) = b \cdot f(x).$$

Verschuiving c naar rechts:

$$g(x) = f(x - c).$$

- 014** De grafiek van een functie g ontstaat door de grafiek van de functie $f(x) = 2x + \sqrt{x}$ te vermenigvuldigen ten opzichte van de y -as met factor $\frac{1}{3}$.

- a** Leg uit dat geldt $g(x) = f(3x)$.
- b** Vervang elke x in het functievoorschrift van f door $3x$ en vul in $g(x) = 2(\dots) + \sqrt{\dots}$, dus $g(x) = \dots$.

Uitdagende opdrachten

- U2** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = x^2$. Door de grafiek van f te vermenigvuldigen ten opzichte van de y -as met factor a ($a \neq 0$) ontstaat de grafiek van een functie g . Deze grafiek kan ook ontstaan door de grafiek van f te vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as met een factor b . Druk b uit in a .

10.3 Asymptotisch gedrag

Je leert

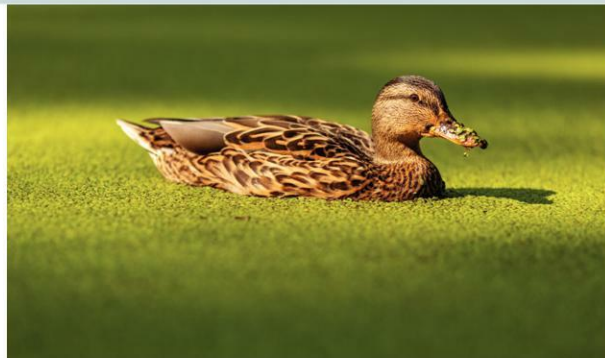
- hoe je vergelijkingen van asymptoten opstelt

Leerroutes

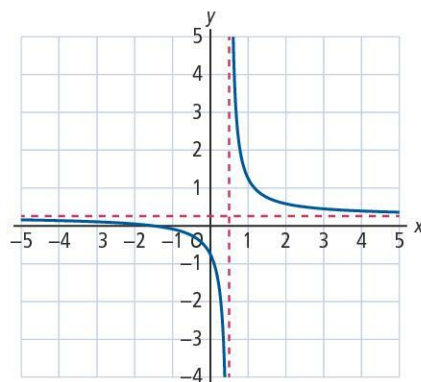
- ondersteunend: 17–18–019–20–21–022–22–23
- doorlopend: 17–18–19–20–21–22–23–24
- uitdagend: 17–18–20–21–22–23–24–U3

Eendenkroos kan er voor zorgen dat een vijver helemaal dichtgroeit. In een bijna lege vijver groeit het kroos exponentieel, maar naarmate de vijver voller wordt, gaat het langzamer totdat de vijver vol is.

- Neem aan dat er in het begin 1 m^2 eendenkroos aanwezig is. Schets een grafiek van de hoeveelheid eendenkroos in m^2 in een vijver van 2000 m^2 tot de vijver is dichtgegroeid.



- 17 Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \frac{2x+3}{8x-4}$
- Bij welke waarde van x hoort geen functiewaarde?
 - Stel een vergelijking op van de verticale asymptoot.
 - Maak op je rekenmachine een tabel met functiewaarden van f vanaf $x = 0$ met stapgrootte 10.
 - Wat gebeurt er met de functiewaarden als je steeds grotere waarden van x neemt? En wat als je negatieve waarden van x neemt die steeds verder van 0 liggen?
 - Stel een vergelijking op van de horizontale asymptoot.



Theorie

Een functie met een functievoorschrift van de vorm

$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ met $c \neq 0$, heet een **gebroken lineaire functie**.

De grafiek van f heet een **hyperbool** en bestaat uit twee delen, die door twee asymptoten van elkaar worden gescheiden.

Voor het bepalen van de **verticale asymptoot** kijk je waar de noemer gelijk is aan nul, dus naar de oplossing van $cx + d = 0$.

De **horizontale asymptoot** bepaal je door positieve en negatieve waarden van x die steeds verder van 0 liggen, in te vullen. Dat kun je doen met behulp van een tabel met stapgrootte 10 of 100.

Voorbeeld

Stel vergelijkingen op van de asymptoten van de grafiek van

$$f(x) = \frac{6x-10}{4x+8}$$

Oplossing

$4x + 8 = 0$ voor $x = -2$.

De lijn $x = -2$ is de verticale asymptoot.

Met behulp van een tabel zie je dat voor waarden van x ver van 0 de functiewaarden naderen tot $1\frac{1}{2}$.

De lijn $y = 1\frac{1}{2}$ is de horizontale asymptoot.

18 Stel vergelijkingen op van de asymptoten van de grafiek van f .

a $f(x) = \frac{7x-3}{2x+5}$

c $f(x) = \frac{18x-3}{x}$

b $f(x) = \frac{4-12x}{6x+2}$

d $f(x) = \frac{0,2x-3}{1-0,4x}$

Ondersteunende route → maak opdracht 019

19 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{8-3x}{6x+4}$

a Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de assen.

b Leg uit dat de lijn $y = 2\frac{1}{2}$ de horizontale asymptoot is van de grafiek van $g(x) = f(x) + 3$.

20 Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de assen en stel vergelijkingen op van de asymptoten.

H

a $f(x) = \frac{6x-2}{12-4x}$

c $f(x) = 1 + \frac{x}{3x-1}$

b $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x-6}{5x+2}$

d $f(x) = \frac{2-x}{x+8} - 2$

Theorie

Ook grafieken van exponentiële en logaritmische functies hebben asymptoten. De grafiek van $f(x) = b \cdot g^x$ heeft een horizontale asymptoot, namelijk de lijn $y = 0$ (de x -as). De grafiek van $h(x) = {}^g\log(x)$ heeft een verticale asymptoot: de lijn $x = 0$ (de y -as).

Voor $0 < g < 1$ is h een dalende functie en voor $g > 1$ is h een stijgende functie.

Met deze kenmerken kun je beredeneren welke lijn de asymptoot is van de grafiek van functies van de vorm $k(x) = f(x) + c$ of $m(x) = h(x - a)$ en of er sprake is van een dalende of stijgende functie.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 8 - 5 \cdot 0,9^x$. Beredeneer dat f een stijgende functie is. Geef ook een vergelijking van de asymptoot van de grafiek van f .

Oplossing

Omdat $0,9 < 1$ wordt $5 \cdot 0,9^x$ steeds kleiner als x toeneemt. Van 8 wordt een steeds kleiner getal afgetrokken, dus $f(x)$ neemt toe als x toeneemt. f is een stijgende functie. Voor grote waarde van x komt de waarde van $5 \cdot 0,9^x$ steeds dichterbij 0.

De lijn $y = 8$ is de asymptoot.

- 21** Gegeven zijn de functies $f(x) = 11 - 4 \cdot 0,7^x$ en $g(x) = 80 - 20 \cdot 1,3^x$.

H

- Leg uit dat de lijn $y = 11$ de horizontale asymptoot is van de grafiek van f .
- Beredeneer dat f een stijgende functie is.
- Stel een vergelijking op van de horizontale asymptoot van de grafiek van g en beredeneer of g een dalende dan wel een stijgende functie is.

Ondersteunende route → maak opdracht 022

- 22** Gegeven zijn de functies $f(x) = 10 \cdot {}^2\log(x - 5) + 4$ en $g(x) = 7 - 3 \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(x + 3)$.

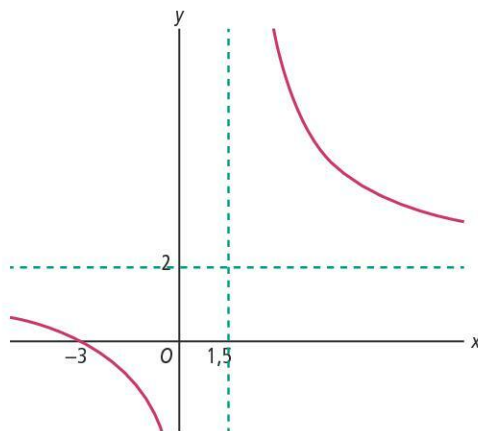
- Leg uit waarom de lijn $x = 5$ de verticale asymptoot is van de grafiek van f .
- Beredeneer dat f een stijgende functie is.
- Stel een vergelijking op van de verticale asymptoot van de grafiek van g en beredeneer of g een dalende dan wel een stijgende functie is.

- 23** In een zomerperiode van bijna zes weken heeft men vastgesteld dat het percentage $P(t)$ van een vijveroppervlak dat bedekt is met eendenkroos bij benadering voldoet aan het

functievoorschrift $P(t) = \frac{100}{1 + 35 \cdot 0,756^t}$ waarin t de tijd in dagen is.

- Hoeveel procent van het vijveroppervlak is bedekt met eendenkroos aan het begin van de periode van zes weken?
- Beredeneer met behulp van het functievoorschrift dat het percentage op den duur naar 100% zal naderen.
- Schets de grafiek van P .

- 24** Gegeven is de hyperbool met vergelijking $y = \frac{ax + b}{cx - 3}$. De hyperbool snijdt de x -as in het punt $(-3, 0)$ en heeft de lijn $y = 2$ als horizontale asymptoot en de lijn $x = 1\frac{1}{2}$ als verticale asymptoot. Bereken exact de waarden van a , b en c .



Ondersteunende opdrachten

019 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2x-5}{x+4} - 3$.

- Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as.
- Om de coördinaten van het snijpunt met de x -as te berekenen, moet je de vergelijking $f(x) = 0$ oplossen. Op het blaadje is daarmee een begin gemaakt. Leg uit wat er in stap 1 gebeurt.
- Leg uit wat er in stap 2 gebeurt.
- Los de vergelijking verder op en geef de coördinaten van het snijpunt met de x -as.
- Wat gebeurt er met de functiewaarden als je steeds grotere waarden van x neemt? En wat als je negatieve waarden van x neemt die steeds verder van 0 liggen?
- Stel een vergelijking op van de horizontale asymptoot.

☐	$\frac{2x-5}{x+4} - 3 = 0$	
☐	$\frac{2x-5}{x+4} = 3$	1
☐	$2x-5 = 3(x+4)$	2

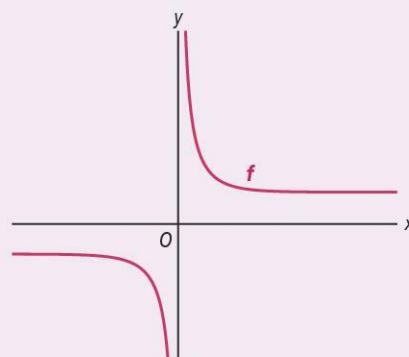
022 Gegeven is de functie $f(x) = 4 \cdot {}^3\log(x+1) - 2$. Controleer je antwoorden met een plot.

- Welke lijn is asymptoot van de grafiek van $g(x) = {}^3\log(x)$?
- Hoe ontstaat de grafiek van $h(x) = {}^3\log(x+1)$ uit de grafiek van g ? Welke lijn is dus de asymptoot van de grafiek van h ?
- Hoe ontstaat de grafiek van $i(x) = 4 \cdot {}^3\log(x+1)$ uit de grafiek van h ? Welke lijn is asymptoot van de grafiek van i ?
- Hoe ontstaat de grafiek van $f(x) = 4 \cdot {}^3\log(x+1) - 2$ uit de grafiek van i ? Welke lijn is asymptoot van de grafiek van f ?

Uitdagende opdrachten

U3 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$

- Stel een vergelijking op van de verticale asymptoot van de grafiek van f .
- Beredeneer met behulp van het functievoorschrift dat de grafiek twee horizontale asymptoten heeft en stel vergelijkingen op van deze asymptoten.



10.4 Formules herleiden

Je leert

- hoe je een formule herleidt
- hoe je onderzoekt of formules gelijkwaardig zijn

Leerroutes

- ondersteunend: 25—026—27—28—29—030—30—31
- doorlopend: 25—26—27—28—29—30—31—32
- uitdagend: 25—26—27—28—29—30—32—U4

Als je bij elk van de gegeven formules een grafiek zou tekenen, zijn er formules waarbij je dezelfde grafiek krijgt.

- Zoek uit bij welke formules dat het geval is.

$$\begin{array}{lll} \frac{x}{4} - \frac{y}{16} = 1 & & y = \sqrt{x} \\ & 2x = \frac{30}{y} & \\ y = \sqrt[3]{x} & & xy = 15 \\ & 5y = \frac{1}{3x} & \\ & & x = 4 + \frac{1}{4}y \\ x = y^2 & & x = y^3 \end{array}$$

25 Druk p uit in q .

a $q = 3p + 5$

c $q = 4 - {}^2\log(p)$

b $q = 2\sqrt{p} - 6$

d $q = p^3 + 8$

Theorie

Het omzetten van een formule naar een andere vorm heet **herleiden**. Je kunt een formule herleiden door links en rechts dezelfde bewerking toe te passen. Vaak gebruik je daarbij **inverse** (omgekeerde) **bewerkingen**.

In een formule kun je een variabele vervangen door een andere formule. Je noemt dit **substitueren**.

Voorbeelden van inverse bewerkingen

$+ 7$ en $- 7$

$\times 3$ en $: 3$

$\sqrt{A} = B$ en $A = B^2$

${}^g\log(A) = B$ en $A = g^B$

$A^n = B$ en $A = B^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{B}$

Voorbeeld 1

Gegeven is $y = \frac{24}{2x-5}$; druk x uit in y .

Oplossing

Uit $y = \frac{24}{2x-5}$ volgt $y \cdot (2x-5) = 24$.

(links en rechts $\cdot (2x-5)$)

$2x-5 = \frac{24}{y}$ (links en rechts $: y$)

$2x = 5 + \frac{24}{y}$ (links en rechts $+ 5$)

$x = 2\frac{1}{2} + \frac{12}{y}$ (links en rechts $: 2$)

Voorbeeld 2

Gegeven zijn de formules $p = {}^2\log(q-3)$ en $q = 2T-1$. Schrijf T als functie van p .

Oplossing

Uit $p = {}^2\log(q-3)$ en $q = 2T-1$ volgt

$p = {}^2\log(2T-1-3)$ (substitutie $q = 2T-1$)

$p = {}^2\log(2T-4)$ (vereenvoudigd)

$2^p = 2T-4$ (${}^g\log(A) = B$ dus $A = g^B$)

$2T = 4 + 2^p$ (links en rechts $+ 4$)

$T = 2 + \frac{1}{2} \cdot 2^p$ (links en rechts $: 2$)

Dit kun je ook schrijven als

$T = 2 + 2^{-1} \cdot 2^p$ ofwel $T = 2 + 2^{p-1}$.

Ondersteunende route → maak opdracht 026

26 Druk p uit in q .

H

a $\frac{5q+7}{2p-10} = \frac{1}{6}$

d $q = 5 \cdot 2^p + 3$

b $q - 4 = 3\sqrt{p+6} + 2$

e $\frac{4}{p+4} = 5\sqrt{q^2-3}$

c ${}^5\log(3p-1) = 2q-1$

f $\log(p+6) - \sqrt{q} = 1$

27 Schrijf met behulp van substitutie y als functie van t .

H

Vereenvoudig het resultaat.

a $y = -x + 6$ en $x = -2t - 1$

b $y = \sqrt{2x-1}$ en $x = 2t + \frac{1}{2}$

c $y = 3 \cdot 2^x$ en $x = {}^2\log(2t)$

28 Gegeven zijn de formules $\frac{4+y}{x^2+2} = 6$ en $6x^2 + 8 = y$.

- a** Laat zien dat de tweede formule via een herleiding uit de eerste formule kan ontstaan.
- b** Welke conclusie kun je hieruit trekken over de grafieken die bij de twee formules horen?

Theorie

Als bij twee formules elke combinatie van waarden die aan de ene formule voldoet, ook aan de andere voldoet en omgekeerd, dan heten die formules **gelijkwaardig**.

Om te onderzoeken of twee formules gelijkwaardig zijn, probeer je één van de formules te herleiden tot de andere.

Voorbeeld 1

Onderzoek of de formules $2x + 3y = 6$ en $y = -\frac{2}{3}x + 2$ gelijkwaardig zijn.

Oplossing

Uit $2x + 3y = 6$ volgt $3y = -2x + 6$,

dus $y = -\frac{2}{3}x + 2$.

De formules zijn gelijkwaardig.

Voorbeeld 2

Onderzoek of de formules $y = x^2$ en $x = \sqrt{y}$ gelijkwaardig zijn.

Oplossing

De formules zijn niet gelijkwaardig, want de combinatie $x = -2$ en $y = 4$ voldoet wel aan $y = x^2$, maar niet aan $x = \sqrt{y}$.

29 Onderzoek welke formules gelijkwaardig zijn.

- H** A $q = 4 - 3^p$ E $p = {}^3\log(4 - q)$
 B $q = p^2 - 6$ F $p = {}^3\log(q + 4)$
 C $q = \frac{5}{\sqrt[3]{p+3}}$ G $p = \frac{125 - 3q^3}{q^3}$
 D $q = 3^p - 4$ H $p = \sqrt{q+6}$

Ondersteunende route → maak opdracht 030

30 Robert maakt een kanotocht van 10 km heen en 10 km terug. De stroomsnelheid van de rivier is v km per uur en Robert vaart met een gemiddelde snelheid van 4 km per uur ten opzichte van het water. T is de totale tijd die hij over de tocht doet.

- a Leg uit dat geldt: $T = \frac{10}{4-v} + \frac{10}{4+v}$
 b Voor welke waarden van v kan met deze formule de totale vaartijd worden berekend?
 c Herleid de formule tot een vorm met één breuk.
 d Druk v uit in T voor $v \geq 0$.



31 Kinetische energie of bewegingsenergie is een vorm van energie die een lichaam heeft doordat het beweegt. De hoeveelheid energie hangt samen met de massa van het lichaam en de snelheid waarmee het lichaam beweegt. Voor het verband geldt de formule $E = \frac{1}{2}mv^2$ ($v > 0$). E is de energie in joule, m is de massa in kg en v is de snelheid in m/s.

- a Neem $E = 50$ en schrijf v als functie van m .
 b Welke formules zijn gelijkwaardig met $E = \frac{1}{2}mv^2$?

$$m = 2E \cdot v^{-2}, m = \frac{2}{E \cdot v^2}, v = \frac{\sqrt{2E}}{m} \text{ en } v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

32 Voor het vermogen van een windmolen geldt de formule $P = 0,084 \cdot V^3 \cdot D^2$. Hierbij is P het vermogen in kilowatt, V de windsnelheid in m/s en D de diameter van de rotor in meters.

- a Geef een formule waarbij D wordt uitgedrukt in P en V .
 b Op een gegeven moment levert de windmolen een vermogen van 4200 kilowatt.
 Geef een formule waarbij V is uitgedrukt in D .



Ondersteunende opdrachten

026 Je gaat de formule $q = \frac{12}{6 + \sqrt[3]{p+1}}$ herleiden tot een

formule waarbij p is uitgedrukt in q .

- a** Vermenigvuldig links en rechts met $6 + \sqrt[3]{p+1}$ en vul stap 1 in.
- b** Wat gebeurt er in stap 2?
- c** Vul stap 3 in.
- d** Wat gebeurt er in stap 4?
- e** Maak de herleiding af.

Druk p uit in q .

- f** $\frac{2q-5}{p+2} = 3$
- i** $q = 2 \cdot 3^p - 6$
- g** $q+1 = 2\sqrt{p-1} + 4$
- j** $\log(p^3 + 5) - q = 1$
- h** ${}^3\log(5q+2) = \frac{1}{2}p - 3$
- k** $q-5 = \sqrt{25+p}$

☐	$q = \frac{12}{6 + \sqrt[3]{p+1}}$		
☐	$q \cdot (\dots) = 12$		1
☐	$\dots = \frac{12}{q}$		2
☐	$\sqrt[3]{p+1} = \dots$		3
☐	$p+1 = (\dots)^3$		4

030 Je gaat de formule $q = \frac{6}{1-p} + \frac{6}{1+p}$ herleiden tot een formule waarbij p is uitgedrukt in q . Je mag daarbij gebruik maken van de berekeningen op het blaadje.

- a** Eerst moet je de breuken gelijknamig maken. Maak de berekening op de eerste vier regels van het blaadje af.
- b** Laat zien dat $1 - p^2 = \frac{12}{q}$
- c** Laat zien dat $p^2 = 1 - \frac{12}{q}$
- d** Druk p uit in q voor $p \geq 0$.

☐	$q = \frac{6}{1-p} + \frac{6}{1+p}$		
☐	$\frac{6}{1-p} = \frac{\dots}{(1-p)(1+p)}$ en		
☐	$\frac{6}{1+p} = \frac{\dots}{(1-p)(1+p)}$, dus		
☐	$\frac{6}{1-p} + \frac{6}{1+p} = \frac{\dots}{(1-p)(1+p)}$		
☐	$q = \frac{12}{1-p^2}$, dus $1 - p^2 = \frac{12}{q}$		
☐	$p = \sqrt{\dots}$		

Uitdagende opdrachten

U4 Herleid de formules tot een vorm waarbij p is uitgedrukt in q .

- a** $q = \frac{1 - {}^2\log(p)}{{}^2\log(p)}$
- c** $4pq = 3p + 2q + 1$
- b** $q = \frac{p-5}{p-1}$
- d** $q = \frac{1}{5^{2p-1}}$

10.5 Parameters

Je leert

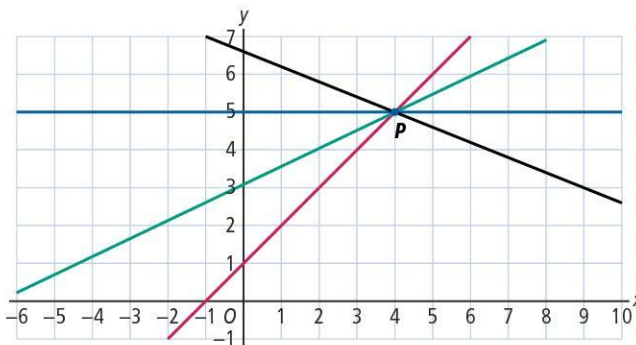
- wat een familie van functies is en wat een parameter is
- hoe je de waarde van een parameter berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 33—34—35—36—037—37
- doorlopend: 33—34—35—36—37—38
- uitdagend: 34—35—36—38—U5—U6

Alle getekende lijnen in het assenstelsel gaan door het punt $P(4, 5)$. Elke lijn voldoet aan de vergelijking $y = a(x - 4) + 5$.

- Hoe veranderen de grafieken als je de waarde van a verdubbelt?
- Voldoet elke lijn door $P(4, 5)$ aan een vergelijking van deze vorm?



- 33** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2x + b$.
Bij elke waarde van b krijg je een andere functie.
- Teken de grafiek bij $b = 3$. Doe dit ook bij $b = -1$.
 - Hoe liggen de grafieken van de functies uit opdracht a ten opzichte van elkaar?
 - Voor welke waarde van b gaat de grafiek door het punt $(-3, -8)$?
- 34** Gegeven zijn de functies $g(x) = ax - 3$.
- Teken de grafiek bij $a = 3$. Doe dit ook bij $a = -2$.
 - De grafieken van deze functies snijden elkaar allemaal in hetzelfde punt.
Geef de coördinaten van dat punt.
 - De grafiek van g gaat door het punt $(-2, -8)$.
Bereken a .

Theorie

Het functievoorschrift $f_p(x) = px + 2$ hoort bij een **familie van functies**.

Bij elke waarde van p krijg je een andere functie en dus ook een andere grafiek. In het functievoorschrift van f_p is x de variabele en wordt p een **parameter** (klemtoon op de tweede lettergreep) genoemd. Als je bij verschillende waarden van p de grafieken in één assenstelsel tekent, krijg je een **grafiekenbundel**.

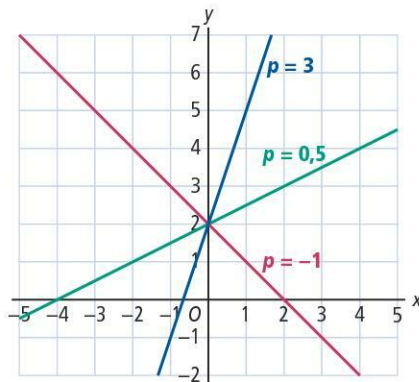
Voorbeeld

Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = px + 2$.

- a Schets drie grafieken van de bijbehorende bundel.
- b Bereken voor welke waarde van p de grafiek van f_p door het punt $P(-2, 8)$ gaat.

Oplossing

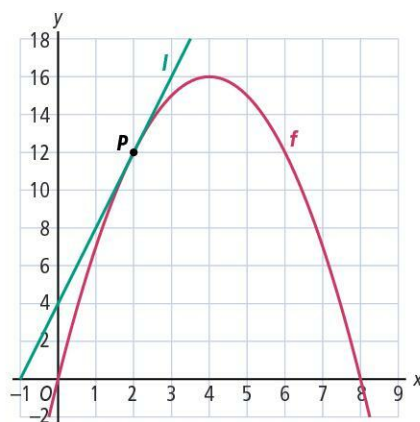
- a Kies bijvoorbeeld voor p de waarden -1 , 3 en $\frac{1}{2}$ en teken de bijbehorende grafieken.
- b Vul de coördinaten van P in het functievoorschrift in:
 $8 = p \cdot -2 + 2$. Dit geeft $-2p = 6$, dus $p = -3$.



- 35** Gegeven zijn de families van functies $f_a(x) = ax^2$ en $g_b(x) = x^2 + b$.
- a Schets drie grafieken uit de bundel bij de functies f_a .
 - b Schets drie grafieken uit de bundel bij de functies g_b .
 - c De grafiek van f_a gaat door het punt $(4, 9)$.
Bereken a .
 - d De grafiek van g_b gaat ook door het punt $(4, 9)$.
Bereken b .
- 36** Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = ax^2 - 4x + 3$.
- H** a De grafiek van f_a gaat door het punt $(3, 0)$.
Bereken a .
 - b Ga na dat $f'_a(x) = 2ax - 4$.
 - c Neem $a = 3$ en bereken de helling van de grafiek in het punt met x -coördinaat 9.
 - d Eén van de grafieken uit de bundel heeft in het punt met x -coördinaat 4 een helling -14 .
Welk functievoorschrift hoort bij deze grafiek?
 - e In een top geldt $f'_a(x) = 0$.
Druk de x -coördinaat van de top van de grafiek van een functie f_a uit in a .

Ondersteunende route → maak opdracht 037

- 37** Gegeven is de functie $f(x) = x(8 - x)$. Door $P(2, 12)$ is een lijn l getekend die de grafiek van f lijkt te raken.
- Ga na dat P inderdaad op de grafiek van f ligt.
 - Waarom hoort bij l een vergelijking van de vorm $y_p = p(x - 2) + 12$?
 - Als l aan de grafiek van f raakt, dan moet de vergelijking $x(8 - x) = p(x - 2) + 12$ precies één oplossing hebben. Herleid deze vergelijking tot de vorm $ax^2 + bx + c = 0$.
 - Hoe kun je de discriminant gebruiken om te zorgen dat deze vergelijking één oplossing heeft?
 - Bereken de waarde van p en geef een vergelijking van l .



Theorie

Het aantal oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ kun je bepalen met de uitkomst van de discriminant $D = b^2 - 4ac$. Er geldt

- $D > 0$: er zijn twee oplossingen.
- $D = 0$: er is één oplossing.
- $D < 0$: er is geen oplossing.

Met de discriminant kun je in een aantal gevallen de waarde van een parameter berekenen.

Voorbeeld

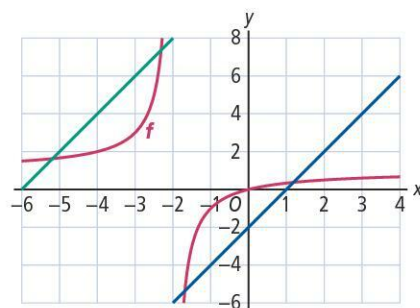
Bereken voor welke waarden van p de vergelijking $x^2 + px + p + 3 = 0$ precies één oplossing heeft.

Oplossing

Er is één oplossing als $D = 0$,
 dus als $p^2 - 4 \cdot 1 \cdot (p + 3) = 0$.
 $p^2 - 4p - 12 = 0$
 $(p + 2)(p - 6) = 0$.
 Dus $p = -2$ of $p = 6$.

- 38** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x}{x+2}$ en de familie van functies $g_a(x) = 2x + a$. In de figuur is de grafiek van f en voor twee waarden van a ook de grafiek van g_a getekend.

- Bereken exact voor welke waarde van a het punt $(2, \frac{1}{2})$ een snijpunt is van de grafieken van f en g_a .
- Bereken exact de twee waarden van a waarvoor de grafiek van g_a de grafiek van f raakt.
- Voor welke waarden van a hebben de grafiek van g_a en de grafiek van f geen punten gemeenschappelijk?



Uitdagende route → maak opdracht U5 en U6

Ondersteunende opdrachten

037 Gegeven is de functie $h(x) = x^2 + 3x - 4$. Je gaat berekenen voor welke waarde van p de lijn $y = p$ precies één gemeenschappelijk punt heeft met de grafiek van h .

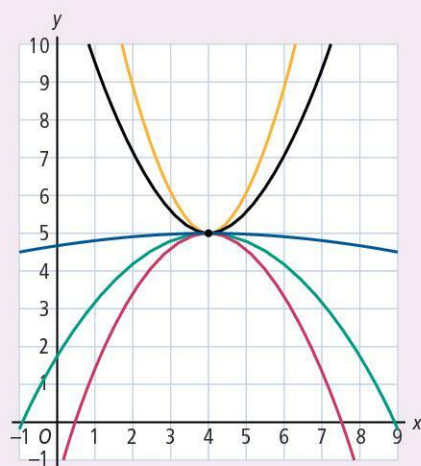
- Met de vergelijking $x^2 + 3x - 4 = p$ ofwel $x^2 + 3x - 4 - p = 0$ bereken je voor welke waarden van x de grafieken elkaar snijden.
Druk de discriminant D uit in p .
Op het blaadje is daarmee een begin gemaakt.
- Waarom moet je nu de vergelijking $D = 0$ oplossen?
- Bereken p .
- Voor welke waarden van p zijn er twee snijpunten?

- ☐ $x^2 + 3x - 4 = p$ dus
- ☐ $x^2 + 3x - 4 - p = 0$
- ☐ $a = 1, b = 3$ en $c = -4 - p$
- ☐ Eén oplossing dus
- ☐ $D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\dots) = 0$

Uitdagende opdrachten

U5 Van een familie van functies f_a zijn de grafieken parabolen met top $(4, 5)$. Enkele grafieken zijn getekend.

- Geef het functievoorschrift $f_a(x)$ van deze familie.
- Bereken de waarde van de parameter als de afstand tussen de snijpunten met de x -as gelijk is aan 7.



U6 Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = \frac{4}{px - 5}$

- Bereken voor welke waarde van p de functiewaarde $f_p(-10)$ niet bestaat.
- De lijn $y = x$ snijdt, afhankelijk van de waarde van p , de grafiek van f_p soms in twee punten en soms helemaal niet. Er is ook een waarde van p waarvoor er precies één gemeenschappelijk punt is. Bereken deze waarde van p .

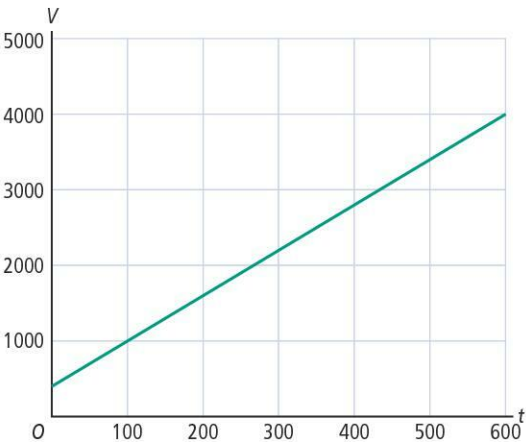
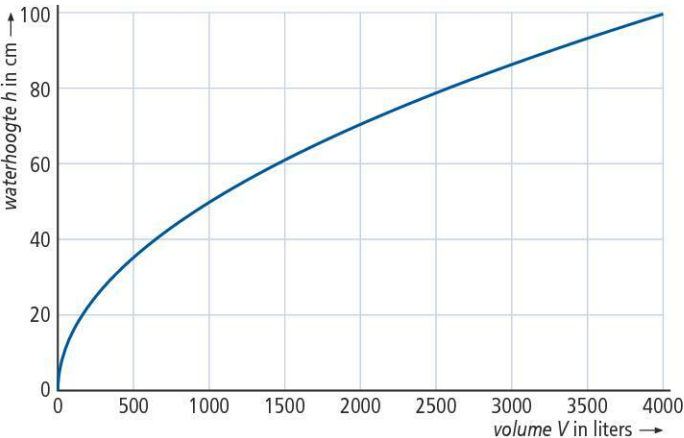
10.6 Samengestelde functies

- Je leert**
- wat een samengestelde functie is
 - hoe je eigenschappen van een samengestelde functie onderzoekt

- Leerroutes**
- ondersteunend: 39—40—41—042—43—044—44
 - doorlopend: 39—40—41—42—43—44—45
 - uitdagend: 39—40—42—43—44—45—U7

Een stalen vat is gevuld met gas. Als het vat verwarmd wordt, neemt ook de temperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ van het gas toe en daarmee de druk p in hPa van het gas in het afgesloten vat. T voldoet aan de formule $T = 20 + 0,5t$ met t de tijd in minuten en p voldoet aan de formule $p = 3,4T + 932$.

- Hoe kun je de druk van het gas op een bepaald tijdstip vinden zonder eerst de temperatuur te berekenen?



- 39** In een watertank, die 4000 liter kan bevatten, zit 400 liter. De watertank wordt gevuld. In de linker grafiek zie je het verband tussen het volume V in liters en de tijd t in seconden. In de rechter grafiek is het verband gegeven tussen de waterhoogte h in cm en het volume V .
- Dit verband hangt samen met de vorm van het reservoir.
- a Lees de waterhoogte af op tijdstip $t = 0$.
 - b Gebruik de grafieken om na te gaan op welk tijdstip het water ongeveer 80 cm hoog staat.
 - c Vul de tabel in.
 - d Gebruik de ingevulde tabel om de grafiek te tekenen van het verband tussen t en h . Zet t uit langs de horizontale as en h langs de verticale as.

t	V	h
0		
100		
200		
300		
400		
500		
600		

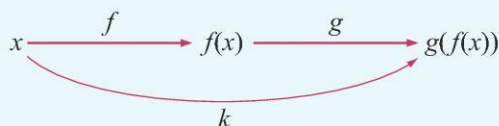
- 40** Bij het vullen van de tank uit opdracht 39 wordt het verband tussen het volume water V in liters en de tijd t in seconden gegeven door de formule $V = 6t + 400$.

Voor het verband tussen de waterhoogte h in cm en het volume V geldt de formule $h = \sqrt{2,5 \cdot V}$.

- Bereken de waterhoogte na 6 minuten.
- Bereken op welk tijdstip de waterhoogte 60 cm is.
- Substitueer de formule van V in die van h en druk h uit in t .
- Plot de grafiek van h als functie van t en controleer of deze overeenkomt met jouw grafiek van opdracht 39d.

Theorie

Door het functievoorschrift van een functie f te substitueren in het functievoorschrift van een functie g ontstaat een **samengestelde functie** $k(x) = g(f(x))$. De twee gegeven functies heten de **schakels** van de samengestelde functie.



Voorbeeld 1

Als $f(x) = 2x + 1$ en $g(x) = 2^{3x-4}$ dan is het functievoorschrift van de samengestelde functie $k(x) = g(f(x))$, dus $k(x) = 2^{3 \cdot f(x) - 4}$.
 $k(x) = 2^{3 \cdot (2x + 1) - 4}$ ofwel $k(x) = 2^{6x-1}$.

Voorbeeld 2

De samengestelde functie $k(x) = {}^2\log(x^4 + 10)$ heeft als schakels $f(x) = x^4 + 10$ en $g(x) = {}^2\log(x)$.

- 41** Geef het functievoorschrift van de samengestelde functie $k(x) = g(f(x))$ en schrijf dit zo eenvoudig mogelijk.

- $f(x) = 2 + x^3$ en $g(x) = {}^3\log(2x + 5)$
- $f(x) = 5x - 9$ en $g(x) = \frac{4}{x-2}$
- $f(x) = 4 - x^2$ en $g(x) = \sqrt{x+2}$
- $f(x) = \frac{6}{x}$ en $g(x) = x^2 - 4x$

Ondersteunende route → maak opdracht 042

- 42** Geef bij elke functie de functievoorschriften van de twee schakels.

H

- $k(t) = 2\sqrt{5t^3 - 7}$
- $k(x) = \frac{2}{\sin(x)}$
- $k(x) = \log(x^2 - 3x)$
- $k(t) = \frac{7}{2t^2 - 9}$

Theorie

Om eigenschappen van de grafiek van een samengestelde functie te onderzoeken, gebruik je de eigenschappen van de schakels.

Voorbeeld 1

Bereken exact de coördinaten van de top van de grafiek van $f(x) = {}^2\log(-2x^2 + 8)$.

Oplossing

De schakels van f zijn $p(x) = -2x^2 + 8$ met $p > 0$ en $h(x) = {}^2\log(x)$. De grafiek van p is een bergparabool met een top bij $x = 0$. Omdat h een stijgende functie is, neemt $h(p(x))$ toe als $p(x)$ toeneemt en neemt $h(p(x))$ af als $p(x)$ afneemt.

De grafiek van f heeft dus ook een top bij $x = 0$. $f(0) = {}^2\log(8) = 3$, dus de top van de grafiek van f is het punt $(0, 3)$.

Voorbeeld 2

Onderzoek met behulp van de schakels of de samengestelde functie $f(x) = (5 - 2x)^3$ een stijgende of een dalende functie is.

Oplossing

De schakels zijn $p(x) = 5 - 2x$ en $g(x) = x^3$.

De functie p is een dalende functie en de functie g is een stijgende functie.

Als x toeneemt, neemt $p(x)$ af en daarmee ook $g(p(x))$.

Conclusie: f is een dalende functie.

43 Bereken exact de coördinaten van de top van de grafiek.

a $f(x) = \sqrt{36 - x^2}$ **c** $h(x) = \frac{70}{x^4 - 10}$

b $g(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2 - 8}$ **d** $k(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{4-x^2}$

Ondersteunende route → maak opdracht 044

44 **H** Onderzoek of de samengestelde functie een stijgende of een dalende functie is. Gebruik daarbij het stijgend en/of dalend zijn van de schakels.

a $f(x) = \sqrt{4x + 8}$ **c** $h(x) = 2^{3-5x}$

b $g(x) = \frac{4}{3x + 5}$ **d** $k(x) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{4}{x}\right)$

45 **a** Beredeneer dat de grafiek van de functie $f(x) = {}^5\log(x^2 + 25)$ geen asymptoot heeft.
b Beredeneer dat de grafiek van de functie $g(x) = {}^5\log(x^2 - 25)$ twee asymptoten heeft.

Uitdagende route → maak opdracht U7

Ondersteunende opdrachten

- 042** a Gegeven is de functie $k(x) = 2^{6x-3}$ met $k(x) = g(f(x))$.
Vul in: $g(x) = \dots$ en $f(x) = 6x - 3$.
- b Gegeven is de functie $k(x) = \sqrt{8 - x^2}$.
Vul in: De functie k is ontstaan door in de functie $g(x) = \sqrt{x}$ de x te vervangen door $f(x) = \dots$
- c Vul op het blaadje de functievoorschriften van f en g in.

Gegeven zijn functies van de vorm $k(x) = g(f(x))$.
Geef mogelijke functievoorschriften van g en f .

- d $k(x) = (7x^2 - 2)^5$ f $k(x) = \sqrt[3]{8 - 9x}$
- e $k(x) = \frac{3}{\log(x)}$ g $k(x) = \frac{-4}{\cos(x)}$

•	$k(x) = g(f(x))$ houdt in dat je				
•	in het functievoorschrift van g				
•	elke x vervangt door $f(x)$.				
•	$k(x) = \frac{5}{4x^2 - 9}$ is van de vorm				
•	$k(x) = g(f(x))$ met				
•	$g(x) = \frac{5}{\dots}$ en $f(x) = \dots$				

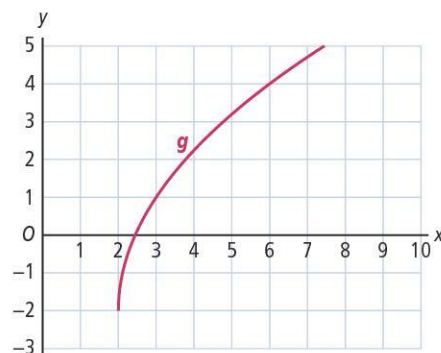
- 044** Je gaat met behulp van het dalend of stijgend zijn van de schakels onderzoeken of $k(x) = -(2 - 3x)^3$ een stijgende of een dalende functie is.

- a Laat zien dat $k(x) = g(f(x))$ met $g(x) = -x^3$ en $f(x) = 2 - 3x$.
- b Is f een dalende of een stijgende functie?
- c Is g een dalende of een stijgende functie?
- d Vul het juiste woord in:
Als x toeneemt, neemt $f(x)$... (toe/af),
dus neemt $g(f(x))$... (toe/af).
Conclusie: als x toeneemt, neem $k(x)$... (toe/af).
 k is een ... (stijgende/dalende) functie.

Uitdagende opdrachten

- U7** Onderzoek wat de vergelijkingen van de asymptoten zijn van de grafiek van $f(x) = \frac{2^x + 1}{2^x - 1}$.
Licht je antwoorden toe met behulp van de schakels van f .

- 46** Gegeven is de functie g . De grafiek van g is door transformaties uit de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$ ontstaan.
- Geef de coördinaten van het randpunt van de grafiek van g .
 - Waaraan kun je zien dat er een verschuiving heeft plaatsgevonden?
 - Waarom is er ook sprake van een vermenigvuldiging?
 - Eén van de transformaties kan een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as zijn.
Geef in dat geval aan welke transformaties zijn toegepast.
 - Eén van de transformaties kan ook een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as zijn.
Geef in dat geval aan welke transformaties zijn toegepast.

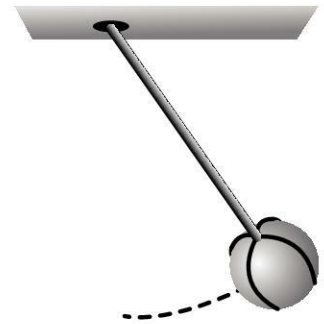
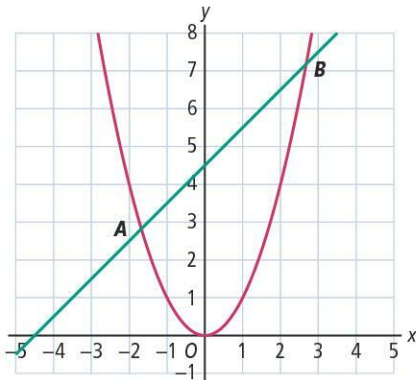


- 47** Bij de tienkamp in de atletiek krijgt een deelnemer punten voor elk onderdeel. Bij het hoogspringen voor de mannen gaat dat volgens de formule $P = 0,8465 \cdot (h - 75)^{1,42}$ met P het aantal punten en h de hoogte in centimeters. P wordt altijd naar beneden afgerond.
- Welke transformaties, toegepast op de grafiek bij de formule $S = h^{1,42}$, spelen een rol bij de grafiek van deze formule?
 - Leg uit wat de verschuiving van 75 cm in de praktijk betekent.
 - Wat betekent het voor de atleet die zich wil verbeteren, dat P steeds sneller stijgt?
 - Bij de 1500 meter hardlopen hoort de formule $P = 0,03768 \cdot (480 - t)^{1,85}$ met P het aantal punten en t de gelopen tijd in seconden. P wordt altijd naar beneden afgerond.
Leg uit wat de betekenis is van het getal 480.
 - Leg uit hoe uit de formule volgt dat hoe sneller de atleet de 1500 meter aflegt, hoe meer punten hij krijgt.



- 48** De grafiek van de functie $f(x) = 4x - \frac{1}{2}x^2$ wordt eerst gespiegeld in de y -as en daarna in de x -as. Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek.
- 49** Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{(x+a)^2 - a}$.
- Bereken met behulp van de afzonderlijke schakels exact de coördinaten van de top van de grafiek van f_1 .
 - Leg uit dat bij elke waarde van a de lijn met vergelijking $y = 0$ de horizontale asymptoot is.

- 50** Een voorwerp wordt opgehangen aan een slinger. Met de formule $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ van Christiaan Huygens (1629 – 1695), wordt de tijd T die één slingerbeweging duurt (in seconden) uitgedrukt in de lengte van de slinger l (in meters) en de versnelling ten gevolge van de zwaartekracht g (in m/s^2). Onderzoek hoe de lengte van de slinger moet veranderen als je de slingertijd wilt verdubbelen.



- 51** Gegeven is de parabool met vergelijking $y = x^2$. Ook is gegeven de familie van lijnen met vergelijking $y_p = x + p$.
- Niet elke lijn uit de familie van lijnen $y_p = x + p$ snijdt de parabool $y = x^2$.
Onderzoek voor welke waarden van p de lijn geen gemeenschappelijke punten met de parabool heeft.
 - Eén lijn uit de familie van lijnen snijdt de parabool in punten A en B met $AB = 6\sqrt{2}$.
Toon aan dat $x_B - x_A = y_B - y_A = 6$
 - Onderzoek welke waarde p heeft.
 - Neem aan dat een lijn uit de familie van lijnen de parabool in twee punten M en N snijdt.
Onderzoek hoe de afstand MN afhangt van p .

Vaardigheid

Je kunt een functievoorschrift opstellen bij een beeldgrafiek na een translatie.

Verschuif je de grafiek van f over een afstand a omhoog, dan ontstaat de grafiek van $g(x) = f(x) + a$.

Bij een verschuiving over a naar rechts vervang je elke x in het functievoorschrift van f door $x - a$: $h(x) = f(x - a)$.

Een verschuiving heet ook wel een translatie.

Voorbeeld

De grafiek van de functie $f(x) = {}^2\log(x)$ wordt 3 naar rechts en 4 omhoog verschoven.

Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek.

Oplossing

Vervang in het functievoorschrift x door $x - 3$ en tel 4 op bij het resultaat: $g(x) = f(x - 3) + 4$.

Je vindt $g(x) = {}^2\log(x - 3) + 4$.

S1 Geef het functievoorschrift $g(x)$ van de beeldgrafiek.

a $f(x) = 2^{3x}$, translaties 2 naar links en 1 omlaag.

b $f(x) = 3x^2$, translaties 4 naar rechts en 5 omhoog.

Vaardigheid

Je kunt een functievoorschrift opstellen na een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as.

Als je de grafiek van een functie f vermenigvuldigt ten opzichte van de x -as met factor a , ontstaat de grafiek van $g(x) = a \cdot f(x)$.

Voor $a = -1$ is grafiek van g het beeld van de grafiek van f bij spiegelen in de x -as.

Translaties, vermenigvuldigingen en spiegelingen zijn voorbeelden van transformaties van grafieken.

Voorbeeld

Geef het functievoorschrift $g(x)$ van de grafiek die ontstaat door de grafiek van

$f(x) = \sqrt{4x + 7} - 6$ ten opzichte van de x -as met -2 te vermenigvuldigen.

Oplossing

$g(x) = -2 \cdot f(x)$ ofwel

$g(x) = -2(\sqrt{4x + 7} - 6)$, dus

$g(x) = -2\sqrt{4x + 7} + 12$.

S2 Gegeven is de functie $f(x) = 3x^3 - 6x + 4$.

a De grafiek van f wordt ten opzichte van de x -as met 4 vermenigvuldigd.

Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek.

b De grafiek van f wordt gespiegeld in de x -as.

Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek.

Vaardigheid

Je kunt een functievoorschrift opstellen na een vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as.

Als je de grafiek van een functie f vermenigvuldigt ten opzichte van de y-as met factor b , krijg je het functievoorschrift van de beeldgrafiek door elke x in het functievoorschrift van f te vervangen door $\frac{x}{b}$ ofwel $\frac{1}{b} \cdot x$, dus $g(x) = f\left(\frac{1}{b} \cdot x\right)$.

Voor $b = -1$ is de grafiek van g het beeld van de grafiek van f bij spiegelen in de y-as. Dan geldt dus $g(x) = f(-x)$.

Je vervangt dan in het functievoorschrift van f elke x door $-x$.

Voorbeeld

Geef het functievoorschrift van de grafiek die ontstaat door de grafiek van

$f(x) = 2x + \sqrt{6x + 5}$ ten opzichte van de y-as met 3 te vermenigvuldigen.

Oplossing

Het functievoorschrift is

$$g(x) = f\left(\frac{1}{3}x\right) = 2 \cdot \frac{1}{3}x + \sqrt{6\left(\frac{1}{3}x\right) + 5}.$$

$$\text{Dit geeft } g(x) = \frac{2}{3}x + \sqrt{2x + 5}.$$

- S3** Geef bij elke functie het functievoorschrift van de beeldgrafiek na het toepassen van de gegeven transformatie.

a $f(x) = 3^{12x-7}$, vermenigvuldiging met factor 4 ten opzichte van de y-as.

b $g(x) = 4x\sqrt{x-2}$, spiegeling in de y-as.

Vaardigheid

Je kunt vergelijkingen van asymptoten opstellen.

De grafiek van een gebroken lineaire functie $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ heet een hyperbool en bestaat uit twee delen, die door twee asymptoten van elkaar worden gescheiden.

Voor het bepalen van de verticale asymptoot kijk je waar de noemer gelijk is aan nul, dus naar de oplossing van $cx + d = 0$. De horizontale asymptoot bepaal je met behulp van een tabel op je rekenmachine met stapgrootte 10 of 100.

Ook grafieken van exponentiële en logaritmische functies hebben asymptoten.

Voorbeeld

Stel vergelijkingen op van de asymptoten van de grafiek van

$$f(x) = \frac{8x+3}{2x-6}$$

Oplossing

$2x - 6 = 0$ voor $x = 3$. De lijn $x = 3$ is de verticale asymptoot.

Met behulp van een tabel zie je dat $f(x)$ voor waarden van x ver van 0 nadert tot 4. De lijn $y = 4$ is de horizontale asymptoot.

- S4** Stel vergelijkingen op van de asymptoten van de grafiek.

a $f(x) = \frac{9x}{3x+6}$

c $h(x) = 4 \cdot 1,9^x + 3$

b $g(x) = \frac{3x+6}{9x}$

d $k(x) = 4 \log(2x-5)$

Vaardigheid

Je kunt een formule herleiden.

Je kunt een formule herleiden door links en rechts dezelfde bewerking toe te passen. Vaak gebruik je daarbij inverse (omgekeerde) bewerkingen.

In een formule kun je een variabele vervangen door een andere formule. Je noemt dit substitueren.

Voorbeeld

$$y = 3 \cdot 2^x + 6, \text{ druk } x \text{ uit in } y.$$

Oplossing

Uit $y = 3 \cdot 2^x + 6$ volgt $3 \cdot 2^x = y - 6$.

$$2^x = \frac{1}{3}y - 2$$

$$x = {}^2\log\left(\frac{1}{3}y - 2\right)$$

S5 Druk x uit in y en vereenvoudig zover mogelijk.

a $y = \frac{6}{4x - 3}$

b $x = 5 \cdot 2^{3t^2+2}$ en $t = \sqrt{y + 2}$

Vaardigheid

Je kunt onderzoeken of formules gelijkwaardig zijn.

Als bij twee formules elke combinatie van waarden die aan de ene formule voldoet, ook aan de andere voldoet en omgekeerd, dan heten die formules gelijkwaardig.

Om te onderzoeken of twee formules gelijkwaardig zijn, probeer je een van de formules te herleiden tot de andere.

Voorbeeld

Onderzoek of de formules $x + \frac{2}{5}y = 2$ en $y = -2\frac{1}{2}x + 5$ gelijkwaardig zijn.

Oplossing

Uit $x + \frac{2}{5}y = 2$ volgt $5x + 2y = 10$,

$2y = -5x + 10$, dus $y = -2\frac{1}{2}x + 5$.

De formules zijn gelijkwaardig.

S6 Onderzoek of de formules gelijkwaardig zijn.

a $q = 12 - 3p$ en $p = 4 - q$

b $q = {}^3\log(p + 4)$ en $p = 3^q - 4$

Vaardigheid

Je kunt de waarde van een parameter berekenen.

$f_p(x) = px + 2$ hoort bij een familie van functies. Als je bij verschillende waarden van de parameter p de grafieken in één assenstelsel tekent, krijg je een grafiekenbundel. Met behulp van extra gegevens kun je de waarde van p berekenen.

Voorbeeld

Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = x^2 + px - 4$. Bereken voor welke waarde van p de grafiek van f_p door het punt $P(4, 2)$ gaat.

Oplossing

Vul de coördinaten van P in het functievoorschrift in:

$$2 = 16 + 4p - 4.$$

Dit geeft $4p = -10$, dus $p = -2\frac{1}{2}$.

S7 Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = ax^2 - 4x + 2$.

- a De grafiek van f_a gaat door het punt $(-3, 8)$.
Bereken a .
- b De top van de grafiek van f_a ligt op de x -as.
Bereken a .

Vaardigheid

Je kunt eigenschappen van een samengestelde functie onderzoeken.

Door bij twee functies het ene functievoorschrift te substitueren in het andere, ontstaat het functievoorschrift van een samengestelde functie. De twee gegeven functies heten de schakels van de samengestelde functie.

Voorbeeld

Bereken exact de coördinaten van de top van de grafiek van

$$f(x) = \sqrt{6x - x^2}.$$

Oplossing

De schakels van f zijn $p(x) = 6x - x^2$ en $h(x) = \sqrt{x}$.

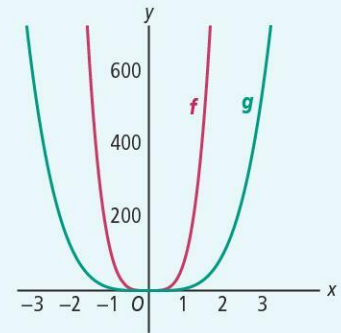
De grafiek van p is een bergparabool met een top bij $x = 3$. Omdat h een stijgende functie is, heeft de grafiek van h ook een top bij $x = 3$.

$f(3) = \sqrt{18 - 9} = 3$, dus de top van de grafiek van f is het punt $(3, 3)$.

- S8**
- a Bereken exact de coördinaten van de top van de grafiek van de functie $f(x) = \log\left(2x - \frac{1}{10}x^2\right)$.
 - b Onderzoek of $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{3-2x}$ een dalende of een stijgende functie is.

- T1** De grafiek van $f(x) = -x^3$ wordt 4 naar links en 2 omhoog verschoven. Zo ontstaat de grafiek van een functie g .
- Geef de coördinaten van het beeld van het punt $O(0, 0)$.
 - P is een punt op de grafiek van f . Het beeldpunt van P is het punt $Q(-1, -25)$.
Geef de coördinaten van P .
 - Geef het functievoorschrift van g .
 - Van een punt van de beeldgrafiek is de y -coördinaat -6 .
Van welk punt van de grafiek van f is dit punt het beeld?

- T2** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = 100x^4$.
De grafiek van de functie g is het beeld van de grafiek van f bij een vermenigvuldiging met factor 2 ten opzichte van de y -as.
- Toon aan dat $g(x) = 6\frac{1}{4}x^4$.
 - Je kunt de grafiek van g ook zien als beeld van de grafiek van f bij een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as.
Welke factor hoort bij deze vermenigvuldiging?



- T3** Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 7x$.
- De grafiek van f wordt gespiegeld in de x -as en daarna 4 naar rechts verschoven.
Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek.
 - De grafiek van f wordt eerst 4 naar rechts verschoven en vervolgens gespiegeld in de y -as.
Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek.

- T4** Stel vergelijkingen op van de asymptoten van de grafiek van f .

a $f(x) = \frac{5 - 2x}{3x + 10}$ **b** $f(x) = 4 - \frac{1 - 0,4x}{0,1x + 2}$

- T5** Gegeven is de functie $k(x) = \frac{16}{\sqrt{4x + 8}}$

- Leg met behulp van de schakels uit of k een stijgende of een dalende functie is.
- Beredeneer welke lijnen de asymptoten zijn van de grafiek van k .

- T6** Gegeven is de formule $3x = -1 + {}^3\log(y)$.

- Herleid de formule tot $y = 3 \cdot 27^x$.
- Gegeven zijn de formules $y = 4t - 6$ en $t = (x + 2)^2 + 1\frac{1}{2}$.
Schrijf y als functie van x en vereenvoudig het resultaat zoveel mogelijk.

- T7** Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = \sqrt{2\left(x - \frac{p}{x}\right)}$.
- a Bij welke waarde van p zijn de punten $(-2, 0)$ en $(2, 0)$ de randpunten van de grafiek van f_p ?
 - b Volgens Yasmin krijg je de grafiek van $g(x) = \sqrt{2x + 10}$ als je de grafiek van f_0 tien naar links verschuift. Heeft Yasmin gelijk? Leg je antwoord uit.
 - c Hoeveel eenheden moet je de grafiek van f_0 horizontaal verschuiven om de grafiek van $h(x) = \sqrt{2x - 16}$ te krijgen?

- T8** Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{4x + 5}$ en $g(x) = x^2 + 5$.
- a Geef het functievoorschrift van $k(x) = f(g(x))$.
 - b Geef het domein van k .
 - c Geef het functievoorschrift van $h(x) = g(f(x))$.
 - d Geef het domein van h .

- T9**
- a De functie k wordt samengesteld uit de functies $f(x) = x^2 + 1$ en $g(x) = {}^3\log(2x - 1)$. Geef het functievoorschrift van $k(x) = g(f(x))$.
 - b Leg met een redenering uit wat de coördinaten van de top van de grafiek van k zijn.
 - c Beredeneer dat k een stijgende functie is voor $x > 0$.
 - d Geef het functievoorschrift van $h(x) = f(g(x))$.

- T10** De snelheid van het geluid (V) hangt onder andere af van de temperatuur (T). Bij windstil weer wordt het verband bij benadering weergegeven door de formule: $V = 331\sqrt{1 + \frac{T}{273}}$ met V in m/s en T in $^{\circ}\text{C}$.
- a Bereken de snelheid van het geluid voor een temperatuur van 20°C .
 - b Bereken algebraïsch bij welke temperatuur de snelheid 340 m/s is. Rond af op hele graden.
 - c Herleid de gegeven formule zodat T wordt uitgedrukt in V .
 - d Op een dag neemt de temperatuur in de atmosfeer tot op 10 km hoogte lineair af volgens de formule $T = 15 - 6,5 \cdot h$. Hierbij is h de hoogte in kilometers. Toon aan dat voor het verband tussen V en h bij benadering geldt: $V = 331\sqrt{1,0549 - 0,0238 \cdot h}$ (Ontleend aan CE havo wiskunde B1 2004 tijdvak 1).



Je kunt een functievoorschrift opstellen bij een beeldgrafiek na een translatie.

- E1** Gegeven is de functie $f(x) = 4 + {}^2\log(x - 9)$.
- Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f uit de grafiek van de functie $g(x) = {}^2\log(x)$?
 - De grafiek van f wordt 5 naar links verschoven. Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek.

Je kunt een functievoorschrift opstellen na een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as.

- E2** De grafiek van een functie g ontstaat door de grafiek van de functie $f(x) = 3 \cdot 2^x$ te vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as met factor 4.
- Geef het functievoorschrift van g .
 - Toon aan dat de grafiek van g ook kan ontstaan door een translatie van de grafiek van f .

Je kunt een functievoorschrift opstellen na een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as.

- E3** Gegeven is de functie $f(x) = 3 \cdot 2^x$.
- De grafiek van f wordt ten opzichte van de y -as met 2 vermenigvuldigd. Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek.
 - De grafiek van f wordt gespiegeld in de y -as. Welk functievoorschrift hoort bij de beeldgrafiek?

Je kunt vergelijkingen van asymptoten opstellen.

- E4** Stel vergelijkingen op van de asymptoten van de grafiek.
- $f(x) = \frac{5x - 8}{10 - 15x}$
 - $g(x) = 4 + 3 \cdot 1,05^x$
 - $h(x) = 8 - \frac{\frac{1}{3}x + 2}{1 - \frac{1}{6}x}$
 - $k(x) = 16 - 3,8 \cdot 0,99^x$

Je kunt een formule herleiden.

- E5** Herleid de formule tot een vorm waarbij x is uitgedrukt in y .
- $y = \frac{1}{4} \cdot {}^3\log(x - 2)$
 - $y = 16 + 4^x$
 - $y = \frac{1}{3}x^5 - 2$
 - $y = \frac{-4}{\sqrt{x} - 4}$

Je kunt onderzoeken of formules gelijkwaardig zijn.

- E6** Toon algebraïsch aan dat de formules A en B gelijkwaardig zijn.
- A $q = 8p + 24$ B $p = 0,125q - 3$
 - A $q = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2p - 5}$ B $p = 4q^3 + 2\frac{1}{2}$
 - A $x = 4 + {}^2\log(y)$ B $y = \frac{1}{16} \cdot 2^x$

Je kunt de waarde van een parameter berekenen.

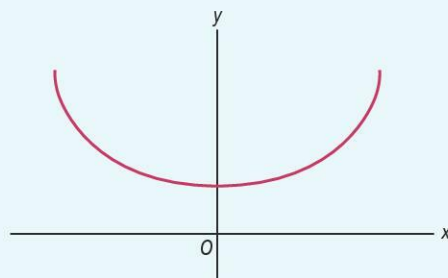
- E7** Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = x^4 - \frac{1}{4}a$.
- a** Bij welke waarde van a gaat de grafiek van f_a door $(2, 4)$?
 - b** Bij welke waarde van a ligt de top van de grafiek van f_a op de lijn met vergelijking $y = 2x - 7$?
 - c** Druk de x -coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f_a met de x -as uit in a .

Je kunt eigenschappen van een samengestelde functie onderzoeken.

- E8** Gegeven is de samengestelde functie $f(x) = \sqrt{(x-1)^2 + 16}$.
- a** Geef aan uit welke twee schakels de gegeven functie bestaat.
 - b** Beredeneer wat de coördinaten van de top van de grafiek van f zijn.
 - c** Los exact op $f(x) = 6$.

- E9** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2x^2 - 8$ en $g(x) = \frac{6}{5x+4}$.
Geef de functievoorschriften van $k(x) = g(f(x))$ en $h(x) = f(g(x))$. Schrijf deze zo eenvoudig mogelijk.

- E10** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = 4 - \sqrt{8 - \frac{1}{2}x^2}$.
- a** Bereken de coördinaten van de randpunten.
 - b** De grafiek wordt vermenigvuldigd ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{2}$ en op het resultaat wordt een translatie 3 naar links toegepast.
Geef het functievoorschrift bij de beeldgrafiek.
 - c** Geef ook het functievoorschrift bij de beeldgrafiek als de transformaties uit opdracht b in de omgekeerde volgorde worden toegepast.



- E11** Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = {}^2\log(x^2 + px + 4)$.
- a** Bij welke waarde van p gaat de grafiek van f_p door het punt $(2, 5)$?
 - b** Voor welke waarde van p is de lijn $x = 3$ een verticale asymptoot van de grafiek van f_p ?
 - c** De grafieken van f_p gaan allemaal door één punt. Welk punt is dat?
 - d** Voor welke waarden van p is $\mathbb{R}$ het domein van f ?

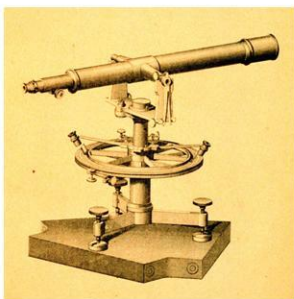
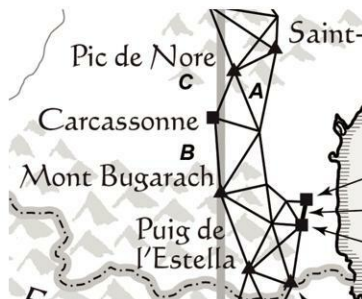
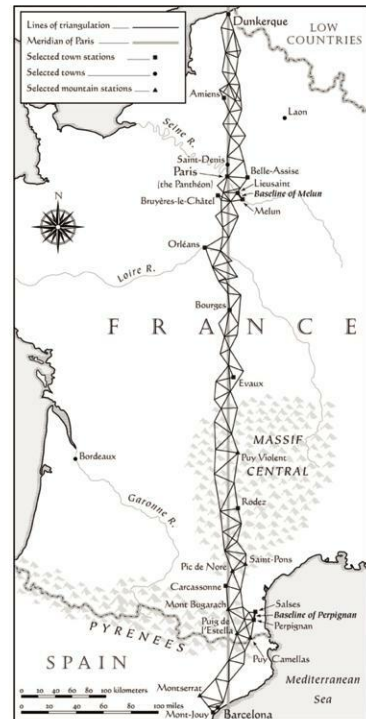
De standaardmeter

In de beginjaren van de Franse Revolutie verklaarde een team van wetenschappers dat de meter één tienmiljoenste van de afstand van de noordpool tot de evenaar zou moeten zijn.

In 1792 vertrokken de Franse wetenschappers, Méchain en Delambre met een bijzondere taak: het meten van het deel van de meridiaan tussen Duinkerken en Barcelona. Hun hoop was dat ooit iedereen dezelfde standaardmaat zou gaan gebruiken: de meter.

Om de afstand van Duinkerken tot Barcelona te bepalen, pasten Méchain en Delambre de methode van driehoeksmeting toe. Daarbij maak je gebruik van de eigenschap dat een driehoek volledig bepaald is als één zijde en de aanliggende hoeken bekend zijn. Daarna wordt de sinusregel gebruikt om de andere zijden te berekenen.

De voornaamste taak van Méchain en Delambre was het meten van hoeken met de repetitielcirkel (zie afbeelding) en de onderlinge afstand tussen goed waarneembare punten. Zo gebruikte ze bijvoorbeeld de kerktoeren van het hoog gelegen stadje Carcassonne en Mont Bugarach (1230 meter).



Opdracht

Als je de kaart met de driehoeksmeting uitvergroot, zie je Carcassonne en Mont Bugarach aangegeven en een derde plaats, aangeduid met de letter *A*.

Je kunt meten dat $\angle ACB \approx 72^\circ$ en $\angle CBA \approx 36^\circ$.

- Zoek met een atlas of Googlemaps uit welke plaats *A* is.
- Tussen Carcassonne en *A* dat een uitzichtpunt is, ligt een deel van het lange afstandspad GR 36, dat ook in die tijd een verbinding was. De afstand hemelsbreed is circa 21,6 km. Bereken met de sinusregel de afstanden *CB* en *AB*.

Méchain en Delambre presenteerden hun meetgegevens pas in 1799. In Parijs ligt een platina staaf: dat is de meter.

In het SI-stelsel is de meter de eenheid voor lengte en is sinds

1983 gedefinieerd als de afstand die licht in $\frac{1}{299\,792\,458}$ seconde in vacuüm aflegt.

Departures

Flt No.	Remarks
Gate Opens 16:50	
Gate Opens 16:40	
Gate Opens 16:50	
Gate Opens 16:55	
Gate Opens 16:55	
Gate Opens 17:00	
Gate Opens 17:00	
Gate Opens 17:10	
Gate Opens 17:15	
Gate Opens 17:15	
Gate Opens 17:15	
Gate Opens 17:15	
Gate Opens 17:15	

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Rekenen met haakjes
- Rekenen met machten
- Vergelijking van een lijn
- Kwadratische formules
- Meetkunde

Departures

Time	Destination	Flt No.	Remarks
20:05	Vienna		Gate Open
20:05	an Bergamo		Gate Open
20:05	Barcelona		Gate Open
20:10	Cologne		Gate Open
20:10	Bologna		Gate Open
20:20	Hanover		Gate Open
20:25	Stuttgart		Gate Open
20:25	Wroclaw		Gate Open

Rekenen met haakjes

Theorie

Voor het product van tweetermen geldt

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Bijzondere gevallen zijn:

1 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3 $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

1 Schrijf zonder haakjes.

a $-\frac{1}{3}(a + 27) - 12$

e $-3 - (3 - 2x)$

b $(3q - 5)^2$

f $(y^2 - 6)(y^2 + 6)$

c $(0,25 - 2p)^2$

g $-11(2p - 3) + 6p$

d $(7p + 2)(p^2 - 3)$

h $(2x - 4)(4 - 2x)$

2 Ontbind in factoren.

a $24x^2 + 6x$

e $4p^2 - 6p$

b $32p - 24p^2$

f $27 - 12t + t^2$

c $s^2 - s - 30$

g $x^2 - x + \frac{1}{4}$

d $11q + q^2 - 12$

h $p^2 - 64$

Rekenen met machten

3 Ga bij elke bewering na of deze waar is of niet waar.

Als de bewering niet waar is, breng een verbetering aan zodat je een ware bewering krijgt.

a $\frac{8^{10}}{8^2} = 8^5$

d $(4r^3)^{-1} = \frac{1}{4r^3}$

b $(x^2)^4 = x^6$

e $2a^{-2} \cdot 5a^2 = 10a$

c $(2a^{-2})^{-4} = 2a^{-8}$

f $(\sqrt{x})^5 \cdot (\sqrt{x})^3 = x^5$

4 Op het blaadje is de formule $y = 5 \cdot 3^{3x-1}$ herleid tot de formule $y = 1\frac{2}{3} \cdot 27^x$.

Geef bij elke stap aan welke rekenregel gebruikt is.

☐	$y = 5 \cdot 3^{3x-1}$		
☐	$y = 5 \cdot 3^{3x} \cdot 3^{-1}$		1
☐	$y = 5 \cdot 3^{-1} \cdot (3^3)^x$		2
☐	$y = 1\frac{2}{3} \cdot 27^x$		3

5 Schrijf de exponentiële formules in de vorm $y = b \cdot g^x$.

a $y = 7 \cdot 7^{x+3}$

d $y = 25 \cdot 5^{2x+1}$

b $y = 12 \cdot 3^{2-x}$

e $y = \frac{1}{2} \cdot 2^{-2x+5}$

c $y = 6^{1-2x}$

f $y = 4 \cdot 9^{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$

6 Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk.

a $(1 - 2^q)(1 + 2^q)$

d $2(2^x + y)(2^x - y)$

b $(3^t - 2)^2$

e $5^{3p}(5^{\frac{1}{2}p} - 5^{-p})$

c $(4^x + 3)(4^{-x} - 2)$

f $(8^{3p} + 3)(8^p - p)$

7 Herleid en schrijf in de vorm $b \cdot x^a$ voor $x > 0$.

a $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot 2\sqrt{x}$

c $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}$

b $\frac{(3x)^2}{2\sqrt[4]{x}}$

d $(\sqrt{3x})^3 \cdot (-3)^{-2}$

Vergelijking van een lijn

8 Stel een vergelijking op van de lijn door de twee gegeven punten.

a $(-2, 3)$ en $(3, 5\frac{1}{2})$

d $(-1, -7)$ en $(5, 17)$

b $(-1, 6)$ en $(3, 8)$

e $(2,5; 3,25)$ en $(-5; 0,75)$

c $(1, 2)$ en $(-8, 5)$

f $(0,56; -1,12)$ en $(0,88; 0,80)$

Kwadratische formules

Theorie

De drie vormen van een kwadratische of tweedegraads formule:

- $y = ax^2 + bx + c$, de grafiek snijdt de y -as in $(0, c)$.
- $y = a(x - s)(x - t)$, de grafiek snijdt de x -as in de punten $(s, 0)$ en $(t, 0)$.
- $y = a(x - p)^2 + q$, de grafiek heeft als top het punt (p, q) .

Voorbeeld

De grafiek van $y = -\frac{5}{7}(x - \frac{1}{2})(x + 3)$ snijdt de x -as in $(\frac{1}{2}, 0)$ en $(-3, 0)$.

De grafiek van $y = -2(x - 3)^2 - 6$ heeft als top het punt $(3, -6)$.

9 Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van met de x -as en de coördinaten van de top.

a $y = 2(x + 3)^2 - 18$

b $y = -6(x - 5)(x + 12)$

10 Gegeven zijn vier formules.

A $y = (x + 7)(x + 13)$

C $y = -6(x - 5)(x + 12)$

B $y = (x - 2)^2 - 7$

D $y = -3(x + 2)^2$

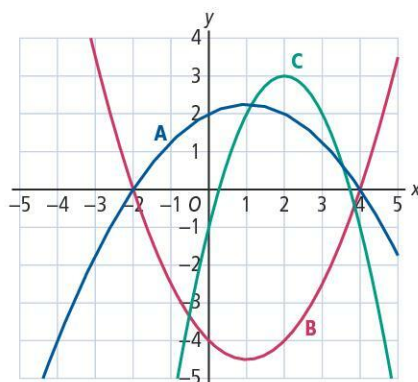
- Bij welke formules kun je de snijpunten van de parabool met de x -as direct aflezen uit de formule?
- Geef de coördinaten van deze snijpunten.
- Bij welke formules kun je de top van de parabool uit de formule aflezen?
- Geef bij deze formules de coördinaten van de top.

11 Zoek bij iedere formule de juiste parabool.

a $y = \frac{1}{2}(x + 2)(x - 4)$

b $y = -(x - 2)^2 + 3$

c $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$



Meetkunde

12 Gegeven zijn de lijnen m : $y + 2 = 3x$ en l : $4y + 8x = 2$.

- Teken m en l in één assenstelsel.
- Bereken de grootte van de twee verschillende hoeken die de lijnen met elkaar maken.

Theorie

Twee snijdende lijnen maken vier hoeken met elkaar die twee aan twee gelijk zijn.

Met de hoek tussen twee lijnen wordt bedoeld de scherpe of rechte hoek die de lijnen met elkaar maken.

Als twee lijnen k en l met richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 loodrecht op elkaar staan, dan geldt $m_1 \cdot m_2 = -1$.

13 Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de volgende paren lijnen.

a $y = \frac{1}{3}x - 4$ en $y = -2x + 3$

b $2x - \frac{1}{3}y = 2\frac{2}{3}$ en $3y + 4\frac{1}{2}x = 9$

c $\frac{y}{2} - \frac{x}{5} = 1$ en $6y + 10x = 3$

14 Gegeven zijn lijn l : $x + y = 3$ en punt $P(-1, 2)$. Toon aan dat de lijn met vergelijking $y = x + 3$ door punt P gaat en loodrecht op l staat.

- 15** Op lijn m : $3x - \frac{1}{4}y = 1$ ligt het punt $Q(3, 32)$.
Toon aan dat de lijn met vergelijking $y = -\frac{1}{12}x + 32\frac{1}{4}$ door punt Q gaat en loodrecht op m staat.
- 16** Op het blaadje wordt een vergelijking opgesteld van de loodlijn door $P(2, 5)$ op lijn l : $2x + 3y = 7$.
a Ga na dat de richtingscoëfficiënt van l klopt.
b m is de richtingscoëfficiënt van de gevraagde loodlijn.
 Leg uit hoe m op het blaadje berekend is.
c Maak de berekening af en schrijf een vergelijking van de loodlijn op.
- 17** **a** Gegeven zijn lijn l : $4x - 2y = 3$ en punt $P(-3, 1)$.
 Stel een vergelijking op van loodlijn n door punt P op l .
b Gegeven zijn lijn m : $\frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = 1$ en punt $Q(5, 3)$.
 Stel een vergelijking op van loodlijn n door punt Q op m .
- 18** Gegeven zijn lijn l : $4x + 2y = 6$ en punt $P(2, 4)$.
a Geef een vergelijking van de loodlijn door punt P op lijn l .
b Bereken de coördinaten van het snijpunt van de loodlijn met lijn l .
c Bereken de afstand van punt P tot lijn l .
- 19** **a** Gegeven zijn punt $P(3, -2\frac{1}{2})$ en lijn l : $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1\frac{1}{2}} = 1$.
 Bereken de afstand van punt P tot lijn l .
b Gegeven zijn punt $Q(-1, 1)$ en lijn m : $x - y = 1\frac{1}{2}$.
 Bereken de afstand van punt Q tot lijn m .
- 20** De afstand d van twee evenwijdige lijnen is de afstand van een willekeurig punt op de ene lijn tot de andere lijn.
 Gegeven zijn de lijnen l : $y = 1\frac{1}{2}x - 10$ en m : $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$ en punt $P(3, 7\frac{1}{2})$.
a Toon aan dat lijn l evenwijdig is aan lijn m .
b Toon aan dat punt P op lijn m ligt en bereken de afstand van P tot l .
- 21** Bereken de afstand tussen de lijnen.
a l : $x - 2y + 2 = 0$ en m : $y = \frac{1}{2}x + 6$
b l : $x - 2y = 12$ en m : $2y - x = -3$

●	De richtingscoëfficiënt van l is $-\frac{2}{3}$.
●	$-\frac{2}{3} \cdot m = -1$ geeft $m = 1\frac{1}{2}$.
●	$y = 1\frac{1}{2}x + b$
●	$x = 2$ en $y = 5$ invullen geeft
●	$\dots = 1\frac{1}{2} \cdot \dots + b$ dus $b = \dots$



SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In havo B deel 1 heb je in hoofdstuk 6 gezien dat bij elke functie f een afgeleide (functie) hoort, waarmee je de helling in een punt van de grafiek van f exact kunt berekenen.

Daarmee kun je ook extreme waarden berekenen en bijvoorbeeld een vergelijking van een raaklijn opstellen.

In dat hoofdstuk heb je ook geleerd hoe je de afgeleide van een veeltermfunctie bepaalt.

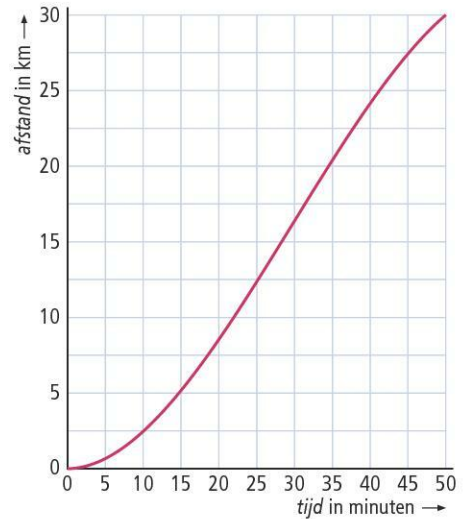
In dit hoofdstuk ga je ook wortelfuncties en gebroken functies differentiëren en functies die samengesteld zijn uit meerdere functies. Het aantal regels om functies te kunnen differentiëren wordt daarmee uitgebreid.

Na dit hoofdstuk heb je alle regels voor differentiëren en toepassingen ervan gezien die nodig zijn voor het examen.

Voorbeelden van WDA in dit hoofdstuk

- *Logisch redeneren en bewijzen* opdracht 25
- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 31
- *Ordenen en structureren* intro paragraaf 11.5

- V1** In een wielerronde is een tijdrit van 30 km gereden. Van de tijdrit van Marian is een tijd-afstand-grafiek gemaakt.
- Hoe kun je zien dat Marian niet met een constante snelheid heeft gereden?
 - Met welke gemiddelde snelheid in km per minuut reed Marian de tijdrit? En in km per uur?
 - Benader met een raaklijn de snelheid van Marian op het tijdstip $t = 10$. Geef je antwoord in km per uur.
 - Bij de grafiek hoort de formule $S = -0,0003t^3 + 0,025t^2 + 0,1t$. Bereken met deze formule de gemiddelde snelheid over de intervallen $[10, 15]$, $[10, 11]$, $[10; 10,1]$ en $[10; 10,001]$.
 - Welke snelheid heeft Marian op $t = 10$ volgens de formule? Geef je antwoord in km per uur.



Theorie

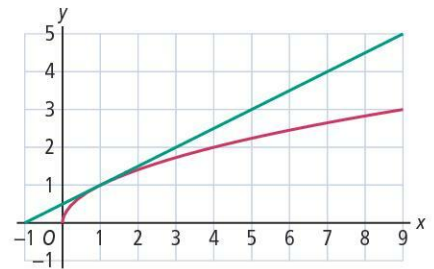
De **helling** van de grafiek van een functie f in een punt $A(a, f(a))$ is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de **raaklijn** in A .

Je kunt deze helling benaderen

- door de raaklijn te tekenen en de richtingscoëfficiënt te berekenen.
- door het **differentiequotiënt** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ over een klein interval zoals $[a, b] = [a, a + 0,001]$ te berekenen.

In een tijd-afstand grafiek is de helling gelijk aan de snelheid.

- V2** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{x}$. In het punt $(1, 1)$ is de raaklijn getekend.
- Lees uit de grafiek de richtingscoëfficiënt van de raaklijn af.
 - Bereken het differentiequotiënt over het interval $[1; 1,001]$.
 - Benader de helling van de grafiek in de punten $(3, \sqrt{3})$ en $(9, 3)$.



Theorie

De helling van de grafiek van de functie f in een punt van de grafiek van f bereken je exact met de **afgeleide (functie)** van f . Het bepalen van de afgeleide heet **differentiëren**.

De notatie voor de afgeleide functie is f' of $\frac{dy}{dx}$

Regels voor het differentiëren

functie	afgeleide functie
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$g(x) = f(x) + c$	$g'(x) = f'(x)$
$g(x) = c \cdot f(x)$	$g'(x) = c \cdot f'(x)$
$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$

Voorbeeld

Differentieer.

$$f(x) = 3x^4 + 12$$

$$A = 7t^2 - 12t$$

$$s = t^2(t + 1)$$

Oplossing

$$f'(x) = 3 \cdot 4x^3 = 12x^3$$

$$\frac{dA}{dt} = 7 \cdot 2t - 12 = 14t - 12$$

$$s = t^3 + t^2 \text{ dus } \frac{ds}{dt} = 3t^2 + 2t$$

V3 Differentieer. Werk zo nodig eerst de haakjes weg.

- | | |
|--|-----------------------------------|
| a $f(x) = x^{100}$ | e $k(x) = 2x^4 - x^2 + 5$ |
| b $g(x) = 6x^3$ | f $l(x) = 6x - 0,3x^{10}$ |
| c $h(x) = (5x)^2$ | g $m(x) = 3(x + 5)^2$ |
| d $j(x) = \frac{1}{3}(x^4 - 5)$ | h $n(x) = (x + 3)(2x - 3)$ |

Aanpak

Hoe stel je een vergelijking op van de raaklijn l in een punt $P(p, q)$ van de grafiek van een functie f ?

- 1 Differentieer f en bereken $f'(p)$.
- 2 Een vergelijking van l is $y = ax + b$ met $a = f'(p)$. Vul de coördinaten van P in de vergelijking van l in en bereken b .
- 3 Stel een vergelijking op van l .

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de raaklijn l in het punt $P(2, -6)$ van de grafiek van de functie

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3.$$

Oplossing

1 $f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2$ en $f'(2) = -8$

2 $l: y = -8x + b$

$$-6 = -8 \cdot 2 + b, \text{ dus } b = 10.$$

3 $l: y = -8x + 10$

V4 Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt P .

- a** $f(x) = 0,5x^4 - 3$ en $P(1, -2\frac{1}{2})$.
- b** $f(x) = (x^2 + 2)(x^2 - 1)$; de x -coördinaat van P is 2.

11.1 Machtsfuncties differentiëren

Je leert • hoe je een machtsfunctie differentieert

Leerroutes • ondersteunend: 1—2—03—4—5—06—6
 • doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7
 • uitdagend: 1—2—3—4—6—7—U1

Max beweert dat zijn auto vanuit stilstand binnen 10 seconden een snelheid van 100 km per uur bereikt. Als zijn auto vanuit stilstand vertrekt, voldoet de afgelegde afstand aan de formule $s = 6t\sqrt{t}$, met s in meters en t in seconden.

• Is de bewering van Max in overeenstemming met deze formule?



1 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{x}$

a Bereken met je rekenmachine de helling van de grafiek van f bij $x = 1$, $x = 2$ en $x = 3$.

b Je kunt $f(x) = \frac{1}{x}$ ook schrijven als een machtsfunctie $f(x) = x^{-1}$.

Neem aan dat de regel voor het differentiëren van machtsfuncties ook geldt voor negatieve exponenten.

Dan wordt de afgeleide functie $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Laat dat zien.

c Controleer of de uitkomsten van opdracht a hiermee overeenstemmen.

d Controleer op dezelfde manier als in opdracht a, b en c of de regel voor het differentiëren van machtsfuncties ook geldt voor $g(x) = \frac{1}{x^3}$

Als $f(x) = x^n$
 dan $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

2 Je hebt gezien dat de regel voor het berekenen van de afgeleide geldt voor machten met negatieve exponenten. In deze opdracht ga je na of deze regel ook geldt als de exponent geen geheel getal is.

Gegeven is de functie $h(x) = x^{0.7}$.

Met de rekenmachine is een tabel van de functiewaarden (Y1) en de hellingen (Y2) van de functie h gemaakt.

a Wat wordt volgens de regel naast opdracht 1 de afgeleide $h'(x)$?

b Krijg je met de afgeleide functie uit opdracht a dezelfde hellingen als in de tabel?

X	Y1	Y2		
0	0	FOUT		
1	1	0.7		
2	1.6245	0.5686		
3	2.1577	0.5035		
4	2.639	0.4618		
5	3.0852	0.4319		
6	3.5051	0.4089		
7	3.9045	0.3905		
8	4.2871	0.3751		
9	4.6555	0.3621		
10	5.0119	0.3508		
X=0				

Theorie

De afgeleide functie van $f(x) = x^a$ is $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$ voor elke waarde van $a \neq 0$.

Voorbeeld

Differentieer $f(x) = \frac{1}{3x^4}$, $g(x) = 4x^{0,6}$ en $h(x) = \frac{5x+6}{x^3}$

Oplossing

$$f(x) = \frac{1}{3x^4} \text{ geeft } f(x) = \frac{1}{3} x^{-4}$$

$$g(x) = 4x^{0,6}$$

$$h(x) = \frac{5x+6}{x^3} \text{ geeft } h(x) = \frac{5x}{x^3} + \frac{6}{x^3}$$

$$f'(x) = -\frac{4}{3} x^{-5}$$

$$g'(x) = 2,4x^{-0,4}$$

$$h(x) = 5x^{-2} + 6x^{-3} \text{ dus } h'(x) = -10x^{-3} - 18x^{-4}$$

$$f'(x) = -\frac{4}{3x^5}$$

$$g'(x) = \frac{2,4}{x^{0,4}}$$

$$h'(x) = -\frac{10}{x^3} - \frac{18}{x^4}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 03

- 3** Differentieer. Schrijf de afgeleide zonder negatieve exponent.

H

a $f(x) = -2x^{0,8}$

c $h(x) = \frac{x+1}{x^2}$

b $g(x) = \frac{2}{x^6} + \frac{1}{3x^2}$

d $k(x) = \frac{1}{x^2} (x^3 - x)$

- 4** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x}$.

Schrijf $f(x)$ in de vorm $f(x) = x^a$ en toon aan dat $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Theorie

Ook wortelfuncties zijn machtsfuncties. Om een wortelfunctie te differentiëren, schrijf je deze eerst in de vorm $f(x) = c \cdot x^a$.

In het bijzonder geldt: als $f(x) = \sqrt{x}$ dan is $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Voorbeeld

Differentieer $f(x) = 5x\sqrt{x}$ en $g(x) = \sqrt{x} (x^3 - 5)$.

Oplossing

$$f(x) = 5x\sqrt{x} \text{ geeft } f(x) = 5x^{1\frac{1}{2}}$$

$$g(x) = x^{\frac{1}{2}}(x^3 - 5) \text{ geeft } g(x) = x^{3\frac{1}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 7\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = 7\frac{1}{2}\sqrt{x}$$

$$g'(x) = 3\frac{1}{2}x^{2\frac{1}{2}} - 2\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \text{ dus } g'(x) = 3\frac{1}{2}x^2\sqrt{x} - \frac{5}{2\sqrt{x}}$$

- 5** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$
- a** Laat zien dat je $f(x)$ kunt schrijven als $f(x) = x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}}$.
- b** Toon aan dat $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2x\sqrt{x}}$

Ondersteunende route → maak opdracht O6

- 6** Differentieer. Schrijf de afgeleide zonder gebroken of negatieve exponent.

H

- a** $f(x) = 4x^2\sqrt{x}$ **e** $k(x) = x(\sqrt{x} + 7)$
- b** $g(x) = 5\sqrt[3]{x}$ **f** $l(x) = (x - \sqrt{x})^2$
- c** $h(x) = 3\sqrt{x} - \frac{3}{x}$ **g** $m(x) = \frac{3x-5}{x\sqrt{x}}$
- d** $j(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ **h** $n(x) = x^2\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

- 7** Uit onderzoek blijkt dat de hoeveelheid energie die een parkiet per meter bij een bepaalde snelheid verbruikt, benaderd kan worden met de formule $D = \frac{6,0}{v^2} + 0,00050v^2 - 0,033$.

Hierbij is D het energieverbruik per meter in joules per meter en v de snelheid in meters per seconde. De snelheid waarbij het energieverbruik per meter minimaal is, heet de kruissnelheid. Om die kruissnelheid te berekenen is de afgeleide van D nodig. Bereken deze kruissnelheid in m/s. Rond af op één decimaal. (Ontleend aan CE havo wiskunde B 2012 tijdvak 1)



Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

03 Op het blaadje is een begin gemaakt met het

differentiëren van $f(x) = \frac{8x^2 - 3}{x^4}$

- Leg uit wat er in stap 1 is gebeurd.
- Leg uit wat er in stap 2 is gebeurd en vul op de puntjes de ontbrekende exponent in.
- De afgeleide functie van $f(x) = x^a$ is $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$. Gebruik deze regel om stap 3 af te maken.
- Maak het functievoorschrift van f' in stap 4 af.

Differentieer. Schrijf de afgeleide zonder negatieve exponent.

e $g(x) = 15x^{0,2}$

g $k(x) = \frac{4x^2 + 6}{x^3}$

f $h(x) = \frac{8}{x^4} + \frac{1}{4x^5}$

h $m(x) = x^2 \left(1 + \frac{2}{x^3} \right)$

$f(x) = \frac{8x^2 - 3}{x^4}$		
$f(x) = \frac{8x^2}{x^4} - \frac{3}{x^4}$	1	
$f(x) = 8x^{-2} - 3x^{-4}$	2	
$f'(x) = -16x^{-3} + \dots x^{-5}$	3	
$f'(x) = \frac{16}{x^3} + \frac{\dots}{x^5}$	4	

06 Op het blaadje zie je hoe Dave de afgeleide vindt van de

functie $f(x) = \frac{8x^2 - 3}{\sqrt{x}}$

- Leg uit wat Dave in stap 1 gedaan heeft.
- Welke rekenregels voor machten gebruikt hij in stap 2?
- Leg uit wat Dave in stap 3 gedaan heeft.
- In stap 4 heeft Dave de afgeleide zonder negatieve exponent geschreven. Waarom staat er in de tweede breuk een 3 in de teller en een 2 in de noemer?
- In stap 5 heeft hij de afgeleide zonder gebroken exponent geschreven.

Leg uit dat $x^{1\frac{1}{2}} = x\sqrt{x}$.

$f(x) = \frac{8x^2 - 3}{\sqrt{x}}$	Dave
$f(x) = \frac{8x^2}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{x^{\frac{1}{2}}}$	1
$f(x) = 8x^{1\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{1}{2}}$	2
$f'(x) = 12x^{\frac{1}{2}} + 1\frac{1}{2}x^{-1\frac{1}{2}}$	3
$f'(x) = 12x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2x^{\frac{1}{2}}}$	4
$f'(x) = 12\sqrt{x} + \frac{3}{2x\sqrt{x}}$	5

Uitdagende opdrachten

U1 Lijn l met vergelijking $y = 14x - 96$ snijdt de x -as in punt Q en raakt de grafiek van de functie $f(x) = x^4\sqrt{x^3}$ in punt P .

- Bereken exact de coördinaten van P .
- Bereken exact de oppervlakte van $\triangle OPQ$.



11.2 De kettingregel

Je leert

- hoe je de afgeleide van de samengestelde functie $k(x) = f(ax + b)$ bepaalt

Leerroutes

- ondersteunend: 8—9—10—011—12—13—014—14—15
- doorlopend: 8—9—10—11—12—13—14—15—16
- uitdagend: 8—9—10—11—13—14—15—16—U2

Anouk gaat op zoek naar de afgeleide van de functie $f(x) = (2x + 1)^3$. Omdat de afgeleide van $g(x) = x^3$ gelijk is aan $g'(x) = 3x^2$ probeert zij als afgeleide $f'(x) = 3(2x + 1)^2$. Controle met de rekenmachine geeft de drie kolommen:

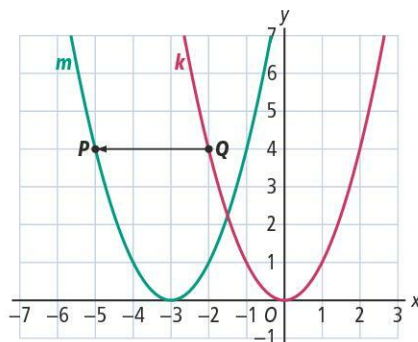
$$y_1 = (2x + 1)^3, y_2 = 3(2x + 1)^2 \text{ en } y_3 = \frac{d}{dx}(y_1)$$

- Geef op grond van deze kolommen een functievoorschrift voor f' .

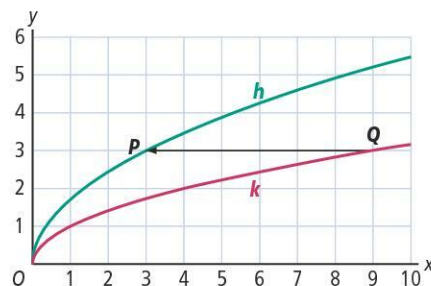
X	Y ₁	Y ₂	Y ₃	
0	1	3	6	
1	27	27	54	
2	125	75	150	
3	343	147	294	
4	729	243	486	
5	1331	363	726	
6	2197	507	1014	
7	3375	675	1350	
8	4913	867	1734	
9	6859	1083	2166	
10	9261	1323	2646	

X=0

- 8 De grafiek van de functie $k(x) = x^2$ wordt 3 naar links verschoven. De beeldgrafiek is de grafiek van de functie m en het beeld van het punt $Q(-2, 4)$ is het punt P .
- Vul in: $m(x) = k(x + 3)$ dus $m(x) = \dots$
 - Bereken exact de helling van de grafiek van k in Q .
Waarom weet je nu de helling van de grafiek van m in P ?
 - Vul in: $m'(-5) = k'(\dots)$.
 - Vul in: $m'(x) = k'(x + \dots)$.
 - Geef het functievoorschrift van m' .
 - Controleer het antwoord van b door $m'(-5)$ te berekenen.



- 9 Gegeven zijn de grafieken van $k(x) = \sqrt{x}$ en $h(x) = \sqrt{3x}$. Op de grafiek van k ligt het punt $Q(9, 3)$ en op de grafiek van h het punt $P(3, 3)$. Bij een vermenigvuldiging met $\frac{1}{3}$ ten opzichte van de y -as is de grafiek van h de beeldgrafiek van de grafiek van k en is P het beeld van Q .
- De raaklijn in Q heeft als vergelijking $y = \frac{1}{6}x + 1\frac{1}{2}$.
Geef een vergelijking van het beeld van deze raaklijn bij vermenigvuldiging met $\frac{1}{3}$ ten opzichte van de y -as.
 - Hoe groot is de helling in het beeldpunt P ?
 - Vul in: de helling in punt P is de helling in punt $Q \times \dots$, dus $h'(3) = k'(\dots)$.
 - Vul in: $h'(x) = k'(\dots)$.
 - Geef het functievoorschrift van h' .



Als $g(x) = f(x + b)$ dan is $g'(x) = f'(x + b)$.
 Als $g(x) = f(ax)$ dan is $g'(x) = f'(ax) \cdot a$.

- 10** Gegeven is de functie $f(x) = x^3$. De grafiek van f wordt 5 naar links verschoven. Zo ontstaat de grafiek van de functie $g(x) = (x + 5)^3$. Door de grafiek van g met $\frac{1}{2}$ te vermenigvuldigen ten opzichte van de y -as krijg je de grafiek van de functie $k(x) = (2x + 5)^3$.

In deze opdracht bepaal je de afgeleide van k .

- a** Vul in: $g'(x) = f'(\dots) = \dots$
b Vul in: $k'(x) = g'(\dots) \cdot \dots = f'(\dots) \cdot \dots$ dus $k'(x) = \dots$

Theorie

De afgeleide van de functie $k(x) = f(ax + b)$ is $k'(x) = f'(ax + b) \cdot a$.
 Deze regel heet de **kettingregel**.

Voorbeeld

Differentieer $k(x) = (\frac{1}{4}x - 6)^3$.

Oplossing

$$k'(x) = 3 \cdot (\frac{1}{4}x - 6)^2 \cdot \frac{1}{4} \text{ ofwel}$$

$$k'(x) = \frac{3}{4}(\frac{1}{4}x - 6)^2$$

Ondersteunende route → maak opdracht 011

- 11** Differentieer.

H **a** $f(x) = (2 + 3x)^4$ **c** $w(x) = (\frac{1}{4}x + 2)^3$
b $g(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x - 4}$ **d** $k(x) = \sqrt[3]{12 - 5x}$

- 12** **a** Op het blaadje is een begin gemaakt met het berekenen van de afgeleide van de functie $f(x) = \frac{1}{(2x + 4)^2}$.
 Maak de berekening af.
b Laat zien dat $f'(x) = -\frac{4}{(2x + 4)^3}$

•	$f(x) =$	$\frac{1}{(2x + 4)^2}$			
•	$f(x) =$	$(2x + 4) \cdots$			
•	$f'(x) =$	$\cdots (2x + 4) \cdots \cdots$			
•					

- 13** Gegeven is de functie $h(x) = \frac{2}{(12 - 3x)^5}$
- Differentieer h .
 - Geef de afgeleide functie van $k(x) = \frac{2}{(12 - 3x)^5} - 8x$.

Ondersteunende route → maak opdracht 014

- 14** Differentieer. Schrijf de afgeleide zonder gebroken en negatieve exponent.

H

- $f(x) = (3x - 19)^3 + 10$
- $g(x) = 5x + \frac{3}{\left(x - \frac{1}{8}\right)^2}$
- $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x+5}} + x^2$
- $j(x) = 4\sqrt{2x-4} - 7x^3$
- $k(x) = \frac{4}{\sqrt{3-x}} - \frac{12}{17}$
- $m(x) = -\left(\frac{1}{3}x - 9\right)^{1,8}$

- 15** Gegeven is de functie $f(x) = (5x + 1)\sqrt{5x + 1}$.

- Vul in: $f(x) = (5x + 1) \cdots$
- Differentieer f en schrijf de afgeleide zonder gebroken exponent.

Differentieer en schrijf zonder gebroken exponent.

- $g(x) = (1 - 4x)\sqrt{1 - 4x}$
- $h(x) = \left(4 - \frac{1}{2}x\right)^2 \sqrt{4 - \frac{1}{2}x}$
- $k(x) = \frac{3}{(2x - 7)\sqrt{2x - 7}}$
- $m(x) = \frac{4}{(2x - 1)^3 \sqrt{2x - 1}}$

- 16** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{6x + 3}$.

- Differentieer f .
- Plot de grafieken van f en f' .
Hoe zie je aan deze grafieken dat het domein van f' niet gelijk is aan het domein van f ?

Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

011 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{4x - 7}$.

Je gaat in deze opdracht f differentiëren.

a In stap 1 is $f(x)$ in de vorm $f(x) = (ax + b)^n$ geschreven.

Wat moet er op de puntjes staan?

b Volgens de kettingregel is de afgeleide van een functie $k(x) = f(ax + b)$ gelijk aan $k'(x) = f'(ax + b) \cdot a$.

Differentieer f en vul stap 2 in.

Waarom wordt de exponent $-\frac{1}{2}$?

c Welke regel is in stap 3 gebruikt?

d Maak de herleiding verder af.

Differentieer. Schrijf de afgeleide zonder gebroken of negatieve exponent.

e $g(x) = (3x + 7)^5$

g $p(x) = (3 - 8x)^4$

f $h(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}}$

h $q(x) = (5x - 3)^7$

●	$f(x) = \sqrt{4x - 7}$		
●	$f(x) = (4x - 7) \dots$		1
●	$f'(x) = \dots (4x - 7)^{-\frac{1}{2}}, \dots$		2
●	$f'(x) = \frac{\dots}{(4x - 7)^{\frac{1}{2}}}$		3
●	$f'(x) = \dots$		

014 Je gaat de functie $f(x) = 3x + \frac{5}{(1 - 2x)^3}$ differentiëren.

Je kunt $f(x)$ schrijven als $f(x) = h(x) + k(x)$ waarbij

$h(x) = 3x$ en $k(x) = \frac{5}{(1 - 2x)^3}$

Dan geldt $f'(x) = h'(x) + k'(x)$.

a Bepaal $h'(x)$.

b Op het blaadje is een begin gemaakt met het differentiëren van k .

Leg uit wat er in stap 1 is gebeurd.

c Vul stap 2 in en schrijf k' zonder negatieve exponent.

d Geef de afgeleide van f .

●	$k(x) = \frac{5}{(1 - 2x)^3}$		
●	$k(x) = 5(1 - 2x)^{-3}$		1
●	$k'(x) = \dots (1 - 2x)^{\dots} \dots$		2
●	$k'(x) = \dots$		

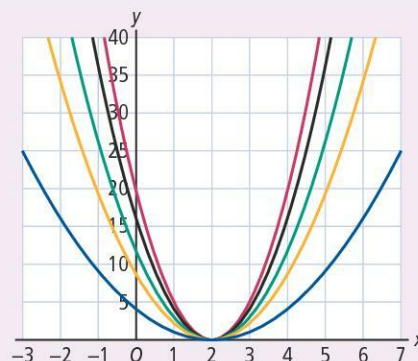
Uitdagende opdrachten

U2 Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = a(2x - 4)^2$.

a Voor welke waarde van a gaat de grafiek door het punt $(5, 2)$?

b Bereken exact voor welke waarde van a de helling in het punt van de grafiek van f_a met x -coördinaat 1 gelijk is aan -6 .

c In welk punt van de grafiek van f_4 is de helling 8?



11.3 Raaklijnen

Je leert

- hoe je een vergelijking van een raaklijn met gegeven richtingscoëfficiënt opstelt

Leerroutes

- ondersteunend: 17—18—19—O20—21—22—23—24—25
- doorlopend: 17—18—19—20—21—22—23—24—25
- uitdagend: 17—18—20—21—22—23—24—25—U3

Twee fietsers hebben hetzelfde traject van 30 km afgelegd. In de grafiek kun je zien dat ze dat met verschillende snelheden gedaan hebben.

Bij de grafieken passen de formules $s = 0,6t$ en $s = -0,0003t^3 + 0,023t^2 + 0,2t$. Hierin is s de afstand in km en t de tijd in minuten.

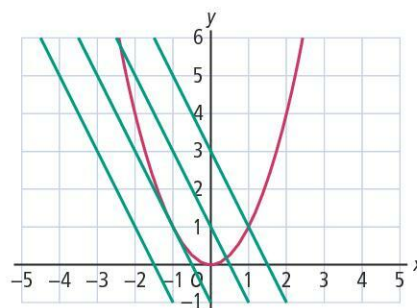
- Hoe kun je met behulp van de grafieken bepalen op welke momenten ze even snel hebben gereden?
- Hoe kun je met behulp van de formules deze tijdstippen bepalen?



- 17** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{4x+1}$.
Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt met $x = 2$.

- 18** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3$ en de punten $P(1, -2\frac{1}{2})$ en $Q(-1, -2\frac{1}{2})$ op de grafiek van f .
- Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in P .
 - Waarom kun je de helling van de grafiek in Q afleiden uit die in P ?
 - Stel ook een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in Q .

- 19** Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.
In deze opdracht ga je berekenen voor welke waarde van p de lijn $y = -2x + p$ de grafiek van f raakt.
- Hoe groot is de helling van de grafiek in het raakpunt R ?
 - Vul in: om de coördinaten van R te berekenen, moet je de vergelijking $f'(x) = \dots$ oplossen.
 - Los deze vergelijking op.
 - Gebruik de coördinaten van het raakpunt en de vergelijking van de lijn om de waarde van p te berekenen.



Aanpak

Hoe stel je een vergelijking op van een raaklijn aan de grafiek van f met gegeven richtingscoëfficiënt a ?

- 1 Bereken de x -coördinaat van het raakpunt P door de vergelijking $f'(x) = a$ op te lossen.
- 2 Bereken de y -coördinaat van P door de x -coördinaat bij $f(x)$ in te vullen.
- 3 Bereken p door de coördinaten van P bij $y = ax + p$ in te vullen.

Voorbeeld

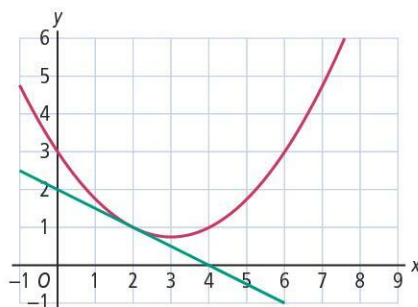
Gegeven is de functie $f(x) = 2x^2 + 3$ en de lijn $y = 8x + p$. Voor welke waarde van p raakt de lijn de grafiek van f ?

Oplossing

- 1 $f'(x) = 4x$
 $f'(x) = 8$ geeft $4x = 8$ ofwel $x = 2$.
- 2 $f(2) = 11$ dus het raakpunt is $(2, 11)$.
- 3 $11 = 8 \cdot 2 + p$ geeft $p = -5$.

Ondersteunende route → maak opdracht 020

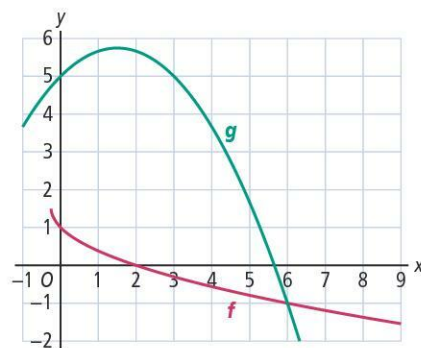
- 20** Gegeven is de functie $f(x) = 6\sqrt{2x - 1}$.
H De lijn met vergelijking $y = 2x + p$ raakt de grafiek van f . Bereken de waarde van p .
- 21** Gegeven is de functie $f(x) = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^3$. Er zijn twee lijnen met richtingscoëfficiënt 6 die de grafiek van f raken. Stel van beide lijnen een vergelijking op.
- 22** De lijn door de punten $(0, 2)$ en $(4, 0)$ lijkt de parabool met vergelijking $y = \frac{1}{4}x^2 - 1\frac{1}{2}x + 3$ te raken. Onderzoek met behulp van differentiëren of dit inderdaad het geval is.



- 23** a Gegeven is de functie $f(x) = 1 + (3x - 2)^{1,5}$.
Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt met $x = 1$.
- b Bereken exact de coördinaten van het punt op de grafiek van f waar de helling gelijk is aan 9.
- c Voor functie g geldt $g(x) = \frac{2}{(x+3)^2}$
- De lijn met vergelijking $y = -\frac{1}{2}x + p$ raakt de grafiek van g .
Bereken exact de waarde van p .

- 24** Getekend zijn de grafieken van $f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{4x+1} + 1\frac{1}{2}$ en $g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + x + 5$.

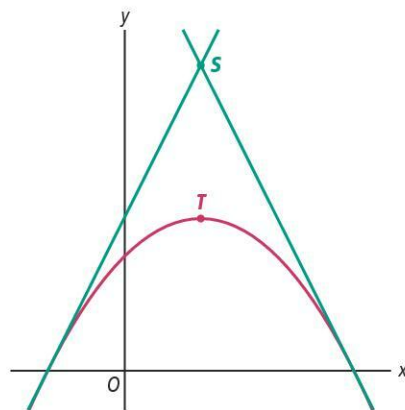
De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt $(6, -1)$.
De hoek waaronder twee grafieken elkaar snijden is de hoek die de raaklijnen in het snijpunt met elkaar maken.
Bereken de hoek waaronder de grafieken van f en g elkaar snijden.



Bij de opdracht 'bewijs' wordt een exacte berekening en/of redenering verwacht.

- 25** Getekend is de grafiek van de functie $f(x) = -\frac{1}{8}(2x - 4)^2 + 8$.
Ook zijn de raaklijnen aan de grafieken in de snijpunten met de x -as getekend. Bas denkt dat het snijpunt S van de raaklijnen twee keer zo hoog boven de x -as ligt als de top T van de grafiek van f .
Bewijs dat Bas gelijk heeft.

Uitdagende route → maak opdracht U3



Ondersteunende opdrachten

020

Gegeven is de functie $f(x) = 2x\sqrt{x} - x$. De lijn met vergelijking $y = 5x + p$ raakt de grafiek van f .

Je gaat in deze opdracht de waarde van p berekenen.

- Hoe groot is de helling van de raaklijn?
- Vul in: om de coördinaten van het raakpunt te berekenen moet je de vergelijking $f'(x) = \dots$ oplossen.
- Differentieer f en los de vergelijking uit opdracht b op.
- De waarde van x die je in opdracht c hebt berekend is de x -coördinaat van het raakpunt.
Bereken de y -coördinaat door de x -coördinaat bij $f(x)$ in te vullen.
- Bereken p door de coördinaten van het raakpunt in te vullen in $y = 5x + p$.
- De lijn met vergelijking $y = -2x + p$ raakt de grafiek van $g(x) = -6\sqrt{2x - 5}$.
Bereken de waarde van p .

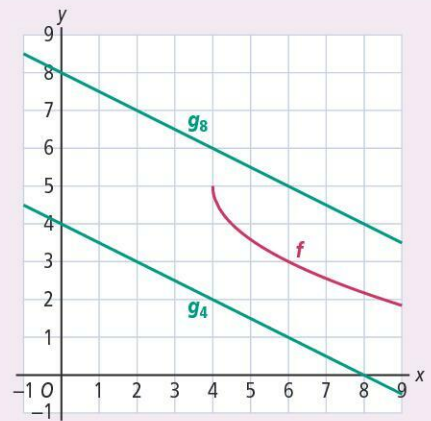
Uitdagende opdrachten

U3

Gegeven zijn de functies $f(x) = -\sqrt{2x - 8} + 5$ en

$g_p(x) = -\frac{1}{2}x + p$. In de figuur zie je de grafieken van f , van g_4 en van g_8 .

- Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g_8 . Rond af op twee decimalen.
- Bereken met behulp van differentiëren voor welke waarde van p de grafieken van f en g_p elkaar raken.
- Voor welke waarden van p hebben de grafieken van f en g_p twee punten gemeenschappelijk?



11.4 Maxima en minima

Je leert

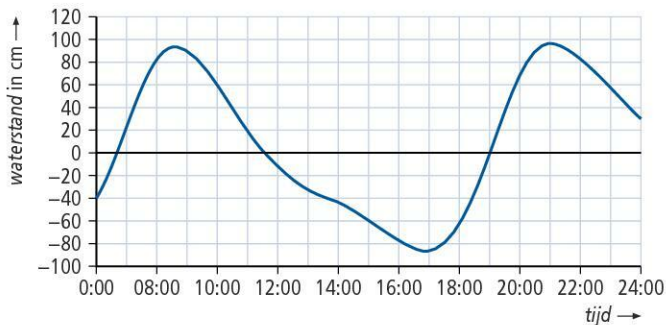
- hoe je exact de extreme waarden van een functie berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 26—27—28—029—30—031
- doorlopend: 26—27—28—29—30—31
- uitdagend: 27—29—30—31—U4—U5

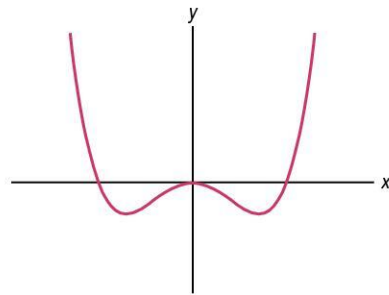
Boten die de haven van Harlingen willen binnen varen, moeten rekening houden met eb en vloed. In de grafiek zie je de waterhoogten in Harlingen op 7 februari 2018.

- Treedt de hoogste waterstand op tussen eb en vloed of tussen vloed en eb?



26 Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = x^4 - 2x^2$.

- Los exact op $f'(x) = 0$.
- Welke richting heeft de raaklijn aan de grafiek van f in de punten waarvoor geldt $f'(x) = 0$?
- Bereken $f'\left(\frac{1}{2}\right)$. Heeft de grafiek in het punt waarvoor $x = \frac{1}{2}$ een positieve of negatieve helling?
- Los exact op $f'(x) < 0$. Wat weet je van de helling van de grafiek in de punten waarvoor $f'(x) < 0$?
- Op welke intervallen is de helling van de grafiek positief?



Theorie

Als op een interval $[a, b]$ geldt:

- als x toeneemt, dan neemt $f(x)$ toe, dan zeg je dat f **stijgt** op dat interval. Dan is $f'(x) \geq 0$ op $[a, b]$.
- als x toeneemt, dan neemt $f(x)$ af, dan zeg je dat f **daalt** op dat interval. Dan is $f'(x) \leq 0$ op $[a, b]$.

Is het punt $T(a, b)$ een top van de grafiek van f en gaat f bij $x = a$ over van stijgen in dalen, dan heeft f een **maximum** $f(a) = b$. Gaat f bij $x = a$ over van dalen in stijgen dan heeft f een **minimum** $f(a) = b$.

Maximale en minimale functiewaarden heten **extreme waarden**.

Extreme waarden zijn de y -coördinaten van de toppen van de grafiek van f .

Voorbeeld

Gegeven is de grafiek van een functie f .
Voor welke waarde van x geldt $f'(x) = 0$?
Op welk interval daalt f ?
Wat zijn de extreme waarden van f ?

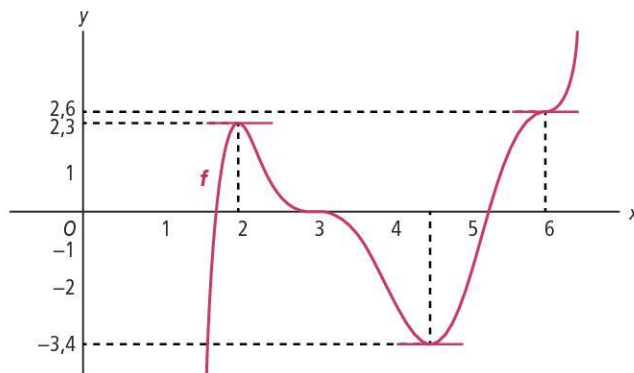
Oplossing

$f'(x) = 0$ als de raaklijn aan de grafiek
evenwijdig is aan de x -as.

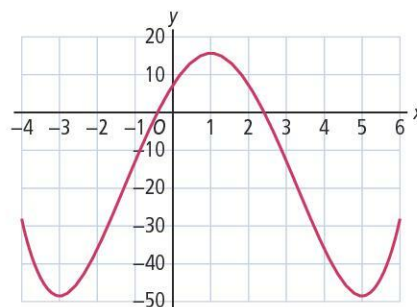
Dat is bij $x = 2$, $x = 3$, $x = 4,5$ en $x = 6$.

f daalt op het interval $[2; 4,5]$.

f heeft een maximum $f(2) = 2,3$ en een minimum $f(4,5) = -3,4$.



- 27 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 6\frac{1}{2}x^2 + 15x + 8$.
- Lees uit de grafiek af bij welke waarden van x de grafiek een horizontale raaklijn heeft.
 - Differentieer f en ga na dat voor de in opdracht a gevonden waarden van x geldt $f'(x) = 0$.
 - Lees uit de grafiek af op welke intervallen geldt $f'(x) < 0$.



- 28 Gegeven is de functie $K(p) = -p^3 + 3p^2 + 7$.
- Los exact op $K'(p) = 0$.
 - Ga met een plot van de grafiek na of er bij de waarden van p waarvoor $K'(p) = 0$ sprake is van een minimum of een maximum van K .
 - Bereken het maximum en het minimum van K .

Aanpak

Hoe bereken je exact de extreme waarden van een functie f ?

- Differentieer f .
- Los exact op $f'(x) = 0$.
- Plot de grafiek van f en kijk of er sprake is van een minimum of een maximum.
- Bereken de extreme waarden door de gevonden x -waarden in te vullen in $f(x)$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = x^5 - 15x^3 + 10$.
Bereken exact de extreme waarden van f .

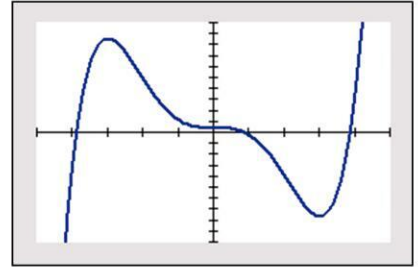
Oplossing

1 $f'(x) = 5x^4 - 45x^2$

2 $5x^4 - 45x^2 = 0$ ofwel $5x^2(x^2 - 9) = 0$.
 $x = 0$ of $x = -3$ of $x = 3$.

3 In de plot zie je dat de grafiek geen top heeft bij $x = 0$.

4 f heeft een maximum $f(-3) = 172$ en een minimum $f(3) = -152$.



Ondersteunende route → maak opdracht 029

29 Bereken exact de extreme waarden.

H

a $L(m) = -8m^2 + 16m - 3$ c $g(x) = (\sqrt{x} - 6)^2 + 6$

b $h(x) = \sqrt{2x + 10} - \frac{1}{2}x$ d $w(r) = (3r - 4)^2 + 2r$

Soms is het niet mogelijk om van een functie de maxima en minima met de afgeleide te berekenen, omdat je de functie niet kunt differentiëren. In dat geval gebruik je de rekenmachine.

30 a Welke functies kun je differentiëren met de regels die je gehad hebt? Waarom lukt het bij de andere functies niet?

H

$f(x) = x^3 - x^4$

$h(x) = (\sqrt{x} - 3)^4$

$g(x) = 1,5^x - x$

$k(x) = -2\sqrt{2x + 3} + 2x$

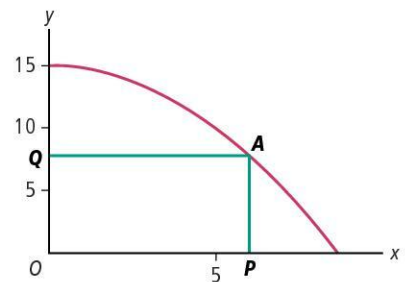
b Bereken exact de extreme waarde(n) van de functies die je wel kunt differentiëren.

c Bereken de extreme waarden van de overige functie(s) met je rekenmachine.

Ondersteunende route → maak opdracht 031

31 Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 15$ met domein $[0, 10]$. Op de grafiek van f ligt een punt A . Punt P is de projectie van A op de x -as en punt Q is de projectie van A op de y -as. Bewijs dat de oppervlakte van rechthoek $OPAQ$ maximaal 50 is.

Uitdagende route → maak opdracht U4 en U5

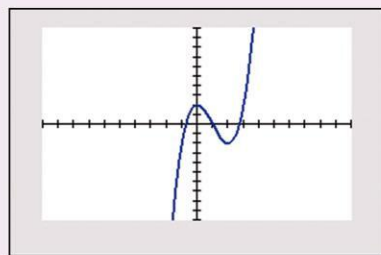


Ondersteunende opdrachten

- 029** Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.
- Differentieer f .
 - Los exact op $f'(x) = 0$.
 - Ga met de plot na of de grafiek van f een top heeft.
 - Vul in: f heeft een maximum $f(\dots) = \dots$
 f heeft een minimum $f(\dots) = \dots$

Bereken exact de extreme waarden.

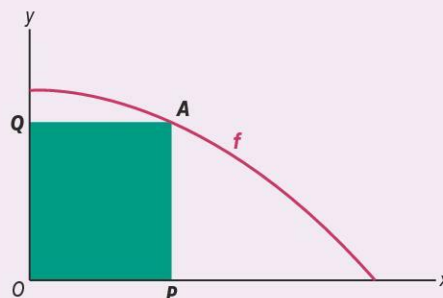
- e** $g(x) = -4x^2 + 12x + 19$ **g** $k(x) = x(\sqrt{x} - 3)$
f $h(x) = \sqrt{9x + 24} - 1\frac{1}{2}x$ **h** $m(x) = \left(\frac{1}{4}x - 1\right)^2 - 3x + 7$



- 031** Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 16$ met $x > 0$.
 Op de grafiek van f wordt tussen de y -as en het snijpunt van de grafiek met de x -as een punt A gekozen.
 De projecties van A op de x -as en y -as zijn de punten P en Q .

In deze opdracht ga je exact de maximale oppervlakte van rechthoek $OPAQ$ berekenen.

- Stel dat P het punt $(p, 0)$ is. Geef de x -coördinaat van A .
- Bereken de y -coördinaat van A .
- Druk de breedte van rechthoek $OPAQ$ uit in p .
- Druk de hoogte van de rechthoek uit in p .
- Vul in: de oppervlakte van rechthoek $OPAQ$ is $O(p) = \dots$
- Bereken de maximale oppervlakte door de extreme waarde(n) van O te berekenen.



Uitdagende opdrachten

- U4** Gegeven is de familie van functies $g_a(x) = \frac{1}{3x - a} - \frac{1}{(3x - a)^2}$

$g_a(4)$ is een extreme waarde van een functie g_a .
 Bereken exact de waarde van a .

- U5** Differentieer.

- $f(x) = (x + 4)\sqrt{x + 4}$
- $g(x) = x\sqrt{x + 4}$, gebruik opdracht a.
- $k(x) = (x + 6)^4$
- $l(x) = x(x + 6)^3$, gebruik opdracht c.

11.5 Redeneren met de afgeleide

Je leert

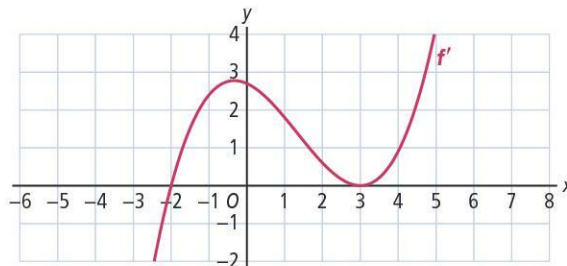
- hoe je met de hellinggrafiek eigenschappen van een functie vindt

Leerroutes

- ondersteunend: 32—033—34—35—36—37—38
- doorlopend: 32—33—34—35—36—37—38
- uitdagend: 33—34—35—36—38—U6—U7

Getekend is de grafiek van de afgeleide van een functie f .

- Welke informatie over de grafiek van f kun je uit deze grafiek van de afgeleide halen?



- 32 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 6x$.
- Plot en schets de grafieken van f en f' in twee figuren.
 - Ga na op welk interval f stijgt en op welk interval f daalt.
 - Ga na op welk interval de grafiek van de afgeleide functie boven de x -as ligt en op welk interval onder de x -as.
 - Vergelijk je antwoorden bij opdracht c met opdracht b. Welke conclusies kun je trekken?
 - Hoe kun je uit de grafiek van de afgeleide functie aflezen waar de top van de grafiek van f ligt?

Theorie

De grafiek van f' heet de **hellinggrafiek** van f . Uit deze hellinggrafiek kun je eigenschappen van de grafiek van f afleiden en omgekeerd.

Waar de hellinggrafiek de x -as snijdt, is $f'(x) = 0$ en heeft de grafiek van f een horizontale raaklijn.

Waar de hellinggrafiek boven de x -as ligt, is $f'(x) > 0$ en stijgt f .

Waar de hellinggrafiek onder de x -as ligt, is $f'(x) < 0$ en daalt f .

Voorbeeld

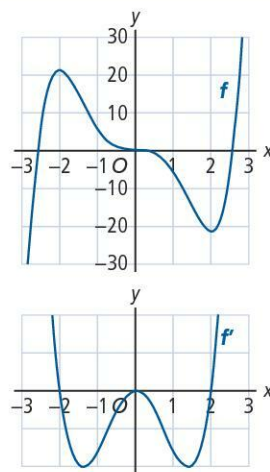
Gegeven is de grafiek van functie f .
Schets de hellinggrafiek.

Oplossing

Als $x = -2$, $x = 0$ en $x = 2$ is de helling 0, dus voor deze waarden snijdt de hellinggrafiek de x -as.

Op de intervallen $\langle \leftarrow, -2 \rangle$ en $\langle 2, \rightarrow \rangle$ stijgt f dus voor $x < -2$ en $x > 2$ ligt de hellinggrafiek boven de x -as.

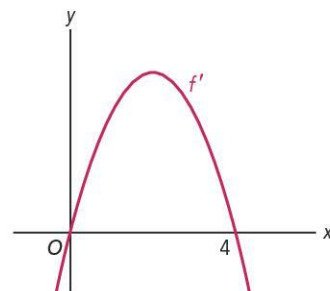
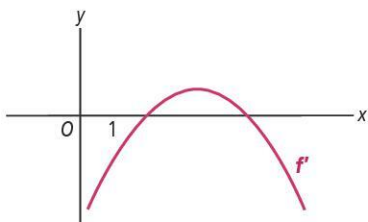
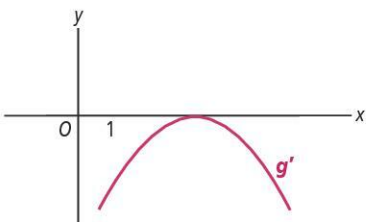
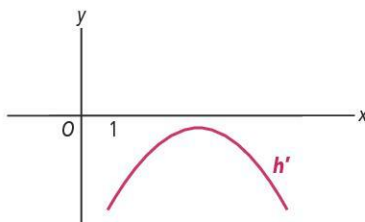
Op de intervallen $\langle -2, 0 \rangle$ en $\langle 0, 2 \rangle$ daalt f dus voor $-2 < x < 0$ en $0 < x < 2$ ligt de hellinggrafiek onder de x -as.



Ondersteunende route → maak opdracht 033

33 De parabool is de grafiek van de afgeleide van een functie f .

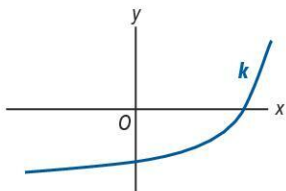
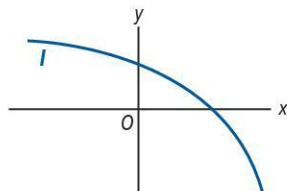
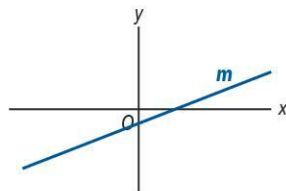
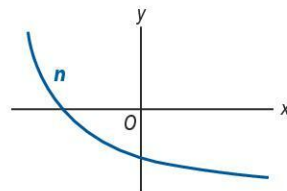
- H**
- Op welk(e) interval(len) stijgt f ?
 - Op welk(e) interval(len) daalt f ?
 - Bij welke waarde van x heeft f een minimum?
 - Bij welke waarde van x heeft f een maximum?
 - De grafiek van f gaat door het punt $(0, -5)$.
Schets een mogelijke grafiek van f .



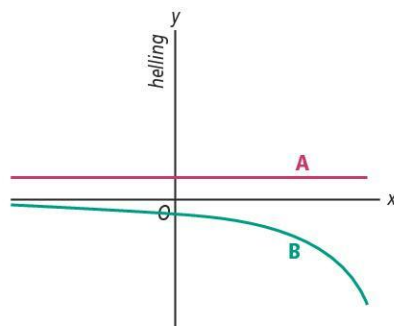
34 De parabolen zijn de grafieken van f' , g' en h' .
Schets mogelijke grafieken van f , van g en van h .

35 Gegeven zijn de grafieken van de functies k , l , m en n .

H



- Bij de functies k , l , m en n kun je de grafieken schetsen van de bijbehorende afgeleide functies.
Van welke functie is grafiek A de grafiek van de afgeleide functie? Verklaar je antwoord.
- Hoe zie je aan grafiek B dat de bijbehorende functie dalend is en dat de daling toeneemt?
- Welke functie hoort bij grafiek B?
- Schets ook bij de twee overige functies de grafiek van de afgeleide functie.



Theorie

Als $f'(x) > 0$ en $f''(x)$ neemt toe, dan is f **toenemend stijgend**.

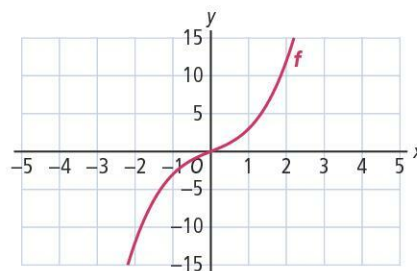
Als $f'(x) > 0$ en $f''(x)$ neemt af, dan is f **afnemend stijgend**.

Als $f'(x) < 0$ en $f''(x)$ neemt toe, dan is f **afnemend dalend**.

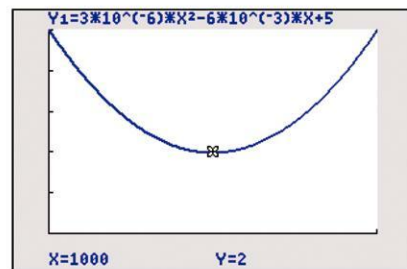
Als $f'(x) < 0$ en $f''(x)$ neemt af, dan is f **toenemend dalend**.

	f' stijgt	f' daalt
$f'(x) > 0$	 f is toenemend stijgend	 f is afnemend stijgend
$f'(x) < 0$	 f is afnemend dalend	 f is toenemend dalend

- 36 Getekend is de grafiek van de functie $f(x) = x^3 + 2x$.
- Geef de afgeleide van f .
 - Hoe kun je aan $f'(x)$ zien dat f overal stijgend is?
 - Plot de grafiek van de afgeleide van f .
Hoe zie je aan de grafiek van f' waar de helling van de grafiek van f het kleinst is?



- 37 Gegeven is de functie $K(q) = 10^{-6} \cdot q^3 - 3 \cdot 10^{-3} \cdot q^2 + 5q + 1000$. In de plot van de grafiek van K' zie je dat K' een minimum heeft bij $q = 1000$.
Omschrijf het verloop van de grafiek van K rond $q = 1000$.



- 38 Een tuinder heeft een waterreservoir om bij gebrek aan regenwater de planten water te kunnen geven. Voor een bepaalde periode kun je de inhoud van het reservoir berekenen met de formule $I = \frac{120}{(0,05t + 1)^2}$, waarin I de inhoud is in m^3 en t de tijd in dagen.
- Beredeneer met de formule dat de inhoud afneemt.
 - Geef de afgeleide $\frac{dI}{dt}$.
 - Hoe zie je aan de afgeleide dat de inhoud afneemt?
 - Beredeneer met de afgeleide dat de inhoud van het reservoir steeds *langzamer* afneemt.

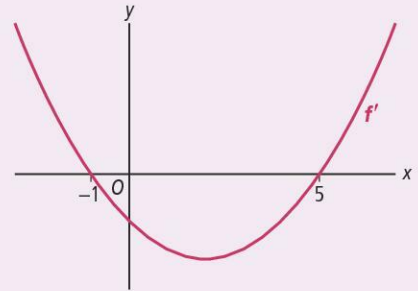
Uitdagende route → maak opdracht U6 en U7

Ondersteunende opdrachten

033

Gegeven is de grafiek van de afgeleide van een functie f .

- Wat weet je van f' als f daalt?
- Op welk interval daalt f ?
- Op welk(e) interval(len) is f stijgend?
- Wat weet je van f'' in een top van de grafiek?
- Bij welke waarden van x heeft de grafiek van f een top?
- Hoe kun je aan de grafiek van de afgeleide zien bij welke top van f een maximum hoort?
- Het punt $(-1, 4)$ is een top van de grafiek van f . Teken deze top in een assenstelsel.
- Waarom moet de tweede top lager liggen dan het punt $(-1, 4)$?
- Maak de schets van de grafiek van f af.

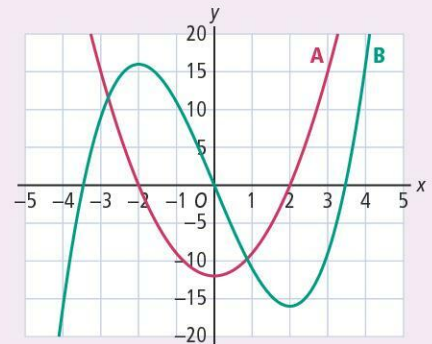


Uitdagende opdrachten

U6

In de figuur zijn twee grafieken getekend. De ene is de grafiek van een functie f . De andere is de grafiek van de afgeleide f' .

- Welke grafiek is symmetrisch in de verticale as? Welke symmetrie heeft de andere grafiek?
- Welke grafiek is van de afgeleide f' ? Geef argumenten voor je keuze.
- Hoe zie je in de grafiek van f' de plaats van het minimum van f ?



U7

De grafiek van de afgeleide van de afgeleide van een functie f gaat dalend door de x -as in het punt $(4, 0)$. Verder is gegeven dat $f''(4) > 0$. Wat volgt hieruit voor de grafiek van f in het punt met x -coördinaat 4?

11.6 Gemengde opdrachten

39 Bereken exact de extreme waarde(n).

a $f(x) = x^2 - 3x + 8$ **c** $h(x) = \left(4 - \frac{1}{8}x\right)^4$
b $g(x) = \frac{3}{2x+5} + 1\frac{1}{2}x$ **d** $n(x) = \frac{3}{\sqrt{2x+7}} + 3x$

40 Een zwembad wordt geleegd door een stop in de bodem los te trekken. De hoeveelheid water V in m^3 in het zwembad na t minuten is $V = 10 \cdot \left(2 - \frac{1}{60}t\right)^2$.

- a** Hoeveel m^3 water bevat het zwembad op het tijdstip $t = 0$?
- b** Na hoeveel minuten is het zwembad leeg?
- c** Plot en schets de grafiek van V .
- d** Leg uit waarom V daalt gedurende de hele periode waarin het zwembad leegloopt. Wat betekent dat voor de waarde van V' voor elke waarde van t in deze periode?
- e** Bereken de gemiddelde uitstroomsnelheid.
- f** Op welk moment stroomt het zwembad het snelst leeg?
- g** Bereken met V' het moment waarop de uitstroomsnelheid precies gelijk is aan de gemiddelde uitstroomsnelheid.

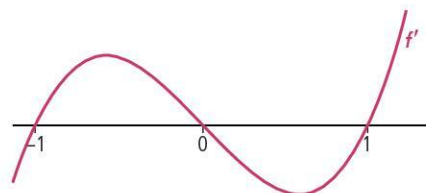


41 Gegeven is de familie van functies $f_{p,q}(x) = p(4x+2)^3 + q$.

- a** Bereken de waarde van p en van q als gegeven is dat de grafiek van $f_{p,q}$ door de punten $(0, 0)$ en $(-1, 16)$ gaat.
- b** Een lijn met richtingscoëfficiënt -6 raakt de grafiek van een functie $f_{p,q}$ in het punt $\left(-\frac{1}{4}, 12\right)$.
Bereken de waarden van p en van q waarvoor dit het geval is.

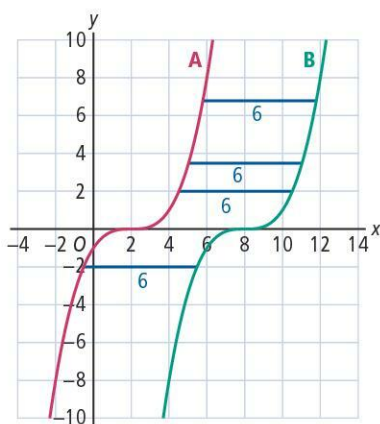
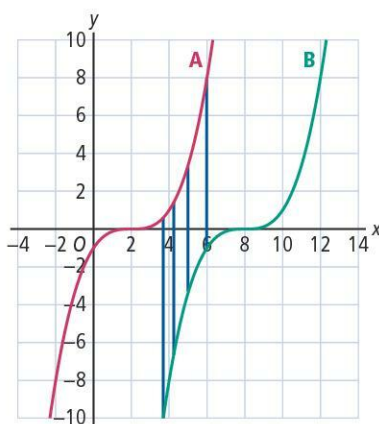
- c** Neem $p = \frac{1}{2}$ en $q = 5$ en stel een vergelijking van de raaklijn op aan de grafiek van $f_{\frac{1}{2},5}$ in het punt $P(-1, 1)$.

42 Gegeven is een schets van de hellinggrafiek van een functie f .
Schets twee mogelijke grafieken van de functie f .



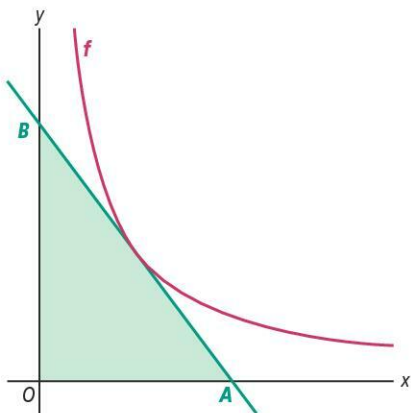
43 Gegeven zijn de functies $f_a(x) = x^3 - 6x^2 + ax$.

- a** Leg uit waarom de grafieken van deze functies voor elke waarde van a door $(0, 0)$ gaan.
- b** Neem $a = 0$. Bereken exact de extreme waarden van f_0 .
- c** Voor welke waarden van a heeft de grafiek van f_a geen horizontale raaklijn?



- 44** Grafiek A is de grafiek van de functie $f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^3$.
 Grafiek B hoort bij een functie g .
 De horizontale lijnstukken die twee punten op de grafieken A en B verbinden hebben telkens lengte 6. De verticale lijnstukken zijn niet allemaal even lang.
 Bereken exact de lengte van het kortste verticale verbindingslijnstuk tussen de grafieken A en B.

- 45** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3}{x}$ met $x > 0$.
 Kies een punt P op de grafiek. De raaklijn in P aan de grafiek snijdt de x -as in punt A en de y -as in punt B .
 Onderzoek hoe groot de oppervlakte van $\triangle OAB$ kan zijn.



Vaardigheid

Je kunt een machtsfunctie differentiëren.

De afgeleide functie van $f(x) = x^a$ is $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$ voor elke waarde van $a \neq 0$.

Om een gebroken functie of een wortelfunctie te differentiëren schrijf je deze eerst in de vorm $f(x) = c \cdot x^a$.

In het bijzonder geldt: als $f(x) = \sqrt{x}$ dan is $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Voorbeeld

Differentieer $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$ en $g(x) = \frac{6}{x^4}$

Oplossing

$f(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$ schrijf je als $f(x) = x^{2\frac{1}{3}}$

$f'(x) = 2\frac{1}{3}x^{1\frac{1}{3}}$ ofwel $f'(x) = 2\frac{1}{3}x\sqrt[3]{x}$

$g(x) = \frac{6}{x^4}$ schrijf je als $g(x) = 6x^{-4}$

$g'(x) = -24x^{-5}$ ofwel $g'(x) = -\frac{24}{x^5}$

S1 Differentieer.

a $f(x) = 8x\sqrt{x}$

b $g(x) = \frac{5}{2x^7}$

Vaardigheid

Je kunt de afgeleide van de samengestelde functie

$k(x) = f(ax + b)$ bepalen.

De afgeleide van de samengestelde functie $k(x) = f(ax + b)$ is

de functie $k'(x) = f'(ax + b) \cdot a$.

Deze regel heet de kettingregel.

Voorbeeld

Differentieer $f(x) = (5x + 8)^4$ en $g(x) = 3\sqrt{2 - 6x}$.

Oplossing

$f'(x) = 4 \cdot (5x + 8)^3 \cdot 5$ ofwel

$f'(x) = 20(5x + 8)^3$

$g(x) = 3(2 - 6x)^{\frac{1}{2}}$

$g'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2 - 6x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -6$ dus

$g'(x) = -\frac{9}{\sqrt{2 - 6x}}$

- S2** Differentieer.
- a** $f(x) = 5(1 - 7x)^3$
- b** $f(x) = \sqrt{3x + 2}$

Vaardigheid

Je kunt een vergelijking opstellen van een raaklijn aan de grafiek van f met gegeven richtingscoëfficiënt a .

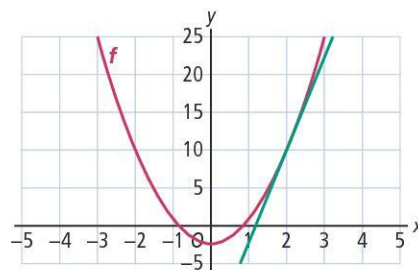
- 1 Bereken de x -coördinaat van het raakpunt P door de vergelijking $f'(x) = a$ op te lossen.
- 2 Bereken de y -coördinaat van P door de x -coördinaat bij $f(x)$ in te vullen.
- 3 Bereken p door de coördinaten van P bij $y = ax + p$ in te vullen.

Voorbeeld

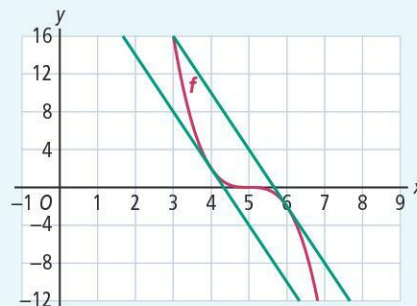
Gegeven zijn $f(x) = 3x^2 - 2$ en de lijn $y = 12x + p$.
Bereken exact voor welke waarde van p de lijn de grafiek van f raakt.

Oplossing

- 1 $f'(x) = 6x$
 $f'(x) = 12$ geeft $6x = 12$ ofwel $x = 2$.
- 2 $y = f(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 = 10$
- 3 $10 = 12 \cdot 2 + p$ geeft $p = -14$.



- S3** Er zijn twee lijnen met vergelijking $y = -6x + p$ die raken aan de grafiek van $f(x) = 2(5 - x)^3$.
Bereken exact de waarden van p .



Vaardigheid

Je kunt exact de extreme waarden van een functie berekenen.

Is het punt $T(a, b)$ een top van de grafiek van f en gaat f bij $x = a$ over van stijgen in dalen dan heeft f een maximum $f(a) = b$. Gaat f bij $x = a$ over van dalen in stijgen dan heeft f een minimum $f(a) = b$. Minima en maxima heten extreme waarden.

De extreme waarden van een functie f bereken je als volgt:

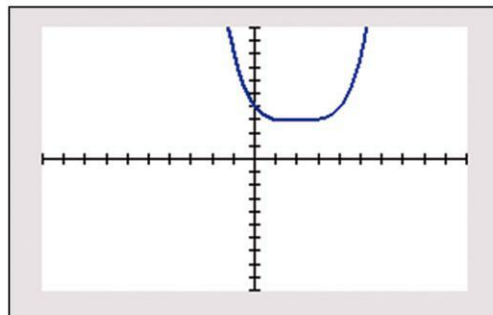
- 1 Differentieer f .
- 2 Los exact op $f'(x) = 0$.
- 3 Plot de grafiek en kijk of er sprake is van een minimum of een maximum.
- 4 Bereken de extreme waarden door de gevonden x -waarden in te vullen in $f(x)$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = (\frac{1}{2}x - 1)^4 + 3$.
Bereken exact de extreme waarde(n) van f .

Oplossing

- 1 $f'(x) = 4(\frac{1}{2}x - 1)^3 \cdot \frac{1}{2}$ ofwel $f'(x) = 2(\frac{1}{2}x - 1)^3$
- 2 $f'(x) = 0$ geeft $2(\frac{1}{2}x - 1)^3 = 0$ ofwel $\frac{1}{2}x - 1 = 0$
 $\frac{1}{2}x = 1$ dus $x = 2$.
- 3 In de plot is te zien dat f bij $x = 2$ een minimum heeft.
- 4 f heeft een minimum $f(2) = (\frac{1}{2} \cdot 2 - 1)^4 + 3 = 3$.



S4 Gegeven zijn de functies

$$f(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x} + \frac{1}{x} \text{ en } g(x) = \frac{1}{2x-5} - \frac{4}{2x+5}$$

- a Bereken exact de extreme waarde(n) van f .
- b Bereken exact de extreme waarde(n) van g .

Vaardigheid

Je kunt met de hellinggrafiek eigenschappen van een functie vinden.

De grafiek van de afgeleide van f is de hellinggrafiek van f . Waar de hellinggrafiek de x -as snijdt, heeft de grafiek van f een horizontale raaklijn.

Waar de hellinggrafiek boven de x -as ligt, is $f'(x) > 0$ en stijgt f .

Waar de hellinggrafiek onder de x -as ligt, is $f'(x) < 0$ en daalt f .

In het overzicht zie je het verband tussen toenemende of afnemende stijging of daling van f en het stijgen of dalen van f' .

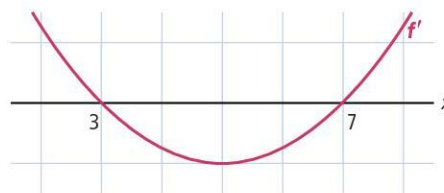
	f' stijgt	f' daalt
$f'(x) > 0$	 f is toenemend stijgend	 f is afnemend stijgend
$f'(x) < 0$	 f is afnemend dalend	 f is toenemend dalend

Voorbeeld

Gegeven is de hellinggrafiek van een functie f . Bij welke waarde van x heeft f een maximum?

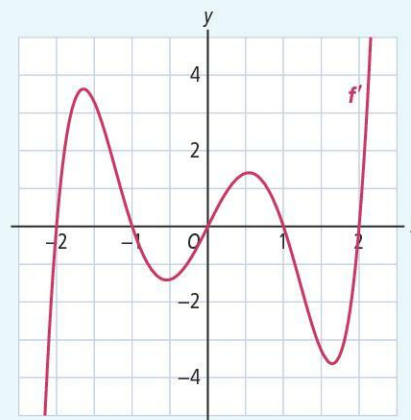
Oplossing

Bij $x = 3$ is de helling 0 en gaat $f'(x)$ over van positief naar negatief, dus f gaat over van stijgen naar dalen. f heeft een maximum bij $x = 3$.



S5 Gegeven is de hellinggrafiek van een functie f .

- Op welke intervallen daalt f ?
- Op welke intervallen stijgt f ?
- Bij welke waarde(n) van x heeft f een maximum?
- Bij welke waarde(n) van x heeft f een minimum?



- T1** a Differentieer de functies $f(x) = 4x^3 + \sqrt{x}$ en $g(x) = \frac{5}{x^2} + 3$. Schrijf de afgeleiden zonder gebroken of negatieve exponent.
- b Gegeven is de formule $h = (\sqrt{x} + x) \cdot (x - 1)$. Bepaal $\frac{dh}{dx}$

T2 Differentieer.

- a $m(t) = 3 + 2(4t - 9)^5$ d $k(x) = (2 - x)^{1,7}$
- b $h(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}}$ e $p(x) = \frac{2}{(x - 7)^4}$
- c $T(q) = \frac{2q^3 - 4q + 7}{3q^2}$ f $q(s) = \left(1 + \frac{3}{s}\right)^2$

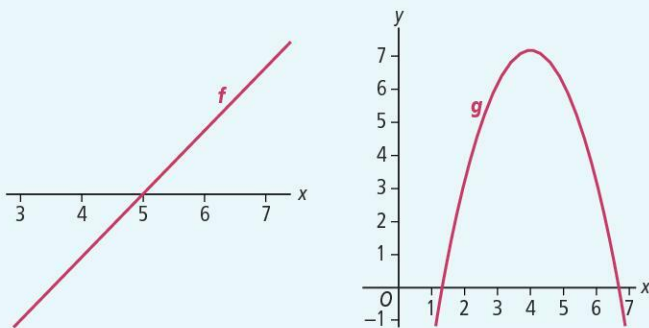
T3 Gegeven is de functie $f(x) = x - x^4$.

- a Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt met x -coördinaat 2.
- b De lijn met vergelijking $y = 5x + p$ raakt de grafiek van f . Bewijs dat $p = 3$.

T4 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2$.

- a Bereken exact de coördinaten van de punten op de grafiek van f waar de raaklijn horizontaal loopt.
- b Onderzoek of er in die punten sprake is van een maximum, een minimum of geen van beide.

T5 Schets van elke grafiek de bijbehorende hellinggrafiek.



- T6** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{9}{2x - 25}$
- Voor welke waarde van x bestaat de functie niet?
 - Stel een functievoorschrift op voor f' .
 - Beredeneer met behulp van de afgeleide dat f overal dalend is.
 - Onderzoek met behulp van de afgeleide op welk interval f toenemend dalend is.

- T7** Gewicht, volume, lengte en huidoppervlakte van dieren hangen met elkaar samen. Biologen gebruiken vuistregels voor deze verbanden.
- Voor een antilopensoort gelden voor het gewicht G in kg, het volume V in dm^3 , de lengte L in dm en de huidoppervlakte A in dm^2 de volgende formules:

$$G = 0,2 \cdot V, \quad V = 0,1 \cdot L^3 \quad \text{en} \quad A = 2 \cdot L^2$$

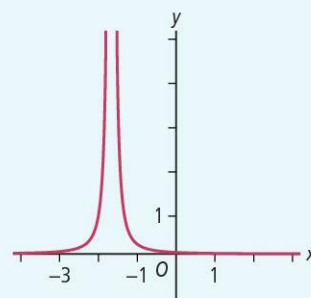
- Een pasgeboren antilope heeft een lengte van 60 cm. Hoe groot is de huidoppervlakte?
- Bereken het gewicht van het antilopenjong uit opdracht a.
- Stel een formule op waarbij het gewicht G van een antilope wordt uitgedrukt in de lichaamslengte L .
- De pasgeboren antilope groeit snel. Met de lengte neemt ook het gewicht toe. Bereken de snelheid in kg per dm waarmee het gewicht van de antilope toeneemt op het moment dat het beestje een lengte heeft van 70 cm.
- Bereken de snelheid in dm^2 per dm waarmee de huidoppervlakte toeneemt op het moment dat de lengte 70 cm is.
- Een volwassen mannetje weegt 80 kilo. Bereken de huidoppervlakte.



- T8** De grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{(3x + 5)^2}$ is gegeven.

- Differentieer f .
- Beredeneer met de afgeleide functie dat f voor $x > -1\frac{2}{3}$ steeds langzamer afneemt.
- Punt $P(-1, \frac{1}{4})$ ligt op de grafiek van f .

De lijn $y = ax + b$ is de raaklijn aan de grafiek van f in P . Bereken exact de waarde van a en van b .
(Ontleend aan CE pilot havo wiskunde B 2014 tijdvak 1)



Je kunt een machtsfunctie differentiëren.

E1 Differentieer.

a $p(x) = 2\sqrt[3]{x}$

d $f(x) = (x^2 - 3x + 15)\sqrt{x}$

b $g(x) = 2\sqrt{x} + 5x^2$

e $h(x) = \sqrt[3]{x} \cdot x^3$

c $k(x) = \frac{1}{x^6} + \frac{3}{x^4}$

f $q(x) = \frac{2}{x^{1,3}} - \frac{4}{x^{2,8}}$

Je kunt de afgeleide van de samengestelde functie $k(x) = f(ax + b)$ bepalen.

E2 Differentieer en schrijf de afgeleide zonder gebroken en negatieve exponent.

a $g(m) = (4m - 5)^3$

c $Q(p) = \sqrt{2p - 5}$

b $h(x) = \frac{4}{2x + 3}$

d $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2x - 0,5}}$

Je kunt een vergelijking opstellen van een raaklijn aan de grafieken van f met gegeven richtingscoëfficiënt a .

E3 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 8x$.

- Bereken exact de coördinaten van de punten waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan -2 .
- Stel een vergelijking op van de raaklijn in het punt met x -coördinaat 1 .
- Er zijn twee waarden van p waarvoor de lijn $y = 5\frac{1}{2}x + p$ de grafiek van f raakt. Bereken exact beide waarden van p .

Je kunt exact de extreme waarden van een functie berekenen.

E4 Bereken voor elke functie exact de extreme waarden.

a $f(x) = x^3 - \frac{1}{15}x^5$

c $h(x) = \frac{1}{2x - 3} + 2x - 1$

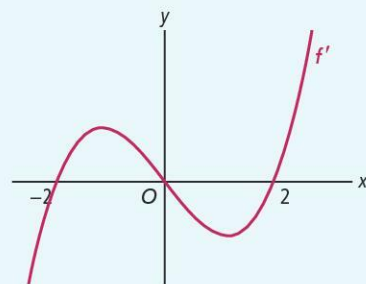
b $g(x) = (1 + 2x)^2 - 2$

d $k(x) = (x^4 - 4)^2$

Je kunt met de hellinggrafiek eigenschappen van een functie vinden.

E5 Van een functie f is de grafiek van de afgeleide getekend.

- Op welke intervallen stijgt f ?
- Schets een mogelijke grafiek van f .



- E6** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 3$.
- Plot en schets de grafiek van f . Hoeveel extreme waarden heeft f ?
 - Differentieer f en los op $f'(x) = 0$. Hoort bij elke gevonden oplossing een extreme waarde van f ?
 - Plot en schets de grafiek van f' .
 - Bij welke waarden van x is er sprake van een toenemende daling van f ?

- E7** De hoogte H van de vloeistofspiegel in een vat is een functie van het volume. De formule hiervoor is $H = (V + 1)^{\frac{1}{3}} - 1$ met V in liters en H in dm.
- Het vat wordt gevuld met een constante snelheid van 900 cm^3 per minuut. Dus geldt $V = a \cdot t$ met t in minuten.
- Bereken de waarde van a .
 - Leg uit dat geldt $H = (0,9t + 1)^{\frac{1}{3}} - 1$.
 - Bereken met behulp van de afgeleide $\frac{dH}{dt}$ de stijgsnelheid in mm per seconde bij het begin van het vullen van het vat.
 - Hoe groot is de stijgsnelheid in mm per seconde na twee minuten?

- E8** Differentieer.
- $g(p) = 3\sqrt{4p - 10}$
 - $Q(p) = \sqrt{(3p + 2)^4}$
 - $p(t) = (t^2 + 1) \cdot \sqrt{t}$
 - $g(x) = (8x - 4)^3 + 7$

- E9** Gegeven zijn de samengestelde functies
- $$f(x) = \frac{1}{2} \log(x^2 - 4x - 5) \text{ en } g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x - 5}$$
- Beredeneer met behulp van de afgeleide van $y = x^2 - 4x - 5$ of f en g een minimum of een maximum hebben.

Middelwaardestelling

Lagrange

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) was een wiskundige en astronoom van Italiaanse afkomst, die later in Frankrijk en Pruisen werkte. Hij ontwikkelde zich tot een van de grootste twee wiskundigen van de 18e eeuw (de andere was Euler). Hij werkte aan getaltheorie, differentiaalrekening, mechanica en astronomie. Hij formuleerde onder andere de middelwaardestelling.



De middelwaardestelling:

Twee punten A en B met x -coördinaten a en b liggen op de grafiek van functie f . Als de afgeleide f' op interval $\langle a, b \rangle$ bestaat, dan is er in dat interval een getal c zodat $f'(c)$ gelijk is aan de richtingscoëfficiënt van de lijn door A en B .

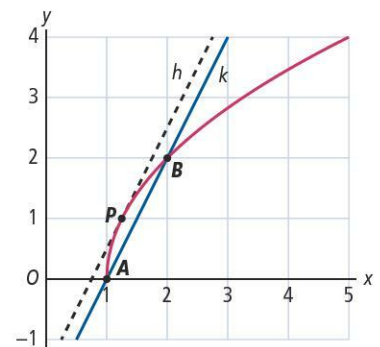
Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 2\sqrt{x-1}$. Op de grafiek liggen de punten $A(1, 0)$ en $B(2, 2)$.

De lijn door AB is de grafiek van $k(x) = 2x - 2$.

Als je de grafieken bekijkt, zijn er twee dingen die opvallen.

- Er is een punt P waarin de raaklijn evenwijdig is aan de lijn door A en B . Op het oog is $x_P = 1\frac{1}{4}$.
- Tussen de punten A en B zie je de verticale afstand tussen de grafiek van f en die van k eerst toenemen en daarna afnemen. Er is dus een punt waar de afstand maximaal is. Is dat ook punt P ?



In de tabel met $y_1 = 2\sqrt{x-1}$, $y_2 = 2x - 2$ en $y_3 = y_2 - y_1$ zie je dat de maximale afstand bij $x = 1,25$ ligt.

Is het toeval dat de afstand het grootst is bij $x = 1\frac{1}{4}$?

Dat ga je in de volgende opdracht onderzoeken.

X	Y ₁	Y ₂	Y ₃	
1	0	0	0	
1.125	0.7071	0.25	-0.457	
1.25	1	0.5	-0.5	
1.375	1.2247	0.75	-0.475	
1.5	1.4142	1	-0.414	
1.625	1.5811	1.25	-0.331	
1.75	1.7321	1.5	-0.232	
1.875	1.8708	1.75	-0.121	
2	2	2	0	
2.125	2.1213	2.25	0.1287	
2.25	2.2361	2.5	0.2639	

$X = 1.25$

Opdracht

- Los op $f'(x) = rc_{AB}$.
- Ga na dat de verticale afstand van een punt op de grafiek tot de lijn AB gegeven wordt door $g(x) = f(x) - k(x)$.
- Differentieer g .
- Heeft g een maximum of minimum?
- Leg uit: Het punt P waar de raaklijn evenwijdig is aan lijn AB , is ook het punt waar de verticale afstand van een punt op de grafiek tot de lijn AB het grootst is.
- Voer de opdrachten a tot en met e uit voor de functie

$$f(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}x - 3 \right)^3 + \frac{4}{3} \text{ op het interval } [2, 8].$$

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Meetkunde
- Rekenen met breuken
- Rekenen met wortels
- Exponentiële en logaritmische vergelijkingen

ures

Flt No.	Remarks
	Gate Opens 16:50
	Gate Opens 16:40
	Gate Opens 16:50
	Gate Opens 16:55
	Gate Opens 16:55
	Gate Opens 17:00
	Gate Opens 17:00
	Gate Opens 17:10
	Gate Opens 17:15
	Gate Opens 17:15
	Gate Opens 17:15
	Gate Opens 17:15

Departures

Time	Destination	Flt No.	Remarks
20:05	Vienna		Gate Opens
20:05	an Bergamo		Gate Opens
20:05	Barcelona		Gate Opens
20:10	Cologne		Gate Opens
20:10	Bologna		Gate Opens
20:20	Hanover		Gate Opens
20:25	Stuttgart		Gate Open
20:25	Wroclaw		Gate Open

Meetkunde

Theorie

Als α, β, γ de hoeken zijn van een driehoek en de lengten van de tegenoverliggende zijden zijn a, b en c , dan geldt:

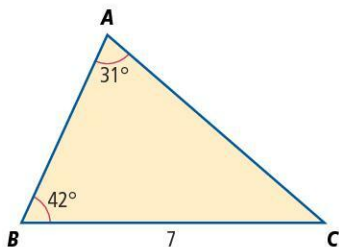
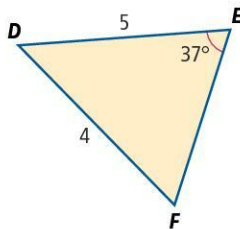
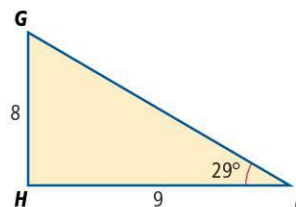
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \text{ (sinusregel) en}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) \text{ (cosinusregel)}$$

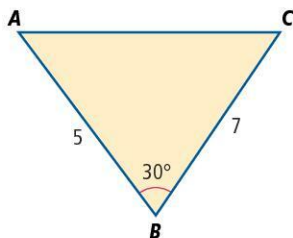
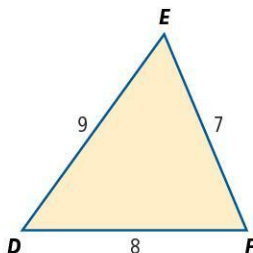
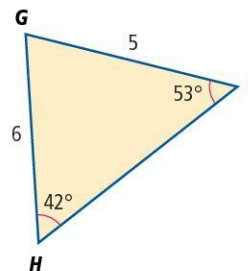
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

- 1 Bereken met de sinusregel AC , $\angle F$ en $\angle G$.



- 2 Bereken met de cosinusregel AC , $\angle F$ en HI .



- 3 Gegeven zijn de punten $A(1, 1)$, $B(7, 4)$ en $C(2, 8)$.
- Bereken AB , BC en AC .
 - Stel vergelijkingen op van de lijnen AB en AC .
 - Bereken met behulp van de cosinusregel $\angle BAC$ in graden nauwkeurig.
 - Bereken $\angle BAC$ met behulp van de richtingscoëfficiënten van de lijnen AB en AC .

Rekenen met breuken

Theorie

Breuken kun je met elkaar vermenigvuldigen door de tellers met elkaar te vermenigvuldigen en de noemers met elkaar te vermenigvuldigen.

Breuken kun je bij elkaar optellen en van elkaar aftrekken als ze gelijknamig zijn. Als dat niet het geval is, maak je eerst de noemers gelijk.

Voorbeeld 1

$$\frac{x^2}{2} \times \frac{6}{x^3} = \frac{6x^2}{2x^3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot x \cdot x}{2 \cdot x \cdot x \cdot x} = \frac{3}{x}$$

$$5a \times \frac{6}{3a^2} = \frac{5a}{1} \times \frac{6}{3a^2} = \frac{30a}{3a^2} = \frac{10}{a}$$

Voorbeeld 2

$$\frac{2}{a} + \frac{a}{a+3} =$$

$$\frac{2(a+3)}{a(a+3)} + \frac{a \times a}{a(a+3)} =$$

$$\frac{2a+6}{a^2+3a} + \frac{a^2}{a^2+3a} = \frac{a^2+2a+6}{a^2+3a}$$

- 4** Bereken en schrijf je antwoord als één breuk. Vereenvoudig indien mogelijk het antwoord.

a $\frac{3}{c} \times \frac{7}{3c}$

e $p \times \frac{3}{2q}$

b $\frac{x}{3} \times \frac{12}{x^2}$

f $2a \times b \times \frac{4}{b^2}$

c $\frac{2a}{11} \times \frac{-a}{3}$

g $\frac{6c^3}{23} \times 2c$

d $\frac{5q}{4p^2} \times \frac{2p}{q^3}$

h $\frac{1}{3p^5} \times 2p^2 \times \frac{q}{2}$

- 5** Bereken en schrijf je antwoord als één breuk.

a $\frac{1}{x} - \frac{1}{3x}$

e $\frac{2}{x-2} - \frac{x}{x-1}$

b $\frac{4}{5c^2} + \frac{1}{2c}$

f $\frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{x^2-1}$

c $\frac{3}{x-1} - 2$

g $\frac{1}{x^3} + 1$

d $\frac{7}{8p} + \frac{2q}{p} + 3$

h $a^2 - \frac{a+2}{a^4}$

Rekenen met wortels

Theorie

Voor het rekenen met wortels kun je gebruik maken van de volgende rekenregels:

- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (a \geq 0, b \geq 0)$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geq 0, b > 0)$

Voorbeeld 1

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{10}$$

Voorbeeld 2

$$\begin{aligned} \sqrt{16x} - \sqrt{\frac{1}{4}x} &= \\ \sqrt{16} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{x} &= \\ 4\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x} &= 3\frac{1}{2}\sqrt{x} \end{aligned}$$

- 6 Bereken, geef een exact antwoord en vereenvoudig zo nodig je antwoord.

- | | |
|-------------------------------|--|
| a $\sqrt{18} \cdot \sqrt{6}$ | e $(3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})$ |
| b $(2\sqrt{11})^2$ | f $2\sqrt{7} \cdot (2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})$ |
| c $3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{3}$ | g $(2 + 4\sqrt{5})^2$ |
| d $(\sqrt{20})^2$ | h $(7\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} + 2\sqrt{6})$ |

- 7 Herleid, laat geen breuk onder het wortelteken staan en ook geen wortelvormen in de noemer.

- | | |
|-------------------------------|--------------------------|
| a $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ | c $\frac{5}{\sqrt{11}}$ |
| b $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}}$ | d $\frac{22}{2\sqrt{3}}$ |

- 8 Schrijf korter.

- | | |
|--|--|
| a $6\sqrt{2} + 2\sqrt{32}$ | e $2\sqrt{4a} - 3\sqrt{a} + 8\sqrt{4a}$ |
| b $\sqrt{63} + \sqrt{28}$ | f $5\sqrt{5} + \sqrt{75}$ |
| c $11\sqrt{3} - 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3}$ | g $\sqrt{\frac{5}{9}x} - \sqrt{125x}$ |
| d $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{45} + \sqrt{125}}$ | h $\sqrt{\frac{3}{4}a} + \sqrt{\frac{3}{49}a}$ |

Exponentiële en logaritmische vergelijkingen

Theorie

Exponentiële vergelijkingen kun je soms exact oplossen door de getallen aan weerskanten van het gelijkteken als machten van hetzelfde grondtal te schrijven. Lukt dat niet dan kun je de vergelijking met een logaritme oplossen. Uit $g^x = a$ volgt $x = {}^g\log(a)$.

Voorbeeld 1

Los exact op $\frac{1}{9} \cdot (27)^{2x+1} = 81$.

Oplossing

$$\frac{1}{9} \cdot (27)^{2x+1} = 81$$

$$\frac{1}{3^2} \cdot (3^3)^{2x+1} = 3^4 \quad (\text{als macht van 3 geschreven})$$

$$3^{-2} \cdot 3^{6x+3} = 3^4 \quad \left(\frac{1}{g^p} \cdot g^{-p} \text{ en } (g^p)^q = g^{pq}\right)$$

$$3^{6x+1} = 3^4 \quad (g^p \cdot g^q = g^{p+q})$$

$$6x + 1 = 4 \quad (\text{exponenten gelijkgesteld})$$

$$6x = 3 \text{ dus } x = \frac{1}{2}$$

Voorbeeld 2

Los exact op $\frac{1}{2} \cdot 5^{3x-1} = 7$.

Oplossing

$$\frac{1}{2} \cdot 5^{3x-1} = 7$$

$$5^{3x-1} = 14 \quad (\text{links en rechts } \times 2)$$

$$3x - 1 = {}^5\log(14) \quad (\text{logaritme genomen})$$

$$3x = {}^5\log(14) + 1 \quad (\text{links en rechts } + 1)$$

$$x = \frac{1}{3} \cdot {}^5\log(14) + \frac{1}{3} \quad (\text{links en rechts } : 3)$$

- 9 Los exact op.
- a $25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x = \sqrt{5}$ d $5 \cdot 4^{-x+1} - 35 = 0$
- b $4 \cdot 3^{2x} = 24$ e $2 \cdot 3^{2x+\frac{1}{2}} = 18$
- c $\frac{3}{3^{x+2}} = 18$ f $7 \cdot 2^{0,5x-3} = 21$

- 10 Substitueer formule B in formule A en bereken y.

- a A: $y = 2^x$ en B: $x = {}^2\log(5)$
- b A: $y = 2^x$ en B: $x = 3 \cdot {}^2\log(5)$
- c A: $y = 2^x$ en B: $x = 2 + {}^2\log(3)$

- 11 Op het blaadje wordt een begin gemaakt met het oplossen van de vergelijking ${}^{1,5}\log(5 - 2x) = -2$.

- a Leg uit wat er bij stap 1 is gebeurd.
- b Laat algebraïsch zien dat $1,5^{-2} = \frac{4}{9}$.
- c Maak de berekening verder af.

●	${}^{1,5}\log(5 - 2x) = -2$	
●	$5 - 2x = 1,5^{-2}$	1
●	$5 - 2x = \frac{4}{9}$	2
●	...	

- 12 Los exact op.

- a ${}^2\log(3x) - 5 = 7$ e ${}^2\log(5x - 2) + 3 = 11$
- b $4 + {}^{0,2}\log(t) = 6$ f ${}^3\log(x) + {}^3\log(5) = 2 \cdot {}^3\log(10)$
- c ${}^{0,5}\log(3 - t) = -2$ g ${}^3\log(x) = 2 + {}^3\log(15)$
- d ${}^3\log(3x^2) - 1 = 2$ h ${}^4\log(2x + 1) + 2 \cdot {}^4\log(3) = 1\frac{1}{2} + {}^4\log(9x)$

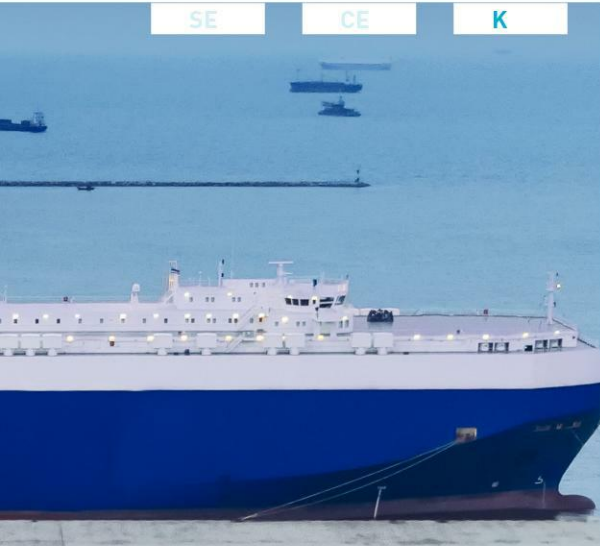


Keuzeonderwerpen

SE

CE

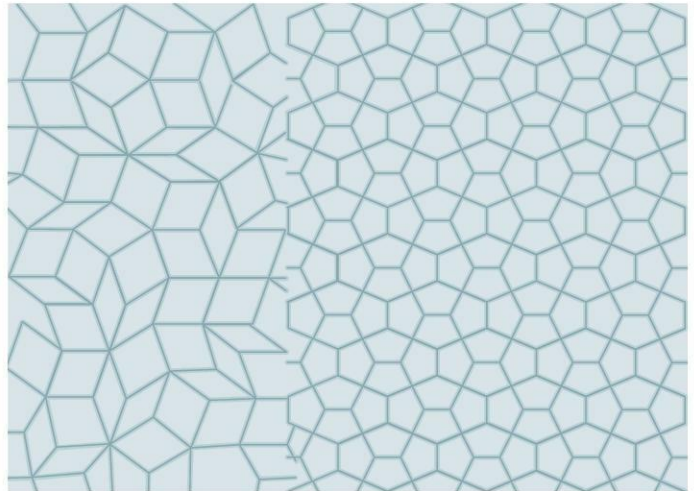
K



Praktische opdracht - Muziek 204



Praktische opdracht - Vlakvullingen 208



Benodigheden

- Acht lege glazen (melk)flessen
- Een gitaar

Opbouw

- 1 Probleemstelling
- 2 Probleem verkennen
- 3 Plan maken
- 4 Plan uitvoeren
- 5 Conclusie

Probleemstelling

Een flessenorgel bestaat uit een aantal flessen die voor een deel met water gevuld zijn. Door de hoeveelheid water per fles te variëren, kun je elke fles een andere toon laten voortbrengen en op het flessenorgel een melodie spelen. Om op een flessenorgel een melodie te kunnen spelen, moeten die tonen een toonladder vormen.

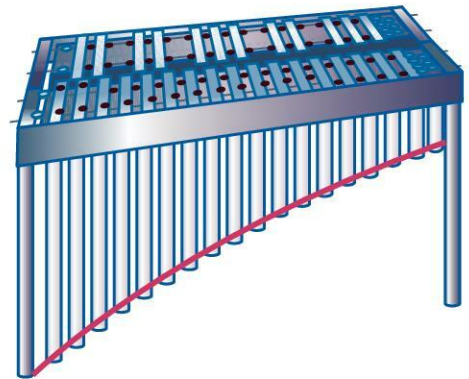
- Wat is een toonladder? En hoe zorg je ervoor dat een flessenorgel de tonen van zo'n toonladder voortbrengt?



- 1 In het plaatje van de xylofoon is een grafiek getekend. De vorm van de grafiek lijkt op de grafiek van een exponentiële functie. Ook bij het pijporgel op de foto hierboven zie je het exponentiële verband in de vorm van het instrument terug. Verzamel afbeeldingen van een aantal muziekinstrumenten. Geef aan hoe je in de vorm van het instrument het exponentiële verband ziet.

Probleem verkennen

Om een flessenorgel te maken, moet je iets afweten van geluidsgolven en muziek. Je zult ontdekken dat muziek alles te maken heeft met exponentiële verbanden.



- 2** Als je een snaar laat trillen, dan produceert deze een toon. De hoogte van die toon hangt af van de lengte van de snaar. Op de gitaar zijn de zogeheten fretjes aangegeven. De plaats waar de snaren vast zitten aan de klankkast heet de kam. Een gitarist drukt bij het spelen de snaren bij de fretjes in. Hierdoor verandert hij de snaarlengte en daarmee de hoogte van de toon.

- Meet bij een gitaar van elk fretje de afstand d tot de kam. Neem d in millimeters nauwkeurig.
- Voer de gevonden resultaten in op je rekenmachine of in een grafiekenprogramma. Zet het fretnummer n langs de horizontale en de gemeten afstand d langs de verticale as. Teken een grafiek.
- De getekende grafiek is de grafiek van een exponentieel verband. Bereken de groeifactor.
- Geef een formule waarbij je d uitdrukt in n .

Bij instrumenten als een piano of een gitaar laat je snaren trillen. Deze trillende snaren brengen de lucht in trilling. Deze trillingen ervaar je als geluidstonen. De hoogte van een geluidstoon hangt af van de frequentie, het aantal trillingen van de lucht per seconde. De eenheid hiervoor is Hertz (Hz). Hoe groter de frequentie is, des te hoger is de toon.

- 3** De frequentie van de trilling van een snaar is omgekeerd evenredig met de lengte van de snaar. De frequentie verdubbelt als de snaarlengte wordt gehalveerd. Bij welk fretje moet je een gitaarsnaar indrukken om de lengte te halveren?



- 4 Als je bij een gitaar de tweede snaar aanslaat, hoor je de toon die a genoemd wordt. De frequentie van deze toon is 440 Hz. Als je de snaar bij het eerste fretje indrukt, dan krijg je een aïs. Hiernaast kun je voor deze snaar zien welke toon bij elk fretje hoort.

- Welke toon hoort bij een frequentie van 880 Hz?
- Als je de *a*-snaar bij het derde fretje indrukt, krijg je een *c*. Bij welk fretje moet je deze snaar indrukken zodat je weer een *c* krijgt?

- 5 a Neem aan dat de verhouding tussen de frequenties van twee opeenvolgende toonhoogten constant is.

$$\text{Dus: } \frac{\text{frequentie } a_{\text{is}}}{\text{frequentie } a} = \frac{\text{frequentie } b}{\text{frequentie } a_{\text{is}}} \approx g$$

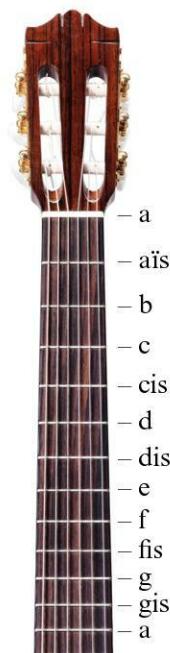
Leg uit dat $g = 2^{\frac{1}{12}}$.

- Welk verband is er tussen g en de groeifactor uit opdracht 2c?
- De frequentie van een *a* is 440 Hz. Bereken drie frequenties van drie tonen *c*.

- 6 Een toonladder bestaat uit een serie van acht tonen. In de toonladder die begint met een *c* zitten de volgende acht tonen: *c d e f g a b* en daarna weer een *c*. Het verschil tussen de eerste en de laatste toon van een toonladder noem je een octaaf.

Het verschil tussen twee opeenvolgende tonen is een hele of een halve toonafstand. Op het klavier kun je zien dat er tussen bijvoorbeeld *e* en *f*, *f* en *gis* en *b* en *c* een halve toonafstand zit. Tussen *c* en *d* zit een hele toonafstand.

- Geef van elk tweetal opeenvolgende tonen van deze toonladder aan of het verschil een hele of een halve toonafstand is.
- Het patroon dat je bij opdracht a hebt gezien, vind je bij elke toonladder. Schrijf de acht noten op die horen bij de toonladder die met een *g* begint.



Plan maken en plan uitvoeren

Als je een fles voor een deel met water vult en er tegen tikt, gaat de lucht boven het water trillen en hoor je een geluidston. De hoogte van die toon hangt af van de hoeveelheid water in de fles.

Een flessenorgel moet een toonladder voortbrengen, dus moeten de verhoudingen tussen de acht verschillende luchthoogten kloppen.

Met acht flessen kun je een redelijk klinkende melodie spelen. Door de flessen op te hangen, klinken ze mooier. Je kunt ook tonen voortbrengen door te blazen op de flessen.



- 7 a** De afbeelding toont een zogenaamd flessenorgel. Neem twee lege flessen en vul ze met water. Zorg ervoor dat in de ene fles de hoogte van de luchtkolom twee keer zo groot is als in de andere. Door op de flessen te tikken of op de fles te blazen kun je tonen laten klinken, die precies een octaaf verschillen.
- b** Het verband tussen de toonhoogte en de hoogte van de luchtkolom is ook exponentieel met als groeifactor $2^{\frac{1}{12}}$. Ga uit van de twee tonen die de flessen van opdracht a voortbrengen. Die tonen kun je opvatten als de eerste en de laatste toon van een toonladder. Bereken de waterhoogtes die horen bij de overige tonen van deze toonladder.
- c** Neem nog zes flessen en vul die tot de hoogtes die je bij b hebt berekend. Je hebt nu een flessenorgel waarop je de noten van een toonladder kunt spelen. Doordat de flessen iets van vorm kunnen verschillen, kan het zijn dat de toonladder niet helemaal zuiver klinkt. Je kunt de toon bijstellen door de waterhoogtes iets te veranderen.



- 8** Een melodie is weergegeven in het schrift. De toonladder die bij deze melodie hoort begint met een c. Dan komt de vijfde toon, de g, dan de zesde toon enzovoort. Nummer de flessen van opdracht 7c van 1 tot en met 8. Speel de melodie op je flessenorgel.



Suggesties voor vervolg

Je kunt het flessenorgel compleet maken door nog vijf flessen te gebruiken om de ontbrekende halve tonen te laten klinken. Je kunt ze, ter onderscheid, iets hoger hangen. Ook kun je eventueel naar links en naar rechts uitbreiden. Het te spelen repertoire zal hierdoor toenemen. Je kunt ook onderzoeken wat het effect is als je de flessen afsluit.

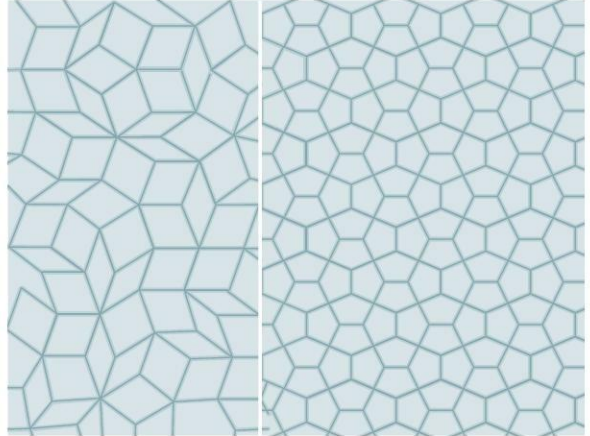
Benodigheden	Geen bijzondere
Opbouw	1 Probleemstelling 2 Probleem verkennen 3 Plan maken 4 Plan uitvoeren 5 Conclusie

Probleemstelling

Je kunt een vloer met rechthoekige tegels betegelen zonder dat er tussenruimtes overblijven. Met ronde tegels lukt dat niet.

Een betegeling van een vlak zonder tussen ruimtes heet een *vlakvulling*.

In het zogenaamde tegelpatroon van Cairo, zie rechts, vormen de vijfhoekige tegels tegelijkertijd een patroon van staande en liggende zeshoeken. Er zijn ook vlakvullingen die bestaan uit herhalingen van twee verschillende basisfiguren. Vrijwel altijd zijn deze basisfiguren regelmatig. Een uitzondering vormt het patroon van Penrose (zie links), dat in 1996 de kranten gehaald heeft. Je kunt je afvragen aan welke eigenschappen een basisfiguur moet voldoen om er een vlakvulling mee te kunnen maken. Dat is de onderzoeksvraag.



Probleem verkennen

De vorm van de basisfiguur speelt natuurlijk een rol. Maar welke aspecten zijn belangrijk?

De zijden moeten 'passen'.

De hoeken moeten 'passen'.

Wat betekent dat in een concreet geval?

Zoek het eerst uit voor regelmatige basisfiguren.

Wiskundige woest over wc-papier

Sir Roger Penrose, een van de grondleggers van de theorie over zwarte gaten, hoogleraar in de wiskunde te Oxford en auteur van spraakmakende boeken over het menselijk bewustzijn, is boos op Kleenex. De fabrikant van tissues en andere huishoudelijke papierwaren bedrukt een merk toiletpapier met een patroon waarop de wiskundige de rechten meent te hebben. Mevrouw Penrose ontdekte de misstand in haar plaatselijke supermarkt.

Bron: de Volkskrant 14/12/96

- 1
 - a Teken op ruitjespapier minimaal vijf verschillende patronen voor vlakvullingen die je met rechthoekige tegels van 3 bij 6 hokjes kunt maken.
 - b Waarom zijn er met tegels van 3 bij 5 hokjes minder patronen mogelijk?
- 2 Je kunt vlakvullingen maken met gelijkzijdige driehoeken en met vierkanten: in elk hoekpunt passen precies zes driehoeken of vier vierkanten bij elkaar. Met andere regelmatige veelhoeken lukt dat niet altijd.
 - a Onderzoek met welke andere regelmatige veelhoeken een vlakvulling wel mogelijk is.
 - b De basisfiguur van het patroon van Cairo rechtsboven op de vorige bladzijde is geen regelmatige vijfhoek, want twee van de hoeken zijn 90° . Hoe groot zijn de andere drie hoeken?

Een regelmatige veelhoek heeft gelijke hoeken en gelijke zijden.

Plan maken

Of een regelmatige veelhoek geschikt is als basisfiguur voor een vlakvulling, hangt af van de hoeken van de veelhoek. Bij onregelmatige veelhoeken moet je niet alleen op de grootte van de hoeken letten, maar ook op de lengte van de zijden.

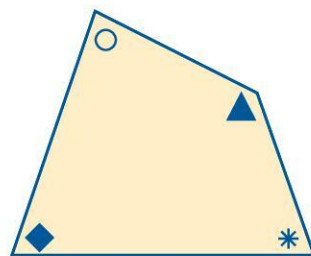
Let bij het maken van een plan op de volgende zaken:

- Ga je uit van regelmatige of onregelmatige basisfiguren?
- Wat voor aanpak kies je? Een 'theoretische' redenering of een praktische aanpak?
- Heb je extra materialen nodig?

Plan uitvoeren

Maak de nodige berekeningen en/of tekeningen.

- 3
 - a Onderzoek of je met een willekeurige driehoek als basisfiguur een vlak kunt vullen.
 - b Onderzoek of de vierhoek hiernaast geschikt is als basisfiguur voor een vlakvulling.
 - c Is *elke* vierhoek geschikt als basisfiguur voor een vlakvulling? Geef óf een 'waterdichte' redenering óf een tegenvoorbeeld.



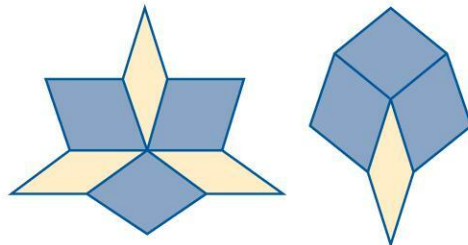
Conclusie

- 4
 - a Van welke figuren weet je nu dat ze als basisfiguur voor een vlakvulling gebruikt kunnen worden?
 - b Op welke aspecten moet je letten als je wilt beoordelen of een figuur kan dienen als basisfiguur voor een vlakvulling?

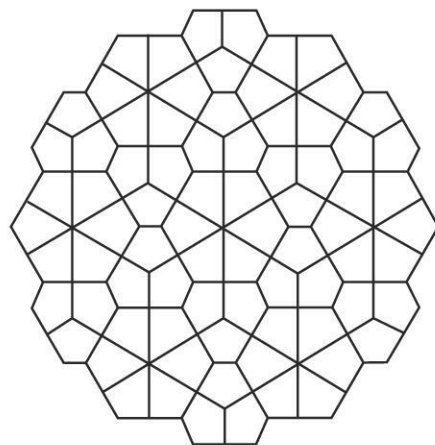
Suggesties voor vervolg

Hieronder en op de volgende bladzijde staan enkele onderzoeksoopdrachten over vlakvullingen en ruimtevullingen. Bij deze opdrachten over vlakvullingen kun je met redeneren en berekenen een heel eind komen.

- 5** Bij de twee figuren zijn dezelfde basisfiguren gebruikt, een smalle en een brede ruit.
- Alle zijden van deze ruiten zijn even lang.
- Bereken van elke ruit hoe groot de hoeken zijn.
 - Zoek uit of het mogelijk is een vlakvulling te maken
 - met alleen de smalle ruiten.
 - met alleen de brede ruiten.
 - met als basisfiguur een ster die opgebouwd is uit smalle en brede ruiten.
 - Zoek uit welke samenhang bestaat tussen deze ruiten en het patroon van Penrose op bladzijde 256.



- 6** Deze opdracht gaat over vlakvullingen waarbij meerdere basisfiguren gebruikt worden. Deze basisfiguren kunnen verschillen in vorm of in grootte.
- Je kunt zo'n vlakvulling maken met gelijkzijdige driehoeken en vierkanten. Geef hiervoor een duidelijke redenering en teken een gedeelte van zo'n patroon. Er zijn meer mogelijkheden!
 - Is het mogelijk met regelmatige driehoeken, vierhoeken en zeshoeken een vlakvulling te maken? Teken een gedeelte van het patroon of geef een redenering dat het niet kan.
 - In de islamitische kunst worden vaak patronen gebruikt die je ook kunt opvatten als vlakverdelingen. Vaak kun je zo'n patroon op verschillende manieren interpreteren. Het patroon hiernaast heeft als basisfiguren een vlieger en een vijfhoek.
- De vijfhoek is dezelfde als bij het patroon van Cairo op bladzijde 256 rechtsboven.
- Je kunt echter ook ruiten en zeshoeken herkennen.
- Breid de figuur uit met een extra strook.
- Bedenk zelf enkele patronen voor vlakvullingen. De basisfiguren hoeven geen regelmatige veelhoeken te zijn.



Onderzoeken over ruimtevullingen

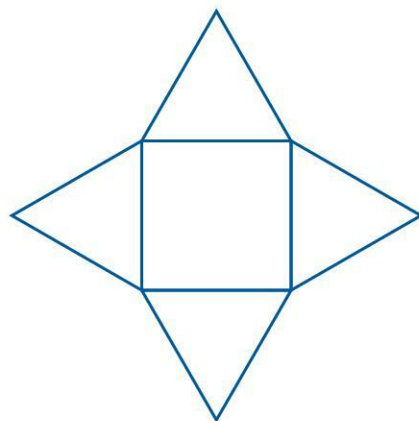
Bij de volgende onderzoeken gaat het steeds om de vraag of de ruimte met een bepaalde basisvorm gevuld kan worden. Je kunt het antwoord met behulp van een redenering vinden. Je kunt ook bouwplaten van de basisvorm maken en door echt stapelen een antwoord vinden.

- 7** Dit is de uitslag van een regelmatige piramide. Het grondvlak is een vierkant met zijde 4, de driehoekige zijvlakken hebben hoogte $\sqrt{8}$.

- a Bereken de hoogte en de inhoud van deze piramide.
- b Is het mogelijk met zulke piramiden een ruimtevulling te maken?

Je kunt een antwoord op deze vraag vinden door:

- van de uitslag bouwplaten te maken en te gaan stapelen, of
- een redenering te bedenken (hint: met kubussen is een ruimtevulling zeker mogelijk).



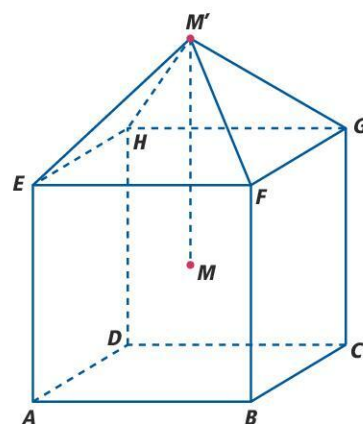
- 8** Door de middens van de zijvlakken van een kubus met elkaar te verbinden, krijg je een regelmatig achthoek. Als je met de kubussen een ruimtevulling maakt, dan zit er tussen deze 'ingebouwde' achthoeken nog veel ruimte.

- a Welk deel van de ruimte wordt door de 'ingebouwde' achthoeken gevuld?
- b Laat nu de kubussen weg. Kun je de achthoeken zo tegen elkaar aan plaatsen dat de ruimte volledig gevuld wordt?

- 9** Een ruitentwaalfvlak kun je op de volgende manier maken. Spiegel het middelpunt van een kubus in elk van de zes grensvlakken. Verbind elk beeldpunt met de hoekpunten van het desbetreffende grensvlak.

In de figuur is dat voor één beeldpunt al gedaan.

- a Teken uitgaande van een kubus een ruitentwaalfvlak.
- b Je zou kunnen denken dat deze vorm $6 \cdot 4 = 24$ driehoekige zijvlakken heeft. Bewijs dat steeds twee van deze driehoeken een ruit vormen.
- c Teken een uitslag van een ruitentwaalfvlak.
- d Onderzoek of met ruitentwaalfvlakken de ruimte volledig gevuld kan worden.



- A** afnemend dalend 184
afnemend stijgend 184
amplitude 14
- B** beeldgrafiek 123
bereik 120
booglengte 11
- C** cosinusfunctie 18
cosinusregel 97
- D** dalende functie 178
differentiëren 164
domein 120
- E** eenheidscirkel 11
evenwichtsstand 14
extreme waarden 178
- F** familie van functies 138
- G** gebroken lineaire functie 130
gelijkvormig 88
gelijkwaardig 135
grafiekenbundel 138
- H** halveringstijd 66
hellinggrafiek 182
herleiden 134
horizontale asymptoot 130
hyperbool 130
- I** inverse bewerkingen 134
- K** kettingregel 171
- L** logaritme 44
- M** machtsfuncties differentiëren 167
maximum 178
middelloodlijn 101
minimum 178
- P** parameter 138
periode 14
- R** raaklijn aan een grafiek 175
radiaal 11
rekenregels voor logaritmen 57
- S** samengestelde functie 143
schakels 143
sinusfunctie 14
sinusoïde 26
sinusregel 93
spiegeling in de x -as 126
spiegeling in de y -as 128
stijgende functie 178
substitueren 134
- T** toenemend dalend 184
toenemend stijgend 184
transformatie 126
translatie 123
- V** verdubbelingstijd 66
vermenigvuldigen t.o.v. de x -as 126
vermenigvuldigen t.o.v. de y -as 128
verticale asymptoot 130
- W** wortelfuncties differentiëren 167

Ontwerp omslag G2K, Groningen/Amsterdam

Fotografie omslag Getty Images

Ontwerp binnenwerk Ebel Kuipers, Sappemeer

Illustraties Peter Fitzverploegh, Utrecht

Technisch tekenwerk Integra Software Services, India

Beeldresearch Daliz, Den Haag

Fotoverantwoording

Koen Suyk/ ANP Photo, Den Haag: p. 6-7

Tony Baggett/ Shutterstock.com: p. 10

Shutterstock, New York: p. 14, 26, 39, 42, 60, 61 67, 68, 75,
130, 136, 142, 166, 168, 193, 205, 206

Museum Joure, Joure: p. 18

iStockphoto/ Getty Images, Amsterdam: p. 31, 78-79, 196-197,

E+/ Getty Images, Amsterdam: p. 40-41

Giovanni Love/ Shutterstock.com: p. 44

Archeo3D, Amersfoort & RAAP Archeologie, Leiden: p. 64

Hans Engbers/ Nationale Beeldbank, Den Haag: p. 69

hurricanehank/ Shutterstock.com: p. 84-85

Wim Doekes, Hoorn: p. 88

National Museum of Mathematics (MoMath), New York: p. 115

Westphalia/ Getty Images, Amsterdam: p. 118-119, 156-157, 196-197

thelefty/ Shutterstock.com: p. 146

Darren Brode/ Shutterstock.com: p. 153

Irene Lorenz/ EyeEm/ Getty Images, Amsterdam: p. 162-163

Kaipungyai/ Shutterstock.com: p. 174

Intex Internationaal, Roosendaal: p. 186

Alamy/ Image Select, Wassenaar: p. 196

Suriyapong Thongsawang/ Getty Images, Amsterdam: p. 202-203

Wim Verburg, www.orgelsite.nl: p. 203, 204

Pim Rush fotografie, Leiden: p. 207

David Johnson/ Dreamstime.com: p. 212- 213



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.

Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.

Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.

Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.



www.modernewiskunde.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-89229-6



9 789001 892296