

MODERNE WISKUNDE

B

$$\nu = \frac{4h}{2(h+z) - zh}$$

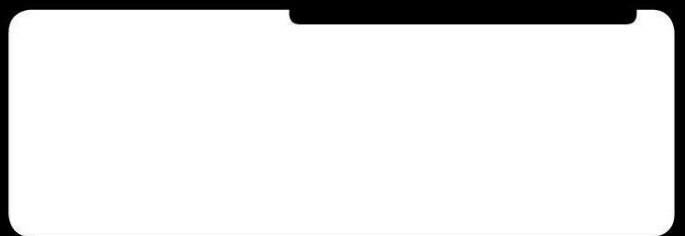


Noordhoff

Dit boek is van jou:

NAAM

KLAS



12e editie

Moderne Wiskunde

havo B deel 3

Serieoverzicht Tweede Fase

	havo		vwo		
klas 4	A 1	B 1	AC 1		B 1
	A 2	B 2	AC 2		B 2
klas 5	A 3	B 3			
			A 3	C 3	B 3
klas 6			A 4	C 4	B 4

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleen.

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 21

© 2021 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsenauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication

ISBN 978-90-01-89214-2

12e editie

Moderne Wiskunde

havo B deel 3

Jeroen van den Boom

Bert Boon

Ferdi Doddema

Wim Doekes

Ilse de Jong

Gerard van Proosdij

Colin Roll

Geertrui Schaberg

Ron Sinkeldam

Carolijn Tacken

12 Goniometrische functies 6

Voorkennis 8

12.1 Een functievoorschrift opstellen 10

12.2 Exacte waarden vinden 14

12.3 Vergelijkingen 18

12.4 Ongelijkheden 22

12.5 Gemengde opdrachten 26

Onderzoeksopdrachten 27

Samenvatting 28

Test jezelf 32

Extra oefening 34

13 Cirkels 36

Voorkennis 38

13.1 Lijnen 40

13.2 Vergelijking van een cirkel 44

13.3 Snijden en raken 48

13.4 Afstand tot een cirkel 52

13.5 Ingeschreven en omgeschreven cirkel 56

13.6 Gemengde opdrachten 60

Onderzoeksopdrachten 61

Samenvatting 62

Test jezelf 66

Extra oefening 68

Vaardigheden 7 70

Kwadratische vergelijkingen 72

Stelsels vergelijkingen 72

Vergelijkingen met wortels 73

Gebroken vergelijkingen 74

Ongelijkheden 75

Sinus en cosinus 75

14 Verbanden 76

- 14.1 Voorkennis 78
- 14.1 Recht evenredig 80
- 14.2 Omgekeerd evenredig 84
- 14.3 Machtsverbanden 88
- 14.4 Machtsverband of exponentieel verband 92
- 14.5 Gemengde opdrachten 96
- Onderzoeksopdrachten 97
- Samenvatting 98
- Test jezelf 102
- Extra oefening 104

Vaardigheden 8 106

- Herleiden 108
- Differentiëren 109
- Substitueren 110
- Kwadraat afsplitsen 110
- Meetkunde 111

Examenvoorbereiding 112

- Functies en grafieken 114
- Lineaire functies en gebroken functies 118
- Evenredigheden en machtsverbanden 122
- Machtsfuncties, kwadratische functies en wortelfuncties 124
- Exponentiële functies en logaritmische functies 129
- Periodieke functies 134
- Veranderingen en afgeleide functies 139
- Formules herleiden 143
- Meetkunde 147
- Lijnen en cirkels 154
- Hints bij de examenopdrachten 164
- Lijst van examenwerkwoorden 168

Extra 170

- Meer oefenen 172
- Oefenproefwerken 178

Trefwoorden 184

Moderne Wiskunde

havo B deel 3



Goniometrische functies 12

In dit hoofdstuk

In hoofdstuk 7 heb je kennisgemaakt met periodieke functies en heb je geleerd wat de betekenis is van de amplitude, de periode en de evenwichtsstand. Ook is de algemene vorm van een functievoorschrift van een sinusoïde aan de orde geweest.

In dit hoofdstuk wordt de goniometrie afgesloten. Het opstellen van een functievoorschrift van een sinusoïde wordt herhaald en vervolgens ligt de nadruk op het oplossen van goniometrische vergelijkingen en ongelijkheden.

Als je de inhoud van dit hoofdstuk en hoofdstuk 7 onder de knie hebt, ben je voor wat betreft goniometrische functies klaar voor het examen.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk:

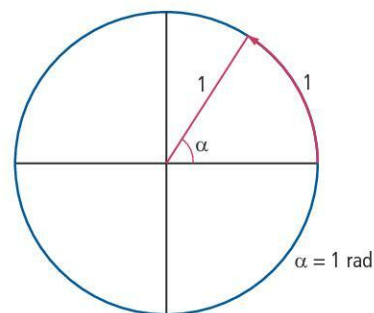
- *Probleemoplossen en analytisch denken* intro paragraaf 12.3
- *Logisch redeneren en bewijzen* 30
- *Modelleren en algebraïseren* 38



- V1** Bij het werken met sinusfuncties maak je gebruik van radialen als hoekmaat. Voor het omrekenen van graden naar radialen en omgekeerd gebruik je dat een hoek van 180° overeenkomt met een hoek van π radialen.

Vul de tabel verder in. Geef exacte waarden.

graden	0	30	...	60	90	120	135	...	...	180
radialen	...	...	$\frac{1}{4}\pi$	...	...	...	...	$\frac{5}{6}\pi$	1	π



- V2**
- Plot en schets de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ op het interval $[-\pi, 3\pi]$.
 - Geef de exacte nulpunten van f .
 - Geef de exacte coördinaten van de toppen van de grafiek van f .
 - Geef de coördinaten van het punt waarin de grafiek op het gegeven interval puntsymmetrisch is.
 - Leg met behulp van de grafiek uit dat $\sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(1\frac{1}{6}\pi\right)$.
- V3**
- Plot en schets de grafiek van $g(x) = \cos(x)$ op het interval $[-\pi, \pi]$.
 - Geef de exacte nulpunten van g .
 - Geef de exacte coördinaten van de toppen van de grafiek van g .
 - Hoe groot is de periode van g ?
 - In welke lijn is de grafiek van g lijnsymmetrisch?
 - Uit welke symmetrie volgt $\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)$?

Theorie

In de tabel staan voor enkele waarden van x exacte waarden van $\sin(x)$ en $\cos(x)$. Om van andere waarden van x de exacte waarde van sinus en cosinus te berekenen, kun je gebruik maken van de waarden in deze tabel en van de symmetrie van de grafieken van $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$.

graden	0°	30°	45°	60°	90°
radialen	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Voorbeeld

Geef de exacte waarde van $\sin\left(1\frac{5}{6}\pi\right)$.

Oplossing

De grafiek van $f(x) = \sin(x)$ is puntsymmetrisch

in $(\pi, 0)$ dus $\sin\left(1\frac{5}{6}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)$.

$\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$ dus $\sin\left(1\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$.

- V4** Vul exacte waarden in.

- $\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \dots$
- $\sin\left(1\frac{2}{3}\pi\right) = \dots$
- $\sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = \dots$
- $\cos\left(1\frac{5}{6}\pi\right) = \dots$
- $\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \dots$
- $\cos\left(1\frac{1}{4}\pi\right) = \dots$

- V5** Gegeven zijn de functies $g(x) = 3\sin(x - \frac{1}{4}\pi)$ en $h(x) = 1 + \sin(2x)$.
- Geef de twee transformaties waardoor de grafiek van g uit die van $f(x) = \sin(x)$ ontstaat.
 - Geef de amplitude van de grafiek van g .
 - Geef de coördinaten van een punt waarin de grafiek van g stijgend door de evenwichtsstand gaat,
 - Geef de twee transformaties waardoor de grafiek van h uit die van f ontstaat.
 - Geef de periode en de evenwichtsstand van de grafiek van h .

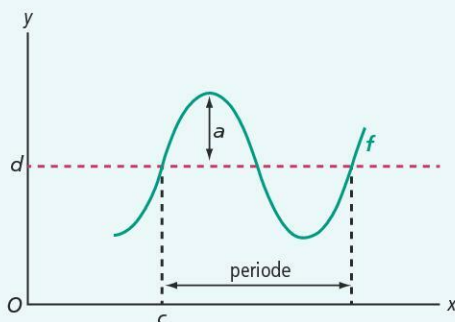
Theorie

Het functievoorschrift van een sinusöide is te schrijven in de vorm $f(x) = d + a\sin(b(x - c))$ of $f(x) = d + a\cos(b(x - c))$. De amplitude is a als $a > 0$ en $-a$ als $a < 0$.

De periode is $\frac{2\pi}{b}$ ($b > 0$).

De evenwichtsstand is de lijn $y = d$.

De verschuiving is c naar rechts.



Voorbeeld

Geef van de grafiek van $f(x) = 3\cos(\pi(x - 2)) + 1$ de amplitude, de periode en de evenwichtsstand.

Oplossing

$a = 3$, dus de amplitude is 3.

$b = \pi$, dus de periode is $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

$d = 1$, dus de evenwichtsstand is de lijn $y = 1$.

- V6** Geef de amplitude, de periode en de evenwichtsstand.
- $f(x) = 4\cos(x - \frac{1}{2}\pi) - 3$
 - $g(x) = -2\sin(x) + \frac{1}{2}$
 - $h(x) = -2 + \cos(3(x + \frac{1}{3}\pi))$
 - $k(x) = 2 + \cos(x - 3)$
 - $l(x) = \cos(\frac{1}{2}\pi x) - 3$
 - $m(x) = 3\sin(\frac{1}{2}(x - \frac{1}{4}\pi))$
- V7** Geef zonder je rekenmachine te gebruiken de coördinaten van de toppen van de grafiek van f op het interval $[0, 2\pi]$.
- $f(x) = 4\frac{1}{2}\sin(\frac{1}{2}x)$
 - $f(x) = -2\cos(x) + 8$
 - $f(x) = 14 + 7\sin(x + \frac{1}{3}\pi)$
 - $f(x) = -2\sin(x - \frac{3}{4}\pi) + 5$

12.1 Een functievoorschrift opstellen

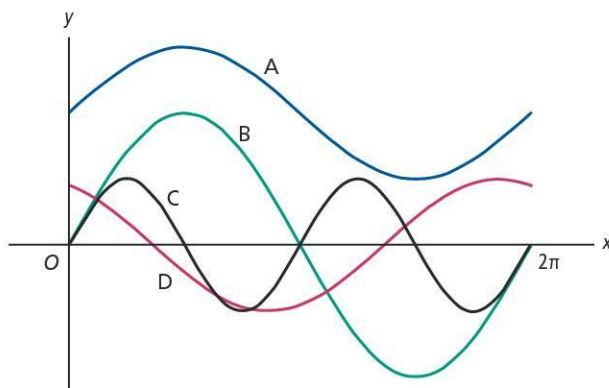
Je herhaalt • hoe je een functievoorschrift opstelt bij een gegeven sinusoïde

Leerroutes

- ondersteunend: 1–2–3–04–4–5–6–7–8–10
- doorlopend: 1–2–3–4–5–6–7–8–9–10
- uitdagend: 1–2–3–4–5–6–8–9–10–U1

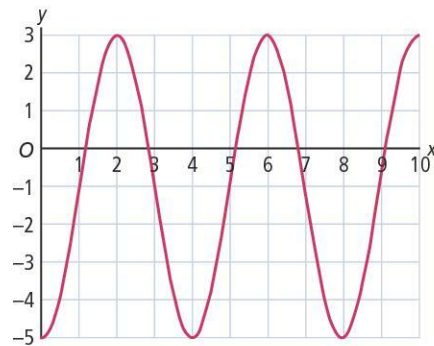
In de figuur zijn op het interval $[0, 2\pi]$ de grafieken getekend van de functies $f(x) = \sin(x + 2)$, $g(x) = \sin(x) + 2$, $h(x) = 2\sin(x)$ en $k(x) = \sin(2x)$.

- Welk functievoorschrift hoort bij welke grafiek?
- Geef voor elke grafiek aan bij welke transformatie die grafiek ontstaat uit de grafiek van $p(x) = \sin(x)$.



- 1** Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$. Geef aan hoe de periode, de evenwichtstand en de amplitude veranderen bij:
- Een verschuiving van $\frac{1}{3}\pi$ naar rechts.
 - Een verschuiving van twee omhoog.
 - Een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor 3.
 - Een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met factor 2.

- 2** De sinusoïde is de grafiek van een functie $f(x) = d + a\cos(b(x - c))$.
- Lees uit de grafiek het maximum en het minimum af.
 - Het gemiddelde van deze twee waarden bepaalt de evenwichtswaarde. Hoe groot is de evenwichtswaarde d ?
 - Het verschil tussen de maximale functiewaarde en de evenwichtswaarde is de amplitude. Hoe groot is de amplitude a ?
 - Lees uit de grafiek de periode af en bereken b .
 - De verschuiving is gelijk aan de x -coördinaat die bij een maximale y -coördinaat hoort. Hoe groot is c ?
 - Stel een functievoorschrift van f op.



- 3** De sinusoïde van opdracht 2 heeft nog meer toppen met een maximale y -coördinaat.
- Hoe groot kan de waarde van c dus ook zijn?
 - Geef twee andere functievoorschriften van f .
 - Het functievoorschrift van de grafiek van f is ook te schrijven als $f(x) = d + a\sin(b(x - c))$. Stel twee functievoorschriften op die geschreven zijn als sinusfunctie.

Aanpak

Hoe stel je een functievoorschrift $f(x) = d + a \sin(b(x - c))$ of $f(x) = d + a \cos(b(x - c))$ op bij een gegeven sinusoïde?

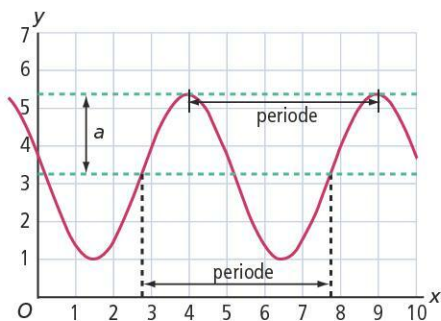
- 1 Lees uit de grafiek het maximum en het minimum af.
- 2 Bereken $d = \frac{\text{maximum} + \text{minimum}}{2}$ en $a = \text{maximum} - d$.
- 3 Lees uit de grafiek de periode af; $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$
- 4 Lees uit de grafiek de horizontale verschuiving af.
Bij een cosinus is dat de x -coördinaat die bij een maximum hoort: $c = x_{\max}$
Bij een sinus is dat waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.
- 5 Schrijf het functievoorschrift op.

Voorbeeld

Stel bij de sinusoïde een functievoorschrift op.

Oplossing

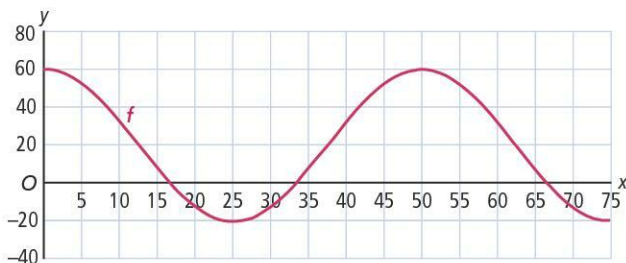
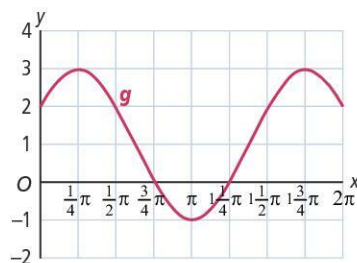
- 1 Het maximum is $5\frac{1}{2}$ en het minimum is 1.
- 2 $d = \frac{5\frac{1}{2} + 1}{2} = 3\frac{1}{4}$ en $a = 5\frac{1}{2} - 3\frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$
- 3 De periode is 5; $b = \frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$.
- 4 $x_{\max} = 4$, dus $c = 4$
- 5 $f(x) = 3\frac{1}{4} + 2\frac{1}{4} \cos(\frac{2}{5}\pi(x - 4))$



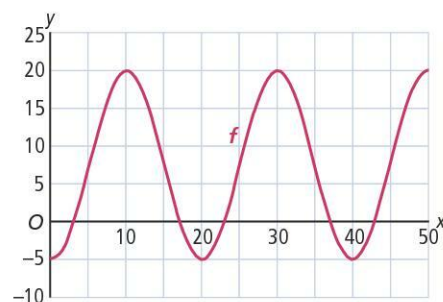
Ondersteunende route → maak opdracht 04

- 4 Stel bij elke grafiek twee passende functievoorschriften op.

H



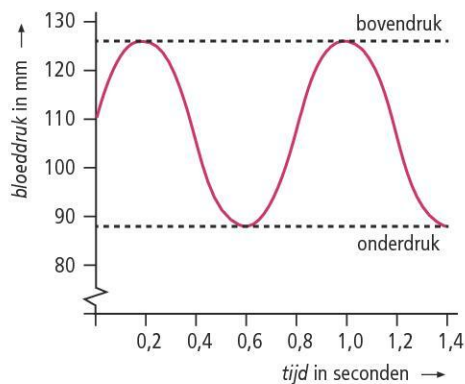
- 5** Stel bij de grafiek van f twee passende functievoorschriften op, één in de vorm $f(x) = d + a\sin(b(x - c))$ en één in de vorm $f(x) = d + a\cos(b(x - c))$.



- 6** Bij een sinusöide kun je verschillende waarden van $x_{\max}$ kiezen.
Stel bij de grafiek van opdracht 5 een functievoorschrift met een cosinus op waarbij je een andere waarde van c kiest.

- 7** De grafiek geeft een versimpeld model van de manier waarop de bloeddruk D van een mens verandert.

- Je kunt het verband tussen de bloeddruk en de tijd zowel met een sinusfunctie als met een cosinusfunctie weergeven. Waarom is een cosinusfunctie in dit geval handiger?
- Stel een functievoorschrift op met een cosinus.
- Stel ook een functievoorschrift op met een sinus.



- 8** Gegeven is de functie $f(x) = \cos(x) \cdot \sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$ op het interval $[0, 2\pi]$.
- Plot de grafiek van f en geef de coördinaten van de toppen in twee decimalen.
 - In de plot zie je dat de grafiek van f een sinusöide is. Schrijf het functievoorschrift van f in de vorm $f(x) = d + a\sin(b(x - c))$ of $f(x) = d + a\cos(b(x - c))$.
- 9** Bereken zonder je rekenmachine de coördinaten van een punt waarin de grafiek van $f(x) = 7 - 3\sin\left(\frac{1}{3}\pi(x + 4)\right)$ stijgend door de evenwichtsstand gaat.

- 10**
- Een sinusöide heeft als twee opvolgende toppen de punten $(2, 18)$ en $(10, 2)$.
Stel een passend functievoorschrift op.
 - Een sinusöide heeft onder andere als opeenvolgende toppen de punten $(-3\pi, -11)$ en $(5\pi, -2)$.
Stel drie verschillende passende functievoorschriften op.

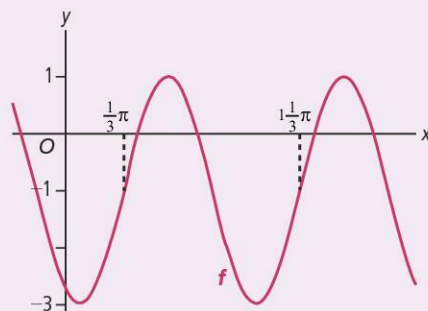
Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

04

Je gaat een functievoorschrift met de vorm $f(x) = d + a \sin(b(x - c))$ opstellen bij de grafiek van de functie f .

- Hoe groot is het maximum van f ? En hoe groot is het minimum?
- Hoe bereken je met behulp van het maximum en het minimum de evenwichtsstand?
- Welke van de variabelen a , b , c of d hoort bij de evenwichtsstand?
- Hoe bereken je met behulp van de evenwichtsstand en het maximum de amplitude?
- Welke van de variabelen a , b , c of d hoort bij de amplitude?
- Uit de figuur kun je de periode aflezen.
Hoe groot is de periode? Welke van de variabelen a , b , c of d kun je nu berekenen?
- Over welke afstand is de sinusgrafiek horizontaal verschoven?
- Welke van de variabelen a , b , c of d hoort bij die verschuiving?
- Stel een functievoorschrift van f op.



Uitdagende opdrachten

U1



Van de getekende sinusoïde zijn de punten A en C toppen en ligt punt B op de evenwichtsstand.

- Gegeven is $A(-0,6; -7)$ en $C(1,4; 3)$.
Bereken exact de coördinaten van B .
- Gegeven is $A(31, 16)$ en $B(34, 36)$.
Stel een functievoorschrift op van de sinusoïde.

12.2 Exacte waarden vinden

Je leert

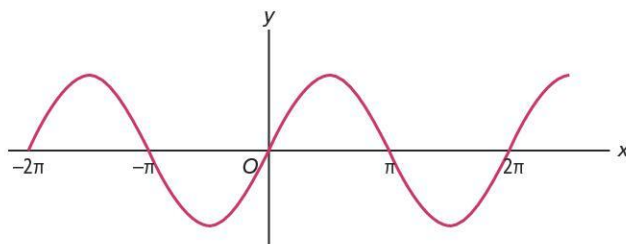
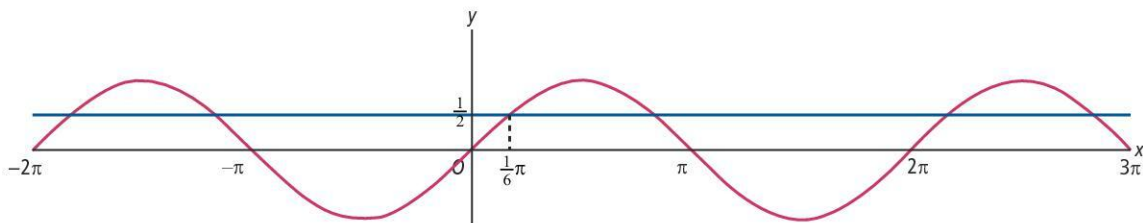
- hoe je bij sommige waarden van x de exacte waarde van $\sin(x)$ en $\cos(x)$ bepaalt
- hoe je een vergelijking van de vorm $\sin(x) = p$ of $\cos(x) = p$ exact oplost

Leerroutes

- ondersteunend: 11–12–13–14–015–15–16–017
- doorlopend: 11–12–13–14–15–16–17–18
- uitdagend: 11–12–13–15–16–17–18–U2

De grafiek van $f(x) = \sin(x)$ is getekend op het interval $[-2\pi, 2\frac{1}{2}\pi]$.

- Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ op het interval $[-1\frac{1}{2}\pi, 6\frac{1}{2}\pi]$?
- Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $\sin(x) = -1$ op dit interval?



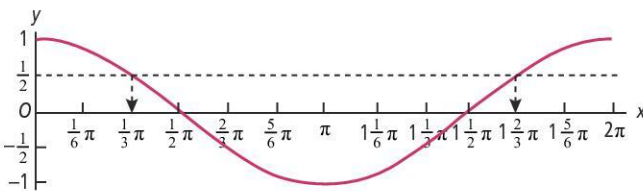
- 11** Op het interval $[-2\pi, 3\pi]$ is de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ getekend.

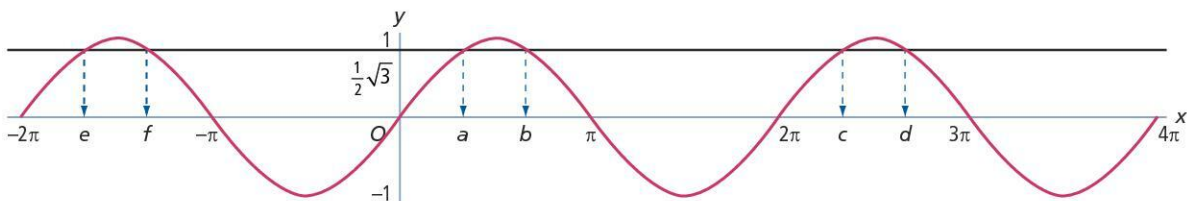
Ook is de lijn $y = \frac{1}{2}$ getekend. Je weet dat $\sin(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$.

- Uit welke symmetrie volgt dat $\sin(\frac{5}{6}\pi) = \frac{1}{2}$?
- Uit welke symmetrie volgt dat $\sin(-\frac{1}{6}\pi) = -\frac{1}{2}$?
- Met welke symmetrie kun je de waarde van $\sin(1\frac{1}{6}\pi)$ bepalen? Hoe groot is $\sin(1\frac{1}{6}\pi)$?
- Met welke eigenschap van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ kun je de waarde van $\sin(2\frac{1}{6}\pi)$ bepalen? Hoe groot is $\sin(2\frac{1}{6}\pi)$?
- Geef de waarden van $\sin(-1\frac{5}{6}\pi)$, $\sin(-1\frac{1}{6}\pi)$ en $\sin(-\frac{5}{6}\pi)$.

- 12** In de grafiek zie je dat er op het interval $[0, 2\pi]$ twee waarden van x zijn waarvoor geldt $\cos(x) = \frac{1}{2}$, namelijk $x = \frac{1}{3}\pi$ en $x = 1\frac{2}{3}\pi$.

- Geef de exacte waarden van x op het interval $[0, 2\pi]$ waarvoor geldt $\cos(x) = -\frac{1}{2}$.
- Dezelfde vraag voor $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.





- 13** Op het interval $[-2\pi, 4\pi]$ zijn de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ en de lijn $y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ getekend.

- Hoeveel oplossingen heeft $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ op het interval $[-2\pi, 4\pi]$?
- In de tabel met exacte waarden vind je $\sin(\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
Welke van de letters a, b, c, d, e en f hoort bij het getal $\frac{1}{3}\pi$?
- Door gebruik te maken van symmetrie kun je berekenen welk getal b voorstelt.
Van welke symmetrie maak je dan gebruik?
- Welk verband is er tussen de getallen a en c ?
- Schrijf alle oplossingen van $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ op het interval $[-2\pi, 4\pi]$ op.

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Aanpak

Hoe los je een vergelijking van de vorm $\sin(x) = p$ of $\cos(x) = p$ op een gegeven interval exact op?

- Los de vergelijking op het interval $[0, 2\pi]$ met behulp van de tabel en symmetrie op.
- Gebruik de periode 2π om oplossingen in het gegeven interval te vinden.

Voorbeeld

Los op het interval $[2\pi, 5\pi]$ exact op $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Oplossing

- Tabel: $\cos(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$;
symmetrie geeft de oplossingen
 $x = \frac{5}{6}\pi$ en $x = 1\frac{1}{6}\pi$.
- De oplossingen op $[2\pi, 5\pi]$ zijn
 $x = 2\frac{5}{6}\pi$, $x = 4\frac{5}{6}\pi$ en $x = 3\frac{1}{6}\pi$.

- 14** De vergelijking in het voorbeeld is opgelost op het interval $[2\pi, 5\pi]$.
Los de vergelijking ook exact op het interval $[-3\pi, \pi]$ op.

Ondersteunende route → maak opdracht 015

- 15** Los op het interval $[10\pi, 15\pi]$ exact op.

H

- $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
- $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- $4\cos(x) = -2\sqrt{2}$
- $\sin(x) + 1 = 0$

- 16** a Los $\cos(x) = 1$ op het interval $[0, 8\pi]$ exact op.
 b Los $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ op het interval $[0, 8\pi]$ exact op.

Theorie

De vergelijking $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ heeft op $[0, 2\pi]$ twee oplossingen: $x = \frac{1}{4}\pi$ en $x = \frac{3}{4}\pi$.

Omdat de periode van $f(x) = \sin(x)$ gelijk is aan 2π , zijn ook $\frac{1}{4}\pi + 2\pi$ en $\frac{3}{4}\pi + 2\pi$ oplossingen van de vergelijking $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, maar ook $\frac{1}{4}\pi - 2\pi$ en $\frac{3}{4}\pi - 2\pi$, $\frac{1}{4}\pi + 4\pi$ en $\frac{3}{4}\pi + 4\pi$, enzovoort.

Zo ontstaan er twee rijen oplossingen:

..., $\frac{1}{4}\pi - 2\pi$, $x = \frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{4}\pi + 2\pi$, $\frac{1}{4}\pi + 4\pi$, $\frac{1}{4}\pi + 6\pi$, ... en

..., $\frac{3}{4}\pi - 2\pi$, $x = \frac{3}{4}\pi$, $\frac{3}{4}\pi + 2\pi$, $\frac{3}{4}\pi + 4\pi$, $\frac{3}{4}\pi + 6\pi$, ...

Voor elk geheel getal k zijn $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ en $x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ oplossingen van de vergelijking $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Voorbeeld

Los exact op $2\cos(x) = 1$.

Oplossing

Herleid de vergelijking eerst tot $\cos(x) = \frac{1}{2}$.

Op $[0, 2\pi]$ zijn de oplossingen $x = \frac{1}{3}\pi$ en $x = \frac{2}{3}\pi$.

Alle oplossingen:

$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ en $x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$, k geheel.

Opmerking:

De toevoeging 'k geheel' wordt verder weggelaten.

Ondersteunende route → maak opdracht O17

- 17** Los exact op.

- H** a $2\sin(x) = -1$
 b $4\cos(x) = -2\sqrt{3}$
 c $\cos(x) + 1 = 0$

- 18** Uit $\sin^2(x) = 1$ volgt $\sin(x) = 1$ of $\sin(x) = -1$.

- a Los exact op $\sin^2(x) = 1$.
 b Los exact op $\cos^2(x) = 1$.

Uitdagende route → maak opdracht U2

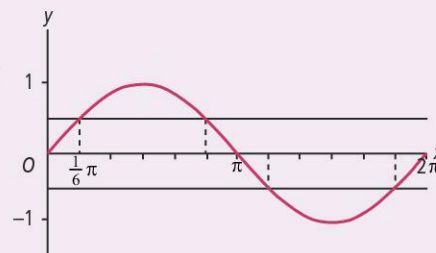
In plaats van $(\sin(x))^2$ wordt vaak $\sin^2(x)$ geschreven. Zo is $\cos^2(x)$ een andere schrijfwijze voor $(\cos(x))^2$.

Ondersteunende opdrachten

015 In deze opdracht ga je de vergelijking $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ exact oplossen op het interval $[6\pi, 11\pi]$.

- Lees uit de tabel de waarde van x af waarvoor geldt $\sin(x) = \frac{1}{2}$.
- Lees met behulp van symmetrie uit de grafiek af voor welke waarden van x op het interval $[0, 2\pi]$ geldt $\sin(x) = -\frac{1}{2}$.
- Gebruik de periode van de sinus om de oplossingen in het interval $[6\pi, 11\pi]$ te vinden.

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0



017 In deze opdracht los je de vergelijking $\cos(x) = \frac{1}{2}$ exact op.

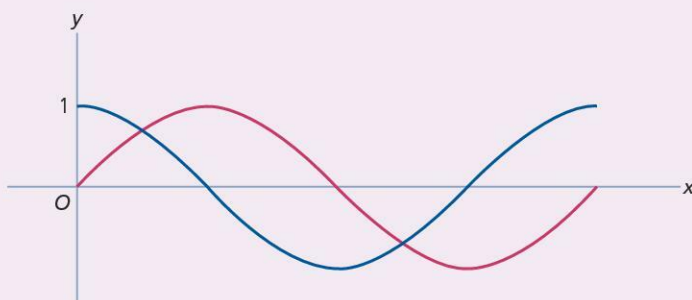
- Lees uit de tabel de waarde van x af waarvoor geldt $\cos(x) = \frac{1}{2}$.
- Bereken met behulp van symmetrie op het interval $[0, 2\pi]$ de andere waarde van x waarvoor geldt $\cos(x) = \frac{1}{2}$.
- Vul in: de exacte waarden van x waarvoor geldt $\cos(x) = \frac{1}{2}$ zijn $x = \dots + k \cdot \dots$ of $x = \dots + k \cdot \dots$

Los exact op.

- $\cos(x) = -1$
- $2 \sin(x) = -\sqrt{2}$

Uitdagende opdrachten

U2 Los de vergelijking $\sin(x) = \cos(x)$ exact op en schrijf de oplossing in de vorm $x = \dots + k \cdot \dots$



12.3 Vergelijkingen

Je leert

- hoe je een vergelijking van de vorm $\sin(b(x - c)) = p$ of $\cos(b(x - c)) = p$ exact oplost

Leerroutes

- ondersteunend: 19-20-021-21-22-23-024
- doorlopend: 19-20-21-22-23-24-25
- uitdagend: 20-21-22-23-24-25-U3

Bij deze moderne windturbines ligt de as van de rotor op een hoogte van 90 m. De drie wieken hebben een lengte van 40 m.

Punt P is de tip van een van de rotorbladen.

Bij stevige wind maakt de turbine 12 omwentelingen per minuut.

- Hoeveel keer per minuut bevindt punt P zich op een hoogte van 100 meter?



19 Gegeven is de vergelijking $\sin(x - \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

In deze opdracht ga je de vergelijking op het interval $[-\pi, \pi]$ met behulp van substitutie exact oplossen.

- Stel $x - \frac{1}{6}\pi = q$ en los de vergelijking $\sin(q) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ exact op.
- Je vindt alle oplossingen van $\sin(x - \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ door $\frac{1}{6}\pi$ op te tellen bij de oplossingen van $\sin(q) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
Schrijf de oplossingen op die in het interval $[-\pi, \pi]$ liggen.

•	$\sin(q) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
•	$q = \dots + k \cdot 2\pi$ of $q = \dots + k \cdot 2\pi$
•	$x - \frac{1}{6}\pi = \dots + k \cdot 2\pi$ of
•	$x - \frac{1}{6}\pi = \dots + k \cdot 2\pi$
•	$x = \dots + k \cdot 2\pi$ of
•	$x = \dots + k \cdot 2\pi$

20 Gegeven is de vergelijking $\cos(3x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Je gaat de vergelijking op het interval $[0, \pi]$ exact oplossen.

- Stel $3x = q$ en los de vergelijking $\cos(q) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ exact op.
- Je vindt alle oplossingen van $\cos(3x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ door de oplossingen van $\cos(q) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ door 3 te delen.
Maak de berekening op het blaadje af.
Vergeet niet ook de periode door 3 te delen!
- Schrijf de oplossingen op die in het interval $[0, \pi]$ liggen.

•	$\cos(q) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
•	$q = \dots + k \cdot 2\pi$ of $q = \dots + k \cdot 2\pi$
•	$3x = \dots + k \cdot 2\pi$ of $3x = \dots + k \cdot 2\pi$
•	$x = \dots + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $x = \dots + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
•	
•	

Aanpak

Hoe los je de vergelijking $\sin(b(x - c)) = d$ op een gegeven interval exact op?

- 1 Stel $b(x - c) = q$ en los de vergelijking $\sin(q) = d$ exact op.
- 2 Bereken bij elk van de gevonden waarden van q de bijbehorende waarde van x . Vergeet niet ook de periode door b te delen.
- 3 Stel vast welke van de zo gevonden oplossingen op het gegeven interval liggen.

De vergelijking $\cos(b(x - c)) = q$ los je op een vergelijkbare manier op.

Voorbeeld

Los de vergelijking $\cos(\frac{1}{2}(x + \frac{1}{3}\pi)) = \frac{1}{2}$ op $[2\pi, 8\pi]$ exact op.

Oplossing

- 1 De oplossingen van $\cos(q) = \frac{1}{2}$ zijn $q = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $q = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$.
- 2 $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{3}\pi) = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x + \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 4\pi$ of $x + \frac{1}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi + k \cdot 4\pi$ (vermenigvuldigd met 2)
 $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 4\pi$ of $x = \pi + k \cdot 4\pi$ ($\frac{1}{3}\pi$ afgetrokken)
- 3 Op $[2\pi, 8\pi]$ zijn de oplossingen $x = 4\frac{1}{3}\pi$ of $x = 3\pi$ of $x = 7\pi$.

Ondersteunende route → maak opdracht 021

- 21 Los de vergelijking op het gegeven interval exact op.

H

- a $\sin(2x) = \frac{1}{2}$ op $[0, 2\pi]$
- b $\cos(x - \frac{2}{3}\pi) = -1$ op $[-\pi, 0]$
- c $\sin(\pi(x + 4)) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ op $[0, 5]$
- d $3\cos(2x) + 1 = 2\frac{1}{2}$ op $[-2\pi, 0]$
- e $2\sin(\frac{1}{2}x + \pi) + 2 = 1$ op $[0, 5\pi]$
- f $4\cos(3\pi(x - 1)) = -2\sqrt{3}$ op $[0, 2]$

- 22** Los de vergelijking op het gegeven interval op.
Geef je antwoorden in twee decimalen.

H

- a** $\cos(x) = 0,27$ op $[0, 2\pi]$ **c** $\sin(\pi x) = -0,35$ op $[1, 7]$
b $\sin(2x) = 0,9$ op $[0, 2\pi]$ **d** $4 - 3\cos(2x) = 5$ op $[-4, 4]$

Theorie

Vergelijkingen als $(2x - 5) \cdot \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = 0$ of $\cos(3x) \cdot (2\sin(x) - 1) = 0$ zijn van de vorm $A \cdot B = 0$.

Je lost zo'n vergelijking op door $A = 0$ en $B = 0$ op te lossen.

Voorbeeld

Los exact op $\cos(3x) \cdot (2\sin(x) - 1) = 0$ op het interval $[0, \pi]$.

Oplossing

$\cos(3x) = 0$ of $2\sin(x) - 1 = 0$ geeft $\cos(3x) = 0$ of $\sin(x) = \frac{1}{2}$.

$$3x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 3x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \text{ of } x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \text{ of } x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

Op het interval $[0, \pi]$:

$$x = \frac{1}{6}\pi \text{ of } x = \frac{1}{2}\pi \text{ of } x = \frac{5}{6}\pi$$

- 23** Los exact op.

H

- a** $(4x - 7) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right) = 0$ op $[0, 2\pi]$
b $\left(1 - \frac{1}{3}x\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right) = 0$ op $[0, 8]$
c $2\sin\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) \cdot \cos(2x) = 0$ op $[-\pi, \pi]$

Ondersteunende route → maak opdracht 024

- 24** **a** Los exact op $\cos^2(x) - \cos(x) = 0$ op $[0, 4\pi]$.
(Hint: stel $\cos(x) = p$.)
b Los exact op $2\sin^2(x) + \sin(x) = 0$ op $[-\pi, \pi]$.

- 25** Beredeneer voor welke waarden van a de vergelijking
 $a\sin\left(3x - \frac{1}{6}\pi\right) = \sqrt{5}$ oplossingen heeft.

Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

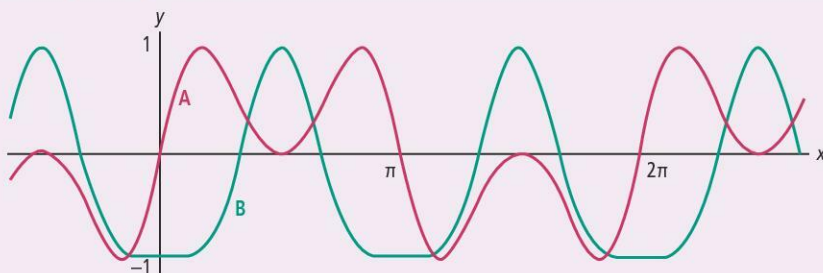
- 021** Gegeven is de vergelijking $6 \sin\left(\frac{3}{4}x\right) = 3\sqrt{3}$ op het interval $[-2\pi, 4\pi]$.
- Leg uit dat de vergelijking kan worden herleid tot $\sin\left(\frac{3}{4}x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
 - Stel $q = \frac{3}{4}x$ en los $\sin(q) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ op het interval $[0, 2\pi]$ op.
 - Maak de berekening op het blaadje af.
 - Neem $k = -1$, $k = 0$ en $k = 1$ om de oplossingen op het interval $[-2\pi, 4\pi]$ te bepalen.

☐	$\sin(q) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$				
☐	$q = \dots + k \cdot 2\pi$	of	$q = \dots + k \cdot 2\pi$		
☐	$\frac{3}{4}x = \dots + k \cdot 2\pi$	of	$\frac{3}{4}x = \dots + k \cdot 2\pi$		
☐	$x = \frac{4}{3}(\dots + k \cdot 2\pi)$	of	$x = \frac{4}{3}(\dots + k \cdot 2\pi)$		
☐	$x = \frac{4}{3} \cdot \dots + k \cdot \frac{4}{3} \cdot 2\pi$	of			
☐	$x = \frac{4}{3} \cdot \dots + k \cdot \frac{4}{3} \cdot 2\pi$				
☐	$x = \dots + k \cdot \dots$	of	$x = \dots + k \cdot \dots$		

- 024** Je gaat de vergelijking $4 \sin^2(x) = 1$ op het interval $[-\pi, \pi]$ exact oplossen. ($\sin^2(x)$ is een andere schrijfwijze voor $(\sin(x))^2$.)
- Stel $\sin(x) = p$ en los in stap 1 de vergelijking $4p^2 = 1$ exact op.
 - Los in stap 2 de twee sinusvergelijkingen op het interval $[0, 2\pi]$ op. Je vindt vier oplossingen.
 - Gebruik de periode 2π om de oplossingen op het interval $[-\pi, \pi]$ te vinden.
 - Los $2 \cos^2(x) = \cos(x)$ op het interval $[0, 4\pi]$ exact op.

☐	$4p^2 = 1$				
☐	$p = \dots$ of $p = \dots$			1	
☐	$\sin(x) = \dots$ of $\sin(x) = \dots$			2	
☐	Op het interval $[0, 2\pi]$:				
☐	$x = \dots$ of $x = \dots$ of				
☐	$x = \dots$ of $x = \dots$				
☐					

Uitdagende opdrachten



- U3** Getekend zijn de grafieken van $f(x) = \sin(\pi \cdot \sin(x))$ en $g(x) = \cos(\pi \cdot \cos(x))$.
- Welke grafiek hoort bij f ?
 - Geef de periode van f en van g .
 - Waarom is het maximum van f gelijk aan 1?
 - Los exact op $f(x) = 1$ op het interval $[0, 2\pi]$.
 - Toon aan dat $g\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 0$ en geef de overige waarden van x op het interval $[0, 2\pi]$ waarvoor geldt $g(x) = 0$.

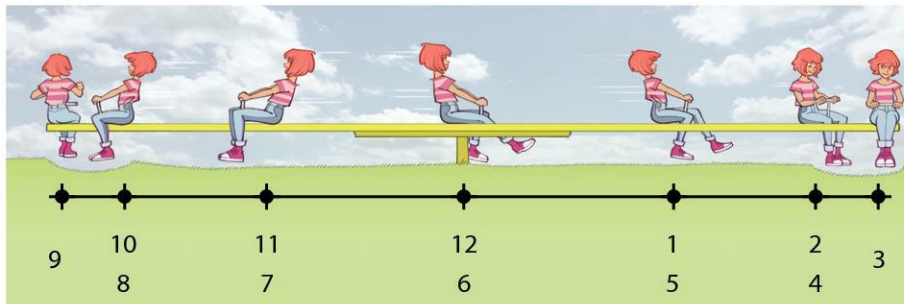
12.4 Ongelijkheden

Je leert

- hoe je een goniometrische ongelijkheid exact oplost

Leerroutes

- ondersteunend: 26-27-028-28-30-31-32
- doorlopend: 26-27-28-29-30-31-32
- uitdagend: 26-27-28-29-30-31-U4

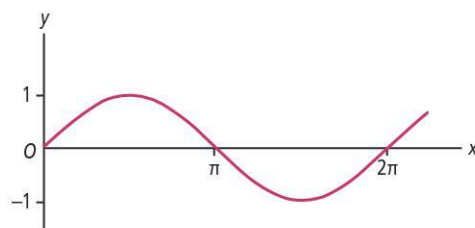


Van een afstand ziet oma haar kleinkind Sanne rondjes draaien op een draaimolen met een diameter van 6 meter. Elk rondje duurt precies 12 seconden.

Op tijdstip 0 bevindt Sanne zich in het midden en beweegt naar rechts.

- In welke tijdvakken tussen 0 en 12 seconden ziet oma Sanne minder dan 1,5 meter van het midden?

- 26**
- Voor welke waarden van x op het interval $[0, 2\pi]$ geldt $\sin(x) > 0$?
 - Voor welke waarden van x op het interval $[-\pi, 3\pi]$ geldt $\cos(x) < 0$?
 - Leg uit waarom de ongelijkheid $\sin(x) > 1$ geen oplossingen heeft, maar de ongelijkheid $\sin(x) \geq 1$ wel.
 - Voor welke waarden van p heeft de ongelijkheid $\cos(x) \leq p$ oplossingen?



- 27**
- In deze opdracht ga je de ongelijkheid $\cos(2x) < \frac{1}{2}$ op het interval $[0, 2\pi]$ oplossen.
- Los de vergelijking $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ op het gegeven interval op.
 - Plot en schets de grafiek van $f(x) = \cos(2x)$ en de lijn $y = \frac{1}{2}$ en geef de gevonden oplossingen in je schets aan.
 - Lees uit je schets de oplossing van de ongelijkheid $\cos(2x) < \frac{1}{2}$ af.

Theorie

Ook goniometrische ongelijkheden los je op door eerst de bijbehorende vergelijking op te lossen en vervolgens in een plot of schets de oplossing van de ongelijkheid af te lezen.

Voorbeeld

Los exact op $2 \sin(x - \frac{1}{3}\pi) < 1$ op het interval $[0, 2\pi]$.

Oplossing

$2\sin(x - \frac{1}{3}\pi) = 1$ geeft $\sin(x - \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}$.

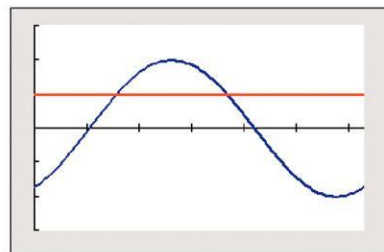
$\sin(p) = \frac{1}{2}$ geeft $p = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $p = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$, dus

$x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x - \frac{1}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.

$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ ($\frac{1}{3}\pi$ opgeteld)

Op het interval $[0, 2\pi]$: $x = \frac{1}{2}\pi$ of $x = 1\frac{1}{6}\pi$

Uit een plot lees je de oplossing af: $0 \leq x < \frac{1}{2}\pi$ of $1\frac{1}{6}\pi < x \leq 2\pi$



Ondersteunende route → maak opdracht 028

28 Los op het gegeven interval exact op.

- H**
- a** $\cos(x - \frac{3}{4}\pi) > \frac{1}{2}\sqrt{2}$ op $[-\pi, \pi]$
 - b** $3\sin(2x) + 1 \leq -\frac{1}{2}$ op $[0, 2\pi]$
 - c** $\sqrt{3} \cdot \cos(\frac{1}{10}x) + \frac{1}{2} < 2$ op $[-10\pi, 10\pi]$
 - d** $\sin(\frac{1}{2}(x + \frac{1}{3}\pi)) \geq 1$ op $[0, 6\pi]$

29 Los $\sin(x) \cdot \cos(2x) < 0$ op het interval $[-\pi, \pi]$ exact op.

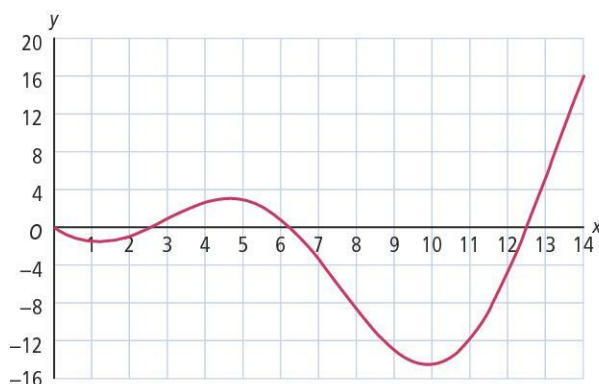
30 Op het interval $[0, 14]$ is gegeven de functie

$$f(x) = (2x - 5) \cdot \sin(\frac{1}{2}x).$$

- a** Bereken van elk van de drie toppen de coördinaten. Rond af op twee decimalen.
- b** Los exact op $(2x - 5) \cdot \sin(\frac{1}{2}x) \leq 0$.
- c** Los op $(2x - 5) \cdot \sin(\frac{1}{2}x) < -10$.

Rond je antwoord af op twee decimalen.

- d** Beredeneer met behulp van het functievoorschrift van f of de vergelijking $f(x) = 100$ op een groter interval oplossingen heeft.



- 31** Op de stroomvoerende draad in een wandcontactdoos schommelt de elektrische spanning 50 keer per seconde van -300 volt tot $+300$ volt. De formule $V = 300\sin(100\pi t)$ geeft het spanningsverloop in de tijd weer. Hierin is V de spanning in volt en is t de tijd in seconden.

- Onderzoek of de spanning op tijdstip $t = 0,05$ toeneemt of afneemt.
- Een spanning van meer dan 250 volt gedurende langere tijd kan slecht zijn voor bepaalde elektrische apparaten. Bereken hoeveel procent van de tijd de spanning hoger is dan 250 volt.
- In een elektrisch apparaat is de formule van het spanningsverloop $V^* = 60 \sin(100\pi t - 25)$. Hierin is V^* in volt en t in seconden. Vanaf $t = 0$ gerekend komt het tijdstip van de hoogste spanning van V^* iets eerder dan dat van V .

Onderzoek hoeveel seconden dit tijdstip vroeger is.

Rond je antwoord af op vier decimalen.

(Ontleend aan CE havo wiskunde B12 2004 tijdvak 2)

- 32** Het tijdstip van zonsopkomst varieert gedurende het jaar. Voor een niet-schrikkeljaar geldt in Nederland bij benadering de formule $O = 2,2 \cos\left(\frac{2\pi}{365}(t + 11)\right) + 6,5$ met O het uur van zonsopkomst (wintertijd) en t in dagen na 1 januari. In deze opdracht reken je uitsluitend in wintertijd.

- Hoe kun je aan de formule zien dat t in dagen is?
- Bereken het vroegste tijdstip en het laatste tijdstip van zonsopkomst.
- Hoeveel dagen per jaar komt de zon vóór 7 uur op?
- Zowel in de zomer als in de herfst worden de dagen naarmate het jaar vordert, steeds korter: de zon komt steeds later op. In de herfst neemt het tijdstip van zonopkomst echter sneller toe dan in de zomer. Laat met een berekening zien dat dit inderdaad zo is door bijvoorbeeld 1 oktober te vergelijken met 1 augustus.



Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten

028 Je gaat de ongelijkheid $\sin\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)\right) > \frac{1}{2}\sqrt{2}$ exact oplossen op het interval $[0, 2\pi]$.

a Stel $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) = q$ en vul in:

$$q = \dots + k \cdot 2\pi \text{ of } q = \dots + k \cdot 2\pi$$

b Vervang q door $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)$ en vul in.

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) = \dots + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) = \dots + k \cdot 2\pi$$

$$\frac{1}{2}x + \dots\pi = \dots + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{1}{2}x + \dots\pi = \dots + k \cdot 2\pi$$

$$\frac{1}{2}x = \dots + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{1}{2}x = \dots + k \cdot 2\pi$$

$$x = \dots + k \cdot \dots\pi \text{ of } x = \dots + k \cdot \dots\pi$$

c Plot en schets de grafiek van $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)\right)$ en de lijn $y = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ op het interval $[0, 2\pi]$ en lees de oplossing van de ongelijkheid af.

Uitdagende opdrachten

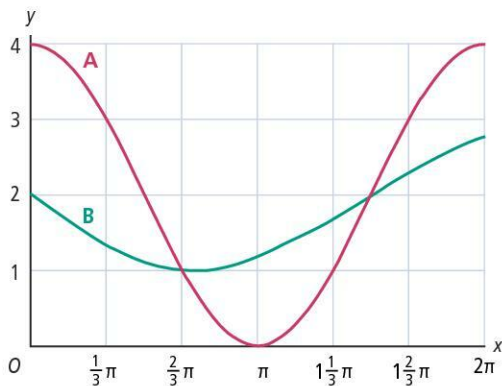
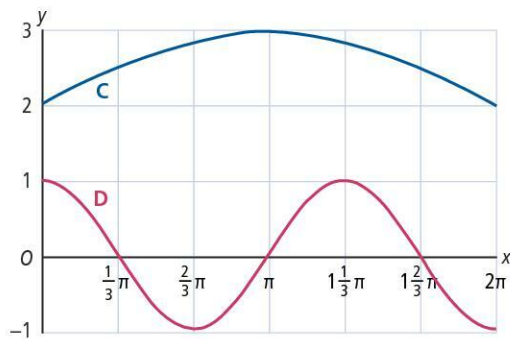
U4 De tijd tussen zonsopgang en zonsondergang wordt ook wel de daglengte genoemd. Op het noordelijk halfrond tussen de evenaar en de poolcirkel varieert de daglengte in de loop van het jaar. De daglengte D in uren is te benaderen met de formule $D = a \cdot \sin(0,12(t - 11,43)) + 12,18$. Hierbij is t de tijd in weken die sinds het begin van het jaar verlopen is en a een constante is die afhankelijk is van de breedtegraad. Op 21 juni is op het noordelijk halfrond de daglengte het grootst. De grootste daglengte G in uren op breedtegraad b is te benaderen met de formule

$$G = \begin{cases} 24 - 3,26 \cdot (66,5 - b)^{0,31} & \text{als } 0 \leq b < 66,5 \\ 24 & \text{als } 66,5 \leq b \leq 90 \end{cases}$$

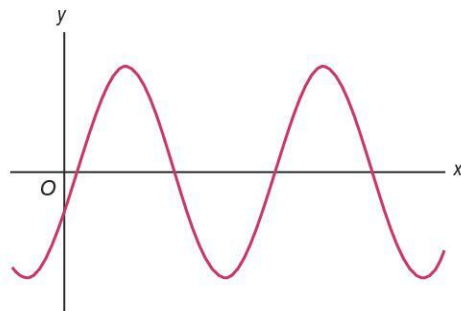
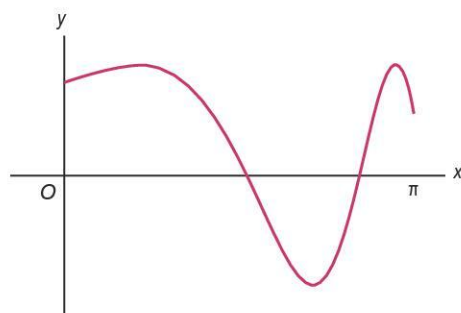
- a** Verklaar het getal 24 in tweede regel van de formule.
- b** Stel een formule op waarmee de daglengte D in uren, t weken na het begin van het jaar, op breedtegraad b te berekenen is.
- c** Bereken met behulp van deze formule hoeveel dagen per jaar in een plaats in Nederland op de 51e breedtegraad de daglengte langer dan 15 uur is.

12.5 Gemengde opdrachten

- 33** Gegeven zijn vier sinusoiden.
Geef bij elke sinusoid een passend functievoorschrift van de vorm $f(x) = a \cdot \sin(bx) + c$ of $f(x) = a \cdot \cos(bx) + c$.

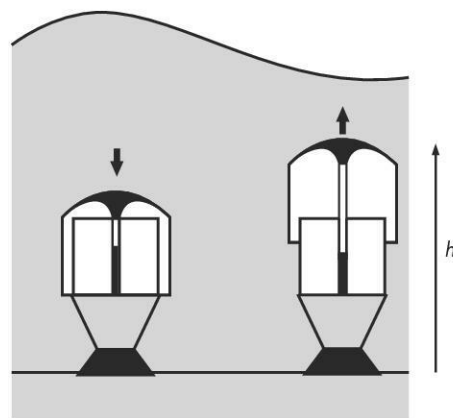


- 34** Los exact op.
- $1 + 2\cos(\frac{1}{2}x) = 2$ op het interval $[0, 6\pi]$
 - $\sin(\pi x) + 1 = 0$ op het interval $[-2, 2]$
 - $2\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) < \sqrt{3}$ op het interval $[0, 2\pi]$
- 35** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2\sin(\frac{2}{5}\pi x)$ en $g(x) = \sin(\frac{2}{5}\pi(x - 1))$.
- Hoe groot is de periode van f ? En hoe groot is die van g ?
 - In de figuur zie je dat de grafiek van de functie $s(x) = f(x) + g(x)$ een sinusoid is. Stel een passend functievoorschrift op voor s . Rond de constanten zo nodig af op twee decimalen.
 - Plot en schets de grafiek van $p(x) = f(x) \cdot g(x)$.
 - Ook deze grafiek is een sinusoid. Geef een passend functievoorschrift voor p . Rond de constanten zo nodig af op twee decimalen.
- 36** Op het interval $[0, \pi]$ is gegeven de functie $f(x) = \sin(2^x)$.
- Bereken algebraïsch de nulpunten van f . Rond af op twee decimalen.
 - Bereken algebraïsch de coördinaten van de toppen van de grafiek van f . Rond zo nodig af op twee decimalen.



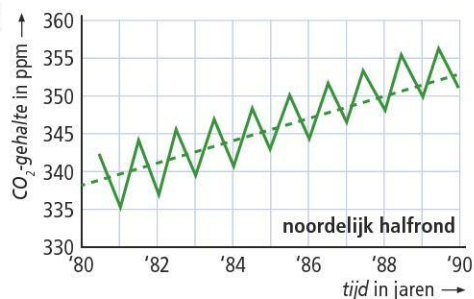
- 37** De Archimedes Wave Swing (afgekort AWS) is ontwikkeld om de golfbeweging van de zee te gebruiken om energie op te wekken. Van een bepaalde AWS bevindt de bovenkant van de drijver zich gemiddeld 4,0 meter onder de zeespiegel. De zeespiegel is de gemiddelde waterhoogte. De hoogte d van de bovenkant van deze drijver ten opzichte van de zeespiegel wordt beschreven door $d = -4,0 + 3,5 \sin(0,5t)$, met d de hoogte in meters en t de tijd in seconden. De waterhoogte ten opzichte van de zeespiegel hangt af van de amplitude van de golven. Hiervoor geldt de formule $w = -A \cdot \cos(0,5t)$. Hierin is w de waterhoogte in meters, A de amplitude van de golven ($A \geq 0,5$) in meters en t de tijd in seconden.

- Plot de grafieken van d en w voor $A = 0,5$ en ga daarmee na of de drijver soms boven het water uitsteekt.
- Het hangt van de amplitude van de golfbeweging af, of de drijver soms boven het water uitsteekt. Onderzoek met je rekenmachine vanaf welke amplitude van de golfbeweging de drijver af en toe boven water verschijnt. Rond je antwoord in meters af op één decimaal. (Ontleend aan CE havo wiskunde B 2010, tijdvak 1)



- 38** In de grafiek zie je het CO_2 -gehalte op het noordelijk halfrond in de jaren 80 van de vorige eeuw. In deze grafiek geeft de stippellijn de trend aan die de stijging van het CO_2 -gehalte in ppm (parts per million) weergeeft. De stippellijn wordt beschreven door de formule $T = mt + n$ waarbij t de tijd is in jaren. Neem $t = 0$ op 1 januari 1980.

- Geef met behulp van de figuur een benadering van m en n .
- De vorm van de schommeling is te benaderen met de formule $S = a \cos(bt)$. Geef een benadering van de waarden van a en b .
- Onderzoek rond welk jaar de concentratie voor het eerst hoger zal zijn dan 400 ppm als de trend zich op dezelfde manier voortzet.



Vaardigheid

Je kunt een functievoorschrift opstellen bij een gegeven sinusoïde.

- 1 Lees uit de grafiek het maximum en het minimum af.
- 2 Bereken $d = \frac{\text{maximum} + \text{minimum}}{2}$ en $a = \text{maximum} - d$.
- 3 Lees uit de grafiek de periode af; $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$
- 4 Lees uit de grafiek de horizontale verschuiving af.
Bij een cosinus is dat de x-coördinaat die bij een maximum hoort: $c = x_{\text{max}}$
Bij een sinus is dat waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.
- 5 Schrijf het functievoorschrift op.

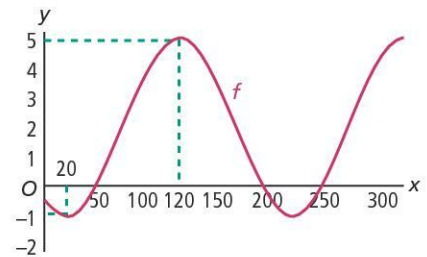
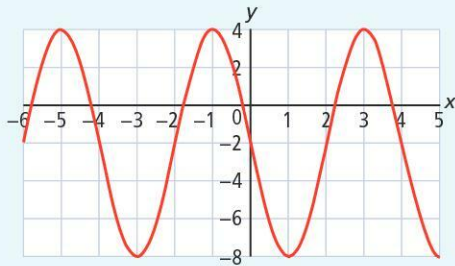
Voorbeeld

Stel een functievoorschrift op bij deze sinusoïde.

Oplossing

Omdat de toppen goed afleesbaar zijn, kun je hier het beste kiezen voor de cosinusfunctie $f(x) = d + a \cos(b(x - c))$.

- 1 Het maximum is 5, het minimum is -1.
- 2 $d = \frac{1}{2}(5 + (-1)) = 2$ en $a = 5 - 2 = 3$.
- 3 De halve periode is $120 - 20 = 100$, dus $b = \frac{2\pi}{200} = \frac{1}{100}\pi$.
- 4 Een top met maximale y-waarde is het punt (120, 5), dus $c = 120$.
- 5 $f(x) = 2 + 3 \cos\left(\frac{1}{100}\pi(x - 120)\right)$



- S1** Stel een functievoorschrift op
- a van de getekende sinusoïde.
 - b van een sinusoïde met periode 12, evenwichtsstand $y = -3$ en een top in het punt (5, 4).

Vaardigheid

Je kunt bij sommige waarden van x de exacte waarde van $\sin(x)$ en $\cos(x)$ bepalen.

Gebruik de symmetrie en de periodicititeit in de grafieken van $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$.

- S2 Je weet dat $\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.
Geef de exacte waarden en laat zien hoe je met behulp van symmetrie en periode aan je antwoord komt.

- a $\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)$ c $\sin\left(3\frac{1}{4}\pi\right)$
b $\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$ d $\sin\left(-5\frac{3}{4}\pi\right)$

Vaardigheid

Je kunt een vergelijking van de vorm $\sin(x) = p$ of $\cos(x) = p$ op een gegeven interval exact oplossen.

- 1 Los de vergelijking op het interval $[0, 2\pi]$ met behulp van de tabel en symmetrie op.
- 2 Gebruik de periode om oplossingen in het gegeven interval te vinden.

Voorbeeld

Los $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ op het interval $[-\pi, 3\pi]$ exact op.

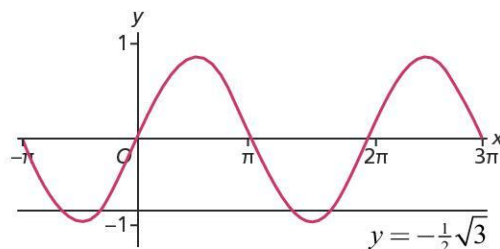
Oplossing

Op het interval $[0, 2\pi]$ zijn de oplossingen

$x = 1\frac{1}{3}\pi$ of, vanwege de symmetrie, $x = 1\frac{2}{3}\pi$.

De oplossingen op het interval $[-\pi, 3\pi]$ zijn

$x = -\frac{2}{3}\pi$ of $x = -\frac{1}{3}\pi$ of $x = 1\frac{1}{3}\pi$ of $x = 1\frac{2}{3}\pi$.



- S3 Los exact op.

- a $\sin(x) = -1$ op het interval $[-4\pi, 4\pi]$
b $\cos(x) = \frac{1}{2}$ op het interval $[-2\pi, 4\pi]$

Vaardigheid

Je kunt een vergelijking van de vorm $\sin(b(x - c)) = p$ of $\cos(b(x - c)) = p$ op een gegeven interval exact oplossen.

- 1 Stel $b(x - c) = q$ en los de vergelijking $\sin(q) = p$ exact op.
- 2 Bereken bij elk van de gevonden waarden van p de bijbehorende waarde van x . Vergeet niet ook de periode door b te delen.
- 3 Stel vast welke van de zo gevonden oplossingen op het gegeven interval liggen.

De vergelijking $\cos(b(x - c)) = p$ los je op een vergelijkbare manier op.

Voorbeeld

Los de vergelijking $2 \cos(\frac{1}{2}\pi(x + 2)) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ op het interval $[28, 32]$ exact op.

Oplossing

- 1 De oplossingen van $\cos(p) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ zijn

$$p = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ en } p = 1\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi.$$

- 2 $\frac{1}{2}\pi(x + 2) = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\frac{1}{2}\pi(x + 2) = 1\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$$x + 2 = \frac{\frac{1}{4}\pi}{\frac{1}{2}\pi} + k \cdot \frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} \text{ of } x + 2 = \frac{1\frac{3}{4}\pi}{\frac{1}{2}\pi} + k \cdot \frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi}$$

$$x = \frac{1}{2} - 2 + k \cdot 4 \text{ of } x = 3\frac{1}{2} - 2 + k \cdot 4$$

$$x = -1\frac{1}{2} + k \cdot 4 \text{ of } x = 1\frac{1}{2} + k \cdot 4$$

Op het interval $[28, 32]$ zijn de oplossingen

$$x = 30\frac{1}{2} \text{ (} k = 8 \text{) of } x = 29\frac{1}{2} \text{ (} k = 7 \text{)}.$$

S4 Los exact op.

- a $2 \sin(3(x - \frac{1}{3}\pi)) = -\sqrt{2}$ op het interval $[0, 2\pi]$
- b $2 \sin(\pi(x - \frac{1}{3})) = 1$ op het interval $[0, \pi]$
- c $2 \sin(3(x - \frac{1}{3}\pi)) \cdot \cos(2x) = 0$ op het interval $[0, \pi]$

Vaardigheid

Je kunt een goniometrische ongelijkheid exact oplossen.

Goniometrische ongelijkheden los je op door eerst de bijbehorende vergelijking op te lossen en vervolgens in een plot of schets de oplossing van de ongelijkheid af te lezen.

Voorbeeld

Los exact op $3 + 5 \sin(2x) > 5 \frac{1}{2}$ op het interval $[0, 2\pi]$.

Oplossing

$$3 + 5 \sin(2x) = 5 \frac{1}{2} \text{ geeft } \sin(2x) = \frac{1}{2}.$$

$$\sin(q) = \frac{1}{2} \text{ geeft } q = \frac{1}{6} \pi + k \cdot 2\pi \text{ of } q = \frac{5}{6} \pi + k \cdot 2\pi, \text{ dus}$$

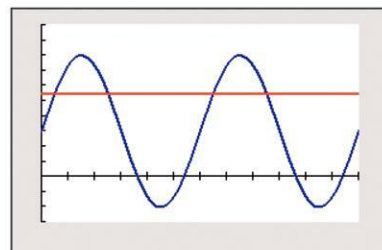
$$2x = \frac{1}{6} \pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = \frac{5}{6} \pi + k \cdot 2\pi.$$

$$x = \frac{1}{12} \pi + k \cdot \pi \text{ of } x = \frac{5}{12} \pi + k \cdot \pi \quad (\text{gedeeld door } 2)$$

Op het interval $[0, 2\pi]$:

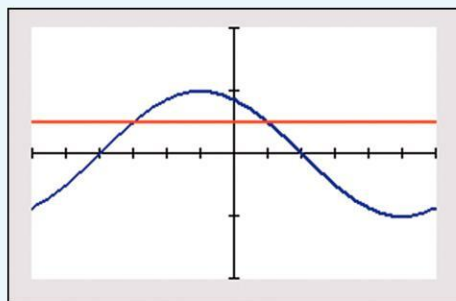
$$x = \frac{1}{12} \pi \text{ of } x = \frac{5}{12} \pi \text{ of } x = 1 \frac{1}{12} \pi \text{ of } x = 1 \frac{5}{12} \pi.$$

Uit een plot lees je de oplossing af: $\frac{1}{12} \pi < x < \frac{5}{12} \pi$ of $1 \frac{1}{12} \pi < x < 1 \frac{5}{12} \pi$.

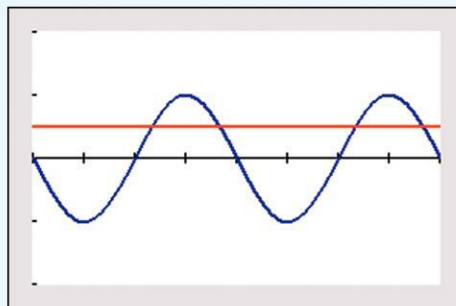


S5 Los exact op.

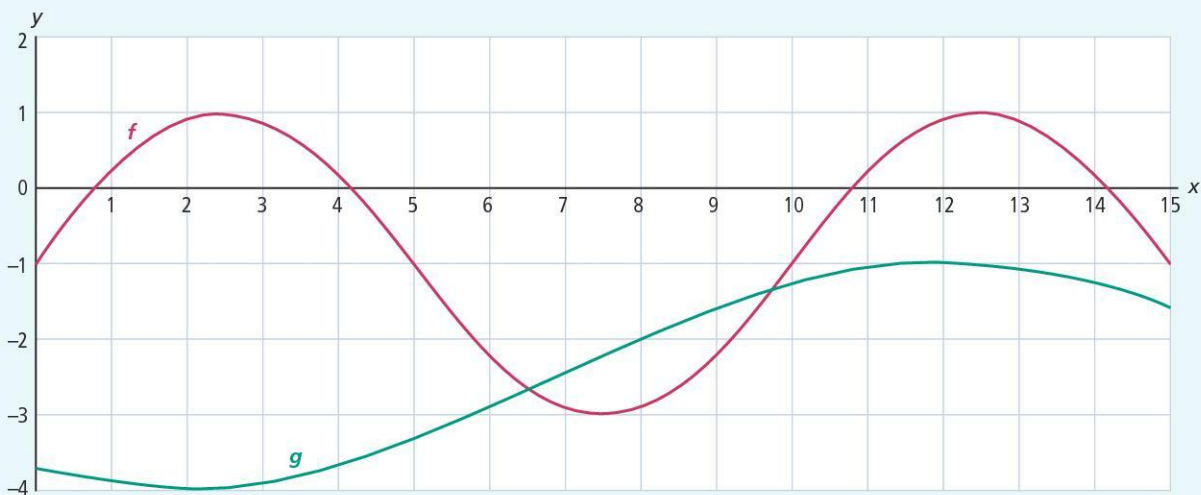
a $\cos\left(x + \frac{1}{6} \pi\right) \geq \frac{1}{2}$ op het interval $[-\pi, \pi]$



b $\sin\left(\frac{1}{2} x\right) + 1 \leq \frac{1}{2}$ op het interval $[2\pi, 10\pi]$



T1 Geef bij elke grafiek een passend functievoorschrift.



T2 Los exact op. Geef de oplossingen op het interval $[-\pi, 2\pi]$.

- a** $4 - 2\cos(x) = 3$ **c** $3\sin(x) = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$
b $8\cos(x) - 8 = 0$ **d** $\sin(x) + 1 = 1\frac{1}{2}$

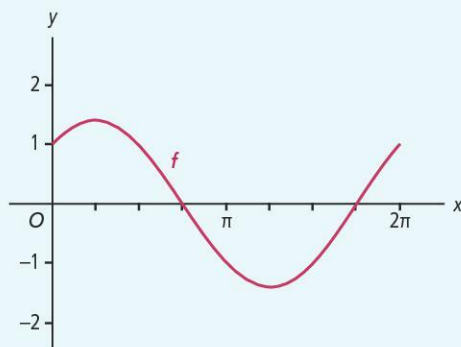
T3 Los op het gegeven interval exact op.

- a** $1\frac{1}{2} + 2\sin(\frac{1}{2}x) = 2\frac{1}{2}$ op $[0, 6\pi]$
b $4\cos(\pi(x - 2)) < 2\sqrt{3}$ op $[0, 5]$
c $\sin(2x) \cdot \cos(x - \frac{1}{3}\pi) = 0$ op $[0, 2\pi]$
d $3\sin(x) - 6\sin^2(x) = 0$ op $[0, 2\pi]$

T4 Op het interval $[0, 2\pi]$ is de grafiek van de functie $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ getekend.

De grafiek van f is een sinusoïde.

- a** Wat is de periode van f ?
b Toon aan dat $f(\frac{3}{4}\pi) = 0$.
c Beredeneer wat de x -coördinaten van de toppen van de grafiek zijn op het interval $[0, 2\pi]$ en bereken exact de extreme waarden van f op dat interval.
d Geef een functievoorschrift van f van de vorm $f(x) = a\sin(b(x - c))$.
e Geef ook een functievoorschrift van f van de vorm $f(x) = a\cos(b(x - c))$.



- T5** Van een grote klok zijn de wijzers beide 1 meter lang. De hoogte van de eindpunten van de wijzers ten opzichte van de lijn door 9 en 3 wordt gegeven door $g = \cos(2\pi t)$ en $k = \cos(\frac{1}{6}\pi t)$ met t in uren en $t = 0$ om 12.00 uur.

- Welke formule hoort bij de wijzer die de uren aangeeft? Waarom?
- Bereken op welke tijdstippen tussen 12.00 uur en 03.00 uur de wijzers samenvallen. Geef de antwoorden in minuten nauwkeurig.
- Hoeveel keer gedurende een etmaal vallen de wijzers samen?



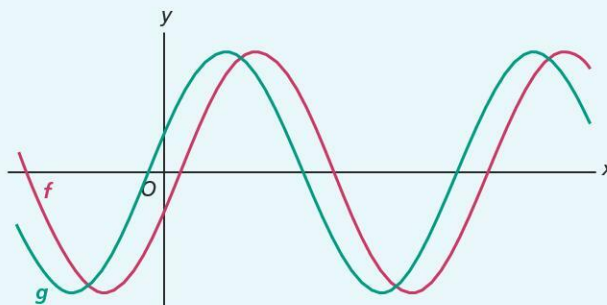
- T6** De bloeddruk verandert periodiek onder invloed van de hartslag. Zo is de bloeddruk van mevrouw Busse op 3 mei 2021 te benaderen met de formule $p = 110 + 20 \sin(3\pi t)$ met p in millimeter kwik en t in seconden.

- Bereken de periode van de bloeddruk.
- Wat was de hoogste bloeddruk (bovendruk) en wat was de laagste bloeddruk (onderdruk) van mevrouw Busse op 3 mei 2011?
- Op 10 juni van dat jaar werd geconstateerd dat mevrouw Busse een te hoge bloeddruk had. Haar onderdruk was 115, haar bovendruk 175. Het hart maakte toen gemiddeld 80 slagen per minuut. Stel een passende formule op voor de bloeddruk.



- T7** Gegeven zijn de functies $f(x) = 4\sin(x - \frac{1}{10}\pi)$ en $g(x) = 4\sin(x + \frac{1}{10}\pi)$.

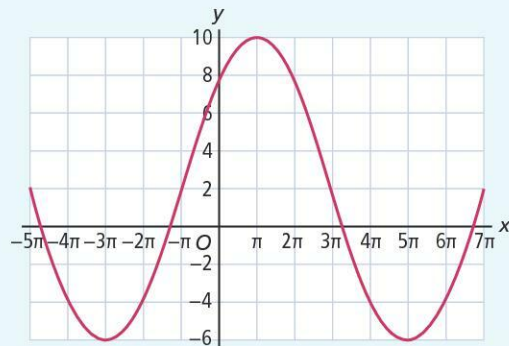
- Bereken exact een mogelijke waarde waarover je de grafiek van f horizontaal kunt verschuiven, zodat deze samenvalt met de grafiek van g .
- Gegeven is de functie $v(x) = f(x) - g(x)$. Het functievoorschrift van v kan geschreven worden in de vorm $v(x) = d + a\sin(b(x - c))$. Bereken mogelijke waarden van a , b , c en d . Rond de gevonden waarden zo nodig af op twee decimalen.



(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2012, tijdvak 2)

Je kunt een functievoorschrift opstellen bij een gegeven sinusoïde.

- E1** a In de figuur zie je de grafiek van de functie $f(x) = d + a \cos(b(x - c))$.
Stel een passend functievoorschrift van f op.
- b De grafiek van een functie g is een sinusoïde die stijgend door de evenwichtsstand gaat in het punt $S(4, 3)$.
De eerstvolgende top van de sinusoïde is het punt $T(8, 7)$.
Stel een passend functievoorschrift op van g .



Je kunt bij sommige waarden van x de exacte waarde van $\sin(x)$ en $\cos(x)$ bepalen.

- E2** Beredeneer, zonder je rekenmachine te gebruiken, de exacte waarden van $\sin(17\frac{1}{2}\pi)$, $\sin(-1\frac{5}{6}\pi)$, $\cos(1\frac{3}{4}\pi)$ en $\cos(-1\frac{1}{3}\pi)$.

Je kunt een vergelijking van de vorm $\sin(x) = p$ of $\cos(x) = p$ op een gegeven interval exact oplossen.

- E3** Los exact op.
- a $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ op $[3\pi, 6\pi]$
- b $6\sin(x) + 8 = 5$ op $[-2\pi, 2\pi]$

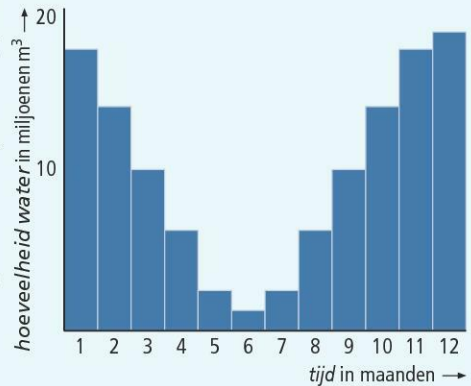
Je kunt een vergelijking van de vorm $\sin(b(x - c)) = p$ of $\cos(b(x - c)) = p$ op een gegeven interval exact oplossen.

- E4** Los op het interval $[0, 2\pi]$ exact op.
- a $2\sin(2x) = \sqrt{2}$ c $6 - \sin(\frac{1}{2}x) = 5\frac{1}{2}$
- b $3 + 4\cos(\frac{1}{2}x) = 1$ d $8x^2 \cdot \cos(x - \frac{1}{3}\pi) = 0$

Je kunt een goniometrische ongelijkheid exact oplossen.

- E5** Los de ongelijkheden op het gegeven interval exact op.
- a $2\sin(3x) < 0$ op $[0, 2\pi]$
- b $12\sin(\frac{1}{2}x) + 5 \geq 17$ op $[0, 6\pi]$
- c $3 - 2\cos(\frac{1}{4}\pi(x + 2)) < 2$ op $[0, 10]$

- E6** In het staafdiagram zie je de hoeveelheid regenwater die in een bepaald gebied gevallen is. Die hoeveelheid kan bij benadering beschreven worden door de formule $r = 10 + 9 \cos\left(\frac{1}{6}\pi t\right)$ met r de hoeveelheid water in miljoenen m^3 en t de tijd in maanden.



De maand januari komt overeen met $t = 1$.

- In welke maand valt er de minste neerslag? Hoeveel m^3 is dat?
 - Van het regenwater uit het gebied bereikt 40% het verderop gelegen stuwmeer één maand later. Geef een formule voor de hoeveelheid regenwater s die het stuwmeer maandelijks bereikt.
 - Bereken s voor $t = 4$. Wat betekent deze uitkomst?
 - Welke hoeveelheid water is groter, de hoeveelheid neerslag in juni of de hoeveelheid regenwater die in juni het stuwmeer bereikt?
- E7** De vergelijking $4x \cdot \sin(x) + 2x = 0$ kun je oplossen door $2x$ buiten haakjes te brengen. Zo is de vergelijking te herleiden tot $2x \cdot (2 \sin(x) + 1) = 0$.
- Los de vergelijking op het interval $[0, 2\pi]$ exact op.
 - Los exact op $4x \cdot \sin(3x) + 2 \cdot \sin(3x) = 0$ op $[-\pi, \pi]$.

- E8** Gegeven is de functie $f(x) = 2 - 4 \sin\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{6}\pi\right)\right)$. De grafiek van f wordt gespiegeld in de x -as en vermenigvuldigd ten opzichte van de y -as met factor 2. Geef een functievoorschrift van de beeldgrafiek.

- E9** De waterhoogte in de Waddenzee kan op een bepaalde dag worden beschreven door de formule $W = 0,7 + \cos(0,5t)$ met W de waterhoogte in meters ten opzichte van NAP en t de tijd in uren.
- Plot de grafiek van W en geef de maximale waterhoogte. Voor een droogvallende plaat geldt de formule alleen als $W \geq 0$. De grafiek valt samen met de t -as als W een negatieve waarde heeft.
 - Op welk tijdstip valt de plaat op die dag voor de eerste keer droog? En wanneer voor de tweede keer? Hoelang staat de plaat per periode droog?
 - Een schoolklas begint om 4.00 uur met een wadlooptocht. Het duurt vijf uur om het wad over te steken. Er is geen gevaar zolang het water minder dan 60 cm hoog is. Hoeveel minuten vertraging kunnen de leerlingen oplopen zonder in gevaar te komen?





In dit hoofdstuk

Hoofdstuk 5 ging over vergelijkingen van lijnen, hoeken tussen lijnen en afstanden tot lijnen.

In hoofdstuk 9 heb je gezien welke eigenschap een punt heeft dat op de middelloodlijn van een lijnstuk ligt.

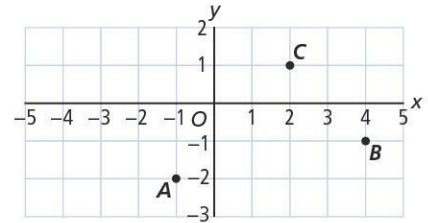
In dit hoofdstuk ga je werken met cirkels: vergelijkingen van cirkels opstellen, cirkels snijden, raaklijnen aan cirkels opstellen en afstanden tot cirkels berekenen.

De meetkunde van het examenprogramma havo wiskunde B wordt met dit hoofdstuk afgesloten.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk:

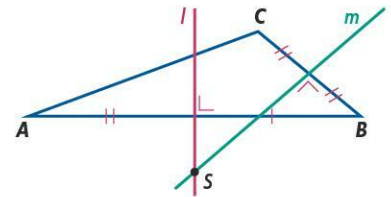
- | | |
|---|-------------|
| • Logisch redeneren en bewijzen | opdracht 39 |
| • Ordenen en structureren | opdracht 48 |
| • Probleemoplossen en analytisch denken | opdracht 49 |

- V1** In een assenstelsel zijn de punten A , B en C getekend.
- Bereken de lengte van de lijnstukken AB , BC en AC .
 - Gebruik de antwoorden van opdracht a om aan te tonen dat driehoek ABC een rechthoekige driehoek is.



- V2** Gegeven zijn de punten $A(4, -2)$ en $B(16, 4)$.
- Stel een vergelijking op van lijn AB .
 - Bereken de coördinaten van het midden M van lijnstuk AB .
 - Toon aan dat de lijn met vergelijking $y = -2x + 21$ de middelloodlijn is van lijnstuk AB .
 - Elk punt van de middelloodlijn van lijnstuk AB is te schrijven als $P(p, -2p + 21)$.
Toon aan dat elk punt op de middelloodlijn gelijke afstanden heeft tot A en B .

- V3** In de figuur is lijn l de middelloodlijn van zijde AB en lijn m de middelloodlijn van zijde BC . Het snijpunt van de lijnen l en m is punt S .
Beredeneer dat punt S ook op de middelloodlijn van zijde AC ligt.

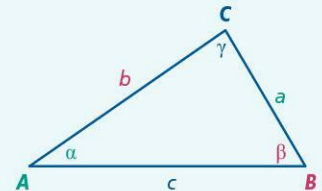


Theorie

In elke driehoek geldt de **sinusregel**:

Als α , β en γ de grootten van de hoeken zijn van een driehoek en de lengten van de tegenoverliggende zijden zijn a , b en c , dan

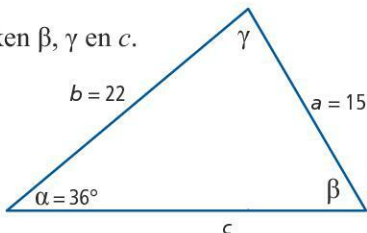
$$\text{geldt } \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$



Voorbeeld

Gegeven is $\triangle ABC$ met $a = 15$, $b = 22$ en $\alpha = 36^\circ$.

Bereken β , γ en c .



Oplossing

$$\frac{15}{\sin(36^\circ)} = \frac{22}{\sin(\beta)} \text{ geeft } \sin(\beta) = \frac{22 \cdot \sin(36^\circ)}{15} = 0,8620\dots$$

$$\text{dus } \beta \approx 60^\circ \text{ en } \gamma \approx 180^\circ - 36^\circ - 60^\circ = 85^\circ.$$

$$\frac{15}{\sin(36^\circ)} = \frac{c}{\sin(85^\circ)} \text{ geeft } c = \frac{15 \cdot \sin(85^\circ)}{\sin(36^\circ)} \approx 25,4.$$

V4 Bereken de lengte van de onbekende zijden en de grootte van de onbekende hoeken van $\triangle ABC$. Rond lengtes af op één decimaal en hoeken op hele graden.

a $\alpha = 110^\circ$, $\beta = 60^\circ$ en $b = 5,4$

b $\beta = 87^\circ$, $\gamma = 54^\circ$ en $a = 7$

c $a = 39$, $b = 54$ en $\beta = 69^\circ$

V5 **a** Ga met je rekenmachine na dat $\sin(70^\circ) = \sin(110^\circ)$.

b Vul in: $\sin(130^\circ) = \sin(\dots)$.

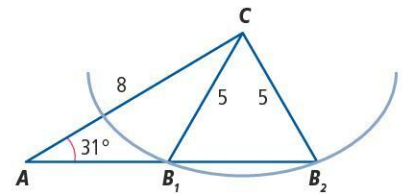
c Vul in: $\sin(\alpha) = \sin(\dots)$.

V6 Van $\triangle ABC$ is gegeven $\alpha = 31^\circ$, $a = 5$ en $b = 8$.

Met deze gegevens kunnen twee driehoeken worden getekend.

a Bereken in graden nauwkeurig $\angle AB_1C$ en $\angle AB_2C$.

b Bereken de lengte van zijde AB_1 en van zijde AB_2 . Rond af op één decimaal.



Theorie

In een driehoek kun je een zijde berekenen als je de tegenoverliggende hoek en de lengte van de andere zijden kent. De regel die je gebruikt heet de geldt

cosinusregel.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

Je kunt deze formules ook gebruiken om de grootte van de hoeken te berekenen als je van een driehoek de lengte van alle drie zijden kent.

Voorbeeld

Van $\triangle ABC$ is gegeven $b = 11$, $c = 7$ en

$$\alpha = 41^\circ.$$

Bereken a .

Oplossing

$$a^2 = 11^2 + 7^2 - 2 \cdot 11 \cdot 7 \cdot \cos(41^\circ) = 53,774\dots$$

$$\text{dus } a = \sqrt{53,774\dots} \approx 7,3.$$

V7 **a** Van $\triangle PQR$ is gegeven $PQ = 31$, $PR = 12$ en $\angle P = 123^\circ$.

Bereken in één decimaal de lengte van de zijde QR .

b $\triangle KLM$ heeft zijden $KL = 15$, $LM = 18$ en $KM = 12$.

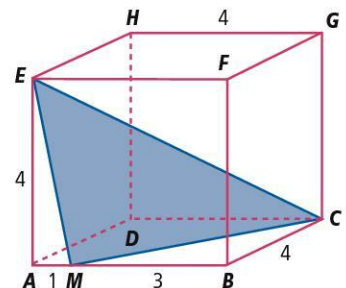
Bereken de grootte van de hoeken van $\triangle KLM$. Rond af op hele graden.

V8 Gegeven is de kubus $ABCD.EFGH$ met ribbe 4.

Punt M ligt op ribbe AB zo dat $AM = 1$.

a Bereken de exacte lengte van de lijnstukken MC , ME en EC .

b Bereken de grootte van de hoeken van $\triangle MCE$ in graden nauwkeurig.



13.1 Lijnen

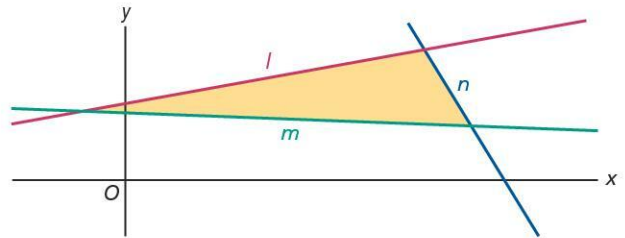
- Je herhaalt**
- hoe je de vergelijking van een lijn herleidt tot een andere vorm
 - hoe je de hoek tussen twee lijnen berekent
 - hoe je de afstand van een punt tot een lijn berekent

- Leerroutes**
- ondersteunend: 1–2–03–3–4–5–6–7–08–9–10
 - doorlopend: 1–2–3–4–5–6–7–8–9–10–11
 - uitdagend: 1–2–3–5–7–8–9–10–11–U1–U2

De lijnen met vergelijkingen $l: \frac{x}{-12} + \frac{y}{6} = 1$,

$m: x + 4y = 22$ en $n: y = -4x + 42$ sluiten een driehoek in.

- Op welke manieren kun je de oppervlakte van de driehoek berekenen?



- 1 Gegeven is de lijn met vergelijking $3x + 4y = 12$.
- Bereken de coördinaten van de snijpunten met de assen.
 - Schrijf de vergelijking in de vorm $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.
 - Hoe kun je in de vergelijking van opdracht b de snijpunten met de assen herkennen?
 - Schrijf de vergelijking in de vorm $y = mx + n$.

Theorie

Een **vergelijking van een lijn** l kun je op verschillende manieren weergeven:

- in de vorm $ax + by = c$.
Als $a = 0$ dan is l evenwijdig aan de x -as,
als $b = 0$ dan is l evenwijdig aan de y -as.
- in de vorm $y = mx + n$, mits l niet evenwijdig is aan de y -as.
- in de vorm $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$, als l de assen snijdt in $(p, 0)$ en $(0, q)$ met $p \neq 0$ en $q \neq 0$.

Als twee lijnen k en l met richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 **loodrecht** op elkaar staan, dan geldt $m_1 \cdot m_2 = -1$. Het omgekeerde is ook waar.

Voorbeeld

Lijn l gaat door $(-6, 0)$ en $(0, 2)$.
Stel een vergelijking van l op in de vorm $y = mx + n$ en toon aan dat l loodrecht staat op lijn $k: y = -3x + 8$.

Oplossing

Er geldt $l: \frac{x}{-6} + \frac{y}{2} = 1$.

Links en rechts vermenigvuldigen met 6 geeft $-x + 3y = 6$ ofwel $y = \frac{1}{3}x + 2$.

De richtingscoëfficiënt van l is $\frac{1}{3}$.

De richtingscoëfficiënt van k is -3 .
 $\frac{1}{3} \cdot -3 = -1$ dus $l \perp k$.

- 2 a Schrijf $y = -1\frac{1}{5}x + 3$ in de vorm $ax + by = c$.
- b Schrijf $y = -\frac{2}{5}x + 10$ in de vorm $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

Ondersteunende route → maak opdracht 03

- 3 a Stel een vergelijking op van de lijn m door het punt $P(-2, 8)$ loodrecht op lijn $n: 3x - 8y = 9$.
- b Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van lijnstuk AB met $A(-2, 7)$ en $B(6, 1)$.

- 4 Sitah en Sean willen het snijpunt van de lijnen $m: -5x + 4y = -7$ en $n: 3x + 4y = 17$ bepalen. Op het blaadje zie je hoe ze begonnen zijn.
- a Maak beide berekeningen af en geef de coördinaten van het snijpunt van de lijnen m en n .
- b Welke methode vind je in dit geval het handigst: gelijkstellen of substitutie?
- c Los de stelsels vergelijkingen op. Bedenk daarbij telkens of gelijkstellen of substitutie de handigste methode is.

$$A \begin{cases} -a + 4b = 8 \\ 2a + 3b = 17 \end{cases}$$

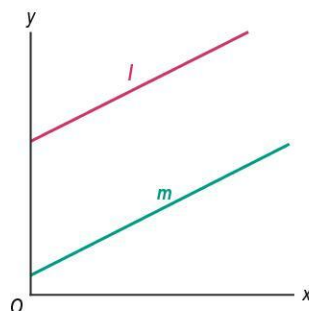
$$B \begin{cases} 3v + 7w = 7 \\ 2v + 3w = -2 \end{cases}$$

	Sitah				
●	$m: y = 1\frac{1}{4}x - 1\frac{3}{4}$ en				
●	$n: y = -\frac{3}{4}x + 4\frac{1}{4}$				
●	$1\frac{1}{4}x - 1\frac{3}{4} = -\frac{3}{4}x + 4\frac{1}{4}$				
●	...				
●	Sean				
●	$m: 4y = 5x - 7$ en				
●	$n: 3x + 4y = 17$				
●	$3x + (5x - 7) = 17$				
●	...				

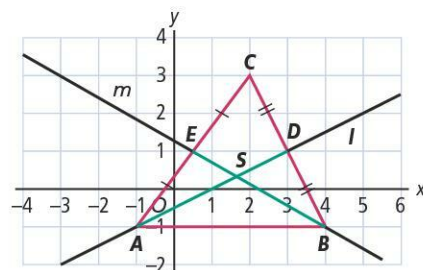
- 5 a Gegeven zijn de lijnen $l: x + 5y = 18$ en $m: 2x - y = 3$. Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van l en m .
- b Los exact op: $\begin{cases} y = -\frac{2}{5}x + 5 \\ \frac{x}{10} + \frac{y}{4} = 1 \end{cases}$
- c Hoe liggen de lijnen die bij het stelsel uit opdracht b horen ten opzichte van elkaar?
- 6 Gegeven zijn lijn $m: 2x - 3y = 1$ en punt $R(4, -2)$.
- a Stel een vergelijking op van de loodlijn n op lijn m door R .
- b Bereken de coördinaten van het snijpunt S van m en n .
- c Bereken exact de lengte van lijnstuk RS .
- 7 a Gegeven zijn punt $P(7, 2)$ en lijn $k: y = \frac{3}{4}x + 3$. Bereken exact de afstand van punt P tot lijn k .
- b Gegeven zijn punt $Q(0, -6)$ en lijn $l: 3x + 5y = 4$. Bereken exact de afstand van punt Q tot lijn l .

Ondersteunende route → maak opdracht O8

- 8 Gegeven zijn de lijnen $l: x - 2y + 17 = 0$ en $m: y = \frac{1}{2}x + 1$. Bereken exact de afstand tussen de lijnen l en m .



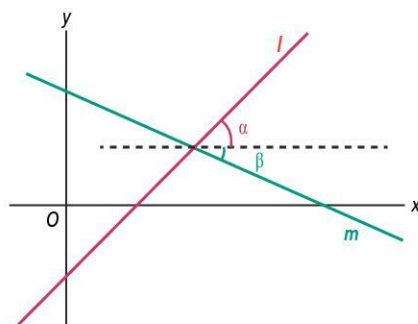
- 9 Gegeven is $\triangle ABC$ met de hoekpunten $A(-1, -1)$, $B(4, -1)$ en $C(2, 3)$. Een lijnstuk in een driehoek dat een hoekpunt verbindt met het midden van de zijde ertegenover, heet een zwaartelijn. In $\triangle ABC$ zijn de zwaartelijnen AD en BE getekend.
- Toon aan dat de zwaartelijnen AD en BE respectievelijk op de lijnen $l: x - 2y = 1$ en $m: 4x + 7y = 9$ liggen.
 - Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de zwaartelijnen.
 - Toon aan dat punt S elk van de zwaartelijnen AD en BE verdeelt in stukken die zich verhouden als $1 : 2$.



- 10 Gegeven zijn de lijnen $l: 6x - 5y = 15$ en $m: y = -\frac{1}{2}x + 5$. α is de hoek die l maakt met een horizontale lijn. β is de hoek die m maakt met een horizontale lijn.

H

- Bereken α en β .
- Bereken de grootte van de hoek die de lijnen l en m met elkaar maken. Rond af op hele graden.



- 11 Gegeven $\triangle OAB$ met $O(0, 0)$, $A(6, 2)$ en $B(2, 4)$. Op zijde AB ligt punt P zodat OP een zwaartelijn is.
- Stel een vergelijking op van de lijn OP .
 - Bereken exact de lengte van de zijden van $\triangle OAP$.
 - Bereken de grootte van de hoeken van $\triangle OAP$ in graden nauwkeurig.

Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2

Ondersteunende opdrachten

03 Gegeven zijn lijn $l: 2x + 4y = 9$ en punt $A(5, -6)$. Je gaat een vergelijking opstellen van de lijn k door punt A die loodrecht op l staat. Op het blaadje is daarmee een begin gemaakt.

- a** Lees uit stap 1 de richtingscoëfficiënt van l af.
- b** Leg uit wat m_1 en m_2 in stap 2 betekenen.
- c** Bereken m_2 in stap 3.
- d** In stap 4 staat een vergelijking van k .
Vul m_2 en de coördinaten van A in en bereken b .

Gegeven zijn verder de punten $P(3, 8)$ en $Q(7, 2)$.

Je gaat een vergelijking opstellen van de middelloodlijn n van lijnstuk PQ .

- e** Bereken de coördinaten van het midden M van lijnstuk PQ .
- f** Bereken de richtingscoëfficiënt van de lijn door P en Q .
- g** De middelloodlijn n staat loodrecht op de lijn PQ .
Bereken de richtingscoëfficiënt van n .
- h** Stel een vergelijking op van n .

08 Gegeven zijn de lijnen $l: y = 4x - 8$ en $m: 4x - y = 42$.

Je gaat in deze opdracht $d(l, m)$ berekenen.

- a** Laat zien dat l en m evenwijdig zijn.
- b** Kies een punt P op m , bijvoorbeeld $(11, 2)$ en stel een vergelijking op van lijn n door P , loodrecht op l .
- c** Bereken exact de coördinaten van het snijpunt S van n en l .
- d** Waarom is $d(P, l) = PS$?
- e** Bereken exact $d(P, l)$.
- f** Hoe groot is $d(l, m)$?
- g** Had je een andere afstand gevonden als je punt P anders had gekozen?

Gegeven zijn de lijnen $k: x + 3y = 15$ en $h: y = -\frac{1}{3}x + 15$.

- h** Bereken exact de afstand tussen de lijnen k en h .

☐	$2x + 4y = 9$				
☐	$4y = -2x + 9$				
☐	$y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{4}$				1
☐	$k \perp l$ dus $m_1 \cdot m_2 = -1$.				2
☐	$-\frac{1}{2} \cdot m_2 = -1$ geeft $m_2 = \dots$				3
☐	$k: y = \dots x + b$				4
☐					

Uitdagende opdrachten

U1 Lijn l snijdt lijn $m: 2x - 3y = 9$ in het punt $S(6, 1)$.

l en m maken een hoek van 15° met elkaar.

- a** Waarom zijn er twee lijnen l mogelijk?
- b** Geef een vergelijking van elk van deze twee lijnen.
Rond de getallen in je antwoorden af op twee decimalen.

U2 Gegeven is lijn $k: 4x + 3y = 33$. Lijn l staat loodrecht op k en snijdt k op de y -as. Op lijn l liggen twee punten A en B die op afstand $7\frac{1}{2}$ van k liggen.

Bereken exact de coördinaten van A en van B .

13.2 Vergelijking van een cirkel

Je leert

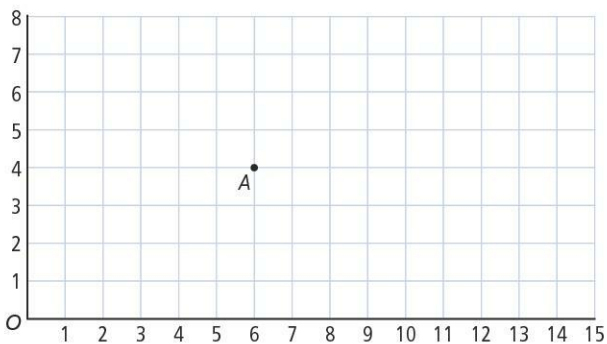
- wat de middelpuntsvergelijking van een cirkel is
- hoe je met kwadraat afsplitsen een vergelijking van een cirkel herleidt tot een middelpuntsvergelijking

Leerroutes

- ondersteunend: 12–13–14–15–16–17–O18–18
- doorlopend: 12–13–14–15–16–17–18–19
- uitdagend: 13–14–15–16–18–19–U3–U4

Kay wil weten hoeveel roosterpunten op een afstand kleiner dan 4 liggen van punt $A(6, 4)$.

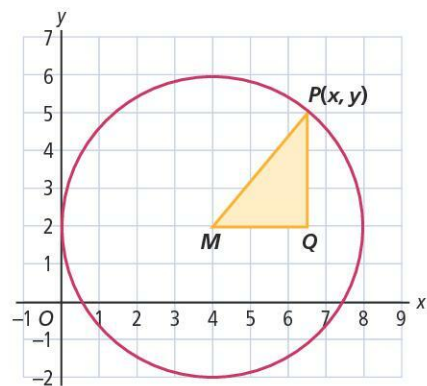
- Hoe kan Kay het handig aanpakken om dat aantal te bepalen?



- 12**
- Teken in een assenstelsel punt $B(-3, -2)$ en bereken exact de afstand van punt B tot de oorsprong $O(0, 0)$.
 - Geef de coördinaten van nog twee punten die dezelfde afstand tot O hebben als punt B .
 - Waar liggen alle punten die dezelfde afstand tot O hebben als punt B ?
 - Leg uit dat alle punten $P(x, y)$ die even ver van O liggen als punt B aan de vergelijking $x^2 + y^2 = 13$ voldoen.
 - Aan welke vergelijking voldoen alle punten $P(x, y)$ die op een afstand 6 van O liggen?

- 13** Gegeven is cirkel c met middelpunt $M(4, 2)$ en straal 4. Op de cirkel ligt een punt $P(x, y)$.

- Leg uit dat geldt $MQ = x - 4$ in het geval P op de rechterhelft van de cirkel ligt.
- Leg uit dat $MQ = 4 - x$ in het geval P op de linkerhelft van de cirkel ligt.
- Druk PQ uit in y .
- Druk MP^2 uit in x en y .
- Toon aan dat de coördinaten van P voldoen aan de vergelijking $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$.
- Cirkel d heeft middelpunt $(3, -4)$ en straal 5. Stel een vergelijking op van d .



Theorie

Bij de cirkel met middelpunt $M(a, b)$ en straal r hoort de vergelijking $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Zo'n vergelijking noem je de **middelpuntsvergelijking** van de cirkel.

Voorbeeld

Geef de middelpuntsvergelijking van de cirkel met middelpunt $(-2, 1)$ en straal $3\sqrt{2}$.

Oplossing

De middelpuntsvergelijking van de cirkel is $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = (3\sqrt{2})^2$ ofwel $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 18$.

- 14** **H** a Gegeven is cirkel c met middelpunt $(-4, -7)$ en straal 8. Stel de middelpuntsvergelijking op van c .
b Gegeven zijn de punten $A(-1, -3)$ en $B(4, -2)$. Cirkel d heeft middelpunt B en gaat door A . Stel de middelpuntsvergelijking op van d .
c Toon met een berekening aan dat punt $C(3, 3)$ op d ligt.
d Geef de coördinaten van het middelpunt en de straal van de cirkel e met vergelijking $(x + 7)^2 + (y - 5)^2 = 13$.
- 15** Gegeven is cirkel c : $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 26$.
a Geef de coördinaten van het middelpunt en de straal van c .
b Toon aan dat de vergelijking te schrijven is als $x^2 + y^2 - 8x + 2y = 9$.

Voor een vergelijking van een cirkel zijn twee notaties gebruikelijk. De eerste is in de vorm van een middelpuntsvergelijking $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. De tweede is in de vorm $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$. In opdracht 15 heb je de eerste vorm omgewerkt naar de tweede vorm, in opdracht 16 en 17 leer je hoe je de tweede vorm kunt herleiden naar een middelpuntsvergelijking.

- 16** a Vul in: $(x - 4)^2 = x^2 - \dots x + \dots$ dus $x^2 - 8x = (x - 4)^2 - \dots$
b Vul in: $(y + 2)^2 = y^2 + \dots y + \dots$ dus $y^2 + 4y = (y + \dots)^2 - \dots$
c Siem schrijft op: $x^2 + 14x = (x + 7)^2 - \dots$
Leg uit hoe Siem aan het getal 7 komt.
d Welk getal moet Siem op de puntjes invullen?
e Vul in: $y^2 - 12y = (y - \dots)^2 - \dots$

- 17** Gegeven is cirkel c : $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$.
Om de middelpuntsvergelijking te vinden, ga je kwadraat
afsplitsen. Zet eerst de termen met een factor x bij elkaar en
ook de termen met een factor y : $x^2 - 8x + y^2 + 2y + 12 = 0$.
- a** Op het blaadje is een begin gemaakt met de herleiding
tot de middelpuntsvergelijking. Maak de herleiding af.
 - b** Geef de coördinaten van het middelpunt en de straal van c .

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + y^2 + 2y + 12 &= 0 \\ (x - \dots)^2 - \dots + (y + \dots)^2 - \\ \dots + 12 &= 0 \\ (x - \dots)^2 + (y + \dots)^2 &= \dots \end{aligned}$$

Theorie

Door twee keer **kwadraat afsplitsen** toe te passen op de vergelijking $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$ kun je de vergelijking herleiden tot de middelpuntsvergelijking.

Voorbeeld

Herleid $x^2 + y^2 - 16x + 12y + 75 = 0$ tot de middelpuntsvergelijking.

Oplossing

$$x^2 - 16x = (x - 8)^2 - 64 \text{ en}$$

$$y^2 + 12y = (y + 6)^2 - 36$$

De vergelijking kan herschreven worden als

$$(x-8)^2 - 64 + (y+6)^2 - 36 + 75 = 0 \text{ ofwel}$$

$$(x-8)^2 + (y+6)^2 = 25.$$

Ondersteunende route → maak opdracht 018

- 18** Herleid tot de middelpuntsvergelijking en geef de coördinaten van het middelpunt en de straal van de cirkel.

H

- a** $x^2 + y^2 + 4y = 9$
b $x^2 + y^2 - 10x - 24y = 0$
c $x^2 + y^2 - 3x - y + \frac{1}{2} = 0$
d $x^2 + y^2 - 2\sqrt{3} \cdot x + 4\sqrt{2} \cdot y + 4 = 0$

- 19** De cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = 0$ gaat behalve door de oorsprong ook door de punten $P(1, 5)$ en $Q(6, 4)$.
- a** Controleer dat de cirkel door de oorsprong gaat.
 - b** Bereken a en b .
 - c** Bereken exact de coördinaten van het middelpunt en de straal van de cirkel.

Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4

Ondersteunende opdrachten

018

Gegeven is cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 + 10x - 6y + 9 = 0$. In deze opdracht ga je de vergelijking van c herleiden tot een middelpuntsvergelijking.

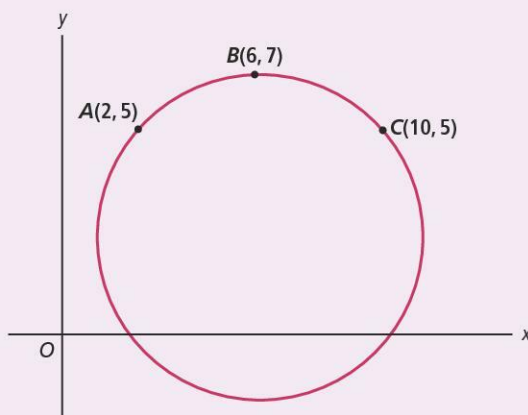
- Leg uit wat er in stap 1 is gebeurd.
- Schrijf $(x + 5)^2$ zonder haakjes. Welk getal moet er in stap 2 op de puntjes staan?
- Leg uit hoe je het getal kunt vinden dat in stap 3 op de puntjes tussen haakjes moet staan.
- Hoe vind je het getal dat in stap 3 op de laatste puntjes moet staan?
- Het resultaat van de stappen 2 en 3 is dat je de vergelijking $x^2 + y^2 + 10x - 6y + 9 = 0$ kunt schrijven als $(x + 5)^2 - \dots + (y - \dots)^2 - \dots + 9 = 0$. Vul de ontbrekende getallen bij stap 4 in.
- Maak de middelpuntsvergelijking in stap 5 af.
- Geef de coördinaten van het middelpunt en de straal van c .

☐	$x^2 + y^2 + 10x - 6y + 9 = 0$	
☐	$x^2 + 10x + y^2 - 6y + 9 = 0$	1
☐	$x^2 + 10x = (x + 5)^2 - \dots$	2
☐	$y^2 - 6y = (y - \dots)^2 - \dots$	3
☐	$(x + 5)^2 + (y - \dots)^2 - \dots + 9 = 0$	4
☐	$(x + 5)^2 + (y - \dots)^2 = \dots$	5
☐		

Uitdagende opdrachten

U3

- Waarom hoort bij de vergelijking $x^2 + y^2 - 4x - 20y + 108 = 0$ geen cirkel?
- Toon aan dat de vergelijking $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$ alleen de vergelijking van een cirkel is als $p^2 + q^2 > 4s$.



U4

Van de cirkel zijn drie punten gegeven. Stel de middelpuntsvergelijking op van deze cirkel.

13.3 Snijden en raken

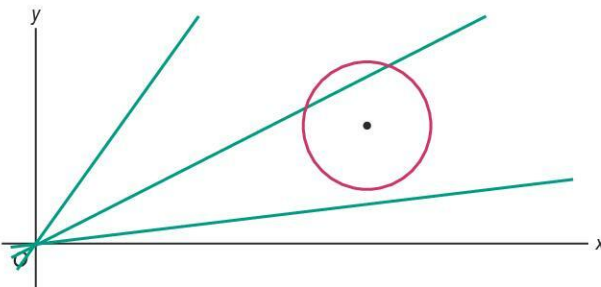
Je leert

- hoe je de coördinaten van de snijpunten van een lijn en een cirkel berekent
- hoe je een vergelijking van de raaklijn opstelt in een punt van een cirkel

Leerroutes

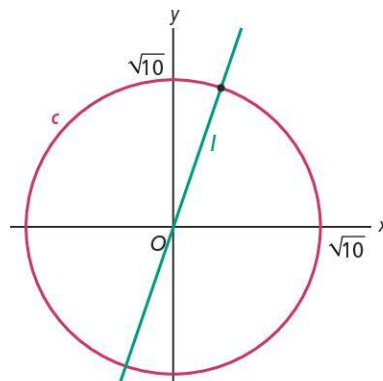
- ondersteunend: 20—21—022—23—24—025—25—26
- doorlopend: 20—21—22—23—24—25—26—27
- uitdagend: 20—21—23—24—25—27—U5—U6

- Hoeveel punten kan een lijn door de oorsprong gemeenschappelijk hebben met de getekende cirkel?
- Lijnen door de oorsprong voldoen aan de vergelijking $y = mx$.
Stel dat een vergelijking van de cirkel is gegeven, hoe kun je dan onderzoeken bij welke waarden van m de lijn en de cirkel gemeenschappelijke punten hebben?



20 Lijn l : $y = 3x$ snijdt cirkel c : $x^2 + y^2 = 10$ in twee punten.

- Om van elk snijpunt de x -coördinaat te berekenen, substitueer je $y = 3x$ in de vergelijking van c .
Het resultaat is de vergelijking $x^2 + (3x)^2 = 10$.
Los de vergelijking op.
- Bereken met behulp van de vergelijking van l de y -coördinaten van de snijpunten.
- Lijn m : $x + 2y = 1$ snijdt c ook in twee punten.
Schrijf de vergelijking van m in de vorm $x = \dots$ en gebruik deze vorm om de coördinaten van de snijpunten van m en c te berekenen.



Theorie

Je kunt de coördinaten van de snijpunten van een lijn en een cirkel berekenen met behulp van substitutie. Herleid daartoe eerst de vergelijking van de lijn tot de vorm $y = \dots$ of $x = \dots$

Voorbeeld

Gegeven zijn cirkel c : $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$ en lijn l : $y - 3x = 1$.
Bereken de coördinaten van de snijpunten.

Oplossing

Substitutie van $y = 3x + 1$ geeft

$$(x + 1)^2 + (3x - 2)^2 = 25.$$

$$x^2 + 2x + 1 + 9x^2 - 12x + 4 = 25$$

$$10x^2 - 10x - 20 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

$$x = 2 \text{ of } x = -1$$

Invullen in $y = 3x + 1$ geeft $y = 7$ of $y = -2$.

Snijpunten: $(-1, -2)$ en $(2, 7)$

21 Bereken de coördinaten van de snijpunten van cirkel c en lijn l .

- H**
- a $c: x^2 + y^2 = 20$ en $l: y = x + 2$
 - b $c: x^2 + y^2 = 5$ en $l: 2y + x = 5$
 - c $c: (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 80$ en $l: 3y + x = 15$

Een cirkel en een lijn kunnen twee, één of geen punten gemeenschappelijk hebben. De kwadratische vergelijking waarmee je de coördinaten van de gemeenschappelijke punten berekent, heeft dan twee, één of geen oplossingen. Met behulp van de discriminant stel je het aantal oplossingen vast.

$D < 0$: geen oplossingen
 $D = 0$: één oplossing
 $D > 0$: twee oplossingen

Ondersteunende route → maak opdracht 022

22 Ga met een berekening na hoeveel punten de cirkel en de lijn gemeenschappelijk hebben.

- a $c: x^2 + y^2 = 20$ en $l: y = 3x + 4$
- b $c: (x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 20$ en $l: 2x + y + 4 = 0$
- c $c: x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$ en de lijn door $A(1, 6)$ en $B(4, 3)$

23 Gegeven is cirkel $c: x^2 + y^2 = 10$ en lijn $l: y = -3x + 2$.

- a Stel met behulp van de discriminant vast hoeveel snijpunten c en l hebben.
- b Lijn k heeft vergelijking $y = -3x + p$. Substitutie van deze vergelijking in $x^2 + y^2 = 10$ geeft $10x^2 - 6px + p^2 - 10 = 0$. Laat dat zien.
- c Op het blaadje wordt de discriminant berekend van de vergelijking $10x^2 - 6px + p^2 - 10 = 0$. Ga na dat de laatste regel volgt uit de regel er boven.
- d Bereken met behulp van $D = 0$ de waarden van p waarvoor k precies één punt gemeenschappelijk heeft met c .

●	$10x^2 - 6px + p^2 - 10 = 0$
●	$a = 10$
●	$b = -6p$
●	$c = p^2 - 10$
●	$D = b^2 - 4ac$ dus
●	$D = (-6p)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (p^2 - 10)$
●	$D = -4p^2 + 400$

24 Gegeven zijn cirkel $c: (x - 5)^2 + y^2 = 9$ en lijn $l: y = px$.

- a Laat zien dat substitutie van $y = px$ in $(x - 5)^2 + y^2 = 9$ de vergelijking $(p^2 + 1)x^2 - 10x + 16 = 0$ oplevert.
- b Bereken de waarden van p waarvoor l en c één punt gemeenschappelijk hebben.
- c Bereken voor de waarden van p uit opdracht b de coördinaten van het gemeenschappelijke punt van l en c .
- d Toon aan dat in beide gevallen de straal naar het gemeenschappelijke punt loodrecht op lijn l staat.

Theorie

Als een lijn l en een cirkel c met middelpunt M precies één punt R gemeenschappelijk hebben, dan is l een **raaklijn** aan c en R een **raakpunt**.

De raaklijn aan een cirkel in R staat loodrecht op de lijn door M en R . Kort gezegd: de raaklijn staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.

Deze eigenschap kun je gebruiken om een vergelijking van de raaklijn in een gegeven punt aan een cirkel op te stellen.

Voorbeeld

Gegeven is cirkel $c: x^2 + y^2 = 25$ en punt $R(3, 4)$ op c .
Stel een vergelijking op van de raaklijn l in punt R aan c .

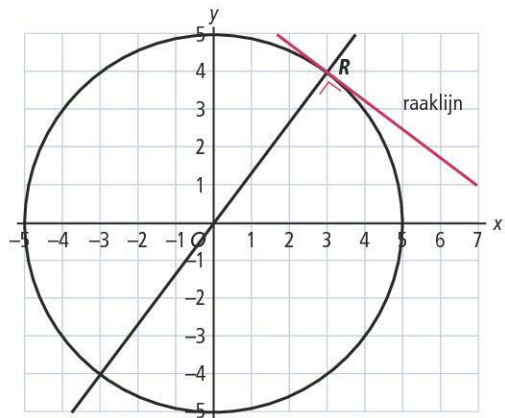
Oplossing

Lijn OR heeft als vergelijking $y = \frac{4}{3}x$. Omdat $\frac{4}{3} \cdot -\frac{3}{4} = -1$ is de richtingscoëfficiënt van l gelijk aan $-\frac{3}{4}$.

Een vergelijking van l heeft dus de vorm $y = -\frac{3}{4}x + b$.

Invullen van $x = 3$ en $y = 4$ geeft $4 = -\frac{3}{4} \cdot 3 + b$, dus $b = 6\frac{1}{4}$.

Een vergelijking van l is $y = -\frac{3}{4}x + 6\frac{1}{4}$.



Ondersteunende route → maak opdracht 025

- 25** Stel een vergelijking op van de raaklijn in P aan c .

H

- a $c: (x + 3)^2 + (y - 7)^2 = 25$ en $P(0, 3)$
b $c: x^2 + y^2 - 10x - 8y = 0$ en $P(10, 0)$

- 26** Gegeven is cirkel c met vergelijking $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 10$.
a Stel een vergelijking op van de raaklijn l in $P(5, -4)$ aan c .
b Teken cirkel c en lijn l in een assenstelsel.
c Teken lijn m evenwijdig aan l die c raakt in punt S .
d Beredeneer dat het raakpunt S van lijn m aan cirkel c de coördinaten $(-1, -2)$ heeft.
e Stel een vergelijking op van de raaklijn m aan c .

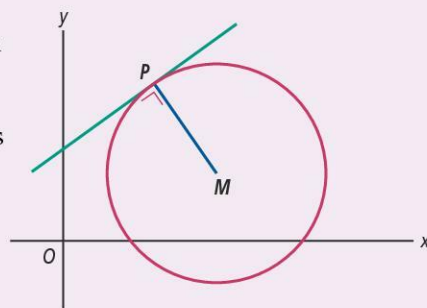
- 27** Gegeven is cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0$.
a Stel een vergelijking op van de raaklijn l in $(2, 1)$ aan c .
b Er is een raaklijn m aan c , die evenwijdig is aan lijn l .
Stel een vergelijking op van m .

Uitdagende route → maak opdracht U5 en U6

Ondersteunende opdrachten

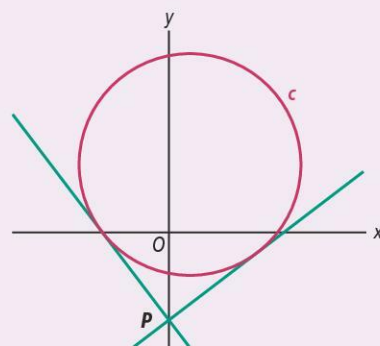
- 022** Gegeven zijn cirkel c : $x^2 + y^2 + 8y = 24$ en lijn l : $x + 3y = 9$.
Om te bepalen hoeveel gemeenschappelijke punten c en l hebben, substitueer je $x = -3y + 9$ in de vergelijking van c .
- Laat zien dat dit leidt tot de vergelijking $10y^2 - 46y + 57 = 0$.
 - Bereken de discriminant van de vergelijking in opdracht a.
 - Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking in opdracht a? Hoeveel punten hebben c en l dus gemeenschappelijk?
- Ga met een berekening na hoeveel punten de cirkel en de lijn gemeenschappelijk hebben.
- c : $(x - 1)^2 + y^2 = 20$ en l : $y = 3x + 1$
 - c : $x^2 + y^2 = 16$ en l : $x + y = 6$
 - c : $x^2 + y^2 - 6y + 4 = 0$ en de lijn door $A(-1, 6)$ en $B(4, 16)$

- 025** Gegeven is cirkel c met vergelijking $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 20$ en punt $P(2, 6)$ op c . Je gaat in deze opdracht een vergelijking van de raaklijn in P aan c opstellen.
- Geef de coördinaten van het middelpunt M van c .
 - Toon aan dat de richtingscoëfficiënt van de lijn MP gelijk is aan -2 .
 - Stel de richtingscoëfficiënt van de raaklijn is a .
Leg uit waarom geldt $-2 \cdot a = -1$ en bereken a .
 - Een vergelijking van de raaklijn is $y = ax + b$ met a het getal dat je in opdracht c hebt berekend.
Vul de coördinaten van het raakpunt P in, bereken b en schrijf een vergelijking van de raaklijn op.



Uitdagende opdrachten

- U5** Gegeven is cirkel c : $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 15$ en punt $P(0, -4)$.
Een vergelijking van een lijn door P is van de vorm $y = mx - 4$.
Bereken exact de waarden van m waarvoor een lijn door P cirkel c raakt.
- U6** Een cirkel raakt de lijnen $x = 5$ en $y = 4$. Het middelpunt van de cirkel ligt op de lijn $3x - 4y = 1$.
Bereken exact de straal van deze cirkel. (Er zijn twee mogelijkheden.)



13.4 Afstand tot een cirkel

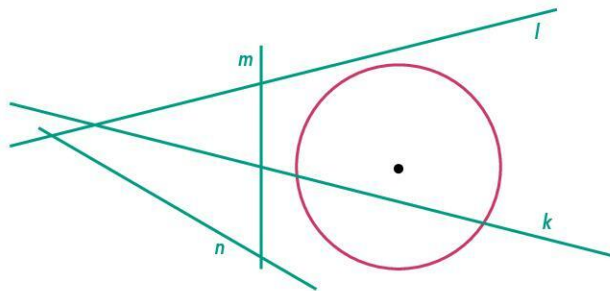
Je leert

- hoe je de afstand van een punt tot een cirkel berekent
- hoe je de afstand tussen twee cirkels berekent
- hoe je de afstand tussen een lijn en een cirkel berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 28—29—30—31—032—33—034
- doorlopend: 28—29—30—31—32—33—34
- uitdagend: 28—30—32—33—34—U7—U8

- Welke lijn heeft de kleinste afstand tot de cirkel?
En welke de grootste?



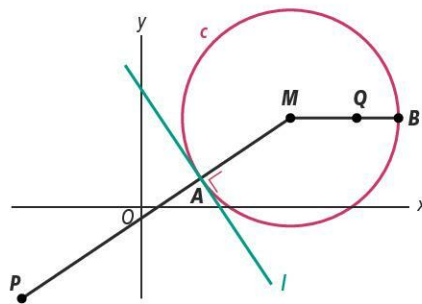
28 Gegeven is cirkel $c: (x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 34$.

- Ligt het punt $A(1, 0)$ op de cirkel?
- Hoe zie je met behulp van de vergelijking van c dat het punt $B(-1, -1)$ buiten de cirkel ligt?
- Ga met behulp van de vergelijking na of de cirkel nul, één of twee punten gemeenschappelijk heeft met de lijn $x = 10$.
- Voor welke waarden van d ligt het punt $D(1, d)$ binnen de cirkel?

29 Gegeven is cirkel $c: (x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 13$ met middelpunt M . P is het punt $(-4, -3)$ en lijnstuk PM snijdt c in A .

Lijn l is de raaklijn in A aan c .

- Waarom is PA het kortste verbindingslijnstuk van P en l ?
- Bereken PM exact.
- Welk lijnstuk is het kortste verbindingslijnstuk van P en c ?
Bereken exact de lengte van dat lijnstuk.
- Bereken exact de lengte van het kortste verbindingslijnstuk van het punt $Q(7, 3)$ en c .

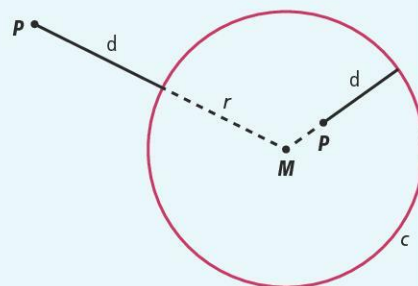


Theorie

De **afstand tussen twee meetkundige figuren** is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen die figuren.

Is P een punt en c een cirkel met middelpunt M en straal r , dan geldt:

- als $PM > r$, dan ligt P buiten c en is $d(P, c) = PM - r$,
- als $PM = r$, dan ligt P op c en is $d(P, c) = 0$,
- als $PM < r$, dan ligt P binnen c en is $d(P, c) = r - PM$.



- 30** Onderzoek of het punt P binnen of buiten de cirkel c ligt en bereken $d(P, c)$ exact.

H

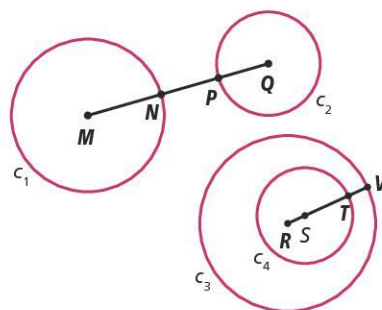
a $P(7, -2)$ en $c: (x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 25$

b $P(-3, 4)$ en $c: (x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 25$

c $P(-1, -6)$ en $c: (x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 289$

- 31** Gegeven zijn de cirkels c_1, c_2, c_3 en c_4 met de respectievelijke middelpunten M, Q, R en S .

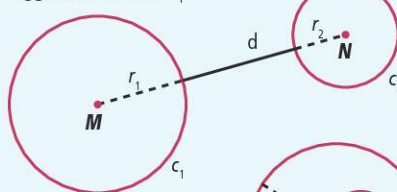
- a Welk lijnstuk geeft de afstand aan tussen de cirkels c_1 en c_2 ?
- b Welk lijnstuk geeft de afstand aan tussen de cirkels c_3 en c_4 ?



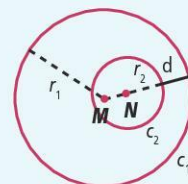
Theorie

Om de **afstand tussen twee cirkels** te berekenen, gebruik je de lijn door de middelpunten van de cirkels. Snijden of raken de cirkels elkaar, dan is de afstand 0. Snijden de cirkels elkaar niet, dan liggen zij geheel buiten elkaar of de ene cirkel ligt binnen de andere. In de figuur zie je dat de afstand in het eerste geval gelijk is aan $d(c_1, c_2) = MN - r_1 - r_2$ en in het tweede geval aan $d(c_1, c_2) = r_1 - MN - r_2$.

alle punten van cirkel c_2
liggen buiten cirkel c_1



alle punten van cirkel c_2
liggen binnen cirkel c_1



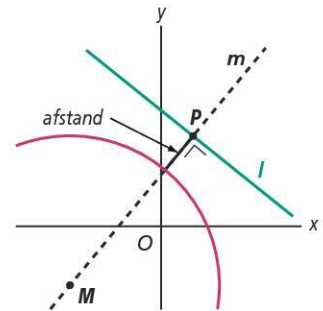
Ondersteunende route → maak opdracht 032

32 Teken de cirkels c_1 en c_2 en bereken exact $d(c_1, c_2)$.

- H** **a** $c_1: (x+2)^2 + (y-3)^2 = 18$ en $c_2: (x-5)^2 + (y+3)^2 = 8$
b $c_1: x^2 + y^2 + 2x + 2y = 6$ en $c_2: x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$

33 Gegeven zijn cirkel $c: (x+3)^2 + (y+2)^2 = 25$ met middelpunt M en lijn $l: 4x + 5y = 19$. In de figuur zie je dat de afstand van l tot c gelijk is aan de afstand van M tot l min de straal van c .

- a** Stel een vergelijking op van loodlijn m door M op l .
b P is het snijpunt van l en m .
 Verklaar waarom $PM - 5$ de afstand is tussen l en c .
c Bereken exact $d(l, c)$.



Aanpak

Hoe bereken je de afstand tussen een lijn l en een cirkel c ?

- 1 Stel een vergelijking op van de loodlijn m uit het middelpunt M van c op l .
- 2 Bereken de coördinaten van het snijpunt P van l en m .
- 3 als $PM > r$ dan is $d(l, c) = PM - r$,
als $PM \leq r$ dan is $d(l, c) = 0$.

Voorbeeld

Gegeven lijn $l: y = -x + 3$ en cirkel $c: (x+1)^2 + y^2 = 5$. Bereken $d(l, c)$.

Oplossing

- 1 Loodlijn m heeft de vorm $y = x + b$. Substitutie van $M(-1, 0)$ geeft $b = 1$, dus $m: y = x + 1$.
- 2 Het snijpunt P van l en m is $(1, 2)$.
- 3 $PM = \sqrt{8}$ en $r = \sqrt{5}$
 $d(l, c) = \sqrt{8} - \sqrt{5}$

Ondersteunende route → maak opdracht 034

34 Bereken exact $d(l, c)$.

- H** **a** $l: 4x + 3y = 50$ en $c: x^2 + y^2 = 16$
b $l: 4x + 3y + 9 = 0$ en $c: (x-1)^2 + (y-4)^2 = 6$
c $l: y = 3x$ en $c: (x-3)^2 + (y-5)^2 = 4$

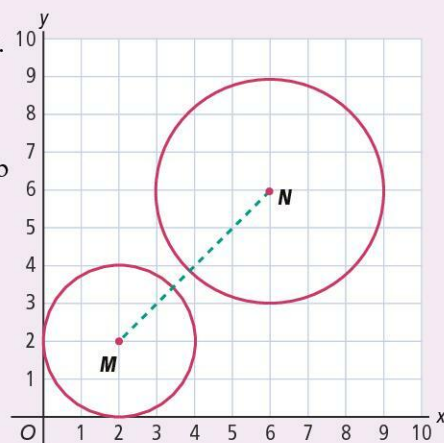
Uitdagende route → maak opdracht U7 en U8

Ondersteunende opdrachten

- 032** Gegeven zijn de cirkels $c_1: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ met middelpunt M en $c_2: (x-6)^2 + (y-6)^2 = 9$ met middelpunt N .
- Bereken MN .
 - Bereken de straal r_1 van c_1 en r_2 van c_2 .
 - In de tekening zie je dat de cirkels elkaar niet snijden. Leg uit hoe je ook aan de antwoorden van opdracht a en b kunt zien dat de cirkels elkaar niet snijden.
 - Bereken $d(c_1, c_2) = MN - r_1 - r_2$.

Teken de cirkels c_1 en c_2 en bereken exact $d(c_1, c_2)$.

- $c_1: (x-1)^2 + (y+3)^2 = 9$ en $c_2: (x-7)^2 + (y-5)^2 = 49$
- $c_1: x^2 + y^2 - 12y + 4 = 0$ en $c_2: x^2 + y^2 - 2x - 12y + 29 = 0$



- 034** Gegeven zijn cirkel $c: x^2 + (y-2)^2 = 20$ en lijn $l: x + 2y = 19$. Er is een begin gemaakt met het berekenen van $d(l, c)$.
- In de stappen 1, 2 en 3 wordt de vergelijking van een lijn m opgesteld. Leg uit waarom voor deze lijn m gekozen wordt.
 - Bereken de coördinaten van het snijpunt P van l en m .
 - M is het middelpunt van c . Bereken PM .
 - Er geldt $d(l, c) = PM - r$ als $PM > r$. Bereken $d(l, c)$.

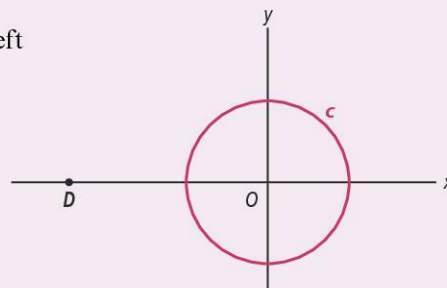
Bereken exact $d(l, c)$.

- $l: 2x + y = 21$ en $c: (x-3)^2 + y^2 = 20$
- $l: 3x + 2y = 41$ en $c: x^2 + (y-1)^2 = 13$

1	$l: y = -\frac{1}{2}x + \frac{19}{2}$	1
2	$m \perp l$ dus $m: y = 2x + b$	2
3	m door $M(0, 2)$ dus $m: y = 2x + 2$	3
4	$-\frac{1}{2}x + \frac{19}{2} = 2x + 2$ Het snijpunt is $P(\dots, \dots)$	4
5	$PM = \dots$ en $r = \dots$	5
6	dus $d(l, c) = \dots$	6

Uitdagende opdrachten

- U7** Gegeven is cirkel $c_1: x^2 + y^2 = 24y - 108$. Van cirkel c_2 met straal 3 ligt het middelpunt op de x -as. Er geldt $d(c_1, c_2) = 4$. Stel een vergelijking op van c_2 . Er zijn twee mogelijkheden.
- U8** Gegeven is cirkel $c: x^2 + y^2 = 4$ en punt $D(-5, 0)$. Stel een vergelijking op van elke lijn door D die afstand 1 heeft tot c .



13.5 Ingeschreven en omgeschreven cirkel

Je leert

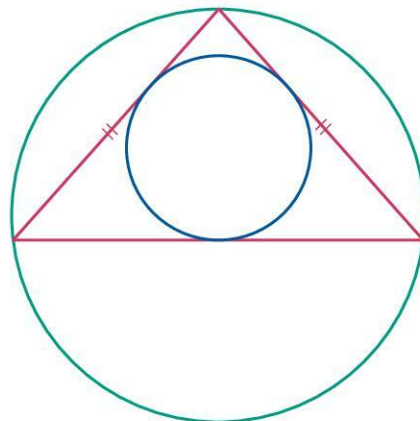
- wat een omgeschreven cirkel is
- wat een ingeschreven cirkel is

Leerroutes

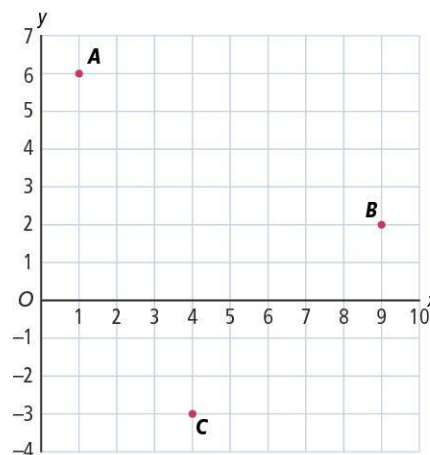
- ondersteunend: 35—36—037—37—38—040—40—42
- doorlopend: 35—36—37—38—39—40—41—42
- uitdagend: 36—37—38—39—40—41—42—U9

De rode driehoek is gelijkbenig. De groene cirkel gaat door de hoekpunten van de driehoek. De blauwe cirkel raakt de zijden van de driehoek.

- Hoe moet je de rode driehoek aanpassen zodat de middelpunten van de twee cirkels samenvallen?



- 35** Gegeven zijn de punten $A(1, 6)$, $B(9, 2)$ en $C(4, -3)$.
- Teken de middelloodlijn van lijnstuk AB .
 - Punt $P(3, 0)$ ligt op de middelloodlijn van lijnstuk AB . Wat kun je zeggen over de afstanden PA en PB ?
 - Teken de middelloodlijn van lijnstuk BC .
 - De middelloodlijnen van de lijnstukken AB en BC snijden elkaar in punt S . Leg uit waarom geldt: $SA = SB = SC$.
 - Door de punten A , B en C gaat een cirkel. Welk punt is het middelpunt van die cirkel? Waarom?



- 36**
- Teken $\triangle ABC$ met $A(-1, 2)$, $B(5, 6)$ en $C(5, -4)$.
 - Stel vergelijkingen op van de middelloodlijnen l en m van de zijden AB en BC en bereken de coördinaten van het snijpunt M van l en m .
 - Beredeneer dat M ook op de middelloodlijn van zijde AC ligt.
 - Stel een vergelijking op van de cirkel door A , B en C .

Theorie

Elk punt van de **middelloodlijn** van een lijnstuk AB heeft gelijke afstanden tot A en B . Ook het omgekeerde geldt: elk punt dat gelijke afstanden heeft tot de punten A en B , ligt op de middelloodlijn van lijnstuk AB .

De cirkel die door de hoekpunten van een driehoek gaat, heet de **omgeschreven cirkel** van die driehoek. Het middelpunt is het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden. De straal is de afstand van het middelpunt tot de hoekpunten.

Voorbeeld

Gegeven is $\triangle ABC$ met $A(-1, -1)$, $B(5, -1)$ en $C(1, 3)$.
Stel een vergelijking op van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$.

Oplossing

Lijn AB heeft vergelijking $y = -1$. Het midden van zijde AB is $(2, -1)$.

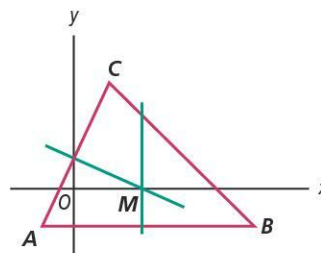
De middelloodlijn van zijde AB is de lijn $x = 2$.

Lijn AC heeft richtingscoëfficiënt 2. Het midden van zijde AC is $(0, 1)$.

De middelloodlijn van zijde AC is de lijn $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

De middelloodlijnen snijden geeft $y = -\frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 0$, dus het middelpunt is $M(2, 0)$.

De straal is $AM = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$, dus een vergelijking van de cirkel is $(x - 2)^2 + y^2 = 10$.



Ondersteunende route → maak opdracht 037

- 37** Stel een vergelijking op van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$.

H a $A(3, 6)$, $B(7, -2)$ en $C(15, 6)$

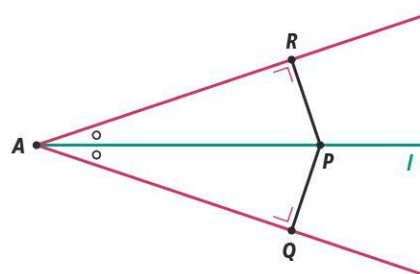
b $A(1, -3)$, $B(-3, 5)$ en $C(4, 6)$

- 38** P is een punt op de deellijn van hoek A . De punten Q en R liggen op de benen van de hoek zo dat $PQ \perp AQ$ en $PR \perp AR$.

a Laat zien dat $PQ = AP \cdot \sin(\angle PAQ)$.

b Toon aan dat $PQ = PR$.

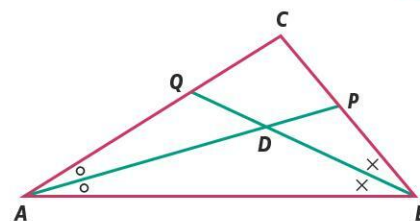
c Teken een hoek B en een punt K dat gelijke afstanden heeft tot de benen van hoek B en toon aan dat K op de deellijn van hoek B ligt.



- 39** In $\triangle ABC$ zijn de deellijnen AP en BQ getekend. Het snijpunt van de deellijnen is punt D .

a Waaronder ligt D ook op de deellijn van hoek C ?

b Verklaar waarom D het middelpunt is van een cirkel die raakt aan de zijden van $\triangle ABC$.



Theorie

Een ander woord voor deellijn is **bissectrice**.

Elk punt van de bissectrice van een hoek heeft gelijke afstanden tot de benen van de hoek en andersom: elk punt dat gelijke afstanden heeft tot de benen van een hoek, ligt op de bissectrice van die hoek.

De cirkel die aan de drie zijden van een driehoek raakt, heet de **ingeschreven cirkel** van die driehoek. Het middelpunt is het snijpunt van de bissectrices van de hoeken. De straal is de afstand van het middelpunt tot de zijden.

Voorbeeld

Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 34^\circ$, $\angle B = 58^\circ$ en $AB = 6$.
Bereken de straal van de ingeschreven cirkel.

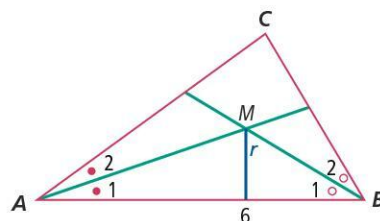
Oplossing

$$\angle A_1 = 34^\circ : 2 = 17^\circ \text{ en } \angle B_1 = 58^\circ : 2 = 29^\circ.$$

$$\angle AMB = 180^\circ - 17^\circ - 29^\circ = 134^\circ$$

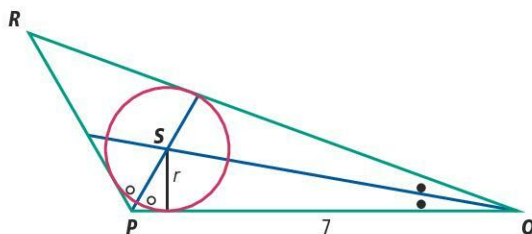
$$\frac{AM}{\sin(29^\circ)} = \frac{6}{\sin(134^\circ)} \text{ geeft } AM = \frac{6 \cdot \sin(29^\circ)}{\sin(134^\circ)} = 4,043...$$

$$\text{De straal is } r = AM \cdot \sin(17^\circ) \approx 1,2.$$

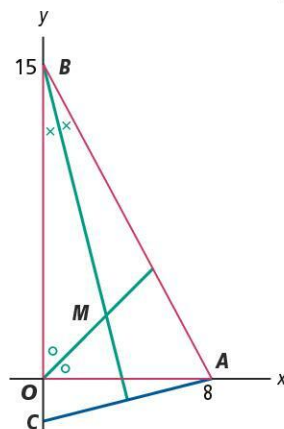


Ondersteunende route → maak opdracht O40

- 40** a Gegeven is $\triangle PQR$ waarin $\angle P = 120^\circ$,
 $\angle Q = 20^\circ$ en $PQ = 7$.
 Bereken de straal van de ingeschreven cirkel van $\triangle PQR$. Rond af op twee decimalen.
 b Van $\triangle KLM$ is gegeven $\angle K = 80^\circ$,
 $\angle L = 60^\circ$ en $KL = 8$.
 Bereken in twee decimalen de straal van de ingeschreven cirkel.



- 41** Driehoek ABC is gelijkzijdig met zijden 12.
 a Bereken exact de straal van de omgeschreven cirkel.
 b Bereken exact de straal van de ingeschreven cirkel.
- 42** In een assenstelsel zijn gegeven de punten $A(8, 0)$ en $B(0, 15)$. Je gaat een vergelijking opstellen van de ingeschreven cirkel van $\triangle OAB$.
 a Stel een vergelijking op van de bissectrice van hoek O .
 b Om een vergelijking te vinden van de bissectrice van hoek B , kies je op de lijn door B en O een punt C zodat $BC = BA$.
 Leg uit dat de hoogtelijn uit B in $\triangle ABC$ de bissectrice is van hoek B .
 c Stel een vergelijking op van de ingeschreven cirkel van $\triangle OAB$.



Uitdagende route → maak opdracht U9

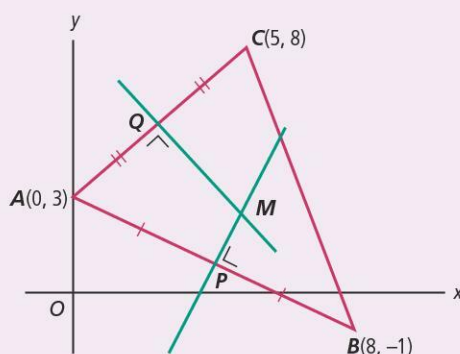
Ondersteunende opdrachten

037

Gegeven zijn de punten $A(0, 3)$, $B(8, -1)$ en $C(5, 8)$.

Je gaat in deze opdracht een vergelijking opstellen van de omschreven cirkel van $\triangle ABC$.

- Bereken de coördinaten van het midden P van zijde AB .
- Bereken de richtingscoëfficiënt van lijn AB .
- Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van zijde AB .
- Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van zijde AC .
- Punt M is het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden AB en AC .
Bereken de coördinaten van M .
- Bereken AM .
- De omschreven cirkel van $\triangle ABC$ heeft middelpunt M en straal AM .
Stel een vergelijking op van deze cirkel.



040

Gegeven is $\triangle ABC$ met $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 50^\circ$ en $AB = 8$.

Je gaat in twee decimalen de straal r van de ingeschreven cirkel berekenen. Daartoe zijn de bissectrices van de hoeken A en B getekend. De bissectrices snijden elkaar in punt M .

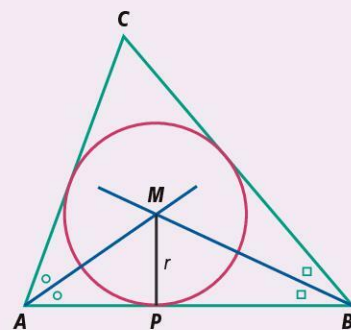
- Laat met een berekening zien dat $\angle AMB = 120^\circ$.

- Met de sinusregel kun je AM berekenen.

Vul in: $\frac{AM}{\sin(\dots)} = \frac{8}{\sin(120^\circ)}$ geeft $AM = \frac{8 \cdot \sin(\dots)}{\sin(\dots)} = \dots$
(Rond niet af.)

- Leg uit waarom geldt $r = AM \cdot \sin(\angle MAP)$.

- Bereken de straal van de ingeschreven cirkel. Rond af op twee decimalen.



Uitdagende opdrachten

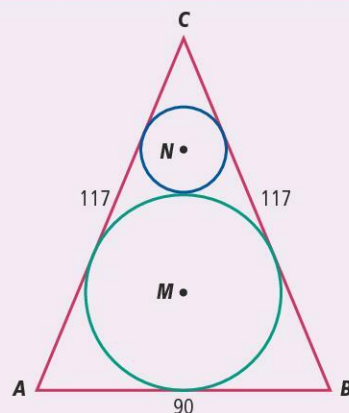
U9

Van $\triangle ABC$ is $AC = BC = 117$ en $AB = 90$.

De ingeschreven cirkel heeft middelpunt M en straal r .

Je gaat r berekenen.

- Bereken exact de oppervlakte van $\triangle ABC$.
- Druk de oppervlakte van de driehoeken ABM , BCM en ACM uit in r .
- Bereken r met behulp van je antwoorden op opdracht a en opdracht b.
- De cirkel met middelpunt N raakt aan twee zijden van $\triangle ABC$ en aan de ingeschreven cirkel.
Bereken exact de straal van deze cirkel.



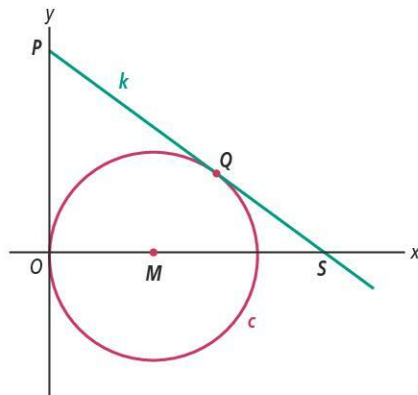
13.6 Gemengde opdrachten

- 43** Gegeven zijn cirkel $c_1: (x + 12)^2 + (y - 6)^2 = 45$ met middelpunt M , cirkel $c_2: x^2 + y^2 = 20$ met middelpunt N en lijn $l: 2x + y = 17$. k is de lijn door M en N .

- Bereken exact $d(l, c_1)$.
- Onderzoek met een berekening hoeveel punten l gemeenschappelijk heeft met c_2 .
- Bereken in hele graden $\angle(l, k)$.
- Op l ligt een punt P zo dat $PM = PN$.
Bereken exact de coördinaten van P .

- 44** Gegeven zijn punt $P(0, 10)$ en cirkel c met middelpunt $M(5, 0)$ en straal 5. Punt $Q(8, 4)$ ligt op c .

- Toon aan dat lijn k door P en Q de cirkel raakt.
- Lijn k snijdt de positieve x -as in S .
Bereken exact de oppervlakte van $\triangle OPS$.
- De lijn $3x + y = 20$ snijdt c in de punten A en B .
Bereken exact AB .
- De lijn $y = p$ met $p > 0$ snijdt c in de punten C en D met $CD = \sqrt{28}$.
Bereken exact de coördinaten van C en van D .



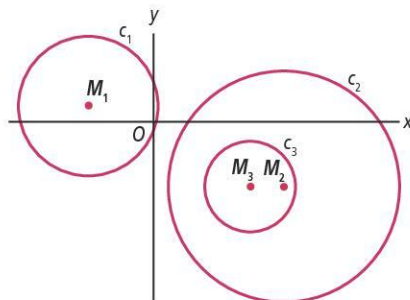
- 45** Gegeven zijn de lijnen $k: y = \frac{1}{3}x$, $l: 4x - 3y + 25 = 0$ en $m: x - 7y + 25 = 0$.
- Toon aan dat k en l evenwijdig zijn.
 - Bereken exact $d(k, l)$.
 - Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van m met k en l .
 - Stel de middelpuntsvergelijking op van de cirkel waarvan het middelpunt op m ligt en die raakt aan k en l .

- 46** Gegeven zijn drie cirkels $c_1: (x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 18$,

$$c_2: x^2 + y^2 - 16x + 8y + 30 = 0 \text{ en}$$

$$c_3: x^2 + y^2 - 12x + 8y + 44 = 0.$$

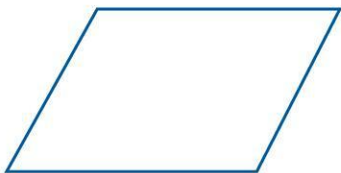
- Bereken exact de afstand tussen de cirkels c_1 en c_2 .
- Bereken exact de afstand tussen de cirkels c_2 en c_3 .



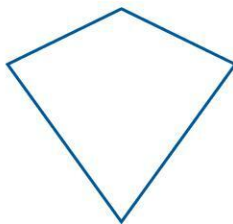
- 47** Cirkel c heeft als vergelijking $x^2 - 6x + y^2 + 2y = 3$.

- Toon aan dat lijn $l: y = \frac{1}{2}x - 12$ cirkel c raakt.
- Onderzoek voor welke waarden van b de lijn met vergelijking $y = \frac{1}{2}x + b$ cirkel c in twee punten snijdt.

- 48** Elke driehoek heeft een ingeschreven cirkel en een omgeschreven cirkel. Dat is niet het geval bij elke vierhoek.
- a** Heeft elk vierkant een omgeschreven cirkel? Waarom?
 - b** Heeft elk vierkant een ingeschreven cirkel? Waarom?
 - c** Leg uit waarom niet elke ruit een omgeschreven cirkel heeft, maar wel een ingeschreven cirkel.
 - d** Aan welke voorwaarde(n) moet een ruit voldoen om ook een omgeschreven cirkel te hebben?
 - e** Getekend zijn voorbeelden van een parallellogram, een vlieger, een rechthoek en een gelijkbenig trapezium. Onderzoek of het mogelijk is dat een parallellogram een ingeschreven cirkel heeft, of een omgeschreven cirkel. Doe dat ook voor een vlieger, een rechthoek en een gelijkbenig trapezium.



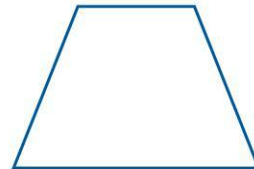
parallellogram



vlieger

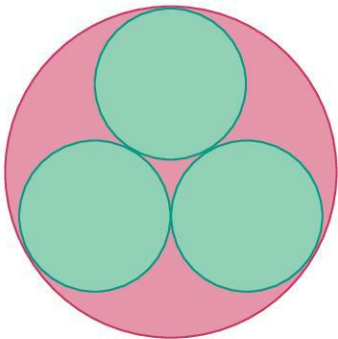


rechthoek



gelijkbenig trapezium

- 49** Gegeven zijn drie even grote cirkels die elkaar raken en een cirkel die deze drie cirkels raakt. De straal van de drie kleine cirkels is 3. Onderzoek of de oppervlakte van het groene gebied groter is dan tweemaal de oppervlakte van het roze gebied.

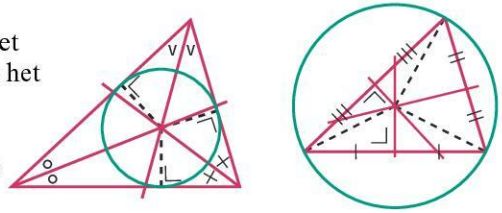


Theorie

Omgeschreven en ingeschreven cirkel

De cirkel die door de hoekpunten van een driehoek gaat, heet de omgeschreven cirkel van die driehoek. Het middelpunt is het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden. De straal is de afstand van het middelpunt tot de hoekpunten.

De cirkel die aan de drie zijden van een driehoek raakt, heet de ingeschreven cirkel van die driehoek. Het middelpunt is het snijpunt van de bissectrices van de hoeken. De straal is de afstand van het middelpunt tot de zijden.



- S1** Gegeven zijn de punten $A(2, 0)$, $B(6, 0)$ en $C(4, 6)$.
- Teken de punten in een assenstelsel en teken $\triangle ABC$.
 - Teken de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$.
 - Teken de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$.

Vaardigheid

Je kunt de vergelijking van een lijn herleiden tot een andere vorm.

Een vergelijking van een lijn l kun je op verschillende manieren weergeven:

- $ax + by = c$
- $y = mx + n$
- $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$

Voorbeeld

Herleid $y = \frac{3}{4}x + 9$ tot de vormen $ax + by = c$ en $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

Oplossing

$y = \frac{3}{4}x + 9$ geeft $4y = 3x + 36$ ofwel $-3x + 4y = 36$.

Delen door 36 geeft $\frac{x}{-12} + \frac{y}{9} = 1$.

- S2**
- Herleid $\frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1$ tot de vorm $y = ax + b$.
 - Herleid $y = \frac{2}{5}x + 3$ tot de vorm $ax + by = c$.
 - Herleid $y = \frac{5}{6}x + 15$ tot de vorm $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

Vaardigheid**Je kunt de hoek tussen twee lijnen berekenen.**

Bereken met behulp van de richtingscoëfficiënt voor elke lijn de hoek met een horizontale lijn door het snijpunt.
Gebruik een schets en bereken in hele graden de scherpe of de rechte hoek die de lijnen met elkaar maken.

Voorbeeld

Bereken $\angle(l, m)$ in graden nauwkeurig met $l: y = 3x + 15$ en $m: y = 8x - 4$.

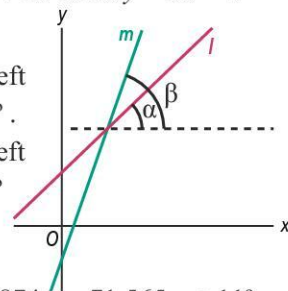
Oplossing

$\tan(\alpha) = 3$ geeft

$\alpha = 71,565\dots^\circ$.

$\tan(\beta) = 8$ geeft

$\beta = 82,874\dots^\circ$



$$\angle(l, m) = 82,874\dots - 71,565\dots \approx 11^\circ$$

- S3** Gegeven zijn de lijnen $k: y = 4x - 8$, $l: 3x + 4y = 15$ en $m: x + 5y - 3 = 0$.
Bereken in graden nauwkeurig $\angle(k, l)$ en $\angle(k, m)$.

Vaardigheid**Je kunt de afstand van een punt P tot een lijn l berekenen.**

Stel een vergelijking op van de loodlijn m door P op l en bereken de coördinaten van het snijpunt Q van m en l .
 PQ is de gevraagde afstand $d(P, l)$.

Voorbeeld

Bereken exact de afstand van punt $P(7, -6)$ tot lijn $l: y = \frac{1}{2}x + 3$.

Oplossing

De lijn m door P loodrecht op l heeft vergelijking $y = -2x + 8$.

l en m snijden geeft snijpunt $Q(2, 4)$.

$$d(P, l) = PQ = \sqrt{(-5)^2 + 10^2} = \sqrt{125}.$$

- S4** Gegeven zijn punt $P(-1, 18)$ en de lijnen $l: y = \frac{1}{3}x + 5$ en $m: x - 3y = 25$.
a Bereken exact $d(P, l)$.
b Bereken exact $d(l, m)$.

Vaardigheid**Je kunt met kwadraat afsplitsen een vergelijking van een cirkel herleiden tot een middelpuntsvergelijking.**

Door twee keer kwadraat afsplitsen toe te passen op de vergelijking $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$ kun je de vergelijking herleiden tot de middelpuntsvergelijking $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

De cirkel bij deze vergelijking heeft middelpunt $M(a, b)$ en straal r .

Voorbeeld

Herleid $x^2 + y^2 + 18x - 2y + 18 = 0$ tot een middelpuntsvergelijking.

Oplossing

$$x^2 + 18x = (x + 9)^2 - 81$$

$$y^2 - 2y = (y - 1)^2 - 1$$

$x^2 + y^2 + 18x - 2y + 18 = 0$ wordt dan $(x + 9)^2 - 81 + (y - 1)^2 - 1 + 18 = 0$ ofwel

$$(x + 9)^2 + (y - 1)^2 = 64.$$

- S5** a Herleid $x^2 + y^2 + 10x + 6y + 25 = 0$ tot een middelpuntsvergelijking.
b Bereken de straal en de coördinaten van het middelpunt van de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$.

Vaardigheid

Je kunt de coördinaten van de snijpunten van een lijn en een cirkel berekenen.

Herleid de vergelijking van de lijn eerst tot de vorm $y = \dots$ of $x = \dots$. Vervolgens substitueer je deze vorm in de vergelijking van de cirkel.

Voorbeeld

Bereken de coördinaten van de snijpunten van lijn l : $3x + y = 6$ en cirkel c : $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$.

Oplossing

$3x + y = 6$ geeft $y = -3x + 6$.

Substitutie in $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$ geeft

$$x^2 + (-3x + 6)^2 + 8x - 6(-3x + 6) = 0.$$

$$x^2 + 9x^2 - 36x + 36 + 8x + 18x - 36 = 0$$

$$10x^2 - 10x = 0$$

$$10x(x - 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 1$$

De snijpunten zijn $(0, 6)$ en $(1, 3)$.

S6 Bereken de coördinaten van de snijpunten van cirkel c en lijn l .

a c : $x^2 + y^2 - 2x = 12$ en l : $x + 5y = 14$

b c : $(x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 18$ en l : $y - x = 3$

Vaardigheid

Je kunt een vergelijking van de raaklijn opstellen in een punt van een cirkel.

De raaklijn aan een cirkel in een punt R van een cirkel staat loodrecht op de lijn door het middelpunt M en R . Kort gezegd: de raaklijn staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de raaklijn l in punt $P(2, 2)$ van cirkel c : $(x - 1)^2 + y^2 = 5$.

Oplossing

Het middelpunt van c is $M(1, 0)$.

De lijn door M en P heeft richtingscoëfficiënt 2.

De raaklijn in P heeft richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{2}$, want

$$2 \cdot -\frac{1}{2} = -1.$$

$$y = -\frac{1}{2}x + b \text{ met } x = 2 \text{ en } y = 2 \text{ geeft } b = 3.$$

Een vergelijking van l is $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

- S7** Stel een vergelijking op van de raaklijn in $P(-2, 2)$ van cirkel $c: (x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 25$.

Vaardigheid

Je kunt de afstand van een punt tot een cirkel en de afstand tussen twee cirkels berekenen.

Is P een punt en c een cirkel met middelpunt M en straal r , dan geldt:

- als $PM > r$, dan ligt P buiten c en is $d(P, c) = PM - r$,
- als $PM = r$, dan ligt P op c en is $d(P, c) = 0$,
- als $PM < r$, dan ligt P binnen c en is $d(P, c) = r - PM$.

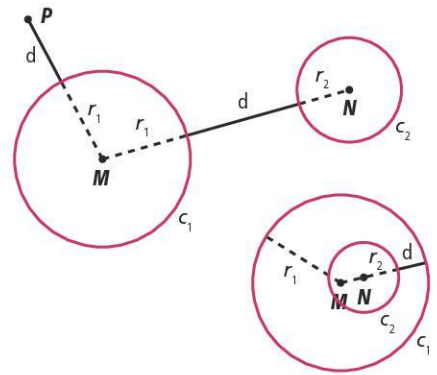
Als twee cirkels elkaar snijden, dan is de afstand 0.

Liggen twee cirkels geheel buiten elkaar dan is

$$d(c_1, c_2) = MN - r_1 - r_2.$$

Liggen de ene cirkel geheel binnen de andere, dan is

$$d(c_1, c_2) = r_1 - MN - r_2.$$



- S8** Gegeven zijn punt $P(10, -4)$ en de cirkels
 $c_1: (x + 8)^2 + (y + 10)^2 = 90$ en $c_2: x^2 + (y - 14)^2 = 40$.

- a Bereken exact $d(P, c_1)$.
- b Bereken exact $d(c_1, c_2)$.

Vaardigheid

Je kunt de afstand tussen een lijn l en een cirkel c berekenen.

- 1 Stel een vergelijking op van de loodlijn m uit het middelpunt M van c op l .
- 2 Bereken de coördinaten van het snijpunt P van l en m .
- 3 Als $PM > r$ dan is $d(l, c) = PM - r$,
als $PM \leq r$ dan is $d(l, c) = 0$.

Voorbeeld

Gegeven lijn $l: y = 2x - 18$ en cirkel $c: x^2 + (y - 7)^2 = 20$. Bereken $d(l, c)$.

Oplossing

- 1 Het middelpunt M van c is $(0, 7)$.
Loodlijn $m: y = -\frac{1}{2}x + 7$
- 2 $2x - 18 = -\frac{1}{2}x + 7$
 $2\frac{1}{2}x = 25$ dus $x = 10$ en $y = 2$
Het snijpunt van l en m is $P(10, 2)$.
- 3 $PM = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125}$ en $r = \sqrt{20}$
 $d(l, c) = \sqrt{125} - \sqrt{20}$
 $(= 5\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5})$

- S9** Gegeven lijn $l: y = 3x + 16$ en cirkel $c: x^2 + (y - 1)^2 = 10$.
Bereken $d(l, c)$.

T1 Gegeven zijn de lijnen

$$k: y = \frac{1}{3}x + 1, l: 2x + 3y = 11 \text{ en } m: \frac{x}{27} - \frac{y}{9} = 1.$$

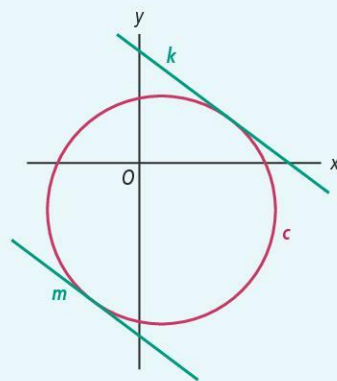
- Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van k en l .
- Bereken $\angle(k, l)$ in hele graden.
- Toon aan dat lijn $m: y = 1,5x - 3$ loodrecht op lijn l staat.
- Toon aan dat $k \parallel m$ en bereken exact $d(k, m)$.

T2 a Stel de middelpuntsvergelijking op van de cirkel met middelpunt $(-2, 7)$ en straal $2\sqrt{3}$.

- Een cirkel heeft als vergelijking $x^2 + y^2 - 4y = 10$. Bereken de coördinaten van het middelpunt van de cirkel en de straal.

T3 Gegeven zijn cirkel $c: (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$ en lijn $k: 3x + 4y = 20$.

- Toon met behulp van een berekening aan dat k de cirkel raakt.
- Bereken exact de coördinaten van het raakpunt.
- Er is een raaklijn m aan de cirkel die evenwijdig loopt met k .
Stel een vergelijking op van m .

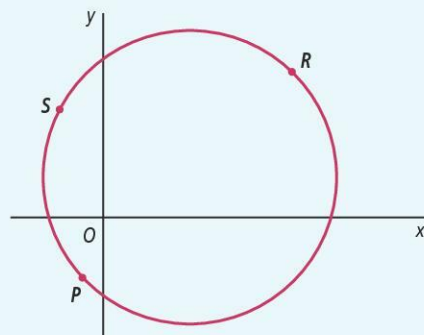


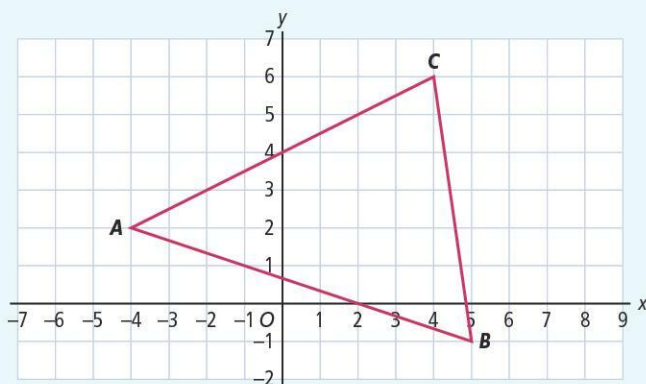
T4 Gegeven zijn cirkel $c: (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$ en lijn $l: x - 2y = 5$. Op cirkel c ligt punt $P(-3, 2)$.

- Bereken de coördinaten van de snijpunten van l en c .
- Stel een vergelijking op van de raaklijn in P aan c .

T5 Gegeven is cirkel c_1 met daarop de punten $P(-1, -3)$, $R(5, 5)$ en $S(-2, 4)$.

- Toon aan dat $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ een vergelijking van c_1 is.
- Verder is gegeven cirkel $c_2: x^2 + y^2 = 1$.
Bereken exact $d(c_1, c_2)$.





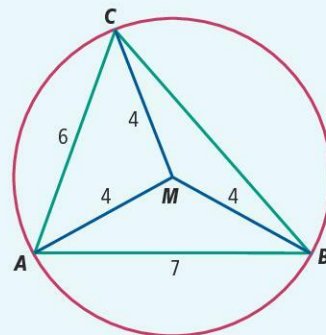
T6 In een assenstelsel is $\triangle ABC$ getekend met $A(-4, 2)$, $B(5, -1)$ en $C(4, 6)$.

- Bereken exact de lengte van de zijden.
- Stel een vergelijking op van de omschreven cirkel van $\triangle ABC$.

T7 In een assenstelsel is gegeven $\triangle OAB$ met $A(8, 0)$ en $B(0, 6)$.

- Stel een vergelijking op van de omschreven cirkel van $\triangle OAB$.
- Toon aan dat punt $I(2, 2)$ gelijke afstanden heeft tot de zijden van de driehoek.
- Stel een vergelijking op van de ingeschreven cirkel van $\triangle OAB$.

T8 De straal van de omschreven cirkel van $\triangle ABC$ is 4. Verder geldt $AB = 7$ en $AC = 6$. Bereken de lengte van zijde BC . Rond af op één decimaal.



Je kunt de vergelijking van een lijn herleiden tot een andere vorm.

- E1**
- a Herleid $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$ tot de vorm $y = ax + b$.
 - b Herleid $6x - 8y = 24$ tot de vorm $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.
 - c Herleid $y = -\frac{8}{9}x - 3$ tot de vorm $ax + by = c$.
 - d Lijn l gaat door de punten $A(4, -2)$ en $B(-6, 13)$.
Stel een vergelijking op van l . Geef drie mogelijke vormen van de vergelijking.

Je kunt de hoek tussen twee lijnen berekenen.

- E2** Gegeven zijn de lijnen
 $p: y = \frac{2}{3}x + 10$, $q: 8x - 2y + 7 = 0$ en $r: \frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$.
Bereken in graden nauwkeurig $\angle(p, q)$ en $\angle(p, r)$.

Je kunt de afstand van een punt P tot een lijn l berekenen.

- E3** Gegeven zijn punt $P(17, 3)$ en de lijnen $l: y = 2\frac{1}{2}x + 4$ en $m: 5x - 2y + 66 = 0$.
- a Bereken exact $d(P, l)$.
 - b Toon aan dat l en m evenwijdig zijn.
 - c Bereken exact $d(l, m)$.

Je kunt met kwadraat afsplitsen een vergelijking van een cirkel herleiden tot een middelpuntsvergelijking.

- E4**
- a Stel een vergelijking op van de cirkel met middelpunt $M(-3, 2)$ en straal $\sqrt{17}$.
 - b Bepaal van de cirkel met vergelijking $x^2 - 2x + y^2 + 6y = 0$ de coördinaten van het middelpunt en de straal.
 - c Waarom hoort er geen cirkel bij de vergelijking $x^2 - 2x + y^2 + 6y + 15 = 0$?

Je kunt de coördinaten van de snijpunten van een lijn en een cirkel berekenen.

- E5** Gegeven zijn cirkel $c: (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 17$ en de lijnen $l: 4x - y = 9$ en $m: x + 3y = 12$.
- a Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van c en l .
 - b Ga algebraïsch na hoeveel punten m gemeenschappelijk heeft met c .

Je kunt een vergelijking van de raaklijn opstellen in een punt van een cirkel.

- E6** a Gegeven zijn cirkel $d: (x - 4)^2 + (y + 8)^2 = 2$ en punt $Q(5, -7)$.
Stel een vergelijking op van de raaklijn in punt Q van d .
b Gegeven zijn cirkel $c: x^2 + y^2 + 6x = 43$ en punt $P(1, -6)$.
Stel een vergelijking op van de raaklijn in punt P van c .

Je kunt de afstand van een punt tot een cirkel en de afstand tussen twee cirkels berekenen.

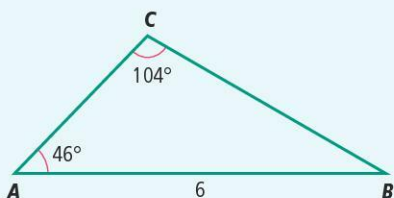
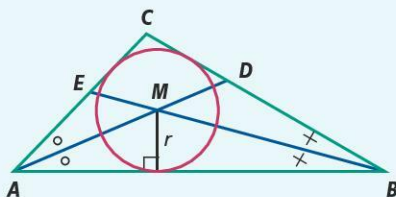
- E7** Gegeven zijn de cirkels $c_1: (x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 18$ en

$$c_2: x^2 + y^2 + 16x - 8y + 8 = 0.$$

- a Bereken exact de afstand van punt $P(-4, 5)$ tot cirkel c_1 .
b Bereken exact de afstand van punt $Q(-2, 4)$ tot cirkel c_2 .
c Bereken exact de afstand tussen de cirkels c_1 en c_2 .

Je kunt de afstand tussen een lijn l en een cirkel c berekenen.

- E8** Gegeven zijn cirkel $c: (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 18$ en lijn $l: y = x + 11$.
Bereken exact $d(l, c)$.



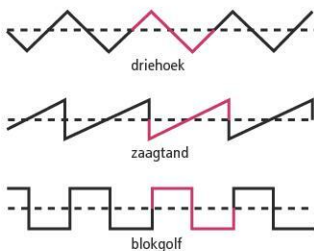
- E9** Van $\triangle ABC$ is gegeven dat $AB = 6$, $\angle A = 46^\circ$ en $\angle C = 104^\circ$.
a Bereken de lengten van de zijden AC en BC . Rond je antwoorden af op één decimaal.
b In $\triangle ABC$ snijden de deellijnen elkaar in punt M .
 M is het middelpunt van de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$.
Bereken de straal van de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$.
Rond je antwoord zo nodig af op één decimaal.
- E10** Gegeven zijn cirkel $c: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 20$ en lijn $l: y = -\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}$.
a Bereken exact $d(l, c)$.
b Er is een lijn die evenwijdig is met lijn l en die dezelfde afstand tot cirkel c heeft als lijn l .
Stel een vergelijking op van die lijn.

Fourier

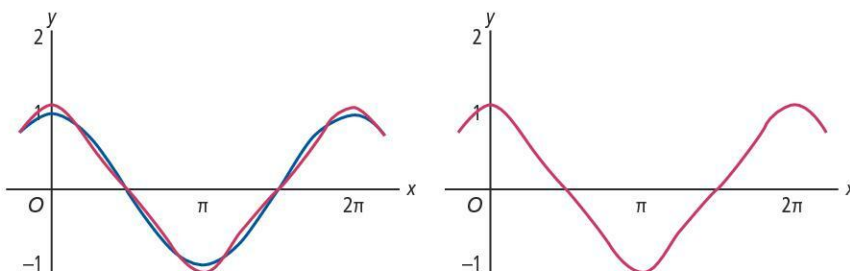
Sinus en cosinus worden gebruikt als wiskundig model voor periodieke verschijnselen.

De Franse wiskundige Joseph Fourier (1768 – 1830) publiceerde in 1822 een baanbrekend boek over warmtetheorie: *Théorie analytique de la chaleur*.

Daarbij ontwikkelde hij een methode om periodieke functies zoals de driehoeksgolf, de zaagtand en de blokgolf te benaderen met een (oneindige) som van sinussen en/of cosinussen.



Links zijn gegeven de grafieken van $f(x) = \cos(x)$ en $g(x) = \cos(x) + \frac{1}{9}\cos(3x)$.



Je ziet dat de grafiek van g de driehoeksgolf al aardig benadert. De benadering wordt beter (rechts) als je er nog een term aan toevoegt: $h(x) = \cos(x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + \frac{1}{25}\cos(5x)$.

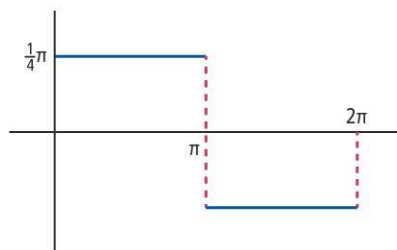
Opdracht

Bij de getekende *blokgolf* hoort de functie

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}\pi & \text{als } 0 < t < \pi \\ -\frac{1}{4}\pi & \text{als } \pi < t < 2\pi \end{cases} \text{ met periode } 2\pi.$$

- a Plot de lijn $y = \frac{1}{4}\pi$ en in hetzelfde scherm de grafieken van de functies: $y = \sin(t)$, $y = \sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t)$ en $y = \sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t) + \frac{1}{7}\sin(7t)$

- b Hoe meer termen van de vorm $\frac{1}{2n+1}\sin((2n+1)t)$ je toevoegt, des te nauwkeuriger wordt je benadering. Voeg nog twee termen toe en plot de grafiek.



In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Kwadratische vergelijkingen
- Stelsels vergelijkingen
- Vergelijkingen met wortels
- Gebroken vergelijkingen
- Ongelijkheden
- Sinus en cosinus



Kwadratische vergelijkingen

- 1
- Welke vergelijkingen kun je oplossen zonder de haakjes weg te werken?
 - Los deze vergelijkingen op.
 - Los ook de andere vergelijkingen op.

$$\begin{aligned} A & (x+3)^2 + 2x = 9 \\ B & (2x+1)^2 = 49 \\ C & (x-8)(2x+2) = 0 \\ D & (x-2)(x+2) = 5 \end{aligned}$$

Theorie

Bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen moet je eerst goed kijken naar de vorm waarin de vergelijking is gegeven. Daarvan hangt af welke oplossingsmethode je kiest:

- een van de regels die hiernaast staan
- ontbinden in factoren
- de abc -formule.

$$\begin{aligned} A \cdot B = 0 & \text{ dus } A = 0 \text{ of } B = 0 \\ A \cdot B = A \cdot C & \text{ dus } A = 0 \text{ of } B = C \\ A^2 = B^2 & \text{ dus } A = B \text{ of } A = -B \end{aligned}$$

Voorbeeld 1

Los exact op.

$$\begin{aligned} (4x-10)(3x-1) &= 0 \\ 4x-10 &= 0 \text{ of } 3x-1 = 0 \\ 4x &= 10 & \text{ of } 3x &= 1 \\ x &= 2\frac{1}{2} & \text{ of } x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Voorbeeld 2

Los exact op.

$$\begin{aligned} (2x+3)^2(x-4) &= 9(x-4) \\ (2x+3)^2 &= 9 \text{ of } x-4 = 0 \\ 2x+3 &= 3 \text{ of } 2x+3 = -3 \text{ of } x = 4 \\ x &= 0 & \text{ of } x &= -3 & \text{ of } x &= 4 \end{aligned}$$

Voorbeeld 3

Los exact op.

$$\begin{aligned} (x+2)^2 &= (2x-1)^2 \\ x+2 &= 2x-1 \text{ of } x+2 = -(2x-1) \\ x &= 3 & \text{ of } 3x &= -1 \\ x &= 3 & \text{ of } x &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

- 2 Los exact op.

$$\begin{aligned} a & x(x-4) = 45(x-4) & f & (5x+1)(-2x-3) = 0 \\ b & 1 - (x-4)^2 = 1 & g & (2x+5)^2 \cdot (x-1) = 4(x-1) \\ c & 8 + (3x-1)^2 = 89 & h & (5x+3)(x^2-9) = 7(5x+3) \\ d & (3x-4)(2x-3) = (x+1)(2x-3) & i & (2x+1)^2 = 10x+5 \\ e & (x+2)^2 = (3-2x)^2 & j & (0,5x+2)^2 - 2x = 20 \end{aligned}$$

Stelsels vergelijkingen

- 3 Gegeven zijn lijn l : $-3x + 2y = 8$ en lijn m : $8x - 3y = 5$.
- Laat zien dat je de vergelijking $-3x + 2y = 8$ kunt schrijven als $y = 4 + 1\frac{1}{2}x$.
 - Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen door de vergelijking $y = 4 + 1\frac{1}{2}x$ in de vergelijking $8x - 3y = 5$ te substitueren.

Theorie

Bij het oplossen van een stelsel vergelijkingen kun je gebruikmaken van:

- herleiden van vergelijkingen
- substitutie

4 Los de stelsels vergelijkingen op.

a $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ y = -4x + 3 \end{cases}$

d $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 18 \end{cases}$

b $\begin{cases} y + 3x = 0 \\ 5x + y = 4 \end{cases}$

e $\begin{cases} 3a + 2b = 14 \\ -2a + b = 7 \end{cases}$

c $\begin{cases} 6x - y = 14 \\ 2x + 3y = 18 \end{cases}$

f $\begin{cases} 0,1p - 1,3q = 2,4 \\ 0,4p + 2q = 2,4 \end{cases}$

Vergelijkingen met wortels

- 5 a Schets de grafieken van $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = 2 - x$.
b Hoeveel snijpunten hebben de grafieken van f en g ?
c Op het blaadje is een begin gemaakt met het exact oplossen van de vergelijking $\sqrt{x} = 2 - x$.
Maak de berekening af en controleer welke oplossing correct is.

☐	$\sqrt{x} = 2 - x$				
☐	$x = (2 - x)^2$				
☐	$x = 4 - 4x + x^2$				
☐	...				

Theorie

Bij een wortelvergelijking moet je eerst de wortel isoleren, je krijgt dan een vergelijking van de vorm $\sqrt{A} = B$. Door links en rechts van het =-teken te kwadrateren ontstaat de vergelijking $A = B^2$. Deze vergelijking los je verder op. Controleer bij wortelvergelijkingen altijd de oplossing door deze in te vullen bij de oorspronkelijke vergelijking.

Voorbeeld

Los exact op $x + \sqrt{2x + 5} = 5$.

Oplossing

$$\sqrt{2x + 5} = 5 - x \quad (\text{links en rechts } -x)$$

$$2x + 5 = (5 - x)^2 \quad (\text{gekwadrateerd})$$

$$2x + 5 = x^2 - 10x + 25$$

$$x^2 - 12x + 20 = 0$$

$$(x - 10)(x - 2) = 0$$

$$x = 10 \text{ of } x = 2$$

Controleren:

$$x = 10 \text{ geeft } 10 + \sqrt{25} = 5? \text{ klopt niet.}$$

$$x = 2 \text{ geeft } 2 + \sqrt{9} = 5 \text{ klopt.}$$

De oplossing is $x = 2$.

6 Los exact op.

a $5 + \sqrt{x - 7} = 18$

e $x + \sqrt{\frac{1}{2}x + 3} = 0$

b $-3 + \sqrt{8 - t} = 5$

f $1 + 3\sqrt{1 + x} = 7$

c $\sqrt{x - 2} + 3 = 6 + x$

g $x + \sqrt{2x + 4} = 10$

d $4 - \sqrt{6 - 3t} = 0$

h $12 - \sqrt{2x - 15} = 4$

Gebroken vergelijkingen

- 7** Gegeven is de vergelijking $\frac{2x^2}{x+3} = x+2$. Door links en rechts te vermenigvuldigen met $x+3$ ontstaat de vergelijking $2x^2 = (x+2)(x+3)$ mits $x \neq -3$.
- Waarom moet de voorwaarde $x \neq -3$ erbij?
 - Los de vergelijking verder op.
 - Gegeven is de vergelijking $\frac{x+10}{x-6} = \frac{2}{x}$.
Los de vergelijking op door links en rechts met $x-6$ en met x te vermenigvuldigen.

Theorie

Bij het oplossen van gebroken vergelijkingen gebruik je de rekenregels:

Uit $\frac{A}{B} = C$ volgt $A = B \cdot C$ mits $B \neq 0$.

Uit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ volgt $A \cdot D = B \cdot C$ mits $B \neq 0$ en $D \neq 0$.

Voorbeeld

Los exact op: $\frac{2}{x} = \frac{x-1}{6}$

Oplossing

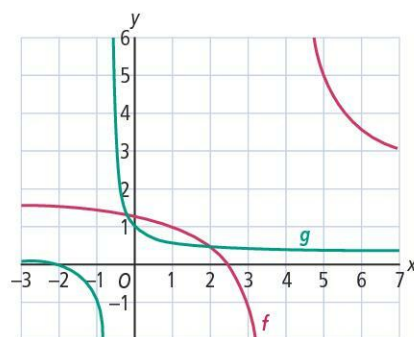
$x(x-1) = 2 \cdot 6$ mits $x \neq 0$

$x^2 - x = 12$

$x^2 - x - 12 = 0$

$(x-4)(x+3) = 0$, dus $x = 4$ of $x = -3$

- 8** Los exact op.
- $\frac{2x+7}{3x} = 3$
 - $\frac{x+3}{x} = \frac{x}{x+3}$
 - $\frac{x^2-5}{x} = 0$
 - $\frac{12}{x+1} = \frac{x-4}{2}$
 - $\frac{12}{4-2\sqrt{x}} = 4$
 - $\frac{2x-1}{4} = \frac{x^2}{2x+1}$
- 9** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{2x-5}{x-4}$ en $g(x) = \frac{x+2}{3x+2}$
- Geef de vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek van f en van de grafiek van g .
 - Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g .
 - Los op $f(x) \geq g(x)$.

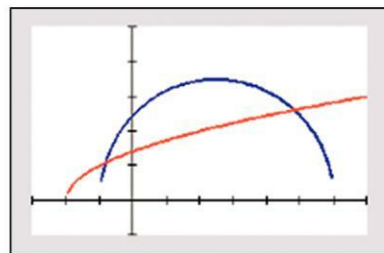


Ongelijkheden

- 10** Geplot zijn de grafieken van de functies $f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x + 6}$

en $g(x) = \sqrt{x + 2}$.

- Geef het domein van f .
- Geef het domein van g .
- Los exact op $f(x) = g(x)$.
- Los exact op $g(x) \geq f(x)$. Gebruik de grafieken en let daarbij op het domein van f en van g .



Theorie

Bij het exact oplossen van een ongelijkheid los je eerst de bijbehorende vergelijking exact op. Vervolgens lees je uit een plot of schets van de grafieken van de functies de oplossing van de ongelijkheid af.

- 11** Los exact op.

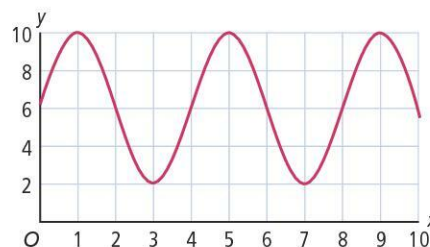
- | | |
|------------------------------------|--|
| a $2x + 8 < 8 - 3(x - 4)$ | d $\sqrt{x + 2} \geq 4$ |
| b $2x^2 + 5x - 10 > 2x - 5$ | e $\sqrt{x + 2} > x$ |
| c $\frac{x + 1}{x - 3} < 2$ | f $\frac{3}{\sqrt{2x + 4}} > 1$ |

Sinus en cosinus

- 12** Vul exacte waarden in.

- | | |
|--|--|
| a $\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \dots$ | d $\sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = \dots$ |
| b $\cos\left(3\frac{1}{3}\pi\right) = \dots$ | e $\sin\left(-1\frac{2}{3}\pi\right) = \dots$ |
| c $\cos\left(-2\frac{3}{4}\pi\right) = \dots$ | f $\sin\left(5\frac{5}{6}\pi\right) = \dots$ |

- 13** Stel bij de sinusoïde een functievoorschrift op.



- 14** Geef van elke functie de periode, amplitude en evenwichtsstand van de grafiek.

- $f(x) = 9 + 2\sin\left(\frac{1}{4}x\right)$
- $g(x) = -3\cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) + 8$
- $h(x) = 13 - \sin(2(x + 5))$



SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In hoofdstuk 2 heb je leren werken met machtsformules en de rekenregels voor machten en in hoofdstuk 8 met logaritmen en de rekenregels die daarvoor gelden.

In dit afsluitende analysehoofdstuk werk je met een aantal verschillende verbanden tussen variabelen. De begrippen recht evenredig en omgekeerd evenredig spelen daarbij een rol. Je maakt kennis met verbanden waarbij een variabele evenredig is met een macht van een andere variabele. Je leert zulke verbanden herkennen en je leert ook een formule voor zo'n verband op te stellen op basis van gegevens uit een tabel.

Met dit hoofdstuk wordt de leerstof voor het examen afgesloten.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk:

- *Formules manipuleren* opdracht 21
- *Ordenen en structuren* opdracht 33
- *Modelleren* opdracht 35

A	x	1	2	3	5	8
	y	2	5	8	14	23

B	x	4	5	6	7	10
	y	9,5	11	12,5	14	18,5

C	x	0	2	4	6	8
	y	36	12	4	$1\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$

- V1**
- Zeg van elke tabel of er sprake kan zijn van een lineair verband tussen de variabelen x en y .
Verklaar je antwoorden.
 - Stel een formule op bij de tabellen van een lineair verband.
 - Er is één tabel die hoort bij een exponentieel verband.
Toon dat aan en stel een formule op bij deze tabel.

Theorie

Bij een **exponentieel verband** hoort de formule $y = b \cdot g^x$.
Bij een exponentieel verband tussen twee variabelen wordt per (tijds)eenheid telkens met hetzelfde getal g vermenigvuldigd.
Hierbij is g de **groeifactor** per eenheid.

Bij een eenheid die k keer zo groot is hoort de groeifactor g^k .
Als $b > 0$ geldt:
Voor $0 < g < 1$ is er sprake van een afname van y , voor $g > 1$ is er een toename van y .

Voorbeeld

Toon aan dat bij de tabel een exponentieel verband hoort en geef een formule.

t	1	2	5	9
A	52	67,6	148,5	424,2

Oplossing

$67,6 : 52 = 1,3$ dus er kan een exponentieel verband zijn met groeifactor 1,3.
De waarde bij $t = 0$ is dan $52 : 1,3 = 40$.
 $t = 5$ geeft $A = 40 \cdot 1,3^5 \approx 148,5$ en
 $t = 9$ geeft $A = 40 \cdot 1,3^9 \approx 424,2$.
De formule is $A = 40 \cdot 1,3^t$.

- V2** Bij de tabel hoort een exponentieel verband tussen de variabelen p en q .

p	5	6	7	8	9	13
q	...	64	96	...	...	...

- Vul de tabel verder in.
- Geef een formule bij de tabel.

Theorie

Exponentiële vergelijkingen kun je oplossen met logaritmen.
De oplossing van de vergelijking $g^x = a$ is $x = {}^g\log(a)$.

Voorbeeld

Los exact op $3 \cdot 1,2^p + 16 = 100$.

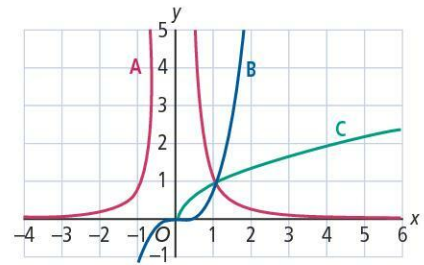
Oplossing

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1,2^p &= 84 \\ 1,2^p &= 28 \\ p &= {}^{1,2}\log(28) \end{aligned}$$

- V3** Los de vergelijkingen exact op.

- $5 \cdot 0,7^x = 12$
- $7^k - 6 = 0$
- $\frac{2}{3 + 4^x} = \frac{1}{2}$
- $2,3 + 0,8^{3x} = 10$
- $2^{3x+2} = 64$
- $\frac{34}{12 + 0,3^{5x}} = 2$

- V4 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^3$, $g(x) = x^{0,5}$ en $h(x) = x^{-2}$.
- Geef bij elke grafiek het juiste functievoorschrift.
 - Gegeven zijn verder de functies $r(x) = \frac{1}{x^2}$ en $p(x) = \sqrt{x}$.
Welke functie is gelijk aan g en welke is gelijk aan h ?
 - Geef het domein van g .
 - Op welk interval is h dalend?
 - Beredeneer met behulp van het functievoorschrift van r dat voor elke $x \neq 0$ geldt $r(x) > 0$.



Theorie

Functies van de vorm $f(x) = x^a$ heten **machtsfuncties**. De exponent a kan negatief of gebroken zijn. De regels voor het rekenen met machten kun je gebruiken bij het rekenen met en het herschrijven van machtsfuncties met negatieve en gebroken exponenten.

De vergelijking $x^a = c$ heeft 0, 1 of 2 oplossingen.

Een eventuele oplossing is $x = c^{\frac{1}{a}}$. Bij twee oplossingen is $x = -c^{\frac{1}{a}}$ ook een oplossing.

$$\begin{aligned} g^a \cdot g^b &= g^{a+b} & g^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{g^m} \quad (g \geq 0) \\ \frac{g^a}{g^b} &= g^{a-b} \quad (g \neq 0) & g^{-n} &= \frac{1}{g^n} \quad (g \neq 0) \\ (g^a)^b &= g^{ab} \quad (g \neq 0) & g^0 &= 1 \quad (g \neq 0) \end{aligned}$$

Voorbeeld 1

Herleid $A = 3q^{2,3} \cdot 4 \cdot (\sqrt[5]{q})^2$ tot de vorm $A = c \cdot q^k$.

Oplossing

$$A = 3 \cdot 4 \cdot q^{2,3} \cdot \left(q^{\frac{1}{5}}\right)^2$$

$$A = 12 \cdot q^{2,3} \cdot q^{0,4} \text{ ofwel } A = 12 \cdot q^{2,7}$$

Voorbeeld 2

Los exact op $g^{1,3} \cdot g^{2,6} \cdot g^{-3} = 2,2$.

Oplossing

$$g^{1,3+2,6-3} = 2,2$$

$$g^{0,9} = 2,2$$

$$g = 2,2^{\frac{1}{0,9}} = 2,2^{\frac{10}{9}} = \sqrt[9]{2,2^{10}}$$

- V5 Herleid de formules tot de vorm $K = c \cdot p^a$.

a $K = 5p^{0,8} \cdot \sqrt{p}$

c $K = \sqrt[3]{p} \cdot \sqrt{p^3}$

b $K = \frac{p^{2,3}}{2p^4}$

d $K = \frac{1}{4} \cdot \frac{(5p^{0,8})^2}{p^{1,6}}$

- V6 Los exact op.

a $x^4 = 81$

d $6p^3 \cdot p^{0,5} = 2$

b $3 \cdot \sqrt{x} = 15$

e $g^{0,4} + 3g^{0,4} = 10$

c $\frac{5k^7}{k\sqrt{k}} = 10$

f $2q\sqrt{q} + \sqrt[4]{q^6} = 81$

14.1 Recht evenredig

Je leert

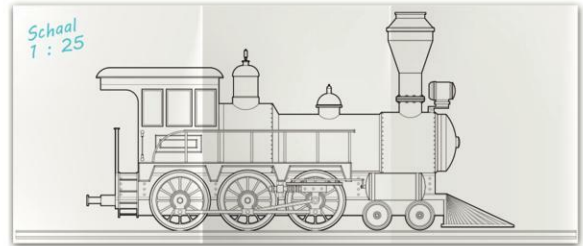
- wat een (recht) evenredig verband is
- hoe je een recht evenredig verband herkent

Leerroutes

- ondersteunend: 1–2–3–4–5–06–6–7
- doorlopend: 1–2–3–4–5–6–7–8
- uitdagend: 1–2–3–6–7–8–U1–U2

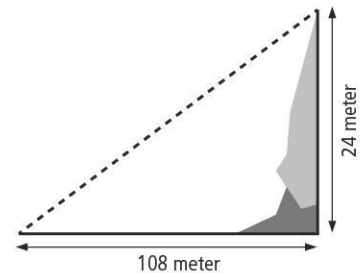
Een bouwer van modeltreinen heeft een bouwtekening op schaal 1 : 25 van een stoomlocomotief, maar wil een model van deze locomotief bouwen op schaal 1 : 45.

- Hoe moet hij de maten van de bouwtekening omrekenen naar de maten van het model dat hij gaat bouwen?
- Kan hij daarvoor een formule opstellen?



- 1 Bij een sprong met een hanglider springt Moerad van een 24 meter hoge rots en komt 108 meter ver. De hanglider gaat in een rechte lijn naar beneden.

A	0	12	40	72	108
D	...	...	...	...	24



- a In de tabel is A de horizontale afstand in meters en D het aantal meters dat de hanglider daalt. Vul de tabel in.
- b Joep beweert: als A verdubbelt, dan verdubbelt D ook. Klopt Joeps uitspraak? Waarom (niet)?
- c Carolien beweert: 'Als je A met een factor k vermenigvuldigt, moet je D ook met k vermenigvuldigen, waarbij je voor k elk willekeurig getal kunt kiezen.' Heeft Carolien gelijk?

- 2 a Teken de grafiek die het verband tussen A en D van opdracht 1 weergeeft.
- b Je kunt het verband tussen A en D weergeven met de formule $D = c \cdot A$. Bereken de waarde van c .
- c Met een andere hanglider komt Moerad bij een sprong van dezelfde rots twee keer zo ver. Bereken nu de waarde van c in de formule $D = c \cdot A$.



Theorie

Twee variabelen heten **recht evenredig** als geldt: als de ene variabele k keer zo groot wordt, dan wordt de andere variabele ook k keer zo groot.

Je herkent een recht evenredig verband in een tabel als van de twee getallen in elke kolom de verhouding dezelfde is.

Zijn de variabelen x en y , dan heet y recht evenredig, of

kortweg **evenredig** met x . Er geldt $\frac{y}{x} = c$, maar ook $y = c \cdot x$.

De constante c heet de **evenredigheidsconstante**.

De grafiek bij een recht evenredig verband is een rechte lijn die door de oorsprong gaat. De richtingscoëfficiënt van de lijn is gelijk aan de evenredigheidsconstante.

Voorbeeld

t	0,3	2,4	3,8	5,4
s	1,8	14,4	22,8	32,4

Laat zien dat s in deze tabel recht evenredig is met t . Bereken de evenredigheidsconstante en geef een bijbehorende formule.

Oplossing

$$\frac{s}{t} = \frac{1,8}{0,3} = \frac{14,4}{2,4} = \frac{22,8}{3,8} = \frac{32,4}{5,4} = 6$$

De evenredigheidsconstante is 6.

Een formule is $s = 6 \cdot t$.

- 3 a Ga voor elke tabel na of b recht evenredig is met a .

H

- b Welke evenredigheidsconstanten horen bij de evenredigheden die je in opdracht a hebt gevonden?

A

a	1	2	3	4
b	4	8	12	16

B

a	1	2	3	4
b	5	7	9	11

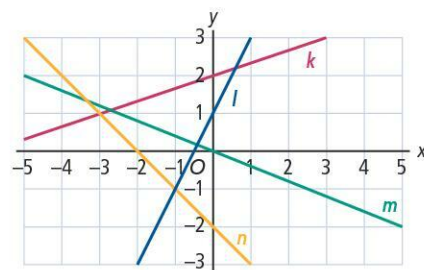
C

a	2	3	6	8
b	-5	-7,5	-15	-20

- 4 a Is elk recht evenredig verband ook een lineair verband?
b Is elk lineair verband ook een recht evenredig verband?
Verklaar je antwoord.

- 5 Van vier lineaire verbanden zijn de grafieken getekend.

- a Stel bij elke grafiek een formule op.
b Eén grafiek hoort bij een recht evenredig verband. Welke grafiek is dat?
c Waarom is er bij de overige drie grafieken geen sprake van een recht evenredig verband?



Ondersteunende route → maak opdracht 06

- 6 Lijn p gaat door $(0, 3)$ en $(2, 11)$, lijn q gaat door $(-3, 5)$ en $(6, -10)$ en lijn r gaat door $(20, 45)$ en $(35, 40)$.

H

- a Geef van elk van de lijnen p , q en r de richtingscoëfficiënt en het startgetal.
b Welke lijn hoort bij een recht evenredig verband?
c Geef van het recht evenredige verband de evenredigheidsconstante.

- 7** Jan en Astrid hebben zonnepanelen op hun dak laten plaatsen. Gedurende het eerste jaar hebben ze de opbrengst in kilowattuur (kwh) per maand bijgehouden.

maand	jan	feb	mrt	apr	mei	jun
uren zon u	45	89	215	120	190	205
opbrengst w	80	155	390	210	350	380

maand	jul	aug	sep	okt	nov	dec
uren zon u	130	120	167	103	32	72
opbrengst w	220	205	300	184	60	125

- Verwerk de gegevens in een assenstel met u langs de horizontale as en w langs de verticale as.
 - Welk verband is er bij benadering tussen u en w ?
 - Stel een formule op die het verband tussen u en w zo goed mogelijk beschrijft.
- 8** De tweede wet van Gay-Lussac stelt dat bij een constante hoeveelheid gas en een constant volume de druk van een gas evenredig is met de absolute temperatuur ervan. De formule bij deze wet is $p = c \cdot T$. Hierin is p de druk in N/m^2 , T is de absolute temperatuur in kelvin en c de evenredigheidsconstante.
- De temperatuur van lucht in een vat neemt toe van 30°C tot 50°C .
Met hoeveel procent neemt de druk in het vat toe?
 - Geef een formule voor het verband tussen de druk p en de temperatuur t in $^\circ\text{C}$.
 - Is er een recht evenredig verband tussen de druk en de temperatuur in $^\circ\text{C}$?



Nul kelvin (K) is het absolute nulpunt. Er is dan geen beweging van de moleculen meer.
 0 K komt overeen met -273°C .
 Je kunt de temperatuur T in kelvin omrekenen naar de temperatuur t in graden Celsius met de formule $T = t + 273$.

Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2

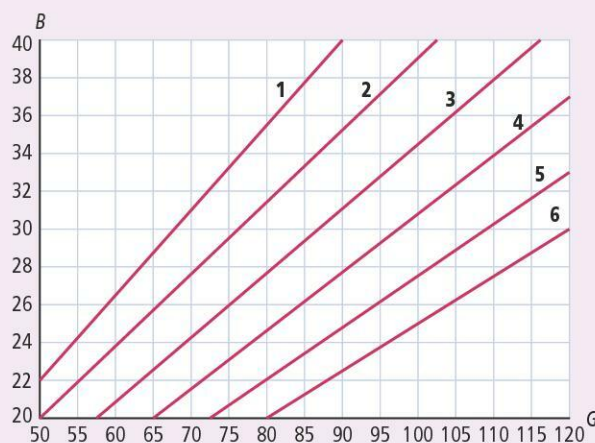
Ondersteunende opdrachten

- 06** Lijn p gaat door $(-2, 4)$ en $(7, 7)$.
- Stel een vergelijking op van p met behulp van het stappenplan op het blaadje.
- Lijn q gaat door $(2\frac{1}{3}, 21)$ en $(14, 126)$ en lijn r gaat door $(27, 36)$ en $(36, 45)$.
- Stel een vergelijking op van q en van r .
 - Een van de lijnen q en r gaat door de oorsprong. Welke lijn is dat en waaruit blijkt dat?
 - Welke lijn hoort bij een recht evenredig verband? Geef ook de bijbehorende evenredigheidsconstante.

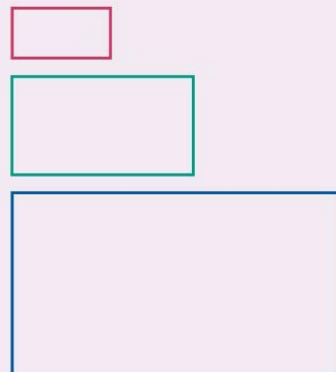
De richtingscoëfficiënt van p is	
$\frac{7-4}{\dots-\dots} = \dots$	1
Vergelijking van p : $y = \dots x + n$	2
$x = -2$ en $y = 4$ geeft $n = \dots$	3
Een vergelijking is $y = \dots x + \dots$	4

Uitdagende opdrachten

- U1** De Body Mass Index (BMI) is een index voor het gewicht in verhouding tot lichaamslengte. De BMI geeft een schatting van het gezondheidsrisico van je lichaamsgewicht. De BMI wordt berekend met de formule $B = \frac{G}{l^2}$ waarbij G het gewicht in kg en l de lengte in m is. In de grafiek is voor een aantal verschillende waarden van l de grafiek van B getekend als functie van G .
- Leg uit waarom de grafieken rechte lijnen zijn.
 - Gaan deze grafieken bij verlengen door de oorsprong? Verklaar je antwoord.
 - Welke waarden van l horen er bij de getekende grafieken?



- U2** Voor een tentoonstelling zijn drie rechthoekige borden gemaakt, die gelijkvormig zijn aan elkaar. De breedte van het eerste bord is gelijk aan de hoogte van het tweede bord en de breedte van het tweede bord is gelijk aan de hoogte van het derde bord. Het eerste bord is 10 cm hoog en het derde bord is 200 cm breed. Bereken de afmetingen van alle drie borden. Rond je antwoorden af op millimeters.



14.2 Omgekeerd evenredig

Je leert

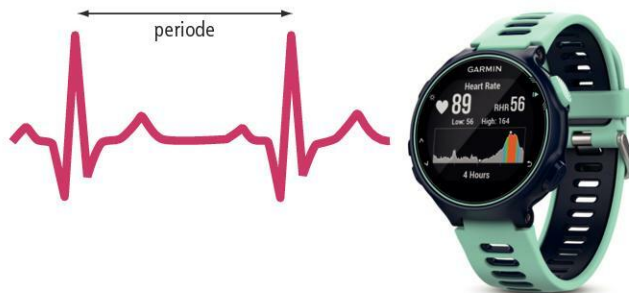
- wat een omgekeerd evenredig verband is
- hoe je een omgekeerd evenredig verband herkent

Leerroutes

- ondersteunend: 9—10—11—12—013—14—15
- doorlopend: 9—10—11—12—13—14—15
- uitdagend: 10—12—13—14—15—U3—U4

De hartslag kan op twee manieren met een getal worden weergegeven: met de periode (in seconden) of met het aantal slagen per minuut.

- Wat is het verband tussen deze twee getallen?



- 9 Thijs woont 12 km van zijn school.
- Gemiddeld fietst hij 16 km per uur.
Hoelang is hij onderweg?
 - De volgende dag brengt zijn vader hem met de auto.
Die rijdt gemiddeld twee keer zo snel als Thijs fietst.
Hoelang doet zijn vader er over?
 - Hoelang zou zijn vader er over doen als zijn gemiddelde snelheid drie keer zo groot is als die van Thijs?
 - Zet je antwoorden in de tabel en bereken in elke kolom de uitkomst van $tijd \times snelheid$.
 - Teken in een assenstelsel de punten bij deze tabel.
Zet de tijd op de horizontale as.
 - Is de grafiek door deze punten een rechte lijn?

<i>tijd</i> in uren	...	...	...
<i>snelheid</i> in km/u	16	...	...

Theorie

Twee variabelen heten **omgekeerd evenredig** als geldt: als de ene variabele k keer zo groot wordt, wordt de andere variabele k keer zo klein.

Je herkent een omgekeerd evenredig verband in een tabel als het product van de variabelen in elke kolom steeds hetzelfde is. Zijn de variabelen x en y , dan geldt $x \cdot y = c$.

Je kunt ook schrijven $y = \frac{c}{x}$ of $x = \frac{c}{y}$

Voorbeeld

v	6	9	18
t	1,5	1	0,5

Laat zien dat v en t in deze tabel omgekeerd evenredig zijn en geef de bijbehorende formules.

Oplossing

$$v \cdot t = 6 \times 1,5 = 9 \times 1 = 18 \times 0,5 = 9$$

De formules zijn:

$$v \cdot t = 9 \text{ of } t = \frac{9}{v} \text{ of } v = \frac{9}{t}$$

x	0,8	...	2	6	80
y	60	32	24	...	...

x	1	...	5	15	60
y	...	45	...	6	...

- 10** De variabelen x en y in de tabellen zijn omgekeerd evenredig.
H Geef een formule bij elk van de tabellen en vul de tabellen verder in.

- 11** De weerstand R in ohm in een stroomdraad hangt af van de oppervlakte A in mm^2 van de dwarsdoorsnede van de draad. In de tabel staan enkele meetwaarden.

R	1,91	3,00	5,25	10,50
A	0,11	0,07	0,04	0,02

- a** Ga na dat het verband tussen R en A omgekeerd evenredig is.
b Beschrijf het verband tussen R en A met drie formules.

- 12** De lichtintensiteit van een lamp is kleiner als je verder van de lamp verwijderd bent. De lamp brandt wel steeds even sterk, maar de afstand tot de lamp is van invloed op de lichthoeveelheid die je ervaart. De lichtintensiteit kun je meten en wordt uitgedrukt in watt/m^2 . In de tabel vind je de lichtintensiteit L op verschillende afstanden d van een lamp.

d in meters	L in watt/m^2	d^2
1	63	...
1,5	28	...
2	15,75	...
3	7	...
4	3,94	...
10	0,63	...

- a** Laat zien dat L niet omgekeerd evenredig is met d .
b Vul de kolom d^2 in.
c Laat zien dat L en d^2 omgekeerd evenredig zijn.
d Breid de tabel uit met een kolom $\frac{1}{d^2}$ en vul deze voor de verschillende waarden van d in.
e Laat zien dat L evenredig is met $\frac{1}{d^2}$ en geef een formule waarbij je L uitdrukt in d .

Theorie

Er zijn ook verbanden, waarbij de ene variabele omgekeerd evenredig is met een macht van de andere variabele.

Voorbeeld

Het verband tussen de variabelen P en Q is

gegeven door $Q = 5 \cdot \frac{1}{P^3}$

In dit geval is Q omgekeerd evenredig met de derde macht van P .

Ondersteunende route → maak opdracht 013

- 13** De variabele T is omgekeerd evenredig met de vierde macht van de variabele p met $p > 0$.

H

- Vul de ontbrekende getallen in.
- Geef een formule voor het verband tussen T en p .
- Druk p uit in T .

p	1	2	3	4	5	10	20
p^4	...	...	...	...	...	...	...
T	...	0,75	...	...	...	...	...
$T \cdot p^4$	...	...	...	...	...	...	...

- 14** Van de variabelen k en t is gegeven dat k omgekeerd evenredig is met de derde macht van t .

Als $t = 3$, dan is $k = 200$.

- Stel een formule op voor het verband tussen k en t .
- Bereken k als $t = 9$.
- Hoe verandert k als t twee keer zo groot wordt? Verklaar je antwoord.

- 15** Het kost grote dieren minder energie per kilogram lichaamsgewicht dan kleine dieren om dezelfde prestatie te leveren. Biologen hebben hier onderzoek naar gedaan en van verschillende zoogdieren gemeten hoeveel liter zuurstof Z het per kg lichaamsgewicht kost om één kilometer af te leggen. In de tabel is het verband tussen Z en het lichaamsgewicht G in kg weergegeven. Je ziet dat hoe zwaarder het zoogdier, des te minder het zuurstofverbruik per kg lichaamsgewicht is.

	Z in liter/kg	G in kg
hazelmuis	2,321	0,032
hond	0,271	20
leeuw	0,122	220
giraf	0,084	680
neushoorn	0,055	2400

- Als G en Z omgekeerd evenredig zouden zijn, wat kun je dan zeggen over het totale zuurstofverbruik van elk zoogdier bij het afleggen van één km?
- Welk van de vijf genoemde zoogdieren gebruikt totaal de meeste zuurstof per km?
- Laat met een tabel zien dat G omgekeerd evenredig is met Z^3 en geef een formule voor G uitgedrukt in Z .
- Geef een formule waarbij Z is uitgedrukt in G .



Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4

Ondersteunende opdrachten

013 Bij een onderzoek naar het verband tussen de variabelen x en m zijn de gegevens gevonden die in de tabel staan.

- Vul de onderste twee rijen van de tabel in.
- Waaruit blijkt dat m omgekeerd evenredig is met $x^{1\frac{1}{2}}$?
- Druk m uit in x .

Van de variabelen r en h is gegeven dat h omgekeerd evenredig is met de derde macht van r .

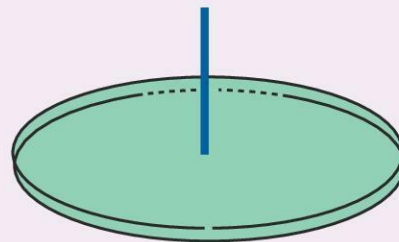
- Vul de tabel in.
- Geef een formule voor het verband tussen r en h .
- Druk h uit in r .

m	62,5	27	15,8	8,6	5,6
x	4	7	10	15	20
$x^{1\frac{1}{2}}$	...	...	...	...	...
$m \cdot x^{1\frac{1}{2}}$	...	...	...	...	...
r	2	4	5	10	20
h	1000	125	64	8	1
r^3	...	...	...	...	...
$h \cdot r^3$	...	...	...	...	...

Uitdagende opdrachten

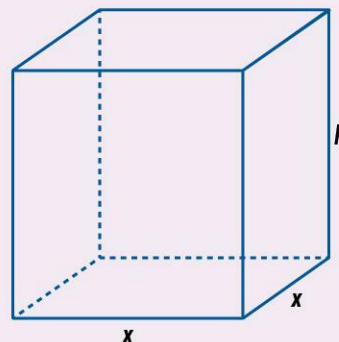
U3 Een stroperige vloeistof lekt uit een groot vat met een snelheid van 0,5 liter per minuut. De vloeistof vormt een cirkelvormige plas met een straal van r cm die overal d cm dik is.

- Leg uit dat voor het volume V van de weggelekte vloeistof in cm^3 geldt $V = 500t$, met de tijd t in minuten.
- Stel dat op een gegeven moment 40 liter is weggelekt. Beschrijf het verband tussen r en d met een formule.
- Neem aan dat $d = 2$. Beschrijf het verband tussen r en t met een formule.



U4 Voor verpakkingen met een volume van 1 liter is een ontwerp gemaakt. De verpakkingen worden balkvormig met een vierkant grondvlak van x bij x cm en de hoogte is h cm.

- Laat zien dat h omgekeerd evenredig is met x^2 .
- Druk x uit in h .
- De totale oppervlakte in cm^2 van de verpakking is A . Druk A uit in x en h .
- Stel dat de totale oppervlakte exact 1 m^2 is. Zijn de variabelen x en h dan omgekeerd evenredig? Verklaar je antwoord.



14.3 Machtsverbanden

Je leert

- wat een machtsverband is
- wat de wetten van schaalvergroting zijn
- hoe je bij een machtsverband een rechte lijn als grafiek krijgt

Leerroutes

- ondersteunend: 16—17—018—19—20—21—22—23
- doorlopend: 16—17—18—19—20—21—22—23
- uitdagend: 16—18—19—20—21—22—23—U5

Een kunstenaar heeft een ontwerp gemaakt voor een kunstwerk. Als voorstudie heeft hij een model gemaakt waarvan de afmetingen vier keer zo klein zijn als die van het uiteindelijke kunstwerk. De totale oppervlakte van het model is $1,75 \text{ m}^2$ en het volume is $0,8 \text{ m}^3$.

- Hoe kan hij de totale oppervlakte en het volume van het definitieve kunstwerk berekenen?



16 Gegeven zijn kubussen met ribbe r , oppervlakte A en inhoud I . In de tabel staan ook kolommen voor r^2 en r^3 .

- Vul in de tabel de ontbrekende getallen in.
- Laat zien dat A evenredig is met r^2 en dat I evenredig is met r^3 .
- Welke evenredigheidsconstanten horen bij de evenredigheden van opdracht b?
- Teken de grafiek van het verband tussen r^2 en A . Zet r^2 langs de horizontale as.
- Hoe kun je aan de grafiek zien dat r^2 en A evenredig zijn?
- Hoe lees je de evenredigheidsconstante af uit de grafiek?

r	r^2	r^3	A	I
1	...	...	...	...
2	...	...	24	...
3	...	...	...	...
4	...	...	...	64
5	25	...	...	...
10	...	...	...	...

Theorie

Als voor twee variabelen P en Q geldt dat Q evenredig is met P^a , dan is er een machtsverband tussen P en Q van de vorm $Q = c \cdot P^a$.

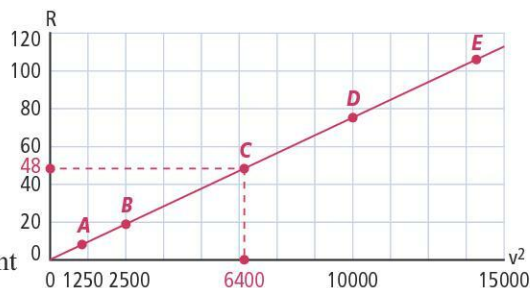
Als Q evenredig is met P^a dan is de grafiek weer een rechte lijn door de oorsprong als je Q uitzet tegen P^a .

Voorbeeld

In de grafiek is de remweg R in meters uitgezet tegen het kwadraat van de snelheid v in km/u. Welke evenredigheid volgt uit de grafiek en hoe groot is de bijbehorende evenredigheidsconstante?

Oplossing

De meetwaarden liggen op een rechte lijn door de oorsprong, dus is R recht evenredig met v^2 . De evenredigheidsconstante is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de lijn en die is $\frac{48}{6400} = 0,0075$.



- 17**
- Geef een formule voor het verband tussen R en v uit het voorbeeld.
 - Bereken de remweg bij een snelheid van 130 km per uur.
 - Hoeveel keer groter is de remweg als de snelheid verdubbelt?

Ondersteunende route → maak opdracht 018

- 18** Gegeven is de formule $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$.

H

- Vul de tabel in.
- De formule kan worden geschreven als $y = a \cdot x^b$. Welke waarden hebben a en b ?
- Teken een grafiek met waarden van $\sqrt{x}$ op de horizontale as. Wat valt je op aan deze grafiek?
- Gegeven is de formule $y = 8x^{0,3}$. Wat moet je op de horizontale as tegen y uitzetten om als grafiek een rechte lijn te krijgen? Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van die lijn?

x	...	...	...	9	...	...
$\sqrt{x}$	0	1	2	3	4	5
y	...	...	...	$1\frac{1}{2}$	...	...

- 19** De meetgegevens van een onderzoek zijn uitgezet in een grafiek, met de variabele m^3 langs de horizontale as en de variabele K langs de verticale as. De gevonden punten liggen op een rechte lijn door de punten $(0, 0)$ en $(512, 44)$. Stel een formule op voor het verband tussen K en m .

- 20** Gegeven is het machtsverband $Q = 7 \cdot x^{2,3}$.

- Bereken Q bij $x = 1$, $x = 2$ en $x = 4$. Rond indien nodig af op drie decimalen.
- Ga voor de waarden uit opdracht a na dat als x twee keer zo groot wordt, dat Q dan $2^{2,3}$ keer zo groot wordt.
- Op het blaadje wordt de bewering uit opdracht b aangetoond voor elke waarde van x . Toon op dezelfde manier aan dat als x met de factor k wordt vermenigvuldigd, dat Q dan $k^{2,3}$ keer zo groot wordt.

●	$Q = 7 \cdot (2 \cdot x)^{2,3}$				
●	$Q = 7 \cdot 2^{2,3} \cdot x^{2,3}$				
●	$Q = 2^{2,3} \cdot 7 \cdot x^{2,3}$				
●					

Theorie

Als de variabele Q evenredig is met een macht a van de variabele P (dus $Q = c \cdot P^a$), dan wordt bij een vermenigvuldiging van P met factor k de waarde van Q met de factor k^a vermenigvuldigd.

Een gevolg van deze eigenschap zijn de **wetten van schaalvergroting**:

Als de afmetingen van een figuur met k worden vermenigvuldigd, dan wordt de oppervlakte met k^2 en de inhoud wordt met k^3 vermenigvuldigd.

Voorbeeld

Een gebouw is 5 meter hoog, heeft een oppervlakte van 62 m^2 en een inhoud van 240 m^3 . Er wordt een model op schaal 1 : 25 gemaakt.

Bereken de hoogte, de oppervlakte en de inhoud van het model.

Oplossing

De hoogte van het model is

$$5 \times \frac{1}{25} = 0,2 \text{ m.}$$

De oppervlakte is

$$62 \times \left(\frac{1}{25}\right)^2 = 0,0992 \text{ m}^2.$$

$$\text{De inhoud is } 240 \times \left(\frac{1}{25}\right)^3 = 0,01536 \text{ m}^3.$$

- 21** Gegeven zijn de formules waarmee je de oppervlakte A en de inhoud I van een bol kunt berekenen.
- De inhoud van de bol is evenredig met de derde macht van de straal.
Hoe groot is de evenredigheidsconstante bij dit verband?
 - Een bol met straal r wordt vergroot met een factor k .
Bewijs dat voor de inhoud van de vergroting geldt:
 $I = k^3 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$.
 - Je kunt de inhoud I uitdrukken in de oppervlakte A .
Is het verband tussen I en A een machtsverband? Zo ja, geef de evenredigheidsconstante.
 - Hoeveel keer groter wordt I als A een factor k keer zo groot wordt?

Voor een bol met straal r geldt:

$$A = 4\pi r^2$$

$$I = \frac{4}{3}\pi r^3$$

- 22** In de tabel staat een aantal meetresultaten. Neem aan dat de bijbehorende formule de vorm $y = c \cdot x^n$ heeft.

H

- Leg uit dat uit het punt $(1, 5)$ volgt dat $c = 5$.
- Gebruik een ander punt om de waarde van n te berekenen en stel de formule op.
- Welke waarde heeft y bij $x = 20$? Rond af op twee decimalen.

x	1	4	9	16
y	5	40	135	320

- 23** In de tabel staan meetresultaten voor het verband tussen de variabelen V en Z . Neem aan dat er een machtsverband is tussen V en Z . Rond de antwoorden in deze opdracht verstandig af.

- Geef een formule waarbij Z wordt uitgedrukt in V .
- Geef ook een formule waarbij V is uitgedrukt in Z .
- Hoeveel keer groter wordt Z als V 2,8 keer zo groot wordt?

V	1	2	3	4	5
Z	12,1	22,9	33,2	43,3	53,2

Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

018 Gegeven is de formule $p = 4x\sqrt{x}$.

- Vul de tabel in.
- Teken een grafiek bij de tabel met op de horizontale as de waarden van $x\sqrt{x}$ en op de verticale as de waarden van p .
- De grafiek die je in opdracht b hebt getekend is een rechte lijn door de oorsprong.
Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van deze lijn?
- Wat is dus de evenredigheidsconstante van het recht evenredige verband?

x	0	1	...	9	12	18
$x\sqrt{x}$	...	...	8	...	...	...
p	...	...	...	...	...	...

Gegeven is de formule $p = 7\frac{1}{2}x^{0,8}$.

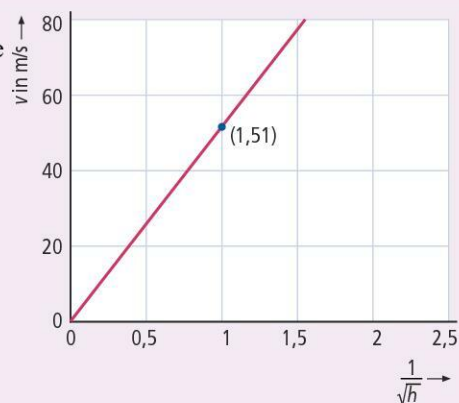
- Wat moet je op de horizontale as tegen p uitzetten om als grafiek een rechte lijn te krijgen? Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van die lijn?

Uitdagende opdrachten

U5 Muren kunnen bij harde wind omver geblazen worden. Bij welke windsnelheden dit gebeurt, hangt onder andere af van de hoogte en de dikte van de muur. Bij een bepaald type muur is dit verband onderzocht en is de formule $V = 170 \cdot \frac{d}{\sqrt{h}}$

opgesteld. Hierin is V de windsnelheid in m/s, h de hoogte en d de dikte van de muur, beide in meters.

- In de grafiek is het verband weergegeven tussen V en $\frac{1}{\sqrt{h}}$ voor muren van een bepaalde dikte.
Bereken hoe dik die muren zijn.
- Hoe ziet de grafiek van het verband tussen V en d eruit als je muren bekijkt met een vaste hoogte?
- Laat met behulp van de formule $V = 170 \cdot \frac{d}{\sqrt{h}}$ zien dat de hoogte van de muur omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de windsnelheid.
- Als een muur vier keer zo hoog en twee keer zo dik wordt gemaakt, wat moet er dan met de windsnelheid gebeuren om de muur omver te kunnen blazen?



14.4 Machtsverband of exponentieel verband

Je leert

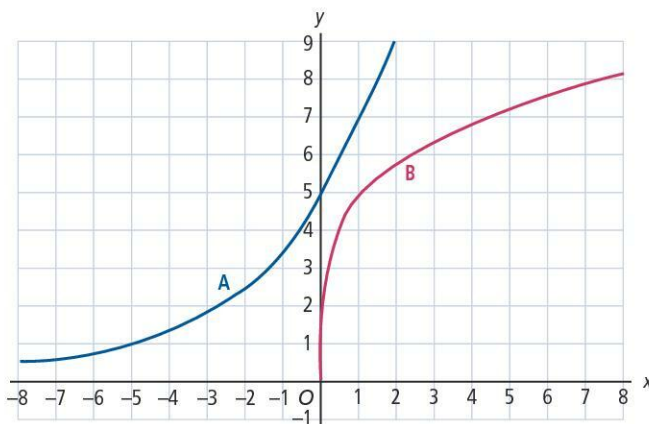
- hoe je een formule opstelt bij een machtsverband bij een gegeven tabel
- het verschil tussen de formules van een exponentieel verband en van een machtsverband

Leerroutes

- ondersteunend: 24—25—26—027—28—29—30—31
- doorlopend: 24—25—26—27—28—29—30—31
- uitdagend: 25—26—27—29—30—31—U5—U6

Een van de grafieken hoort bij een machtsverband, de andere grafiek hoort bij een exponentieel verband.

- Waarom kan grafiek B niet bij een exponentieel verband horen?



- 24** a Twee van de drie tabellen horen bij een exponentieel verband. Geef een formule bij deze tabellen.
- b De derde tabel hoort bij een machtsverband. De bijbehorende formule heeft de vorm $y = c \cdot x^p$. Waarom kun je de waarde van c uit de tabel aflezen en hoe groot is deze waarde?

A	x	1	2	3	5	8
	y	3	6	12	48	384

B	x	4	5	7	8	9
	y	400	300	168,75	126,56	94,92

C	x	1	4	20	32	60
	y	12	20,9	39,8	48	61,7

- 25** Om bij een gevonden skelet van een volwassen zoogdier het lichaamsgewicht te kunnen schatten, onderzoekt een bioloog het verband tussen het lichaamsgewicht L in kilogrammen en het skeletgewicht S in kilogrammen. Metingen leveren de gegevens in de tabel.

	muis	konijn	schaap	paard	nijlpaard	olifant
L	0,016	2	55	475	1925	4875
S	0,0015	0,25	10	100	475	1325

$0,0015 = c \cdot 0,016^p$ dus $c = \frac{0,0015}{0,016^p}$
 $1325 = c \cdot 4875^p$ dus $c = \frac{1325}{4875^p}$
 Je kunt p vinden door op je rekenmachine in te voeren
 $y_1 = 0,0015/0,016^x$ en
 $y_2 = 1325/4875^x$

- a Laat zien dat het verband tussen S en L niet exponentieel is.
- b Het verband is van de vorm $S = c \cdot L^p$. Op het blaadje is een begin gemaakt met de berekening van c en p . Laat zien dat, afgerond op drie decimalen, $p = 1,084$ en $c = 0,133$.

- 26** De grafiek van een machtsverband tussen de variabelen d en N gaat door de punten (5, 12) en (10, 234). Gevraagd wordt met behulp van algebra een formule op te stellen. Neem aan dat de formule van de vorm $N = c \cdot d^p$ is.

- Welk verband tussen c en p volgt uit het tweede gegeven? Vul dit in bij stap 1.
- Vul het resultaat van stap 1 bij stap 2 in.
- Door de deling in stap 2 ontstaat een vergelijking in p . Stel deze vergelijking op in stap 3.
- Los de vergelijking uit opdracht c op in stap 4. Rond de waarde van p af op twee decimalen.
- Bereken de waarde van c . Rond af op drie decimalen.
- Schrijf de formule op voor het verband tussen d en N .

●	$12 = c \cdot 5^p$ en ...			1	
●	$\frac{\dots}{c \cdot 5^p} = \frac{\dots}{12}$			2	
●	$\left(\frac{\dots}{5}\right)^p = \dots$			3	
●	$p = \dots \log(\dots)$			4	
●	$c = \dots$				

Theorie

Hoe stel je een formule op voor een machtsverband bij een gegeven tabel?

Als tussen de variabelen x en y een machtsverband $y = c \cdot x^p$ bestaat, kun je de waarden van c en p berekenen met de volgende stappen.

- Vul de gegevens van twee punten in, je krijgt twee vergelijkingen met c en p .
- Bereken de waarden van c en p door elimineren of met de rekenmachine.
- Schrijf de formule op. Controleer daarna of de gevonden formule klopt voor de eventuele overige gegevens.

Voorbeeld

Stel een formule van de vorm $y = c \cdot x^p$ op voor het machtsverband waarvan de grafiek door de punten (2; 4,5) en (8, 145) gaat.

Oplossing

- Uit de gegevens volgt $145 = c \cdot 8^p$ en $4,5 = c \cdot 2^p$
- De vergelijkingen op elkaar delen geeft $\frac{c \cdot 8^p}{c \cdot 2^p} = \frac{145}{4,5}$ en dus $4^p = 32,222\dots$
 $p = {}^4\log(32,222\dots) \approx 2,5$ en
 $c = \frac{4,5}{2^{2,504\dots}} \approx 0,8$
- Een formule is $y = 0,8 \cdot x^{2,5}$.

Ondersteunende route → maak opdracht 027

- 27** Stel een formule $y = c \cdot x^p$ op voor het machtsverband waarvan de grafiek gaat door de gegeven punten. Rond c af op een geheel getal en p op twee decimalen.

H

- (1, 45) en (15, 20)
- (3, 1456) en (10, 11 277)
- (2, 244), (7, 624), (12, 935) en (16, 1160)

- 28** Biologen hebben onderzocht of er een verband is tussen het aantal fruitvliegjes per dm^3 en de vruchtbaarheid van de fruitvliegjes. Enkele resultaten staan in de tabel. Het aantal fruitvliegjes per dm^3 is de dichtheid d en de vruchtbaarheid v is het aantal eitjes per vrouwtje. De onderzoekers nemen aan dat er een machtsverband is tussen v en d .

- Stel een formule op waarin je v uitdrukt in d .
- Met welke factor neemt de vruchtbaarheid af als de dichtheid verdubbelt?

d	20	40	100	200	400	808
v	340	286	227	193	164	140

Theorie

Formules van de vorm $y = b \cdot g^x$ horen bij een exponentieel verband. Bij een exponentieel verband tussen twee variabelen wordt per (tijds)eenheid telkens met hetzelfde getal vermenigvuldigd.

Formules van de vorm $y = c \cdot x^a$ horen bij een machtsverband.

Voorbeeld

Voorbeelden van een exponentieel verband zijn

$$y = 12 \cdot 0,88^x \text{ en } K = 0,012 \cdot 1,82^t.$$

Voorbeelden van een machtsverband zijn $y = 14 \cdot x^{1,4}$ en $R = 0,23 \cdot q^{-2,5}$.

- 29** Geef van elke formule aan of die formule bij een machtsverband of een exponentieel verband hoort.

a $y = 5 \cdot x^{\frac{1}{6}}$

d $y = 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x$

b $y = 0,2 \cdot 1,02^x$

e $y = \frac{3}{4} \cdot x^3$

c $y = \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{1}{3}}$

f $y = 3^{0,5x-2}$

- 30** Bij een onderzoek naar het verband tussen de variabelen t en A is gevonden dat $\log(A) = 0,13t + 1,7$.

H

Laat zien dat er een exponentieel verband is tussen t en A door het verband tussen t en A te herleiden tot de vorm $A = b \cdot g^t$. Rond de waarden van b en g af op twee decimalen.

- 31** Het verband tussen de variabelen A en B is gegeven door de formule $\log(B) = p \cdot \log(A) + q$.

H

Als $A = 7$, dan is $B = 59$ en als $A = 20$ dan is $B = 391$.

- Toon met een berekening aan dat $p \approx 1,8$ en $q \approx 0,25$.
- Laat met behulp van de rekenregels voor logaritmen zien dat er een machtsverband is tussen A en B . Schrijf het machtsverband in de vorm $B = c \cdot A^p$. Rond de waarden van c en p af op één decimaal.

Uitdagende route → maak opdracht U6 en U7

Ondersteunende opdrachten

- 027** De grafiek bij een formule de vorm $y = c \cdot x^p$ gaat door de punten $A(3, 408)$ en $B(11, 3713)$.
- Wat is er in stap 1 gebeurd?
 - Gebruik de coördinaten van B om stap 2 in te vullen.
 - In stap 3 worden de vergelijkingen van stap 1 en stap 2 op elkaar gedeeld. Vul stap 3 verder in.
 - Vul de stappen 4 en 5 in. Rond p af op één decimaal
 - Bereken c door de gevonden waarde van p bij stap 1 in te vullen. Rond c af op een geheel getal.
 - Schrijf de formule op.

Stel een formule op voor een machtsverband waarvan de grafiek gaat door de gegeven punten.

- $(2, 145)$ en $(12, 20)$
- $(13, 800)$ en $(17, 1060)$
- $(5, 457)$, $(10, 301)$, $(20, 199)$ en $(25, 174)$

☐	$c \cdot 3^p = 408$				1
☐	$c \cdot \dots^p = \dots$				2
☐	$\frac{c \cdot \dots^p}{c \cdot 3^p} = \frac{\dots}{\dots}$				3
☐	$\left(\frac{\dots}{\dots}\right)^p = \dots =$				4
☐	$p = \dots$				5
☐	Bereken c .				6

Uitdagende opdrachten

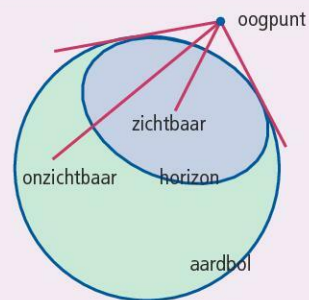
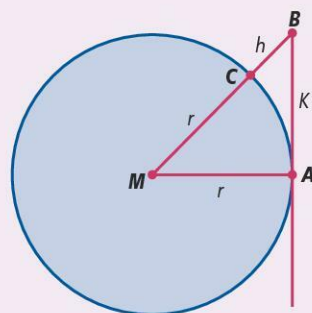
- U6** Als je op een toren staat en je hebt vrij zicht, kun je ver kijken. Je kunt echter niet verder kijken dan tot de horizon. De afstand tot de horizon, de kijkafstand, wordt groter als je op een hogere toren staat. In de tabel wordt de kijkafstand gegeven bij verschillende hoogten.

hoogte h in meters	50	100	150	250	300	450
kijkafstand K in km	25	35	43	56	61	75

- De formule voor dit verband heeft de vorm $K = c \cdot \sqrt{h}$. Bereken de waarde van c . Rond af op twee decimalen.

In de schematische tekening van de situatie is aangenomen dat je op een hoogte van h meter staat terwijl de kijkafstand gelijk is aan K meter. De straal van de aarde in meters is r .

- $\triangle MAB$ is een rechthoekige driehoek. Gebruik dit gegeven om uit te leggen dat geldt $K = \sqrt{(2r + h) \cdot h} = \sqrt{2r + h} \cdot \sqrt{h}$.
- De straal van de aarde is 6 370 000 meter. Beredeneer dat voor relatief kleine waarden van h (bijvoorbeeld $h = 80$ meter) de formule $K = 3,6 \cdot \sqrt{h}$ een goede benadering is voor de kijkafstand uitgedrukt in kilometers.



p	3	7
q	150,16	1054,2

- U7** Het verband tussen p en q in de tabel kan onder andere een machtsverband of een exponentieel verband zijn. Hoeveel keer groter is q bij $p = 15$ als er een exponentieel verband is tussen p en q in plaats van een machtsverband?

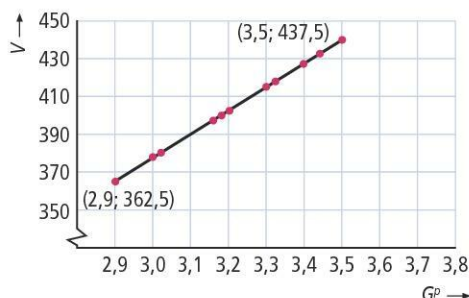
14.5 Gemengde opdrachten

- 32** Gegeven zijn de formules $P = \left(\frac{k}{6}\right)^{0,4}$, $k = 10 \cdot w^{2,5}$ en $k = 2(2q - 1)^{2,5}$.
- Toon aan dat er een recht evenredig verband is tussen P en w en geef de evenredigheidsconstante.
 - Het verband tussen P en q is te schrijven als $P = a \cdot q + b$. Bereken algebraïsch de waarde van a en van b . Rond af op twee decimalen.

- 33**
- Onderzoek welke evenredigheid bestaat tussen P en Q , tussen P en R , tussen Q en R en geef de bijbehorende evenredigheidsconstanten.
 - Ga na dat P recht evenredig is met $\frac{1}{S^2}$.
 - Beredeneer dat geldt P^2 evenredig is met $Q \cdot R$ en geef de evenredigheidsconstante.
 - Beredeneer dat P^2 evenredig is met $\frac{\sqrt{Q \cdot R}}{S^2}$.
 - Bereken bij de evenredigheid van opdracht d de evenredigheidsconstante. Rond af op één decimaal.
 - Hoe verandert P als Q , R en S elk twee keer zo groot worden?

P	Q	R	S
2	3	0,45	17,89
4	6	0,90	12,65
6	9	1,35	10,33
8	12	1,80	8,94
10	15	2,25	8,00

- 34** Bij zoogdieren blijkt het hersenvolume V in cm^3 evenredig te zijn met een macht van het lichaamsgewicht G , dus $V = a \cdot G^p$. De getallen a en p hangen af van het soort zoogdier. In de grafiek staan de gegevens van 12 volwassen chimpansees. Door de meetresultaten is zo goed mogelijk een rechte lijn getekend. De coördinaten van twee punten op deze lijn zijn in de figuur aangegeven.



- Gebruik de aangegeven punten in de grafiek om de waarde van a in de formule $V = a \cdot G^p$ te berekenen.
- Gebruik de tabel onder de grafiek om de waarde van p te berekenen. Rond af op twee decimalen.
- Voor mensen in de prehistorie geldt $V = 180 \cdot G^{0,25}$. Prehistorische mensen wegen meer dan chimpansees. Er zijn fragmenten gevonden van een heel oude schedel. De schedel is van een volwassen mens of chimpansee. Op grond van de fragmenten wordt de schedelinhoud geschat op 450 cm^3 . Ga na of de schedel van menselijke herkomst is.

G	31,0	38,5	47,1	56,9
G^p	2,90	3,10	3,30	3,50

35 In de tabel zijn van een aantal planeten van ons zonnestelsel gegeven:

- de gemiddelde afstand A tot de zon in miljoenen km
- de omlooptijd t in dagen.

Op grond van deze gegevens kan een machtsverband tussen t en A worden opgesteld, dat bekend staat als de derde wet van Kepler.

- Stel een formule van de vorm $A = c \cdot t^p$ op voor dit machtsverband en onderzoek of alle planeten uit de tabel aan dit verband voldoen.
- De planeten Venus en Uranus ontbreken in de tabel. De afstand tot de zon van deze planeten is $108 \cdot 10^6$ km en $2,9 \cdot 10^9$ km. Zoek de omlooptijden op van Venus en Uranus en ga na of deze voldoen aan de formule die je in opdracht a hebt gevonden.



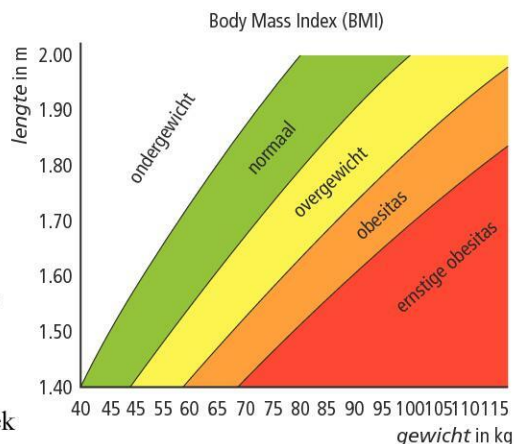
planeet	t	A
Mercurius	87,97	58
Aarde	365,26	149,6
Mars	687	230
Jupiter	4332	780
Saturnus	10760	1400
Neptunus	60195	4500

36 De Body Mass Index (BMI) is een index voor het gewicht in verhouding tot de lichaamslengte. De BMI geeft een schatting van het gezondheidsrisico van je lichaamsgewicht.

De BMI wordt berekend met de formule $B = \frac{G}{l^2}$ waarbij G het gewicht in kg is en l de lengte in m.

Op de website van het Voedingscentrum vind je een applet om je BMI te berekenen.

- Welk soort verband is er tussen B en G bij een constante waarde van l ?
- Welk soort verband is er tussen B en l bij een constante waarde van G ?
- De grenslijnen tussen de verschillende kleuren in de grafiek zijn lijnen die punten met gelijke BMI met elkaar verbinden. Deze lijnen zijn de grafieken van een familie van functies. Onderzoek welke soort functies dit zijn.
- Onderzoek welke waarden van B bij de grenslijnen tussen de verschillende kleuren horen.

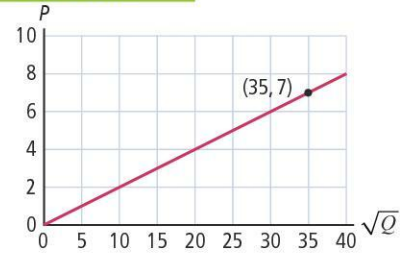


Theorie

Machtsverband

Als voor twee variabelen P en Q geldt dat Q evenredig is met P^a , dan is er een machtsverband tussen P en Q van de vorm $Q = c \cdot P^a$.

Voorbeeld



P is recht evenredig met $\sqrt{Q}$.
De evenredigheidsconstante is $\frac{7}{35} = 0,2$.

- S1 A: $P = 45 \cdot h^{1,8}$ C: $G = 2,7 \cdot 0,38^k$ E: $y = 14 \cdot x^{-0,3}$
B: $x^2 y = 65$ D: $y = 35 - x^{4,5}$ F: $T = 23,7 \cdot 0,98^r$
Welke van de formules horen bij een machtsverband?

Theorie

De wetten van schaalvergroting

Als van een figuur de afmetingen met de factor k worden vermenigvuldigd, wordt de oppervlakte met k^2 en de inhoud met k^3 vermenigvuldigd.

Voorbeeld

Van een gebouw is een model gemaakt op schaal 1 : 250. Het model is 16 cm hoog, de oppervlakte van de vier gevels is 832 cm^2 en het volume is 1920 cm^3 . Bereken de hoogte, de geveloppervlakte en het volume van het gebouw.

Oplossing

De hoogte is
 $16 \times 250 = 4000 \text{ cm} = 40 \text{ m}$.
De geveloppervlakte is $832 \times 250^2 = 52\,000\,000 \text{ cm}^2 = 5200 \text{ m}^2$.
Het volume is $1920 \times 250^3 = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm}^3 = 30\,000 \text{ m}^3$.

- S2 Van een Hollandse molen is een model gebouwd op schaal 1 : 30.
De hoogte van het model is 71 cm, de met riet beklede oppervlakte is ongeveer $0,3 \text{ m}^2$ en het volume van de molen is $0,12 \text{ m}^3$.
Bereken de hoogte, de oppervlakte met riet en het volume van de echte molen.

Theorie

Formules bij een exponentieel verband en een machtsverband.

De formule voor een exponentieel verband tussen de variabelen x en y heeft de vorm $y = b \cdot g^x$.

De formule voor een machtsverband tussen de variabelen x en y heeft de vorm $y = c \cdot x^p$.

Voorbeeld

$$P = 45 \cdot 1,04^t$$

Er is een exponentieel verband tussen de variabelen t en P .

$$G = 0,23h^{1,45}$$

Er is een machtsverband tussen de variabelen h en G .

- S3** Welke van deze formules hoort bij een exponentieel verband tussen x en y ? En welke formules horen bij een machtsverband tussen x en y ?

A: $y = 35 \cdot 0,926^x$ C: $y = 0,36x^{2,4}$

B: $y = 0,42x\sqrt{x}$ D: $y = 4 \cdot 1,7^{1-2x}$

Vaardigheid

Je kunt een recht evenredig verband herkennen.

Twee variabelen P en Q heten (recht) evenredig als geldt dat bij vermenigvuldiging van een waarde van P met een factor k de bijbehorende waarde van Q ook met k vermenigvuldigd wordt. De formule heeft de vorm $Q = c \cdot P$. De constante c heet de evenredigheidsconstante.

De grafiek bij een recht evenredig verband is een rechte lijn door de oorsprong.

In de tabel bij een recht evenredig verband is de verhouding van twee getallen in dezelfde kolom steeds hetzelfde.

Voorbeeld

Een verband wordt gegeven door een rechte lijn, die door $P(5, 22)$ en $Q(12, 55)$ gaat.

Laat zien dat er geen recht evenredig verband is tussen de variabelen.

Oplossing

De richtingscoëfficiënt van PQ is

$$PQ \text{ is } \frac{33}{7} = 5,5.$$

De richtingscoëfficiënt van

$$OP \text{ is } \frac{22}{5} = 4,4.$$

Dus lijn PQ gaat niet door de oorsprong en er is geen recht evenredig verband.

S4

p	12	24	36	120
k	18	36	54	180

Laat zien dat k in deze tabel recht evenredig is met p , bereken de evenredigheidsconstante en geef een formule.

Vaardigheid

Je kunt een omgekeerd evenredig verband herkennen.

Twee variabelen P en Q heten omgekeerd evenredig als geldt: als de ene variabele k keer zo groot wordt, wordt de andere variabele k keer zo klein.

De formule is $Q = \frac{c}{P}$ of $P = \frac{c}{Q}$ of $P \cdot Q = c$.

In de tabel bij een omgekeerd evenredig verband is het product van de variabelen in elke kolom steeds hetzelfde.

Voorbeeld

Om een feest te organiseren is € 400,- nodig. Alle aanwezigen betalen een gelijk bedrag.

Stel een formule op voor het bedrag b per persoon als er n aanwezigen zijn.

Oplossing

$$b \cdot n = 400 \text{ ofwel } b = \frac{400}{n}$$

- S5** Een spanningsbron van 12 volt is aangesloten op een elektrisch circuit met een onbekende weerstand R . Het product van de stroomsterkte I en de weerstand R is gelijk aan de spanning van de spanningsbron.

- Wat gebeurt er met de stroomsterkte als de weerstand vijfmaal zo groot wordt gemaakt?
- Druk I uit in R .

Vaardigheid

Je kunt een machtsverband weergeven met een rechte lijn als grafiek.

Als je bij het machtsverband met de formule $Q = c \cdot P^a$ langs de horizontale as P^a uitzet en Q langs de verticale as, krijg je een rechte lijn als grafiek.

Voorbeeld

Wat moet je langs de assen zetten om als grafiek bij de formule $Q = 7,2 \cdot h \sqrt{h}$ een rechte lijn te krijgen?

Oplossing

$Q = 7,2 \cdot h^{1\frac{1}{2}}$, dus als je $h^{1\frac{1}{2}}$ langs de horizontale as uitzet en Q langs de verticale as, wordt de grafiek een rechte lijn.

- S6** Wat moet je langs de assen zetten om als grafiek een rechte lijn te krijgen bij de gegeven formule?

- $P = 3t^3 \sqrt[4]{t}$
- $Q \cdot t^4 = 270$

Vaardigheid

Je kunt een formule $y = c \cdot x^p$ opstellen voor een machtsverband bij een gegeven tabel.

- 1 Vul de gegevens van twee punten in, je krijgt twee vergelijkingen met c en p .
- 2 Bereken de waarden van met c en p door elimineren of met de rekenmachine.
- 3 Stel de formule op.

Controleer daarna of de gevonden formule klopt voor de eventuele overige gegevens.

Voorbeeld

x	2	3	6	10
y	79,2	209,5	1105,7	3767,8

Er is een machtsverband tussen x en y .
Stel een bijbehorende formule $y = c \cdot x^a$ op.

Oplossing

$$79,2 = c \cdot 2^a \text{ en } 3767,8 = c \cdot 10^a, \text{ dus } \frac{c \cdot 10^a}{c \cdot 2^a} = \frac{3767,8}{79,2}$$

$$\left(\frac{10}{2}\right)^a = 47,573... \text{ ofwel } 5^a = 47,573...$$

$$a = {}^5\log(47,573...) = 2,399... \text{ en } c = \frac{79,2}{2^{2,399...}} \approx 15$$

Een formule is $y = 15 \cdot x^{2,4}$.

$15 \cdot 3^{2,4} \approx 209,5$ en $15 \cdot 6^{2,4} \approx 1105,7$, dus
de formule klopt voor de overige gegevens.

- S7** Het verband tussen de variabelen v en H wordt weergegeven met een grafiek met v langs de horizontale as en H langs de verticale as. De grafiek gaat door de punten $(6, 4024)$ en $(12, 1055)$.

Stel een formule op voor dit verband als

- a het een machtsverband is.
- b het een exponentieel verband is.

T1 Bij de tabellen hoort een machtsverband en een exponentieel verband.

a Bij welke tabel hoort een exponentieel verband? Stel een formule op bij deze tabel.

b Bij de andere tabel hoort een machtsverband. Stel een formule op bij deze tabel.

c Bereken algebraïsch bij welke waarde van t geldt dat $V = 0,001$. Rond af op één decimaal.

d Bereken algebraïsch bij welke waarde van p geldt dat $Q = 1000$. Rond af op twee decimalen.

A

t	5	10	15	20	25
v	0,1826	0,0398	0,0163	0,0087	0,0053

B

p	5	10	15	20	25
v	3,5598	17,118	82,317	395,84	1903,5

T2 Gegeven zijn drie formules die het verband tussen twee variabelen P en Q weergeven.

a Bereken voor elke formule wat er gebeurt met de waarde van Q als de waarde van P drie keer zo groot wordt.

b Bepaal ook voor elke formule wat er gebeurt met de waarde van P als de waarde van Q vijf keer zo groot wordt.

A $Q = 1,35\sqrt{P}$

B $Q = 2,18 \cdot P^2$

C $Q = 0,7 \cdot \frac{1}{P}$

T3 In de 18e eeuw werd voor de temperatuur de schaal van Réaumur gebruikt. Hierbij komt het vriespunt (0°C) overeen met 0°R en het kookpunt (100°C) met 80°R . Het verband tussen het aantal graden Celsius en het aantal graden Réaumur is lineair.

a Is er ook sprake van een recht evenredig verband tussen de temperatuur t in $^\circ\text{C}$ en de temperatuur r in $^\circ\text{R}$?

b Druk r uit in t .

c In de V.S. wordt de temperatuur meestal weergegeven in graden Fahrenheit. Hierbij geldt $f = 1,8t + 32$ met f de temperatuur in Fahrenheit.

Geef een formule waarbij je r uitdrukt in f .

T4 De inhoud I van een piramide hangt af van de oppervlakte

van het grondvlak G en de hoogte h . Er geldt $I = \frac{1}{3}G \cdot h$.

Deze opdracht gaat over piramiden met een vierkant grondvlak waarvan de inhoud 10 is. Een aantal waarden staat in de tabel.

a Vul de ontbrekende gegevens in.

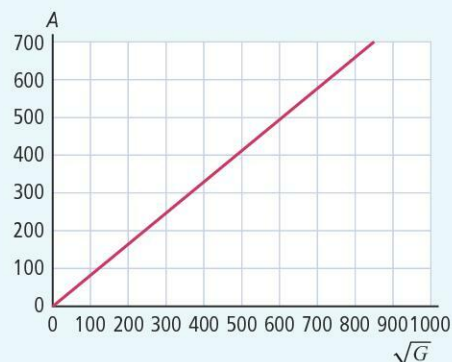
b Teken een grafiek die past bij het verband tussen h^{-1} en G , met h^{-1} langs de horizontale as en G langs de verticale as.

c Welk verband is er tussen G en h ?

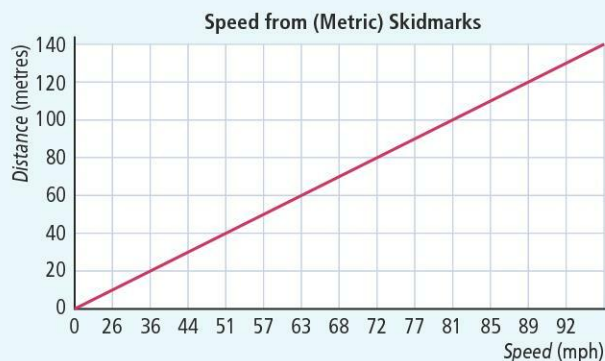
d Laat zien dat, als z de lengte van de zijde van het grondvlak is, geldt dat h evenredig is met $\frac{1}{z^2}$ en bereken de evenredigheidsconstante.

G	h
10	3
...	3,75
6	...
...	7,5
2	...

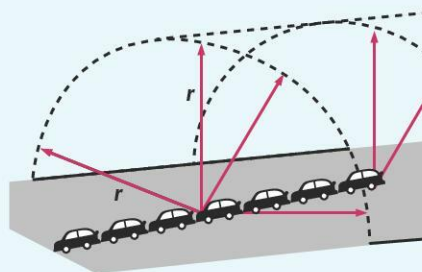
- T5** Bij het ontwerpen van vliegtuigen moet bij het bepalen van de oppervlakte A in m^2 van de vleugels rekening worden gehouden met het totale gewicht G in kg van het vliegtuig plus lading, ook wel draagvermogen genoemd. De grafiek geeft een verband tussen A en $\sqrt{G}$ weer.
- Welke evenredigheid kun je afleiden uit de grafiek? Bereken de evenredigheidsconstante.
 - Bereken de vleugeloppervlakte van een Boeing 747, waarvan het draagvermogen 360 000 kg bedraagt.
 - Met welk getal moet de vleugeloppervlakte van een vliegtuig vermenigvuldigd worden om het draagvermogen te verdubbelen?
 - Van een transportvliegtuig met een draagvermogen van 480 000 kg wordt een model gebouwd. De vleugeloppervlakte van het model is vier maal zo klein als dat van het echte vliegtuig. Bereken het gewicht van het model.



- T6** In een oud instructieboekje van de verkeerspolitie van Londen staat een grafiek over het verband tussen de lengte r van een remspoor in meters en de snelheid v in mijl per uur (mph). Op de grafiek liggen onder andere de punten (44, 30) en (89, 123).
- Hoewel de grafiek een rechte lijn is, is er toch geen recht evenredig verband is tussen v en r . Toon dat aan.
 - r is recht evenredig met een macht van v . Stel een formule van de vorm $r = c \cdot v^p$ op.
 - Stel een formule op voor het verband tussen v en r , als v niet in mph, maar in km per uur wordt gegeven. 1 mijl = 1607 meter.



- T7** Alle punten op een afstand van a meter van een lijnvormige geluidsbron, zoals een snelweg, vormen de mantel van een halve cilinder met straal r .
- Bereken de oppervlakte van de mantel van een halve cilinder met lengte 10 m en straal 3 m.
 - Geef een formule waarmee je de oppervlakte A van een halve cilindermantel met lengte l en straal r kunt berekenen.
 - Leg aan de hand van de in opdracht b gevonden formule uit waarom de oppervlakte A van een halve cilinder met vaste lengte l recht evenredig is met de straal r van de cilinder.
 - De geluidsintensiteit is omgekeerd evenredig met de oppervlakte van de mantel. Beredeneer dat de geluidsintensiteit omgekeerd evenredig is met de afstand tot de snelweg.



Je kunt een recht evenredig verband herkennen.

- E1**
- Welke tabellen horen bij een lineair verband?
 - En welke van de tabellen hoort bovendien bij een recht evenredig verband?
 - Stel een formule op bij de tabellen die bij een lineair verband horen.

A

b	5	8	11
k	-1	-1,6	-2,2

B

n	6	10	20
w	80	70	45

C

p	2	8	12
q	7	16	22

D

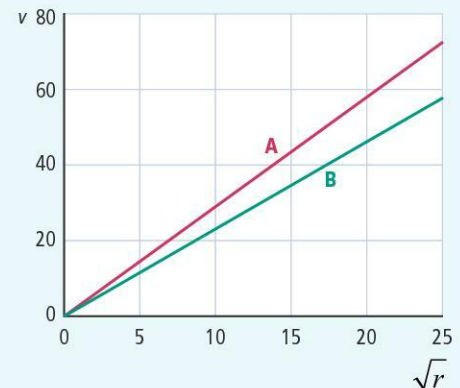
g	2	5	12
r	3	8	13

Je kunt een omgekeerd evenredig verband herkennen.

- E2**
- In de natuurkunde geldt de formule $E = \frac{1}{2}mv^2$. Daarbij is E de kinetische energie in joules, m is de massa in kg en v is de snelheid in m/s. Bij deze opdracht kijk je naar voorwerpen met een kinetische energie van 8 joule. Er geldt dus $8 = \frac{1}{2}mv^2$.
- Toon aan dat de massa omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de snelheid.
 - Druk de snelheid uit in de massa. Van welke evenredigheid is er nu sprake? Hoe groot is de evenredigheidsconstante?

Je kunt bij een machtsverband een rechte lijn als grafiek krijgen.

- E3**
- De maximale snelheid waarmee je veilig door een bocht rijdt wordt onder andere bepaald door het wegdek en de straal van de bocht. Een formule is $v = \sqrt{w \cdot g \cdot r}$. Hierin is w de zogenaamde wrijvingscoëfficiënt, g is de valversnelling ($g \approx 9,8$), r is de straal van de bocht in m en v de snelheid in m/s. Voor twee waarden van w is de grafiek getekend.
- Teken in dezelfde figuur de grafiek die hoort bij $w = 0,1$.
 - Bereken de waarden van w die bij de twee grafieken horen. Rond af op één decimaal.
 - Als de maximale snelheid twee keer zo groot moet zijn, hoe moet dan de straal van de bocht veranderen?



Je kunt een formule opstellen voor een machtsverband bij een gegeven tabel.

- E4**
- De energie E die een zogenaamd zwart lichaam per seconde uitstraalt, hangt af van de absolute temperatuur T . De resultaten die bij een experiment voor een bepaald zwart lichaam zijn verkregen staan in de tabel.
- Bewijs dat er geen exponentieel verband is tussen T en E .
 - Het verband tussen de energie E in joule en de temperatuur T in kelvin is een machtsverband. Stel een formule op waarmee de energie E voor temperatuur T te berekenen is.

T in kelvin	E in joule
1200	6,8
1500	16,7
1800	34,5
2100	64,3
2400	110
2700	174

- E5** In het kader staan zes formules.
- Bij welke van deze formules is er een recht evenredig verband tussen x en y ?
 - Bij welke van deze formules is er een omgekeerd evenredig verband tussen x en y ?

$$A: \frac{y}{x} = 15 \quad B: y = \frac{15}{x} \quad C: x \cdot y = 42$$

$$D: x = 1,23y \quad E: y = 35 - x \quad F: \frac{12}{x} = \frac{1}{2}y$$

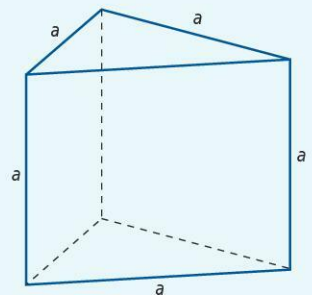
- E6** In een artikel over de grootte van de bevolking van Egypte in de vorige eeuw stonden de volgende gegevens.

jaar	1900	1928	1952	1986	1988
aantal in miljoenen	10	17	27	50,5	52,4

- Ga na of het verband tussen het aantal Egyptenaren A in miljoenen en het tijdstip t in jaren exponentieel is.
- Stel een formule op waarmee het aantal Egyptenaren A op tijdstip t te berekenen is. Neem $t = 0$ in 1900 en rond de groeifactor af op drie decimalen.
- In 2011 was het aantal Egyptenaren 83,2 miljoen. Hoeveel procent wijkt dit aantal af van het aantal dat je met de formule vindt?

- E7** De opstaande ribben van dit gelijkzijdige prisma staan loodrecht op het grondvlak. Alle ribben hebben lengte a . Voor de oppervlakte A van het prisma geldt $A = \left(3 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \cdot a^2$. De inhoud I van het prisma kun je berekenen met de formule $I = \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot a^3$.

- Hoeveel keer groter wordt de oppervlakte als de ribben vier keer zo groot worden? En hoeveel keer groter wordt dan de inhoud?
- Stel een formule op van de vorm $I = c \cdot A^p$. Rond de waarden van c en p zo nodig af op twee decimalen.
- Hoeveel keer groter wordt de inhoud als de oppervlakte tien keer zo groot wordt? Rond af op twee decimalen.



Sangaku

Van 1639 tot 1854 was Japan volkomen geïsoleerd van de Westerse wereld. Er was alleen contact met Japan via de Nederlandse handelspost op het eilandje Dejima, bij Nagasaki. Gedurende deze periode van isolement bloeide een soort eigen wiskunde op. Zowel kooplieden, boeren als samoerai ontwierpen diverse gevarieerde meetkundige problemen en losten deze op. Deze problemen met de door hen zelf gevonden antwoorden zetten ze op houten panelen, die onder de daken van religieuze gebouwen werden opgehangen. Uitwerkingen werden niet gegeven.

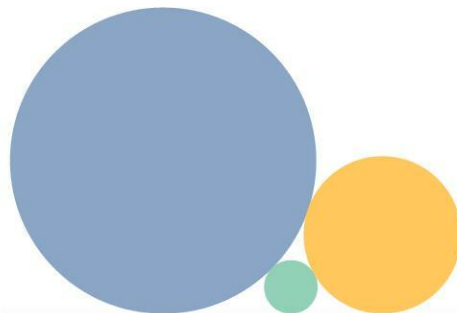
Deze zogenaamde Sangaku kunnen een eer voor de geesten geweest zijn, maar ook een uitdaging voor anderen. Sangaku zijn in heel Japan te vinden. Deze Sangaku's zijn in Kyoto gevonden. Het is een vergroting van een deel van het paneel boven aan deze pagina.



Bij veel van deze meetkundige problemen spelen cirkels een rol. Het probleem met de cirkels komt van een paneel uit 1824, dat gevonden is in de provincie Gunma.

Drie verschillende cirkels raken elkaar en hebben één gemeenschappelijke raaklijn.

De vraag is wat het verband is tussen de drie stralen van deze cirkels.



Opdracht

In driehoek O_1O_2A is $O_1O_2 = r_1 + r_2$.

a Druk O_1A uit in r_1 en r_2 .

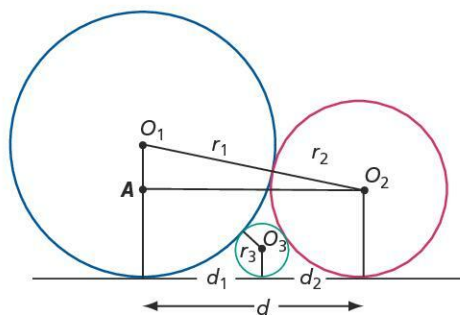
b Toon aan dat $d = 2 \cdot \sqrt{r_1 \cdot r_2}$.

Op dezelfde manier kun je aantonen dat

$$d_1 = 2 \cdot \sqrt{r_1 \cdot r_3} \text{ en } d_2 = 2 \cdot \sqrt{r_2 \cdot r_3}$$

c Toon aan dat uit $d = d_1 + d_2$ volgt

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}.$$



In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Herleiden
- Differentiëren
- Substitueren
- Kwadraat afsplitsen
- Meetkunde



Herleiden

- 1** In deze opdracht ga je de formule $3p(2 - 4q) = 1 + q$ herleiden, zodat q wordt uitgedrukt in p .
- a** Wat is er gebeurd in stap 1?
 - b** En wat is er gebeurd in stap 2?
 - c** Waarom is q buiten haakjes geplaatst in stap 3?
 - d** Maak de berekening af.

$3p(2 - 4q) = 1 + q$	
$6p - 12pq = 1 + q$	1
$-12pq - q = \dots$	2
$q(\dots - \dots) = \dots$	3
$q = \frac{\dots}{\dots}$	4

- 2** Druk q uit in p .

a $3p + 2(4q - 5) = 7p + 6$

e $25q^3 = 100p$

b $q - 1 = \frac{3}{p}$

$$\mathbf{f} \quad \frac{4q-2}{p+5} = \frac{3}{2}$$

c $100 \cdot 4^q - p = 0$

g $3 \cdot \log(p) + \log(q) = -2$

d $4p + \log(2q) = 6$

h $0,1p(q-4)^3=1$

- 3** Schrijf de exponentiële formules in de vorm $y = b \cdot g^x$.

a $y = 5^{x-1}$

d $y = 100 \cdot 5^{x-2} \cdot 5^x$

b $y = 6 \cdot 3^{x+2}$

e $y = 4 \cdot 3^{x+1} \cdot 2^{x-2}$

c $y = 0,125 \cdot 2^{3x+4}$

f $y = 6 \cdot 0,5^x \cdot 2 \cdot 4^{x+2}$

- 4** Herleid de functievoorschriften tot één logaritme.

a $f(x) = 2 \cdot {}^4\log(x) + {}^4\log(7)$

d $f(x) = 3 + {}^5\log(x - 2)$

b $f(x) = {}^6\log(2x - 1) - {}^6\log(x)$

e $f(x) = \log(8 - 2x) - 1$

c $f(x) = 2\log(x+5) - \frac{1}{2} \cdot 2\log(x)$ **f** $f(x) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{4}\log(x)$

f $f(x) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} \log(x)$

- 5** Herleid tot één macht.

a $6^{x+1} \cdot 6^{4-2x}$

d $8^x \cdot 2^{x+1}$

b $3^{x+8} \cdot 3^{4x} \cdot 27$

e $2^{2x-1} \cdot 8 \cdot 4^x$

c $\frac{5^{3x+2}}{25}$

f $\frac{0,5^x \cdot 2^{3+2x}}{4^x}$

Differentiëren

- 6** Differentieer.
- a** $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 - x + 8$ **d** $M(a) = 4 + a - \sqrt{a+6}$
b $f(t) = 7\sqrt{4t-3}$ **e** $h(x) = (3x-1)^2$
c $B(u) = \frac{6}{u} - \frac{1}{u^6} - 6u$ **f** $P(k) = \frac{1}{(3k-11)^7}$
- 7** Bereken met behulp van differentiëren de helling van de grafieken van de functies in het punt A .
- a** $g(x) = \frac{4}{x+2}$ en $A(-1, 4)$
b $h(x) = 5 - 2\sqrt{x}$ en $A(1, 3)$
- 8** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{4x+1}$.
- a** Laat met een berekening zien dat de grafiek van f door het punt $P(2, 3)$ gaat.
b Toon met behulp van differentiëren aan dat de helling van de grafiek van f in het punt P gelijk is aan $\frac{2}{3}$.
c Toon aan dat de lijn met vergelijking $y = \frac{2}{3}x + 1\frac{2}{3}$ de raaklijn is aan de grafiek van f in het punt P .
- 9** Stel in de volgende situaties op algebraïsche wijze een vergelijking van de raaklijn op.
- a** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2 - 7\frac{1}{2}x$ in het punt $(3, 9)$
b $g(x) = 5x + \frac{1}{x^2}$ in het punt $(\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2})$
c $h(x) = 3x - 1 + \sqrt{6x+3}$ in het punt $(1, 5)$
- 10** De lijn $m: y = 2x + p$ raakt aan de grafiek van $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x$.
Bereken exact de coördinaten van het raakpunt en de waarde van p .
- 11** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + a$.
Bereken exact voor welke waarden van a de grafiek van f de x -as raakt.

Substituieren

- 12** Je gaat de formule $t = 16x^3$ substitueren in de formule $y = \frac{1}{2} \cdot 2 \log(4t)$. Het resultaat moet daarna in de vorm $y = p + q \cdot g \log(x)$ worden geschreven.
- a** Vul stap 2 in.
 - b** Welke regel is toegepast in stap 3?
 - c** Vul stap 3 in.
 - d** Welke regel is toegepast in stap 4?
 - e** Maak de berekening af.

$y = \frac{1}{2} \cdot 2\log(4 \cdot 16x^3)$	1
$y = \frac{1}{2} \cdot 2\log(\dots x^3)$	2
$y = \frac{1}{2} \cdot (2\log(\dots) + 2\log(x^3))$	3
$y = \frac{1}{2} \cdot 2\log(\dots) + \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot 2\log(x)$	4
$y = \dots + \dots \cdot 2\log(x)$	5

- 13** Substitueer in de volgende opdrachten formule B in formule A. Schrijf de uitkomst in de vorm $y = p + q \cdot g \log(x)$. Je kunt hierbij gebruikmaken van de rekenregels voor logaritmen.

- a** A: $y = 3 \cdot 2^{\log(t)}$ B: $t = \frac{1}{2}x$
b A: $y = 2 + 3^{\log(6t)}$ B: $t = 1,5x^{-1}$
c A: $y = -0,5 \log\left(\frac{1}{6}t\right)$ B: $t = \frac{12}{x^3}$
d A: $y = 5 + 2 \cdot 2^{\log\left(\frac{4}{t}\right)}$ B: $t = 2x^5$

- 14** Schrijf k als functie van t en vereenvoudig het resultaat zoveel mogelijk.

- a** $k = x^2 - 2x + 8$ en $x = t - 1$
b $k(a) = \sqrt{a^2 - 3a}$ en $a = 3 - 2t$
c $k = 2^{3m} \cdot 4^{m-6}$ en $m = 4t - 3$
d $k = \frac{u}{u-2}$ en $u = \frac{1}{t}$

Kwadraat afsplitsen

- 15** Op het blaadje is met behulp van twee keer kwadraat afsplitsen een begin gemaakt met het herleiden van een vergelijking van een cirkel tot een middelpuntsvergelijking. Vul in wat op de puntjes moet staan en geef de coördinaten van het middelpunt en de straal van de cirkel.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 + 10y &= 20 \\ (x-2)^2 - 4 + (y+5)^2 - 25 &= 20 \\ (x-2)^2 + (y+5)^2 &= \dots \end{aligned}$$

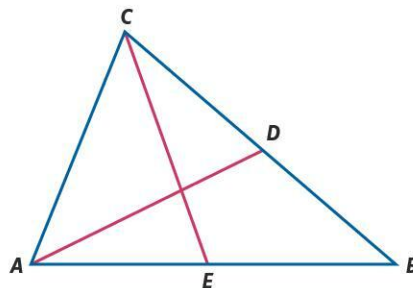
- 16** Herleid de vergelijkingen tot de middelpuntsvergelijking van een cirkel en geef de coördinaten van het middelpunt en de straal.

- a** $x^2 + 6x + y^2 - 2x = 15$ **c** $x^2 - 3x + y^2 - 5y = 0$
b $x^2 - x + y^2 = 2$ **d** $x^2 + 0, 4x + y^2 - 1, 4y = 0, 5$

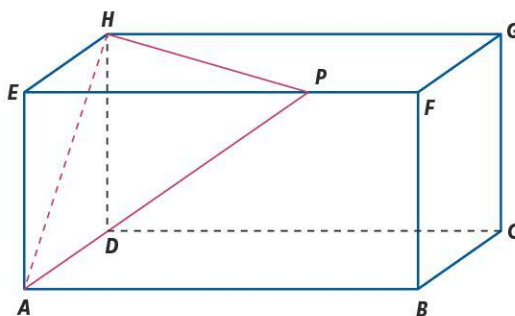
Meetkunde

- 17** a Gegeven zijn lijn $l: 3x + 5y = 15$ en punt $P(1, -18)$.
Stel een vergelijking op van loodlijn n door punt P op lijn l .
- b Gegeven zijn lijn $m: \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ en punt $Q(5, 14)$.
Stel een vergelijking op van loodlijn k door punt Q op lijn m .
- 18** Bereken de afstand tussen de lijnen.
- a $l: x + 3y + 5 = 0$ en $m: y = -\frac{1}{3}x + 5$
- b $l: 2x + y = 12$ en $m: x = -\frac{1}{2}y - 6\frac{1}{2}$
- 19** Gegeven zijn lijn $l: y = x + 4$ en cirkel $c: x^2 + y^2 - 6y = 16$.
Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van lijn l en cirkel c .
- 20** Gegeven zijn de cirkels $c: x^2 + y^2 - 3x + 4y = 6$ en $d: (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 4$.
Bereken de afstand tussen de cirkels c en d .

- 21** Van $\triangle ABC$ is gegeven:
 $AB = 12$, $AC = 9$ en $\angle A = 68^\circ$.
 AD is de bissectrice van hoek A en E is het midden van zijde AB .
Rond lengten af op één decimaal en hoeken op hele graden.
- a Bereken BC .
- b Bereken $\angle B$.
- c Bereken CE .
- d Bereken AD .



- 22** Gegeven is de balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 10$, $AD = 5$ en $AE = 6$. Op de ribbe EF ligt een punt P .
- a Bereken de grootte van de hoeken van $\triangle APH$ als gegeven is dat $EP = 7$. Rond af op hele graden.
- b De plaats van punt P kan zo worden gekozen, dat $\triangle APH$ gelijkbenig is. Daarvoor zijn er twee mogelijkheden.
Geef de lengte van lijnstuk EP in die gevallen en bereken voor beide gevallen de grootte van $\angle HAP$.





Examenvorbereitung

SE

CE

K

In dit hoofdstuk vind je een overzicht van de stof voor het examen wiskunde B. In elke paragraaf komt een aantal onderwerpen aan bod, telkens gevolgd door een of meer korte oefeningen. Elke paragraaf sluit af met examenopdrachten die aansluiten op de stof in de paragraaf. De examenopdrachten zijn veelal uit recente examens afkomstig. Vaak betreft het een deel van een opdracht uit een examen. Op het examen gaat een opdracht meestal over meer onderwerpen.

Bij elke examenopdracht staat de verwijzing naar een hint. De lijst met hints staat aan het eind van dit blok examenvorbereitung. Gebruik een hint alleen als je niet weet hoe je de opdracht moet beginnen.

- Hoe goed ben jij voorbereid op het examen?



Domein en bereik

Alle waarden van x waarvoor een functiewaarde $f(x)$ bestaat, vormen samen het domein van de functie. Alle functiewaarden die kunnen voorkomen, vormen het bereik van de functie.

- 1 Geef het domein en het bereik van elke functie in de intervalnotatie.

a $f(x) = 10 + \sqrt{6x - 4}$

c $h(x) = 2 \sin(x)$

b $g(x) = 4(x - 3)^2 - 8$

d $k(x) = 3 + \frac{5}{x - 2}$

Stijgen en dalen, maximum en minimum

Als een functie stijgt en vervolgens daalt, heeft de functie een maximum. Als de functie daalt en vervolgens stijgt, heeft de functie een minimum.

Maximale en minimale functiewaarden heten extreme waarden.

- 2 Gegeven is de functie $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 10$.
- Ga met je rekenmachine na op welke intervallen f stijgt.
 - Geef de extreme waarden van f . Geef bij elke extreme waarde aan of het een minimum of een maximum betreft.

Asymptoten

Asymptoten van een grafiek zijn lijnen waar de grafiek op den duur willekeurig dicht naar nadert. Voor het bepalen van een verticale asymptoot kijk je naar het domein van de functie. Voor het bepalen van een horizontale asymptoot vul je enkele grote waarden in de functie in. Bij een horizontale asymptoot verandert de functiewaarde dan nauwelijks meer.

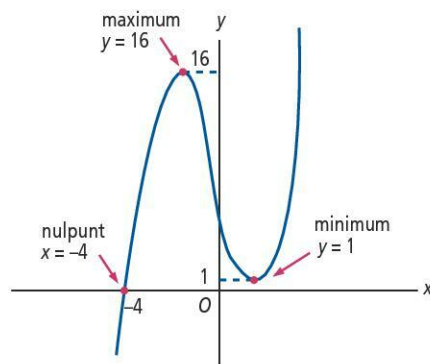
Voorbeeld

Geef het domein en het bereik van de functie $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Oplossing

$\sqrt{x^2 - 1}$ bestaat voor $x^2 - 1 \geq 0$ dus het domein is $x \leq -1$ of $x \geq 1$.

Voor elke waarde van x is $\sqrt{x^2 - 1} \geq 0$, dus het bereik is $y \geq 0$.



Voorbeeld

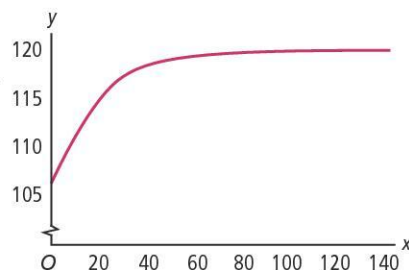
Onderzoek of de grafiek van $f(x) = 120 - 14 \cdot 0,95^x$ asymptoten heeft.

Oplossing

Het domein van f is $\mathbb{R}$, dus de grafiek heeft geen verticale asymptoot.

x	10	50	100	200
y	111,6	118,9	119,9	119,9995

De functiewaarden naderen de waarde 120, dus de lijn $y = 120$ is een horizontale asymptoot van de grafiek.



- 3 Geef van de functies aan of de bijbehorende grafiek asymptoten heeft. Schrijf, indien van toepassing, een vergelijking op van elke asymptoot.

a $f(x) = x^2 + 4$

c $h(x) = {}^3\log(x - 4)$

b $g(x) = 10 + \frac{1}{x}$

d $k(x) = 25 + 16 \cdot 0,45^x$

Transformaties

Transformaties zijn bewerkingen van grafieken. De grafiek die na een transformatie ontstaat heet de beeldgrafiek.

- Grafieken kun je horizontaal en verticaal verschuiven. Een ander woord voor verschuiving is translatie.

Als de grafiek van een functie f over een afstand d omhoog wordt verschoven ontstaat de grafiek van een functie $g(x) = f(x) + d$.

Als de grafiek van een functie f over een afstand c naar rechts wordt verschoven ontstaat de grafiek van een functie $h(x) = f(x - c)$.

- Grafieken kun je vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as en de y -as. Als de grafiek van een functie f met een factor a wordt vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as, dan ontstaat de grafiek van een functie $k(x) = a \cdot f(x)$.

In het geval $a = -1$ wordt de grafiek gespiegeld in de x -as.

Als de grafiek van een functie f met een factor b wordt vermenigvuldigd ten opzichte van de y -as, dan ontstaat de grafiek van een functie

$$m(x) = f\left(\frac{1}{b}x\right).$$

In het geval $b = -1$ wordt de grafiek gespiegeld in de y -as.

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie $f(x) = 3 + 2^{x+4}$. De grafiek van f wordt vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as met 2,5 en vervolgens 6 eenheden naar rechts verschoven. Geef een functievoorschrift van de beeldgrafiek.

Oplossing

Voor de beeldgrafiek geldt $g(x) = 2,5 \cdot f(x - 6)$ dus $g(x) = 2,5(3 + 2^{(x-6)+4})$ ofwel $g(x) = 7,5 + 2,5 \cdot 2^{x-2}$.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie $h(x) = 10 - 3 \cdot {}^2\log\left(\frac{1}{2}x\right)$. Hoe ontstaat de grafiek van h uit die van de functie $f(x) = {}^2\log(x)$?

Oplossing

$$h(x) = -3 \cdot {}^2\log\left(\frac{1}{2}x\right) + 10 \text{ geeft } h(x) = -3 \cdot f\left(\frac{1}{2}x\right) + 10.$$

De grafiek van h ontstaat uit die van f na een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met -3 , een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met 2 en vervolgens een verschuiving 10 omhoog.

- 4 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 6x + 1$. Geef in de volgende gevallen het functievoorschrift van de beeldgrafiek.
- a De grafiek van f wordt eerst 4 eenheden omhoog verschoven en vervolgens ten opzichte van de y -as vermenigvuldigd met 0,5.
 - b De grafiek van f wordt eerst 3 eenheden naar rechts verschoven en vervolgens ten opzichte van de x -as vermenigvuldigd met -4 .
 - c De grafiek van f wordt eerst 7 eenheden omlaag verschoven en vervolgens vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as met 2.

De rekenmachine

Bij berekeningen kun je in veel gevallen je rekenmachine gebruiken. Je krijgt dan in het algemeen geen exacte antwoorden maar benaderingen.

Je kunt met je rekenmachine:

- grafieken plotten en tabellen maken
- de toppen van een grafiek vinden
- de snijpunten van grafieken vinden
- vergelijkingen oplossen
- de helling van een grafiek in een punt benaderen
- een hellinggrafiek plotten.

Bij gebruik van je rekenmachine geef je aan hoe je de rekenmachine hebt gebruikt. Daarbij neem je de volgende onderdelen op:

Invoer, Vensterinstelling en de gebruikte Opties.

Als in de opdracht staat: Bereken ... of: Los op ..., dan heb je de keuze tussen algebraïsch oplossen en oplossen met de rekenmachine.

Als in de opdracht staat: Bereken algebraïsch ... of: Los exact op ..., dan moet je het probleem met algebra oplossen. Als je een probleem exact moet oplossen, dan moet het antwoord exact zijn. Moet je een probleem algebraïsch oplossen, dan mag het antwoord benaderd worden.

- 5**
- a Los de vergelijking $120 - 84 \cdot 0,95^x = 100 - 0,5x$ op.
Rond je antwoord af op twee decimalen.
 - b Bereken het maximum van de functie $K(p) = 120 - 84 \cdot 0,95^p - 0,5p$.
Rond je antwoord af op twee decimalen.

Examenopdrachten

- 6** **Grafiek van een derdegraadsfunctie en een lijn**
(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2019 tijdvak 1)

De functie f is gegeven door $f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 2\right)^3$.

De functie g is gegeven door $g(x) = x^3$. De grafiek van f ontstaat uit de grafiek van g door twee transformaties na elkaar toe te passen.

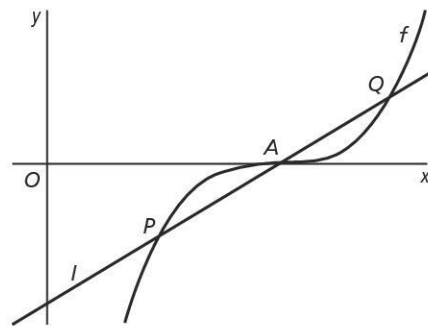
- a Geef aan welke twee transformaties dit kunnen zijn en in welke volgorde ze moeten worden toegepast.

Hint 1

De lijn l met vergelijking $y = \frac{1}{2}x - 2$ snijdt de grafiek van f behalve in punt A ook in de punten P en Q .

- b Bereken de lengte van PQ . Geef je eindantwoord in twee decimalen.

Hint 2



7 Krantenbakken

(Ontleend aan CE havo wiskunde B12 2005 tijdvak 2)

Van rechthoekige kunststofplaten van 50 bij 90 cm worden krantenbakken gemaakt. Elke plaat wordt gebogen langs twee rechte lijnen die evenwijdig zijn aan de korte zijde van de rechthoek. De gehele plaat van 50 bij 90 cm wordt gebruikt.

Het vooraanzicht van de krantenbak is symmetrisch.

In de hele opdracht is de afstand tussen de opstaande platen aan de bovenkant twee keer zo groot als de breedte aan de onderkant.

De dikte van de plaat wordt in deze opgave verwaarloosd.

Als de onderkant een andere breedte krijgt, verandert de hoogte van de krantenbak. Hiernaast zijn enkele situaties weergegeven.

De breedte van de onderkant noemen we x (in cm).

De hoogte h (in cm) van de krantenbak hangt af van x .

Er geldt: $h = \sqrt{2025 - 45x}$

a Toon dit aan.

Hint 3

De inhoud I (in dm^3) van de krantenbak hangt ook af van x .

Er geldt: $I = 0,075x\sqrt{2025 - 45x}$

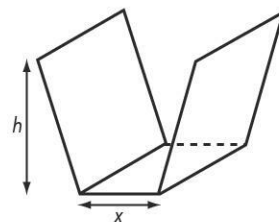
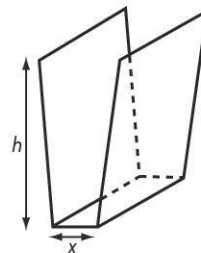
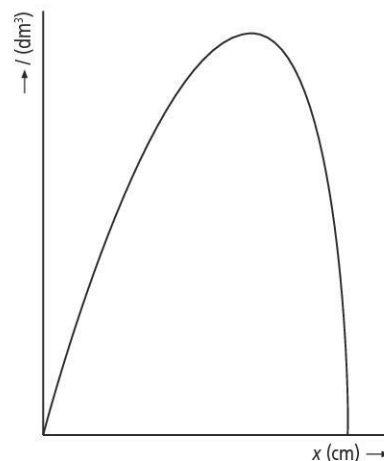
Hiernaast is de grafiek van I gegeven.

b Onderzoek bij welke waarde van x en van h de inhoud van de krantenbak maximaal is.

Hint 4

c Men wil de krantenbakken een inhoud geven van minimaal 30 dm^3 en een hoogte van minimaal 20 cm. Onderzoek welke breedtes de krantenbakken aan de onderkant nu kunnen krijgen. Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Hint 5



8 Golfhoogte

(Ontleend aan CE havo wiskunde B1 2008 tijdvak 2)

Er blijkt een verband te bestaan tussen de gemiddelde golfhoogte g in meter en de waterstand w in meter ten opzichte van NAP. Bij Hoek van Holland is de gemiddelde golfhoogte goed te benaderen met de volgende formule:

$$g(w) = 4,82 + 0,60w - 0,0063 \cdot (7,0 - w)^{3,13},$$

met g en w in meter en $w < 7,0$.

Tijdens een storm komen gemiddelde golfhoogtes van 5,0 meter voor.

Bereken de waterstand bij Hoek van Holland die hierbij hoort.

Geef je antwoord in meter ten opzichte van NAP, afgerond op één decimaal.

Hint 6

Lineaire functies en de vergelijking van een lijn

Bij een lineair verband tussen twee variabelen is de toename per eenheid steeds hetzelfde. Bij een lineair verband hoort een lineaire of eerstegraads functie van de vorm $f(x) = ax + b$.

Als van een lijn twee punten gegeven zijn, kun je de bijbehorende lineaire formule $y = ax + b$ opstellen. Hierin is a de richtingscoëfficiënt en is b het startgetal. Er geldt $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

De waarde van b bereken je door de coördinaten van één van de twee punten in de formule in te vullen.

Voorbeeld

Gegeven zijn $A(2, 8)$ en $B(-3, 11)$.
Stel een vergelijking van lijn AB op.

Oplossing

$y = ax + b$ met

$$a = \frac{11-8}{-3-2} = \frac{3}{-5} = -0,6$$

$x = 2$ en $y = 8$ invullen in

$$y = -0,6x + b \text{ geeft } 8 = -0,6 \times 2 + b \\ \text{dus } b = 9,2.$$

Een vergelijking van lijn AB is
 $y = -0,6x + 9,2$.

- 9 Stel een vergelijking op van de lijn door de twee gegeven punten.

- a $(0, 6)$ en $(3, 0)$
- b $(5, 12)$ en $(11, 33)$
- c $(100, 65)$ en $(30, 30)$
- d $(0,7; 3,3)$ en $(3,5; -5,1)$

Lineaire vergelijkingen oplossen

Lineaire vergelijkingen los je op door links en rechts van het $=$ -teken dezelfde bewerking te doen. Daarmee vereenvoudig je de vergelijking zo ver dat de variabele nog maar aan één kant van het $=$ -teken staat.

Voorbeeld

$$\text{Los exact op } \frac{2}{13}(x+1) - \frac{1}{5}x = \frac{4}{65} - \frac{1}{13}x.$$

Oplossing

$$10(x+1) - 13x = 4 - 5x \text{ (links en rechts } \times 65)$$

$$-3x + 10 = 4 - 5x \text{ (haakjes weggewerkt)}$$

$$2x = -6 \text{ (links en rechts } + 5x \text{ en } - 10)$$

$$x = -3 \text{ (links en rechts : 2)}$$

- 10 Los exact op.

- a $-3x + 12 = 5x + 28$
- b $0,7p - 6p + 1,5 = 1,2(4 - 5p)$
- c $300t = -25t + 10(13t + 18)$
- d $\frac{3}{5}x + \frac{1}{2} = 2 - \frac{9}{10}x$

Gebroken functies, hyperbolen en asymptoten

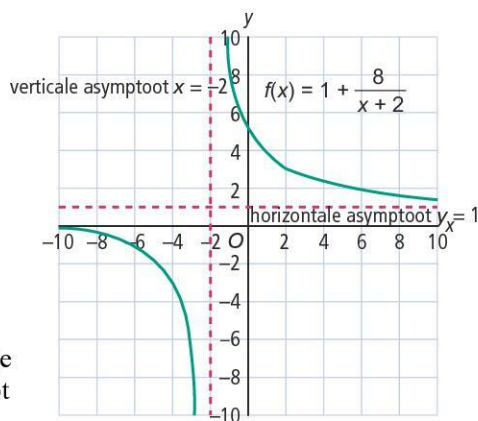
De grafiek bij de gebroken functie $f(x) = 1 + \frac{8}{x+2}$ heet een hyperbool. De grafiek van f bestaat uit twee takken. $x = -2$ behoort niet tot het domein van de functie f .

Er zijn lijnen waar de grafiek op den duur willekeurig dicht naar nadert. Zulke lijnen heten asymptoten.

Bij de verticale asymptoot hoort de vergelijking $x = -2$.

Bij de horizontale asymptoot hoort de vergelijking $y = 1$.

Een gebroken functie van de vorm $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ met $c \neq 0$, heet een gebroken lineaire functie. De verticale asymptoot bepaal je met $cx + d = 0$. Voor de horizontale asymptoot vul je enkele grote waarden voor x in. Bij een horizontale asymptoot verandert de functiewaarde dan nauwelijks meer.



- 11** Onderzoek of de grafieken van de onderstaande functies asymptoten hebben.

Stel van elke asymptoot een vergelijking op.

a $f(x) = \frac{5x-8}{2x+6}$

c $h(x) = \frac{3x-9}{2x+8}$

b $g(x) = 4 + \frac{x}{x-3}$

d $l(x) = 5 + \frac{4}{x^2-9}$

Gebroken vergelijkingen oplossen

Een gebroken vergelijking vereenvoudig je tot een vorm waarin je een van de volgende regels kunt gebruiken:

Uit $\frac{A}{B} = C$ volgt $A = B \cdot C$ mits $B \neq 0$.

Uit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ volgt $A \cdot D = B \cdot C$ mits $B \neq 0$ en $D \neq 0$.

- 12** Los exact op.

a $\frac{a}{4a-5} = 2$

e $8 + \frac{2p}{p+4} = 1 - \frac{1}{3}p$

b $\frac{3x-1}{5-x} = 0$

f $\frac{x^2+1}{x-2} = 3x+1$

c $\frac{2-\frac{1}{2}q}{q^2+1} = 0$

g $\frac{2x-1}{x+3} = \frac{3x+3}{4x-4}$

d $2 + \frac{6}{x} = \frac{x+3}{x+4}$

h $\frac{a^2-9}{4-3a} = 0$

Voorbeeld

Los exact op $7\frac{1}{2} + p = \frac{2-p}{1+p} + 2$

Oplossing

$$5\frac{1}{2} + p = \frac{2-p}{1+p} \quad (\text{links en rechts } -2)$$

$$(5\frac{1}{2} + p)(1+p) = 2-p \quad (\text{mits } p \neq -1)$$

$$5\frac{1}{2} + 6\frac{1}{2}p + p^2 = 2-p \quad (\text{haakjes weggewerkt})$$

$$p^2 + 7\frac{1}{2}p + 3\frac{1}{2} = 0 \quad (\text{op nul herleid})$$

$$(p+7)(p+\frac{1}{2}) = 0 \quad (\text{ontbonden in factoren})$$

$$p = -7 \text{ of } p = -\frac{1}{2}$$

Examenopdrachten

13 Gebroken functies

(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2018 tijdvak 2)

Op het domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$ zijn de functies f en g gegeven door

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \text{ en } g(x) = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$$

Op het gegeven domein hebben de grafieken van f en g één snijpunt.
Bereken exact de x -coördinaat van dit snijpunt.

Hint 7

14 Gebroken functie met rechthoek

(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2009 tijdvak 2)

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ met $x > 0$.

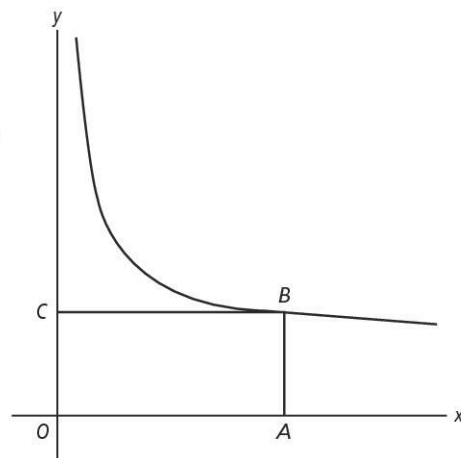
Op de grafiek van f wordt een punt B gekozen. Daarna worden punt A op de x -as en punt C op de y -as zodanig gekozen dat vierhoek $OABC$ een rechthoek is.

- a Van een punt B is gegeven dat de y -coördinaat $\frac{4}{3}$ is.

Bereken exact de omtrek van rechthoek $OABC$ in deze situatie.

Hint 8

- b Voor elk punt $B(b, \frac{1}{b} + 1)$ op de grafiek van f is de oppervlakte van rechthoek $OABC$ groter dan 1.
Toon dit op algebraïsche wijze aan.



Hint 9

15 Vetpercentage

(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2009 tijdvak 1)

Een hoog vetpercentage levert meer gezondheidsrisico's op dan een laag vetpercentage. Het vetpercentage is het gewicht van het vetweefsel gedeeld door het totale lichaamsgewicht, maal 100. Om het vetpercentage te bepalen gebruikt men de zogenaamde formule van Siri, die geldt onder voorwaarden waaraan voor de meeste mensen voldaan is. Deze formule luidt als volgt:

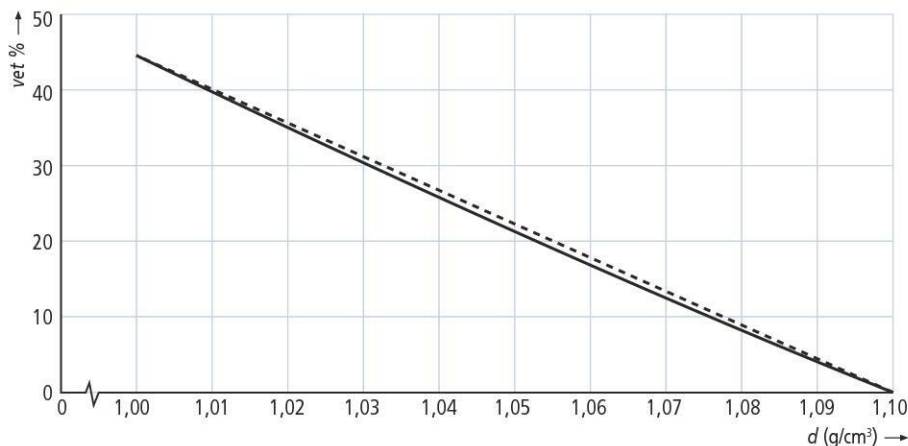
$$VP = \left(\frac{1}{d} \cdot 4,95 - 4,50 \right) \cdot 100 \text{ met } 0,90 \leq d \leq 1,10$$

Hierin is VP het vetpercentage en d de dichtheid van het lichaam in g/cm^3 .

- a Voor mannen van 20 tot 30 jaar wordt een vetpercentage van 12% als streefwaarde aangehouden.
Bereken met behulp van de gegeven formule de dichtheid van het lichaam die hoort bij een vetpercentage van 12%.
Rond je antwoord af op twee decimalen.

Hint 10

Veel mensen hebben een vetpercentage tussen 0 en 45 procent. De dichtheden die daarbij horen, liggen tussen 1,00 en 1,10. In onderstaande figuur is het gedeelte van de grafiek van VP getekend voor $1,00 \leq d \leq 1,10$. In deze figuur is te zien dat de grafiek van VP goed benaderd kan worden door een rechte lijn. Deze rechte lijn door de punten $(1,00; 45)$ en $(1,10; 0)$ is gestippeld getekend.



De vergelijking van deze rechte lijn kan worden geschreven als $VL = p \cdot d + q$. Hierin is VL het vetpercentage volgens de lineaire benadering en d de dichtheid van het lichaam in g/cm^3 .

b Bereken op algebraïsche wijze de waarden van p en q .

Hint 11

De dichtheid d van het lichaam kan worden bepaald door een persoon onder te dompelen in water. Alvorens de persoon onder te dompelen, wordt hij gewogen op een normale weegschaal. Dit gewicht noemen we G , in kilogram. Daarna bepaalt men zijn gewicht onder water. Dit gewicht noemen we W , in kilogram. De dichtheid van het lichaam kan dan als volgt

worden berekend: $d = \frac{G}{G - W}$

Voor personen met $G = 100$ voor wie de formule van Siri geldt, kan het vetpercentage rechtstreeks worden berekend met behulp van het onderwatergewicht W . Hiervoor kan een lineaire formule opgesteld worden van de vorm $VP = a \cdot W + b$.

c Leid deze formule op algebraïsche wijze af door, voor een persoon van 100 kg, de bovenstaande formule voor d met de formule van Siri te combineren.

Hint 12

Recht evenredig, omgekeerd evenredig, evenredigheidsconstante

Twee variabelen heten (recht) evenredig als geldt: als de ene variabele k keer zo groot wordt, dan wordt de andere variabele ook k keer zo groot.

Je herkent een evenredig verband in een tabel, als van de twee getallen in elke kolom de verhouding dezelfde is.

Zijn de variabelen x en y , dan heet y recht evenredig, of kortweg evenredig met x . Er geldt $\frac{y}{x} = c$, maar ook $y = c \cdot x$.

De constante c heet de evenredigheidsconstante.

Twee variabelen heten omgekeerd evenredig als geldt: als de ene variabele k keer zo groot wordt, wordt de andere variabele k keer zo klein. Zijn de variabelen x en y , dan geldt $x \cdot y = c$.

Je kunt ook schrijven $y = \frac{c}{x}$ of $x = \frac{c}{y}$.

Je herkent een omgekeerd evenredig verband in een tabel als het product van de variabelen in elke kolom steeds hetzelfde is.

Voorbeeld

a	1,5	10,8	65	120
b	0,6	4,32	12	48

Laat zien dat b in deze tabel recht evenredig is met a .

Bereken de evenredigheidsconstante en geef een bijbehorende formule.

Oplossing

$$\frac{b}{a} = \frac{0,6}{1,5} = \frac{4,32}{10,8} = \frac{12}{65} = \frac{48}{120} = 0,4$$

De evenredigheidsconstante is 0,4.

Een formule is $b = 0,4 \cdot a$.

- 16 a Ga van de tabellen na of b recht evenredig is met a .

A	a	4	6	8	12
	b	6	9	12	18

B	a	1	2	3	4
	b	7	10	13	16

C	a	1,5	6,5	7	9
	b	6	26	28	36

- b Welke evenredigheidsconstanten horen bij de evenredigheden van opdracht a?

- 17 De variabelen x en y in de tabellen zijn omgekeerd evenredig.

A	x	3,2	...	...	64	0,16
	y	10	16	4	...	...

B	x	2	6	30	...	60
	y	...	15	...	18	...

- a Vul de open plaatsen in.
b Stel een formule op bij elk van de tabellen.

18	A	p	2	3	4	5
		q	14	17	20	23

	B	p	1	2	3	4
		q	30	15	10	7,5

	C	p	2	5	8	10
		q	7	17,5	28	35

- a Ga van de tabellen na of q recht evenredig of omgekeerd evenredig is met p of geen van beide.
b Stel bij elke evenredigheid een passende formule op.

Evenredig met een macht

Als voor twee variabelen P en Q geldt dat Q evenredig is met P^a , dan is er een machtsverband tussen P en Q van de vorm $Q = c \cdot P^a$. Er geldt: als de variabele P een factor k keer zo groot wordt, dan wordt de variabele Q een factor k^a keer zo groot. Bij gegeven waarden van P en Q kun je de waarde van a en van de evenredigheidsconstante c berekenen.

Voorbeeld

De grafiek van een machtsverband $y = c \cdot x^a$ gaat door de punten $(2, 40)$ en $(3, 135)$.
Bereken a en c .

Oplossing

$x = 2$ en $y = 40$ geeft $40 = c \cdot 2^a$.

$x = 3$ en $y = 135$ geeft $135 = c \cdot 3^a$.

Delen van deze vergelijkingen geeft

$$\frac{c \cdot 3^a}{c \cdot 2^a} = \frac{135}{40} \text{ dus } \left(1\frac{1}{2}\right)^a = \frac{135}{40} = 3\frac{3}{8}$$

$$a = {}^{1\frac{1}{2}}\log(3\frac{3}{8}) = 3 \text{ en } c = \frac{40}{2^3} = 5$$

- 19 In de tabel is een aantal meetresultaten gegeven.

t	1	4	7	16
N	36	203,65	409,9	1152

Neem aan dat de bijbehorende formule de vorm $N = c \cdot t^n$ heeft.

- Kies geschikte waarden voor t en N en bereken daarmee de waarde van c .
- Bereken de waarde van n . Rond je antwoord af op twee decimalen.
- Welke waarde heeft N bij $t = 17$?

Examenopdrachten

20 Karpers

(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2016 tijdvak 1)

Het verband tussen de lengte van karperlarven en hun gewicht kan beschreven worden met een formule van de vorm:

$$G = 0,014 \cdot L^b \text{ met } 0,2 \leq L \leq 1,9$$

Hierin is L de lengte in centimeter, G het gewicht in gram en b een constante.

Een karperlarve van 1,9 cm weegt ongeveer 0,25 g.

- Bereken b met behulp van deze gegevens. Rond je antwoord af op één decimaal.

Hint 13

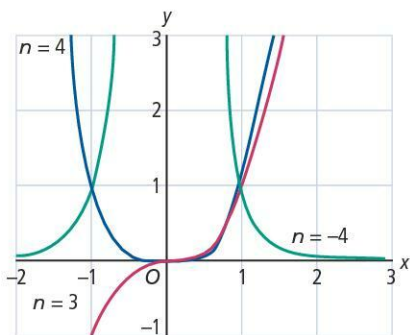
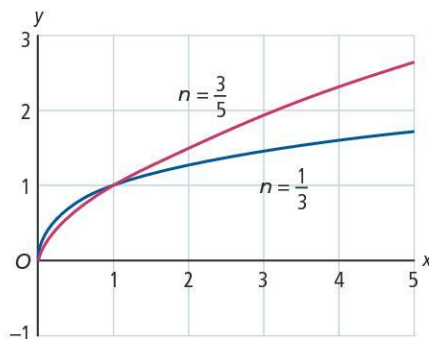
Voor volwassen karpers geldt de formule

$$G = 0,014 \cdot L^{3,13} \text{ met } 10 \leq L \leq 94$$

Hierin is L weer de lengte in centimeter en G het gewicht in gram

- Bereken hoeveel keer zo zwaar een volwassen karper van 94 cm is in vergelijking met een volwassen karper van 10 cm. Rond je antwoord af op honderdtallen.

Hint 14



Machtsfuncties

Functies van de vorm $f(x) = x^a$, met a een willekeurig getal heten machtsfuncties.

- Machtsfuncties van de vorm $f(x) = x^{-n}$ met n een positief geheel getal kun je schrijven als $f(x) = \frac{1}{x^n}$. Deze machtsfuncties zijn voorbeelden van gebroken functies. De grafieken van deze functies hebben de x -as als horizontale asymptoot en de y -as als verticale asymptoot.
- Machtsfuncties van de vorm $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ ($x \geq 0$) met m en n positieve gehele getallen zijn te schrijven als $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$ en worden ook wel wortelfuncties genoemd.

21 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^8$, $g(x) = x^{-3}$, $h(x) = x^7$ en $k(x) = x^{\frac{1}{4}}$.

- Bij welke van deze functies heeft de grafiek een symmetrieas? Controleer je antwoord eventueel met een plot van de grafiek.
- Welke van de grafieken gaan door het punt $(1, 1)$? En welke door $(-1, -1)$?
- Hoeveel snijpunten heeft elk van de grafieken met de lijn $y = 4$? En hoeveel snijpunten heeft elk van de grafieken met de lijn $y = -2$?
- Onderzoek met je rekenmachine hoeveel snijpunten de grafiek van $m(x) = x^{1,75}$ heeft met de lijn $y = 18$.

Machtsvergelijkingen oplossen

De oplossing van de vergelijking $x^a = c$ met n een positief geheel getal is:

- $x = \sqrt[n]{c}$ als n oneven is.
- $x = \sqrt[n]{c}$ of $x = -\sqrt[n]{c}$ als n even is en $c \geq 0$.
- er is geen oplossing als n even is en $c < 0$.

Vergelijkingen van de vorm $x^a = c$ waarin a een gebroken getal is, los je op met de regel:

Uit $x^a = c$ volgt $x = c^{\frac{1}{a}}$, met $c > 0$.

- 22** Los de vergelijkingen algebraïsch op. Rond af op twee decimalen.

- a** $0,4 \cdot p^5 + 8 = 2,3$ **c** $13x^{0,7} - 65 = 0$
b $100 - 6 \cdot n^4 = 28$ **d** $15 + x^{-\frac{1}{2}} = 38$

Kwadratische functies

Functies van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ heten kwadratische of tweedegraads functies. De bijbehorende grafiek is een parabool. Voor $a > 0$ is de grafiek een dalparabool, voor $a < 0$ een bergparabool.

Kwadratische functies kunnen ook van de vorm $f(x) = a(x-s)(x-t)$ en $f(x) = a(x-p)^2 + q$ zijn.

Uit de nulpuntsvorm $f(x) = a(x-s)(x-t)$ lees je de snijpunten $(s, 0)$ en $(t, 0)$ af van de bijbehorende parabool met de x -as.

Uit de topvorm $f(x) = a(x-p)^2 + q$ lees je de coördinaten van de top (p, q) van de bijbehorende parabool af.

- 23** Gegeven zijn zes functies. Onderzoek op algebraïsche wijze van elke functie of de bijbehorende grafiek een parabool is en zo ja, of het een dalparabool of een bergparabool betreft.

- a** $f(x) = 3x(1-x) + 2x^2$ **d** $i(x) = 8x^2 + 4x(x-1)^2$
b $g(x) = x(8x+3)^2$ **e** $j(x) = (4x+3)(2x-1) - 3x(x+1)$
c $h(x) = -3(5-2x)^2 + 4$ **f** $k(x) = x^4 - 5x^2 + 6$

- 24** Herleid de gegeven vergelijkingen tot de topvorm en geef de coördinaten van de top.

- a** $y = x^2 - 10x + 3$ **c** $y = x^2 - x - 8$
b $y = x^2 + 3x - 5$ **d** $y = x^2 - 0,4x + 0,02$

Voorbeeld

Los exact op $4x^5 = 80$ en $5x^4 = 120$.

Oplossing

$$\begin{array}{ll} 4x^5 = 120 & 5x^4 = 120 \\ x^5 = 30 & x^4 = 24 \\ x = \sqrt[5]{30} & x = \sqrt[4]{24} \text{ of } x = -\sqrt[4]{24} \end{array}$$

Voorbeeld

Schrijf $f(x) = 2x^2 + 8x - 10$ in de nulpuntsvorm en in de topvorm.

Oplossing

nulpuntsvorm:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 8x - 10 \\ f(x) &= 2(x^2 + 4x - 5) \\ f(x) &= 2(x+5)(x-1) \end{aligned}$$

topvorm:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x^2 + 4x) - 10 \\ f(x) &= 2(x+2)^2 - 8 - 10 \\ f(x) &= 2(x+2)^2 - 18 \end{aligned}$$

Kwadratische vergelijkingen oplossen

Kwadratische vergelijkingen los je op door eerst de vergelijking te vereenvoudigen door links en rechts van het $=$ -teken dezelfde bewerking uit te voeren.

Vervolgens gebruik je de regels

- Uit $A \times B = 0$ volgt $A = 0$ of $B = 0$.
- Uit $A^2 = B^2$ volgt $A = B$ of $A = -B$.
- Uit $A \times B = A \times C$ volgt $A = 0$ of $B = C$.

Of je gebruikt de abc -formule:

De oplossingen van $ax^2 + bx + c = 0$ zijn:

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ of } x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \text{ met } D = b^2 - 4ac.$$

D heet de discriminant van de vergelijking.

Als $D > 0$, dan zijn er twee oplossingen.

Als $D = 0$, dan is er één oplossing.

Als $D < 0$, dan zijn er geen oplossingen

25 Los exact op.

- | | |
|--------------------------------------|--|
| a $3x(2x - 7) = x^2 + 3x + 5$ | e $9x^2 - 7x = 16$ |
| b $(4x - 1)^2 = 49$ | f $(8 - 3x)^2 = 7(8 - 3x)$ |
| c $(6 - 2x)^2 = 10$ | g $16 - 9x^2 = -20$ |
| d $(10x + 1)(3 - 6x) = 0$ | h $(x - 1)(4x + 9) = (x - 1)(7x - 5)$ |

Wortelfuncties

Machtsfuncties van de vorm $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$ zijn voorbeelden van wortelfuncties, want je kunt ze schrijven als $g(x) = \sqrt[n]{x}$.

Zo is $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

De grafiek van een wortelfunctie kan een randpunt hebben.

Het domein van de wortelfunctie $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$ bepaal je door de ongelijkheid $f(x) \geq 0$ op te lossen.

Voorbeeld 1

Los exact op $(x + 1)(3x - 1) = 2x(x + 1)$.

Oplossing

$$\begin{array}{ll} x + 1 = 0 & \text{of} \quad (3x - 1) = 2x \\ x = -1 & \quad \quad \quad x - 1 = 0 \\ & \quad \quad \quad \quad \quad \quad x = 1 \end{array}$$

De oplossing is $x = -1$ of $x = 1$.

Voorbeeld 2

Los exact op $4x^2 - 3x - 4\frac{1}{2} = 0$.

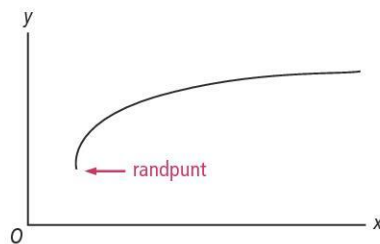
Oplossing

$a = 4$, $b = -3$ en $c = -4\frac{1}{2}$ geeft

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-4\frac{1}{2}) = 9 + 72 = 81$$

$$x = \frac{3 + \sqrt{81}}{8} \text{ of } x = \frac{3 - \sqrt{81}}{8}$$

De oplossing is $x = 1\frac{1}{2}$ of $x = -\frac{3}{4}$.



- 26**
- a Gegeven is de functie $g(x) = 5 - \sqrt{3x - 8}$.
Bepaal op algebraïsche wijze het domein van deze functie.
 - b Bepaal ook het domein van de functies $h(x) = 3\sqrt{x^2 - 15}$
en $k(x) = 12 + 6\sqrt{x^2 + 15}$.
 - c Gegeven is de functie $m(x) = -15 + 3\sqrt{6x - 1}$.
Beredeneer wat het bereik van deze functie is.
 - d Bepaal het domein en het bereik van de functies
 $n(x) = 2\sqrt{x^2 + 5}$ en $p(x) = 30 - 6\sqrt{4 - 9x}$.

Wortelvergelijkingen oplossen

Een wortelvergelijking vereenvoudig je tot de vorm $\sqrt{A} = B$ door links en rechts van het $=$ -teken dezelfde bewerking uit te voeren. Vervolgens gebruik je de regel:

Uit $\sqrt{A} = B$ volgt $A = B^2$.

Door het kwadrateren kan er een oplossing bij komen die niet voldoet aan de oorspronkelijke vergelijking. Controleer daarom bij wortelvergelijkingen altijd de oplossing door deze in te vullen bij de oorspronkelijke vergelijking.

Voorbeeld

Los op $-2 + \sqrt{4x - 1} = -2x + 6$.

Oplossing

$$\sqrt{4x - 1} = -2x + 8$$

$$4x - 1 = (-2x + 8)^2$$

$$4x - 1 = 4x^2 - 32x + 64$$

$$4x^2 - 36x + 65 = 0$$

Met de abc -formule vind je

$$x = 2\frac{1}{2} \text{ of } x = 6\frac{1}{2}.$$

Controle: $x = 6\frac{1}{2}$ voldoet niet.

De oplossing is $x = 2\frac{1}{2}$.

- 27** Los exact op.
- a $4 + \sqrt{1 - 2x} = 7$
 - b $4x + \sqrt{1 - 2x} = 1$
 - c $-1 + \sqrt{x^2 + 7} = x$
 - d $\sqrt{x^2 - 3} - x = 3$

Examenopdrachten

28 Een wortelfunctie

(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2016 tijdvak 1)

De functie f is gegeven door $f(x) = \sqrt{-3x + 6}$.

Lijn k heeft vergelijking $y = -\frac{7}{4}x + \frac{7}{2}$.

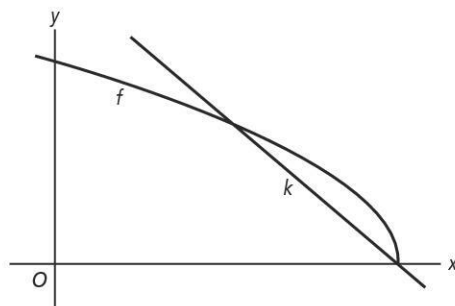
In de figuur zie je de grafiek van f en lijn k .

Lijn k gaat door het gemeenschappelijke punt van de grafiek van f en de x -as.

- a Toon dit op algebraïsche wijze aan.

Lijn k en de grafiek van f hebben nog een ander punt gemeenschappelijk.

- b Bereken in twee decimalen nauwkeurig de x -coördinaat van dit punt.



Hint 15

Hint 16

29 Viaduc de Garabit

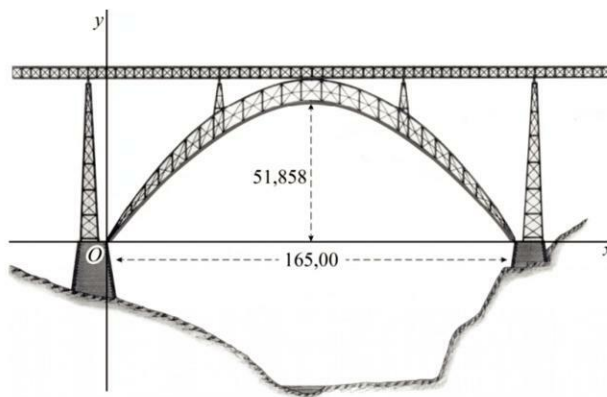
(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2019 tijdvak 2)

Het Viaduc de Garabit is een spoorbrug die tussen 1880 en 1884 over de rivier de Truyère in Frankrijk is gebouwd. De onderste boog is bij benadering een deel van een parabool.

We plaatsen de parabool in een assenstelsel, zodanig dat het beginpunt van de boog zich in de oorsprong bevindt. Verder is de afstand tussen beginpunt en eindpunt van de boog 165,00 m en bevindt de top van de onderste boog zich 51,858 m boven de x -as. De parabool is te beschrijven met een formule van de vorm $y = ax^2 + bx$.

Bereken algebraïsch de waarden van a en b .

Geef je eindantwoord in vier decimalen.



Hint 17

30 Functie met een wortel

(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2012 tijdvak 2)

Voor $c > 0$ is de functie f_c gegeven door

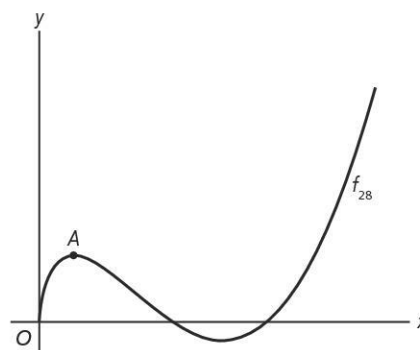
$$f_c(x) = (x^2 - 11x + c)\sqrt{x}.$$

Hiernaast is de grafiek van de functie $f_{28}(x) = (x^2 - 11x + 28)\sqrt{x}$ getekend.

a Bereken exact de x -coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f_{28} met de x -as.

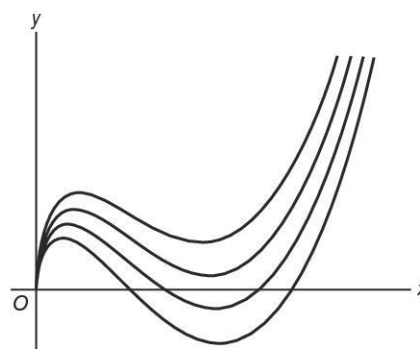
b In het onderste assenstelsel is voor enkele waarden van c de grafiek van f_c getekend.

Bereken exact voor welke waarde van c de grafiek van f_c de x -as raakt.



Hint 18

Hint 19



31 Twee functies

(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2014 tijdvak 1)

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = x\sqrt{x+2}$ en $g(x) = x^2$. De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten A en B .

Bereken exact de coördinaten van A en B .

Hint 20

Exponentiële en logaritmische functies

Exponentiële functies

Een groeiproses waarbij de hoeveelheid per tijdseenheid met hetzelfde positieve getal wordt vermenigvuldigd, heet een exponentieel groeiproses.

De hoeveelheid op tijdstip $t = 0$ heet de beginhoeveelheid.

Bij exponentiële groei met b als beginhoeveelheid en g als groeifactor per tijdseenheid hoort de exponentiële functie $N(t) = b \cdot g^t$.

Rekenen met groeifactoren

Als g de groeifactor per eenheid is, dan is g^n de groeifactor per n eenheden.

$g^{\frac{1}{n}}$ (ook wel geschreven als $\sqrt[n]{g}$) is de groeifactor voor een n -de deel van die eenheid. Zo is $g^{\frac{1}{2}} = \sqrt{g}$ de groeifactor voor de halve eenheid.

Voorbeeld 1

De groeifactor per week is 1,35.
Geef de groeifactor per dag,
per uur en per 18 dagen.

Oplossing

De groeifactor per dag is $(1,35)^{\frac{1}{7}} \approx 1,044$.

De groeifactor per uur is $(1,35)^{\frac{1}{168}} \approx 1,002$.

De groeifactor per 18 dagen is $(1,35)^{\frac{18}{7}} \approx 2,163$.

Voorbeeld 2

Een populatie neemt jaarlijks met 15%
in aantal af.
Bereken met hoeveel procent de populatie
per 20 jaar afneemt.

Oplossing

De groeifactor per jaar is 0,85.

De groeifactor per 20 jaar is $(0,85)^{20} = 0,039$.

Na 20 jaar is er nog $100 \times 0,039 = 3,9\%$ over.

Per 20 jaar is de afname $100 - 3,9 = 96,1\%$.

- 32** Bij een groeiproses is 1,35 de groeifactor per uur.
Bereken de groeifactor:
- | | |
|-----------------------|---------------------------|
| a per dag | c per vijf minuten |
| b per kwartier | d per 13 minuten |
- 33** Een populatie neem met 2,5% per 10 jaar toe.
Bereken de procentuele toename
- | | |
|---------------------|----------------------|
| a per 5 jaar | c per 25 jaar |
| b per jaar | d per eeuw |

Logaritmen

De logaritme van a voor het grondtal g is de exacte oplossing van de vergelijking $g^x = a$.

Je noteert deze oplossing als $x = {}^g\log(a)$.

- 34** Los de vergelijkingen exact op.
- | | |
|------------------------------|--------------------------------------|
| a $2^x = 5$ | d $2 + 5 \cdot 7^{4x} = 17$ |
| b $12 \cdot 6^x = 48$ | e $2^{\log(x+1)} = 5$ |
| c $3^{2x+1} = 7$ | f $3 \cdot 4^{\log(x-4)} = 6$ |

Voorbeeld

Los exact op.

$$5 \cdot 3^x = 20 \text{ en } 2^{\log(x-1)} = 5$$

Oplossing

$$3^x = 4$$

$$x = {}^3\log(4)$$

$$x - 1 = 2^5$$

$$x - 1 = 32$$

$$x = 33$$

Rekenen met logaritmen

Voor het rekenen met logaritmen gelden de volgende rekenregels.

$${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$$

$$g^{^g\log(a)} = a$$

$${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$${}^g\log(a) = \frac{p \log(a)}{p \log(g)}$$

$$p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$$

Voorbeeld 1

Schrijf als één logaritme:

$$3 \cdot {}^5\log(2) + \frac{1}{2} \cdot {}^5\log(9)$$

Oplossing

$$3 \cdot {}^5\log(2) + \frac{1}{2} \cdot {}^5\log(9) =$$

$${}^5\log(2^3) + {}^5\log\left(9^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$${}^5\log(8) + {}^5\log(3) = {}^5\log(24)$$

Voorbeeld 2

Schrijf als één logaritme:

$${}^4\log(3+p) + 2 \cdot {}^4\log(5p)$$

met $p > 0$

Oplossing

$${}^4\log(3+p) + 2 \cdot {}^4\log(5p) =$$

$${}^4\log(3+p) + {}^4\log(25p^2) =$$

$${}^4\log(25p^2(3+p)) =$$

$${}^4\log(75p^2 + 25p^3)$$

35 Schrijf als één logaritme.

a ${}^5\log(4) + {}^5\log(8)$

d $-2 \cdot {}^3\log(0,1) + {}^3\log(a)$

b ${}^2\log(36) - {}^2\log(9) + {}^2\log(5)$

e $-3 + 2 \cdot {}^4\log(9p)$

c $\frac{1}{2} \cdot {}^5\log(49) + 2 \cdot {}^5\log(3)$

f ${}^8\log(2a) + {}^8\log(a+3)$

Verdubbelingstijd en halveringstijd

Bij een exponentieel groeiproces met groeifactor g is de verdubbelingstijd de tijd die nodig is om een hoeveelheid te verdubbelen. Deze tijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = 2$. De verdubbelingstijd is dus $t = {}^g\log(2)$.

De halveringstijd is de tijd die nodig is om een hoeveelheid te halveren. Deze tijd is de oplossing van $g^t = \frac{1}{2}$.

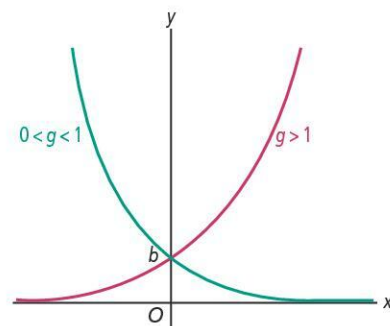
De halveringstijd is dus $t = {}^g\log\left(\frac{1}{2}\right)$.

Grafieken van exponentiële en logaritmische functies

Een exponentiële functie $f(x) = b \cdot g^x$ ($b > 0$) is stijgend als $g > 1$ en dalend als $0 < g < 1$. Omdat $g^0 = 1$ voor elke waarde van g , en dus $f(0) = b$, gaat de grafiek van f door $(0, b)$ op de verticale as. De grafiek van $f(x) = b \cdot g^x$ heeft de x -as als horizontale asymptoot.

Het domein van f is $\mathbb{R}$.

Het bereik van f is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.



De grafieken van $f(x) = g^x$ en $k(x) = {}^g\log(x)$ zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

Het domein van $k(x) = {}^g\log(x)$ is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

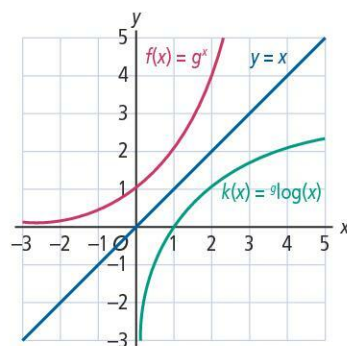
Het bereik van k is $\mathbb{R}$.

Het grondtal g is net als bij exponentiële functies altijd positief, maar niet gelijk aan 1.

Voor $0 < g < 1$ is $k(x) = {}^g\log(x)$ dalend en voor $g > 1$ is $k(x) = {}^g\log(x)$ stijgend.

Verder heeft de grafiek van $k(x) = {}^g\log(x)$ de lijn $x = 0$, dus de y -as, als verticale asymptoot.

Het snijpunt met de x -as is $(1, 0)$, want ${}^g\log(1) = 0$ voor elke waarde van g .



Exponentiële en logaritmische vergelijkingen oplossen

Sommige exponentiële vergelijkingen kun je exact oplossen door de linker- en rechterkant van de vergelijking te schrijven als machten van hetzelfde grondtal. Je gebruikt de regels voor het rekenen met machten:

$$g^a \cdot g^b = g^{a+b} \quad \frac{g^a}{g^b} = g^{a-b} \quad (g^a)^b = g^{a \cdot b}$$

$$\text{Verder geldt } g^0 = 1, \quad g^{\frac{1}{2}} = \sqrt{g}, \quad g^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{g^m} \text{ en } g^{-n} = \frac{1}{g^n}$$

Andere exponentiële vergelijkingen en ook logaritmische vergelijkingen los je algebraïsch op met de basisregel:

Uit $g^b = a$ volgt $b = {}^g\log(a)$ en uit ${}^g\log(a) = b$ volgt $a = g^b$.

Voorbeeld 1

Los exact op $9 \cdot 3^{x+4} = 3\sqrt{3}$.

Oplossing

$$3^2 \cdot 3^{x+4} = 3^1 \cdot 3^{\frac{1}{2}}$$

$$3^{x+6} = 3^{1\frac{1}{2}}$$

$$x + 6 = 1\frac{1}{2}$$

$$x = -4\frac{1}{2}$$

Voorbeeld 2

Los exact op $4 \cdot 5^{x-3} = 24$.

Oplossing

$$5^{x-3} = 6$$

$$x - 3 = {}^5\log(6)$$

$$x = 3 + {}^5\log(6)$$

Voorbeeld 3

Los exact op $1 + {}^4\log(2x - 6) = 0$.

Oplossing

$${}^4\log(2x - 6) = -1$$

$$2x - 6 = 4^{-1}$$

$$2x - 6 = \frac{1}{4}$$

$$2x = 6\frac{1}{4} \text{ dus } x = 3\frac{1}{8}$$

36 Los exact op.

a $8 \cdot 4^{x+2} = 1$

b $\frac{1}{25} \cdot 5^{x+3} = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x$

c $3 \cdot 7^{x-4} = 30$

d $14 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 7$

e $6 - {}^3\log(x + 4) = 5\frac{1}{2}$

f $12 + 2 \cdot \log(x) = 8$

Examenopdrachten

37 Macht van 2

(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2018 tijdvak 1)

De functie f is gegeven door $f(x) = 4 - 2^{0,3x-2}$.

Op de grafiek van f ligt een punt R .

De y -coördinaat van R is 2.

a Bereken exact de x -coördinaat van R .

Hint 21

De grafiek van f snijdt de x -as in het punt Q . Verder zijn gegeven het punt $P(0, 5)$ en de lijn l door P en Q . Lijn l en de grafiek van f snijden elkaar behalve in Q ook in het punt S .

b Bereken de coördinaten van S . Rond deze coördinaten af op twee decimalen.

Hint 22

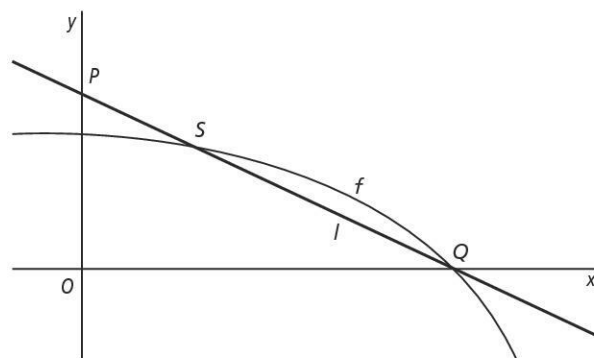
De grafiek van f wordt 20 naar links en 10 omhoog geschoven. Hierdoor ontstaat de grafiek van een functie g .

De functie g kan geschreven worden in de vorm

$$g(x) = a + b \cdot 2^{0,3x}.$$

c Bereken de waarden van a en b .

Hint 23



38 Logaritme van een kwadratische functie

(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2018 tijdvak 2)

De functie f wordt gegeven door $f(x) = {}^2\log(x^2 - 3x + 3)$.

De grafiek van f lijkt geen verticale asymptoot te hebben.

De grafiek van de standaardfunctie $y = {}^2\log(x)$ heeft wél een verticale asymptoot.

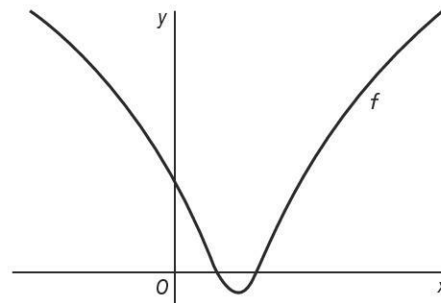
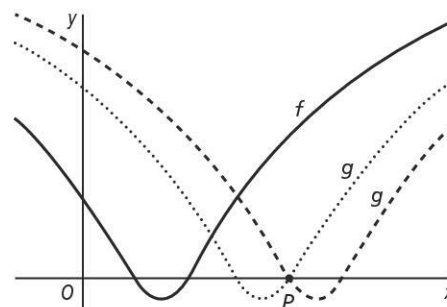
a Bewijs dat de grafiek van f inderdaad geen verticale asymptoot heeft.

Hint 24

Gegeven is het punt $P(4, 0)$. De grafiek van f wordt over een afstand a naar rechts verschoven. Hierdoor ontstaat de grafiek van de functie g . Er zijn twee waarden van a waarvoor de grafiek van g door P gaat.

b Bereken exact deze twee waarden van a .

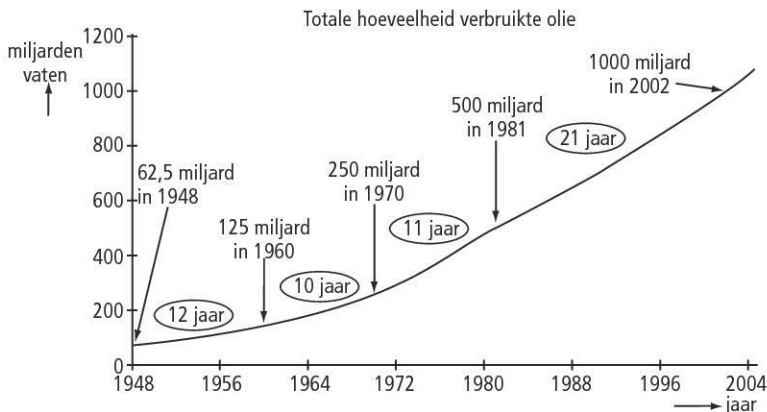
Hint 25



39 Olie

(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2013 tijdvak 1)

In de figuur is af te lezen hoeveel olie er wereldwijd in totaal is verbruikt sinds er in 1859 voor het eerst een oliebron geslagen werd. Zo valt bijvoorbeeld af te lezen dat het totaal van 1000 miljard vaten in de loop van 2002 gepasseerd werd.



In de grafiek zijn vanaf 1948 de perioden aangegeven waarin de totale hoeveelheid verbruikte olie verdubbelde. Tussen 1948 en 1981 duurde het telkens ongeveer 11 jaar tot de totale hoeveelheid verbruikte olie was verdubbeld. Dit betekent dat tussen 1948 en 1981 de totale hoeveelheid verbruikte olie bij benadering exponentieel groeide.

- a** Bereken het jaarlijkse groeipercentage dat hoort bij een verdubbelingstijd van 11 jaar. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Hint 26

Vanaf 1981 groeide de totale hoeveelheid verbruikte olie bij benadering nog steeds exponentieel, maar met een andere groeifactor. In de grafiek is te zien dat de totale hoeveelheid verbruikte olie verdubbelde van 500 miljard tot 1000 miljard vaten in de periode van 1981 tot 2002. Een verdubbelingstijd van 21 jaar komt overeen met een groei van ongeveer 3,4% per jaar.

- b** Bereken op algebraïsche wijze het jaar waarin volgens dit exponentiële model de totale hoeveelheid verbruikte olie de grens van 750 miljard vaten passeerde.

Hint 27

40 Overlevingstijd

(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2011 tijdvak 1)

De overlevingstijd van personen die te water raken, is onder andere afhankelijk van de watertemperatuur. In de tabel staan watertemperaturen met bijbehorende overlevingstijden. Ga voor $5,0 \leq T \leq 20$ uit van een exponentieel verband tussen T en Z .

Bereken op algebraïsche wijze de overlevingstijd van iemand in water van 17 °C. Geef je antwoord in uren. Rond hierbij af op één decimaal.

watertemperatuur T in °C	overlevingstijd Z in uren
5,0	0,5
10	1,0
15	2,0
20	4,0

Hint 28

Radialen

Bij een cirkelboog met lengte 1 hoort een hoek α van ongeveer 57° . In de eenheidscirkel is één radiaal de draaihoek die hoort bij een boog met lengte 1.

Tussen graden en radialen is een verband: 180° komt overeen met π radialen.

Bij het rekenen met hoeken in radialen stel je de rekenmachine daarop in.

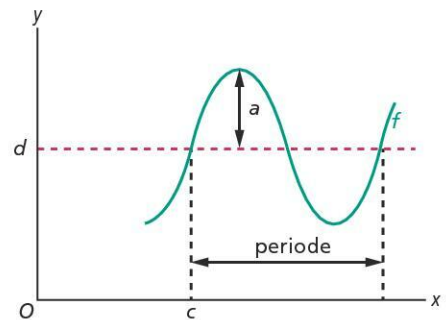
hoek in graden	0	...	45	...	90	180
hoek in radialen exact	...	$\frac{1}{6}\pi$	...	$\frac{1}{3}\pi$	...	π

- 41** Het omrekenen van graden naar radialen gaat het handigst met een verhoudingstabel.
Zet in de tabel 180° en π boven elkaar en vul de tabel verder in.

Sinusoïden

Sinusoïden zijn periodieke grafieken met een golfvormig verloop. Voorbeelden van sinusoïden zijn de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$.

Kenmerken van een sinusoïde zijn de amplitude, de periode, de evenwichtsstand, de toppen en de punten waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat. Het functievoorschrift van elke sinusoïde is te schrijven in de vorm $f(x) = d + a \sin(b(x - c))$ of $g(x) = d + a \cos(b(x - c))$.



- 42** Geef de amplitude, de periode en de evenwichtsstand.
- a $f(x) = 3 \sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$ c $k(x) = -3 + \cos(\pi(x - 1))$
b $h(x) = -10 + 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ d $m(x) = \cos(1,5(x - 0,75\pi))$
- 43** Bereken met behulp van het functievoorschrift het maximum en het minimum en voor welke waarden van x deze bereikt worden op het interval $[0, 2\pi]$.
- a $f(x) = 3 \sin(4x)$
b $f(x) = -2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + 3$
c $f(x) = 4 - 2 \sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$

Een functievoorschrift $f(x) = d + a \sin(b(x - c))$ opstellen

1 Lees uit de grafiek het maximum en het minimum af.

2 Bereken $d = \frac{\text{maximum} + \text{minimum}}{2}$ en $a = \text{maximum} - d$.

3 Lees uit de grafiek de periode af; $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$

4 Lees uit de grafiek de horizontale verschuiving af.

Bij een cosinus is dat de x -coördinaat die bij een maximum hoort: $c = x_{\text{max}}$.

Bij een sinus is dat waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.

5 Schrijf het functievoorschrift op.

Voorbeeld

Stel een functievoorschrift op van de vorm $f(x) = d + a \sin(b(x - c))$ op voor de gegeven grafiek.

Oplossing

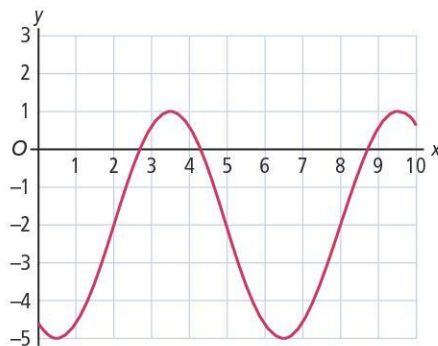
1 Het maximum is 1 en het minimum is -5 .

2 $d = \frac{1}{2}(-5 + 1) = -2$ en $a = 1 - (-2) = 3$

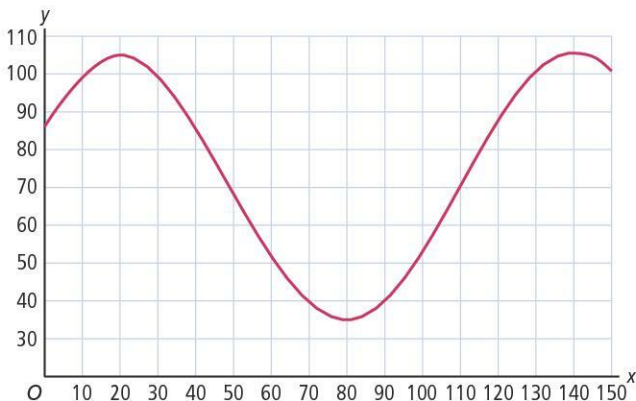
3 De periode is $8 - 2 = 6$, dus $b = \frac{2\pi}{6} = \frac{1}{3}\pi$.

4 De grafiek gaat in $(2, -2)$ stijgend door de evenwichtsstand, dus $c = 2$.

5 $f(x) = -2 + 3\sin(\frac{1}{3}\pi(x - 2))$



44 Stel een functievoorschrift op bij de grafiek.



Exacte waarden

Om vergelijkingen met sinus en cosinus algebraïsch te kunnen oplossen, moet je enkele exacte waarden van sinus en cosinus weten. Ze staan in de tabel hiernaast. Voor het berekenen van de exacte waarde van de sinus en de cosinus van andere hoeken kun je gebruikmaken van de waarden in deze tabel en van de symmetrie en de periodiciteit van de bijbehorende grafieken.

graden	0°	30°	45°	60°	90°
radialen	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

45 Vul exacte waarden in.

- a $\sin(-1\frac{1}{6}\pi) = \sin(\frac{1}{6}\pi) = \dots$ e $\sin(3\frac{1}{2}\pi) = \dots$
 b $\cos(1\frac{1}{3}\pi) = \dots$ f $\sin(2\frac{1}{4}\pi) = \dots$
 c $\cos(-\frac{3}{4}\pi) = \dots$ g $\cos(-3\frac{5}{6}\pi) = \dots$
 d $\sin(-2\frac{2}{3}\pi) = \dots$ h $\cos(6\frac{3}{4}\pi) = \dots$

Goniometrische vergelijkingen oplossen

Vergelijkingen van de vorm $\sin(q) = p$ of $\cos(q) = p$ los je exact op met behulp van de tabel en symmetrie. In andere gevallen los je de vergelijking op met de rekenmachine.

Vergelijkingen van de vorm $\sin(b(x - c)) = d$ los je op een gegeven interval exact op met deze stappen:

- 1 Stel $b(x - c) = q$ en los de vergelijking $\sin(q) = d$ exact op.
- 2 Bereken bij elk van de gevonden waarden van q de bijbehorende waarde van x . Vergeet niet ook de periode door b te delen
- 3 Stel vast welke van de gevonden oplossingen op het gegeven interval liggen.

De vergelijking $\cos(b(x - c)) = q$ los je op een vergelijkbare manier op.

46 Los exact op.

- a $\sin(\pi x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ op $[0, 2]$
 b $2\cos(x + \pi) = \sqrt{2}$ op $[\pi, 2\pi]$
 c $2\sin(3x) = 1$ op $[0, \frac{1}{2}\pi]$
 d $\cos(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi) = -1$ op $[0, 6\pi]$
 e $6\sin(2\pi x - \frac{1}{2}\pi) = 3$ op $[0, 2]$
 f $3 + 6\cos(\pi x) = 0$ op $[-\pi, \pi]$

Voorbeeld

Los $2\sin(\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}\pi) = \sqrt{3}$ op het interval $[0, 8\pi]$ exact op.

Oplossing

$$\sin(\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{Stel } \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}\pi = q.$$

$$\text{Uit } \sin(q) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ volgt}$$

$$q = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } q = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of}$$

$$\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}\pi = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\frac{1}{3}x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{1}{3}x = \frac{11}{12}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{7}{4}\pi + k \cdot 6\pi \text{ of } x = \frac{11}{4}\pi + k \cdot 6\pi$$

De oplossingen op $[0, 8\pi]$ zijn

$$x = 1\frac{3}{4}\pi, x = 2\frac{3}{4}\pi \text{ en } x = 7\frac{3}{4}\pi.$$

Examenopdrachten

47 (Co)sinus

(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2018 tijdvak 1)

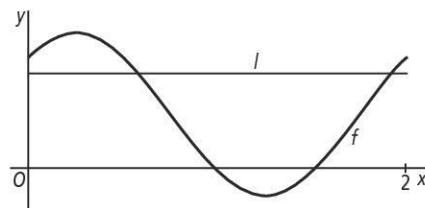
Op het domein $[0, 2]$ is de functie f gegeven door

$$f(x) = 2 + 3 \sin\left(\pi\left(x + \frac{1}{4}\right)\right).$$

Verder is de lijn l gegeven door de vergelijking $y = \frac{7}{2}$.

Op het gegeven domein snijden l en de grafiek van f elkaar in twee punten.

a Bereken exact de x -coördinaten van deze punten.



Hint 29

Een functie g heeft een functievoorschrift van de vorm

$$g(x) = p + q \cdot \cos(r(x - s)).$$

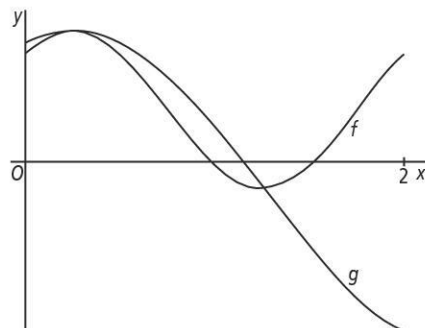
Er geldt:

De periode van g is 4.

Het hoogste punt van de grafiek van g valt samen met het hoogste punt van de grafiek van f .

De amplitude van de grafiek van g is twee keer zo groot als de amplitude van de grafiek van f .

b Bereken mogelijke exacte waarden van p , q , r en s .



Hint 30

48 Sinusoïden

(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2019 tijdvak 1)

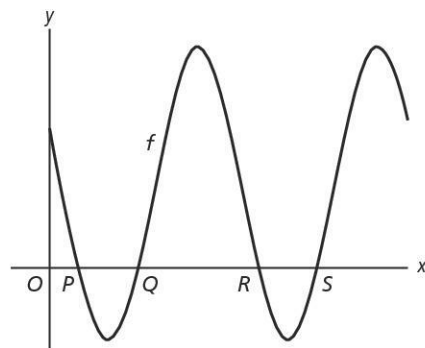
Op het domein $[0, 2\pi]$ is de functie f gegeven door

$$f(x) = 1 + 2 \cos\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right).$$

De grafiek van f snijdt de x -as achtereenvolgens in de punten P , Q , R en S .

De afstand PS is a keer zo groot als de afstand QR .

a Bereken de waarde van a .



Hint 31

Op hetzelfde domein $[0, 2\pi]$ is functie g gegeven door

$$g(x) = f(x) - 2 + 5 \cos\left(2\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)\right).$$

De grafiek van g is ook een sinusoïde. Met andere woorden: g heeft een functievoorschrift van de vorm

$$g(x) = p + q \cdot \cos(r(x - s)).$$

b Bereken mogelijke waarden van p , q , r en s . Geef deze waarden zo nodig in drie decimalen.

Hint 32

49 Sinusoïde en lijn

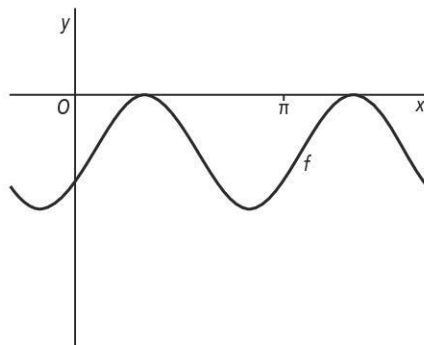
(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2019 tijdvak 2)

De functie f wordt gegeven door $f(x) = -1 + \sin\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right)$.

Er zijn vier waarden van x in het interval $[0, 2\pi]$ waarvoor geldt $f(x) = -\frac{1}{2}$.

a Bereken exact deze vier waarden van x .

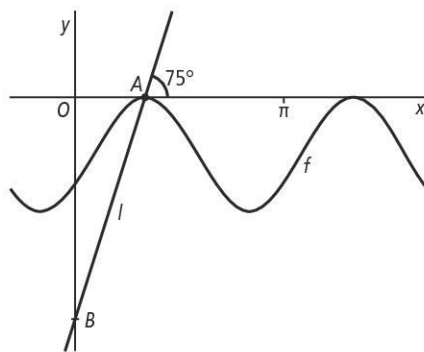
Hint 33



De grafiek van f raakt de x -as in oneindig veel punten. Van deze raakpunten is het punt A het punt met de kleinste positieve x -coördinaat. Door A gaat een stijgende lijn l die een hoek van 75° met de x -as maakt. Punt B is het snijpunt van lijn l met de y -as.

b Bereken de afstand tussen A en B . Geef je eindantwoord in twee decimalen.

Hint 34



We bekijken nu de functie g . Deze heeft de volgende eigenschappen:

De grafiek van g is een sinusoïde.

De periode van de grafiek van g is drie keer zo klein als de periode van de grafiek van f .

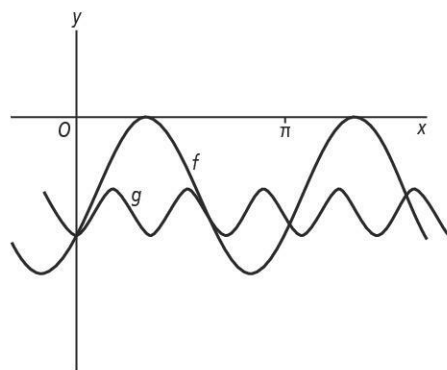
De amplitude van de grafiek van g is vier keer zo klein als de amplitude van de grafiek van f .

Een laagste punt van de grafiek van g valt samen met het snijpunt van de grafiek van f met de y -as.

Functie g heeft een functievoorschrift van de volgende vorm: $g(x) = d + a \cdot \cos(bx)$. Hierin zijn a , b en d getallen.

c Bereken exact voor elk van deze drie getallen een mogelijke waarde.

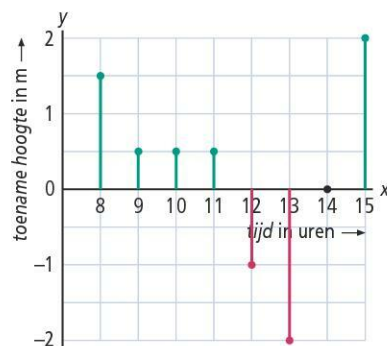
Hint 35



Toenamediagrammen

In een toenamediagram kun je toenames en afnamen zichtbaar maken. Bij toenames worden de staafjes omhoog getekend, bij afnamen omlaag.

- 50** In het toenamediagram zie je hoe de waterhoogte per uur verandert.
- Op welk tijdstip, ongeveer, bereikt de waterhoogte een maximum?
 - Gedurende welke periode stijgt de waterhoogte lineair?
 - Om 07.00 uur is de waterhoogte 3 m.
Hoe hoog staat het water om 13.00 uur?



Differenties

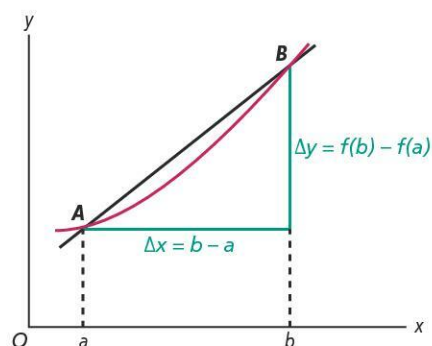
Om veranderingen aan te geven wordt vaak het symbool Δ (delta) gebruikt. Een verandering van x geef je aan met Δx . Bij elke verandering Δx hoort een verandering Δy van een functie.

De gemiddelde verandering van een functie f over het interval $[a, b]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, het differentiequotient

van f over het interval $[a, b]$.

Het differentiequotient van f over het interval $[a, b]$ is

- de gemiddelde verandering van de functie over dat interval;
- de richtingscoëfficiënt van de lijn door het beginpunt en het eindpunt op dat interval.



- 51** De afstand die een bepaald voertuig aflegt voldoet aan de formule $s = 400 \cdot 2,3^t$ met t in uren en s in meters. Bereken de gemiddelde snelheid in meters per uur van dit voertuig tussen $t = 3$ en $t = 6$.

Helling van een grafiek in een punt

De helling van een grafiek in een punt P is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de lijn die de grafiek raakt in punt P . Deze lijn heet de raaklijn.

De helling van een grafiek in een punt kun je benaderen door de gemiddelde verandering over een klein interval te berekenen. Hoe kleiner het interval, hoe beter die benadering is. In een tijd-afstand situatie is de helling van een grafiek gelijk aan de snelheid.

Voorbeeld

Benader de helling van de grafiek van $f(x) = 2^x$ in het punt $(3, 8)$.

Oplossing

Over het interval $[3, 3,001]$ is

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2^{3,001} - 2^3}{3,001 - 3} = 5,547...$$

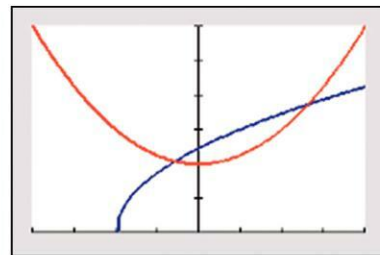
De helling is ongeveer 5,55.

52 In de plot staan de grafieken van de functies

$$f(x) = \sqrt{3x+6} \text{ en } g(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2.$$

De grafieken lijken bij $x = 1$ even steil te lopen.

Benader voor beide functies de helling van de grafiek bij $x = 1$ en controleer daarmee of de grafieken bij $x = 1$ even steil lopen.

**Afgeleide functies en differentiëren**

Bij een functie f hoort vaak een tweede functie waarmee je de helling in een punt van de grafiek van f exact kunt berekenen. Die functie heet de afgeleide functie van f . De notatie voor de afgeleide functie is f' (spreek uit als f -accent). Voor de afgeleide van een formule wordt ook de notatie $\frac{dy}{dx}$ gebruikt.

Het berekenen van de afgeleide functie heet differentiëren. Hierbij gelden de volgende regels:

$f(x) = x^a$	$f'(x) = a \cdot x^{a-1}$
$f(x) = c$ (een constante)	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$g(x) = f(x) + c$	$g'(x) = f'(x)$
$g(x) = c \cdot f(x)$	$g'(x) = c \cdot f'(x)$
$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
$k(x) = f(ax + b)$	$k'(x) = f'(ax + b) \cdot a$

53 Differentieer.

a $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$	f $l(x) = (4x + 3)(2 - x)$
b $g(x) = 8x(x - 7)$	g $m(x) = 7(5x + 4)^3$
c $h(x) = 8x \cdot \sqrt{x}$	h $n(x) = 4\sqrt{12x - 7} + 5x^3$
d $k(x) = 5 + \frac{3}{x^2}$	i $p(x) = 6x \cdot \left(1 + \frac{4}{\sqrt{x}}\right)$
e $t(x) = \frac{3}{4x - 5}$	j $u(x) = \frac{1}{(7 - 5x)^2}$

Voorbeeld

Bepaal de afgeleide van de functie

$$f(x) = \sqrt{3x - 4}.$$

Oplossing

De afgeleide van $f(t) = \sqrt{t}$ is $f'(t) = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$

$$\text{dus } f'(x) = \frac{1}{2}(3x - 4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3$$

$$\text{ofwel } f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x - 4}}$$

Raaklijnen

Een lijn l raakt de grafiek van een functie f in een punt A als de lijn voldoet aan de volgende twee voorwaarden:

- lijn l gaat door punt A ;
- de richtingscoëfficiënt van lijn l is gelijk aan de afgeleide van functie f in A .

Voor de vergelijking $y = ax + b$ van een raaklijn in een punt $P(p, q)$ van de grafiek van een functie f geldt $a = f'(p)$.

De waarde van b bereken je vervolgens door p en q in de vergelijking $y = ax + b$ in te vullen.

Voorbeeld

Gegeven de functie $f(x) = 4x\sqrt{x}$.

Toon aan dat lijn $l: y = 6x - 2$ de grafiek van f raakt in het punt $(1, 4)$.

Oplossing

$x = 1$ geeft $y = 6 \cdot 1 - 2 = 4$, dus $(1, 4)$ ligt op l .

$f(x) = 4x^{\frac{1}{2}}$, dus $f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = 6\sqrt{x}$.

$f'(1) = 6\sqrt{1} = 6$, dus de helling van de grafiek is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van l .

Lijn l raakt de grafiek van f in $(1, 4)$.

- 54** Gegeven is de functie $f(x) = 3x + \sqrt{2x + 9}$.
- Laat met een berekening zien dat de lijn $y = 3\frac{1}{3}x + 3$ de grafiek van f raakt in het punt $(0, 3)$.
 - Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(-2\frac{1}{2}, -5\frac{1}{2})$.
 - De lijn $y = 3\frac{1}{4}x + p$ raakt de grafiek van f .
Bereken op algebraïsche wijze de waarde van p .

- 55** De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{12}{0,2x + 1}$

Bereken met behulp van differentiëren de helling van de grafiek van f in het punt $(5, 6)$.

Examenopdrachten

56 **Grafiek**

(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2012 tijdvak 2)

De functie f is gegeven door $f(x) = x^2 + 12x^{-2}$, met $x > 0$.

Op de grafiek van f ligt het punt P met coördinaten $(2, 7)$.

Stel op algebraïsche wijze een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek in P .

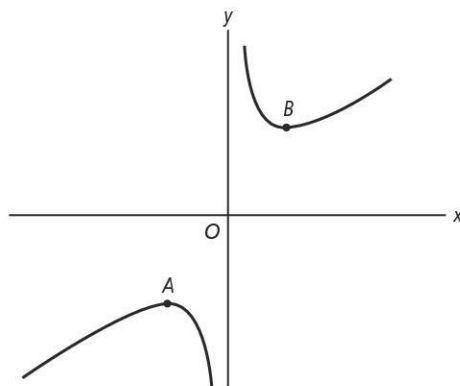
Hint 36

57 De helling*(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2018 tijdvak 1)*De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{2}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{2}x$.Bereken exact voor welke waarden van x de helling van de grafiek van f groter is dan $3\frac{1}{2}$.

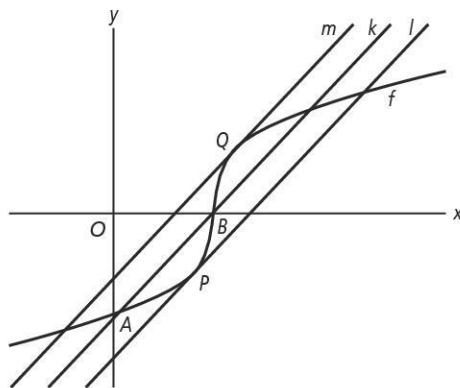
Hint 37

58 De toppen van de grafiek van een gebroken functie*(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2017 tijdvak 2)*De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{2x^2 + 18}{3x}$ De punten A en B zijn de toppen van de grafiek van f .
Bereken exact de coördinaten van A en B .

Hint 38

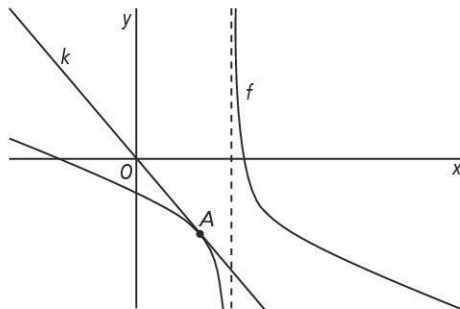
**59 Derde machtswortel***(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2017 tijdvak 1)*De lijnen l en m zijn de twee raaklijnen aan de grafiek van $f(x) = \sqrt[3]{9x - 27}$ die evenwijdig zijn aan lijn k met richtingscoëfficiënt 1. l raakt de grafiek van f in het punt P en m raakt de grafiek van f in het punt Q .Bereken met behulp van differentiëren de x -coördinaten van P en Q . Rond je antwoorden af op twee decimalen.

Hint 39

**60 Raaklijnen door de oorsprong***(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2018 tijdvak 1)*De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{2x-3} - x - 1$.De lijn k raakt de grafiek van f in het punt $A(1, -3)$.Lijn k gaat door de oorsprong.

Bewijs dit met behulp van differentiëren.

Hint 40



Uitdrukken in, als functie schrijven van

Bij de formule $q = -3p + 22$ is q uitgedrukt in p . Een dergelijke formule is handig om bij waarden van p de bijbehorende waarden van q te berekenen.

Door p uit te drukken in q krijg je een formule waarmee je bij waarden van q de bijbehorende waarden van p kunt berekenen.

In plaats van 'druk q uit in p ' zeg je ook wel 'schrijf q als functie van p '.

Voorbeeld

Herleid $(q - 4)(2p + 4) = 8q$ waarbij je p uitdrukt in q .

Oplossing

$$2p + 4 = \frac{8q}{q - 4} \quad (\text{links en rechts : } (q - 4))$$

$$2p = \frac{8q}{q - 4} - 4 \quad (\text{links en rechts } - 4)$$

$$p = \frac{4q}{q - 4} - 2 \quad (\text{links en rechts : } 2)$$

61 Herleid de formules zodat p wordt uitdrukt in q .

a $q = -0,2p + 1,3$

e $13p - 4(q + 2) = pq$

b $3p + 12q = 16 - p$

f $0,3q + 1,2pq - 4,5 = 0$

c $\frac{5}{p} = 3q + 1$

g $15 + 9q = \frac{pq}{2q - 1}$

d $\frac{2p - 3}{8p} = \frac{4q + 5}{7}$

h $\frac{7q - 3p}{p + 8} = \frac{4}{3}$

Substitutie

In een formule kun je een variabele vervangen door een andere formule. Je noemt dit substitueren.

Na het substitueren vereenvoudig je indien mogelijk de ontstane formule.

Voorbeeld

Gegeven zijn de vergelijkingen

$$ab^2 - 3b = -2a \text{ en } b = 3p.$$

Druk a uit in p .

Oplossing

$$a \cdot (3p)^2 - 3 \cdot 3p = -2a \quad (\text{substitutie van } b = 3p)$$

$$9ap^2 - 9p = -2a \quad (\text{vereenvoudigd})$$

$$9ap^2 + 2a = 9p \quad (\text{links en rechts } + 2a \text{ en } + 9p)$$

$$a(9p^2 + 2) = 9p \quad (a \text{ buiten haakjes gehaald})$$

$$a = \frac{9p}{9p^2 + 2} \quad (\text{links en rechts : } (9p^2 + 2))$$

62 Gegeven zijn telkens twee vergelijkingen. Druk a uit in p .

a $a + 3b = 6$ en $b = 8 - 2p$

b $\frac{a}{b} = 10 + 3b$ en $b = 5p + 1$

c $2b + 3ab = 20$ en $b = 6p$

d $b - a = b^2$ en $b = p - 1$

Inverse bewerkingen

Bij het herleiden van formules en vergelijkingen doe je links en rechts van het =-teken hetzelfde. Je gebruikt daarbij vaak inverse bewerkingen.

Voorbeelden van inverse bewerkingen:

$$\begin{array}{llll} + 7 & \text{en} & - 7 & g^{\dots} & \text{en} & g \log(\dots) \\ \times 3 & \text{en} & \times \frac{1}{3} & (\dots)^n & \text{en} & (\dots)^{\frac{1}{n}} \\ (\dots)^2 & \text{en} & \sqrt{\dots} & \frac{1}{\dots} & \text{en} & \frac{1}{\dots} \\ (\dots)^3 & \text{en} & \sqrt[3]{\dots} & & & \end{array}$$

Rekenregels gebruiken

Je kent de rekenregels voor het rekenen met machten en met logaritmen. Voor het rekenen met wortels gelden de regels hiernaast. Soms heb je die rekenregels nodig bij het herleiden van formules en vergelijkingen.

$$\begin{aligned} \sqrt{a \cdot b} &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \\ \sqrt{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \end{aligned}$$

Voorbeeld 1

Gegeven is
 ${}^3\log(p) + 2 \cdot {}^3\log(6) = q + 1$
 Schrijf p als functie van q .

Oplossing

$$\begin{aligned} {}^3\log(p) + {}^3\log(36) &= q + 1 \\ {}^3\log(36p) &= q + 1 \\ 36p &= 3^{q+1} \\ p &= \frac{1}{36} \cdot 3^{q+1} \end{aligned}$$

Voorbeeld 2

Gegeven is $3\sqrt{4a} + \sqrt{9a} - 4 = b$.
 Laat zien dat het verband tussen a en b te herleiden is tot
 $a = \left(\frac{1}{9}b + \frac{4}{9}\right)^2$.

Oplossing

$$\begin{aligned} 3 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{a} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{a} &= b + 4 \\ 6\sqrt{a} + 3\sqrt{a} &= b + 4 \\ 9\sqrt{a} &= b + 4 \\ \sqrt{a} &= \frac{1}{9}b + \frac{4}{9} \\ a &= \left(\frac{1}{9}b + \frac{4}{9}\right)^2 \end{aligned}$$

Voorbeeld 3

Gegeven is $2^a \cdot 8^b = 5$.
 Herleid tot de vorm $b = p \cdot a + q$.

Oplossing

$$\begin{aligned} 2^a \cdot 2^{3b} &= 5 \\ 2^{a+3b} &= 5 \\ a + 3b &= {}^2\log(5) \\ 3b &= -a + {}^2\log(5) \\ b &= -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(5) \end{aligned}$$

63 Schrijf b als functie van a .

$$\begin{array}{ll} \text{a} & {}^2\log(a) + {}^2\log(b) = 3 \\ \text{b} & a + \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(b) = 5 \\ \text{c} & a + 4 = 0,4b^2 \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt[3]{b} \\ \text{d} & 3\sqrt{a} + \sqrt{16a} - 2b = 0 \end{array}$$

64 Laat zien dat formule A te herleiden is tot formule B.

$$\begin{array}{ll} \text{a} & \text{A: } 4q - {}^2\log(p+1) = 3 \quad \text{en} \quad \text{B: } p = 2^{4q-3} - 1 \\ \text{b} & \text{A: } (q-6) \cdot \sqrt[5]{2p} = 1 \quad \text{en} \quad \text{B: } p = \frac{1}{2(q-6)^5} \end{array}$$

65 Herleid tot de vorm $b = a \cdot p + b$.

$$\begin{array}{ll} \text{a} & 9^a \cdot (\sqrt{3})^b = \frac{1}{3} \\ \text{b} & 2^a \cdot 8 = \left(\frac{1}{2}\right)^b \cdot 4^a \\ \text{c} & \frac{1}{2}\sqrt{b} - \sqrt{a+3} = 0 \\ \text{d} & \sqrt{3a} - 2\sqrt{b} = 0 \end{array}$$

Examenopdrachten

66 Schaal van Richter

(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2019 tijdvak 1)

Charles Richter heeft in 1935 een schaal opgesteld die de kracht van een aardbeving in een getal uitdrukt. Dit wordt de schaal van Richter genoemd. De plaats waar de aardbeving ontstaat heet het epicentrum.

Het is mogelijk om op een bepaalde afstand tot het epicentrum de kracht van een aardbeving te bepalen.

Hiervoor wordt de grootte van de beweging van de aardkorst in verticale richting gemeten. Deze verticale uitwijking is de zogeheten amplitude.

Voor de kracht op de schaal van Richter geldt

$$K = \log(A) + 1,6\log(D) - 0,15 \text{ als } D \leq 200.$$

Hierin is K de kracht op de schaal van Richter, A de amplitude in mm en D de afstand tot het epicentrum in km.

Deze formule is te schrijven in de vorm $K = \log(p \cdot A \cdot D^q)$.

Bereken p en q . Geef je eindantwoorden in één decimaal.

Hint 41

67 Diersoorten

(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2010 tijdvak 1)

Uit onderzoek is gebleken dat er een verband bestaat tussen de lengte van diersoorten en het aantal diersoorten met die lengte.

Met de lengte van een diersoort wordt bedoeld de gemiddelde lengte van volwassen dieren van die soort. Het blijkt dat er weinig lange diersoorten zijn en veel korte diersoorten. Uit gegevens die de onderzoeker Dobson verzamelde, blijkt dat bij

benadering de formule $S = \frac{700}{L^2}$ geldt.

Hierin is L de lengte in meters en S het aantal diersoorten met die lengte. Deze formule geldt voor $0,01 \leq L \leq 10$.

- a Het aantal diersoorten van 10 cm lang is veel groter dan het aantal diersoorten van 50 cm lang.

Bereken met behulp van de bovenstaande formule hoeveel maal zo groot.

Hint 42

- b De formule $S = \frac{700}{L^2}$ is met behulp van algebra om te

werken tot de vorm $\log(S) = p + q \cdot \log(L)$.

Bereken op deze manier de waarden van p en q .

Hint 43

68 Speerwerpen*(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2017 tijdvak 1)*

Een bekend onderdeel van de atletiek is het speerwerpen.

De baan van een speer is een deel van een parabool. In deze opgave verwaarlozen we de luchtweerstand, de lengte van de speer en de hoogte waarop de speer wordt losgelaten.

De baan van de speer kan worden beschreven met de volgende formules:

$$h = 0,707 \cdot b \cdot t - 4,91 \cdot t^2 \quad (1)$$

$$d = 0,707 \cdot b \cdot t \quad (2)$$

Hierbij is:

t de tijd die de speer in de lucht is in seconden;

b de beginsnelheid waarmee de speer geworpen wordt in m/s;

h de hoogte van de speer in m op tijdstip t ;

d de horizontaal afgelegde afstand van de speer in m op tijdstip t .

Door in formule (1) h gelijk te stellen aan 0, is uit te rekenen na hoeveel seconden de speer op de grond komt. Hiermee is vervolgens met behulp van formule (2) de totaal horizontaal afgelegde afstand van de speer uit te rekenen.

Een speerwerper gooit een speer met een beginsnelheid van 25 m/s.

- a** Bereken hoe ver de speer volgens de formules gegooid wordt. Geef je antwoord in hele meters nauwkeurig.

Hint 44

Uit formule (2) volgt: $t = \frac{d}{0,707 \cdot b} \quad (3)$

Door formule (3) te substitueren in formule (1) kan worden aangetoond dat

(bij benadering) geldt: $h = d - \frac{9,8}{b^2} \cdot d^2$

- b** Toon dit laatste op algebraïsche wijze aan.

Hint 45

69 Diergemeenschappen in Afrika*(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2009 tijdvak 1)*

Voor dieren in een natuurpark in Oost-Afrika, het Serengeti park, geldt het volgende verband: $\log(W) = 0,075N + 0,4$.

Hierin is W het lichaamsgewicht van een soort in kg en is N het rangnummer van die soort.

Deze formule kan met behulp van algebra worden omgewerkt tot $W = b \cdot g^N$.

Bereken op deze wijze de waarden van b en g . Rond je antwoorden af op één decimaal.

Hint 46

Driehoeken

In elke driehoek zijn de drie hoeken samen 180° .

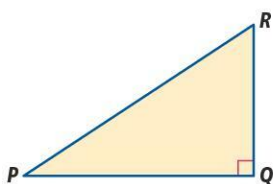
In een rechthoekige driehoek is één hoek 90° .

In een scherphoekige driehoek zijn alle hoeken scherp, ofwel minder dan 90° .

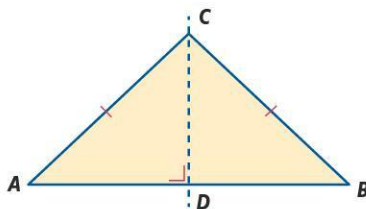
In een stomphoekige driehoek is één hoek stomp, ofwel meer dan 90° .

Een driehoek met twee gelijke zijden noem je een gelijkbenige driehoek. In een gelijkbenige driehoek zijn de twee basishoeken even groot.

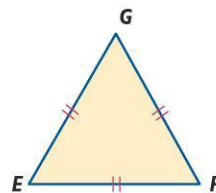
Een driehoek met drie gelijke zijden noem je een gelijkzijdige driehoek. In een gelijkzijdige driehoek zijn de drie hoeken even groot, namelijk elk 60° .



$\angle Q = 90^\circ$
rechthoekige driehoek

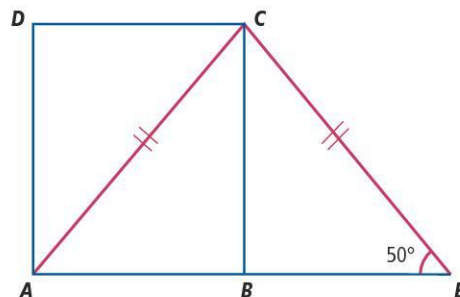


$AC = BC$ en $\angle A = \angle B$
gelijkbenige driehoek



$EF = FG = EG$ en $\angle E = \angle F = \angle G$
gelijkzijdige driehoek

- 70** Vierhoek $ABCD$ is een rechthoek. Op het verlengde van zijde AB ligt punt E zo dat $AC = EC$. Verder is $\angle AEC = 50^\circ$. Bereken $\angle ACD$.

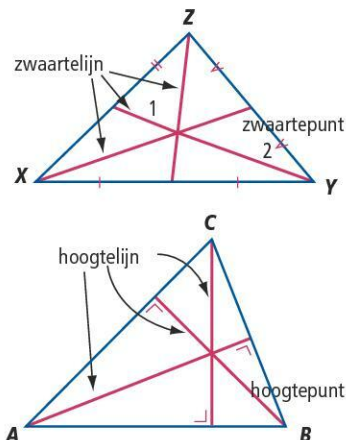


Bijzondere lijnen in driehoeken

De zwaartelijns in een driehoek is het lijnstuk dat een hoekpunt verbindt met het midden van de zijde ertegenover. De drie zwaartelijnen van een driehoek snijden elkaar in het zwaartepunt van de driehoek. Het zwaartepunt verdeelt de zwaartelijnen in stukken die zich verhouden als $2 : 1$.

De hoogtelijn uit een hoekpunt in een driehoek is de loodlijn uit een hoekpunt naar de zijde ertegenover. De drie hoogtelijnen van een driehoek snijden elkaar in het hoogtepunt van de driehoek.

De deellijn van een hoek is de lijn die een hoek in twee gelijke hoeken verdeelt. De drie deellijnen van een driehoek snijden elkaar in één punt. Een deellijn wordt ook bissectrice genoemd.

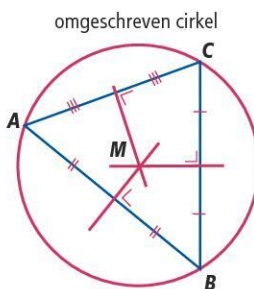
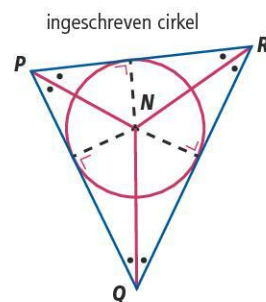


De middelloodlijn van een lijnstuk AB is de lijn die door het midden van het lijnstuk AB gaat en er loodrecht op staat.

De drie middelloodlijnen van een driehoek snijden elkaar in één punt.

De omgeschreven cirkel van een driehoek is de cirkel door de hoekpunten van de driehoek. Het middelpunt M van de cirkel is het snijpunt van de middelloodlijnen van de driehoek.

De ingeschreven cirkel van een driehoek is de cirkel die raakt aan de zijden van de driehoek. Het middelpunt N van die cirkel is het snijpunt van de deellijnen van de driehoek. De straal van de ingeschreven cirkel is gelijk aan de afstand van punt N tot de zijden.



- 71** Gegeven zijn de punten $A(1, 1)$, $B(9, 3)$ en $C(2, 8)$.
- Teken $\triangle ABC$ in een assenstelsel en teken het zwaartepunt Z van de driehoek.
 - Bereken exact de lengte van de zwaartelijn uit punt A en daarmee de exacte lengte van AZ .
 - Teken in een nieuw assenstelsel opnieuw $\triangle ABC$ en teken de omgeschreven cirkel van de driehoek.
 - Teken in een nieuw assenstelsel opnieuw $\triangle ABC$ en teken de ingeschreven cirkel van de driehoek.

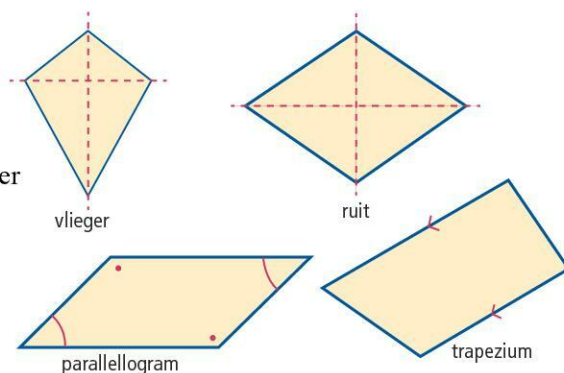
Vierhoeken

Een vierhoek waarvan een diagonaal symmetrieas is, heet een vlieger.

Een vierhoek waarvan beide diagonalen symmetrieassen zijn, heet een ruit.

Een vierhoek die draaisymmetrisch is, heet een parallellogram. Van een parallellogram zijn de tegenover elkaar liggende zijden evenwijdig en even lang.

Een vierhoek waarvan twee zijden evenwijdig lopen, heet een trapezium.



- 72** Zeg van de volgende beweringen of ze waar zijn of niet waar. Licht je antwoord toe.
- Elke ruit is een vlieger, maar een vlieger hoeft geen ruit te zijn.
 - Een rechthoek is een parallellogram waarvan alle vier hoeken even groot zijn.
 - Een ruit waarvan de hoeken recht zijn, is een vierkant.
 - Een trapezium kan alleen een vlieger zijn als het een ruit is.

Berekeningen in driehoeken

Om berekeningen te maken in driehoeken kun je gebruikmaken van:

- gelijkvormige figuren Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze een vergroting (of verkleining) zijn van elkaar. In een gelijkvormige driehoek zijn de overeenkomstige hoeken even groot en er is een vaste verhouding tussen de overeenkomstige zijden. Bij berekeningen met gelijkvormige driehoeken kun je gebruik maken van een verhoudingstabel.

- stelling van Pythagoras:

In een rechthoekige driehoek met langste zijde c geldt:

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ ofwel } c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

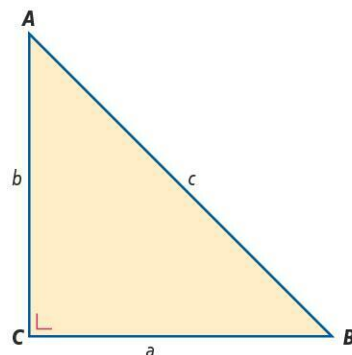
- goniometrische verhoudingen

In een rechthoekige driehoek geldt:

$$\sin(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van hoek } A}{\text{langste zijde}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos(\angle A) = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde van hoek } A}{\text{langste zijde}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van hoek } A}{\text{aanliggende rechthoekszijde van hoek } A} = \frac{a}{b}$$



Voorbeeld

In het trapezium zijn AB en CD evenwijdig en is $\angle DCB = 90^\circ$.

Bereken $\angle CAB$ en de lengten van AD , AC , BD , DS en BS .

Oplossing

- Vierhoek $ABCD$ is een trapezium, dus $AB \parallel CD$ en $\angle ABC = 90^\circ$.

- In $\triangle ABC$ is $\tan(\angle CAB) = \frac{3}{6}$ dus $\angle CAB = 27^\circ$.

- Teken vanuit D een loodlijn op AB . Zie de driehoek onder het trapezium.

Dan geldt $AD = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

- $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} (= 3\sqrt{5})$

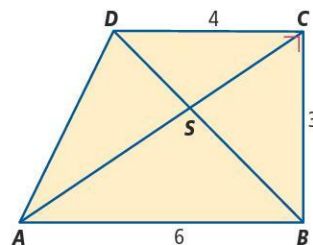
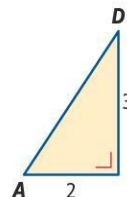
- $BD = \sqrt{BC^2 + DC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

- $\triangle ABS \sim \triangle CDS$ dus maak een verhoudingstabel.

zijden $\triangle ABS$	$AB = 6$	$BS = \dots$
zijden $\triangle CDS$	$CD = 4$	$BS = \dots$

Dus $DS : BS = 4 : 6$ (of $2 : 3$).

Dus is $DS = \frac{4}{10} \cdot DB = \frac{4}{10} \cdot 5 = 2$ en $BS = \frac{6}{10} \cdot DB = \frac{6}{10} \cdot 5 = 3$.



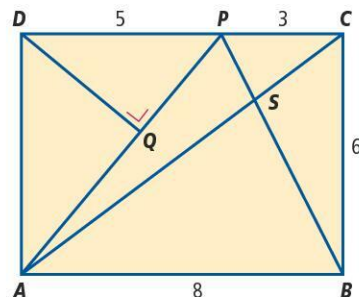
73 Bereken in de figuur van het voorbeeld op de vorige bladzijde:

- de exacte lengte van lijnstuk AS
- de exacte lengte van lijnstuk CS
- $\angle DBA$ afgerond op hele graden
- $\angle BSC$ afgerond op hele graden

74 Gegeven is rechthoek $ABCD$ met $AB = 8$ en $BC = 6$.

Op zijde DC ligt punt P zodat $DP = 5$ en $PC = 3$.

- Toon met een berekening aan dat de exacte lengte van lijnstuk BP gelijk is aan $3\sqrt{5}$.
- Bereken de exacte lengte van lijnstuk AP .
- Bereken exact AS .
- Toon met een berekening aan dat $DQ = \frac{30}{61}\sqrt{61}$.
- Bereken $\angle PAD$. Rond af op hele graden.
- Bereken $\angle DPQ$. Rond af op hele graden.
- Bereken $\angle ASP$. Rond af op hele graden.



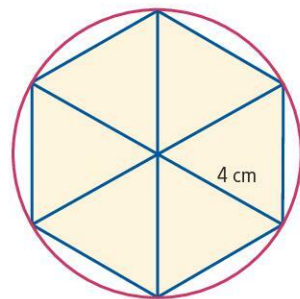
Oppervlakte

Bij het berekenen van de oppervlakte gebruik je de formules:

figuur	oppervlakte A	formule
rechthoek	$A = \text{lengte} \times \text{breedte}$	$A = l \cdot b$
driehoek	$A = \frac{1}{2} \times \text{basis} \times \text{hoogte}$	$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$
vierkant	$A = \text{zijde} \times \text{zijde}$	$A = z^2$
parallellogram	$A = \text{basis} \times \text{hoogte}$	$A = b \cdot h$
cirkel	$A = \pi \times \text{straal} \times \text{straal}$	$A = \pi \cdot r^2$

75 Van een regelmatige zeshoek liggen de hoekpunten op een cirkel met straal 4 cm.

Bereken hoeveel procent van de oppervlakte van de cirkel door de zeshoek wordt bedekt. Rond af op één decimaal.

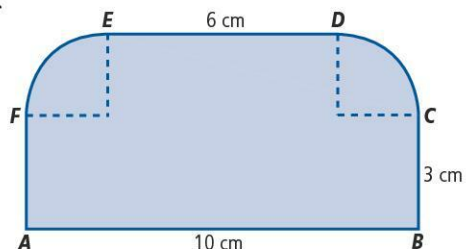


76 Deze opdracht gaat over de figuur naast opdracht 74.

- Bereken de oppervlakte van vierhoek $ABCP$.
- Bereken de oppervlakte van driehoek APC .
- Bereken de oppervlakte van driehoek ABS .
- Bereken de oppervlakte van vierhoek $ASPD$.

77 Deze figuur is ontstaan door van een rechthoek twee hoeken af te ronden.

- Bereken de omtrek van de figuur in cm. Rond je antwoord af op één decimaal.
- Bereken de oppervlakte van de figuur in cm^2 . Rond af op hele cm^2 .



Sinus- en cosinusregel

In elke driehoek geldt de sinusregel: Als α , β en γ de groottes zijn van de hoeken van een driehoek en de lengten van de tegenoverliggende zijden

zijn a , b en c , dan geldt: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

Je kunt de sinusregel alleen gebruiken als je ten minste de lengte van een zijde en de grootte van de tegenoverliggende hoek kent.

In elke driehoek geldt de cosinusregel:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$

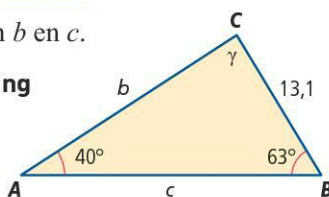
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

Je kunt met de cosinusregel de lengte van een onbekende zijde berekenen als je de lengte van de andere zijden en de grootte van de tegenoverliggende hoek kent. Je kunt met de cosinusregel ook de grootte van de hoeken berekenen als je van een driehoek de lengte van alle drie zijden kent.

Voorbeeld 1

Bereken b en c .

Oplossing



$$\gamma = 180^\circ - 63^\circ - 38^\circ = 79^\circ$$

$$\frac{13,1}{\sin(38^\circ)} = \frac{b}{\sin(63^\circ)} = \frac{c}{\sin(79^\circ)}$$

$$b = \frac{13,1 \cdot \sin(63^\circ)}{\sin(38^\circ)} \approx 19,0$$

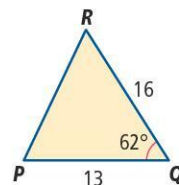
$$c = \frac{13,1 \cdot \sin(79^\circ)}{\sin(38^\circ)} \approx 20,9$$

Voorbeeld 2

Van $\triangle PQR$ is gegeven $QR = 16$, $PQ = 13$ en $\angle Q = 62^\circ$. Bereken PR .

Oplossing

een schets:



$$PR^2 = 16^2 + 13^2 - 2 \cdot 16 \cdot 13 \cdot \cos(62^\circ)$$

$$PR^2 = 229,699\dots$$

$$\text{dus } PR = \sqrt{229,699\dots} \approx 15,2.$$

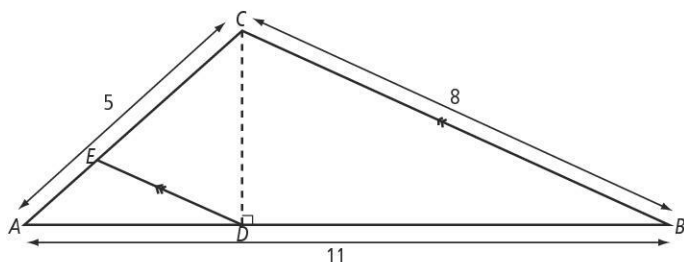
- 78** Bereken de onbekende zijden en hoeken van $\triangle ABC$. Rond lengtes af op één decimaal en hoeken op hele graden.

- a $\alpha = 60^\circ$, $\gamma = 75^\circ$ en $c = 8,2$
- b $\alpha = 45^\circ$, $a = 15$ en $b = 18,3$
- c $\beta = 30^\circ$, $a = 9,3$ en $c = 5,7$
- d $\alpha = 35^\circ$, $\gamma = 100^\circ$ en $b = 12,5$
- e $\angle A = 120^\circ$, $AB = 4,1$ en $AC = 8,3$
- f $\angle A = 120^\circ$, $AB = 4,1$ en $BC = 8,3$

Examenopdrachten

- 79** Hoe lang is DE ?

(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2019 tijdvak 2)



Gegeven is driehoek ABC met $AB = 11$, $BC = 8$ en $AC = 5$. Het punt D ligt op zijde AB , zo dat lijnstuk CD loodrecht op zijde AB staat. Het punt E ligt op zijde AC , zo dat lijnstuk DE evenwijdig is met zijde BC . Bereken algebraïsch de lengte van lijnstuk DE . Geef je eindantwoord in twee decimalen.

Hint 47

- 80** Omvliegen

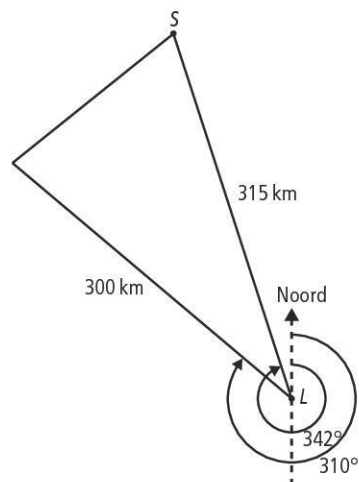
(Ontleend aan CE havo wiskunde B pilot 2013 tijdvak 1)

Een burgervliegtuig mag niet via de kortste route van vliegveld Luxemburg naar Schiphol vliegen omdat er een verboden militaire zone tussen ligt.

De afstand van vliegveld Luxemburg (L) naar vliegveld Schiphol (S) is hemelsbreed 315 km.

In werkelijkheid vliegt men vanaf vliegveld Luxemburg eerst 300 kilometer met een koers van 310° om vervolgens rechtstreeks naar Schiphol te vliegen. Als men rechtstreeks van vliegveld Luxemburg naar vliegveld Schiphol zou mogen vliegen, zou de afstand met een bepaald percentage verkort kunnen worden.

Bereken dit percentage in hele procenten nauwkeurig.



Hint 48

81 Trapezium

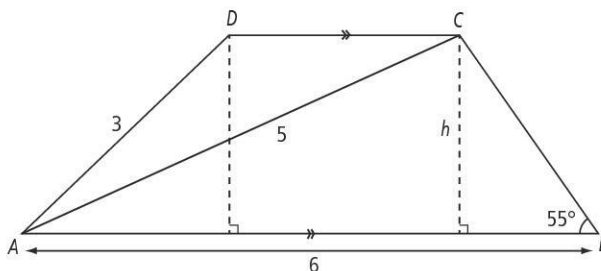
(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2018 tijdvak 2)

Een trapezium is een vierhoek met twee evenwijdige zijden. Gegeven is trapezium $ABCD$ waarvan de zijden AB en CD evenwijdig zijn. Verder geldt: $AB = 6$, $AC = 5$, $AD = 3$, $\angle B = 55^\circ$ en $\angle ACB > 90^\circ$.

De afstand tussen AB en CD , de hoogte van het trapezium, is h .

Afgerond op twee decimalen is $\angle BAC$ gelijk aan $24,41^\circ$.

- a Bereken $\angle BAC$ algebraïsch en rond je eindantwoord af op drie decimalen.



Hint 49

De oppervlakte van het trapezium is te berekenen met de

volgende formule: $\text{oppervlakte} = h \cdot \frac{AB + CD}{2}$

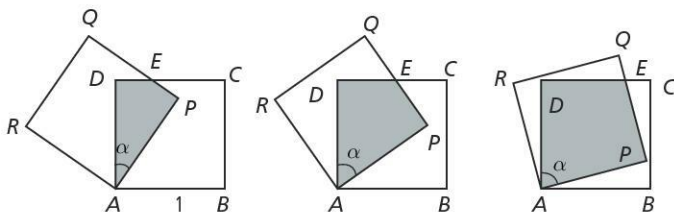
- b Bereken de oppervlakte van het trapezium met behulp van deze formule. Rond je eindantwoord af op één decimaal.

Hint 50

82 Scharnierende vierkanten

(Ontleend aan CE havo wiskunde B pilot 2011 tijdvak 2)

Twee vierkanten $ABCD$ en $APQR$ hebben zijde 1. Vierkant $APQR$ kan scharnieren om punt A en schuift daarbij deels over vierkant $ABCD$. Zo ontstaat een overlapping $APED$.



Hoek DAP wordt α genoemd. Er geldt $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Punt E is het snijpunt van lijnstuk CD en lijnstuk PQ .

De overlapping $APED$ is symmetrisch in lijnstuk AE .

- a Bereken de oppervlakte van $APED$ in het geval dat $\alpha = 50^\circ$. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Hint 51

- b Voor een bepaalde waarde van α is de lengte van lijnstuk BP gelijk aan 0,6. Bereken deze waarde van α in hele graden nauwkeurig.

Hint 52

Vergelijkingen van lijnen

Lijnen kun je op verschillende manieren met vergelijkingen weergeven.

- Een vergelijking van een lijn kun je schrijven in de vorm $ax + by = c$.
- Als de lijn niet evenwijdig is aan de verticale as, kun je de vergelijking ook schrijven als $y = mx + n$ waarbij m de richtingscoëfficiënt en n het startgetal is.
Als voor twee lijnen k en l met richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 geldt $m_1 \cdot m_2 = -1$, dan staan k en l loodrecht op elkaar. Het omgekeerde is ook waar:
Als twee lijnen k en l met richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 loodrecht op elkaar staan, dan geldt $m_1 \cdot m_2 = -1$.
- De vergelijking van een verticale lijn is $x = p$.

Voorbeeld

Gegeven zijn lijn l met vergelijking $y = -1\frac{3}{5}x + 8$ en lijn m met vergelijking $10x - 16y = -3$.
Toon aan dat $l \perp m$.

Oplossing

$10x - 16y = -3$ geeft $-16y = -10x - 3$
ofwel $y = \frac{5}{8}x + \frac{3}{16}$.

De richtingscoëfficiënt van l is $-1\frac{3}{5}$.

De richtingscoëfficiënt van m is $\frac{5}{8}$.
 $-1\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8} = -\frac{8}{5} \cdot \frac{5}{8} = -1$ dus $l \perp m$.

- 83** Gegeven zijn de vier lijnen:
 $l: y = -3x + 5$ $p: 3x + 6y = -5$
 $k: 10x - 5y = 7$ $q: 3x + y = 10$
a Schrijf de vergelijkingen van de lijnen k , p en q in de vorm $y = mx + n$.
b Onderzoek welke lijnen loodrecht op elkaar staan.
- 84** Gegeven is punt $P(4, -3)$ en lijn $l: 8x - 4y = 7$.
a Bereken de richtingscoëfficiënt van l .
b Geef een vergelijking van de loodlijn uit P op l .

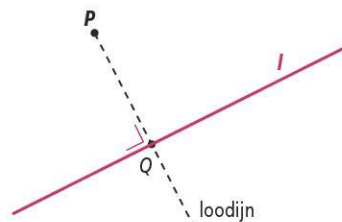
Afstand tot een lijn

Om de afstand $d(P, l)$ van een punt P tot een lijn l te berekenen, stel je eerst een vergelijking op van de loodlijn door punt P op l . Vervolgens bereken je de coördinaten van het snijpunt Q van de loodlijn met lijn l . De lengte van lijnstuk PQ is dan de gevraagde afstand.

De afstand tussen twee punten $A(a_1, a_2)$ en $B(b_1, b_2)$ kun je berekenen met de formule $AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

De afstand tussen twee evenwijdige lijnen is de afstand van een willekeurig punt op de ene lijn tot de andere lijn.

- 85** **a** Bereken exact $d(P, l)$ met $P(0, 9)$ en $l: 2x - 3y = -1$.
b Bereken exact de afstand tussen de evenwijdige lijnen $m: y = 3x - 2$ en $n: 3x - y = -2$.



Hoek tussen twee lijnen

Twee snijdende lijnen maken vier hoeken met elkaar die twee aan twee gelijk zijn. Met de hoek tussen twee lijnen wordt bedoeld de scherpe of rechte hoek die de lijnen met elkaar maken.

Met behulp van de richtingscoëfficiënt bereken je de hoek die elke lijn maakt met een horizontale lijn. Door een schets te maken kun je vervolgens de hoek tussen de twee lijnen berekenen.

Voorbeeld

Bereken de hoek tussen de lijnen $l: y = 2x - 4$ en $m: y = 5 - x$.

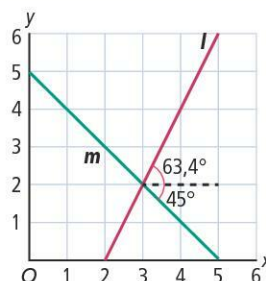
Oplossing

De richtingscoëfficiënten zijn 2 en -1 .

Uit $\tan(\alpha) = 2$ volgt $\alpha \approx 63,4^\circ$ en uit $\tan(\beta) = 1$ volgt $\beta = 45^\circ$.

De stompe hoek tussen l en m is $63,4^\circ + 45^\circ = 108,4^\circ$

dus de hoek tussen l en m is $180^\circ - 108,4^\circ \approx 72^\circ$.



86 Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen.

a $5x - 2y = 10$ en $y = 3x - 9$

b $6y + x = 1$ en $7y - 2x = 4$

c $y = -2x + 8$ en $x = 2y - 8$

Stelsel lineaire vergelijkingen

Bij het oplossen van een stelsel vergelijkingen kun je gebruikmaken van

- herleiden van vergelijkingen
- substitutie

De oplossing van een stelsel lineaire vergelijkingen geeft de coördinaten van het snijpunt van de lijnen die bij de vergelijkingen horen.

Voorbeeld 1

Los op:
$$\begin{cases} 5x - 2y = 8 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Oplossing

$5x - 2y = 8$ herleid je tot $y = 2\frac{1}{2}x - 4$.

$x - y = 1$ herleid je tot $y = x - 1$.

Gelijkstellen: $2\frac{1}{2}x - 4 = x - 1$

$$\begin{aligned} 1\frac{1}{2}x &= 3 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Invullen in $y = x - 1$ geeft $y = 2 - 1 = 1$.

De oplossing is $x = 2$ en $y = 1$.

Voorbeeld 2

Los op:
$$\begin{cases} 2p + 3q = 8 \\ p + q = 1 \end{cases}$$

Oplossing

$p + q = 1$ herleid je tot $p = 1 - q$.

Sustitutie van $p = 1 - q$ in $2p + 3q = 8$ geeft

$$2(1 - q) + 3q = 8$$

$$2 - 2q + 3q = 8$$

$$2 + q = 8 \text{ ofwel } q = 6$$

$$p = 1 - 6 = -5$$

De oplossing is $p = -5$ en $q = 6$.

Je kunt bij het oplossen van een stelsel vergelijkingen uitkomen op een vergelijking van de vorm $0 \cdot x = a$ (of $0 \cdot y = a$).

Als $a = 0$, dan heeft het stelsel oneindig veel oplossingen en vallen de bijbehorende lijnen samen.

Als $a \neq 0$ dan heeft het stelsel géén oplossingen en zijn de bijbehorende lijnen evenwijdig.

$0 \cdot x = 0$
oneindig veel
oplossingen



$0 \cdot x = a$ met $a \neq 0$
géén oplossingen



- 87** Los de stelsels vergelijkingen op.

a
$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 9x - 2y = 13 \end{cases}$$

b
$$\begin{cases} 7a + 3b = -10 \\ a = \frac{1}{2}b - 7 \end{cases}$$

- 88** Gegeven is de functie $f(x) = ax^2 + bx + 2$.
De grafiek van f gaat door de punten $(2, 2)$ en $(-1, 8)$.
Bereken exact de waarden van a en b .

89 Onderzoek het aantal oplossingen bij elk van de stelsels.

a
$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 5(x - 1) = 2(x - y) \end{cases}$$

c
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

b
$$\begin{cases} y = 1\frac{3}{4}x - 7 \\ x = \frac{4}{7}y + 4 \end{cases}$$

d
$$\begin{cases} 4x - 2y = 5 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$$

Vergelijkingen van cirkels

Voor een vergelijking van een cirkel zijn twee notaties gebruikelijk.

De eerste is in de vorm van een middelpuntsvergelijking $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Hierin is (a, b) het middelpunt van de cirkel en is r de straal.

De tweede notatie is in de vorm $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$.

Door twee keer kwadraat afsplitsen toe te passen op $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$ kun je een middelpuntsvergelijking krijgen van de vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Voorbeeld

Gegeven is cirkel c : $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 10$.

Bereken de straal en de coördinaten van het middelpunt van de cirkel.

Oplossing

$$x^2 + y^2 + 8x - 6y = 10$$

$$(x + 4)^2 - 16 + (y - 3)^2 - 9 = 10$$

$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 35$$

De straal van de cirkel is $\sqrt{35}$ en het middelpunt is $(-4, 3)$.

90 Bereken van elke cirkel de straal en de coördinaten van het middelpunt.

a $(x + 4)^2 + y^2 = 25$

b $(x - 12)^2 + y^2 - 8y = 0$

c $x^2 + y^2 + 10x + 4y = 1$

d $x^2 + y^2 - 5x - 7y = 10$

e Waarom is $x^2 + y^2 + 5x - 6y + 16 = 0$ geen vergelijking van een cirkel?

Cirkels en lijnen snijden

Om de coördinaten van de snijpunten van een lijn en een cirkel te berekenen maak je gebruik van substitutie. Je kunt kiezen of je bij de vergelijking van de lijn y in x uitdrukt of x in y uitdrukt.

Voorbeeld

Gegeven is de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 - 14x - 4y + 33 = 0$ en de lijn met vergelijking $x - 2y = 3$. Bereken de coördinaten van de snijpunten van de lijn en de cirkel.

Oplossing

$x - 2y = 3$ geeft $x = 2y + 3$
 $(2y + 3)^2 + y^2 - 14(2y + 3) - 4y + 33 = 0$
 $4y^2 + 12y + 9 + y^2 - 28y - 42 - 4y + 33 = 0$
 $5y^2 - 20y = 0$
 $5y(y - 4) = 0$
 $5y = 0$ of $y - 4 = 0$
 $y = 0$ of $y = 4$
 $y = 0$ geeft $x = 2 \times 0 + 3 = 3$.
 $y = 4$ geeft $x = 2 \times 4 + 3 = 11$.
 De snijpunten zijn $(3, 0)$ en $(11, 4)$.

91 Bereken de coördinaten van de snijpunten van cirkel c en lijn l .

a $c: (x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 40$ en $l: x = -3$

b $c: (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 13$ en $l: x + 5y = 1$

c $c: x^2 + y^2 = 9$ en $l: y = x + 3$

92 Gegeven zijn de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$ en de lijn met vergelijking $y = 2x + 3$.

Toon met een berekening aan dat de lijn en de cirkel geen punt gemeenschappelijk hebben.

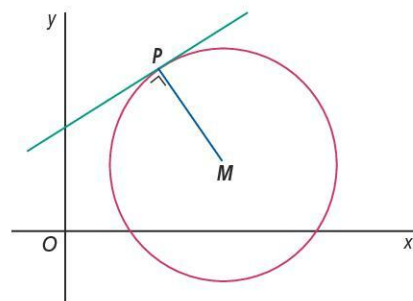
Een raaklijn aan een cirkel

Als een lijn l en een cirkel c met middelpunt M slechts één punt R gemeenschappelijk hebben, dan is l een raaklijn aan c en is R een raakpunt.

De raaklijn aan een cirkel in R staat loodrecht op de lijn door M en R .

Kort gezegd: de raaklijn staat loodrecht op de straal.

Deze eigenschap kun je gebruiken om de vergelijking van de raaklijn in een gegeven punt van een cirkel te vinden.



Voorbeeld

Gegeven is cirkel c met vergelijking $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 29$ en punt $P(2, 3)$ op de cirkel. Stel een vergelijking op van de raaklijn in P aan cirkel c .

Oplossing

Het middelpunt M van de cirkel is $(-3, 1)$. De lijn MP heeft richtingscoëfficiënt $\frac{3-1}{2-(-3)} = \frac{2}{5}$.

De raaklijn in P heeft richtingscoëfficiënt $-2\frac{1}{2}$ want $\frac{2}{5} \cdot -2\frac{1}{2} = -1$.

$x = 2$ en $y = 3$ invullen bij $y = -2\frac{1}{2}x + b$ geeft $3 = -2\frac{1}{2} \times 2 + b$ ofwel $b = 8$.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = -2\frac{1}{2}x + 8$.

Om te controleren of een gegeven lijn een gegeven cirkel raakt, kun je ook gebruik maken van de eigenschap dat een kwadratische vergelijking één oplossing heeft als de discriminant $D = b^2 - 4ac$ gelijk is aan 0.

Voorbeeld

Gegeven is de cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 45 = 0$ en de lijn $l: y = ax$. Bereken exact voor welke waarden van a lijn l cirkel c raakt.

Oplossing

$$x^2 + (ax)^2 - 4x - 8ax + 45 = 0$$

$$(a^2 + 1)x^2 + (-8a - 4)x + 45 = 0$$

$$D = (-8a - 4)^2 - 4 \cdot (a^2 + 1) \cdot 45 = -116a^2 + 224a + 16$$

$$D = 0 \text{ als } -116a^2 + 224a + 16 = 0$$

De abc -formule geeft vervolgens $a = 2$ of $a = -\frac{2}{29}$

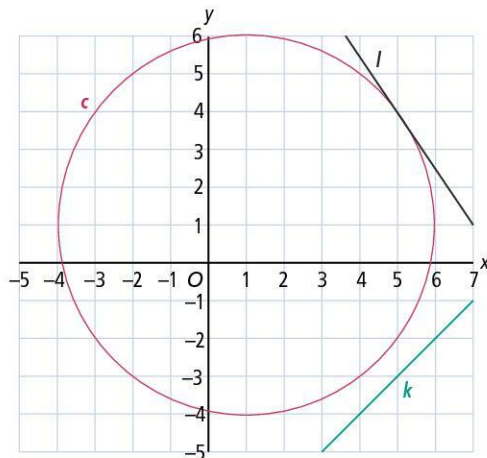
- 93** Stel een vergelijking op van de raaklijn aan c in het punt P op de cirkel.

a $c: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$ en $P(-1, 2)$

b $c: x^2 + y^2 - 10x - 4y + 20 = 0$ en $P(5, 8)$

- 94** Getekend zijn cirkel $c: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$ en lijn l met vergelijking $3x + 2y = 23$. De lijn lijkt de cirkel te raken. Ga met een berekening na of lijn l cirkel c raakt, snijdt of er geen enkel gemeenschappelijk punt mee heeft.

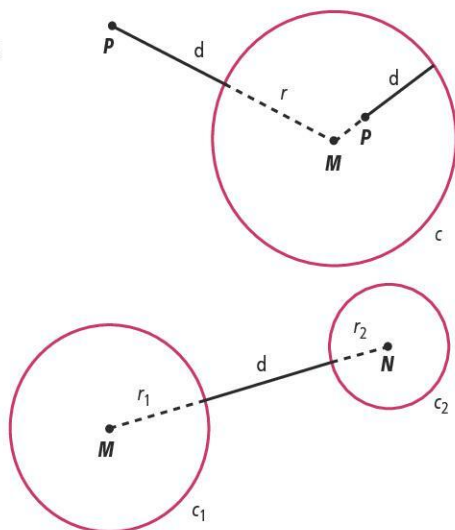
- 95** In de tekening van opdracht 94 zie je ook nog lijn k met vergelijking $x - y = 8$. Cirkel c wordt vergroot zodat de vergrote cirkel de lijn k raakt. Het middelpunt van de cirkel verandert daarbij niet. Bereken exact de straal van de vergrote cirkel.



- 96** Gegeven is cirkel c met vergelijking $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 20$ en lijn l met vergelijking $y = ax$. Bereken de waarden van a waarvoor lijn l cirkel c raakt.

Afstand van een punt tot een cirkel en tussen twee cirkels

- De afstand d van een punt P tot een cirkel met middelpunt M en straal r is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk van dat punt met de cirkel.
 $d = PM - r$ als P buiten de cirkel ligt;
 $d = r - PM$ als P binnen de cirkel ligt.
- De afstand tussen twee cirkels is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen die twee cirkels.
 $d = MN - r_1 - r_2$ als alle punten van cirkel c_2 buiten cirkel c_1 liggen;
 $d = r_1 - MN - r_2$ als alle punten van cirkel c_2 binnen cirkel c_1 liggen.



97 Bereken exact de afstand van punt Q tot cirkel c .

a $Q(2, 10)$ en $c: (x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 20$

b $Q(9, 8)$ en $c: x^2 + y^2 - 2x - 8y + 12 = 0$

98 De cirkels c_1 en c_2 zijn gegeven door de vergelijkingen:

$x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ en $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 8$.

Bereken exact de afstand tussen de cirkels c_1 en c_2 .

Afstand van een lijn tot een cirkel

Voor de afstand tussen een lijn l en een cirkel c stel je eerst de vergelijking op van de loodlijn m uit het middelpunt M van cirkel c op lijn l . Vervolgens bereken je de coördinaten van het snijpunt P van l en m . De gevraagde afstand is de lengte van het lijnstuk PM min de straal van de cirkel.

Voorbeeld

Gegeven zijn cirkel $c: (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$ en lijn $l: y = -x + 5$.

Bereken de afstand tussen lijn l en cirkel c .

Oplossing

Het middelpunt M van de cirkel is $(1, -2)$.

De loodlijn m op l door M heeft richtingscoëfficiënt 1, want $1 \times -1 = -1$.

$y = x + b$ door $(1, -2)$ geeft $m: y = x - 3$.

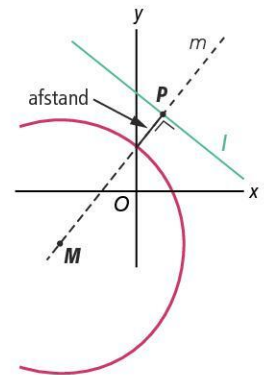
m snijden met l geeft $x - 3 = -x + 5$.

$2x = 8$ dus $x = 4$ en $y = 4 - 3 = 1$.

Het snijpunt is $P(4, 1)$.

$MP = \sqrt{(4 - 1)^2 + (1 - (-2))^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ en de straal van c is $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

De gevraagde afstand is $3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

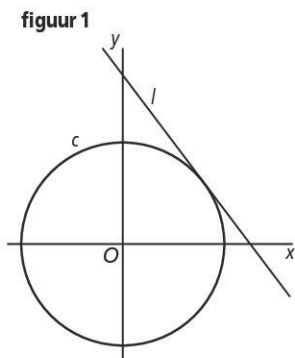
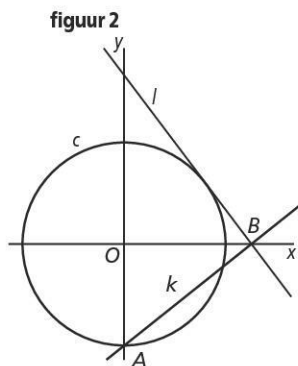


99 Bereken exact de afstand tussen de cirkel c en de lijn l .

a $c: x^2 + y^2 = 20$ en $l: x + 2y = 15$

b $c: (x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 20$ en $l: y = \frac{1}{2}x - 7\frac{1}{2}$

Examenopdrachten



100 Cirkel en lijn

(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2017 tijdvak 1)

De cirkel c en de lijn l worden gegeven door $c: x^2 + y^2 = 9$

en $l: y = -\frac{4}{3}x + 5$. Zie figuur 1.

- a** Toon aan dat l raakt aan c .

Hint 53

Cirkel c snijdt de negatieve y -as in het punt A . Lijn l snijdt de x -as in het punt B . De lijn k is de lijn door A en B .

Zie figuur 2. Lijnen k en l lijken elkaar loodrecht te snijden.

- b** Onderzoek of dit het geval is.

Hint 54

101 Afstand 5

(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2018 tijdvak 1)

De lijn l is gegeven door de vergelijking $y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$.

Verder is gegeven het punt $P(6, 1)$.

De afstand tussen l en P is 5.

- a** Bewijs dit.

Hint 55

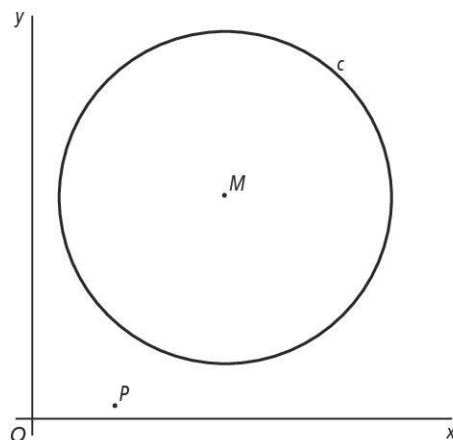
De cirkel c met middelpunt M is gegeven door $x^2 + y^2 - 28x - 32y = -308$. In de figuur zijn punt P en cirkel c met middelpunt M weergegeven.

De afstand tussen c en P is ook 5.

De afstand tussen M en P is groter dan de afstand tussen M en de x -as.

- b** Bereken exact het verschil tussen deze twee afstanden.

Hint 56



102 Rakende cirkels

(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2017 tijdvak 2)

De cirkel c met middelpunt R is gegeven door $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 49$ en de cirkel d met middelpunt S is gegeven door

$$(x - 14)^2 + (y - 8)^2 = 16.$$

Een derde cirkel e , met middelpunt T op de x -as, raakt aan beide cirkels.

Verder liggen c en d buiten e .

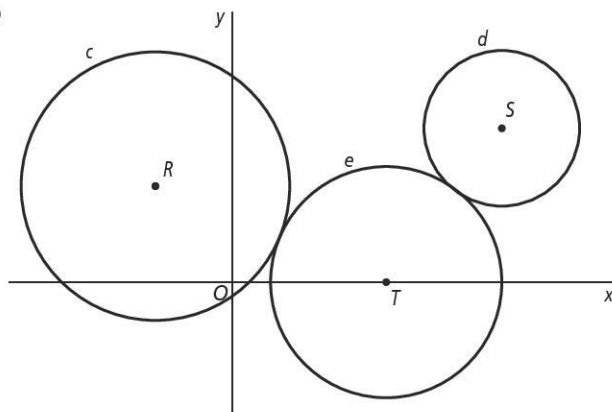
De x -coördinaat van T noemen we p , dus $OT = p$.

- a Er geldt: de afstand van R tot T is gelijk aan $\sqrt{p^2 + 8p + 41}$.

Bewijs dit.

- b De lijn door R en T gaat door het raakpunt van de cirkels c en e . Bovendien gaat de lijn door S en T door het raakpunt van de cirkels d en e . Verder is de afstand van S tot T gelijk aan $\sqrt{p^2 - 28p + 260}$.

Bereken de straal van cirkel e .



Hint 57

Hint 58

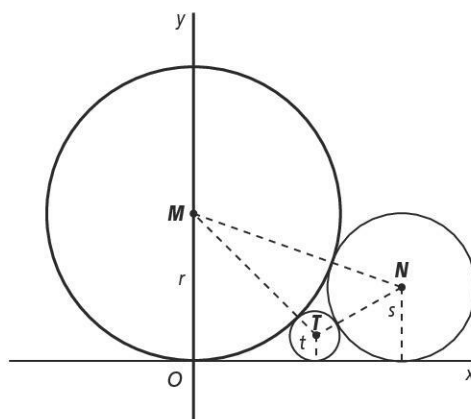
103 Drie cirkels

(Ontleend aan CE havo wiskunde B pilot 2012 tijdvak 2)

In de figuur zijn in een assenstelsel drie cirkels getekend. De cirkels raken elkaar en bovendien raken ze alle drie de x -as.

De linkercirkel heeft middelpunt M en straal $r = 9$. Punt M ligt op de y -as. De middelste cirkel heeft middelpunt T en straal $t = 1$. De rechtercirkel heeft middelpunt N en straal $s = 2\frac{1}{4}$.

- a Bereken $\angle MTN$. Geef je antwoord in een geheel aantal graden.
- b Stel een vergelijking op van de lijn door M en T .



Hint 59

Hint 60

- 1 Welke coördinaten heeft punt A ?
- 2 Wat is een geschikte substitutie voor het oplossen van $\left(\frac{1}{2}x - 2\right)^3 = \frac{1}{2}x - 2$?
- 3 Maak een schets van het vooraanzicht en gebruik de stelling van Pythagoras.
- 4 Het hoeft niet algebraïsch, dus het mag met de rekenmachine. Hoe kun je hier je rekenmachine gebruiken?
- 5 Los $I \geq 30$ en $h \geq 20$ op met je rekenmachine. Lees nu de vraag nog eens.
- 6 Er wordt niet naar een algebraïsche of exacte oplossing gevraagd, dus de bijbehorende vergelijking mag je met je rekenmachine oplossen. Vergeet niet te beschrijven hoe je daarbij je rekenmachine gebruikt hebt.
- 7 Welke termen kun je bij het oplossen samennemen?
- 8 Welke vergelijking moet je oplossen om de x -coördinaat van punt A te vinden?
- 9 Druk zowel OA als AB uit in b en druk vervolgens de oppervlakte uit in b . Welk gegeven heb je nog nodig om te kunnen stellen dat de oppervlakte van $OABC$ groter is dan 1?
- 10 Welke vergelijking moet je oplossen?
- 11 Van een rechte lijn met twee gegeven punten kun je de richtingscoëfficiënt berekenen. Welke van de waarden p en q bereken je daarmee?
- 12 Werk eerst in de formule van Siri de haakjes weg. Substitueer de formule voor de dichtheid in die van Siri. Bedenk hoe je een breuk waarvan de noemer zelf ook een breuk is kunt vereenvoudigen.
- 13 Welke vergelijking moet je oplossen?
- 14 Welke bewerkingen heb je hier nodig?
- 15 Welke coördinaten heeft het snijpunt van de grafiek van f met de x -as?
- 16 Welke formules voer je in op de rekenmachine?
- 17 Hoe zou je een kwadratische formule met gegeven nulpunten met haakjes kunnen schrijven?

- 18** De bijbehorende vergelijking is van de vorm $A \times B = 0$. Welke twee vergelijkingen levert dit op?
- 19** Behalve $x = 0$ kan f_c hier maar één ander nulpunt hebben. Wat kun je zeggen over de discriminant D van een tweedegraads vergelijking met maar één oplossing?
- 20** De vergelijking $x\sqrt{x+2} = x^2$ is van de vorm $A \times B = A \times C$. Welke twee vergelijkingen levert dit op?
- 21** Kun je de vergelijking $4 - 2^{0,3x-2} = 2$ herleiden tot de vorm $2^a = 2^b$?
- 22** Welke gegevens heb je nodig om een vergelijking van lijn PQ op te stellen?
- 23** Hoe verandert het functievoorschrift als je de grafiek van een functie 20 naar links en 10 omhoog verschuift?
- 24** Voor welke waarde van b heeft de grafiek van $f(b) = {}^2\log(b)$ een verticale asymptoot?
- 25** Van welk punt van de grafiek van f is P het beeldpunt na de verschuiving?
- 26** Bij een jaarlijkse groeifactor g en een verdubbelingstijd van 11 jaar hoort de vergelijking $g^{11} = 2$. Hoe bereken je hiermee het jaarlijkse groeipercentage?
- 27** Welke groeifactor hoort bij een toename van 3,4%? En welke vergelijking kun je dus bij dit probleem opstellen?
- 28** Bij een stijging van 15 °C neemt de overlevingstijd met een factor 8 toe. Met welke groeifactor neemt de overlevingstijd dan per graad Celsius toe?
- 29** De vergelijking $2 + 3 \sin\left(\pi\left(x + \frac{1}{4}\right)\right) = \frac{7}{2}$ is te herleiden tot de vorm $\sin(p) = q$. Wat is p en wat is q in dit geval?
- 30** Welke waarde kan $\pi\left(x + \frac{1}{4}\right)$ hebben in een top van de grafiek van f ?
- 31** De vergelijking $1 + 2 \cos\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) = 0$ is te herleiden tot de vorm $\cos(p) = q$. Wat is p en wat is q in dit geval?
- 32** Voer functie g in op je rekenmachine en gebruik de toppen om de amplitude, de evenwichtsstand en de periode te vinden.
- 33** Wat is de periode van f ?

- 34** Bereken de x -coördinaat van A . Hoe kun je met de gegeven 75° de richtingscoëfficiënt van lijn AB vinden?
- 35** Waarom moet je voor a hier een negatieve waarde kiezen?
- 36** Hoe gebruik je $f'(x)$ om de richtingscoëfficiënt van de raaklijn te berekenen?
- 37** Los op $f'(x) = 3\frac{1}{2}$. Hoe bepaal je vervolgens voor welke waarden van x geldt $f'(x) > 3\frac{1}{2}$?
- 38** Hoe kun je het functievoorschrift splitsen om te kunnen differentiëren?
- 39** Welke waarde moet $f'(x)$ hebben?
- 40** Welke waarde moet $f'(1)$ hebben?
- 41** Hoe kun je $-0,15$ als een logaritme met grondtal 10 schrijven?
- 42** Let op de eenheden van de variabelen.
- 43** Neem links en rechts de logaritme. Welke regenregels heb je nodig om $\log\left(\frac{700}{L^2}\right)$ om te werken naar de vorm $p + q \cdot \log(L)$?
- 44** Vul eerst $b = 25$ in en los t op uit vergelijking (1).
- 45** Waar moet je haakjes plaatsen bij de substitutie?
- 46** Wat is de inverse bewerking van $\log$?
- 47** Welke gelijkvormige driehoeken kun je hier gebruiken?
- 48** Van de driehoek zijn twee zijden gegeven. Hoe groot is de ingesloten hoek? En hoe bereken je vervolgens de onbekende zijde van die driehoek?
- 49** Welke regel pas je toe in $\triangle ABC$, de sinusregel of de cosinusregel?
- 50** Welke lengten moet je eerst berekenen om de lengte van lijnstuk CD te vinden?
- 51** De vlieger $APED$ bestaat uit twee rechthoekige driehoeken. Hoe lang zijn de rechthoekszijden van deze driehoeken?

- 52** Van $\triangle ABP$ zijn de lengten van de zijden bekend.
Hoe bereken je dan de hoeken van de driehoek?
- 53** Welke eis moet je stellen na substitutie van de vergelijking van de lijn in die van de cirkel?
- 54** Hoe toon je aan dat twee lijnen elkaar loodrecht snijden?
- 55** Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van de loodlijn uit P op l ?
- 56** Hoe bereken je de afstand MP ?
- 57** Wat zijn de coördinaten van R ?
- 58** Waaruit blijkt dat $RT = r_c + r_e$ en $ST = r_d + r_e$?
- 59** Hoe bereken je een hoek van een driehoek als je de lengte van de drie zijden kent?
- 60** Hoe kun je de afstand MT en de straal t gebruiken om de x -coördinaat van punt T te berekenen?

Als in een examen een van de woorden uit onderstaande lijst wordt gebruikt, geldt de betekenis die hieraan in deze lijst is gegeven.

Algebraïsch/op algebraïsche wijze	Zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine; tussenantwoorden en het eindantwoord mogen benaderd opgeschreven worden.
Exact/op exacte wijze	Zonder gebruik te maken van specifieke opties* van de grafische rekenmachine; tussenantwoorden en het eindantwoord mogen niet benaderd opgeschreven worden. * Als bijvoorbeeld gevraagd wordt de ongelijkheid $\frac{5}{x} < x$ exact op te lossen, wordt verwacht dat de gelijkheid $\frac{5}{x} = x$ exact wordt opgelost. <i>De tekens in de oplossing van de ongelijkheid hoeven niet verantwoord te worden.</i>
Aantonen dat/laten zien dat	Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.
Afleiden van bijvoorbeeld een formule of een eenheid	Het geven van een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van de formule of eenheid volgt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. Tenzij anders aangegeven, geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.
Bepalen	Het gevraagde vaststellen en/of uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Beredeneren, uitleggen	Het geven van een uitwerking waarin de denkstappen staan, waaruit het gestelde/gevraagde blijkt.
Berekenen	Het gevraagde uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Bewijzen (dat)	Het geven van een redenering en/of exacte berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. Het gestelde controleren doormiddel van een of meer voorbeelden voldoet niet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt.
Herleiden (van een formule)	Een formule stap voor stap herschrijven tot deze in de gevraagde vorm staat, zonder gebruik te maken van de specifieke opties van de grafische rekenmachine.
Noemen (aangeven wat, welke, wanneer, hoeveel)	Een eindantwoord geven. Een toelichting is niet vereist, tenzij anders is aangegeven.

Onderzoeken of	<p>Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de (on)juistheid van het gestelde blijkt. Het antwoord moet worden afgesloten met een conclusie.</p> <p>Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt.</p>
Oplossen	<p>Het bepalen van de waarden van een of meer onbekenden die voldoen aan de gegeven vergelijking of ongelijkheid.</p> <p>Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.</p>
Schetsen	<p>Het geven van een grafische voorstelling die de voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen bevat.</p>
Tekenen	<p>Het geven van een grafische voorstelling die de voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen bevat en voldoende nauwkeurig is. In het geval van een grafiek moet een assenstelsel met schaalverdeling zijn weergegeven.</p>



Meer oefenen 172

In ieder hoofdstuk wordt bij enkele opdrachten extra oefening aangeboden. In de extra oefeningen wordt in het algemeen hetzelfde type opdracht gegeven maar met andere getallen.

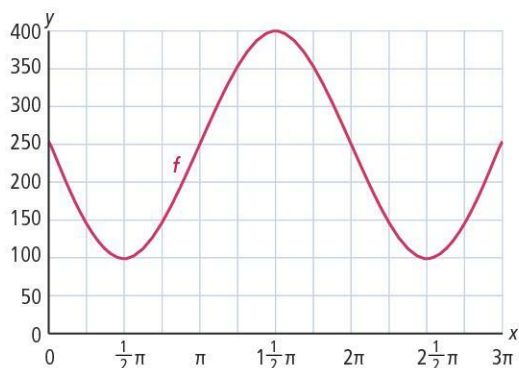
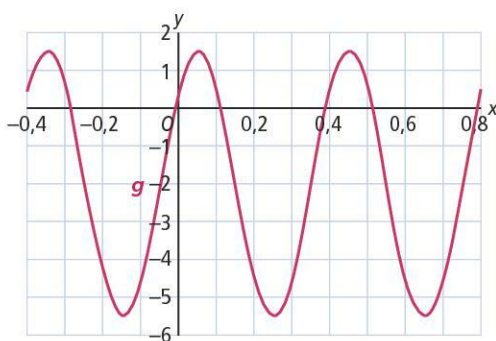
Oefenproefwerken 178

Bij ieder hoofdstuk vind je hier een oefenproefwerk. Dit oefenproefwerk kun je gebruiken om je voor te bereiden op het echte proefwerk. De oefenproefwerken zijn in het algemeen wat langer dan een proefwerk dat je in een les van 45 of 50 minuten moet maken.

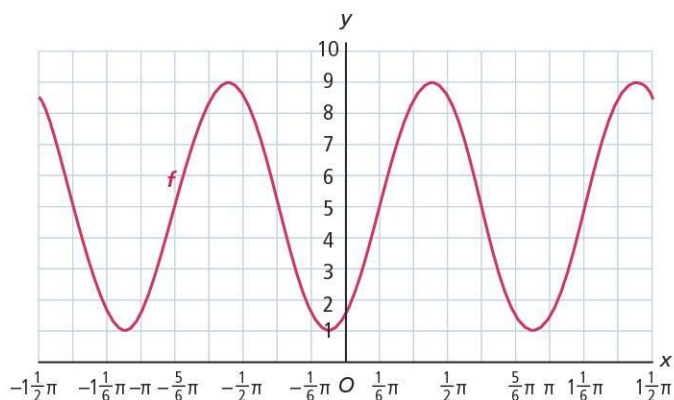
In een proefwerk komen verschillende soorten opdrachten voor:

- opdrachten waarmee getoetst wordt of je de vaardigheden van het hoofdstuk beheerst;
- opdrachten waarmee getoetst wordt of je de vaardigheden kunt toepassen binnen een grotere wiskundige opdracht of binnen een context of binnen een situatie die meer denkstappen vraagt en dus meer inzicht.





- 4 Geef bij elk van de grafieken hierboven een passend functievoorschrift.



- 5 De sinusoidale is de grafiek van een functie $f(x) = 5 + 4\sin\left(2\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)\right)$.

In de grafiek zie je drie punten waarin de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.

- Welk van die punten is gebruikt bij het gegeven functievoorschrift?
- Geef twee functievoorschriften, waarbij je uitgaat van de andere twee punten.
- Het functievoorschrift voor de grafiek is ook te schrijven als $f(x) = d + a\cos(b(x - c))$.
Geef voor de grafiek twee functievoorschriften die geschreven zijn als cosinusfunctie.

- 15 Los op het interval $[-\pi, 2\pi]$ exact op.

- | | |
|----------------------------------|------------------------------------|
| a $4\cos(x) = 2\sqrt{3}$ | d $2 + \sin(x) = 3$ |
| b $\cos(x) + 1 = 0$ | e $-4\sin(x) + 2\sqrt{2} = 0$ |
| c $3\cos(x) - 4 = -2\frac{1}{2}$ | f $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ |

- 17** Los exact op.
- a** $\cos(x) - 1 = 0$ **c** $2\cos(x) + \sqrt{3} = 0$
b $2\sin(x) = \sqrt{2}$ **d** $6\sin(x) = -3$
- 21** Los op het gegeven interval exact op.
- a** $\cos\left(3\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right) = 1$ op $\left[0, 1\frac{1}{2}\pi\right]$
b $2\sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) = \sqrt{2}$ op $[-\pi, \pi]$
c $3 + \cos\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) = 2\frac{1}{2}$ op $[0, 4\pi]$
d $2 - \cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 1\frac{1}{2}$ op $[-2\pi, 2\pi]$
e $2\sin\left(\frac{1}{2}\pi(x + 1)\right) = 1$ op $[0, 10]$
f $3 - \frac{1}{3}\sin(4x) = 2\frac{2}{3}$ op $[-\pi, \pi]$
- 22** Los op het gegeven interval op. Rond af op twee decimalen.
- a** $4\cos(0, 25x) = 3,2$ op $[0, 12]$
b $12 - 7,5\sin(x) = 5,5$ op $[2, 8]$
c $-305\sin(1,5(x + 0,75)) + 120 = 250$ op $[0, 8]$
d $1,25 - 0,32\cos(50(x + 10)) = 1$ op $[0; 0,2]$
e $\pi\sin(\pi x - 0,3) = 2$ op $[50, 52]$
- 23** Los op het gegeven interval exact op.
- a** $\cos(2x) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 0$ op $[0, \pi]$
b $\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \cdot \sin(\pi x) = 0$ op $[-2, 2]$
c $2\cos^2(x) + \sqrt{2}\cos(x) = 0$ op $[0, 2\pi]$
d $\left(2\sin\left(3\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right) + 1\right) \cdot 3\cos(x) = 0$ op $[0, \pi]$
- 28** Los op het gegeven interval exact op.
- a** $2\sin(x) - \sqrt{3} \geq 0$ op $[0, 3\pi]$
b $8 - \sin(x + \pi) \leq 7\frac{1}{2}$ op $[-\pi, 2\pi]$
c $\cos(\pi x) < -\frac{1}{2}$ op $[-1, 1]$
d $4\sin\left(\frac{1}{10}\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right) \geq -2\sqrt{2}$ op $[0, 30\pi]$

- 3** a Stel een vergelijking op van de lijn m door het punt $P(-5, 4)$ loodrecht op lijn n : $5x + 2y - 8 = 0$.
 b Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van lijnstuk AB met $A(5, 5)$ en $B(1, -3)$.
- 7** a Gegeven zijn punt $R(5, -9)$ en lijn n : $y = \frac{5}{12}x + 3$.
 Bereken exact de afstand van punt R tot n .
 b Gegeven zijn punt $S(2, -3)$ en lijn m : $3x - 2y + 1 = 0$.
 Bereken exact de afstand van punt S tot m .
- 10** Gegeven zijn de lijnen l : $2x + 3y = 6$ en m : $2x - 6y = 9$.
 a Schets de lijnen in een assenstelsel.
 b Bereken de grootte van de hoek die l en m met elkaar maken. Rond af op hele graden.
- 14** Gegeven zijn de punten $A(1, 4)$, $B(5, 2)$ en $C(-1, 0)$.
 Cirkel c heeft A als middelpunt en gaat door B .
 a Stel de middelpuntsvergelijking van c op.
 b Toon met een berekening aan dat C op c ligt.
 c Cirkel d gaat door B en heeft als middelpunt het midden van lijnstuk BC .
 Stel de middelpuntsvergelijking van d op.
 d Toon aan dat d ook door de punten A en C gaat.
 e Geef de coördinaten van het middelpunt en de straal van cirkel e met vergelijking $(x - 3)^2 + (y + 18)^2 = 50$.
- 18** Herleid tot de middelpuntsvergelijking en geef de coördinaten van het middelpunt en de straal van de cirkel.
 a $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 3 = 0$
 b $x^2 + y^2 + x - 5y + 2\frac{1}{2} = 0$
 c $x^2 + y^2 = 80x + 18y$
- 21** Bereken de coördinaten van de snijpunten van cirkel c en lijn l .
 a c : $x^2 + y^2 = 10$ en l : $y = -2x - 5$
 b c : $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ en l : $y = \frac{1}{3}x + 2$
 c c : $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 8$ en l : $x - 5y + 24 = 0$

- 25** Gegeven is cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 - 6x = 11$.
- Toon aan dat punt $A(3, \sqrt{20})$ op c ligt.
 - Stel een vergelijking op van de raaklijn l in A aan c .
 - Stel een vergelijking op van de raaklijn in punt $B(-1, -2)$ aan c .

- 30** Gegeven is cirkel $c: x^2 + y^2 - 4x + 2y = 3$.
- Onderzoek of punt $A(1, 2)$ binnen of buiten c ligt en bereken $d(A, c)$ exact.
 - Bereken exact de afstand van punt $B(1, 1)$ tot c .
 - Bereken exact de afstand van punt $P(15, 2)$ tot cirkel $d: (x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 40$.

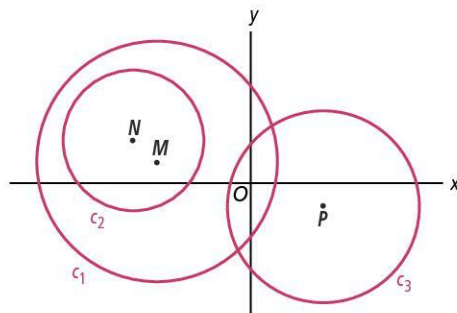
- 32** Gegeven zijn de cirkels:

$c_1: x^2 + y^2 + 8x - 2y = 8$ met middelpunt M ,

$c_2: x^2 + y^2 + 10x - 4y + 20 = 0$ met middelpunt N en

$c_3: (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$ met middelpunt P .

- Bereken exact $d(c_2, c_3)$.
- Hoe groot is de afstand tussen de cirkels c_1 en c_3 ?
- Bereken exact $d(c_1, c_2)$.



- 34** Bereken exact $d(l, c)$.
- $l: 2x + y = 25$ en $c: x^2 + y^2 = 20$
 - $l: y = x + 6$ en $c: (x - 8)^2 + y^2 = 32$
 - $l: x - 2y = 6$ en $c: (x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 5$
- 37** Stel een vergelijking op van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$.
- $A(-5, 7)$, $B(3, 1)$ en $C(1, -5)$
 - $A(3, 9)$, $B(-1, 11)$ en $C(1, 5)$
- 40** Van $\triangle ABC$ is gegeven $\angle A = 44^\circ$, $\angle B = 70^\circ$ en $AC = 5$.
- Schets $\triangle ABC$ en zet de gegevens erbij.
 - Bereken in één decimaal de straal van de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$.

A

a	$1\frac{1}{2}$	7	12	35
b	$4\frac{1}{2}$	21	36	105

B

a	2	4	5	15
b	50	25	20	$6\frac{2}{3}$

C

a	6	9	18	33
b	-14	-21	-42	-77

- 3** a Ga voor elke tabel na of b recht evenredig is met a .
b Welke evenredigheidsconstanten horen bij de evenredigheden die je in opdracht a hebt gevonden?
- 6** Lijn l gaat door $(-5, 10)$ en $(10, -20)$,
lijn m gaat door $(3, 5; 4, 5)$ en $(8, 5; 4, 9)$ en
lijn n gaat door $(80, 16)$ en $(90, 18)$.
a Geef de richtingscoëfficiënt en het startgetal van elk van de lijnen l , m en n .
b Welke van de lijnen horen bij een recht evenredig verband?
c Geef de evenredigheidsconstante van de recht evenredige verbanden.

- 10** Voor de variabelen in de tabellen geldt:
 q is omgekeerd evenredig met p en
 b is omgekeerd evenredig met a
a Vul de open plaatsen in.
b Geef bij elk van de tabellen drie mogelijke formules.

p	0,6	...	3	6	64
q	20	10	...	...	...

a	1	3	5	10	25
b	...	...	45	...	...

- 13** De variabele K is omgekeerd evenredig met de vijfde macht van de variabele q .
a Geef een formule voor het verband tussen K en q .
b Vul de ontbrekende getallen in. Rond af op vier decimalen.

q	1	2	3	4	6	9
K	...	...	...	0,3125	...	...

- 18** Gegeven is de formule $y = 4,5 \cdot x^{-0,5}$.
a Vul de tabel verder in.
b Teken een grafiek bij de tabel met de waarden van $x^{-0,5}$ op de horizontale as en de waarden van y op de verticale as.
c Wat valt je op aan deze grafiek?
d Gegeven is de formule $y = 12x^{2,7}$.
Wat moet je op de horizontale as tegen y uitzetten om als grafiek een rechte lijn te krijgen? Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van de lijn?

x	...	...	$\frac{1}{9}$	...	...
$x^{-0,5}$	1	2	3	4	5
y	...	...	13,5	...	...

- 22** In de tabel staat een aantal meetresultaten. Neem aan dat de bijbehorende formule de vorm $d = c \cdot r^n$ heeft.
- Leg uit dat uit het punt (1, 12) volgt dat $c = 12$.
 - Gebruik een ander punt om de waarde van n te berekenen. Rond je antwoord zo nodig af op twee decimalen en stel de formule op.
 - Welke waarde heeft d bij $r = 400$?
 - Welke waarde heeft r als $d = 148$?

r	1	9	16	36
d	12	40	55	86

- 27**
- | | | | | |
|---|-----|-----|------|------|
| A | t | 1 | 7 | 12 |
| | h | 5,2 | 20,3 | 29,6 |
| B | t | 4 | 9 | 16 |
| | h | 96 | 324 | 768 |
| C | t | 5 | 10 | 21 |
| | h | 69 | 39,6 | 21,9 |

Bij elk van de tabellen hoort een machtsverband tussen de variabelen t en h .

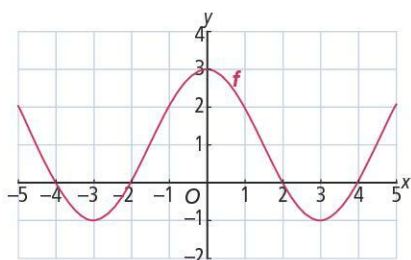
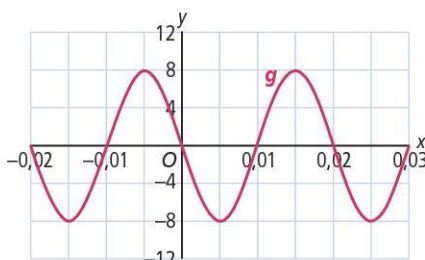
Stel bij elke tabel een formule op.

- 30** Bij een onderzoek naar het verband tussen de variabelen t en P is de formule $\log(P) = -0,92t + 3,4$ gevonden. De formule kan worden geschreven in de vorm $P = b \cdot g^t$. Bereken de waarden van b en g . Rond b af op een heel getal en g op twee decimalen.

- 31** Het verband tussen de variabelen S en R is gegeven door de formule $\log(R) = p \cdot \log(S) + q$. Als $S = 10$, dan is $R = 125,6$ en als $S = 25$ dan is $R = 1132,5$.

- Toon met een berekening aan dat $p \approx 2,4$ en $q \approx -0,3$.
- Laat met behulp van de rekenregels voor logaritmen zien dat er een machtsverband is tussen S en R . Schrijf het machtsverband in de vorm $R = c \cdot S^p$.

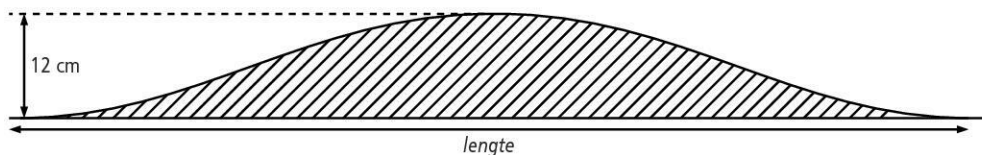
- 1 Stel bij elk van de grafieken een functievoorschrift op.



- 2 Geef de exacte waarde. Leg uit hoe je aan je antwoord komt.

- a $\cos(3\frac{5}{6}\pi)$
- b $\sin(-\frac{3}{4}\pi)$
- c $\sin(8\frac{1}{2}\pi) \cdot \cos(1\frac{1}{4}\pi)$
- d $\sin(-1\frac{2}{3}\pi) \cdot \cos(4\frac{1}{6}\pi)$

- 3 In België zijn vorm en afmetingen van verkeersdrempels sinds 1983 wettelijk vastgelegd. Het zijaanzicht van een verkeersdrempel heeft een sinusvorm.



Voor de getekende verkeersdrempel, die hoort bij een maximumsnelheid van 30 km/uur, is een formule opgesteld:

$$h = 0,06 + 0,06 \sin\left(\frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{2}\pi\right) \text{ met } h \text{ de hoogte en } x \text{ de}$$

horizontale afstand vanaf het (linker-)begin van de drempel, beide in meters.

- a Bereken exact hoeveel meter de lengte van deze drempel is.
- b Met de formule kun je berekenen over welke lengte deze drempel meer dan 10 cm hoog is.
Bereken deze lengte in cm nauwkeurig.
- c Een verkeersdrempel die hoort bij een maximumsnelheid van 60 km/uur is 12 meter lang en 14 cm hoog. Daarbij hoort een formule van de vorm $h = a + b \sin(c(x - d))$.
Hoe groot zijn a , b , c en d ?

4 Los exact op het interval $[-\pi, \pi]$ op.

a $2\sin(3x) = \sqrt{2}$

b $1 + 2\cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right) = 0$

c $\sin\left(x - \frac{2}{3}\pi\right)\cos(2(x - \pi)) = 0$

d $3 - 3\sin^2(x) = \sin^2(x)$

5 Gegeven is de functie $h(x) = \sin(2x) + \cos\left(2\left(x - \frac{1}{8}\pi\right)\right)$.

De grafiek van h is geplot op het interval $[0, 2\pi]$.

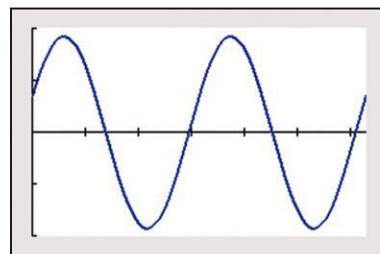
a Los op het interval $[0, 2\pi]$ de ongelijkheid

$\sin(2x) + \cos\left(2\left(x - \frac{1}{8}\pi\right)\right) > 1$ op. Rond af op twee decimalen.

b Bereken de extreme waarden van h . Rond af op twee decimalen.

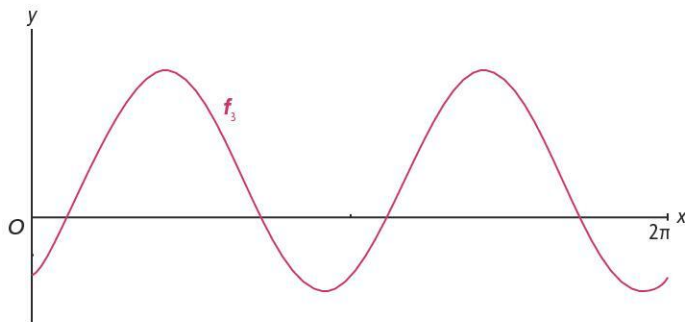
c De grafiek van h is een sinusoïde. Het functievoorschrift van h is dus te schrijven in de vorm $h(x) = d + a\sin(b(x - c))$.

Bereken de waarden van a , b , c en d . Licht je werkwijze toe en rond zo nodig af op twee decimalen.



6 Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = a\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) + 1$ op het interval $[0, 2\pi]$.

Voor $a = 3$ is de grafiek getekend.



a Beredeneer met behulp van het functievoorschrift hoe groot het maximum van f_3 is en bij welke waarden van x in het interval $[0, 2\pi]$ dit maximum bereikt wordt.

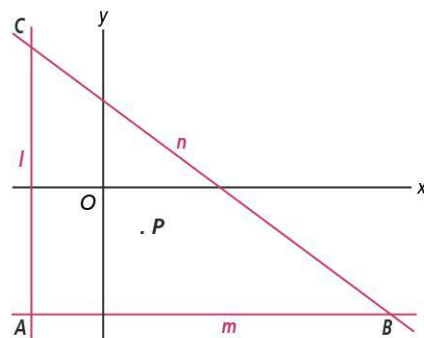
b Er zijn waarden van a waarbij de vergelijking $f_a(x) = 5$ precies vier oplossingen heeft op het interval $[0, 2\pi]$. Onderzoek voor welke waarden van a dat het geval is.

c Los exact op het interval $[0, 2\pi]$ de ongelijkheid

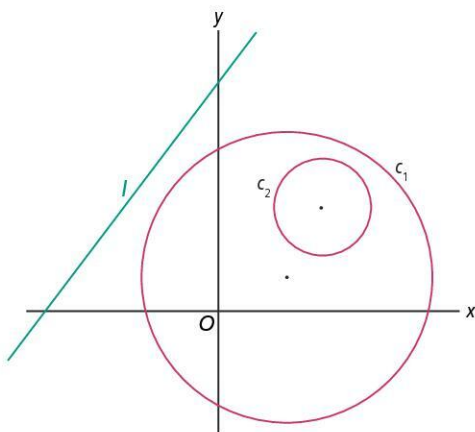
$-2\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) + 1 > 2$ op.

- 1** Gegeven zijn de lijnen $l: 2x - 5y + 15 = 0$ en $m: 5y = 3x + 5$.
- Bereken de coördinaten van het snijpunt van l en m .
 - Bereken de hoek die de lijnen l en m met elkaar maken. Rond je antwoord af op hele graden.

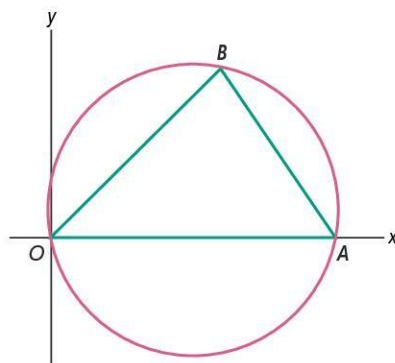
- 2** De snijpunten van de lijnen $l: x = -4$, $m: y = -7$ en $n: 3x + 4y = 20$ zijn de hoekpunten van een driehoek ABC .
- Toon aan dat punt $P(1, -2)$ het middelpunt is van de ingeschreven cirkel van driehoek ABC .
 - Stel een vergelijking op van de ingeschreven cirkel van driehoek ABC .



- 3** Bereken de coördinaten van het middelpunt en de straal van de cirkels.
- $x^2 + y^2 + 10x + 14y - 26 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 5x + 12y = 0$
 - $x^2 + y^2 = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + 1\frac{31}{36}$
- 4** Gegeven zijn de punten $A(-10, -50)$, $B(40, -70)$, $C(75, -40)$ en cirkel $c: x^2 + y^2 - 60x + 40y = 1200$.
Bereken exact de afstanden van de punten tot de cirkel.
- 5** Gegeven zijn de lijnen $l: x - 7y + 24 = 0$ en $m: 4x + 3y = 5$ en cirkel $c: x^2 + y^2 + 4x + 8y = 30$.
- Toon aan dat lijn l cirkel c raakt en bereken de coördinaten van het raakpunt.
 - Bereken de coördinaten van de snijpunten van lijn m met cirkel c .
 - Stel een vergelijking op van de raaklijn in punt $P(-7, 1)$ aan cirkel c .



- 6** Gegeven zijn de cirkels $c_1: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 18$,
 $c_2: (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 2$ en lijn $l: 4x - 3y + 20 = 0$.
- Toon aan dat de afstand tussen cirkel c_1 en cirkel c_2 gelijk is aan $2\sqrt{2} - \sqrt{5}$.
 - Bereken de exacte afstand tussen lijn l en cirkel c_1 .
- 7** Gegeven zijn cirkel $c: x^2 + y^2 - 8x + 6 = 0$ met middelpunt M en de familie van lijnen $y = px + 2$.
- Punt P ligt op alle lijnen uit de familie. Geef de coördinaten van punt P .
 - Twee lijnen uit de familie van lijnen raken aan cirkel c . Bereken de coördinaten van de raakpunten Q en R .
 - Het punt P , dat op alle lijnen van de familie ligt, vormt samen met het middelpunt M van cirkel c en de twee raakpunten Q en R de hoekpunten van een vierkant. Toon dat aan.
- 8** Gegeven zijn de punten $O(0, 0)$, $A(5, 0)$, $B(3, 3)$ en driehoek OAB . Stel een vergelijking op van de omgeschreven cirkel van driehoek OAB .



- 1 a Ga van de tabellen na of q recht evenredig of omgekeerd evenredig is met p .

A

p	-4	5	8	20
q	-14,05	11,24	7,025	2,81

C

p	-2	4	12	25
q	1,6	-3,2	-9,6	-20

B

p	-8	-5	4	20
q	2,875	4,6	-5,75	-1,15

D

p	3	7	12	21
q	7,8	18,2	31,2	54,6

- b Geef bij de recht evenredige verbanden de evenredigheidsconstante.
 c Geef bij de omgekeerd evenredige verbanden een formule waarbij je q uitdrukt in p .
- 2 De ijssalon Monteriggioni heeft een ontwerp voor een nieuw reclamebord laten maken. De vorm van het bord bestaat uit een halve cirkel en een gelijkzijdige driehoek. De zijden van de driehoek zijn z cm lang.

- a Laat zien dat de omtrek P van het bord recht evenredig is met z en geef de evenredigheidsconstante.
 (omtrek cirkel is $diameter \times \pi$)
 b De oppervlakte A in cm^2 van het bord kun je berekenen met de formule $A = \frac{1}{8}\pi \cdot z^2 + \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot z^2$.

Wat moet je op de horizontale as tegen A uitzetten om als grafiek een rechte lijn te krijgen?

- c Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van de lijn van opdracht b?
 d Met welke factor moeten de afmetingen van het bord worden vergroot om een bord te maken waarvan de oppervlakte vijf keer zo groot is?



- 3 Bij de tabellen hoort een machtsverband en een exponentieel verband.

A

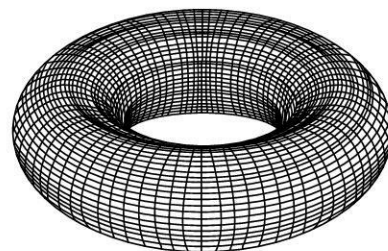
p	3	5,9	12	18,5	24,3
q	67,34	86,41	146,26	256,09	422,15

B

k	3	6,7	18,5	25	33,5
T	11,87	81,66	934,61	1925,2	3886,2

- a Toon aan dat tabel A bij een exponentieel verband past. Geef een formule bij deze tabel.
 b Bij tabel B hoort een machtsverband. Geef een formule bij deze tabel.
 c Bereken algebraïsch bij welke waarde van p geldt dat $q = 200$. Rond af op twee decimalen.
 d Bereken algebraïsch bij welke waarde van k geldt dat $T = 0,12$. Rond af op twee decimalen.

- 4** Een ruimtestation heeft de vorm van een torus. Als dit ruimtestation om zijn as draait, krijgen voorwerpen een van het middelpunt af gerichte versnelling. Voor een bepaald ruimtestation geldt de formule $a = 1974 \cdot T^{-2}$. Hierbij is a de versnelling in m/s^2 en T de tijd in seconden waarin het ruimtestation één keer om zijn as draait.
- Is het verband tussen a en T^2 een recht evenredig verband of een omgekeerd evenredig verband?
 - Leg uit wat er met de versnelling a gebeurt als T twee keer zo klein wordt.
 - Druk T uit in a .
 - Het ruimtestation draait zodanig rond, dat de zwaartekracht op aarde wordt nagebootst. De valversnelling op de maan is zes keer zo klein als op aarde. Bereken in twee decimalen de factor waarmee T moet worden vergroot of verkleind om de situatie op de maan na te bootsen.



- 5** Met een gewicht-naar-lengtediagram worden de kinderen onderscheiden die niet zoveel wegen als op grond van hun lengte verwacht wordt. Dit kan duiden op ondervoeding, een ziekte, een infectie of een combinatie van dit soort zaken. De resultaten van metingen staan in de tabel. Redelijk lijkt te veronderstellen, dat het gemiddelde gewicht G in kg evenredig is met l^3 , waarbij l de lengte is in cm.
- Leg uit, waar deze veronderstelling op gebaseerd kan zijn.
 - Er blijkt echter een verband te bestaan van de vorm $G = c \cdot l^{2,3}$. Bereken in vier decimalen de waarde van c .

<i>lengte in cm</i>	<i>gemiddeld gewicht in kg</i>
50	3,3
75	8,7
100	15,8
125	24,3
150	38,3
175	58,9

Met de Body Mass Index kan berekend worden of iemand een ‘gezond gewicht’ heeft. Deze BMI wordt berekend met de formule $BMI = \frac{G}{l^2}$.

De bovengrens voor een gezonde BMI wordt tussen het 5e en 18e levensjaar groter. Aangenomen wordt, dat deze bovengrens evenredig is met het gemiddelde gewicht. Hieruit volgt: de BMI neemt toe bij de groei van kind naar volwassene.

- Leg uit hoe dit volgt uit bovenstaande gegevens.

- 6** Van de variabelen A , B en C is gegeven dat $A = \frac{p}{B^2}$ en $B = \frac{q}{\sqrt{C}}$
- Toon aan dat A en C recht evenredig zijn.
 - Met welke factor wordt C vermenigvuldigd als B door drie wordt gedeeld?

- A** afgeleide functie 140
afstand tot een lijn 154
afstand tussen een lijn en een cirkel 54
afstand tussen twee cirkels 53
afstand tussen twee figuren 53
asymptoten 114
- B** bereik 114
berekeningen in driehoeken 149
bijzondere lijnen in een driehoek 147
bissectrice 58
- C** cosinusregel 39
- D** dalen 114
differentiëren 140
differenties 139
domein 114
driehoeken 147
- E** evenredig 81
evenredigheidsconstante 81
exponentieel verband 78
exponentiële functie 129
exponentiële vergelijking 131
- F** functievoorschrift voor een sinusoïde 11
- G** gebroken functie 119
gebroken vergelijking 119
groefactor 78
- H** halveringstijd 130
helling van een grafiek 139
hoek tussen twee lijnen 155
- I** ingeschreven cirkel 58
inverse bewerkingen 144
- K** kwadraat afsplitsen 46
kwadratische functie 125
kwadratische vergelijking 126
- L** lineaire functie 118
lineaire vergelijking 118
logaritme 130
logaritmische functie 130
logaritmische vergelijking 131
loodrecht 40
- M** machtsfuncties 79
machtsverband 93
machtsvergelijkingen 125
middelloodlijn 57
middelpuntsvergelijking 45
- O** omgekeerd evenredig 84
omgeschreven cirkel 57
ongelijkheid met sinus of cosinus 23
oppervlakte 150
- R** raaklijn aan een cirkel 50
raakpunt 50
radialen 134
recht evenredig 81
rekenmachine 116
- S** sinusoïden 134
sinusregel 38
snijpunten van lijn en cirkel 48
stelsel lineaire vergelijkingen 155
stijgen 114
substitutie 143
- T** toenamedigrammen 139
transformaties 115
- U** uitdrukken in 143
- V** verdubbelingstijd 130
vergelijking met sinus of cosinus 15
vergelijking van een cirkel 45
vergelijking van een lijn 40
vierhoeken 148
- W** wetten van schaalvergroting 90
wortelfunctie 126
wortelvergelijking 127

Ontwerp omslag G2K Creative Agency, Groningen/Amsterdam

Fotografie omslag Getty Images

Ontwerp binnenwerk Ebel Kuipers grafisch ontwerp, Sappemeer (Paul Kooi en G2K Creative Agency, Groningen/Amsterdam)

Illustraties Peter Fitzverploegh, Utrecht

Beeldresearch Daliz, Den Haag

Fotoverantwoording

Bastiaan Heus/ ANP/ Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 6-7

Shutterstock, New York: p. 18, 24, 33, 80, 82, 86, 96

iStockphoto/ Getty Images, Amsterdam: p. 36-37, 70-71, 76-77, 106-107, 112-113, 170-171

Granger/ Alamy/ Image Select, Wassenaar: p. 70

lazyllama/ Shutterstock: p. 80

Garmin Nederland BV, Eemnes: p. 84

Jeroen Stok, Lelystad: p. 88

Geertrui Schaberg, Mildam: p. 106

Ron Sinkeldam, Hierden: p. 112

Met FLEX heb je:

Boeken die je mag houden

- elk schooljaar krijg je een nieuw boek
- dit boek mag je houden om in te markeren en te werken
- zo wordt je boek een effectief leermiddel

Een persoonlijke digitale leeromgeving

- waarin je wordt uitgedaagd om het beste uit jezelf te halen
- met oefentoetsen, interactieve opdrachten en feedback
- en met inzicht in je resultaten



Altijd actueel lesmateriaal

- actuele inhoud met opdrachten en toetsen
- zowel in je boek als digitaal
- aangevuld met nieuw lesmateriaal op basis van het nieuws en actualiteiten



Noordhoff



www.modernewiskunde.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-89214-2



9 789001 892142