

MODERNE WISKUNDE

B



 Noordhoff

$$\sin_1(x) = \cos(x - \tfrac{1}{2}\pi)$$

12e editie

Moderne Wiskunde

Uitwerkingen bij havo B deel 2

Ontwerp omslag G2K Designers, Groningen/Amsterdam
Ontwerp binnenwerk Ebel Kuipers, Sappemeer
Technisch tekenwerk Integra Software services Pvt. Ltd., India

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB
Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleen.

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 20

© 2020 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-89264-7

12e editie

Moderne Wiskunde

Uitwerkingen bij havo B deel 2

Taco Boot
Wim Doekes
Arjan Eikelboom
Ron Sinkeldam
Carolijn Tacken

- H7 Periodieke functies 6
- H8 Logaritmische functies 23

Vaardigheden 4 57

- H9 Afstanden en hoeken 64
- H10 Functies bewerken 94

Vaardigheden 5 122

- H11 Differentiëren 129

Vaardigheden 6 162

Meer oefenen 166
Oefenproefwerken 182

7 Periodieke functies

Voorkennis

$$\begin{aligned} \text{V1} \quad AD &= \sqrt{6^2 - (\sqrt{20})^2} = \sqrt{36 - 20} = \sqrt{16} = 4 \\ BC &= \sqrt{(\sqrt{20})^2 + 7^2} = \sqrt{20 + 49} = \sqrt{69} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{V2} \quad \cos \angle Q &= \frac{8}{9} \text{ dus } \angle Q = \cos^{-1}\left(\frac{8}{9}\right) \approx 27^\circ \\ PR &= \sqrt{9^2 - 8^2} = \sqrt{81 - 64} = \sqrt{17} \\ \angle M &= 180^\circ - 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ \\ \sin(65^\circ) &= \frac{MN}{15} \text{ dus } MN = 15 \cdot \sin(65^\circ) \approx 13,6 \\ \cos(65^\circ) &= \frac{SN}{15} \text{ dus } SN = 15 \cdot \cos(65^\circ) \approx 6,3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{V3 a} \quad &\text{De omtrek van deze cirkel is } 2\pi \cdot 1 = 2\pi. \\ \text{b} \quad &\text{De lengte van boog } AB = \frac{225}{360} \cdot 2\pi = 1\frac{1}{4}\pi. \\ &\text{De lengte van boog } CD = \frac{60}{360} \cdot 2\pi = \frac{1}{3}\pi. \\ \text{c} \quad \alpha &= \frac{\frac{3}{4}\pi}{2\pi} \cdot 360 = 135^\circ \\ \beta &= \frac{4}{2\pi} \cdot 360 \approx 229^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{V4 a} \quad &\text{De grafiek herhaalt zichzelf niet.} \\ \text{b} \quad &\text{Grafiek 1: evenwichtsstand is } y = \frac{4 + -2}{2} = 1, \text{ amplitude is } \frac{4 - -2}{2} = 3. \\ &\text{Grafiek 2: evenwichtsstand is } y = \frac{1 + -4}{2} = -1\frac{1}{2}, \text{ amplitude is } \frac{1 - -4}{2} = 2\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{V5 a} \quad &\text{Na } \frac{1}{4} \text{ minuut dus na 15 seconden.} \\ \text{b} \quad &\text{Een halve draai verder, dus na } \frac{1}{2} \text{ minuut ofwel 30 seconden later weer.} \\ \text{c} \quad &20 \text{ seconden is } \frac{1}{3} \text{ minuut, dus punt } A \text{ is dan gedraaid over } \frac{1}{3} \times 360 = 120^\circ. \\ \text{d} \quad &\text{De afgelegde afstand is gelijk aan de omtrek, dus } \pi \times 40 \approx 125,7 \text{ meter.} \end{aligned}$$

7.1 Radialen

intro In één minuut draait het reuzenrad over $360 : 30 = 12^\circ$.
Het hoogste één derde deel van de rondgang wordt bereikt tussen 120° en 240° draaien vanaf het laagste punt, dus 30° voorbij de hoogte van de as.
De hoogte is dan minimaal $67,5 + 67,5 \cdot \sin(30^\circ) = 101,25$ meter.

- 1 a** De omtrek van het wiel is $2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi \approx 6,28$ meter.
- b** De snelheid is 1 meter per seconde, dus één omwenteling duurt dan $2\pi \approx 6,28$ seconden.
- c** De stip P is dan over een halve cirkel gedraaid en bevindt zich links op gelijke hoogte met de as van het wiel.
- d** Het hoogste punt is na een kwart rondje dus na $\frac{1}{4} \cdot 2\pi \approx 1,57$ seconden.

- 2 a** Als $x = \pi$ dan heeft P een halve cirkel afgelegd, dus $\alpha = 180^\circ$.
 En als $x = 2\pi$ dan heeft P een hele cirkel afgelegd, dus $\alpha = 360^\circ$.
b Als $x = \pi$, dan is $\alpha = 180^\circ$ en $\frac{1}{4}\pi$ is $\frac{1}{4}$ deel daarvan, dus $\frac{1}{4} \cdot 180^\circ = 45^\circ$.
c $\alpha = \frac{5}{12} \cdot 180^\circ = 75^\circ$
d $\alpha = \frac{1}{\pi} \cdot 180^\circ = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57,30^\circ$

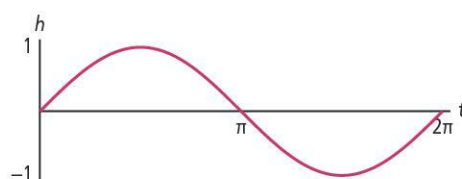
3

aantal graden	0	30	45	60	90	180
aantal radialen	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	π

4

aantal graden	6	15	57	60	115	107	172
aantal radialen	0,1	0,26	1	1,05	2	1,87	3

- 5 a** $t = \pi$ seconden, $t = 2\pi$ seconden
b $t = 1\frac{1}{2}\pi$ seconden
c Zie de grafiek hiernaast.
 De periode is 2π seconden.



- 6 a** $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ rad of $\alpha = 30^\circ$
b $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{h}{1} = \frac{y_P}{1} = y_P$, dus $y_P = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$
c $y_P = \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) \approx 0,87$

- 7 a** De hoogte van de stip bij $x = -\frac{1}{6}\pi$ is $-\frac{1}{2}$.
b $x = \frac{2}{3}\pi$ correspondeert met een draaiing linksom over 120° .
 $x = -1\frac{1}{3}\pi$ correspondeert met een draaiing rechtsom over 240° .
 In beide gevallen kom je in hetzelfde punt P op de cirkel uit, dus daarom is $\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)$ gelijk aan $\sin\left(-1\frac{1}{3}\pi\right)$.

- 04 a** 360° ofwel 2π radialen.
b π radialen.
c Bij de bovenste verhoudingstabel : 18 en bij de onderste : 2π

d

hoek in graden	180°	10°	75°	240°
hoek in radialen	π	0,17	1,31	4,19

hoek in graden	180°	57°	229°	344°
hoek in radialen	π	1	4	6

- 07 a** $-\frac{1}{6}\pi$
b De hoogte van de stip in Q is $-\frac{1}{6}\pi$ dus $\sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$.
c $2\pi - \frac{1}{6}\pi = 1\frac{5}{6}\pi$
d $\sin(\alpha) = \sin\left(1\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$
e Een draaiing van $1\frac{5}{6}\pi$ in negatieve richting komt overeen met een draaiing van $\frac{1}{6}\pi$ in positieve richting. In beide gevallen kom je in hetzelfde punt P op de cirkel uit, dus $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(-1\frac{5}{6}\pi\right)$.

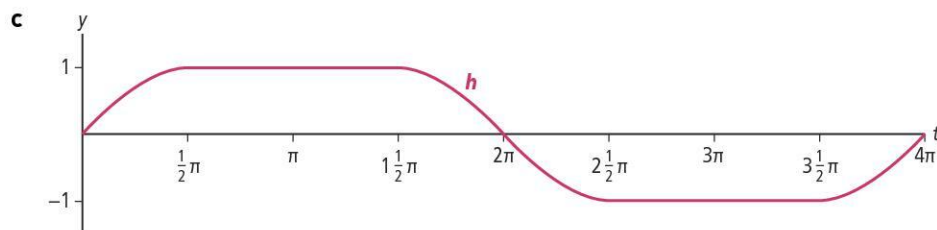
7 Periodieke functies

- f Een draaiing van $\frac{3}{4}\pi$ in positieve richting komt overeen met een draaiing van $1\frac{1}{4}\pi$ in negatieve richting, dus $\sin(\frac{3}{4}\pi) = \sin(-1\frac{1}{4}\pi)$.

U1 a $x_S = \frac{1}{2}\pi + 1$, dus $S(\frac{1}{2}\pi + 1, 0)$

- b 1 ronde duurt $2\pi + 2\pi = 4\pi$ seconden.

In één uur doorloopt het punt deze baan $\frac{3600}{4\pi} \approx 286$ keer.



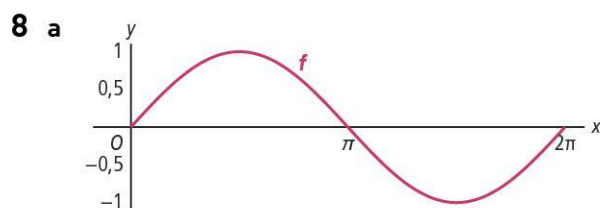
7.2 Sinusfunctie

intro De hoek van de grote wijzer met de horizontale lijn door het midden is dan

30° ofwel $\frac{1}{6}\pi$ rad. De afstand is $\sin(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$ meter.

Om vijf voor zes is deze hoek 60° ofwel $\frac{1}{3}\pi$ rad. De afstand is dan

$\sin(\frac{1}{3}\pi) = 0,866\dots$ meter, dus ongeveer 87 cm.



- b De toppen zijn $(\frac{1}{2}\pi, 1)$ en $(\frac{3}{2}\pi, -1)$.

- c Het punt van symmetrie is $(\pi, 0)$.

- d Op het interval $[0, 3\pi]$ is de grafiek symmetrisch in de lijn $x = \frac{1}{2}\pi$.

- e De periode van f is 2π .

- f Bij $x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = \frac{3}{2}\pi$ heeft de grafiek van f een top. De grafiek van f (met domein $\mathbb{R}$) is symmetrisch in elke verticale lijn door één van de toppen.

- 9 a Het domein is $\mathbb{R}$.

Het bereik is $[-1, 1]$.

- b $x = 2\frac{1}{2}\pi$ en $x = 101\frac{1}{2}\pi$, want dat zijn verticale lijnen door de toppen.

- c $(3\pi, 0)$, $(34\pi, 0)$ en $(-53\pi, 0)$, want dat zijn snijpunten van de grafiek met de x -as.

- d In het interval $[0, 1000\pi]$ passen precies $1000\pi : 2\pi = 500$ perioden en in het interval $[0, 1000]$ passen $1000 : 2\pi \approx 159$ perioden.

- e $f(\frac{1}{2}\pi) = -1$

$$f(5\pi) = f(\pi) = 0$$

$$f(-2\pi) = 0$$

$$f(8\frac{1}{2}\pi) = f(\frac{1}{2}\pi) = 1$$

$$f(-6\frac{1}{2}\pi) = f(-\frac{1}{2}\pi) = -1$$

$$f(18\pi) = f(\pi) = 0$$

10 a De stelling van Pythagoras in driehoek ACD geeft $CD = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

b $\sin(60^\circ) = \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

c $\angle ACD = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$, dus $\sin(30^\circ) = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2}$

11 a $\angle R = 180^\circ - \angle Q - \angle P = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

Omdat $\angle R = \angle P$ is $\triangle PQR$ gelijkbenig en daaruit volgt $QR = PQ = 1$.

$PR = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

b $\sin(45^\circ) = \frac{QR}{PR} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

c $\sin(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

12 a $\sin\left(2\frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$

b $\sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

$\sin\left(7\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

13 a $\sin\left(-1\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$

b $\sin\left(1\frac{1}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

c $\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = -\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

d $\sin\left(2\frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

e $\sin(-3\pi) = 0$

f $\sin\left(2\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

010 a Omdat de driehoek gelijkzijdig is, zijn alle hoeken even groot, $180 : 3 = 60^\circ$.

b D is het midden van AB , dus $AD = DB = 1$.

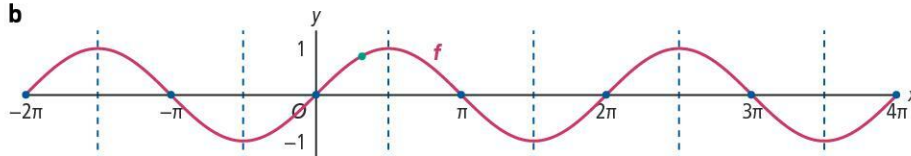
Pythagoras in driehoek ACD geeft $CD^2 = 2^2 - 1^2 = 3$, dus $CD = \sqrt{3}$.

c $\sin(60^\circ) = \sin(\angle A) = \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

d $\angle ACD = \angle BCD = 30^\circ$

e $\sin(30^\circ) = \sin(\angle ACD) = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2}$

013 a b



c Zie de groene stip in de figuur hierboven.

d Behalve $\left(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ zijn dat $\left(-1\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, $\left(2\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ en $\left(2\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.

e $\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = -\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

f $\sin\left(3\frac{1}{4}\pi\right) = \sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

7 Periodieke functies

g $\sin\left(-1\frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

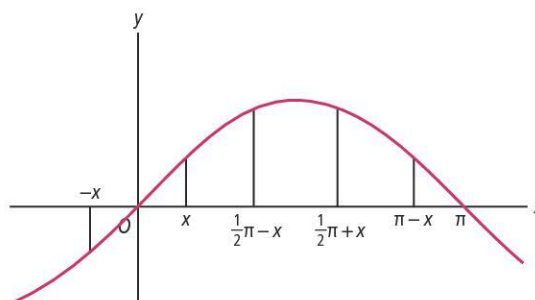
h $\sin\left(3\frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -1$

U2 Zie de grafiek hiernaast.

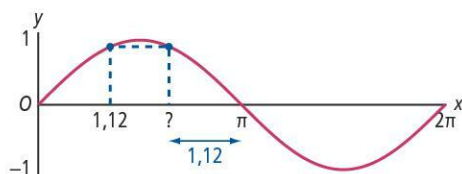
a $\sin\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi + x\right)$ is waar.

b $\sin(x) = \sin(-x)$ is niet waar

c $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ is waar

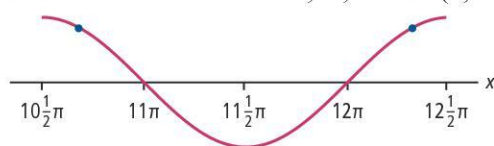


U3 a



Uit de tekening blijkt dat de waarde van de sinus voor $x = 1,12$ gelijk is aan de waarde voor $x = \pi - 1,12$, dus $\sin(1,12) = \sin(\pi - 1,12) = \sin(-1,12 + \pi)$.

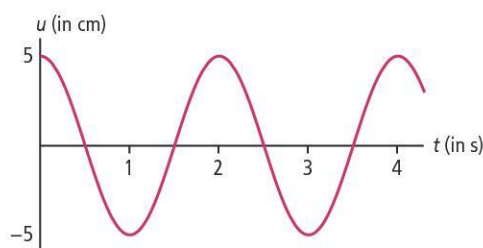
b



Uit de tekening blijkt dat $x = -1,12 + 11\pi$ of $x = 1,12 + 12\pi$

7.3 Cosinusfunctie

intro



14 a $\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$

b $\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

c $\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, dus de coördinaten zijn $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.

15 a De sinusgrafiek heeft een top bij $\left(\frac{1}{2}\pi, 1\right)$, de cosinusgrafiek bij $(0, 1)$, dus ja, Bart heeft gelijk.

b Bijvoorbeeld $1\frac{1}{2}\pi$ naar rechts.

c Bijvoorbeeld $\frac{1}{2}\pi$ of $2\frac{1}{2}\pi$ naar rechts, of $1\frac{1}{2}\pi$ naar links.

16 a $\cos(60^\circ) = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$

b $\cos(30^\circ) = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \text{c } \cos(45^\circ) &= \frac{PQ}{PR} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \text{d } \cos(30^\circ) &= \frac{BC}{AC} \text{ en ook } \sin(60^\circ) = \frac{BC}{AC} \text{ dus } \cos(30^\circ) = \sin(60^\circ). \\ \cos(60^\circ) &= \frac{AB}{AC} \text{ en ook } \sin(30^\circ) = \frac{AB}{AC} \text{ dus } \cos(60^\circ) = \sin(30^\circ). \end{aligned}$$

17 a Dat volgt uit de lijnsymmetrie in de verticale lijn door de top $(0, 1)$, de y -as.

$$\text{b } \cos\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

c Dat kun je afleiden uit de puntsymmetrie in $\left(\frac{1}{2}\pi, 0\right)$.

$$\text{d } \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$$

18 a Die kun je afleiden met de periodiciteit 2π van de grafiek van de cosinus.

$$\cos\left(2\frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{b } \cos\left(8\frac{1}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{c } \cos\left(5\frac{1}{6}\pi\right) = \cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{19 a } \cos\left(-1\frac{5}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{b } \cos\left(1\frac{1}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{c } \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{d } \cos\left(3\frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = 0$$

$$\text{e } \cos\left(-2\frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(-\frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{f } \sin\left(3\frac{2}{3}\pi\right) = \sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

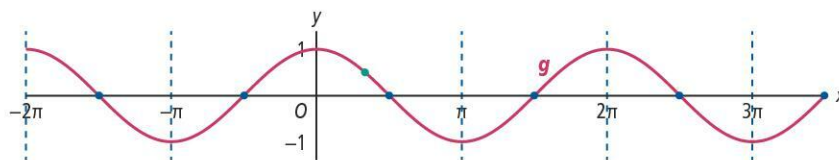
$$\text{g } \cos\left(-1\frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{h } \sin\left(2\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{i } \cos\left(4\frac{1}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{j } \sin\left(-5\frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$$

018 a Zie de gestippelde lijntjes in de figuur hieronder.



b Zie de blauwe punten op de grafiek.

c Zie de groene stip op de grafiek.

$$\text{d } \left(-1\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\right), \left(1\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{2}\right) \text{ en } \left(2\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{e } \left(-1\frac{1}{3}\pi, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{2}\right), \left(1\frac{1}{3}\pi, -\frac{1}{2}\right), \left(2\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{2}\right) \text{ en } \left(3\frac{1}{3}\pi, -\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{f } \cos\left(2\frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(-1\frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$$

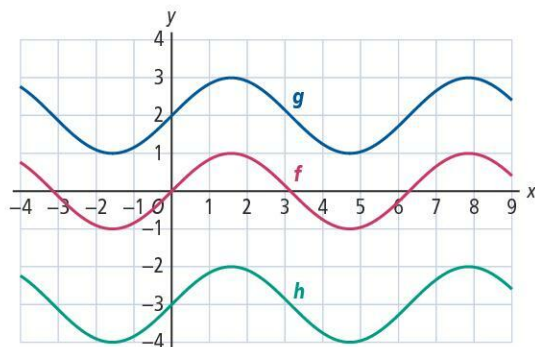
$$\text{g } \cos\left(6\frac{1}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

- U4 a** $DE^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2$ dus $DE^2 = 4$ en $DE = 2$
 $EF^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2$ dus $EF^2 = 4$ en $EF = 2$
 $DF^2 = DE^2 + EF^2$
 $DF^2 = 4 + 4 = 8$ dus $DF = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- b** $CD = AB = 1 + \sqrt{3}$
 $CF = AD - BF = \sqrt{3} - 1$
- c** Omdat $DE = EF$ en $\angle DEF = 90^\circ$ geldt $\angle EDF = \angle DFE = 45^\circ$,
dus $\angle CDF = 90 - 30 - 45 = 15^\circ$
Omdat vierhoek $ABCD$ een rechthoek is, is $\angle DCF = 90^\circ$ en
 $\angle CFD = 180 - 90 - 15 = 75^\circ$.
- d** $\sin(15^\circ) = \frac{CF}{DF} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$
- e** $\cos(15^\circ) = \frac{CD}{DF} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$
 $\sin(75^\circ) = \frac{CD}{DF} = \cos(15^\circ) = \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$
 $\cos(75^\circ) = \frac{CF}{DF} = \sin(15^\circ) = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$

7.4 Transformaties

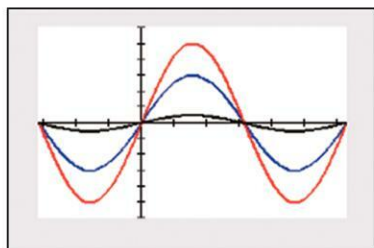
intro De periode bij toonhoogte A is $1\frac{1}{2}$ keer zo groot als bij toonhoogte D, de amplitude en evenwichtsstand zijn voor beide toonhoogtes gelijk.

20 a



- b** De grafiek van g is ten opzichte van de grafiek van f 2 omhoog verschoven en die van h is 3 omlaag verschoven.
c Bijvoorbeeld $k(x) = 4 + \sin(x)$

21 a



Als je a andere waarden geeft dan verandert de amplitude.

- b** De grafiek wordt dan gespiegeld in de x -as, dus de grafiek gaat in $(0, 0)$ dalend door de evenwichtsstand.

- 22** a De evenwichtsstand is $y = 2$, de amplitude is 3 en het bereik is $[-1, 5]$.
 b De evenwichtsstand is $y = -3$, de amplitude is 8 en het bereik is $[-11, 5]$.
 c De evenwichtsstand is $y = 10$, de amplitude is 3 en het bereik is $[7, 13]$.
 d De evenwichtsstand is $y = -17$, de amplitude is 20 en het bereik is $[-37, 3]$.
 e De evenwichtsstand is $y = 0,3$, de amplitude is 0,7 en het bereik is $[-0,4; 1]$.
 f De evenwichtsstand is $y = 24$, de amplitude is 1 en het bereik is $[23, 25]$.

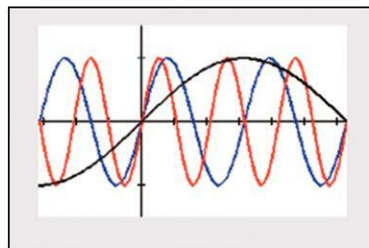
- 23** a Bijvoorbeeld $f(x) = 5 + 6\sin(x)$ of $g(x) = 5 - 6\sin(2x)$ of $h(x) = 5 + 6\cos(3x)$.
 b Een functievoorschrift van de beeldgrafiek hierbij is $g(x) = -\sin(x) - 3$.

- 24** a Er is 2 naar rechts verschoven.
 b Dat punt heeft coördinaten $(-1, 0)$.
 c De top van functie k heeft coördinaten $(-\frac{1}{6}\pi, 1)$.

- 25** a Als je b andere waarden geeft dan verandert de periode.
 b Als $0 < b < 1$ dan wordt de periode groter, de grafiek wordt in horizontale richting uitgerekt. Als $b > 1$ dan wordt de periode kleiner, de grafiek krimpt in horizontale richting.

b	0,5	1	π	2π
periode	4π	2π	2	1

d $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$



- 26** a periode = $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ c periode = $\frac{2\pi}{\pi} = 2$
 b periode = $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$ d periode = $\frac{2\pi}{0,1\pi} = 20$

- 27** a Verschuiving van 3 naar links en 2 omhoog van de functie $h(x) = \cos(x)$.
 De toppen zijn $(\pi - 3, 1)$ en $(2\pi - 3, 3)$.
 b Verschuiving van $\frac{1}{2}\pi$ naar rechts en een vermenigvuldiging met 2 ten opzichte van de x -as van de functie $f(x) = \sin(x)$.
 De toppen zijn $(0, -2)$, $(\pi, 2)$ en $(2\pi, -2)$.
 c Spiegeling in de x -as en een verschuiving van 5π naar links van de functie $h(x) = \cos(x)$.
 De toppen zijn $(0, 1)$, $(\pi, -1)$ en $(2\pi, 1)$.
 d Vermenigvuldiging met 5 ten opzichte van de x -as en met $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de y -as van de functie $f(x) = \sin(x)$, daarna een verschuiving 1 omhoog.
 De toppen zijn $(\frac{1}{4}\pi, 6)$, $(\frac{3}{4}\pi, -4)$, $(1\frac{1}{4}\pi, 6)$ en $(1\frac{3}{4}\pi, -4)$.

- 28** Invullen van periode 5 in $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$ geeft $b = \frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$.

- 022** a De evenwichtsstand is de lijn $y = -1\frac{1}{2}$.
 b De amplitude is $4\frac{1}{2}$.
 c De maximale waarde is $-1\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} = 3$.
 De minimale waarde is $-1\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2} = -6$.
 d Het bereik van f is $[-6, 3]$.

- 027 a** Je kunt dan $x = -\frac{2}{3}\pi$ invullen.
- b** Een verschuiving van $\frac{2}{3}\pi$ naar links.
- c** De grafiek van g ontstaat uit die van h door een vermenigvuldiging met 4 ten opzichte van de x -as.
- d** Verschuiving van 1 naar rechts en 2 omlaag van de functie $h(x) = \cos(x)$.
De toppen zijn $(1, -1)$ en $(\pi + 1, -3)$.
- e** Verschuiving van $\frac{1}{2}\pi$ naar rechts en een vermenigvuldiging met 2 ten opzichte van de x -as van de functie $f(x) = \sin(x)$.
De toppen zijn $(0, -2)$, $(\pi, 2)$ en $(2\pi, -2)$.
- f** Verschuiving van 3π naar links en een vermenigvuldiging met -4 ten opzichte van de x -as van de functie $h(x) = \cos(x)$.
De toppen zijn $(0, 4)$, $(\pi, -4)$ en $(2\pi, 4)$.
- g** Vermenigvuldiging met $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de x -as en met $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de y -as van de functie $f(x) = \sin(x)$.
De toppen zijn $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2})$, $(\frac{3}{4}\pi, -\frac{1}{2})$, $(1\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2})$ en $(1\frac{3}{4}\pi, -\frac{1}{2})$.

- U5 a** Het functievoorschrift bij de beeldgrafiek is $g(x) = -2\cos(x) + 3$.
De toppen zijn $(0, 1)$ en $(\pi, 5)$.
- b** Het functievoorschrift bij de beeldgrafiek is dan $h(x) = -2 \cdot (\cos(x) + 3)$ ofwel $h(x) = -2\cos(x) - 6$.
De toppen zijn $(0, -8)$ en $(\pi, -4)$.

- U6 a** $2\pi f = 1750$ dus $f = \frac{1750}{2\pi} \approx 279$ Hz.
De periode is $\frac{2\pi}{1750} \approx 0,0036$ seconden.
- b** De frequentie wordt verdubbeld, dus $2\pi f = 3500$ en $u = 0,15 \sin(3500t)$.

7.5 Algemene vorm van een sinusoïde

intro De hoogte van het reuzenrad is ongeveer 30 meter, de as zit op een hoogte van iets meer dan 15 meter. Eén rondgang duurt 30 seconden.

- 29 a** De amplitude is 3, de evenwichtsstand is $y = 4$ en de periode is 2π .
- b** A: amplitude 1,5, evenwichtsstand $y = -1$ en de periode is $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$.
B: amplitude 55, evenwichtsstand $y = 100$ en de periode is $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$.
C: amplitude 0,75, evenwichtsstand $y = 0,25$ en de periode is $\frac{2\pi}{0,2\pi} = 10$.
D: amplitude 45, evenwichtsstand $y = 900$ en de periode is $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$.
- 30** f : de amplitude is 4, de periode is $\frac{2\pi}{1\frac{1}{2}\pi} = \frac{4}{3}$ en de evenwichtsstand is $y = 2$.
 g : de amplitude is 3, de periode is $\frac{2\pi}{2} = \pi$ en de evenwichtsstand is $y = 1$.
 h : de amplitude is 8, de periode is $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ en de evenwichtsstand is $y = 6$.

- 31 a** Het maximum is 3, het minimum is -1 .

De evenwichtsstand $d = \frac{-1 + 3}{2} = 1$ en de amplitude $a = 3 - 1 = 2$.

- b** Maximum bij $x = \frac{1}{3}\pi$, minimum bij $x = \frac{4}{3}\pi$. Een halve periode is dus 2π en een hele periode is 4π . Hieruit volgt $b = \frac{2\pi}{\text{periode}} = \frac{2\pi}{4\pi} = 0,5$.

c $(\frac{1}{3}\pi, 1)$

d $f(x) = 1 + 2\sin(0,5(x - \frac{1}{3}\pi))$

- 32** Aflezen bij de linker grafiek:

$d = 1$, $a = 1$, $c = \frac{1}{3}\pi$ (bij een sinus) of $c = \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{4}\pi = \frac{7}{12}\pi$ (bij een cosinus)

en $b = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

Dus $f(x) = 1 + \sin(2(x - \frac{1}{3}\pi))$ of $f(x) = 1 + \cos(2(x - \frac{7}{12}\pi))$.

Aflezen bij de rechter grafiek:

$d = \frac{600 + (-100)}{2} = 250$, $a = 600 - 250 = 350$,

de periode is 52, dus $b = \frac{2\pi}{52} = \frac{1}{26}\pi$ en

$c = 0$ (bij een cosinus) of $c = 0 + \frac{3}{4} \cdot 52 = 39$ (bij een sinus).

Dus $f(x) = 250 + 350\sin(\frac{1}{26}\pi(x - 39))$ of $f(x) = 250 + 350\cos(\frac{1}{26}x)$.

- 33 a** De periode is $\frac{2\pi}{1,25} = 5,026\dots$ dus ongeveer 5 seconden.

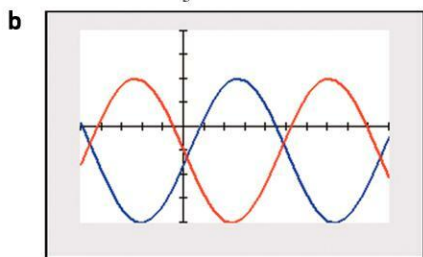
- b** De minimale hoeveelheid lucht is $1,2 + 0,7 \cdot -1 = 0,5$ liter.

- c** De evenwichtsstand wordt $\frac{2,4 + 0,5}{2} = 1,45$ en de amplitude wordt dus $2,4 - 1,45 = 0,95$.

De periode wordt $\frac{5,026\dots}{1,5} = 3,351\dots$, dus $b = \frac{2\pi}{3,351\dots} = 1,875$.

De formule is $h = 1,45 + 0,95\sin(1,875t)$.

- 030 a** $a = -3$, $b = \frac{2}{3}$, $c = 5$ en $d = -1$.



De periode is $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 2\pi \cdot \frac{3}{2} = 3\pi$

Verschuiving van 5 naar rechts.

- c** Parameter a bepaalt de amplitude en d de evenwichtsstand.

- d** De amplitude is 3, de evenwichtsstand is $y = -1$.

- e** functie k : amplitude 3, periode $\frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$, evenwichtsstand $y = 2$

functie m : amplitude 4, periode $\frac{2\pi}{\pi} = 2$, evenwichtsstand $y = 7$

functie n : amplitude 1, periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$, evenwichtsstand $y = -5$

032 a Het maximum is 5 en het minimum is -1 .

b De evenwichtsstand is $y = \frac{5 + (-1)}{2} = 2$.

c De amplitude is $5 - 2 = 3$.

d De afstand tussen twee toppen op de lijn $y = 5$ is π , dus $b = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

e De grafiek gaat in het punt $(\frac{1}{4}\pi, 2)$ stijgend door de evenwichtsstand.
De waarde van c is $\frac{1}{4}\pi$.

f $f(x) = 2 + 3\sin(2(x - \frac{1}{4}\pi))$

U7 a De horizontale afstand tussen de twee toppen is 8 en het gaat hierbij om een maximum en een minimum, dus de halve periode is 8.

De hele periode is dan 16 en $b = \frac{2\pi}{16} = \frac{1}{8}\pi$.

De evenwichtsstand is $y = \frac{18 + 2}{2} = 10$, de amplitude is $18 - 10 = 8$.

$(2, 18)$ is een maximum en de periode is 16, dus $c = 2 - \frac{1}{4} \cdot 16 = -2$.

$f(x) = 10 + 8\sin(\frac{1}{8}\pi(x + 2))$ of $f(x) = 10 + 8\cos(\frac{1}{8}\pi(x - 2))$

b De evenwichtsstand $d = \frac{-11 + (-2)}{2} = -6\frac{1}{2}$ en de amplitude $a = -2 - (-6\frac{1}{2}) = 4\frac{1}{2}$

De afstand van -3π tot 9π zou bijvoorbeeld 0,5 periode of 1,5 periode kunnen zijn. De periode is in die gevallen $2 \times 12\pi = 24\pi$ resp. $12\pi : 1,5 = 8\pi$.

De bijbehorende waarden van b zijn $b = \frac{2\pi}{24\pi} = \frac{1}{12}$ en $b = \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4}$.

De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand in een punt dat $\frac{1}{4}$ periode links van het maximum ligt, dat is bij $9\pi - 6\pi = 3\pi$ resp. $9\pi - 2\pi = 7\pi$.

Dus $f(x) = -6\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2}\sin(\frac{1}{12}(x - 3\pi))$ of $f(x) = -6\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2}\sin(\frac{1}{4}(x - 7\pi))$.

U8 a De periode van f is $\frac{2\pi}{2} = \pi$

Het maximum is 3, dit wordt bereikt als $x = \frac{1}{4}\pi$ en als $x = 1\frac{1}{4}\pi$.

Het minimum is -3 , dit wordt bereikt als $x = \frac{3}{4}\pi$ en als $x = 1\frac{3}{4}\pi$.

b De periode van g is $\frac{2\pi}{\pi} = 2$

Het maximum is $6 + 8 = 14$, dit wordt bereikt als $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$ en $x = 6$.

Het minimum is $6 - 8 = -2$, dit wordt bereikt als $x = 1$, $x = 3$ en $x = 5$.

c De periode van h is 2π , de grafiek is $\frac{1}{2}\pi$ naar links verschoven.

Het maximum is $-2 + 7 = 5$, dit wordt bereikt als $x = 1\frac{1}{2}\pi$.

Het minimum is $-2 - 7 = -9$, dit wordt bereikt als $x = \frac{1}{2}\pi$.

d De periode van k is $\frac{2\pi}{1\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{3}\pi$

Het maximum is $1 + 3 = 4$, dit wordt bereikt als $x = \pi$.

Het minimum is $1 - 3 = -2$, dit wordt bereikt als $x = \frac{1}{3}\pi$ en als $x = 1\frac{2}{3}\pi$.

7.6 Gemengde opdrachten

- 34 a** De amplitude is 5, dus $p = 5$.

$$1\frac{1}{4} \text{ periode is } 3\pi, \text{ dus één periode is } \frac{3\pi}{1\frac{1}{4}} = \frac{12}{5}\pi \text{ en } q = \frac{2\pi}{\frac{12}{5}\pi} = \frac{5}{6}$$

- b** De amplitude is 5, dus $p = 5$.

$$\text{Een kwart periode is } 3\pi, \text{ dus één periode is } 12\pi \text{ en } q = \frac{2\pi}{12\pi} = \frac{1}{6}.$$

- c** De amplitude is 5, maar de grafiek is gespiegeld in de x -as, dus $p = -5$.

$$\text{Driekwart periode is } 3\pi, \text{ dus één periode is } 4\pi \text{ en } q = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}.$$

- d** De periode is $\frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$ en de amplitude is 2.

35 a $\sin\left(8\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b $\cos\left(5\frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$

c $\cos\left(-1\frac{5}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

d $\sin\left(-10\frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -1$

e $\cos(-9\pi) = \cos(\pi) = -1$

f $\sin\left(3\frac{2}{3}\pi\right) = \sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

- 36 a** De evenwichtsstand is $y = \frac{4 + -2}{2} = 1$, dus $d = 1$.

$$\text{De amplitude is } 4 - 1 = 3. \text{ De periode is } 2\pi, \text{ dus } b = \frac{2\pi}{2\pi} = 1.$$

De grafiek is gespiegeld in de evenwichtsstand en niet verschoven, dus $a = -3$ en $c = 0$.

$$\text{Dus } f(x) = 1 - 3\sin(x).$$

- b** f heeft een top bij $x = -\frac{1}{2}\pi$, dus $c = -\frac{1}{2}\pi$.

$$f(x) = 1 + 3\cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$$

- c** $(0, 3)$ is een top als er $\frac{1}{2}\pi$ naar rechts en 1 omlaag verschoven wordt. Dan geldt $f(x) = 3\cos(x)$.

- d** De grafiek van $f(x) = 1 - 3\sin(x)$ met twee ten opzichte van de x -as vermenigvuldigen geeft $g(x) = 2(1 - 3\sin(x))$ ofwel $g(x) = 2 - 6\sin(x)$.

Daarna een verschuiving van $\frac{1}{6}\pi$ naar links geeft $h(x) = 2 - 6\sin\left(x + \frac{1}{6}\pi\right)$.

- 37 a** Invoer: $y_1 = 9,5 - 10,5\cos\left(\frac{1}{6}\pi x\right)$ en $y_2 = 5$

$$\text{Venster: } 0 \leq x \leq 12, -10 \leq y \leq 25$$

Optie: snijpunten

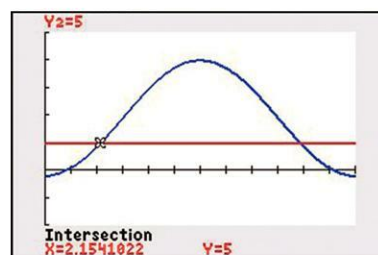
De snijpunten liggen bij $x = 2,15\dots$ en $x = 9,84\dots$

Het groeiseizoen duurt $9,84\dots - 2,15\dots = 7,69\dots$ maanden, oftewel 7 maanden en 21 dagen.

- b** Herhaal opdracht a, nu met $y_2 = 6$.

De snijpunten liggen nu bij $x = 2,35\dots$ en $x = 9,64\dots$

Het groeiseizoen duurt $9,64\dots - 2,35\dots = 7,29\dots$ maanden, dus 0,4 maand korter en dat is ongeveer 12 dagen.



Onderzoeksoopdrachten

38 a Zie de plot hiernaast.

Optie: bereken minimum en maximum.

De toppen zijn $(0,52; 0,75)$, $(2,09; -0,25)$, $(3,67; 0,75)$ en $(5,24; -0,25)$.

b Uit opgave a volgt $c = 0,52$.

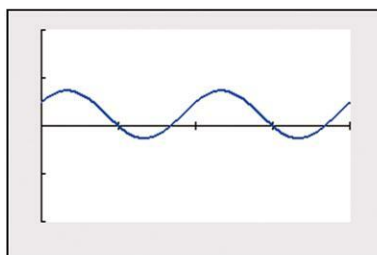
$$d = \frac{0,75 + (-0,25)}{2} = 0,25 \text{ en } a = 0,75 - 0,25 = 0,5.$$

De periode is $3,14 = \pi$ dus $b = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

Dit geeft $f(x) = 0,25 + 0,5\cos(2(x - 0,52))$.

c Nee, de grafiek heeft niet steeds dezelfde vorm.

Voor $a = \frac{1}{2}\pi$ zijn er geen negatieve uitkomsten en als $a = 0$ of $a = \pi$ is $y = 0$ de evenwichtsstand.



39 1 periode duurt $\frac{1}{50} = 0,02$ seconden. Voor de eenheden op de horizontale as moet dus 0,002 seconden gekozen worden.

De amplitude is 2 mm, het verschil tussen het maximum en minimum is dan 4 mm. Voor de eenheden op de verticale as moet dus $\frac{4}{8} = 0,5$ mm gekozen worden.

Samenvatting

S1 a Deze hoeken zijn elk $180 : 3 = 60^\circ$ ofwel $\frac{1}{3}\pi$ radialen.

b In een gelijkbenige rechthoekige driehoek $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$ en $\frac{1}{2}\pi$ radialen.

S2 a Bijvoorbeeld de punten $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ en $(2\pi, 0)$.

b Bijvoorbeeld de lijnen $x = 0$, $x = \pi$ en $x = 2\pi$.

S3 a $\sin\left(1\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

b $\cos\left(-1\frac{5}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

S4

aantal graden	140	300	1,3	143,2
aantal radialen	$\frac{7}{9}\pi$	$1\frac{2}{3}\pi$	0,023	2,5

S5 f : de amplitude is 5, de evenwichtsstand is $y = 3$ en de periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

g : de amplitude is 3, de evenwichtsstand is $y = 10$ en de periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6$.

S6 a De evenwichtsstand $d = \frac{-4+2}{2} = -1$.

De amplitude $a = 2 - (-1) = 3$.

De periode is $2 \cdot 2 = 4$ dus $b = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$.

De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $x = 1$, dus $c = 1$.

Het functievoorschrift van de sinusöide is $f(x) = -1 + 3\sin\left(\frac{1}{2}\pi(x-1)\right)$.

b De periode is 12, dus $b = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi$.

De evenwichtsstand is $y = -2$, dus $d = -2$.

$(5, 4)$ is een top, dus $a = 4 - (-2) = 6$ en $c = 5$ (bij een cosinus).

$$g(x) = -2 + 6\cos\left(\frac{1}{6}\pi(x-5)\right)$$

Test jezelf

T1	α in graden	45	125	29,79	229,18	600	100,27
	α in radialen	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{25}{36}\pi$	0,52	4	$3\frac{1}{3}\pi$	1,75

T2 a $\sin\left(3\frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = -\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

b $\sin\left(-2\frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -1$

c $\cos\left(4\frac{5}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

d $\sin(8\pi) = \sin(0) = 0$

e $\cos\left(2\frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

f $\cos\left(-1\frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$

g $\sin(-3\pi) = \sin(\pi) = 0$

h $\sin\left(-3\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$

T3 a grafiek links:

De evenwichtsstand $d = \frac{1+(-5)}{2} = -2$ en de amplitude $a = 1 - (-2) = 3$.

De periode is 10, dus $b = \frac{2\pi}{10} = \frac{1}{5}\pi$.

De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $x = 6$, dus $c = 6$.

Dit geeft $f(x) = -2 + 3\sin\left(\frac{1}{5}\pi(x-6)\right)$.

grafiek rechts:

De evenwichtsstand $d = \frac{-4+8}{2} = 2$ en de amplitude $a = 8 - 2 = 6$.

Er is een top bij $x = \pi$, dus $c = \pi$ (of stijgend door de evenwichtsstand bij $x = -\pi$, dus $c = -\pi$).

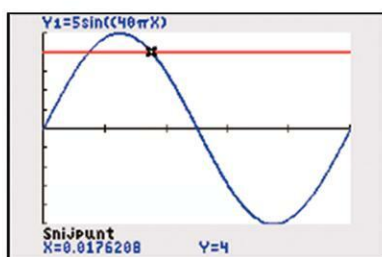
De periode is 8π , dus $b = \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4}$.

Dus $g(x) = 2 + 6\cos\left(\frac{1}{4}(x-\pi)\right)$ of $g(x) = 2 + 6\sin\left(\frac{1}{4}(x+\pi)\right)$.

7 Periodieke functies

- T4 a** Vermenigvuldigen met 2 ten opzichte van de x -as en $\frac{1}{3}\pi$ naar rechts verschuiven.
- b** De grafieken van $f(x) = 2\sin(x - \frac{1}{3}\pi)$ en $g(x) = -2\cos(x)$ hebben dezelfde amplitude, periode en evenwichtsstand. Een top van de grafiek van f is $(\frac{5}{6}\pi, 2)$ en een top van de grafiek van g is $(\pi, 2)$.
Een mogelijk antwoord is: $\frac{1}{6}\pi$ naar rechts.

- T5 a** De periode is $\frac{1}{20}$ seconde en de amplitude is 5 mm.
- b** $b = \frac{2\pi}{\frac{1}{20}} = 40\pi$, dus $u = 5\sin(40\pi t)$.
- c** Invoer: $y_1 = 5\sin(40\pi x)$ en $y_2 = 4$ (of $y_2 = -4$)
Venster: $0 \leq x \leq 0,05$, $-5 \leq y \leq 5$
Optie: snijpunten geeft $x = 0,00737\dots$ en $x = 0,01762\dots$



In één periode is de uitwijking groter dan 4 mm gedurende $2(0,01762\dots - 0,00737\dots) \approx 0,0205$ seconden.

- T6 a** $b = \frac{2\pi}{5\pi} = \frac{2}{5}$
- b** De amplitude is 2, dus $a = 2$.
De grafiek gaat in $(3, -4)$ stijgend door de evenwichtsstand, dus $d = -4$ en $c = 3$.
De periode is 5π , dus $b = \frac{2}{5}$.
Het functievoorschrift is $f(x) = -4 + 2\sin(\frac{2}{5}(x - 3))$.
- T7 a** Vermenigvuldigen met -7 ten opzichte van de x -as, daarna $\frac{1}{6}\pi$ naar links verschuiven.
- b** De grafiek van $h(x) = \cos(x)$ snijdt de x -as in $(\frac{1}{2}\pi, 0)$ en $(1\frac{1}{2}\pi, 0)$, dus de grafiek van f snijdt de x -as in $(\frac{1}{3}\pi, 0)$ en $(1\frac{1}{3}\pi, 0)$.
- c** De evenwichtsstand is -1 en de amplitude is 3, dus het bereik is $[-4, 2]$.
- d** De toppen van de grafiek van $k(x) = \sin(x)$ zijn $(\frac{1}{2}\pi, 1)$, $(1\frac{1}{2}\pi, -1)$ enzovoort. De grafiek van g ontstaat uit de grafiek van $k(x) = \sin(x)$ door vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as met 3, vermenigvuldigen ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{2}$ en daarna $\frac{1}{8}\pi$ naar rechts en 1 omlaag verschuiven.
De coördinaten van de toppen zijn $(\frac{3}{8}\pi, 2)$ en $(\frac{7}{8}\pi, -4)$.

- T8 a** $(\frac{2}{3}\pi, 1)$ substitueren geeft $a \cdot \sin(\frac{2}{3}\pi) = 1$
 $a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 1$, dus $a = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
- b** $b = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi} = 3$

c De periode is π , dus $b = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

Het bereik is $[-1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}]$ dus $d = \frac{-1\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}}{2} = 1$ en $a = 3\frac{1}{2} - 1 = 2\frac{1}{2}$

Een functievoorschrift is $f(x) = 1 + 2\frac{1}{2} \sin(2x)$.

T9 Gemiddeld is op die dag $LW = -77$ en $HW = 51,5$

De evenwichtsstand is $y = \frac{-77 + 51,5}{2} \approx -13$ en de amplitude is $51,5 - (-13) = 64,5$.

De periode is ongeveer 12 uur en 20 minuten, dus $b = \frac{2\pi}{12\frac{1}{3}} \approx 0,51$.

Het tijdstip precies tussen 04 : 10 en 10 : 14 is 07 : 12. Daarbij hoort $t = 7,2$.

Dus $f(t) = -13 + 64,5 \sin(0,51(t - 7,2))$.

Extra oefening

E1	α in graden	20,05	30	77	135	210	1317,80
	α in radialen	0,35	$\frac{1}{6}\pi$	1,34	$\frac{3}{4}\pi$	$1\frac{1}{6}\pi$	23

E2 a De amplitude is 5 en de evenwichtsstand is $y = 3$.

b De periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$ en de amplitude is 2.

c Vermenigvuldigen met 5 ten opzichte van de x -as en dan nog 3 omhoog verschuiven.

d Vermenigvuldigen met -2 ten opzichte van de x -as, vermenigvuldigen met 3 ten opzichte van de y -as en dan nog 4 naar rechts verschuiven.

E3 a De periode van f is 6π en de amplitude is $1\frac{1}{2}$.

De periode van g is π en de amplitude is $2\frac{1}{2}$.

b $f(x) = 1\frac{1}{2} \cos(\frac{1}{3}x)$ en $g(x) = 2\frac{1}{2} \sin(2x)$.

E4 a	x	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$1\frac{1}{4}\pi$	$1\frac{1}{2}\pi$	$1\frac{2}{3}\pi$
	$\sin(x)$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
	$\cos(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$\frac{1}{2}$

b $\sin(17\frac{1}{2}\pi) = \sin(1\frac{1}{2}\pi) = -1$

$\sin(-1\frac{5}{6}\pi) = \sin(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$

$\sin(1\frac{3}{4}\pi) = \sin(-\frac{1}{4}\pi) = -\sin(\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\sin(-1\frac{1}{3}\pi) = \sin(\frac{2}{3}\pi) = \sin(\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

E5 a $b = \frac{2\pi}{24} = \frac{1}{12}\pi$

b De amplitude is 3.

c $\frac{6000}{24} = 250$, dus in het interval $[0, 6000]$ passen 250 periodes.

De grafiek snijdt de x -as twee keer per periode, dus in totaal 500 keer.

d Er is geen horizontale verschuiving, dus $(0, -3)$ is een top. De volgende toppen liggen een halve periode verder en zijn $(12, 3)$ en $(24, -3)$.

E6 a De periode is $\frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$, dus één rondgang duurt een 0,5 minuut = 30 seconden.

b Invullen van $t = 0$ geeft

$$H = 13 + 12\sin(4\pi(0 - 0.125))$$

$$H = 13 + 12\sin\left(-\frac{1}{2}\pi\right)$$

$$H = 13 + 12 \cdot -1$$

$H = 1$, hij stapt in op een hoogte van 1 meter.

c De maximale hoogte is $13 + 12 = 25$ meter.

d 10 seconden is $\frac{1}{6}$ minuut. Invullen van $t = \frac{1}{6}$ geeft $H = 13 + 12\sin\left(4\pi\left(\frac{1}{6} - 0.125\right)\right)$

ofwel $H = 13 + 12\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)$ ofwel $H = 13 + 12 \cdot \frac{1}{2}$ dus $H = 19$.

De hoogte is 19 meter.

e Je moet de waarden van b en c in de formule aanpassen:

De periode is 30, dus $b = \frac{2\pi}{30} = \frac{1}{15}\pi$.

De nieuwe waarde van c wordt $0,125 \times 60 = 7,5$.

De formule wordt $H = 13 + 12\sin\left(\frac{1}{15}\pi(t - 7,5)\right)$.

E7 a De waarde van b is $\frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$. Omdat $(0, 10)$ een hoogste punt is geldt $c = 0$.

Omdat de amplitude 7 is, is de evenwichtsstand $y = 10 - 7 = 3$.

Een functievoorschrift is $f(x) = 3 + 7\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$.

b De evenwichtsstand is $\frac{7 + -5}{2} = 1$ en de amplitude is $7 - 1 = 6$.

Een halve periode is $7 - 2 = 5$, dus de periode is 10 en $b = \frac{2\pi}{10} = \frac{1}{5}\pi$.

Een functievoorschrift is $g(x) = 1 + 6\cos\left(\frac{1}{5}\pi(x - 2)\right)$.

8 Logaritmische functies

Voorkennis

V1 a In 2 jaar neemt de dagwaarde af van 25 000 euro naar 20 250 euro.

De groeifactor per 2 jaar is $\frac{20\,250}{25\,000} = 0,81$.

De groeifactor per jaar is dus $0,81^{\frac{1}{2}} = 0,9$.

Of: de groeifactor is $\frac{14\,762}{16\,403} \approx 0,9$.

b De afname per jaar is $(1 - 0,9) \cdot 100\% = 10\%$.

c $W = 25000 \cdot 0,9^t$ geeft

t in jaren	0	1	2	3	4	5
W in euro's	25 000	22 500	20 250	18 225	16 402,5	14 762,25

De benadering is zeer goed, want de waarden komen overeen met de waarden in de tabel.

d Per 10 jaar is de groeifactor $0,9^{10} \approx 0,3487$.

e De dagwaarde W nadert naar 0.

V2 a De beginhoeveelheid is 37 980 en de groeifactor per week is $100 - 0,5 = 99,5\%$, dus de groeifactor $g = 0,995$.

Het functievoorschrift is $f(t) = 37\,980 \cdot 0,995^t$.

b De hoeveelheid neemt met 25% per dag toe, dus de groeifactor $g = 1,25$.
Voor $t = 2$ is de hoeveelheid 12 500 dus de beginhoeveelheid

$b = \frac{12\,500}{1,25^2} = 8000$. Het functievoorschrift is $f(t) = 8000 \cdot 1,25^t$.

c $g^3 = \frac{37\,014}{134\,780}$ dus $g = \left(\frac{37\,014}{134\,780}\right)^{\frac{1}{3}} = 0,650\dots$

Voor $t = 2$ is de hoeveelheid 134 780 dus $b = \frac{134\,780}{0,650\dots^2} \approx 319\,006$.

Het functievoorschrift is $f(t) = 319\,006 \cdot 0,65^t$

V3 a $5^3 \cdot 5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^7$

d $7^{-3} = \frac{1}{7^3}$

b $5^{3^2} \cdot 5^5 = 5^6 \cdot 5^5 = 5^{11}$

e $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = (3^{-1})^{-2} = 3^{-1 \cdot -2} = 3^2 = 9$

c $2^{-4} \cdot 3^{-4} = 6^{-4} = \frac{1}{6^4}$

f $a^{-3} \cdot a^{-5} \cdot a^{12} = a^{-3+(-5)+12} = a^4$

V4 a $N(t) = 2^{3+t}$

$n(t) = 2^3 \cdot 2^t$

$N(t) = 8 \cdot 2^t$

c $N(t) = 3^{-2+3t}$

$N(t) = 3^{-2} \cdot 3^{3t}$

$N(t) = \frac{1}{9} \cdot (3^3)^t$

$N(t) = \frac{1}{9} \cdot 27^t$

b $N(t) = 15 \cdot 2^{t+4}$

$N(t) = 15 \cdot 2^t \cdot 2^4$

$N(t) = 240 \cdot 2^t$

d $N(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-t}$

$N(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-t}$

$N(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)^t$

$N(t) = \frac{1}{2} \cdot 2^t$

- V5 a** $3^{-t} = 9$
 $3^{-t} = 3^2$
 $-t = 2$
 $t = -2$
- b** $5^{2t-8} = \frac{1}{25}$
 $5^{2t-8} = 5^{-2}$
 $2t - 8 = -2$
 $2t = 6$
 $t = 3$
- c** $4^{3t} = 116$
 Met de rekenmachine:
 Invoer: $y_1 = 4^{3x}$ en $y_2 = 116$
 Venster: $-3 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 120$
 Optie: snijpunt geeft $x = 1,142...$
 De oplossing is $t \approx 1,14$.
- d** $8 \cdot 4^p = 2$
 $4^p = \frac{1}{4}$
 $4^p = 4^{-1}$
 $p = -1$
- e** $5^{2t} \cdot 2^{2t} = 100$
 $10^{2t} = 100$
 $10^{2t} = 10^2$
 $2t = 2$
 $t = 1$
- f** $5^{2t} \cdot 5^{3t} = 1$
 $5^{5t} = 5^0$
 $5t = 0$
 $t = 0$

8.1 Logaritmen

intro $4374 : 6 = 729$ en 729 is een macht van 3 (namelijk $3^6 = 729$).
 $6000 : 6 = 1000$ en 1000 is geen macht van 6 .

- 1 a** 18 is geen macht van 3 .
b $3^{2,6} = 17,398...$
 $3^{2,7} = 19,419...$
 18 ligt tussen $17,398...$ en $19,419...$ dus geldt voor de oplossing $2,6 < x < 2,7$.
c Met je rekenmachine:
 Invoer $y_1 = 3^x$ en $y_2 = 18$
 Venster: $-3 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 20$
 Optie: snijpunt geeft $x = 2,630...$
 De oplossing is $x \approx 2,63$.
- 2 a** Niet exact op te lossen, want 10 is geen macht van 2 .
b Niet exact op te lossen, want 25 is geen macht van 3 .
c $10^x = \frac{1}{10}$
 $10^x = 10^{-1}$
 $x = -1$
d $5^x = \sqrt{5}$
 $5^x = 5^{\frac{1}{2}}$
 $x = \frac{1}{2}$
e $2^x = 256$
 $2^x = 2^8$
 $x = 8$
f Niet exact op te lossen, want $\frac{1}{36}$ is geen macht van 3 .
- 3 a** $3^2 = 9$ en $3^3 = 27$
 $9 < 25 < 27$
 $3^2 < 3^x < 3^3$
 Van $3^x = 25$ ligt de oplossing x dus tussen 2 en 3 .

b $3^2 = 9$ en $3^3 = 27$ dus de oplossing van $3^x = 26$ ligt tussen 2 en 3 maar wel dicht bij 3.

$6^2 = 36$ en $6^3 = 216$ dus de oplossing van $6^x = 38$ ligt ook tussen 2 en 3, maar dicht bij 2.

De oplossing van $3^x = 26$ is dus groter dan die van $6^x = 38$.

4 a $7^x = 4$

$$x = {}^7\log(4)$$

b $7^x = 10$

$$x = {}^7\log(10)$$

c $\left(\frac{1}{7}\right)^x = 13$

$$x = {}^{\frac{1}{7}}\log(13)$$

d $3^{x-2} = 14$

$$x - 2 = {}^3\log(14)$$

$$x = 2 + {}^3\log(14)$$

e $5^{x+1} = 100$

$$x + 1 = {}^5\log(100)$$

$$x = -1 + {}^5\log(100)$$

f $5^{2x+3} = 0,5$

$$2x + 3 = {}^5\log(0,5)$$

$$2x = -3 + {}^5\log(0,5)$$

$$x = -1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^5\log(0,5)$$

5 a ${}^3\log(27) = 3$, want $27 = 3^3$

b ${}^2\log\left(\frac{1}{8}\right) = -3$, want $\frac{1}{8} = 2^{-3}$

c ${}^5\log(5\sqrt{5}) = 1\frac{1}{2}$, want $5\sqrt{5} = 5 \cdot \sqrt{5} = 5^1 \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5^{1+\frac{1}{2}} = 5^{1\frac{1}{2}}$

d ${}^7\log(1) = 0$, want $1 = 7^0$

6 a ${}^2\log(8) = 3$ want $2^3 = 8$

b ${}^7\log(49) = 2$ want $7^2 = 49$

c ${}^3\log\left(\frac{1}{3}\right) = -1$ want $3^{-1} = \frac{1}{3}$

d ${}^{\frac{1}{4}}\log(64) = -3$ want $\frac{1}{4}^{-3} = 64$

e ${}^2\log(2\sqrt{2}) = 1\frac{1}{2}$ want $2^{1\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$

f ${}^{\frac{1}{5}}\log(5\sqrt{5}) = -1\frac{1}{2}$ want
 $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1\frac{1}{2}} = (5^{-1})^{-1\frac{1}{2}} = 5^{1\frac{1}{2}} = 5\sqrt{5}$

7 ${}^5\log(1)$, ${}^5\log(2)$, ${}^5\log(3)$, ..., ${}^5\log(1000)$ hebben allemaal 5 als grondtal.

De uitkomst van de logaritme is een geheel getal als het getal tussen haakjes een macht van 5 is. De machten $5^0 = 1$, $5^1 = 5$, $5^2 = 25$, $5^3 = 125$ en $5^4 = 625$ liggen tussen 0 en 1000, dus de logaritmen ${}^5\log(1)$, ${}^5\log(5)$, ${}^5\log(25)$, ${}^5\log(125)$ en ${}^5\log(625)$ hebben een geheel getal als uitkomst.

8 a ${}^5\log(x) = 3$

$$x = 5^3$$

$$x = 125$$

b ${}^5\log(x) = -1$

$$x = 5^{-1}$$

$$x = \frac{1}{5}$$

d ${}^3\log(x + 10) = 2$

$$x + 10 = 3^2$$

$$x + 10 = 9$$

$$x = -1$$

e ${}^4\log\left(\frac{1}{2}x - 2\right) = 2$

$$\frac{1}{2}x - 2 = 4^2$$

$$\frac{1}{2}x - 2 = 16$$

$$\frac{1}{2}x = 18$$

$$x = 36$$

c ${}^2\log(2x) = 4$

$$2x = 2^4$$

$$2x = 16$$

$$x = 8$$

f ${}^{\frac{1}{2}}\log(4 - x) = -3$

$$4 - x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$$4 - x = 8$$

$$x = -4$$

9 a ${}^5\log(x^2 + 4) = 3$

$$x^2 + 4 = 5^3$$

$$x^2 + 4 = 125$$

$$x^2 = 121$$

$$x = -11 \text{ of } x = 11$$

b ${}^6\log(x^2 - 13) = 2$

$$x^2 - 13 = 6^2$$

$$x^2 - 13 = 36$$

$$x^2 = 49$$

$$x = -7 \text{ of } x = 7$$

c ${}^{16}\log(x^3 - 23) = \frac{1}{2}$

$$x^3 - 23 = 16^{\frac{1}{2}}$$

$$x^3 - 23 = 4$$

$$x^3 = 27$$

$$x = \sqrt[3]{27} = 3$$

10 a $x = 2$ geeft $y = f(2) = 3^2 = 9$ dus $A(2, 9)$.

b $y = 5$ geeft $3^x = 5$ dus $x = {}^3\log(5)$.

$$3^{1\frac{1}{2}} = 5,196... \neq 5 \text{ dus de bewering van Harm is niet juist.}$$

De exacte coördinaten zijn $C({}^3\log(5), 5)$.

c De x -coördinaat is de oplossing van $3^x = 20$. Dat is een logaritme, dus $x = {}^3\log(20)$. De exacte coördinaten zijn dus $B({}^3\log(20), 20)$.

d Stel $P(x, 3^x)$ dan is $Q(x + 2, 3^{x+2})$ en geldt er:

$$3^{x+2} - 3^x = 16$$

$$3^2 \cdot 3^x - 3^x = 16$$

$$9 \cdot 3^x - 3^x = 16$$

$$8 \cdot 3^x = 16$$

$$3^x = 2$$

$$x = {}^3\log(2) \text{ dus } P({}^3\log(2), 2) \text{ en } Q(2 + {}^3\log(2), 18).$$

04 a Uit $2^x = 6$ volgt $x = {}^2\log(6)$.

b Uit $6^{2x+3} = 24$ volgt $2x + 3 = {}^6\log(24)$.

c $2x = -3 + {}^6\log(24)$

$$x = \frac{-3 + {}^6\log(24)}{2}$$

$$x = -1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^6\log(24)$$

08 a Uit ${}^2\log(x) = 3$ volgt $x = 2^3$.

b $x = 2^3$ dus $x = 8$.

c Uit ${}^3\log(x - 2) = 2$ volgt $x - 2 = 3^2$.

d $x - 2 = 3^2$

$$x - 2 = 9$$

$$x = 11$$

e ${}^2\log(x + 3) = 4$

$$x + 3 = 2^4$$

$$x + 3 = 16$$

$$x = 13$$

f ${}^4\log(x - 4) = 2$

$$x - 4 = 4^2$$

$$x - 4 = 16$$

$$x = 20$$

$$\text{g } {}^9\log\left(\frac{1}{3}x + 3\right) = 2$$

$$\frac{1}{3}x + 3 = 9^2$$

$$\frac{1}{3}x + 3 = 81$$

$$\frac{1}{3}x = 78$$

$$x = 234$$

$$\text{i } {}^3\log\left(\frac{1}{3}x - 1\right) = 4$$

$$\frac{1}{3}x - 1 = 3^4$$

$$\frac{1}{3}x - 1 = 81$$

$$\frac{1}{3}x = 82$$

$$x = 246$$

$$\text{h } {}^{\frac{1}{2}}\log(x + 1) = -2$$

$$x + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$x + 1 = 4$$

$$x = 3$$

$$\text{j } {}^{\frac{1}{2}}\log(8 - x) = -1$$

$$8 - x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$8 - x = 2$$

$$x = 6$$

- U1 a** ${}^2\log(16)$ is de groeitijd waarin een hoeveelheid 16 keer zo groot wordt bij een groeifactor van 2 per tijdseenheid.
- b** ${}^2\log(8) = 3$ en ${}^2\log(16) = 4$ dus ${}^2\log(8) + {}^2\log(16) = 3 + 4 = 7$.
 ${}^2\log(8 \cdot 16) = {}^2\log(128) = 7$ dus ${}^2\log(8) + {}^2\log(16) = {}^2\log(8 \cdot 16)$
- c** Na ${}^2\log(5)$ tijdseenheden is een hoeveelheid 5 keer zo groot geworden (bij een groeifactor 2 per tijdseenheid). Na vervolgens ${}^2\log(7)$ tijdseenheden is die hoeveelheid nog eens 7 keer zo groot geworden. Na ${}^2\log(5) + {}^2\log(7)$ tijdseenheden is de hoeveelheid $5 \cdot 7$ keer zo groot geworden. De groeitijd die daarbij hoort is ${}^2\log(5 \cdot 7)$. Dus ${}^2\log(5) + {}^2\log(7) = {}^2\log(5 \cdot 7)$.
- d** Na ${}^2\log(a)$ tijdseenheden is een hoeveelheid a keer zo groot geworden (bij een groeifactor 2 per tijdseenheid). Na vervolgens ${}^2\log(b)$ tijdseenheden is die hoeveelheid nog eens b keer zo groot geworden. Na ${}^2\log(a) + {}^2\log(b)$ tijdseenheden is de hoeveelheid $a \cdot b$ keer zo groot geworden. De groeitijd die daarbij hoort is ${}^2\log(a \cdot b)$. Dus ${}^2\log(a) + {}^2\log(b) = {}^2\log(a \cdot b)$.

8.2 Logaritmen berekenen

intro Bij $x = {}^5\log(-5)$ hoort de vergelijking $5^x = -5$ maar deze vergelijking heeft geen oplossing. Zo hebben ook de vergelijkingen $3^x = 0$ en $1^x = 4$ geen oplossingen en dus bestaan ${}^5\log(-5)$, ${}^3\log(0)$ en ${}^1\log(4)$ niet.

- 11 a** $\log(2) \approx 0,30$, $\log(5) \approx 0,70$, $\log(10) = 1$, $\log(25) \approx 1,40$ en $\log(100) = 2$
- b** $\log(x) = 3$ voor $x = 1000$.
- c** Uit $\log(100) = 2$ blijkt dat 10 het grondtal van de log-toets is, want $10^2 = 100$
- d** $\log(1\,000\,000) = 6$, want $10^6 = 1\,000\,000$.
 $\log(0,0001) = -4$, want $10^{-4} = 0,0001$.
- 12 a** $\log(3) \approx 0,4771$, $\log\left(\frac{1}{1000}\right) = -3$, $\log(1) = 0$ en $\log(123\,456) \approx 5,0915$
- b** $10^{2x} = 5$
 $2x = \log(5)$
 $x = \frac{1}{2} \cdot \log(5) \approx 0,35$
- 13 a** $10^{\log(564)} = 564$, $10^{\log(0,1)} = 0,1$ en $10^{\log(0,08)} = 0,08$
- b** $14 = 10^{\log(14)}$, $400 = 10^{\log(400)}$ en $0,003 = 10^{\log(0,003)}$

14 a $5^x = 12$

$$(10^{\log(5)})^x = 10^{\log(12)}$$

$$10^{x \cdot \log(5)} = 10^{\log(12)}$$

b $x \cdot \log(5) = \log(12)$

$$x = \frac{\log(12)}{\log(5)}$$

c De oplossing van de vergelijking $5^x = 12$ is $x = {}^5\log(12)$.

Met $x = \frac{\log(12)}{\log(5)}$ uit opdracht b volgt dan ${}^5\log(12) = \frac{\log(12)}{\log(5)}$

15 a ${}^9\log(35) = \frac{\log(35)}{\log(9)} \approx 1,62$

c ${}^5\log(10) = \frac{\log(10)}{\log(5)} \approx 1,43$

b ${}^{\frac{1}{3}}\log(128) = \frac{\log(128)}{\log(\frac{1}{3})} \approx -4,42$

d ${}^4\log(\frac{1}{13}) = \frac{\log(\frac{1}{13})}{\log(4)} \approx -1,85$

16 a $15^x = 2$

$$x = {}^{15}\log(2)$$

$$x = \frac{\log(2)}{\log(15)}$$

$$x \approx 0,26$$

c $4^{2x} = 6$

$$2x = {}^4\log(6)$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot {}^4\log(6)$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log(6)}{\log(4)}$$

$$x \approx 0,65$$

b $10^x = 5$

$$x = \log(5)$$

$$x \approx 0,70$$

d $3^x = \sqrt{5}$

$$x = {}^3\log(\sqrt{5})$$

$$x = \frac{\log(\sqrt{5})}{\log(3)}$$

$$x \approx 0,73$$

17 a $5 = b^{b\log(5)}$ en $12 = b^{b\log(12)}$

b $5^x = 12$

$$(b^{b\log(5)})^x = b^{b\log(12)}$$

$$b^{x \cdot b\log(5)} = b^{b\log(12)}$$

$$x \cdot b\log(5) = b\log(12)$$

$$x = \frac{b\log(12)}{b\log(5)}$$

De oplossing van de vergelijking $5^x = 12$ is $x = {}^5\log(12)$.

Met $x = \frac{b\log(12)}{b\log(5)}$ volgt dan dat ${}^5\log(12) = \frac{b\log(12)}{b\log(5)}$

18 a ${}^8\log(128) = \frac{{}^2\log(128)}{{}^2\log(8)} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$

b ${}^4\log(32) = \frac{{}^2\log(32)}{{}^2\log(4)} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

c ${}^{27}\log(9) = \frac{{}^3\log(9)}{{}^3\log(27)} = \frac{2}{3}$

d ${}^{\frac{1}{3}}\log(9) = \frac{{}^3\log(9)}{{}^3\log(\frac{1}{3})} = \frac{2}{-1} = -2$

$${}^{0,2}\log(25) = \frac{{}^5\log(25)}{{}^5\log(0,2)} = \frac{{}^5\log(25)}{{}^5\log(\frac{1}{5})} = \frac{2}{-1} = -2$$

013 a De oplossing van $2^x = 25$ is $x = {}^2\log(25)$ dus $2^{2\log(25)} = 25$.

b $\log(5) = 0,698\dots$ klopt.

c $10^{0,698\dots} = 5$ klopt.

d $10^{\log(247)} = 247$ klopt.

e $10^{\log(a)} = a$ klopt voor elke waarde van $a > 0$.

f $29 = 10^{\log(29)} \approx 10^{1,46}$

$600 = 10^{\log(600)} \approx 10^{2,78}$

$0,2 = 10^{\log(0,2)} \approx 10^{-0,70}$

018 a 4 en 128 zijn beide te schrijven als een macht van 2.

$$\mathbf{b} \quad {}^4\log(128) = \frac{{}^2\log(128)}{{}^2\log(4)} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$$

c 27 en 9 zijn beide te schrijven als macht van 3.

$$\mathbf{d} \quad {}^9\log(27) = \frac{{}^3\log(27)}{{}^3\log(9)} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

$$\mathbf{e} \quad {}^{16}\log(64) = \frac{{}^4\log(64)}{{}^4\log(16)} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

$${}^{\frac{1}{9}}\log(27) = \frac{{}^3\log(27)}{{}^3\log(\frac{1}{9})} = \frac{3}{-2} = -1\frac{1}{2}$$

$${}^{\frac{1}{2}}\log(8) = \frac{{}^2\log(8)}{{}^2\log(\frac{1}{2})} = \frac{3}{-1} = -3$$

$$\mathbf{U2 \ a} \quad \frac{{}^3\log(32)}{{}^3\log(4)} = \frac{{}^2\log(32)}{{}^2\log(4)} = \frac{{}^2\log(32)}{{}^2\log(3)} \cdot \frac{{}^2\log(3)}{{}^2\log(4)} = \frac{{}^2\log(32)}{{}^2\log(4)} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

$$\mathbf{b} \quad {}^{12}\log(20) = \frac{{}^{20}\log(20)}{{}^{20}\log(12)} = \frac{1}{{}^{20}\log(12)}$$

$$\mathbf{c} \quad {}^{\frac{1}{2}}\log(15) = \frac{{}^2\log(15)}{{}^2\log(\frac{1}{2})} = \frac{{}^2\log(15)}{-1} = -{}^2\log(15)$$

8.3 Grafieken van logaritmische functies

intro De grafiek gaat door het punt (3, 1), dus ${}^g\log(3) = 1$ ofwel $g^1 = g = 3$.

19 a

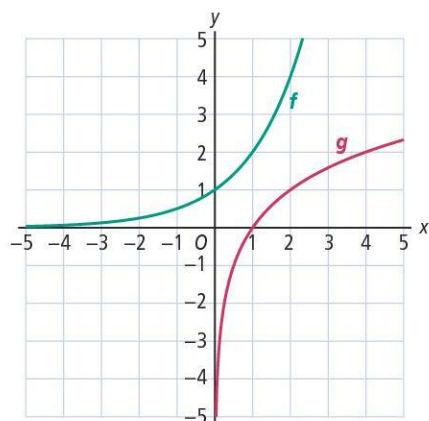
x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

b

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$g(x)$	-2	-1	0	1	2	3

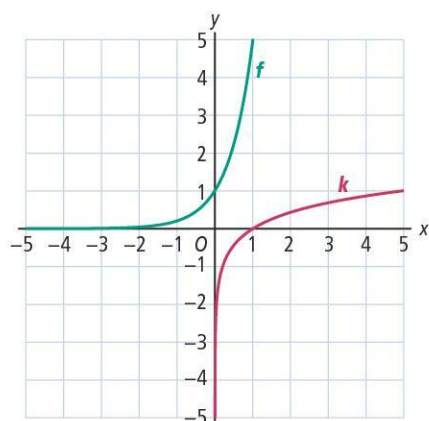
8 Logaritmische functies

c



- d De grafiek van f spiegelen in de lijn $y = x$ geeft de grafiek van g .
 e De lijn $y = 0$ (dus de x -as) is de horizontale asymptoot van de grafiek van f .
 De lijn $x = 0$ (dus de y -as) is de verticale asymptoot van de grafiek van g .

20 a



- b $x = 0$ invullen geeft $f(0) = 5^0 = 1$.
 De grafiek van f snijdt de y -as in $(0, 1)$.
 c ${}^5\log(x) = 0$ geeft $x = 5^0 = 1$.
 De grafiek van k snijdt de x -as in $(1, 0)$.
 d Het domein van f is $\mathbb{R}$ en het bereik is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.
 Het domein van k is $\langle 0, \rightarrow \rangle$ en het bereik is $\mathbb{R}$.
 e De lijn $y = 0$ (dus de x -as) is de horizontale asymptoot van de grafiek van f .
 De lijn $x = 0$ (dus de y -as) is de verticale asymptoot van de grafiek van k .
- 21 a Het punt $(1, 0)$ ligt op beide grafieken.
 b $h(x) = 1,2^x$ en $k(x) = 0,8^x$
 c Voor $g > 1$ is de functie $m(x) = {}^g\log(x)$ stijgend en voor $0 < g < 1$ dalend.
- 22 a g is stijgend, want het grondtal is groter dan 1.
 h is dalend, want het grondtal is kleiner dan 1.
 b $k(x) = 5 - x$ is dalend, want als x toeneemt, neemt $5 - x$ af.
 $f(p) = {}^3\log(p)$ is stijgend, dus als p toeneemt, neemt ${}^3\log(p)$ toe en als p afneemt, neemt ${}^3\log(p)$ af.
 $f(x) = {}^3\log(5 - x)$ is dalend, want als x toeneemt, neemt $5 - x$ af en dus neemt $f(x) = {}^3\log(5 - x)$ af.
 c $f(p) = {}^{0,5}\log(p)$ is dalend, dus als p toeneemt, neemt ${}^{0,5}\log(p)$ af en als p afneemt, neemt ${}^{0,5}\log(p)$ toe.
 d $f(x) = {}^{0,5}\log(5 - x)$ is stijgend, want als x toeneemt, neemt $5 - x$ af en dus neemt $f(x) = {}^{0,5}\log(5 - x)$ toe.

- 23 a** f is stijgend, want het grondtal is groter dan 1.
 g is stijgend, want de grafiek van g ontstaat uit die van f door een verschuiving van 3 naar links.
 h is dalend, want het grondtal is kleiner dan 1.
- b** Het domein van f is $\langle 0, \rightarrow \rangle$. De verticale asymptoot is de lijn $x = 0$.
 Het domein van h is $\langle 0, \rightarrow \rangle$. De verticale asymptoot is de lijn $x = 0$.
- c** De grafiek van $g(x) = {}^2\log(x + 3)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = {}^2\log(x)$ door een verschuiving van 3 naar links.
- d** Het domein van f is $\langle 0, \rightarrow \rangle$. Door de verschuiving van 3 naar links voor g is $\langle -3, \rightarrow \rangle$ het domein van g .
- e** De verticale asymptoot van de grafiek van f is de y -as, dus de verticale asymptoot van de grafiek van g is de lijn $x = -3$.
- 24 a** Het domein van m is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.
 Het nulpunt van m is $x = 1$.
 De verticale asymptoot is de lijn $x = 0$.
- b** Het domein van j volgt uit $x - 7 > 0$ dus het domein is $\langle 7, \rightarrow \rangle$.
 Uit ${}^5\log(x - 7) = 0$ volgt $x - 7 = 5^0 = 1$, dus het nulpunt is $x = 8$.
 Een verticale asymptoot volgt uit $x - 7 = 0$, dus dat is de lijn $x = 7$.
- c** Het domein van k volgt uit $2x + 5 > 0$ dus het domein is $\langle -2\frac{1}{2}, \rightarrow \rangle$.
 Uit ${}^5\log(2x + 5) = 0$ volgt $2x + 5 = 5^0 = 1$, dus het nulpunt is $x = -2$.
 Een verticale asymptoot volgt uit $2x + 5 = 0$, dus dat is de lijn $x = -2\frac{1}{2}$.
- 25 a** Voor het domein van $h(x) = -7 + {}^3\log(10 + x)$ moet gelden $10 + x > 0$, dus het domein is $\langle -10, \rightarrow \rangle$.
- b** De (verticale) asymptoot volgt uit $x + 10 = 0$ dus dat is de lijn $x = -10$.
- 024 a** $4x + 2 > 0$ geldt voor $4x > -2$ dus $x > -\frac{1}{2}$. Het domein is $\langle -\frac{1}{2}, \rightarrow \rangle$.
- b** Uit ${}^{\frac{1}{3}}\log(4x + 2) = 0$ volgt $4x + 2 = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$
 $4x = -1$ geeft $x = -\frac{1}{4}$.
 Het nulpunt is $x = -\frac{1}{4}$.
- c** $4x + 2 = 0$ geeft $x = -\frac{1}{2}$.
 De verticale asymptoot is de lijn $x = -\frac{1}{2}$.
- d** Het domein van f is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.
 Uit ${}^{\frac{1}{4}}\log(x) = 0$ volgt $x = \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$, dus het nulpunt van f is $x = 1$.
 De verticale asymptoot is de lijn $x = 0$.
- e** Het domein van g volgt uit $x - 5 > 0$ dus het domein van g is $\langle 5, \rightarrow \rangle$.
 Uit ${}^3\log(x - 5) = 0$ volgt $x - 5 = 3^0 = 1$, dus het nulpunt van g is $x = 6$.
 De verticale asymptoot volgt uit $x - 5 = 0$, dus dat is de lijn $x = 5$.
- f** Het domein van h volgt uit $3x + 6 > 0$ dus het domein is $\langle -2, \rightarrow \rangle$.
 Uit ${}^5\log(3x + 6) = 0$ volgt $3x + 6 = 5^0 = 1$, dus het nulpunt is $x = -1\frac{2}{3}$.
 De verticale asymptoot volgt uit $3x + 6 = 0$, dus dat is de lijn $x = -2$.

- U3** $x = -4$ is de verticale asymptoot van de grafiek, dus in $f(x) = p + {}^2\log(x + q)$ is $x + q = 0$ als $x = -4$.
 Dit invullen geeft $-4 + q = 0$ ofwel $q = 4$.
 De grafiek gaat door $(0, 0)$, dus $p + {}^2\log(0 + 4) = 0$.
 $p = -{}^2\log(4) = -2$
 Dus het functievoorschrift is $f(x) = -2 + {}^2\log(x + 4)$.
 $f(12) = -2 + {}^2\log(12 + 4) = -2 + {}^2\log(16) = -2 + 4 = 2$
 Het punt $(12, 2)$ ligt dus op de grafiek.

- U4 a** De grafiek heeft een asymptoot als $x^2 - x = 0$.
 Deze vergelijking heeft twee oplossingen, dus zijn er twee verticale asymptoten.
 $x^2 - x = 0$
 $x(x - 1) = 0$
 $x = 0$ of $x = 1$
 De asymptoten zijn de lijnen $x = 0$ en $x = 1$.
- b** Voor de snijpunten met de x -as moet ${}^2\log(x^2 - x) = 0$ worden opgelost.
 $x^2 - x = 2^0 = 1$
 $x^2 - x - 1 = 0$
 $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 5$
 $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ of $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$
 $A\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}, 0\right)$ en $B\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, 0\right)$
 $AB = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) = \sqrt{5}$
 De afstand tussen de punten A en B is $\sqrt{5}$.

8.4 Rekenregels voor logaritmen

intro Als je de grafieken bij de gegeven functies plot, zie je dat de functies f en g beide bij grafiek B horen en de functies h en k bij grafiek A.
 Blijkbaar zijn de functies f en g hetzelfde en ook de functies h en k .

- 26 a** $3^{{}^3\log(11)} = 11$
- b** $7 = 2^{{}^2\log(7)}$
 $7 = 12^{{}^{12}\log(7)}$
 $7 = p^{{}^p\log(7)}$
- 27 a** $21 = 3 \cdot 7 = 2^p \cdot 2^q = 2^{p+q}$
- b** Uit $21 = 2^p \cdot 2^q = 2^{p+q}$ volgt $p + q = {}^2\log(21)$.
- c** $p + q = {}^2\log(3) + {}^2\log(7)$, maar ook $p + q = {}^2\log(21)$.
 Dus geldt ${}^2\log(3) + {}^2\log(7) = {}^2\log(21)$.
- d** $a = 7 \cdot 70 = 490$
- e** ${}^5\log(70) - {}^5\log(7) = {}^5\log(b)$
 ${}^5\log(70) = {}^5\log(b) + {}^5\log(7)$
 ${}^5\log(70) = {}^5\log(7b)$
 $7b = 70$ dus $b = 10$

$$\begin{aligned}
 \text{f } 4 \cdot {}^3\log(2) &= \\
 {}^3\log(2) + {}^3\log(2) + {}^3\log(2) + {}^3\log(2) &= \\
 ({}^3\log(2) + {}^3\log(2)) + ({}^3\log(2) + {}^3\log(2)) &= \\
 {}^3\log(2 \cdot 2) + {}^3\log(2 \cdot 2) &= \\
 {}^3\log(4) + {}^3\log(4) &= \\
 {}^3\log(4 \cdot 4) &= \\
 {}^3\log(16) &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 28 \text{ a } {}^2\log(7) + {}^2\log(3) &= \\
 {}^2\log(7 \cdot 3) &= {}^2\log(21) \\
 \text{b } {}^7\log(42) - {}^7\log(3) + {}^7\log(2) &= \\
 {}^7\log\left(\frac{42}{3}\right) + {}^7\log(2) &= \\
 {}^7\log(14 \cdot 2) &= {}^7\log(28) \\
 \text{c } {}^7\log(42) - ({}^7\log(3) + {}^7\log(2)) &= \\
 {}^7\log(42) - {}^7\log(3 \cdot 2) &= \\
 {}^7\log(42) - {}^7\log(6) &= \\
 {}^7\log\left(\frac{42}{6}\right) &= {}^7\log(7) = 1 \\
 \text{d } 2 \cdot {}^5\log(4) + {}^5\log(a) &= \\
 {}^5\log(4^2) + {}^5\log(a) &= \\
 {}^5\log(4^2 \cdot a) &= {}^5\log(16a) \\
 \text{e } {}^5\log(a) + {}^5\log(a+1) &= \\
 {}^5\log(a \cdot (a+1)) &= {}^5\log(a^2 + a) \\
 \text{f } 3 \cdot {}^{0,5}\log(p) - {}^{0,5}\log(p^2) &= \\
 {}^{0,5}\log(p^3) - {}^{0,5}\log(p^2) &= \\
 {}^{0,5}\log\left(\frac{p^3}{p^2}\right) &= {}^{0,5}\log(p)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 29 \text{ a } -{}^2\log(9) + {}^2\log(18) &= \\
 {}^2\log(9^{-1}) + {}^2\log(18) &= \quad \text{(hier gebruikte Joost de derde regel)} \\
 {}^2\log\left(\frac{1}{9}\right) + {}^2\log(18) &= \\
 {}^2\log\left(\frac{1}{9} \cdot 18\right) &= \quad \text{(hier gebruikte Joost de eerste regel)} \\
 {}^2\log(2) &= 1 \\
 \text{b } -{}^2\log(9) + {}^2\log(18) &= \\
 {}^2\log(18) - {}^2\log(9) &= \\
 {}^2\log\left(\frac{18}{9}\right) &= \quad \text{(hier gebruikte Jessica de tweede regel)} \\
 {}^2\log(2) &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 30 \text{ a } g(x) &= \log(1000x) \\
 g(x) &= \log(1000 \cdot x) \\
 g(x) &= \log(1000) + \log(x) \\
 g(x) &= 3 + \log(x) \\
 g(x) &= 3 + f(x)
 \end{aligned}$$

b $h(x) = \log(0,01x)$

$$h(x) = \log(0,01 \cdot x)$$

$$h(x) = \log(0,01) + \log(x)$$

$$h(x) = \log\left(\frac{1}{100}\right) + \log(x)$$

$$h(x) = -2 + \log(x)$$

$$h(x) = -2 + f(x)$$

c $h(x) = a + g(x)$

$g(x) = 3 + f(x)$ uit opdracht a hierin substitueren geeft:

$$h(x) = a + 3 + f(x)$$

$h(x) = -2 + f(x)$ uit opdracht b hierin substitueren geeft:

$$-2 + f(x) = a + 3 + f(x) \text{ dus}$$

$$-2 = a + 3$$

$$a = -5$$

d $k(x) = 4 + f(x)$

$$k(x) = 4 + \log(x)$$

$$k(x) = \log(10^4) + \log(x)$$

$$k(x) = \log(10\,000) + \log(x)$$

$$k(x) = \log(10\,000x)$$

e $m(x) = 6 + {}^2\log(x)$

$$m(x) = {}^2\log(2^6) + {}^2\log(x)$$

$$m(x) = {}^2\log(64) + {}^2\log(x)$$

$$m(x) = {}^2\log(64x)$$

31 a $5 \cdot \log(a) + 2 \cdot \log(b) = 3$

$$\log(a^5) + \log(b^2) = 3$$

$$\log(a^5 \cdot b^2) = 3$$

b $a^5 \cdot b^2 = 10^3$ ofwel $a^5 \cdot b^2 = 1000$

32 a $4 \cdot \log(S) - 2 \cdot \log(R) = 1$

$$\log(S^4) - \log(R^2) = 1$$

$$\log\left(\frac{S^4}{R^2}\right) = 1$$

$$\frac{S^4}{R^2} = 10^1$$

$$\frac{S^4}{R^2} = 10$$

$$S^4 = 10R^2$$

b ${}^2\log(P) + 2 \cdot {}^2\log(Q) = -1$

$${}^2\log(P) + {}^2\log(Q^2) = -1$$

$${}^2\log(P \cdot Q^2) = -1$$

$$P \cdot Q^2 = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

Een vorm zonder logaritmen is $P \cdot Q^2 = \frac{1}{2}$ (of $Q^2 = \frac{1}{2P}$)

33 a De formule geeft een lineair verband tussen $\log(x)$ en $\log(y)$, dus de grafiek moet een rechte lijn zijn. Twee punten controleren is dan voldoende.

Bij $\log(x) = 6$ geeft de formule $\log(y) = 3 \cdot 6 + 2$ ofwel $\log(y) = 20$.

De grafiek gaat het punt $(6, 20)$, dus dat klopt.

Bij $\log(x) = -4$ geeft de formule $\log(y) = 3 \cdot -4 + 2$ dus $\log(y) = -10$.

De grafiek gaat ook door het punt $(-4, -10)$, dus dat klopt.

$$\begin{aligned}
 \text{b } \log(y) &= 3 \cdot \log(x) + 2 \\
 \log(y) &= \log(x^3) + 2 \\
 \log(y) - \log(x^3) &= 2 \\
 \log\left(\frac{y}{x^3}\right) &= 2 \text{ dus} \\
 \frac{y}{x^3} &= 10^2 = 100 \text{ ofwel } y = 100x^3
 \end{aligned}$$

- 028 a** ${}^3\log(6) + {}^3\log\left(1\frac{1}{2}\right) = {}^3\log(9)$
 met de rekenregel ${}^s\log(a) + {}^s\log(b) = {}^s\log(a \cdot b)$
- b** ${}^3\log(36) - \left({}^3\log(6) + {}^3\log\left(1\frac{1}{2}\right)\right) =$
 ${}^3\log(36) - {}^3\log(9) = {}^3\log\left(\frac{36}{9}\right) = {}^3\log(4)$
- c** ${}^3\log(10) - {}^3\log(5) = {}^3\log(2)$ met de rekenregel ${}^s\log(a) - {}^s\log(b) = {}^s\log\left(\frac{a}{b}\right)$
- d** Je gebruikt de rekenregel $p \cdot {}^s\log(a) = {}^s\log(a^p)$
- e** $3 \cdot ({}^3\log(10) - {}^3\log(5)) = 3 \cdot {}^3\log(2) = {}^3\log(2^3) = {}^3\log(8)$

- 032 a** In stap 1 is gebruik gemaakt van de rekenregel $p \cdot {}^s\log(a) = {}^s\log(a^p)$
- b** In stap 2 is gebruik gemaakt van de rekenregel ${}^s\log(a) - {}^s\log(b) = {}^s\log\left(\frac{a}{b}\right)$
 ${}^3\log\left(\frac{I^7}{J^4}\right) = -2$
- c** $\frac{I^7}{J^4} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$
- d** $\frac{I^7}{J^4} = \frac{1}{9}$ geeft $I^7 = \frac{1}{9} \cdot J^4$ ofwel $I^7 = \frac{J^4}{9}$

- U5 a** $\log(4) = \log(2^2) = 2 \cdot \log(2) \approx 2 \cdot 0,3010 = 0,6020$
 $\log(6) = \log(2) + \log(3) \approx 0,3010 + 0,4771 = 0,7781$
 $\log(8) = \log(2^3) = 3 \cdot \log(2) \approx 3 \cdot 0,3010 = 0,9030$
 $\log(9) = \log(3^2) = 2 \cdot \log(3) \approx 2 \cdot 0,4771 = 0,9542$
- b** $\log(5) = \log\left(\frac{10}{2}\right) = \log(10) - \log(2) = 1 - \log(2)$
- c** Het getal moet dan te schrijven zijn als product of quotiënt van machten van 2 en 3 (of 10).
 $\log(12) = \log(2^2 \cdot 3) = 2 \cdot \log(2) + \log(3)$
 $\log(15) = \log(3 \cdot 5) = \log(3) + \log(5) = \log(3) + 1 - \log(2)$ (zie opdracht b)
 $\log(16) = \log(2^4) = 4 \cdot \log(2)$
 $\log(18) = \log(2 \cdot 3^2) = \log(2) + 2 \cdot \log(3)$
 $\log(20) = \log(10 \cdot 2) = \log(10) + \log(2) = 1 + \log(2)$
 Dus met deze gegevens kun je de 10-logaritme berekenen van de getallen 12, 15, 16, 18 en 20.

8.5 Formules herleiden

intro De groeifactor van het te tillen gewicht is 0,88 per 10 graden Celsius, ofwel $0,88^{\frac{1}{10}}$ per graad Celsius.
 Om bij een gewicht de temperatuur te kunnen bepalen, moet je de formule $G = 334 \cdot 0,88^{\frac{1}{10}T}$ herleiden waarbij je T uitdrukt in G .

- 34 a** Een verlies van 4% per uur betekent een groeifactor van 0,96 per uur.
De beginhoeveelheid is 100%, dus $P = 100 \cdot 0,96^t$
- b** $100 \cdot 0,96^t = 20$ moet worden opgelost.
 $0,96^t = 0,2$
 $t = {}^{0,96}\log(0,2)$ uur
 De lading neemt af, dus de batterij is ${}^{0,96}\log(0,2) \approx 39$ uur bruikbaar.
- c** $100 \cdot 0,96^t = 50$
 $0,96^t = 0,5$
 $t = {}^{0,96}\log(0,5) \approx 16,98$
 en
 $100 \cdot 0,96^t = 30$
 $0,96^t = 0,3$
 $t = {}^{0,96}\log(0,3) \approx 29,49$
 Tussen 17 uur en 29 uur is er tussen de 50% en 30% van de oorspronkelijke lading over.
- d** $P = 100 \cdot 0,96^t$
 $0,96^t = \frac{P}{100}$
 $t = {}^{0,96}\log\left(\frac{P}{100}\right)$
- 35 a** $N = 3 \cdot 4^t$
 $3 \cdot 4^t = N$
 $4^t = \frac{N}{3}$
 $t = {}^4\log\left(\frac{N}{3}\right)$
- b** $N = -16 + 4 \cdot 5^t$
 $-16 + 4 \cdot 5^t = N$
 $4 \cdot 5^t = N + 16$
 $5^t = \frac{N + 16}{4} = \frac{1}{4}N + 4$
 $t = {}^5\log\left(\frac{1}{4}N + 4\right)$
- c** $3N - 2 = \frac{1}{12} \cdot 4^t$
 $\frac{1}{12} \cdot 4^t = 3N - 2$
 $4^t = 12 \cdot (3N - 2)$
 $4^t = 36N - 24$
 $t = {}^4\log(36N - 24)$
- d** $4N \cdot 6^t = 5$
 $6^t = \frac{5}{4N}$
 $t = {}^6\log\left(\frac{5}{4N}\right)$
- e** $7^{tN} = 10$
 $t \cdot N = {}^7\log(10)$
 $t = \frac{{}^7\log(10)}{N}$
- f** $3^t = 9^N$
 $3^t = (3^2)^N$
 $3^t = 3^{2N}$
 $t = 2N$
- 36 a** $T = {}^4\log(2a)$
 ${}^4\log(2a) = T$
 $2a = 4^T$
 $a = \frac{1}{2} \cdot 4^T$
- b** $a = \frac{1}{2} \cdot 4^T$
 $a = \frac{1}{2} \cdot (2^2)^T$
 $a = 2^{-1} \cdot 2^{2T}$
 $a = 2^{2T-1}$

$$\begin{aligned}
 37 \text{ a } q &= -2 + {}^5\log(p) \\
 -2 + {}^5\log(p) &= q \\
 {}^5\log(p) &= q + 2 \\
 p &= 5^{q+2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b } q &= 1 + \frac{1}{2} \cdot {}^4\log(p) \\
 1 + \frac{1}{2} \cdot {}^4\log(p) &= q \\
 \frac{1}{2} \cdot {}^4\log(p) &= q - 1 \\
 {}^4\log(p) &= 2q - 2 \\
 p &= 4^{2q-2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c } q &= \log(6p - 12) \\
 \log(6p - 12) &= q \\
 6p - 12 &= 10^q \\
 6p &= 12 + 10^q \\
 p &= 2 + \frac{1}{6} \cdot 10^q
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d } 6 &= {}^5\log(p) + {}^5\log(q) \\
 {}^5\log(p) + {}^5\log(q) &= 6 \\
 {}^5\log(pq) &= 6 \\
 pq &= 5^6 = 15\,625 \\
 p &= \frac{15\,625}{q}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e } 10 &= \log\left(\frac{p}{q}\right) \\
 \log\left(\frac{p}{q}\right) &= 10 \\
 \frac{p}{q} &= 10^{10} \\
 p &= 10^{10} \cdot q
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f } 4q \cdot {}^3\log(p) &= 8 \\
 {}^3\log(p) &= \frac{8}{4q} \\
 {}^3\log(p) &= \frac{2}{q} \\
 p &= 3^{\frac{2}{q}}
 \end{aligned}$$

38 a De beginhoeveelheid is 600. De verdubbeling per dag betekent een groeifactor 2 per dag, dus $N = 600 \cdot 2^t$ met t in dagen.

$$\begin{aligned}
 \text{b } N &= 600 \cdot 2^t \\
 600 \cdot 2^t &= N \\
 2^t &= \frac{N}{600}
 \end{aligned}$$

$$t = {}^2\log\left(\frac{N}{600}\right)$$

c Invullen van $N = 30\,000$ in de formule $t = {}^2\log\left(\frac{N}{600}\right)$ geeft

$$t = {}^2\log\left(\frac{30\,000}{600}\right)$$

$$t = {}^2\log(50)$$

Na $t = {}^2\log(50) \approx 5,64$ dagen zijn er 30 000 bacteriën.

$$39 \text{ a } 2 = {}^3\log(3^2) = {}^3\log(9)$$

$$\begin{aligned}
 \text{b } f(x) &= 2 + {}^3\log(x + 5) \\
 f(x) &= {}^3\log(9) + {}^3\log(x + 5) \\
 f(x) &= {}^3\log(9 \cdot (x + 5)) \\
 f(x) &= {}^3\log(9x + 45) \\
 a &= 9 \text{ en } b = 45
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c } g(x) &= -2 + {}^2\log(10 - x) \\
 g(x) &= {}^2\log(2^{-2}) + {}^2\log(10 - x) \\
 g(x) &= {}^2\log\left(\frac{1}{4}\right) + {}^2\log(10 - x) \\
 g(x) &= {}^2\log\left(\frac{1}{4} \cdot (10 - x)\right) \\
 g(x) &= {}^2\log\left(2\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x\right) \\
 g(x) &= {}^2\log\left(-\frac{1}{4}x + 2\frac{1}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 40 \quad h(x) &= {}^5\log(4x) + 2 \cdot {}^5\log\left(\frac{1}{x^2}\right) \\
 h(x) &= {}^5\log(4 \cdot x) + 2 \cdot {}^5\log x^{-2} \\
 h(x) &= {}^5\log(4) + {}^5\log(x) + 2 \cdot -2 \cdot {}^5\log x \\
 h(x) &= {}^5\log(2^2) + {}^5\log(x) - 4 \cdot {}^5\log x \\
 h(x) &= {}^5\log(2^2) - 3 \cdot {}^5\log(x) \\
 h(x) &= 2 \cdot {}^5\log(2) - 3 \cdot {}^5\log(x)
 \end{aligned}$$

- 41 a** De x -coördinaat hoort bij de massa M .
 De x -coördinaat van punt A is 2, dus $\log(M_{\text{Pinguïn}}) = 2$.
 $M_{\text{Pinguïn}} = 10^2 = 100$ gram.
 De y -coördinaat hoort bij het waterverlies L .
 De y -coördinaat van punt A is 1,1, dus $\log(L_{\text{Pinguïn}}) = 1,1$.
 $L_{\text{Pinguïn}} = 10^{1,1} \approx 12,6$ gram.
- b** 12,6 gram waterverlies is 12,6% van de massa van 100 gram van het ei, dus een waterverlies van ongeveer 13% geldt voor de pinguïn.
- c** $\log(M_{\text{Albatros}}) = 2,5$
 $M_{\text{Albatros}} = 10^{2,5} \approx 316$ gram.
 $\log(L_{\text{Albatros}}) = 1,6$
 $L_{\text{Albatros}} = 10^{1,6} \approx 39,8$ gram.
 $\frac{39,8}{316} \cdot 100\% \approx 12,6\% \approx 13\%$. Het percentage klopt ook voor de albatros.
- d** $\log(L) = 1,031 \cdot \log(M) - 0,885$
 $\log(L) = \log(M^{1,031}) - 0,885$
 $\log(L) - \log(M^{1,031}) = -0,885$
 $\log\left(\frac{L}{M^{1,031}}\right) = -0,885$
 $\frac{L}{M^{1,031}} = 10^{-0,885}$
 $L = 10^{-0,885} \cdot M^{1,031}$
 $L = a \cdot M^b$ met $a = 10^{-0,885} \approx 0,130$ en $b = 1,031$

- 035 a** $4 \cdot 5^x = y + 8$
 $5^x = \frac{1}{4}y + 2$
- b** $x = {}^5\log\left(\frac{1}{4}y + 2\right)$
- c** $2^{xy} = 9$
- d** $xy = {}^2\log(9)$
- e** $x = \frac{{}^2\log(9)}{y}$
- f** $y = 2 \cdot 5^x$
 $2 \cdot 5^x = y$
 $5^x = \frac{1}{2}y$
 $x = {}^5\log\left(\frac{1}{2}y\right)$
- g** $2y - 7 = \frac{1}{10} \cdot 3^x$
 $\frac{1}{10} \cdot 3^x = 2y - 7$
 $3^x = 20y - 70$
 $x = {}^3\log(20y - 70)$
- h** $2y \cdot 3^x = 9$
 $3^x = \frac{9}{2y}$
 $x = {}^3\log\left(\frac{9}{2y}\right)$
 $x = {}^3\log(9) - {}^3\log(2y)$
 $x = 2 - {}^3\log(2y)$
- i** $5^{xy} = 12$
 $xy = {}^5\log(12)$
 $x = \frac{{}^5\log(12)}{y}$

$$\begin{aligned} \text{j} \quad y &= -12 + 3 \cdot 4^x \\ -12 + 3 \cdot 4^x &= y \\ 3 \cdot 4^x &= y + 12 \\ 4^x &= \frac{1}{3}y + 4 \\ x &= {}^4\log\left(\frac{1}{3}y + 4\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k} \quad 4^x &= 16^y \\ 4^x &= (4^2)^y \\ 4^x &= 4^{2y} \\ x &= 2y \end{aligned}$$

- 037 a** $y = 4 \cdot \log(x) - 8$
 $4 \cdot \log(x) - 8 = y$
 $4 \cdot \log(x) = y + 8$ dus $\log(x) = \frac{1}{4}y + 2$
b Het grondtal van de logaritme is hier 10.
c $x = 10^{\frac{1}{4}y+2}$

U6 a ${}^9\log(K) + {}^{27}\log(M) = 2$
 $\frac{{}^3\log(K)}{{}^3\log(9)} + \frac{{}^3\log(M)}{{}^3\log(27)} = 2$ geeft $\frac{{}^3\log(K)}{2} + \frac{{}^3\log(M)}{3} = 2$
 $\frac{1}{2} \cdot {}^3\log(K) + \frac{1}{3} \cdot {}^3\log(M) = 2$
 ${}^3\log(K^{\frac{1}{2}}) + {}^3\log(M^{\frac{1}{3}}) = 2$
 ${}^3\log(K^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{3}}) = 2$
 $K^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{3}} = 3^2 = 9$
 $K^{\frac{1}{2}} = \frac{9}{M^{\frac{1}{3}}} = 9M^{-\frac{1}{3}}$ dus $K = 81M^{-\frac{2}{3}}$
b ${}^2\log(R) = 4,45 - 2,31S$
 $R = 2^{4,45-2,31S}$
 $R = 2^{4,45} \cdot 2^{-2,31S}$
 $R = 2^{4,45} \cdot (2^{-2,31})^S$
 $R = b \cdot g^S$ met $b = 2^{4,45} \approx 21,86$ en $g = 2^{-2,31} \approx 0,20$

8.6 Vergelijkingen en ongelijkheden

intro Bij het percentage C14 hoort de formule $P = 100 \cdot 0,5^t$ met t het aantal perioden van 5730 jaar.
 Bij 6000 jaar hoort $t = \frac{6000}{5730}$. Dan is $P = 100 \cdot 0,5^{\frac{6000}{5730}} = 48,393\dots$
 Er was nog ongeveer 48% van de oorspronkelijke hoeveelheid C14 over.

42 a ${}^3\log(x) = \frac{1}{2}$
 $x = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
b ${}^{\frac{1}{2}}\log(x) = 3$
 $x = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
c ${}^4\log\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}$
 $\frac{1}{x} = 4^{\frac{1}{2}}$
 $\frac{1}{x} = \sqrt{4} = 2$
 $x = \frac{1}{2}$
d ${}^6\log(x^3) = 4$
 $x^3 = 6^4$
 $x^3 = 1296$
 $x = \sqrt[3]{1296}$

43 a ${}^5\log(3x - 7) = 2$

$$3x - 7 = 5^2$$

$$3x - 7 = 25$$

b $3x = 32$

$$x = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$$

44 a ${}^3\log(2x - 3) = 4$

$$2x - 3 = 3^4$$

$$2x - 3 = 81$$

$$2x = 84$$

$$x = 42$$

b $2^{-x+7} = 5$

$$-x + 7 = {}^2\log(5)$$

$$x = 7 - {}^2\log(5)$$

c $\log(2x - 4) - \log(7) = 1$

$$\log\left(\frac{2x - 4}{7}\right) = \log(10)$$

$$\frac{2x - 4}{7} = 10$$

$$2x - 4 = 70$$

$$2x = 74$$

$$x = 37$$

d ${}^2\log(x - 3) = 1 - {}^2\log(x + 3)$

$${}^2\log(x - 3) + {}^2\log(x + 3) = 1$$

$${}^2\log(x - 3)(x + 3) = 1$$

$${}^2\log(x^2 - 9) = 1$$

$$x^2 - 9 = 2^1$$

$$x^2 - 9 = 2$$

$$x^2 = 11$$

$$x = \sqrt{11} \quad (x = -\sqrt{11} \text{ voldoet niet})$$

e $\frac{1}{3}\log(4x) - \frac{1}{3}\log(6) = -2$

$$\frac{1}{3}\log\left(\frac{4x}{6}\right) = -2$$

$$\frac{4x}{6} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

$$\frac{4x}{6} = 9$$

$$4x = 54$$

$$x = 13\frac{1}{2}$$

f ${}^5\log\left(\frac{1}{x}\right) = 2 + {}^5\log(x)$

$${}^5\log\left(\frac{1}{x}\right) = {}^5\log(25) + {}^5\log(x)$$

$${}^5\log\left(\frac{1}{x}\right) = {}^5\log(25x)$$

$$\frac{1}{x} = 25x$$

$$1 = 25x^2$$

$$x^2 = \frac{1}{25}$$

$$x = \frac{1}{5} \quad (x = -\frac{1}{5} \text{ voldoet niet})$$

g $5^{4x+2} = 1000$

$$4x + 2 = {}^5\log(1000)$$

$$4x = -2 + {}^5\log(1000)$$

$$x = \frac{-2 + {}^5\log(1000)}{4}$$

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot {}^5\log(1000)$$

h ${}^{16}\log(3x + 4) + {}^{64}\log(3x + 4) = 2\frac{1}{2}$

$$\frac{{}^4\log(3x + 4)}{{}^4\log(16)} + \frac{{}^4\log(3x + 4)}{{}^4\log(64)} = 2\frac{1}{2}$$

$$\frac{{}^4\log(3x + 4)}{2} + \frac{{}^4\log(3x + 4)}{3} = 2\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot {}^4\log(3x + 4) + \frac{1}{3} \cdot {}^4\log(3x + 4) = 2\frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{6} \cdot {}^4\log(3x + 4) = 2\frac{1}{2}$$

$${}^4\log(3x + 4) = 3$$

$$3x + 4 = 4^3$$

$$3x + 4 = 64$$

$$3x = 60$$

$$x = 20$$

45 a Het domein van f is $\langle 0, \rightarrow \rangle$ en het domein van g is $\langle \leftarrow, 0 \rangle$.

b ${}^4\log(x) = 1\frac{1}{2}$

$$x = 4^{1\frac{1}{2}} = 4^{1+\frac{1}{2}} = 4^1 \cdot 4^{\frac{1}{2}} = 4 \cdot \sqrt{4} = 4 \cdot 2 = 8$$

c Aflezen zodat de grafiek van f onder de lijn $y = 1\frac{1}{2}$ ligt en rekening houden met het domein geeft als oplossing $0 < x < 8$.

d Eerst oplossen ${}^4\log(-x) = 1\frac{1}{2}$.

$$-x = 4^{1\frac{1}{2}} = 4^{1+\frac{1}{2}} = 4^1 \cdot 4^{\frac{1}{2}} = 4 \cdot \sqrt{4} = 4 \cdot 2 = 8, \text{ dus } x = -8.$$

Aflezen zodat de grafiek van g onder de lijn $y = 1\frac{1}{2}$ ligt en rekening houden met het domein geeft als oplossing $-8 < x < 0$.

e Eerst oplossen ${}^4\log(x) = -2$.

$$x = 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$$

Aflezen zodat de grafiek onder of op de lijn $y = -2$ ligt en rekening houden met het domein geeft als oplossing $0 < x \leq \frac{1}{16}$

46 a Zie de grafieken hiernaast.

b Voor het domein geldt $x + 2 > 0$
ofwel $x > -2$ dus $\langle -2, \rightarrow \rangle$.

c $\frac{1}{2}\log(x+2) + 4 = 5$

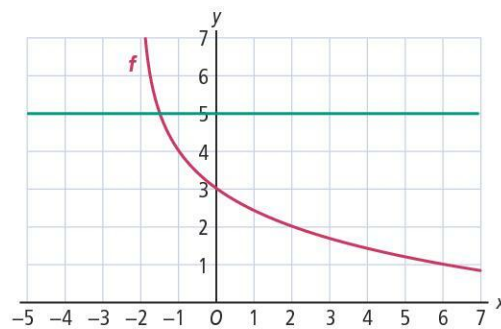
$$\frac{1}{2}\log(x+2) = 1$$

$$x+2 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

$$x = -1\frac{1}{2}$$

De oplossing van de ongelijkheid

$$\frac{1}{4}\log(x+2) + 4 > 5 \text{ is } -2 < x < -1\frac{1}{2}$$



47 a ${}^2\log(2x+1) = 5$

$$2x+1 = 2^5 = 32$$

$$2x = 31$$

$$x = 15\frac{1}{2}$$

Voor het domein geldt $2x+1 > 0$ dus $x > -\frac{1}{2}$.

Zie de plot hiernaast.

De oplossing is $x > 15\frac{1}{2}$

b $-2 + 3 \cdot \log(x) = 1$

$$3 \cdot \log(x) = 3$$

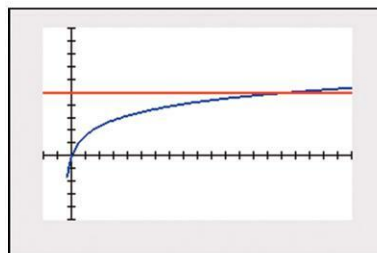
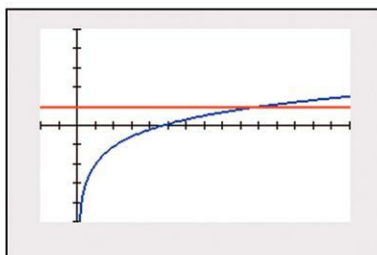
$$\log(x) = 1$$

$$x = 10^1 = 10$$

Het domein is $x > 0$.

Zie de plot hiernaast.

De oplossing is $0 < x \leq 10$



48 a De halve hoeveelheid is 300, dus $600 \cdot 0,8^t = 300$ moet worden opgelost.

$$600 \cdot 0,8^t = 300$$

$$0,8^t = \frac{300}{600} = \frac{1}{2}$$

$$t = {}^{0,8}\log\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$t = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(0,8)} = 3,106\dots$$

Het halveren duurt ongeveer 3,11 uur.

8 Logaritmische functies

- b** Van 100 naar 50 is ook een halvering. Omdat het proces exponentieel is

duurt dat ook $\frac{\log(\frac{1}{2})}{\log(0,8)} \approx 3,11$ uur.

- c** De halveringstijd is de tijd die nodig is om van een hoeveelheid b naar een hoeveelheid $0,5b$ te gaan.

De vergelijking $b \cdot 0,8^t = 0,5b$ moet dan worden opgelost.

$$b \cdot 0,8^t = 0,5b$$

$$b \cdot 0,8^t = b \cdot 0,5$$

$$0,8^t = 0,5$$

De halveringstijd is dus de oplossing van de vergelijking $0,8^t = 0,5$

- 49 a** $1,3^t = 2$ geeft $t = {}^{1,3}\log(2) = 2,641\dots$

De verdubbelingstijd is ongeveer 2,64.

- b** $0,6^t = 0,5$ geeft $t = {}^{0,6}\log(0,5) = 1,356\dots$

De halveringstijd is ongeveer 1,36.

- c** $7^t = 2$ geeft $t = {}^7\log(2) = 0,356\dots$

De verdubbelingstijd is ongeveer 0,36.

- 50 a** De groeifactor per jaar is 1,05 dus voor de verdubbeling van het volume geldt $1,05^t = 2$.

- b** $1,05^t = 2$

$t = {}^{1,05}\log(2) = 14,206\dots$, dus de verdubbelingstijd is ongeveer 14 jaar.

- c** De verviervoudiging is een verdubbeling na de verdubbeling, dus na $2 \cdot {}^{1,05}\log(2) \approx 28$ jaar is het volume verviervoudigd.

- 044 a** Het getal 2 is geschreven als een logaritme met grondtal 2, dus

$$2 = {}^2\log(2^2) = {}^2\log(4).$$

- b** ${}^2\log(4) + {}^2\log(x) = {}^2\log(4x)$

- c** $3x + 4 = 4x$

- d** $-x = -4$

$$x = 4$$

- e** ${}^2\log(3 \cdot 4 + 4) = 2 + {}^2\log(4)$

$${}^2\log(16) = 2 + {}^2\log(4)$$

$$4 = 2 + 2 \text{ en dat klopt.}$$

- f** Er is gebruik gemaakt van de rekenregel ${}^g\log(a) = \frac{{}^b\log(a)}{{}^b\log(g)}$

- g** De grondtallen 9 en 3 zijn beide te schrijven als macht van 3.

- h** ${}^3\log(9) = 2$ en $\frac{{}^3\log(x)}{{}^3\log(9)} = \frac{{}^3\log(x)}{2} = \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(x)$

- i** $1\frac{1}{2} \cdot {}^3\log(x) = 6$

$${}^3\log(x) = 4$$

$$x = 3^4 = 81$$

- U7 a** Als de frequenties zich verhouden als 1 : 2, dan is de toonafstand

$$T = 1200 \cdot {}^2\log\left(\frac{2}{1}\right) = 1200 \cdot 1 = 1200 \text{ cent.}$$

- b** $T = 386,3137$ en $f_1 = 440$ of $T = 386,3137$ en $f_2 = 440$

Invullen in de formule van $T = 386,3137$ en $f_1 = 440$ geeft:

$$386,3137 = 1200 \cdot {}^2\log\left(\frac{f_2}{440}\right)$$

$$\frac{386,3137}{1200} = {}^2\log\left(\frac{f_2}{440}\right)$$

$$2^{\frac{386,3137}{1200}} = \frac{f_2}{440} \text{ dus } f_2 = 440 \cdot 2^{\frac{386,3137}{1200}} \approx 550$$

Invullen in de formule van $T = 386,3137$ en $f_2 = 440$ geeft:

$$386,3137 = 1200 \cdot {}^2\log\left(\frac{440}{f_1}\right)$$

$$\frac{386,3137}{1200} = {}^2\log\left(\frac{440}{f_1}\right)$$

$$2^{\frac{386,3137}{1200}} = \frac{440}{f_1} \text{ dus } f_1 = \frac{440}{2^{\frac{386,3137}{1200}}} \approx 352$$

De mogelijke frequenties zijn 440 Hz en 352 Hz.

- c** Als twee tonen een toonafstand hebben van 701,955 cent dan geldt

$$701,955 = 1200 \cdot {}^2\log\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$$

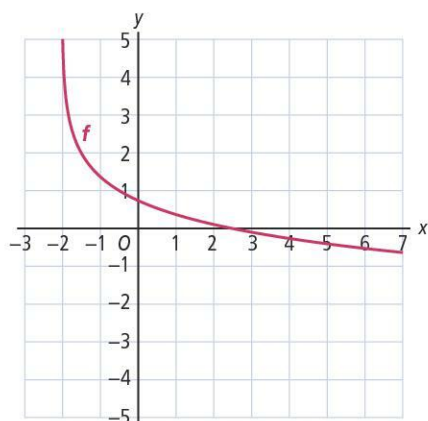
$$\frac{701,955}{1200} = {}^2\log\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$$

$$2^{\frac{701,955}{1200}} = \frac{f_2}{f_1}$$

$$\frac{f_2}{f_1} \approx 1,5 = \frac{3}{2} \text{ dus de verhouding van de frequenties } f_2 : f_1 = 3 : 2.$$

8.7 Gemengde opdrachten

51 a



- b** $2x + 4 > 0$ geeft $x > -2$, dus het domein van f is $\langle -2, \rightarrow \rangle$, het bereik is $\mathbb{R}$.

- c** $2 - {}^3\log(2x + 4) = 0$

$${}^3\log(2x + 4) = 2$$

$$2x + 4 = 3^2 = 9$$

$$2x = 5$$

$$x = 2\frac{1}{2}, \text{ dus het nulpunt is } x = 2\frac{1}{2}$$

- d** Zie de schets: de oplossing is $-2 < x < 2\frac{1}{2}$

- 52 a** Voor het domein moet gelden $x^2 - 6x + 8 > 0$.

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

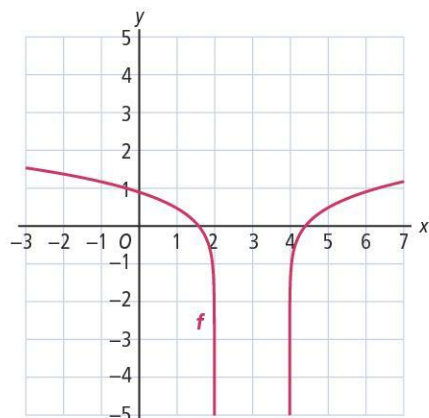
$$(x - 2)(x - 4) = 0$$

$$x = 2 \text{ of } x = 4$$

$y = x^2 - 6x + 8$ is de vergelijking van een dalparabool, dus $x^2 - 6x + 8 > 0$ voor $x < 2$ of $x > 4$. Het domein van f is $\langle -\infty, 2 \rangle \cup \langle 4, \infty \rangle$.

- b** De lijnen $x = 2$ en $x = 4$ zijn de verticale asymptoten van de grafiek van f .

c



- d** $\log(x^2 - 6x + 8) < 0$

$$\log(x^2 - 6x + 8) = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 10^0 = 1$$

$$x^2 - 6x + 7 = 0$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 8$$

$$x = \frac{6 - \sqrt{8}}{2} = 3 - \frac{1}{2}\sqrt{8} = 3 - \sqrt{2} \text{ of } x = \frac{6 + \sqrt{8}}{2} = 3 + \frac{1}{2}\sqrt{8} = 3 + \sqrt{2}$$

Zie de schets: de oplossing is $3 - \sqrt{2} < x < 2$ of $4 < x < 3 + \sqrt{2}$.

- 53 a** $f(x) = 1 + 4 \cdot {}^3\log(x)$

$$f(x) = {}^3\log(3) + {}^3\log(x^4)$$

$$f(x) = {}^3\log(3x^4)$$

$$f(x) = {}^3\log(px^q), \text{ dus } p = 3 \text{ en } q = 4.$$

- b** $1 + 4 \cdot {}^3\log(x) = 7$

$$4 \cdot {}^3\log(x) = 6$$

$${}^3\log(x) = 1\frac{1}{2}$$

$$x = 3^{1\frac{1}{2}} = 3^{1+\frac{1}{2}} = 3^1 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3 \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

- c** $f(x) = g(x)$ geeft $1 + 4 \cdot {}^3\log(x) = 1 + {}^3\log(9x^2)$

$$4 \cdot {}^3\log(x) = {}^3\log(9x^2)$$

$${}^3\log(x^4) = {}^3\log(9x^2)$$

$$x^4 = 9x^2$$

$$x^2 = 0 \text{ of } x^2 = 9$$

$$x = 0 \text{ of } x = -3 \text{ of } x = 3$$

$x = 0$ en $x = -3$ voldoen niet in $\log(x)$, dus de oplossing is $x = 3$.

De y -coördinaat is $f(3) = 1 + 4 \cdot {}^3\log(3) = 1 + 4 \cdot 1 = 5$

De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt $(3, 5)$.

- 54 a** De beginhoeveelheid is 100 mg en per dag wordt 25% afgebroken, dus de groeifactor is 0,75 per dag en het verband is exponentieel, dus $y(t) = 100 \cdot 0,75^t$ met t in dagen en y in mg.

- b** $100 \cdot 0,75^t = 15$

$$0,75^t = 0,15$$

$$t = {}^{0,75}\log(0,15) = 6,5954... \text{ dagen} \approx 158 \text{ uur.}$$

c Voor de halveringstijd geldt $0,75^t = \frac{1}{2}$, dus $t = {}^{0,75}\log\left(\frac{1}{2}\right)$ dagen.

d $t = {}^{0,75}\log\left(\frac{1}{2}\right)$ dagen ofwel $t = {}^{0,75}\log\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 24 \approx 58$ uur.

55 a $16 \cdot 2^{x-6} = \sqrt{2}$

$$2^4 \cdot 2^{x-6} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$2^{x-6+4} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$2^{x-2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$x-2 = \frac{1}{2}$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

c ${}^{\frac{1}{10}}\log(x^2 + x) = {}^{10}\log\left(\frac{1}{6}\right)$

$${}^{\frac{1}{10}}\log(x^2 + x) = \frac{{}^{\frac{1}{10}}\log\left(\frac{1}{6}\right)}{{}^{\frac{1}{10}}\log(10)}$$

$${}^{\frac{1}{10}}\log(x^2 + x) = \frac{{}^{\frac{1}{10}}\log\left(\frac{1}{6}\right)}{-1}$$

$${}^{\frac{1}{10}}\log(x^2 + x) = -1 \cdot {}^{\frac{1}{10}}\log\left(\frac{1}{6}\right)$$

$${}^{\frac{1}{10}}\log(x^2 + x) = {}^{\frac{1}{10}}\log\left(\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}\right)$$

$${}^{\frac{1}{10}}\log(x^2 + x) = {}^{\frac{1}{10}}\log(6)$$

$$x^2 + x = 6$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0$$

$$x = -3 \text{ of } x = 2$$

d ${}^4\log(2x) + {}^4\log(7) = 3$

$${}^4\log(14x) = 3$$

$$14x = 4^3 = 64$$

$$x = \frac{64}{14} = \frac{32}{7} = 4\frac{4}{7}$$

Het domein is $x > 0$

Zie de plot hiernaast.

De oplossing is $x \geq 4\frac{4}{7}$

e $15 \cdot 3^x = 75$

$$3^x = \frac{75}{15} = 5$$

$$x = {}^3\log(5)$$

Zie de plot hiernaast.

De oplossing is $x < {}^3\log(5)$

f ${}^{\frac{1}{2}}\log(2x+3) = -3$

$$2x+3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$$

$$2x = 5$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

Het domein is $x > -1\frac{1}{2}$

Zie de plot hiernaast.

De oplossing is $x \geq 2\frac{1}{2}$

b $1 - {}^2\log(4x+1) = -4$

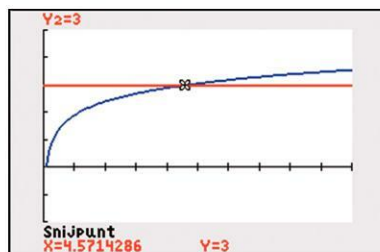
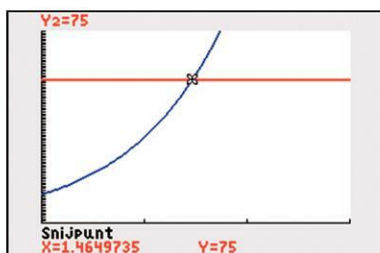
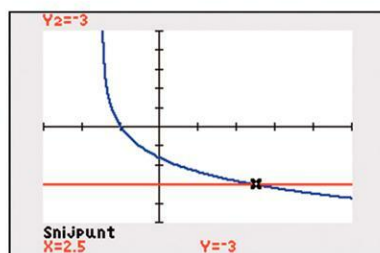
$${}^2\log(4x+1) = 5$$

$$4x+1 = 2^5$$

$$4x+1 = 32$$

$$4x = 31$$

$$x = \frac{31}{4} = 7\frac{3}{4}$$



Onderzoeksoopdrachten

- 56 a** Noem D_v het geluidsniveau bij snelheid v .
Bij een verdubbeling van de snelheid ($2v$) geldt voor het geluidsniveau

$$D = 35,9 \cdot \log(2v) + 4,1$$

$$D = 35,9 \cdot \log(2 \cdot v) + 4,1$$

$$D = 35,9 \cdot (\log(2) + \log(v)) + 4,1$$

$$D = 35,9 \cdot \log(2) + 35,9 \cdot \log(v) + 4,1$$

$$D = 35,9 \cdot \log(2) + D_v$$

$$D = 10,8... + D_v$$

D wordt dus ongeveer 11 dB hoger bij een verdubbeling van de snelheid.

- b** Met de rekenmachine:

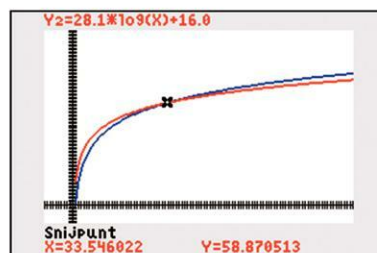
Invoer: $y_1 = 35,9 \cdot \log(x) + 4,1$ en $y_2 = 28,1 \cdot \log(x) + 16,0$

Venster: $0 \leq x \leq 100$, $0 \leq y \leq 100$

Optie: snijpunt geeft $x = 33,546...$

Zie de plot hiernaast.

Voor $v > 33,5$ km/uur heeft een ZOAB-weg een lager geluidsniveau dan een DAB-weg.

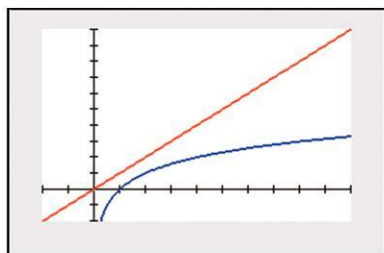


- 57 a** $f(x) = {}^2\log(x)$ en $y = x$

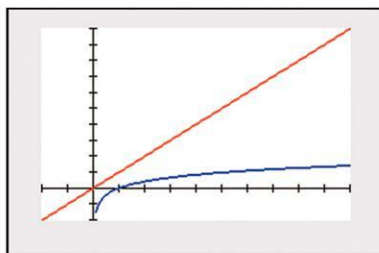
Met de rekenmachine:

Invoer: $y_1 = {}^2\log(x)$ en $y_2 = x$

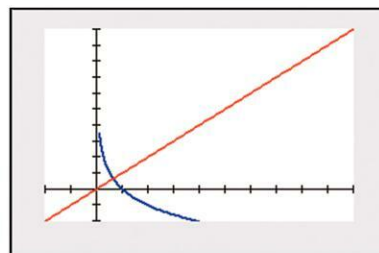
Venster: $-2 \leq x \leq 10$, $-2 \leq y \leq 10$



$g = 2$



$g = 5$



$g = \frac{1}{2}$

Voor $g = 2$ snijden de grafieken elkaar niet.

Voor $g = 5$ vervang je $y_1 = {}^2\log(x)$ door $y_1 = {}^5\log(x)$ (middelste plot).

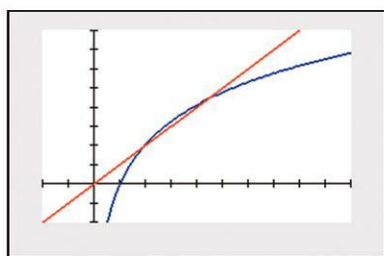
De grafieken snijden elkaar niet.

Voor $g = \frac{1}{2}$ vervang je $y_1 = {}^2\log(x)$ door $y_1 = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$ (rechter plot).

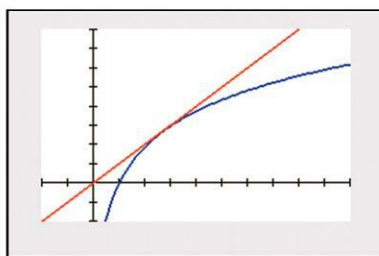
De grafieken hebben één snijpunt

- b** Als $0 < g < 1$ is f dalend en snijdt de grafiek van f de lijn $y = x$ precies één keer.

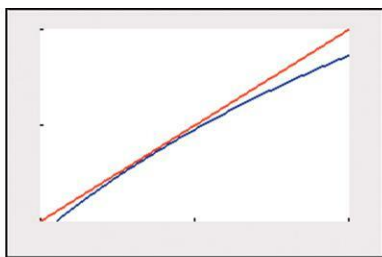
Voor $g > 1$ uitproberen met de rekenmachine:



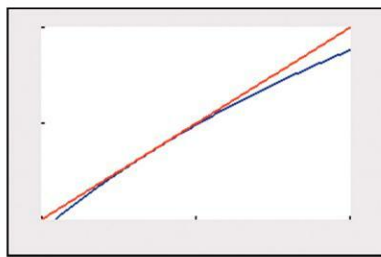
$g = 1,4$
twee snijpunten



$g = 1,45$
geen snijpunt (na inzoomen)



$g = 1,44$
twee snijpunten



$g = 1,445$
één gemeenschappelijk punt

Conclusie: voor $0 < g < 1$ en voor $g \approx 1,4$ heeft de grafiek van f precies één punt gemeenschappelijk met de lijn $y = x$.

Samenvatting

- S1 a** ${}^3\log(7)$ is een oplossing van de vergelijking $3^x = 7$.
b De exacte oplossing van $3^x = 25$ is $x = {}^3\log(25)$.
- S2 a** $k(x) = {}^3\log(x)$ is stijgend omdat het grondtal $3 > 1$.
 Als x toeneemt, dan neemt $x + 6$ ook toe. Omdat $k(x) = {}^3\log(x)$ stijgend is, neemt ${}^3\log(x + 6)$ dan ook toe dus is f stijgend.
b $h(x) = {}^{0,6}\log(x)$ is dalend omdat het grondtal $0 < 0,6 < 1$.
 Als x toeneemt, dan neemt $3 - x$ af. Omdat $h(x) = {}^{0,6}\log(x)$ dalend is, neemt ${}^{0,6}\log(3 - x)$ dan toe dus is g stijgend.
- S3 a** De halveringstijd is de oplossing van de vergelijking $0,8^t = 0,5$
 De halveringstijd is dus $t = {}^{0,8}\log(0,5) \approx 3,1$
b De verdubbelingstijd is de oplossing van de vergelijking $2^t = 2,3$
 De verdubbelingstijd is dus $t = {}^{2,3}\log(2) \approx 0,8$
- S4 a** $8 + {}^2\log(x) =$
 ${}^2\log(2^8) + {}^2\log(x) =$
 ${}^2\log(256) + {}^2\log(x) = {}^2\log(256x)$
b $4 \cdot {}^3\log(x) - 1 =$
 ${}^3\log(x^4) - {}^3\log(3) =$
 ${}^3\log\left(\frac{x^4}{3}\right) = {}^3\log\left(\frac{1}{3} \cdot x^4\right)$
- S5 a** ${}^5\log(90) \approx 2,796$
b ${}^{10}\log(12480) \approx 4,096$
c ${}^{12}\log(0,01) \approx -1,853$
d ${}^{0,78}\log(2) \approx -2,790$
- S6 a** ${}^9\log(243) = \frac{{}^3\log(243)}{{}^3\log(9)} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$
b ${}^{\frac{1}{4}}\log(32) = \frac{{}^2\log(32)}{{}^2\log(\frac{1}{4})} = \frac{5}{-2} = -2\frac{1}{2}$

8 Logaritmische functies

S7 a Het domein van f is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

Het nulpunt van f is $x = 1$.

De verticale asymptoot is de lijn $x = 0$.

Het domein van g volgt uit $4x - 3 > 0$ dus het domein is $\langle \frac{3}{4}, \rightarrow \rangle$.

Uit ${}^2\log(4x - 3) = 0$ volgt $4x - 3 = 2^0$ ofwel $4x - 3 = 1$ dus $4x = 4$, het nulpunt is $x = 1$.

Een verticale asymptoot van g volgt uit $4x - 3 = 0$, dus dat is de lijn $x = \frac{3}{4}$.

S8 a $p = {}^5\log(\frac{1}{3}q)$
 ${}^5\log(\frac{1}{3}q) = p$
 $\frac{1}{3}q = 5^p$
 $q = 3 \cdot 5^p$

c $p = 5 + 2 \cdot 3^q$
 $5 + 2 \cdot 3^q = p$
 $2 \cdot 3^q = p - 5$
 $3^q = \frac{1}{2}p - 2\frac{1}{2}$
 $q = {}^3\log(\frac{1}{2}p - 2\frac{1}{2})$

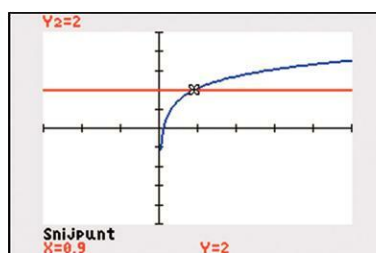
b $1 - {}^2\log(q + 2) = p$
 ${}^2\log(q + 2) = 1 - p$
 $q + 2 = 2^{1-p}$
 $q = -2 + 2^{1-p}$

d $p = 6^q - 3$
 $6^q - 3 = p$
 $6^q = p + 3$
 $q = {}^6\log(p + 3)$

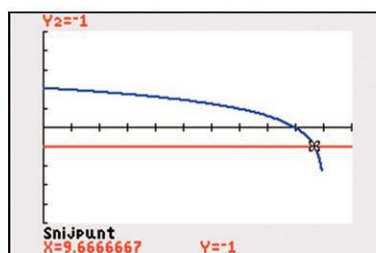
S9 a $2 - {}^{11}\log(x) = 1$
 ${}^{11}\log(x) = 1$
 $x = 11^1 = 11$

b $\frac{1}{2}\log(x + 2) = -3 + \frac{1}{2}\log(2x)$
 $\frac{1}{2}\log(x + 2) = \frac{1}{2}\log((\frac{1}{2})^{-3}) + \frac{1}{2}\log(2x)$
 $\frac{1}{2}\log(x + 2) = \frac{1}{2}\log(8) + \frac{1}{2}\log(2x)$
 $\frac{1}{2}\log(x + 2) = \frac{1}{2}\log(16x)$
 $x + 2 = 16x$
 $2 = 15x$
 $x = \frac{2}{15}$

S10 a ${}^3\log(10x) = 2$
 $10x = 3^2 = 9$
 $x = \frac{9}{10}$
 Zie de plot hiernaast.
 Het domein is $x > 0$
 De oplossing is $0 < x < \frac{9}{10}$



b ${}^3\log(10 - x) = -1$
 $10 - x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$
 $x = 9\frac{2}{3}$
 Zie de plot hiernaast.
 Het domein is $x < 10$
 De oplossing is $x < 9\frac{2}{3}$



Test jezelf

- T1 a** ${}^3\log(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}$ want $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
b ${}^2\log(\frac{1}{8}) = -3$ want $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
c ${}^{\frac{1}{3}}\log(125) = -3$ want $(\frac{1}{5})^{-3} = \frac{1}{(\frac{1}{5})^3} = \frac{1}{\frac{1}{125}} = 125$
d ${}^{\frac{1}{3}}\log(1) = 0$ want $(\frac{1}{3})^0 = 1$

- T2 a** Vergelijking C heeft een positief geheel getal als oplossing.

$$4^{2k} = 16$$

$$4^{2k} = 4^2$$

$$2k = 2$$

$$k = 1$$

- b** Vergelijking B heeft een negatief geheel getal als oplossing.

$$(\frac{1}{2})^x = 16$$

$$(2^{-1})^x = 16$$

$$2^{-x} = 2^4$$

$$-x = 4$$

$$x = -4$$

- c A:** $7^t = 4$

$$t = {}^7\log(4) \approx 0,71$$

D: $(\frac{1}{5})^p = 3\sqrt{2}$

$$p = {}^{\frac{1}{5}}\log(3\sqrt{2}) \approx -0,90$$

- T3 a** f is stijgend, immers: als x toeneemt, neemt $2x - 1$ ook toe. En omdat

$p(x) = {}^3\log(x)$ stijgend is, neemt dan ${}^3\log(2x - 1)$ ook toe.

g is dalend, immers: als x toeneemt, neemt $1 - 2x$ af. En omdat

$p(x) = {}^3\log(x)$ stijgend is, neemt dan ${}^3\log(1 - 2x)$ ook af.

h is stijgend, immers: als x toeneemt, neemt $1 - 2x$ af. En omdat

$q(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log(x)$ dalend is, neemt dan ${}^{\frac{1}{3}}\log(1 - 2x)$ toe.

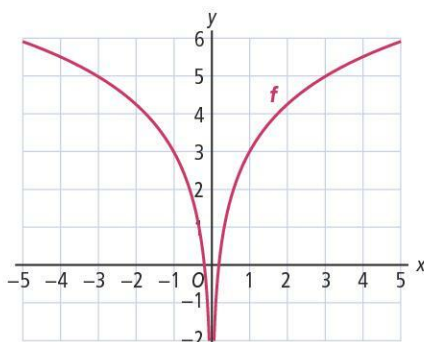
- b** $2x - 1$ en $1 - 2x$ zijn 0 voor dezelfde waarde van x , namelijk $x = \frac{1}{2}$.
De drie grafieken hebben $x = \frac{1}{2}$ als verticale asymptoot.

- c** Voor het domein van f geldt $2x - 1 > 0$ dus het domein is $(\frac{1}{2}, \rightarrow)$.

Voor het domein van g en h geldt $1 - 2x > 0$ dus het domein is $(\leftarrow, \frac{1}{2})$.

- d** f : ${}^3\log(2x - 1) = 0$ g : ${}^3\log(1 - 2x) = 0$ h : ${}^{\frac{1}{3}}\log(1 - 2x) = 0$
 $2x - 1 = 3^0 = 1$ $1 - 2x = 3^0 = 1$ $1 - 2x = (\frac{1}{3})^0 = 1$
 $2x = 2$ $-2x = 0$ $-2x = 0$
 $x = 1$ $x = 0$ $x = 0$

- T4 a**



8 Logaritmische functies

b Alleen voor $x = 0$ bestaat f niet, dus het domein van f is $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$.

c $f(x) = {}^3\log(27x^2)$
 $f(x) = {}^3\log(27) + {}^3\log(x^2)$
 $f(x) = 3 + {}^3\log(x^2)$
 $f(x) = 3 + 2 \cdot {}^3\log(x)$

T5 a $R = 4 - \frac{1}{2} \cdot 3^t$

$$\frac{1}{2} \cdot 3^t = 4 - R$$

$$3^t = 8 - 2R$$

$$t = {}^3\log(8 - 2R)$$

b $R = 2 - {}^3\log(2t)$

$${}^3\log(2t) = 2 - R$$

$$2t = 3^{2-R}$$

$$t = \frac{1}{2} \cdot 3^{2-R}$$

c ${}^5\log(3t) + {}^5\log(R) = 2$

$${}^5\log(3tR) = 2$$

$$3tR = 5^2 = 25$$

$$t = \frac{25}{3R}$$

d $2^{tR} = 10$

$$tR = {}^2\log(10)$$

$$t = \frac{{}^2\log(10)}{R}$$

T6 $x = {}^2\log(18)$ invullen in $2^x \cdot (x - 2 \cdot {}^2\log(3))$ geeft

$$2^{{}^2\log(18)} \cdot ({}^2\log(18) - 2 \cdot {}^2\log(3)) =$$

$$18 \cdot ({}^2\log(18) - {}^2\log(9)) =$$

$$18 \cdot {}^2\log(2) =$$

$$18 \cdot 1 = 18, \text{ klopt.}$$

T7 a $0,36^{x-2} = 4,23$

$$x - 2 = {}^{0,36}\log(4,23)$$

$$x = 2 + {}^{0,36}\log(4,23)$$

$$x \approx 0,59$$

b $5 + 3 \cdot 1,4^x = \sqrt{3}$

$$3 \cdot 1,4^x = \sqrt{3} - 5$$

$$1,4^x = \frac{\sqrt{3} - 5}{3} < 0$$

geen oplossing.

c ${}^2\log(2 - x) = \frac{1}{2}$

$$2 - x = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$2 - x = \sqrt{2}$$

$$x = 2 - \sqrt{2}$$

$$x \approx 0,59$$

d ${}^5\log(x + 3) = 2 + {}^5\log(x)$

$${}^5\log(x + 3) = {}^5\log(25) + {}^5\log(x)$$

$${}^5\log(x + 3) = {}^5\log(25x)$$

$$x + 3 = 25x$$

$$24x = 3$$

$$x = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

e $3 - \log(x + 2) = 2\frac{1}{3}$

$$\log(x + 2) = 3 - 2\frac{1}{3}$$

$$\log(x + 2) = \frac{2}{3}$$

$$x + 2 = 10^{\frac{2}{3}}$$

$$x = 10^{\frac{2}{3}} - 2$$

$$x = \sqrt[3]{100} - 2$$

$$x \approx 2,64$$

f ${}^6\log(x) = {}^{36}\log(3x - 2)$

$${}^6\log(x) = \frac{{}^6\log(3x - 2)}{{}^6\log(36)}$$

$${}^6\log(x) = \frac{{}^6\log(3x - 2)}{2}$$

$$2 \cdot {}^6\log(x) = {}^6\log(3x - 2)$$

$${}^6\log(x^2) = {}^6\log(3x - 2)$$

$$x^2 = 3x - 2$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x - 1)(x - 2) = 0$$

$$x = 1 \text{ of } x = 2$$

Beide oplossingen voldoen.

T8 a $2\log(3x - 2) = 7$

$$3x - 2 = 2^7 = 128$$

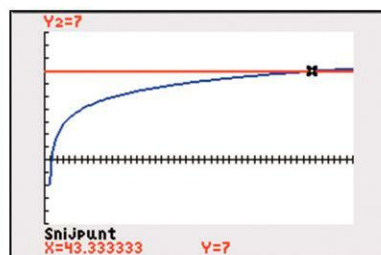
$$3x = 130$$

$$x = 43\frac{1}{3}$$

Zie de plot hiernaast.

Het domein is $\langle \frac{2}{3}, \rightarrow \rangle$.

De oplossing is $\frac{2}{3} < x < 43\frac{1}{3}$.



b $\frac{1}{2}\log(3x) = -1$

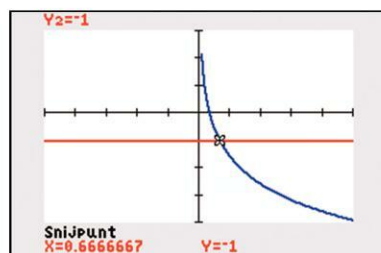
$$3x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$$

$$x = \frac{2}{3}$$

Zie de plot hiernaast.

Het domein is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

De oplossing is $0 < x < \frac{2}{3}$.



c $2\log(4 - 3x) = 3$

$$4 - 3x = 2^3 = 8$$

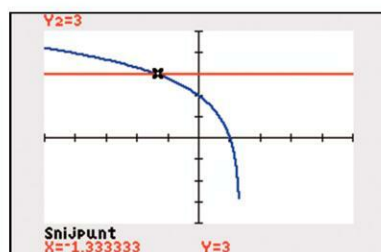
$$3x = -4$$

$$x = -1\frac{1}{3}$$

Zie de plot hiernaast.

Het domein is $\langle \leftarrow, 1\frac{1}{3} \rangle$.

De oplossing is $-1\frac{1}{3} \leq x < 1\frac{1}{3}$.



d ${}^3\log(-x) = 1\frac{1}{2}$

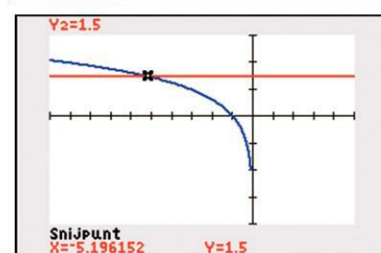
$$-x = 3^{1\frac{1}{2}} = 3^{1+\frac{1}{2}} = 3^1 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3 \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$x = -3\sqrt{3}$$

Zie de plot hiernaast.

Het domein is $\langle \leftarrow, 0 \rangle$.

De oplossing is $x \leq -3\sqrt{3}$.



8 Logaritmische functies

T9 a Op 5 m: $D = 10 \cdot \log\left(\frac{4,9 \cdot 10^5}{5^2}\right) \approx 42,9 \text{ dB}$

Op 7 m: $D = 10 \cdot \log\left(\frac{4,9 \cdot 10^5}{7^2}\right) = 40 \text{ dB}$

Op 10 m: $D = 10 \cdot \log\left(\frac{4,9 \cdot 10^5}{10^2}\right) \approx 36,9 \text{ dB}$

Op 20 m: $D = 10 \cdot \log\left(\frac{4,9 \cdot 10^5}{20^2}\right) \approx 30,9 \text{ dB}$

b $D = 10 \cdot \log\left(\frac{4,9 \cdot 10^5}{r^2}\right)$

$$D = 10 \cdot (\log(4,9 \cdot 10^5) - \log(r^2)) \quad (\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b))$$

$$D = 10 \cdot (\log(4,9 \cdot 10^5) - 2 \cdot \log(r)) \quad (\log(a^p) = p \cdot \log(a))$$

$$D = 10 \cdot \log(4,9 \cdot 10^5) - 20 \cdot \log(r) \quad (\text{haakjes weggewerkt})$$

$$\text{Dus } a = 10 \cdot \log(4,9 \cdot 10^5) \approx 56,9 \text{ en } b = -20.$$

c $10 \cdot \log\left(\frac{4,9 \cdot 10^5}{r^2}\right) = 0$

$$\log\left(\frac{4,9 \cdot 10^5}{r^2}\right) = 0$$

$$\frac{4,9 \cdot 10^5}{r^2} = 10^0 = 1$$

$$4,9 \cdot 10^5 = r^2$$

$$r = \sqrt{4,9 \cdot 10^5} = 700$$

Dus op een afstand van 700 m is de geluidsterkte gelijk aan nul.

T10 a Van het geneesmiddel wordt 40% per dag afgebroken, de groeifactor is dus 0,6 per dag en de beginhoeveelheid is na t dagen nog $0,6^t$ keer de oorspronkelijke hoeveelheid. Als na t_h de helft over is, geldt dus $0,6^{t_h} = 0,5$

b $0,6^{t_h} = 0,5$ geeft $t_h = {}^{0,6}\log(0,5) = 1,3569... \approx 1,36$

c Na t_h is de helft over. 25% is de helft van de helft, dus na nóg een keer t_h dagen wachten is de helft gehalveerd en is er 25% over.

Dat is na $1,3569... + 1,3569... = 2,713... \text{ dagen} \approx 65 \text{ uur}$.

Extra oefening

E1 a ${}^{100}\log(175) \approx 1,122$

c ${}^{0,3}\log(23,78) \approx -2,632$

b ${}^{1,5}\log(75) \approx 10,648$

d ${}^{\frac{1}{4}}\log(15) \approx -1,953$

E2 a ${}_4\log(8) = \frac{{}_2\log(8)}{{}_2\log(4)} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

b ${}_{27}\log\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{{}_3\log\left(\frac{1}{9}\right)}{{}_3\log(27)} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$

c ${}^{\frac{1}{25}}\log(125) = \frac{{}_5\log(125)}{{}_5\log\left(\frac{1}{25}\right)} = \frac{3}{-2} = -1\frac{1}{2}$

- E3 a** Voor het domein van h geldt $13 - 3x > 0$ dus $-3x > -13$ en $x < \frac{13}{3}$.
 Het domein van h is $\left(-\infty, 4\frac{1}{3}\right)$.
- b** Voor de verticale asymptoot geldt $13 - 3x = 0$ dus dat is de lijn $x = 4\frac{1}{3}$.
- c** $f(x) = {}^7\log(x)$ is stijgend, want het grondtal is groter dan 1.
 Als x toeneemt, neemt $13 - 3x$ af.
 Omdat $f(x) = {}^7\log(x)$ stijgend is, neemt ${}^7\log(13 - 3x)$ dan ook af en daarmee ook $3 + {}^7\log(13 - 3x)$.
 Dus $h(x) = 3 + {}^7\log(13 - 3x)$ is dalend.

- E4 a** $P = 4^t - 3$
 $4^t - 3 = P$
 $4^t = P + 3$
 $t = {}^4\log(P + 3)$
- b** $2P - 4 \cdot 3^{2t} = 0$
 $-4 \cdot 3^{2t} = -2P$
 $3^{2t} = \frac{1}{2}P$
 $2t = {}^3\log\left(\frac{1}{2}P\right)$
 $t = \frac{1}{2} \cdot {}^3\log\left(\frac{1}{2}P\right)$
- c** $\log(P) - \log(t) = 1$ met $P > 0$ en $t > 0$
 $\log\left(\frac{P}{t}\right) = 1$
 $\frac{P}{t} = 10^1 = 10$
 $t = \frac{P}{10}$ of $t = \frac{1}{10}P$
- d** $P = 4 \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log(2t)$ met $t > 0$
 $4 \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log(2t) = P$
 ${}^{\frac{1}{3}}\log(2t) = \frac{1}{4}P$
 $2t = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}P}$
 $t = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}P}$

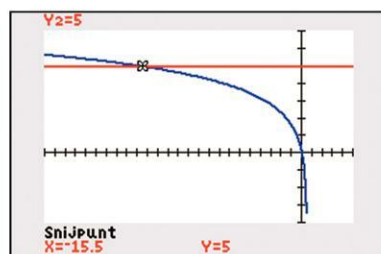
- E5 a** $\log(-2x + 3) = -1$
 $-2x + 3 = 10^{-1} = \frac{1}{10}$
 $-2x = -2\frac{9}{10}$
 $x = 1\frac{9}{20}$
- b** ${}^4\log(x) = {}^{16}\log(x + 6)$
 ${}^4\log(x) = \frac{{}^4\log(x + 6)}{{}^4\log(16)}$
 ${}^4\log(x) = \frac{{}^4\log(x + 6)}{2}$
 $2 \cdot {}^4\log(x) = {}^4\log(x + 6)$
 ${}^4\log(x^2) = {}^4\log(x + 6)$
 $x^2 = x + 6$
 $x^2 - x - 6 = 0$
 $(x - 3)(x + 2) = 0$
 $x = 3$ of $x = -2$
 $x = -2$ voldoet niet, de oplossing is $x = 3$.

8 Logaritmische functies

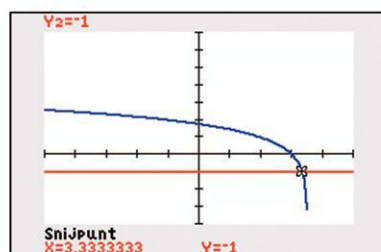
$$\begin{aligned} \text{c } \log(4x - 2) - \log\left(\frac{1}{2}\right) &= 2 \\ \log\left(\frac{4x - 2}{\frac{1}{2}}\right) &= 2 \\ \log(8x - 4) &= 2 \\ 8x - 4 &= 10^2 = 100 \\ 8x &= 104 \\ x &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } \frac{1}{3}\log(x - 3) - \frac{1}{3}\log(5) &= -2 \\ \frac{1}{3}\log\left(\frac{x - 3}{5}\right) &= -2 \\ \frac{x - 3}{5} &= \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \\ \frac{x - 3}{5} &= 9 \\ x - 3 &= 45 \\ x &= 48 \end{aligned}$$

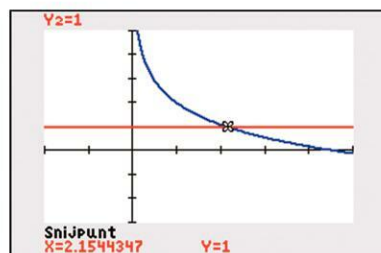
E6 a $2\log(-2x + 1) = 5$
 $-2x + 1 = 2^{\frac{5}{2}} = 32$
 $-2x = 31$
 $x = -15\frac{1}{2}$
 Zie de plot hiernaast.
 Het domein is $\left\langle -\infty, \frac{1}{2} \right\rangle$.
 De oplossing is $x > -15\frac{1}{2}$.



b $3\log(7 - 2x) = -1$
 $7 - 2x = 3^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$
 $-2x = -6\frac{2}{3}$
 $x = 3\frac{1}{3}$
 Zie de plot hiernaast.
 Het domein is $\left\langle -\infty, 3\frac{1}{2} \right\rangle$.
 De oplossing is $3\frac{1}{3} < x < 3\frac{1}{2}$.



c $2 - 3 \cdot \log(x) = 1$
 $3 \cdot \log(x) = 1$
 $\log(x) = \frac{1}{3}$
 $x = 10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10}$
 Zie de plot hiernaast.
 Het domein is $\langle 0, \infty \rangle$.
 De oplossing is $x > \sqrt[3]{10}$.



E7 a $2 \cdot \log(11) - 3 \cdot \log(4) =$
 $\log(11^2) - \log(4^3) =$
 $\log(121) - \log(64) = \log\left(\frac{121}{64}\right)$

b $2 \cdot ({}^4\log(15) - {}^4\log(5)) + {}^4\log(3) =$
 $2 \cdot {}^4\log\left(\frac{15}{5}\right) + {}^4\log(3) =$
 $2 \cdot {}^4\log(3) + {}^4\log(3) =$
 $3 \cdot {}^4\log(3) =$
 ${}^4\log(3^3) = {}^4\log(27)$

$$\text{c } 3 \cdot {}^5\log(x) + 1 = {}^5\log(x^3) + {}^5\log(5) = {}^5\log(5x^3)$$

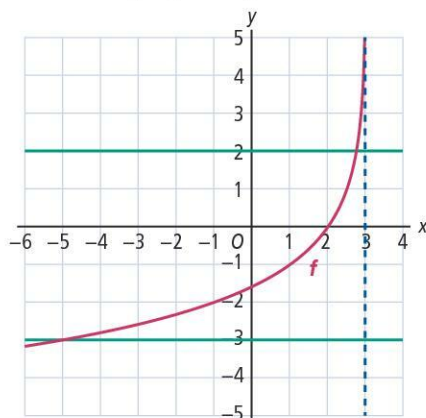
$$\text{d } {}^{\frac{1}{4}}\log(x) + 2 = {}^{\frac{1}{4}}\log(x) + {}^{\frac{1}{4}}\log\left(\frac{1}{16}\right) = {}^{\frac{1}{4}}\log\left(\frac{1}{16}x\right)$$

E8 a $f(x) = g(x)$
 ${}^2\log(4 - 2x) = 2 + {}^2\log(x + 4)$
 ${}^2\log(4 - 2x) = {}^2\log(4) + {}^2\log(x + 4)$
 ${}^2\log(4 - 2x) = {}^2\log(4x + 16)$
 $4 - 2x = 4x + 16$
 $-6x = 12$
 $x = -2$

b $f(x) \cdot g(x) = 0$
 $f(x) = 0$ of $g(x) = 0$
 ${}^2\log(4 - 2x) = 0$ of $2 + {}^2\log(x + 4) = 0$
 ${}^2\log(4 - 2x) = 0$ of ${}^2\log(x + 4) = -2$
 $4 - 2x = 2^0$ of $x + 4 = 2^{-2}$
 $4 - 2x = 1$ of $x + 4 = \frac{1}{4}$
 $-2x = -3$ of $x = -3\frac{3}{4}$
 $x = 1\frac{1}{2}$ of $x = -3\frac{3}{4}$

E9 a ${}^{\frac{1}{2}}\log(3 - x) = 0$
 $3 - x = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$
 $-x = -2$
 $x = 2$

b Voor de asymptoot geldt $3 - x = 0$ ofwel $x = 3$.



<p>c ${}^{\frac{1}{2}}\log(3 - x) = -3$ $3 - x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$ $-x = 5$ $x = -5$</p>	<p>${}^{\frac{1}{2}}\log(3 - x) = 2$ $3 - x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ $-x = -2\frac{3}{4}$ $x = 2\frac{3}{4}$</p>
---	--

Zie de grafiek bij opdracht b.
De oplossing is $-5 < x < 2\frac{3}{4}$.

E10 a $b = 3$

b $f(x) = {}^a\log(x + 3) + c$

$x = -1$ en $y = 0$ invullen geeft ${}^a\log(2) + c = 0$ (1)

$x = 1$ en $y = 1$ invullen geeft ${}^a\log(4) + c = 1$ (2)

Uit (1) volgt $c = -{}^a\log(2)$.

Uit (2) volgt $c = 1 - {}^a\log(4)$.

Gelijkstellen geeft $-{}^a\log(2) = 1 - {}^a\log(4)$

${}^a\log(4) - {}^a\log(2) = 1$

${}^a\log\left(\frac{4}{2}\right) = 1$

${}^a\log(2) = 1$

$2 = a^1$ dus $a = 2$

$a = 2$ invullen in vergelijking ${}^a\log(2) + c = 0$ (1) geeft

${}^2\log(2) + c = 0$

$1 + c = 0$

$c = -1$

E11 $\log(y) = 2 + 4,3 \cdot \log(x)$

$\log(y) = \log(10^2) + 4,3 \cdot \log(x)$

$\log(y) = \log(100) + \log(x^{4,3})$

$\log(y) = \log(100x^{4,3})$

$y = 100x^{4,3}$

E12 a $\log(I) = -0,009t + 1$

$I = 10^{-0,009t+1}$

$I = 10^{-0,009t} \cdot 10^1$

$I = 10 \cdot (10^{-0,009})^t$

Dus $b = 10$ en $g = 10^{-0,009}$ ($\approx 0,979$)

b Voor de halveringstijd geldt: $(10^{-0,009})^t = 0,5$

$$t = 10^{-0,009} \log(0,5) = \frac{\log(0,5)}{\log(10^{-0,009})} = \frac{\log(0,5)}{-0,009} \approx 33,45$$

Na ongeveer 33,5 dagen is de intensiteit gehalveerd.

- 1** a $128 = 2^7$
 b $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$
 c $\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = 2^{-4}$
 d $\frac{1}{2}\sqrt{2} = 2^{-1} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}}$
 e $16\sqrt[3]{2} = 2^4 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{4\frac{1}{3}}$
 f $\frac{1}{2}\sqrt{8} = 2^{-1} \cdot (2^3)^{\frac{1}{2}} = 2^{-1} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$
- 2** a $x^3 \cdot x^2 = x^5$
 b $(x^4)^3 = x^{12}$
 c $x^{-3} \cdot x^3 = x^0 (= 1)$
 d $(x^{2a})^3 = x^{2a \cdot 3} = x^{6a}$
 e $x^{3a} \cdot (x^a)^2 = x^{3a} \cdot x^{2a} = x^{5a}$
 f $(x^{2a} \cdot x^{3a})^3 = (x^{5a})^3 = x^{15a}$
- 3** a $(4a^3)^3 = 4^3 \cdot (a^3)^3 = 64 \cdot a^9$
 b $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = a^{\frac{7}{12}} = 1 \cdot a^{\frac{7}{12}}$
 c $\frac{6a}{2\sqrt{a}} = \frac{3a}{a^{\frac{1}{2}}} = 3a^{1-\frac{1}{2}} = 3 \cdot a^{\frac{1}{2}}$
 d $(a^2 \cdot 2a^3)^4 = (2a^5)^4 = 2^4 \cdot a^{20} = 16 \cdot a^{20}$
 e $a \cdot \sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt{a} = a^1 \cdot a^{\frac{2}{5}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{1+\frac{2}{5}+\frac{1}{2}} = a^{1\frac{9}{10}} = 1 \cdot a^{1\frac{9}{10}}$
 f $\frac{3}{a^2} \cdot \frac{a^5}{a\sqrt[4]{a^3}} = \frac{3a^5}{a^2 \cdot a^{\frac{3}{4}}} = \frac{3a^5}{a^{\frac{11}{4}}} = 3a^{5-\frac{11}{4}} = 3 \cdot a^{\frac{9}{4}}$
- 4** a $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$
 b $5\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{2} = 5 \cdot 6 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 30\sqrt{6}$
 c $(3\sqrt{2})^2 = 3^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 9 \cdot 2 = 18$
 d $(-2\sqrt{5})^4 = (-2)^4 \cdot (\sqrt{5})^4 = 16 \cdot 25 = 400$
 e $4\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = 7\sqrt{7}$
 f $8\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} + 7\sqrt{6} = 16\sqrt{6} + 7\sqrt{6} = 23\sqrt{6}$
 g $(\sqrt{6})^2 + 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 6 + 5\sqrt{6}$
 h $(5\sqrt{6})^3 = (5\sqrt{6})^2 \cdot (5\sqrt{6}) = 25 \cdot 6 \cdot 5\sqrt{6} = 750\sqrt{6}$
- 5** a Omdat $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2}$ geldt $\sqrt{18} = \sqrt{9} \times \sqrt{2}$, dus $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.
 b $\sqrt{48} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$
- 6** a $\sqrt{200} = \sqrt{100} \times \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$
 b $\sqrt{63} = \sqrt{9} \times \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$
 c $\sqrt{108} = \sqrt{36} \times \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$
 d $\sqrt{20} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
 e $\sqrt{125} = \sqrt{25} \times \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$
 f $\sqrt{72} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
 g $\sqrt{99} = \sqrt{9} \times \sqrt{11} = 3\sqrt{11}$
 h $\sqrt{52} = \sqrt{4} \times \sqrt{13} = 2\sqrt{13}$
- 7** a $\sqrt{20} + \sqrt{45} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$
 b $\frac{\sqrt{98}}{7} = \frac{7\sqrt{2}}{7} = \sqrt{2}$
 c $\frac{\sqrt{40} + \sqrt{90}}{5} = \frac{2\sqrt{10} + 3\sqrt{10}}{5} = \frac{5\sqrt{10}}{5} = \sqrt{10}$
 d $\sqrt{75} - \sqrt{48} = 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \sqrt{3}$
 e $\frac{1}{4}\sqrt{32} = \frac{1}{4} \cdot 4\sqrt{2} = \sqrt{2}$
 f $\frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{28} + \sqrt{63}} = \frac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{7} + 3\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{5\sqrt{7}} = 1$

$$8 \text{ a } \frac{13}{2p} - \frac{7}{3p} = \frac{39}{6p} - \frac{14}{6p} = \frac{25}{6p}$$

$$b \frac{a}{3b} + \frac{4}{3b} = \frac{a+4}{3b}$$

$$c \frac{9}{5a} - \frac{b}{3a} = \frac{27}{15a} - \frac{5b}{15a} = \frac{27-5b}{15a}$$

$$d \frac{11}{4a^2} - \frac{4}{2a} = \frac{11}{4a^2} - \frac{8a}{4a^2} = \frac{11-8a}{4a^2}$$

$$e \frac{3}{2a} \times \frac{4}{5a} = \frac{12}{10a^2} = \frac{6}{5a^2}$$

$$f \frac{4d}{11} \times \frac{d}{3} = \frac{4d^2}{33}$$

$$g \frac{2a}{5} \times \frac{2}{7a} = \frac{4a}{35a} = \frac{4}{35}$$

$$h \frac{3a}{2b} \times \frac{4b}{7a} = \frac{12ab}{14ab} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

$$9 \text{ a } f'(x) = 8x - 6$$

$$b \quad g(x) = 24x - 3x^2 + 56 - 7x$$

$$g(x) = -3x^2 + 17x + 56$$

$$g'(x) = -6x + 17$$

$$c \quad k'(x) = 24x^2 - 1$$

$$d \quad m(x) = 4x^5 + 28x^3$$

$$m'(x) = 20x^4 + 84x^2$$

$$10 \text{ a } f'(x) = 6x \text{ dus } f'(1) = 6 \cdot 1 = 6$$

De helling in (1, 9) is 6.

$$b \quad g'(x) = 6x^2 \text{ dus } g'(-2) = 6 \cdot (-2)^2 = 24$$

De helling in (-2, -16) is 24.

$$c \quad h'(x) = 1 - 2x \text{ dus } h'(0) = 1 - 2 \cdot 0 = 1$$

De helling in (0, 0) is 1.

$$d \quad k(x) = 5x(x^2 - x^4) \text{ geeft } k(x) = 5x^3 - 5x^5$$

$$k'(x) = 15x^2 - 25x^4 \text{ dus } k'(1) = 15 \cdot 1^2 - 25 \cdot 1^4 = -10$$

De helling in (1, 0) is -10.

$$11 \text{ a } 3x - 2 = -2x + 7$$

$$5x - 2 = 7$$

$$5x = 9$$

$$x = 1\frac{4}{5}$$

$$b \quad 3(2p - 4) = 5p - 3$$

$$6p - 12 = 5p - 3$$

$$p - 12 = -3$$

$$p = 9$$

$$c \quad \frac{1}{2}m - \frac{1}{3} = 1\frac{1}{4}m + 4\frac{1}{6}$$

$$6m - 4 = 15m + 50$$

$$6m = 15m + 54$$

$$-9m = 54$$

$$m = -6$$

$$d \quad 2(3 - 1,4x) = -2,3x$$

$$6 - 2,8x = -2,3x$$

$$-0,5x = -6$$

$$x = 12$$

$$e \quad (x - 6)(2x + 7) = 0$$

$$x - 6 = 0 \text{ of } 2x + 7 = 0$$

$$x = 6 \text{ of } 2x = -7$$

$$x = 6 \text{ of } x = -3\frac{1}{2}$$

$$f \quad (5p - 10)(p - 3) = 18(p - 3)$$

$$5p - 10 = 18 \text{ of } p - 3 = 0$$

$$5p = 28 \text{ of } p = 3$$

$$p = 5\frac{3}{5} \text{ of } p = 3$$

$$g \quad (8a + 1)^2 = 81$$

$$(8a + 1)^2 = 9^2$$

$$8a + 1 = -9 \text{ of } 8a + 1 = 9$$

$$8a = -10 \text{ of } 8a = 8$$

$$a = -1\frac{1}{4} \text{ of } a = 1$$

$$h \quad r(2r - 6) = (r - 3)^2$$

$$2r(r - 3) = (r - 3)(r - 3)$$

$$r - 3 = 0 \text{ of } 2r = r - 3$$

$$r = 3 \text{ of } r = -3$$

$$12 \text{ a } a = 1, b = 3, c = -1, \text{ dus } D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 13$$

$$x = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \approx -3,30 \text{ of } x = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \approx 0,30$$

$$b \quad a = 2, b = 5, c = 2, \text{ dus } D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$$

$$x = \frac{-5 - \sqrt{9}}{4} = -2 \text{ of } x = \frac{-5 + \sqrt{9}}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$c \quad a = 0,5, b = -1, c = 2, \text{ dus } D = (-1)^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot 2 = -3.$$

De discriminant is negatief, dus er is geen oplossing.

d $3x^2 - 2x - 4 = 0$

$a = 3, b = -2, c = -4$, dus $D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -4 = 52$

$x = \frac{2 - \sqrt{52}}{6} \approx -0,87$ of $x = \frac{2 + \sqrt{52}}{6} \approx 1,54$

13 a $p^3 = 100$
 $p = \sqrt[3]{100} \approx 4,64$

b $-2x^2 = -34$
 $x^2 = 17$
 $x = -\sqrt{17}$ of $x = \sqrt{17}$
 $x \approx -4,12$ of $x \approx 4,12$

c $p^4 - 12 = 9$
 $p^4 = 21$
 $p = -\sqrt[4]{21}$ of $p = \sqrt[4]{21}$
 $p \approx -2,14$ of $p \approx 2,14$

d $0,2x^5 = -10$
 $x^5 = -50$
 $x = \sqrt[5]{-50} \approx -2,19$

e $1,5b^4 = -10$
 $b^4 = -\frac{20}{3}$
geen oplossing

f $8 + 3x^{\frac{1}{3}} = 14$
 $3x^{\frac{1}{3}} = 6$
 $x^{\frac{1}{3}} = 2$
 $x = 2^3 = 8$

g $15 - 3p^{\frac{2}{3}} = 9$
 $-3p^{\frac{2}{3}} = -6$
 $p^{\frac{2}{3}} = 2$
 $p = 2^{\frac{3}{2}}$
 $p = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} \approx 2,83$

h $8 + 0,5x^{0,25} = 9$
 $0,5x^{0,25} = 1$
 $x^{0,25} = 2$
 $x = 2^4 = 16$

14 a $2^x = 8\sqrt{2}$
 $2^x = 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$
 $2^x = 2^{3\frac{1}{2}}$
 $x = 3\frac{1}{2}$

b $\frac{1}{3} \cdot 3^x = 27$
 $3^x = 81$
 $3^x = 3^4$
 $x = 4$

c $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 8 \cdot 2^x$
 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2 \cdot 2^x$
 $(2^{-1})^x = 2^1 \cdot 2^x$
 $2^{-x} = 2^{x+1}$
 $-x = x + 1$
 $-2x = 1$
 $x = -\frac{1}{2}$

d $25 \cdot 5^{4x-1} = 5\sqrt{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$
 $5^2 \cdot 5^{4x-1} = 5^{\frac{1}{2}} \cdot (5^{-1})^{2x}$
 $5^{4x+1} = 5^{\frac{1}{2}-2x}$
 $4x + 1 = \frac{1}{2} - 2x$
 $6x = \frac{1}{2}$
 $x = \frac{1}{12}$

e $7 \cdot 7^{3x+7} = 49\sqrt[3]{7}$
 $7^1 \cdot 7^{3x+7} = 7^2 \cdot 7^{\frac{1}{3}}$
 $7^{3x+8} = 7^{2\frac{1}{3}}$
 $3x + 8 = 2\frac{1}{3}$
 $3x = -5\frac{2}{3}$
 $x = -1\frac{8}{9}$

f $1000 \cdot 0,1^{x+10} = 0,01 \cdot (\sqrt[5]{100})^x$
 $10^3 \cdot (10^{-1})^{x+10} = 10^{-2} \cdot (10^{\frac{2}{5}})^x$
 $10^3 \cdot 10^{-x-10} = 10^{-2} \cdot 10^{\frac{2}{5}x}$
 $10^{-x-7} = 10^{\frac{2}{5}x-2}$
 $-x - 7 = \frac{2}{5}x - 2$
 $-1\frac{2}{5}x = 5$
 $x = -3\frac{4}{7}$

g $15 \cdot 3^{7x+9} = 5 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{8-x}$

$$3 \cdot 3^{7x+9} = (3^{-2})^{8-x}$$

$$3^{7x+10} = 3^{2x-16}$$

$$7x + 10 = 2x - 16$$

$$5x = -26$$

$$x = -5\frac{1}{5}$$

h $21 \cdot 9^{6-x} = 63 \cdot 27^{\frac{1}{2}x+4}$

$$9^{6-x} = 3 \cdot 27^{\frac{1}{2}x+4}$$

$$(3^2)^{6-x} = 3 \cdot (3^3)^{\frac{1}{2}x+4}$$

$$3^{12-2x} = 3^1 \cdot 3^{1\frac{1}{2}x+12}$$

$$3^{12-2x} = 3^{1\frac{1}{2}x+13}$$

$$12 - 2x = 1\frac{1}{2}x + 13$$

$$-3\frac{1}{2}x = 1$$

$$x = -\frac{2}{7}$$

15 a Het randpunt van de grafiek is $(-3, 0)$ en de grafiek stijgt.

Dan is het domein $[-3, \rightarrow)$ en het bereik $[0, \rightarrow)$.

b $\sqrt{x+3} = -x+3$

$$(\sqrt{x+3})^2 = (-x+3)^2$$

$$x+3 = x^2 - 6x + 9$$

$$0 = x^2 - 7x + 6, \text{ dus } x^2 - 7x + 6 = 0.$$

c $x^2 - 7x + 6 = 0$

$$(x-1)(x-6) = 0$$

$$x-1 = 0 \text{ of } x-6 = 0$$

$$x = 1 \text{ of } x = 6$$

Invullen van $x = 1$ in de vergelijking geeft $\sqrt{1+3} = -1+3$ en dit klopt.

Invullen van $x = 6$ geeft $\sqrt{6+3} = -6+3$ en dit klopt niet.

Alleen de oplossing $x = 1$ voldoet.

16 a $\sqrt{x-8} = 5$

$$(\sqrt{x-8})^2 = 5^2$$

$$x-8 = 25$$

$$x = 33$$

$$\text{controle: } \sqrt{33-8} = 5, \text{ klopt}$$

b $\sqrt{2a+3} = 5$

$$(\sqrt{2a+3})^2 = 5^2$$

$$2a+3 = 25$$

$$2a = 22$$

$$a = 11$$

$$\text{controle: } \sqrt{2 \cdot 11 + 3} = 5, \text{ klopt}$$

c $3 + \sqrt{2p+4} = 10$

$$\sqrt{2p+4} = 7$$

$$(\sqrt{2p+4})^2 = 7^2$$

$$2p+4 = 49$$

$$2p = 45$$

$$p = 22\frac{1}{2}$$

$$\text{controle: } 3 + \sqrt{2 \cdot 22\frac{1}{2} + 4} = 10, \text{ klopt.}$$

e $2 + \sqrt{q-2} = 6$

$$\sqrt{q-2} = 4$$

$$(\sqrt{q-2})^2 = 4^2$$

$$q-2 = 16$$

$$q = 18$$

$$\text{controle: } 2 + \sqrt{18-2} = 6, \text{ klopt}$$

f $\sqrt{6a-5} = a$

$$6a-5 = a^2$$

$$a^2 - 6a + 5 = 0$$

$$(a-1)(a-5) = 0$$

$$a = 1 \text{ of } a = 5$$

$$\text{controle: } \sqrt{6 \cdot 1 - 5} = 1, \text{ klopt}$$

$$\sqrt{6 \cdot 5 - 5} = 5, \text{ klopt}$$

g $\sqrt{3d+1} = 2+d$

$$(\sqrt{3d+1})^2 = (2+d)^2$$

$$3d+1 = 4+4d+d^2$$

$$d^2 + d + 3 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -11$$

De discriminant is -11 , dus er is geen oplossing.

d $3 + \sqrt{x} = x - 3$
 $\sqrt{x} = x - 6$
 $(\sqrt{x})^2 = (x - 6)^2$
 $x = x^2 - 12x + 36$
 $x^2 - 13x + 36 = 0$
 $(x - 4)(x - 9) = 0$
 $x - 4 = 0$ of $x - 9 = 0$
 $x = 4$ of $x = 9$
controle: $3 + \sqrt{4} = 4 - 3$, klopt niet.
 $3 + \sqrt{9} = 9 - 3$, klopt.
De oplossing is $x = 9$.

h $6x + \sqrt{x} = 7x - 20$
 $\sqrt{x} = x - 20$
 $(\sqrt{x})^2 = (x - 20)^2$
 $x = x^2 - 40x + 400$
 $x^2 - 41x + 400 = 0$
 $(x - 16)(x - 25) = 0$
 $x = 16$ of $x = 25$
controle: $6 \cdot 16 + \sqrt{16} = 7 \cdot 16 - 20$, klopt niet.
 $6 \cdot 25 + \sqrt{25} = 7 \cdot 25 - 20$, klopt.
De oplossing is $x = 25$.

17 a $\frac{5x}{x-3} + 6 = x - 6$ geeft $\frac{5x}{x-3} = x - 12$
Vermenigvuldig beide kanten van het = teken met $x - 3$.

$$\frac{5x}{x-3} \cdot (x-3) = (x-12)(x-3)$$

$$5x = (x-12)(x-3)$$

b $5x = x^2 - 3x - 12x + 36$
 $x^2 - 20x + 36 = 0$
 $(x-2)(x-18) = 0$
 $x-2 = 0$ of $x-18 = 0$
 $x = 2$ of $x = 18$

18 a $\frac{2}{x-3} = \frac{1}{2}$
 $2 = \frac{1}{2}(x-3)$
 $\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2} = 2$
 $\frac{1}{2}x = 3\frac{1}{2}$
 $x = 7$

d $\frac{4}{k+3} = 3k-2$
 $4 = (k+3)(3k-2)$
 $4 = 3k^2 - 2k + 9k - 6$
 $3k^2 + 7k - 10 = 0$
 $D = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot -10 = 169$
 $k = \frac{-7 - \sqrt{169}}{2 \cdot 3}$ of $k = \frac{-7 + \sqrt{169}}{2 \cdot 3}$
 $k = -3\frac{1}{3}$ of $k = 1$

b $\frac{1}{h+4} + 8 = 8\frac{1}{2}$
 $\frac{1}{h+4} = \frac{1}{2}$
 $1 = \frac{1}{2}(h+4)$
 $1 = \frac{1}{2}h + 2$
 $-1 = \frac{1}{2}h$
 $h = -2$

e $\frac{3x^2}{x+1} = x$
 $3x^2 = (x+1)x$
 $3x^2 = x^2 + x$
 $2x^2 - x = 0$
 $x(2x-1) = 0$
 $x = 0$ of $2x-1 = 0$
 $x = 0$ of $x = \frac{1}{2}$

c $\frac{7}{2a-3} = 2a+3$
 $7 = (2a-3)(2a+3)$
 $7 = 4a^2 - 9$
 $4a^2 = 16$
 $a^2 = 4$
 $a = -2$ of $a = 2$

f $\frac{1}{p-3} = \frac{1}{2p}$
 $p-3 = 2p$
 $p = -3$

- 19 a** Substitueer $y = -4x + 3$ in $4x + 3y = 1$.
 $4x + 3(-4x + 3) = 1$
 $4x - 12x + 9 = 1$
 $-8x = -8$
 $x = 1$
 $y = -4x + 3 = -4 \cdot 1 + 3 = -1$
 De oplossing van het stelsel is $x = 1$ en $y = -1$.
- b** De bovenste vergelijking $y + 3x = 0$ kun je herleiden tot $y = -3x$.
 Substitueer $y = -3x$ in $5x + y = 4$.
 $5x - 3x = 4$
 $2x = 4$
 $x = 2$
 $y = -3x = -3 \cdot 2 = -6$
 De oplossing van het stelsel is $x = 2$ en $y = -6$.
- c** De bovenste vergelijking $4p - q = 10$ kun je herleiden tot $q = 4p - 10$.
 Substitueer $q = 4p - 10$ in $13q - 7p = 5$.
 $13(4p - 10) - 7p = 5$.
 $52p - 130 - 7p = 5$
 $45p = 135$
 $p = 3$
 $q = 4p - 10 = 4 \cdot 3 - 10 = 2$.
 De oplossing van het stelsel is $p = 3$ en $q = 2$.
- d** De bovenste vergelijking kun je herleiden tot $8a - 3b = 12$ of $16a - 6b = 24$.
 De onderste vergelijking kun je herleiden tot $-7a + 6b = -2$.

$$\begin{cases} 8a - 12 = 3b \\ 6b - 7a + 2 = 0 \end{cases} \text{ ofwel } \begin{cases} 16a - 6b = 24 \\ -7a + 6b = -2 \end{cases}$$

 Deze twee vergelijkingen optellen geeft $9a = 22$ dus $a = \frac{22}{9} = 2\frac{4}{9}$.
 Dit substitueren in $8a - 3b = 12$ geeft $8 \cdot 2\frac{4}{9} - 3b = 12$
 $19\frac{5}{9} - 3b = 12$
 $-3b = -7\frac{5}{9}$ dus $b = 2\frac{14}{27}$
 De oplossing van het stelsel is $a = 2\frac{4}{9}$ en $b = 2\frac{14}{27}$.
- 20 a** $q = 2p + 6$
 $2p + 6 = q$
 $2p = q - 6$
 $p = 0,5q - 3$
- b** $q = 3p - 17$
 $3p - 17 = q$
 $3p = q + 17$
 $p = \frac{1}{3}q + 5\frac{2}{3}$
- c** $q = 1\frac{1}{2}p - 6$
 $1\frac{1}{2}p - 6 = q$
 $1\frac{1}{2}p = q + 6$
 $3p = 2q + 12$
 $p = \frac{2}{3}q + 4$
- d** $q = -0,75p + 0,27$
 $-0,75p + 0,27 = q$
 $-0,75p = q - 0,27$
 $p = -1\frac{1}{3}q + 0,36$
- e** $q = -2(3 - \frac{1}{2}p) + 3$
 $q = -6 + p + 3$
 $p - 3 = q$
 $p = q + 3$
- f** $q = p - \frac{1}{5}(p - 1)$
 $q = \frac{4}{5}p + \frac{1}{5}$
 $\frac{4}{5}p + \frac{1}{5} = q$
 $4p + 1 = 5q$
 $4p = 5q - 1$
 $p = 1\frac{1}{4}q - \frac{1}{4}$

21

$$p = \frac{2p-7}{q-4}$$

$$p(q-4) = 2p-7$$

$$pq-4p = 2p-7$$

$$pq-6p = -7$$

$$p(q-6) = -7$$

$$p = \frac{-7}{q-6}$$

(links en rechts $\times (q-4)$)

(haakjes weggewerkt)

(links en rechts $-2p$)

(ontbonden in factoren)

(links en rechts $:(q-6)$)

22 a

$$q-1 = \frac{3}{p}$$

$$p(q-1) = 3$$

$$p = \frac{3}{q-1}$$

$$\text{b } 2q - \frac{8}{p} = 3q - 4$$

$$-\frac{8}{p} = q - 4$$

$$\frac{8}{p} = -q + 4$$

$$8 = p(-q + 4)$$

$$p = \frac{8}{-q + 4}$$

$$\text{c } \frac{4q-p}{p+5} = \frac{3}{2}$$

$$2(4q-p) = 3(p+5)$$

$$8q-2p = 3p+15$$

$$-5p = -8q+15$$

$$p = 1\frac{3}{5}(q-3)$$

$$\text{d } \frac{3q-12}{p+4} = q-3$$

$$3q-12 = (q-3)(p+4)$$

$$3q-12 = pq+4q-3p-12$$

$$-q = pq-3p$$

$$pq-3p = -q$$

$$p(q-3) = -q$$

$$p = \frac{-q}{q-3}$$

$$\text{e } \frac{p+4}{q-p} = q$$

$$p+4 = q(q-p)$$

$$p+4 = q^2-pq$$

$$p+pq = q^2-4$$

$$p(q+1) = q^2-4$$

$$p = \frac{q^2-4}{q+1}$$

$$\text{f } q+5 = \frac{p+q}{p-q}$$

$$(q+5)(p-q) = p+q$$

$$pq-q^2+5p-5q = p+q$$

$$-q^2-6q = -4p-pq$$

$$-q^2-6q = p(-4-q)$$

$$\frac{-q^2-6q}{-4-q} = p$$

$$p = \frac{-q^2-6q}{-4-q}$$

$$p = \frac{q^2+6q}{q+4}$$

9 Afstanden en hoeken

Voorkennis

V1 a $PR = \sqrt{14^2 + 11^2} = \sqrt{317}$

b $AC = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{225} = 15$

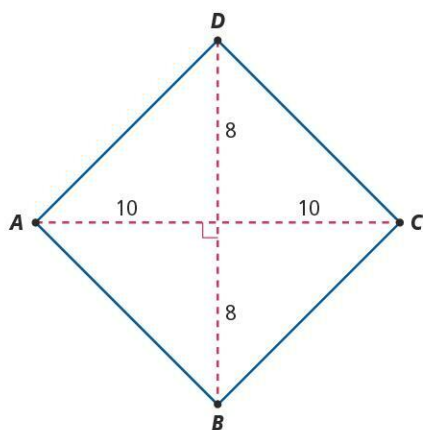
V2 a $AC = \sqrt{33^2 + 56^2} = \sqrt{4225} = 65$

b $DF = \sqrt{17^2 - 7^2} = \sqrt{240} \approx 15,5$

V3 a $PQ^2 = 21^2 = 441$ en $PR^2 + QR^2 = 9^2 + 19^2 = 442$ dus $\triangle PQR$ is niet rechthoekig.

b $TU^2 = 15^2 = 225$ en $ST^2 + SU^2 = (2\sqrt{14})^2 + 13^2 = 4 \cdot 14 + 169 = 225$ dus $\triangle STU$ is rechthoekig met $\angle S = 90^\circ$.

V4 a



b Van een ruit zijn alle zijden even lang,
 $AB = BC = CD = AD = \sqrt{10^2 + 8^2} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$

V5 a $AC = \sqrt{14^2 - 13^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \approx 5,2$

$\cos(\angle B) = \frac{13}{14}$ dus $\angle B \approx 22^\circ$ en $\angle C \approx 90^\circ - 22^\circ = 68^\circ$

b $\angle E = 180^\circ - 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ$

$\sin(\angle E) = \frac{DF}{DE}$ geeft $\sin(62^\circ) = \frac{DF}{13}$ dus $DF = 13\sin(62^\circ) \approx 11,5$

$\cos(\angle E) = \frac{EF}{DE}$ geeft $\cos(62^\circ) = \frac{EF}{13}$ dus $EF = 13\cos(62^\circ) \approx 6,1$

c $HK = \sqrt{7,2^2 - 3,1^2} = \sqrt{42,23} \approx 6,5$

$\sin(\angle K) = \frac{3,1}{7,2}$ dus $\angle K \approx 26^\circ$ en $\angle G \approx 90^\circ - 26^\circ = 64^\circ$

d $\angle P = 180^\circ - 90^\circ - 57^\circ = 33^\circ$

$\sin(\angle Q) = \frac{PR}{PQ}$ geeft $\sin(57^\circ) = \frac{16}{PQ}$ dus $PQ = \frac{16}{\sin(57^\circ)} \approx 19,1$

$\tan(\angle Q) = \frac{PR}{QR}$ geeft $\tan(57^\circ) = \frac{16}{QR}$ dus $QR = \frac{16}{\tan(57^\circ)} \approx 10,4$

V6 a AD is evenwijdig met BC dus $\angle DBC = \angle ADB = 90^\circ$ (Z-hoeken).

b $BD = \sqrt{19^2 - 10^2} = \sqrt{261} \approx 16,2$

c $BC = AD = 10$ en $DC = AB = 19$ geeft $\sin(\angle BDC) = \frac{BC}{DC} = \frac{10}{19}$ dus $\angle BDC \approx 32^\circ$ en $\angle BCD \approx 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$

V7 a In de punten (7, 0) en (0, 3) snijdt l de beide assen.

b De richtingscoëfficiënt van lijn l is $\frac{3-0}{0-7} = -\frac{3}{7}$

$$\tan(\angle(l, x\text{-as})) = \frac{3}{7} \text{ dus } \angle(l, x\text{-as}) \approx 23^\circ$$

c $\frac{x}{7} + \frac{y}{3} = 1$ geeft $\frac{y}{3} = -\frac{x}{7} + 1$

Beide kanten vermenigvuldigen met 3 geeft $y = -\frac{3}{7}x + 3$

V8 a Substitutie van $y = 2\frac{1}{2}x + 5$ in $2x - 3y = 7$ geeft

$$2x - 3\left(2\frac{1}{2}x + 5\right) = 7$$

$$2x - 7\frac{1}{2}x - 15 = 7$$

$$-5\frac{1}{2}x = 22$$

$$x = -4$$

$$y = 2\frac{1}{2} \cdot -4 + 5 = -5$$

Het snijpunt van k en m is $(-4, -5)$.

b De hoek die k maakt met de x -as is $\tan^{-1}\left(2\frac{1}{2}\right) = 68,198\dots^\circ$

$$m: 2x - 3y = 7 \text{ ofwel } -3y = -2x + 7 \text{ dus } y = \frac{2}{3}x - 2\frac{1}{3}$$

De richtingscoëfficiënt van m is $\frac{2}{3}$ dus de hoek die m maakt met de x -as is

$$\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33,690\dots^\circ$$

$$\text{Daaruit volgt } \angle(k, m) = 68,198\dots^\circ - 33,690\dots^\circ \approx 35^\circ$$

c $n \perp k$ dus $rc_k \cdot rc_n = -1$

$$2\frac{1}{2} \cdot rc_n = -1 \text{ dus } rc_n = -\frac{2}{5}$$

$$n: y = -\frac{2}{5}x + b \text{ gaat door } (4, -1) \text{ dus } -1 = -\frac{2}{5} \cdot 4 + b \text{ ofwel } b = -1 + \frac{8}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\text{De vergelijking is } n: y = -\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$$

9.1 Gelijkvormigheid

intro De hoeken van de originele driehoek zijn ook 83° , 41° en 56° .

De zijden zijn $\frac{10}{0,8} = 12,5$ cm, $\frac{12}{0,8} = 15$ cm en $\frac{8}{0,8} = 10$ cm.

1 a De driehoeken ABC en DEF zijn gelijkvormig. De drie overeenkomstige hoeken zijn dus gelijk.

b De vergrotingsfactor is $\frac{DE}{AB} = \frac{21}{7} = 3$

c $AC = \frac{12}{3} = 4$ en $EF = 5 \cdot 3 = 15$

2 a $\angle C$ zit in beide driehoeken en $\angle A = \angle CDE$ (F -hoeken) dus $\triangle ABC \sim \triangle DEC$.

$\triangle ABC$	$AC = 9$	$BC = \dots$	$AB = 13\frac{1}{3}$
$\triangle DEC$	$CD = 6$	$CE = 8$	$DE = \dots$

De vergrotingsfactor van $\triangle DEC$ naar $\triangle ABC$ is $\frac{AC}{CD} = \frac{9}{6} = 1\frac{1}{2}$

$$DE = \frac{13\frac{1}{3}}{1\frac{1}{2}} = 9 \text{ en } BC = 1\frac{1}{2} \cdot 8 = 12$$

c $BE = BC - CE = 12 - 8 = 4$

3 a $AB^2 + BC^2 = 8^2 + 6^2 = 100$ en $AC^2 = 10^2 = 100$

Daaruit volgt $AB^2 + BC^2 = AC^2$ en dus is $\triangle ABC$ rechthoekig.

b $\angle A$ zit in beide driehoeken en $\angle ADB = \angle ABC = 90^\circ$ dus $\triangle ABC \sim \triangle ADB$.

$\triangle ABC$	$AC = 10$	$BC = 6$	$AB = 8$
$\triangle ADB$	$AB = 8$	$BD = \dots$	$AD = \dots$

De vergrotingsfactor van $\triangle ABC$ naar $\triangle ADB$ is $\frac{AB}{AC} = \frac{8}{10} = 0,8$

$$AD = 0,8 \cdot 8 = 6,4$$

c $BD = 0,8 \cdot 6 = 4,8$

d $\angle A$ zit in beide driehoeken en $\angle ADB = \angle AED = 90^\circ$ dus $\triangle AED \sim \triangle ADB$.

$\triangle AED$	$AD = 6,4$	$ED = \dots$	$AE = 6,4$
$\triangle ADB$	$AB = 8$	$DB = 4,8$	$AD = 6,4$

De vergrotingsfactor van $\triangle ADB$ naar $\triangle AED$ is $\frac{AD}{AB} = \frac{6,4}{8} = 0,8$

$$DE = 0,8 \cdot 4,8 = 3,84$$

4 a In vierkant $ABCD$ zijn AB en CD evenwijdig dus $\angle AMD = \angle CDM$ omdat je hier te maken hebt met Z-hoeken (of $\angle AMD + \angle ADM = 90^\circ$ en $\angle CDM + \angle ADM = 90^\circ$ dus $\angle AMD = \angle CDM$)

b $\angle AMD = \angle CDM$ (zie opdracht a) en $\angle A = \angle CED = 90^\circ$, dus $\triangle ADM \sim \triangle ECD$

c $MD = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45}$

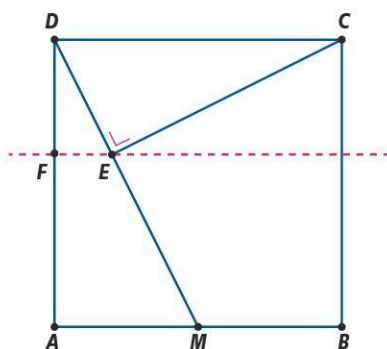
d

$\triangle ADM$	$AD = 6$	$AM = 3$	$DM = \sqrt{45}$
$\triangle ECD$	$EC = \dots$	$ED = \dots$	$CD = 6$

De vergrotingsfactor van $\triangle ADM$ naar $\triangle ECD$ is $\frac{CD}{DM} = \frac{6}{\sqrt{45}}$

$$EC = 6 \cdot \frac{6}{\sqrt{45}} = \frac{36}{\sqrt{45}} \approx 5,4 \text{ en } DE = 3 \cdot \frac{6}{\sqrt{45}} = \frac{18}{\sqrt{45}} \approx 2,7$$

5 a



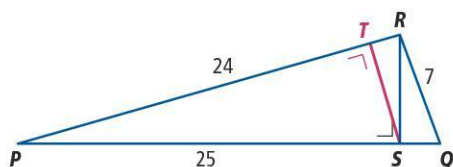
b Omdat $\angle D$ in beide driehoeken zit en $\angle A = \angle F = 90^\circ$ is $\triangle DFE \sim \triangle DAM$.

$\triangle DFE$	$DE = \frac{18}{\sqrt{45}}$	$FE = \dots$	$DF = \dots$
$\triangle DAM$	$DM = \sqrt{45}$	$AM = 3$	$DA = 6$

De vergrotingsfactor van $\triangle DAM$ naar $\triangle DFE$ is $\frac{DE}{DM} = \frac{\frac{18}{\sqrt{45}}}{\sqrt{45}} = \frac{18}{45} = \frac{2}{5}$

$$EF = \frac{2}{5} \cdot 3 = 1\frac{1}{5}$$

e



$\angle PTS = \angle PRQ = 90^\circ$ en hoek P zit in beide driehoeken dus $\triangle PST \sim \triangle PQR$.

$\triangle PST$	$PS = 23,04$	$PT = \dots$	$ST = \dots$
-----------------	--------------	--------------	--------------

$\triangle PQR$	$PQ = 25$	$PR = 24$	$QR = 7$
-----------------	-----------	-----------	----------

De vergrotingsfactor van $\triangle PQR$ naar $\triangle PST$ is $\frac{PS}{PQ} = \frac{23,04}{25}$

$$PT = \frac{23,04}{25} \cdot PR = \frac{23,04}{25} \cdot 24 \approx 22,1 \text{ en } ST = \frac{23,04}{25} \cdot QR = \frac{23,04}{25} \cdot 7 \approx 6,5$$

- 06 a** $\angle K = \angle P$ (Z-hoeken) en $\angle L = \angle N$ (Z-hoeken) dus $\triangle KML \sim \triangle PMN$
b $PN : KL = 4 : 10$ dus ook $PM : KM = 4 : 10$
c $KP = 18$ dus $PM = \frac{4}{14} \cdot 18 = 5\frac{1}{7}$ en $KM = \frac{10}{14} \cdot 18 = 12\frac{6}{7}$
d $NM : LM = 4 : 10$, $LN = 16$ dus $LM = \frac{10}{14} \cdot 16 = 11\frac{3}{7}$ en $NM = \frac{4}{14} \cdot 16 = 4\frac{4}{7}$

U1 $\triangle BCD \sim \triangle EBD$ met vergrotingsfactor $\frac{BC}{CD} = \frac{4}{3}$
 $DE = 4 \cdot \frac{4}{3} = 5\frac{1}{3}$ en $BE = 5 \cdot \frac{4}{3} = 6\frac{2}{3}$
 $\triangle AEB \sim \triangle BCD$ met vergrotingsfactor $\frac{BE}{CD} = \frac{6\frac{2}{3}}{3} = \frac{20}{9}$
 $AB = 4 \cdot \frac{20}{9} = 8\frac{8}{9}$ en $AE = 5 \cdot \frac{20}{9} = 11\frac{1}{9}$ (en $AC = 13\frac{8}{9}$ en $CE = 8\frac{1}{3}$)

- U2 a** $DM = r - 4$
b $CD^2 + DM^2 = MC^2$ geeft $8^2 + (r - 4)^2 = r^2$
 $64 + r^2 - 8r + 16 = r^2$
 $80 = 8r$
 $r = 10$
c $AC = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$
 $BD = DM + MB = 6 + 10 = 16$
 $BC = \sqrt{8^2 + 16^2} = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$
d $AB = AD + BD = 4 + 16 = 20$
 $AB^2 = 400$
 $AC^2 + BC^2 = 80 + 320 = 400$
 Omdat $AC^2 + BC^2 = AB^2$ volgt hieruit dat $\triangle ABC$ rechthoekig is met $\angle ACB = 90^\circ$

9.2 Sinusregel

intro Je kunt een hoogtelijn vanuit de voet van de toren in de bovenste driehoek tekenen. Je weet de hoek bij de top van de toren dus kun je de lengte van deze hoogtelijn en vervolgens de afstand vanaf het punt op het strand naar de voet van de toren uitrekenen. Met die afstand kun je in de onderste driehoek dan de hoogte van de duintop berekenen.

- 8 a** $\sin(64^\circ) = \frac{RS}{12}$ dus $RS = 12 \cdot \sin(64^\circ) = 10,785... \approx 10,79$
b $\sin(\angle Q) = \frac{RS}{RQ} = \frac{10,785...}{15}$ dus $\angle Q \approx 46^\circ$
 $\angle PRQ \approx 180^\circ - 64^\circ - 46^\circ = 70^\circ$

$$\text{c } \cos(64^\circ) = \frac{PS}{12} \text{ dus } PS = 12 \cdot \cos(64^\circ) = 5,260... \approx 5,26$$

$$\cos(46^\circ) = \frac{QS}{15} \text{ dus } QS \approx 15 \cdot \cos(46^\circ) \approx 10,42$$

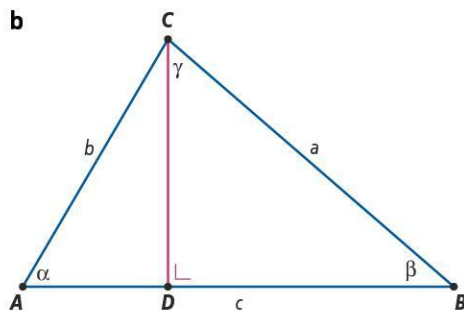
$$PQ = 5,260... + 10,424... \approx 15,69$$

$$\text{d } \frac{PQ}{\sin(\angle R)} = \frac{15,69}{\sin(70^\circ)} \approx 16,7$$

$$\frac{QR}{\sin(\angle P)} = \frac{15}{\sin(64^\circ)} \approx 16,7$$

$$\frac{PR}{\sin(\angle Q)} = \frac{12}{\sin(46^\circ)} \approx 16,7$$

9 a b



$$\text{c } \sin(\alpha) = \frac{h}{b} \text{ dus } h = b \cdot \sin(\alpha)$$

$$\sin(\beta) = \frac{h}{a} \text{ dus } h = a \cdot \sin(\beta)$$

d Omdat $h = a \cdot \sin(\beta)$ en $h = b \cdot \sin(\alpha)$ volgt hieruit dat

$$a \cdot \sin(\beta) = b \cdot \sin(\alpha)$$

$$\text{Beide kanten delen door } \sin(\alpha) \text{ en } \sin(\beta) \text{ geeft } \frac{a \cdot \sin(\beta)}{\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)} = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)}$$

$$\text{ofwel } \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

e Om dat te bewijzen heb je de hoogtelijn vanuit A nodig.

$$\text{10 a } \frac{b}{\sin(88^\circ)} = \frac{5}{\sin(49^\circ)} \text{ dus } b = \frac{5 \cdot \sin(88^\circ)}{\sin(49^\circ)} \approx 6,6 \text{ ofwel } AC \approx 6,6$$

$$\gamma = 180^\circ - 49^\circ - 88^\circ = 43^\circ$$

$$\frac{c}{\sin(43^\circ)} = \frac{5}{\sin(49^\circ)} \text{ dus } c = \frac{5 \cdot \sin(43^\circ)}{\sin(49^\circ)} \approx 4,5 \text{ ofwel } AB \approx 4,5$$

$$\text{b } \frac{17}{\sin(79^\circ)} = \frac{13}{\sin(\beta)} \text{ dus } \sin(\beta) = \frac{13 \cdot \sin(79^\circ)}{17} = 0,750... \text{ en } \beta \approx 49^\circ$$

$$\gamma \approx 180^\circ - 79^\circ - 49^\circ = 52^\circ$$

$$\frac{17}{\sin(79^\circ)} = \frac{c}{\sin(52^\circ)} \text{ dus } c = \frac{17 \cdot \sin(52^\circ)}{\sin(79^\circ)} \approx 13,6 \text{ ofwel } AB \approx 13,6$$

$$\text{c } \beta = 180^\circ - 67^\circ - 53^\circ = 60^\circ$$

$$\frac{a}{\sin(67^\circ)} = \frac{45}{\sin(60^\circ)} \text{ dus } a = \frac{45 \cdot \sin(67^\circ)}{\sin(60^\circ)} \approx 47,8 \text{ ofwel } BC \approx 47,8$$

$$\frac{c}{\sin(53^\circ)} = \frac{45}{\sin(60^\circ)} \text{ dus } c = \frac{45 \cdot \sin(53^\circ)}{\sin(60^\circ)} \approx 41,5 \text{ ofwel } AB \approx 41,5$$

$$\text{d } \frac{12}{\sin(\alpha)} = \frac{14}{\sin(82^\circ)} \text{ dus } \sin(\alpha) = \frac{12 \cdot \sin(82^\circ)}{14} = 0,848... \text{ en } \alpha \approx 58^\circ$$

$$\beta \approx 180^\circ - 82^\circ - 58^\circ = 40^\circ$$

$$\frac{b}{\sin(40^\circ)} = \frac{14}{\sin(82^\circ)} \text{ dus } b = \frac{14 \cdot \sin(40^\circ)}{\sin(82^\circ)} \approx 9,1 \text{ ofwel } AC \approx 9,1$$

11 a $\cos(65^\circ) = \frac{PN}{7}$ dus $PN = 7 \cdot \cos(65^\circ) = 2,958... \approx 3,0$

$\sin(65^\circ) = \frac{SN}{7}$ dus $SN = 7 \cdot \sin(65^\circ) = 6,344... \approx 6,3$

b $RN = \sqrt{17^2 - 6,344...^2} = 15,771... \approx 15,8$

$PR = PN + RN = 2,958... + 15,771... \approx 18,7$

c $\frac{7}{\sin(\angle PRS)} = \frac{17}{\sin(65^\circ)}$

$\sin(\angle PRS) = \frac{7 \cdot \sin(65^\circ)}{17} = 0,373... \text{ dus } \angle PRS = 21,912...^\circ \text{ en}$

$\angle PSR = 180^\circ - 65^\circ - 21,912...^\circ = 93,087...^\circ$

$\frac{PR}{\sin(93,087...^\circ)} = \frac{17}{\sin(65^\circ)}$ dus $PR = \frac{17 \cdot \sin(93,087...^\circ)}{\sin(65^\circ)} \approx 18,7$

12 a $\frac{6}{\sin(23^\circ)} = \frac{13}{\sin(\angle B)}$

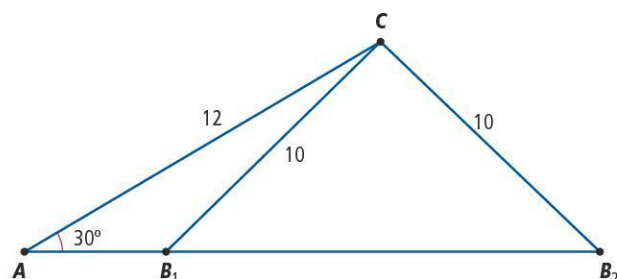
$\sin(\angle B) = \frac{13 \cdot \sin(23^\circ)}{6} = 0,84... \text{ dus } \angle B \approx 58^\circ$

b $\frac{6}{\sin(23^\circ)} = \frac{13}{\sin(\angle B)}$ dus $\sin(\angle B) = 0,84...$

c $\sin(180^\circ - 58^\circ) = 0,848... \text{ en } \sin(58^\circ) = 0,848...$

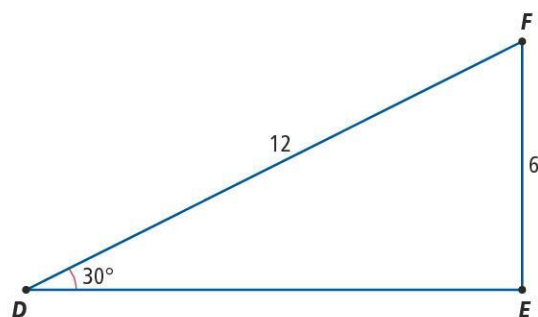
d $\angle B \approx 180^\circ - 58^\circ = 122^\circ$

13



$\frac{10}{\sin(30^\circ)} = \frac{12}{\sin(\angle B)}$

$\sin(\angle B) = \frac{12 \cdot \sin(30^\circ)}{10} = 0,6 \text{ dus } \angle B_2 \approx 37^\circ \text{ of } \angle B_1 \approx 180^\circ - 37^\circ = 143^\circ$



$\frac{6}{\sin(30^\circ)} = \frac{12}{\sin(\angle E)}$

$\sin(\angle E) = \frac{12 \cdot \sin(30^\circ)}{6} = 1 \text{ dus } \angle E = 90^\circ$

De andere mogelijkheid zou $\angle E_2 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, dus is er maar één mogelijkheid voor $\angle E$.

Driehoek DEF is dus door deze gegevens vastgelegd en voor driehoek ABC zijn er twee mogelijkheden.

$$14 \text{ a } \frac{10}{\sin(\angle Q)} = \frac{QR}{\sin(30^\circ)}$$

$$QR \cdot \sin(\angle Q) = 10 \cdot \sin(30^\circ)$$

$$QR \cdot \sin(\angle Q) = 10 \cdot \frac{1}{2}$$

$$QR \cdot \sin(\angle Q) = 5$$

$$\sin(\angle Q) = \frac{5}{QR}$$

b Als $QR < 5$ dan $\sin(\angle Q) > 1$ en dat kan niet.

c Er zijn twee mogelijkheden voor $\angle Q$ als $0 < \sin(\angle Q) < 1$ dus als $QR > 5$.

$$010 \text{ a } \frac{a}{\sin(73^\circ)} = \frac{10}{\sin(32^\circ)}$$

$$\text{b } a = \frac{10 \cdot \sin(73^\circ)}{\sin(32^\circ)} \approx 18,0$$

$$\text{c } \gamma = 180^\circ - 73^\circ - 32^\circ = 75^\circ$$

$$\text{d } \frac{10}{\sin(32^\circ)} = \frac{c}{\sin(75^\circ)} \text{ dus } c = \frac{10 \cdot \sin(75^\circ)}{\sin(32^\circ)} \approx 18,2$$

$$012 \text{ a } \frac{5}{\sin(27^\circ)} = \frac{8}{\sin(\beta)}$$

$$\sin(\beta) = \frac{8 \cdot \sin(27^\circ)}{5} = 0,7263... \approx 0,726$$

$$\text{b } \beta = \sin^{-1}(0,7263...) = 46,58...^\circ \approx 47^\circ$$

$$\text{c } 180^\circ - 46,58...^\circ = 133,41...^\circ$$

$$\sin(133,4...^\circ) = 0,7263... \text{ dus } \sin(180^\circ - \beta) = \sin(\beta).$$

d driehoek 1:

$$\beta \approx 47^\circ \text{ geeft } \gamma \approx 180^\circ - 27^\circ - 47^\circ = 106^\circ$$

$$\frac{5}{\sin(27^\circ)} = \frac{c}{\sin(106^\circ)} \text{ dus } AB = c = \frac{5 \cdot \sin(106^\circ)}{\sin(27^\circ)} \approx 10,6$$

driehoek 2:

$$\beta \approx 133^\circ \text{ geeft } \gamma \approx 180^\circ - 27^\circ - 133^\circ = 20^\circ$$

$$\frac{5}{\sin(27^\circ)} = \frac{c}{\sin(20^\circ)} \text{ dus } AB = c = \frac{5 \cdot \sin(20^\circ)}{\sin(27^\circ)} \approx 3,8$$

$$U3 \text{ a } \angle ABM = \angle BAM = \alpha_1 \text{ en } \angle ACM = \angle CAM = \alpha_2$$

$$\text{b } \angle AMB = 180^\circ - 2 \cdot \alpha_1 \text{ en } \angle AMC = 180^\circ - 2 \cdot \alpha_2$$

$$\text{dus } \angle BMC = 360^\circ - (180^\circ - 2\alpha_1) - (180^\circ - 2\alpha_2) = 2\alpha_1 + 2\alpha_2$$

c $\triangle BMC$ is gelijkbenig dus de middelloodlijn ME is tevens bissectrice van $\angle BMC$ en daaruit volgt $\angle CME = \frac{1}{2}(2\alpha_1 + 2\alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$

$$\text{d in } \triangle CME \text{ geldt } \sin(\angle CME) = \frac{CE}{CM}$$

$$\angle CME = \alpha, CE = \frac{1}{2}a \text{ en } CM = R, \text{ dit invullen in } \sin(\angle CME) = \frac{CE}{CM} \text{ geeft}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\frac{1}{2}a}{R}$$

$$\text{Daaruit volgt } R \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2}a \text{ ofwel } R = \frac{a}{2\sin(\alpha)}$$

9.3 Cosinusregel

intro Bij de tweede driehoek kun je $\angle C$ direct berekenen met de sinusregel.

Bij de eerste en derde driehoek moet je eerst de hoogtelijn vanuit C (of A) tekenen, vervolgens de zijde er tegenover lengte x en $8 - x$ noemen (of x en $5 - x$). Door twee keer de stelling van Pythagoras toe te passen kun je x berekenen en vervolgens $\angle C$.

15 a $\angle C = 180^\circ - 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$

$$\sin(40^\circ) = \frac{BC}{8} \text{ dus } BC = 8 \cdot \sin(40^\circ) = 5,142... \approx 5,1$$

$$\cos(40^\circ) = \frac{AB}{8} \text{ dus } AB = 8 \cdot \cos(40^\circ) = 6,128... \approx 6,1$$

b $(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BC^2}{AC^2} + \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BC^2 + AB^2}{AC^2}$

c $\triangle ABC$ is rechthoekig dus $BC^2 + AB^2 = AC^2$.

Dit invullen geeft $(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = \frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1$

16 a $\sin(80^\circ) = \frac{CD}{10}$ dus $CD = 10 \cdot \sin(80^\circ) = 9,848... \approx 9,8$

b $\cos(80^\circ) = \frac{AD}{10}$ dus $AD = 10 \cdot \cos(80^\circ) = 1,736... \approx 1,7$

$$BD = 15 - 1,736... = 13,26... \approx 13,3$$

c $BC = \sqrt{9,848...^2 + 13,26...^2} \approx 16,5$

17 a $\sin(\alpha) = \frac{CD}{b}$ dus $CD = b \cdot \sin(\alpha)$

$$\cos(\alpha) = \frac{AD}{b} \text{ dus } AD = b \cdot \cos(\alpha) \text{ en } BD = c - b \cdot \cos(\alpha)$$

b De antwoorden van opgave a invullen in $BC^2 = CD^2 + BD^2$ geeft

$$a^2 = (b \cdot \sin(\alpha))^2 + (c - b \cdot \cos(\alpha))^2$$

haakjes wegwerken

$$a^2 = b^2 \cdot (\sin(\alpha))^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) + b^2 \cdot (\cos(\alpha))^2$$

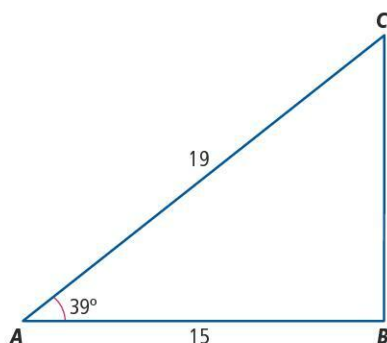
c $a^2 = b^2 \cdot (\sin(\alpha))^2 + b^2 \cdot (\cos(\alpha))^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$

$$a^2 = b^2 \cdot ((\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2) + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

$$a^2 = b^2 \cdot 1 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

18 a



Neem de cosinusregel met $a = BC$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

$$a^2 = 15^2 + 19^2 - 2 \cdot 15 \cdot 19 \cdot \cos(39^\circ) = 143,02...$$

$$BC = a = \sqrt{143,02...} \approx 12,0$$

$$\text{b } QR^2 = 35^2 + 13^2 - 2 \cdot 35 \cdot 13 \cdot \cos(85^\circ) = 1314,68\dots$$

$$QR = \sqrt{1314,68\dots} \approx 36,3$$

c Neem de cosinusregel met $\alpha = \angle L$:

$$KM^2 = KL^2 + LM^2 - 2 \cdot KL \cdot LM \cdot \cos(\alpha)$$

$$12^2 = 15^2 + 18^2 - 2 \cdot 15 \cdot 18 \cdot \cos(\alpha)$$

$$144 = 549 - 540 \cdot \cos(\alpha)$$

$$540 \cdot \cos(\alpha) = 405$$

$$\cos(\alpha) = \frac{405}{540} \text{ geeft } \alpha = \angle L \approx 41^\circ$$

Neem nu de cosinusregel met $\alpha = \angle M$:

$$KL^2 = KM^2 + LM^2 - 2 \cdot KM \cdot LM \cdot \cos(\alpha)$$

$$15^2 = 12^2 + 18^2 - 2 \cdot 12 \cdot 18 \cdot \cos(\alpha)$$

$$225 = 468 - 432 \cdot \cos(\alpha)$$

$$432 \cdot \cos(\alpha) = 243$$

$$\cos(\alpha) = \frac{243}{432} \text{ geeft } \alpha = \angle M \approx 56^\circ$$

$$19 \text{ a } c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

$$65^2 = 33^2 + 56^2 - 2 \cdot 33 \cdot 56 \cdot \cos(\gamma)$$

$$4225 = 4225 - 3696 \cdot \cos(\alpha)$$

$$3696 \cdot \cos(\gamma) = 0$$

$$\cos(\gamma) = 0 \text{ dus } \gamma = 90^\circ$$

b Driehoek ABC is rechthoekig.

c Als $\gamma = 90^\circ$ dan geldt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(90^\circ)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot 0 \text{ ofwel } c^2 = a^2 + b^2$$

$$20 \text{ a } 9^2 = 14^2 + 8^2 - 2 \cdot 14 \cdot 8 \cdot \cos(\angle F)$$

$$81 = 260 - 224 \cdot \cos(\angle F)$$

$$224 \cdot \cos(\angle F) = 179$$

$$\cos(\angle F) = \frac{179}{224} \text{ geeft } \angle F = 36,95\dots^\circ \approx 37^\circ$$

$$\text{b } \frac{8}{\sin(\angle E)} = \frac{9}{\sin(36,95\dots^\circ)}$$

$$\sin(\angle E) = \frac{8 \cdot \sin(36,95\dots^\circ)}{9} \text{ dus } \angle E \approx 32^\circ$$

$$\text{c } 14^2 = 9^2 + 8^2 - 2 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cos(\angle D)$$

$$196 = 145 - 144 \cdot \cos(\angle D)$$

$$144 \cdot \cos(\angle D) = -51$$

$$\cos(\angle D) = -\frac{51}{144} < 0$$

$$\text{d } \angle D = \cos^{-1}\left(-\frac{51}{144}\right) = 110,59\dots^\circ \approx 111^\circ$$

$$\angle D + \angle E + \angle F \approx 111^\circ + 32^\circ + 37^\circ = 180^\circ$$

21 a De stompe hoek ligt tegenover de langste zijde, dus tegenover zijde ST .

Dan is $\angle U$ de stompe hoek.

$$\text{b } 13^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \cos(\angle U)$$

$$169 = 117 - 108 \cdot \cos(\angle U)$$

$$108 \cdot \cos(\angle U) = -52$$

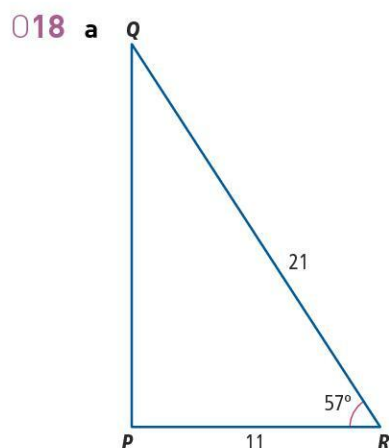
$$\cos(\angle U) = -\frac{52}{108} \text{ geeft } \angle U = 118,78\dots^\circ \approx 119^\circ$$

$$22 \text{ a } AH = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$AF = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{160}$$

$$FH = \sqrt{12^2 + 3^2} = \sqrt{153}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b } (\sqrt{153})^2 &= (\sqrt{160})^2 + 5^2 - 2 \cdot \sqrt{160} \cdot 5 \cdot \cos(\angle A) \\
 153 &= 160 + 25 - 10\sqrt{160} \cdot \cos(\angle A) \\
 \cos(\angle A) &= \frac{32}{10\sqrt{160}} \text{ geeft } \angle A = 75,34\dots^\circ \approx 75^\circ \\
 5^2 &= (\sqrt{160})^2 + (\sqrt{153})^2 - 2 \cdot \sqrt{160} \cdot \sqrt{153} \cdot \cos(\angle F) \\
 25 &= 160 + 153 - 2 \cdot \sqrt{160} \cdot \sqrt{153} \cdot \cos(\angle F) \\
 2 \cdot \sqrt{160} \cdot \sqrt{153} \cdot \cos(\angle F) &= 288 \\
 \cos(\angle F) &= \frac{288}{2 \cdot \sqrt{160} \cdot \sqrt{153}} \text{ dus } \angle F = 23,02\dots^\circ \approx 23^\circ \\
 \angle H &= 180^\circ - 75,34\dots^\circ - 23,02\dots^\circ \approx 82^\circ
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{b } PR &= b, \text{ dan is } PQ = c \\
 PQ^2 &= 21^2 + 11^2 - 2 \cdot 21 \cdot 11 \cdot \cos(57^\circ) \\
 PQ^2 &= 441 + 121 - 462 \cdot \cos(57^\circ) \\
 PQ^2 &= 310,37\dots \\
 \text{c } PQ &= \sqrt{310,37\dots} = 17,617\dots \approx 17,6 \\
 \text{d } \text{ Kies } QR &= a, PR = b \text{ en } PQ = c \\
 C^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \\
 15^2 &= 12^2 + 11^2 - 2 \cdot 12 \cdot 11 \cdot \cos(\angle R) \\
 225 &= 144 + 121 - 264 \cdot \cos(\angle R) \\
 264 \cdot \cos(\angle R) &= 40 \\
 \cos(\angle R) &= \frac{40}{264} = \frac{5}{33} \\
 \text{e } \angle R &= \cos^{-1}\left(\frac{5}{33}\right) = 81,285\dots^\circ \approx 81^\circ
 \end{aligned}$$

U4 Bereken eerst $\cos(\angle A)$ in $\triangle ABC$:

$$\begin{aligned}
 8^2 &= 9^2 + 7^2 - 2 \cdot 9 \cdot 7 \cdot \cos(\angle A) \\
 64 &= 81 + 49 - 126 \cdot \cos(\angle A) \\
 126 \cdot \cos(\angle A) &= 66 \\
 \cos(\angle A) &= \frac{66}{126}
 \end{aligned}$$

Bereken CD in $\triangle ADC$:

$$\begin{aligned}
 CD^2 &= 3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \cos(\angle A) \\
 CD^2 &= 9 + 49 - 42 \cdot \cos(\angle A) \\
 CD^2 &= 58 - 42 \cdot \frac{66}{126} = 36 \\
 CD &= \sqrt{36} = 6
 \end{aligned}$$

- U5 a** $15^2 = 10^2 + 9^2 - 2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \cos(\angle C)$
 $180 \cdot \cos(\angle C) = -44$
 $\cos(\angle C) = -\frac{44}{180}$ dus $\angle C = 104,149\dots^\circ \approx 104^\circ$
 $10^2 = 15^2 + 9^2 - 2 \cdot 15 \cdot 9 \cdot \cos(\angle B)$
 $270 \cdot \cos(\angle B) = 206$
 $\cos(\angle B) = \frac{206}{270}$ geeft $\angle B = 40,273\dots^\circ \approx 40^\circ$
 $\angle A = 180^\circ - 104,149\dots^\circ - 40,273\dots^\circ \approx 36^\circ$
- b** $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$
 Als $a^2 > b^2 + c^2$ dan is $2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) < 0$
 Daaruit volgt dat $\cos(\alpha) < 0$ en dat betekent dat $\angle A = \alpha > 90^\circ$

9.4 Meetkunde in een rooster

intro $(5, -5), (-5, 5), (-5, -5), (1, 7), (-1, 7), (1, -7)$ en $(-1, -7)$

- 23 a** $AC = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53} \approx 7,3$
 $AB = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} \approx 8,5$
 $BC = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17} \approx 4,1$
- b** $(\sqrt{53})^2 = (\sqrt{72})^2 + (\sqrt{17})^2 - 2 \cdot \sqrt{72} \cdot \sqrt{17} \cdot \cos(\angle B)$
 $53 = 89 - 2 \cdot \sqrt{72} \cdot \sqrt{17} \cdot \cos(\angle B)$
 $2 \cdot \sqrt{72} \cdot \sqrt{17} \cdot \cos(\angle B) = 36$
 $\cos(\angle B) = \frac{36}{2 \cdot \sqrt{72} \cdot \sqrt{17}}$ dus $\angle B = 59,036\dots^\circ \approx 59^\circ$
- c** $(\sqrt{17})^2 = (\sqrt{53})^2 + (\sqrt{72})^2 - 2 \cdot \sqrt{53} \cdot \sqrt{72} \cdot \cos(\angle A)$
 $17 = 125 - 2 \cdot \sqrt{53} \cdot \sqrt{72} \cdot \cos(\angle A)$
 $2 \cdot \sqrt{53} \cdot \sqrt{72} \cdot \cos(\angle A) = 108$
 $\cos(\angle A) = \frac{108}{2 \cdot \sqrt{53} \cdot \sqrt{72}}$ dus $\angle A = 29,054\dots^\circ \approx 29^\circ$
 $\angle C = 180^\circ - 59,036\dots^\circ - 29,054\dots^\circ \approx 92^\circ$
- 24 a** $KM = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52}$
 $ML = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$
 $KL = \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{65}$
- b** $(\sqrt{52})^2 + (\sqrt{13})^2 = (\sqrt{65})^2$ geeft $52 + 13 = 65$ dus $KM^2 + ML^2 = KL^2$ en daaruit volgt dat $\triangle KLM$ rechthoekig is.
- c** De oppervlakte is $\frac{1}{2} \cdot KM \cdot ML = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{52} \cdot \sqrt{13} = 13$.
- d** De richtingscoëfficiënt van $KM = \frac{3 - (-1)}{3 - (-3)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
 De richtingscoëfficiënt van $ML = \frac{0 - 3}{5 - 3} = \frac{-3}{2}$
- e** $\frac{2}{3} \cdot -\frac{3}{2} = -1$ dus $KM \perp ML$ waaruit volgt dat $\angle M = 90^\circ$.
- 25 a** De richtingscoëfficiënt van de loodlijn is 2 en een vergelijking is $y = 2x + b$.
 De loodlijn gaat door $C(7, 8)$ dus $8 = 2 \cdot 7 + b$.
 Dan is $b = -6$ en een vergelijking van de loodlijn uit C is $y = 2x - 6$.

- b** Een vergelijking van AB is $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

AB snijden met de loodlijn uit C geeft:

$$-\frac{1}{2}x + 4 = 2x - 6$$

$$-2\frac{1}{2}x = -10$$

$$x = 4$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot 4 + 4 = 2$$

Het snijpunt van AB met de loodlijn uit C is $S(4, 2)$.

$$d(C, AB) = d(C, S) = \sqrt{(7-4)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

- c** $AB = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}$

De oppervlakte van $\triangle ABC$ is $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot CS = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{45} \cdot \sqrt{45} = 22\frac{1}{2}$

- 26 a** De richtingscoëfficiënt van AB is $\frac{0-2}{6-0} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$

De richtingscoëfficiënt van m is 3 en $-\frac{1}{3} \cdot 3 = -1$ dus $m \perp AB$.

Het midden van AB is $(3, 1)$.

$(3, 1)$ invullen in $m: y = 3x - 8$ geeft $1 = 3 \cdot 3 - 8$ dit klopt.

m gaat door het midden van AB .

Hieruit volgt dat m de middelloodlijn is van lijnstuk AB .

- b** Een punt op $m: y = 3x - 8$ is bijvoorbeeld $P(0, -8)$.

De afstand tussen $A(0, 2)$ en $P(0, -8)$ is $AP = 10$

De afstand tussen $B(6, 0)$ en $P(0, -8)$ is $BP = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ dus $AP = BP$

- c** De afstand tussen $A(0, 2)$ en $X(q, 3q - 8)$ is $AX = \sqrt{(q-0)^2 + (3q-8-2)^2}$

$$AX = \sqrt{q^2 + (3q-10)^2}$$

$$AX = \sqrt{q^2 + 9q^2 - 60q + 100}$$

$$AX = \sqrt{10q^2 - 60q + 100}$$

- d** De afstand tussen $B(6, 0)$ en $X(q, 3q - 8)$ is $BX = \sqrt{(q-6)^2 + (3q-8-0)^2}$

$$BX = \sqrt{q^2 - 12q + 36 + 9q^2 - 48q + 64}$$

$$BX = \sqrt{10q^2 - 60q + 100}$$

Dus $AX = BX$ voor elke waarde van q .

- 27 a** $PQ = \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{65}$

$$QR = \sqrt{1^2 + 8^2} = \sqrt{65}$$

$PQ = QR$ dus $\triangle PQR$ is gelijkbenig.

- b** De richtingscoëfficiënt van PR is $\frac{2-9}{7-0} = \frac{-7}{7} = -1$ dus de richtingscoëfficiënt

van n is 1. Een vergelijking van n is $y = x + b$.

De coördinaten van $Q(8, 10)$ invullen geeft $10 = 8 + b$ dus $b = 2$.

$$n: y = x + 2$$

- c** Het midden van PR is $M(3\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2})$

$$5\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} + 2 \text{ dus } M \text{ ligt op } n.$$

n staat loodrecht op PR en gaat door het midden van PR , dat betekent dat n de middelloodlijn is van PR .

- d Alle punten op gelijke afstand van P en Q liggen op de middelloodlijn van PQ .

De richtingscoëfficiënt van PQ is $\frac{10-9}{8-0} = \frac{1}{8}$, dus de richtingscoëfficiënt van de middelloodlijn van PQ is -8 .

$y = -8x + b$ gaat door $S(4, 9\frac{1}{2})$, het midden van PQ , dus

$$9\frac{1}{2} = -8 \cdot 4 + b$$

$$b = 9\frac{1}{2} + 32 = 41\frac{1}{2}$$

Een vergelijking van de middelloodlijn van PQ is $y = -8x + 41\frac{1}{2}$

N is het snijpunt van de middelloodlijn met de x -as.

$$-8x + 41\frac{1}{2} = 0$$

$$8x = 41\frac{1}{2}$$

$$x = 5\frac{3}{16}$$

N is het punt $(5\frac{3}{16}, 0)$.

- 28 a $x_A = a$ invullen bij $y = 2x$ geeft $y_A = 2a$ dus de coördinaten van A zijn $(a, 2a)$.

b $AP = \sqrt{(11-a)^2 + (0-2a)^2}$

$$AP = \sqrt{121 - 22a + a^2 + 4a^2}$$

$$AP = \sqrt{5a^2 - 22a + 121}$$

c $AP = 13$

$$\sqrt{5a^2 - 22a + 121} = 13$$

$$5a^2 - 22a + 121 = 169$$

$$5a^2 - 22a - 48 = 0$$

$$D = 22^2 - 4 \cdot 5 \cdot -48 = 1444$$

$$a = \frac{22 + \sqrt{1444}}{2 \cdot 5} = 6 \text{ of } a = \frac{22 - \sqrt{1444}}{2 \cdot 5} = -1,6$$

- 29 a $x = p$ geeft $2p + y = 10$ ofwel $y = 10 - 2p$

De coördinaten van P zijn dus $(p, 10 - 2p)$.

b $OP = \sqrt{p^2 + (10 - 2p)^2}$

$$OP = \sqrt{p^2 + 100 - 40p + 4p^2}$$

$$OP = \sqrt{5p^2 - 40p + 100}$$

$$OP = 5 \text{ geeft } \sqrt{5p^2 - 40p + 100} = 5$$

$$5p^2 - 40p + 100 = 25$$

$$5p^2 - 40p + 75 = 0$$

$$p^2 - 8p + 15 = 0$$

$$(p-3)(p-5) = 0$$

$$p = 3 \text{ of } p = 5$$

- c De richtingscoëfficiënt van m is -2

De richtingscoëfficiënt van OP is $\frac{10-2p}{p}$

$$OP \perp m \text{ dus } \frac{10-2p}{p} \cdot -2 = -1$$

$$\frac{-20+4p}{p} = -1$$

$$-20+4p = -p$$

$$5p = 20$$

$$p = 4$$

- 30 a De coördinaten van $P(2, 6)$ invullen geeft $-3 \cdot 2 + 12 = 6$, dit klopt dus P ligt op n .

- b** De richtingscoëfficiënt van l is -1 , die van een loodlijn op l is dan 1 .
 Dus voor de loodlijn geldt $y = x + b$. Deze loodlijn gaat door P dus $6 = 2 + b$
 ofwel $b = 4$. Een vergelijking van de loodlijn op l door P is $y = x + 4$
 Snijden met l geeft $x + 4 = -x + 4$ dus $x = 0$. Het snijpunt is $S(0, 4)$.
 $d(P, l) = PS = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
 De richtingscoëfficiënt van m is 7 dus een vergelijking van een loodlijn op
 m is $y = -\frac{1}{7}x + b$. Deze loodlijn gaat door $P(2, 6)$ dus $6 = -\frac{1}{7} \cdot 2 + b$ ofwel
 $b = 6\frac{2}{7}$. Een vergelijking van de loodlijn op m door P is $y = -\frac{1}{7}x + 6\frac{2}{7}$
 Snijden met m geeft $7x - 28 = -\frac{1}{7}x + 6\frac{2}{7}$
 $7\frac{1}{7}x = 34\frac{2}{7}$
 $x = 4\frac{4}{5}$
 $y = 7 \cdot 4\frac{4}{5} - 28 = 5\frac{3}{5}$ dus het snijpunt is $T(4\frac{4}{5}, 5\frac{3}{5})$.
 $d(P, m) = PT = \sqrt{(2\frac{4}{5})^2 + (\frac{2}{5})^2} = \sqrt{8}$
- c** De richtingscoëfficiënt van l is -1 dus l maakt een hoek van 45° met de x -as.
 De richtingscoëfficiënt van n is -3 dus n maakt een hoek van
 $\tan^{-1}(3) = 71,56\dots^\circ$ met de x -as. Hieruit volgt $\angle(l, n) = 71,56\dots^\circ - 45^\circ \approx 27^\circ$.
- d** De richtingscoëfficiënt van m is 7 dus m maakt een
 hoek van $\tan^{-1}(7) = 81,86\dots^\circ$ met de x -as.
 Hieruit volgt $\angle(m, n) = 180^\circ - 81,86\dots^\circ - 71,56\dots^\circ \approx 27^\circ$.
- e** n is de bissectrice van één van de hoeken die l en m met elkaar maken.

- 025 a** De richtingscoëfficiënt is $\frac{0-6}{2-(-1)} = \frac{-6}{3} = -2$
- b** $y = -2x + b$ door $(2, 0)$ dus $0 = -2 \cdot 2 + b$ waaruit volgt $b = 4$
 Een vergelijking van l is $y = -2x + 4$.
- c** $rc_n \cdot -2 = -1$ dus $rc_n = \frac{1}{2}$
- d** $y = \frac{1}{2}x + b$ door $R(3, 5)$ dus $5 = \frac{1}{2} \cdot 3 + b$ waaruit volgt $b = 3\frac{1}{2}$
 Een vergelijking van n is $y = \frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$
- e** $-2x + 4 = \frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$
 $-2\frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}$
 $x = \frac{1}{5}$
 $y = -2 \cdot \frac{1}{5} + 4 = 3\frac{3}{5}$ dus het snijpunt is $S(\frac{1}{5}, 3\frac{3}{5})$
- f** $d(R, l) = RS = \sqrt{(3 - \frac{1}{5})^2 + (5 - 3\frac{3}{5})^2} = \sqrt{(2\frac{4}{5})^2 + (1\frac{2}{5})^2} = \sqrt{9\frac{4}{5}}$
- g** $PQ = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (0 - 6)^2} = \sqrt{3^2 + (-6)^2} = \sqrt{45}$
 De oppervlakte van $\triangle PQR$ is $\frac{1}{2} \cdot PQ \cdot RS = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{45} \cdot \sqrt{9\frac{4}{5}} = 10\frac{1}{2}$

- 028 a** $PQ = \sqrt{(0-p)^2 + (6-p)^2}$
 $PQ = \sqrt{p^2 + 36 - 12p + p^2}$
 $PQ = \sqrt{2p^2 - 12p + 36}$
- b** $\sqrt{2p^2 - 12p + 36} = \sqrt{50}$
 $2p^2 - 12p + 36 = 50$
 $2p^2 - 12p - 14 = 0$
 $p^2 - 6p - 7 = 0$
 $(p-7)(p+1) = 0$
 $p = 7$ of $p = -1$
- c** $P(7, 7)$ of $P(-1, -1)$

U6 a $BP = \sqrt{(x-11)^2 + (y-3)^2}$

b $(x-3)^2 + (y-5)^2 = (x-11)^2 + (y-3)^2$
 $x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = x^2 - 22x + 121 + y^2 - 6y + 9$
 $-6x - 10y + 34 = -22x - 6y + 130$
 $-4y = -16x + 96$
 $y = 4x - 24$

Hieruit volgt dat alle punten P op de rechte lijn $y = 4x - 24$ liggen.

- c** De richtingscoëfficiënt van AB is $\frac{3-5}{11-3} = -\frac{1}{4}$ en omdat $4 \cdot -\frac{1}{4} = -1$ staat de lijn uit opdracht b loodrecht op AB . Het midden van AB is $M(7, 4)$.
 $4 = 4 \cdot 7 - 24$, klopt dus $M(7, 4)$ ligt op de lijn $y = 4x - 24$.
 Hieruit volgt dat $y = 4x - 24$ de middelloodlijn is van AB .

9.5 Een aanpak kiezen

intro Controleren of M het midden van BC is en dan met behulp van de richtingscoëfficiënten controleren of AM loodrecht staat op BC , of dit doen door goniometrie te gebruiken. Ook zou je dit kunnen doen door de afstanden AB en AC te berekenen.

31 a De richtingscoëfficiënt van l is $\frac{1-2}{4-3} = \frac{-1}{7}$ dus $l: y = -\frac{1}{7}x + b$

De coördinaten van $B(4, 1)$ invullen geeft $1 = -\frac{1}{7} \cdot 4 + b$ ofwel $b = 1\frac{4}{7}$

Een vergelijking van l is $y = -\frac{1}{7}x + 1\frac{4}{7}$

b De richtingscoëfficiënt van m is $\frac{4-2}{3-3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ dus $m: y = \frac{1}{3}x + b$

De coördinaten van $A(-3, 2)$ invullen geeft $2 = \frac{1}{3} \cdot -3 + b$ ofwel $b = 3$

Een vergelijking van m is $y = \frac{1}{3}x + 3$

- c** Stel n is een horizontale lijn door A .

$\angle(l, n) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = 8,13\dots^\circ$

$\angle(m, n) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 18,43\dots^\circ$

$\angle(l, m) = 18,43\dots^\circ + 8,13\dots^\circ \approx 27^\circ$

d $AB = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$

$AC = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$

$BC = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$\triangle ABC$ is rechthoekig omdat $AC^2 + BC^2 = AB^2$

e $\sin(\angle BAC) = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{50}}$ dus $\angle(BAC) \approx 27^\circ$

32 a De richtingscoëfficiënt van PQ is $\frac{-4-2}{0-4} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$

Een vergelijking van PQ is $y = -1\frac{1}{2}x - 4$

b De richtingscoëfficiënt van PR is $\frac{3-2}{4-4} = \frac{1}{8}$ dus $y = \frac{1}{8}x + b$

$P(-4, 2)$ ligt op de lijn dus $2 = \frac{1}{8} \cdot -4 + b$ ofwel $b = 2\frac{1}{2}$

Een vergelijking van PR is $y = \frac{1}{8}x + 2\frac{1}{2}$

- c Stel l is een horizontale lijn door P .

$$\angle(PR, l) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) = 7,125\dots^\circ$$

$$\angle(l, PQ) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 56,309\dots^\circ$$

$$\angle(PQ, PR) = 7,125\dots^\circ + 56,309\dots^\circ \approx 63^\circ$$

d $PR = \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{65}$

$$PQ = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52}$$

$$QR = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$$

$PR = QR$ dus $\triangle PQR$ is gelijkbenig.

e Het midden van $P(-4, 2)$ en $Q(0, -4)$ is $\left(\frac{-4+0}{2}, \frac{2+(-4)}{2}\right)$ ofwel $M(-2, -1)$

f In driehoek PMR geldt $\cos(\angle QPR) = \frac{\frac{1}{2}PQ}{PR} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{52}}{\sqrt{65}}$ dus $\angle QPR \approx 63^\circ$

33 a De richtingscoëfficiënt van lijn AB is $\frac{-1-0}{10-(-3)} = -\frac{1}{13}$

De richtingscoëfficiënt van lijn AC is $\frac{1-0}{3-(-3)} = \frac{1}{6}$

De richtingscoëfficiënt van lijn BC is $\frac{1-(-1)}{3-10} = -\frac{2}{7}$

b $\tan(\angle(AB, x\text{-as})) = \frac{1}{13}$ dus $\angle(AB, x\text{-as}) = 4,398\dots^\circ$

$$\tan(\angle(AC, x\text{-as})) = \frac{1}{6} \text{ dus } \angle(AC, x\text{-as}) = 9,462\dots^\circ$$

$$\angle A = \angle(AB, AC) = 4,398\dots^\circ + 9,462\dots^\circ = 13,861\dots^\circ \approx 14^\circ$$

$$\tan(\angle(BC, x\text{-as})) = \frac{2}{7} \text{ dus } \angle(BC, x\text{-as}) = 15,945\dots^\circ$$

$$\angle B = \angle(AB, BC) = 15,945\dots^\circ - 4,398\dots^\circ = 11,546\dots^\circ \approx 12^\circ$$

$$\angle C = 180^\circ - 13,861\dots^\circ - 11,546\dots^\circ \approx 155^\circ$$

c $AB = \sqrt{13^2 + 1^2} = \sqrt{170}$

$$AC = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37}$$

$$BC = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53}$$

$$53 = 170 + 37 - 2 \cdot \sqrt{170} \cdot \sqrt{37} \cdot \cos(\angle A)$$

$$2 \cdot \sqrt{170} \cdot \sqrt{37} \cdot \cos(\angle A) = 154$$

$$\cos(\angle A) = \frac{154}{2 \cdot \sqrt{170} \cdot \sqrt{37}} \text{ dus } \angle A = 13,861\dots^\circ \approx 14^\circ$$

$$37 = 170 + 53 - 2 \cdot \sqrt{170} \cdot \sqrt{53} \cdot \cos(\angle B)$$

$$2 \cdot \sqrt{170} \cdot \sqrt{53} \cdot \cos(\angle B) = 186$$

$$\cos(\angle B) = \frac{186}{2 \cdot \sqrt{170} \cdot \sqrt{53}} \text{ dus } \angle B = 11,546\dots^\circ \approx 12^\circ$$

$$\angle C = 180^\circ - 13,861\dots^\circ - 11,546\dots^\circ \approx 155^\circ$$

34 $\angle PQT = 180^\circ - 25^\circ = 155^\circ$

$$\angle PTQ = 180^\circ - 19^\circ - 155^\circ = 6^\circ$$

De sinusregel in $\triangle PQT$ toepassen geeft $\frac{QT}{\sin(19^\circ)} = \frac{50}{\sin(6^\circ)}$

$$QT = \frac{50 \cdot \sin(19^\circ)}{\sin(6^\circ)} = 155,731\dots$$

In $\triangle QVT$ geldt $\sin(25^\circ) = \frac{\text{hoogte toren}}{QT}$

$$\text{hoogte toren} = QT \cdot \sin(25^\circ) = 155,731\dots \cdot \sin(25^\circ) \approx 66 \text{ meter}$$

35 a $A(b - 20, 0)$

b De richtingscoëfficiënt van AC is $\frac{0 - 8}{b - 20 - 0} = \frac{-8}{b - 20}$

De richtingscoëfficiënt van BC is $\frac{0 - 8}{b - 0} = \frac{-8}{b}$

c $AC \perp BC$ dus $\frac{-8}{b - 20} \cdot \frac{-8}{b} = -1$

$$\frac{64}{b^2 - 20b} = -1$$

$$64 = -b^2 + 20b$$

$$b^2 - 20b + 64 = 0$$

$$(b - 4)(b - 16) = 0$$

$$b = 4 \text{ of } b = 16$$

d $\angle OAC = 90^\circ - \angle OCA$ en $\angle OCB = 90^\circ - \angle OCA$ dus $\angle OAC = \angle OCB$.
Verder geldt $\angle AOC = \angle BOC = 90^\circ$ dus $\triangle AOC \sim \triangle COB$.

e Omdat de driehoeken gelijkvormig zijn geldt $\frac{OC}{OB} = \frac{AO}{CO}$ dus $\frac{8}{b} = \frac{20 - b}{8}$

Daaruit volgt $20b - b^2 = 64$ ofwel $b^2 - 20b + 64 = 0$

$$(b - 4)(b - 16) = 0$$

$$b = 4 \text{ of } b = 16$$

36 $\angle BAD = \frac{1}{2} \cdot 72^\circ = 36^\circ$

$$\angle ADB = 180^\circ - 72^\circ - 36^\circ = 72^\circ$$

Dus $\triangle ABD$ is gelijkbenig en hieruit volgt $AB = AD = 4$.

$$\angle C = 180^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 36^\circ$$

$$\frac{AC}{\sin(72^\circ)} = \frac{4}{\sin(36^\circ)}$$

$$AC = \frac{4 \cdot \sin(72^\circ)}{\sin(36^\circ)} \approx 6,5$$

$$BC = AC \approx 6,5$$

37 De trisectrices delen de hoeken A , B en C elk in drie hoeken van 20° .

$$\angle ARB = 180^\circ - 20^\circ - 20^\circ = 140^\circ$$

$$\frac{AR}{\sin(20^\circ)} = \frac{6}{\sin(140^\circ)} \text{ dus } AR = \frac{6 \cdot \sin(20^\circ)}{\sin(140^\circ)} = 3,192\dots$$

$$\angle ARQ = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ$$

$$\frac{QR}{\sin(20^\circ)} = \frac{3,192\dots}{\sin(80^\circ)} \text{ dus } QR = \frac{3,192\dots \cdot \sin(20^\circ)}{\sin(80^\circ)} \approx 1,1$$

$$PR = PQ = QR \approx 1,1$$

035 a $AD = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$

b $\angle CAD = 90^\circ - \angle ACD$ en ook $\angle BCD = 90^\circ - \angle ACD$.

c Beide driehoeken hebben een hoek van 90° en $\angle CAD = \angle BCD$.

d

$\triangle CAD$	$AD = \sqrt{11}$	$CD = 5$	$CA = 6$
$\triangle BCD$	$CD = 5$	$BD = \dots$	$BC = \dots$

De vergrotingsfactor van $\triangle CAD$ naar $\triangle BCD$ is $\frac{CD}{AD} = \frac{5}{\sqrt{11}}$ dus

$$BD = 5 \cdot \frac{5}{\sqrt{11}} \approx 7,5$$

U7 a De richtingscoëfficiënt van AB is $\frac{-5 - -1}{6 - -2} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$ en omdat

$$rc_l \cdot rc_{AB} = 2 \cdot -\frac{1}{2} = -1 \text{ geldt } l \perp AB.$$

Het midden van AB is $\left(\frac{-2 + 6}{2}, \frac{-1 + -5}{2}\right)$ dus $(2, -3)$.

De coördinaten van dit punt invullen in $y = 2x - 7$ geeft $-3 = 2 \cdot 2 - 7$

Dit klopt, dus l gaat ook door het midden van AB en is daardoor de middelloodlijn van AB .

b $AX = \sqrt{(p - -2)^2 + (2p - 7 - -1)^2}$

$$AX = \sqrt{(p + 2)^2 + (2p - 6)^2}$$

$$AX = \sqrt{p^2 + 4p + 4 + 4p^2 - 24p + 36}$$

$$AX = \sqrt{5p^2 - 20p + 40}$$

$$BX = \sqrt{(p - 6)^2 + (2p - 7 - -5)^2}$$

$$BX = \sqrt{(p - 6)^2 + (2p - 2)^2}$$

$$BX = \sqrt{p^2 - 12p + 36 + 4p^2 - 8p + 4}$$

$$BX = \sqrt{5p^2 - 20p + 40}$$

Dus $AX = BX$ voor elke waarde van p .

c De richtingscoëfficiënt van AX is $\frac{2p - 7 - -1}{p - -2} = \frac{2p - 6}{p + 2}$

De richtingscoëfficiënt van BX is $\frac{2p - 7 - -5}{p - 6} = \frac{2p - 2}{p - 6}$

Als $AX \perp BX$ dan moet gelden $\frac{2p - 6}{p + 2} \cdot \frac{2p - 2}{p - 6} = -1$

$$\frac{4p^2 - 16p + 12}{p^2 - 4p - 12} = -1$$

$$4p^2 - 16p + 12 = -p^2 + 4p + 12$$

$$5p^2 - 20p = 0$$

$$5p(p - 4) = 0$$

$$p = 0 \text{ of } p = 4$$

d $\triangle ABX$ is gelijkzijdig als $AB = AX (= BX)$

$$AB = \sqrt{(6 - -2)^2 + (-5 - -1)^2} = \sqrt{8^2 + (-4)^2} = \sqrt{80}$$

$$AX = \sqrt{(p - -2)^2 + (2p - 7 - -1)^2} = \sqrt{(p + 2)^2 + (2p - 6)^2}$$

$$(p + 2)^2 + (2p - 6)^2 = 80$$

$$p^2 + 4p + 4 + 4p^2 - 24p + 36 = 80$$

$$5p^2 - 20p - 40 = 0$$

$$p^2 - 4p - 8 = 0$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -8 = 48$$

$$p = \frac{4 + \sqrt{48}}{2} \approx 5,5 \text{ of } p = \frac{4 - \sqrt{48}}{2} \approx -1,5$$

9.6 Gemengde opdrachten

- 38 a** $\frac{12}{\sin(\alpha)} = \frac{13}{\sin(93^\circ)}$
 $\sin(\alpha) = \frac{12 \cdot \sin(93^\circ)}{13} = 0,921\dots$ dus $\alpha = 67,192\dots^\circ \approx 67^\circ$
 $\gamma = 180^\circ - 93^\circ - 67,192\dots^\circ = 19,807\dots^\circ \approx 20^\circ$
 $\frac{c}{\sin(19,807\dots^\circ)} = \frac{13}{\sin(93^\circ)}$
 $c = \frac{13 \cdot \sin(19,807\dots^\circ)}{\sin(93^\circ)} \approx 4,4$
- b** $\angle B = 180^\circ - 22^\circ - 79^\circ = 79^\circ$
 $\frac{BC}{\sin(22^\circ)} = \frac{14}{\sin(79^\circ)}$
 $BC = \frac{14 \cdot \sin(22^\circ)}{\sin(79^\circ)} \approx 5,3$
 $\angle B = \angle C$ dus $\triangle ABC$ is gelijkbenig en hieruit volgt $AB = AC = 14$
- c** $3,3^2 = 5,6^2 + 6,5^2 - 2 \cdot 5,6 \cdot 6,5 \cdot \cos(\alpha)$
 $72,8 \cdot \cos(\alpha) = 62,72$
 $\cos(\alpha) = \frac{62,72}{72,8}$ dus $\alpha = 30,510\dots^\circ \approx 31^\circ$
 $\frac{5,6}{\sin(\beta)} = \frac{3,3}{\sin(30,510\dots^\circ)}$
 $\sin(\beta) = \frac{5,6 \cdot \sin(30,510\dots^\circ)}{3,3}$ dus $\beta = 59,489\dots^\circ \approx 59^\circ$
 $\gamma = 180^\circ - 30,510\dots^\circ - 59,489\dots^\circ = 90^\circ$
- 39 a** $KL = \sqrt{(6 - -7)^2 + (-3 - 3)^2} = \sqrt{13^2 + (-6)^2} = \sqrt{205}$
 $KM = \sqrt{(5 - -7)^2 + (8 - 3)^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$
 $LM = \sqrt{(5 - 6)^2 + (8 - -3)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 11^2} = \sqrt{122}$
- b** $\sqrt{205}^2 = 13^2 + \sqrt{122}^2 - 2 \cdot 13 \cdot \sqrt{122} \cdot \cos(\angle M)$
 $205 = 169 + 122 - 2 \cdot 13 \cdot \sqrt{122} \cdot \cos(\angle M)$
 $26 \cdot \sqrt{122} \cos(\angle M) = 86$
 $\cos(\angle M) = 0,299\dots$ dus $\angle M = 72,574\dots^\circ \approx 73^\circ$
 $\frac{13}{\sin(\angle L)} = \frac{\sqrt{205}}{\sin(72,574\dots^\circ)}$
 $\sin(\angle L) = \frac{13 \cdot \sin(72,574\dots^\circ)}{\sqrt{205}} = 0,866\dots$ dus $\angle L = 60,030\dots^\circ \approx 60^\circ$
 $\angle K = 180^\circ - 72,574\dots^\circ - 60,030\dots^\circ \approx 47^\circ$
- c** $\sin(\angle L) = \frac{MN}{LM}$ dus
 $MN = LM \cdot \sin(\angle L) = \sqrt{122} \cdot \sin(60,030\dots^\circ) = 9,56\dots \approx 9,6$
- d** De oppervlakte van $\triangle KLM$ is $\frac{1}{2} \cdot KL \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{205} \cdot 9,56\dots = 68,5$

40 a $12^2 + 16^2 = 400$ dus $PR^2 + QR^2 = PQ^2$. Hieruit volgt dat $\angle PRQ = 90^\circ$.

b $12^2 = 20^2 + 16^2 - 2 \cdot 20 \cdot 16 \cdot \cos(\angle Q)$

$$144 = 400 + 256 - 2 \cdot 20 \cdot 16 \cdot \cos(\angle Q)$$

$$640 \cdot \cos(\angle Q) = 512$$

$$\cos(\angle Q) = \frac{512}{640}$$

in $\triangle SQR$ geldt $RS^2 = 16^2 + 15^2 - 2 \cdot 16 \cdot 15 \cdot \cos(\angle Q)$

$$RS^2 = 256 + 225 - 2 \cdot 16 \cdot 15 \cdot \frac{512}{640} = 97 \text{ dus } RS = \sqrt{97} \approx 9,85$$

in $\triangle TQR$ geldt $RT^2 = 16^2 + 10^2 - 2 \cdot 16 \cdot 10 \cdot \cos(\angle Q)$

$$RT^2 = 256 + 100 - 2 \cdot 16 \cdot 10 \cdot \frac{512}{640} = 100 \text{ dus } RT = \sqrt{100} = 10$$

in $\triangle UQR$ geldt $RU^2 = 16^2 + 5^2 - 2 \cdot 16 \cdot 5 \cdot \cos(\angle Q)$

$$RU^2 = 256 + 25 - 2 \cdot 16 \cdot 5 \cdot \frac{512}{640} = 153 \text{ dus } RU = \sqrt{153} \approx 12,37$$

41 a De richtingscoëfficiënt van l_{-1} is -1 dus de richtingscoëfficiënt van m is 1 .

m gaat door $A(0, 10)$ dus een vergelijking van m is $y = x + 10$.

b $x + 10 = -x$

$$2x = -10$$

$$x = -5$$

$$y = -5 + 10 = 5$$

Het snijpunt is $S(-5, 5)$.

c $BS = \sqrt{(0 - (-5))^2 + (5 - 5)^2} = \sqrt{5^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$

d De richtingscoëfficiënt van l_4 is 4 dus de richtingscoëfficiënt van m is $-\frac{1}{4}$.

m gaat door $A(0, 10)$ dus een vergelijking van m is $y = -\frac{1}{4}x + 10$.

e $-\frac{1}{4}x + 10 = 4x$

$$-4\frac{1}{4}x = -10$$

$$x = \frac{-10}{-4\frac{1}{4}} = 2\frac{6}{17}$$

$$y = 4 \cdot 2\frac{6}{17} = 9\frac{7}{17}$$

Het snijpunt is $S(2\frac{6}{17}, 9\frac{7}{17})$.

$$BS = \sqrt{(2\frac{6}{17} - 0)^2 + (9\frac{7}{17} - 5)^2} = \sqrt{(2\frac{6}{17})^2 + (4\frac{7}{17})^2} = \sqrt{25} = 5$$

f Het vermoeden is dat de punten S allemaal op afstand 5 van punt B liggen dus op een cirkel met middelpunt B en straal 5 .

42 $\angle C = 180^\circ - 68^\circ - 42^\circ = 70^\circ$

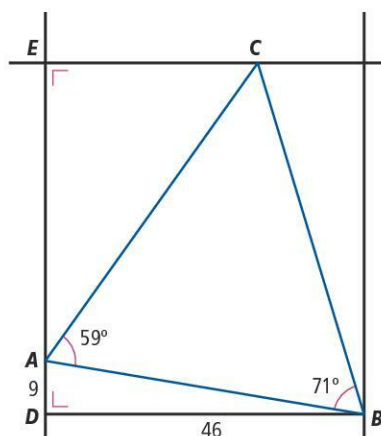
$$\frac{50}{\sin(70^\circ)} = \frac{AC}{\sin(42^\circ)} \text{ dus } AC = \frac{50 \cdot \sin(42^\circ)}{\sin(70^\circ)} = 35,603\dots$$

De breedte van het kanaal is de lengte van de hoogtelijn uit C op AB .

$$\sin(68^\circ) = \frac{\text{breedte}}{AC}$$

De breedte van het kanaal is $AC \cdot \sin(68^\circ) = 35,603\dots \cdot \sin(68^\circ) \approx 33,0$ meter.

43



Teken een rechthoek zoals in de tekening hierboven.

Om de coördinaten van punt C te berekenen heb je $\angle CAE$ en AC nodig.

De lengte van $AD = 384 - 375 = 9$ en van $BD = 208 - 162 = 46$.

$$\angle DAB = \tan^{-1}\left(\frac{46}{9}\right) = 78,929\dots^\circ$$

$$\angle CAE = 180^\circ - 59^\circ - 78,929\dots^\circ = 42,070\dots^\circ$$

$$AB = \sqrt{46^2 + 9^2} = \sqrt{2197} \text{ en } \angle ACB = 180^\circ - 59^\circ - 71^\circ = 50^\circ$$

$$\text{De sinusregel in } \triangle ABC \text{ geeft } \frac{AC}{\sin(71^\circ)} = \frac{\sqrt{2197}}{\sin(50^\circ)}$$

$$AC = \frac{\sin(71^\circ) \cdot \sqrt{2197}}{\sin(50^\circ)} = 57,853\dots$$

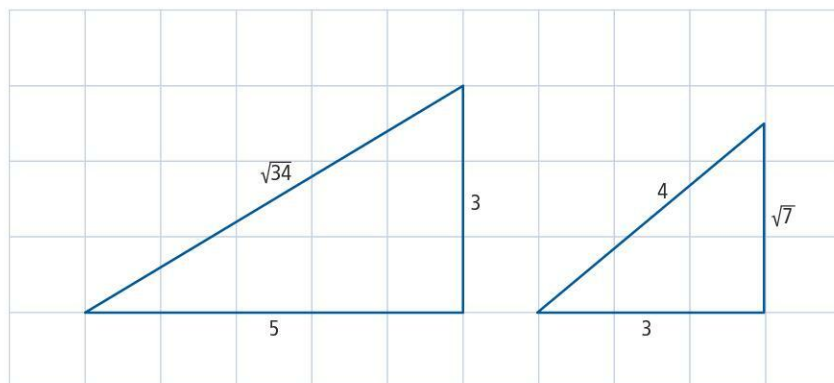
Bereken nu AE en EC in $\triangle ACE$:

$$AE = AC \cdot \cos(\angle CAE) = 57,853\dots \cdot \cos(42,070\dots^\circ) \approx 42,9$$

$$EC = AC \cdot \sin(\angle CAE) = 57,853\dots \cdot \sin(42,070\dots^\circ) \approx 38,8$$

De coördinaten van C zijn $(162 + 38,8; 384 + 42,9) = (200,8; 426,9)$.

- 44 a** $34 = 25 + 9 = 5^2 + 3^2$ dus $\sqrt{34}$ is de lengte van de lange zijde van de rechthoekige driehoek met rechthoekszijden van lengte 5 en 3.
 $7 = 16 - 9 = 4^2 - 3^2$ dus $\sqrt{7}$ is de lengte van één van de rechthoekszijden van een rechthoekige driehoek met een lange zijde van lengte 4 en een zijde van lengte 3.



- b** Bij methode I geldt dat a de som is van twee kwadraten, bij methode II is a het verschil van twee kwadraten. Je moet dus op zoek naar mogelijkheden om a te schrijven als som of verschil van twee kwadraten.

1 is een kwadraat	16 is een kwadraat
$2 = 1^2 + 1^2$	$17 = 9^2 - 8^2$
$3 = 2^2 - 1^2$	$18 = 3^2 + 3^2$
4 is een kwadraat	$19 = 10^2 - 9^2$
$5 = 1^2 + 2^2$ of $5 = 3^2 - 2^2$	$20 = 6^2 - 4^2$
6 kan niet	$21 = 11^2 - 10^2$
$7 = 4^2 - 3^2$	22 kan niet
$8 = 3^2 - 1^2$ of $8 = 2^2 + 2^2$	$23 = 12^2 - 11^2$
9 is een kwadraat	$24 = 5^2 - 1^2$
$10 = 3^2 + 1^2$	25 is een kwadraat
$11 = 6^2 - 5^2$	$26 = 5^2 + 1^2$
$12 = 4^2 - 2^2$	$27 = 14^2 - 13^2$
$13 = 7^2 - 6^2$	$28 = 8^2 - 6^2$
14 kan niet	$29 = 15^2 - 14^2$
$15 = 8^2 - 7^2$ of $15 = 4^2 - 1^2$	30 kan niet

Samenvatting

- S1** $\angle BAS = \angle DMS$ en $\angle ABS = \angle MDS$ (Z-hoeken), dus $\triangle ABS \sim \triangle MDS$

$\triangle ABS$	$AB = 13$	$BS = x$	$AS = \dots$
$\triangle MDS$	$MD = 6\frac{1}{2}$	$DS = 12 - x$	$MS = \dots$

De vergrotingsfactor van $\triangle ABS$ naar $\triangle MDS$ is $\frac{AB}{MD} = \frac{6\frac{1}{2}}{13} = \frac{1}{2}$

$$6\frac{1}{2}x = 13(12 - x)$$

$$6\frac{1}{2}x = 156 - 13x$$

$$19\frac{1}{2}x = 156 - 13x$$

$$x = BS = \frac{156}{19\frac{1}{2}} = 8 \text{ en } DS = 12 - 8 = 4$$

- S2 a** $\frac{BC}{\sin(42^\circ)} = \frac{11}{\sin(81^\circ)}$ dus $BC = \frac{11 \cdot \sin(42^\circ)}{\sin(81^\circ)} \approx 7,5$

$$\angle B = 180^\circ - 42^\circ - 81^\circ = 57^\circ$$

$$\frac{AC}{\sin(57^\circ)} = \frac{11}{\sin(81^\circ)} \text{ dus } AC = \frac{11 \cdot \sin(57^\circ)}{\sin(81^\circ)} \approx 9,3$$

b $\frac{13}{\sin(\angle R)} = \frac{10}{\sin(48^\circ)}$

$$\sin(\angle R) = \frac{13 \cdot \sin(48^\circ)}{10} = 0,966\dots \text{ dus } \angle R = 75,036\dots^\circ$$

$$\angle Q = 180^\circ - 48^\circ - 75,036\dots^\circ = 56,963\dots^\circ \approx 57^\circ$$

$$\frac{PR}{\sin(56,963\dots^\circ)} = \frac{10}{\sin(48^\circ)}$$

$$PR = \frac{10 \cdot \sin(56,963\dots^\circ)}{\sin(48^\circ)} \approx 11,3$$

S3 a $5^2 = 7^2 + 9^2 - 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \cos(\angle C)$ $7^2 = 5^2 + 9^2 - 2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cos(\angle A)$
 $25 = 49 + 81 - 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \cos(\angle C)$ $49 = 25 + 81 - 2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cos(\angle A)$
 $126 \cdot \cos(\angle C) = 105$ $90 \cdot \cos(\angle A) = 57$
 $\cos(\angle C) = \frac{105}{126}$ $\cos(\angle A) = \frac{57}{90}$
 $\angle C = 33,557\dots^\circ \approx 34^\circ$ $\angle A = 50,703\dots^\circ \approx 51^\circ$
 $\angle B = 180^\circ - 33,557\dots^\circ - 50,703\dots^\circ \approx 96^\circ$

b $LM^2 = 15^2 + 7^2 - 2 \cdot 15 \cdot 7 \cdot \cos(117^\circ) = 369,338\dots$
 $LM = \sqrt{369,338\dots} \approx 19,2$

S4 Een punt P op l heeft coördinaten $P(a, 2a)$.

$$AP = \sqrt{(25 - a)^2 + (0 - 2a)^2}$$

$$AP = \sqrt{625 - 50a + a^2 + 4a^2}$$

$$AP = \sqrt{5a^2 - 50a + 625}$$

$$OP = \sqrt{a^2 + (2a)^2} \text{ ofwel } OP = \sqrt{5a^2}$$

$$AP = 2 \cdot OP \text{ geeft}$$

$$\sqrt{5a^2 - 50a + 625} = 2 \cdot \sqrt{5a^2}$$

$$5a^2 - 50a + 625 = 4 \cdot 5a^2$$

$$15a^2 + 50a - 625 = 0$$

$$3a^2 + 10a - 125 = 0$$

$$D = 10^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-125) = 1600$$

$$a = \frac{-10 + \sqrt{1600}}{6} = 5 \text{ of } a = \frac{-10 - \sqrt{1600}}{6} = -8\frac{1}{3}$$

De gezochte punten zijn $P(5, 10)$ en $Q(-8\frac{1}{3}, -16\frac{2}{3})$.

S5 a $\triangle BCD$ is gelijkbenig en rechthoekig dus $\angle CBD = 45^\circ$.

$\triangle ABC$ is gelijkzijdig dus $\angle ABD = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ$.

De sinusregel in $\triangle ABD$ geeft:

$$\frac{AD}{\sin(105^\circ)} = \frac{8}{\sin(45^\circ)} \text{ dus } AD = \frac{8 \cdot \sin(105^\circ)}{\sin(45^\circ)} \approx 10,9$$

b M is het midden van BC dus AM is een zwaartelijn in $\triangle ABC$.

$\triangle ABC$ is gelijkzijdig, hieruit volgt dat AM ook hoogtelijn is, dus

$$\angle AMB = 90^\circ$$

$$AM = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48}$$

$MD = BM = 4$ (want $\triangle BDC$ is een half vierkant waarvan MD een halve diagonaal is)

$$AD = AM + MD = \sqrt{48} + 4 \approx 10,9$$

Test jezelf

T1 a $\frac{AB}{\sin(50^\circ)} = \frac{6}{\sin(30^\circ)}$ dus $AB = \frac{6 \cdot \sin(50^\circ)}{\sin(30^\circ)} = 9,192... \approx 9,2$
 $\angle BAD = 180^\circ - 100^\circ - 30^\circ = 50^\circ$
 $\frac{BD}{\sin(50^\circ)} = \frac{9,192...}{\sin(100^\circ)}$ dus $BD = \frac{9,192... \cdot \sin(50^\circ)}{\sin(100^\circ)} = 7,150... \approx 7,2$
b $\angle BAC = 180^\circ - 50^\circ - 30^\circ = 100^\circ$
 $\angle BAC = \angle ADB$ en $\angle B$ zit zowel in $\triangle ABC$ als in $\triangle DBA$, dus
 $\triangle ABC \sim \triangle DBA$
c $\frac{AD}{\sin(30^\circ)} = \frac{9,192...}{\sin(100^\circ)}$ dus $AD = \frac{9,192... \cdot \sin(30^\circ)}{\sin(100^\circ)} = 4,667... \approx 4,67$
d $\frac{BC}{\sin(100^\circ)} = \frac{6}{\sin(30^\circ)}$ dus $BC = \frac{6 \cdot \sin(100^\circ)}{\sin(30^\circ)} = 11,817... \approx 11,82$
 $CD = BC - BD = 11,817... - 7,150... \approx 4,67$

T2 a $\frac{7}{\sin(\angle R)} = \frac{12}{\sin(83^\circ)}$
 $\sin(\angle R) = \frac{7 \cdot \sin(83^\circ)}{12}$ dus $\angle R = 35,379...^\circ \approx 35^\circ$
 $\angle Q = 180^\circ - 83^\circ - 35,379...^\circ = 61,620...^\circ \approx 62^\circ$
b $\frac{PR}{\sin(61,620...^\circ)} = \frac{12}{\sin(83^\circ)}$ dus $PR = \frac{12 \cdot \sin(61,620...^\circ)}{\sin(83^\circ)} \approx 10,6$
c $BC^2 = 23^2 + 17^2 - 2 \cdot 23 \cdot 17 \cdot \cos(56^\circ) = 380,711...$
 $BC = \sqrt{380,711...} \approx 19,5$
d $13^2 = 9^2 + 20^2 - 2 \cdot 9 \cdot 20 \cdot \cos(\angle R)$
 $360 \cdot \cos(\angle R) = 312$
 $\cos(\angle R) = \frac{312}{360}$ dus $\angle R = 29,926...^\circ \approx 30^\circ$
 $9^2 = 13^2 + 20^2 - 2 \cdot 13 \cdot 20 \cdot \cos(\angle P)$
 $520 \cdot \cos(\angle P) = 488$
 $\cos(\angle P) = \frac{488}{520}$ dus $\angle P = 20,205...^\circ \approx 20^\circ$
 $\angle Q = 180^\circ - 29,926...^\circ - 20,205...^\circ \approx 130^\circ$

T3 a $DE = \sqrt{(2 - -4)^2 + (-6 - 4)^2} = \sqrt{6^2 + (-10)^2} = \sqrt{136}$
 $EF = \sqrt{(7 - 2)^2 + (-3 - -6)^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$
 $DF = \sqrt{(7 - -4)^2 + (-3 - 4)^2} = \sqrt{11^2 + (-7)^2} = \sqrt{170}$
b $DE^2 + EF^2 = 136 + 34 = 170 = DF^2$ dus $\triangle DEF$ is rechthoekig.
c $\angle E = 90^\circ$ dus de rechthoekszijden zijn EF en DE .
De oppervlakte is $\frac{1}{2} \cdot DE \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{136} \cdot \sqrt{34} = 34$
d Noem G het punt waar de hoogtelijn uit E zijde DF snijdt.
De oppervlakte met DF als basis is dan $\frac{1}{2} \cdot DF \cdot EG$
Hieruit volgt $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{170} \cdot EG = 34$
 $d(E, DF) = EG = \frac{68}{\sqrt{170}} \approx 5,2$

T4 a Punt R' is de projectie van R op PS .

$$\sin(70^\circ) = \frac{RR'}{2,2} \text{ dus } RR' = 2,2 \cdot \sin(70^\circ) = 2,067... \approx 2,07 \text{ meter}$$

De punten P en Q liggen 2,07 meter boven PS .

b $R'S = 2,2 \cdot \cos(70^\circ) = 0,752...$

$$QR = 6 - 2 \cdot 0,7524... \approx 4,50 \text{ meter}$$

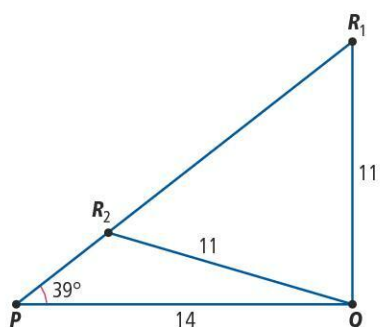
c T' is het punt recht onder T op dezelfde hoogte als R .

$$\triangle TT'R \text{ is rechthoekig met } T'R = \frac{QR}{2} = 2,247... \text{ en } TR = 2,5$$

$$\text{Dus } TT' = \sqrt{2,5^2 - 2,247...^2} = 1,094...$$

De totale hoogte van het huis is $5 + 2,067... + 1,094... \approx 8,16$ meter.

T5 a

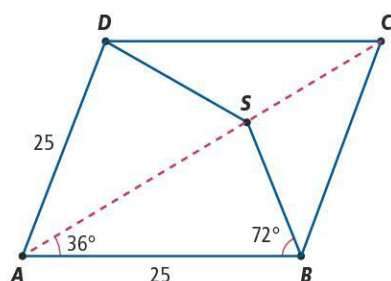


b $\frac{14}{\sin(\angle R)} = \frac{11}{\sin(39^\circ)}$

$$\sin(\angle R) = \frac{14 \cdot \sin(39^\circ)}{11} \text{ dus } \angle R_1 \approx 53^\circ \text{ en } \angle R_2 \approx 180^\circ - 53^\circ = 127^\circ$$

$$\angle Q \approx 180^\circ - 39^\circ - 53^\circ = 88^\circ \text{ of } \angle Q \approx 180^\circ - 39^\circ - 127^\circ = 14^\circ$$

T6



$$\angle BAS = 36^\circ \text{ dus } \angle ASB = 180^\circ - 72^\circ - 36^\circ = 72^\circ$$

Hieruit volgt dat $\triangle ABS$ gelijkbenig is met $AS = AB = 25$.

Trek in $\triangle ABS$ een hoogtelijn uit punt A , dan geldt $\sin(18^\circ) = \frac{\frac{1}{2}BS}{25}$ dus $BS = 2 \cdot 25 \cdot \sin(18^\circ) \approx 15,5$.

$ABSD$ is een vlieger dus $DS = BS \approx 15,5$.

Omdat $\triangle BCS$ gelijkbenig is geldt $SC = BS \approx 15,5$.

T7 Punt P' is de projectie van P op de y -as.

$$\text{Dan is } PP' = 7 \cdot \sin(73^\circ) = 6,694... \text{ dus } x_P \approx -6,7$$

$$\text{En } QP' = 7\cos(73^\circ) = 2,046... \text{ dus } y_P = 13 - 2,046... \approx 11,0$$

De coördinaten van P zijn $(-6,7; 11,0)$

9 Afstanden en hoeken

T8 a $\angle RPQ = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$

$$RQ^2 = 1,5^2 + 1^2 - 2 \cdot 1,5 \cdot 1,0 \cdot \cos(135^\circ) = 5,371\dots$$

$$RQ = \sqrt{5,371\dots} = 2,317\dots \approx 2,3 \text{ km}$$

b $\frac{1,0}{\sin(\angle PQR)} = \frac{2,317\dots}{\sin(135^\circ)}$

$$\sin(\angle PQR) = \frac{1,0 \cdot \sin(135^\circ)}{2,317\dots} \text{ dus } \angle PQR = 17,764\dots \approx 18^\circ$$

c $\angle PRQ = 180^\circ - 135^\circ - 17,764\dots^\circ \approx 27^\circ$

T9 a De richtingscoëfficiënt van AB is $\frac{-3 - -1}{5 - -1} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$

$rc_{AB} \cdot rc_l = -1$ dus de richtingscoëfficiënt van l is 3 en een vergelijking van l is

$$y = 3x + b.$$

Het midden van lijnstuk AB is $\left(\frac{-1 + 5}{2}, \frac{-1 + -3}{2}\right)$ dus $(2, -2)$.

$(2, -2)$ invullen in $l: y = 3x + b$ geeft $-2 = 3 \cdot 2 + b$ dus $b = -8$.

Hieruit volgt dat $l: y = 3x - 8$ de middelloodlijn van AB is.

b $AX = \sqrt{(p - -1)^2 + (3p - 8 - -1)^2}$

$$AX = \sqrt{(p + 1)^2 + (3p - 7)^2}$$

$$AX = \sqrt{p^2 + 2p + 1 + 9p^2 - 42p + 49}$$

$$AX = \sqrt{10p^2 - 40p + 50}$$

$$BX = \sqrt{(p - 5)^2 + (3p - 8 - -3)^2}$$

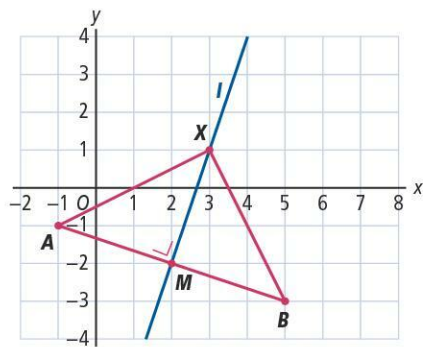
$$BX = \sqrt{(p - 5)^2 + (3p - 5)^2}$$

$$BX = \sqrt{p^2 - 10p + 25 + 9p^2 - 30p + 25}$$

$$BX = \sqrt{10p^2 - 40p + 50}$$

Dus $AX = BX$ voor elke waarde van p .

c



d De driehoeken AMX en BMX zijn beide rechthoekig.

$$AX^2 = AM^2 + MX^2 \text{ en } BX^2 = BM^2 + MX^2$$

Er geldt $AM = BM$ dus ook $AX = BX$.

Extra oefening

E1 a $\angle C$ zit in beide driehoeken en $\angle CAB = \angle CDE$ (F -hoeken).

$\triangle ABC$	$AB = \dots$	$AC = 9$	$BC = \dots$
$\triangle DEC$	$DE = 2\frac{1}{2}$	$DC = 3$	$EC = \dots$

De vergrotingsfactor van $\triangle DEC$ naar $\triangle ABC$ is $\frac{9}{3} = 3$ dus $AB = 3 \cdot 2\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$

- c $\angle SAB = \angle SED$ en $\angle ABS = \angle EDS$ (Z-hoeken) dus $\triangle ABS \sim \triangle EDS$

$\triangle ABS$	$AB = 7\frac{1}{2}$	$BS = x$	$AS = \dots$
$\triangle EDS$	$ED = 2\frac{1}{2}$	$DS = 7 - x$	$ES = \dots$

De vergrotingsfactor van $\triangle EDS$ naar $\triangle ABS$ is $\frac{7\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}} = 3$.

$$BS = 3 \cdot DS$$

$$x = 3 \cdot (7 - x)$$

$$x = 21 - 3x$$

$$4x = 21$$

$$x = BS = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4} \text{ en } DS = 7 - 5\frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$$

E2 a $\frac{AC}{\sin(12^\circ)} = \frac{22}{\sin(82^\circ)}$ dus $AC = \frac{22 \cdot \sin(12^\circ)}{\sin(82^\circ)} \approx 4,6$
 $\angle A = 180^\circ - 82^\circ - 12^\circ = 86^\circ$
 $\frac{BC}{\sin(86^\circ)} = \frac{22}{\sin(82^\circ)}$ dus $BC = \frac{22 \cdot \sin(86^\circ)}{\sin(82^\circ)} \approx 22,2$

b $\frac{14}{\sin(\angle F)} = \frac{7}{\sin(21^\circ)}$
 $\sin(\angle F) = \frac{14 \cdot \sin(21^\circ)}{7}$ dus $\angle F \approx 46^\circ$ of $\angle F \approx 180^\circ - 46^\circ = 134^\circ$

Als $\angle F = 46^\circ$ dan is $\angle E \approx 180^\circ - 21^\circ - 46^\circ = 113^\circ$

Als $\angle F = 134^\circ$ dan is $\angle E \approx 180^\circ - 21^\circ - 134^\circ = 25^\circ$

E3 a $MN^2 = 13^2 + 15^2 - 2 \cdot 13 \cdot 15 \cdot \cos(47^\circ) = 128,020\dots$
 $MN = \sqrt{128,020\dots} \approx 11,3$

b $17^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos(\angle U)$
 $160 \cdot \cos(\angle U) = -125$
 $\cos(\angle U) = -\frac{125}{160}$ dus $\angle U = 141,375\dots^\circ \approx 141^\circ$
 $8^2 = 17^2 + 10^2 - 2 \cdot 17 \cdot 10 \cdot \cos(\angle S)$
 $340 \cdot \cos(\angle S) = 325$
 $\cos(\angle S) = \frac{325}{340}$ dus $\angle S = 17,082\dots^\circ \approx 17^\circ$
 $\angle T = 180^\circ - 141,375\dots^\circ - 17,082\dots^\circ \approx 22^\circ$

E4 a $PQ = \sqrt{(1 - -3)^2 + (-2 - 5)^2} = \sqrt{4^2 + (-7)^2} = \sqrt{65}$

$$PR = \sqrt{(5 - -3)^2 + (6 - 5)^2} = \sqrt{8^2 + (-1)^2} = \sqrt{65}$$

$$QR = \sqrt{(5 - 1)^2 + (6 - -2)^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80}$$

$PQ = PR$ dus $\triangle PQR$ is gelijkbenig.

b De richtingscoëfficiënt van lijn QR is $\frac{6 - -2}{5 - 1} = \frac{8}{4} = 2$ dus de

richtingscoëfficiënt van de loodlijn is $-\frac{1}{2}$

De loodlijn is van de vorm $y = -\frac{1}{2}x + b$.

De coördinaten van $P(-3, 5)$ invullen geeft $5 = -\frac{1}{2} \cdot -3 + b$ dus $b = 3\frac{1}{2}$

Een vergelijking van de loodlijn is $y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$

E5 a Neem bijvoorbeeld P als oorsprong.

$$HA = 4 \text{ dus } HP^2 + PA^2 = 16.$$

$$\text{Omdat } HP = PA \text{ geldt } 2 \cdot HP^2 = 16$$

$$\text{Daaruit volgt } HP^2 = 8 \text{ dus } HP = \sqrt{8}$$

$$\text{Dan geldt } H(-\sqrt{8}, 0) \text{ en } D(4 + \sqrt{8}, 4).$$

$$\text{De richtingscoëfficiënt van lijn } HD \text{ is } \frac{CD}{HC} = \frac{4}{4 + 2\sqrt{8}} = 0,414\dots$$

$$\angle DHC = \tan^{-1}(0,414\dots) = 22,5^\circ$$

b $HQ = QE = 4 + \sqrt{8}$ dus $\triangle HQE$ is gelijkbenig.

$$\angle HQE = 90^\circ, \text{ dus } \angle EHQ = \angle HEQ = 45^\circ$$

$$\angle EHC = \angle EHQ = 45^\circ$$

$$\triangle EHD \sim \triangle CHD \text{ dus } \angle EHD = \angle DHC$$

$$\angle EHD + \angle DHC = 45^\circ, \text{ hieruit volgt } \angle EHD = \angle DHC = 22,5^\circ$$

E6 a $\angle SAB = \angle SCD$ en $\angle ABS = \angle CDS$ (Z-hoeken) dus $\triangle ABS \sim \triangle CDS$.

$\triangle ABS$	$AB = 30$	$BS = x$	$AS = x$
$\triangle CDS$	$CD = 12$	$DS = 33 - x$	$ES = 33 - x$

$$\text{De vergrotingsfactor van } \triangle CDS \text{ naar } \triangle ABS \text{ is } \frac{30}{12} = 2\frac{1}{2}$$

$$AS = 2\frac{1}{2} \cdot ES$$

$$x = 2\frac{1}{2} \cdot (33 - x)$$

$$x = 82\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}x$$

$$3\frac{1}{2}x = 82\frac{1}{2}$$

$$x = AS = \frac{82\frac{1}{2}}{3\frac{1}{2}} = 23\frac{4}{7} \text{ en } CS = 33 - 23\frac{4}{7} = 9\frac{3}{7}$$

b $AS = BS = 23\frac{4}{7}$

$$30^2 = 23\frac{4}{7}^2 + 23\frac{4}{7}^2 - 2 \cdot 23\frac{4}{7} \cdot 23\frac{4}{7} \cdot \cos(\angle S_1)$$

$$1111,224\dots \cos(\angle S_1) = 211,224\dots$$

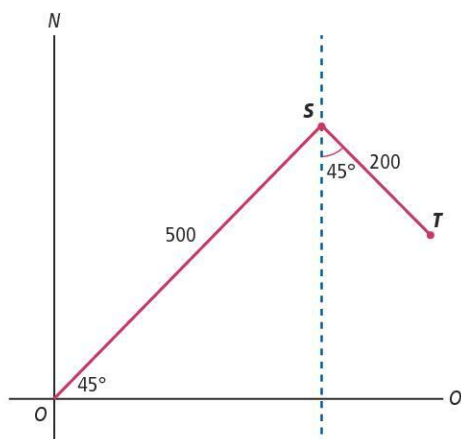
$$\cos(\angle S_1) = \frac{211,224\dots}{1111,224\dots} \text{ dus } \angle S_1 \approx 79^\circ$$

$$\angle S_3 = \angle S_1 \approx 79^\circ \text{ en } \angle S_2 = \angle S_4 \approx 180^\circ - 79^\circ = 101^\circ$$

c De hoogte van het trapezium is $\sqrt{33^2 - 21^2} = \sqrt{648}$

$$AD = \sqrt{\sqrt{648}^2 + 9^2} = \sqrt{729} = 27$$

E7 a



b Vanuit $S(500 \cdot \cos(45^\circ), 500 \cdot \sin(45^\circ))$ moet nog $200 \cdot \sin(45^\circ)$ naar rechts en $200 \cdot \cos(45^\circ)$ naar beneden, dus $x_T = 500\cos(45^\circ) + 200\sin(45^\circ) \approx 495$ en $y_T = 500\sin(45^\circ) - 200\cos(45^\circ) \approx 212$

E8 a $CD = \sqrt{(2-a)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{(2-a)^2 + 25}$

b $\sqrt{(2-a)^2 + 25} = 13$

$$(2-a)^2 + 25 = 169$$

$$(2-a)^2 = 144$$

$$2-a = 12 \text{ of } 2-a = -12$$

$$a = -10 \text{ of } a = 14$$

E9 a Alle punten R liggen op de lijn met vergelijking $x = 1$.

b $PR = \sqrt{(1-(-7))^2 + (a-(-4))^2} = \sqrt{64 + (a+4)^2} = 17$

$$64 + (a+4)^2 = 289$$

$$(a+4)^2 = 225$$

$$a+4 = 15 \text{ of } a+4 = -15$$

$$a = 11 \text{ of } a = -19$$

10 Functies bewerken

Voorkennis

V1 Bij de eerste plot hoort $k(x) = {}^2\log(x)$, bij de tweede plot hoort $n(x) = x^3$ en bij de derde plot hoort $m(x) = \frac{1}{x}$

V2 a $20 - 5x > 0$

$$5x < 20$$

$$x < 4$$

Het domein is $\langle \leftarrow, 4 \rangle$ en het bereik is $\mathbb{R}$.

b Het domein is $\mathbb{R}$.

$$3^{x-1} > 0 \text{ voor elke waarde van } x, \text{ dus } 2 + 3^{x-1} > 2$$

Het bereik is $\langle 2, \rightarrow \rangle$.

c $2x - 12 \geq 0$

$$2x \geq 12$$

$$x \geq 6$$

Het domein is $[6, \rightarrow \rangle$.

$$\sqrt{2x - 12} \geq 0 \text{ dus } 14 - \sqrt{2x - 12} \leq 14$$

Het bereik is $\langle \leftarrow, 14 \rangle$.

d De noemer mag niet nul worden, dus het domein is $\langle \leftarrow, 5 \rangle \cup \langle 5, \rightarrow \rangle$.

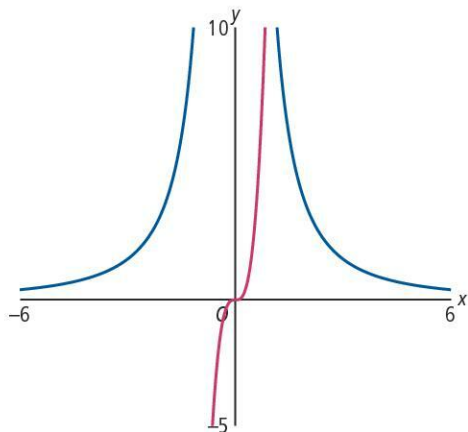
Het bereik is $\langle \leftarrow, 10 \rangle \cup \langle 10, \rightarrow \rangle$.

V3 a De noemer mag niet nul worden, dus voor $2x - 3 = 0$ ofwel $x = 1\frac{1}{2}$ is er geen functiewaarde.

b Omdat de breuk niet nul kan zijn komt 7 niet als functiewaarde voor.

c De verticale asymptoot is $x = 1\frac{1}{2}$ en de horizontale asymptoot is $y = 7$.

V4 a



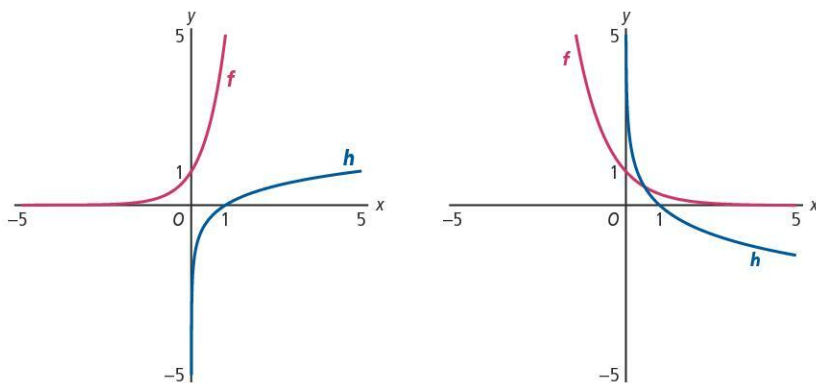
Het domein van $f(x) = 12x^5$ is $\mathbb{R}$ en ook het bereik is $\mathbb{R}$.

Het domein van $f(x) = 12x^{-2} = \frac{12}{x^2}$ is $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$ en het bereik is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

b De verticale asymptoot is $x = 0$ en de horizontale asymptoot is $y = 0$.

c De grafiek van f ligt voor negatieve waarden van n geheel boven de x -as als n even is.

V5 a



- b f en h zijn stijgende functies als $g > 1$ en dalend als $0 < g < 1$.
 c De lijn $y = 0$ (x -as) is asymptoot van de grafiek van f .
 d De lijn $x = 0$ (y -as) is asymptoot van de grafiek van h .

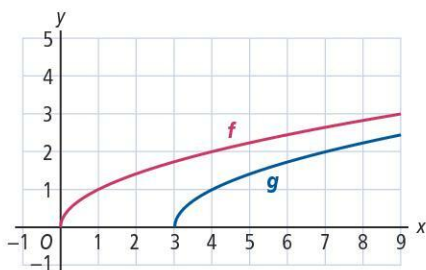
10.1 Translaties

intro Op de plaats van a moet 1960 staan.

De tweede grafiek heeft dezelfde vorm, maar ligt 1960 verder naar rechts.

- 1 a Door een verschuiving 2 omhoog.
 b Door een verschuiving 2 naar links.
 c Door een verschuiving 1 naar rechts en 2 omlaag.
 d $g(x) = s(x) - 5 = x^3 + 2 - 5 = x^3 - 3$

2 a



- b $f(4) = \sqrt{4} = 2$ dus $(4, 2)$ ligt op de grafiek van f .
 Een verschuiving van 3 naar rechts geeft het punt $(7, 2)$ op de grafiek van g
 dus $g(7) = 2$.
 Hieruit volgt $g(7) = f(4)$.
 c $g(17) = f(14)$ dus $p = 14$.
 d $a = 3$

- 3 a $g(x) = f(x - 3) - 5$ ofwel $g(x) = 2\sqrt{x - 3} - 5$
 b $g(x) = f(x + 4) + 1$ ofwel $g(x) = 7(x + 4) - 2 + 1 = 7x + 27$ dus $g(x) = 7x + 27$
 c $g(x) = f(x + 3) - 5$ ofwel $g(x) = {}^6\log(2(x + 3) - 3) - 5(x + 3) - 5$ dus
 $g(x) = {}^6\log(2x + 3) - 5x - 20$
 4 a Bij een verschuiving 7 naar rechts en 2 omlaag.
 b Bij een verschuiving 3 naar links en 4 omlaag.
 c Bij een verschuiving van bijvoorbeeld $\frac{1}{2}\pi$ naar rechts.
 d De periode van h is 2π dus bijvoorbeeld bij een verschuiving 2π naar rechts.

- 5 a** De top van de parabool is het punt $(0, 0)$.
b Een vergelijking van de beeldgrafiek is $y = (x - 4)^2 + 2$.
c De top van de beeldgrafiek is het punt $(4, 2)$.
d De top van deze parabool is $(0, 0)$.
 4 naar rechts en 2 omhoog verschuiven geeft de vergelijking $y = 4(x - 4)^2 + 2$.
 De top van de beeldgrafiek is het punt $(4, 2)$.

- 6 a** $(5, -10)$
b $(-1\frac{1}{2}, -4\frac{1}{2})$
c $(-7, 35)$

7 a $\frac{dy}{dx} = 2x + 6$
 $\frac{dy}{dx} = 0$ als $2x + 6 = 0$ dus $x_{\text{top}} = -3$
 $y_{\text{top}} = (-3)^2 + 6 \cdot -3 + 4 = -5$

De top is $(-3, -5)$ dus de topvergelijking van de parabool is $y = (x + 3)^2 - 5$.

b $\frac{dy}{dx} = -4x - 12$
 $\frac{dy}{dx} = 0$ als $-4x - 12 = 0$ dus $x_{\text{top}} = -3$
 $y_{\text{top}} = -2 \cdot (-3)^2 - 12 \cdot -3 + 3 = 21$

De top is $(-3, 21)$ dus de topvergelijking van de parabool is $y = -2(x + 3)^2 + 21$

8 a $\frac{dy}{dx} = 6x - 9$
 $\frac{dy}{dx} = 0$ als $6x - 9 = 0$ ofwel $6x = 9$ dus $x_{\text{top}} = 1\frac{1}{2}$
 $y_{\text{top}} = 3 \cdot (1\frac{1}{2})^2 - 9 \cdot 1\frac{1}{2} - 12 = -18\frac{1}{4}$
 De top is $(1\frac{1}{2}, -18\frac{3}{4})$

De top van $y = 3x^2$ is $(0, 0)$ dus er is $1\frac{1}{2}$ naar rechts en $18\frac{3}{4}$ omlaag verschoven.

b $\frac{dy}{dx} = 100 - 40x$
 $\frac{dy}{dx} = 0$ als $100 - 40x = 0$ ofwel $40x = 100$ dus $x_{\text{top}} = 2\frac{1}{2}$
 $y_{\text{top}} = 100 \cdot 2\frac{1}{2} - 20 \cdot (2\frac{1}{2})^2 = 125$

De top is $(2\frac{1}{2}, 125)$

De top van $y = -20x^2$ is $(0, 0)$ dus er is $2\frac{1}{2}$ naar rechts en 125 omhoog verschoven.

- 04 a** Bij een translatie 6 naar links.
b Bij een translatie 5 omlaag.
c Bij een translatie 6 naar links en 5 omlaag.
d $q(x) = p(x - 2) + 5$ dus er is 2 naar rechts en 5 omhoog verschoven.
e $s(x) = r(x + 5) - 3$ dus er is 5 naar links en 3 omlaag verschoven.
f $w(x) = v(x + \frac{1}{4}\pi)$ dus er is $\frac{1}{4}\pi$ naar links verschoven.

07 a De afgeleide van x^2 is $2x$, van $-6x$ is -6 en van 3 is 0 , dus als

$$y = x^2 - 6x + 3 \text{ dan is } \frac{dy}{dx} = 2x - 6.$$

b $\frac{dy}{dx} = 0$ als $2x - 6 = 0$ ofwel $2x = 6$ dus $x_{\text{top}} = 3$

$$y_{\text{top}} = 3^2 - 6 \cdot 3 + 3 = -6$$

De coördinaten van de top zijn $(3, -6)$.

c De topvergelijking van p is $y = (x - 3)^2 - 6$.

U1 $f'(x) = 8a - 4x$

$f'(x) = 0$ als $8a - 4x = 0$ ofwel $4x = 8a$ dus $x_{\text{top}} = 2a$

$$y_{\text{top}} = 8a \cdot 2a - 2 \cdot (2a)^2 = 16a^2 - 2 \cdot 4a^2 = 8a^2$$

De coördinaten van de toppen zijn $(2a, 8a^2)$.

De parabool waar alle toppen op liggen is $y = 8a^2 = 2 \cdot (2a)^2$

$x_{\text{top}} = 2a$ substitueren geeft $y = 2x^2$.

10.2 Vermenigvuldigen van grafieken

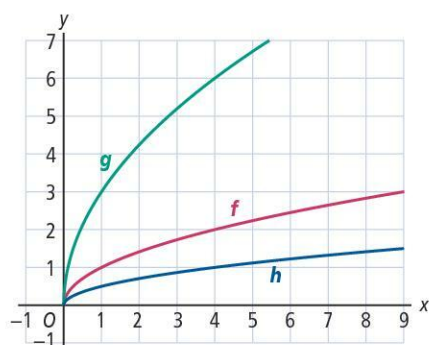
intro Grafiek A hoort bij g , B hoort bij f , C hoort bij h en D hoort bij k .

g : door de grafiek van f te spiegelen in de y -as.

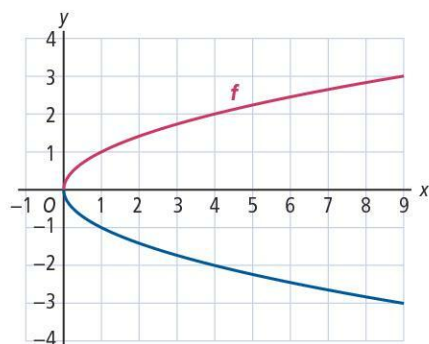
h : door de grafiek van f te spiegelen in beide assen.

k : door de grafiek van f te spiegelen in de x -as.

9 a

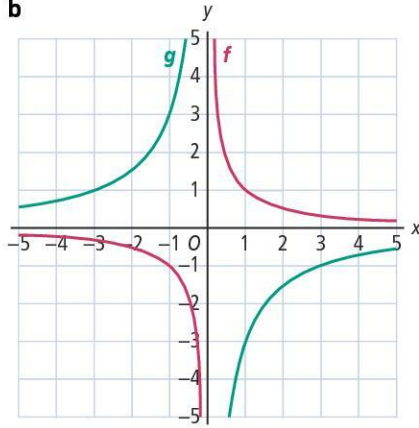


b



Het functievoorschrift moet met factor -1 vermenigvuldigd worden.

10 a b



c Het functievoorschrift dat bij de beeldgrafiek hoort is

$$g(x) = 3 \cdot f(-x) = 3 \cdot -\frac{1}{x} = -\frac{3}{x}$$

11 a $g(x) = -2 \cdot f(x) + 5$ dus $g(x) = -2\sqrt{x+2} + 5$

b $g(x) = -2 \cdot (f(x) + 5)$ dus $g(x) = -2\sqrt{x+2} - 10$

c $h(x) = -g(x-2)$ dus $h(x) = -5 + 2 \cdot 3^{x-2}$

d $h(x) = -g(x-2)$ dus $h(x) = -5 + 2 \cdot 3^{x-2}$

e Bij een vermenigvuldiging en een verschuiving in dezelfde richting maakt de volgorde wel uit. Als de vermenigvuldiging in verticale richting is en de verschuiving in horizontale richting (of omgekeerd) maakt de volgorde niet uit.

12 a De grafiek van f is met 3 vermenigvuldigd.

b Het punt (4, 2) ligt op de grafiek van f .

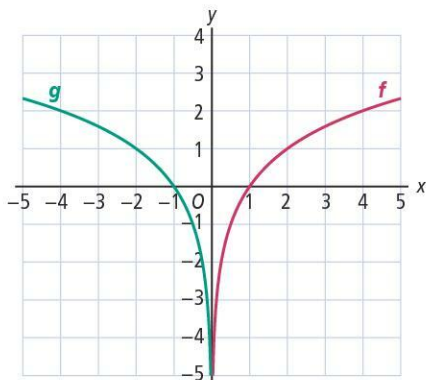
De x -coördinaat wordt 3 keer zo groot dus (12, 2) ligt op de grafiek van g .

Hieruit volgt $g(12) = 2$ dus $g(12) = f(4)$.

c $g(33) = f(11)$ dus $p = 11$

d $a = \frac{1}{3}$

13 a



b De grafiek van g is die van f gespiegeld in de y -as.

14 a $k(x) = g(3x) = 2(3x)^2 - 3 \cdot 3x + 4 = 18x^2 - 9x + 4$

b $k(x) = f\left(\frac{1}{4}x\right) = \sqrt{\frac{1}{4}x} + \frac{1}{\frac{1}{4}x} = \sqrt{\frac{1}{4}x} + \frac{4}{x}$

c $k(x) = h(-x) = \left(-\frac{1}{2}x - 5\right)^3$

- 15 a** Spiegelen in de y -as en vermenigvuldigen met 2 ten opzichte van de x -as.
b Vermenigvuldigen met 3 ten opzichte van de x -as en vermenigvuldigen met $\frac{1}{3}$ ten opzichte van de y -as.
 Of: $g(x) = 3\sqrt{3x} = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{x}$ dus vermenigvuldigen met $3\sqrt{3}$ ten opzichte van de x -as.
c x is vervangen door $-2x$ dus vermenigvuldigen met $-\frac{1}{2}$ ten opzichte van de y -as.

- 16 a** $g(x) = f(x + 4) = 2^{x+4}$
b $2^{x+4} = 2^x \cdot 2^4 = 2^x \cdot 16$ dus $a = 16$
c Met factor 16.

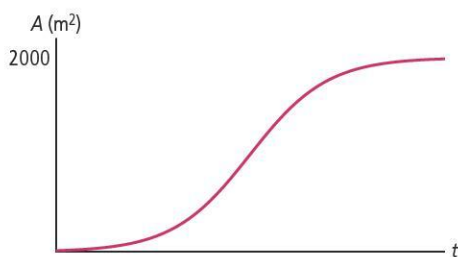
- 011 a** $g(x) = 3 \cdot f(x)$ dus $g(x) = 3 \cdot \log(x - 3)$
b $h(x) = g(x) + 4$ dus $h(x) = 3 \cdot \log(x - 3) + 4$
c $p(x) = f(x) + 4$ dus $p(x) = \log(x - 3) + 4$
d $q(x) = 3 \cdot p(x)$ dus $q(x) = 3 \cdot (\log(x - 3) + 4) = 3 \cdot \log(x - 3) + 12$
e $m(x) = -k(x + 3)$ dus $m(x) = -(5(x + 3)^2 - 6)$ ofwel $m(x) = -5(x + 3)^2 + 6$
f $n(x) = -k(x + 3) = -5(x + 3)^2 + 6$
g Bij een vermenigvuldiging en een verschuiving in dezelfde richting maakt de volgorde wel uit. Als de vermenigvuldiging in verticale richting is en de verschuiving in horizontale richting (of omgekeerd) maakt de volgorde niet uit.

- 014 a** De grafiek van f vermenigvuldigen met b ten opzichte van de y -as geeft de grafiek van $g(x) = f\left(\frac{1}{b} \cdot x\right)$
 $b = \frac{1}{3}$ geeft $\frac{1}{b} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$ dus $g(x) = f(3x)$
b $g(x) = 2(3x) + \sqrt{3x}$ dus $g(x) = 6x + \sqrt{3x}$

- U2** Door ten opzichte van de y -as te vermenigvuldigen met factor a krijg je
 $g(x) = f\left(\frac{1}{a}x\right) = \left(\frac{1}{a}x\right)^2$
 Door ten opzichte van de x -as te vermenigvuldigen met factor b krijg je
 $g(x) = b \cdot f(x) = bx^2$
 Uit $\left(\frac{1}{a}x\right)^2 = bx^2$ volgt $b = \frac{1}{a^2}$

10.3 Asymptotisch gedrag

intro



- 17 a** Er is geen functiewaarde als $8x - 4 = 0$ dus als $x = \frac{1}{2}$
b De vergelijking van de verticale asymptoot is $x = \frac{1}{2}$

- c invoer: $y_1 = \frac{2x+3}{8x-4}$, kies voor $\Delta Tbl = 10$

X	Y1			
0	-0.75			
10	0.3026			
20	0.2756			
30	0.2669			
40	0.2627			
50	0.2601			
60	0.2584			
70	0.2572			
80	0.2563			
90	0.2556			
100	0.255			
X=0				

- d Als je steeds grotere waarden voor x neemt naderen de functiewaarden $\frac{1}{4}$.
Dat geldt ook voor negatieve waarden van x die steeds verder van 0 liggen.
- e De vergelijking van de horizontale asymptoot is $y = \frac{1}{4}$

- 18 a $2x + 5 = 0$ voor $x = -2\frac{1}{2}$
De lijn $x = -2\frac{1}{2}$ is de verticale asymptoot.
Met behulp van een tabel zie je dat voor grote waarden van x de functiewaarden naderen tot $3\frac{1}{2}$
De lijn $y = 3\frac{1}{2}$ is de horizontale asymptoot.
- b $6x + 2 = 0$ voor $x = -\frac{1}{3}$
De lijn $x = -\frac{1}{3}$ is de verticale asymptoot.
Met behulp van een tabel zie je dat voor grote waarden van x de functiewaarden naderen tot -2
De lijn $y = -2$ is de horizontale asymptoot.
- c De lijn $x = 0$ (y -as) is de verticale asymptoot.
Met behulp van een tabel zie je dat voor grote waarden van x de functiewaarden naderen tot 18
De lijn $y = 18$ is de horizontale asymptoot.
- d $1 - 0,4x = 0$ voor $x = 2\frac{1}{2}$
De lijn $x = 2\frac{1}{2}$ is de verticale asymptoot.
Met behulp van een tabel zie je dat voor grote waarden van x de functiewaarden naderen tot $-\frac{1}{2}$
De lijn $y = -\frac{1}{2}$ is de horizontale asymptoot.

- 19 a $f(0) = \frac{8 - 3 \cdot 0}{6 \cdot 0 + 4} = \frac{8}{4} = 2$ dus het snijpunt met de y -as is $(0, 2)$.
 $f(x) = 0$ als $8 - 3x = 0$ ofwel $3x = 8$ dus $x = \frac{8}{3}$
Het snijpunt met de x -as is $(\frac{8}{3}, 0)$
- b Met behulp van een tabel zie je dat voor grote waarden van x de functiewaarden naderen tot $-\frac{1}{2}$
De horizontale asymptoot van de grafiek van f is $y = -\frac{1}{2}$
De grafiek van g ligt 3 hoger dan die van f dus de horizontale asymptoot van de grafiek van g is de lijn $y = -\frac{1}{2} + 3 = 2\frac{1}{2}$

- 20 a $f(0) = \frac{6 \cdot 0 - 2}{12 - 4 \cdot 0} = \frac{-2}{12} = -\frac{1}{6}$ dus het snijpunt met de y -as is $(0, -\frac{1}{6})$
 $f(x) = 0$ als $6x - 2 = 0$ ofwel $6x = 2$ dus $x = \frac{1}{3}$
Het snijpunt met de x -as is $(\frac{1}{3}, 0)$
 $12 - 4x = 0$ als $4x = 12$ dus $x = 3$
De verticale asymptoot is de lijn $x = 3$
Met een tabel zie je dat voor grote waarden van x de functiewaarden naderen tot $-1\frac{1}{2}$. De horizontale asymptoot is de lijn $y = -1\frac{1}{2}$

b $f(0) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0 - 6}{5 \cdot 0 + 2} = \frac{-6}{2} = -3$ dus het snijpunt met de y -as is $(0, -3)$

$f(x) = 0$ als $\frac{1}{2}x - 6 = 0$ ofwel $\frac{1}{2}x = 6$ dus $x = 12$

Het snijpunt met de x -as is $(12, 0)$

$5x + 2 = 0$ als $5x = -2$ dus $x = -\frac{2}{5}$

De verticale asymptoot is de lijn $x = -\frac{2}{5}$

Met een tabel zie je dat voor grote waarden van x de functiewaarden naderen tot $\frac{1}{10}$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = \frac{1}{10}$

c $f(0) = 1 + \frac{0}{3 \cdot 0 - 1} = 1 + 0 = 1$ dus het snijpunt met de y -as is $(0, 1)$

$f(x) = 0$ als $\frac{x}{3x - 1} = -1$ ofwel $x = -3x + 1$ dus $4x = 1$ en $x = \frac{1}{4}$

Het snijpunt met de x -as is $(\frac{1}{4}, 0)$

$3x - 1 = 0$ als $3x = 1$ dus $x = \frac{1}{3}$

De verticale asymptoot is de lijn $x = \frac{1}{3}$

Met een tabel zie je dat voor grote waarden van x de functiewaarden naderen tot $1\frac{1}{3}$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 1\frac{1}{3}$

d $f(0) = \frac{2 - 0}{0 + 8} - 2 = \frac{2}{8} - 2 = -1\frac{3}{4}$ dus het snijpunt met de y -as is $(0, -1\frac{3}{4})$

$f(x) = 0$ als $\frac{2 - x}{x + 8} = 2$ ofwel $2 - x = 2x + 16$ dus $-3x = 14$ en $x = -4\frac{2}{3}$

Het snijpunt met de x -as is $(-4\frac{2}{3}, 0)$

$x + 8 = 0$ als $x = -8$

De verticale asymptoot is de lijn $x = -8$

Met een tabel zie je dat voor grote waarden van x de functiewaarden naderen tot -3

De horizontale asymptoot is de lijn $y = -3$

21 a $4 \cdot 0,7^x$ nadert naar 0 als x groot wordt, dus $f(x)$ nadert dan naar 11.

b $4 \cdot 0,7^x$ wordt steeds kleiner als x toeneemt. Van 11 wordt daarom een steeds kleiner getal afgetrokken dus $f(x)$ neemt toe als x toeneemt.

c $20 \cdot 1,3^x$ nadert naar 0 als x steeds kleiner wordt dus $y = 80$ is de horizontale asymptoot.

Als x toeneemt, neemt $20 \cdot 1,3^x$ ook toe, dus haal je steeds meer van 80 af.

Daaruit volgt dat g een dalende functie is.

22 a De grafiek van f heeft een verticale asymptoot als $x - 5 = 0$ dus als $x = 5$.

b Als x toeneemt, neemt $^2\log(x - 5)$ toe want $h(x) = ^2\log(x)$ is een stijgende functie omdat het grondtal groter is dan 1.

Dan neemt ook $10 \cdot ^2\log(x - 5) + 4$ toe.

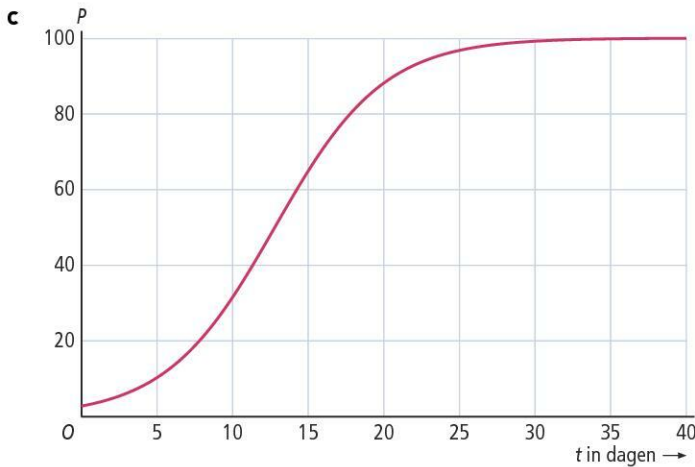
c $x + 3 = 0$ geeft $x = -3$, de verticale asymptoot is de lijn $x = -3$.

Als x toeneemt, neemt $x + 3$ toe en $^{\frac{1}{2}}\log(x + 3)$ af, want $h(x) = ^{\frac{1}{2}}\log(x)$ is een dalende functie omdat het grondtal kleiner is dan 1.

Het getal dat van 7 wordt afgetrokken wordt steeds kleiner, dus $g(x)$ neemt toe als x toeneemt.

g is een stijgende functie.

- 23 a** Invullen van $t = 0$ geeft $P(0) = \frac{100}{1 + 35 \cdot 0,756^0} = \frac{100}{1 + 35 \cdot 1} \approx 2,8\%$
- b** $35 \cdot 0,756^t$ nadert naar 0 als t steeds groter wordt, dus P nadert naar $\frac{100}{1 + 0} = 100$.



- 24** De verticale asymptoot is $x = 1\frac{1}{2}$ dus $c \cdot 1\frac{1}{2} - 3 = 0$ ofwel $c = 2$.
- De horizontale asymptoot is $y = 2$ dus $\frac{a}{c} = 2$ en omdat $c = 2$ moet gelden $a = 4$.
- $(-3, 0)$ invullen geeft $0 = \frac{4 \cdot -3 + b}{2 \cdot -3 - 3}$ ofwel $0 = \frac{-12 + b}{-9}$ dus $b = 12$.

- 019 a** $f(0) = \frac{2 \cdot 0 - 5}{0 + 4} - 3 = -\frac{5}{4} - 3 = -4\frac{1}{4}$ dus het snijpunt met de y -as is $(0, -4\frac{1}{4})$
- b** Er is links en rechts van het gelijkteken 3 opgeteld.
- c** Er is links en rechts van het gelijkteken vermenigvuldigd met $(x + 4)$.
- d** $2x - 5 = 3(x + 4)$
 $2x - 5 = 3x + 12$
 $-17 = x$, dus het snijpunt met de x -as is $(-17, 0)$.
- e** Met behulp van een tabel zie je dat voor steeds grotere waarden van x de functiewaarden naderen tot -1 .
 Ook voor negatieve waarden van x die steeds verder van 0 liggen naderen de functiewaarden tot -1 .
- f** De horizontale asymptoot is de lijn $y = -1$.

- 022 a** De asymptoot is de lijn $x = 0$.
- b** Door deze 1 naar links te verschuiven.
 De verticale asymptoot schuift ook 1 naar links en is dus de lijn $x = -1$.
- c** Door een vermenigvuldiging met 4 ten opzichte van de x -as.
 De verticale asymptoot van de grafiek van i is hetzelfde als de verticale asymptoot van de grafiek van h dus dat is de lijn $x = -1$.
- d** Door deze 2 omlaag te verschuiven.
 De verticale asymptoot is weer niet veranderd dus dat is de lijn $x = -1$.

- U3 a** $2^x - 2^{-x} = 0$
 $2^x = 2^{-x}$
 $x = -x$
 $2x = 0$
 $x = 0$
 De verticale asymptoot van de grafiek van f is de lijn $x = 0$.

$$\text{b } f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} = \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} \cdot \frac{2^{-x}}{2^{-x}} = \frac{1 + 2^{-2x}}{1 + 2^{-2x}}$$

Als x steeds groter wordt dan nadert 2^{-2x} tot 0 en dus $f(x)$ tot 1, dus een horizontale asymptoot is $y = 1$.

$$f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} = \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} \cdot \frac{2^x}{2^x} = \frac{2^{2x} + 1}{2^{2x} - 1}$$

Voor negatieve waarden van x die steeds verder van 0 liggen nadert 2^{2x} tot 0 en dus $f(x)$ tot -1 . De andere horizontale asymptoot is $y = -1$.

10.4 Formules herleiden

intro $\frac{x}{4} - \frac{y}{16} = 1$ en $x = 4 + \frac{1}{4}y$, $y = \sqrt[3]{x}$ en $x = y^3$, $2x = \frac{30}{y}$ en $xy = 15$

$y = \sqrt{x}$ is te herleiden tot $x = y^2$ maar de grafieken zijn niet hetzelfde.

De formule $5y = \frac{1}{3x}$ blijft over.

25 a $q = 3p + 5$

$$3p + 5 = q$$

$$3p = q - 5$$

$$p = \frac{1}{3}q - 1\frac{2}{3}$$

b $q = 2\sqrt{p} - 6$

$$2\sqrt{p} - 6 = q$$

$$2\sqrt{p} = q + 6$$

$$\sqrt{p} = \frac{1}{2}q + 3$$

$$p = \left(\frac{1}{2}q + 3\right)^2$$

c $q = 4 - {}^2\log(p)$

$$4 - {}^2\log(p) = q$$

$${}^2\log(p) = 4 - q$$

$$p = 2^{4-q}$$

d $q = p^3 + 8$

$$p^3 + 8 = q$$

$$p^3 = q - 8$$

$$p = \sqrt[3]{q - 8}$$

26 a $\frac{5q + 7}{2p - 10} = \frac{1}{6}$

$$2p - 10 = 30q + 42$$

$$2p = 30q + 52$$

$$p = 15q + 26$$

b $q - 4 = 3\sqrt{p + 6} + 2$

$$3\sqrt{p + 6} + 2 = q - 4$$

$$3\sqrt{p + 6} = q - 6$$

$$\sqrt{p + 6} = \frac{1}{3}q - 2$$

$$p + 6 = \left(\frac{1}{3}q - 2\right)^2$$

$$p = \left(\frac{1}{3}q - 2\right)^2 - 6$$

d $q = 5 \cdot 2^p + 3$

$$5 \cdot 2^p = q - 3$$

$$2^p = \frac{1}{5}q - \frac{3}{5}$$

$$p = {}^2\log\left(\frac{1}{5}q - \frac{3}{5}\right)$$

e $\frac{4}{p + 4} = 5\sqrt{q^2 - 3}$

$$5\sqrt{q^2 - 3} \cdot (p + 4) = 4$$

$$p + 4 = \frac{4}{5\sqrt{q^2 - 3}}$$

$$p = \frac{4}{5\sqrt{q^2 - 3}} - 4$$

f $\log(p + 6) - \sqrt{q} = 1$

$$\log(p + 6) = \sqrt{q} + 1$$

$$p + 6 = 10^{\sqrt{q} + 1}$$

$$p = 10^{\sqrt{q} + 1} - 6$$

$$\begin{aligned} 27 \text{ a } y &= -(-2t - 1) + 6 \\ y &= 2t + 1 + 6 \\ y &= 2t + 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } y &= \sqrt{2\left(2t + \frac{1}{2}\right) - 1} \\ y &= \sqrt{4t + 1 - 1} \\ y &= \sqrt{4t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } y &= 3 \cdot 2^{\log(2t)} \\ y &= 3 \cdot 2t \\ y &= 6t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 28 \text{ a } \frac{4+y}{x^2+2} &= 6 \\ 4+y &= 6(x^2+2) \\ 4+y &= 6x^2+12 \\ y &= 6x^2+8 \end{aligned}$$

b De grafieken die bij de twee formules horen zijn gelijk.

$$\begin{aligned} 29 \text{ a } \text{A } q &= 4 - 3^p \\ 3^p &= 4 - q \\ p &= {}^3\log(4 - q) \end{aligned}$$

De formules A en E zijn gelijkwaardig.

$$\begin{aligned} \text{B } q &= p^2 - 6 \\ p^2 &= q + 6 \\ p &= \sqrt{q+6} \text{ of } p = -\sqrt{q+6} \end{aligned}$$

Formule B is te herleiden tot formule H maar p kan bij B negatief zijn en bij H niet. De formules zijn dus niet gelijkwaardig.

$$\begin{aligned} \text{C } q &= \frac{5}{\sqrt[3]{p+3}} \text{ geeft } q \cdot \sqrt[3]{p+3} = 5 \text{ dus } \sqrt[3]{p+3} = \frac{5}{q} \text{ en} \\ p+3 &= \left(\frac{5}{q}\right)^3 \text{ en } p = \frac{125}{q^3} - 3 \text{ en tenslotte } p = \frac{125 - 3q^3}{q^3} \end{aligned}$$

De formules C en G zijn gelijkwaardig.

$$\begin{aligned} \text{D } q &= 3^p - 4 \\ 3^p &= q + 4 \\ p &= {}^3\log(q + 4) \end{aligned}$$

De formules D en F zijn gelijkwaardig.

30 a Stroomopwaarts is de snelheid van Robert $4 - v$ km per uur. De tijd die nodig is voor 10 km is dan $\frac{10}{4-v}$ uur. Stroomafwaarts is de snelheid $4 + v$ km per uur en dan heeft hij voor 10 km $\frac{10}{4+v}$ uur nodig.

$$\text{De totale tijd is } T = \frac{10}{4-v} + \frac{10}{4+v}$$

b $0 < v < 4$ anders zou hij stroomopwaarts niet vooruit komen.

$$\begin{aligned} \text{c } T &= \frac{10}{(4-v)} \cdot \frac{4+v}{4+v} + \frac{10}{(4+v)} \cdot \frac{4-v}{4-v} \\ T &= \frac{10(4+v)}{(4-v)(4+v)} + \frac{10(4-v)}{(4-v)(4+v)} \\ T &= \frac{40 + 10v + 40 - 10v}{(4-v)(4+v)} \\ T &= \frac{80}{16 - v^2} \end{aligned}$$

$$\text{d } (16 - v^2) \cdot T = 80$$

$$16 - v^2 = \frac{80}{T}$$

$$v^2 = 16 - \frac{80}{T}$$

$$v \geq 0 \text{ dus } v = \sqrt{16 - \frac{80}{T}}$$

$$\text{31 a } 50 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$mv^2 = 100$$

$$v^2 = \frac{100}{m}$$

$$v > 0 \text{ dus } v = \sqrt{\frac{100}{m}}$$

$$\text{b } E = \frac{1}{2}mv^2 \text{ geeft } 2E = mv^2 \text{ dus } m = \frac{2E}{v^2} \text{ ofwel } m = 2E \cdot v^{-2}$$

De eerste formule is gelijkwaardig met $E = \frac{1}{2}mv^2$.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \text{ geeft } 2E = mv^2 \text{ dus } v^2 = \frac{2E}{m} \text{ ofwel } v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

De vierde formule is ook gelijkwaardig met $E = \frac{1}{2}mv^2$.

$$\text{32 a } P = 0,084 \cdot V^3 \cdot D^2$$

$$0,084 \cdot V^3 \cdot D^2 = P$$

$$D^2 = \frac{P}{0,084 \cdot V^3}$$

$$D > 0 \text{ dus } D = \sqrt{\frac{P}{0,084 \cdot V^3}}$$

$$\text{b } P = 4200 \text{ invullen geeft } 4200 = 0,084 \cdot V^3 \cdot D^2$$

$$0,084 \cdot V^3 \cdot D^2 = 4200$$

$$V^3 = \frac{4200}{0,084 \cdot D^2}$$

$$V = \sqrt[3]{\frac{50\,000}{D^2}}$$

$$\text{026 a } q \cdot (6 + \sqrt[3]{p+1}) = 12$$

b Er is links en rechts gedeeld door q .

$$\text{c } \sqrt[3]{p+1} = \frac{12}{q} - 6$$

d De derdemachtswortel wordt weggewerkt door links en rechts tot de derde macht te verheffen.

$$\text{e } p + 1 = \left(\frac{12}{q} - 6\right)^3$$

$$p = \left(\frac{12}{q} - 6\right)^3 - 1$$

$$\text{f } \frac{2q-5}{p+2} = 3$$

$$3p + 6 = 2q - 5$$

$$3p = 2q - 11$$

$$p = \frac{2}{3}q - 3\frac{2}{3}$$

$$\text{g } q + 1 = 2\sqrt{p-1} + 4$$

$$2\sqrt{p-1} = q - 3$$

$$\sqrt{p-1} = \frac{1}{2}q - 1\frac{1}{2}$$

$$p - 1 = \left(\frac{1}{2}q - 1\frac{1}{2}\right)^2$$

$$p = \left(\frac{1}{2}q - 1\frac{1}{2}\right)^2 + 1$$

$$\text{h } {}^3\log(5q+2) = \frac{1}{2}p - 3$$

$$\frac{1}{2}p = {}^3\log(5q+2) + 3$$

$$p = 2 \cdot {}^3\log(5q+2) + 6$$

$$\text{i } q = 2 \cdot 3^p - 6$$

$$2 \cdot 3^p = q + 6$$

$$3^p = \frac{1}{2}q + 3$$

$$p = {}^3\log\left(\frac{1}{2}q + 3\right)$$

$$\text{j } \log(p^3 + 5) - q = 1$$

$$\log(p^3 + 5) = q + 1$$

$$p^3 + 5 = 10^{q+1}$$

$$p^3 = 10^{q+1} - 5$$

$$p = \sqrt[3]{10^{q+1} - 5}$$

$$\text{k } q - 5 = \sqrt{25 + p}$$

$$25 + p = (q - 5)^2$$

$$p = (q - 5)^2 - 25$$

030 a $\frac{6}{1-p} = \frac{6(1+p)}{(1-p)(1+p)} = \frac{6+6p}{(1-p)(1+p)}$ en

$$\frac{6}{1+p} = \frac{6(1-p)}{(1-p)(1+p)} = \frac{6-6p}{(1-p)(1+p)} \text{ dus}$$

$$\frac{6}{1-p} + \frac{6}{1+p} = \frac{6+6p+6-6p}{(1-p)(1+p)} = \frac{12}{(1-p)(1+p)}$$

b $q = \frac{12}{1-p^2}$ dus $q \cdot (1-p^2) = 12$ en $1-p^2 = \frac{12}{q}$

c $-p^2 = -1 + \frac{12}{q}$

$$p^2 = 1 - \frac{12}{q}$$

d $p = \sqrt{1 - \frac{12}{q}}$ voor $p \geq 0$.

U4 a $q = \frac{1 - {}^2\log(p)}{{}^2\log(p)}$

$$q \cdot {}^2\log(p) = 1 - {}^2\log(p)$$

$$q \cdot {}^2\log(p) + {}^2\log(p) = 1$$

$${}^2\log(p) \cdot (q+1) = 1$$

$${}^2\log(p) = \frac{1}{q+1}$$

$$p = 2^{\frac{1}{q+1}}$$

b $q = \frac{p-5}{p-1}$

$$q \cdot (p-1) = p-5$$

$$pq - q = p - 5$$

$$pq - p = q - 5$$

$$p(q-1) = q-5$$

$$p = \frac{q-5}{q-1}$$

c $4pq = 3p + 2q + 1$

$$4pq - 3p = 2q + 1$$

$$p(4q-3) = 2q+1$$

$$p = \frac{2q+1}{4q-3}$$

d $q = \frac{1}{5^{2p-1}}$

$$q \cdot 5^{2p-1} = 1$$

$$5^{2p-1} = \frac{1}{q}$$

$$2p-1 = {}^5\log\left(\frac{1}{q}\right)$$

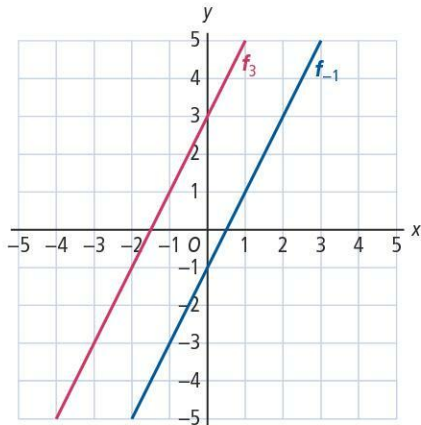
$$2p = {}^5\log\left(\frac{1}{q}\right) + 1$$

$$p = \frac{1}{2} \cdot {}^5\log\left(\frac{1}{q}\right) + \frac{1}{2}$$

10.5 Parameters

intro De helling van de grafieken wordt dan twee keer zo groot en het snijpunt met de y -as wordt anders.
Nee, de verticale lijn $x = 4$ ontbreekt.

33 a



b De grafieken zijn twee evenwijdige lijnen, waarbij f_3 vier hoger ligt dan f_{-1}

c $f(-3) = -8$

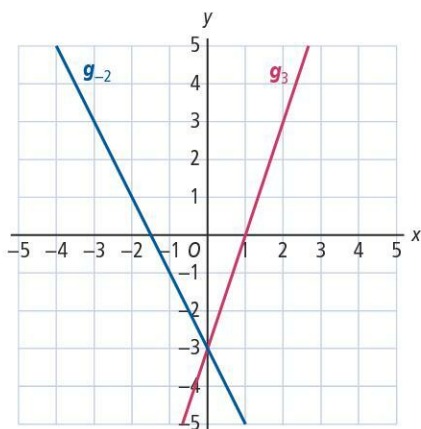
$$2 \cdot -3 + b = -8$$

$$-6 + b = -8$$

$$b = -2$$

Voor $b = -2$ gaat de grafiek door het punt $(-3, -8)$.

34 a



b Alle grafieken van deze functie snijden elkaar in het punt $(0, -3)$.

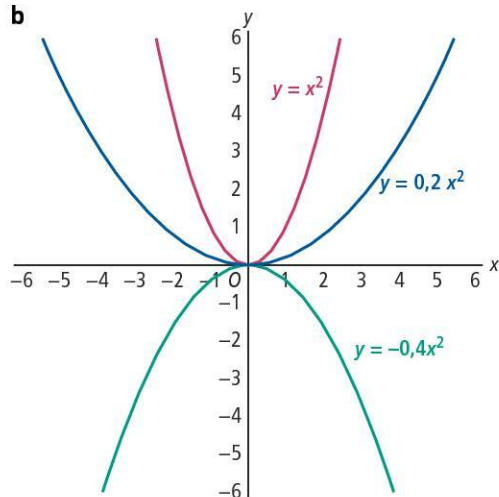
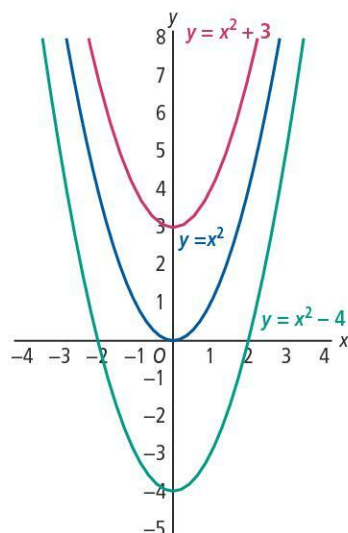
c $g(-2) = -8$

$$a \cdot -2 - 3 = -8$$

$$-2a = -5$$

$$a = 2\frac{1}{2}$$

35 a b



c $f_a(4) = 9$

$a \cdot 4^2 = 9$

$16a = 9$

$a = \frac{9}{16}$

d $g_b(4) = 9$

$4^2 + b = 9$

$16 + b = 9$

$b = -7$

36 a $f_a(3) = 0$

$a \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 0$

$9a - 12 + 3 = 0$

$9a = 9$

$a = 1$

b De afgeleide van ax^2 is $2ax$ en van $-4x$ is -4 dus $f'_a(x) = 2ax - 4$.

c $f'_3(x) = 2 \cdot 3x - 4$

$f'_3(x) = 6x - 4$

$f'_3(9) = 6 \cdot 9 - 4 = 50$

De helling in het punt met x -coördinaat 9 is 50.

d $f'_a(4) = -14$

$2a \cdot 4 - 4 = -14$

$8a = -10$

$a = \frac{-10}{8} = -\frac{5}{4}$

Het functievoorschrift bij deze grafiek is $f_{-\frac{5}{4}}(x) = -\frac{5}{4}x^2 - 4x + 3$.

e $f'_a(x) = 0$ geeft $2ax - 4 = 0$

$2ax = 4$

$x = \frac{4}{2a} = \frac{2}{a}$

37 a $f(2) = 2(8 - 2) = 2 \cdot 6 = 12$ dus $(2, 12)$ ligt op de grafiek van f .

b $p(2 - 2) + 12 = 12$ dus $y_p = p(x - 2) + 12$ is de vergelijking van een lijn door P .

c $x(8 - x) = p(x - 2) + 12$

$8x - x^2 = px - 2p + 12$

$-x^2 + 8x - px + 2p - 12 = 0$

$x^2 - 8x + px - 2p + 12 = 0$

$x^2 + (-8 + p)x - 2p + 12 = 0$

d $D = 0$ als deze vergelijking precies één oplossing heeft.

e $D = (-8 + p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2p + 12)$

$$D = 64 - 16p + p^2 + 8p - 48$$

$$D = p^2 - 8p + 16$$

$$D = 0 \text{ geeft } p^2 - 8p + 16 = 0$$

$$(p - 4)(p - 4) = 0$$

$$p = 4$$

Een vergelijking van lijn l is $y_4 = 4(x - 2) + 12$ ofwel $y_4 = 4x + 4$

38 a $f(2) = \frac{2}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ dus $(2, \frac{1}{2})$ ligt op de grafiek van f .

$(2, \frac{1}{2})$ ligt op de grafiek van g_a als $g_a(2) = \frac{1}{2}$

$$2 \cdot 2 + a = \frac{1}{2}$$

$$a = -3\frac{1}{2}$$

b $f(x) = g_a(x)$

$$\frac{x}{x+2} = 2x + a$$

$$x = (2x + a)(x + 2)$$

$$x = 2x^2 + 4x + ax + 2a$$

$$2x^2 + 3x + ax + 2a = 0$$

De grafieken van f en g_a raken elkaar als deze vergelijking één oplossing heeft, ofwel als $D = 0$.

$$2x^2 + (3 + a)x + 2a = 0$$

$$D = (3 + a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2a$$

$$D = 9 + 6a + a^2 - 16a$$

$$D = a^2 - 10a + 9$$

$$D = 0 \text{ geeft } a^2 - 10a + 9 = 0$$

$$(a - 9)(a - 1) = 0$$

$$a = 9 \text{ of } a = 1$$

c Zie de grafiek: $1 < a < 9$

037 a $D = 9 - 4 \cdot 1 \cdot (-4 - p)$

$$D = 9 + 16 + 4p$$

$$D = 25 + 4p$$

b De vergelijking heeft maar één oplossing en daarom geldt $D = 0$.

c $25 + 4p = 0$

$$4p = -25$$

$$p = -6\frac{1}{4}$$

d Er zijn twee snijpunten als $D > 0$ dus als $p > -6\frac{1}{4}$

U5 a Als de top $(4, 5)$ is dan is het functievoorschrift $f_a(x) = a(x - 4)^2 + 5$.

b De symmetrieas van de parabolen is de lijn $x = 4$. De afstand tussen de snijpunten met de x -as gelijk is 7 dus de snijpunten zijn $(\frac{1}{2}, 0)$ en $(7\frac{1}{2}, 0)$.

$$f_a(\frac{1}{2}) = 0$$

$$a(\frac{1}{2} - 4)^2 + 5 = 0$$

$$12\frac{1}{4}a = -5$$

$$a = \frac{-5}{12\frac{1}{4}} = -\frac{20}{49}$$

U6 a $f_p(-10)$ bestaat niet als $-10p - 5 = 0$ dus $-10p = 5$ ofwel $p = -\frac{1}{2}$

b $f_p(x) = x$

$$\frac{4}{px - 5} = x$$

$$px^2 - 5x = 4$$

$$px^2 - 5x - 4 = 0$$

Er is één oplossing dus $D = 0$.

$$25 - 4 \cdot p \cdot -4 = 0$$

$$25 + 16p = 0$$

$$16p = -25$$

$$p = -\frac{25}{16} = -1\frac{9}{16}$$

10.6 Samengestelde functies

intro Je kunt de formule van T substitueren in de formule van p . Dan krijg je een formule waarbij p uitgedrukt is in t .

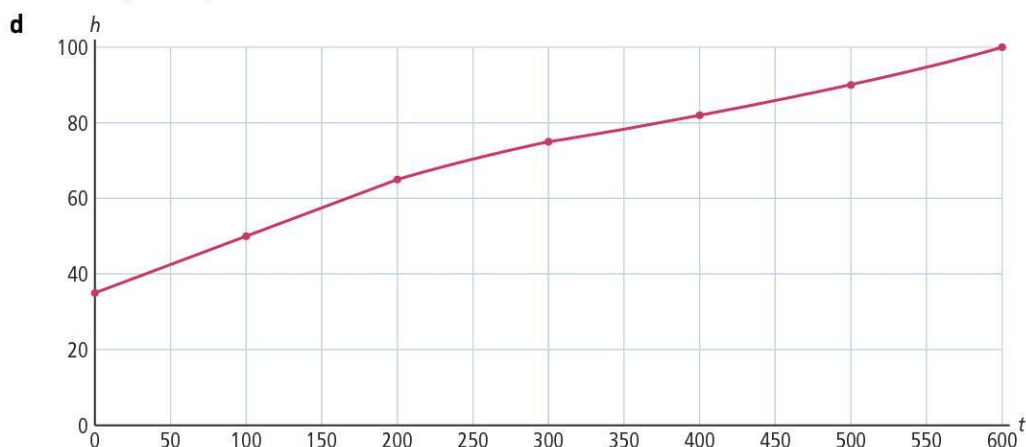
39 a In de linker grafiek lees je af dat op tijdstip $t = 0$ het volume $V = 400$ is en in de rechtergrafiek dat bij $V = 400$ een waterhoogte $h = 35$ cm hoort.

b $h = 80$ aflezen in de rechter grafiek geeft $V \approx 2500$

$V = 2500$ aflezen in de linker grafiek geeft $t \approx 350$ seconden.

c

t	V	h
0	400	35
100	1000	50
200	1600	65
300	2200	75
400	2800	82
500	3400	90
600	4000	100



40 a 6 minuten = 360 seconden.

$t = 360$ invullen in $V = 6t + 400$ geeft $V = 6 \cdot 360 + 400 = 2560$

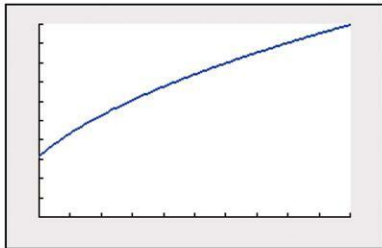
$V = 2560$ invullen in $h = \sqrt{2,5 \cdot V}$ geeft $h = \sqrt{2,5 \cdot 2560} = \sqrt{6400} = 80$

De waterhoogte na 6 minuten is 80 cm.

- b** $h = 60$ invullen in $h = \sqrt{2,5 \cdot V}$ geeft $60 = \sqrt{2,5 \cdot V}$
 $2,5 \cdot V = 3600$ dus $V = 1440$
 $V = 1440$ invullen in $V = 6t + 400$ geeft $1440 = 6t + 400$
 $6t = 1040$ dus $t = 173\frac{1}{3}$
 De waterhoogte is 60 cm na ongeveer 173 seconden.

c $h = \sqrt{2,5 \cdot (6t + 400)}$
 $h = \sqrt{15t + 1000}$

- d** invoer: $y_1 = \sqrt{15x + 1000}$
 venster: $0 \leq x \leq 600, 0 \leq y \leq 100$



ja, deze plot komt overeen met de grafiek van opdracht 39d.

41 a $k(x) = {}^3\log(2(2 + x^3) + 5)$
 $k(x) = {}^3\log(4 + 2x^3 + 5)$
 $k(x) = {}^3\log(2x^3 + 9)$

b $k(x) = \frac{4}{5x - 9 - 2}$
 $k(x) = \frac{4}{5x - 11}$

c $k(x) = \sqrt{4 - x^2} + 2$
 $k(x) = \sqrt{6 - x^2}$

d $k(x) = \left(\frac{6}{x}\right)^2 - 4 \cdot \frac{6}{x}$
 $k(x) = \frac{36}{x^2} - \frac{24}{x}$

42 a $g(t) = 2\sqrt{t}$ en $f(t) = 5t^3 - 7$

c $g(x) = \log(x)$ en $f(x) = x^2 - 3x$

b $g(x) = \frac{2}{x}$ en $f(x) = \sin(x)$

d $g(t) = \frac{7}{t}$ en $f(t) = 2t^2 - 9$

43 a De schakels zijn $p(x) = \sqrt{x}$ en $q(x) = 36 - x^2$.

De grafiek van q is een bergparabool met een top bij $x = 0$.

p is een stijgende functie en heeft dus ook een top bij $x = 0$.

$f(0) = \sqrt{36} = 6$ dus de top is $(0, 6)$.

b De schakels zijn $p(x) = \sqrt[3]{x}$ en $q(x) = (x + 1)^2 - 8$.

De grafiek van q is een bergparabool met een top bij $x = -1$.

p is een stijgende functie en heeft dus ook een top bij $x = -1$.

$g(-1) = \sqrt[3]{-8} = -2$ dus de top is $(-1, -2)$.

c De schakels zijn $p(x) = \frac{70}{x}$ en $q(x) = x^4 - 10$.

De grafiek van q heeft een minimum bij $x = 0$.

p is een dalende functie dus p heeft een maximum bij $x = 0$.

$h(0) = \frac{70}{-10} = -7$ dus de top is $(0, -7)$.

- d** De schakels zijn $p(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en $q(x) = 4 - x^2$.
De grafiek van q is een bergparabool met een maximum bij $x = 0$.
 p is een dalende functie dus p heeft een minimum bij $x = 0$.
 $k(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ dus de top is $\left(0, \frac{1}{16}\right)$.

- 44 a** De schakels zijn $p(x) = \sqrt{x}$ en $q(x) = 4x + 8$.
 p en q zijn stijgende functies. Als x toeneemt, neemt $q(x)$ toe en daarmee ook $p(q(x))$. Dus f is een stijgende functie.
- b** De schakels zijn $p(x) = \frac{4}{x}$ en $q(x) = 3x + 5$.
 q is een stijgende functie, p is dalend. Als x toeneemt, neemt $q(x)$ toe en neemt $p(q(x))$ af. Dus g is een dalende functie.
- c** De schakels zijn $p(x) = 2^x$ en $q(x) = 3 - 5x$.
 q is een dalende functie, p is stijgend. Als x toeneemt, neemt $q(x)$ af en daarmee ook $p(q(x))$. Dus h is dalend.
- d** De schakels zijn $p(x) = \frac{1}{2}\log(x)$ en $q(x) = \frac{4}{x}$.
 p en q zijn dalende functies. Als x toeneemt, neemt $q(x)$ af en neemt $p(q(x))$ toe. Dus k is een stijgende functie.
- 45 a** $x^2 + 25$ is altijd positief dus $f(x)$ bestaat voor elke waarde van x . Er is dus geen verticale asymptoot.
- b** $x^2 - 25 = 0$ als $x = 5$ of $x = -5$. De lijnen $x = 5$ en $x = -5$ zijn de verticale asymptoten van de grafiek van g .

- 042 a** $g(x) = 2^x$
- b** $f(x) = 8 - x^2$
- c** $g(x) = \frac{5}{x}$ en $f(x) = 4x^2 - 9$
- d** $g(x) = x^5$ en $f(x) = 7x^2 - 2$
- e** $g(x) = \frac{3}{x}$ en $f(x) = \log(x)$
- f** $g(x) = \sqrt[3]{x}$ en $f(x) = 8 - 9x$
- g** $g(x) = \frac{-4}{x}$ en $f(x) = \cos(x)$

- 044 a** f bij g invullen geeft $k(x) = -(2 - 3x)^3$
- b** f is een dalende functie.
- c** g is ook een dalende functie.
- d** Als x toeneemt, neemt $f(x)$ af, dus neemt $g(f(x))$ toe.
Conclusie: als x toeneemt, neemt $k(x)$ toe.
 k is een stijgende functie.

- U7** De schakels zijn $p(x) = \frac{x+1}{x-1}$ en $q(x) = 2^x$.
Als x steeds groter wordt nadert $p(x)$ naar 1 dus de lijn $y = 1$ is de horizontale asymptoot van de grafiek van p .
 q is een stijgende functie, dus als x steeds groter wordt, wordt ook 2^x steeds groter. Daaruit volgt dat $y = 1$ een horizontale asymptoot is van de grafiek van f .
Als x negatieve waarden steeds verder van 0 aanneemt, nadert $q(x)$ naar 0.
Dan nadert $f(x)$ naar $p(0) = -1$, dus ook de lijn $y = -1$ is een horizontale asymptoot van f .
De lijn $x = 1$ is de verticale asymptoot van de grafiek van p .
 $2^x = 1$ als $x = 0$ dus de lijn $x = 0$ is de verticale asymptoot van de grafiek van f .

10.7 Gemengde opdrachten

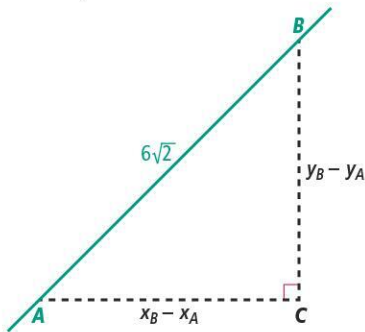
- 46** a Het randpunt is het punt $(2, -2)$.
b Het randpunt is niet $(0, 0)$ zoals van de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$.
c $(0, 0)$ is verschoven naar $(2, -2)$ dus dat is een verschuiving van 2 naar rechts en 2 omlaag. Het punt $(1, 1)$ op de grafiek van f zou dan $(3, -1)$ worden maar dat punt ligt niet op de grafiek van g . Het punt $(3, 1)$ ligt wel op de grafiek van g , daaruit volgt dat er sprake is van een vermenigvuldiging.
d Er is vermenigvuldigd met 3 ten opzichte van de x -as en daarna 2 naar rechts en 2 omlaag verschoven.
e Er is vermenigvuldigd met $\frac{1}{9}$ ten opzichte van de y -as en daarna 2 naar rechts en 2 omlaag verschoven.
- 47** a Een verschuiving van 75 naar rechts en een vermenigvuldiging met 0,8465 ten opzichte van de x -as.
b De verschuiving betekent dat je in de praktijk pas vanaf een sprong van 75 cm punten krijgt.
c Elke verbetering levert steeds meer punten op.
d Alleen sneller lopen dan in een tijd van 480 seconden levert punten op.
e Sneller lopen betekent een kortere tijd, dan haal je minder van 480 af en wordt de uitkomst groter.
- 48** $g(x) = -f(-x)$
 $g(x) = -(4 \cdot -x - \frac{1}{2}(-x)^2) = 4x + \frac{1}{2}x^2$
- 49** a De schakels van $f(x) = g(h(x))$ zijn $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en $h(x) = (x + a)^2 - a$.
De top van de grafiek van h is $(-a, -a)$.
 g is een dalende functie, daaruit volgt dat ook de grafiek van f een top heeft bij $x = -a$.
 $f_a(-a) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-a} = 2^a$ dus de top van de grafiek van f_1 is het punt $(-1, 2)$.
b Als x onbegrensd toeneemt nadert $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ tot 0 dus de horizontale asymptoot van de grafiek van g is de lijn $y = 0$.
Als x waarden aanneemt die steeds verder van 0 liggen, neemt $h(x)$ onbegrensd toe en nadert $f(x) = g(h(x))$ naar 0. De lijn $y = 0$ is dus de horizontale asymptoot van de grafiek van f .

Onderzoekopdrachten

- 50** $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$
De lengte l staat in de wortel, dus maak l vier keer zo groot, dan geldt:
 $2\pi\sqrt{\frac{4l}{g}} = 2\pi\sqrt{4 \cdot \frac{l}{g}} = 2\pi \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = 2 \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = 2T$
Om de slingertijd te verdubbelen moet de lengte van de slinger vier keer zo groot worden.

- 51 a** $x^2 = x + p$
 $x^2 - x - p = 0$
 Deze vergelijking heeft geen oplossingen dus $D < 0$.
 $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -p = 1 + 4p$
 $1 + 4p < 0$
 $4p < -1$
 $p < -\frac{1}{4}$

b



De lijn $y = x + p$ heeft richtingscoëfficiënt 1 en maakt dus een hoek van 45° met de horizontale lijn AC . Daaruit volgt dat $\triangle ABC$ een gelijkbenige rechthoekige driehoek is met $AC = BC$.

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 = (6\sqrt{2})^2 = 72$$

$$AC = BC \text{ dus } 2 \cdot AC^2 = 72$$

$$AC^2 = 36$$

$$AC = 6$$

$$\text{Dus } x_B - x_A = y_B - y_A = 6$$

- c** $x^2 = x + p$
 $x^2 - x - p = 0$
 $D = 1 + 4p$
 $x_B = \frac{1 + \sqrt{1 + 4p}}{2}$ en $x_A = \frac{1 - \sqrt{1 + 4p}}{2}$
 $x_B - x_A = \frac{1 + \sqrt{1 + 4p}}{2} - \frac{1 - \sqrt{1 + 4p}}{2} = \frac{2\sqrt{1 + 4p}}{2} = \sqrt{1 + 4p}$
 $x_B - x_A = 6$ dus $\sqrt{1 + 4p} = 6$
 $1 + 4p = 36$
 $4p = 35$
 $p = 8\frac{3}{4}$

- d** $x_N - x_M = \sqrt{1 + 4p}$
 Ook $y_N - y_M = \sqrt{1 + 4p}$
 De stelling van Pythagoras toepassen geeft
 $MN^2 = (\sqrt{1 + 4p})^2 + (\sqrt{1 + 4p})^2 = 1 + 4p + 1 + 4p = 2 + 8p$
 Voor de afstand MN geldt $MN = \sqrt{2 + 8p}$

Samenvatting

- S1 a** $g(x) = f(x + 2) - 1$
 $g(x) = 2^{3(x+2)} - 1$
 $g(x) = 2^{3x+6} - 1$
- b** $g(x) = f(x - 4) + 5$
 $g(x) = 3(x - 4)^2 + 5$

- S2 a** $g(x) = 4 \cdot f(x)$
 $g(x) = 4(3x^3 - 6x + 4)$
 $g(x) = 12x^3 - 24x + 16$

$$\begin{aligned}\text{b } g(x) &= -f(x) \\ g(x) &= -(3x^3 - 6x + 4) \\ g(x) &= -3x^3 + 6x - 4\end{aligned}$$

$$\text{S3 a } g(x) = f\left(\frac{1}{4}x\right) = 3^{12 \cdot \frac{1}{4}x - 7}$$

$$g(x) = 3^{3x - 7}$$

$$\begin{aligned}\text{b } h(x) &= g(-x) = 4 \cdot -x\sqrt{-x - 2} \\ h(x) &= -4x\sqrt{-x - 2}\end{aligned}$$

$$\text{S4 a } 3x + 6 = 0$$

$$3x = -6$$

$$x = -2$$

De verticale asymptoot is de lijn $x = -2$.

Met een tabel zie je dat voor grote waarden van x de functiewaarden naderen tot 3. De horizontale asymptoot is de lijn $y = 3$.

$$\text{b } 9x = 0 \text{ als } x = 0.$$

De verticale asymptoot is de lijn $x = 0$ (de y -as).

Met een tabel zie je dat voor grote waarden van x de functiewaarden naderen tot $\frac{1}{3}$. De horizontale asymptoot is de lijn $y = \frac{1}{3}$.

$$\text{c } \text{Voor negatieve waarden van } x \text{ die steeds verder van } 0 \text{ liggen, naderen de functiewaarden tot } 3. \text{ De horizontale asymptoot is de lijn } y = 3.$$

Er is geen verticale asymptoot.

$$\text{d } 2x - 5 = 0 \text{ als } x = 2\frac{1}{2}$$

De verticale asymptoot is de lijn $x = 2\frac{1}{2}$.

Er is geen horizontale asymptoot.

$$\text{S5 a } y = \frac{6}{4x - 3}$$

$$y \cdot (4x - 3) = 6$$

$$4x - 3 = \frac{6}{y}$$

$$4x = \frac{6}{y} + 3$$

$$x = \frac{6}{4y} + \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{3}{2y} + \frac{3}{4}$$

$$\text{b } x = 5 \cdot 2^{3 \cdot \sqrt{y+2} + 2}$$

$$x = 5 \cdot 2^{3(y+2)+2}$$

$$x = 5 \cdot 2^{3y+8}$$

$$\text{S6 a } q = 12 - 3p$$

$$12 - 3p = q$$

$$-3p = -12 + q$$

$$p = 4 - \frac{1}{3}q \text{ en dus niet gelijkwaardig met } p = 4 - q$$

$$\text{b } p = 3^q - 4$$

$$3^q - 4 = p$$

$$3^q = p + 4$$

$$q = {}^3\log(p + 4)$$

Dus de formules $q = {}^3\log(p + 4)$ en $p = 3^q - 4$ zijn wel gelijkwaardig.

- S7 a** $f_a(-3) = 8$
 $a \cdot (-3)^2 - 4 \cdot -3 + 2 = 8$
 $9a + 12 + 2 = 8$
 $9a = -6$
 $a = -\frac{2}{3}$
- b** De top van de grafiek van f_a ligt op de x -as dus $ax^2 - 4x + 2 = 0$ heeft één oplossing, wat betekent dat de discriminant $D = 0$.
 $16 - 4 \cdot a \cdot 2 = 0$
 $16 - 8a = 0$
 $a = 2$
- S8 a** De schakels van $f(x) = \log\left(2x - \frac{1}{10}x^2\right)$ zijn $p(x) = 2x - \frac{1}{10}x^2$ en $q(x) = \log(x)$
 $p'(x) = 2 - \frac{1}{5}x$
 $p'(x) = 0$
 $2 - \frac{1}{5}x = 0$
 $\frac{1}{5}x = 2$
 $x = 10$
 De grafiek van p is een bergparabool met een top bij $x = 10$.
 q is een stijgende functie dus f heeft ook een top bij $x = 10$.
 $f(10) = \log\left(20 - \frac{1}{10} \cdot 100\right) = \log(10) = 1$
 De top van de grafiek van f is het punt $(10, 1)$.
- b** De schakels van $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{3-2x}$ zijn $p(x) = 3 - 2x$ en $q(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$
 p en q zijn dalende functies. Als x toeneemt, neemt $p(x)$ af en neemt $g(x) = q(p(x))$ toe. Dus g is een stijgende functie.

Test jezelf

- T1 a** Het beeld van het punt $O(0, 0)$ is $(-4, 2)$.
- b** Vanuit het punt $Q(-1, -25)$ twee omlaag en vier naar rechts kom je uit in $P(3, -27)$.
- c** $g(x) = f(x + 4) + 2 = -(x + 4)^3 + 2$
- d** Het punt op de grafiek van f heeft dan y -coördinaat -8 .
 $f(x) = -8$
 $-x^3 = -8$
 $x^3 = 8$
 $x = 2$ dus $(2, -8)$ is het gezochte punt op de grafiek van f .
- T2 a** $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$
 $g(x) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)^4$
 $g(x) = 100 \cdot \frac{1}{16} \cdot x^4$
 $g(x) = 6\frac{1}{4}x^4$
- b** $g(x) = \frac{1}{16} \cdot 100 \cdot x^4$ ofwel $g(x) = \frac{1}{16} \cdot f(x)$ dus is er met $\frac{1}{16}$ ten opzichte van de x -as vermenigvuldigd.

T3 a $g(x) = -f(x - 4)$
 $g(x) = -(-(x - 4)^2 + 7(x - 4))$
 $g(x) = (x - 4)^2 - 7(x - 4)$
 $g(x) = x^2 - 8x + 16 - 7x + 28$
 $g(x) = x^2 - 15x + 44$

b 4 naar rechts geeft
 $g(x) = -(x - 4)^2 + 7(x - 4)$
 $g(x) = -(x^2 - 8x + 16) + 7x - 28$
 $g(x) = -x^2 + 8x - 16 + 7x - 28$
 $g(x) = -x^2 + 15x - 44$
 dan spiegelen in de y -as geeft
 $h(x) = -(-x)^2 + 15 \cdot -x - 44$ ofwel
 $h(x) = -x^2 - 15x - 44$

T4 a $3x + 10 = 0$ als $x = -3\frac{1}{3}$ dus de verticale asymptoot is de lijn $x = -3\frac{1}{3}$
 Met een tabel zie je dat voor grote waarden van x de functiewaarden naderen tot $-\frac{2}{3}$
 De horizontale asymptoot is de lijn $y = -\frac{2}{3}$

b $0,1x + 2 = 0$ als $x = -20$ dus de verticale asymptoot is de lijn $x = -20$
 Met een tabel zie je dat voor grote waarden van x de functiewaarden naderen tot 8.
 De horizontale asymptoot is de lijn $y = 8$.

T5 a De schakels van $k(x) = g(f(x))$ zijn $f(x) = \sqrt{4x + 8}$ en $g(x) = \frac{16}{x}$
 f is een stijgende functie en g is een dalende functie.
 Als x toeneemt, neemt $f(x)$ toe en neemt $k(x) = g(f(x))$ af. Dus k is dalend.

b $\sqrt{4x + 8} = 0$
 $4x + 8 = 0$
 $4x = -8$
 $x = -2$
 De verticale asymptoot is de lijn $x = -2$.
 Voor grote waarden van x nadert $k(x)$ tot 0 dus $y = 0$ is de horizontale asymptoot van de grafiek van k .

T6 a $3x = -1 + {}^3\log(y)$
 $-1 + {}^3\log(y) = 3x$
 ${}^3\log(y) = 3x + 1$
 $y = 3^{3x+1}$
 $y = 3^{3x} \cdot 3^1$
 $y = (3^3)^x \cdot 3$
 $y = 3 \cdot 27^x$

b $t = ((x + 2)^2 + 1\frac{1}{2})$ invullen in $y = 4t - 6$ geeft
 $y = 4((x + 2)^2 + 1\frac{1}{2}) - 6$
 $y = 4(x + 2)^2 + 6 - 6$
 $y = 4(x + 2)^2$

T7 a Het randpunt van $f_p(x) = \sqrt{2\left(x - \frac{p}{x}\right)}$ is $(-2, 0)$ als $2\left(-2 - \frac{p}{-2}\right) = 0$
 $-2 + \frac{p}{2} = 0$
 $\frac{p}{2} = 2$
 $p = 4$

Het randpunt van $f_p(x) = \sqrt{2\left(x - \frac{p}{x}\right)}$ is $(2, 0)$ als $2\left(2 - \frac{p}{2}\right) = 0$
 $2 - \frac{p}{2} = 0$ dus $\frac{p}{2} = 2$ en ook hier is $p = 4$.

b $f_0(x) = \sqrt{2\left(x - \frac{0}{x}\right)}$ ofwel $f_0(x) = \sqrt{2x}$

De grafiek van f_0 tien naar links verschuiven geeft de grafiek van $g(x) = f_0(x + 10)$

$$g(x) = \sqrt{2(x + 10)} = \sqrt{2x + 20}$$

Yasmin heeft geen gelijk.

c $f_0(x) = \sqrt{2x}$ en $h(x) = \sqrt{2x - 16} = \sqrt{2(x - 8)}$

De grafiek van f_0 moet 8 naar rechts verschoven worden om de grafiek van h te krijgen.

T8 a $k(x) = \sqrt{4(x^2 + 5)} + 5$

$$k(x) = \sqrt{4x^2 + 20} + 5$$

b $f(g(x))$ bestaat als $x^2 + 5 \geq 0$ dus voor elke waarde van x .

Het domein van k is $\mathbb{R}$.

c $h(x) = (\sqrt{4x + 5})^2 + 5$

$$h(x) = 4x + 5 + 5$$

$$h(x) = 4x + 10$$

d $g(f(x))$ bestaat als $4x + 5 \geq 0$ dus als $x \geq -\frac{5}{4}$.

Het domein van h is $\left[-\frac{5}{4}, \rightarrow\right)$.

T9 a $k(x) = {}^3\log(2(x^2 + 1) - 1) = {}^3\log(2x^2 + 1)$

b De grafiek van $f(x) = x^2 + 1$ is een dalparabool met een top bij $x = 0$.

g is een stijgende functie dus ook de grafiek van g heeft een top bij $x = 0$.

$k(0) = {}^3\log(1) = 0$ dus de top van de grafiek van k is het punt $(0, 0)$.

c Voor $x > 0$ is f een stijgende functie en ook g is een stijgende functie. Als x toeneemt, neemt $f(x)$ toe en daarmee ook $k(x) = g(f(x))$ dus k is stijgend.

d $h(x) = ({}^3\log(2x - 1))^2 + 1$

T10 a $T = 20$ invullen geeft $V = 331\sqrt{1 + \frac{20}{273}} \approx 342,9$ m/s

b $331\sqrt{1 + \frac{T}{273}} = 340$

$$\sqrt{1 + \frac{T}{273}} = \frac{340}{331}$$

$$1 + \frac{T}{273} = \left(\frac{340}{331}\right)^2$$

$$\frac{T}{273} = \left(\frac{340}{331}\right)^2 - 1$$

$$T = 15,047... \approx 15^\circ\text{C}$$

$$\begin{aligned} \text{c } \sqrt{1 + \frac{T}{273}} &= \frac{V}{331} \\ 1 + \frac{T}{273} &= \frac{V^2}{109561} \\ \frac{T}{273} &= \frac{V^2}{109561} - 1 \\ T &= 273 \left(\frac{V^2}{109561} - 1 \right) \text{ of } T = \frac{273}{109561} \cdot V^2 - 273 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } V &= 331 \sqrt{1 + \frac{15 - 6,5 \cdot h}{273}} \\ V &= 331 \sqrt{1 + \frac{15}{273} - \frac{6,5}{273} \cdot h} \\ V &\approx 331 \sqrt{1,0549 - 0,0238 \cdot h} \end{aligned}$$

Extra oefening

E1 a Door een translatie 9 naar rechts en 4 omhoog.

$$\begin{aligned} \text{b } g(x) &= f(x + 5) \\ g(x) &= 4 + {}^2\log(x - 9 + 5) \\ g(x) &= 4 + {}^2\log(x - 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{E2 a } g(x) &= 4 \cdot f(x) \\ g(x) &= 4 \cdot 3 \cdot 2^x \\ g(x) &= 12 \cdot 2^x \end{aligned}$$

b De grafiek van g kan ook ontstaan door een verschuiving van 2 naar links.

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x + 2) \\ g(x) &= 3 \cdot 2^{x+2} \\ g(x) &= 3 \cdot 2^x \cdot 2^2 \\ g(x) &= 12 \cdot 2^x \end{aligned}$$

$$\text{E3 a } g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right) = 3 \cdot 2^{\frac{1}{2}x}$$

$$\text{b } g(x) = f(-x) = 3 \cdot 2^{-x}$$

$$\text{E4 a } 10 - 15x = 0$$

$$15x = 10$$

$$x = \frac{2}{3} \text{ dus de verticale asymptoot is de lijn } x = \frac{2}{3}$$

Met een tabel zie je dat voor grote waarden van x de functiewaarden naderen tot $-\frac{1}{3}$.

De horizontale asymptoot is de lijn $y = -\frac{1}{3}$.

b Voor negatieve waarden van x ver van 0 nadert $g(x)$ tot 4 dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 4$. Er is geen verticale asymptoot.

$$\text{c } 1 - \frac{1}{6}x = 0$$

$$x = 6 \text{ dus de verticale asymptoot is de lijn } x = 6.$$

Met een tabel zie je dat voor grote waarden van x de functiewaarden naderen tot 10.

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 10$.

d Voor grote waarden van x nadert $k(x)$ tot 16 dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 16$. Er is geen verticale asymptoot.

E5 a $y = \frac{1}{4} \cdot {}^3\log(x-2)$
 $4y = {}^3\log(x-2)$
 $x-2 = 3^{4y}$
 $x = 3^{4y} + 2$

c $y = \frac{1}{3}x^5 - 2$
 $\frac{1}{3}x^5 = y + 2$
 $x^5 = 3y + 6$
 $x = \sqrt[5]{3y+6}$

b $y = 16 + 4^x$
 $y - 16 = 4^x$
 $x = {}^4\log(y-16)$

d $y = \frac{-4}{\sqrt{x-4}}$
 $y \cdot \sqrt{x-4} = -4$
 $\sqrt{x-4} = \frac{-4}{y}$
 $x-4 = \frac{16}{y^2}$
 $x = \frac{16}{y^2} + 4$

E6 a $q = 8p + 24$
 $8p + 24 = q$
 $8p = q - 24$
 $p = 0,125q - 3$
b $q = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2p-5}$

c $x = 4 + {}^2\log(y)$
 $x - 4 = {}^2\log(y)$
 $y = 2^{x-4}$
 $y = 2^x \cdot 2^{-4}$
 $y = \frac{1}{16} \cdot 2^x$

$2q = \sqrt[3]{2p-5}$
 $8q^3 = 2p-5$
 $2p-5 = 8q^3$
 $2p = 8q^3 + 5$
 $p = 4q^3 + 2\frac{1}{2}$

E7 a $f_a(2) = 4$
 $2^4 - \frac{1}{4}a = 4$
 $16 - \frac{1}{4}a = 4$
 $\frac{1}{4}a = 12$
 $a = 48$

b De top heeft coördinaten $(0, -\frac{1}{4}a)$.
 Deze invullen in $y = 2x - 7$ geeft
 $-\frac{1}{4}a = 2 \cdot 0 - 7$
 $-\frac{1}{4}a = -7$
 $a = 28$

c Voor de snijpunten met de x -as geldt $x^4 - \frac{1}{4}a = 0$
 $x^4 = \frac{1}{4}a$
 $x = \sqrt[4]{\frac{1}{4}a}$ of $x = -\sqrt[4]{\frac{1}{4}a}$

E8 a $f(x) = q(p(x))$ met $p(x) = (x-1)^2 + 16$ en $q(x) = \sqrt{x}$

b De grafiek van p heeft een top bij $x = 1$.
 q is stijgend dus ook f heeft een top bij $x = 1$.
 $f(1) = \sqrt{16} = 4$ dus de top is het punt $(1, 4)$.

c $\sqrt{(x-1)^2 + 16} = 6$
 $(x-1)^2 + 16 = 36$
 $(x-1)^2 = 20$
 $x-1 = \sqrt{20}$ of $x-1 = -\sqrt{20}$
 $x = 1 + \sqrt{20}$ of $x = 1 - \sqrt{20}$

$$\text{E9} \quad k(x) = \frac{6}{5(2x^2 - 8) + 4} \text{ ofwel } k(x) = \frac{6}{10x^2 - 36}$$

$$h(x) = 2 \cdot \left(\frac{6}{5x + 4} \right)^2 - 8 \text{ ofwel } h(x) = \frac{72}{(5x + 4)^2} - 8$$

$$\text{E10 a} \quad 8 - \frac{1}{2}x^2 = 0$$

$$\frac{1}{2}x^2 = 8$$

$$x^2 = 16$$

$$x = -4 \text{ of } x = 4$$

$$f(-4) = 4 - \sqrt{0} = 4 \text{ en } f(4) = 4 - \sqrt{0} = 4$$

De randpunten zijn $(-4, 4)$ en $(4, 4)$.

- b** Eerst met $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de y -as vermenigvuldigen

$$g(x) = f(2x)$$

$$g(x) = 4 - \sqrt{8 - \frac{1}{2}(2x)^2}$$

$$g(x) = 4 - \sqrt{8 - \frac{1}{2} \cdot 4x^2}$$

$$g(x) = 4 - \sqrt{8 - 2x^2}$$

Daarna 3 naar links verschuiven

$$h(x) = g(x + 3)$$

$$h(x) = 4 - \sqrt{8 - 2(x + 3)^2}$$

- c** Eerst 3 naar links verschuiven

$$g(x) = f(x + 3)$$

$$g(x) = 4 - \sqrt{8 - \frac{1}{2}(x + 3)^2}$$

Daarna met $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de y -as vermenigvuldigen

$$h(x) = g(2x)$$

$$h(x) = 4 - \sqrt{8 - \frac{1}{2}(2x + 3)^2}$$

$$\text{E11 a} \quad f_p(2) = 5$$

$${}^2\log(2^2 + p \cdot 2 + 4) = 5$$

$${}^2\log(4 + 2p + 4) = 5$$

$${}^2\log(8 + 2p) = 5$$

$$8 + 2p = 2^5$$

$$2p = 24$$

$$p = 12$$

- b** De lijn $x = 3$ is een verticale asymptoot van de grafiek van f_p als $x = 3$ de oplossing is van $x^2 + px + 4 = 0$.

$$3^2 + p \cdot 3 + 4 = 0$$

$$9 + 3p + 4 = 0$$

$$3p = -13$$

$$p = -\frac{13}{3} = -4\frac{1}{3}$$

- c** Als alle grafieken van f_p door één punt gaan, dan moet p wegvallen in het functievoorschrift. Dat is het geval als $x = 0$.

$$f_p(0) = {}^2\log(4) = 2 \text{ dus alle grafieken van } f_p \text{ gaan door het punt } (0, 2).$$

- d** Het domein is $\mathbb{R}$ als $x^2 + px + 4 > 0$ voor alle waarden van x .

Dus de vergelijking $x^2 + px + 4 = 0$ moet dan geen oplossingen hebben.

$$D = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4$$

$$D = p^2 - 16$$

$$D < 0 \text{ als } p^2 < 16 \text{ ofwel } -4 < p < 4$$

$$1 \quad a \quad -\frac{1}{3}(a+27) - 12 =$$

$$-\frac{1}{3}a - 9 - 12 =$$

$$-\frac{1}{3}a - 21$$

$$b \quad (3q-5)^2 =$$

$$9q^2 - 30q + 25$$

$$c \quad (0,25 - 2p)^2 =$$

$$\left(\frac{1}{4} - 2p\right)^2 =$$

$$\frac{1}{16} - p + 4p^2$$

$$d \quad (7p+2)(p^2-3) =$$

$$7p^3 - 21p + 2p^2 - 6$$

$$e \quad -3 - (3 - 2x) =$$

$$-3 - 3 + 2x =$$

$$-6 + 2x$$

$$f \quad (y^2-6)(y^2+6) =$$

$$y^4 - 36$$

$$g \quad -11(2p-3) + 6p =$$

$$-22p + 33 + 6p =$$

$$-16p + 33$$

$$h \quad (2x-4)(4-2x) =$$

$$8x - 4x^2 - 16 + 8x =$$

$$-4x^2 + 16x - 16$$

$$2 \quad a \quad 24x^2 + 6x = 6x(4x+1)$$

$$b \quad 32p - 24p^2 = 8p(4-3p)$$

$$c \quad s^2 - s - 30 = (s+5)(s-6)$$

$$d \quad 11q + q^2 - 12 =$$

$$q^2 + 11q - 12 = (q+12)(q-1)$$

$$e \quad 4p^2 - 6p = 2p(2p-3)$$

$$f \quad 27 - 12t + t^2 =$$

$$t^2 - 12t + 27 = (t-9)(t-3)$$

$$g \quad x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$h \quad p^2 - 64 = (p+8)(p-8)$$

$$3 \quad a \quad \frac{8^{10}}{8^2} = 8^8 \quad \text{niet waar, want } \frac{8^{10}}{8^2} = 8^{10-2} = 8^8$$

$$b \quad (x^2)^4 = x^6 \quad \text{niet waar, want } (x^2)^4 = x^{2 \cdot 4} = x^8$$

$$c \quad (2a^{-2})^{-4} = 2a^{-8} \quad \text{niet waar, want } (2a^{-2})^{-4} = 2^{-4} \cdot a^{-2 \cdot -4} = \frac{1}{16}a^8$$

$$d \quad (4r^3)^{-1} = \frac{1}{4r^3} \quad \text{waar}$$

$$e \quad 2a^{-2} \cdot 5a^2 = 10a \quad \text{niet waar, want } 2a^{-2} \cdot 5a^2 = 10 \cdot a^0 = 10 \cdot 1 = 10$$

$$f \quad (\sqrt{x})^5 \cdot (\sqrt{x})^3 = x^5 \quad \text{niet waar, want } (\sqrt{x})^5 \cdot (\sqrt{x})^3 = (x^{\frac{1}{2}})^5 \cdot (x^{\frac{1}{2}})^3 = x^{2\frac{1}{2}} \cdot x^{1\frac{1}{2}} = x^4$$

$$4 \quad y = 5 \cdot 3^{3x-1}$$

$$y = 5 \cdot 3^{3x} \cdot 3^{-1} \quad \text{regel } g^a \cdot g^b = g^{a+b}$$

$$y = 5 \cdot 3^{-1} \cdot (3^3)^x \quad \text{regel } (g^a)^b = g^{a \cdot b}$$

$$y = 1\frac{2}{3} \cdot 27^x \quad \text{regel } g^{-1} = \frac{1}{g}$$

$$5 \quad a \quad y = 7 \cdot 7^{x+3}$$

$$y = 7 \cdot 7^x \cdot 7^3$$

$$y = 7 \cdot 7^3 \cdot 7^x$$

$$y = 2401 \cdot 7^x$$

$$b \quad y = 12 \cdot 3^{2-x}$$

$$y = 12 \cdot 3^2 \cdot 3^{-x}$$

$$y = 12 \cdot 9 \cdot (3^{-1})^x$$

$$y = 108 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$c \quad y = 6^{1-2x}$$

$$y = 6^1 \cdot 6^{-2x}$$

$$y = 6 \cdot (6^{-2})^x$$

$$y = 6 \cdot \left(\frac{1}{36}\right)^x$$

$$d \quad y = 25 \cdot 5^{2x+1}$$

$$y = 25 \cdot 5^{2x} \cdot 5^1$$

$$y = 25 \cdot (5^2)^x \cdot 5$$

$$y = 25 \cdot 5 \cdot (5^2)^x$$

$$y = 125 \cdot 25^x$$

$$\begin{aligned} \text{e } y &= \frac{1}{2} \cdot 2^{-2x+5} \\ y &= \frac{1}{2} \cdot 2^{-2x} \cdot 2^5 \\ y &= \frac{1}{2} \cdot (2^{-2})^x \cdot 32 \\ y &= 16 \cdot (2^{-2})^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } y &= 4 \cdot 9^{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}} \\ y &= 4 \cdot 9^{\frac{1}{2}x} \cdot 9^{\frac{1}{2}} \\ y &= 4 \cdot (9^{\frac{1}{2}})^x \cdot 3 \\ y &= 4 \cdot 3 \cdot (9^{\frac{1}{2}})^x \\ y &= 12 \cdot 3^x \end{aligned}$$

$$\text{6 a } (1 - 2^q)(1 + 2^q) = 1 - 2^{2q}$$

$$\begin{aligned} \text{d } 2(2^x + y)(2^x - y) &= \\ 2(2^{2x} - y^2) &= \\ 2 \cdot 2^{2x} - 2y^2 &= \\ 2^{1+2x} - 2y^2 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } (3^t - 2)^2 &= \\ (3^t - 2)(3^t - 2) &= \\ 3^{2t} - 4 \cdot 3^t + 4 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } 5^{3p} (5^{\frac{1}{2}p} - 5^{-p}) &= \\ 5^{3p + \frac{1}{2}p} - 5^{3p + -p} &= \\ 5^{3\frac{1}{2}p} - 5^{2p} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } (4^x + 3)(4^{-x} - 2) &= \\ 4^{x+x} - 2 \cdot 4^x + 3 \cdot 4^{-x} - 6 &= \\ 4^0 - 2 \cdot 4^x + \frac{3}{4^x} - 6 &= \\ 1 - 2 \cdot 4^x + \frac{3}{4^x} - 6 &= \\ -5 - 2 \cdot 4^x + \frac{3}{4^x} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } (8^{3p} + 3)(8^p - p) &= \\ 8^{4p} - p \cdot 8^{3p} + 3 \cdot 8^p - 3p & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{7 a } \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot 2\sqrt{x} &= \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \cdot 2x^{\frac{1}{2}} = \\ x^{-\frac{1}{3}} \cdot 2x^{\frac{1}{2}} &= x^{-\frac{2}{6}} \cdot 2x^{\frac{3}{6}} = 2 \cdot x^{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt[3]{x}} &= \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \cdot x^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot x^{\frac{1}{3}}} = \\ x^{-\frac{1}{3}} \cdot x^2 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{3}} &= \frac{1}{2} \cdot x^{1\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$\text{b } \frac{(3x)^2}{2\sqrt[4]{x}} = \frac{9x^2}{2 \cdot x^{\frac{1}{4}}} = 4\frac{1}{2} \cdot x^{1\frac{3}{4}}$$

$$\begin{aligned} \text{d } (\sqrt[3]{3x})^3 \cdot (-3)^{-2} &= ((3x)^{\frac{1}{3}})^3 \cdot \frac{1}{(-3)^2} = \\ (3x)^{1\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{9} &= 3^{1\frac{1}{2}} \cdot x^{1\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{9} = \\ 3\sqrt{3} \cdot x^{1\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{9} &= \frac{1}{3} \sqrt{3} \cdot x^{1\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{8 a } a &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5\frac{1}{2} - 3}{3 - -2} = \frac{2\frac{1}{2}}{5} = \frac{1}{2} \\ y &= \frac{1}{2}x + b \text{ met } x = -2 \text{ en } y = 3 \text{ geeft } 3 = \frac{1}{2} \cdot -2 + b \text{ ofwel } b = 4 \\ \text{Een vergelijking van de lijn is } y &= \frac{1}{2}x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } a &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8 - 6}{3 - -1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ y &= \frac{1}{2}x + b \text{ met } x = -1 \text{ en } y = 6 \text{ geeft } 6 = \frac{1}{2} \cdot -1 + b \text{ ofwel } b = 6\frac{1}{2} \\ \text{Een vergelijking van de lijn is } y &= \frac{1}{2}x + 6\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } a &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - 2}{-8 - 1} = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3} \\ y &= -\frac{1}{3}x + b \text{ met } x = 1 \text{ en } y = 2 \text{ geeft } 2 = -\frac{1}{3} \cdot 1 + b \text{ ofwel } b = 2\frac{1}{3} \\ \text{Een vergelijking van de lijn is } y &= -\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$d \quad a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{17 - -7}{5 - -1} = \frac{24}{6} = 4$$

$y = 4x + b$ met $x = 5$ en $y = 17$ geeft $17 = 4 \cdot 5 + b$ ofwel $b = -3$

Een vergelijking van de lijn is $y = 4x - 3$

$$e \quad a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0,75 - 3,25}{-5 - 2,5} = \frac{-2,5}{-7,5} = \frac{1}{3}$$

$y = \frac{1}{3}x + b$ met $x = -5$ en $y = 0,75$ geeft $0,75 = \frac{1}{3} \cdot -5 + b$ ofwel $b = 2\frac{5}{12}$

Een vergelijking van de lijn is $y = \frac{1}{3}x + 2\frac{5}{12}$

$$f \quad a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0,80 - -1,12}{0,88 - 0,56} = \frac{1,92}{0,32} = 6$$

$y = 6x + b$ met $x = 0,88$ en $y = 0,80$ geeft $0,80 = 6 \cdot 0,88 + b$ ofwel $b = -4,48$

Een vergelijking van de lijn is $y = 6x - 4,48$

$$9 \quad a \quad y = 2(x + 3)^2 - 18$$

$$y = 2(x^2 + 6x + 9) - 18$$

$$y = 2x^2 + 12x + 18 - 18$$

$$y = 2x^2 + 12x$$

$$y = 2x(x + 6)$$

De coördinaten van de snijpunten van de grafiek met de x -as zijn $(0, 0)$ en $(-6, 0)$. De coördinaten van de top van de grafiek zijn $(-3, -18)$.

$$b \quad y = -6(x - 5)(x + 12)$$

De coördinaten van de snijpunten van de grafiek met de x -as zijn $(5, 0)$ en $(-12, 0)$.

De symmetrieas zit hier tussenin, dus $x = \frac{5 + -12}{2} = -3\frac{1}{2}$

Dit is ook de x -waarde van de top. Substitutie hiervan in de formule geeft

$$y = -6\left(-3\frac{1}{2} - 5\right)\left(-3\frac{1}{2} + 12\right) = -6 \cdot -8\frac{1}{2} \cdot 8\frac{1}{2} = 433\frac{1}{2}$$

De coördinaten van de top zijn $\left(-3\frac{1}{2}, 433\frac{1}{2}\right)$.

$$10 \quad a \quad \text{Bij de formules A : } y = (x + 7)(x + 13), \text{ C : } y = -6(x - 5)(x + 12) \text{ en}$$

D : $y = -3(x + 2)^2$ kun je de snijpunten van de parabool met de x -as direct aflezen.

$$b \quad \text{A : } (-7, 0) \text{ en } (-13, 0), \text{ C : } (5, 0) \text{ en } (-12, 0) \text{ en D : } (-2, 0) \text{ waarbij de laatste}$$

eigenlijk een raakpunt is.

$$c \quad \text{Bij de formules B : } y = (x - 2)^2 - 7 \text{ en D : } y = -3(x + 2)^2 \text{ kun je de top van}$$

de parabool uit de formule aflezen.

$$d \quad \text{B : } (2, -7) \text{ en D : } (-2, 0).$$

$$11 \quad a \quad \text{Van de parabool bij de formule } y = \frac{1}{2}(x + 2)(x - 4) \text{ zijn de snijpunten met de}$$

x -as $(-2, 0)$ en $(4, 0)$ en bij uitwerken van de formule zonder haakjes is het getal voor de x^2 positief, wat een dalparabool betekent.

Bij deze formule hoort parabool B.

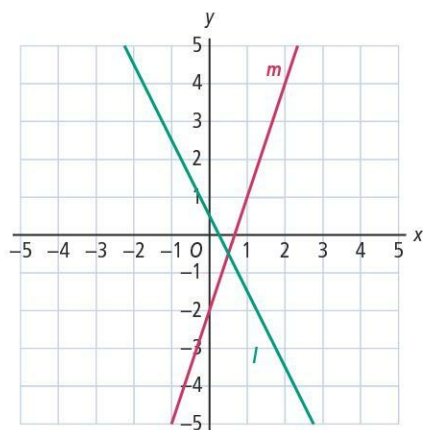
$$b \quad \text{Van de parabool bij de formule } y = -(x - 2)^2 + 3 \text{ is de top } (2, 3).$$

Bij deze formule hoort parabool C.

$$c \quad \text{Van de parabool bij de formule } y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 \text{ is het snijpunt met de } y\text{-as } (0, 2).$$

Bij deze formule hoort parabool A.

12 a



b $m: y + 2 = 3x$ is te herleiden tot $y = 3x - 2$

Uit $\tan(\alpha) = 3$ volgt $\alpha = 71,565\dots^\circ$

$l: 4y + 8x = 2$ is te herleiden via $4y = -8x + 2$ tot $y = -2x + \frac{1}{2}$

Uit $\tan(\beta) = 2$ volgt $\beta = 63,434\dots^\circ$

De grote hoek die de lijnen met elkaar maken is

$71,565\dots^\circ + 63,434\dots^\circ = 135^\circ$ en de kleine hoek is $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.

13 a Uit $\tan(\alpha) = \frac{1}{3}$ volgt $\alpha = 18,434\dots^\circ$

Uit $\tan(\beta) = 2$ volgt $\beta = 63,434\dots^\circ$

De grootte van de scherpe hoek die deze lijnen met elkaar maken is

$18,434\dots^\circ + 63,434\dots^\circ \approx 82^\circ$.

b $2x - \frac{1}{3}y = 2\frac{2}{3}$ is te herleiden via $-\frac{1}{3}y = -2x + 2\frac{2}{3}$ tot $y = 6x - 8$.

Uit $\tan(\alpha) = 6$ volgt $\alpha = 80,537\dots^\circ$

$3y + 4\frac{1}{2}x = 9$ is te herleiden via $3y = -4\frac{1}{2}x + 9$ tot $y = -1\frac{1}{2}x + 3$.

Uit $\tan(\beta) = 1\frac{1}{2}$ volgt $\beta = 56,309\dots^\circ$

$80,537\dots^\circ + 56,309\dots^\circ = 136,847\dots^\circ$

De grootte van de scherpe hoek die deze lijnen met elkaar maken is

$180^\circ - 136,847\dots^\circ \approx 43^\circ$.

c $\frac{y}{2} - \frac{x}{5} = 1$ is te schrijven als $\frac{1}{2}y - \frac{1}{5}x = 1$ en te herleiden via $\frac{1}{2}y = \frac{1}{5}x + 1$ tot

$y = \frac{2}{5}x + 2$.

Uit $\tan(\alpha) = \frac{2}{5}$ volgt $\alpha = 21,801\dots^\circ$

$6y + 10x = 3$ is te herleiden via $6y = -10x + 3$ tot $y = -1\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$

Uit $\tan(\beta) = 1\frac{2}{3}$ volgt $\beta = 59,036\dots^\circ$

De grootte van de scherpe hoek die deze lijnen met elkaar maken is

$59,036\dots^\circ + 21,801\dots^\circ \approx 81^\circ$.

14 $x = -1$ en $y = 2$ invullen in $y = x + 3$ geeft $2 = -1 + 3$. Dit klopt, dus punt P ligt op de lijn met vergelijking $y = x + 3$.

$l: x + y = 3$ is te schrijven als $l: y = -x + 3$.

Vermenigvuldiging van de richtingscoëfficiënten geeft $1 \cdot -1 = -1$, dus de lijn met vergelijking $y = x + 3$ staat loodrecht op l .

15 $x = 3$ en $y = 32$ invullen in $y = -\frac{1}{12}x + 32\frac{1}{4}$ geeft $32 = -\frac{1}{12} \cdot 3 + 32\frac{1}{4}$ ofwel $32 = -\frac{3}{12} + 32\frac{1}{4}$. Dit klopt, dus punt Q ligt op de lijn met vergelijking

$y = -\frac{1}{12}x + 32\frac{1}{4}$.

Lijn $m: 3x - \frac{1}{4}y = 1$ is te schrijven als $m: -\frac{1}{4}y = -3x + 1$ ofwel als

$m: y = 12x - 4$.

Vermenigvuldiging van de richtingscoëfficiënten geeft $12 \cdot -\frac{1}{12} = -1$, dus de lijn met vergelijking $y = -\frac{1}{12}x + 32\frac{1}{4}$ staat loodrecht op lijn m .

- 16 a** $2x + 3y = 7$
 $3y = -2x + 7$
 $y = -\frac{2}{3}x + 2\frac{1}{3}$
 De richtingscoëfficiënt van l is inderdaad $-\frac{2}{3}$
- b** De loodlijn staat loodrecht op l , dus het product van de richtingscoëfficiënten m en $-\frac{2}{3}$ moet -1 zijn. Dus geldt $-\frac{2}{3} \cdot m = -1$ waaruit volgt $m = \frac{-1}{-\frac{2}{3}} = 1\frac{1}{2}$
- c** $5 = 1\frac{1}{2} \cdot 2 + b$
 $5 = 3 + b$ dus $b = 2$
 Een vergelijking van de loodlijn is $y = 1\frac{1}{2}x + 2$.
- 17 a** $l: 4x - 2y = 3$ is te schrijven als $l: -2y = -4x + 3$ en als $l: y = 2x - 1\frac{1}{2}$
 Als m de richtingscoëfficiënt van de loodlijn op lijn l is, dan is $2 \cdot m = -1$, dus $m = -\frac{1}{2}$. Een vergelijking van loodlijn n is $y = -\frac{1}{2}x + b$.
 $x = -3$ en $y = 1$ invullen in $y = -\frac{1}{2}x + b$ geeft $1 = -\frac{1}{2} \cdot -3 + b$, dus $b = -\frac{1}{2}$
 Een vergelijking van de loodlijn n is $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
- b** Lijn $m: \frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = 1$ is te schrijven als $m: \frac{1}{5}x - \frac{1}{2}y = 1$ en als $m: y = \frac{2}{5}x - 2$
 Als k de richtingscoëfficiënt van de loodlijn op lijn m is, dan is $\frac{2}{5} \cdot k = -1$, dus $k = -\frac{5}{2} = -2\frac{1}{2}$. Een vergelijking van loodlijn n is $y = -2\frac{1}{2}x + b$.
 $x = 5$ en $y = 3$ invullen in $y = -2\frac{1}{2}x + b$ geeft $3 = -2\frac{1}{2} \cdot 5 + b$, dus $b = 15\frac{1}{2}$
 Een vergelijking van de loodlijn n is $y = -2\frac{1}{2}x + 15\frac{1}{2}$
- 18 a** $l: 4x + 2y = 6$ is te schrijven als $l: 2y = -4x + 6$ en als $l: y = -2x + 3$.
 Als m de richtingscoëfficiënt van de loodlijn op lijn l is, dan is $-2 \cdot m = -1$, dus $m = \frac{1}{2}$. Een vergelijking van de loodlijn is $y = \frac{1}{2}x + b$.
 $x = 2$ en $y = 4$ invullen in $y = \frac{1}{2}x + b$ geeft $4 = \frac{1}{2} \cdot 2 + b$, dus $b = 3$.
 Een vergelijking van de loodlijn is $y = \frac{1}{2}x + 3$.
- b** $\frac{1}{2}x + 3 = -2x + 3$
 $2\frac{1}{2}x = 0$ dus $x = 0$
 Substitutie van $x = 0$ in $l: y = -2x + 3$ geeft $y = -2 \cdot 0 + 3 = 3$.
 De coördinaten van het snijpunt zijn $(0, 3)$.
- c** De afstand van punt P tot lijn l is de afstand tussen punt $P(2, 4)$ en $(0, 3)$.
 Deze afstand is $\sqrt{(0-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.

19 a Lijn $l: \frac{x}{-2} + \frac{y}{1\frac{1}{2}} = 1$ is te schrijven als $l: -\frac{1}{2}x + \frac{y}{1\frac{1}{2}} = 1$.

$$\frac{y}{1\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x + 1 \text{ geeft } y = 1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x + 1\right) \text{ en dus } l: y = \frac{3}{4}x + 1\frac{1}{2}$$

Als m de richtingscoëfficiënt van een loodlijn op lijn l is, dan is $\frac{3}{4} \cdot m = -1$, dus $m = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$. Een vergelijking van een loodlijn is $y = -1\frac{1}{3}x + b$.

$x = 3$ en $y = -2\frac{1}{2}$ invullen in $y = -1\frac{1}{3}x + b$ geeft $-2\frac{1}{2} = -1\frac{1}{3} \cdot 3 + b$, dus $b = 1\frac{1}{2}$

Een vergelijking van de loodlijn op l door $P(3, -2\frac{1}{2})$ is $y = -1\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{2}$

Het snijpunt van deze loodlijn met lijn l is het punt $(0, 1\frac{1}{2})$, want dit is van beide lijnen het startgetal.

De afstand tussen $P(3, -2\frac{1}{2})$ en $(0, 1\frac{1}{2})$ is de afstand tussen punt P en lijn l .

Deze afstand is $\sqrt{(0-3)^2 + (1\frac{1}{2} - -2\frac{1}{2})^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.

b Lijn $m: x - y = 1\frac{1}{2}$ is te schrijven als $m: y = x - 1\frac{1}{2}$

Als k de richtingscoëfficiënt van een loodlijn op lijn m is, dan is $1 \cdot k = -1$, dus $k = -1$. Een vergelijking van een loodlijn is $y = -x + b$.

$x = -1$ en $y = 1$ invullen in $y = -x + b$ geeft $1 = -1 \cdot -1 + b$, dus $b = 0$.

Een vergelijking van de loodlijn op m door $Q(-1, 1)$ is $y = -x$.

Het snijpunt van deze loodlijn met lijn m bepalen: $x - 1\frac{1}{2} = -x$

$$2x = 1\frac{1}{2} \text{ dus } x = \frac{3}{4}$$

Substitutie van $x = \frac{3}{4}$ in $m: y = x - 1\frac{1}{2}$ geeft $y = \frac{3}{4} - 1\frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$

Het snijpunt is dus $(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$.

De afstand tussen $Q(-1, 1)$ en $(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$ is de afstand tussen punt Q en lijn m .

Deze afstand is $\sqrt{(\frac{3}{4} - -1)^2 + (-\frac{3}{4} - 1)^2} = \sqrt{\frac{49}{16} + \frac{49}{16}} = \frac{7}{4}\sqrt{2} = 1\frac{3}{4}\sqrt{2}$.

20 a Lijn $m: \frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$ is te schrijven als $m: -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 1$ ofwel $m: \frac{1}{3}y = \frac{1}{2}x + 1$

dus als $m: y = 1\frac{1}{2}x + 3$

De richtingscoëfficiënten zijn gelijk, dus lijn l is evenwijdig aan lijn m .

b Substitutie van $x = 3$ en $y = 7\frac{1}{2}$ in $m: y = 1\frac{1}{2}x + 3$ geeft $7\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} \cdot 3 + 3$ en dit klopt. Punt $P(3, 7\frac{1}{2})$ ligt dus op lijn m .

Als k de richtingscoëfficiënt van een loodlijn op lijn m is, dan is $1\frac{1}{2} \cdot k = -1$,

dus $k = -\frac{2}{3}$. Een vergelijking van een loodlijn op lijn m is $y = -\frac{2}{3}x + b$.

$x = 3$ en $y = 3\frac{1}{2}$ invullen in $y = -\frac{2}{3}x + b$ geeft $3\frac{1}{2} = -\frac{2}{3} \cdot 3 + b$, dus $b = 9\frac{1}{2}$

Een vergelijking van de loodlijn op m door $P(3, 7\frac{1}{2})$ is $y = -\frac{2}{3}x + 9\frac{1}{2}$

Het snijpunt van deze loodlijn met lijn l bepalen: $-\frac{2}{3}x + 9\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}x - 10$

$$-2\frac{1}{6}x = -19\frac{1}{2}$$

$$-13x = -117 \text{ dus } x = 9$$

Substitutie van $x = 9$ in $l: y = 1\frac{1}{2}x - 10$ geeft $y = 1\frac{1}{2} \cdot 9 - 10 = 13\frac{1}{2} - 10 = 3\frac{1}{2}$.

Het snijpunt is $(9, 3\frac{1}{2})$.

De afstand tussen $P(3, 7\frac{1}{2})$ en $(9, 3\frac{1}{2})$ is de afstand tussen punt P en lijn l .

Deze afstand is $\sqrt{(9-3)^2 + (3\frac{1}{2} - 7\frac{1}{2})^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

- 21 a** $l: x - 2y + 2 = 0$ is te schrijven als $l: -2y = -x - 2$ ofwel $y = \frac{1}{2}x + 1$.

De lijnen l en m hebben dezelfde richtingscoëfficiënt en zijn dus evenwijdig.

Het punt $(0, 1)$ ligt op l .

Als k de richtingscoëfficiënt van een loodlijn op lijn l is, dan is $\frac{1}{2} \cdot k = -1$, dus $k = -2$.

Een vergelijking van een loodlijn is $y = -2x + b$.

$x = 0$ en $y = 1$ invullen in $y = -2x + b$ geeft $1 = -2 \cdot 0 + b$, dus $b = 1$.

Een vergelijking van de loodlijn op l door $(0, 1)$ is $y = -2x + 1$.

Het snijpunt van deze loodlijn met lijn m bepalen:

$$\frac{1}{2}x + 6 = -2x + 1$$

$$2\frac{1}{2}x = -5$$

$$x = -2$$

Substitutie van $x = -2$ in $m: y = \frac{1}{2}x + 6$ geeft $y = \frac{1}{2} \cdot -2 + 6 = 5$.

Het snijpunt is $(-2, 5)$.

De afstand tussen $(0, 1)$ en $(-2, 5)$ is de afstand tussen lijn l en lijn m .

Deze afstand is $\sqrt{(-2 - 0)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

- b** $l: x - 2y = 12$ is te schrijven als $l: -2y = -x + 12$ ofwel $y = \frac{1}{2}x - 6$

$m: 2y - x = -3$ is te schrijven als $m: 2y = x - 3$ ofwel $y = \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$

De lijnen l en m hebben dezelfde richtingscoëfficiënt en zijn dus evenwijdig.

Het punt $(0, -6)$ ligt op l .

Een vergelijking van de loodlijn k op l door $(0, -6)$ is $k: y = -2x - 6$

k en m snijden geeft:

$$-2x - 6 = \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$$

$$-2\frac{1}{2}x = 4\frac{1}{2}$$

$$x = -1\frac{4}{5}$$

$$y = -2 \cdot -1\frac{4}{5} - 6 = -2\frac{2}{5}$$

Het snijpunt is $(-1\frac{4}{5}, -2\frac{2}{5})$.

De afstand tussen $(0, -6)$ en $(-1\frac{4}{5}, -2\frac{2}{5})$ is de afstand tussen lijn l en lijn m .

$$\sqrt{(0 - (-1\frac{4}{5}))^2 + (-6 + 2\frac{2}{5})^2} = \sqrt{(\frac{9}{5})^2 + (-\frac{18}{5})^2} = \sqrt{\frac{81}{25} + \frac{324}{25}} = \sqrt{\frac{405}{25}} = \frac{9}{5}\sqrt{5} = 1\frac{4}{5}\sqrt{5}.$$

Dus $d(l, m) = 1\frac{4}{5}\sqrt{5}$.

- V1 a** Dat kun je zien, omdat de grafiek geen rechte lijn is. Er zijn dus verschillende hellingen, dus ook verschillende snelheden.
- b** Ze legde 30 km af in 50 minuten. Haar gemiddelde snelheid was dus $30 : 50 = 0,6$ km per minuut ofwel $60 \times 0,6 = 36$ km per uur.
- c** Als je de raaklijn tekent in het punt dat hoort bij $t = 10$, kun je de helling van de lijn bepalen. Die is ongeveer gelijk aan 0,5. Dat betekent een snelheid van ongeveer 0,5 km per minuut ofwel 30 km per uur.
- d** Over $[10, 15]$ geeft dit $\frac{S(15) - S(10)}{15 - 10} = \frac{6,1125 - 3,2}{5} = 0,5825$ km/min
 Over $[10, 11]$ geeft dit $\frac{S(11) - S(10)}{11 - 10} = \frac{3,7257 - 3,2}{1} = 0,5257$ km/min
 Over $[10; 10,1]$ geeft dit $\frac{S(10,1) - S(10)}{10,1 - 10} \approx \frac{3,25116 - 3,2}{0,1} = 0,5116$ km/min
 Over $[10; 10,001]$ geeft dit $\frac{S(10,001) - S(10)}{10,001 - 10} \approx \frac{3,20051 - 3,2}{0,001} = 0,51$ km/min
- e** De snelheid wordt het beste benaderd door de gemiddelde snelheid over het laatste interval in opdracht d. De snelheid is ongeveer 0,51 km per minuut. Marian's snelheid is volgens de formule $60 \times 0,51 = 30,6$ km per uur.

- V2 a** De raaklijn gaat door $(1, 1)$ en $(7, 4)$. De richtingscoëfficiënt is dus $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 1}{7 - 1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- b** Over $[1; 1,001]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{1,001} - \sqrt{1}}{0,001} = 0,49987... \approx 0,500$
- c** Over $[3; 3,001]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{3,001} - \sqrt{3}}{0,001} = 0,28865...$, dus de helling van de grafiek in $(3, \sqrt{3})$ is ongeveer 0,289.
 Over $[9; 9,001]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{9,001} - \sqrt{9}}{0,001} = 0,16666...$, dus de helling van de grafiek in $(9, 3)$ is ongeveer 0,167.

- V3 a** $f'(x) = 100x^{99}$ **e** $k'(x) = 8x^3 - 2x$
b $g'(x) = 18x^2$ **f** $l'(x) = 6 - 3x^9$
c $h(x) = 25x^2$ **g** $m(x) = 3(x^2 + 10x + 25)$
 $h'(x) = 50x$ $m(x) = 3x^2 + 30x + 75$
 $m'(x) = 6x + 30$
d $j(x) = \frac{1}{3}x^4 - 1\frac{2}{3}$ **h** $n(x) = 2x^2 + 3x - 9$
 $j'(x) = \frac{4}{3}x^3$ $n'(x) = 4x + 3$

- V4 a** $f(x) = 0,5x^4 - 3$ geeft $f'(x) = 2x^3$.
 De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $f'(1) = 2$.
 $x = 1$ en $y = -2\frac{1}{2}$ invullen bij $y = 2x + b$ geeft $-2\frac{1}{2} = 2 \cdot 1 + b$ dus $b = -4\frac{1}{2}$.
 Een vergelijking van de raaklijn is $y = 2x - 4\frac{1}{2}$.
- b** $f(x) = (x^2 + 2)(x^2 - 1)$
 $f(x) = x^4 + x^2 - 2$
 $f'(x) = 4x^3 + 2x$
 De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $f'(2) = 36$.
 $f(2) = 18$ dus de coördinaten van punt P zijn $(2, 18)$.
 $x = 2$ en $y = 18$ invullen bij $y = 36x + b$ geeft $18 = 36 \cdot 2 + b$ dus $b = -54$.
 Een vergelijking van de raaklijn is $y = 36x - 54$.

11.1 Machtsfuncties differentiëren

intro Over $[10; 10,001]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{6 \cdot 10,001 \cdot \sqrt{10,001} - 6 \cdot 10 \cdot \sqrt{10}}{0,001} = 28,461\dots$

Na 10 seconden is zijn snelheid volgens de formule 28,461... m/s.

Dat komt overeen met $28,461\dots \times 3,6 \approx 102$ km/uur.

De bewering van Max is in overeenstemming met de formule.

1 a De helling bij $x = 1$ is gelijk aan -1 .

De helling bij $x = 2$ is gelijk aan $-0,25$.

De helling bij $x = 3$ is ongeveer gelijk aan $-0,111$.

b $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ geeft $f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = -1 \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$

c $f'(1) = \frac{-1}{1^2} = -1$, $f'(2) = \frac{-1}{2^2} = \frac{-1}{4} = -0,25$ en $f'(3) = \frac{-1}{9} = -0,111\dots$

Deze uitkomsten komen overeen met de uitkomsten van opdracht a.

d De rekenmachine geeft de volgende hellingen:

Bij $x = 1$ is de helling gelijk aan -3 .

Bij $x = 2$ is de helling ongeveer gelijk aan $-0,188$.

Bij $x = 3$ is de helling ongeveer gelijk aan $-0,037$.

$g(x) = \frac{1}{x^3}$ kun je schrijven als $g(x) = x^{-3}$.

Volgens de regel voor het differentiëren van machtsfuncties moet dan gelden:

$g'(x) = -3x^{-4}$ ofwel $g'(x) = -3 \cdot \frac{1}{x^4} = \frac{-3}{x^4}$

$g'(1) = \frac{-3}{1^4} = -3$, $g'(2) = \frac{-3}{2^4} = \frac{-3}{16} = -0,1875$ en $g'(3) = \frac{-3}{3^4} = \frac{-3}{81} \approx -0,037$

Deze uitkomsten komen overeen met de berekende hellingen.

2 a De afgeleide is volgens die regel $h'(x) = 0,7 \cdot x^{0,7-1}$ ofwel $h'(x) = 0,7 \cdot x^{-0,3}$

b Ja, de uitkomsten van $h'(x) = 0,7 \cdot x^{-0,3}$ komen overeen die in de tabel.

3 a $f(x) = -2x^{0,8}$
 $f'(x) = -1,6x^{-0,2}$
 $f'(x) = \frac{-1,6}{x^{0,2}}$

c $h(x) = \frac{x+1}{x^2}$
 $h(x) = \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}$
 $h(x) = x^{-1} + x^{-2}$
 $h'(x) = -x^{-2} - 2x^{-3}$
 $h'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$

b $g(x) = \frac{2}{x^6} + \frac{1}{3x^2}$
 $g(x) = 2x^{-6} + \frac{1}{3}x^{-2}$
 $g'(x) = -12x^{-7} - \frac{2}{3}x^{-3}$
 $g'(x) = -\frac{12}{x^7} - \frac{2}{3x^3}$

d $k(x) = \frac{1}{x^2}(x^3 - x)$
 $k(x) = x - x^{-1}$
 $k'(x) = 1 + x^{-2}$
 $k'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$

4 $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, dus $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
 $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$5 \text{ a } f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}} \text{ geeft } f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}}$$

$$\text{ofwel } f(x) = \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{3}{x^{\frac{1}{2}}} \text{ en dus } f(x) = x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}}$$

$$b \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2x\sqrt{x}}$$

$$6 \text{ a } f(x) = 4x^2\sqrt{x}$$

$$f(x) = 4x^{2\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 10x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 10x\sqrt{x}$$

$$b \quad g(x) = 5\sqrt[3]{x}$$

$$g(x) = 5x^{\frac{1}{3}}$$

$$g'(x) = \frac{5}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$g'(x) = \frac{5}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

$$g'(x) = \frac{5}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$c \quad h(x) = 3\sqrt{x} - \frac{3}{x}$$

$$h(x) = 3x^{\frac{1}{2}} - 3x^{-1}$$

$$h'(x) = \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{-2}$$

$$h'(x) = \frac{3}{2x^{\frac{1}{2}}} + \frac{3}{x^2}$$

$$h'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}$$

$$d \quad j(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

$$j(x) = \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$j(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$$

$$j'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$j'(x) = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

$$j'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$e \quad k(x) = x(\sqrt{x} + 7)$$

$$k(x) = x\sqrt{x} + 7x$$

$$k(x) = x^{\frac{1}{2}} + 7x$$

$$k'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 7$$

$$k'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} + 7$$

$$f \quad l(x) = (x - \sqrt{x})^2$$

$$l(x) = x^2 - 2x\sqrt{x} + x$$

$$l(x) = x^2 - 2x^{\frac{1}{2}} + x$$

$$l'(x) = 2x - 3x^{-\frac{1}{2}} + 1$$

$$l'(x) = 2x - 3\sqrt{x} + 1$$

$$g \quad m(x) = \frac{3x-5}{x\sqrt{x}}$$

$$m(x) = \frac{3x}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{5}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$m(x) = 3x^{-\frac{1}{2}} - 5x^{-\frac{1}{2}}$$

$$m'(x) = -\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$m'(x) = -\frac{3}{2x^{\frac{1}{2}}} + \frac{5}{2x^{\frac{1}{2}}}$$

$$m'(x) = -\frac{3}{2x\sqrt{x}} + \frac{5}{2x\sqrt{x}}$$

$$h \quad n(x) = x^2\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$n(x) = x^2(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})$$

$$n(x) = x^{2\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}$$

$$n'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$n'(x) = 2\frac{1}{2}x\sqrt{x} + 1\frac{1}{2}\sqrt{x}$$

- 7** Om het minimum te berekenen moet de afgeleide nul gesteld worden.

Uit $D = 6,0 \cdot v^{-2} + 0,00050v^2 - 0,033$ volgt

$$\frac{dD}{dv} = -12,0v^{-3} + 0,001v \text{ ofwel } \frac{dD}{dv} = \frac{-12,0}{v^3} + 0,001v.$$

$$\frac{-12,0}{v^3} + 0,001v = 0$$

$$-12 + 0,001v^4 = 0$$

$$0,001v^4 = 12$$

$$v^4 = 12000$$

$$v = \sqrt[4]{12000} = 10,466\dots$$

De kruissnelheid is ongeveer 10,5 m/s.

- 03 a** In stap 1 is de breuk $\frac{8x^2 - 3}{x^4}$ gesplitst in de twee breuken $\frac{8x^2}{x^4}$ en $\frac{3}{x^4}$

- b** In stap 2 zijn de breuken in de vorm ax^b geschreven.

$$f(x) = 8x^{-2} - 3x^{-4}$$

- c** $f'(x) = -16x^{-3} + 12x^{-5}$

- d** $f'(x) = -\frac{16}{x^3} + \frac{12}{x^5}$

- e** $g(x) = 15x^{0,2}$

$$g'(x) = 3x^{-0,8}$$

$$g'(x) = \frac{3}{x^{0,8}}$$

- g** $k(x) = \frac{4x^2 + 6}{x^3}$

$$k(x) = \frac{4x^2}{x^3} + \frac{6}{x^3}$$

$$k(x) = 4x^{-1} + 6x^{-3}$$

$$k'(x) = -4x^{-2} - 18x^{-4}$$

$$k'(x) = \frac{-4}{x^2} - \frac{18}{x^4}$$

- f** $h(x) = \frac{8}{x^4} + \frac{1}{4x^5}$

$$h(x) = 8x^{-4} + \frac{1}{4}x^{-5}$$

$$h'(x) = -32x^{-5} - \frac{5}{4}x^{-6}$$

$$h'(x) = \frac{-32}{x^5} - \frac{5}{4x^6}$$

- h** $m(x) = x^2 \left(1 + \frac{2}{x^3} \right)$

$$m(x) = x^2(1 + 2x^{-3})$$

$$m(x) = x^2 + 2x^{-1}$$

$$m'(x) = 2x - 2x^{-2}$$

$$m'(x) = 2x - \frac{2}{x^2}$$

- 06 a** In stap 1 heeft Dave de breuk $\frac{8x^2 - 3}{\sqrt{x}}$ gesplitst in de breuken $\frac{8x^2}{\sqrt{x}}$ en $\frac{3}{\sqrt{x}}$ en vervolgens $\sqrt{x}$ geschreven als macht van x , namelijk $x^{\frac{1}{2}}$.

- b** Hij gebruikt de rekenregels $\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$ en $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$

- c** In stap 3 heeft Dave de functie gedifferentieerd door gebruik te maken van de regel: als $f(x) = x^a$ dan is $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$.

- d** $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

- e** $x^{1\frac{1}{2}} = x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x\sqrt{x}$

U1 a $f(x) = x\sqrt[4]{x^3}$ is te schrijven als $f(x) = x^{1\frac{3}{4}}$.

$$f'(x) = 1\frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}} \text{ ofwel } f'(x) = 1\frac{3}{4}\sqrt[4]{x^3}$$

De helling in punt P is 14, dus $f'(x) = 14$.

$$1\frac{3}{4}\sqrt[4]{x^3} = 14$$

$$\sqrt[4]{x^3} = 8$$

$$x^{\frac{3}{4}} = 8$$

$$x = 8^{\frac{4}{3}} = 16$$

$$y = f(16) = 16 \cdot \sqrt[4]{16^3} = 128$$

Punt P heeft coördinaten $(16, 128)$.

b $14x - 96 = 0$

$$14x = 96$$

$x = 6\frac{6}{7}$ dus de coördinaten van punt Q zijn $(6\frac{6}{7}, 0)$.

Van $\triangle OPQ$ is de basis $OQ = 6\frac{6}{7}$ en de hoogte $y_P = 128$.

De oppervlakte van $\triangle OPQ$ is $\frac{1}{2} \cdot 6\frac{6}{7} \cdot 128 = 438\frac{6}{7}$

11.2 De kettingregel

intro De getallen in kolom Y3 zijn allemaal het dubbele van de getallen in kolom Y2. Er geldt dus $y_3 = 2 \cdot y_2$ ofwel $y_3 = 2 \cdot 3(2x + 1)^2$.

Een functievoorschrift voor de afgeleide van f is $f'(x) = 6(2x + 1)^2$.

8 a $m(x) = (x + 3)^2$

b $k'(x) = 2x$

De helling in Q is $k'(-2) = 2 \cdot -2 = -4$.

De grafiek van k is alleen maar verschoven, dus de helling in P is gelijk aan die in Q .

c $m'(-5) = k'(-2)$

d $m'(x) = k'(x + 3)$

e $m'(x) = 2(x + 3)$

f $m'(-5) = 2(-5 + 3) = 2 \cdot -2 = -4$, klopt.

9 a x vervangen door $3x$ geeft $y = \frac{1}{6} \cdot 3x + 1\frac{1}{2}$

Een vergelijking van het beeld van de raaklijn is $y = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$

b De helling in P is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn, dus $\frac{1}{2}$

c de helling in punt P = de helling in punt $Q \times 3$

$$\text{dus } h'(3) = k'(9) \cdot 3.$$

d $h'(x) = k'(3x) \cdot 3$

e Bij $k(x) = \sqrt{x}$ hoort $k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ dus

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x}} \cdot 3 \text{ ofwel } h'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x}}$$

10 a $f'(x) = 3x^2$ dus

$$g'(x) = f'(x + 5) = 3(x + 5)^2$$

b $k'(x) = g'(2x) \cdot 2 = f'(2x + 5) \cdot 2$

$$k'(x) = 3(2x + 5)^2 \cdot 2 \text{ ofwel } k'(x) = 6(2x + 5)^2$$

11 a $f(x) = (2 + 3x)^4$
 $f'(x) = 4 \cdot (2 + 3x)^3 \cdot 3$
 $f'(x) = 12(2 + 3x)^3$

b $g(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x - 4}$
 $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}x - 4}} \cdot \frac{1}{3}$
 $g'(x) = \frac{1}{6\sqrt{\frac{1}{3}x - 4}}$

c $w(x) = \left(\frac{1}{4}x + 2\right)^3$
 $w'(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{4}x + 2\right)^2 \cdot \frac{1}{4}$
 $w'(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}x + 2\right)^2$

d $k(x) = \sqrt[3]{12 - 5x}$
 $k(x) = (12 - 5x)^{\frac{1}{3}}$
 $k'(x) = \frac{1}{3} \cdot (12 - 5x)^{-\frac{2}{3}} \cdot -5$
 $k'(x) = -\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{(12 - 5x)^{\frac{2}{3}}}$
 $k'(x) = \frac{-5}{3\sqrt[3]{(12 - 5x)^2}}$

12 a $f(x) = \frac{1}{(2x + 4)^2}$
 $f(x) = (2x + 4)^{-2}$
 $f'(x) = -2 \cdot (2x + 4)^{-3} \cdot 2$
b $f'(x) = -4 \cdot (2x + 4)^{-3}$
 $f'(x) = -\frac{4}{(2x + 4)^3}$

13 a $h(x) = \frac{2}{(12 - 3x)^5}$ schrijf je als $h(x) = 2(12 - 3x)^{-5}$.
 $h'(x) = -10 \cdot (12 - 3x)^{-6} \cdot -3$
 $h'(x) = \frac{30}{(12 - 3x)^6}$
b $k'(x) = \frac{30}{(12 - 3x)^6} - 8$

14 a $f(x) = (3x - 19)^3 + 10$
 $f'(x) = 3 \cdot (3x - 19)^2 \cdot 3$
 $f'(x) = 9 \cdot (3x - 19)^2$

c $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x + 5}} + x^2$
 $h(x) = (x + 5)^{-\frac{1}{2}} + x^2$
 $h'(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x + 5)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 + 2x$
 $h'(x) = \frac{-1}{2(x + 5)^{\frac{1}{2}}} + 2x$
 $h'(x) = \frac{-1}{2(x + 5)\sqrt{x + 5}} + 2x$

b $g(x) = 5x + \frac{3}{\left(x - \frac{1}{8}\right)^2}$
 $g(x) = 5x + 3\left(x - \frac{1}{8}\right)^{-2}$
 $g'(x) = 5 + -6 \cdot \left(x - \frac{1}{8}\right)^{-3} \cdot 1$
 $g'(x) = 5 - \frac{6}{\left(x - \frac{1}{8}\right)^3}$

d $j(x) = 4\sqrt{2x - 4} - 7x^3$
 $j'(x) = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x - 4}} \cdot 2 - 21x^2$
 $j'(x) = \frac{4}{\sqrt{2x - 4}} - 21x^2$

$$\text{e } k(x) = \frac{4}{\sqrt{3-x}} - \frac{12}{17}$$

$$k(x) = 4(3-x)^{-\frac{1}{2}} - \frac{12}{17}$$

$$k'(x) = -2 \cdot (3-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -1$$

$$k'(x) = \frac{2}{(3-x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$k'(x) = \frac{2}{(3-x)\sqrt{3-x}}$$

$$\text{f } m(x) = -\left(\frac{1}{3}x - 9\right)^{1,8}$$

$$m'(x) = -1,8 \cdot \left(\frac{1}{3}x - 9\right)^{0,8} \cdot \frac{1}{3}$$

$$m'(x) = -0,6\left(\frac{1}{3}x - 9\right)^{0,8}$$

$$15 \text{ a } f(x) = (5x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{b } f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (5x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 5 \text{ ofwel } f'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{5x+1}$$

$$\text{c } g(x) = (1-4x)\sqrt{1-4x}$$

$$g(x) = (1-4x)^{\frac{1}{2}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot (1-4x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -4$$

$$g'(x) = -6\sqrt{1-4x}$$

$$\text{e } k(x) = \frac{3}{(2x-7)\sqrt{2x-7}}$$

$$k(x) = 3(2x-7)^{-\frac{1}{2}}$$

$$k'(x) = -4\frac{1}{2} \cdot (2x-7)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2$$

$$k'(x) = \frac{-9}{(2x-7)^{\frac{3}{2}}}$$

$$k'(x) = \frac{-9}{(2x-7)^2\sqrt{2x-7}}$$

$$\text{d } h(x) = (4 - \frac{1}{2}x)^2\sqrt{4 - \frac{1}{2}x}$$

$$h(x) = (4 - \frac{1}{2}x)^{\frac{5}{2}}$$

$$h'(x) = 2\frac{1}{2} \cdot (4 - \frac{1}{2}x)^{\frac{3}{2}} \cdot -\frac{1}{2}$$

$$h'(x) = -1\frac{1}{4}(4 - \frac{1}{2}x)\sqrt{4 - \frac{1}{2}x}$$

$$\text{f } m(x) = \frac{4}{(2x-1)^3\sqrt{2x-1}}$$

$$m(x) = 4(2x-1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$m'(x) = -\frac{16}{3} \cdot (2x-1)^{-\frac{4}{3}} \cdot 2$$

$$m'(x) = \frac{-32}{3(2x-1)^{\frac{4}{3}}}$$

$$m'(x) = \frac{-32}{3(2x-1)^2 \cdot \sqrt[3]{2x-1}}$$

$$16 \text{ a } f(x) = \sqrt{6x+3} \text{ dus } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{6x+3}} \cdot 6 \text{ ofwel } f'(x) = \frac{3}{\sqrt{6x+3}}$$

b Bij $x = -\frac{1}{2}$ heeft de grafiek van f een randpunt en de grafiek van f' een verticale asymptoot.

$$011 \text{ a } f(x) = (4x-7)^{\frac{1}{2}} \text{ dus op de puntjes moet } \frac{1}{2} \text{ staan.}$$

$$\text{b } f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (4x-7)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4$$

De exponent wordt $-\frac{1}{2}$ omdat $\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

c In stap 3 is de regel $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$ gebruikt.

$$\text{d } f'(x) = \frac{2}{(4x-7)^{\frac{1}{2}}} \text{ dus } f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x-7}}$$

$$\begin{aligned} \text{e } g(x) &= (3x + 7)^5 \\ g'(x) &= 5 \cdot (3x + 7)^4 \cdot 3 \\ g'(x) &= 15(3x + 7)^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } h(x) &= \sqrt{\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}} \\ h(x) &= \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ h'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3} \\ h'(x) &= \frac{1}{6\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \\ h'(x) &= \frac{1}{6\sqrt{\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g } p(x) &= (3 - 8x)^4 \\ p'(x) &= 4 \cdot (3 - 8x)^3 \cdot -8 \\ p'(x) &= -32(3 - 8x)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h } q(x) &= (5x - 3)^7 \\ q'(x) &= 7 \cdot (5x - 3)^6 \cdot 5 \\ q'(x) &= 35(5x - 3)^6 \end{aligned}$$

014 a Als $h(x) = 3x$ dan is $h'(x) = 3$.

b In stap 1 is de breuk geschreven als een macht met een negatieve exponent.

$$\begin{aligned} \text{c } k'(x) &= -15 \cdot (1 - 2x)^{-4} \cdot -2 \\ k'(x) &= \frac{30}{(1 - 2x)^4} \end{aligned}$$

$$\text{d } f''(x) = h'(x) + k'(x) = 3 + \frac{30}{(1 - 2x)^4}$$

U2 a $x = 5$ en $y = 2$ invullen in $f(x) = a(2x - 4)^2$ geeft $2 = a(2 \cdot 5 - 4)^2$

$$2 = 36a \text{ dus } a = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$\begin{aligned} \text{b } f_a(x) &= a(2x - 4)^2 \\ f'_a(x) &= 2a \cdot (2x - 4) \cdot 2 \\ f'_a(x) &= 4a(2x - 4) \\ f'_a(1) &= -6 \text{ geeft } 4a \cdot (2 \cdot 1 - 4) = -6 \\ -8a &= -6 \\ a &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } f'_4(x) &= 2 \cdot 4 \cdot (2x - 4) \cdot 2 \\ f'_4(x) &= 16(2x - 4) \\ f'_4(x) &= 8 \text{ geeft } 16(2x - 4) = 8 \end{aligned}$$

$$2x - 4 = \frac{1}{2}$$

$$2x = 4\frac{1}{2}$$

$$x = 2\frac{1}{4}$$

$$y = f_4\left(2\frac{1}{4}\right) = 4 \cdot \left(2 \cdot 2\frac{1}{4} - 4\right)^2 = 1$$

In het punt $\left(2\frac{1}{4}, 1\right)$ is de helling van de grafiek gelijk aan 8.

11.3 Raaklijnen

intro Op het moment dat de grafieken dezelfde helling hebben, hebben de fietsers even snel gereden.

Als de hellingen van de grafieken gelijk zijn, zijn ook de afgeleide waarden gelijk. Dus je kunt deze tijdstippen bepalen door de afgeleiden aan elkaar gelijk te stellen.

17 $f(x) = \sqrt{4x+1}$ geeft $f(2) = \sqrt{4 \cdot 2 + 1} = 3$ dus het punt op de grafiek is $(2, 3)$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x+1}} \cdot 4 \text{ ofwel } f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x+1}}$$

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $f'(2) = \frac{2}{\sqrt{4 \cdot 2 + 1}} = \frac{2}{3}$

$x = 2$ en $y = 3$ invullen in $y = \frac{2}{3}x + b$ geeft $3 = \frac{2}{3} \cdot 2 + b$ dus $b = 1\frac{2}{3}$

Een vergelijking van de raaklijn is $y = \frac{2}{3}x + 1\frac{2}{3}$

18 a $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3$
 $f'(x) = 2x^3$

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $f'(1) = 2$

$x = 1$ en $y = -2\frac{1}{2}$ invullen in $y = 2x + b$ geeft $-2\frac{1}{2} = 2 \cdot 1 + b$ dus $b = -4\frac{1}{2}$

Een vergelijking van de raaklijn is $y = 2x - 4\frac{1}{2}$

b De grafiek van f is symmetrisch in de y -as en Q is het spiegelbeeld van P bij spiegeling in de y -as.

c De helling in Q is -2 . De raaklijn in Q snijdt de y -as in hetzelfde punt als de raaklijn in P .

Een vergelijking van de raaklijn in Q is $y = -2x - 4\frac{1}{2}$

19 a In R is de helling van de grafiek gelijk aan de helling van de raaklijn, dus -2 .

b Om de coördinaten van R te berekenen, moet je de vergelijking

$$f'(x) = -2 \text{ oplossen.}$$

c $2x = -2$

$$x = -1$$

d $y = f(-1) = 1^2 = 1$ dus punt R heeft coördinaten $(-1, 1)$.

$x = -1$ en $y = 1$ invullen bij $y = -2x + p$ geeft $1 = -2 \cdot -1 + p$.

$$1 = 2 + p$$

$$p = -1$$

20 $f(x) = 6\sqrt{2x-1}$

$$f'(x) = 6 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x-1}} \cdot 2 \text{ ofwel } f'(x) = \frac{6}{\sqrt{2x-1}}$$

$$f'(x) = 2 \text{ geeft } \frac{6}{\sqrt{2x-1}} = 2$$

$$\sqrt{2x-1} = 3$$

$$2x-1 = 9$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

$y = f(5) = 6\sqrt{2 \cdot 5 - 1} = 18$ dus het raakpunt is $(5, 18)$.

$x = 5$ en $y = 18$ invullen bij $y = 2x + p$ geeft $18 = 2 \cdot 5 + p$, dus

$$p = 8$$

21 $f(x) = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^3$

$$f'(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = 1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2$$

$$f'(x) = 6 \text{ geeft } 1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2 = 6$$

$$\left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2 = 4$$

$$\frac{1}{2}x + 1 = -2 \text{ of } \frac{1}{2}x + 1 = 2$$

$$\frac{1}{2}x = -3 \text{ of } \frac{1}{2}x = 1$$

$$x = -6 \text{ of } x = 2$$

$$y = f(-6) = -8 \text{ of } y = f(2) = 8$$

De raakpunten zijn $(-6, -8)$ en $(2, 8)$.

$x = -6$ en $y = -8$ invullen bij $y = 6x + p$ geeft $-8 = 6 \cdot -6 + p$ dus $p = 28$.

$x = 2$ en $y = 8$ invullen bij $y = 6x + p$ geeft $8 = 6 \cdot 2 + p$ dus $p = -4$.

Vergelijkingen van de raaklijnen zijn $y = 6x + 28$ en $y = 6x - 4$.

- 22** De lijn door $(0, 2)$ en $(4, 0)$ heeft richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{2}$ en als vergelijking $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

Voor de hellingen van de parabool geldt $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$

In het raakpunt moet gelden $\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}x = 1$$

$$x = 2$$

$$y = \frac{1}{4} \cdot 2^2 - 1\frac{1}{2} \cdot 2 + 3 = 1$$

Het punt op de parabool met helling $-\frac{1}{2}$ is $(2, 1)$.

Dit punt ligt ook op de lijn, want invullen levert $1 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + 2$ en dat klopt.

De parabool raakt dus de lijn wel.

- 23 a** $f(x) = 1 + (3x - 2)^{1,5}$

$$f'(x) = 1,5 \cdot (3x - 2)^{0,5} \cdot 3$$

$$f'(x) = 4,5\sqrt{3x - 2}$$

$$f'(1) = 4,5\sqrt{3 - 2} = 4,5$$

De raaklijn is van de vorm $y = 4,5x + b$

$y = f(1) = 2$ dus het raakpunt is het punt $(1, 2)$.

$x = 1$ en $y = 2$ invullen bij $y = 4,5x + b$ geeft $2 = 4,5 \cdot 1 + b$ dus $b = -2,5$

Een vergelijking van de raaklijn is $y = 4,5x - 2,5$

- b** $f'(x) = 4,5\sqrt{3x - 2}$

Als de helling van de grafiek gelijk aan 9, dan is $f'(x) = 9$.

$$4,5\sqrt{3x - 2} = 9$$

$$\sqrt{3x - 2} = 2$$

$$3x - 2 = 4$$

$$3x = 6$$

$$x = 2 \text{ en } y = f(2) = 9$$

In het punt $(2, 9)$ is de helling van de grafiek gelijk aan 9.

- c** $g(x) = \frac{2}{(x + 3)^2}$

$$g(x) = 2 \cdot (x + 3)^{-2}$$

$$g'(x) = -4 \cdot (x + 3)^{-3} \cdot 1$$

$$g'(x) = \frac{-4}{(x + 3)^3}$$

$$g'(x) = -\frac{1}{2} \text{ geeft } \frac{-4}{(x + 3)^3} = -\frac{1}{2}$$

$$(x + 3)^3 = 8$$

$$x + 3 = 2$$

$x = -1$ en $y = g(-1) = \frac{1}{2}$ dus het raakpunt is $(-1, \frac{1}{2})$.

$x = -1$ en $y = \frac{1}{2}$ invullen bij $y = -\frac{1}{2}x + p$ geeft $\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \cdot -1 + p$ dus $p = 0$.

24 $f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{4x+1} + 1\frac{1}{2}$ $g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + x + 5$
 $f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{4x+1}} \cdot 4$ $g'(x) = -\frac{2}{3}x + 1$
 $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{4x+1}}$ $g'(6) = -3$
 $f'(6) = -\frac{1}{5}$
 $\tan(\alpha) = \frac{1}{5}$ geeft $\alpha = 11,309\dots^\circ$ $\tan(\beta) = 3$ geeft $\beta = 71,565\dots^\circ$
 $\beta - \alpha = 71,565\dots^\circ - 11,309\dots^\circ = 60,255\dots^\circ$
De grafieken snijden elkaar onder een hoek van ongeveer 60° .

25 Snijpunten met de x -as:
 $-\frac{1}{8}(2x-4)^2 + 8 = 0$
 $-\frac{1}{8}(2x-4)^2 = -8$
 $(2x-4)^2 = 64$
 $2x-4 = -8$ of $2x-4 = 8$
 $2x = -4$ of $2x = 12$
 $x = -2$ of $x = 6$
De snijpunten met de x -as zijn $(-2, 0)$ en $(6, 0)$.
 $f(x) = -\frac{1}{8}(2x-4)^2 + 8$
 $f'(x) = 2 \cdot -\frac{1}{8} \cdot (2x-4) \cdot 2$ ofwel $f'(x) = -\frac{1}{2}(2x-4)$.
 $f'(-2) = 4$ en $f'(6) = -4$
Raaklijn in $(-2, 0)$: $y = 4x + b$ met $x = -2$ en $y = 0$ geeft $b = 8$.
Een vergelijking van deze raaklijn is $y = 4x + 8$.
Raaklijn in $(6, 0)$: $y = -4x + b$ met $x = 6$ en $y = 0$ geeft $b = 24$.
Een vergelijking van deze raaklijn is $y = -4x + 24$.
Deze twee raaklijnen snijden geeft $4x + 8 = -4x + 24$.
 $8x = 16$
 $x = 2$ en $y = 4 \cdot 2 + 8 = 16$ dus het snijpunt S is $(2, 16)$.
Voor de top T geldt $f'(x) = 0$ dus $-\frac{1}{2}(2x-4) = 0$.
 $2x = 4$
 $x = 2$ en $y = f(2) = 8$ dus de top is $(2, 8)$.
Omdat $16 = 2 \cdot 8$ ligt S twee keer zo hoog boven de x -as als T .

- 020 a** De helling van de raaklijn is 5.
b Om de coördinaten van het raakpunt te berekenen moet je de vergelijking $f'(x) = 5$ oplossen.
c $f(x) = 2x\sqrt{x} - x$
 $f(x) = 2x^{\frac{1}{2}} - x$
 $f'(x) = 3x^{\frac{1}{2}} - 1$
 $f'(x) = 3\sqrt{x} - 1$
 $f'(x) = 5$ geeft $3\sqrt{x} - 1 = 5$
 $3\sqrt{x} = 6$
 $\sqrt{x} = 2$
 $x = 4$
d $y = f(4) = 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{4} - 4 = 16 - 4 = 12$
e $(4, 12)$ invullen in $y = 5x + p$ geeft
 $12 = 5 \cdot 4 + p$
 $12 = 20 + p$
 $p = -8$

- f** De helling van de raaklijn is -2 .

$$g(x) = -6\sqrt{2x-5}$$

$$g'(x) = -6 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x-5}} \cdot 2$$

$$g'(x) = \frac{-6}{\sqrt{2x-5}}$$

$$g'(x) = -2 \text{ geeft } \frac{-6}{\sqrt{2x-5}} = -2$$

$$\sqrt{2x-5} = 3$$

$$2x-5 = 9$$

$$2x = 14$$

$$x = 7 \text{ en } y = g(7) = -6\sqrt{2 \cdot 7 - 5} = -18$$

$$x = 7 \text{ en } y = -18 \text{ invullen bij } y = -2x + p \text{ geeft } -18 = -2 \cdot 7 + p$$

$$-18 = -14 + p$$

$$p = -4$$

U3 a $-\sqrt{2x-8} + 5 = -\frac{1}{2}x + 8$

$$-\sqrt{2x-8} = -\frac{1}{2}x + 3$$

$$\sqrt{2x-8} = \frac{1}{2}x - 3$$

$$2x-8 = \left(\frac{1}{2}x - 3\right)^2$$

$$2x-8 = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 9$$

$$\frac{1}{4}x^2 - 5x + 17 = 0$$

$$x^2 - 20x + 68 = 0$$

$$D = 20^2 - 4 \cdot 1 \cdot 68 = 128$$

$$x = \frac{20 + \sqrt{128}}{2} = 15,656... \text{ of } x = \frac{20 - \sqrt{128}}{2} = 4,343... \text{ (voldoet niet)}$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot 15,656... + 8 = 0,171...$$

Het snijpunt heeft coördinaten $(15,66; 0,17)$.

- b** Ze raken als de helling van de raaklijn $-\frac{1}{2}$ is, dus als $f'(x) = -\frac{1}{2}$

$$f(x) = -\sqrt{2x-8} + 5$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2x-8}} \cdot 2$$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{2x-8}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \text{ geeft } \frac{-1}{\sqrt{2x-8}} = -\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{2x-8} = 2$$

$$2x-8 = 4$$

$$2x = 12$$

$$x = 6 \text{ en } y = f(6) = 3$$

$$x = 6 \text{ en } y = 3 \text{ invullen bij } g_p(x) = -\frac{1}{2}x + p \text{ geeft } 3 = -\frac{1}{2} \cdot 6 + p.$$

$$3 = -3 + p$$

$$p = 6$$

- c** Het randpunt van de grafiek van f is $(4, 5)$.

De grafiek van g gaat door $(4, 5)$ als $5 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + p$ dus als $p = 7$.

Als $p = 7$ snijdt de grafiek van g de grafiek van f nog net twee keer.

Voor $p > 7$ snijdt de grafiek van g de grafiek van f nog maar één keer.

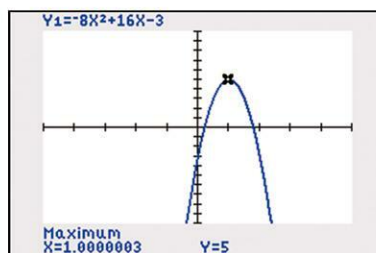
Voor $p < 6$ snijden de grafieken elkaar niet.

De grafieken hebben twee punten gemeenschappelijk als $6 < p \leq 7$.

11.4 Maxima en minima

intro Bij eb neemt de waterhoogte af en bij vloed neemt de waterhoogte toe. De hoogste waterstand treedt dus op tussen vloed en eb.

- 26 a** $f(x) = x^4 - 2x^2$
 $f'(x) = 4x^3 - 4x$
 $4x^3 - 4x = 0$
 $4x(x^2 - 1) = 0$
 $4x = 0$ of $x^2 - 1 = 0$
 $x = 0$ of $x^2 = 1$
 $x = 0$ of $x = -1$ of $x = 1$
- b** De raaklijn loopt horizontaal in die punten.
- c** $f'(\frac{1}{2}) = 4 \cdot (\frac{1}{2})^3 - 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 2 = -1\frac{1}{2}$
 De helling is negatief.
- d** Uit de grafiek lees je af dat $f'(x) < 0$ als $x < -1$ of $0 < x < 1$.
 De helling van de grafiek is voor deze x -waarden negatief.
- e** Uit de grafiek lees je af dat $f'(x) > 0$ op de intervallen $\langle -1, 0 \rangle$ en $\langle 1, \rightarrow \rangle$.
- 27 a** De grafiek heeft een horizontale raaklijn bij $x = -3$, $x = 1$ en $x = 5$.
- b** $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 6\frac{1}{2}x^2 + 15x + 8$
 $f'(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$
 $f'(-3) = -27 - 27 + 39 + 15 = 0$
 $f'(1) = 1 - 3 - 13 + 15 = 0$
 $f'(5) = 125 - 75 - 65 + 15 = 0$, dus de antwoorden bij opdracht a kloppen.
- c** $f'(x) < 0$ geldt op de intervallen $\langle \leftarrow, -3 \rangle$ en $\langle 1, 5 \rangle$.
- 28 a** $K'(p) = -3p^2 + 6p$
 $-3p^2 + 6p = 0$
 $3p(-p + 2) = 0$
 $p = 0$ of $p = 2$
- b** Uit een plot van de grafiek blijkt dat K een minimum heeft bij $p = 0$ en een maximum bij $p = 2$.
- c** Maximum $K(2) = 11$ en minimum $K(0) = 7$.
- 29 a** $L'(m) = -16m + 16$
 $-16m + 16 = 0$
 $-16m = -16$
 $m = 1$
 in een plot zie je dat er een maximum is bij $m = 1$.
 Het maximum is $L(1) = -8 + 16 - 3 = 5$.



$$b \quad h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+10}} \cdot 2 - \frac{1}{2}$$

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+10}} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2x+10}} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2x+10}} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{2x+10} = 2$$

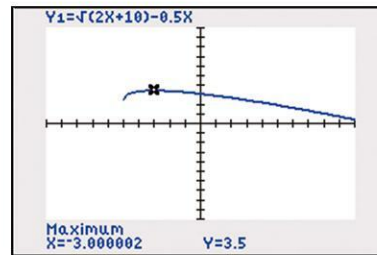
$$2x+10=4$$

$$2x = -6$$

$$x = -3$$

in een plot zie je dat er een maximum is bij $x = -3$.

Het maximum is $h(-3) = 3\frac{1}{2}$



$$c \quad g(x) = (\sqrt{x} - 6)^2 + 6$$

$$g(x) = x - 12\sqrt{x} + 42$$

$$g'(x) = 1 - \frac{6}{\sqrt{x}}$$

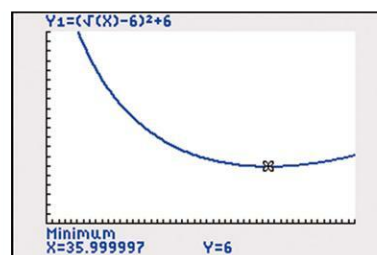
$$1 - \frac{6}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\sqrt{x} = 6$$

$$x = 36$$

in een plot zie je dat er een minimum is bij $x = 36$.

Het minimum is $g(36) = 6$.



$$d \quad w'(r) = 2 \cdot (3r - 4) \cdot 3 + 2$$

$$w'(r) = 6(3r - 4) + 2$$

$$w'(r) = 18r - 22$$

$$18r - 22 = 0$$

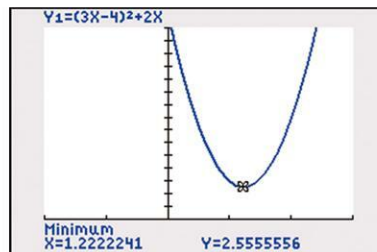
$$18r = 22$$

$$r = \frac{22}{18} = 1\frac{2}{9}$$

in een plot zie je dat er een minimum is

bij $r = 1\frac{2}{9}$

Het minimum is $w(1\frac{2}{9}) = 2\frac{5}{9}$



30 a De functies f en k kun je differentiëren.

Functie g kun je niet differentiëren, omdat $1,5^x$ niet te schrijven is als macht van x .

Functie h kun je niet (makkelijk) differentiëren, omdat de uitdrukking binnen de haakjes niet van de vorm $ax + b$ is.

$$b \quad f(x) = x^3 - x^4$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x^3$$

$$3x^2 - 4x^3 = 0$$

$$x^2(3 - 4x) = 0$$

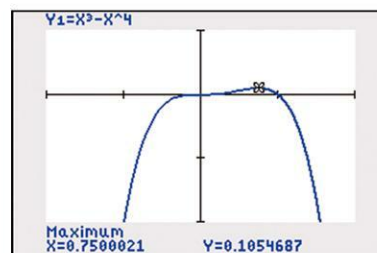
$$x^2 = 0 \text{ of } 3 - 4x = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = \frac{3}{4}$$

In een plot zie je dat er bij $x = 0$ geen extreme

waarde is en een maximum is bij $x = \frac{3}{4}$

Het maximum is $f(\frac{3}{4}) = \frac{27}{256}$



$$k(x) = -2\sqrt{2x+3} + 2x$$

$$k'(x) = -2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x+3}} \cdot 2 + 2$$

$$k'(x) = \frac{-2}{\sqrt{2x+3}} + 2$$

$$\frac{-2}{\sqrt{2x+3}} + 2 = 0$$

$$\frac{-2}{\sqrt{2x+3}} = -2$$

$$\sqrt{2x+3} = 1$$

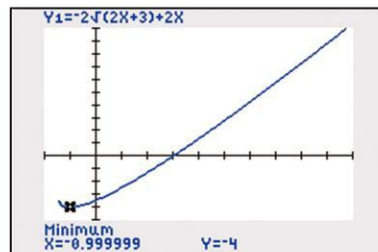
$$2x+3 = 1$$

$$2x = -2$$

$$x = -1$$

In een plot zie je dat er bij $x = -1$ een minimum is.

Het minimum is $k(-1) = -4$.



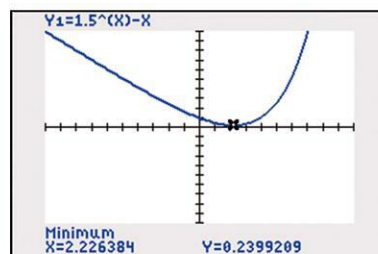
c $g(x) = 1,5^x - x$

Invoer: $y_1 = 1,5^x - x$

Venster: $-10 \leq x \leq 10, -10 \leq y \leq 10$

Optie: minimum

Het minimum is ongeveer $g(2,23) = 0,24$.



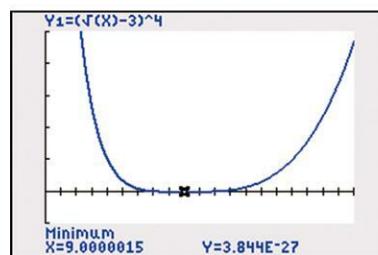
$$h(x) = (\sqrt{x} - 3)^4$$

Invoer: $y_1 = (\sqrt{x} - 3)^4$

Venster: $0 \leq x \leq 20, -1 \leq y \leq 5$

Optie minimum

Het minimum is $h(9) = 0$.



31 Stel $P(p, 0)$ dan is punt $A(p, f(p))$ ofwel $A(p, -\frac{1}{5}p^2 + 15)$.

$$OP = p \text{ en } AP = -\frac{1}{5}p^2 + 15$$

De oppervlakte van rechthoek $OPAQ$ is $OP \cdot AP$, dus

$$opp = p \cdot \left(-\frac{1}{5}p^2 + 15\right) \text{ ofwel } opp = -\frac{1}{5}p^3 + 15p.$$

$$opp' = -\frac{3}{5}p^2 + 15$$

$$opp' = 0 \text{ als } -\frac{3}{5}p^2 + 15 = 0$$

$$-\frac{3}{5}p^2 = -15$$

$$p^2 = 25$$

$$p = 5 \text{ (} p = -5 \text{ voldoet niet)}$$

De oppervlakte van rechthoek $OPAQ$ is maximaal als $p = 5$.

De maximale oppervlakte is $opp(5) = -\frac{1}{5} \cdot 5^3 + 15 \cdot 5 = -25 + 75 = 50$.

029 a $f'(x) = 3x^2 - 6x$

b $3x^2 - 6x = 0$

$$3x(x - 2) = 0$$

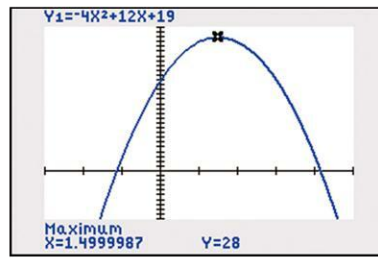
$$x = 0 \text{ of } x = 2$$

c In de plot zie je dat f een maximum heeft bij $x = 0$ en een minimum bij $x = 2$.

- d** f heeft een maximum $f(0) = 2$.
 f heeft een minimum $f(2) = -2$.

e $g(x) = -4x^2 + 12x + 19$
 $g'(x) = -8x + 12$
 $-8x + 12 = 0$
 $-8x = -12$
 $x = 1\frac{1}{2}$

In de plot zie je dat g een maximum heeft bij $x = 1\frac{1}{2}$.
 Het maximum is $g(1\frac{1}{2}) = 28$.



f $h(x) = \sqrt{9x + 24} - 1\frac{1}{2}x$
 $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{9x + 24}} \cdot 9 - 1\frac{1}{2}$
 $h'(x) = \frac{9}{2\sqrt{9x + 24}} - 1\frac{1}{2}$
 $\frac{9}{2\sqrt{9x + 24}} - 1\frac{1}{2} = 0$
 $\frac{9}{2\sqrt{9x + 24}} = 1\frac{1}{2}$
 $3\sqrt{9x + 24} = 9$

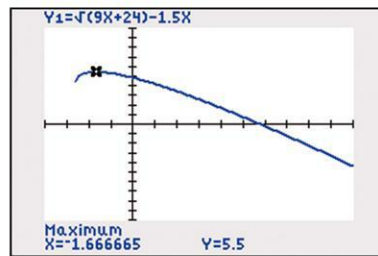
$$\sqrt{9x + 24} = 3$$

$$9x + 24 = 9$$

$$9x = -15$$

$$x = -1\frac{2}{3}$$

In de plot zie je dat h een maximum heeft bij $x = -1\frac{2}{3}$.
 Het maximum is $h(-1\frac{2}{3}) = 5\frac{1}{2}$.



g $k(x) = x(\sqrt{x} - 3)$

$$k(x) = x^{\frac{1}{2}} - 3x$$

$$k'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 3$$

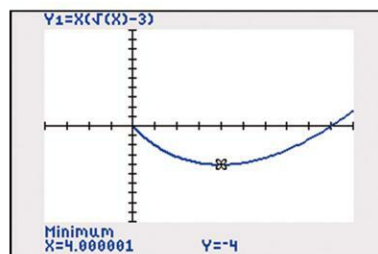
$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 3 = 0$$

$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 3$$

$$x^{-\frac{1}{2}} = 6$$

$$x = 36$$

In de plot zie je dat k een minimum heeft bij $x = 36$.
 Het minimum is $k(36) = -4$.



h $m(x) = (\frac{1}{4}x - 1)^2 - 3x + 7$

$$m'(x) = 2 \cdot (\frac{1}{4}x - 1) \cdot \frac{1}{4} - 3$$

$$m'(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}x - 1) - 3$$

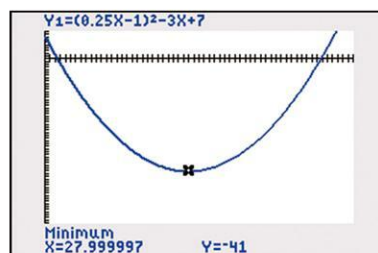
$$m'(x) = \frac{1}{8}x - 3\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{8}x - 3\frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{1}{8}x = 3\frac{1}{2}$$

$$x = 28$$

In de plot zie je dat m een minimum heeft bij $x = 28$.
 Het minimum is $m(28) = -41$.



- 031 a** Punt A heeft ook x -coördinaat p .
- b** $y_A = f(p)$ dus $y_A = -\frac{1}{3}p^2 + 16$
- c** De breedte is $OP = p$.
- d** De hoogte is $AP = y_A = -\frac{1}{3}p^2 + 16$.
- e** De oppervlakte van rechthoek $OPAQ$ is $O(p) = p \cdot \left(-\frac{1}{3}p^2 + 16\right)$.
- f** $O(p) = -\frac{1}{3}p^3 + 16p$
 $O'(p) = -p^2 + 16$
 $-p^2 + 16 = 0$
 $p^2 = 16$
 $p = 4$ ($p = -4$ voldoet niet)
 O heeft een maximum bij $p = 4$.
De maximale oppervlakte is $O(4) = -\frac{1}{3} \cdot 4^3 + 16 \cdot 4 = 42\frac{2}{3}$

U4 $g_a(x) = (3x - a)^{-1} - (3x - a)^{-2}$
 $g'_a(x) = -1 \cdot (3x - a)^{-2} \cdot 3 - -2 \cdot (3x - a)^{-3} \cdot 3$
 $g'_a(x) = \frac{-3}{(3x - a)^2} + \frac{6}{(3x - a)^3}$
 $g'_a(4) = 0$ geeft $\frac{-3}{(12 - a)^2} + \frac{6}{(12 - a)^3} = 0$ (met $a \neq 12$)
 $\frac{3}{(12 - a)^2} = \frac{6}{(12 - a)^3}$
 $3 \cdot (12 - a)^3 = 6 \cdot (12 - a)^2$
 $3 \cdot (12 - a)^2 \cdot (12 - a) = 6 \cdot (12 - a)^2 \cdot 2$
 $3(12 - a)^2 = 0$ of $12 - a = 2$
 $a = 12$ of $a = 10$
 $a = 12$ voldoet niet dus $a = 10$.

U5 a $f(x) = (x + 4)\sqrt{x + 4}$
 $f(x) = (x + 4)(x + 4)^{\frac{1}{2}}$
 $f(x) = (x + 4)^{1\frac{1}{2}}$
 $f'(x) = 1\frac{1}{2} \cdot (x + 4)^{\frac{1}{2}} \cdot 1$
 $f'(x) = 1\frac{1}{2}\sqrt{x + 4}$

b $g(x) = x\sqrt{x + 4}$
 $g(x) = (x + 4)\sqrt{x + 4} - 4\sqrt{x + 4}$
 $g'(x) = 1\frac{1}{2}\sqrt{x + 4} - 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x + 4}} \cdot 1$
 $g'(x) = 1\frac{1}{2}\sqrt{x + 4} - \frac{2}{\sqrt{x + 4}}$

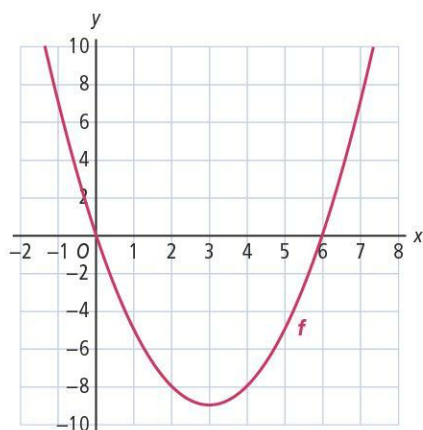
c $k(x) = (x + 6)^4$
 $k'(x) = 4 \cdot (x + 6)^3 \cdot 1$
 $k'(x) = 4(x + 6)^3$

d $l(x) = x(x + 6)^3$
 $l(x) = (x + 6)(x + 6)^3 - 6(x + 6)^3$
 $l(x) = (x + 6)^4 - 6(x + 6)^3$
 $l'(x) = 4(x + 6)^3 - 18 \cdot (x + 6)^2 \cdot 1$
 $l'(x) = 4(x + 6)^3 - 18(x + 6)^2$

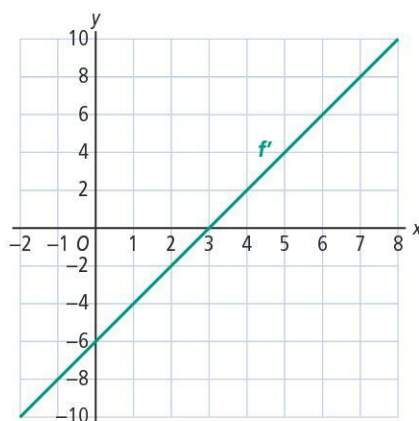
11.5 Redeneren met de afgeleide

intro De grafiek van f heeft horizontale raaklijnen bij $x = -2$ en $x = 3$.
 De grafiek daalt voor $x < -2$ en stijgt voor $x > -2$.
 De grafiek van f heeft een top bij $x = -2$.

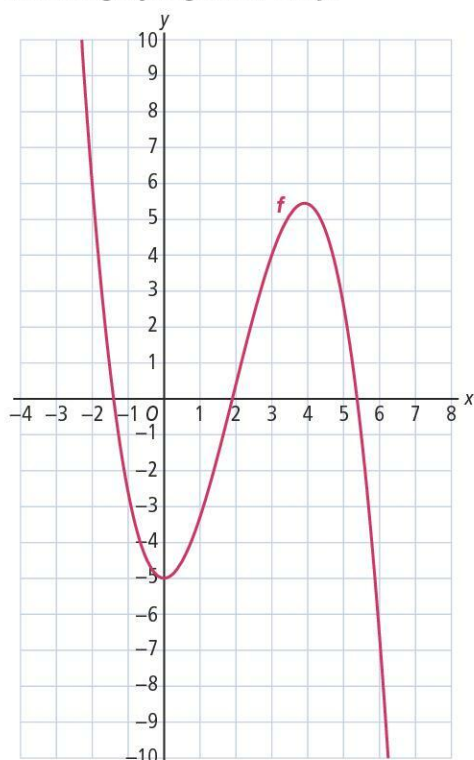
32 a $f(x) = x^2 - 6x$



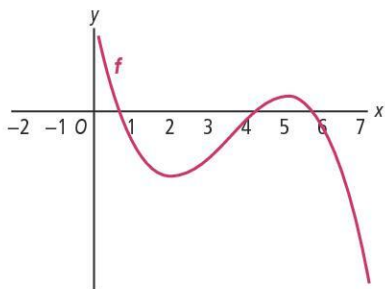
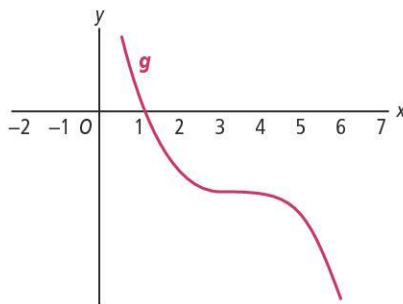
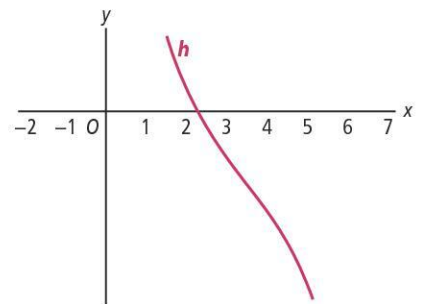
$f'(x) = 2x - 6$



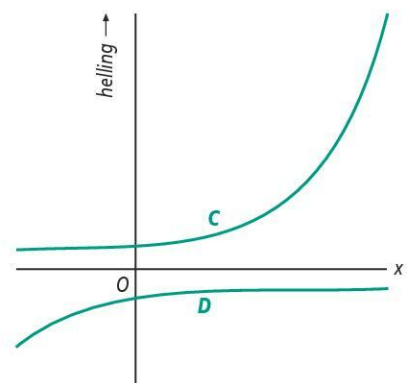
- b** f stijgt op het interval $\langle 3, \rightarrow \rangle$ en f daalt op het interval $\langle \leftarrow, 3 \rangle$.
c De grafiek van de afgeleide ligt boven de x -as op het interval $\langle 3, \rightarrow \rangle$ en onder de x -as op het interval $\langle \leftarrow, 3 \rangle$.
d Als de grafiek van de afgeleide boven de x -as ligt, stijgt f en als de grafiek van de afgeleide onder de x -as ligt, daalt f .
e Bij de waarde van x waar de grafiek van de afgeleide de x -as snijdt, heeft de grafiek van f een top.
- 33 a** f stijgt op het interval $\langle 0, 4 \rangle$, want daar ligt de afgeleide boven de x -as.
b f daalt op de intervallen $\langle \leftarrow, 0 \rangle$ en $\langle 4, \rightarrow \rangle$.
c Bij $x = 0$ gaat f van dalend naar stijgend, dus bij $x = 0$ heeft f een minimum.
d Bij $x = 4$ gaat f van stijgend naar dalend, dus bij $x = 4$ heeft f een maximum.
e Een mogelijke grafiek van f :



- 34** De grafiek van f' snijdt de x -as bij $x = 2$ en $x = 5$.
 De grafiek van f' ligt eerst onder de x -as, dan erboven en tot slot er weer onder.
 Voor f betekent dit dat f eerst daalt, een minimum heeft bij $x = 2$, dan stijgt, een maximum heeft bij $x = 5$ en dan weer daalt. Een mogelijke grafiek staat hieronder.
 De grafiek van g' raakt de x -as bij $x = 3\frac{1}{2}$, en ligt verder onder de x -as.
 Voor g betekent dit dat g steeds daalt en de grafiek een horizontale raaklijn heeft bij $x = 3\frac{1}{2}$. Een mogelijke grafiek staat hieronder.
 De grafiek van h' snijdt de x -as niet maar heeft wel een maximum en ligt steeds onder de x -as.
 Voor h betekent dit dat de grafiek geen toppen heeft, eerst afnemend daalt en dan toenemend daalt. Een mogelijke grafiek staat hieronder.



- 35 a** Grafiek A is een horizontale rechte lijn boven de x -as. Dus moet het gaan om een functie met een constante stijging. De grafiek van m voldoet hieraan.
b Grafiek B ligt geheel onder de x -as en geeft steeds negatievere waarden.
c Bij grafiek B hoort functie l , want l is toenemend dalend.
d Grafiek C hiernaast zou de grafiek van de afgeleide functie van k kunnen zijn, de helling is positief en wordt steeds groter. Grafiek D hiernaast zou de grafiek van de afgeleide functie van n kunnen zijn, de helling is negatief en wordt steeds minder negatief.

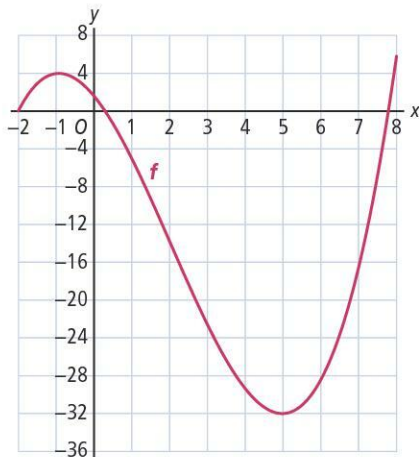


- 36 a** $f''(x) = 3x^2 + 2$
b Omdat $x^2 \geq 0$ is $3x^2 + 2 \geq 2$ en dus is $f''(x) > 0$ voor alle x -waarden.
c De helling is het kleinst als f' minimaal is. Dat is bij $x = 0$ het geval.
- 37** De grafiek van K' is overall positief dus is K stijgend.
 De grafiek van K is afnemend stijgend tot $q = 1000$ en daarna is de grafiek van K toenemend stijgend.
- 38 a** De noemer van de breuk wordt steeds groter wanneer t toeneemt.
 Het gevolg is dat de breuk steeds kleiner wordt en de inhoud dus afneemt.

$$\begin{aligned} \text{b } I &= \frac{120}{(0,05t + 1)^2} \\ I &= 120 \cdot (0,05t + 1)^{-2} \\ \frac{dI}{dt} &= -240 \cdot (0,05t + 1)^{-3} \cdot 0,05 \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{-12}{(0,05t + 1)^3} \end{aligned}$$

- c Als t toeneemt en $t \geq 0$ is de breuk een negatief getal. De inhoud neemt dus af.
- d Als t toeneemt en $t \geq 0$ is de breuk een negatief getal dat steeds dichterbij 0 komt, omdat de teller niet verandert en de noemer toeneemt. Er is dus een steeds langzamere afname.

- 033**
- a Als f daalt is $f'(x) < 0$.
 - b $f'(x) < 0$ op het interval $\langle -1, 5 \rangle$ dus op dat interval daalt f .
 - c $f'(x) > 0$ op de intervallen $\langle \leftarrow, -1 \rangle$ en $\langle 5, \rightarrow \rangle$ dus op die intervallen stijgt f .
 - d In een top van de grafiek is $f'(x) = 0$.
 - e Bij $x = -1$ en $x = 5$ heeft de grafiek van f een top.
 - f Waar de grafiek van f' eerst boven de x -as ligt en daarna onder de x -as ligt, daar heeft f een maximum, dus dat is bij $x = -1$.
 - g Zie hieronder.
 - h Tussen $x = -1$ en $x = 5$ daalt de grafiek, dus de top bij $x = 5$ ligt lager dan die bij $x = -1$.
 - i Zie de schets hieronder.



- U6**
- a Grafiek A is symmetrisch in de y -as.
Grafiek B is puntsymmetrisch in de oorsprong.
 - b Grafiek B heeft een top bij $x = -2$ en bij $x = 2$.
Grafiek A snijdt daar de x -as.
Dus grafiek A is de grafiek van de afgeleide f' .
 - c Als de grafiek van f' van onder de x -as naar boven de x -as gaat, heeft f een minimum, dat is hier bij $x = 2$.

- U7**
- Uit $f'(4) > 0$ volgt dat f stijgt bij $x = 4$.
Als de grafiek van de afgeleide van de afgeleide dalend is bij $x = 4$, neemt $f'(x)$ af bij $x = 4$. De stijging neemt dus af.
Tot $x = 4$ is f toenemend stijgend en vanaf $x = 4$ is f afnemend stijgend.
Dus in het punt met x -coördinaat 4 heeft de grafiek van f een maximale stijging.

11.6 Gemengde opdrachten

39 a $f(x) = x^2 - 3x + 8$

$$f'(x) = 2x - 3$$

$$2x - 3 = 0$$

$$2x = 3$$

$$x = 1\frac{1}{2}$$

De grafiek van f is een dalparabool.

De functie f heeft dan een minimum $f(1\frac{1}{2}) = 5\frac{3}{4}$

b $g(x) = 3(2x + 5)^{-1} + 1\frac{1}{2}x$

$$g(x) = -3 \cdot (2x + 5)^{-2} \cdot 2 + 1\frac{1}{2}$$

$$g(x) = \frac{-6}{(2x + 5)^2} + 1\frac{1}{2}$$

$$\frac{-6}{(2x + 5)^2} + 1\frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{-6}{(2x + 5)^2} = -1\frac{1}{2}$$

$$(2x + 5)^2 = 4$$

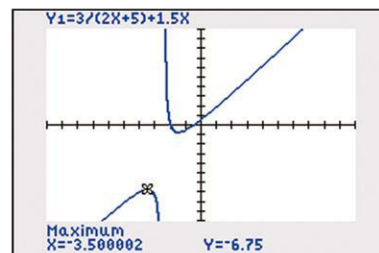
$$2x + 5 = -2 \text{ of } 2x + 5 = 2$$

$$2x = -7 \text{ of } 2x = -3$$

$$x = -3\frac{1}{2} \text{ of } x = -1\frac{1}{2}$$

in de plot zie je dat g een maximum heeft bij $x = -3\frac{1}{2}$ en een minimum heeft bij $x = -1\frac{1}{2}$

Het maximum is $g(-3\frac{1}{2}) = -6\frac{3}{4}$ en het minimum is $g(-1\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$



c $h(x) = (4 - \frac{1}{8}x)^4$

$$h'(x) = 4 \cdot (4 - \frac{1}{8}x)^3 \cdot -\frac{1}{8}$$

$$h'(x) = -\frac{1}{2}(4 - \frac{1}{8}x)^3$$

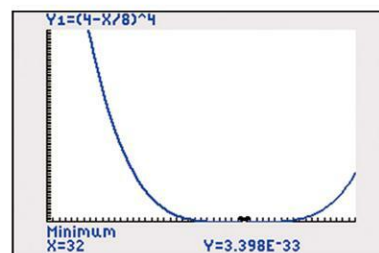
$$-\frac{1}{2}(4 - \frac{1}{8}x)^3 = 0$$

$$4 - \frac{1}{8}x = 0$$

$$x = 32$$

in de plot zie je dat h een minimum heeft bij $x = 32$

Het minimum is $h(32) = 0$.



d $n(x) = \frac{3}{\sqrt{2x+7}} + 3x$

$$n(x) = 3(2x + 7)^{-\frac{1}{2}} + 3x$$

$$n'(x) = -1\frac{1}{2} \cdot (2x + 7)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 + 3$$

$$-3 \cdot (2x + 7)^{-\frac{1}{2}} + 3 = 0$$

$$(2x + 7)^{-\frac{1}{2}} = 1$$

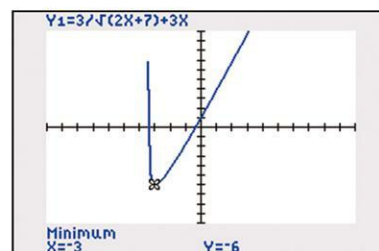
$$2x + 7 = 1^{-\frac{2}{1}} = 1$$

$$2x = -6$$

$$x = -3$$

in de plot zie je dat n een minimum heeft bij $x = -3$.

Het minimum is $n(-3) = -6$.



40 a $V(0) = 10 \cdot (2 - 0)^2 = 40$

Op $t = 0$ bevat het zwembad 40 m^3 .

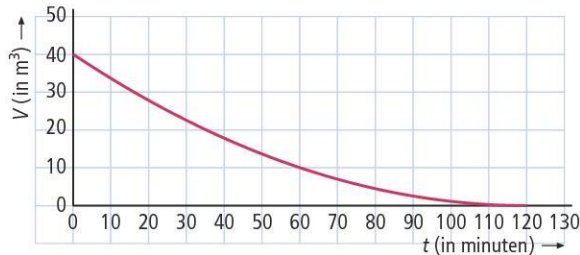
b $10 \cdot \left(2 - \frac{1}{60}t\right)^2 = 0$

$$\frac{1}{60}t = 2$$

$$t = 120$$

Na 120 minuten is het zwembad leeg.

c



d De grafiek van V is een dalparabool met top $(120, 0)$ en op het interval $[0, 120]$ daalt V dus.

Daarom is in deze periode $V'(t) < 0$.

e De gemiddelde uitstroomsnelheid is $\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{0 - 40}{120 - 0} = -\frac{1}{3} \text{ m}^3/\text{min}$.

f Direct na het los trekken van de stop, dus als $t = 0$, stroomt het zwembad het snelst leeg.

g $V' = 20 \cdot \left(2 - \frac{1}{60}t\right) \cdot -\frac{1}{60}$

$$V' = -\frac{1}{3} \left(2 - \frac{1}{60}t\right)$$

$$-\frac{1}{3} \left(2 - \frac{1}{60}t\right) = -\frac{1}{3}$$

$$2 - \frac{1}{60}t = 1$$

$$t = 60$$

Na 60 minuten is de uitstroomsnelheid precies gelijk aan de gemiddelde uitstroomsnelheid.

41 a $f_{p,q}(0) = 0$ geeft $p \cdot (4 \cdot 0 + 2)^3 + q = 0$ ofwel $8p + q = 0$

$$f_{p,q}(-1) = 16 \text{ geeft } p \cdot (4 \cdot -1 + 2)^3 + q = 16 \text{ ofwel } -8p + q = 16$$

$$8p + q = 0 \text{ geeft } q = -8p$$

$$-8p + q = 16 \text{ geeft } q = 8p + 16$$

dit gelijkstellen geeft

$$-8p = 8p + 16$$

$$-16p = 16$$

$$p = -1 \text{ en } q = -8 \cdot -1 = 8$$

b $f_{p,q}\left(-\frac{1}{4}\right) = 12$ geeft $p \cdot \left(4 \cdot -\frac{1}{4} + 2\right)^3 + q = 12$ ofwel $p + q = 12$

$$f'_{p,q}(x) = 3p \cdot (4x + 2)^2 \cdot 4 \text{ ofwel } f'_{p,q}(x) = 12p(4x + 2)^2$$

$$f'_{p,q}\left(-\frac{1}{4}\right) = -6 \text{ geeft } 12p \left(4 \cdot -\frac{1}{4} + 2\right)^2 = -6 \text{ ofwel } 12p = -6$$

$$p = -\frac{1}{2} \text{ en } -\frac{1}{2} + q = 12 \text{ dus } q = 12\frac{1}{2}$$

c $f_{\frac{1}{2},5}(x) = \frac{1}{2}(4x + 2)^3 + 5$

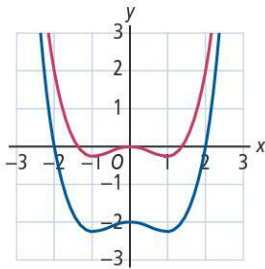
$$f'_{\frac{1}{2},5}(x) = \frac{1}{2} \cdot (4x + 2)^2 \cdot 4 \text{ ofwel } f'_{\frac{1}{2},5}(x) = 6(4x + 2)^2$$

$$f'_{\frac{1}{2},5}(-1) = 6(4 \cdot -1 + 2)^2 = 24$$

$x = -1$ en $y = 1$ invullen bij $y = 24x + b$ geeft $1 = 24 \cdot -1 + b$ dus $b = 25$.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = 24x + 25$.

- 42** f heeft een minimum bij $x = -1$ en bij $x = 1$ want de afgeleide gaat daar van negatief naar positief en een maximum bij $x = 0$.
Omdat de afgeleiden van de twee mogelijke grafieken gelijk zijn verschillen de grafieken slechts in een verticale verplaatsing.
Twee mogelijke grafieken:



- 43 a** Voor elke waarde van a is $f(0) = 0$.

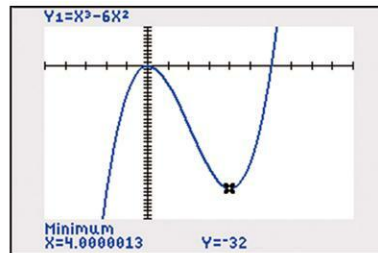
b $f_0(x) = x^3 - 6x^2$
 $f'_0(x) = 3x^2 - 12x$
 $3x^2 - 12x = 0$
 $3x(x - 4) = 0$
 $x = 0$ of $x = 4$

in de plot zie je dat f een maximum heeft bij $x = 0$ en een minimum heeft bij $x = 4$.

Het maximum is $f_0(0) = 0$ en het minimum is $f_0(4) = -32$.

- c** Als er geen horizontale raaklijn is, dan heeft de vergelijking

$f'_a(x) = 3x^2 - 12x + a = 0$ geen oplossing.
 Dan moet voor de discriminant D gelden $D < 0$.
 $D = (-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot a$
 $144 - 12a < 0$
 $12a > 144$
 $a > 12$



Onderzoeksoopdrachten

- 44** Bij grafiek B hoort de functie $g(x) = \left(\frac{1}{2}(x - 6) - 1\right)^3$ ofwel $g(x) = \left(\frac{1}{2}x - 4\right)^3$.
 Voor de lengte $L(x)$ van de verticale lijnstukken geldt $L(x) = f(x) - g(x)$
 ofwel $L(x) = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^3 - \left(\frac{1}{2}x - 4\right)^3$
 Voor de minimale lengte hiervan moet gelden $L'(x) = 0$.
 $L'(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}x - 4\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$
 $L'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x - 4\right)^2$
 $L'(x) = 0$ geeft $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x - 4\right)^2 = 0$
 $\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x - 4\right)^2$
 $\frac{1}{2}x - 1 = \frac{1}{2}x - 4$ of $\frac{1}{2}x - 1 = -\frac{1}{2}x + 4$
 geen oplossing $x = 5$
 $L(5) = \left(1\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-1\frac{1}{2}\right)^3 = 6\frac{3}{4}$
 Het kortste verticale lijnstukje heeft lengte $6\frac{3}{4}$

- 45** Een punt op de grafiek heeft coördinaten $P\left(p, \frac{3}{p}\right)$
 $f(x) = \frac{3}{x}$ ofwel $f(x) = 3x^{-1}$
 $f'(x) = -3x^{-2}$ ofwel $f'(x) = \frac{-3}{x^2}$
 De richtingscoëfficiënt in punt P is gelijk aan $f'(p) = \frac{-3}{p^2}$, dus de raaklijn in punt P is van de vorm $y = \frac{-3}{p^2}x + b$.
 $x = p$ en $y = \frac{3}{p}$ invullen bij $y = \frac{-3}{p^2}x + b$ geeft $\frac{3}{p} = \frac{-3}{p^2} \cdot p + b$ ofwel $b = \frac{6}{p}$
 Een vergelijking van de raaklijn is $y = \frac{-3}{p^2}x + \frac{6}{p}$
 Voor punt A geldt $\frac{-3}{p^2}x + \frac{6}{p} = 0$ ofwel $\frac{-3}{p^2}x = \frac{-6}{p}$ dus $x = 2p$.
 Voor punt B geldt $y = \frac{6}{p}$
 De oppervlakte van $\triangle OAB$ is $\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 2p \cdot \frac{6}{p} = 6$.
 De oppervlakte is altijd gelijk aan 6.

Samenvatting

- S1 a** $f(x) = 8x\sqrt{x}$
 $f(x) = 8x^{1\frac{1}{2}}$
 $f'(x) = 12x^{\frac{1}{2}}$ ofwel $f'(x) = 12\sqrt{x}$
- b** $g(x) = \frac{5}{2x^7}$ ofwel $g(x) = \frac{5}{2}x^{-7}$
 $g'(x) = -\frac{35}{2}x^{-8}$ ofwel $g'(x) = -\frac{35}{2x^8}$
- S2 a** $f(x) = 5(1 - 7x)^3$
 $f'(x) = 15 \cdot (1 - 7x)^2 \cdot -7$
 $f'(x) = -105(1 - 7x)^2$
- b** $f(x) = \sqrt{3x + 2}$
 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x + 2}} \cdot 3$
 $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x + 2}}$
- S3** $f(x) = 2(5 - x)^3$
 $f'(x) = 6 \cdot (5 - x)^2 \cdot -1$
 $f'(x) = -6(5 - x)^2$
 $-6(5 - x)^2 = -6$
 $(5 - x)^2 = 1$
 $5 - x = -1$ of $5 - x = 1$
 $x = 6$ of $x = 4$
 $y = f(6) = -2$ of $y = f(4) = 2$
 De raakpunten zijn $(6, -2)$ en $(4, 2)$.
 $x = 6$ en $y = -2$ invullen bij $y = -6x + p$ geeft $-2 = -6 \cdot 6 + p$ ofwel $p = 34$.
 $x = 4$ en $y = 2$ invullen bij $y = -6x + p$ geeft $2 = -6 \cdot 4 + p$ ofwel $p = 26$.

S4 a $f(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x} + \frac{1}{x}$
 $f(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x} + x^{-1}$

$$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - x^{-2} \text{ ofwel } f'(x) = \frac{1}{8\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{8\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\frac{1}{8\sqrt{x}} = \frac{1}{x^2}$$

$$x^2 = 8\sqrt{x}$$

$$x^2 - 8\sqrt{x} = 0$$

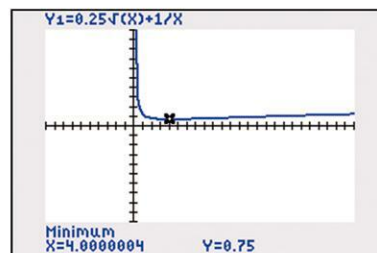
$$x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{3}{2}} - 8) =$$

$$x^{\frac{1}{2}} = 0 \text{ of } x^{\frac{3}{2}} = 8$$

$$x = 0 \text{ (voldoet niet) of } x = 8^{\frac{2}{3}} = 4$$

In de plot zie je dat f een minimum heeft bij $x = 4$.

$$\text{Het minimum is } f(4) = \frac{3}{4}$$



b $g(x) = \frac{1}{2x-5} - \frac{4}{2x+5}$

$$g(x) = (2x-5)^{-1} - 4(2x+5)^{-1}$$

$$g'(x) = -1 \cdot (2x-5)^{-2} \cdot 2 + 4 \cdot (2x+5)^{-2} \cdot 2$$

$$g'(x) = \frac{-2}{(2x-5)^2} + \frac{8}{(2x+5)^2}$$

$$\frac{-2}{(2x-5)^2} + \frac{8}{(2x+5)^2} = 0$$

$$\frac{2}{(2x-5)^2} = \frac{8}{(2x+5)^2}$$

$$8(2x-5)^2 = 2(2x+5)^2$$

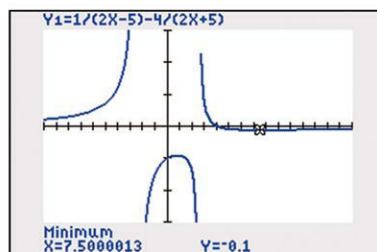
$$4(2x-5)^2 = (2x+5)^2$$

$$2(2x-5) = 2x+5 \text{ of } 2(2x-5) = -2x-5$$

$$4x-10 = 2x+5 \text{ of } 4x-10 = -2x-5$$

$$2x = 15 \text{ of } 6x = 5$$

$$x = 7\frac{1}{2} \text{ of } x = \frac{5}{6}$$



In de plot zie je dat g een maximum heeft bij $x = \frac{5}{6}$ en een minimum bij $x = 7\frac{1}{2}$

Het maximum is $g(\frac{5}{6}) = -\frac{9}{10}$ en het minimum is $g(7\frac{1}{2}) = -\frac{1}{10}$

S5 a f daalt op de intervallen $\langle \leftarrow, -2 \rangle$, $\langle -1, 0 \rangle$ en $\langle 1, 2 \rangle$.

b f stijgt op de intervallen $\langle -2, -1 \rangle$, $\langle 0, 1 \rangle$ en $\langle 2, \rightarrow \rangle$.

c f heeft een maximum bij $x = -1$ en $x = 1$.

d f heeft een minimum bij $x = -2$, $x = 0$ en $x = 2$.

Test jezelf

T1 a $f(x) = 4x^3 + \sqrt{x}$

$$f'(x) = 12x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g(x) = \frac{5}{x^2} + 3$$

$$g(x) = 5x^{-2} + 3$$

$$g'(x) = -10 \cdot x^{-3}$$

$$g'(x) = -\frac{10}{x^3}$$

b $h = (\sqrt{x} + x) \cdot (x - 1)$

$$h = x^{1\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + x^2 - x$$

$$\frac{dh}{dx} = 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 2x - 1$$

$$\frac{dh}{dx} = 1\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x - 1$$

T2 a $m(t) = 3 + 2(4t - 9)^5$

$$m'(t) = 0 + 10 \cdot (4t - 9)^4 \cdot 4$$

$$m'(t) = 40(4t - 9)^4$$

b $h(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}}$

$$h(x) = \frac{1}{2}x^{-1\frac{1}{2}}$$

$$h'(x) = -\frac{3}{4} \cdot x^{-2\frac{1}{2}}$$

$$h'(x) = \frac{-3}{4x^2\sqrt{x}}$$

c $T(q) = \frac{2q^3 - 4q + 7}{3q^2}$

$$T(q) = \frac{2q^3}{3q^2} - \frac{4q}{3q^2} + \frac{7}{3q^2}$$

$$T(q) = \frac{2}{3}q - \frac{4}{3}q^{-1} + \frac{7}{3}q^{-2}$$

$$T'(q) = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}q^{-2} - \frac{14}{3}q^{-3}$$

$$T'(q) = \frac{2}{3} + \frac{4}{3q^2} - \frac{14}{3q^3}$$

d $k(x) = (2 - x)^{1,7}$

$$k'(x) = 1,7 \cdot (2 - x)^{0,7} \cdot -1$$

$$k'(x) = -1,7(2 - x)^{0,7}$$

e $p(x) = \frac{2}{(x - 7)^4}$

$$p(x) = 2(x - 7)^{-4}$$

$$p'(x) = -8 \cdot (x - 7)^{-5} \cdot 1$$

$$p'(x) = -\frac{8}{(x - 7)^5}$$

f $q(s) = \left(1 + \frac{3}{s}\right)^2$

$$q(s) = (1 + 3s^{-1})^2$$

$$q(s) = 1 + 6s^{-1} + 9s^{-2}$$

$$q'(s) = -6s^{-2} - 18s^{-3}$$

$$q'(s) = -\frac{6}{s^2} - \frac{18}{s^3}$$

T3 a $f(x) = x - x^4$

$$f(2) = 2 - 2^4 = 2 - 16 = -14 \text{ dus het raakpunt is } (2, -14).$$

$$f'(x) = 1 - 4x^3$$

$$f'(2) = 1 - 4 \cdot 2^3 = -31 \text{ dus de richtingscoëfficiënt van de raaklijn is } -31.$$

$$x = 2 \text{ en } y = -14 \text{ invullen bij } y = -31x + b \text{ geeft } -14 = -31 \cdot 2 + b \text{ dus } b = 48.$$

$$\text{Een vergelijking van de raaklijn is } y = -31x + 48.$$

b $f'(x) = 5$ geeft $1 - 4x^3 = 5$

$$4x^3 = -4$$

$$x^3 = -1$$

$$x = -1 \text{ en } y = f(-1) = -1 - (-1)^4 = -2$$

$$x = -1 \text{ en } y = -2 \text{ invullen bij } y = 5x + p \text{ geeft } -2 = 5 \cdot -1 + p$$

$$p = 3$$

T4 a $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2$

De raaklijn loopt horizontaal als de afgeleide nul is.

$$f'(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$$

$$x^3 - 4x^2 + 4x = 0$$

$$x(x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$x(x - 2)^2 = 0$$

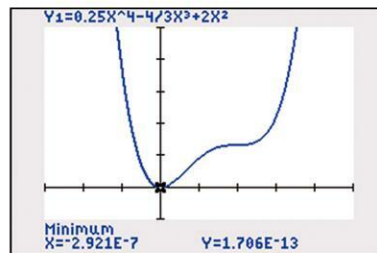
$$x = 0 \text{ of } x = 2$$

$$y = f(0) = 0 \text{ of } y = f(2) = 1\frac{1}{3}$$

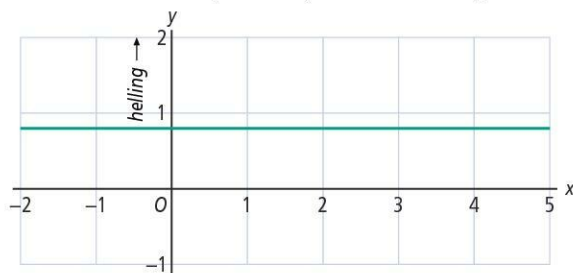
In de punten $(0, 0)$ en $(2, 1\frac{1}{3})$ loopt de raaklijn horizontaal.

- b** In de plot zie je dat er bij $x = 0$ een minimum 0 is.

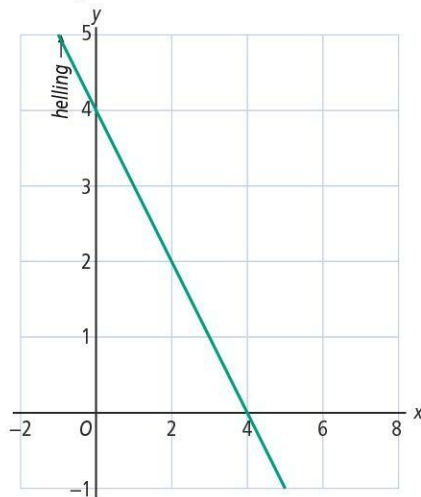
Er is geen maximum of minimum bij $x = 2$.



- T5** De linker grafiek is een rechte stijgende lijn, de hellingfunctie is dus een constante functie, waarbij de constante positief is.



De rechter grafiek is een bergparabool, de helling functie is dan een eerstegraads functie die daalt en een nulpunt heeft bij $x = 4$.



- T6 a** De noemer mag geen nul zijn.

$$2x - 25 = 0$$

$$2x = 25$$

$$x = 12\frac{1}{2}$$

De functie bestaat niet voor $x = 12\frac{1}{2}$

- b** $f(x) = \frac{9}{2x-25}$ ofwel $f(x) = 9(2x-25)^{-1}$
 $f'(x) = -9 \cdot (2x-25)^{-2} \cdot 2$ ofwel $f'(x) = \frac{-18}{(2x-25)^2}$
- c** $(2x-25)^2$ is voor elke waarde van $x \neq 12\frac{1}{2}$ positief, dus de uitkomst van
 $f'(x) = \frac{-18}{(2x-25)^2}$ is voor elke waarde van $x \neq 12\frac{1}{2}$ negatief.
 Daarom is f overal dalend.
- d** Als $x < 12\frac{1}{2}$ is f toenemend dalend omdat de waarden van $f'(x)$ bij toenemende x steeds kleiner worden.

- T7 a** $L = 6$ invullen geeft $A = 2 \cdot 6^2 = 72$
 De huidoppervlakte is dan 72 dm^2 .
- b** $L = 6$ geeft $V = 0,1 \cdot 6^3 = 21,6$ en $G = 0,2 \cdot V = 0,2 \cdot 21,6 = 4,32$
 Het antilopenjong heeft een gewicht van $4,32 \text{ kg}$.
- c** $G = 0,2 \cdot V = 0,2 \cdot 0,1 \cdot L^3$ dus $G = 0,02 \cdot L^3$
- d** $\frac{dG}{dL} = 0,06 \cdot L^2$
 $L = 7$ invullen geeft $0,06 \cdot 7^2 = 2,94$
 Het gewicht neemt toe met $2,94 \text{ kg/dm}$.
- e** $\frac{dA}{dL} = 4L$
 $L = 7$ invullen geeft 28
 De huidoppervlakte neemt toe met $28 \text{ dm}^2/\text{dm}$.
- f** $0,02 \cdot L^3 = 80$
 $L^3 = 4000$
 $L = \sqrt[3]{4000}$
 $A = 2 \cdot (\sqrt[3]{4000})^2 = 503,968\dots$
 De huidoppervlakte is ongeveer 504 dm^2 .

- T8 a** $f(x) = \frac{1}{(3x+5)^2}$ ofwel $f(x) = (3x+5)^{-2}$
 $f'(x) = -2 \cdot (3x+5)^{-3} \cdot 3$ ofwel $f'(x) = \frac{-6}{(3x+5)^3}$
- b** Voor $x > -1\frac{2}{3}$ is $3x+5 > 0$
 Dan is ook $(3x+5)^3 > 0$ en is $f'(x) < 0$ dus f neemt af.
 Als x toeneemt, neemt $3x+5$ ook toe en nadert de breuk $\frac{-6}{(3x+5)^3}$ naar nul.
 $f'(x)$ nadert naar 0 , dus neemt f steeds langzamer af.
- c** $a = f'(-1) = \frac{-6}{(3 \cdot -1 + 5)^3} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$
 $x = -1$ en $y = \frac{1}{4}$ invullen bij $y = -\frac{3}{4}x + b$ geeft $\frac{1}{4} = -\frac{3}{4} \cdot -1 + b$ dus $b = -\frac{1}{2}$
 De oplossing is $a = -\frac{3}{4}$ en $b = -\frac{1}{2}$

Extra oefening

E1 a $p(x) = 2\sqrt[3]{x}$
 $p(x) = 2x^{\frac{1}{3}}$
 $p'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}$
 $p'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$

b $g(x) = 2\sqrt{x} + 5x^2$
 $g'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 10x$
 $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 10x$

c $k(x) = \frac{1}{x^6} + \frac{3}{x^4}$
 $k(x) = x^{-6} + 3x^{-4}$
 $k'(x) = -6x^{-7} - 12x^{-5}$
 $k'(x) = -\frac{6}{x^7} - \frac{12}{x^5}$

d $f(x) = (x^2 - 3x + 15)\sqrt{x}$
 $f(x) = (x^2 - 3x + 15)x^{\frac{1}{2}}$
 $f(x) = x^{2\frac{1}{2}} - 3x^{1\frac{1}{2}} + 15x^{\frac{1}{2}}$
 $f'(x) = 2\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - 4\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{15}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
 $f'(x) = 2\frac{1}{2}x\sqrt{x} - 4\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{15}{2\sqrt{x}}$

e $h(x) = \sqrt[3]{x} \cdot x^3$
 $h(x) = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^3 = x^{3\frac{1}{3}}$
 $h'(x) = 3\frac{1}{3}x^{2\frac{1}{3}}$
 $h'(x) = 3\frac{1}{3}x^2\sqrt[3]{x}$

f $q(x) = \frac{2}{x^{1,3}} - \frac{4}{x^{2,8}}$
 $q(x) = 2x^{-1,3} - 4x^{-2,8}$
 $q'(x) = -2,6x^{-2,3} + 11,2x^{-3,8}$
 $q'(x) = \frac{11,2}{x^{3,8}} - \frac{2,6}{x^{2,3}}$

E2 a $g(m) = (4m - 5)^3$
 $g'(m) = 3 \cdot (4m - 5)^2 \cdot 4$
 $g'(m) = 12(4m - 5)^2$

b $h(x) = \frac{4}{2x + 3}$
 $h(x) = 4(2x + 3)^{-1}$
 $h'(x) = -4 \cdot (2x + 3)^{-2} \cdot 2$
 $h'(x) = \frac{-8}{(2x + 3)^2}$

c $Q(p) = \sqrt{2p - 5}$
 $Q'(p) = \frac{1}{2\sqrt{2p - 5}} \cdot 2$
 $Q'(p) = \frac{1}{\sqrt{2p - 5}}$

d $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2x - 0,5}}$
 $f(x) = \frac{1}{4}(2x - 0,5)^{-\frac{1}{2}}$
 $f'(x) = -\frac{1}{8} \cdot (2x - 0,5)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2$
 $f'(x) = \frac{-1}{4(2x - 0,5)\sqrt{2x - 0,5}}$

E3 a $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 8x$
 $f'(x) = 1\frac{1}{2}x^2 - 8$
 $1\frac{1}{2}x^2 - 8 = -2$
 $1\frac{1}{2}x^2 = 6$
 $x^2 = 4$

$x = -2$ of $x = 2$

$y = f(-2) = 12$ of $y = f(2) = -12$

De gevraagde punten zijn $(-2, 12)$ en $(2, -12)$.

b De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $f'(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 8 = -6\frac{1}{2}$

$f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^3 - 8 = -7\frac{1}{2}$ dus het raakpunt is $(1, -7\frac{1}{2})$.

$x = 1$ en $y = -7\frac{1}{2}$ invullen bij $y = -6\frac{1}{2}x + b$ geeft $-7\frac{1}{2} = -6\frac{1}{2} \cdot 1 + b$ dus

$b = -1$. Een vergelijking van de raaklijn is $y = -6\frac{1}{2}x - 1$.

c $f'(x) = 5\frac{1}{2}$ geeft $\frac{1}{2}x^2 - 8 = 5\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}x^2 = 13\frac{1}{2}$$

$$x^2 = 9$$

$$x = -3 \text{ of } x = 3$$

$$y = f(-3) = 10\frac{1}{2} \text{ of } y = f(3) = -10\frac{1}{2}$$

De raakpunten zijn $(-3, 10\frac{1}{2})$ en $(3, -10\frac{1}{2})$.

$x = -3$ en $y = 10\frac{1}{2}$ invullen bij $y = 5\frac{1}{2}x + p$ geeft $10\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2} \cdot -3 + p$ dus

$$p = 27.$$

$x = 3$ en $y = -10\frac{1}{2}$ invullen bij $y = 5\frac{1}{2}x + p$ geeft $-10\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2} \cdot 3 + p$ dus

$$p = -27.$$

E4 a $f(x) = x^3 - \frac{1}{15}x^5$

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{3}x^4$$

$$3x^2 - \frac{1}{3}x^4 = 0$$

$$x^2(3 - \frac{1}{3}x^2) = 0$$

$$x^2 = 0 \text{ of } \frac{1}{3}x^2 = 3$$

$$x = 0 \text{ of } x^2 = 9$$

$$x = 0 \text{ of } x = -3 \text{ of } x = 3$$

In de plot zie je dat f een minimum heeft bij $x = -3$

en een maximum bij $x = 3$.

Bij $x = 0$ is er geen extreme waarde.

Het minimum is $f(-3) = -10\frac{4}{5}$ en het maximum is $f(3) = 10\frac{4}{5}$

b $g(x) = (1 + 2x)^2 - 2$

$$g(x) = 4x^2 + 4x - 1$$

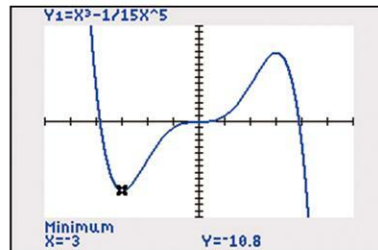
$$g'(x) = 8x + 4$$

$$8x + 4 = 0$$

$$8x = -4$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Bij $x = -\frac{1}{2}$ is er sprake van een minimum, want de grafiek van g is een dalparabool. Het minimum is $g(-\frac{1}{2}) = -2$.

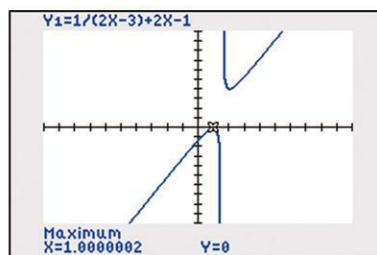


$$\begin{aligned} \text{c } h(x) &= \frac{1}{2x-3} + 2x - 1 \\ h(x) &= (2x-3)^{-1} + 2x - 1 \\ h'(x) &= -1 \cdot (2x-3)^{-2} \cdot 2 + 2 \\ h'(x) &= \frac{-2}{(2x-3)^2} + 2 \\ \frac{-2}{(2x-3)^2} + 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2x-3)^2 &= 1 \\ 2x-3 &= -1 \text{ of } 2x-3 = 1 \\ 2x &= 2 \text{ of } 2x = 4 \\ x &= 1 \text{ of } x = 2 \end{aligned}$$

In de plot zie je dat h een maximum heeft bij $x = 1$
en een minimum bij $x = 2$.

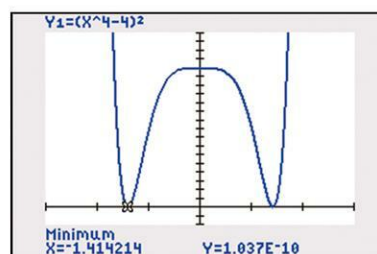
Het maximum is $h(1) = 0$ en het minimum is $h(2) = 4$.



$$\begin{aligned} \text{d } k(x) &= (x^4 - 4)^2 \\ k(x) &= x^8 - 8x^4 + 16 \\ k'(x) &= 8x^7 - 32x^3 \\ 8x^7 - 32x^3 &= 0 \\ 8x^3(x^4 - 4) &= 0 \\ 8x^3 &= 0 \text{ of } x^4 = 4 \\ x &= 0 \text{ of } x = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \text{ of } x = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

In de plot zie je dat k een maximum heeft bij $x = 0$
en minima bij $x = -\sqrt{2}$ en $x = \sqrt{2}$.

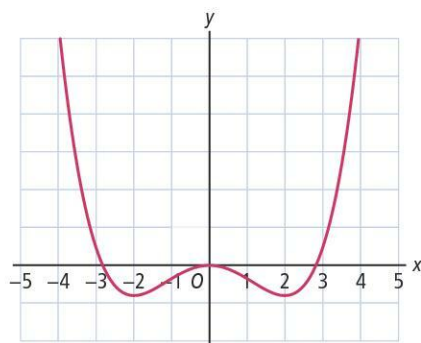
Het maximum is $k(0) = 16$ en de minima zijn $k(-\sqrt{2}) = k(\sqrt{2}) = 0$.



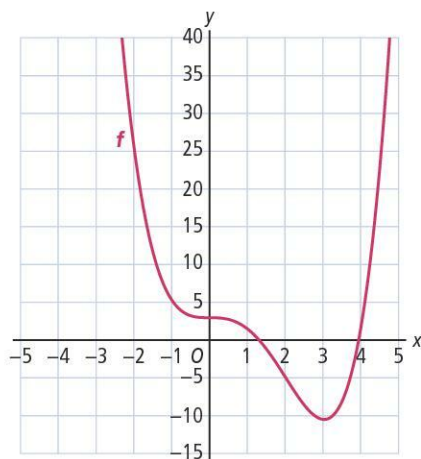
E5 a f is stijgend op de intervallen $\langle -2, 0 \rangle$ en $\langle 2, \rightarrow \rangle$.

b Uit de grafiek van de afgeleide lees je af dat de grafiek van f toppen heeft bij $x = -2$, $x = 0$ en $x = 2$.

Een mogelijke grafiek:



E6 a



f heeft één extreme waarde.

b $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 3$

$$f'(x) = 2x^3 - 6x^2$$

$$2x^3 - 6x^2 = 0$$

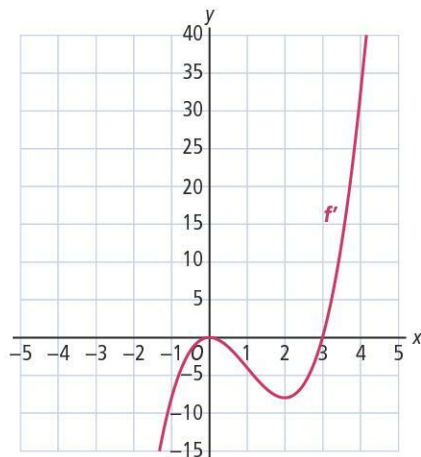
$$2x^2(x - 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 3$$

In de grafiek van f zie je dat er bij $x = 0$ geen extreme waarde hoort.

Bij $x = 3$ hoort wel een extreme waarde: een minimum.

c



- d Op het interval $\langle 0, 2 \rangle$ is er sprake van een toenemende daling:
 $f'(x)$ is op dat interval negatief en wordt steeds kleiner.

E7 a $a = 0,9$ want $900 \text{ cm}^3 = 0,9 \text{ dm}^3 = 0,9$ liter.

b $V = 0,9t$ substitueren in $H = (V + 1)^{\frac{1}{3}} - 1$ geeft $H = (0,9t + 1)^{\frac{1}{3}} - 1$.

c $\frac{dH}{dt} = \frac{1}{3} \cdot (0,9t + 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 0,9$

$$\frac{dH}{dt} = 0,3(0,9t + 1)^{-\frac{2}{3}}$$

Voor $t = 0$ is $\frac{dH}{dt} = 0,3 \cdot (0,9 \cdot 0 + 1)^{-\frac{2}{3}} = 0,3$

De stijgsnelheid is $0,3 \text{ dm/min}$, dat is 30 mm per minuut , dus $0,5 \text{ mm per seconde}$.

d Voor $t = 2$ is $\frac{dH}{dt} = 0,3(0,9 \cdot 2 + 1)^{-\frac{2}{3}} = 0,1510\dots$

De stijgsnelheid is dan $0,1510\dots \text{ dm/min}$, dat is $15,10\dots \text{ mm per minuut}$, dus ongeveer $0,25 \text{ mm per seconde}$.

$$\begin{aligned} \text{E8 a } g(p) &= 3\sqrt{4p-10} \\ g'(p) &= 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{4p-10}} \cdot 4 \\ g'(p) &= \frac{6}{\sqrt{4p-10}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } p(t) &= (t^2 + 1) \cdot \sqrt{t} \\ p(t) &= (t^2 + 1) \cdot t^{\frac{1}{2}} \\ p(t) &= t^{2\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{2}} \\ p'(t) &= 2\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \\ p'(t) &= 2\frac{1}{2}t\sqrt{t} + \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } Q(p) &= \sqrt{(3p+2)^4} \\ Q(p) &= (3p+2)^2 \\ Q(p) &= 9p^2 + 12p + 4 \\ Q'(p) &= 18p + 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } g(x) &= (8x-4)^3 + 7 \\ g'(x) &= 3 \cdot (8x-4)^2 \cdot 8 \\ g'(x) &= 24(8x-4)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{E9 a } y &= x^2 - 4x - 5 \\ \frac{dy}{dx} &= 2x - 4 \\ 2x - 4 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

De grafiek bij de formule is een dalparabool, dus $y = x^2 - 4x - 5$ heeft een minimum bij $x = 2$.

Voor f geldt:

$y = \frac{1}{2} \log(x)$ is dalend omdat het grondtal kleiner is dan 1.

Gevolg is dat $f(x) = \frac{1}{2} \log(x^2 - 4x - 5)$ toeneemt als $y = x^2 - 4x - 5$ afneemt en omgekeerd, dus

$f(x) = \frac{1}{2} \log(x^2 - 4x - 5)$ heeft een maximum bij $x = 2$.

Voor g geldt:

$y = \frac{1}{x}$ is dalend. Gevolg is dat $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x - 5}$ toeneemt als $y = x^2 - 4x - 5$ afneemt en omgekeerd, dus ook $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x - 5}$ heeft een maximum bij $x = 2$.

$$1 \quad \frac{BC}{\sin(\angle A)} = \frac{AC}{\sin(\angle B)}$$

$$\frac{7}{\sin(31^\circ)} = \frac{AC}{\sin(42^\circ)}$$

$$AC = \frac{7 \cdot \sin(42^\circ)}{\sin(31^\circ)}$$

$$AC \approx 9,1$$

$$\frac{DF}{\sin(\angle E)} = \frac{DE}{\sin(\angle F)}$$

$$\frac{4}{\sin(37^\circ)} = \frac{5}{\sin(\angle F)}$$

$$\sin(\angle F) = \frac{5 \cdot \sin(37^\circ)}{4}$$

$$\angle F \approx 49^\circ$$

$$\frac{GH}{\sin(\angle I)} = \frac{HI}{\sin(\angle G)}$$

$$\frac{8}{\sin(29^\circ)} = \frac{9}{\sin(\angle G)}$$

$$\sin(\angle G) = \frac{9 \cdot \sin(29^\circ)}{8}$$

$$\angle G \approx 33^\circ$$

$$2 \quad AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos(\angle B)$$

$$AC^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos(30^\circ) \approx 13,378...$$

$$AC = \sqrt{13,378...} \approx 3,7$$

$$DE^2 = DF^2 + EF^2 - 2 \cdot DF \cdot EF \cdot \cos(\angle F)$$

$$9^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cos(\angle F)$$

$$112 \cdot \cos(\angle F) = 32$$

$$\cos(\angle F) = \frac{32}{112}, \text{ dus } \angle F \approx 73^\circ$$

$$HI^2 = HG^2 + IG^2 - 2 \cdot HG \cdot IG \cdot \cos(\angle G)$$

$$\angle G = 180^\circ - 42^\circ - 53^\circ = 85^\circ$$

$$HI^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos(85^\circ) = 55,770...$$

$$HI = \sqrt{55,770...} \approx 7,5$$

$$3 \quad a \quad AB = \sqrt{(7-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(2-7)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$$

$$AC = \sqrt{(2-1)^2 + (8-1)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

b Lijn AB: $y = ax + b$

$$a = \frac{4-1}{7-1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$x = 1 \text{ en } y = 1 \text{ invullen bij } y = \frac{1}{2}x + b \text{ geeft } 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + b \text{ ofwel } b = \frac{1}{2}$$

$$\text{Een vergelijking van lijn AB is } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Lijn AC: $y = ax + b$

$$a = \frac{8-1}{2-1} = \frac{7}{1} = 7$$

$$x = 1 \text{ en } y = 1 \text{ invullen bij } y = 7x + b \text{ geeft } 1 = 7 \cdot 1 + b \text{ ofwel } b = -6$$

$$\text{Een vergelijking van lijn AC is } y = 7x - 6$$

$$c \quad BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\angle BAC)$$

$$\sqrt{41}^2 = \sqrt{45}^2 + \sqrt{50}^2 - 2 \cdot \sqrt{45} \cdot \sqrt{50} \cdot \cos(\angle BAC)$$

$$41 = 95 - 2 \cdot \sqrt{45} \cdot \sqrt{50} \cdot \cos(\angle BAC)$$

$$2 \cdot \sqrt{45} \cdot \sqrt{50} \cdot \cos(\angle BAC) = 54$$

$$\cos(\angle BAC) = \frac{54}{2 \cdot \sqrt{45} \cdot \sqrt{50}} = 0,5692...$$

$$\angle BAC \approx 55^\circ$$

- d De richtingscoëfficiënt van lijn AB is $\frac{1}{2}$ en van lijn AC is 7.
 $\tan(\alpha) = \frac{1}{2}$ geeft $\alpha = 26,565\dots^\circ$ en $\tan(\beta) = 7$ geeft $\beta = 81,869\dots^\circ$
 $\angle BAC = 81,869\dots^\circ - 26,565\dots^\circ \approx 55^\circ$

4 a $\frac{3}{c} \times \frac{7}{3c} = \frac{21}{3c^2} = \frac{7}{c^2}$

b $\frac{x}{3} \times \frac{12}{x^2} = \frac{12x}{3x^2} = \frac{4}{x}$

c $\frac{2a}{11} \times \frac{-a}{3} = \frac{-2a^2}{33}$

d $\frac{5q}{4p^2} \times \frac{2p}{q^3} = \frac{10pq}{4p^2q^3} = \frac{5}{2pq^2}$

e $p \times \frac{3}{2q} = \frac{3p}{2q}$

f $2a \times b \times \frac{4}{b^2} = \frac{8ab}{b^2} = \frac{8a}{b}$

g $\frac{6c^3}{23} \times 2c = \frac{12c^4}{23}$

h $\frac{1}{3p^5} \times 2p^2 \times \frac{q}{2} = \frac{2p^2q}{6p^5} = \frac{q}{3p^3}$

5 a $\frac{1}{x} - \frac{1}{3x} = \frac{3}{3x} - \frac{1}{3x} = \frac{2}{3x}$

b $\frac{4}{5c^2} + \frac{1}{2c} = \frac{8}{10c^2} + \frac{5c}{10c^2} = \frac{8+5c}{10c^2}$

c $\frac{3}{x-1} - 2 = \frac{3}{x-1} - \frac{2(x-1)}{1(x-1)} = \frac{3}{x-1} - \frac{2x-2}{x-1} = \frac{5-2x}{x-1}$

d $\frac{7}{8p} + \frac{2q}{p} + 3 = \frac{7}{8p} + \frac{16q}{8p} + \frac{24p}{8p} = \frac{7+16q+24p}{8p}$

e $\frac{2}{x-2} - \frac{x}{x-1} = \frac{2(x-1)}{(x-2)(x-1)} - \frac{x(x-2)}{(x-1)(x-2)} =$

$\frac{2x-2}{(x-2)(x-1)} - \frac{x^2-2x}{(x-1)(x-2)} = \frac{-x^2+4x-2}{x^2-3x+2}$

f $\frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{x^2-1} = \frac{x(x^2-1)}{(x^2+1)(x^2-1)} - \frac{3(x^2+1)}{(x^2-1)(x^2+1)} =$

$\frac{x^3-x-3x^2-3}{x^4+x^2-x^2-1} = \frac{x^3-3x^2-x-3}{x^4-1}$

g $\frac{1}{x^3} + 1 = \frac{1}{x^3} + \frac{x^3}{x^3} = \frac{1+x^3}{x^3}$

h $a^2 - \frac{a+2}{a^4} = \frac{a^6}{a^4} - \frac{a+2}{a^4} = \frac{a^6-a-2}{a^4}$

6 a $\sqrt{18} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{108} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

b $(2\sqrt{11})^2 = 2^2 \cdot (\sqrt{11})^2 = 4 \cdot 11 = 44$

c $3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{3} = 15\sqrt{6}$

d $(\sqrt{20})^2 = 20$

e $(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3}) = 9-3 = 6$

f $2\sqrt{7} \cdot (2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}) = 4\sqrt{35} - 6\sqrt{14}$

g $(2+4\sqrt{5})^2 = 4 + 16\sqrt{5} + 16 \cdot 5 = 84 + 16\sqrt{5}$

h $(7\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} + 2\sqrt{6}) = 7 \cdot 3 + 14\sqrt{18} + \sqrt{15} + 2\sqrt{30} =$
 $21 + 14 \cdot 3\sqrt{2} + \sqrt{15} + 2\sqrt{30} = 21 + 42\sqrt{2} + \sqrt{15} + 2\sqrt{30}$

$$7 \text{ a } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{1}{7} \sqrt{21}$$

$$b \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{40}}{8} = \frac{1}{8} \sqrt{40} = \frac{1}{8} \sqrt{4} \cdot \sqrt{10} = \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot \sqrt{10} = \frac{1}{4} \sqrt{10}$$

$$c \frac{5}{\sqrt{11}} = \frac{5}{\sqrt{11}} \cdot \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}} = \frac{5\sqrt{11}}{11} = \frac{5}{11} \sqrt{11}$$

$$d \frac{22}{2\sqrt{3}} = \frac{11}{\sqrt{3}} = \frac{11}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{11\sqrt{3}}{3} = 3\frac{2}{3} \sqrt{3}$$

$$8 \text{ a } 6\sqrt{2} + 2\sqrt{32} = 6\sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2} + 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$$

$$b \sqrt{63} + \sqrt{28} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{7} = 3\sqrt{7} + 2\sqrt{7} = 5\sqrt{7}$$

$$c 11\sqrt{3} - 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3} = 8\sqrt{3} - 2\sqrt{7}$$

$$d \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{45} + \sqrt{125}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{25} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{3\sqrt{5} + 5\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{8\sqrt{5}} = \frac{3}{8}$$

$$e 2\sqrt{4a} - 3\sqrt{a} + 8\sqrt{4a} = 2 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{a} - 3\sqrt{a} + 8 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{a} = 4\sqrt{a} - 3\sqrt{a} + 16\sqrt{a} = 17\sqrt{a}$$

$$f 5\sqrt{5} + \sqrt{75} = 5\sqrt{5} + \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{5} + 5\sqrt{3}$$

$$g \sqrt{\frac{5}{9}x} - \sqrt{125x} = \sqrt{\frac{1}{9}} \cdot \sqrt{5x} - \sqrt{25} \cdot \sqrt{5x} = \frac{1}{3} \sqrt{5x} - 5\sqrt{5x} = -4\frac{2}{3} \sqrt{5x}$$

$$h \sqrt{\frac{3}{4}a} + \sqrt{\frac{3}{49}a} = \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{3a} + \sqrt{\frac{1}{49}} \cdot \sqrt{3a} = \frac{1}{2} \sqrt{3a} + \frac{1}{7} \sqrt{3a} = \frac{7}{14} \sqrt{3a} + \frac{2}{14} \sqrt{3a} = \frac{9}{14} \sqrt{3a}$$

$$9 \text{ a } 25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x = \sqrt{5}$$

$$5^2 \cdot (5^{-1})^x = 5^{\frac{1}{2}}$$

$$5^2 \cdot 5^{-x} = 5^{\frac{1}{2}}$$

$$5^{2-x} = 5^{\frac{1}{2}}$$

$$2-x = \frac{1}{2}$$

$$x = 1\frac{1}{2}$$

$$b 4 \cdot 3^{2x} = 24$$

$$3^{2x} = 6$$

$$2x = {}^3\log(6)$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(6)$$

$$c \frac{3}{3^{x+2}} = 18$$

$$3 \cdot 3^{-x-2} = 18$$

$$3^{-x-1} = 18$$

$$-x-1 = {}^3\log(18)$$

$$x = -1 - {}^3\log(18)$$

$$d 5 \cdot 4^{-x+1} - 35 = 0$$

$$5 \cdot 4^{-x+1} = 35$$

$$4^{-x+1} = 7$$

$$-x+1 = {}^4\log(7)$$

$$x = 1 - {}^4\log(7)$$

$$e 2 \cdot 3^{2x+\frac{1}{2}} = 18$$

$$3^{2x+\frac{1}{2}} = 9$$

$$3^{2x+\frac{1}{2}} = 3^2$$

$$2x + \frac{1}{2} = 2$$

$$2x = 1\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$f 7 \cdot 2^{0,5x-3} = 21$$

$$2^{0,5x-3} = 3$$

$$0,5x-3 = {}^2\log(3)$$

$$0,5x = 3 + {}^2\log(3)$$

$$x = 6 + 2 \cdot {}^2\log(3)$$

10 a $y = 2^{2\log(5)} = 5$

b $y = 2^{3 \cdot 2\log(5)} = (2^{2\log(5)})^3 = 5^3 = 125$

c $y = 2^{2+2\log(3)} = 2^2 \cdot 2^{2\log(3)} = 4 \cdot 3 = 12$

11 a Bij stap 1 is gebruik gemaakt van de regel: uit $x = {}^g\log(a)$ volgt $a = g^x$

b $1,5^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{9}$

c $5 - 2x = \frac{4}{9}$

$$2x = 4\frac{5}{9}$$

$$x = 2\frac{5}{18}$$

12 a ${}^2\log(3x) - 5 = 7$

$${}^2\log(3x) = 12$$

$$3x = 2^{12}$$

$$3x = 4096$$

$$x = 1365\frac{1}{3}$$

b $4 + {}^{0,2}\log(t) = 6$

$${}^{0,2}\log(t) = 2$$

$$t = 0,2^2$$

$$t = 0,04$$

c ${}^{0,5}\log(3 - t) = -2$

$$3 - t = 0,5^{-2}$$

$$3 - t = 4$$

$$t = -1$$

d ${}^3\log(3x^2) - 1 = 2$

$${}^3\log(3x^2) = 3$$

$$3x^2 = 3^3$$

$$3x^2 = 27$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \text{ of } x = -3$$

e ${}^2\log(5x - 2) + 3 = 11$

$${}^2\log(5x - 2) = 8$$

$$5x - 2 = 2^8 = 256$$

$$5x = 258$$

$$x = 51\frac{3}{5}$$

f ${}^3\log(x) + {}^3\log(5) = 2 \cdot {}^3\log(10)$

$${}^3\log(5x) = {}^3\log(10^2)$$

$$5x = 100$$

$$x = 20$$

g ${}^3\log(x) = 2 + {}^3\log(15)$

$${}^3\log(x) = {}^3\log(9) + {}^3\log(15)$$

$${}^3\log(x) = {}^3\log(9 \cdot 15)$$

$$x = 135$$

h ${}^4\log(2x + 1) + 2 \cdot {}^4\log(3) = 1\frac{1}{2} + {}^4\log(9x)$

$${}^4\log(2x + 1) + {}^4\log(3^2) = {}^4\log(4^{\frac{1}{2}}) + {}^4\log(9x)$$

$${}^4\log(2x + 1) + {}^4\log(9) = {}^4\log(8) + {}^4\log(9x)$$

$${}^4\log(9(2x + 1)) = {}^4\log(8 \cdot 9x)$$

$$18x + 9 = 72x$$

$$9 = 54x$$

$$x = \frac{1}{6}$$

7 Periodieke functies

3	<i>aantal graden</i>	0	45	60	120	135	180
	<i>aantal radialen exact</i>	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π

4	<i>aantal graden</i>	11	25	57	70	143	160	166
	<i>aantal radialen</i>	0,2	0,44	1	1,22	2,5	2,79	2,9

- 13** a $\sin\left(1\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
 b $\sin\left(-2\frac{1}{4}\pi\right) = \sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
 c $\sin\left(3\frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = -\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
 d $\sin\left(-1\frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$
 e $\sin\left(3\frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = -1$
 f $\sin(5\pi) = \sin(\pi) = 0$
 g $\sin\left(-4\frac{2}{3}\pi\right) = \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = -\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
 h $\sin\left(8\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$
 i $\sin\left(9\frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = -\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$
 j $\sin\left(-5\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

- 19** a $\cos\left(1\frac{1}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
 b $\cos\left(-4\frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$
 c $\cos\left(1\frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
 d $\cos\left(-1\frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0$
 e $\cos\left(6\frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
 f $\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
 g $\sin\left(7\frac{1}{4}\pi\right) = \sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
 h $\cos\left(-5\frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$
 i $\sin(5\pi) = \sin(\pi) = 0$
 j $\sin\left(-7\frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1$

- 22** a De evenwichtsstand is $y = -3$, de amplitude is 4 en het bereik is $[-7, 1]$.
 b De evenwichtsstand is $y = 5$, de amplitude is 3,5 en het bereik is $[1,5; 8,5]$.
 c De evenwichtsstand is $y = 5,5$, de amplitude is 0,5 en het bereik is $[5, 6]$.
 d De evenwichtsstand is $y = 7$, de amplitude is 20 en het bereik is $[-13, 27]$.
 e De evenwichtsstand is $y = 12$, de amplitude is 1 en het bereik is $[11, 13]$.
 f De evenwichtsstand is $y = 2,7$, de amplitude is 1 en het bereik is $[1,7; 3,7]$.

- 26** a De periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ c De periode is $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$
 b De periode is $\frac{2\pi}{6} = \frac{1}{3}\pi$ d De periode is $\frac{2\pi}{\frac{2}{5}} = 5\pi$

- 27 a** De grafiek is ontstaan uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een verschuiving $\frac{1}{2}\pi$ naar links. De toppen zijn $(0, 1)$, $(\pi, -1)$ en $(2\pi, 1)$.
- b** De grafiek is ontstaan uit de grafiek van $g(x) = \cos(x)$ door spiegelen in de x -as, gevolgd door een verschuiving van 3 naar links en 4 omhoog. De toppen zijn $(\pi - 3, 3)$ en $(2\pi - 3, 5)$.
- c** De grafiek is ontstaan uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door spiegelen in de x -as, gevolgd door een verschuiving $\frac{1}{3}\pi$ naar rechts en 2 omhoog. De toppen zijn $(\frac{5}{6}\pi, 1)$ en $(1\frac{5}{6}\pi, 3)$.
- d** De grafiek is ontstaan uit de grafiek van $g(x) = \cos(x)$ door met 3 ten opzichte van de x -as te vermenigvuldigen, gevolgd door een verschuiving $0,1\pi$ naar rechts. De toppen zijn $(0, 1\pi; 3)$ en $(1, 1\pi; -3)$.

30 Voor f geldt: amplitude 2, periode $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ en evenwichtsstand $y = 3$.

Voor g geldt: amplitude 4, periode $\frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3}$ en evenwichtsstand $y = 7$.

Voor h geldt: amplitude 2, periode $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ en evenwichtsstand $y = -3$.

Voor k geldt: amplitude 5, periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$ en evenwichtsstand $y = -3$.

33 linksboven A :

$$d = \frac{1+5}{2} = 3 \text{ en } a = 5 - 3 = 2.$$

De periode is 4π , dus $b = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$.

$$f(x) = 3 + 2 \cos\left(\frac{1}{2}(x - 2\pi)\right) \text{ of } f(x) = 3 + 2 \sin\left(\frac{1}{2}(x - \pi)\right).$$

rechtsboven B :

$$d = 0 \text{ en } a = 3.$$

De periode is 1, dus $b = 2\pi$.

De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $x = -\frac{1}{3}$, dus $c = -\frac{1}{3}$.

$$g(x) = 3 \sin\left(2\pi\left(x + \frac{1}{3}\right)\right).$$

linksonder C :

$$d = \frac{7 + -1}{2} = 3 \text{ en } a = 7 - 3 = 4.$$

Een halve periode is $5 - 1 = 4$, dus de periode is 8 en $b = \frac{2\pi}{8} = \frac{1}{4}\pi$.

De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $x = 3$, dus $c = 3$ of een top ligt bij $(5, 7)$ dus $c = 5$.

$$h(x) = 3 + 4 \sin\left(\frac{1}{4}\pi(x - 3)\right) \text{ of } h(x) = 3 + 4 \cos\left(\frac{1}{4}\pi(x - 5)\right).$$

rechtsonder D :

$$d = \frac{6 + 0}{2} = 3 \text{ en } a = 6 - 3 = 3.$$

De periode is $\frac{2\pi}{3}$, dus $b = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3$.

Een top ligt bij $(\frac{1}{3}\pi, 3)$ dus $c = \frac{1}{3}\pi$, of

de grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{1}{6}\pi$, dus $c = \frac{1}{6}\pi$.

$$k(x) = 3 + 3 \sin\left(3\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)\right) \text{ of } k(x) = 3 + 3 \cos\left(3\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)\right).$$

8 Logaritmische functies

- 4 a** $11^x = 7$
 $x = {}^{11}\log(7)$
- b** $\left(\frac{1}{6}\right)^x = 10$
 $x = {}^{\frac{1}{6}}\log(10)$
- c** $3^{x+1} = 5$
 $x + 1 = {}^3\log(5)$
 $x = -1 + {}^3\log(5)$
- d** $2^x = 3\sqrt{2}$
 $x = {}^2\log(3\sqrt{2})$
- 6 a** ${}^3\log(3\sqrt{3}) = 1\frac{1}{2}$, want $3^{1\frac{1}{2}} = 3^1 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{3}$
- b** ${}^5\log\left(\frac{1}{125}\right) = -3$, want $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$
- c** ${}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{16}\right) = 4$, want $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$
- d** ${}^{\frac{1}{5}}\log(25) = -2$, want $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{25}} = 25$
- 8 a** ${}^6\log(x) = 4$
 $x = 6^4 = 1296$
- b** ${}^3\log(9x) = 3$
 $9x = 3^3 = 27$
 $x = 3$
- c** ${}^2\log(x - 6) = 5$
 $x - 6 = 2^5 = 32$
 $x = 38$
- d** ${}^7\log(3x + 6) = 2$
 $3x + 6 = 7^2 = 49$
 $3x = 43$
 $x = 14\frac{1}{3}$
- e** ${}^4\log\left(18 - \frac{1}{3}x\right) = 1$
 $18 - \frac{1}{3}x = 4^1 = 4$
 $\frac{1}{3}x = 14$
 $x = 42$
- f** ${}^{\frac{1}{2}}\log(2x + 9) = -3$
 $2x + 9 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$
 $2x = -1$
 $x = -\frac{1}{2}$
- 15 a** ${}^6\log(231) \approx 3,04$
- b** ${}^{11}\log(17) \approx 1,18$
- c** ${}^{\frac{1}{7}}\log(23) \approx -1,61$
- d** ${}^3\log\left(\frac{1}{11}\right) \approx -2,18$
- 16 a** $7^x = 4$
 $x = {}^7\log(4)$
 $x \approx 0,71$
- b** $10^x = 25$
 $x = \log(25)$
 $x \approx 1,40$
- c** $3^{5x} = 18$
 $5x = {}^3\log(18)$
 $x = \frac{1}{5} \cdot {}^3\log(18)$
 $x \approx 0,53$
- d** $8^x = 9$
 $x = {}^8\log(9)$
 $x \approx 1,06$
- 18 a** ${}^9\log(27) = \frac{{}^3\log(27)}{{}^3\log(9)} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$
- b** ${}^{0,1}\log(100) = \frac{\log(100)}{\log(0,1)} = \frac{2}{-1} = -2$
- c** ${}^{\frac{1}{5}}\log(25) = \frac{{}^5\log(25)}{{}^5\log\left(\frac{1}{5}\right)} = \frac{2}{-1} = -2$ en ${}^8\log(32) = \frac{{}^2\log(32)}{{}^2\log(8)} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$

- 23 a** Voor het domein van $f(x) = 6 + {}^3\log(8 - 4x)$ geldt $8 - 4x > 0$ ofwel $-4x > -8$ dus $x < 2$. Het domein is $\langle -\infty, 2 \rangle$.
- b** Voor de (verticale) asymptoot geldt $8 - 4x = 0$ dus dat is de lijn $x = 2$.
- c** De functie $l(x) = {}^3\log(x)$ is stijgend, want het grondtal is groter dan 1. Als x toeneemt, neemt $8 - 4x$ af. Omdat $l(x) = {}^3\log(x)$ stijgend is, neemt ${}^3\log(8 - 4x)$ dan ook af. En dus neemt $6 + {}^3\log(8 - 4x)$ ook af, daarom is f dalend.
- 24 a** Het domein van m is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.
Het nulpunt van m is $x = 1$.
De verticale asymptoot is de lijn $x = 0$.
- b** Het domein van j volgt uit $x + 3 > 0$, dus het domein is $\langle -3, \rightarrow \rangle$
Uit ${}^4\log(x + 3) = 0$ volgt $x + 3 = 4^0 = 1$, dus het nulpunt is $x = -2$
Een verticale asymptoot volgt uit $x + 3 = 0$, dus dat is de lijn $x = -3$
- c** Het domein van k volgt uit $3x - 2 > 0$ ofwel $3x > 2$. Het domein is $\langle \frac{2}{3}, \rightarrow \rangle$
Uit ${}^7\log(3x - 2) = 0$ volgt $3x - 2 = 7^0 = 1$, dus $3x = 3$. Het nulpunt is $x = 1$
Een verticale asymptoot volgt uit $3x - 2 = 0$, dus dat is de lijn $x = \frac{2}{3}$
- 28 a** ${}^3\log(21) - {}^3\log(3) + {}^3\log(2) =$
 ${}^3\log\left(\frac{21}{3} \cdot 2\right) = {}^3\log(14)$
- b** ${}^4\log(30) - ({}^4\log(3) + {}^4\log(2)) =$
 ${}^4\log(30) - {}^4\log(3 \cdot 2) =$
 ${}^4\log(30) - {}^4\log(6) =$
 ${}^4\log\left(\frac{30}{6}\right) = {}^4\log(5)$
- c** $4 \cdot \frac{1}{3}\log(p) + \frac{1}{3}\log(p) - \frac{1}{3}\log(p^3) =$
 $\frac{1}{3}\log(p^4) + \frac{1}{3}\log(p) - \frac{1}{3}\log(p^3) =$
 $\frac{1}{3}\log\left(\frac{p^4 \cdot p}{p^3}\right) =$
 $\frac{1}{3}\log(p^2)$
- 32 a** ${}^5\log(N) = 2 - 3 \cdot {}^5\log(t)$
 ${}^5\log(N) = {}^5\log(25) - {}^5\log(t^3)$
 ${}^5\log(N) = {}^5\log\left(\frac{25}{t^3}\right)$
 $N = \frac{25}{t^3}$
 $N \cdot t^3 = 25$
- b** $2 \cdot \log(x) - 3 \cdot \log(y) = -1$
 $\log(x^2) - \log(y^3) = -1$
 $\log\left(\frac{x^2}{y^3}\right) = -1$
 $\frac{x^2}{y^3} = \frac{1}{10}$ of ook $y^3 = 10x^2$
- 35 a** $y = 4 \cdot 3^x$
 $4 \cdot 3^x = y$
 $3^x = \frac{y}{4}$
 $x = {}^3\log\left(\frac{y}{4}\right)$
- b** $2^x = 8^y$
 $2^x = (2^3)^y$
 $2^x = 2^{3y}$
 $x = 3y$

$$\begin{aligned} \text{c} \quad 2y - 5 &= \frac{1}{4} \cdot 6^x \\ \frac{1}{4} \cdot 6^x &= 2y - 5 \\ 6^x &= 8y - 20 \\ x &= {}^6\log(8y - 20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d} \quad 5y \cdot 7^x &= 10 \\ 7^x &= \frac{10}{5y} \\ 7^x &= \frac{2}{y} \\ x &= {}^7\log\left(\frac{2}{y}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 37 \text{ a} \quad s &= {}^3\log(r) \\ r &= 3^s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b} \quad s &= 4 + {}^2\log(6r) \\ 4 + {}^2\log(6r) &= s \\ {}^2\log(6r) &= s - 4 \\ 6r &= 2^{s-4} \\ r &= \frac{1}{6} \cdot 2^{s-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c} \quad s &= 3 \cdot {}^4\log(r - 2) \\ 3 \cdot {}^4\log(r - 2) &= s \\ {}^4\log(r - 2) &= \frac{1}{3}s \\ r - 2 &= 4^{\frac{1}{3}s} \\ r &= 2 + 4^{\frac{1}{3}s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 44 \text{ a} \quad {}^8\log(x) &= \frac{1}{3} \\ x &= 8^{\frac{1}{3}} \\ x &= \sqrt[3]{8} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b} \quad {}^2\log(4 - 2x) &= 7 \\ 4 - 2x &= 2^7 = 128 \\ -2x &= 124 \\ x &= -62 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c} \quad \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{3}x\right) &= -3 \\ \frac{1}{3}x &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8 \\ x &= 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e} \quad y &= 3 - 7 \cdot 10^x \\ 3 - 7 \cdot 10^x &= y \\ 7 \cdot 10^x &= 3 - y \\ 10^x &= \frac{3 - y}{7} \\ x &= \log\left(\frac{3 - y}{7}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f} \quad 4^{\frac{x}{y}} &= 11 \\ \frac{x}{y} &= {}^4\log(11) \\ x &= y \cdot {}^4\log(11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d} \quad 5 &= {}^3\log(s) - {}^3\log(r) \\ {}^3\log(r) &= {}^3\log(s) - 5 \\ {}^3\log(r) &= {}^3\log(s) - {}^3\log(3^5) \\ {}^3\log(r) &= {}^3\log(s) - {}^3\log(243) \\ {}^3\log(r) &= {}^3\log\left(\frac{1}{243}s\right) \\ r &= \frac{1}{243}s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e} \quad 7 &= {}^3\log(r \cdot s) \\ {}^3\log(r \cdot s) &= 7 \\ r \cdot s &= 3^7 = 2187 \\ r &= \frac{2187}{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f} \quad 12 &= 4s \cdot {}^5\log(r) \\ 4s \cdot {}^5\log(r) &= 12 \\ s \cdot {}^5\log(r) &= 3 \\ {}^5\log(r) &= \frac{3}{s} \\ r &= 5^{\frac{3}{s}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d} \quad 3^{7-2x} &= 5 \\ 7 - 2x &= {}^3\log(5) \\ -2x &= -7 + {}^3\log(5) \\ x &= 3\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e} \quad \log(3x + 2) + \log(5) &= 2 \\ \log(15x + 10) &= 2 \\ 15x + 10 &= 10^2 = 100 \\ 15x &= 90 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f} \quad {}^6\log(x - 9) &= 2 - {}^6\log(x) \\ {}^6\log(x - 9) + {}^6\log(x) &= 2 \\ {}^6\log(x(x - 9)) &= 2 \\ x(x - 9) &= 6^2 = 36 \\ x^2 - 9x - 36 &= 0 \\ (x - 12)(x + 3) &= 0 \\ x &= 12 \quad (x = -3 \text{ voldoet niet}) \end{aligned}$$

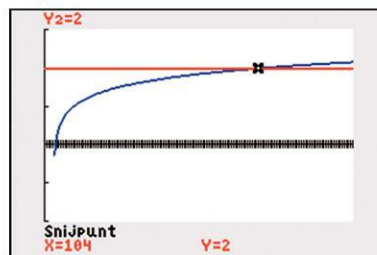
$$\begin{aligned} \text{g} \quad & {}^5\log\left(\frac{1}{2x}\right) = 3 \\ & \frac{1}{2x} = 5^3 = 125 \\ & 2x = \frac{1}{125} \\ & x = \frac{1}{250} \end{aligned}$$

$$\text{h} \quad 2^{x-6} = 3 \cdot 2^{-x+3}$$

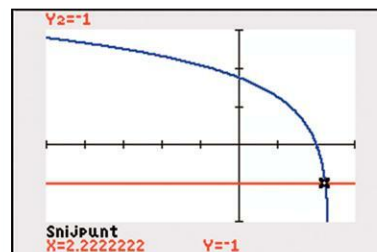
$$\begin{aligned} & \frac{2^{x-6}}{2^{-x+3}} = 3 \\ & 2^{2x-9} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - 9 &= {}^2\log(3) \\ 2x &= 9 + {}^2\log(3) \\ x &= 4\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^2\log(3) \end{aligned}$$

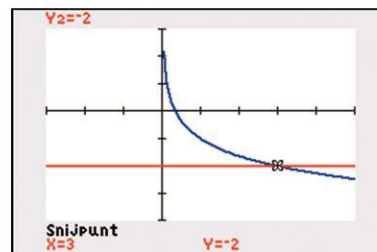
- 47 a** $\log(x-4) = 2$
 $x-4 = 10^2$
 $x-4 = 100$
 $x = 104$
 Zie de plot hiernaast.
 Het domein is $\langle 4, \rightarrow \rangle$.
 De oplossing is $4 < x < 104$.



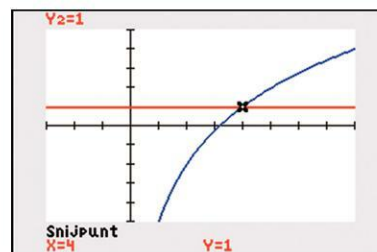
- b** ${}^3\log(7-3x) = -1$
 $7-3x = 3^{-1}$
 $7-3x = \frac{1}{3}$
 $3x = 6\frac{2}{3}$
 $x = 2\frac{2}{9}$
 Zie de plot hiernaast.
 Het domein is $\langle \leftarrow, 2\frac{1}{3} \rangle$.



- De oplossing is $x < 2\frac{2}{9}$.
- c** $\frac{1}{3}\log(12x) - \frac{1}{3}\log(4) = -2$
 $\frac{1}{3}\log\left(\frac{12x}{4}\right) = -2$
 $\frac{1}{3}\log(3x) = -2$
 $3x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$
 $3x = 9$
 $x = 3$
 Zie de plot hiernaast.
 Het domein is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.
 De oplossing is $0 < x < 3$.



- d** $-5 - 3 \cdot \frac{1}{2}\log(x) = 1$
 $3 \cdot \frac{1}{2}\log(x) = -6$
 $\frac{1}{2}\log(x) = -2$
 $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$
 Zi de plot hiernaast.
 Het domein is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.
 De oplossing is $x > 4$.



- 49 a** $1,7^t = 2$ geeft $t = {}^{1,7}\log(2) = 1,306 \dots$
 De verdubbelingstijd is ongeveer 1,31.
- b** $0,2^t = 0,5$ geeft $t = {}^{0,2}\log(0,5) = 0,430 \dots$
 De halveringstijd is ongeveer 0,43.

- c $0,9^t = 0,5$ geeft $t = {}^{0,9}\log(0,5) = 6,578 \dots$
De halveringstijd is ongeveer 6,58.

9 Afstanden en hoeken

- 2 a De driehoeken zijn gelijkvormig omdat $\angle A = \angle E$ en $\angle B = \angle D$ (Z-hoeken).

$\triangle ABC$	$AC = 6$	$BC = 4$	$AB = \dots$
$\triangle EDC$	$EC = 15$	$DC = \dots$	$ED = 8$

De vergrotingsfactor van $\triangle ABC$ naar $\triangle EDC$ is $\frac{15}{6} = 2\frac{1}{2}$ dus $AB = \frac{8}{2\frac{1}{2}} = 3,2$

- c $CD = 4 \cdot 2\frac{1}{2} = 10$

- 6 Omdat $\angle A = \angle E$ en $\angle B = \angle D$ (Z-hoeken) geldt $\triangle ABC \sim \triangle EDC$
 $AB : ED = 12 : 6 = 2 : 1$ dus ook $AC : CE = 2 : 1$ en $BC : CD = 2 : 1$
 Daaruit volgt $AC = \frac{2}{3} \cdot 33 = 22$ en $EC = \frac{1}{3} \cdot 33 = 11$
 Verder is $BC = \frac{2}{3} \cdot 24 = 16$ en $DC = \frac{1}{3} \cdot 24 = 8$

- 10 a $\gamma = 180^\circ - 59^\circ - 83^\circ = 38^\circ$

$$\frac{b}{\sin(83^\circ)} = \frac{7}{\sin(59^\circ)} \text{ dus } b = \frac{7 \cdot \sin(83^\circ)}{\sin(59^\circ)} \approx 8,1$$

$$\frac{c}{\sin(38^\circ)} = \frac{7}{\sin(59^\circ)} \text{ dus } c = \frac{7 \cdot \sin(38^\circ)}{\sin(59^\circ)} \approx 5,0$$

b $\frac{8,4}{\sin(\beta)} = \frac{12,3}{\sin(116^\circ)}$

$$\sin(\beta) = \frac{8,4 \cdot \sin(116^\circ)}{12,3} = 0,613 \dots \text{ dus } \beta = 37,865 \dots^\circ \approx 38^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - 116^\circ - 37,865 \dots^\circ = 26,134 \dots^\circ \approx 26^\circ$$

$$\frac{c}{\sin(26,134 \dots^\circ)} = \frac{12,3}{\sin(116^\circ)} \text{ dus } c = \frac{12,3 \cdot \sin(26,134 \dots^\circ)}{\sin(116^\circ)} \approx 6,0$$

- c $\beta = 180^\circ - 77^\circ - 58^\circ = 45^\circ$

$$\frac{a}{\sin(77^\circ)} = \frac{22}{\sin(45^\circ)} \text{ dus } a = \frac{22 \cdot \sin(77^\circ)}{\sin(45^\circ)} \approx 30,3$$

$$\frac{c}{\sin(58^\circ)} = \frac{22}{\sin(45^\circ)} \text{ dus } c = \frac{22 \cdot \sin(58^\circ)}{\sin(45^\circ)} \approx 26,4$$

d $\frac{7}{\sin(\gamma)} = \frac{10}{\sin(38^\circ)}$

$$\sin(\gamma) = \frac{7 \cdot \sin(38^\circ)}{10} = 0,430 \dots \text{ dus } \gamma = 25,528 \dots^\circ \approx 26^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 38^\circ - 25,528 \dots^\circ = 116,471 \dots^\circ \approx 116^\circ$$

$$\frac{BC}{\sin(116,471 \dots^\circ)} = \frac{10}{\sin(38^\circ)} \text{ dus } BC = \frac{10 \cdot \sin(116,471 \dots^\circ)}{\sin(38^\circ)} \approx 14,5$$

13 a $\frac{19}{\sin(\angle B)} = \frac{15}{\sin(47^\circ)}$

$$\sin(\angle B) = \frac{19 \cdot \sin(47^\circ)}{15} = 0,926 \dots$$

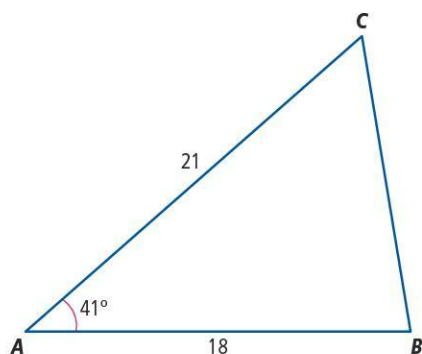
- b $\angle B = 67,877 \dots^\circ \approx 68^\circ$ of $\angle B = 180^\circ - 67,877 \dots^\circ = 112,122 \dots^\circ \approx 112^\circ$

Als $\angle B \approx 68^\circ$ dan is $\angle C \approx 180^\circ - 47^\circ - 67,877 \dots^\circ = 65,122 \dots^\circ \approx 65^\circ$

Als $\angle B \approx 112^\circ$ dan is $\angle C \approx 180^\circ - 47^\circ - 112,122 \dots^\circ = 20,877 \dots^\circ \approx 21^\circ$

$$\begin{aligned} \text{c } \angle B \approx 68^\circ \text{ dan : } \frac{AB}{\sin(65,122\dots^\circ)} &= \frac{15}{\sin(47^\circ)} \text{ dus } AB = \frac{15 \cdot \sin(65,122\dots^\circ)}{\sin(47^\circ)} \approx 18,6 \\ \angle B \approx 112^\circ \text{ dan : } \frac{AB}{\sin(20,877\dots^\circ)} &= \frac{15}{\sin(47^\circ)} \text{ dus } AB = \frac{15 \cdot \sin(20,877\dots^\circ)}{\sin(47^\circ)} \approx 7,3 \end{aligned}$$

18 a



$$\begin{aligned} BC^2 &= 21^2 + 18^2 - 2 \cdot 21 \cdot 18 \cdot \cos(41^\circ) = 194,439\dots \\ BC &= \sqrt{194,439\dots} \approx 13,9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } QR^2 &= 26^2 + 19^2 - 2 \cdot 26 \cdot 19 \cdot \cos(81^\circ) = 882,442\dots \\ QR &= \sqrt{882,442\dots} \approx 29,7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } 24^2 &= 41^2 + 31^2 - 2 \cdot 41 \cdot 31 \cdot \cos(\angle L) \\ 2542 \cdot \cos(\angle L) &= 2066 \end{aligned}$$

$$\cos(\angle L) = \frac{2066}{2542} \text{ dus } \angle L \approx 36^\circ$$

$$\begin{aligned} 41^2 &= 24^2 + 31^2 - 2 \cdot 24 \cdot 31 \cdot \cos(\angle M) \\ 1488 \cdot \cos(\angle M) &= -144 \end{aligned}$$

$$\cos(\angle M) = -\frac{144}{1488} \text{ dus } \angle M \approx 96^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{d } 65^2 &= 33^2 + 56^2 - 2 \cdot 33 \cdot 56 \cdot \cos(\angle T) \\ 3696 \cdot \cos(\angle T) &= 0 \text{ dus } \angle T = 90^\circ \end{aligned}$$

$$\tan(\angle U) = \frac{56}{33} \text{ dus } \angle U \approx 59^\circ$$

$$\angle V \approx 180^\circ - 90^\circ - 59^\circ = 31^\circ$$

$$\text{22 a } BD = \sqrt{7^2 + 9^2} = \sqrt{130}$$

$$BG = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{74}$$

$$DG = \sqrt{9^2 + 5^2} = \sqrt{106}$$

$$\text{b } \sqrt{130}^2 = \sqrt{74}^2 + \sqrt{106}^2 - 2 \cdot \sqrt{74} \cdot \sqrt{106} \cdot \cos(\angle G)$$

$$2 \cdot \sqrt{74} \cdot \sqrt{106} \cdot \cos(\angle G) = 50$$

$$\cos(\angle G) = \frac{50}{2 \cdot \sqrt{74} \cdot \sqrt{106}} \text{ dus } \angle G = 73,604\dots^\circ \approx 74^\circ$$

$$\sqrt{74}^2 = \sqrt{130}^2 + \sqrt{106}^2 - 2 \cdot \sqrt{130} \cdot \sqrt{106} \cdot \cos(\angle D)$$

$$2 \cdot \sqrt{130} \cdot \sqrt{106} \cdot \cos(\angle D) = 162$$

$$\cos(\angle D) = \frac{162}{2 \cdot \sqrt{130} \cdot \sqrt{106}} \text{ dus } \angle D = 46,368\dots^\circ \approx 46^\circ$$

$$\angle B = 180^\circ - 73,604\dots^\circ - 46,368\dots^\circ \approx 60^\circ$$

25 a De richtingscoëfficiënt van AC is $\frac{2-5}{9-0} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$

De richtingscoëfficiënt van de loodlijn is 3 en een vergelijking is $y = 3x + b$.

De coördinaten van $B(4, -3)$ invullen geeft $-3 = 3 \cdot 4 + b$ dus $b = -15$.

Een vergelijking van de loodlijn is $y = 3x - 15$.

b Een vergelijking AC is $y = -\frac{1}{3}x + 5$.

De loodlijn uit B snijden met AC geeft

$$3x - 15 = -\frac{1}{3}x + 5$$

$$3\frac{1}{3}x = 20$$

$$x = 6$$

$$y = 3 \cdot 6 - 15 = 3 \text{ dus het snijpunt is } S(6, 3)$$

$$d(B, AC) = BS = \sqrt{(6-4)^2 + (3-(-3))^2} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40}$$

c $AC = \sqrt{(9-0)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{9^2 + (-3)^2} = \sqrt{90}$

De oppervlakte van $\triangle ABC$ is $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{90} \cdot \sqrt{40} = 30$

29 a $y_P = 1\frac{1}{2}a + 3$

b De oppervlakte van $\triangle PQR$ is $\frac{1}{2} \cdot QR \cdot y_P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (1\frac{1}{2}a + 3) = 6a + 12$

$$6a + 12 = 36$$

$$6a = 24$$

$$a = 4$$

33 a $AB^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, $BC^2 = 6^2 + 8^2 = 100$, $AC^2 = 10^2 + 5^2 = 125$

$$AB^2 + BC^2 = 25 + 100 = 125 = AC^2 \text{ dus is } \triangle ABC \text{ rechthoekig.}$$

b $\tan(\angle A) = \frac{BC}{AB} = \frac{10}{5} = 2$ dus $\angle A \approx 63^\circ$ en $\angle C \approx 180^\circ - 90^\circ - 63^\circ = 27^\circ$

c De richtingscoëfficiënt van AC is $\frac{8-3}{10-0} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, de richtingscoëfficiënt van

$$AB \text{ is } \frac{0-3}{4-0} = -\frac{3}{4} \text{ en die van } BC \text{ is } \frac{8-0}{10-4} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

d De hoek die AC maakt met een horizontale lijn is $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26,565\dots^\circ$

$$\text{De hoek die } AB \text{ maakt met een horizontale lijn is } \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 38,869\dots^\circ$$

$$\angle A = 26,565\dots^\circ + 38,869\dots^\circ \approx 63^\circ$$

$$\text{De richtingscoëfficiënten van } AB \text{ en } BC \text{ zijn } -\frac{3}{4} \text{ en } \frac{4}{3} \text{ dus } \angle B = 90^\circ.$$

$$\angle C \approx 180^\circ - 90^\circ - 63^\circ = 27^\circ$$

10 Functies bewerken

3 a $g(x) = f(x+2) + 5$

$$g(x) = \frac{4}{x+2} + 5$$

b $g(x) = f(x-1) - 3$

$$g(x) = -(x-1)^2 + 5(x-1) + 1 - 3$$

$$g(x) = -(x-1)^2 + 5x - 7$$

c $g(x) = f(x-8) + 2$

$$g(x) = 6 - 2 \cdot {}^3\log(x-8+1) + 2$$

$$g(x) = 8 - 2 \cdot {}^3\log(x-7)$$

11 a $g(x) = -3 \cdot (f(x) + 1)$

$$g(x) = -3(-3 + 5 \cdot (\frac{3}{4})^x + 1)$$

$$g(x) = -3(-2 + 5 \cdot (\frac{3}{4})^x)$$

$$g(x) = 6 - 15 \cdot (\frac{3}{4})^x$$

b $h(x) = -3f(x) + 1$

$$h(x) = -3(-3 + 5 \cdot (\frac{3}{4})^x) + 1$$

$$h(x) = 9 - 15 \cdot (\frac{3}{4})^x + 1$$

$$h(x) = 10 - 15 \cdot (\frac{3}{4})^x$$

14 a $k(x) = f(\frac{1}{3}x) = {}^2\log(\frac{1}{3}x)$

b $l(x) = g(-\frac{1}{2}x) = 3 \cdot 2^{-\frac{1}{2}x} - 1$

c $m(x) = h(-x) = \frac{-2x + 4}{-x - 6}$

15 a Door een vermenigvuldiging met $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de y -as.

b Door een vermenigvuldiging met 10 ten opzichte van de y -as en met 6 ten opzichte van de x -as.

c Door een vermenigvuldiging met $\frac{1}{5}$ ten opzichte van de y -as en met 3 ten opzichte van de x -as.

20 a $f(0) = \frac{6 \cdot 0 - 3}{4 \cdot 0 + 5} = \frac{-3}{5}$, het snijpunt met de y -as is $(0, -\frac{3}{5})$.

$$6x - 3 = 0 \text{ geeft } x = \frac{1}{2}, \text{ het snijpunt met de } x\text{-as is } (\frac{1}{2}, 0).$$

$$4x + 5 = 0$$

$$4x = -5$$

$$x = -\frac{5}{4}, \text{ de verticale asymptoot is de lijn } x = -\frac{5}{4}$$

Met een tabel zie je dat voor grote waarden van x de functiewaarden naderen tot $1\frac{1}{2}$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 1\frac{1}{2}$

b $g(0) = \frac{45}{0,2 \cdot 0 - 3} = \frac{45}{-3} = -15$, het snijpunt met de y -as is $(0, -15)$.

Er is geen snijpunt met de x -as.

$$0,2x - 3 = 0$$

$$0,2x = 3$$

$$x = 15, \text{ de verticale asymptoot is de lijn } x = 15$$

Met een tabel zie je dat voor grote waarden van x de functiewaarden naderen tot 0. De horizontale asymptoot is de lijn $y = 0$.

c $h(0) = \frac{5 - 12 \cdot 0}{4 \cdot 0 - 1} = \frac{5}{-1} = -5$, het snijpunt met de y -as is $(0, -5)$.

$$5 - 12x = 0 \text{ geeft } x = \frac{5}{12}, \text{ het snijpunt met de } x\text{-as is } (\frac{5}{12}, 0).$$

$$4x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{4}, \text{ de verticale asymptoot is de lijn } x = \frac{1}{4}$$

Met een tabel zie je dat voor grote waarden van x de functiewaarden naderen tot -3 . De horizontale asymptoot is de lijn $y = -3$.

d $k(0) = 2 + \frac{\frac{1}{2} \cdot 0}{2 - \frac{1}{3} \cdot 0} = 2 + 0 = 2$, het snijpunt met de y -as is $(0, 2)$.

$$2 + \frac{\frac{1}{2}x}{2 - \frac{1}{3}x} = 0 \text{ geeft } \frac{1}{2}x = -4 + \frac{2}{3}x \text{ dus } x = 24, \text{ het snijpunt met de } x\text{-as is } (24, 0).$$

$$2 - \frac{1}{3}x = 0$$

$$\frac{1}{3}x = 2$$

$x = 6$, de verticale asymptoot is de lijn $x = 6$

Met een tabel zie je dat voor grote waarden van x de functiewaarden naderen tot $\frac{1}{2}$. De horizontale asymptoot is de lijn $y = \frac{1}{2}$

21 a Voor grote waarden van x nadert $0,29^x$ tot 0 en daarmee nadert ook $\frac{1}{2} \cdot 0,29^x$ tot 0 en dus $-18 + \frac{1}{2} \cdot 0,29^x$ tot -18 . De horizontale asymptoot is daarom $y = -18$.

b f is een dalende functie, omdat de groeifactor $(0, 29)$ kleiner is dan 1.

26 a $B - 3 = \frac{4}{2A + 1}$

$$(B - 3)(2A + 1) = 4$$

$$2A + 1 = \frac{4}{B - 3}$$

$$2A = \frac{4}{B - 3} - 1$$

$$A = \frac{2}{B - 3} - \frac{1}{2}$$

b ${}^7\log(2B + 4) = A^3 - 2$

$$A^3 - 2 = {}^7\log(2B + 4)$$

$$A^3 = {}^7\log(2B + 4) + 2$$

$$A = \sqrt[3]{{}^7\log(2B + 4) + 2}$$

27 a $2^{2\sqrt{t}-y} = 3$

$$2\sqrt{t} - y = {}^2\log(3)$$

$$-y = -2\sqrt{t} + {}^2\log(3)$$

$$y = 2\sqrt{t} - {}^2\log(3)$$

b $y = -(2 - t)^2 + 4(2 - t) - 6$

$$y = -(2 - t)^2 + 8 - 4t - 6$$

$$y = -(4 - 4t + t^2) + 2 - 4t$$

$$y = -4 + 4t - t^2 + 2 - 4t$$

$$y = -2 - t^2$$

29 a $q = 2(p - 3)^3 + 6$

$$2(p - 3)^3 = q - 6$$

$$(p - 3)^3 = \frac{1}{2}q - 3$$

$$p - 3 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - 3}$$

$$p = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - 3} + 3$$

b $q = 2 - \log(p + 10)$

$$\log(p + 10) = 2 - q$$

$$p + 10 = 10^{2-q}$$

$$p = 10^{2-q} - 10$$

$$p = \frac{10^2}{10^q} - 10$$

$$p = \frac{100}{10^q} - 10$$

36 a $f_a'(-3) = 1$

$$\frac{1}{3} \cdot a \cdot (-3)^3 - 2 \cdot (-3)^2 - a = 1$$

$$-9a - 18 - a = 1$$

$$-10a = 19$$

$$a = -1,9$$

b $f_a'(x) = ax^2 - 4x$

$$f_a'(-1) = -14$$

$$a \cdot (-1)^2 - 4 \cdot -1 = -14$$

$$a + 4 = -14$$

$$a = -18$$

42 a $k(x) = g(f(x))$ met $f(x) = x^2 + 2x + 7$ en $g(x) = 5\sqrt{x}$

b $k(x) = g(f(x))$ met $f(x) = 4x^2 - 6$ en $g(x) = x^3$

c $k(x) = g(f(x))$ met $f(x) = 4x + \frac{1}{6}\pi$ en $g(x) = \sin(x)$

d $k(x) = g(f(x))$ met $f(x) = 6\sqrt{x}$ en $g(x) = \frac{7}{x}$

44 De schakels zijn $p(x) = 10 - 2x$ en $q(x) = \sqrt{x}$.

p is een dalende functie, q is stijgend.

Als x toeneemt (tot maximaal 5), neemt $p(x)$ af en daarmee ook $q(p(x))$.

Dus f is een dalende functie.

11 Differentiëren

3 a $p(x) = -\frac{1}{2}x^{3,6} - 2x$

$$p'(x) = -1,8x^{2,6} - 2$$

c $k(x) = \frac{2x-5}{x^3}$

$$k(x) = \frac{2x}{x^3} - \frac{5}{x^3}$$

$$k(x) = 2x^{-2} - 5x^{-3}$$

$$k'(x) = -4x^{-3} + 15x^{-4}$$

$$k'(x) = -\frac{4}{x^3} + \frac{15}{x^4}$$

b $f(x) = \frac{5}{x^2} + \frac{1}{2x^5}$

$$f(x) = 5x^{-2} + \frac{1}{2}x^{-5}$$

$$f'(x) = -10x^{-3} - \frac{5}{2}x^{-6}$$

$$f'(x) = -\frac{10}{x^3} - \frac{5}{2x^6}$$

d $q(x) = \frac{3}{x^4}(x^2 + 7x^3)$

$$q(x) = 3x^{-4}(x^2 + 7x^3)$$

$$q(x) = 3x^{-2} + 21x^{-1}$$

$$q'(x) = -6x^{-3} - 21x^{-2}$$

$$q'(x) = -\frac{6}{x^3} - \frac{21}{x^2}$$

6 a $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x}} \cdot 3$$

$$f'(x) = \frac{3}{4\sqrt{3x}}$$

b $g(x) = \frac{3}{2\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{4\sqrt{x}}$

$$g(x) = \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$g'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{8}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$g'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{8x\sqrt{x}}$$

c $h(x) = 2x^2(\sqrt{x} - 4)$

$$h(x) = 2x^{2\frac{1}{2}} - 8x^2$$

$$h'(x) = 5x^{1\frac{1}{2}} - 16x$$

$$h'(x) = 5x\sqrt{x} - 16x$$

d $k(x) = 5x\sqrt{x} - \frac{7}{x^3}$

$$k(x) = 5x^{1\frac{1}{2}} - 7x^{-3}$$

$$k'(x) = 7\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + 21x^{-4}$$

$$k'(x) = 7\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{21}{x^4}$$

11 a $f(x) = (3 + 7x)^5$

$$f'(x) = 5 \cdot (3 + 7x)^4 \cdot 7$$

$$f'(x) = 35(3 + 7x)^4$$

b $w(a) = \left(6 - \frac{5}{9}a\right)^2$

$$w'(a) = 2 \cdot \left(6 - \frac{5}{9}a\right) \cdot -\frac{5}{9}$$

$$w'(a) = -1\frac{1}{9}\left(6 - \frac{5}{9}a\right)$$

c $p(q) = (3 + 8q)^{1,3}$

$$p'(q) = 1,3 \cdot (3 + 8q)^{0,3} \cdot 8$$

$$p'(q) = 10,4(3 + 8q)^{0,3}$$

14 a $j(x) = -\sqrt{3 - 2x} + 5$

$$j'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{3 - 2x}} \cdot -2$$

$$j'(x) = \frac{1}{\sqrt{3 - 2x}}$$

b $p(x) = \left(\frac{1}{3}x + 8\right)^3$

$$p'(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}x + 8\right)^2 \cdot \frac{1}{3}$$

$$p'(x) = \left(\frac{1}{3}x + 8\right)^2$$

e $l(x) = \frac{3x^2 - 5x\sqrt{x} - 2}{x\sqrt{x}}$

$$l(x) = \frac{3x^2}{x^{1\frac{1}{2}}} - \frac{5x^{1\frac{1}{2}}}{x^{1\frac{1}{2}}} - \frac{2}{x^{1\frac{1}{2}}}$$

$$l(x) = 3x^{\frac{1}{2}} - 5 - 2x^{-1\frac{1}{2}}$$

$$l'(x) = \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{-2\frac{1}{2}}$$

$$l'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2\sqrt{x}}$$

f $m(x) = (x\sqrt{x} - 3x)^2$

$$m(x) = (x^{1\frac{1}{2}} - 3x)^2$$

$$m(x) = x^3 - 6x^{2\frac{1}{2}} + 9x^2$$

$$m'(x) = 3x^2 - 15x^{1\frac{1}{2}} + 18x$$

$$m'(x) = 3x^2 - 15x\sqrt{x} + 18x$$

d $f(x) = \sqrt{\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}}} \cdot \frac{2}{3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt{\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}}}$$

e $k(x) = (-11 - x)^7$

$$k'(x) = 7 \cdot (-11 - x)^6 \cdot -1$$

$$k'(x) = -7(-11 - x)^6$$

f $h(q) = (q + 2)\sqrt{q + 2}$

$$h(q) = (q + 2)^{1\frac{1}{2}}$$

$$h'(q) = 1\frac{1}{2}(q + 2)^{\frac{1}{2}}$$

$$h'(q) = 1\frac{1}{2}\sqrt{q + 2}$$

c $g(x) = \frac{3}{\sqrt{5x + 1}} - 6x$

$$g(x) = 3(5x + 1)^{-\frac{1}{2}} - 6x$$

$$g'(x) = -\frac{3}{2} \cdot (5x + 1)^{-1\frac{1}{2}} \cdot 5 - 6$$

$$g'(x) = \frac{-15}{2(5x + 1)\sqrt{5x + 1}} - 6$$

d $f(x) = 7 - \frac{2}{\left(x + \frac{1}{6}\right)^2}$

$$f(x) = 7 - 2\left(x + \frac{1}{6}\right)^{-2}$$

$$f'(x) = 4 \cdot \left(x + \frac{1}{6}\right)^{-3} \cdot 1$$

$$f'(x) = \frac{4}{\left(x + \frac{1}{6}\right)^3}$$

$$\text{e } q(x) = 0,6\left(\frac{1}{2}x + 3\right)^{2,1}$$

$$q'(x) = 1,26 \cdot \left(\frac{1}{2}x + 3\right)^{1,1} \cdot \frac{1}{2}$$

$$q'(x) = 0,63\left(\frac{1}{2}x + 3\right)^{1,1}$$

$$\text{f } h(x) = \frac{1}{3\sqrt{4x-5}}$$

$$h(x) = \frac{1}{3}(4x-5)^{-\frac{1}{2}}$$

$$h'(x) = -\frac{1}{6} \cdot (4x-5)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4$$

$$h'(x) = \frac{-2}{3(4x-5)\sqrt{4x-5}}$$

$$\text{20 a } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 4$$

$$f'(x) = x - 6$$

$$f'(x) = -5 \text{ geeft } x - 6 = -5 \text{ dus } x = 1 \text{ en } y = f(1) = -1\frac{1}{2}$$

$$x = 1 \text{ en } y = -1\frac{1}{2} \text{ invullen bij } y = -5x + p \text{ geeft } -1\frac{1}{2} = -5 \cdot 1 + p \text{ dus } p = 3\frac{1}{2}$$

$$\text{b } f'(x) = 7 \text{ geeft } x - 6 = 7 \text{ dus } x = 13 \text{ en } y = f(13) = 10\frac{1}{2}$$

$$x = 13 \text{ en } y = 10\frac{1}{2} \text{ invullen bij } y = 7x + p \text{ geeft } 10\frac{1}{2} = 7 \cdot 13 + p \text{ dus } p = -80\frac{1}{2}$$

$$\text{29 a } g(x) = 4 - (2 - 3x)^2$$

$$g'(x) = -2(2 - 3x) \cdot -3$$

$$g'(x) = 6(2 - 3x)$$

$$g'(x) = 12 - 18x$$

$$12 - 18x = 0 \text{ geeft } -18x = -12 \text{ dus } x = \frac{2}{3}$$

De grafiek van g is een bergparabool, dus g heeft een maximum bij $x = \frac{2}{3}$

Het maximum is $g\left(\frac{2}{3}\right) = 4$.

$$\text{b } k(a) = \frac{1}{3}a^3 - 2a^2 - 12a$$

$$k'(a) = a^2 - 4a - 12$$

$$a^2 - 4a - 12 = 0$$

$$(a - 6)(a + 2) = 0$$

$$a = 6 \text{ of } a = -2$$

In de plot zie je dat k een maximum heeft

bij $a = -2$ en een minimum bij $a = 6$.

Het maximum is $k(-2) = 13\frac{1}{3}$ en het

minimum is $k(6) = -72$.

$$\text{c } A(r) = \left(\frac{1}{4}r + 2\right)^3 - 2$$

$$A'(r) = 3 \cdot \left(\frac{1}{4}r + 2\right)^2 \cdot \frac{1}{4}$$

$$A'(r) = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}r + 2\right)^2$$

$$\frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}r + 2\right)^2 = 0$$

$$\frac{1}{4}r + 2 = 0$$

$$r = -8$$

In de plot zie je dat A geen extreme waarde heeft bij $r = -8$.

$$\text{d } v(p) = 4p^2 + 3p - 1$$

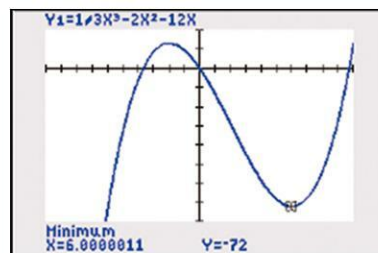
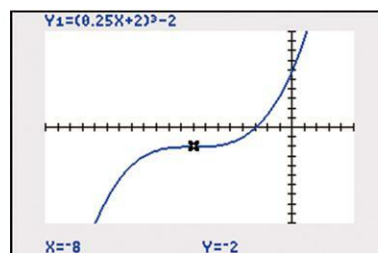
$$v'(p) = 8p + 3$$

$$8p + 3 = 0$$

$$p = -\frac{3}{8}$$

De grafiek van v is een dalparabool, dus v heeft een minimum bij $p = -\frac{3}{8}$

Het minimum is $v\left(-\frac{3}{8}\right) = -1\frac{9}{16}$



30 a Bij de functie f , g , h , n en p kun je de extreme waarden met behulp van de afgeleide berekenen.

b $f(x) = 3 - 2x$ is een lineaire functie en heeft dus geen extreme waarden.

$$g(x) = (2x - 3)^6$$

$$g'(x) = 6 \cdot (2x - 3)^5 \cdot 2$$

$$g'(x) = 12(2x - 3)^5$$

$$12(2x - 3)^5 = 0$$

$$2x - 3 = 0$$

$$x = 1\frac{1}{2}$$

In de plot zie je dat g bij $x = 1\frac{1}{2}$ een minimum heeft.

Het minimum is $g(1\frac{1}{2}) = 0$.

$$h(x) = \sqrt{6 - 3x}$$

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{6 - 3x}} \cdot -3$$

$h'(x) = 0$ heeft geen oplossingen. h heeft geen extreme waarden.

$$n(x) = x^6 - 3x^4$$

$$n'(x) = 6x^5 - 12x^3$$

$$6x^5 - 12x^3 = 0$$

$$6x^3(x^2 - 2) = 0$$

$$6x^3 = 0 \text{ of } x^2 = 2$$

$$x = 0 \text{ of } x = -\sqrt{2} \text{ of } x = \sqrt{2}$$

In de plot zie je dat n een maximum heeft

bij $x = 0$ en minima bij $x = -\sqrt{2}$ en $x = \sqrt{2}$.

Het maximum is $n(0) = 0$ en de minima zijn $n(-\sqrt{2}) = n(\sqrt{2}) = -4$

$$p(x) = \frac{3}{(4 - 0,5x)^2}$$

$$p(x) = 3(4 - 0,5x)^{-2}$$

$$p'(x) = -6 \cdot (4 - 0,5x)^{-3} \cdot -0,5$$

$$p'(x) = \frac{3}{(4 - 0,5x)^3}$$

$p'(x) = 0$ heeft geen oplossingen, dus p heeft geen extreme waarden.

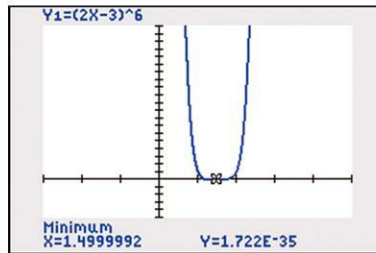
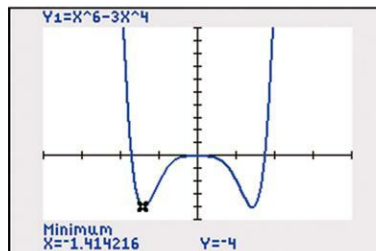
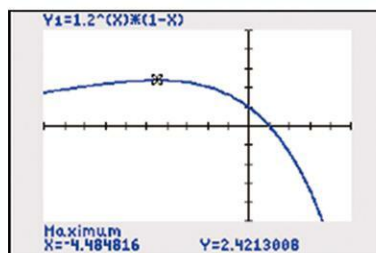
c invoer: $y_1 = 1,2^x \cdot (1 - x)$

venster: $-10 \leq x \leq 5$, $-5 \leq y \leq 5$

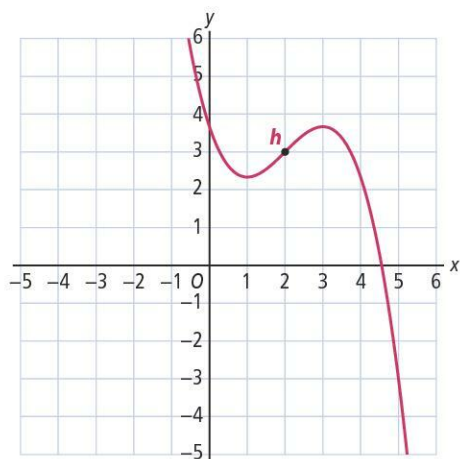
optie: maximum

$$x = -4,484812 \text{ en } y = 2,4213008$$

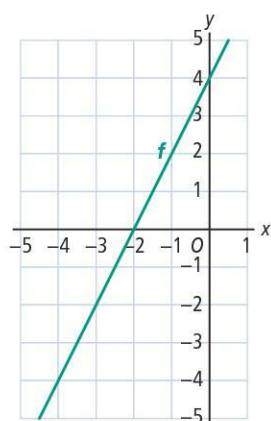
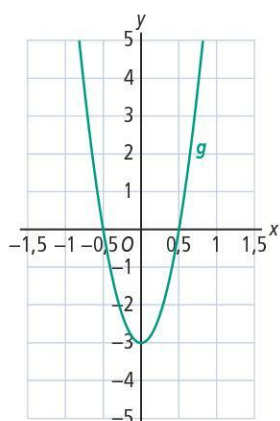
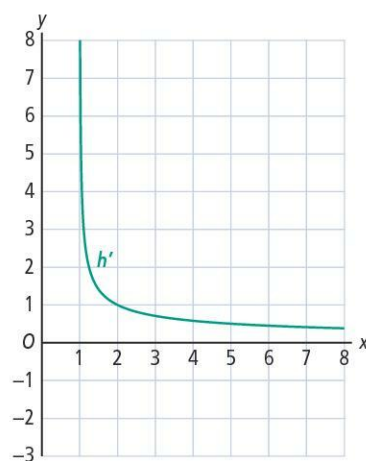
Het maximum is ongeveer $q(-4, 48) = 2,42$



- 33 a** h heeft een maximum bij $x = 3$, want daar gaat $h'(x)$ van positief naar negatief.
 h heeft een minimum bij $x = 1$, want daar gaat $h'(x)$ van negatief naar positief.
- b** h is afnemend dalend op het interval $\langle \leftarrow, 1 \rangle$ want daar is $h'(x)$ negatief, maar steeds minder negatief.
- c** Een mogelijke grafiek :



35



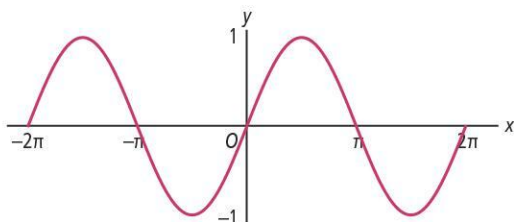
7 Periodieke functies

- 1 Gebruik dat $180^\circ = \pi$ radialen.

α in graden	60	135	30°	315°	350	49,27
α in radialen	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	$1\frac{3}{4}\pi$	6,11	0,86

- 2 De coördinaten van P zijn $(\cos(\frac{1}{3}\pi), \sin(\frac{1}{3}\pi))$ dus $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$.

- 3 a



- b De snijpunten liggen bij de gehele veelvouden van π , dus het zijn de punten $(13\pi, 0)$, $(14\pi, 0)$, $(15\pi, 0)$ en $(16\pi, 0)$.
- c De symmetrieassen liggen precies midden tussen de snijpunten met de x -as dus $x = -11\frac{1}{2}\pi$, $x = -10\frac{1}{2}\pi$ en $x = -9\frac{1}{2}\pi$.

4 a $\sin(\frac{2}{3}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

d $\sin(-\frac{1}{2}\pi) = -1$

b $\cos(\frac{3}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

e $\cos(1\frac{5}{6}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

c $\sin(1\frac{3}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

f $\cos(1\frac{2}{3}\pi) = \frac{1}{2}$

- 5 a Eerst een verschuiving $\frac{1}{4}\pi$ naar links (er staat $(x + \frac{1}{4}\pi)$ in plaats van x) daarna vermenigvuldiging met 3 ten opzichte van de x -as en ten slotte een verschuiving 2 omhoog.

- b Er is een top als $\sin(x + \frac{1}{4}\pi) = 1$ of $\sin(x + \frac{1}{4}\pi) = -1$ dus als $x + \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi$ of $x + \frac{1}{4}\pi = -\frac{1}{2}\pi$ en ook steeds één periode verder.

De toppen zijn $(\frac{1}{4}\pi, 5)$, $(-\frac{3}{4}\pi, -1)$ en $(1\frac{1}{4}\pi, -1)$.

- c $g(\pi) = 2 - 1\frac{1}{2}\sqrt{2}$ dus het punt $(\pi, 2 - 1\frac{1}{2}\sqrt{2})$ ligt op de grafiek van g .
Spiegel dit punt in de symmetrie-as $x = 1\frac{1}{4}\pi$: dit geeft $x = 1\frac{1}{2}\pi$.
Eén periode naar links vind je nog twee waarden van x namelijk $x = -\frac{1}{2}\pi$ en $x = -\pi$.

6 a $D(0) = -15 + 5\sin(0,1\pi(0 - 15))$

$$D(0) = -15 + 5\sin(-1\frac{1}{2}\pi)$$

$$D(0) = -15 + 5 \cdot 1 = -10$$

- b De periode van de functie D is $\frac{2\pi}{0,1\pi} = 20$ minuten.

c $-15 - 5 = -20$ en $-15 + 5 = -10$

De minimale diepte is 10 meter en de maximale diepte is 20 meter.

d Met je rekenmachine:

Invoer: $y_1 = -15 + 5\sin(0,1\pi(x - 15))$ en $y_2 = -18$

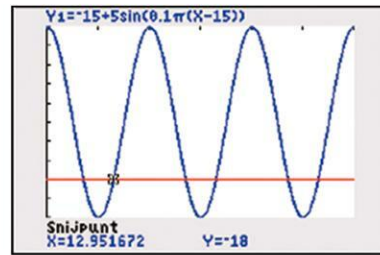
Venster: $0 \leq x \leq 60$, $-20 \leq y \leq -10$

Optie: snijpunten geeft als eerste twee

snijpunten $x = 7,048\dots$ en $x = 12,951\dots$

$t \approx 7$ en $t \approx 13$ dus na ongeveer 7 en 13 minuten.

De periode is 20 minuten, dus de andere tijdstippen zijn na 27, 33, 47 en 53 minuten.



7 a Ga uit van $f(x) = d + a \sin(b(x - c))$.

De evenwichtsstand $d = \frac{-1 + 3}{2} = 1$, de amplitude $a = 3 - 1 = 2$.

De toppen liggen bij $x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = 3\frac{1}{2}\pi$ dus de periode is 4π en $b = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$

De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{1}{2}\pi$, dus $c = \frac{1}{2}\pi$.

Een functievoorschrift is $f(x) = 1 + 2\sin\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right)$.

b Ga uit van $g(x) = d + a \cos(b(x - c))$.

De evenwichtsstand $d = \frac{-3 + 9}{2} = 3$, de amplitude $a = 9 - 3 = 6$.

De toppen liggen bij $x = 1$ en $x = 3$ dus de periode is 4 en $b = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$.

Een top ligt bij $x = 1$, dus $c = 1$.

Een functievoorschrift is $g(x) = 3 + 6\cos\left(\frac{1}{2}\pi(x - 1)\right)$.

8 a De periode gelijk is aan $\frac{1}{2}\pi$, dus $b = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 4$.

De grafiek gaat in $(0, -2)$ stijgend door de evenwichtsstand dus de evenwichtsstand is $y = -2$. En dus is $d = -2$.

Er is geen verschuiving naar links of rechts, dus $c = 0$.

De amplitude is 2 dus $a = 2$.

Samengevat: $a = 2$, $b = 4$, $c = 0$ en $d = -2$.

b De punten $(0, 1)$ en $(5, 10)$ zijn twee opeenvolgende toppen, dus

de evenwichtsstand is $d = \frac{1 + 10}{2} = 5\frac{1}{2}$.

De amplitude is $a = 10 - 5\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$.

De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand in het punt midden tussen de toppen, dus in het punt $\left(2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}\right)$.

Er is een verschuiving van $2\frac{1}{2}$ naar rechts, dus $c = 2\frac{1}{2}$.

De halve periode is 5, dus een hele periode is 10 en $b = \frac{2\pi}{10} = \frac{1}{5}\pi$.

Samengevat: $a = 4\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{5}\pi$, $c = 2\frac{1}{2}$ en $d = 5\frac{1}{2}$.

8 Logaritmische functies

1 a $3^x = 5$

$x = {}^3\log(5)$

b $5^{3x-1} = 23$

$3x - 1 = {}^5\log(23)$

$3x = 1 + {}^5\log(23)$

$x = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot {}^5\log(23)$

c $\log(x) = -\frac{2}{3}$

$x = 10^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{100}}$

f ${}^5\log(x^2) > 2 + {}^5\log(x)$

${}^5\log(x^2) = 2 + {}^5\log(x)$

${}^5\log(x^2) = {}^5\log(25) + {}^5\log(x)$

${}^5\log(x^2) = {}^5\log(25x)$

$x^2 = 25x$

$x = 0$ (vervalt) of $x = 25$

Zie de plot hiernaast.

Het domein is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.De oplossing is $x > 25$.

d $\log(x^4) = 2$

$x^4 = 10^2 = 100$

$x = -\sqrt[4]{100}$ of $x = \sqrt[4]{100}$

e ${}^2\log(x-2) = 1 - {}^2\log(x+2)$

${}^2\log(x-2) + {}^2\log(x+2) = 1$

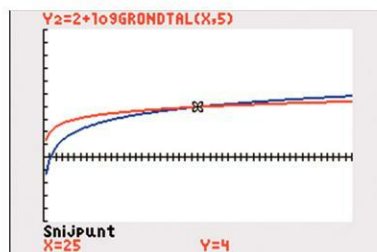
${}^2\log((x-2)(x+2)) = {}^2\log(2)$

$(x-2)(x+2) = 2$

$x^2 - 4 = 2$

$x^2 = 6$

$x = -\sqrt{6}$ (vervalt) of $x = \sqrt{6}$



2 a Er moet gelden $2 - 3x = 0$, dus $3x = 2$ dus $x = \frac{2}{3}$.

De verticale asymptoot is de lijn $x = \frac{2}{3}$.

b $h(x) = {}^4\log(2 - 3x) - 2$

$h(x) = {}^4\log(2 - 3x) - {}^4\log(16)$

$h(x) = {}^4\log\left(\frac{2 - 3x}{16}\right)$

c Er moet gelden $2 - 3x > 0$ ofwel $-3x > -2$ dus $x < \frac{2}{3}$.

Het domein van h is $\langle \leftarrow, \frac{2}{3} \rangle$.

3 a Wanneer de verticale asymptoot $x = -4$ is, dan geldt $-4 + 2p = 0$.

$2p = 4$

$p = 2$

b $f(x) = {}^2\log(x+4) - q$ door $(0, -4)$, dan geldt $f(0) = -4$.

$f(0) = {}^2\log(0+4) - q$

$-4 = {}^2\log(4) - q$

$-4 = 2 - q$

$q = 6$

c $f(x) = {}^2\log(x+4) - 6$

$f(4) = {}^2\log(4+4) - 6$

$f(4) = {}^2\log(8) - 6$

$f(4) = 3 - 6 = -3$

Ja, het punt $(4, -3)$ ligt op de grafiek van f .

- d** De grafiek van $g(x) = {}^2\log(8x + 32) - r$ gaat door $P(4,4)$, dus $g(4) = 4$.
 $g(4) = {}^2\log(8 \cdot 4 + 32) - r$
 $4 = {}^2\log(64) - r$
 $4 = 6 - r$
 $r = 2$

4 $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}$
 $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$
 $f(x) = 3 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^x \cdot 2$
 $f(x) = 6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$
dus $b = 6$ en $g = \frac{1}{4}$

- 5** Om de verdubbelingstijd te vinden moet je eerst de groeifactor weten.

$$O(t) = (1,8)^{1+\frac{2}{3}t}$$

$$O(t) = 1,8^1 \cdot (1,8)^{\frac{2}{3}t}$$

$$O(t) = 1,8^1 \cdot \left((1,8)^{\frac{2}{3}}\right)^t$$

$$O(t) = 1,8 \cdot 1,479\dots^t$$

De groeifactor is 1,479...

Voor de verdubbelingstijd t_d geldt dan $1,479\dots^{t_d} = 2$, dus $t_d = {}^{1,479\dots}\log(2) = 1,768\dots$ uur.
1,768... uur komt overeen met 106,1... minuten.

De verdubbelingstijd is ongeveer 106 minuten.

6 a $T = 18 + 42 \cdot 0,813^t$

$$18 + 42 \cdot 0,813^t = T$$

$$42 \cdot 0,813^t = T - 18$$

$$0,813^t = \frac{T - 18}{42}$$

$$t = {}^{0,813}\log\left(\frac{T - 18}{42}\right)$$

- b** Het tijdstip t waarop de elektriciteit uitviel was de temperatuur $T = 80$.

$$t = {}^{0,813}\log\left(\frac{80 - 18}{42}\right) = {}^{0,813}\log\left(\frac{62}{42}\right) = -1,881\dots$$

De elektriciteit viel dus 1,881... uur voor 11 uur uit.

1,881... uur is ongeveer 113 minuten.

De elektriciteit viel om 9.07 uur uit.

c $50 \cdot 1,5^t = 80$

$$1,5^t = \frac{80}{50}$$

$$1,5^t = 1,6$$

$$t = {}^{1,5}\log(1,6) = 1,159\dots$$

$$1,159\dots \times 60 = 69,550\dots$$

Het duurt ongeveer 70 minuten om het water weer op 80 °C te krijgen.

9 Afstanden en hoeken

1 driehoek ABC
 $\angle C = 180^\circ - 51^\circ - 76^\circ = 53^\circ$
 $\frac{AC}{\sin(76^\circ)} = \frac{25}{\sin(53^\circ)}$ dus $AC = \frac{25 \cdot \sin(76^\circ)}{\sin(53^\circ)} \approx 30,4$

driehoek PQR
 $34^2 = 27^2 + 30^2 - 2 \cdot 27 \cdot 30 \cdot \cos(\angle R)$
 $\cos(\angle R) = \frac{473}{1620}$ dus $\angle R \approx 73,0^\circ$

driehoek UVW
 $\frac{37}{\sin(\angle V)} = \frac{29}{\sin(48^\circ)}$
 $\sin(\angle V) = \frac{37 \cdot \sin(48^\circ)}{29} = 0,948\dots$
 $\angle V \approx 71,5^\circ$

- 2 a $\angle DAB = \angle BDC = 90^\circ$
 Omdat $\angle A = \angle ABC = 90^\circ$ is AD evenwijdig aan BC en dus
 $\angle ADB = \angle DBC$ (Z - hoeken)
 De driehoeken ABD en DCB hebben twee gelijke hoeken en dus zijn ze
 gelijkvormig.

b

$\triangle ABD$	$AD = 12$	$BD = 28$	$AB = \dots$
$\triangle DCB$	$DB = 28$	$CB = \dots$	$DC = \dots$

$$BC = \frac{28 \cdot 28}{12} = 65\frac{1}{3}$$

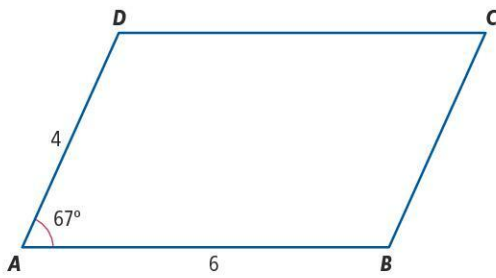
- 3 a $\angle BAS = \angle DCS$ en $\angle ABS = \angle CDS$ (Z-hoeken).
 Bovendien is $\angle ASB = \angle DSC$ (overstaande hoeken).
 De overeenkomstige hoeken zijn even groot, dus de driehoeken zijn
 gelijkvormig.

- b Teken de loodlijnen DP en CT vanuit C en D op zijde AB .
 Dan is vanwege de gelijkbenigheid van het trapezium $PT = 8$ en is
 $AP = BT = 3$.
 Met Pythagoras vind je $AC = \sqrt{AT^2 + CT^2} = \sqrt{11^2 + 6^2} = \sqrt{157}$ en
 $AD = BC = \sqrt{AP^2 + DP^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45}$

c $AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot DC \cdot \cos(\angle ADC)$
 $\sqrt{157}^2 = \sqrt{45}^2 + 8^2 - 2 \cdot \sqrt{45} \cdot 8 \cdot \cos(\angle ADC)$
 $\cos(\angle ADC) = \frac{48}{-16\sqrt{45}}$ dus $\angle ADC \approx 116,6^\circ$

- d Uit de gelijkvormigheid van opdracht a volgt dat $\frac{AS}{CS} = \frac{AB}{CD} = \frac{14}{8}$
 Dus is $AS = \frac{14}{22} \cdot AC$ en is $CS = \frac{8}{22} \cdot AC$
 $AC = \sqrt{157}$ dus is $AS = \frac{14}{22} \cdot \sqrt{157} \approx 7,97$

4 a



In driehoek ABD geldt $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos(\angle A)$

$$BD^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos(67^\circ) = 33,2449 \dots$$

$$BD = \sqrt{33,2449 \dots} \approx 5,77$$

b $\angle B = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 67^\circ = 113^\circ$

In driehoek ABC geldt $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(\angle ABC)$

$$AC^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos(113^\circ) = 70,755 \dots$$

$$AC = \sqrt{70,755 \dots} \approx 8,41$$

5 a $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\angle A)$

$$40^2 = 42^2 + 26^2 - 2 \cdot 42 \cdot 26 \cdot \cos(\angle A)$$

$$\cos(\angle A) = \frac{840}{2184} = \frac{5}{13}$$

$$\angle A \approx 67,4^\circ$$

b $CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2 \cdot AD \cdot AC \cdot \cos(\angle A)$ met $\cos(\angle A) = \frac{5}{13}$ (zie opdracht a)

$$CD^2 = 28^2 + 26^2 - 2 \cdot 28 \cdot 26 \cdot \frac{5}{13} = 900 \text{ dus } CD = \sqrt{900} = 30$$

6 a De omtrek is $AB + BC + AC =$

$$\sqrt{2^2 + 5^2} + \sqrt{8^2 + 3^2} + \sqrt{10^2 + 2^2} = \sqrt{29} + \sqrt{73} + \sqrt{104} \approx 24,13.$$

b Voor elk punt $X(x, y)$ op de middelloodlijn van lijnstuk AC geldt $AX = CX$.

$$\sqrt{(x - -5)^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{(x - 5)^2 + (y - 0)^2}$$

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 10x + 25 + y^2$$

$$-4y = -20x - 4$$

$$y = 5x + 1$$

Een vergelijking van de middelloodlijn is $y = 5x + 1$.

7 $\frac{7}{\sin(\angle C)} = \frac{6}{\sin(48^\circ)}$ dus $\sin(\angle C) = \frac{7 \cdot \sin(48^\circ)}{6} = 0,867 \dots$

$$\angle C_2 = 60,112 \dots^\circ \text{ en } \angle C_1 = 180^\circ - 60,112 \dots^\circ = 119,887 \dots^\circ$$

$$\angle ABC_2 = 180^\circ - 48^\circ - 60,112 \dots^\circ = 71,887 \dots^\circ$$

$$\frac{7}{\sin(60,112 \dots^\circ)} = \frac{AC_2}{\sin(71,887 \dots^\circ)} \text{ dus } AC_2 = \frac{7 \cdot \sin(71,887 \dots^\circ)}{\sin(60,112 \dots^\circ)} \approx 7,67$$

$$\angle ABC_1 = 180^\circ - 48^\circ - 119,887 \dots^\circ = 12,112 \dots^\circ$$

$$\frac{7}{\sin(119,887 \dots^\circ)} = \frac{AC_1}{\sin(12,112 \dots^\circ)} \text{ dus } AC_1 = \frac{7 \cdot \sin(12,112 \dots^\circ)}{\sin(119,887 \dots^\circ)} \approx 1,69$$

8 $\angle C = 180^\circ - 87^\circ - 83^\circ = 10^\circ$ en $AB = 81 - 1 = 80$

$$\frac{AC}{\sin(83^\circ)} = \frac{80}{\sin(10^\circ)} \text{ dus } AC = \frac{80 \cdot \sin(83^\circ)}{\sin(10^\circ)} = 457,267 \dots$$

Neem een punt D. Het punt D ligt net als punt A op de lijn $x = 1$ en de y-coördinaat van D is gelijk aan de y-coördinaat van punt C.

Dan is $\angle DAC = 90^\circ - 87^\circ = 3^\circ$ en dus geldt

$$AD = AC \cdot \cos(3^\circ) = 457,267 \dots \cdot \cos(3^\circ) \approx 456,64$$

Dus is de y-coördinaat van het punt C gelijk aan $5 + AD \approx 5 + 456,64 \approx 461,6$

Verder is $DC = AC \cdot \sin(3^\circ) = 457,267... \cdot \sin(3^\circ) \approx 23,9$

Dus is de x -coördinaat van het punt C gelijk aan $1 + DC \approx 1 + 23,9 \approx 24,9$

Conclusie: $C(24,9; 457,6)$

- 9** Stel $x_P = p$ dan is $y_P = 2p - 8$
 De afstand OP van $O(0, 0)$ tot $P(p, 2p - 8)$ is $\sqrt{p^2 + (2p - 8)^2}$
 $OP = 4$ geeft $\sqrt{p^2 + (2p - 8)^2} = 4$
 $p^2 + (2p - 8)^2 = 16$
 $5p^2 - 32p + 64 = 16$
 $5p^2 - 32p + 48 = 0$
 $D = (-32)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 48 = 64$
 $p = \frac{32 - \sqrt{64}}{10}$ of $p = \frac{32 + \sqrt{64}}{10}$
 $p = 2\frac{2}{5}$ of $p = 4$
 $y = 2 \cdot 2\frac{2}{5} - 8 = -3\frac{1}{5}$ of $y = 2 \cdot 4 - 8 = 0$
 De gevraagde punten zijn $P(2\frac{2}{5}, -3\frac{1}{5})$ en $P(4, 0)$.

10 Functies bewerken

- 1 a** 2 naar links geeft $j(x) = (x + 2)^5$
 vervolgens 3 omhoog geeft $g(x) = (x + 2)^5 + 3$.
- b** $h(x) = f(2x)$
 $h(x) = (2x)^5$
 $h(x) = 32x^5$
- c** Een vermenigvuldiging van 32 ten opzichte van de x -as.
- 2 a** $f(x) = h(x - 5) - 2$ dus door een translatie van 5 naar rechts en 2 omlaag.
- b** Door een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met factor 3 en een translatie 1 omlaag ontstaat de grafiek van g_3^1 uit die van h .
- c** $g_{-1}(x) = -1 + {}^3\log(-x)$
 Spiegelen in de y -as geeft de grafiek van $y = -1 + {}^3\log(x)$.
 Vervolgens een translatie 5 naar rechts geeft de grafiek van
 $y = -1 + {}^3\log(x - 5)$.
 Tot slot een translatie 1 omlaag geeft de grafiek van $y = -2 + {}^3\log(x - 5)$
 ofwel $f(x) = {}^3\log(x - 5) - 2$.
 De volgorde maakt hierbij niet uit.
- d** $f(x) = 0$ geeft ${}^3\log(x - 5) - 2 = 0$
 ${}^3\log(x - 5) = 2$
 $x - 5 = 3^2$
 $x = 14$, dus de grafiek van f snijdt de x -as in $A(14, 0)$.
 Punt A ligt op de grafiek van g_p als $g_p(14) = 0$
 $-1 + {}^3\log(p \cdot 14) = 0$
 ${}^3\log(p \cdot 14) = 1$
 $14p = 3$
 $p = \frac{3}{14}$
- 3 a** $q = 2 \cdot (-2 \cdot 3^x + 5) - 3$
 $q = -4 \cdot 3^x + 10 - 3$
 $q = -4 \cdot 3^x + 7$

b $\sqrt{t} = x - 3$ geeft $t = (x - 3)^2$

substitutie geeft $q = \sqrt{2(x - 3)^2 - 18}$

$$q = \sqrt{2(x^2 - 6x + 9) - 18}$$

$$q = \sqrt{2x^2 - 12x + 18 - 18}$$

$$q = \sqrt{2x^2 - 12x}$$

c $t - 2x = 4$ geeft $t = 2x + 4$

substitutie geeft $\log(q - 2(2x + 4)) = 1$

$$q - 2(2x + 4) = 10$$

$$q = 10 + 2(2x + 4)$$

$$q = 10 + 4x + 8$$

$$q = 4x + 18$$

4 Formule A $k = 8 - 5p$ is te herleiden tot $5p = 8 - k$ ofwel

$$p = \frac{8}{5} - \frac{k}{5} = 1,6 - 0,2k; \text{ dus A en C zijn gelijkwaardig.}$$

Formule B $k = 2 - \frac{4}{p}$ is te herleiden tot $\frac{4}{p} = 2 - k$, hieruit volgt $p = \frac{4}{2 - k}$

Dit is niet één van de formules D, E of F.

Formule D is te herleiden tot ${}^4\log(p) = k + 4$, hieruit volgt $p = 4^{k+4}$

Ofwel $p = 4^k \cdot 4^4 = 4^4 \cdot (2^2)^k$, en dit geeft $p = 256 \cdot 4^k$

Dus de formules D en F zijn gelijkwaardig.

5 a $y = 1 + 5 \cdot 2^{x-1}$ **b** $y = \log(1 - x)$ **c** $y = \frac{\sqrt{x+3}}{4}$

$$1 + 5 \cdot 2^{x-1} = y$$

$$\log(1 - x) = y$$

$$\frac{\sqrt{x+3}}{4} = y$$

$$5 \cdot 2^{x-1} = y - 1$$

$$1 - x = 10^y$$

$$\sqrt{x+3} = 4y$$

$$2^{x-1} = \frac{y-1}{5}$$

$$-x = -1 + 10^y$$

$$x + 3 = (4y)^2$$

$$x - 1 = {}^2\log\left(\frac{y-1}{5}\right)$$

$$x = 1 - 10^y$$

$$x = 16y^2 - 3$$

$$x = 1 + {}^2\log\left(\frac{y-1}{5}\right)$$

6 a De verticale asymptoot van f volgt uit $3 + 6x = 0$; dit geeft $x = -\frac{1}{2}$.

De horizontale asymptoot van f volgt uit een tabel met stapgrootte 10 op je rekenmachine; dit geeft $y = 1,5$.

De verticale asymptoot van g volgt uit $x - 1 = 0$; dit geeft $x = 1$.

De horizontale asymptoot van g volgt uit een tabel met stapgrootte 10 op je rekenmachine; dit geeft $y = -2$.

b $f(0) = -\frac{2}{3}$ dus het snijpunt met de y -as is $(0, -\frac{2}{3})$.

uit $\frac{9x-2}{3+6x} = 0$ volgt $9x - 2 = 0$

$$9x = 2$$

$$x = \frac{2}{9}$$

Het snijpunt met de x -as is $(\frac{2}{9}, 0)$.

$g(0) = 1$ dus het snijpunt met de y -as is $(0, 1)$.

$2 - \frac{4x-1}{x-1} = 0$ geeft $2 = \frac{4x-1}{x-1}$ ofwel $2(x-1) = 4x-1$

$$-2x = 1 \text{ dus } x = -\frac{1}{2}$$

Het snijpunt met de x -as is $(-\frac{1}{2}, 0)$.

7 a $f(x) = p(q(x))$ met de schakels $p(x) = \frac{6}{x}$ en $q(x) = 2 - \sqrt{x}$.

- b** De noemer mag geen nul worden, dus er is een verticale asymptoot als

$$2 - \sqrt{x} = 0$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$

De lijn $x = 4$ is de verticale asymptoot.

- c** Als x toeneemt, dan neemt $\sqrt{x}$ ook toe en voor $x > 4$ wordt $2 - \sqrt{x}$ dan steeds negatiever.

De breuk $\frac{6}{2 - \sqrt{x}}$ is daarom altijd negatief.

Dus is f dalend.

- d** Als x toeneemt, wordt de noemer $2 - \sqrt{x}$ steeds meer negatief (komt steeds verder van 0 te liggen). De functiewaarden naderen dan naar 0.
Er is dus een horizontale asymptoot met vergelijking $y = 0$.

8 a $P(4, 10)$ op de grafiek van f_a , dus $f_a(4) = 10$.

$$a \cdot 4^3 - 6 \cdot 4 + 2 = 10$$

$$64a = 32$$

$$a = \frac{1}{2}$$

b $f'_a(x) = 3ax^2 - 6$

$$f'_a(1) = 3 \text{ geeft } 3a \cdot 1^2 - 6 = 3 \text{ ofwel } 3a - 6 = 3$$

$$3a = 9 \text{ en dus } a = 3$$

c $f'_a(x) = 0$ geeft $3ax^2 - 6 = 0$ ofwel $3ax^2 = 6$

$$x^2 = \frac{6}{3a} = \frac{2}{a}$$

Omdat $a > 0$ heeft deze vergelijking twee oplossingen, dus heeft de grafiek van f_a twee toppen.

De x -coördinaten van de toppen zijn $x = -\sqrt{\frac{2}{a}}$ en $x = \sqrt{\frac{2}{a}}$

- 9** De topvergelijking is $y = a(x - r)^2 + s$ waarbij het punt (r, s) de top van de parabool is.

De x -coördinaat van de top ligt halverwege de punten A en B en is dus 3.

Hieruit volgt $r = 3$ en dus $y = a(x - 3)^2 + s$.

$x = 5$ en $y = 0$ invullen geeft $a(5 - 3)^2 + s = 0$ ofwel $4a + s = 0$, dus $s = -4a$.

De topvergelijking wordt hiermee $y = a(x - 3)^2 - 4a$.

$x = 2$ en $y = 4$ invullen in $y = a(x - 3)^2 - 4a$ geeft $4 = a - 4a$, dus $a = -\frac{4}{3}$

De topvergelijking is $y = -\frac{4}{3}(x - 3)^2 + 5\frac{1}{3}$

10 a $f(x) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^x$ is een dalende functie (want de groeifactor is kleiner dan 1), dus $f(x)$ is maximaal als x minimaal is.

In de grafiek van p kun je zien dat p een minimum heeft dus $1 + \left(\frac{1}{2}\right)^p$ heeft een maximum. Dus k heeft een maximum.

- b** Je moet laten zien dat de vergelijking $1 + \left(\frac{1}{2}\right)^p = 2$ twee oplossingen heeft.

Dit is gelijkwaardig met $\frac{1}{2}^p = 1$ ofwel $p = 0$.

In de grafiek van p zie je dat p twee keer de waarde 0 heeft.

Dus de grafiek van k snijdt de lijn $y = 2$ twee keer.

11 Differentiëren

1 a $g(x) = \frac{8}{3x^5}$

$$g(x) = \frac{8}{3} \cdot x^{-5}$$

$$g'(x) = \frac{-40}{3} \cdot x^{-6}$$

$$g'(x) = -\frac{40}{3x^6}$$

b $h(t) = \frac{t^2 + 3t}{t^3}$

$$h(t) = \frac{t^2}{t^3} + \frac{3t}{t^3}$$

$$h(t) = t^{-1} + 3 \cdot t^{-2}$$

$$h'(t) = -t^{-2} - 6 \cdot t^{-3}$$

$$h'(t) = -\frac{1}{t^2} - \frac{6}{t^3}$$

c $f(x) = 6\sqrt{9x} \cdot \sqrt[3]{x^2}$

$$f(x) = 6 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

$$f(x) = 18 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}} = 18 \cdot x^{\frac{7}{6}}$$

$$f'(x) = 21 \cdot x^{\frac{1}{6}}$$

$$f'(x) = 21 \cdot \sqrt[6]{x}$$

d $q(p) = \frac{2p^2 - 2p + 5}{3\sqrt{p}}$

$$q(p) = \frac{2p^2}{3p^{\frac{1}{2}}} - \frac{2p}{3p^{\frac{1}{2}}} + \frac{5}{3p^{\frac{1}{2}}}$$

$$q(p) = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{3}p^{-\frac{1}{2}}$$

$$q'(p) = p^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}p^{-\frac{1}{2}} - \frac{5}{6}p^{-\frac{1}{2}}$$

$$q'(p) = \sqrt{p} - \frac{1}{3\sqrt{p}} - \frac{5}{6p\sqrt{p}}$$

2 a $f(x) = \sqrt{0,25x - 3}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{0,25x - 3}} \cdot 0,25$$

$$f'(x) = \frac{1}{8\sqrt{0,25x - 3}}$$

c $h(t) = \frac{3}{(3t + 2)^3}$

$$h(t) = 3 \cdot (3t + 2)^{-3}$$

$$h'(t) = -9 \cdot (3t + 2)^{-4} \cdot 3$$

$$h'(t) = \frac{-27}{(3t + 2)^4}$$

b $g(x) = \frac{-1}{\sqrt{2x - 5}}$

$$g(x) = -(2x - 5)^{-\frac{1}{2}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}(2x - 5)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2$$

$$g'(x) = \frac{1}{(2x - 5)\sqrt{2x - 5}}$$

d $k(p) = \left(4p - \frac{1}{6}\right)^{3,2}$

$$k'(p) = 3,2 \cdot \left(4p - \frac{1}{6}\right)^{2,2} \cdot 4$$

$$k'(p) = 12,8 \cdot \left(4p - \frac{1}{6}\right)^{2,2}$$

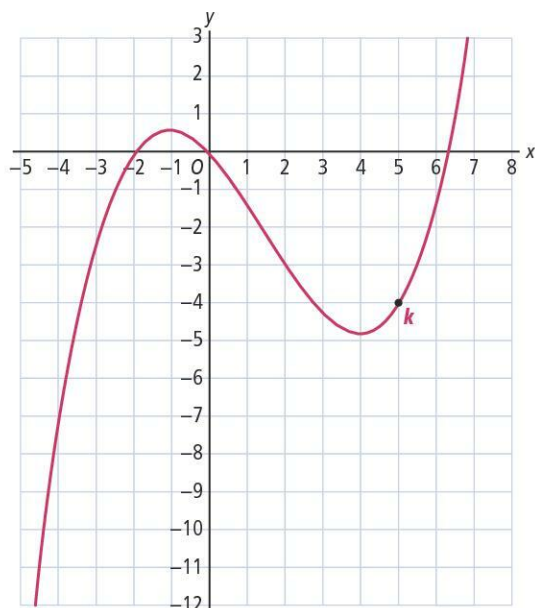
3 a k is stijgend als de grafiek van de afgeleide boven de x -as ligt, dus op de intervallen $\langle \leftarrow, -1 \rangle$ en $\langle 4, \rightarrow \rangle$.

b k heeft een maximum wanneer de afgeleide 0 is en van positief naar negatief gaat, dus bij $x = -1$.

k heeft een minimum wanneer de afgeleide 0 is en van negatief naar positief gaat, dus bij $x = 4$.

c Er is sprake van een toenemende daling wanneer de afgeleide negatief en dalend is, dus op het interval $\langle -1, 1\frac{1}{2} \rangle$.

d Een mogelijke grafiek:



4 a $f(x) = x^5 - x^2 + 4$

$$f'(x) = 5x^4 - 2x$$

$$5x^4 - 2x = 0$$

$$x(5x^3 - 2) = 0$$

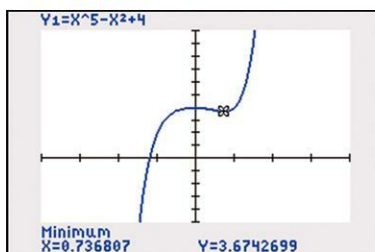
$$x = 0 \text{ of } x^3 = \frac{2}{5}$$

$$x = 0 \text{ of } x = \sqrt[3]{\frac{2}{5}}$$

In de plot zie je dat f een maximum heeft bij $x = 0$

en een minimum bij $x = \sqrt[3]{\frac{2}{5}}$. Het maximum is

$f(0) = 4$ en het minimum $f(\sqrt[3]{\frac{2}{5}}) \approx 3,67$.



$$g(x) = x - \sqrt{2x + 4}$$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{2x+4}} \cdot 2 \text{ ofwel } g'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2x+4}}$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2x+4}} = 0 \text{ geeft } \frac{1}{\sqrt{2x+4}} = 1$$

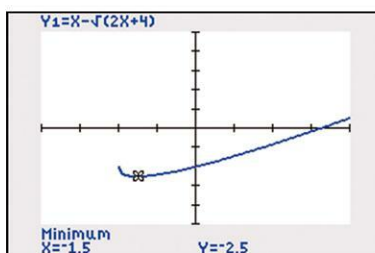
$$2x + 4 = 1$$

$$2x = -3 \text{ dus } x = -1\frac{1}{2}$$

In de plot zie je dat g een minimum heeft bij

$$x = -1\frac{1}{2}$$

Het minimum is $g(-1\frac{1}{2}) = -2\frac{1}{2}$



$$h(x) = \frac{40}{(x-2)^2 + 4} \text{ kun je niet differentiëren.}$$

Met je rekenmachine:

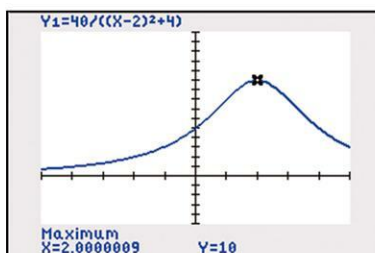
$$\text{invoer: } y_1 = \frac{40}{(x-2)^2 + 4}$$

$$\text{venster: } -5 \leq x \leq 5, -5 \leq y \leq 15$$

$$\text{optie: maximum geeft } x = 2 \text{ en } y = 10$$

In de plot zie je dat h een maximum heeft bij $x = 2$.

Het maximum is $h(2) = 10$.



b $f'(x) < 0$ als f dalend is.

Uit opdracht a volgt dat dit is op het interval $(0, \sqrt[3]{\frac{2}{5}})$.

5 a $f(x) = 2\sqrt{3x-8}$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x-8}} \cdot 3$$

$$f'(x) = \frac{3}{\sqrt{3x-8}}$$

b De lijn raakt de grafiek van f dus geldt $f'(x) = 1\frac{1}{2}$

$$\frac{3}{\sqrt{3x-8}} = \frac{3}{2}$$

$$\sqrt{3x-8} = 2$$

$$3x-8 = 4$$

$$3x = 12$$

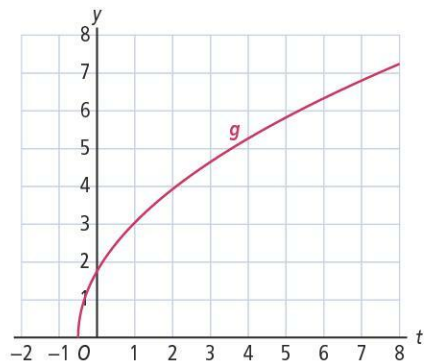
$$x = 4$$

$$y = f(4) = 2\sqrt{3 \cdot 4 - 8} = 4$$

De coördinaten van het raakpunt zijn (4, 4).

$x = 4$ en $y = 4$ invullen bij $y = 1\frac{1}{2}x + p$ geeft $4 = 1\frac{1}{2} \cdot 4 + p$ dus $p = -2$.

6 a



b $g(t) = \sqrt{6t+3}$

$$g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{6t+3}} \cdot 6$$

$$g'(t) = \frac{3}{\sqrt{6t+3}}$$

$$g'(1) = \frac{3}{\sqrt{6+3}} = 1 \text{ en } g'(13) = \frac{3}{\sqrt{6 \cdot 13 + 3}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

c $g'(1) = 1$ en $g(1) = \sqrt{6 \cdot 1 + 3} = 3$

De raaklijn in het punt (1, 3) is van de vorm $y = 1 \cdot t + b$ en gaat door (1, 3).

$$3 = 1 + b \text{ geeft } b = 2$$

Een vergelijking van de raaklijn in (1, 3) is $y = t + 2$

$$g'(13) = \frac{1}{3} \text{ en } g(13) = \sqrt{6 \cdot 13 + 3} = 9$$

De raaklijn in het punt (13, 9) is van de vorm $y = \frac{1}{3}t + b$ en gaat door (13, 9).

$$9 = \frac{1}{3} \cdot 13 + b \text{ geeft } b = 9 - 4\frac{1}{3} = 4\frac{2}{3}$$

Een vergelijking van de raaklijn in het punt (13, 9) is $y = \frac{1}{3}t + 4\frac{2}{3}$

d $t + 2 = \frac{1}{3}t + 4\frac{2}{3}$

$$\frac{2}{3}t = 2\frac{2}{3}$$

$$2t = 8$$

$$t = 4 \text{ en } y = 4 + 2 = 6$$

Het snijpunt S heeft coördinaten (4, 6).

7 Stap 1

De boom blijft groeien, dus je moet aantonen dat de afgeleide altijd positief is.

Voor $t > 0$ geldt dat $0,9867^t > 0$ en $0,9867^t < 1$.

Dus $0,507 \cdot 0,9867^t > 0$ en $(1 - 0,9867^t)^{0,03333} > 0$.

De teller en de noemer van de afgeleide h' zijn groter dan 0, dus $h' > 0$.

Stap 2

Er is sprake van afnemende groei. Je moet dus aantonen dat de afgeleide afneemt.

Als t toeneemt, neemt $0,9867^t$ af (groefactor kleiner dan 1), dus de waarde van de teller neemt af.

Als t toeneemt, neemt $0,9867^t$ af en neemt $(1 - 0,9867^t)$ toe, dus de noemer neemt toe.

De teller wordt kleiner en de noemer wordt groter, dus h' neemt af.



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.
Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.
Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.