

MODERNE WISKUNDE

B



Noordhoff

$$v = \frac{4h}{2(h+z) - zh}$$

12e editie

Moderne Wiskunde

Uitwerkingen bij havo B deel 3

Ontwerp omslag G2K Designers, Groningen/Amsterdam
Ontwerp binnenwerk Ebel Kuipers, Sappemeer
Technisch tekenwerk Integra Software services Pvt. Ltd., India

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontlelen.

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 21

© 2021 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsenauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-89265-4

12e editie

Moderne Wiskunde

Uitwerkingen bij havo B deel 3

Bert Boon

Wim Doekes

Arjan Eikelboom

Tom Ruiter

Ron Sinkeldam

H12 Goniometrische functies 6

H13 Cirkels 29

Vaardigheden 7 65

H14 Verbanden 71

Vaardigheden 8 96

Examenvoorbereiding 104

Meer oefenen 134

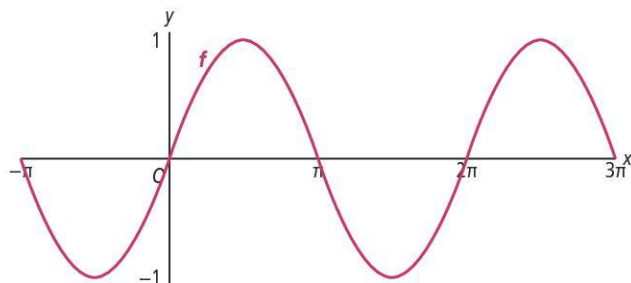
Oefenproefwerken 146

12 Goniometrische formules

Voorkennis

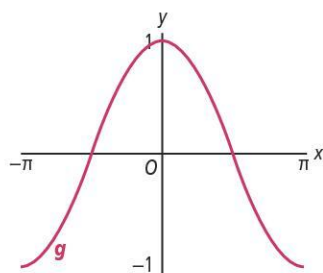
V1	<i>graden</i>	0	30	45	60	90	120	135	150	57,3	180
	<i>radialen</i>	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	1	π

V2 a



- b** De nulpunten zijn $x = -\pi$, $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$ en $x = 3\pi$.
c De toppen zijn $(-\frac{1}{2}\pi, -1)$, $(\frac{1}{2}\pi, 1)$, $(\frac{3}{2}\pi, -1)$ en $(\frac{5}{2}\pi, 1)$.
d Op dit interval is de grafiek puntsymmetrisch in $(\pi, 0)$.
e $x = -\frac{1}{6}\pi$ en $x = 1\frac{1}{6}\pi$ liggen beide op een afstand van $\frac{2}{3}\pi$ vanaf de symmetrieas $x = \frac{1}{2}\pi$, dus $\sin(-\frac{1}{6}\pi) = \sin(1\frac{1}{6}\pi)$.

V3 a



- b** De nulpunten zijn $x = -\frac{1}{2}\pi$ en $x = \frac{1}{2}\pi$.
c De toppen zijn $(-\pi, -1)$, $(0, 1)$ en $(\pi, -1)$.
d De periode van g is 2π .
e De grafiek van g is lijnsymmetrisch in de lijn $x = 0$ (de y -as).
f $x = \frac{5}{6}\pi$ en $x = \frac{1}{6}\pi$ liggen beide op een afstand van $\frac{2}{6}\pi = \frac{1}{3}\pi$ vanaf het punt van symmetrie $(\frac{1}{2}\pi, 0)$, dus $\cos(\frac{5}{6}\pi) = -\cos(\frac{1}{6}\pi)$.

V4 a $\sin(\frac{3}{4}\pi) = \sin(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b $\sin(1\frac{2}{3}\pi) = \sin(-\frac{1}{3}\pi) = -\sin(\frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

c $\sin(1\frac{1}{2}\pi) = -1$

d $\cos(1\frac{5}{6}\pi) = \cos(-\frac{1}{6}\pi) = \cos(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

e $\cos(\frac{3}{4}\pi) = -\cos(\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

f $\cos(1\frac{1}{4}\pi) = -\cos(\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

- V5** a De grafiek van g ontstaat uit die van f door een vermenigvuldiging met 3 ten opzichte van de x -as en een verschuiving van $\frac{1}{4}\pi$ naar rechts.
 b De amplitude is 3.
 c De grafiek van g gaat in $(\frac{1}{4}\pi, 0)$ stijgend door de evenwichtsstand.
 d De grafiek van h ontstaat uit die van f door een vermenigvuldiging met $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de y -as en een verschuiving 1 omhoog.
 e De periode is π en de evenwichtsstand is $y = 1$.
- V6** a De amplitude is 4, de periode is 2π en de evenwichtsstand is $y = -3$.
 b De amplitude is 2, de periode is 2π en de evenwichtsstand is $y = \frac{1}{2}$.
 c De amplitude is 1, de periode is $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ en de evenwichtsstand is $y = -2$.
 d De amplitude is 1, de periode is 2π en de evenwichtsstand is $y = 2$.
 e De amplitude is 1, de periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ en de evenwichtsstand is $y = -3$.
 f De amplitude is 3, de periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ en de evenwichtsstand is $y = 0$.
- V7** a Ten opzichte van de grafiek van $g(x) = \sin(x)$ is de grafiek vermenigvuldigd met 2 ten opzichte van de y -as en met $4\frac{1}{2}$ ten opzichte van de x -as. De top is daarom $(\pi, 4\frac{1}{2})$.
 b Ten opzichte van de grafiek van $h(x) = \cos(x)$ is de grafiek vermenigvuldigd met -2 ten opzichte van de x -as en 8 omhoog verschoven. De toppen zijn daarom $(0, 6)$, $(\pi, 10)$ en $(2\pi, 6)$.
 c Ten opzichte van de grafiek van $g(x) = \sin(x)$ is de grafiek vermenigvuldigd met 7 ten opzichte van de x -as. Vervolgens is de grafiek $\frac{1}{3}\pi$ naar links en 14 omhoog verschoven. De toppen zijn daarom $(\frac{1}{6}\pi, 21)$ en $(1\frac{1}{6}\pi, 7)$.
 d Ten opzichte van de grafiek van $g(x) = \sin(x)$ is de grafiek vermenigvuldigd met -2 ten opzichte van de x -as. Vervolgens is de grafiek $\frac{3}{4}\pi$ naar rechts en 5 omhoog verschoven. De toppen zijn daarom $(\frac{1}{4}\pi, 7)$ en $(1\frac{1}{4}\pi, 3)$.

12.1 Een functievoorschrift opstellen

intro f hoort bij grafiek D, g hoort bij grafiek A, h hoort bij grafiek B en k hoort bij grafiek C.

Grafiek A ontstaat door de grafiek van p twee omhoog te verschuiven.

Grafiek B ontstaat door de grafiek van p met twee te vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as.

Grafiek C ontstaat door de grafiek van p met $\frac{1}{2}$ te vermenigvuldigen ten opzichte van de y -as.

Grafiek D ontstaat door de grafiek van p twee naar links te verschuiven.

- 1** a De periode, de evenwichtsstand en de amplitude veranderen niet.
 b De periode en de amplitude veranderen niet, de evenwichtsstand wordt de lijn $y = 2$.
 c De periode en de evenwichtsstand veranderen niet, de amplitude wordt 3.
 d De amplitude en de evenwichtsstand veranderen niet, de periode wordt 4π .

- 2 a** Het maximum is 3 en het minimum is -5 .
b De evenwichtswaarde is $d = \frac{1}{2}(3 + (-5)) = -1$.
c De amplitude is $3 - (-1) = 4$.
d De periode is 4, dus $b = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$.
e De top ligt bij $x = 2$, dus $c = 2$.
f $f(x) = -1 + 4\cos\left(\frac{1}{2}\pi(x - 2)\right)$
- 3 a** Bijvoorbeeld $c = 6$, $c = -2$ of $c = 10$.
b $f(x) = -2 + 4\cos\left(\frac{1}{2}\pi(x - 6)\right)$ of $f(x) = -2 + 4\cos\left(\frac{1}{2}\pi(x + 2)\right)$
c De waarde van c wordt nu bepaald door het punt waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat, dat is bijvoorbeeld bij $x = 1$ of $x = 5$.
 $f(x) = -2 + 4\sin\left(\frac{1}{2}\pi(x - 1)\right)$ of $f(x) = -2 + 4\sin\left(\frac{1}{2}\pi(x - 5)\right)$
- 4** Voor de grafiek bij de functie f geldt:
 Het minimum is -20 en het maximum is 60 , dus de evenwichtsstand d is $\frac{-20 + 60}{2} = 20$ en de amplitude a is $60 - 20 = 40$.
 De periode is 50, dus $b = \frac{2\pi}{50} = \frac{1}{25}\pi$.
 Een top is $(0, 60)$, dus $c = x_{\max} = 0$.
 Een functievoorschrift is $f(x) = 20 + 40\cos\left(\frac{1}{25}\pi x\right)$.
 De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $x = 37\frac{1}{2}$.
 Een ander functievoorschrift is $f(x) = 20 + 40\sin\left(\frac{1}{25}\pi\left(x - 37\frac{1}{2}\right)\right)$.
 Voor de grafiek bij de functie g geldt:
 Het minimum is -1 en het maximum is 3 , dus de evenwichtsstand d is $\frac{-1 + 3}{2} = 1$ en de amplitude a is $3 - 1 = 2$.
 De periode is $1\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{4}\pi = 1\frac{1}{2}\pi$, dus $b = \frac{2\pi}{1\frac{1}{2}\pi} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.
 Een top is $\left(\frac{1}{4}\pi, 3\right)$, dus $c = x_{\max} = \frac{1}{4}\pi$.
 Een functievoorschrift is $g(x) = 1 + 2\cos\left(1\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)\right)$.
 Het minimum ligt bij $x = \pi$ en het maximum bij $x = 1\frac{3}{4}\pi$, dus de grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $x = 1\frac{3}{8}\pi$.
 Een ander functievoorschrift is $g(x) = 1 + 2\sin\left(1\frac{1}{3}\left(x - 1\frac{3}{8}\pi\right)\right)$.
- 5** Het minimum is -5 en het maximum is 20 , dus de evenwichtsstand d is $\frac{-5 + 20}{2} = 7\frac{1}{2}$ en de amplitude a is $20 - 7\frac{1}{2} = 12\frac{1}{2}$.
 De periode is 20, dus $b = \frac{2\pi}{20} = \frac{1}{10}\pi$.
 Een top is $(10, 20)$, dus $c = x_{\max} = 10$.
 De grafiek gaat in $\left(5, 7\frac{1}{2}\right)$ stijgend door de evenwichtsstand.
 Mogelijke functievoorschriften zijn $f(x) = 7\frac{1}{2} + 12\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{10}\pi(x - 10)\right)$ of $f(x) = 7\frac{1}{2} + 12\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{10}\pi(x - 5)\right)$.
- 6** Bijvoorbeeld $f(x) = 7\frac{1}{2} + 12\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{10}\pi(x - 30)\right)$ of $f(x) = 7\frac{1}{2} + 12\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{10}\pi(x + 10)\right)$.

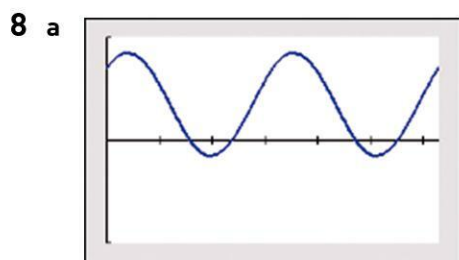
- 7 a** Omdat de coördinaten van de top eenvoudig af te lezen zijn.
b Het maximum is 126 en het minimum is 88, dus de evenwichtsstand d is $\frac{126 + 88}{2} = 107$ en de amplitude a is $126 - 107 = 19$.

De periode is 0,8 dus $b = \frac{2\pi}{0,8} = 2\frac{1}{2}\pi$ en een top is $(0,2; 126)$.

Een functievoorschrift is $D(t) = 107 + 19 \cos\left(2\frac{1}{2}\pi(t - 0,2)\right)$.

- c** De grafiek gaat een kwart periode vóór $t = 0,2$ stijgend door de evenwichtsstand, dus dat is bij $t = 0$.

Een functievoorschrift is $D(t) = 107 + 19 \sin\left(2\frac{1}{2}\pi t\right)$.



De toppen zijn $(0,39; 0,85)$, $(1,96; -0,15)$, $(3,53; 0,85)$ en $(5,11; -0,15)$.

- b** De evenwichtsstand d is $\frac{-0,15 + 0,85}{2} = 0,35$ en de amplitude a is $0,85 - 0,35 = 0,5$.

De periode is $3,53 - 0,39 = 3,14$, dus $b = \frac{2\pi}{3,14} \approx 2,00$.

Een functievoorschrift is $f(x) = 0,35 + 0,50 \cos(2,00(x - 0,39))$.

- 9** De periode van f is $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}\pi} = 6$, de evenwichtsstand is 7 en de amplitude is 3.

In het punt $(-4, 7)$ gaat de grafiek dalend door de evenwichtsstand (vanwege het minteken voor de 3), dus een halve periode verder gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand. Dat is dus in het punt $(-1, 7)$.

- 10 a** De evenwichtsstand d is $\frac{18 + 2}{2} = 10$ en de amplitude a is $18 - 10 = 8$.

Een halve periode is $10 - 2 = 8$, dus een periode is 16 en $b = \frac{2\pi}{16} = \frac{1}{8}\pi$.

Een top is $(2, 18)$, dus $c = x_{\max} = 2$.

Een functievoorschrift is $f(x) = 10 + 8 \cos\left(\frac{1}{8}\pi(x - 2)\right)$.

- b** De evenwichtsstand d is $\frac{-11 + -2}{2} = -6\frac{1}{2}$ en de amplitude a is $-2 - -6\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$.

Een halve periode is $5\pi - -3\pi = 8\pi$, dus één periode is 16π en $b = \frac{2\pi}{16\pi} = \frac{1}{8}$.

Een top is $(5\pi, -2)$, dus $c = x_{\max} = 5\pi$.

Mogelijke functievoorschriften zijn $f(x) = -6\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} \cos\left(\frac{1}{8}(x - 5\pi)\right)$,

$f(x) = -6\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} \cos\left(\frac{1}{8}(x + 11\pi)\right)$ of $f(x) = -6\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{8}(x - \pi)\right)$.

- 04 a** Het maximum is 1 en het minimum is -3 .
b De evenwichtsstand is het gemiddelde van het minimum en het maximum.
c De variabele d .
d De amplitude is gelijk aan het maximum min de evenwichtsstand.
e De variabele a .
f De periode is $1\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{3}\pi = \pi$, dus je kunt nu de variabele b berekenen.
g De sinusgrafiek is $\frac{1}{3}\pi$ naar rechts verschoven.
h De variabele c .
i De evenwichtsstand d is $\frac{-3+1}{2} = -1$ en de amplitude a is $1 - (-1) = 2$.

De periode is π , dus $b = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

De sinusgrafiek is $\frac{1}{3}\pi$ naar rechts verschoven, dus $c = \frac{1}{3}\pi$.

$$f(x) = -1 + 2 \sin\left(2\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)\right)$$

- U1 a** De y -coördinaat van B is het gemiddelde van -7 en 3 , dus die is -2 .
 Van A naar C is $2,5$ perioden en deze is $1,4 - (-0,6) = 2$.
 De periode is dus $2 : 2,5 = 0,8$.
 Van A naar B is één kwart periode, dus de x -coördinaat van B is gelijk aan $-0,6 + \frac{1}{4} \cdot 0,8 = -0,4$. De coördinaten zijn $B(-0,4; -2)$.
b Van A naar B is één kwart periode, dus een periode is $4 \cdot (34 - 31) = 12$.
 $b = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi$.

De grafiek gaat in $B(34, 36)$ stijgend door de evenwichtsstand.

De evenwichtsstand is 36 en de amplitude is $36 - 16 = 20$.

Een functievoorschrift is $f(x) = 36 + 20 \sin\left(\frac{1}{6}\pi(x - 34)\right)$.

12.2 Exacte waarden vinden

intro Het interval $\left[-1\frac{1}{2}\pi, 6\frac{1}{2}\pi\right]$ bevat precies vier perioden.
 $y = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ is een horizontale lijn die boven de x -as ligt en lager dan de hoogste punten van de grafiek. Elke periode heeft $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ twee oplossingen, dus zijn er acht oplossingen op dit interval.
 $y = -1$ is een horizontale lijn die door de laagste punten van de grafiek gaat, deze laagste punten liggen bij $x = -\frac{1}{2}\pi$ en daarna steeds 2π verder, dus er zijn vier oplossingen op dit interval.

- 11 a** Uit de symmetrie in de lijn $x = \frac{1}{2}\pi$ volgt $\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$.
b Uit de puntsymmetrie in $(0, 0)$ volgt $\sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$.
c Uit de puntsymmetrie in $(\pi, 0)$ volgt $\sin\left(1\frac{1}{6}\pi\right) = -\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$.
d Uit de periodiciteit met periode 2π volgt $\sin\left(2\frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$.
e $\sin\left(-1\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$
 $\sin\left(-1\frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$
 $\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(1\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

- 12 a** $x = \frac{2}{3}\pi$ en $x = 1\frac{1}{3}\pi$
b $x = \frac{1}{4}\pi$ en $x = 1\frac{3}{4}\pi$
- 13 a** De twee grafieken hebben zes snijpunten, dus zijn er zes oplossingen.
b De letter a .
c De symmetrie in de lijn $x = \frac{1}{2}\pi$.
d $c = a + 2\pi$
e $x = \frac{1}{3}\pi$, $x = \frac{2}{3}\pi$, $x = 2\frac{1}{3}\pi$, $x = 2\frac{2}{3}\pi$, $x = -1\frac{1}{3}\pi$ en $x = -1\frac{2}{3}\pi$.
- 14** $x = \frac{5}{6}\pi$, $x = -\frac{5}{6}\pi$, $x = -1\frac{1}{6}\pi$ en $x = -2\frac{5}{6}\pi$
- 15 a** $\sin(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $\sin(\frac{3}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ dus de oplossingen zijn:
 $x = 10\frac{1}{4}\pi$, $x = 10\frac{3}{4}\pi$, $x = 12\frac{1}{4}\pi$, $x = 12\frac{3}{4}\pi$, $x = 14\frac{1}{4}\pi$ en $x = 14\frac{3}{4}\pi$.
b $\cos(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\cos(\frac{5}{6}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ dus de oplossingen zijn:
 $x = 10\frac{1}{6}\pi$, $x = 11\frac{5}{6}\pi$, $x = 12\frac{1}{6}\pi$, $x = 13\frac{5}{6}\pi$ en $x = 14\frac{1}{6}\pi$.
c Uit $4\cos(x) = -2\sqrt{2}$ volgt $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
 $\cos(\frac{3}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $\cos(1\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$, dus de oplossingen zijn:
 $x = 10\frac{3}{4}\pi$, $x = 11\frac{1}{4}\pi$, $x = 12\frac{3}{4}\pi$, $x = 13\frac{1}{4}\pi$ en $x = 14\frac{3}{4}\pi$.
d Uit $\sin(x) + 1 = 0$ volgt $\sin(x) = -1$
 $\sin(1\frac{1}{2}\pi) = -1$, dus de oplossingen zijn: $x = 11\frac{1}{2}\pi$ en $x = 13\frac{1}{2}\pi$.
- 16 a** De oplossingen zijn $x = 0$, $x = 2\pi$, $x = 4\pi$, $x = 6\pi$ en $x = 8\pi$.
b $\sin(1\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $\sin(1\frac{3}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$, dus de oplossingen zijn: $x = 1\frac{1}{4}\pi$,
 $x = 1\frac{3}{4}\pi$, $x = 3\frac{1}{4}\pi$, $x = 3\frac{3}{4}\pi$, $x = 5\frac{1}{4}\pi$, $x = 5\frac{3}{4}\pi$, $x = 7\frac{1}{4}\pi$ en $x = 7\frac{3}{4}\pi$.
- 17 a** $2\sin(x) = -1$ geeft $\sin(x) = -\frac{1}{2}$.
Op $[0, 2\pi]$ zijn de oplossingen $x = 1\frac{1}{6}\pi$ en $x = 1\frac{5}{6}\pi$.
Alle oplossingen: $x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ en $x = 1\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.
b $4\cos(x) = -2\sqrt{3}$ geeft $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$.
Op $[0, 2\pi]$ zijn de oplossingen $x = \frac{5}{6}\pi$ en $x = 1\frac{1}{6}\pi$.
Alle oplossingen: $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ en $x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.
c $\cos(x) + 1 = 0$ geeft $\cos(x) = -1$.
Op $[0, 2\pi]$ is de oplossing $x = \pi$.
Alle oplossingen: $x = \pi + k \cdot 2\pi$.
- 18 a** De oplossingen van $\sin(x) = 1$ zijn $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$.
De oplossingen van $\sin(x) = -1$ zijn $x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$.
Je kunt dit combineren tot één rij oplossingen, namelijk $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.
b Uit $\cos^2(x) = 1$ volgt $\cos(x) = 1$ of $\cos(x) = -1$.
De oplossingen van $\cos(x) = 1$ zijn $x = 0 + k \cdot 2\pi$.
De oplossingen van $\cos(x) = -1$ zijn $x = \pi + k \cdot 2\pi$.
Je kunt dit combineren tot één rij oplossingen, namelijk $x = 0 + k \cdot \pi$.

- 015 a** $x = \frac{1}{6}\pi$
b De oplossingen zijn $x = 1\frac{1}{6}\pi$ en $x = 1\frac{5}{6}\pi$.
c $x = 7\frac{1}{6}\pi$, $x = 7\frac{5}{6}\pi$, $x = 9\frac{1}{6}\pi$ en $x = 9\frac{5}{6}\pi$

- 017 a** $x = \frac{1}{3}\pi$
b De symmetrieas is $x = \pi$, dus de andere oplossing is $x = 1\frac{2}{3}\pi$.
c $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
d $\cos(x) = -1$ heeft op het interval $[0, 2\pi]$ maar één oplossing, namelijk $x = \pi$.
 Door de periodiciteit van 2π zijn alle oplossingen: $x = \pi + k \cdot 2\pi$.
e Uit $2\sin(x) = -\sqrt{2}$ volgt $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
 Op het interval $[0, 2\pi]$ is de oplossing hiervan $x = 1\frac{1}{4}\pi$ of $x = 1\frac{3}{4}\pi$.
 Alle oplossingen zijn: $x = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = 1\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
- U2** In de tabel met exacte waarden kun je zien dat $\sin(\frac{1}{4}\pi) = \cos(\frac{1}{4}\pi)$.
 Uit de symmetrie van de grafieken volgt dat dit ook geldt voor $x = 1\frac{1}{4}\pi$.
 De oplossingen zijn $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$.

12.3 Vergelijkingen

intro De hoogte van 100 meter ligt boven de as van de turbine en lager dan het hoogste punt, dus die hoogte wordt per omwenteling twee keer bereikt.
 Punt P bevindt zich per minuut 24 keer op een hoogte van 100 meter.

- 19 a** $q = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $q = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
b $x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x - \frac{1}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 De oplossingen op $[-\pi, \pi]$ zijn $x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = \frac{5}{6}\pi$.
- 20 a** $q = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $q = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
b $3x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3x = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{\frac{3}{4}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi}{3}$ of $x = \frac{1\frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi}{3}$
 $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{2}{9}\pi$ of $x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{9}\pi$
c $x = \frac{1}{4}\pi$, $x = \frac{5}{12}\pi$ en $x = \frac{11}{12}\pi$
- 21 a** Stel $q = 2x$.
 De oplossingen van $\sin(q) = \frac{1}{2}$ zijn $q = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $q = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.
 $2x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi$ of $x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$
 De oplossingen op $[0, 2\pi]$ zijn $x = \frac{1}{12}\pi$, $x = \frac{5}{12}\pi$, $x = 1\frac{1}{12}\pi$ en $x = 1\frac{5}{12}\pi$.
b Stel $q = x - \frac{2}{3}\pi$.
 De oplossingen van $\cos(q) = -1$ zijn $q = \pi + k \cdot 2\pi$.
 $x - \frac{2}{3}\pi = \pi + k \cdot 2\pi$, dus $x = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 Er is één oplossing op $[-\pi, 0]$, namelijk $x = -\frac{1}{3}\pi$.

c Stel $q = \pi(x + 4)$.

De oplossingen van $\sin(q) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ zijn $q = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $q = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$$\pi(x + 4) = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \pi(x + 4) = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x + 4 = \frac{1}{3} + k \cdot 2 \text{ of } x + 4 = \frac{2}{3} + k \cdot 2$$

$$x = -3\frac{2}{3} + k \cdot 2 \text{ of } x = -3\frac{1}{3} + k \cdot 2$$

De oplossingen op $[0, 5]$ zijn $x = \frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$, $x = 2\frac{1}{3}$, $x = 2\frac{2}{3}$, $x = 4\frac{1}{3}$ en $x = 4\frac{2}{3}$.

d Stel $q = 2x$.

$$\text{Uit } 3\cos(q) + 1 = 2\frac{1}{2} \text{ volgt } \cos(q) = \frac{1}{2}$$

De oplossingen van $\cos(q) = \frac{1}{2}$ zijn $q = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $q = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$$2x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \text{ of } x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi$$

De oplossingen op $[-2\pi, 0]$ zijn $x = -1\frac{5}{6}\pi$, $x = -1\frac{1}{6}\pi$, $x = -\frac{5}{6}\pi$ en $x = -\frac{1}{6}\pi$.

e Stel $q = \frac{1}{2}x + \pi$.

$$\text{Uit } 2\sin(q) + 2 = 1 \text{ volgt } \sin(q) = -\frac{1}{2}$$

De oplossingen van $\sin(q) = -\frac{1}{2}$ zijn $q = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $q = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$$\frac{1}{2}x + \pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{1}{2}x + \pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{1}{2}x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 4\pi \text{ of } x = \frac{5}{3}\pi + k \cdot 4\pi$$

De oplossingen op $[0, 5\pi]$ zijn $x = \frac{1}{3}\pi$, $x = \frac{5}{3}\pi$ en $x = 4\frac{1}{3}\pi$.

f Stel $q = 3\pi(x - 1)$.

$$\text{Uit } 4\cos(q) = -2\sqrt{3} \text{ volgt } \cos(q) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

De oplossingen van $\cos(q) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ zijn $q = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $q = \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$$3\pi(x - 1) = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 3\pi(x - 1) = \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$3\pi x - 3\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 3\pi x - 3\pi = \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$3\pi x = 3\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 3\pi x = 4\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{23}{18} + k \cdot \frac{2}{3} \text{ of } x = \frac{25}{18} + k \cdot \frac{2}{3}$$

De oplossingen op $[0, 2]$ zijn $x = \frac{1}{18}$, $x = \frac{11}{18}$, $x = \frac{13}{18}$, $x = 1\frac{5}{18}$, $x = 1\frac{7}{18}$ en $x = 1\frac{17}{18}$.

22 a Invoer: $y_1 = \cos(x)$ en $y_2 = 0,27$

Venster: $0 \leq x \leq 2\pi$, $-2 \leq y \leq 2$

Optie: snijpunten

$$x \approx 1,30 \text{ of } x \approx 4,99$$

b Invoer: $y_1 = \sin(2x)$ en $y_2 = 0,9$

Venster: $0 \leq x \leq 2\pi$, $-2 \leq y \leq 2$

Optie: snijpunten

$$x \approx 0,56 \text{ of } x \approx 1,01 \text{ of } x \approx 3,70 \text{ of } x \approx 4,15$$

c Invoer: $y_1 = \sin(\pi x)$ en $y_2 = -0,35$

Venster: $1 \leq x \leq 7$, $-2 \leq y \leq 2$

Optie: snijpunten

$$x \approx 1,11 \text{ of } x \approx 1,89 \text{ of } x \approx 3,11 \text{ of } x \approx 3,89 \text{ of } x \approx 5,11 \text{ of } x \approx 5,89$$

d Invoer: $y_1 = 4 - 3\cos(2x)$ en $y_2 = 5$

Venster: $-4 \leq x \leq 4$, $-1 \leq y \leq 8$

Optie: snijpunten

$$x \approx -2,19 \text{ of } x \approx -0,96 \text{ of } x \approx 0,96 \text{ of } x \approx 2,19$$

23 a $4x - 7 = 0$ of $\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = 0$

$$4x = 7 \text{ of } \frac{1}{2}x = 0 + k \cdot \pi$$

$$x = 1\frac{3}{4} \text{ of } x = 0 + k \cdot 2\pi$$

De oplossingen op $[0, 2\pi]$ zijn $x = 1\frac{3}{4}$, $x = 0$ of $x = 2\pi$.

b $1 - \frac{1}{3}x = 0$ of $\cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right) = 0$

$$\frac{1}{3}x = 1 \text{ of } \frac{1}{2}\pi x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = 3 \text{ of } x = 1 + k \cdot 2$$

De oplossingen op $[0, 8]$ zijn $x = 1$, $x = 3$, $x = 5$ of $x = 7$.

c $2\sin\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) = 0$ of $\cos(2x) = 0$

$$x - \frac{2}{3}\pi = 0 + k \cdot \pi \text{ of } 2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi \text{ of } x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

De oplossingen op $[-\pi, \pi]$ zijn

$$x = \frac{2}{3}\pi, x = -\frac{1}{3}\pi, x = \frac{1}{4}\pi, x = \frac{3}{4}\pi, x = -\frac{1}{4}\pi \text{ of } x = -\frac{3}{4}\pi.$$

24 a Stel $\cos(x) = p$, dan wordt de vergelijking $p^2 - p = 0$.

$$p(p - 1) = 0, \text{ dus } p = 0 \text{ of } p = 1.$$

$$\cos(x) = 0 \text{ of } \cos(x) = 1$$

De oplossingen op $[0, 4\pi]$ zijn

$$x = \frac{1}{2}\pi \text{ of } x = 1\frac{1}{2}\pi \text{ of } x = 2\frac{1}{2}\pi \text{ of } x = 3\frac{1}{2}\pi \text{ of } x = 0 \text{ of } x = 2\pi \text{ of } x = 4\pi$$

b Stel $\sin(x) = p$, dan wordt de vergelijking $2p^2 + p = 0$.

$$2p\left(p + \frac{1}{2}\right) = 0, \text{ dus } p = 0 \text{ of } p = -\frac{1}{2}$$

$$\sin(x) = 0 \text{ of } \sin(x) = -\frac{1}{2}$$

De oplossingen op $[-\pi, \pi]$ zijn

$$x = -\pi \text{ of } x = 0 \text{ of } x = \pi \text{ of } x = -\frac{5}{6}\pi \text{ of } x = -\frac{1}{6}\pi$$

25 $\sin\left(3x - \frac{1}{6}\pi\right)$ kan alleen waarden aannemen van -1 tot 1 ,

$$\text{dus } a \sin\left(3x - \frac{1}{6}\pi\right) = \sqrt{5} \text{ heeft alleen oplossingen als } a \geq \sqrt{5} \text{ of } a \leq -\sqrt{5}.$$

021 a Door beide kanten door 6 te delen krijg je de vergelijking $\sin\left(\frac{3}{4}x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

b De oplossingen van $\sin(q) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ op $[0, 2\pi]$ zijn $x = \frac{1}{3}\pi$ en $x = \frac{2}{3}\pi$.

c $q = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $q = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$$\frac{3}{4}x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{3}{4}x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi\right) \text{ of } x = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi\right)$$

$$x = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{4}{3} \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3}\pi + k \cdot \frac{4}{3} \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{4}{9}\pi + k \cdot 2\frac{2}{3}\pi \text{ of } x = \frac{8}{9}\pi + k \cdot 2\frac{2}{3}\pi$$

d $k = -1$ geeft $x = -1\frac{7}{9}\pi$

$$k = 0 \text{ geeft } x = \frac{4}{9}\pi \text{ of } x = \frac{8}{9}\pi$$

$$k = 1 \text{ geeft } x = 3\frac{1}{9}\pi \text{ of } x = 3\frac{5}{9}\pi$$

024 a Uit $4p^2 = 1$ volgt $p^2 = \frac{1}{4}$

$$p = \frac{1}{2} \text{ of } p = -\frac{1}{2}$$

b $\sin(x) = \frac{1}{2}$ of $\sin(x) = -\frac{1}{2}$

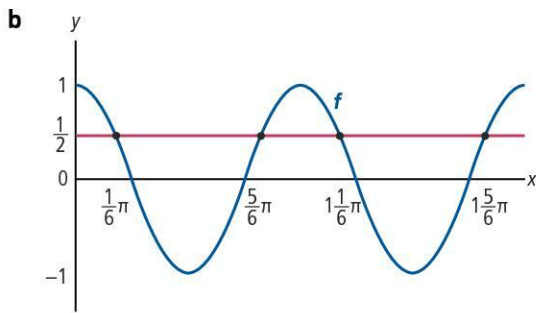
$$x = \frac{1}{6}\pi \text{ of } x = \frac{5}{6}\pi \text{ of } x = 1\frac{1}{6}\pi \text{ of } x = 1\frac{5}{6}\pi$$

- c $x = \frac{1}{6}\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi$ of $x = -\frac{5}{6}\pi$ of $x = -\frac{1}{6}\pi$
- d Stel $\cos(x) = p$, de vergelijking wordt $2p^2 = p$ ofwel $2p^2 - p = 0$.
 $2p(p - \frac{1}{2}) = 0$
 $p = 0$ of $p = \frac{1}{2}$
 $\cos(x) = 0$ of $\cos(x) = \frac{1}{2}$
 $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ of $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
De oplossingen op het interval $[0, 4\pi]$ zijn
 $x = \frac{1}{2}\pi, x = 1\frac{1}{2}\pi, x = 2\frac{1}{2}\pi, x = 3\frac{1}{2}\pi, x = \frac{1}{3}\pi, x = 1\frac{2}{3}\pi, x = 2\frac{1}{3}\pi$ of $x = 3\frac{2}{3}\pi$.
- U3 a** $f(0) = \sin(\pi \cdot \sin(0)) = \sin(0) = 0$ en $g(0) = \cos(\pi \cdot \cos(0)) = \cos(\pi) = -1$.
De grafiek van f gaat door $(0, 0)$ en die van g door $(0, -1)$, dus grafiek A hoort bij f en grafiek B hoort bij g .
- b** De periode van f is 2π en de periode van g is π .
- c** De grootste waarde die $\sin(\pi \cdot \sin(x))$ kan hebben is 1, namelijk als $\pi \cdot \sin(x) = \frac{1}{2}\pi$, dus als $\sin(x) = \frac{1}{2}$.
De uitkomst van een sinus kan nooit groter zijn dan 1.
- d** Zie opdracht c: $\sin(x) = \frac{1}{2}$, dus $x = \frac{1}{6}\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi$.
- e** $g(\frac{1}{3}\pi) = \cos(\pi \cdot \cos(\frac{1}{3}\pi)) = \cos(\frac{1}{2}\pi) = 0$
De andere oplossingen volgen uit $\pi \cdot \cos(x) = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$,
dus $\cos(x) = \frac{1}{2}$ of $\cos(x) = -\frac{1}{2}$.
De andere oplossingen zijn $x = \frac{2}{3}\pi, x = 1\frac{1}{3}\pi$ en $x = 1\frac{2}{3}\pi$.

12.4 Ongelijkheden

intro Na 1 seconde, na 5 seconden, na 7 seconden en na 11 seconden is Sanne precies 1,5 meter van het midden.
Oma ziet Sanne minder dan 1,5 meter van het midden van 0 tot 1 seconde, van 5 tot 7 seconden en van 11 tot 12 seconden.

- 26 a** $\sin(x) > 0$ als $0 < x < \pi$.
- b** $\cos(x) < 0$ als $-\pi \leq x < -\frac{1}{2}\pi$ of $\frac{1}{2}\pi < x < 1\frac{1}{2}\pi$ of $2\frac{1}{2}\pi < x \leq 3\pi$.
- c** De waarde van $\sin(x)$ is nooit groter dan 1, maar $\sin(x) = 1$ heeft wel oplossingen.
- d** $\cos(x) \leq p$ heeft oplossingen als $p \geq -1$.
- 27 a** Stel $q = 2x$.
Uit $\cos(q) = \frac{1}{2}$ volgt $q = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $q = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$.
 $2x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi$
De oplossingen op $[0, 2\pi]$ zijn $x = \frac{1}{6}\pi, x = \frac{5}{6}\pi, x = 1\frac{1}{6}\pi$ en $x = 1\frac{5}{6}\pi$.



c De oplossing van $\cos(2x) < \frac{1}{2}$ is $\frac{1}{6}\pi < x < \frac{5}{6}\pi$ of $1\frac{1}{6}\pi < x < 1\frac{5}{6}\pi$.

28 a Stel $q = x - \frac{3}{4}\pi$ en los op $\cos(q) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

$$q = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } q = 1\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x - \frac{3}{4}\pi = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x - \frac{3}{4}\pi = 1\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = 2\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

De oplossingen op $[-\pi, \pi]$ zijn $x = -\pi$, $x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = \pi$.

De oplossing van $\cos(x - \frac{3}{4}\pi) > \frac{1}{2}\sqrt{2}$ is $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$.

b Stel $q = 2x$ en los op $3\sin(q) + 1 = -\frac{1}{2}$, dus $\sin(q) = -\frac{1}{2}$.

$$q = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } q = 1\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$2x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = 1\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot \pi \text{ of } x = \frac{11}{12}\pi + k \cdot \pi$$

De oplossingen op $[0, 2\pi]$ zijn $x = \frac{7}{12}\pi$, $x = \frac{11}{12}\pi$, $x = 1\frac{7}{12}\pi$ en $x = 1\frac{11}{12}\pi$.

De oplossing van $3\sin(2x) + 1 \leq -\frac{1}{2}$ is $\frac{7}{12}\pi \leq x \leq \frac{11}{12}\pi$ of $1\frac{7}{12}\pi \leq x \leq 1\frac{11}{12}\pi$.

c Stel $q = \frac{1}{10}x$ en los op $\sqrt{3} \cdot \cos(q) + \frac{1}{2} = 2$

$$\sqrt{3} \cdot \cos(q) = 1\frac{1}{2}, \text{ dus } \cos(q) = \frac{1\frac{1}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$q = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } q = 1\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\frac{1}{10}x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{1}{10}x = 1\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 20\pi \text{ of } x = 18\frac{1}{3}\pi + k \cdot 20\pi$$

De oplossingen op $[-10\pi, 10\pi]$ zijn $x = 1\frac{2}{3}\pi$ en $x = -1\frac{2}{3}\pi$.

De oplossing van $\sqrt{3} \cdot \cos(\frac{1}{10}x) + \frac{1}{2} < 2$ is

$$-10\pi \leq x < -1\frac{2}{3}\pi \text{ of } 1\frac{2}{3}\pi < x \leq 10\pi.$$

d Stel $q = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{3}\pi)$ en los op $\sin(q) = 1$

$$q = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\frac{1}{2}(x + \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

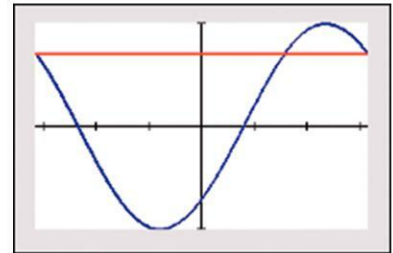
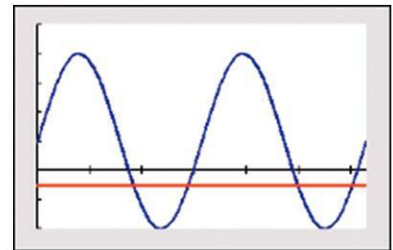
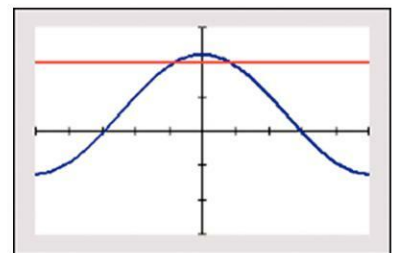
$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

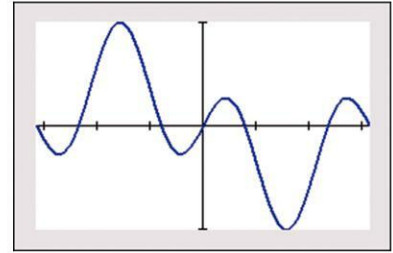
$$x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 4\pi$$

De oplossingen op $[0, 6\pi]$ zijn $x = \frac{2}{3}\pi$ en $x = 4\frac{2}{3}\pi$.

De oplossing van $\sin(\frac{1}{2}(x + \frac{1}{3}\pi)) \geq 1$ is $x = \frac{2}{3}\pi$ of $x = 4\frac{2}{3}\pi$, want de waarde van een sinus kan wel 1 zijn, maar nooit groter dan 1.



- 29** $\sin(x) \cdot \cos(2x) = 0$
 $\sin(x) = 0$ of $\cos(2x) = 0$
 $x = 0 + k \cdot \pi$ of $2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
 $x = 0 + k \cdot \pi$ of $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$
De oplossingen op $[-\pi, \pi]$ zijn
 $x = -\pi, x = -\frac{3}{4}\pi, x = -\frac{1}{4}\pi, x = 0, x = \frac{1}{4}\pi, x = \frac{3}{4}\pi$ en $x = \pi$.
De oplossing van $\sin(x) \cdot \cos(2x) < 0$ is
 $-\pi < x < -\frac{3}{4}\pi$ of $-\frac{1}{4}\pi < x < 0$ of $\frac{1}{4}\pi < x < \frac{3}{4}\pi$.



- 30 a** Invoer: $y_1 = (2x - 5) \cdot \sin(\frac{1}{2}x)$
Venster: $0 \leq x \leq 14, -20 \leq y \leq 20$
Opties: maximum en minimum.
De coördinaten van de toppen zijn
 $(1,17; -1,47), (4,64; 3,13)$ en $(9,95; -14,39)$.
b $2x - 5 = 0$ of $\sin(\frac{1}{2}x) = 0$
 $2x = 5$ of $\frac{1}{2}x = 0 + k \cdot \pi$
 $x = 2\frac{1}{2}$ of $x = 0 + k \cdot 2\pi$
De oplossingen op $[0, 14]$ zijn $x = 0, x = 2\frac{1}{2}, x = 2\pi$ en $x = 4\pi$.
Zie de grafiek in het boek: de oplossing van $(2x - 5) \cdot \sin(\frac{1}{2}x) \leq 0$ is
 $0 \leq x \leq 2\frac{1}{2}$ of $2\pi < x < 4\pi$.
c Invoer: $y_2 = -10$
Optie: snijpunt.
De uitkomsten zijn $x \approx 8,34$ en $x \approx 11,37$.
Uit de grafiek lees je de oplossing van de ongelijkheid af:
 $8,34 < x < 11,37$
d Er zijn oplossingen, want $\sin(\frac{1}{2}x)$ varieert van -1 tot 1 , terwijl $2x - 5$ onbegrensd toeneemt, dus er zal een waarde zijn van x waarvoor het product van deze twee als uitkomst 100 heeft.

- 31 a** De periode is $\frac{1}{50} = 0,02$ seconde, dus $t = 0,05$ is na $2\frac{1}{2}$ periode.
Dat is dezelfde situatie als na $\frac{1}{2}$ periode, op dat tijdstip neemt de spanning af.

- b** Los $300 \sin(100\pi t) = 250$ op voor één periode, dus $0 < t < 0,02$.

Invoer: $y_1 = 300 \sin(100\pi x)$ en $y_2 = 250$

Venster: $0 \leq x \leq 0,02, -300 \leq y \leq 300$.

Optie: snijpunt

Dit geeft $x \approx 0,0031$ of $x \approx 0,0069$, dus $t \approx 0,0031$ of $t \approx 0,0069$

$$\frac{0,0069 - 0,0031}{0,02} = 0,19.$$

Dus 19% van de tijd is de spanning hoger dan 250 volt.

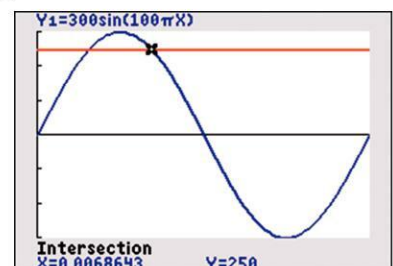
- c** Invoer: $y_3 = 60 \sin(100\pi x - 25)$

Optie: maximum

Het maximum ligt bij $x \approx 0,0046$.

Het maximum van V wordt bereikt na $\frac{1}{4}$ periode, dus na 0,005 seconden.

Het maximum van V^* ligt bij $t \approx 0,0046$, dus 0,0004 seconde eerder.



12 Goniometrische formules

32 a De periode is $\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{365}} = 365$ en er zitten 365 dagen in een niet-schrikkeljaar.

b De waarde van $\cos\left(\frac{2\pi}{365}(t+11)\right)$ varieert van -1 tot 1 .
Het vroegste tijdstip van zonsopkomst is $-2,2 + 6,5 = 4,3$, dus 4.18 uur.
Het laatste tijdstip van zonsopkomst is $2,2 + 6,5 = 8,7$, dus om 8.42 uur.

c Invoer: $y_1 = 2,2 \cos(2\pi / 365(t+11)) + 6,5$ en $y_2 = 7$

Venster: $0 \leq x \leq 365$, $0 \leq y \leq 10$

Optie: snijpunt

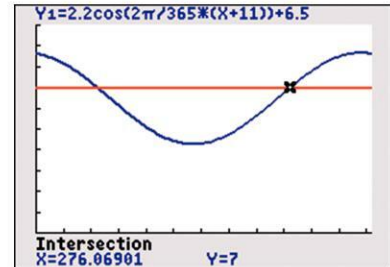
$x \approx 67$ en $x \approx 276$

$t \approx 67$ en $t \approx 276$, dus de zon komt vóór 7 uur op
gedurende $276 - 67 = 209$ dagen.

d Op 1 augustus geldt $t = 212$. De verandering op 1 augustus is
 $O(212) - O(211) \approx 0,024$ uur (= 1,44 minuten).

Op 1 oktober geldt $t = 273$. De verandering op 1 oktober is
 $O(273) - O(272) \approx 0,037$ uur (= 2,24 minuten).

De verandering in de herfst is dus groter dan in de zomer.



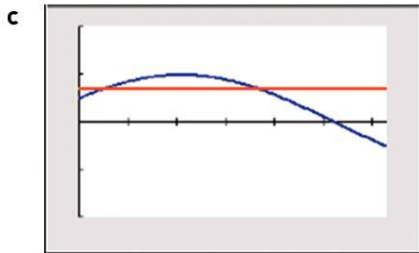
028 a $q = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $q = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

b $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\pi = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$\frac{1}{2}x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\frac{1}{2}x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 4\pi$ of $x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 4\pi$



De oplossing van $\sin\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)\right) > \frac{1}{2}\sqrt{2}$ is $\frac{1}{6}\pi < x < 1\frac{1}{6}\pi$.

U4 a De maximale daglengte is 24 uur in de gebieden dicht bij de Noordpool
(en de Zuidpool).

b $D = (24 - 3,26 \cdot (66,5 - b)^{0,31} - 12,18) \cdot \sin(0,12(t - 11,43)) + 12,18$ als

$0 \leq b < 66,5$

$D = (24 - 12,18) \cdot \sin(0,12(t - 11,43)) + 12,18$ als $66,5 \leq b \leq 90$

c De grootste daglengte is in dit geval $24 - 3,26 \cdot (66,5 - 51)^{0,31} \approx 16,38$, dus de
amplitude is $16,38 - 12,18 = 4,2$.

Voor de daglengte in Nederland geldt de formule:

$D = 4,2 \cdot \sin(0,12(t - 11,43)) + 12,18$

Invoer: $y_1 = 4,2 \cdot \sin(0,12(x - 11,43)) + 12,18$ en $y_2 = 15$

Venster: $0 \leq x \leq 52$, $0 \leq y \leq 24$

Optie: snijpunten

De snijpunten zijn bij $t = 17,564\dots$ en $t = 31,475\dots$

De daglengte is meer dan 15 uur gedurende $31,475\dots - 17,564\dots = 13,911\dots$
weken en dat is $7 \times 13,911\dots \approx 97$ dagen.

12.5 Gemengde opdrachten

- 33** Grafiek A: het maximum is 4 en het minimum is 0, dus $c = 2$ en $a = 2$.
De periode is 2π , dus $b = 1$.

Een functievoorschrift is $f(x) = 2\cos(x) + 2$.

Grafiek B: het minimum is 1 en de evenwichtsstand is $y = 2$,
dus $c = 2$ en $a = 1$ of $a = -1$.

Een halve periode is $1\frac{1}{2}\pi$, dus de periode is 3π en $b = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$.

De grafiek gaat in $(0, 2)$ dalend door de evenwichtsstand.

Een functievoorschrift is $f(x) = -\sin\left(\frac{2}{3}x\right) + 2$.

Grafiek C: het maximum is 3 en de evenwichtsstand is 2, dus $c = 2$ en $a = 1$.

Een halve periode is 2π , dus de periode is 4π en $b = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$.

De grafiek gaat in $(0, 2)$ stijgend door de evenwichtsstand.

Een functievoorschrift is $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + 2$.

Grafiek D: het maximum is 1 en het minimum is -1 , dus $c = 0$ en $a = 1$.

$1\frac{1}{2}$ periode is 2π , dus de periode is $\frac{2\pi}{1\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{3}\pi$ en $b = \frac{2\pi}{1\frac{1}{3}\pi} = 1\frac{1}{2}$.

Een functievoorschrift is $f(x) = \cos\left(1\frac{1}{2}x\right)$.

- 34 a** Uit $1 + 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 2$ volgt $2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 1$, dus $\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}$.

Stel $q = \frac{1}{2}x$. Uit $\cos(q) = \frac{1}{2}$ volgt $q = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $q = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\frac{1}{2}x = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 4\pi$ of $x = 3\frac{1}{3}\pi + k \cdot 4\pi$

De oplossingen op $[0, 6\pi]$ zijn $x = \frac{2}{3}\pi$, $x = 3\frac{1}{3}\pi$ en $x = 4\frac{2}{3}\pi$.

- b** Uit $\sin(\pi x) + 1 = 0$ volgt $\sin(\pi x) = -1$.

Stel $q = \pi x$. Uit $\sin(q) = -1$ volgt $q = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$\pi x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = 1\frac{1}{2} + k \cdot 2$

De oplossingen op $[-2, 2]$ zijn $x = 1\frac{1}{2}$ en $x = -\frac{1}{2}$.

- c** Los eerst op $2\cos\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = \sqrt{3}$, dus $\cos\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Stel $q = 2x - \frac{1}{3}\pi$. Uit $\cos(q) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ volgt $q = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $q = 1\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$2x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x - \frac{1}{3}\pi = 1\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x = 2\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

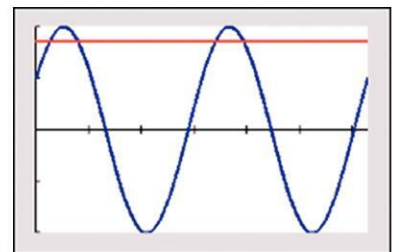
$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$ of $x = 1\frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi$

De oplossingen op $[0, 2\pi]$ zijn $x = \frac{1}{12}\pi$, $x = \frac{1}{4}\pi$, $x = 1\frac{1}{12}\pi$ en $x = 1\frac{1}{4}\pi$.

Zie de plot hiernaast.

De oplossing van $2\cos\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) < \sqrt{3}$ is:

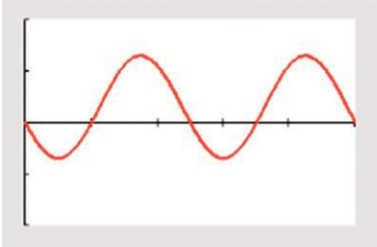
$0 \leq x < \frac{1}{12}\pi$ of $\frac{1}{4}\pi < x < 1\frac{1}{12}\pi$ of $1\frac{1}{4}\pi < x \leq 2\pi$.



12 Goniometrische formules

- 35 a** De periode van f en de periode van g zijn beide $\frac{2\pi}{\frac{2}{5}\pi} = 5$.
- b** Uit een plot blijkt dat $(1,56; 2,50)$ en $(4,06; -2,50)$ twee opeenvolgende toppen zijn.
De evenwichtsstand is dus $y = 0$ en de amplitude is $2,50$.
Een halve periode is $4,06 - 1,56 = 2,50$, dus de periode is 5 .
Een functievoorschrift is $s(x) = 2,50 \cos\left(\frac{2}{5}(x - 1,56)\right)$.

c

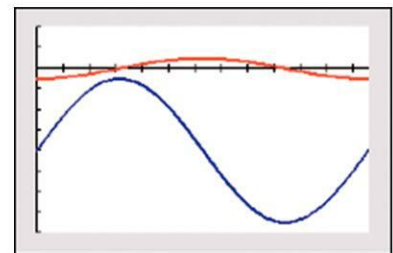


- d** Uit de plot blijkt dat $(1,75; 1,31)$ en $(3,00; -0,69)$ twee opeenvolgende toppen zijn.
De evenwichtsstand d is dus $y = \frac{-0,69 + 1,31}{2} = 0,31$ en
de amplitude a is $1,31 - 0,31 = 1,00$.
De periode is $2(3,00 - 1,75) = 2,50$, dus $b = \frac{2\pi}{2,50} \approx 2,51$.
Een functievoorschrift is $p(x) = 0,31 + 1,00 \cos(2,51(x - 1,75))$.

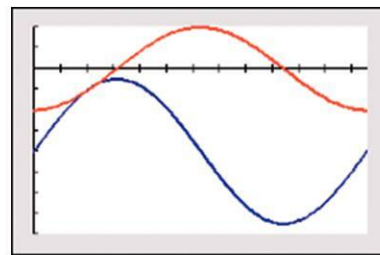
- 36 a** Uit $\sin(2^x) = 0$ volgt $2^x = 0 + k \cdot \pi$, dus
 $2^x = 0$ of $2^x = \pi$ of $2^x = 2\pi$ of $2^x = 3\pi$ of ...
($2^x = 0$ heeft geen oplossing) $x = {}^2\log(\pi) \approx 1,65$ of $x = {}^2\log(2\pi) \approx 2,65$ of
 $x = {}^2\log(3\pi) \approx 3,24$ of ...
De nulpunten op het interval $[0, \pi]$ zijn $x \approx 1,65$ en $x \approx 2,65$.
- b** In een top geldt $\sin(2^x) = 1$ of $\sin(2^x) = -1$, dus
 $2^x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2^x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$, ofwel $2^x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.
 $2^x = \frac{1}{2}\pi$ of $2^x = 1\frac{1}{2}\pi$ of $2^x = 2\frac{1}{2}\pi$ of ...
 $x = {}^2\log\left(\frac{1}{2}\pi\right) \approx 0,65$ of $x = {}^2\log\left(1\frac{1}{2}\pi\right) \approx 2,24$ of $x = {}^2\log\left(2\frac{1}{2}\pi\right) \approx 2,97$.
De toppen op het interval $[0, \pi]$ zijn $(0,65; 1)$, $(2,24; -1)$ en $(2,97; 1)$.

Onderzoeksopdrachten

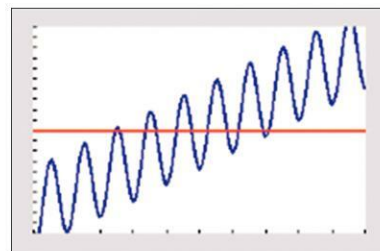
- 37 a** De periode van beide formules is $\frac{2\pi}{0,5} = 4\pi$.
Invoer: $y_1 = -4 + 3,5 \sin(0,5x)$ en $y_2 = -0,5 \cos(0,5x)$
Venster: $0 \leq x \leq 4\pi$, $-8 \leq y \leq 2$
Uit de plot blijkt dat de onderste grafiek nergens de bovenste grafiek snijdt.
Dit betekent dat de drijver op geen enkel moment boven het water uitsteekt.



- b** De drijver komt precies aan het wateroppervlak als $d = w$, dus als $-4 + 5,3 \sin(0,5t) = -A \cos(0,5t)$. Door in de plot de factor 0,5 in de formule van w met stappen van 0,1 te veranderen ontdek je, dat de grafieken snijpunten hebben vanaf $A = 2,0$, zie de plot hiernaast. Dat betekent dat vanaf een golfamplitude van 2,0 meter de drijver af en toe boven water uitsteekt.



- 38 a** Twee geschikte punten zijn (1, 339) en (8, 350) (in 1981 en 1988). Daaruit volgt dat de richtingscoëfficiënt $m = \frac{350 - 339}{8 - 1} \approx 1,57$, dus een vergelijking heeft de vorm $T = 1,57t + n$. Invullen van (8, 350) geeft $350 = 1,57 \cdot 8 + n$, dus $n \approx 337,43$.
- b** De maximale uitwijking ten opzichte van de stippellijn is ongeveer 4. De periode is een jaar, dus $b = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$. Er is een minimum aan het begin van elk jaar, dus een formule is $S = -4 \cos(2\pi t)$, dus $a = -4$.
- c** De grafiek kan worden beschreven met de formule $T + S = 1,57t + 337,43 - 4 \cos(2\pi t)$. Invoer: $y_1 = 1,57x + 337,43 - 4 \cos(2\pi x)$ en $y_2 = 400$
Venster: $35 \leq x \leq 45$, $390 \leq y \leq 410$
Optie: snijpunt
Dit geeft $x \approx 37,45$, en dat correspondeert met het jaar $1980 + 37 = 2017$.



Samenvatting

- S1 a** Het maximum is 4, het minimum is -8 . De evenwichtsstand d is $\frac{1}{2}(4 + -8) = -2$ en de amplitude a is $4 - -2 = 6$. De periode is 4, dus $b = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$. Er is een top bij $x = -1$, dus $c = x_{\max} = -1$. Een functievoorschrift is $f(x) = -2 + 6 \cos\left(\frac{1}{2}\pi(x + 1)\right)$.
- b** $d = -3$, $b = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi$, de amplitude a is $4 - -3 = 7$ en $c = x_{\max} = 5$. Een functievoorschrift is $f(x) = -3 + 7 \cos\left(\frac{1}{6}\pi(x - 5)\right)$.
- S2 a** Er is symmetrie in de lijn $x = \frac{1}{2}\pi$, dus $\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.
- b** Er is puntsymmetrie in $(0, 0)$, dus $\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
- c** Gebruik de periode 2π : $\sin\left(3\frac{1}{4}\pi\right) = \sin\left(1\frac{1}{4}\pi\right)$. Er is puntsymmetrie in $(\pi, 0)$, dus $\sin\left(1\frac{1}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)$. Conclusie: $\sin\left(3\frac{1}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
- d** $-5\frac{3}{4}\pi + 3 \cdot 2\pi = \frac{1}{4}\pi$, dus $\sin\left(-5\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

S3 a De oplossing op $[0, 2\pi]$ is $x = 1\frac{1}{2}\pi$.

De oplossingen op $[-4\pi, 4\pi]$ zijn $x = 1\frac{1}{2}\pi$, $x = 3\frac{1}{2}\pi$, $x = -\frac{1}{2}\pi$ en $x = -2\frac{1}{2}\pi$.

b De oplossingen op $[0, 2\pi]$ zijn $x = \frac{1}{3}\pi$ en $x = 1\frac{2}{3}\pi$.

De oplossingen op $[-2\pi, 4\pi]$ zijn

$x = \frac{1}{3}\pi$, $x = 1\frac{2}{3}\pi$, $x = 2\frac{1}{3}\pi$, $x = 3\frac{2}{3}\pi$, $x = -\frac{1}{3}\pi$ en $x = -1\frac{2}{3}\pi$.

S4 a Stel $q = 3(x - \frac{1}{3}\pi)$.

Uit $2\sin(q) = -\sqrt{2}$ volgt $\sin(q) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

De oplossingen van $\sin(q) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ zijn $q = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $q = 1\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$3(x - \frac{1}{3}\pi) = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3(x - \frac{1}{3}\pi) = 1\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$3x - \pi = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3x - \pi = 1\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$3x = 2\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3x = 2\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $x = \frac{11}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

De oplossingen op $[0, 2\pi]$ zijn $x = \frac{1}{12}\pi$, $x = \frac{1}{4}\pi$, $x = \frac{3}{4}\pi$, $x = \frac{11}{12}\pi$, $x = 1\frac{5}{12}\pi$ en $x = 1\frac{7}{12}\pi$.

b Stel $q = \pi(x - \frac{1}{3})$.

Uit $2\sin(q) = 1$ volgt $\sin(q) = \frac{1}{2}$

De oplossingen van $\sin(q) = \frac{1}{2}$ zijn $q = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $q = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$\pi(x - \frac{1}{3}) = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\pi(x - \frac{1}{3}) = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$\pi x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\pi x - \frac{1}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$\pi x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\pi x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{2} + k \cdot 2$ of $x = 1\frac{1}{6} + k \cdot 2$

De oplossingen op $[0, \pi]$ zijn $x = \frac{1}{2}$, $x = 2\frac{1}{2}$ en $x = 1\frac{1}{6}$.

c $2\sin(3(x - \frac{1}{3}\pi)) \cdot \cos(2x) = 0$

$2\sin(3(x - \frac{1}{3}\pi)) = 0$ of $\cos(2x) = 0$

Stel $q = 3(x - \frac{1}{3}\pi)$ Stel $2x = q$

$2\sin(q) = 0$ $\cos(q) = 0$

$\sin(q) = 0$ $q = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

$q = 0 + k \cdot \pi$ $2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

$3(x - \frac{1}{3}\pi) = 0 + k \cdot \pi$ $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

$3x - \pi = 0 + k \cdot \pi$

$3x = \pi + k \cdot \pi$

$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$

De oplossingen op $[0, \pi]$ zijn $x = \frac{1}{3}\pi$, $x = \frac{2}{3}\pi$, $x = \pi$, $x = \frac{1}{4}\pi$ en $x = \frac{3}{4}\pi$.

S5 a Eerst de vergelijking $\cos(x + \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$ oplossen.

Stel $q = x + \frac{1}{6}\pi$.

Uit $\cos(q) = \frac{1}{2}$ volgt $q = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $q = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$x + \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x + \frac{1}{6}\pi = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

De oplossingen op $[-\pi, \pi]$ zijn $x = \frac{1}{6}\pi$ en $x = -\frac{1}{2}\pi$.

Zie de plot, de oplossing van $\cos(x + \frac{1}{6}\pi) \geq \frac{1}{2}$ is $-\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{1}{6}\pi$.

b Eerst oplossen: $\sin\left(\frac{1}{2}x\right) + 1 = \frac{1}{2}$ ofwel $\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}$.

Stel $q = \frac{1}{2}x$.

Uit $\sin(q) = -\frac{1}{2}$ volgt $q = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $q = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.

$\frac{1}{2}x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\frac{1}{2}x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 4\pi$ of $x = \frac{5}{3}\pi + k \cdot 4\pi$

De oplossingen op $[2\pi, 10\pi]$ zijn $x = 2\frac{1}{3}\pi$, $x = 3\frac{2}{3}\pi$, $x = 6\frac{1}{3}\pi$ en $x = 7\frac{2}{3}\pi$.

Zie de plot, de oplossing van $\sin\left(\frac{1}{2}x\right) + 1 \leq \frac{1}{2}$ is

$2\frac{1}{3}\pi \leq x \leq 3\frac{2}{3}\pi$ of $6\frac{1}{3}\pi \leq x \leq 7\frac{2}{3}\pi$.

Test jezelf

T1 Voor functie f geldt dat het maximum 1 is en het minimum -3 .
De evenwichtsstand d is $\frac{1}{2}(1 + (-3)) = -1$ en de amplitude a is $1 - (-1) = 2$.

De periode is 10, dus $b = \frac{2\pi}{10} = \frac{1}{5}\pi$.

De grafiek gaat in $(0, -1)$ stijgend door de evenwichtsstand, dus $c = 0$.

Een functievoorschrift is $f(x) = -1 + 2\sin\left(\frac{1}{5}\pi x\right)$.

Voor functie g geldt dat het maximum -1 is en het minimum -4 .

De evenwichtsstand d is $\frac{1}{2}(-1 + (-4)) = -2\frac{1}{2}$.

De amplitude a is $-1 - (-2\frac{1}{2}) = 1\frac{1}{2}$.

een halve periode $12 - 2 = 10$, dus de periode is 20.

$b = \frac{2\pi}{20} = \frac{1}{10}\pi$ en een top is $(12, -1)$, dus $c = x_{\max} = 12$.

Een functievoorschrift is $g(x) = -2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{10}\pi(x - 12)\right)$.

T2 a $4 - 2\cos(x) = 3$ ofwel $-2\cos(x) = -1$ dus $\cos(x) = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

De oplossingen op $[-\pi, 2\pi]$ zijn $x = \frac{1}{3}\pi$, $x = \frac{2}{3}\pi$ en $x = -\frac{1}{3}\pi$.

b $8\cos(x) - 8 = 0$ ofwel $8\cos(x) = 8$ dus $\cos(x) = 1$

$x = 0 + k \cdot 2\pi$

De oplossingen op $[-\pi, 2\pi]$ zijn $x = 0$ en $x = 2\pi$.

c $3\sin(x) = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$ dus $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

De oplossingen op $[-\pi, 2\pi]$ zijn $x = \frac{1}{3}\pi$ en $x = \frac{2}{3}\pi$.

d $\sin(x) + 1 = 1\frac{1}{2}$ dus $\sin(x) = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

De oplossingen op $[-\pi, 2\pi]$ zijn $x = \frac{1}{6}\pi$ en $x = \frac{5}{6}\pi$.

T3 a Uit $1\frac{1}{2} + 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = 2\frac{1}{2}$ volgt $2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = 1$ dus $\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}$.

Stel $q = \frac{1}{2}x$.

$\sin(q) = \frac{1}{2}$ geeft $q = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $q = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$\frac{1}{2}x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\frac{1}{2}x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 4\pi$ of $x = \frac{5}{3}\pi + k \cdot 4\pi$

De oplossingen op $[0, 6\pi]$ zijn $x = \frac{1}{3}\pi$, $x = \frac{5}{3}\pi$, $x = 4\frac{1}{3}\pi$ en $x = 5\frac{2}{3}\pi$.

- b** Uit $4\cos(\pi(x-2)) = 2\sqrt{3}$ volgt $\cos(\pi(x-2)) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Stel $q = \pi(x-2)$.

$$\cos(q) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ geeft } q = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } q = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\pi(x-2) = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \pi(x-2) = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\pi x - 2\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \pi x - 2\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\pi x = 2\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \pi x = 3\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

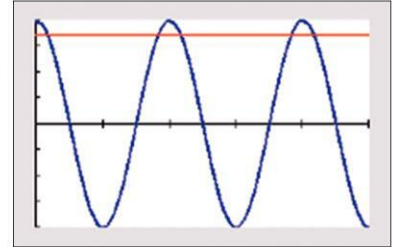
$$x = 2\frac{1}{6} + k \cdot 2 \text{ of } x = 3\frac{5}{6} + k \cdot 2$$

De oplossingen op $[0, 5]$ zijn

$$x = \frac{1}{6}, x = 1\frac{5}{6}, x = 2\frac{1}{6}, x = 3\frac{5}{6} \text{ en } x = 4\frac{1}{6}.$$

Zie de plot hiernaast, de oplossing van $4\cos(\pi(x-2)) < 2\sqrt{3}$ is

$$\frac{1}{6} < x < 1\frac{5}{6} \text{ of } 2\frac{1}{6} < x < 3\frac{5}{6} \text{ of } 4\frac{1}{6} < x \leq 5.$$



- c** $\sin(2x) \cdot \cos(x - \frac{1}{3}\pi) = 0$

$$\sin(2x) = 0 \text{ of } \cos(x - \frac{1}{3}\pi) = 0$$

$$2x = 0 + k \cdot \pi \text{ of } x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = 0 + k \cdot \frac{1}{2}\pi \text{ of } x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi$$

De oplossingen op $[0, 2\pi]$ zijn

$$x = 0, x = \frac{1}{2}\pi, x = \frac{5}{6}\pi, x = \pi, x = 1\frac{1}{2}\pi, x = 1\frac{5}{6}\pi \text{ en } x = 2\pi.$$

- d** Stel $\sin(x) = p$, dan wordt de vergelijking $3p - 6p^2 = 0$.

$$3p(1 - 2p) = 0$$

$$3p = 0 \text{ of } 1 - 2p = 0$$

$$p = 0 \text{ of } p = \frac{1}{2}$$

$$\sin(x) = 0 \text{ of } \sin(x) = \frac{1}{2}$$

$$x = 0 + k \cdot \pi \text{ of } x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

De oplossingen op $[0, 2\pi]$ zijn

$$x = 0, x = \frac{1}{6}\pi, x = \frac{5}{6}\pi, x = \pi \text{ en } x = 2\pi.$$

- T4 a** De periode is 2π .

b $f(\frac{3}{4}\pi) = \sin(\frac{3}{4}\pi) + \cos(\frac{3}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2} + (-\frac{1}{2}\sqrt{2}) = 0$

- c** Een halve periode is π , dus de grafiek snijdt de x -as behalve bij $x = \frac{3}{4}\pi$ ook bij $x = 1\frac{3}{4}\pi$.

De toppen liggen daarom bij $x = \frac{1}{4}\pi$ en $x = 1\frac{1}{4}\pi$.

$$\text{Het maximum is } f(\frac{1}{4}\pi) = \sin(\frac{1}{4}\pi) + \cos(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

$$\text{Het minimum is } f(1\frac{1}{4}\pi) = \sin(1\frac{1}{4}\pi) + \cos(1\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + -\frac{1}{2}\sqrt{2} = -\sqrt{2}.$$

- d** De amplitude a is $\sqrt{2}$.

$$\text{De periode is } 2\pi, \text{ dus } b = \frac{2\pi}{2\pi} = 1.$$

De grafiek gaat bij $x = -\frac{1}{4}\pi$ stijgend door de evenwichtsstand, dus $c = -\frac{1}{4}\pi$.

$$\text{Een functievoorschrift is } f(x) = \sqrt{2}\sin(x + \frac{1}{2}\pi).$$

- e** Het maximum ligt bij $x = \frac{1}{4}\pi$, dus $c = x_{\max} = \frac{1}{4}\pi$.

$$\text{Een functievoorschrift is } f(x) = \sqrt{2}\cos(x - \frac{1}{4}\pi).$$

- T5 a** De periode bij de formule $g = \cos(2\pi t)$ is $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$ uur.

De periode bij de formule $k = \cos(\frac{1}{6}\pi t)$ is $\frac{2\pi}{\frac{1}{6}\pi} = 12$ uur.

de formule $k = \cos(\frac{1}{6}\pi t)$ hoort bij de urenwijzer.

- b** De vergelijking $\cos(2\pi t) = \cos\left(\frac{1}{6}\pi t\right)$ op interval $[0, 3]$ moet worden opgelost.
 Invoer: $y_1 = \cos(2\pi x)$ en $y_2 = \cos(\pi x / 6)$
 Venster: $0 \leq x \leq 3$, $-1 \leq y \leq 1$
 Optie: snijpunt
 $x = 0,923\dots$ of $x = 1,0909\dots$ of $x = 1,846\dots$ of $x = 2,1818\dots$ of $x = 2,769\dots$
 dus
 $t = 0,923\dots$ of $t = 1,0909\dots$ of $t = 1,846\dots$ of $t = 2,1818\dots$ of $t = 2,769\dots$
 Echter niet al deze tijdstippen voldoen, omdat de wijzers aan dezelfde kant van de verticale as moeten staan. Dit is enige tijd na 13.00 uur en na 14.00 uur.
 De tijdstippen zijn 65 minuten en 131 minuten na 12.00 uur, dus om 13.05 uur en 14.11 uur.
- c** Op 0.00 uur vallen de wijzers samen. De urenwijzer draait in een etmaal twee keer rond, en de minutenwijzer 24 keer, dus tussen 0.00 uur en 24.00 uur vallen de wijzers 22 keer samen. In totaal vallen de wijzers 23 keer samen.

T6 a De periode is $\frac{2\pi}{3\pi} \approx 0,67$ seconde.

- b** De hoogste bloeddruk was $110 + 20 = 130$ mm kwik en de laagste bloeddruk was $110 - 20 = 90$ mm kwik.

- c** De evenwichtsstand is $\frac{1}{2}(115 + 175) = 145$ en de amplitude is $175 - 145 = 30$.

De periode is $\frac{60}{80} = \frac{3}{4}$ seconde, dus $b = \frac{2\pi}{\frac{3}{4}} = 2\frac{2}{3}\pi$.

Een formule is $p = 145 + 30 \sin\left(2\frac{2}{3}\pi t\right)$.

T7 a De grafiek van f is ontstaan uit de grafiek van $h(x) = 4 \sin(x)$ door een verschuiving van $\frac{1}{10}\pi$ naar rechts.

De grafiek van g is ontstaan uit de grafiek van $h(x) = 4 \sin(x)$ door een verschuiving van $\frac{1}{10}\pi$ naar links.

Door de grafiek van f over een afstand $\frac{2}{10}\pi = \frac{1}{5}\pi$ naar links te verschuiven ontstaat de grafiek van g .

- b** Door de functies te plotten vind je dat twee opeenvolgende toppen onder andere zijn $(0, -2,47)$ en $(\pi; 2,47)$.

De evenwichtsstand d is $y = 0$ en de amplitude a is 2,47.

Een halve periode is π , dus de periode is 2π en $b = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

De grafiek gaat in $(\frac{1}{2}\pi, 0)$ stijgend door de evenwichtsstand, dus $c = \frac{1}{2}\pi$.

Een mogelijke functievoorschrift is $v(x) = 2,47 \sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$.

Extra oefening

E1 a De evenwichtsstand $d = \frac{1}{2}(10 + -6) = 2$.

De amplitude is $10 - 2 = 8$, dus $a = 8$.

De periode is $5\pi - -3\pi = 8\pi$, dus $b = \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4}$.

Er is een maximum bij $x = \pi$, dus $c = x_{\max} = \pi$.

Een functievoorschrift is $f(x) = 2 + 8 \cos\left(\frac{1}{4}(x - \pi)\right)$.

- b** De evenwichtsstand is $y = 3$, dus $d = 3$.

De amplitude is $7 - 3 = 4$, dus $a = 4$.

Van $(4, 3)$ naar $(8, 7)$ is een kwart periode, dus de periode is $4 \times 4 = 16$.

$$b = \frac{2\pi}{16} = \frac{1}{8}\pi \text{ en } c = 4.$$

Een functievoorschrift is $f(x) = 3 + 4\sin\left(\frac{1}{8}\pi(x - 4)\right)$.

E2 $\sin\left(17\frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = -1$

$$\sin\left(-1\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(1\frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\cos\left(-1\frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$$

E3 a $\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, dus de oplossingen van $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ op $[0, 2\pi]$ zijn

$$x = \frac{5}{6}\pi \text{ of } x = 1\frac{1}{6}\pi.$$

De oplossingen op $[3\pi, 6\pi]$ zijn $x = 3\frac{1}{6}\pi$, $x = 4\frac{5}{6}\pi$ en $x = 5\frac{1}{6}\pi$.

b $6\sin(x) + 8 = 5$

$$6\sin(x) = -3$$

$$\sin(x) = -\frac{1}{2}$$

$\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$, dus de oplossingen van $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ op $[0, 2\pi]$ zijn

$$x = 1\frac{1}{6}\pi \text{ of } x = 1\frac{5}{6}\pi.$$

De oplossingen op $[-2\pi, 2\pi]$ zijn $x = -\frac{5}{6}\pi$, $x = -\frac{1}{6}\pi$, $x = 1\frac{1}{6}\pi$ en $x = 1\frac{5}{6}\pi$.

E4 a $2\sin(2x) = \sqrt{2}$

$$\sin(2x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Stel $q = 2x$

$$\sin(q) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ geeft } q = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } q = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$2x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{8}\pi + k \cdot \pi \text{ of } x = \frac{3}{8}\pi + k \cdot \pi$$

De oplossingen op $[0, 2\pi]$ zijn $x = \frac{1}{8}\pi$, $x = \frac{3}{8}\pi$, $x = 1\frac{1}{8}\pi$ en $x = 1\frac{3}{8}\pi$.

b $3 + 4\cos\left(1\frac{1}{2}x\right) = 1$

$$4\cos\left(1\frac{1}{2}x\right) = -2$$

$$\cos\left(1\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Stel } q = 1\frac{1}{2}x$$

$$\cos(q) = -\frac{1}{2} \text{ geeft } q = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } q = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$1\frac{1}{2}x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 1\frac{1}{2}x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{4}{9}\pi + k \cdot 1\frac{1}{3}\pi \text{ of } x = \frac{8}{9}\pi + k \cdot 1\frac{1}{3}\pi$$

De oplossingen op $[0, 2\pi]$ zijn $x = \frac{4}{9}\pi$, $x = \frac{8}{9}\pi$ en $x = 1\frac{7}{9}\pi$.

c $6 - \sin\left(\frac{1}{2}x\right) = 5\frac{1}{2}$

$$\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Stel } q = \frac{1}{2}x$$

$$\sin(q) = \frac{1}{2} \text{ geeft } q = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } q = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{1}{2}x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 4\pi \text{ of } x = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 4\pi$$

De oplossingen op $[0, 2\pi]$ zijn $x = \frac{1}{3}\pi$ en $x = 1\frac{2}{3}\pi$.

- d $8x^2 \cdot \cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = 0$
 $8x^2 = 0$ of $\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = 0$
 $x = 0$ of $x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
 $x = 0$ of $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi$
 De oplossingen op $[0, 2\pi]$ zijn $x = 0$, $x = \frac{5}{6}\pi$ en $x = 1\frac{5}{6}\pi$.

E5 a Los eerst de vergelijking $2 \sin(3x) = 0$, dus $\sin(3x) = 0$ op.

$$3x = 0 + k \cdot \pi$$

$$x = 0 + k \cdot \frac{1}{3}\pi$$

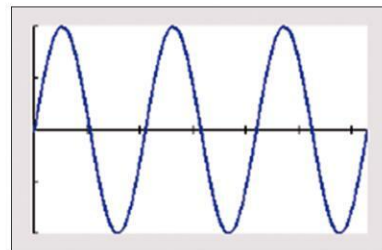
De oplossingen op $[0, 2\pi]$ zijn

$$x = 0, x = \frac{1}{3}\pi, x = \frac{2}{3}\pi, x = \pi, x = 1\frac{1}{3}\pi, x = 1\frac{2}{3}\pi \text{ en } x = 2\pi$$

Zie de plot hiernaast.

De oplossing van de ongelijkheid is

$$\frac{1}{3}\pi < x < \frac{2}{3}\pi \text{ of } \pi < x < 1\frac{1}{3}\pi \text{ of } 1\frac{2}{3}\pi < x < 2\pi.$$



b Los eerst de vergelijking $12 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + 5 = 17$ op.

$$12 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) = 12$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = 1$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \pi + k \cdot 4\pi$$

De oplossingen op $[0, 6\pi]$ zijn $x = \pi$ en $x = 5\pi$.

De oplossing van de ongelijkheid is $x = \pi$ of $x = 5\pi$, want een sinus kan wel de waarde 1 hebben, maar niet groter dan 1.

c Los eerst de vergelijking $3 - 2 \cos\left(\frac{1}{4}\pi(x+2)\right) = 2$ op.

$$2 \cos\left(\frac{1}{4}\pi(x+2)\right) = 1$$

$$\cos\left(\frac{1}{4}\pi(x+2)\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Stel } q = \frac{1}{4}\pi(x+2)$$

$$\cos(q) = \frac{1}{2} \text{ geeft } q = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } q = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\frac{1}{4}\pi(x+2) = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{1}{4}\pi(x+2) = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\frac{1}{4}\pi x + \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{1}{4}\pi x + \frac{1}{2}\pi = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

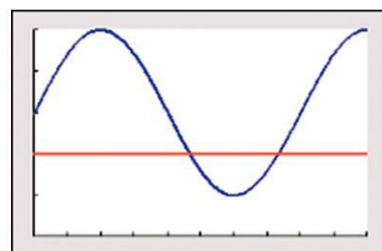
$$\frac{1}{4}\pi x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{1}{4}\pi x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{2}{3} + k \cdot 8 \text{ of } x = 4\frac{2}{3} + k \cdot 8$$

De oplossingen op $[0, 10]$ zijn $x = 4\frac{2}{3}$ en $x = 7\frac{1}{3}$.

Zie de plot hiernaast.

De oplossing van de ongelijkheid is $4\frac{2}{3} < x < 7\frac{1}{3}$.



E6 a De maand juni, dan valt er ongeveer 1 miljoen m³ regenwater.

b Deze grafiek moet dan met 0,4 vermenigvuldigd worden ten opzichte van de x-as en 1 naar rechts worden verschoven (t vervangen door $t - 1$).

$$s = 0,4\left(10 + 9 \cos\left(\frac{1}{6}\pi(t-1)\right)\right) \text{ ofwel } s = 4 + 3,6 \cos\left(\frac{1}{6}\pi(t-1)\right).$$

c $t = 4$ geeft $s = 4 + 3,6 \cos\left(\frac{1}{6}\pi(4-1)\right)$ ofwel $s = 4 + 3,6 \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right)$ dus $s = 4$.

Dat betekent dat er in april 4 miljoen m³ water het stuwmeer bereikt.

d $t = 6$ geeft $r = 1$, dus de hoeveelheid regenwater in juni is 1 miljoen m³.

$t = 6$ geeft $s \approx 0,88$, dus in juni bereikt er 0,88 miljoen m³ water het stuwmeer.

De hoeveelheid neerslag is dus groter.

E7 a $2x \cdot (2\sin(x) + 1) = 0$

$$2x = 0 \text{ of } \sin(x) = -\frac{1}{2}$$

$$x = 0 \text{ of } x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = 1\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

De oplossingen op $[0, 2\pi]$ zijn $x = 0$, $x = 1\frac{1}{6}\pi$ en $x = 1\frac{5}{6}\pi$.

b $4x \cdot \sin(3x) + 2 \cdot \sin(3x) = 0$

$$\sin(3x) \cdot (4x + 2) = 0$$

$$\sin(3x) = 0 \text{ of } 4x + 2 = 0$$

$$3x = 0 + k \cdot \pi \text{ of } 4x = -2$$

$$x = 0 + k \cdot \frac{1}{3}\pi \text{ of } x = -\frac{1}{2}$$

De oplossingen op $[-\pi, \pi]$ zijn

$$x = -\pi, x = -\frac{2}{3}\pi, x = -\frac{1}{3}\pi, x = -\frac{1}{2}, x = 0, x = \frac{1}{3}\pi, x = \frac{2}{3}\pi \text{ en } x = \pi.$$

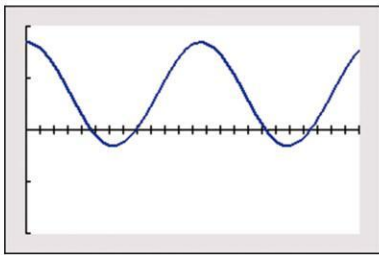
E8 Vervang eerst x door $-x$ en daarna x door $\frac{1}{2}x$:

Het functievoorschrift wordt $g(x) = 2 - 4\sin\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\pi\right)\right)$ ofwel

$$g(x) = 2 - 4\sin\left(-\frac{1}{4}x + \frac{1}{12}\pi\right).$$

E9 a Invoer: $y_1 = 0.7 + \cos(0.5x)$

Venster: $0 \leq x \leq 24$, $-2 \leq y \leq 2$



De maximale waterhoogte is $0,7 + 1 = 1,7$ meter.

b De vergelijking $0,7 + \cos(0,5t) = 0$ moet worden opgelost.

Optie: nulpunt

Dit geeft $t \approx 4,7$ of $t \approx 7,9$ of $t \approx 17,3$ of $t \approx 20,4$.

Het droogvallen gebeurt op de tijdstippen $t \approx 4,7$ en $t \approx 17,3$, dat is om 4.42 uur en om 17.18 uur.

De plaat staat in beide perioden droog gedurende ongeveer

$$7,9 - 4,7 = 3,2 \text{ uur, dat is 3 uur en 12 minuten.}$$

c $60 \text{ cm} = 0,6 \text{ m}$

De ongelijkheid $0,7 + \cos(0,5t) < 0,6$

moet worden opgelost.

Invoer: $y_2 = 0.6$

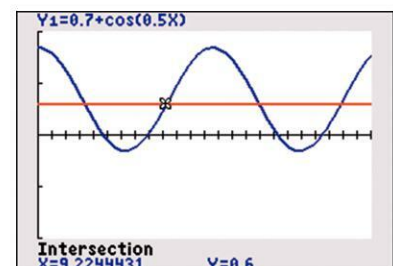
Optie: snijpunt

Dit geeft $x \approx 3,341\dots$ of $x = 9,224\dots$

Tussen deze tijdstippen is de waterhoogte minder dan 0,6 meter.

De tocht moet voor $9,224\dots \approx 9.13$ uur zijn gelopen.

Ze kunnen maximaal 13 minuten vertraging oplopen.



- V1 a** $AB = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$, $BC = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ en
 $AC = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.
- b** Als driehoek ABC rechthoekig is, dan moet de stelling van Pythagoras gelden.
 $BC^2 + AC^2 = AB^2$
 $8 + 18 = 26$, dit klopt dus $\triangle ABC$ is rechthoekig met $\angle C = 90^\circ$.
- V2 a** De richtingscoëfficiënt van lijn AB is $\frac{4 - -2}{16 - 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.
 Een vergelijking is van de vorm $y = \frac{1}{2}x + b$.
 $(16, 4)$ invullen geeft $4 = \frac{1}{2} \cdot 16 + b$, dus $b = -4$.
 Een vergelijking van lijn AB is $y = \frac{1}{2}x - 4$.
- b** $M(\frac{1}{2}(4 + 16), \frac{1}{2}(-2 + 4))$ ofwel $M(10, 1)$.
- c** De richtingscoëfficiënt van de middelloodlijn is -2 , want $-2 \cdot \frac{1}{2} = -1$.
 Een vergelijking van de middelloodlijn is van de vorm $y = -2x + b$.
 $(10, 1)$ invullen geeft $1 = -2 \cdot 10 + b$, dus $b = 21$.
 Een vergelijking van de middelloodlijn is $y = -2x + 21$.
- d** $PA^2 = (p - 4)^2 + (-2p + 21 - -2)^2$
 $PA^2 = (p - 4)^2 + (-2p + 23)^2$
 $PA^2 = p^2 - 8p + 16 + 4p^2 - 92p + 529 = 5p^2 - 100p + 545$
 $PB^2 = (p - 16)^2 + (-2p + 21 - 4)^2$
 $PB^2 = (p - 16)^2 + (-2p + 17)^2$
 $PB^2 = p^2 - 32p + 256 + 4p^2 - 68p + 289 = 5p^2 - 100p + 545$
 $PA^2 = PB^2$, dus $PA = PB$.
- V3** Punt S ligt op de middelloodlijn van zijde AB , dus geldt $SA = SB$.
 Punt S ligt op de middelloodlijn van zijde BC , dus geldt $SB = SC$.
 Hieruit volgt: $SA = SC$, dus ligt punt S op de middelloodlijn van zijde AC .
- V4 a** Gebruik $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, dit geeft $\gamma = 180^\circ - 110^\circ - 60^\circ = 10^\circ$.
 De gegevens invullen in $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$ geeft
 $\frac{a}{\sin(110^\circ)} = \frac{5,4}{\sin(60^\circ)} = \frac{c}{\sin(10^\circ)}$
 Hieruit volgt dat $a = \frac{5,4 \cdot \sin(110^\circ)}{\sin(60^\circ)} \approx 5,9$ en $c = \frac{5,4 \cdot \sin(10^\circ)}{\sin(60^\circ)} \approx 1,1$.
- b** Gebruik $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, dit geeft $\alpha = 180^\circ - 87^\circ - 54^\circ = 39^\circ$.
 Gegevens invullen in $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$ geeft
 $\frac{7}{\sin(39^\circ)} = \frac{b}{\sin(87^\circ)} = \frac{c}{\sin(54^\circ)}$
 Hieruit volgt dat $b = \frac{7 \cdot \sin(87^\circ)}{\sin(39^\circ)} \approx 11,1$ en $c = \frac{7 \cdot \sin(54^\circ)}{\sin(39^\circ)} \approx 9,0$.

- c Gegevens invullen in $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$ geeft

$$\frac{39}{\sin(\alpha)} = \frac{54}{\sin(69^\circ)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Hieruit volgt dat $\sin(\alpha) = \frac{39 \cdot \sin(69^\circ)}{54} = 0,6742\dots$, dus $\alpha = 42,396\dots^\circ$.

Gebruik $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, dus $\gamma = 180^\circ - 42,396\dots^\circ - 69^\circ = 68,603\dots^\circ$.

$$\frac{c}{\sin(68,603\dots^\circ)} = \frac{54}{\sin(69^\circ)} \text{ geeft } c = \frac{54 \cdot \sin(68,603\dots^\circ)}{\sin(69^\circ)} = 53,855\dots$$

Conclusie: $\alpha \approx 42^\circ$, $\gamma \approx 69^\circ$ en $c \approx 53,9$.

- V5 a Dit klopt, $\sin(70^\circ) = \sin(110^\circ) = 0,9396\dots$

b $\sin(130^\circ) = \sin(50^\circ)$

c $\sin(\alpha) = \sin(180^\circ - \alpha)$

- V6 a Gegevens invullen in $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$ geeft $\frac{5}{\sin(31^\circ)} = \frac{8}{\sin(\beta)}$

$$\sin(\beta) = \frac{8 \cdot \sin(31^\circ)}{5} = 0,8240\dots \text{ dus } \angle AB_2C \approx 55^\circ \text{ en}$$

$$\angle AB_1C \approx 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ.$$

- b $\angle ACB_1 = 180^\circ - 31^\circ - 124,506\dots^\circ = 24,493\dots^\circ$

$$\frac{5}{\sin(31^\circ)} = \frac{AB_1}{\sin(24,493\dots^\circ)} \text{ geeft } AB_1 = \frac{5 \cdot \sin(24,493\dots^\circ)}{\sin(31^\circ)} \approx 4,0$$

$$\angle ACB_2 = 180^\circ - 31^\circ - 55,493\dots^\circ = 93,506\dots^\circ$$

$$\frac{5}{\sin(31^\circ)} = \frac{AB_2}{\sin(93,506\dots^\circ)} \text{ geeft } AB_2 = \frac{5 \cdot \sin(93,506\dots^\circ)}{\sin(31^\circ)} \approx 9,7$$

- V7 a De cosinusregel in $\triangle PQR$ geeft

$$QR^2 = 31^2 + 12^2 - 2 \cdot 31 \cdot 12 \cdot \cos(123^\circ) = 1510,211\dots$$

$$QR = \sqrt{1510,211\dots} \approx 38,9$$

- b De cosinusregel in $\triangle KLM$ geeft

$$KL^2 = KM^2 + LM^2 - 2 \cdot KM \cdot LM \cdot \cos(\angle M)$$

$$15^2 = 12^2 + 18^2 - 2 \cdot 12 \cdot 18 \cdot \cos(\angle M)$$

$$225 = 144 + 324 - 432 \cdot \cos(\angle M)$$

$$\cos(\angle M) = \frac{243}{432} = 0,5625, \text{ dus } \angle M = 55,771\dots^\circ \approx 56^\circ$$

$$KM^2 = KL^2 + LM^2 - 2 \cdot KL \cdot LM \cdot \cos(\angle L)$$

$$12^2 = 15^2 + 18^2 - 2 \cdot 15 \cdot 18 \cdot \cos(\angle L)$$

$$144 = 225 + 324 - 540 \cos(\angle L)$$

$$\cos(\angle L) = \frac{405}{540} = 0,75, \text{ dus } \angle L = 41,409\dots^\circ \approx 41^\circ$$

$$\angle K = 180^\circ - 55,771\dots^\circ - 41,409\dots^\circ \approx 83^\circ$$

- V8 a $MC = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$, $ME = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$ en
 $EC = \sqrt{AE^2 + AC^2} = \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

- b** De cosinusregel in $\triangle MCE$ geeft

$$EC^2 = EM^2 + MC^2 - 2 \cdot EM \cdot MC \cdot \cos(\angle EMC).$$

$$48 = 17 + 25 - 2 \cdot \sqrt{17} \cdot 5 \cdot \cos(\angle EMC)$$

$$\cos(\angle EMC) = \frac{-6}{10\sqrt{17}} = -0,145\dots, \text{ dus } \angle EMC = 98,367\dots^\circ \approx 98^\circ$$

$$MC^2 = EM^2 + EC^2 - 2 \cdot EM \cdot EC \cdot \cos(\angle MEC)$$

$$25 = 17 + 48 - 2 \cdot \sqrt{17} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \cos(\angle MEC)$$

$$\cos(\angle MEC) = \frac{40}{8\sqrt{51}} = 0,7001\dots, \text{ dus } \angle MEC = 45,561\dots^\circ \approx 46^\circ$$

$$\angle ECM = 180^\circ - 98,367\dots^\circ - 45,561\dots^\circ \approx 36^\circ$$

13.1. Lijnen

intro Je kunt de coördinaten van de hoekpunten berekenen.

Daarna de figuur inlijsten of de lengte van een zijde berekenen en de hoogte op die zijde.

- 1 a** $y = 0$ invullen geeft $3x = 12$, dus $x = 4$.
 $x = 0$ invullen geeft $4y = 12$, dus $y = 3$.
Het snijpunt met de x -as is $(4, 0)$ en het snijpunt met de y -as $(0, 3)$.
- b** $3x + 4y = 12$ links en rechts delen door 12 geeft $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.
- c** Onder de x in de vergelijking $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ staat de x -coördinaat van het snijpunt met de x -as en onder de y staat de y -coördinaat van het snijpunt met de y -as.
- d** $3x + 4y = 12$
 $4y = -3x + 12$
 $y = -\frac{3}{4}x + 3$
- 2 a** $y = -1\frac{1}{5}x + 3$
Vermenigvuldigen met 5 geeft $5y = -6x + 15$ ofwel $6x + 5y = 15$.
- b** $y = -\frac{2}{5}x + 10$ of ook $\frac{2}{5}x + y = 10$.
Delen door 10 geeft $\frac{x}{25} + \frac{y}{10} = 1$.
- 3 a** n : $3x - 8y = 9$ of ook $y = \frac{3}{8}x - 1\frac{1}{8}$.
De richtingscoëfficiënt van de loodlijn is $-\frac{8}{3} = -2\frac{2}{3}$, want $\frac{3}{8} \cdot -\frac{8}{3} = -1$.
Een vergelijking van m is van de vorm $y = -2\frac{2}{3}x + b$.
 $P(-2, 8)$ invullen geeft $8 = -2\frac{2}{3} \cdot -2 + b$, dus $b = 8 - 5\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}$.
Een vergelijking is m : $y = -2\frac{2}{3}x + 2\frac{2}{3}$.
- b** De richtingscoëfficiënt van lijn AB is $\frac{1-7}{6-2} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$.
De richtingscoëfficiënt van de middelloodlijn is $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$, want $-\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = -1$.
Een vergelijking van de middelloodlijn is van de vorm $y = 1\frac{1}{3}x + b$.
Het midden M van lijnstuk AB is $(\frac{1}{2}(-2+6), \frac{1}{2}(7+1))$, dus $M(2, 4)$.
 $M(2, 4)$ invullen geeft $4 = 1\frac{1}{3} \cdot 2 + b$, dus $b = 1\frac{1}{3}$.
Een vergelijking van de middelloodlijn is $y = 1\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3}$.

- 4 a** Sitah: $1\frac{1}{4}x - 1\frac{3}{4} = -\frac{3}{4}x + 4\frac{1}{4}$ ofwel $2x = 6$, dus $x = 3$.
 Sean: $3x + (5x - 7) = 17$ ofwel $8x = 24$, dus $x = 3$.
 Het snijpunt is $(3, 2)$.
- b** -
- c** A: $a = 4b - 8$
 $2(4b - 8) + 3b = 17$
 $8b - 16 + 3b = 17$
 $11b = 33$
 $b = 3$ en $a = 4 \cdot 3 - 8 = 4$
- B: $w = -\frac{3}{7}v + 1$ en $w = -\frac{2}{3}v - \frac{2}{3}$
 $-\frac{3}{7}v + 1 = -\frac{2}{3}v - \frac{2}{3}$ (maal 21)
 $-9v + 21 = -14v - 14$
 $5v = -35$
 $v = -7$ en $w = -\frac{3}{7} \cdot -7 + 1 = 4$
- 5 a** $x + 5y = 18$ en $y = 2x - 3$
 $x + 5(2x - 3) = 18$
 $x + 10x - 15 = 18$
 $11x = 33$
 $x = 3$ en $y = 2 \cdot 3 - 3 = 3$
 Het snijpunt van de lijnen l en m is $(3, 3)$.
- b** $y = -\frac{2}{5}x + 5$ en $\frac{x}{10} + \frac{y}{4} = 1$
 $y = -\frac{2}{5}x + 5$ en $2x + 5y = 20$
 $2x + 5(-\frac{2}{5}x + 5) = 20$
 $2x - 2x + 25 = 20$
 $25 = 20$, geen oplossing.
- c** De lijnen hebben geen snijpunt, dus zijn evenwijdig.
- 6 a** $2x - 3y = 1$ ofwel $3y = 2x - 1$ geeft $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$.
 De richtingscoëfficiënt van n is $-\frac{3}{2}$, want $\frac{2}{3} \cdot -\frac{3}{2} = -1$.
 De vergelijking van lijn n is van de vorm $y = -1\frac{1}{2}x + b$.
 $R(4, -2)$ invullen geeft $-2 = -1\frac{1}{2} \cdot 4 + b$, dus $b = 4$.
 Een vergelijking van loodlijn n is $y = -1\frac{1}{2}x + 4$.
- b** $\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = -1\frac{1}{2}x + 4$ (maal 6)
 $4x - 2 = -9x + 24$
 $13x = 26$
 $x = 2$ en $y = -1\frac{1}{2} \cdot 2 + 4 = 1$, dus $S(2, 1)$.
- c** $RS = \sqrt{(4 - 2)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{13}$
- 7 a** $k: y = \frac{3}{4}x + 3$ dus de richtingscoëfficiënt van een lijn loodrecht op k is $-\frac{4}{3}$,
 want $\frac{3}{4} \cdot -\frac{4}{3} = -1$.
 De vergelijking van de loodlijn is van de vorm $y = -\frac{4}{3}x + b$.
 $P(7, 2)$ invullen geeft $2 = -\frac{4}{3} \cdot 7 + b$ dus $b = 11\frac{1}{3}$.
 De loodlijn op k door P is $y = -\frac{4}{3}x + 11\frac{1}{3}$.
 $\frac{3}{4}x + 3 = -\frac{4}{3}x + 11\frac{1}{3}$ (maal 12)
 $9x + 36 = -16x + 136$
 $25x = 100$
 $x = 4$ en $y = \frac{3}{4} \cdot 4 + 3 = 6$; snijpunt $S(4, 6)$.
 $d(P, k) = PS = \sqrt{(7 - 4)^2 + (2 - 6)^2} = 5$.

b $l: 3x + 5y = 4$ ofwel $l: y = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}$.

De richtingscoëfficiënt van een lijn loodrecht op l is $\frac{5}{3}$, want $-\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = -1$.

De vergelijking van de loodlijn is van de vorm $y = \frac{5}{3}x + b$.

$Q(0, -6)$ invullen geeft $-6 = \frac{5}{3} \cdot 0 + b$ dus $b = -6$.

De loodlijn op l door Q is $y = \frac{5}{3}x - 6$.

$$-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5} = \frac{5}{3}x - 6 \quad (\text{maal } 15)$$

$$-9x + 12 = 25x - 90$$

$$-34x = -102$$

$$x = 3 \text{ en } y = \frac{5}{3} \cdot 3 - 6 = -1; \text{ snijpunt } S(3, -1).$$

$$d(Q, l) = QS = \sqrt{(0 - 3)^2 + (-6 - (-1))^2} = \sqrt{34}.$$

8 $l: x - 2y + 17 = 0$ ofwel $l: y = \frac{1}{2}x + 8\frac{1}{2}$ en $m: y = \frac{1}{2}x + 1$.

Deze twee lijnen hebben dezelfde richtingscoëfficiënt dus zijn evenwijdig.

Kies een punt P op m , bijvoorbeeld $P(0, 1)$.

De vergelijking van een loodlijn op m door P is $y = -2x + 1$.

Deze loodlijn snijden met l geeft $\frac{1}{2}x + 8\frac{1}{2} = -2x + 1$.

$$2\frac{1}{2}x = -7\frac{1}{2}$$

$$x = -3 \text{ en } y = -2 \cdot -3 + 1 = 7, \text{ dus het snijpunt is } S(-3, 7).$$

$$d(l, m) = PS = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (7 - 1)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

9 a De coördinaten van A invullen in $x - 2y = 1$ geeft $-1 - 2 \cdot -1 = 1$, klopt.

Het midden van lijnstuk BC is $D(3, 1)$.

De coördinaten van D invullen in $x - 2y = 1$ geeft $3 - 2 \cdot 1 = 1$, klopt ook.

De coördinaten van B invullen in $4x + 7y = 9$ geeft $4 \cdot 4 + 7 \cdot -1 = 9$, klopt.

Het midden van lijnstuk AC is $E(\frac{1}{2}, 1)$.

De coördinaten van E invullen in $4x + 7y = 9$ geeft $4 \cdot \frac{1}{2} + 7 \cdot 1 = 9$, klopt ook.

b $l: x - 2y = 1$ ofwel $l: x = 2y + 1$ substitueren in $m: 4x + 7y = 9$ geeft

$$4(2y + 1) + 7y = 9$$

$$8y + 4 + 7y = 9$$

$$15y + 4 = 9$$

$$15y = 5 \text{ dus } y = \frac{1}{3}$$

$$x = 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 = 1\frac{2}{3}$$

De coördinaten van S zijn $(1\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

c $AS = \sqrt{(1\frac{2}{3} - -1)^2 + (\frac{1}{3} - -1)^2} = \sqrt{\frac{64}{9} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{80}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{80} = \frac{4}{3}\sqrt{5}$

$$SD = \sqrt{(3 - 1\frac{2}{3})^2 + (1 - \frac{1}{3})^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{20}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{20} = \frac{2}{3}\sqrt{5}$$

Lijnstuk AS is tweemaal zo lang als lijnstuk SD , dus $AS : SD = 2 : 1$.

$$BS = \sqrt{(1\frac{2}{3} - 4)^2 + (\frac{1}{3} - -1)^2} = \sqrt{\frac{49}{9} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{65}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{65} (= \frac{2}{6}\sqrt{65})$$

$$SE = \sqrt{(\frac{1}{2} - 1\frac{2}{3})^2 + (1 - \frac{1}{3})^2} = \sqrt{\frac{49}{36} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{65}{36}} = \frac{1}{6}\sqrt{65}$$

$$SE = \sqrt{(\frac{1}{2} - 1\frac{2}{3})^2 + (1 - \frac{1}{3})^2} = \sqrt{\frac{49}{36} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{65}{36}} = \frac{1}{6}\sqrt{65}$$

Lijnstuk BS is tweemaal zo lang als lijnstuk SE , dus $BS : SE = 2 : 1$.

10 a $l: 6x - 5y = 15$ ofwel $l: y = \frac{6}{5}x - 3$.

$$\tan(\alpha) = \frac{6}{5} \text{ geeft } \alpha = 50,194\dots^\circ \approx 50^\circ.$$

$$m: y = -\frac{1}{2}x + 5$$

$$\tan(\beta) = \frac{1}{2} \text{ geeft } \beta = 26,565\dots^\circ \approx 27^\circ.$$

b $\angle(l, m) = \alpha + \beta = 50,194\dots + 26,565\dots \approx 77^\circ$

- 11 a** Het midden van $A(6, 2)$ en $B(2, 4)$ is $P(4, 3)$.

Een vergelijking op van de lijn OP is $y = \frac{3}{4}x$.

b $OA = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$AP = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ en $OP = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

- c** Noem de hoek die lijn OA met de x -as maakt α en de hoek die lijn OP met de x -as maakt β .

$\tan(\alpha) = \frac{2}{6}$, dus $\alpha = 18,434\dots^\circ$

$\tan(\beta) = \frac{3}{4}$, dus $\beta = 36,869\dots^\circ$

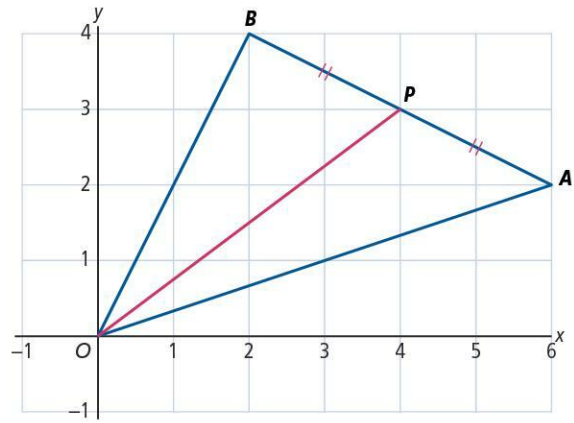
$\angle POA = \beta - \alpha \approx 18,434\dots^\circ$

De richtingscoëfficiënt van lijn AB is $-\frac{1}{2}$, dus de hoek die lijn AB met de x -as maakt is $26,565\dots^\circ$, dus

$\angle OAP = 26,565\dots^\circ + \alpha = 45^\circ$.

$\angle OPA = 180^\circ - \angle OAP - \angle POA = 116,565\dots^\circ$

Conclusie: $\angle POA \approx 18^\circ$, $\angle OAP = 45^\circ$ en $\angle OPA \approx 117^\circ$.



- 03 a** De richtingscoëfficiënt is $-\frac{1}{2}$.

- b** m_1 en m_2 zijn de richtingscoëfficiënten van k en l .

c $m_2 = 2$

d $k: y = 2x + b$

$A(5, -6)$ invullen geeft

$-6 = 2 \cdot 5 + b$

$-6 = 10 + b$, dus $b = -16$

e $(\frac{1}{2}(3+7), \frac{1}{2}(8+2))$, dus $M(5, 5)$

f De richtingscoëfficiënt van lijn PQ is $\frac{2-8}{7-3} = \frac{-6}{4} = -1\frac{1}{2}$.

g De richtingscoëfficiënt van n is $\frac{2}{3}$, want $-1\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = -1$.

h De vergelijking van de middelloodlijn n is van de vorm $y = \frac{2}{3}x + b$.

$M(5, 5)$ invullen geeft $5 = \frac{2}{3} \cdot 5 + b$ ofwel $5 = 3\frac{1}{3} + b$ dus $b = 1\frac{2}{3}$.

Een vergelijking van de middelloodlijn n is $y = \frac{2}{3}x + 1\frac{2}{3}$.

- 08 a** $l: y = 4x - 8$ en $m: 4x - y = 42$ ofwel $m: y = 4x - 42$.

Ze zijn evenwijdig, want de richtingscoëfficiënten zijn gelijk.

b De richtingscoëfficiënt van n is $-\frac{1}{4}$, want $-\frac{1}{4} \cdot 4 = -1$.

De vergelijking van lijn n is van de vorm $y = -\frac{1}{4}x + b$.

$P(11, 2)$ invullen geeft $2 = -\frac{1}{4} \cdot 11 + b$ ofwel $2 = -2\frac{3}{4} + b$, dus $b = 4\frac{3}{4}$.

De vergelijking van lijn n is $y = -\frac{1}{4}x + 4\frac{3}{4}$.

c $4x - 8 = -\frac{1}{4}x + 4\frac{3}{4}$

$4\frac{1}{4}x = 12\frac{3}{4}$

$x = 3$ en $y = 4 \cdot 3 - 8 = 4$, dus $S(3, 4)$.

d $d(P, l) = PS$ omdat lijnstuk PS het kortste verbindingslijnstuk is van l en m .

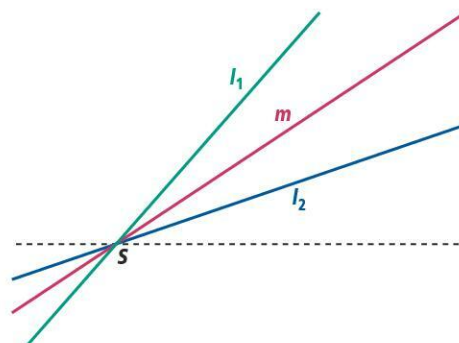
e $d(P, l) = PS = \sqrt{(3-11)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$

f $d(l, m) = d(P, l) = 2\sqrt{17}$

g Nee, de afstand tussen twee evenwijdige lijnen is overal even groot.

- h** Kies een punt op lijn h , bijvoorbeeld $P(0, 15)$.
 De richtingscoëfficiënt van h is $-\frac{1}{3}$, dus de richtingscoëfficiënt van een loodlijn op h is 3 want $-\frac{1}{3} \cdot 3 = -1$.
 De vergelijking van deze loodlijn is van de vorm $y = 3x + b$.
 De loodlijn op h door $P(0, 15)$ is dan $y = 3x + 15$.
 Deze loodlijn snijden met lijn $k : x + 3y = 15$ ofwel $k : y = -\frac{1}{3}x + 5$ geeft
 $3x + 15 = -\frac{1}{3}x + 5$
 $3\frac{1}{3}x = -10$
 $x = -3$ en $y = 3 \cdot -3 + 15 = 6$
 Het snijpunt is $S(-3, 6)$.
 $d(k, h) = PS = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (6 - 15)^2} = \sqrt{9 + 81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$.

- U1 a** Zie de tekening hiernaast.
 Als α de grootte van de hoek is die m met de horizontale lijn door S maakt, dan maakt l een hoek $\beta = \alpha + 15^\circ$ (l_1) of een hoek $\gamma = \alpha - 15^\circ$ (l_2) met de horizontale lijn door S .
b $l : 2x - 3y = 9$ ofwel $y = \frac{2}{3}x - 3$
 De richtingscoëfficiënt van l is $\frac{2}{3}$.
 $\tan(\alpha) = \frac{2}{3}$ geeft $\alpha = 33,690\dots^\circ$.
 Dan is $\beta = 48,690\dots^\circ$ en $\gamma = 18,690\dots^\circ$ en dus
 $\tan(\beta) = 1,137\dots$ en $\tan(\gamma) = 0,338\dots$
 Een vergelijking van l_1 is $y = 1,137\dots x + b$.
 $(6, 1)$ invullen geeft $b = -5,827\dots$, dus $l_1 : y = 1,14x - 5,83$.
 Een vergelijking van l_2 is $y = 0,338\dots x + b$.
 $(6, 1)$ invullen geeft $b = -1,029\dots$, dus $l_2 : y = 0,34x - 1,03$.

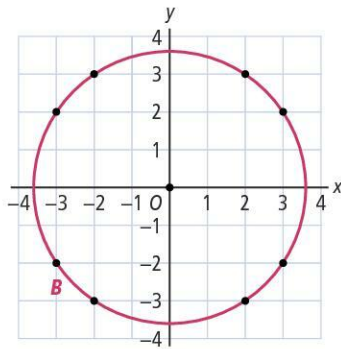


- U2** $k : 4x + 3y = 33$ ofwel $y = -1\frac{1}{3}x + 11$
 k snijdt de y -as in het punt $(0, 11)$ en de richtingscoëfficiënt van k is $-\frac{4}{3}$.
 De richtingscoëfficiënt van lijn l is dan $\frac{3}{4}$ en dus $l : y = \frac{3}{4}x + 11$.
 Een punt P op l heeft coördinaten $(p, \frac{3}{4}p + 11)$.
 De afstand van P tot $(0, 11)$ is $\sqrt{p^2 + (\frac{3}{4}p)^2} = \sqrt{p^2 + \frac{9}{16}p^2} = \sqrt{\frac{25}{16}p^2} = |\frac{5}{4}p|$.
 $\frac{5}{4}p = 7\frac{1}{2}$ of $\frac{5}{4}p = -7\frac{1}{2}$
 $p = 6$ of $p = -6$
 De coördinaten van deze punten zijn $A(6, 15\frac{1}{2})$ en $B(-6, 6\frac{1}{2})$.

13.2 Vergelijking van een cirkel

intro Kay kan een cirkel tekenen met middelpunt A en straal 4 en dan de roosterpunten binnen die cirkel tellen.

12 a



De afstand van punt B tot de oorsprong is $\sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.

b Bijvoorbeeld $(3, 2)$ en $(-2, 3)$.

c Die punten liggen op de cirkel met middelpunt O en straal OB .

d De afstand $OB = \sqrt{13}$ en de afstand van een punt (x, y) tot de oorsprong is $\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Voor alle punten $P(x, y)$ die even ver van O liggen als punt B geldt dan

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{13} \text{ ofwel } x^2 + y^2 = 13.$$

e $x^2 + y^2 = 36$

13 a $MQ = x_Q - x_M = x - 4$

b $MQ = x_M - x_Q = 4 - x$

c In het geval P op de rechter helft van de cirkel ligt is $PQ = y - 2$ en in het geval P op de linker helft van de cirkel ligt is $PQ = 2 - y$.

d $MP^2 = (x - 4)^2 + (y - 2)^2$

e $MP = 4$, dus $MP^2 = 16$ en daaruit volgt $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$.

f Een vergelijking van cirkel d is $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$.

14 a $c : (x - (-4))^2 + (y - (-7))^2 = 8^2$ ofwel $c : (x + 4)^2 + (y + 7)^2 = 64$

b $AB = \sqrt{(4 - (-1))^2 + (-2 - (-3))^2} = \sqrt{26}$, dus de straal is $\sqrt{26}$.

$$d : (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 26$$

c De coördinaten van $C(3, 3)$ invullen in de vergelijking van d geeft

$$(3 - 4)^2 + (3 + 2)^2 = 1 + 25 = 26, \text{ klopt dus } C \text{ ligt op } d.$$

d Het middelpunt is $(-7, 5)$ en de straal is $\sqrt{13}$.

15 a Van $c : (x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 26$ is het middelpunt $(4, -1)$ en de straal $\sqrt{26}$.

$$b \quad (x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 26$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 = 26$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y = 9$$

16 a $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$, dus $x^2 - 8x = (x - 4)^2 - 16$

b $(y + 2)^2 = y^2 + 4y + 4$, dus $y^2 + 4y = (y + 2)^2 - 4$

c Siem neemt de helft van 14.

d Siem moet het kwadraat van 7, dus 49 invullen.

$$e \quad y^2 - 12y = (y - 6)^2 - 36$$

17 a $x^2 - 8x + y^2 + 2y + 12 = 0$

$$(x - 4)^2 - 16 + (y + 1)^2 - 1 + 12 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 5$$

b Het middelpunt is $(4, -1)$ en de straal is $\sqrt{5}$.

- 18 a** $x^2 + y^2 + 4y = 9$
 $x^2 + (y + 2)^2 - 4 = 9$
 $x^2 + (y + 2)^2 = 13$
 Het middelpunt is $(0, -2)$ en de straal is $\sqrt{13}$.
- b** $x^2 + y^2 - 10x - 24y = 0$
 $x^2 - 10x + y^2 - 24y = 0$
 $(x - 5)^2 - 25 + (y - 12)^2 - 144 = 0$
 $(x - 5)^2 + (y - 12)^2 = 169$
 Het middelpunt is $(5, 12)$ en de straal is $\sqrt{169} = 13$.
- c** $x^2 + y^2 - 3x - y + \frac{1}{2} = 0$
 $x^2 - 3x + y^2 - y + \frac{1}{2} = 0$
 $(x - 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4} + (y - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 0$
 $(x - 1\frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 2$
 Het middelpunt is $(1\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ en de straal is $\sqrt{2}$.
- d** $x^2 + y^2 - 2\sqrt{3} \cdot x + 4\sqrt{2} \cdot y + 4 = 0$
 $x^2 - 2\sqrt{3} \cdot x + y^2 + 4\sqrt{2} \cdot y + 4 = 0$
 $(x - \sqrt{3})^2 - 3 + (y + 2\sqrt{2})^2 - 8 + 4 = 0$
 $(x - \sqrt{3})^2 + (y + 2\sqrt{2})^2 = 7$
 Het middelpunt is $(\sqrt{3}, -2\sqrt{2})$ en de straal is $\sqrt{7}$.

- 19 a** $0^2 + 0^2 + 2a \cdot 0 + 2b \cdot 0 = 0$, klopt dus de cirkel gaat door $(0, 0)$.
- b** $P(1, 5)$ invullen geeft $1^2 + 5^2 + 2a + 10b = 0$ ofwel $2a + 10b = -26$.
 $Q(6, 4)$ invullen geeft $6^2 + 4^2 + 12a + 8b = 0$ ofwel $12a + 8b = -52$.
 Vereenvoudigen geeft $a + 5b = -13$ en $3a + 2b = -13$
 $a = -5b - 13$ substitueren in $3a + 2b = -13$ geeft
 $3(-5b - 13) + 2b = -13$
 $-15b - 39 + 2b = -13$
 $-13b = 26$
 $b = -2$ en $a = -5 \cdot -2 - 13 = -3$
- c** $b = -2$ en $a = -3$ invullen geeft de cirkelvergelijking
 $x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0$
 $x^2 - 6x + y^2 - 4y = 0$
 $(x - 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4 = 0$
 $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$
 Het middelpunt is $(3, 2)$ en de straal is $\sqrt{13}$.

- 018 a** In stap 1 zijn de termen met x en de termen met y bij elkaar geplaatst.
- b** $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$, op de puntjes moet het getal -25 staan.
- c** Dat getal moet de helft van 6 zijn, dus 3.
- d** Dat getal is het kwadraat van 3, dus 9.
- e** $(x + 5)^2 - 25 + (y - 3)^2 - 9 + 9 = 0$
- f** $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 25$
- g** Het middelpunt is $(-5, 3)$ en de straal is $\sqrt{25} = 5$.

- U3 a** $x^2 + y^2 - 4x - 20y + 108 = 0$
 $x^2 - 4x + y^2 - 20y + 108 = 0$
 $(x - 2)^2 - 4 + (y - 10)^2 - 100 + 108 = 0$
 $(x - 2)^2 + (y - 10)^2 = -4$
 Dat zou betekenen dat $r^2 = -4$ en dat kan niet.

b $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$
 $x^2 + px + y^2 + qy + s = 0$
 $\left(x + \frac{1}{2}p\right)^2 - \frac{1}{4}p^2 + \left(y + \frac{1}{2}q\right)^2 - \frac{1}{4}q^2 + s = 0$
 $\left(x + \frac{1}{2}p\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}q\right)^2 = \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}q^2 - s$
 Dit kan alleen de vergelijking van een cirkel zijn als
 $\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}q^2 - s > 0$, dus als $\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}q^2 > s$ ofwel $p^2 + q^2 > 4s$.

- U4** Het middelpunt van de cirkel is het snijpunt van de middelloodlijnen van de lijnstukken AB en AC .
 De richtingscoëfficiënt van AB is $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ en het midden van AB is $(4, 6)$.
 De richtingscoëfficiënt van de middelloodlijn van AB is -2 en de vergelijking van de middelloodlijn is $y = -2x + 14$.
 De middelloodlijn van AC is de lijn $x = 6$.
 De beide middelloodlijnen snijden geeft $y = -2 \cdot 6 + 14 = 2$.
 Het middelpunt van de cirkel is $M(6, 2)$.
 De straal van de cirkel is gelijk aan $AM = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.
 De middelpuntsvergelijking van deze cirkel is $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

13.3 Snijden en raken

intro Een lijn door de oorsprong kan één, twee of geen snijpunten hebben met de getekende cirkel.
 Dan moet je $y = mx$ invullen in de vergelijking van de cirkel. Je krijgt dan een kwadratische vergelijking. Met de discriminant kun je dan onderzoeken bij welke waarden van m de lijn en cirkel gemeenschappelijke punten hebben.

20 a $x^2 + (3x)^2 = 10$
 $x^2 + 9x^2 = 10$
 $10x^2 = 10$
 $x^2 = 1$
 $x = 1$ of $x = -1$
b $y = 3 \cdot 1 = 3$ of $y = 3 \cdot -1 = -3$
c $x + 2y = 1$ geeft $x = -2y + 1$
 $x = -2y + 1$ invullen in $x^2 + y^2 = 10$ geeft
 $(-2y + 1)^2 + y^2 = 10$
 $4y^2 - 4y + 1 + y^2 = 10$
 $5y^2 - 4y - 9 = 0$
 De discriminant van deze vergelijking is $D = (-4)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -9 = 196$.
 $y = \frac{4 + \sqrt{196}}{10} = 1\frac{4}{5}$ of $y = \frac{4 - \sqrt{196}}{10} = -1$
 $x = -2 \cdot 1\frac{4}{5} + 1 = -2\frac{3}{5}$ of $x = -2 \cdot -1 + 1 = 3$
 De snijpunten zijn $\left(-2\frac{3}{5}, 1\frac{4}{5}\right)$ en $(3, -1)$.

21 a $y = x + 2$ invullen in c geeft

$$x^2 + (x + 2)^2 = 20$$

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 - 20 = 0$$

$$2x^2 + 4x - 16 = 0$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x + 4)(x - 2) = 0$$

$$x = -4 \text{ of } x = 2$$

$$y = -4 + 2 = -2 \text{ of } y = 2 + 2 = 4$$

De snijpunten zijn $(-4, -2)$ en $(2, 4)$.

b $2y + x = 5$ ofwel $x = -2y + 5$ invullen in c geeft

$$(-2y + 5)^2 + y^2 = 5$$

$$4y^2 - 20y + 25 + y^2 = 5$$

$$5y^2 - 20y + 20 = 0$$

$$y^2 - 4y + 4 = 0$$

$$(y - 2)(y - 2) = 0$$

$$y = 2 \text{ geeft } x = -2 \cdot 2 + 5 = 1$$

Het snijpunt is $(1, 2)$.

c $3y + x = 15$ ofwel $x = 15 - 3y$ invullen in c geeft

$$(15 - 3y - 1)^2 + (y + 2)^2 = 80$$

$$(14 - 3y)^2 + (y + 2)^2 = 80$$

$$196 - 84y + 9y^2 + y^2 + 4y + 4 - 80 = 0$$

$$10y^2 - 80y + 120 = 0$$

$$y^2 - 8y + 12 = 0$$

$$(y - 2)(y - 6) = 0$$

$$y = 2 \text{ of } y = 6$$

$$x = 15 - 3 \cdot 2 = 9 \text{ of } x = 15 - 3 \cdot 6 = -3$$

De snijpunten zijn $(9, 2)$ en $(-3, 6)$.

22 a $y = 3x + 4$ invullen in c geeft

$$x^2 + (3x + 4)^2 = 20$$

$$x^2 + 9x^2 + 24x + 16 = 20$$

$$10x^2 + 24x - 4 = 0$$

$$D = 24^2 - 4 \cdot 10 \cdot -4 = 736$$

$D > 0$, dus er zijn twee gemeenschappelijke punten.

b $2x + y + 4 = 0$ ofwel $y = -2x - 4$ invullen in c geeft

$$(x - 5)^2 + (-2x - 4 + 2)^2 = 20$$

$$(x - 5)^2 + (-2x - 2)^2 = 20$$

$$x^2 - 10x + 25 + 4x^2 + 8x + 4 - 20 = 0$$

$$5x^2 - 2x + 9 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 9 = -176$$

$D < 0$, dus er zijn geen gemeenschappelijke punten.

c De richtingscoëfficiënt van lijn AB is $\frac{3-6}{4-1} = -1$.

Een vergelijking lijn AB is van de vorm $y = -x + b$.

De coördinaten van $A(1, 6)$ invullen geeft $6 = -1 + b$ dus $b = 7$.

$y = -x + 7$ invullen in c geeft

$$x^2 + (-x + 7)^2 - 6x + 1 = 0$$

$$x^2 + x^2 - 14x + 49 - 6x + 1 = 0$$

$$2x^2 - 20x + 50 = 0$$

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$D = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 0$$

$D = 0$, dus er is één gemeenschappelijk punt.

- 23 a** Substitutie van $y = -3x + 2$ in $x^2 + y^2 = 10$ geeft

$$x^2 + (-3x + 2)^2 = 10$$

$$x^2 + 9x^2 - 12x + 4 = 10$$

$$10x^2 - 12x - 6 = 0$$

$$5x^2 - 6x - 3 = 0$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-3) = 96, \text{ dus er zijn twee gemeenschappelijke punten.}$$

- b** $x^2 + (-3x + p)^2 = 10$

$$x^2 + 9x^2 - 6px + p^2 - 10 = 0$$

$$10x^2 - 6px + p^2 - 10 = 0$$

- c** $D = (-6p)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (p^2 - 10)$

$$D = (-6p)^2 - 40 \cdot (p^2 - 10)$$

$$D = 36p^2 - 40p^2 + 400$$

$$D = -4p^2 + 400$$

- d** $-4p^2 + 400 = 0$

$$-4p^2 = -400$$

$$p^2 = 100$$

$$p = 10 \text{ of } p = -10$$

- 24 a** $y = px$ substitueren in $(x - 5)^2 + y^2 = 9$ geeft

$$(x - 5)^2 + (px)^2 = 9$$

$$x^2 - 10x + 25 + p^2x^2 = 9$$

$$(p^2 + 1)x^2 - 10x + 16 = 0$$

- b** $D = (-10)^2 - 4 \cdot (p^2 + 1) \cdot 16$

$$D = 100 - 64(p^2 + 1)$$

$$D = 100 - 64p^2 - 64$$

$$D = 36 - 64p^2$$

$$\text{Eén punt gemeenschappelijk als } 36 - 64p^2 = 0 \text{ ofwel } p^2 = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}.$$

$$p = \frac{3}{4} \text{ of } p = -\frac{3}{4}$$

- c** $(p^2 + 1)x^2 - 10x + 16 = 0$ met $D = 0$ geeft één oplossing namelijk

$$x = \frac{10}{2(p^2 + 1)} = \frac{5}{p^2 + 1}$$

$$p^2 = \frac{9}{16}, \text{ dus de noemer wordt } p^2 + 1 = \frac{25}{16} \text{ en } x = \frac{5}{\frac{25}{16}} = 5 \cdot \frac{16}{25} = 3\frac{1}{5}$$

$$\text{Voor } p = \frac{3}{4} \text{ geldt } y = \frac{3}{4} \cdot \frac{16}{5} = 2\frac{2}{5} \text{ en voor } p = -\frac{3}{4} \text{ geldt } y = -\frac{3}{4} \cdot \frac{16}{5} = -2\frac{2}{5}.$$

$$\text{Dus voor } p = \frac{3}{4} \text{ is het gemeenschappelijke punt } \left(3\frac{1}{5}, 2\frac{2}{5}\right) \text{ en voor } p = -\frac{3}{4} \text{ is dat } \left(3\frac{1}{5}, -2\frac{2}{5}\right).$$

- d** Het middelpunt is $(5, 0)$ en het gemeenschappelijk punt is P .

$$\text{Voor } p = \frac{3}{4} \text{ is de richtingscoëfficiënt van lijn } MP \frac{2\frac{2}{5} - 0}{3\frac{1}{5} - 5} = \frac{2\frac{2}{5}}{-1\frac{4}{5}} = -\frac{12}{9} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{en de raai staat loodrecht op } l \text{ omdat } -\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = -1.$$

$$\text{Voor } p = -\frac{3}{4} \text{ is de richtingscoëfficiënt van lijn } MP \frac{-2\frac{2}{5} - 0}{3\frac{1}{5} - 5} = \frac{-2\frac{2}{5}}{-1\frac{4}{5}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$\text{en de raai staat loodrecht op } l \text{ omdat } \frac{4}{3} \cdot -\frac{3}{4} = -1.$$

In beide gevallen staat de raai dus loodrecht op de raaklijn.

- 25 a** Het middelpunt van de cirkel is $M(-3, 7)$.

De richtingscoëfficiënt van lijn MP is $\frac{3-7}{0-(-3)} = -\frac{4}{3}$.

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in P is dus $\frac{3}{4}$.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = \frac{3}{4}x + 3$.

b $x^2 + y^2 - 10x - 8y = 0$

$$x^2 - 10x + y^2 - 8y = 0$$

$$(x-5)^2 - 25 + (y-4)^2 - 16 = 0$$

$$(x-5)^2 + (y-4)^2 = 41$$

Het middelpunt van de cirkel is $M(5, 4)$.

De richtingscoëfficiënt van lijn MP is $\frac{0-4}{10-5} = -\frac{4}{5}$.

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in P is dus $\frac{5}{4}$.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = \frac{5}{4}x + b$.

$(10, 0)$ invullen geeft $0 = \frac{5}{4} \cdot 10 + b$, dus $b = -12\frac{1}{2}$.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = \frac{5}{4}x - 12\frac{1}{2}$.

- 26 a** Het middelpunt is $M(2, -3)$.

De richtingscoëfficiënt van lijn MP is $\frac{-4-(-3)}{5-2} = -\frac{1}{3}$.

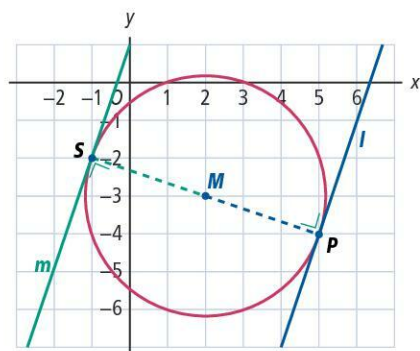
De raaklijn l staat loodrecht op lijn MP , dus de richtingscoëfficiënt van l is 3.

Een vergelijking van l is van de vorm $y = 3x + b$.

Invullen van $(5, -4)$ geeft $-4 = 3 \cdot 5 + b$, dus $b = -19$.

Een vergelijking van de raaklijn is $l: y = 3x - 19$.

b c



- d** Punt S is het spiegelbeeld van punt P in het middelpunt $(2, -3)$, dus is $S(-1, -2)$.

- e** Invullen van $S(-1, -2)$ in $y = 3x + b$ geeft $-2 = 3 \cdot (-1) + b$, dus $b = 1$.
Een vergelijking van de raaklijn is $m: y = 3x + 1$.

27 a $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0$

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y - 5 = 0$$

$$(x+1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 - 5 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 10$$

Het middelpunt is $M(-1, 2)$ en het raakpunt $P(2, 1)$.

De richtingscoëfficiënt van de lijn MP is $\frac{1-2}{2-(-1)} = -\frac{1}{3}$.

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn l is 3.

Een vergelijking van l is van de vorm $y = 3x + b$.

Invullen van $(2, 1)$ geeft $1 = 3 \cdot 2 + b$, dus $b = -5$.

Een vergelijking van de raaklijn is $l: y = 3x - 5$.

- b** Spiegelen van $(2, 1)$ in M geeft het punt $(-4, 3)$.
 $(-4, 3)$ invullen in $y = 3x + b$ geeft $3 = 3 \cdot -4 + b$, dus $b = 15$.
 Een vergelijking van de raaklijn is $m : y = 3x + 15$.

- 022 a** $(-3y + 9)^2 + y^2 + 8y = 24$
 $9y^2 - 54y + 81 + y^2 + 8y - 24 = 0$
 $10y^2 - 46y + 57 = 0$
- b** $D = (-46)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 57 = -164$
- c** Omdat de discriminant kleiner dan nul is, heeft de vergelijking geen oplossing.
 Dit betekent dat c en l geen punten gemeenschappelijk hebben.
- d** $y = 3x + 1$ substitueren in $(x - 1)^2 + y^2 = 20$ geeft
 $(x - 1)^2 + (3x + 1)^2 = 20$
 $x^2 - 2x + 1 + 9x^2 + 6x + 1 - 20 = 0$
 $10x^2 + 4x - 18 = 0$
 $D = 4^2 - 4 \cdot 10 \cdot -18 = 736$
 $D > 0$, dus de cirkel en de lijn hebben twee punten gemeenschappelijk.
- e** $x + y = 6$ ofwel $y = 6 - x$ substitueren in $x^2 + y^2 = 16$ geeft
 $x^2 + (6 - x)^2 = 16$
 $x^2 + 36 - 12x + x^2 - 16 = 0$
 $2x^2 - 12x + 20 = 0$
 $x^2 - 6x + 10 = 0$
 $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -4$
 $D < 0$, dus de cirkel en de lijn hebben geen punten gemeenschappelijk.
- f** De richtingscoëfficiënt van lijn AB is $\frac{16 - 6}{4 - -1} = 2$.
 Een vergelijking van lijn AB is van de vorm $y = 2x + b$.
 $(4, 16)$ invullen in $y = 2x + b$ geeft $16 = 2 \cdot 4 + b$ dus $b = 8$.
 $y = 2x + 8$ invullen in de cirkelvergelijking geeft
 $x^2 + (2x + 8)^2 - 6(2x + 8) + 4 = 0$
 $x^2 + 4x^2 + 32x + 64 - 12x - 48 + 4 = 0$
 $5x^2 + 20x + 20 = 0$
 $x^2 + 4x + 4 = 0$
 $(x + 2)^2 = 0$, dus $x = -2$
 De cirkel en de lijn hebben één punt gemeenschappelijk.

- 025 a** Het middelpunt is $M(4, 2)$.
- b** De richtingscoëfficiënt van de lijn MP is $\frac{6 - 2}{2 - 4} = \frac{4}{-2} = -2$.
- c** De raaklijn staat loodrecht op lijn MP , dus het product van de richtingscoëfficiënten is -1 .
 $-2 \cdot a = -1$, dus $a = \frac{1}{2}$.
- d** De coördinaten van $P(2, 6)$ invullen in $y = \frac{1}{2}x + b$ geeft
 $6 = \frac{1}{2} \cdot 2 + b$
 $6 = 1 + b$, dus $b = 5$.
 Een vergelijking van de raaklijn is $y = \frac{1}{2}x + 5$.

U5

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y = 15$$

$$(x-1)^2 - 1 + (y-3)^2 - 9 = 15$$

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$$

Substitutie van $y = mx - 4$ in de cirkelvergelijking geeft

$$(x-1)^2 + (mx-4-3)^2 = 25$$

$$(x-1)^2 + (mx-7)^2 = 25$$

$$x^2 - 2x + 1 + m^2x^2 - 14mx + 49 = 25$$

$$(m^2 + 1)x^2 + (-14m - 2)x + 25 = 0$$

Er is één punt gemeenschappelijk, dus deze vergelijking moet precies één oplossing hebben, dit betekent $D = 0$.

$$D = (-14m - 2)^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 25$$

$$D = 196m^2 + 56m + 4 - 100m^2 - 100$$

$$D = 96m^2 + 56m - 96 = 0$$

$$12m^2 + 7m - 12 = 0$$

$$D = 7^2 - 4 \cdot 12 \cdot -12 = 625$$

$$m = \frac{-7 + \sqrt{625}}{24} = \frac{3}{4} \text{ of } m = \frac{-7 - \sqrt{625}}{24} = -\frac{4}{3}$$

U6

De cirkel raakt de lijnen $x = 5$ en $y = 4$.

Dat betekent dat het middelpunt $M(a, b)$ van de cirkel gelijke afstanden tot deze twee lijnen heeft.

Ligt M links van de lijn $x = 5$, dan is de afstand van M tot de lijn $x = 5$ gelijk aan $5 - a$ en ligt M rechts van de lijn $x = 5$, dan is die afstand gelijk aan $a - 5$. Net zo is de afstand van M tot de lijn $y = 4$ gelijk aan $4 - b$ of $b - 4$.

Er geldt dus: $a - 5 = b - 4$ of $a - 5 = 4 - b$ ofwel

$$a = b + 1 \text{ of } a = 9 - b.$$

M ligt op de lijn $3x - 4y = 1$, dus $3a - 4b = 1$.

Substitutie van $a = b + 1$ in $3a - 4b = 1$ geeft

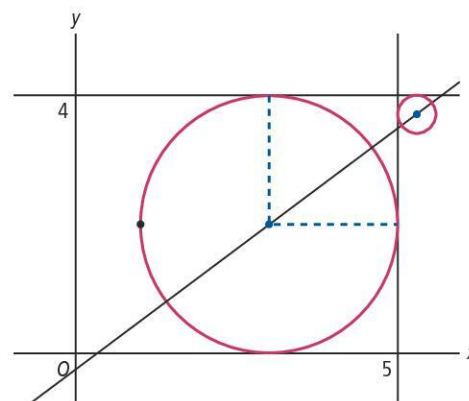
$$3(b + 1) - 4b = 1 \text{ ofwel } b = 2.$$

De straal van de cirkel is dan $4 - 2 = 2$.

Substitutie van $a = 9 - b$ in $3a - 4b = 1$ geeft

$$3(9 - b) - 4b = 1 \text{ ofwel } 7b = 26, \text{ dus } b = 3\frac{5}{7}.$$

De straal van de cirkel is dan $4 - 3\frac{5}{7} = \frac{2}{7}$.



13.4 Afstand tot een cirkel

intro De lijn k snijdt de cirkel, dus deze lijn heeft de kleinste afstand tot de cirkel, namelijk de afstand 0.

De lijn n heeft de grootste afstand tot de cirkel.

28 a Invullen van de coördinaten van A geeft $(1 - 4)^2 + (0 + 5)^2 = 34$
 $9 + 25 = 34$, dit klopt, dus punt A ligt op de cirkel.

b Invullen van de coördinaten van B geeft $(-1 - 4)^2 + (-1 + 5)^2 = 41$, dit is meer dan 34 dus de afstand van het middelpunt tot B is groter dan de straal van de cirkel.

c Het middelpunt $M(4, -5)$ heeft afstand 6 tot de lijn $x = 10$.

De straal van de cirkel is $\sqrt{34}$. Dat is kleiner dan 6, dus de cirkel heeft nul punten gemeenschappelijk met de lijn $x = 10$.

- d** Dan moet gelden: $(1 - 4)^2 + (d + 5)^2 < 34$
 $9 + (d + 5)^2 < 34$
 $(d + 5)^2 < 25$
 $-5 < d + 5 < 5$
 $-10 < d < 0$

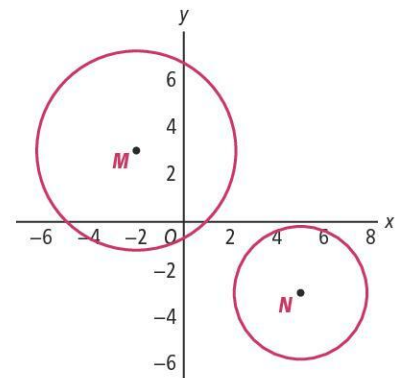
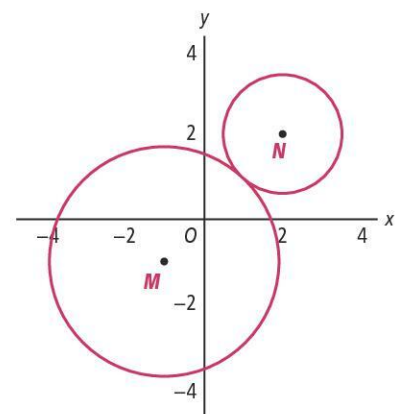
- 29 a** De raaklijn staat loodrecht op de straal, dus ook $PA \perp l$.
 Een loodlijn is altijd het kortste verbindingslijnstuk.
b $M(5, 3)$, dus $PM = \sqrt{9^2 + 6^2} = \sqrt{117} = \sqrt{9 \cdot 13} = 3\sqrt{13}$.
c Het kortste verbindingslijnstuk van P en c is lijnstuk PA .
 $PA = PM - MA = 3\sqrt{13} - \sqrt{13} = 2\sqrt{13}$.
d $MQ = 2$, het kortste verbindingslijnstuk is $BQ = \sqrt{13} - 2$.

- 30 a** $M(-5, 3)$ en de straal is 5.
 $MP = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$, dus P ligt buiten de cirkel.
 $d(P, c) = 13 - 5 = 8$
b $M(-5, 3)$ en de straal is 5.
 $MP = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, dus P ligt binnen de cirkel.
 $d(P, c) = 5 - \sqrt{5}$
c $M(3, -3)$ en de straal is $\sqrt{289} = 17$.
 $MP = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, dus P ligt binnen de cirkel.
 $d(P, c) = 17 - 5 = 12$

- 31 a** Lijnstuk PN geeft de afstand aan tussen c_1 en c_2 .
b Lijnstuk TV geeft de afstand aan tussen c_3 en c_4 .

- 32 a** De middelpunten zijn $M(-2, 3)$ en $N(5, -3)$.
 De stralen zijn $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$ en $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
 c_1 en c_2 liggen geheel buiten elkaar.
 $MN = \sqrt{7^2 + 6^2} = \sqrt{85}$
 $d(c_1, c_2) = \sqrt{85} - \sqrt{18} - \sqrt{8}$
 $d(c_1, c_2) = \sqrt{85} - 5\sqrt{2}$

- b** $c_1: (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 8$
 $c_2: (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2$
 De middelpunten zijn $M(-1, -1)$ en $N(2, 2)$.
 De stralen zijn $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ en $\sqrt{2}$.
 $MN = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
 MN is gelijk aan de som van de twee stralen,
 De cirkels raken elkaar, dus $d(c_1, c_2) = 0$.



- 33 a** $l: 4x + 5y = 19$ ofwel $l: y = -\frac{4}{5}x + 3\frac{4}{5}$
 Het middelpunt van de cirkel c is $M(-3, -2)$.
 De loodlijn m door $M(-3, -2)$ heeft dan richtingscoëfficiënt $\frac{5}{4}$.
 $(-3, -2)$ invullen in $y = \frac{5}{4}x + b$ geeft $-2 = \frac{5}{4} \cdot -3 + b$, dus $b = \frac{7}{4}$.
 De vergelijking is $m: y = \frac{5}{4}x + \frac{7}{4}$.
- b** Het snijpunt van l en m berekenen:
 $-\frac{4}{5}x + 3\frac{4}{5} = \frac{5}{4}x + \frac{7}{4}$ (maal 20)
 $-16x + 76 = 25x + 35$
 $41x = 41$, dus $x = 1$ en $y = -\frac{4}{5} \cdot 1 + 3\frac{4}{5} = 3$, dus $P(1, 3)$.
 $PM = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{41}$
 De straal van de cirkel is 5 en $\sqrt{41} > 5$, dus punt P ligt buiten de cirkel en dan is $PM - 5$ de afstand tussen l en c .
- c** $d(l, c) = \sqrt{41} - 5$.
- 34 a** $l: 4x + 3y = 50$ ofwel $l: y = -\frac{4}{3}x + \frac{50}{3}$
 Het middelpunt van cirkel c is $M(0, 0)$.
 De loodlijn m uit $M(0, 0)$ op l heeft als vergelijking $y = \frac{3}{4}x$.
 Voor het snijpunt P van l en m geldt:
 $-\frac{4}{3}x + \frac{50}{3} = \frac{3}{4}x$ (maal 12)
 $-16x + 200 = 9x$
 $25x = 200$, dus $x = 8$ en $y = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6$, dus $P(8, 6)$.
 $PM = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ en de straal r van de cirkel is 4.
 $PM > r$, dus $d(l, c) = 10 - 4 = 6$.
- b** $l: 4x + 3y + 9 = 0$ ofwel $l: y = -\frac{4}{3}x - 3$
 Het middelpunt van cirkel c is $M(1, 4)$.
 De loodlijn m uit $M(1, 4)$ op l is van de vorm $y = \frac{3}{4}x + b$.
 $M(1, 4)$ invullen geeft $4 = \frac{3}{4} \cdot 1 + b$ dus $b = 3\frac{1}{4}$.
 De loodlijn m uit $M(1, 4)$ op l heeft als vergelijking $y = \frac{3}{4}x + 3\frac{1}{4}$.
 Voor het snijpunt P van l en m geldt:
 $-\frac{4}{3}x - 3 = \frac{3}{4}x + 3\frac{1}{4}$ (maal 12)
 $-16x - 36 = 9x + 39$
 $25x = -75$, dus $x = -3$ en $y = -\frac{4}{3} \cdot -3 - 3 = 1$, dus $P(-3, 1)$.
 $PM = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (1 - 4)^2} = 5$ en de straal r van de cirkel is $\sqrt{6}$.
 $PM > r$, dus $d(l, c) = 5 - \sqrt{6}$.
- c** $l: y = 3x$
 Het middelpunt van cirkel c is $M(3, 5)$.
 De loodlijn m uit $M(3, 5)$ op l is van de vorm $y = -\frac{1}{3}x + b$.
 $(3, 5)$ invullen geeft $5 = -\frac{1}{3} \cdot 3 + b$, dus $b = 6$.
 De loodlijn m uit $M(3, 5)$ op l heeft als vergelijking $y = -\frac{1}{3}x + 6$.
 Voor het snijpunt P van l en m geldt:
 $3x = -\frac{1}{3}x + 6$
 $3\frac{1}{3}x = 6$ ofwel $10x = 18$, dus $x = 1\frac{4}{5}$ en $y = 3 \cdot 1\frac{4}{5} = 5\frac{2}{5}$
 $PM = \sqrt{\left(1\frac{4}{5} - 3\right)^2 + \left(5\frac{2}{5} - 5\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{40}{25}} = \sqrt{1\frac{3}{5}}$
 De straal r van de cirkel is 2 en $PM < r$, dus l snijdt de cirkel en dan is $d(l, c) = 0$.

- 032 a De middelpunten zijn $M(2, 2)$ en $N(6, 6)$.

$$MN = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

b $r_1 = \sqrt{4} = 2$ en $r_2 = \sqrt{9} = 3$

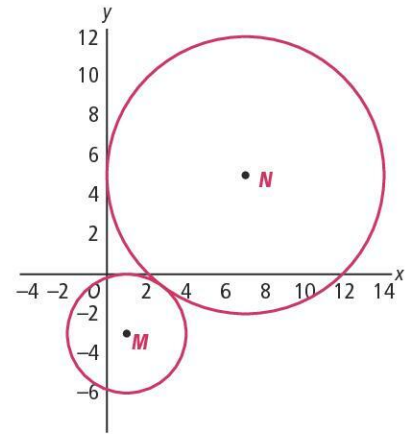
c $MN = \sqrt{32}$ en $r_1 + r_2 = 2 + 3 = 5$ en $\sqrt{32} > 5$

d $d(c_1, c_2) = \sqrt{32} - 5 = 4\sqrt{2} - 5$

- e De middelpunten zijn $M(1, -3)$ en $N(7, 5)$.

$$MN = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10, r_1 = \sqrt{9} = 3 \text{ en } r_2 = \sqrt{49} = 7$$

$MN = r_1 + r_2$ dit betekent dat de cirkels elkaar raken,
dus $d(c_1, c_2) = 0$



f $c_1: x^2 + y^2 - 12y + 4 = 0$

$$c_1: x^2 + (y - 6)^2 - 36 + 4 = 0$$

$$c_1: x^2 + (y - 6)^2 = 32$$

$$c_2: x^2 + y^2 - 2x - 12y + 29 = 0$$

$$c_2: x^2 - 2x + y^2 - 12y + 29 = 0$$

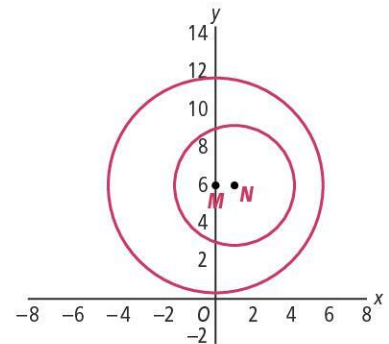
$$c_2: (x - 1)^2 - 1 + (y - 6)^2 - 36 + 29 = 0$$

$$c_2: (x - 1)^2 + (y - 6)^2 = 8$$

De middelpunten zijn $M(0, 6)$ en $N(1, 6)$, dus $MN = 1$.

$$r_1 = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ en } r_2 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$d(c_1, c_2) = r_1 - MN - r_2 = 4\sqrt{2} - 1 - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 1$$



- 034 a m is de loodlijn vanuit M op l en een loodlijn geeft altijd de kortste afstand.

b $-\frac{1}{2}x + 9\frac{1}{2} = 2x + 2$

$$-2\frac{1}{2}x = -7\frac{1}{2}, \text{ dus } x = 3 \text{ en } y = 2 \cdot 3 + 2 = 8, \text{ dus } P(3, 8).$$

- c Het middelpunt van c is $M(0, 2)$.

$$PM = \sqrt{3^2 + (2 - 8)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

- d De straal r van de cirkel is $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, dus $PM > r$.

$$d(l, c) = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$$

- e $l: 2x + y = 21$ ofwel $l: y = -2x + 21$

Het middelpunt van cirkel c is $M(3, 0)$.

De loodlijn m uit $M(3, 0)$ op l heeft als vergelijking $y = \frac{1}{2}x + b$.

$$M(3, 0) \text{ invullen geeft } 0 = \frac{1}{2} \cdot 3 + b \text{ dus } b = -\frac{1}{2}.$$

Voor het snijpunt P van l en m geldt:

$$-2x + 21 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$-2\frac{1}{2}x = -22\frac{1}{2}$$

$$x = 9 \text{ en } y = -2 \cdot 9 + 21 = 3, \text{ dus } P(9, 3).$$

$$PM = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ en de straal } r \text{ van de cirkel is } \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

$$PM > r, \text{ dus } d(l, c) = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$$

- f $l: 3x + 2y = 41$ ofwel $l: y = -1\frac{1}{2}x + 20\frac{1}{2}$

Het middelpunt van cirkel c is $M(0, 1)$.

De loodlijn m uit $M(0, 1)$ op l heeft als vergelijking $y = \frac{2}{3}x + 1$.

Voor het snijpunt P van l en m geldt:

$$-1\frac{1}{2}x + 20\frac{1}{2} = \frac{2}{3}x + 1 \text{ (maal 6)}$$

$$-9x + 123 = 4x + 6$$

$$-13x = -117$$

$$x = 9 \text{ en } y = -1\frac{1}{2} \cdot 9 + 20\frac{1}{2} = 6, \text{ dus } P(9, 6).$$

$$PM = \sqrt{9^2 + 5^2} = \sqrt{106} \text{ en de straal } r \text{ van de cirkel is } \sqrt{13}.$$

$$PM > r, \text{ dus } d(l, c) = \sqrt{106} - \sqrt{13}$$

U7

$$c_1: x^2 + y^2 = 24y - 108$$

$$c_1: x^2 + (y - 12)^2 - 144 = -108$$

$$c_1: x^2 + (y - 12)^2 = 36$$

c_1 is een cirkel met middelpunt $(0, 12)$ en straal 6.

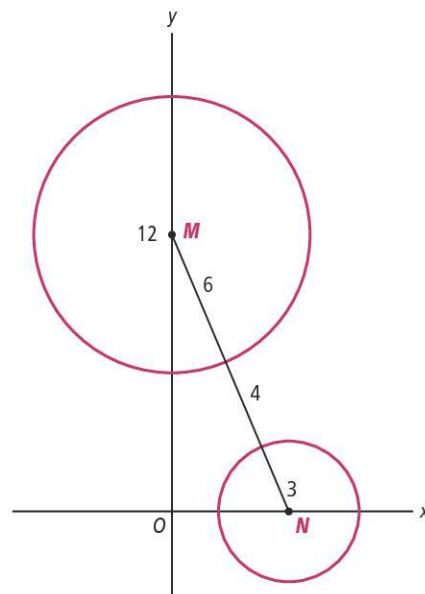
De afstand tussen de middelpunten M en N van de cirkels is $6 + 4 + 3 = 13$.

In de rechthoekige driehoek MON is $OM = 12$ en $MN = 13$.

Pythagoras: $ON^2 = 13^2 - 12^2 = 25$, dus $ON = 5$.

Dit geeft $N(5, 0)$ of $N(-5, 0)$.

$$c_2: (x - 5)^2 + y^2 = 9 \text{ of } c_2: (x + 5)^2 + y^2 = 9$$



U8

De gevraagde lijn moet raken aan de cirkel met middelpunt O en straal 3.

In de rechthoekige driehoek DOP is $OP = 3$ en $OD = 5$.

$$DP^2 = OD^2 - OP^2 = 25 - 9 = 16.$$

$$DP = \sqrt{16} = 4$$

De richtingscoëfficiënt van lijn DP is

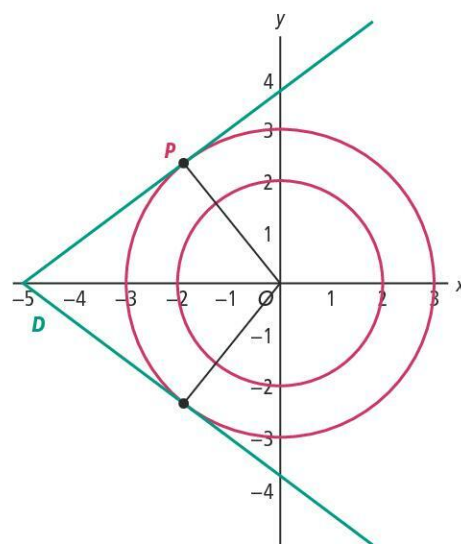
$$\tan(\angle ODP) = \frac{OP}{DP} = \frac{3}{4}.$$

Een vergelijking van lijn DP is $y = \frac{3}{4}x + b$.

Invullen van $(-5, 0)$ geeft $0 = \frac{3}{4} \cdot -5 + b$, dus $b = 3\frac{3}{4}$.

Een vergelijking van lijn DP is $y = \frac{3}{4}x + 3\frac{3}{4}$.

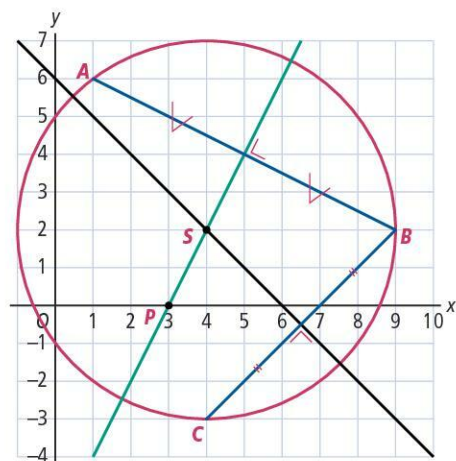
De vergelijking van de andere raaklijn is $y = -\frac{3}{4}x - 3\frac{3}{4}$.



13.5 Ingeschreven en omgeschreven cirkel

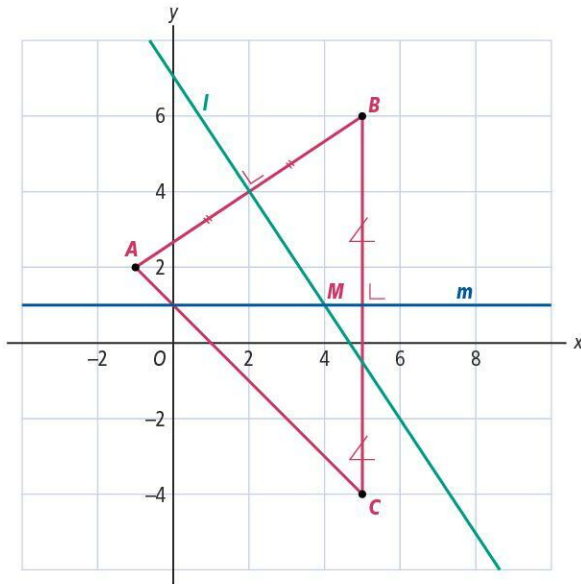
intro Je moet daarvoor de rode driehoek gelijkzijdig maken.

35 a



- b $PA = \sqrt{(1-3)^2 + 6^2} = \sqrt{40}$, $PB = \sqrt{(9-3)^2 + 2^2} = \sqrt{40}$, dus $PA = PB$.
- c Zie de figuur bij opdracht a.
- d S ligt op de middelloodlijn van lijnstuk AB , dus $SA = SB$.
 S ligt op de middelloodlijn van lijnstuk BC , dus $SB = SC$.
Dus $SA = SB = SC$.
- e Het middelpunt van de cirkel is S , omdat $SA = SB = SC$.

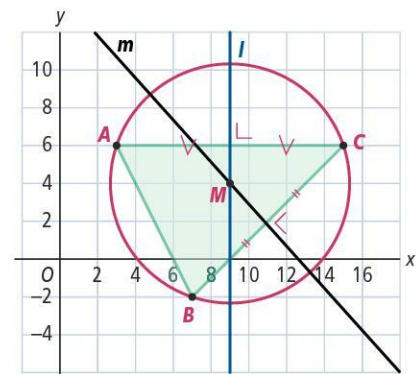
36 a



- b De richtingscoëfficiënt van lijnstuk AB is $\frac{6-2}{5-(-1)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, dus de richtingscoëfficiënt van de middelloodlijn is $-1\frac{1}{2}$.
De middelloodlijn l van lijnstuk AB is van de vorm $y = -1\frac{1}{2}x + b$.
Het midden van lijnstuk AB is $(2, 4)$.
Deze coördinaten invullen geeft $4 = -1\frac{1}{2} \cdot 2 + b$ dus $b = 7$ en $l: y = -1\frac{1}{2}x + 7$.
De middelloodlijn m van lijnstuk BC is $y = 1$.
Het snijpunt van l en m is $M(4, 1)$.
- c M ligt op l , dus $MA = MB$ en M ligt op m , dus $MB = MC$.
Hieruit volgt $MA = MC$, dus M ligt op de middelloodlijn van lijnstuk AC .
- d Het middelpunt is $M(4, 1)$ en de straal is $MA = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$.
De vergelijking is $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 26$.

37 a Het midden van lijnstuk AC is $(9, 6)$. De vergelijking van de middelloodlijn l van lijnstuk AC is $x = 9$.

De richtingscoëfficiënt van lijnstuk BC is $\frac{6-(-2)}{15-7} = 1$, dus de richtingscoëfficiënt van de middelloodlijn m van lijnstuk BC is -1 .
Het midden van lijnstuk BC is $(\frac{1}{2}(7+15), \frac{1}{2}(-2+6))$ ofwel $(11, 2)$.
Een vergelijking van m is $y = -x + 13$.
Het snijpunt van l en m is $M(9, 4)$.
De straal van de omgeschreven cirkel is $MC = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$.
Een vergelijking van de cirkel is $(x-9)^2 + (y-4)^2 = 40$.



- b** Het midden van lijnstuk AB is $(-1, 1)$.

De richtingscoëfficiënt van lijnstuk AB is $\frac{5 - -3}{-3 - 1} = -2$.

De richtingscoëfficiënt van de middelloodlijn l van lijnstuk AB is $\frac{1}{2}$.

Een vergelijking van l is van de vorm $y = \frac{1}{2}x + b$.

De coördinaten van $(-1, 1)$ invullen geeft $1 = \frac{1}{2} \cdot -1 + b$, dus $b = 1\frac{1}{2}$.

$$l: y = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$$

Het midden van lijnstuk AC is $(2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$.

De richtingscoëfficiënt van lijnstuk AC is $\frac{6 - -3}{4 - 1} = 3$.

De richtingscoëfficiënt van de middelloodlijn m van lijnstuk AC is $-\frac{1}{3}$.

Een vergelijking van m is van de vorm $y = -\frac{1}{3}x + b$.

De coördinaten van $(2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$ invullen geeft $1\frac{1}{2} = -\frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{2} + b$, dus $b = 2\frac{1}{3}$.

$$m: y = -\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$$

Het middelpunt M is het snijpunt van l en m :

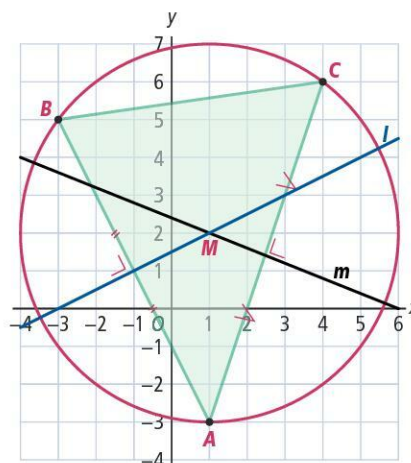
$$\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2} = -\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3} \text{ (maal 6)}$$

$$3x + 9 = -2x + 14$$

$$5x = 5, \text{ dus } x = 1 \text{ en } y = \frac{1}{2} \cdot 1 + 1\frac{1}{2} = 2, \text{ dus } M(1, 2).$$

De straal van de cirkel is $MC = \sqrt{(4 - 1)^2 + (6 - 2)^2} = 5$.

Een vergelijking van de cirkel: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.



38 a $\sin(\angle PAQ) = \frac{PQ}{AP}$, dus $PQ = AP \cdot \sin(\angle PAQ)$.

b $\sin(\angle PAR) = \frac{PR}{AP}$, dus $PR = AP \cdot \sin(\angle PAR)$

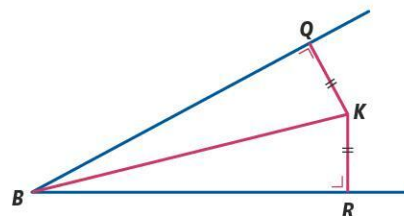
en omdat $\angle PAQ = \angle PAR$ volgt hieruit dat $PQ = PR$.

c $\sin(\angle KBQ) = \frac{KQ}{KB}$ en $\sin(\angle KBR) = \frac{KR}{KB}$

Omdat $KQ = KR$, volgt hieruit dat

$$\sin(\angle KBQ) = \sin(\angle KBR), \text{ dus } \angle KBQ = \angle KBR.$$

Dat betekent dat K op de deellijn (bissectrice) van hoek B ligt.



- 39 a** D heeft gelijke afstanden tot de lijnen AB en AC .

D heeft ook gelijke afstanden tot de lijnen AB en BC .

Daaruit volgt dat D ook gelijke afstanden heeft tot de lijnen AC en BC , daarom ligt D ook op de deellijn van hoek C .

- b** De afstand van D tot elk van de zijden is gelijk, dus de zijden van de driehoek raken een cirkel waarvan D het middelpunt is.

- 40 a** In $\triangle PQS$ is $\angle SPQ = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$, $\angle SQP = \frac{1}{2} \cdot 20^\circ = 10^\circ$ en $\angle PSQ = 180^\circ - 60^\circ - 10^\circ = 110^\circ$.

Gebruik de sinusregel in $\triangle PQS$:

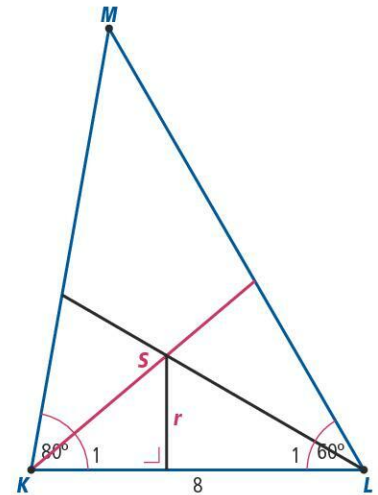
$$\frac{PS}{\sin(10^\circ)} = \frac{7}{\sin(110^\circ)}, \text{ dus } PS = \frac{7 \cdot \sin(10^\circ)}{\sin(110^\circ)} = 1,293\dots$$

$$\sin(60^\circ) = \frac{r}{PS}, \text{ dus } r = PS \cdot \sin(60^\circ) \approx 1,12.$$

- b In $\triangle KLS$ is $\angle K_1 = \frac{1}{2} \cdot 80^\circ = 40^\circ$, $\angle L_1 = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$ en $\angle KSL = 180^\circ - 40^\circ - 30^\circ = 110^\circ$.

$$\frac{KS}{\sin(30^\circ)} = \frac{8}{\sin(110^\circ)}, \text{ dus } KS = \frac{8 \cdot \sin(30^\circ)}{\sin(110^\circ)} = 4,256\dots$$

$$\sin(40^\circ) = \frac{r}{KS}, \text{ dus } r = KS \cdot \sin(40^\circ) \approx 2,74.$$



- 41 a Omdat in een gelijkzijdige driehoek de bissectrices van de hoeken en de middelloodlijnen van de zijden samenvallen, is het snijpunt M van de middelloodlijnen het middelpunt van zowel de omgeschreven cirkel als van de ingeschreven cirkel.

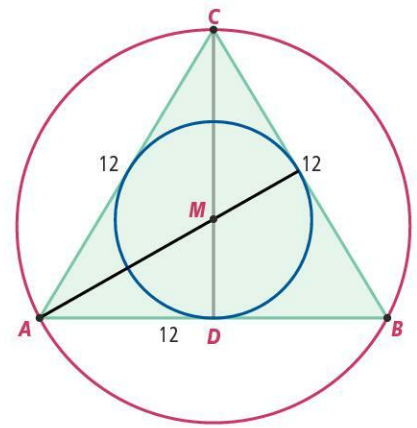
MD is de straal van de ingeschreven cirkel en MC de straal van de omgeschreven cirkel.

$$\text{In } \triangle ADC \text{ is } AD = 6 \text{ en } CD = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}.$$

Omdat M ook het zwaartepunt is van $\triangle ABC$, geldt $CM : MD = 2 : 1$.

De straal van de omgeschreven cirkel is $CM = 4\sqrt{3}$.

- b De straal van de ingeschreven cirkel is $MD = 2\sqrt{3}$.



- 42 a De bissectrice van hoek O is de lijn $y = x$.
 b Noem het snijpunt van de hoogtelijn uit B met zijde BC punt D . $\triangle ABC$ is gelijkbenig, dus $\angle A = \angle C$. De hoeken bij D zijn recht, dus geldt ook dat $\angle CBD = \angle ABD$.
 c $AB^2 = OA^2 + OB^2 = 15^2 + 8^2 = 289$, dus $AB = \sqrt{289} = 17$ en $C(0, -2)$.

$$\text{De richtingscoëfficiënt van lijn } CA \text{ is } \frac{0 - -2}{8 - 0} = \frac{1}{4}.$$

De richtingscoëfficiënt van lijn BD is dus -4 .

De vergelijking van lijn BD is $y = -4x + 15$.

Voor het snijpunt M van de bissectrices geldt: $x = -4x + 15$

$$5x = 15, \text{ dus } x = 3 \text{ en } y = 3 \text{ dus } M(3, 3).$$

r is de afstand van M tot de x -as, dus $r = 3$.

$$\text{Een vergelijking van de ingeschreven cirkel is } (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$$

- 037 a $P\left(\frac{1}{2}(0 + 8), \frac{1}{2}(3 + -1)\right)$ ofwel $P(4, 1)$.

- b De richtingscoëfficiënt van lijn AB is $\frac{-1 - 3}{8 - 0} = -\frac{1}{2}$.

- c De richtingscoëfficiënt van de middelloodlijn is 2 , want $-\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$.

Een vergelijking van de middelloodlijn is van de vorm $y = 2x + b$.

Invullen van de coördinaten van P geeft $1 = 2 \cdot 4 + b$, dus $b = -7$.

Een vergelijking van de middelloodlijn is $y = 2x - 7$.

- d Het midden van lijnstuk AC is $Q\left(\frac{1}{2}(0 + 5), \frac{1}{2}(3 + 8)\right)$ ofwel $Q\left(2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}\right)$.

$$\text{De richtingscoëfficiënt van lijn } AC \text{ is } \frac{8 - 3}{5 - 0} = 1.$$

De richtingscoëfficiënt van de middelloodlijn is -1 , want $1 \cdot -1 = -1$

Een vergelijking van de middelloodlijn is van de vorm $y = -x + b$.

Invullen van de coördinaten van Q geeft $5\frac{1}{2} = -2\frac{1}{2} + b$, dus $b = 8$.

Een vergelijking van deze middelloodlijn is $y = -x + 8$.

e $2x - 7 = -x + 8$

$3x = 15$

$x = 5$ en $y = -5 + 8 = 3$, dus $M(5, 3)$.

f De afstand tussen $A(0, 3)$ en $M(5, 3)$ is 5.

g $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 25$

040 a $\angle MAB = \frac{1}{2} \cdot 70^\circ = 35^\circ$, $\angle MBA = \frac{1}{2} \cdot 50^\circ = 25^\circ$ dus
 $\angle AMB = 180^\circ - 35^\circ - 25^\circ = 120^\circ$.

b $\frac{AM}{\sin(25^\circ)} = \frac{8}{\sin(120^\circ)}$ geeft $AM = \frac{8 \cdot \sin(25^\circ)}{\sin(120^\circ)} = 3,903\dots$

c in $\triangle APM$ is $\sin(\angle MAP) = \frac{r}{AM}$, dus $r = AM \cdot \sin(\angle MAP)$

d $r = AM \cdot \sin(\angle MAP)$

$r = 3,903\dots \cdot \sin(35^\circ)$

$r \approx 2,24$

U9 a Stel het midden van AB is P , dus $AP = BP = 45$.

$CP^2 = 117^2 - 45^2 = 11\,664$

$CP = \sqrt{11\,664} = 108$

De oppervlakte van $\triangle ABC$ is $\frac{1}{2} \cdot 90 \cdot 108 = 4860$.

b Opp. $\triangle ABM = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot r = 45r$

Opp. $\triangle BCM = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot r = 58\frac{1}{2}r$ en Opp. $\triangle ACM = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot r = 58\frac{1}{2}r$

c $45r + 58\frac{1}{2}r + 58\frac{1}{2}r = 4860$

$162r = 4860$, dus $r = 30$.

d Als je een horizontale lijn door het raakpunt van de twee cirkels trekt, ontstaat bovenaan een driehoek met hoogte $108 - 2 \times 30 = 48$.

Deze driehoek is gelijkvormig met $\triangle ABC$ met factor $\frac{48}{108} = \frac{4}{9}$.

De straal van de ingeschreven cirkel van deze driehoek is $\frac{4}{9} \times 30 = 13\frac{1}{3}$.

13.6 Gemengde opdrachten

43 a Het middelpunt van c_1 is $M(-12, 6)$.

$l: y = -2x + 17$, de richtingscoëfficiënt van l is -2 .

De richtingscoëfficiënt van de loodlijn m door M op l is $\frac{1}{2}$.

Een vergelijking van m is van de vorm $y = \frac{1}{2}x + b$.

Invullen van $M(-12, 6)$ geeft $6 = \frac{1}{2} \cdot -12 + b$, dus $b = 12$.

$m: y = \frac{1}{2}x + 12$

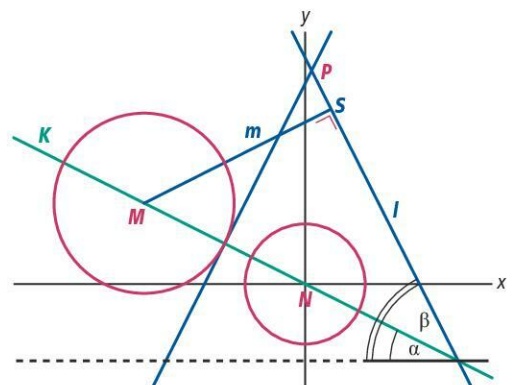
Voor het snijpunt S van l en m geldt

$-2x + 17 = \frac{1}{2}x + 12$.

$2\frac{1}{2}x = 5$, dus $x = 2$ en $y = \frac{1}{2} \cdot 2 + 12 = 13$ dus $S(2, 13)$.

$MS = \sqrt{(2 - (-12))^2 + (13 - 6)^2} = \sqrt{245} = 7\sqrt{5}$

$d(l, c_1) = MS - r = \sqrt{245} - \sqrt{45} = 7\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$.



- b** $y = -2x + 17$ substitueren in $c_2 : x^2 + y^2 = 20$ geeft
 $x^2 + (-2x + 17)^2 = 20$
 $x^2 + 4x^2 - 68x + 289 = 20$
 $5x^2 - 68x + 269 = 0$
 $D = (-68)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 269 = -756$
 $D < 0$, de vergelijking heeft geen oplossing, dus zijn er geen gemeenschappelijke punten.
- c** De richtingscoëfficiënt van k is $-\frac{1}{2}$.
 $\tan(\alpha) = \frac{1}{2}$ geeft $\alpha = 26,565\dots^\circ$
 $\tan(\beta) = 2$ geeft $\beta = 63,434\dots^\circ$
 $\angle(l, k) = \beta - \alpha \approx 37^\circ$
- d** P is het snijpunt van de middelloodlijn n van lijnstuk MN met l .
 Het midden van lijnstuk MN is $(-6, 3)$.
 De richtingscoëfficiënt van k is $-\frac{1}{2}$, dus de richtingscoëfficiënt van n is 2.
 Een vergelijking van n is van de vorm $y = 2x + b$.
 Invullen van $(-6, 3)$ geeft $3 = 2 \cdot -6 + b$, dus $b = 15$.
 $n: y = 2x + 15$
 Voor het snijpunt P van l en n geldt
 $-2x + 17 = 2x + 15$
 $4x = 2$
 $x = \frac{1}{2}$ en $y = 2 \cdot \frac{1}{2} + 15 = 16$ dus $P(\frac{1}{2}, 16)$.

- 44 a** De richtingscoëfficiënt van lijn k is $\frac{4-10}{8-0} = -\frac{3}{4}$.
 De richtingscoëfficiënt van lijn MQ is $\frac{4-0}{8-5} = \frac{4}{3}$.
 $-\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = -1$, dus $MQ \perp k$ en dus raakt k de cirkel in Q .

- b** De vergelijking van k is $y = -\frac{3}{4}x + 10$.
 $-\frac{3}{4}x + 10 = 0$ geeft $\frac{3}{4}x = 10$, dus $x = 13\frac{1}{3}$ en $S(13\frac{1}{3}, 0)$.
 De oppervlakte van $\triangle OPS$ is $\frac{1}{2} \cdot 13\frac{1}{3} \cdot 10 = 66\frac{2}{3}$.

- c** $c: (x-5)^2 + y^2 = 25$
 Substitutie van $y = -3x + 20$ in de vergelijking van c geeft
 $(x-5)^2 + (-3x+20)^2 = 25$
 $x^2 - 10x + 25 + 9x^2 - 120x + 400 = 25$
 $10x^2 - 130x + 400 = 0$
 $x^2 - 13x + 40 = 0$
 $(x-5)(x-8) = 0$
 $x = 5$ of $x = 8$

$x = 5$ geeft $y = -3 \cdot 5 + 20 = 5$ en $A(5, 5)$
 $x = 8$ geeft $y = -3 \cdot 8 + 20 = -4$ en $B(8, -4)$
 $AB = \sqrt{(8-5)^2 + (-4-5)^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

- d** Substitutie van $y = p$ in de vergelijking van c geeft
 $(x-5)^2 + p^2 = 25$
 $(x-5)^2 = 25 - p^2$
 $x-5 = \sqrt{25-p^2}$ of $x-5 = -\sqrt{25-p^2}$
 $x = 5 + \sqrt{25-p^2}$ of $x = 5 - \sqrt{25-p^2}$
 Het verschil tussen deze x -waarden is $2\sqrt{25-p^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.
 $\sqrt{25-p^2} = \sqrt{7}$
 $x = 5 + \sqrt{7}$ of $x = 5 - \sqrt{7}$
 $\sqrt{25-p^2} = \sqrt{7}$ geeft $p^2 = 18$, dus $p = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ($p > 0$)
 De snijpunten zijn $C(5 - \sqrt{7}, 3\sqrt{2})$ en $D(5 + \sqrt{7}, 3\sqrt{2})$.

- 45 a** $l: 4x - 3y + 25 = 0$ ofwel $l: -3y = -4x - 25$ dus $l: y = \frac{4}{3}x + 8\frac{1}{3}$.
Dus l is evenwijdig met $k: y = \frac{4}{3}x$.
- b** $(0, 0)$ ligt op k . De loodlijn uit $(0, 0)$ op l is $y = -\frac{3}{4}x$.
Voor het snijpunt S van k en l geldt:
 $\frac{4}{3}x + 8\frac{1}{3} = -\frac{3}{4}x$ (maal 12).
 $16x + 100 = -9x$
 $25x = -100$, dus $x = -4$ en $y = -\frac{3}{4} \cdot -4 = 3$ en $S(-4, 3)$.
 $d(k, l) = OS = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$
- c** $m: x - 7y + 25 = 0$ ofwel $m: x = 7y - 25$.
Voor het snijpunt T van k en m geldt: $y = \frac{4}{3}(7y - 25)$.
 $3y = 28y - 100$ ofwel $-25y = -100$, dus $y = 4$.
 $x = 7 \cdot 4 - 25 = 3$, dus $T(3, 4)$.
Voor het snijpunt U van l en m geldt: $y = \frac{4}{3}(7y - 25) + 8\frac{1}{3}$.
 $3y = 28y - 100 + 25$ ofwel $-25y = -75$, dus $y = 3$.
 $x = 7 \cdot 3 - 25 = -4$, dus $U(-4, 3)$.
- d** Het middelpunt van deze cirkel ligt precies tussen de punten T en U in en heeft dus coördinaten $(-\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$. De straal van de cirkel is de helft van de afstand tussen k en l en is $2\frac{1}{2}$. De middelpuntsvergelijking is
 $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - 3\frac{1}{2})^2 = 6\frac{1}{4}$.

- 46 a** $c_2: x^2 + y^2 - 16x + 8y + 30 = 0$
 $c_2: x^2 - 16x + y^2 + 8y = -30$
 $c_2: (x - 8)^2 - 64 + (y + 4)^2 - 16 = -30$
 $c_2: (x - 8)^2 + (y + 4)^2 = 50$
 $M_1(-4, 1)$ en $M_2(8, -4)$ zijn de middelpunten van c_1 , en c_2 .
 $r_1 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ en $r_2 = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
 $M_1M_2 = \sqrt{(-4 - 8)^2 + (1 - (-4))^2} = \sqrt{169} = 13$
 $d(c_1, c_2) = M_1M_2 - r_1 - r_2 = 13 - 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 13 - 8\sqrt{2}$
- b** $c_3: x^2 + y^2 - 12x + 8y + 44 = 0$
 $c_3: x^2 - 12x + y^2 + 8y = -44$
 $c_3: (x - 6)^2 - 36 + (y + 4)^2 - 16 = -44$
 $c_3: (x - 6)^2 + (y + 4)^2 = 8$
 $M_3(6, -4)$ is het middelpunt van c_3 en $r_3 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
 $M_2M_3 = 2$
 $d(c_2, c_3) = r_2 - M_2M_3 - r_3 = 5\sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} - 2$

- 47 a** $c: x^2 - 6x + y^2 + 2y = 3$
 $c: (x - 3)^2 - 9 + (y + 1)^2 - 1 = 3$
 $c: (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 13$
Substitutie van $l: y = 1\frac{1}{2}x - 12$ in de cirkelvergelijking geeft:
 $(x - 3)^2 + (1\frac{1}{2}x - 12 + 1)^2 = 13$
 $(x - 3)^2 + (1\frac{1}{2}x - 11)^2 = 13$
 $x^2 - 6x + 9 + 2\frac{1}{4}x^2 - 33x + 121 = 13$
 $3\frac{1}{4}x^2 - 39x + 127 = 0$
 $\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9 = 0$ (gedeeld door 13)
 $x^2 - 12x + 36 = 0$
 $(x - 6)^2 = 0$, dus $x = 6$
Eén oplossing, dus de lijn raakt de cirkel.

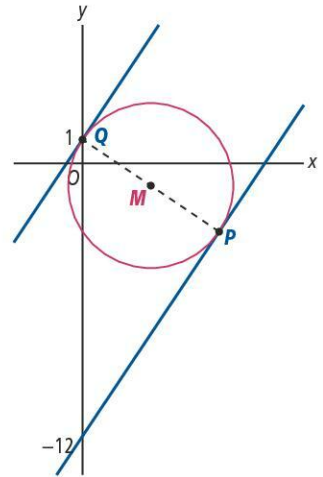
- b Het raakpunt is $P(6, -3)$.

De andere raaklijn met richtingscoëfficiënt $1\frac{1}{2}$ raakt de cirkel in punt Q dat het spiegelbeeld is van punt P bij spiegeling in het middelpunt van de cirkel $M(3, -1)$. Vanuit P naar M is 3 naar links, 2 omhoog.

Punt Q vind je door vanuit M 3 naar links en 2 omhoog te gaan: $Q(0, 1)$.

De vergelijking van die raaklijn is $y = 1\frac{1}{2}x + 1$.

Er zijn twee snijpunten voor waarden van b tussen -12 en 1 , ofwel $-12 < b < 1$.



Onderoeksopdrachten

- 48 a** Ja, want het snijpunt van de diagonalen heeft gelijke afstanden tot alle vier hoekpunten.
- b** Ja, want het snijpunt van de diagonalen heeft gelijke afstanden tot elk van de vier zijden.
- c** Het snijpunt van de diagonalen van een ruit ligt in het algemeen niet op gelijke afstand van de vier hoekpunten.
Het snijpunt van de diagonalen van een ruit heeft wel gelijke afstanden tot elk van de vier zijden, want de diagonalen van een ruit zijn de bissectrices van de hoeken.
- d** Dan moeten de halve diagonalen dezelfde lengte hebben, en dan is de ruit tevens een vierkant.
- e** *Parallellogram*
Een parallellogram heeft een omgeschreven cirkel als de halve diagonalen even lang zijn, en dan wordt het een rechthoek.
Een parallellogram heeft een ingeschreven cirkel als het snijpunt van de diagonalen gelijke afstanden heeft tot elk van de zijden. In dat geval is het een ruit.

Vlieger

Een vlieger heeft een omgeschreven cirkel, als de afstand van midden M van de diagonaal op de symmetrieas gelijke afstanden heeft tot de hoekpunten die niet op de symmetrieas liggen. (In $\triangle ABC$ verdeelt lijnstuk MB de driehoek in twee gelijkbenige driehoeken. $\angle B = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$. Je kunt dus ook zeggen dat een vlieger een omgeschreven cirkel heeft als de driehoeken aan weerszijden van de symmetrieas rechthoekig zijn.)

Elke vlieger heeft een ingeschreven cirkel. Je vindt het middelpunt door de bissectrices van de gelijke hoeken te snijden met de symmetrieas.

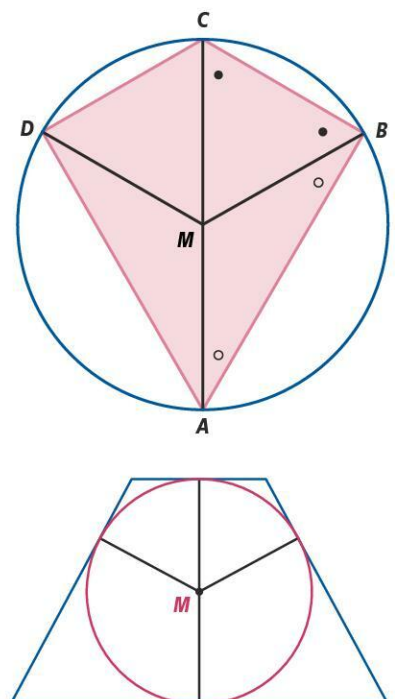
Rechthoek

Een rechthoek heeft een omgeschreven cirkel want de halve diagonalen zijn even lang.

Een rechthoek heeft alleen een ingeschreven cirkel als het een vierkant is.

Gelijkbenig trapezium

Een gelijkbenig trapezium heeft altijd een omgeschreven cirkel. Het middelpunt is het snijpunt van de symmetrieas en de middelloodlijnen van de opstaande zijden.



Een gelijkbenig trapezium heeft een ingeschreven cirkel als de afstand van het punt M op de symmetrieas halverwege de evenwijdige zijden tot de opstaande zijden gelijk is aan de halve hoogte.

- 49** De middelpunten van de drie kleinere cirkels zijn de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek met zijden 6. Het middelpunt M van de grote cirkel is het zwaartepunt van deze gelijkzijdige driehoek.

Lijnstuk AB is een zwaartelijn van de driehoek en $MA : MB = 1 : 2$.

$$AB = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} \text{ dus } AB = 3\sqrt{3}.$$

$$MA = \frac{1}{3} \cdot AB = \sqrt{3} \text{ en } MB = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

De straal r van de grote cirkel is $MB + 3 = 2\sqrt{3} + 3$.

De oppervlakte van de grote cirkel is

$$\pi \cdot (2\sqrt{3} + 3)^2 \approx 41,7846\pi.$$

De oppervlakte van een kleine cirkel is $\pi \cdot 3^2 = 9\pi$.

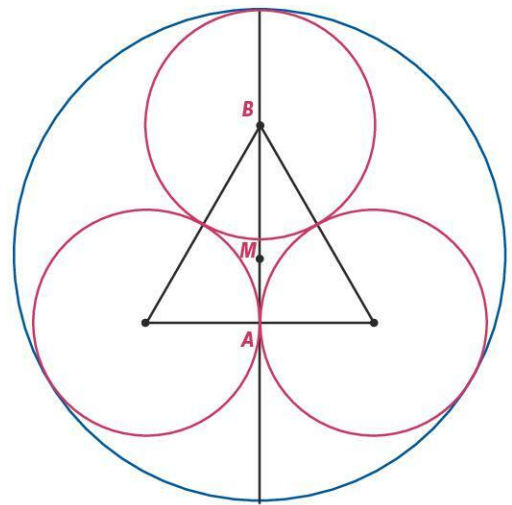
De oppervlakte van het groene gebied is dus $3 \cdot 9\pi = 27\pi$.

De oppervlakte van het roze gebied is dus

$$\pi \cdot (41,7846 - 27) \approx 14,7846\pi$$

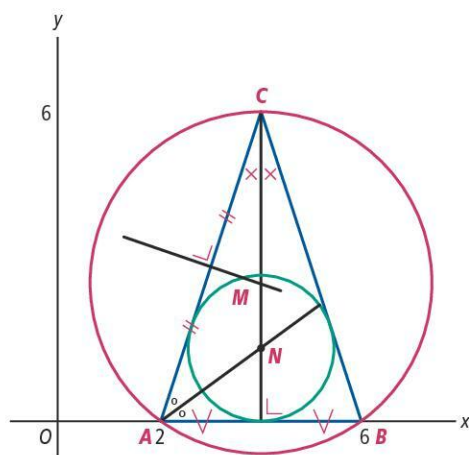
Tweemaal deze oppervlakte is $29,5692\pi$.

De oppervlakte van het groene gebied is dus *niet* groter dan tweemaal de oppervlakte van het roze gebied.



Samenvatting

S1 a



- b** Zie opdracht a. Het middelpunt M van de omgeschreven cirkel is het snijpunt van de middelloodlijnen.
c Zie opdracht a. Het middelpunt N van de ingeschreven cirkel is het snijpunt van de bissectrices.

S2 a $\frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1$

$$\frac{1}{2}x + y = 4$$

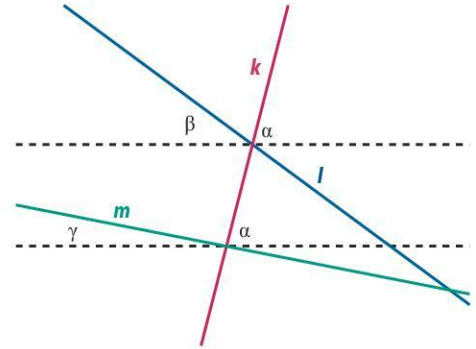
$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

13 Cirkels

b $y = \frac{2}{5}x + 3$
 $5y = 2x + 15$
 $-2x + 5y = 15$

c $y = \frac{5}{6}x + 15$
 $6y = 5x + 90$
 $-5x + 6y = 90$
 $\frac{x}{-18} + \frac{y}{15} = 1$

- S3** $k: y = 4x - 8$, $l: y = -\frac{3}{4}x + 3\frac{3}{4}$ en $m: y = -\frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$
 De hoeken die k , l en m met een horizontale lijn maken, zijn α , β en γ .
 $\tan(\alpha) = 4$ geeft $\alpha = 75,963\dots^\circ$
 $\tan(\beta) = \frac{3}{4}$ geeft $\beta = 36,869\dots^\circ$
 $\tan(\gamma) = \frac{1}{5}$ geeft $\gamma = 11,309\dots^\circ$
 $\angle(k, l) = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 67^\circ$
 $\angle(k, m) = \alpha + \gamma \approx 87^\circ$



- S4 a** De loodlijn n door P op l heeft richtingscoëfficiënt -3 .
 Een vergelijking van n is van de vorm $y = -3x + b$.
 $(-1, 18)$ invullen geeft $18 = -3 \cdot -1 + b$, dus $b = 15$ en $n: y = -3x + 15$.
 Voor het snijpunt S van l en n geldt $\frac{1}{3}x + 5 = -3x + 15$.
 $3\frac{1}{3}x = 10$ geeft $x = 3$ en $y = \frac{1}{3} \cdot 3 + 5 = 6$ en $S(3, 6)$.
 $d(P, l) = PS = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (6 - 18)^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$.
- b** $m: x - 3y = 25$ ofwel $m: -3y = -x + 25$ ofwel $m: y = \frac{1}{3}x + 8\frac{1}{3}$.
 Dit betekent dat de lijnen l en m evenwijdig zijn.
 Kies een punt op m , bijvoorbeeld $Q(25, 0)$.
 Een vergelijking van de loodlijn k door Q op l is $y = -3x + b$.
 $Q(25, 0)$ invullen geeft $0 = -3 \cdot 25 + b$, dus $b = 75$ en $k: y = -3x + 75$.
 Voor het snijpunt S van l en k geldt $\frac{1}{3}x + 5 = -3x + 75$.
 $3\frac{1}{3}x = 70$ geeft $x = 21$ en $y = \frac{1}{3} \cdot 21 + 5 = 12$ en $S(21, 12)$.
 $d(l, m) = QS = \sqrt{(21 - 25)^2 + (12 - 0)^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$.

- S5 a** $x^2 + y^2 + 10x + 6y + 25 = 0$
 $x^2 + 10x + y^2 + 6y + 25 = 0$
 $(x + 5)^2 - 25 + (y + 3)^2 - 9 + 25 = 0$
 $(x + 5)^2 + (y + 3)^2 = 9$
- b** $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$
 $x^2 - 8x + y^2 + 6y = 0$
 $(x - 4)^2 - 16 + (y + 3)^2 - 9 = 0$
 $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$
 Het middelpunt is $(4, -3)$ en de straal is 5 .

- S6 a** $l: x + 5y = 14$ ofwel $l: x = 14 - 5y$ substitueren in de cirkelvergelijking geeft
 $(14 - 5y)^2 + y^2 - 2(14 - 5y) = 12$
 $196 - 140y + 25y^2 + y^2 - 28 + 10y = 12$
 $26y^2 - 130y + 156 = 0$
 $y^2 - 5y + 6 = 0$
 $(y - 3)(y - 2) = 0$, dus $y = 2$ of $y = 3$
 $y = 2$ geeft $x = 14 - 5 \cdot 2 = 4$ en $y = 3$ geeft $x = 14 - 5 \cdot 3 = -1$
 De snijpunten zijn $(4, 2)$ en $(-1, 3)$.

- b** $l: y - x = 3$ ofwel $l: y = x + 3$ substitueren in de cirkelvergelijking geeft

$$(x - 4)^2 + (x + 3 - 7)^2 = 18$$

$$(x - 4)^2 + (x - 4)^2 = 18$$

$$2 \cdot (x - 4)^2 = 18$$

$$(x - 4)^2 = 9$$

$$x - 4 = 3 \text{ of } x - 4 = -3$$

$$x = 7 \text{ of } x = 1$$

De snijpunten zijn $(7, 10)$ en $(1, 4)$.

- S7** Het middelpunt van c is $M(2, 5)$.

De richtingscoëfficiënt van lijn MP is $\frac{2 - 5}{-2 - 2} = \frac{3}{4}$.

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan c in P is $-\frac{4}{3}$.

Een vergelijking van de raaklijn is van de vorm $y = -\frac{4}{3}x + b$.

De coördinaten invullen van $P(-2, 2)$ geeft $2 = -\frac{4}{3} \cdot -2 + b$, dus $b = -\frac{2}{3}$.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$.

- S8 a** Het middelpunt van c_1 is $M(-8, -10)$ en de straal is $\sqrt{90}$ ofwel $3\sqrt{10}$.

$$PM = \sqrt{18^2 + 6^2} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}$$

$$PM > r, \text{ dus } d(P, c_1) = 6\sqrt{10} - 3\sqrt{10} = 3\sqrt{10}.$$

- b** Het middelpunt van c_2 is $N(0, 14)$ en de straal is $\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

$$MN = \sqrt{8^2 + 24^2} = \sqrt{640} = 8\sqrt{10}$$

$MN > 3\sqrt{10} + 2\sqrt{10}$, dus de twee cirkels liggen geheel buiten elkaar.

$$d(c_1, c_2) = 8\sqrt{10} - 3\sqrt{10} - 2\sqrt{10} = 3\sqrt{10}.$$

- S9** Het middelpunt van de cirkel is $M(0, 1)$ en de straal is $\sqrt{10}$.

De richtingscoëfficiënt van de loodlijn k uit M op l is $-\frac{1}{3}$.

Een vergelijking van k is $y = -\frac{1}{3}x + 1$.

Voor het snijpunt van l en k geldt $3x + 16 = -\frac{1}{3}x + 1$.

$3\frac{1}{3}x = -15$, dus $x = -4\frac{1}{2}$. Het snijpunt is $S(-4\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$.

$$MS = \sqrt{\left(-4\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{90} = 1\frac{1}{2}\sqrt{10}$$

$$MS > r, \text{ dus } d(l, c) = MS - \sqrt{10} = 1\frac{1}{2}\sqrt{10} - \sqrt{10} = \frac{1}{2}\sqrt{10}.$$

Test jezelf

- T1 a** Substitutie van $y = \frac{1}{3}x + 1$ in $2x + 3y = 11$ geeft

$$2x + 3\left(\frac{1}{3}x + 1\right) = 11$$

$$2x + x + 3 = 11$$

$$3x = 8$$

$$x = 2\frac{2}{3} \text{ en } y = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{3} + 1 = 1\frac{8}{9}.$$

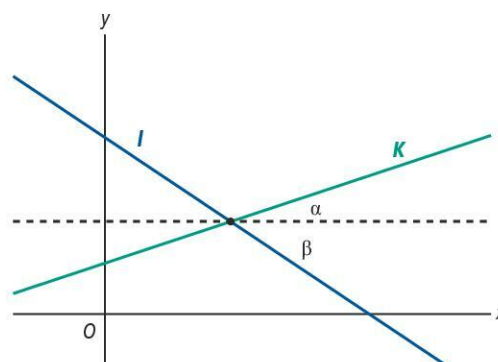
Het snijpunt is het punt $(2\frac{2}{3}, 1\frac{8}{9})$.

- b** $\tan(\alpha) = \frac{1}{3}$ geeft $\alpha = 18,434\dots^\circ$

$$l: 2x + 3y = 11 \text{ ofwel } l: y = -\frac{2}{3}x + 3\frac{2}{3}$$

$$\tan(\beta) = \frac{2}{3} \text{ geeft } \beta = 33,690\dots^\circ$$

$$\angle(k, l) = \alpha + \beta \approx 52^\circ$$



c $1,5 \cdot -\frac{2}{3} = -1$, dus $n \perp l$.

d $m: \frac{x}{27} - \frac{y}{9} = 1$ ofwel $x - 3y = 27$ ofwel $y = \frac{1}{3}x - 9$.

De richtingscoëfficiënten van k en m zijn gelijk, dus $k \parallel m$.

Kies een punt op k , bijvoorbeeld $P(0, 1)$.

De loodlijn uit P op m heeft vergelijking $y = -3x + 1$.

Voor het snijpunt S geldt: $-3x + 1 = \frac{1}{3}x - 9$.

$3\frac{1}{3}x = 10$, dus $x = 3$ en $y = -3 \cdot 3 + 1 = -8$ en $S(3, -8)$.

$d(k, m) = PS = \sqrt{(3-0)^2 + (-8-1)^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$.

T2 a $(x+2)^2 + (y-7)^2 = (2\sqrt{3})^2$

$(x+2)^2 + (y-7)^2 = 12$

b $x^2 + y^2 - 4y = 10$

$x^2 + (y-2)^2 - 4 = 10$

$x^2 + (y-2)^2 = 14$

Het middelpunt is $(0, 2)$ en de straal is $\sqrt{14}$.

T3 a $k: 3x + 4y = 20$ ofwel $k: y = -\frac{3}{4}x + 5$

Methode 1

De loodlijn l uit het middelpunt $M(1, -2)$ op k heeft vergelijking $y = \frac{4}{3}x + b$.

Invullen van $(1, -2)$ geeft $-2 = \frac{4}{3} \cdot 1 + b$, dus $b = -3\frac{1}{3}$ en $l: y = \frac{4}{3}x - 3\frac{1}{3}$.

Voor het snijpunt S van k en l geldt $-\frac{3}{4}x + 5 = \frac{4}{3}x - 3\frac{1}{3}$.

$-9x + 60 = 16x - 40$

$-25x = -100$

$x = 4$ en $y = -\frac{3}{4} \cdot 4 + 5 = 2$, dus $S(4, 2)$.

$MS = \sqrt{(4-1)^2 + (2-(-2))^2} = 5$, dus $d(M, k) = 5$ en dat is gelijk aan de straal van de cirkel, dus k raakt c .

Methode 2

Substitutie van $y = -\frac{3}{4}x + 5$ in de cirkelvergelijking geeft

$(x-1)^2 + \left(-\frac{3}{4}x + 5 + 2\right)^2 = 25$

$(x-1)^2 + \left(-\frac{3}{4}x + 7\right)^2 = 25$

$x^2 - 2x + 1 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{21}{2}x + 49 = 25$

$\frac{25}{16}x^2 - 12\frac{1}{2}x + 25 = 0$

$25x^2 - 200x + 400 = 0$

$x^2 - 8x + 16 = 0$

$(x-4)^2 = 0$

$x = 4$; de cirkel en lijn k hebben één snijpunt, dus k raakt c .

b $x = 4$ en $y = -\frac{3}{4} \cdot 4 + 5 = 2$, dus $S(4, 2)$.

c Het raakpunt R van m is het spiegelbeeld van $(4, 2)$ bij spiegeling in $M(1, -2)$.

Van $(4, 2)$ naar $(1, -2)$ is 3 naar links en 4 omlaag.

Van $(1, -2)$ naar R is dus ook 3 naar links en 4 omlaag, dus $R(-2, -6)$.

De richtingscoëfficiënt van m is gelijk aan die van k , dus een vergelijking van m is van de vorm $y = -\frac{3}{4}x + b$.

Invullen van $(-2, -6)$ geeft $-6 = -\frac{3}{4} \cdot -2 + b$, dus $b = -7\frac{1}{2}$.

Een vergelijking is $m: y = -\frac{3}{4}x - 7\frac{1}{2}$.

T4 a Uit $l: x - 2y = 5$ volgt $l: x = 2y + 5$.

Substitutie van $x = 2y + 5$ in de cirkelvergelijking geeft

$$(2y + 5 + 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$$

$$(2y + 7)^2 + (y + 1)^2 = 10$$

$$4y^2 + 28y + 49 + y^2 + 2y + 1 = 10$$

$$5y^2 + 30y + 40 = 0$$

$$y^2 + 6y + 8 = 0$$

$$(y + 2)(y + 4) = 0$$

$$y = -2 \text{ of } y = -4$$

$$y = -2 \text{ geeft } x = 2 \cdot -2 + 5 = 1 \text{ en } y = -4 \text{ geeft } x = 2 \cdot -4 + 5 = -3$$

De snijpunten zijn $(1, -2)$ en $(-3, -4)$.

b Het middelpunt van de cirkel is $M(-2, -1)$.

De richtingscoëfficiënt van lijn PM is $\frac{-1 - 2}{-2 - -3} = -3$, dus de

richtingscoëfficiënt van de raaklijn m in P is $\frac{1}{3}$.

Een vergelijking van de raaklijn is van de vorm $y = \frac{1}{3}x + b$.

Invullen van $(-3, 2)$ geeft $2 = \frac{1}{3} \cdot -3 + b$, dus $b = 3$.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = \frac{1}{3}x + 3$.

T5 a Vul de coördinaten van P , R en S in:

$$(-1)^2 + (-3)^2 - 4 \cdot -1 - 2 \cdot -3 - 20 = 1 + 9 + 4 + 6 - 20 = 0, \text{ klopt.}$$

$$5^2 + 5^2 - 4 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - 20 = 25 + 25 - 20 - 10 - 20 = 0, \text{ klopt.}$$

$$(-2)^2 + 4^2 - 4 \cdot -2 - 2 \cdot 4 - 20 = 4 + 16 + 8 - 8 - 20 = 0, \text{ klopt.}$$

De cirkel gaat door elk van deze drie punten.

b $c_1: x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

$$c_1: x^2 - 4x + y^2 - 2y = 20$$

$$c_1: (x - 2)^2 - 4 + (y - 1)^2 - 1 = 20$$

$$c_1: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

Het middelpunt van cirkel c_1 is $M(2, 1)$ en de straal is 5.

Het middelpunt van cirkel c_2 is $O(0, 0)$ en de straal is 1.

De afstand tussen de middelpunten is $OM = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

c_2 ligt binnen c_1 , dus $d(c_1, c_2) = 5 - \sqrt{5} - 1 = 4 - \sqrt{5}$.

T6 a $AB = \sqrt{9^2 + 3^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$, $BC = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ en

$$AC = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

b De richtingscoëfficiënt van lijn AB is $-\frac{1}{3}$ en het midden van lijnstuk AB is $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

De middelloodlijn van lijnstuk AB is van de vorm $y = 3x + b$.

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ invullen geeft $\frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2} + b$ dus $b = -1$.

De middelloodlijn van lijnstuk AB is $y = 3x - 1$.

De richtingscoëfficiënt van lijn AC is $\frac{1}{2}$ en het midden van lijnstuk AC is $(0, 4)$.

De middelloodlijn van lijnstuk AC is $y = -2x + 4$.

Voor het snijpunt M van de middelloodlijnen geldt

$$3x - 1 = -2x + 4$$

$$5x = 5$$

$$x = 1 \text{ en } y = 3 \cdot 1 - 1 = 2 \text{ en } M(1, 2).$$

De straal is $AM = 5$.

Een vergelijking van de omgeschreven cirkel is $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

- T7 a** De middelloodlijnen van de zijden OA en OB zijn de lijnen $x = 4$ en $y = 3$. Deze lijnen snijden elkaar in het punt $M(4, 3)$.
De straal van de omgeschreven cirkel is $OM = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.
Een vergelijking van de omgeschreven cirkel is $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$.
- b** I heeft afstand 2 tot de zijden OA en OB .
Lijn AB heeft richtingscoëfficiënt $-\frac{3}{4}$ en vergelijking $y = -\frac{3}{4}x + 6$.
De loodlijn l door I op zijde AB heeft vergelijking $y = \frac{4}{3}x + b$.
Invullen van $(2, 2)$ geeft $2 = \frac{4}{3} \cdot 2 + b$, dus $b = -\frac{2}{3}$ en $l: y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$.
Voor het snijpunt S van l met zijde AB geldt

$$-\frac{3}{4}x + 6 = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$$

$$-9x + 72 = 16x - 8$$

$$-25x = -80$$

$$x = 3\frac{1}{5} \text{ en } y = -\frac{3}{4} \cdot \frac{16}{5} + 6 = 3\frac{3}{5} \text{ en } S(3\frac{1}{5}, 3\frac{3}{5}).$$

$$SI = \sqrt{(3\frac{1}{5} - 2)^2 + (3\frac{3}{5} - 2)^2} = \sqrt{(\frac{6}{5})^2 + (\frac{8}{5})^2} = \sqrt{\frac{100}{25}} = 2$$
- c** Het middelpunt van de ingeschreven cirkel is I en de straal is 2, dus $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

- T8** Teken vanuit M de drie middelloodlijnen op de zijden van driehoek ABC .

In $\triangle AMR$ is $\cos(\angle MAR) = \frac{3\frac{1}{2}}{4} = \frac{7}{8}$ dus $\angle MAR = 28,955\dots^\circ$

In $\triangle MAQ$ is $\cos(\angle MAQ) = \frac{3}{4}$ dus $\angle MAQ = 41,409\dots^\circ$
 $\angle A = \angle MAR + \angle MAQ = 70,364\dots^\circ$

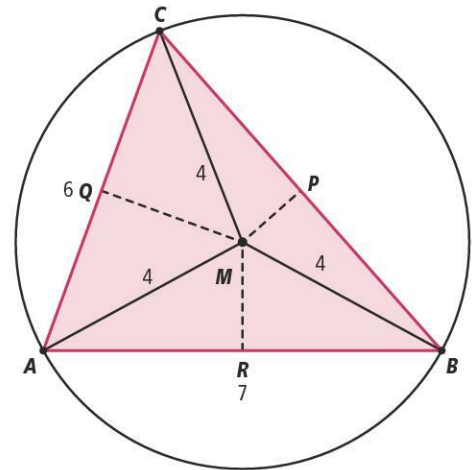
De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\angle A)$$

$$BC^2 = 7^2 + 6^2 - 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cos(70,364\dots^\circ)$$

$$BC^2 = 56,773\dots$$

$$BC = \sqrt{56,773\dots} \approx 7,5.$$



Extra oefening

E1 a $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$ (maal -2)

$$-\frac{2}{3}x + y = -2$$

$$y = \frac{2}{3}x - 2$$

b $6x - 8y = 24$ (deel door 24)

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1$$

c $y = -\frac{8}{9}x - 3$ (maal 9)

$$9y = -8x - 27$$

$$8x + 9y = -27$$

d De richtingscoëfficiënt van lijn AB is $\frac{13 - -2}{-6 - 4} = -1\frac{1}{2}$.

Een vergelijking is van de vorm $y = -1\frac{1}{2}x + b$.

Invullen van $A(4, -2)$ geeft $-2 = -1\frac{1}{2} \cdot 4 + b$, dus $b = 4$.

Een vergelijking van lijn AB is $y = -1\frac{1}{2}x + 4$.

Andere vormen zijn $3x + 2y = 8$ of $\frac{x}{\frac{8}{3}} + \frac{y}{4} = 1$.

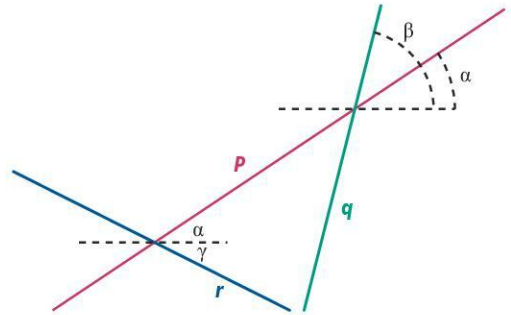
E2 De lijnen kunnen ook geschreven worden als:
 $p : y = \frac{2}{3}x + 10$, $q : y = 4x + 3\frac{1}{2}$ en $r : y = -\frac{1}{2}x + 3$
 α , β en γ zijn de grootte van de hoeken die p , q en r met een horizontale lijn maken.

$$\tan(\alpha) = \frac{2}{3}, \alpha = 33,690\dots^\circ$$

$$\tan(\beta) = 4, \beta = 75,963\dots^\circ$$

$$\tan(\gamma) = \frac{1}{2}, \gamma = 26,565\dots^\circ$$

$$\angle(p, q) = \beta - \alpha \approx 42^\circ \text{ en } \angle(p, r) = \alpha + \gamma \approx 60^\circ$$



E3 a De richtingscoëfficiënt van l is $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

De loodlijn k uit P op l heeft richtingscoëfficiënt $-\frac{2}{5}$.

Een vergelijking van k is van de vorm $y = -\frac{2}{5}x + b$.

Invullen van $P(17, 3)$ geeft $3 = -\frac{2}{5} \cdot 17 + b$, dus $b = 9\frac{4}{5}$.

Een vergelijking is $k : y = -\frac{2}{5}x + 9\frac{4}{5}$.

Voor het snijpunt S van l en k geldt:

$$2\frac{1}{2}x + 4 = -\frac{2}{5}x + 9\frac{4}{5}$$

$$25x + 40 = -4x + 98$$

$$29x = 58$$

$$x = 2 \text{ geeft } y = 2\frac{1}{2} \cdot 2 + 4 = 9 \text{ en } S(2, 9).$$

$$d(P, l) = PS = \sqrt{(2 - 17)^2 + (9 - 3)^2} = \sqrt{261} (= 3\sqrt{29}).$$

b $m : 5x - 2y + 66 = 0$

$$m : -2y = -5x - 66$$

$$m : y = 2\frac{1}{2}x + 33$$

De richtingscoëfficiënten van l en m zijn gelijk, dus zijn beide lijnen evenwijdig.

c Kies een punt op l , bijvoorbeeld $Q(0, 4)$.

De loodlijn n uit Q op m heeft dan als vergelijking $y = -\frac{2}{5}x + 4$.

Voor het snijpunt T van m en n geldt: $2\frac{1}{2}x + 33 = -\frac{2}{5}x + 4$.

$$25x + 330 = -4x + 40$$

$$29x = -290$$

$$x = -10 \text{ geeft } y = 2\frac{1}{2} \cdot -10 + 33 = 8 \text{ en } T(-10, 8).$$

$$d(l, m) = QT = \sqrt{(-10 - 0)^2 + (8 - 4)^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}.$$

E4 a $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 17$

b $x^2 - 2x + y^2 + 6y = 0$

$$(x - 1)^2 - 1 + (y + 3)^2 - 9 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 10$$

Het middelpunt is $(1, -3)$ en de straal is $\sqrt{10}$.

- c** $x^2 - 2x + y^2 + 6y + 15 = 0$
 $(x - 1)^2 - 1 + (y + 3)^2 - 9 + 15 = 0$
 $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = -5$
 Dan zou de straal $\sqrt{-5}$ zijn en dat kan niet.

E5 a $l: 4x - y = 9$ ofwel $l: y = 4x - 9$ substitueren in c geeft

$$(x - 2)^2 + (4x - 9 + 1)^2 = 17$$

$$(x - 2)^2 + (4x - 8)^2 = 17$$

$$x^2 - 4x + 4 + 16x^2 - 64x + 64 = 17$$

$$17x^2 - 68x + 51 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

$$x = 1 \text{ of } x = 3$$

$x = 1$ geeft $y = 4 \cdot 1 - 9 = -5$ en $x = 3$ geeft $y = 4 \cdot 3 - 9 = 3$
 De snijpunten zijn $(1, -5)$ en $(3, 3)$.

b $m: x + 3y = 12$ ofwel $m: x = 12 - 3y$ substitueren in c geeft

$$(12 - 3y - 2)^2 + (y + 1)^2 = 17$$

$$(10 - 3y)^2 + (y + 1)^2 = 17$$

$$100 - 60y + 9y^2 + y^2 + 2y + 1 = 17$$

$$10y^2 - 58y + 84 = 0$$

$$5y^2 - 29y + 42 = 0$$

$$D = (-29)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 42 = 1$$

$D > 0$, dus de vergelijking heeft twee oplossingen.
 m heeft twee punten gemeenschappelijk met c .

E6 a Het middelpunt van d is $N(4, -8)$.

De richtingscoëfficiënt van lijn NQ is $\frac{-7 - (-8)}{5 - 4} = 1$.

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in Q is dus -1 .

Een vergelijking van de raaklijn is van de vorm $y = -x + b$.

Invullen van $Q(5, -7)$ geeft $-7 = -5 + b$ dus $b = -2$.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = -x - 2$.

b $c: x^2 + y^2 + 6x = 43$

$$c: x^2 + 6x + y^2 = 43$$

$$c: (x + 3)^2 - 9 + y^2 = 43$$

$$c: (x + 3)^2 + y^2 = 52, \text{ dus het middelpunt van de cirkel is } M(-3, 0).$$

De richtingscoëfficiënt van lijn MP is $\frac{-6 - 0}{1 - (-3)} = -1\frac{1}{2}$.

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in P is $\frac{2}{3}$.

Een vergelijking van de raaklijn is van de vorm $y = \frac{2}{3}x + b$.

Invullen van $P(1, -6)$ geeft $-6 = \frac{2}{3} \cdot 1 + b$, dus $b = -6\frac{2}{3}$.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = \frac{2}{3}x - 6\frac{2}{3}$.

E7 a Het middelpunt van c_1 is $M(4, -1)$ en de straal r is $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

$$PM = \sqrt{(-4 - 4)^2 + (5 - (-1))^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

$$PM > r, \text{ dus } d(P, c_1) = 10 - 3\sqrt{2}$$

- b** $c_2: x^2 + y^2 + 16x - 8y + 8 = 0$
 $c_2: x^2 + 16x + y^2 - 8y = -8$
 $c_2: (x + 8)^2 - 64 + (y - 4)^2 - 16 = -8$
 $c_2: (x + 8)^2 + (y - 4)^2 = 72$
 Het middelpunt van c_2 is $N(-8, 4)$ en de straal r is $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.
 $NQ = \sqrt{(-8 - (-2))^2 + (4 - 4)^2} = 6$
 $NQ < r$, dus $d(Q, c_2) = 6\sqrt{2} - 6$
- c** $MN = \sqrt{(-8 - 4)^2 + (4 - (-1))^2} = \sqrt{144 + 25} = 13$
 $r_1 + r_2 = 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 9\sqrt{2} \approx 12,7$, dus $r_1 + r_2 < 13$.
 De cirkels liggen buiten elkaar.
 $d(c_1, c_2) = 13 - 9\sqrt{2}$

- E8** Het middelpunt is $M(-2, 1)$ en de straal is $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.
 De loodlijn m door M op l heeft als vergelijking $y = -x + b$.
 $M(-2, 1)$ invullen in $y = -x + b$ geeft $1 = -(-2) + b$ dus $b = -1$.
 Voor het snijpunt S van l en m geldt:
 $x + 11 = -x - 1$.
 $2x = -12$, dus $x = -6$ en $y = -6 + 11 = 5$ en $S(-6, 5)$.
 $MS = \sqrt{(-6 - (-2))^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
 $d(l, c) = MS - r = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2}$

- E9 a** Uit $\angle A = 46^\circ$ en $\angle C = 104^\circ$ volgt $\angle B = 180^\circ - 46^\circ - 104^\circ = 30^\circ$.

De sinusregel in $\triangle ABC$ geeft $\frac{BC}{\sin(46^\circ)} = \frac{AC}{\sin(30^\circ)} = \frac{6}{\sin(104^\circ)}$

Uit $\frac{AC}{\sin(30^\circ)} = \frac{6}{\sin(104^\circ)}$ volgt $AC = \frac{6 \cdot \sin(30^\circ)}{\sin(104^\circ)} \approx 3,1$.

Uit $\frac{BC}{\sin(46^\circ)} = \frac{6}{\sin(104^\circ)}$ volgt $BC = \frac{6 \cdot \sin(46^\circ)}{\sin(104^\circ)} \approx 4,4$.

- b** De loodlijn uit M op zijde AB snijdt zijde AB in P .
 De straal van de ingeschreven cirkel is $r = MP$.
 $\angle MAB = \frac{1}{2} \cdot \angle A = 23^\circ$ en $\angle MBA = \frac{1}{2} \cdot \angle B = 15^\circ$, dus
 $\angle AMB = 180^\circ - 23^\circ - 15^\circ = 142^\circ$

De sinusregel in $\triangle AMB$ geeft $\frac{AM}{\sin(15^\circ)} = \frac{6}{\sin(142^\circ)}$, dus

$$AM = \frac{6 \cdot \sin(15^\circ)}{\sin(142^\circ)} = 2,522 \dots$$

In driehoek APM geldt $\sin(\angle MAP) = \frac{MP}{AM}$

$$\sin(23^\circ) = \frac{MP}{2,522 \dots}$$

$$MP = 2,522 \dots \cdot \sin(23^\circ) \approx 1,0$$

De straal van de ingeschreven cirkel is ongeveer 1,0.

E10 a De loodlijn m uit het middelpunt $M(2, -3)$ op l heeft richtingscoëfficiënt 2.

Een vergelijking van m is van de vorm $y = 2x + b$.

Invullen van $(2, -3)$ geeft $-3 = 2 \cdot 2 + b$, dus $b = -7$ en $m : y = 2x - 7$.

Voor het snijpunt S van l en m geldt

$$2x - 7 = -\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}$$

$$2\frac{1}{2}x = 12\frac{1}{2} \text{ dus } x = 5 \text{ en } y = 2 \cdot 5 - 7 = 3 \text{ en } S(5, 3)$$

$$MS = \sqrt{(5-2)^2 + (3-(-3))^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

De straal van de cirkel is $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

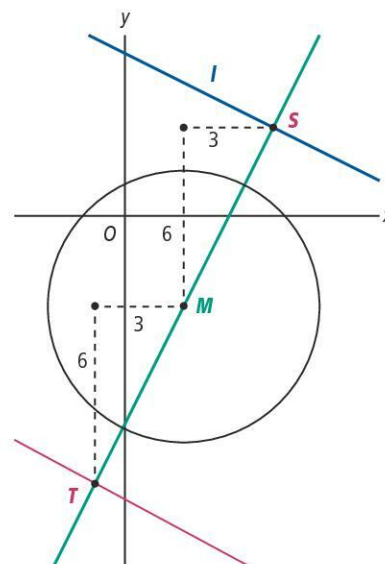
$$d(l, c) = MS - r = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$$

b De gezochte lijn is de lijn evenwijdig aan l en gaat door het punt T dat het beeld is van S bij spiegeling in M .

Van $S(5, 3)$ naar $M(2, -3)$ is 3 naar links en 6 naar beneden.

Vanuit M 3 naar links en 6 naar beneden geeft $T(-1, -9)$.

De lijn door T evenwijdig aan l is de lijn $y = -\frac{1}{2}x - 9\frac{1}{2}$.



1 a De vergelijkingen B en C kun je oplossen zonder de haakjes weg te werken.

b B: $(2x + 1)^2 = 49$

$$2x + 1 = 7 \text{ of } 2x + 1 = -7$$

$$2x = 6 \text{ of } 2x = -8$$

$$x = 3 \text{ of } x = -4$$

c A: $(x + 3)^2 + 2x = 9$

$$x^2 + 6x + 9 + 2x = 9$$

$$x^2 + 8x = 0$$

$$x(x + 8) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x + 8 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -8$$

C: $(x - 8)(2x + 2) = 0$

$$x - 8 = 0 \text{ of } 2x + 2 = 0$$

$$x = 8 \text{ of } 2x = -2$$

$$x = 8 \text{ of } x = -1$$

D: $(x - 2)(x + 2) = 5$

$$x^2 - 4 = 5$$

$$x^2 = 9$$

$$x = -3 \text{ of } x = 3$$

2 a $x(x - 4) = 45(x - 4)$

$$x = 45 \text{ of } x - 4 = 0$$

$$x = 45 \text{ of } x = 4$$

b $1 - (x - 4)^2 = 1$

$$(x - 4)^2 = 0$$

$$x - 4 = 0$$

$$x = 4$$

$$x = 4$$

c $8 + (3x - 1)^2 = 89$

$$(3x - 1)^2 = 81$$

$$3x - 1 = 9 \text{ of } 3x - 1 = -9$$

$$3x = 10 \text{ of } 3x = -8$$

$$x = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} \text{ of } x = -\frac{8}{3} = -2\frac{2}{3}$$

d $(3x - 4)(2x - 3) = (x + 1)(2x - 3)$

$$3x - 4 = x + 1 \text{ of } 2x - 3 = 0$$

$$2x = 5 \text{ of } 2x = 3$$

$$x = 2\frac{1}{2} \text{ of } x = 1\frac{1}{2}$$

e $(x + 2)^2 = (3 - 2x)^2$

$$x + 2 = 3 - 2x \text{ of } x + 2 = -(3 - 2x)$$

$$3x = 1 \text{ of } x + 2 = -3 + 2x$$

$$x = \frac{1}{3} \text{ of } -x = -5$$

$$x = \frac{1}{3} \text{ of } x = 5$$

f $(5x + 1)(-2x - 3) = 0$

$$5x + 1 = 0 \text{ of } -2x - 3 = 0$$

$$5x = -1 \text{ of } -2x = 3$$

$$x = -\frac{1}{5} \text{ of } x = -1\frac{1}{2}$$

g $(2x + 5)^2 \cdot (x - 1) = 4(x - 1)$

$$(2x + 5)^2 = 4 \text{ of } x - 1 = 0$$

$$2x + 5 = 2 \text{ of } 2x + 5 = -2 \text{ of}$$

$$2x = -3 \text{ of } 2x = -7 \text{ of } x = 1$$

$$x = -1\frac{1}{2} \text{ of } x = -3\frac{1}{2} \text{ of } x = 1$$

h $(5x + 3)(x^2 - 9) = 7(5x + 3)$

$$5x + 3 = 0 \text{ of } x^2 - 9 = 7$$

$$5x = -3 \text{ of } x^2 = 16$$

$$x = -\frac{3}{5} \text{ of } x = 4 \text{ of } x = -4$$

i $(2x + 1)^2 = 10x + 5$

$$(2x + 1)^2 = 5(2x + 1)$$

$$2x + 1 = 5 \text{ of } 2x + 1 = 0$$

$$2x = 4 \text{ of } 2x = -1$$

$$x = 2 \text{ of } x = -\frac{1}{2}$$

j $(0,5x + 2)^2 - 2x = 20$

$$0,25x^2 + 2x + 4 - 2x = 20$$

$$0,25x^2 + 4 = 20$$

$$0,25x^2 = 16$$

$$x^2 = 64$$

$$x = 8 \text{ of } x = -8$$

3 a $-3x + 2y = 8$

$$2y = 3x + 8$$

$$y = 1\frac{1}{2}x + 4 \text{ of wel } y = 4 + 1\frac{1}{2}x$$

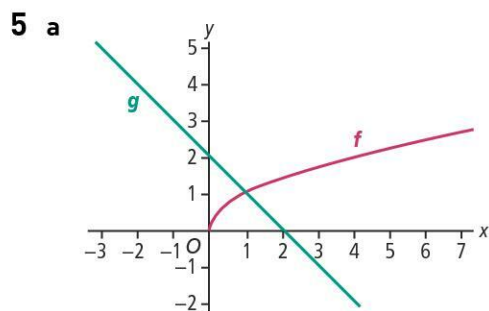
b $8x - 3(4 + 1\frac{1}{2}x) = -5$

$$8x - 12 - 4\frac{1}{2}x = -5$$

$$3\frac{1}{2}x = 7 \text{ dus } x = 2 \text{ en } y = 4 + 1\frac{1}{2} \cdot 2 = 4 + 3 = 7$$

Het snijpunt is (2, 7).

- 4 a** $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ y = -4x + 3 \end{cases}$
 Substitueren geeft $4x + 3(-4x + 3) = 1$.
 $4x - 12x + 9 = 1$
 $-8x = -8$
 $x = 1$ en $y = -4 \cdot 1 + 3 = -1$
 De oplossing is $x = 1$ en $y = -1$.
- b** $\begin{cases} y + 3x = 0 \\ 5x + y = 4 \end{cases}$ wordt $\begin{cases} y = -3x \\ 5x + y = 4 \end{cases}$
 Substitueren geeft $5x + -3x = 4$.
 $2x = 4$
 $x = 2$ en $y = -3 \cdot 2 = -6$
 De oplossing is $x = 2$ en $y = -6$.
- c** $\begin{cases} 6x - y = 14 \\ 2x + 3y = 18 \end{cases}$ wordt $\begin{cases} y = 6x - 14 \\ 2x + 3y = 18 \end{cases}$
 Substitueren geeft $2x + 3(6x - 14) = 18$.
 $2x + 18x - 42 = 18$
 $20x = 60$
 $x = 3$ en $y = 6 \cdot 3 - 14 = 4$
 De oplossing is $x = 3$ en $y = 4$.
- d** $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 18 \end{cases}$ wordt $\begin{cases} y = 10 - x \\ x - y = 18 \end{cases}$
 Substitueren geeft $x - (10 - x) = 18$.
 $2x = 28$
 $x = 14$ en $y = 10 - 14 = -4$
 De oplossing is $x = 14$ en $y = -4$.
- e** $\begin{cases} 3a + 2b = 14 \\ -2a + b = 7 \end{cases}$ wordt $\begin{cases} 3a + 2b = 14 \\ b = 2a + 7 \end{cases}$
 Substitueren geeft $3a + 2(2a + 7) = 14$.
 $7a + 14 = 14$
 $a = 0$ en $b = 2 \cdot 0 + 7 = 7$.
 De oplossing is $a = 0$ en $b = 7$.
- f** $\begin{cases} 0,1p - 1,3q = 2,4 \\ 0,4p + 2q = 2,4 \end{cases}$ wordt $\begin{cases} p - 13q = 24 \\ 4p + 20q = 24 \end{cases}$ ofwel $\begin{cases} p = 13q + 24 \\ 4p + 20q = 24 \end{cases}$
 Substitueren geeft $4(13q + 24) + 20q = 24$.
 $52q + 96 + 20q = 24$
 $72q = -72$
 $q = -1$ en $p = 13 \cdot -1 + 24 = 11$
 De oplossing is $p = 11$ en $q = -1$.



b De grafieken hebben 1 snijpunt.

c $\sqrt{x} = 2 - x$

$$x = (2 - x)^2$$

$$x = 4 - 4x + x^2$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x - 4)(x - 1) = 0$$

$$x - 4 = 0 \text{ of } x - 1 = 0$$

$$x = 4 \text{ of } x = 1$$

$x = 4$ invullen in $\sqrt{x} = 2 - x$ geeft $\sqrt{4} = 2 - 4$ en dus $2 = -2$. Dit is niet juist.

$x = 1$ invullen in $\sqrt{x} = 2 - x$ geeft $\sqrt{1} = 2 - 1$ en dus $1 = 1$. Dit is dus de correcte oplossing.

6 a $5 + \sqrt{x - 7} = 18$

$$\sqrt{x - 7} = 13$$

$$x - 7 = 169$$

$$x = 176$$

e $x + \sqrt{\frac{1}{2}x + 3} = 0$

$$\sqrt{\frac{1}{2}x + 3} = -x$$

$$\frac{1}{2}x + 3 = x^2$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$$

$$(x - 2)\left(x + 1\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$x = 2 \text{ (voldoet niet) of } x = -1\frac{1}{2}$$

De oplossing is $x = -1\frac{1}{2}$.

b $-3 + \sqrt{8 - t} = 5$

$$\sqrt{8 - t} = 8$$

$$8 - t = 64$$

$$t = -56$$

f $1 + 3\sqrt{1 + x} = 7$

$$3\sqrt{1 + x} = 6$$

$$\sqrt{1 + x} = 2$$

$$1 + x = 4$$

$$x = 3$$

c $\sqrt{x - 2} + 3 = 6 + x$

$$\sqrt{x - 2} = 3 + x$$

$$x - 2 = (3 + x)^2$$

$$x - 2 = 9 + 6x + x^2$$

$$x^2 + 5x + 11 = 0$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11 = -19$$

$$D < 0$$

Geen oplossingen.

g $x + \sqrt{2x + 4} = 10$

$$\sqrt{2x + 4} = 10 - x$$

$$2x + 4 = (10 - x)^2$$

$$2x + 4 = 100 - 20x + x^2$$

$$x^2 - 22x + 96 = 0$$

$$(x - 16)(x - 6) = 0$$

$$x = 16 \text{ (voldoet niet) of } x = 6$$

De oplossing is $x = 6$.

d $4 - \sqrt{6 - 3t} = 0$

$$\sqrt{6 - 3t} = 4$$

$$6 - 3t = 16$$

$$3t = -10$$

$$t = -3\frac{1}{3}$$

h $12 - \sqrt{2x - 15} = 4$

$$\sqrt{2x - 15} = 8$$

$$2x - 15 = 64$$

$$2x = 79$$

$$x = 39\frac{1}{2}$$

7 a $x \neq 3$ moet erbij, omdat anders de noemer nul wordt (en delen door nul mag niet).

b $2x^2 = (x + 3)(x + 2)$

$$2x^2 = x^2 + 2x + 3x + 6$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$(x - 6)(x + 1) = 0$$

$$x - 6 = 0 \text{ of } x + 1 = 0$$

$$x = 6 \text{ of } x = -1$$

- c Door links en rechts met $x - 6$ te vermenigvuldigen ontstaat de vergelijking

$$x + 10 = \frac{2}{x}(x - 6) \text{ mits } x \neq 6.$$

Door hierna links en rechts met x te vermenigvuldigen ontstaat de vergelijking $x(x + 10) = 2(x - 6)$ mits $x \neq 6$ en $x \neq 0$.

$$x^2 + 10x = 2x - 12$$

$$x^2 + 8x + 12 = 0$$

$$(x + 6)(x + 2) = 0$$

$$x + 6 = 0 \text{ of } x + 2 = 0$$

$$x = -6 \text{ of } x = -2$$

8 a $\frac{2x + 7}{3x} = 3$

$$2x + 7 = 9x \text{ mits } x \neq 0$$

$$-7x = -7$$

$$x = 1$$

b $\frac{x + 3}{x} = \frac{x}{x + 3}$

$$(x + 3)(x + 3) = x^2$$

$$\text{mits } x \neq 0 \text{ en } x \neq -3$$

$$x^2 + 6x + 9 = x^2$$

$$6x + 9 = 0$$

$$6x = -9$$

$$x = -1\frac{1}{2}$$

c $\frac{x^2 - 5}{x} = 0$

$$x^2 - 5 = 0 \text{ mits } x \neq 0$$

$$x^2 = 5$$

$$x = \sqrt{5} \text{ of } x = -\sqrt{5}$$

d $\frac{12}{x + 1} = \frac{x - 4}{2}$

$$(x + 1)(x - 4) = 12 \cdot 2 \text{ mits } x \neq -1$$

$$x^2 - 4x + x - 4 = 24$$

$$x^2 - 3x - 28 = 0$$

$$(x - 7)(x + 4) = 0$$

$$x - 7 = 0 \text{ of } x + 4 = 0$$

$$x = 7 \text{ of } x = -4$$

e $\frac{12}{4 - 2\sqrt{x}} = 4$

$$12 = 4(4 - 2\sqrt{x}) \text{ mits } x \neq 4$$

$$12 = 16 - 8\sqrt{x}$$

$$8\sqrt{x} = 4$$

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{4}$$

f $\frac{2x - 1}{4} = \frac{x^2}{2x + 1}$

$$4x^2 = (2x - 1)(2x + 1) \text{ mits } x \neq -\frac{1}{2}$$

$$4x^2 = 4x^2 + 2x - 2x - 1$$

$$0 = -1, \text{ dit is niet juist.}$$

Geen oplossing.

- 9 a De grafiek van f heeft als verticale asymptoot $x = 4$ en als horizontale asymptoot $y = 2$.

De grafiek van g heeft als verticale asymptoot $x = -\frac{2}{3}$ en als horizontale asymptoot $y = \frac{1}{3}$.

b $\frac{2x - 5}{x - 4} = \frac{x + 2}{3x + 2}$

$$(2x - 5)(3x + 2) = (x - 4)(x + 2) \text{ mits } x \neq 4 \text{ en } x \neq -\frac{2}{3}$$

$$6x^2 + 4x - 15x - 10 = x^2 + 2x - 4x - 8$$

$$5x^2 - 9x - 2 = 0$$

$$D = (-9)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -2 = 121$$

$$x = \frac{9 + \sqrt{121}}{10} = 2 \text{ of } x = \frac{9 - \sqrt{121}}{10} = -\frac{1}{5}$$

$$f(2) = \frac{1}{2} \text{ en } f\left(-\frac{1}{5}\right) = 1\frac{2}{7}$$

De snijpunten zijn $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ en $\left(-\frac{1}{5}, 1\frac{2}{7}\right)$.

- c De oplossing van $f(x) \geq g(x)$ lees je af uit de grafiek.

De oplossing is $-\frac{1}{5} \leq x \leq 2$ of $x > 4$.

10 a $-x^2 + 5x + 6 \geq 0$

$$-x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$(x - 6)(x + 1) = 0$$

$$x - 6 = 0 \text{ of } x + 1 = 0$$

$$x = 6 \text{ of } x = -1$$

Omdat de grafiek van $y = -x^2 + 5x + 6$ een bergparabool is en $(-1, 0)$ en $(6, 0)$ de snijpunten met de x -as zijn, is $[-1, 6]$ het domein van f .

b $x + 2 \geq 0$ geeft $x \geq -2$, dus het domein van g is $[-2, \rightarrow)$.

c $f(x) = g(x)$

$$\sqrt{-x^2 + 5x + 6} = \sqrt{x + 2}$$

$$-x^2 + 5x + 6 = x + 2$$

$$x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -4 = 32$$

$$x = \frac{4 - \sqrt{32}}{2} \text{ of } x = \frac{4 + \sqrt{32}}{2}$$

$$x = \frac{4 - 4\sqrt{2}}{2} = 2 - 2\sqrt{2} \text{ of } x = \frac{4 + 4\sqrt{2}}{2} = 2 + 2\sqrt{2}$$

d De oplossing van $g(x) \geq f(x)$ lees je af uit de plot.

$g(x) \geq f(x)$ geldt voor $-2 \leq x \leq 2 - 2\sqrt{2}$ en $2 + 2\sqrt{2} \leq x \leq 6$.

11 a $2x + 8 = 8 - 3(x - 4)$

$$2x + 8 = 8 - 3x + 12$$

$$5x = 12$$

$$x = 2\frac{2}{5}$$

Zie de plot hiernaast.

De oplossing is $x < 2\frac{2}{5}$.

b $2x^2 + 5x - 10 = 2x - 5$

$$2x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot -5 = 49$$

$$x = \frac{-3 + \sqrt{49}}{4} = 1 \text{ of } x = \frac{-3 - \sqrt{49}}{4} = -2\frac{1}{2}$$

Zie de plot hiernaast.

De oplossing is $x < -2\frac{1}{2}$ of $x > 1$.

c $\frac{x+1}{x-3} = 2$

$$x + 1 = 2(x - 3) \text{ mits } x \neq 3$$

$$x + 1 = 2x - 6$$

$$x = 7$$

Zie de plot hiernaast.

Het domein van $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$ is $x < 3$ of $x > 3$.

De oplossing is $x < 3$ of $x > 7$.

d $\sqrt{x+2} = 4$

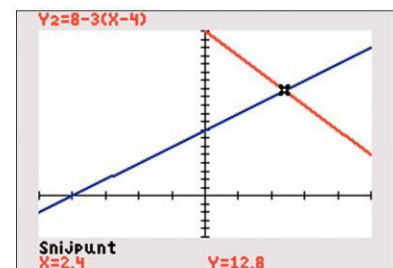
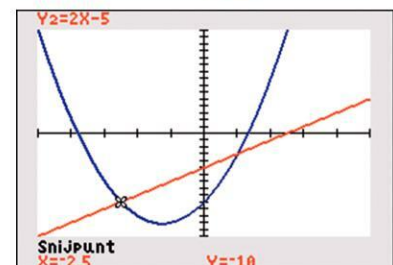
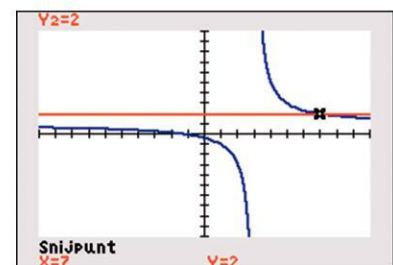
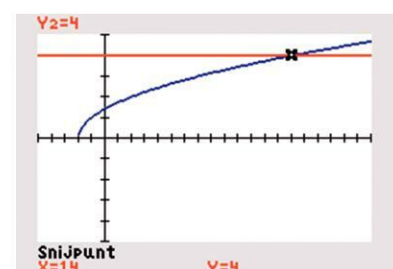
$$x + 2 = 16$$

$$x = 14$$

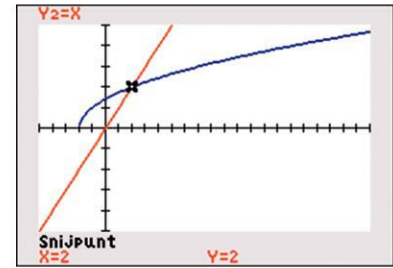
Het domein van $f(x) = \sqrt{x+2}$ is $x \geq -2$.

Zie de plot hiernaast.

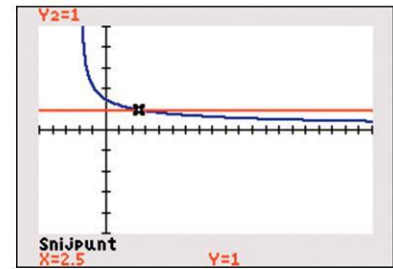
De oplossing is $x \geq 14$.



- e** $\sqrt{x+2} = x$
 $x+2 = x^2$
 $x^2 - x - 2 = 0$
 $(x+1)(x-2) = 0$
 $x+1 = 0$ of $x-2 = 0$
 $x = -1$ (voldoet niet) of $x = 2$
 Het domein van $f(x) = \sqrt{x+2}$ is $x \geq -2$.
 Zie de plot hiernaast.
 De oplossing is $-2 \leq x < 2$.



- f** $\frac{3}{\sqrt{2x+4}} = 1$
 $\sqrt{2x+4} = 3$
 $2x+4 = 9$
 $2x = 5$
 $x = 2\frac{1}{2}$
 Het domein van $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x+4}}$ is $\langle -2, \infty \rangle$.
 Zie de plot hiernaast.
 De oplossing is $-2 < x < 2\frac{1}{2}$.



- 12 a** $\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ **d** $\sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
b $\cos\left(3\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$ **e** $\sin\left(-1\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
c $\cos\left(-2\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ **f** $\sin\left(5\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

- 13** $f(x) = d + a \sin(b(x-c))$
 De evenwichtstand is $y = \frac{2+10}{2} = 6$, dus $d = 6$.
 De amplitude is $10 - 6 = 4$, dus $a = 4$.
 De periode is $7 - 3 = 4$, dus $b = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$.
 De grafiek gaat bij $x = 0$ stijgend door de evenwichtstand omhoog, dus $c = 0$.
 Een functievoorschrift bij de sinusoiden is $f(x) = 6 + 4 \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right)$.

- 14 a** $f(x) = 9 + 2 \sin\left(\frac{1}{4}x\right)$
 De periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$, de amplitude is 2 en de evenwichtstand is $y = 9$.
b $g(x) = -3 \cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) + 8$
 De periode is $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$, de amplitude is 3 en de evenwichtstand is $y = 8$.
c $h(x) = 13 - \sin(2(x+5))$
 De periode is $\frac{2\pi}{2} = \pi$, de amplitude is 1 en de evenwichtstand is $y = 13$.

- V1 a** A: ja, als x met 1 verandert, dan verandert y steeds met 3.
 B: ja, als x met 1 verandert, dan verandert y steeds met 1,5.
 C: nee, tussen 0 en 2 verandert y met -24 , maar bij de even grote stap tussen 2 en 4 met -8 .
- b** A: de richtingscoëfficiënt is 3. Bij $x = 0$ is $y = 2 - 3 = -1$.
 Een formule is $y = 3x - 1$.
 B: de richtingscoëfficiënt is 1,5. Bij $x = 0$ is $y = 9,5 - 4 \cdot 1,5 = 3,5$.
 Een formule is $y = 1,5x + 3,5$.
- c** C: tussen elke stap van 2 wordt y vermenigvuldigd met $\frac{1}{3}$, dus per stap van 1 met $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{3}$. Bij $x = 0$ is $y = 36$.
 Een formule is $y = 36 \cdot \left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}\right)^x$ (of $y = 36 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)^x$).

- V2 a** De groeifactor is $\frac{96}{64} = 1\frac{1}{2}$.
 Bij $p = 5$ is $q = 64 : 1\frac{1}{2} = 42\frac{2}{3}$.
 Bij $p = 8$ is $q = 96 \cdot 1\frac{1}{2} = 144$ enzovoort.

p	5	6	7	8	9	13
q	$42\frac{2}{3}$	64	96	144	216	$1093\frac{1}{2}$

- b** Bij $p = 0$ is $q = 64 : \left(1\frac{1}{2}\right)^6 = 5\frac{451}{729}$.
 Een formule bij de tabel is $q = 5\frac{451}{729} \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^p$.

- V3 a** $5 \cdot 0,7^x = 12$
 $0,7^x = \frac{12}{5}$
 $0,7^x = 2,4$
 $x = {}^{0,7}\log(2,4)$
- b** $7^k - 6 = 0$
 $7^k = 6$
 $k = {}^7\log(6)$
- c** $\frac{2}{3 + 4^x} = \frac{1}{2}$
 $3 + 4^x = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$
 $4^x = 1$
 $x = 0$
- d** $2,3 + 0,8^{3x} = 10$
 $0,8^{3x} = 7,7$
 $3x = {}^{0,8}\log(7,7)$
 $x = \frac{1}{3} \cdot {}^{0,8}\log(7,7)$
- e** $2^{3x+2} = 64$
 $2^{3x+2} = 2^6$
 $2^{3x+2} = 2^6$
 $3x + 2 = 6$
 $3x = 4$
 $x = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$
- f** $\frac{34}{12 + 0,3^{5x}} = 2$
 $12 + 0,3^{5x} = 17$
 $0,3^{5x} = 5$
 $5x = {}^{0,3}\log(5)$
 $x = \frac{1}{5} \cdot {}^{0,3}\log(5)$

- V4 a** Bij A hoort $h(x) = x^{-2}$, bij B hoort $f(x) = x^3$ en bij C hoort $g(x) = x^{0,5}$.
- b** De grafieken van r en h vallen samen, dus r is gelijk aan h .
 De grafieken van p en g vallen samen, dus p is gelijk aan g .
- c** g bestaat niet voor negatieve waarden, dus het domein is $[0, \rightarrow)$.
- d** h is dalend op $\langle 0, \rightarrow)$.
- e** Voor $x \neq 0$ is $x^2 > 0$, dus voor $x \neq 0$ is $\frac{1}{x^2} > 0$ en dus $r(x) > 0$.

$$\begin{aligned} \text{V5 a } K &= 5p^{0,8} \cdot \sqrt{p} \\ K &= 5p^{0,8} \cdot p^{\frac{1}{2}} \\ K &= 5 \cdot p^{1,3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } K &= \frac{p^{2,3}}{2p^4} \\ K &= \frac{1}{2} \cdot p^{2,3} \cdot p^{-4} \\ K &= \frac{1}{2} \cdot p^{-1,7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } K &= \sqrt[3]{p} \cdot \sqrt{p^3} \\ K &= p^{\frac{1}{3}} \cdot (p^3)^{\frac{1}{2}} \\ K &= p^{\frac{1}{3}} \cdot p^{\frac{3}{2}} \\ K &= 1 \cdot p^{1\frac{5}{6}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } K &= \frac{1}{4} \cdot \frac{(5p^{0,8})^2}{p^{1,6}} \\ K &= \frac{1}{4} \cdot (5p^{0,8})^2 \cdot p^{-1,6} \\ K &= \frac{1}{4} \cdot (5)^2 \cdot (p^{0,8})^2 \cdot p^{-1,6} \\ K &= \frac{1}{4} \cdot 25 \cdot p^{1,6} \cdot p^{-1,6} \\ K &= 6\frac{1}{4} \cdot p^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{V6 a } x^4 &= 81 \\ x &= 81^{\frac{1}{4}} \text{ of } x = -81^{\frac{1}{4}} \\ x &= 3 \text{ of } x = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } 3 \cdot \sqrt{x} &= 15 \\ \sqrt{x} &= 5 \\ x^{\frac{1}{2}} &= 5 \\ x &= 5^2 = 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } \frac{5k^7}{k\sqrt{k}} &= 10 \\ \frac{5k^7}{k \cdot k^{\frac{1}{2}}} &= 10 \\ \frac{5k^7}{k^{1\frac{1}{2}}} &= 10 \\ 5k^{5\frac{1}{2}} &= 10 \\ k^{\frac{11}{2}} &= 2 \\ k &= 2^{\frac{2}{11}} = \sqrt[11]{2^2} = \sqrt[11]{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } 6p^3 \cdot p^{0,5} &= 2 \\ p^{3,5} &= \frac{1}{3} \\ p &= \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3,5}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt[7]{\frac{1}{9}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } g^{0,4} + 3g^{0,4} &= 10 \\ 4g^{0,4} &= 10 \\ g^{0,4} &= 2\frac{1}{2} \\ g &= \left(2\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{0,4}} = \left(2\frac{1}{2}\right)^{2\frac{1}{2}} \\ g &= \left(2\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(2\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 6\frac{1}{4} \sqrt{2\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } 2q\sqrt{q} + \sqrt[4]{q^6} &= 81 \\ 2q \cdot q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{6}{4}} &= 81 \\ 2q^{1\frac{1}{2}} + q^{1\frac{1}{2}} &= 81 \\ 3q^{1\frac{1}{2}} &= 81 \\ q^{\frac{3}{2}} &= 27 \\ q &= 27^{\frac{2}{3}} = 9 \end{aligned}$$

14.1 Recht evenredig

intro De maten zijn in werkelijkheid 25 keer zo groot en in het gewenste model 45 keer zo klein. Hij moet de maten van de bouwtekening dus vermenigvuldigen met $\frac{25}{45} = \frac{5}{9}$.
Een formule is $\text{nieuwe afmeting} = \frac{5}{9} \times \text{oude afmeting}$.

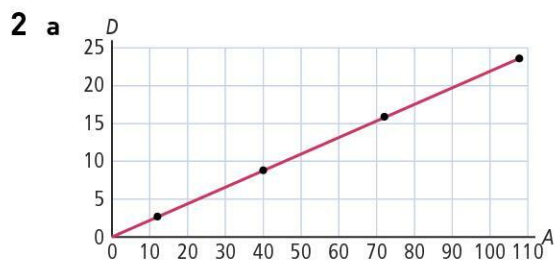
$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \text{1 a } A & 0 & 12 & 40 & 72 & 108 \\ \hline D & 0 & 2\frac{2}{3} & 8\frac{8}{9} & 16 & 24 \end{array}$$

$$\text{Bij } A = 12 \text{ is } D = \frac{24}{108} \cdot 12 = 2\frac{2}{3}.$$

$$\text{Bij } A = 40 \text{ is } D = \frac{24}{108} \cdot 40 = 8\frac{8}{9}.$$

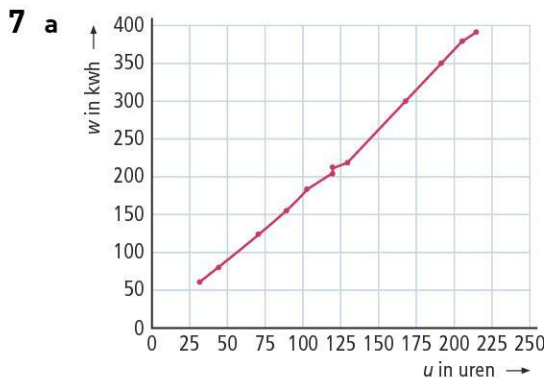
$$\text{Bij } A = 72 \text{ is } D = \frac{24}{108} \cdot 72 = 16.$$

- b Ja, want de daling gaat in een rechte lijn naar beneden.
 c Ja, want bij A hoort $D = \frac{24}{108} \cdot A$ en bij $k \cdot A$ hoort $D = \frac{24}{108} \cdot k \cdot A$ ofwel $D = k \cdot \frac{24}{108} \cdot A$, dus k keer zoveel.



- b Vul de coördinaten van een getallenpaar uit de tabel in, of van een punt op de lijn.
 (108, 24) bijvoorbeeld geeft $24 = c \cdot 108$, dus $c = \frac{24}{108} = \frac{2}{9}$.
 c Vanaf een hoogte van 24 meter komt hij dan $2 \cdot 108$ meter ver, dus $c = \frac{24}{2 \cdot 108} = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{108} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$
- 3 a A: ja, want $\frac{b}{a} = \frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \frac{16}{4} = 4$.
 B: nee, want $\frac{b}{a} = \frac{5}{1} \neq \frac{7}{2}$.
 C: ja, want $\frac{b}{a} = \frac{-5}{2} = \frac{-7,5}{3} = \frac{-15}{6} = \frac{-20}{8} = -2\frac{1}{2}$.
 b Bij tabel A is de evenredigheidsconstante 4 en bij tabel C is die $-2\frac{1}{2}$.
- 4 a De grafiek van een recht evenredig verband is een rechte lijn, dus elk recht evenredig verband is ook een lineair verband.
 b Niet van elk lineair verband gaat de grafiek door de oorsprong, dus niet elk lineair verband is ook een recht evenredig verband.
- 5 a k : de richtingscoëfficiënt is $\frac{1}{3}$ en het startgetal is 2, dus een formule is $k: y = \frac{1}{3}x + 2$.
 l : de richtingscoëfficiënt is 2 en het startgetal is 1, dus een formule is $l: y = 2x + 1$.
 m : de richtingscoëfficiënt is $-\frac{2}{5}$ en het startgetal is 0, dus een formule is $m: y = -\frac{2}{5}x$.
 n : de richtingscoëfficiënt is -1 en het startgetal is -2 , dus een formule is $n: y = -x - 2$.
 b Lijn m hoort bij een recht evenredig verband, want deze lijn gaat door de oorsprong.
 c De andere drie lijnen gaan niet door de oorsprong, dus is er geen sprake van een recht evenredig verband.

- 6 a** p : de richtingscoëfficiënt is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{11 - 3}{2 - 0} = 4$. Het startgetal is 3.
 q : de richtingscoëfficiënt is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-10 - 5}{6 - -3} = \frac{-15}{9} = -1\frac{2}{3}$. Het startgetal is $5 + 3 \cdot -1\frac{2}{3} = 0$.
 r : de richtingscoëfficiënt is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{40 - 45}{35 - 20} = \frac{-5}{15} = -\frac{1}{3}$. Het startgetal is $45 - 20 \cdot -\frac{1}{3} = 51\frac{2}{3}$.
- b** Alleen lijn q hoort bij een recht evenredig verband, want bij deze lijn is het startgetal 0.
- c** De evenredigheidsconstante van q is $\frac{5}{-3} = -1\frac{2}{3}$ en is gelijk aan de richtingscoëfficiënt $-1\frac{2}{3}$.



- b** De grafiek is bij benadering een rechte lijn die (bij doortrekken) door de oorsprong gaat, dus het verband tussen u en w is bij benadering een recht evenredig verband.
- c** $\frac{80}{45} \approx \frac{155}{89} \approx \frac{390}{215} \approx \frac{125}{72} \approx 1,75$
dus een formule is $w = 1,75u$.
- 8 a** $p_{30} = c \cdot (30 + 273) = 303 \cdot c$ en $p_{50} = c \cdot (50 + 273) = 323 \cdot c$.
De toename is $\frac{p_{50} - p_{30}}{p_{30}} \times 100\%$ ofwel
 $\frac{323c - 303c}{303c} \times 100\% = \frac{20}{303} \times 100\% \approx 6,6\%$.
- b** Een formule is $p = c \cdot T$ ofwel $p = c(t + 273)$.
- c** p is niet recht evenredig met t want voor $t = 0$ is p niet 0.

- 06 a** De richtingscoëfficiënt van p is $\frac{7 - 4}{7 - -2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.
 $p: y = \frac{1}{3}x + n$
 $x = -2$ en $y = 4$ geeft $4 = \frac{1}{3} \cdot -2 + n$ dus $n = 4\frac{2}{3}$.
Een vergelijking is $y = \frac{1}{3}x + 4\frac{2}{3}$.

- b** De richtingscoëfficiënt van q is $\frac{126 - 21}{14 - 2\frac{1}{3}} = \frac{105}{11\frac{2}{3}} = 9$.

$$q: y = 9x + n$$

$x = 14$ en $y = 126$ invullen geeft $126 = 9 \cdot 14 + n$ dus $n = 0$.

Een vergelijking van q is $y = 9x$.

De richtingscoëfficiënt van r is $\frac{45 - 36}{36 - 27} = \frac{9}{9} = 1$.

$$r: y = x + n$$

$x = 27$ en $y = 36$ invullen geeft $36 = 27 + n$ dus $n = 9$.

Een vergelijking van r is $y = x + 9$.

- c** Lijn q gaat door de oorsprong want het startgetal is 0.
d Lijn q hoort bij een recht evenredig verband. De evenredigheidsconstante is $\frac{126}{14} = 9$ en die is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van q .

- U1 a** Als l constant is, is $B = c \cdot G$ en dan is het verband tussen B en G lineair (zelfs recht evenredig) en zijn de grafieken rechte lijnen.
b Ja, ze gaan door de oorsprong, want het verband tussen B en G is recht evenredig.

- c** Er geldt $B = \frac{G}{l^2}$ ofwel $l^2 = \frac{G}{B}$

Lijn 1 gaat door (90, 40). Dat geeft $l^2 = \frac{90}{40}$ en $l = \sqrt{\frac{90}{40}} = 1,50$.

Lijn 2 gaat door (100, 39). Dat geeft $l^2 = \frac{100}{39}$ en $l = \sqrt{\frac{100}{39}} \approx 1,60$.

Lijn 3 gaat door (110, 38). Dat geeft $l^2 = \frac{110}{38}$ en $l = \sqrt{\frac{110}{38}} \approx 1,70$.

Lijn 4 gaat door (110, 34). Dat geeft $l^2 = \frac{110}{34}$ en $l = \sqrt{\frac{110}{34}} \approx 1,80$.

Lijn 5 gaat door (115, 32). Dat geeft $l^2 = \frac{115}{32}$ en $l = \sqrt{\frac{115}{32}} \approx 1,90$.

Lijn 6 gaat door (120, 30). Dat geeft $l^2 = \frac{120}{30}$ en $l = \sqrt{\frac{120}{30}} = 2,00$.

Dus de lijnen horen bij lengtes van 150 cm tot en met 200 cm, met stapjes van 10 cm.

- U2** Noem de breedte van het eerste bord x .

De afmetingen van het eerste bord zijn dan 10 cm bij x cm.

De hoogte van het tweede bord is x cm.

De borden zijn gelijkvormig met vergrotingsfactor $\frac{x}{10}$ dus de breedte van het

tweede bord is $x \cdot \frac{x}{10} = \frac{x^2}{10}$

De afmetingen van het tweede bord zijn x cm bij $\frac{x^2}{10}$ cm.

De hoogte van het derde bord is $\frac{x^2}{10}$ cm en de breedte is $\frac{x^2}{10} \cdot \frac{x}{10} = \frac{x^3}{100}$ cm.

Het derde bord is 200 cm breed dus $\frac{x^3}{100} = 200$.

$$x^3 = 20000$$

$$x = \sqrt[3]{20000} = 27,144\dots$$

Het eerste bord is 10 cm bij 27,1 cm.

Het tweede bord is 27,1 cm bij $\frac{x^2}{10} \approx 73,7$ cm.

Het derde bord is 73,7 cm bij 200 cm.

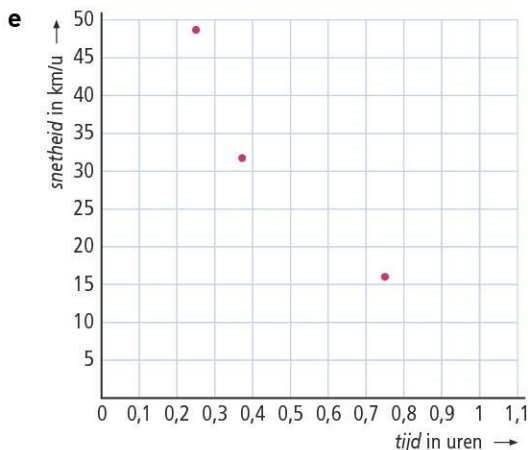
14.2 Omgekeerd evenredig

intro Het verband is $\text{aantal slagen per minuut} \times \text{periode} = 60$.

- 9 a** Hij is $\frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0,75$ uur (= 45 minuten) onderweg.
b Zijn vader doet er half zo lang over, dus 0,375 uur.
c Dan zou zijn vader er $0,75 : 3 = 0,25$ uur over doen.

d tijd in uren	0,75	0,375	0,25
snelheid in km/u	16	32	48

De uitkomst van $\text{tijd} \times \text{snelheid}$ is telkens 12.



- f** Nee, de grafiek door deze punten is geen rechte lijn.

10 A $x \cdot y = 48$ of $y = \frac{48}{x}$ of $x = \frac{48}{y}$

x	0,8	1,5	2	6	80
y	60	32	24	8	0,6

B $x \cdot y = 90$ of $y = \frac{90}{x}$ of $x = \frac{90}{y}$

x	1	2	5	15	60
y	90	45	18	6	1,5

11 a $1,91 \cdot 0,11 \approx 0,21$

$3 \cdot 0,07 = 0,21$

$5,25 \cdot 0,04 = 0,21$

$10,50 \cdot 0,02 = 0,21$

$R \cdot A$ levert voor iedere kolom dezelfde uitkomst op, dus R en A zijn omgekeerd evenredig.

b $R \cdot A = 0,21$ of $R = \frac{0,21}{A}$ of $A = \frac{0,21}{R}$

12 a $1 \times 63 = 63$ maar $3 \times 7 = 21$, dus het product van d en L is niet constant.

b

d in meter	L in watt/m ²	d^2	$\frac{1}{d^2}$
1	63	1	1
1,5	28	2,25	0,444...
2	15,75	4	0,25
3	7	9	0,111...
4	3,94	16	0,0625
10	0,63	100	0,01

c $63 \times 1 = 63$ $7 \times 9 = 63$
 $28 \times 2,25 = 63$ $3,94 \times 16 \approx 63$
 $15,75 \times 4 = 63$ $0,63 \times 100 = 63$

Er geldt telkens $L \times d^2 = 63$ dus zijn L en d^2 omgekeerd evenredig.

d Zie de tabel bij opdracht b.

e $\frac{63}{1} = 63$ $\frac{7}{0,111 \dots} = 63$
 $\frac{28}{0,444 \dots} = 63$ $\frac{3,94}{0,0625} = 63$
 $\frac{15,75}{0,25} = 63$ $\frac{0,63}{0,01} = 63$

Er geldt telkens $\frac{L}{\frac{1}{d^2}} = 63$ dus zijn L en $\frac{1}{d^2}$ recht evenredig.

Een formule is $L = 63 \cdot \frac{1}{d^2}$ ofwel $L = \frac{63}{d^2}$

13 a Als T omgekeerd evenredig is met p^4 dan geldt $T \cdot p^4 = c$.

$p = 2$ en $T = 0,75$ geeft $T \cdot p^4 = 0,75 \cdot 2^4 = 12$.

p	1	2	3	4	5	10	20
p^4	1	16	81	256	625	10 000	160 000
T	12	0,75	0,148...	0,046875	0,0192	0,0012	0,000075
$T \cdot p^4$	12	12	12	12	12	12	12

b $T = \frac{12}{p^4}$

c $T = \frac{12}{p^4}$ geeft $T \cdot p^4 = 12$

$p^4 = \frac{12}{T}$ dus $p = \sqrt[4]{\frac{12}{T}}$ (want $p > 0$)

14 a k is omgekeerd evenredig met t^3 dus $k \cdot t^3 = c$.

$k = 200$ en $t = 3$ invullen geeft $200 \cdot 3^3 = c$, dus $c = 5400$.

Een formule is $k \cdot t^3 = 5400$ of $k = \frac{5400}{t^3}$

b $t = 9$ geeft $k = \frac{5400}{9^3} = 7\frac{11}{27}$

c Als t twee keer zo groot wordt, wordt t^3 acht keer zo groot en $\frac{1}{t^3}$ acht keer zo klein. Dus wordt k acht keer zo klein.

- 15 a** Dan zou $G \cdot Z = c$ zijn. Het totale zuurstofverbruik om één kilometer af te leggen zou dan voor elk zoogdier hetzelfde zijn.

b

	$G \cdot Z$ in liter
hazelmuis	0,074
hond	5,42
leeuw	26,84
giraf	57,12
neushoorn	132

De neushoorn verbruikt het meest.

c

	G in kg	Z in liter/kg	$G \cdot Z^3$ in liter ³ /kg ²
hazelmuis	0,032	2,321	0,400...
hond	20	0,271	0,398...
leeuw	220	0,122	0,399...
giraf	680	0,084	0,403...
neushoorn	2400	0,055	0,3993

Uit $G \cdot Z^3 = 0,40$ volgt $G = \frac{0,40}{Z^3}$

- d** $G \cdot Z^3 = 0,40$

$$Z^3 = \frac{0,40}{G}$$

$$Z = \left(\frac{0,40}{G} \right)^{\frac{1}{3}} \text{ of ook } Z = \sqrt[3]{\frac{0,40}{G}}$$

013 a

m	62,5	27	15,8	8,6	5,6
x	4	7	10	15	20
$x^{1\frac{1}{2}}$	8	18,520...	31,622...	58,094...	89,442...
$m \cdot x^{1\frac{1}{2}}$	500	500,0...	499,6...	499,6...	500,8...

- b** m is omgekeerd evenredig met $x^{1\frac{1}{2}}$ omdat $m \cdot x^{1\frac{1}{2}}$ in elke kolom ongeveer dezelfde uitkomst geeft, namelijk 500.

- c** $m \cdot x^{1\frac{1}{2}} = 500$ dus $m = \frac{500}{x^{1\frac{1}{2}}}$

d

r	2	4	5	10	20
h	1000	125	64	8	1
r^3	8	64	125	1000	8000
$h \cdot r^3$	8000	8000	8000	8000	8000

- e** Er geldt $h \cdot r^3 = 8000$.

- f** $h = \frac{8000}{r^3}$

U3 a Per minuut lekt er $0,5 \text{ L} = 0,5 \text{ dm}^3 = 500 \text{ cm}^3$ van de vloeistof.

Dus $V = 500t$ met V in cm^3 en t in minuten.

b $40 \text{ L} = 40\,000 \text{ cm}^3$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot d \text{ en } V = 40\,000 \text{ geeft } \pi \cdot r^2 \cdot d = 40\,000$$

Het verband tussen r en d voldoet aan de formule $r^2 \cdot d = \frac{40\,000}{\pi}$

(en dus is d omgekeerd evenredig met r^2).

c $d = 2$ geeft $V = \pi \cdot r^2 \cdot 2$ ofwel $V = 2\pi r^2$.

Ook geldt $V = 500t$ dus $500t = 2\pi r^2$.

$$t = \frac{2\pi r^2}{500} \text{ of ook } t = \frac{2\pi}{500} \cdot r^2 \text{ (en dus is } t \text{ recht evenredig met } r^2 \text{)}.$$

U4 a $1 \text{ L} = 1000 \text{ cm}^3$

Voor het volume geldt $V = x \cdot x \cdot h$, dus $x^2 \cdot h = 1000$. En dus is h omgekeerd evenredig met x^2 .

b $x^2 \cdot h = 1000$

$$x^2 = \frac{1000}{h} \text{ ofwel } x = \sqrt{\frac{1000}{h}}$$

c $A = x^2 + x^2 + 4 \cdot x \cdot h$ ofwel $A = 2x^2 + 4xh$

d $1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$

$$2x^2 + 4xh = 10\,000$$

$$4xh = 10\,000 - 2x^2$$

$$h = \frac{10\,000 - 2x^2}{4x} \text{ en dit is niet van de vorm } h = c \cdot \frac{1}{x^a}.$$

Dus zijn h en x niet omgekeerd evenredig.

14.3 Machtsverbanden

intro Voor de totale oppervlakte van het kunstwerk moet hij de oppervlakte van het model vermenigvuldigen met $4^2 = 16$. Voor het volume moet hij het volume van het model vermenigvuldigen met $4^3 = 64$.

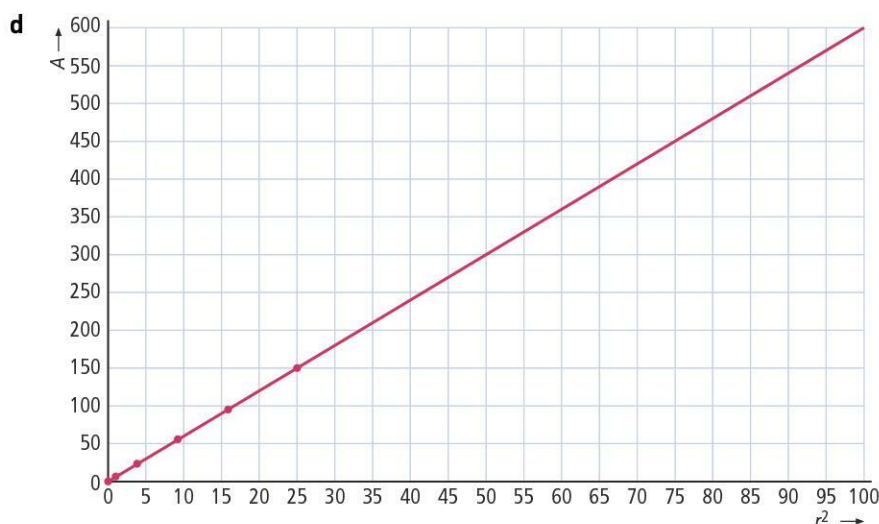
16 a

r	r^2	r^3	A	I
1	1	1	6	1
2	4	8	24	8
3	9	27	54	27
4	16	64	96	64
5	25	125	150	125
10	100	1000	600	1000

b Voor alle waarden uit de kolommen r^2 en A geldt $A = 6 \cdot r^2$.

Voor alle waarden uit de kolommen r^3 en I geldt $I = 1 \cdot r^3$.

c De evenredigheidsconstanten 6 en 1.



e De punten liggen op een rechte lijn door de oorsprong.

f De evenredigheidsconstante is de richtingscoëfficiënt of helling, dus $\frac{600}{100} = 6$.

17 a $R = 0,0075 \cdot v^2$

b $R = 0,0075 \cdot 130^2 = 126,75$ meter

c $R_{\text{verdubbeld}} = 0,0075 \cdot (2v)^2$

$$R_{\text{verdubbeld}} = 0,0075 \cdot 2^2 \cdot v^2$$

$$R_{\text{verdubbeld}} = 4 \cdot (0,0075 \cdot v^2)$$

$$R_{\text{verdubbeld}} = 4 \cdot R, \text{ dus de remweg wordt altijd 4 keer groter.}$$

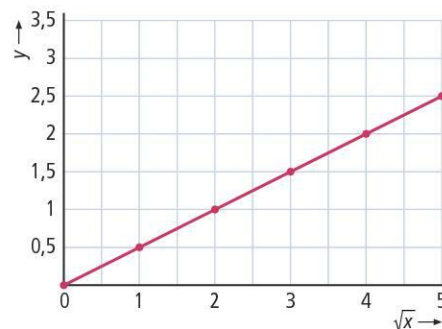
18 a

x	0	1	4	9	16	25
$\sqrt{x}$	0	1	2	3	4	5
y	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$

b $a = \frac{1}{2}$ en $b = \frac{1}{2}$

c De grafiek is een rechte lijn.

d Horizontaal zet je $x^{0,3}$ op de as. Verticaal zet je y .
De richtingscoëfficiënt is 8.



19 De grafiek is een rechte lijn, dus is er een recht evenredig verband tussen K en m^3 . Een formule is van de vorm $K = c \cdot m^3$.

De richtingscoëfficiënt van de lijn is $\frac{44}{512} \approx 0,086$.

Een formule voor het verband tussen K en m is $K \approx 0,086 \cdot m^3$.

20 a Bij $x = 1$ is $Q = 7 \cdot 1^{2,3} = 7$.

Bij $x = 2$ is $Q = 7 \cdot 2^{2,3} \approx 34,472$.

Bij $x = 4$ is $Q = 7 \cdot 4^{2,3} \approx 169,760$.

b $7 \cdot 2^{2,3} \approx 34,472$ klopt; $34,472 \cdot 2^{2,3} \approx 169,760$ klopt.

c $Q = 7 \cdot x^{2,3}$

$$Q_{\text{vergroot}} = 7 \cdot (k \cdot x)^{2,3}$$

$$Q_{\text{vergroot}} = 7 \cdot k^{2,3} \cdot x^{2,3}$$

$$Q_{\text{vergroot}} = k^{2,3} \cdot (7 \cdot x^{2,3})$$

$$Q_{\text{vergroot}} = k^{2,3} \cdot Q, \text{ dus het klopt.}$$

21 a $I = c \cdot r^3$, dus de evenredigheidsconstante $c = \frac{4}{3}\pi$.

b $I = \frac{4}{3}\pi \cdot (k \cdot r)^3$

$$I = \frac{4}{3}\pi \cdot k^3 \cdot r^3$$

$$I = k^3 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

c Uit $A = 4\pi r^2$ volgt $r = \left(\frac{A}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Dit invullen in $I = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ geeft $I = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\left(\frac{A}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^3$

$$I = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{A}{4\pi}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$I = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{A^{\frac{3}{2}}}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$I = \frac{4}{3}\pi \cdot (4\pi)^{-\frac{3}{2}} \cdot A^{\frac{3}{2}}$$

$$I = 4 \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot 4^{-\frac{3}{2}} \cdot \pi^{-\frac{3}{2}} \cdot A^{\frac{3}{2}}$$

$$I = \frac{1}{3} \cdot 4^{-\frac{1}{2}} \cdot \pi^{-\frac{1}{2}} \cdot A^{\frac{3}{2}}$$

$$I = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}} \cdot A^{\frac{3}{2}}$$

$$I = \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \cdot A^{\frac{3}{2}}$$

Ja, het is een machtsverband en de evenredigheidsconstante is $\frac{1}{6\sqrt{\pi}}$

d Als A een factor k keer zo groot wordt, dan wordt I een factor $k^{\frac{3}{2}}$ keer groter.

22 a $x = 1$ en $y = 5$ invullen bij $y = c \cdot x^n$ geeft $5 = c \cdot 1^n$.

$$5 = c \cdot 1$$

$$c = 5$$

b Invullen van bijvoorbeeld $x = 16$ en $y = 320$ in $y = 5 \cdot x^n$ geeft

$$320 = 5 \cdot 16^n$$

$$16^n = 64$$

$$(2^4)^n = 2^6$$

$$2^{4n} = 2^6$$

$$4n = 6$$

$$n = 1\frac{1}{2} \text{ en de formule is } y = 5 \cdot x^{1\frac{1}{2}}.$$

c $x = 20$ invullen geeft $y = 5 \cdot 20^{1\frac{1}{2}} \approx 447,21$

23 a Een machtsverband tussen V en Z betekent $Z = c \cdot V^a$.

Invullen van $V = 1$ en $Z = 12,1$ geeft

$$12,1 = c \cdot 1^a$$

$$12,1 = c \cdot 1$$

$$c = 12,1$$

Invullen van bijvoorbeeld $V = 5$ en $Z = 53,2$ in $Z = 12,1 \cdot V^a$ geeft

$$53,2 = 12,1 \cdot 5^a$$

$$5^a = \frac{53,2}{12,1}$$

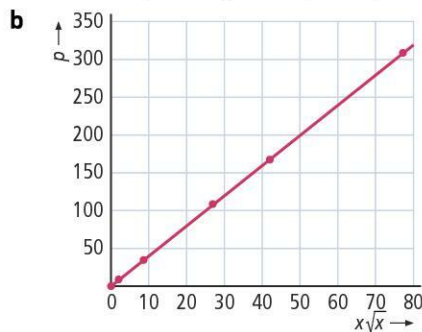
$$a = {}^5\log\left(\frac{53,2}{12,1}\right) = \frac{\log\left(\frac{53,2}{12,1}\right)}{\log(5)} \approx 0,92$$

Een formule is $Z \approx 12,1 \cdot V^{0,92}$.

- b $V^{0,92} = \frac{Z}{12,1}$
 $V^{0,92} = \frac{1}{12,1} \cdot Z$
 $V = \left(\frac{1}{12,1} \cdot Z\right)^{\frac{1}{0,92}}$
 $V = \left(\frac{1}{12,1}\right)^{\frac{1}{0,92}} \cdot Z^{\frac{1}{0,92}}$
 $V \approx 0,07 \cdot Z^{1,09}$
- c Z wordt dan $2,8^{0,92} \approx 2,58$ keer groter.

018 a

x	0	1	4	9	12	18
$x\sqrt{x}$	0	1	8	27	41,569...	76,367...
p	0	4	32	108	166,2...	305,4...



- c De richtingscoëfficiënt is $\frac{108}{27} = 4$.
- d De evenredigheidsconstante is gelijk aan de richtingscoëfficiënt, dus 4.
- e Horizontaal zet je $x^{0,8}$ op de as. Verticaal zet je p .
 De richtingscoëfficiënt is $7\frac{1}{2}$.

- U5 a $\frac{1}{\sqrt{h}} = 1$ en $V = 51$ invullen in $V = 170 \cdot \frac{d}{\sqrt{h}}$ ofwel $V = 170 \cdot \frac{1}{\sqrt{h}} \cdot d$ geeft

$$51 = 170 \cdot 1 \cdot d \text{ dus } d = \frac{51}{170} = 0,3.$$

Die muren zijn 0,3 m dik.

- b Dan is h constant, dus $\sqrt{h}$ ook, zodat $V = 170 \cdot \frac{d}{\sqrt{h}} = \frac{170}{\sqrt{h}} \cdot d = c \cdot d$ waarin c een constante is. De grafiek is een rechte lijn door de oorsprong met richtingscoëfficiënt $c = \frac{170}{\sqrt{h}}$.

- c $V = 170 \cdot \frac{d}{\sqrt{h}}$
 $\sqrt{h} = 170d \cdot \frac{1}{V}$
 $h = \left(170d \cdot \frac{1}{V}\right)^2$
 $h = (170d)^2 \cdot \frac{1}{V^2}$

Bij een muur met gegeven dikte d is $h = c \cdot \frac{1}{V^2}$ dus is h omgekeerd evenredig met het kwadraat van de windsnelheid V .

$$\begin{aligned}
 \text{d } V_{\text{nieuw}} &= 170 \cdot \frac{2d}{\sqrt{4h}} \\
 V_{\text{nieuw}} &= 170 \cdot \frac{2d}{\sqrt{4}\sqrt{h}} \\
 V_{\text{nieuw}} &= 170 \cdot \frac{2d}{2\sqrt{h}} \\
 V_{\text{nieuw}} &= 170 \cdot \frac{d}{\sqrt{h}} = V_{\text{oud}} \text{ dus de windsnelheid moet hetzelfde blijven.}
 \end{aligned}$$

14.4 Machtsverband of exponentieel verband

intro De grafiek van een exponentieel verband gaat nooit door de oorsprong.

- 24 a** Bij de tabellen A (steeds keer $\frac{6}{3} = 2$) en B (steeds keer $\frac{300}{400} = \frac{3}{4}$) hoort een exponentieel verband.

Bij tabel A hoort $y = c \cdot 2^x$.

Invullen $x = 1$ en $y = 3$ geeft $3 = c \cdot 2^1 = 2c$, dus $c = 1\frac{1}{2}$ zodat $y = 1\frac{1}{2} \cdot 2^x$.

Bij tabel B hoort $y = c \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x$.

Invullen $x = 4$ en $y = 400$ geeft $400 = c \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}c$, dus

$c = 400 \cdot \frac{256}{81} \approx 1264,2$ zodat $y = 1264,2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x$.

- b** Invullen van $x = 1$ en $y = 12$ in $y = c \cdot x^a$ geeft $12 = c \cdot 1^a = c \cdot 1$, dus $c = 12$.

De waarde van c kun je uit de tabel aflezen: het is de y -waarde die hoort bij $x = 1$.

- 25 a** Tussen $L = 0,016$ en $L = 2$ is de groeifactor $g = \left(\frac{0,25}{0,0015}\right)^{\frac{1}{2-0,016}} \approx 13,179$.

Tussen $L = 2$ en $L = 55$ is de groeifactor $g = \left(\frac{10}{0,25}\right)^{\frac{1}{53}} \approx 1,072$.

De groeifactoren verschillen, dus het verband is niet exponentieel.

- b** Invoer: $y_1 = 0,0015 : 0,016^x$ en $y_2 = 1325 : 4875^x$

Venster: $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 1$

Opties: snijpunt geeft $x = 1,08429\dots$ en $y = 0,13284\dots$

Dus is, op drie decimalen afgerond, $p = 1,084$ en $c = 0,133$.

- 26 a** Uit het tweede gegeven volgt $234 = c \cdot 10^p$.

Dus stap 1 wordt dan: $12 = c \cdot 5^p$ en $234 = c \cdot 10^p$.

$$\text{b } \frac{c \cdot 10^p}{c \cdot 5^p} = \frac{234}{12}$$

$$\text{c } \left(\frac{10}{5}\right)^p = 19,5$$

$$\text{d } 2^p = 19,5$$

$$p = {}^2\log(19,5) = 4,285\dots \approx 4,29$$

$$\text{e } c = \frac{12}{5^{4,285\dots}} \approx 0,012$$

$$\text{f } N = 0,012 \cdot d^{4,29}$$

27 a $y = c \cdot x^p$

$x = 1$ en $y = 45$ invullen geeft $45 = c \cdot 1^p$ dus $c = 45$.

$x = 15$ en $y = 20$ invullen geeft $20 = c \cdot 15^p$ dus $20 = 45 \cdot 15^p$.

$$15^p = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$$

$$p = {}^{15}\log\left(\frac{4}{9}\right) \approx -0,30$$

Een formule is $y = 45 \cdot x^{-0,30}$.

b $y = c \cdot x^p$

$x = 3$ en $y = 1456$ invullen geeft $1456 = c \cdot 3^p$.

$x = 10$ en $y = 11\,277$ invullen geeft $11\,277 = c \cdot 10^p$.

$$\frac{c \cdot 10^p}{c \cdot 3^p} = \frac{11\,277}{1456}$$

$$\left(3\frac{1}{3}\right)^p = 7,745\dots$$

$$p = {}^{3\frac{1}{3}}\log(7,745\dots) \approx 1,70 \text{ en } c = \frac{1456}{3^{1,70\dots}} \approx 225$$

Een formule is $y = 225 \cdot x^{1,70}$.

c $y = c \cdot x^p$

$x = 2$ en $y = 244$ invullen geeft $244 = c \cdot 2^p$.

$x = 7$ en $y = 624$ invullen geeft $624 = c \cdot 7^p$.

$$\frac{c \cdot 7^p}{c \cdot 2^p} = \frac{624}{244}$$

$$\left(3\frac{1}{2}\right)^p = 2,557\dots$$

$$p = {}^{3\frac{1}{2}}\log(2,557\dots) \approx 0,75 \text{ en } c = \frac{244}{2^{0,75\dots}} \approx 145$$

Een formule is $y = 145 \cdot x^{0,75}$.

Controle:

$x = 12$ geeft $y = 145 \cdot 12^{0,75} \approx 935$, klopt.

$x = 16$ geeft $y = 145 \cdot 16^{0,75} = 1160$, klopt.

28 a $v = c \cdot d^p$

$d = 20$ en $v = 340$ invullen geeft $340 = c \cdot 20^p$.

$d = 400$ en $v = 164$ invullen geeft $164 = c \cdot 400^p$.

$$\frac{c \cdot 400^p}{c \cdot 20^p} = \frac{164}{340}$$

$$20^p = 0,482\dots$$

$$p = {}^{20}\log(0,482\dots) \approx -0,24 \text{ en } c = \frac{340}{20^{-0,24\dots}} \approx 705$$

Een formule is $v = 705 \cdot d^{-0,24}$.

Controle: $d = 808$ geeft $v = 705 \cdot 808^{-0,24} \approx 141$, klopt.

b Als d een factor 2 groter wordt, wordt v een factor $2^{-0,24} \approx 0,85$ groter.

De vruchtbaarheid neemt dus met een factor 0,85 af.

29 a $y = 5 \cdot x^{\frac{1}{6}}$ hoort bij een machtsverband.**b** $y = 0,2 \cdot 1,02^x$ hoort bij een exponentieel verband.**c** $y = \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{1}{3}}$ hoort bij een machtsverband.**d** $y = 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x$ hoort bij een exponentieel verband.**e** $y = \frac{3}{4} \cdot x^3$ hoort bij een machtsverband.**f** $y = 3^{0,5x-2}$ hoort bij een exponentieel verband.

30 $\log(A) = 0,13t + 1,7$
 $A = 10^{0,13t+1,7}$
 $A = 10^{0,13t} \cdot 10^{1,7}$
 $A = 10^{1,7} \cdot (10^{0,13})^t$
 $A \approx 50,12 \cdot 1,35^t$ dus is er een exponentieel verband tussen A en t .

31 a $A = 7$ en $B = 59$ geeft $\log(59) = p \cdot \log(7) + q$ ofwel $q = \log(59) - p \cdot \log(7)$.
 $A = 20$ en $B = 391$ geeft $\log(391) = p \cdot \log(20) + q$ ofwel
 $q = \log(391) - p \cdot \log(20)$.
Gelijkstellen geeft $\log(59) - p \cdot \log(7) = \log(391) - p \cdot \log(20)$.
 $p \cdot (\log(20) - \log(7)) = \log(391) - \log(59)$
 $p = \frac{\log(391) - \log(59)}{\log(20) - \log(7)} = 1,801\dots$ en $q = \log(59) - 1,801\dots \cdot \log(7) = 0,248\dots$
Dus $p \approx 1,8$ en $q \approx 0,25$.
b $\log(B) = 1,8 \cdot \log(A) + 0,25$
 $\log(B) = \log(A^{1,8}) + \log(10^{0,25})$
 $\log(B) = \log(10^{0,25} \cdot A^{1,8})$
 $B \approx 1,8 \cdot A^{1,8}$

027 a In stap 1 zijn de coördinaten van het punt $(3, 408)$ in de formule $y = c \cdot x^p$ ingevuld.
b $x = 11$ en $y = 3713$ invullen geeft $c \cdot 11^p = 3713$.
c $\frac{c \cdot 11^p}{c \cdot 3^p} = \frac{3713}{408}$
d $\left(\frac{11}{3}\right)^p = \frac{3713}{408} = 9,100\dots$
 $\left(3\frac{2}{3}\right)^p = 9,100\dots$
 $p = {}^{3\frac{2}{3}}\log(9,100\dots) = 1,699\dots \approx 1,7$
e $c \cdot 3^{1,699\dots} = 408$
 $c = \frac{408}{3^{1,699\dots}} \approx 63$
f Een formule is $y = 63 \cdot x^{1,7}$.
g $y = c \cdot x^p$
 $x = 2$ en $y = 145$ invullen geeft $145 = c \cdot 2^p$.
 $x = 12$ en $y = 20$ invullen geeft $20 = c \cdot 12^p$.
 $\frac{c \cdot 12^p}{c \cdot 2^p} = \frac{20}{145}$
 $6^p = 0,137\dots$
 $p = {}^6\log(0,137\dots) = -1,105\dots$ en $c = \frac{145}{2^{-1,105\dots}} \approx 312$
Een formule is $y = 312 \cdot x^{-1,1}$.
h $y = c \cdot x^p$
 $x = 13$ en $y = 800$ invullen geeft $800 = c \cdot 13^p$.
 $x = 17$ en $y = 1060$ invullen geeft $1060 = c \cdot 17^p$.
 $\frac{c \cdot 17^p}{c \cdot 13^p} = \frac{1060}{800}$
 $\left(\frac{17}{13}\right)^p = 1,325$
 $p = {}^{\frac{17}{13}}\log(1,325) = 1,049\dots$ en $c = \frac{800}{13^{1,049\dots}} \approx 54$
Een formule is $y = 54 \cdot x^{1,05}$.

i $y = c \cdot x^p$

$x = 5$ en $y = 457$ invullen geeft $457 = c \cdot 5^p$.

$x = 10$ en $y = 301$ invullen geeft $301 = c \cdot 10^p$.

$$\frac{c \cdot 10^p}{c \cdot 5^p} = \frac{301}{457}$$

$$2^p = 0,658\dots$$

$$p = {}^2\log(0,658\dots) = -0,602\dots \text{ en } c = \frac{457}{5^{-0,602\dots}} \approx 1205$$

Een formule is $y = 1205 \cdot x^{-0,6}$.

Controle:

$x = 20$ geeft $y = 1205 \cdot 20^{-0,6} \approx 199,7$, klopt.

$x = 25$ geeft $y = 1205 \cdot 25^{-0,6} \approx 174,7$, klopt.

U6 a $h = 50$ en $K = 25$ geeft $25 = c \cdot \sqrt{50}$ ofwel $c = \frac{25}{\sqrt{50}} = 3,53\dots$

$h = 150$ en $K = 43$ geeft $43 = c \cdot \sqrt{150}$ ofwel $c = \frac{43}{\sqrt{150}} = 3,51\dots$

$h = 300$ en $K = 61$ geeft $61 = c \cdot \sqrt{300}$ ofwel $c = \frac{61}{\sqrt{300}} = 3,52\dots$

$$c \approx 3,52$$

b Uit de stelling van Pythagoras volgt

$$MA^2 + AB^2 = MB^2$$

$$r^2 + K^2 = (r + h)^2$$

$$K^2 = (r + h)^2 - r^2$$

$$K^2 = r^2 + 2rh + h^2 - r^2$$

$$K^2 = 2rh + h^2$$

$$K^2 = h(2r + h)$$

$$K = \sqrt{(2r + h) \cdot h} = \sqrt{2r + h} \cdot \sqrt{h}$$

c Voor kleine waarden van h is h zeer klein ten opzichte van de straal van de aarde, dus $2r + h \approx 2r$, daarmee wordt $K = \sqrt{2r + h} \cdot \sqrt{h}$ dan

$$K \approx \sqrt{2r} \cdot \sqrt{h}$$

$$K = \sqrt{2 \cdot 6370000} \cdot \sqrt{h} \approx 3600 \cdot \sqrt{h} \text{ meter, oftewel } K = 3,6 \cdot \sqrt{h} \text{ kilometer.}$$

U7 Bij een exponentieel verband geldt $q = b \cdot g^p$.

$$g = \left(\frac{1054,2}{150,16} \right)^{\frac{1}{4}} = 1,627\dots$$

$$\text{Bij } p = 15 \text{ is } q = 1054,2 \cdot (1,627\dots)^8 \approx 51\,959.$$

Bij een machtsverband geldt $q = c \cdot p^a$.

$$p = 3 \text{ en } q = 150,16 \text{ invullen geeft } 150,16 = c \cdot 3^a.$$

$$p = 7 \text{ en } q = 1054,2 \text{ invullen geeft } 1054,2 = c \cdot 7^a.$$

$$\frac{c \cdot 7^a}{c \cdot 3^a} = \frac{1054,2}{150,16}$$

$$\left(2\frac{1}{3} \right)^a = 7,020\dots$$

$$a = {}^{2\frac{1}{3}}\log(7,020\dots) = 2,300\dots \text{ en } c = \frac{150,16}{3^{2,300\dots}} \approx 12$$

Een formule is $q = 12 \cdot p^{2,3}$.

$$p = 15 \text{ geeft } q = 12 \cdot 15^{2,3} \approx 6084.$$

Bij een exponentieel verband is $q = 51\,959 : 6084 \approx 8,5$ keer zo groot als bij een machtsverband.

14.5 Gemengde opdrachten

32 a $k = 10 \cdot w^{2,5}$ substitueren in $P = \left(\frac{k}{6}\right)^{0,4}$ geeft $P = \left(\frac{10 \cdot w^{2,5}}{6}\right)^{0,4}$.

$$P = \left(1\frac{2}{3} \cdot w^{2,5}\right)^{0,4}$$

$$P = \left(1\frac{2}{3}\right)^{0,4} \cdot (w^{2,5})^{0,4}$$

$$P \approx 1,23 \cdot w^{2,5 \cdot 0,4}$$

$$P \approx 1,23 \cdot w$$

Dit heeft de vorm $y = c \cdot x$ die hoort bij een recht evenredig verband.

De evenredigheidsconstante is 1,23.

b $k = 2(2q - 1)^{2,5}$ substitueren in $P = \left(\frac{k}{6}\right)^{0,4}$ geeft $P = \left(\frac{2(2q - 1)^{2,5}}{6}\right)^{0,4}$.

$$P = \left(\frac{1}{3} \cdot (2q - 1)^{2,5}\right)^{0,4}$$

$$P = \left(\frac{1}{3}\right)^{0,4} \cdot ((2q - 1)^{2,5})^{0,4}$$

$$P = \left(\frac{1}{3}\right)^{0,4} \cdot (2q - 1)^{2,5 \cdot 0,4}$$

$$P = \left(\frac{1}{3}\right)^{0,4} \cdot (2q - 1)$$

$$P = \left(\frac{1}{3}\right)^{0,4} \cdot 2 \cdot q - \left(\frac{1}{3}\right)^{0,4}$$

$$\text{dus } a = \left(\frac{1}{3}\right)^{0,4} \cdot 2 \approx 1,29 \text{ en } b = -\left(\frac{1}{3}\right)^{0,4} \approx -0,64$$

33 a $\frac{Q}{P}$ is steeds $1\frac{1}{2}$, dus Q is recht evenredig met P en de

evenredigheidsconstante is $1\frac{1}{2}$.

$\frac{R}{P}$ is steeds 0,225, dus R is recht evenredig met P en de

evenredigheidsconstante is 0,225.

$\frac{R}{Q}$ is steeds 0,15, dus R is recht evenredig met Q en de

evenredigheidsconstante is 0,15.

b De uitkomsten van $P \cdot S^2$ zijn achtereenvolgens 640,1042; 640,09; 640,2534; 639,3888 en 640.

Er geldt voor alle waarden $P \cdot S^2 \approx 640$, dus P is omgekeerd evenredig

met S^2 ofwel P is recht evenredig met $\frac{1}{S^2}$.

c Uit a volgt $P = \frac{2}{3} \cdot Q$ en $P = 4\frac{4}{9} \cdot R$, dus $P^2 = P \cdot P = \frac{2}{3} \cdot Q \cdot 4\frac{4}{9} \cdot R$.

$$P^2 = \frac{2}{3} \cdot 4\frac{4}{9} \cdot Q \cdot R$$

$$P^2 = 2\frac{26}{27} \cdot Q \cdot R$$

De evenredigheidsconstante is $2\frac{26}{27}$.

d De resultaten uit b en c gebruiken geeft $P^2 = P \cdot P = \sqrt{2\frac{26}{27} \cdot Q \cdot R} \cdot 640 \cdot \frac{1}{S^2}$

$$P^2 = \sqrt{2\frac{26}{27}} \cdot 640 \cdot \frac{\sqrt{Q \cdot R}}{S^2} \text{ dus } P^2 \text{ is evenredig met } \frac{\sqrt{Q \cdot R}}{S^2}$$

e De evenredigheidsconstante is $\sqrt{2\frac{26}{27}} \cdot 640 \approx 1101,6$.

$$\begin{aligned}
 \text{f } (P_{\text{vergroot}})^2 &= 1101,6 \cdot \frac{\sqrt{2Q \cdot 2R}}{(2S)^2} \\
 (P_{\text{vergroot}})^2 &= 1101,6 \cdot \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{Q \cdot R}}{4S^2} \\
 (P_{\text{vergroot}})^2 &= \frac{1}{2} \cdot \left(1101,6 \cdot \frac{\sqrt{Q \cdot R}}{S^2} \right) \\
 (P_{\text{vergroot}})^2 &= \frac{1}{2} \cdot (P_{\text{onvergroot}})^2 \\
 P_{\text{vergroot}} &= \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot P_{\text{onvergroot}} \\
 P &\text{ wordt dan } \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0,71 \text{ keer zo groot.}
 \end{aligned}$$

34 a a is de richtingscoëfficiënt van de getekende lijn.

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta(G^p)} = \frac{437,5 - 362,5}{3,5 - 2,9} = \frac{75}{0,6} = 125$$

b Als $G = 31,0$ dan is $G^p = 2,90$.

$$31,0^p = 2,90$$

$$p = {}^{31,0}\log(2,90) \approx 0,31$$

c $V = 125 \cdot G^{0,31}$

$$450 = 125 \cdot G^{0,31}$$

$$G = \left(\frac{450}{125} \right)^{\frac{1}{0,31}} \approx 62,3$$

Voor een chimpansee zou het gewicht 62,3 kg zijn.

$$V = 180 \cdot G^{0,25}$$

$$450 = 180 \cdot G^{0,25}$$

$$G = \left(\frac{450}{180} \right)^{\frac{1}{0,25}} \approx 39,1$$

Voor een prehistorische mens zou het gewicht 39,1 kg zijn.

Deze prehistorische mens weegt te weinig, want prehistorische mensen wegen meer dan chimpansees. De schedel kan dus niet van een mens zijn.

Onderzoeksoopdrachten

35 a $t = 87,97$ en $A = 58$ invullen in $A = c \cdot t^p$ geeft $58 = c \cdot 87,97^p$.

$t = 60\,195$ en $A = 4500$ invullen in $A = c \cdot t^p$ geeft $4500 = c \cdot 60\,195^p$.

$$\frac{c \cdot 60\,195^p}{c \cdot 87,97^p} = \frac{4500}{58}$$

$$(684,267\dots)^p = 77,586\dots$$

$$p = {}^{684,267\dots}\log(77,586\dots) = 0,666\dots \text{ en } c = \frac{58}{87,97^{0,666\dots}} \approx 2,93$$

Een formule is $A = 2,93 \cdot t^{0,67}$ met A in miljoenen km.

Controle:

Aarde: $A = 2,93 \cdot 365,26^{0,67} \approx 153$, klopt ongeveer.

Mars: $A = 2,93 \cdot 687^{0,67} \approx 233$, klopt ongeveer.

Jupiter: $A = 2,93 \cdot 4332^{0,67} \approx 801$, klopt ongeveer.

Saturnus: $A = 2,93 \cdot 10\,760^{0,67} \approx 1473$, klopt ongeveer.

De uitkomsten zijn allemaal iets te hoog.

- b De omlooptijd van Venus is 225 dagen.

Voor Venus geeft de formule $A = 2,93 \cdot 225^{0,67} \approx 110$ miljoen km, wat redelijk goed overeenkomt met de gegeven afstand van $108 \cdot 10^6$ km.

De omlooptijd van Uranus is 30 687,15 dagen.

Voor Uranus geeft de formule $A = 2,93 \cdot 30\,687,15^{0,67} \approx 2973$ miljoen km, wat redelijk goed overeenkomt met de gegeven afstand van $2,9 \cdot 10^9$ km.

36 a $B = \frac{G}{l^2}$ ofwel $B = \frac{1}{l^2} \cdot G$

Als de waarde van l constant is, geldt $B = c \cdot G$ en is B recht evenredig met G .

b $B = \frac{G}{l^2}$ ofwel $B = G \cdot \frac{1}{l^2}$

Als de waarde van G constant is, geldt $B = c \cdot \frac{1}{l^2}$ en is dus B omgekeerd evenredig met het kwadraat van l .

c Uit $B = \frac{G}{l^2}$ volgt $G = B \cdot l^2$ en

$$l^2 = \frac{1}{B} \cdot G \text{ en dus } l = \sqrt{\frac{1}{B} \cdot G}$$

Voor de grenslijnen geldt dat B een constante waarde is, dus $l = \sqrt{c \cdot G}$.

De grenslijnen zijn grafieken van wortelfuncties.

- d** De grenslijn tussen ondergewicht en normaal gaat door $G = 80$ en $l = 2,00$.

Invullen in $B = \frac{G}{l^2}$ geeft $B = \frac{80}{2^2} = 20$.

De grenslijn tussen normaal en overgewicht gaat door $G = 100$ en $l = 2,00$.

Invullen in $B = \frac{G}{l^2}$ geeft $B = \frac{100}{2^2} = 25$.

De grenslijn tussen overgewicht en obesitas gaat door $G = 115$ en $l = 1,95$.

Invullen in $B = \frac{G}{l^2}$ geeft $B = \frac{115}{1,95^2} \approx 30$.

De grenslijn tussen ondergewicht en normaal gaat door $G = 115$ en $l = 1,81$.

Invullen in $B = \frac{G}{l^2}$ geeft $B = \frac{115}{1,81^2} \approx 35$.

Voor de vier grenslijnen zijn de waarden van B dus 20, 25, 30 en 35.

Samenvatting

- S1** De formules A, B en E horen bij een machtsverband.

S2 $71 \times 30 = 2130$

De hoogte van de echte molen is $2130 \text{ cm} = 21,3 \text{ m}$.

$$0,3 \times 30^2 = 270$$

De oppervlakte met riet van de echte molen is 270 m^2 .

$$0,12 \times 30^3 = 3240$$

Het volume van de echte molen is 3240 m^3 .

- S3** De formules A en D horen bij een exponentieel verband.

De formules B en C horen bij een machtsverband.

S4 $\frac{k}{p} = \frac{18}{12} = \frac{36}{24} = \frac{54}{36} = \frac{180}{120} = 1\frac{1}{2}$, dus is k recht evenredig met p .

De evenredigheidsconstante is $1\frac{1}{2}$.

Een formule is $k = 1\frac{1}{2}p$.

S5 a Het product van I en R blijft constant.

Als de weerstand R vijfmaal zo groot wordt, dan wordt de stroomsterkte vijfmaal zo klein.

b $I \cdot R = 12$ geeft $I = \frac{12}{R}$

S6 a $P = 3t^3\sqrt[4]{t}$ ofwel $P = 3t^3 \cdot t^{\frac{1}{4}}$ en dus $P = 3t^{3\frac{1}{4}}$.

Langs de horizontale as zet je $t^{3\frac{1}{4}}$ en langs de verticale as zet je P .

b $Q \cdot t^4 = 270$ ofwel $Q = 270 \cdot \frac{1}{t^4}$

Langs de horizontale as zet je $\frac{1}{t^4}$ (of t^{-4}) en langs de verticale as zet je Q .

S7 a $H = c \cdot v^p$

$v = 6$ en $H = 4024$ invullen geeft $4024 = c \cdot 6^p$.

$v = 12$ en $H = 1055$ invullen geeft $1055 = c \cdot 12^p$.

$$\frac{c \cdot 12^p}{c \cdot 6^p} = \frac{1055}{4024}$$

$$2^p = 0,262\dots$$

$$p = {}^2\log(0,262\dots) = -1,931\dots \text{ en } c = \frac{4024}{6^{-1,931\dots}} \approx 128\,106$$

Een formule is $H = 128\,106 \cdot v^{-1,93}$.

b $H = b \cdot g^v$

$$g = \left(\frac{1055}{4024}\right)^{\frac{1}{6}} = 0,800\dots$$

$v = 6$ en $H = 4024$ invullen in $H = b \cdot 0,800\dots^v$ geeft

$$4024 = b \cdot 0,800\dots^6 \text{ dus } b = 4024 : (0,800\dots)^6 \approx 15\,348.$$

Een formule is $H = 15\,348 \cdot 0,8^v$.

Test jezelf

T1 a Bij tabel B hoort een exponentieel verband, want per stap van 0,6 wordt Q telkens $17,118 : 3,5598 = 4,808\dots$ keer zo groot.

De groeifactor is $g = (4,808\dots)^{\frac{1}{0,6}} = 13,699\dots$

De beginwaarde is $b = 3,5598 \cdot 13,699\dots^{-1,1} \approx 0,2$.

Een formule is $Q = 0,2 \cdot 13,7^p$.

b $V = c \cdot t^a$

$t = 5$ en $V = 0,1826$ geeft $0,1826 = c \cdot 5^a$.

$t = 25$ en $V = 0,0053$ geeft $0,0053 = c \cdot 25^a$.

$$\frac{c \cdot 25^a}{c \cdot 5^a} = \frac{0,0053}{0,1826}$$

$$5^a = 0,029\dots$$

$$p = {}^5\log(0,029\dots) = -2,199\dots \text{ en } c = \frac{0,1826}{5^{-2,199\dots}} \approx 6,3$$

Een formule is $V = 6,3 \cdot t^{-2,2}$.

$$\begin{aligned} \text{c } 0,001 &= 6,3 \cdot t^{-2,2} \\ t^{-2,2} &= \frac{0,001}{6,3} \\ t &= \left(\frac{0,001}{6,3}\right)^{-\frac{1}{2,2}} \approx 53,3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } 1000 &= 0,2 \cdot 13,7^p \\ 13,7^p &= \frac{1000}{0,2} \\ p &= {}^{13,7}\log\left(\frac{1000}{0,2}\right) \approx 3,25 \end{aligned}$$

T2 a $Q = 1,35\sqrt{P}$ ofwel $Q = 1,35 \cdot P^{\frac{1}{2}}$.

Als P drie keer zo groot wordt, dan wordt Q dus $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ keer zo groot.

$$Q = 2,18 \cdot P^2$$

Als P drie keer zo groot wordt, dan wordt Q dus $3^2 = 9$ keer zo groot.

$$Q = 0,7 \cdot \frac{1}{P} \text{ geeft } Q = 0,7 \cdot P^{-1}.$$

Als P drie keer zo groot wordt, dan wordt Q dus $3^{-1} = \frac{1}{3}$ keer zo groot (ofwel 3 keer zo klein).

b $1,35\sqrt{P} = Q$

$$P = \left(\frac{1}{1,35} \cdot Q\right)^2 \text{ ofwel } P = \left(\frac{1}{1,35}\right)^2 \cdot Q^2$$

Als Q vijf keer zo groot wordt, dan wordt P dus $5^2 = 25$ keer zo groot.

$$2,18 \cdot P^2 = Q$$

$$P = \sqrt{\frac{1}{2,18} \cdot Q} \text{ ofwel } P = \sqrt{\frac{1}{2,18}} \cdot Q^{\frac{1}{2}}$$

Als Q vijf keer zo groot wordt, dan wordt P dus $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$ keer zo groot.

$$0,7 \cdot \frac{1}{P} = Q$$

$$P \cdot Q = 0,7$$

$$P = \frac{0,7}{Q} \text{ ofwel } P = 0,7 \cdot Q^{-1}$$

Als Q vijf keer zo groot wordt, dan wordt P dus $5^{-1} = \frac{1}{5}$ keer zo groot (ofwel 5 keer zo klein).

T3 a Ja, want het verband is lineair en de grafiek gaat door $(0, 0)$.

b $r = \frac{80}{100} \cdot t$ ofwel $r = 0,8t$

c $f = 1,8t + 32$

$$1,8t = f - 32$$

$$t = \frac{1}{1,8}(f - 32)$$

Dit substitueren in $r = 0,8t$ geeft

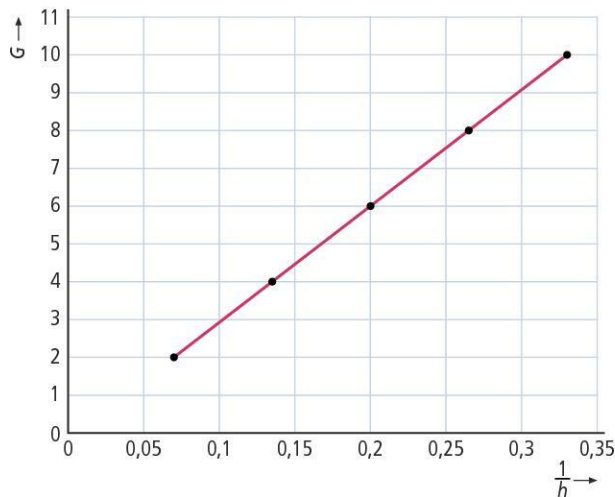
$$r = 0,8 \cdot \frac{1}{1,8}(f - 32)$$

$$r = \frac{4}{9}(f - 32)$$

T4 a $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h = 10$ ofwel $g \cdot H = 30$

G	h	h^{-1}
10	3	0,33
8	3,75	0,27
6	5	0,2
4	7,5	0,13
2	15	0,07

- b** Zie de derde kolom in de tabel bij opdracht a.



- c** G is recht evenredig met $\frac{1}{h}$ dus G is omgekeerd evenredig met h .

- d** $I = \frac{1}{3} G \cdot h$ met $I = 10$ en $G = z^2$ geeft $10 = \frac{1}{3} z^2 \cdot h$.
 $30 = z^2 \cdot h$

$$h = 30 \cdot \frac{1}{z^2} \text{ dus } h = c \cdot \frac{1}{z^2}$$

De evenredigheidsconstante is 30.

- T5 a** De grafiek is een rechte lijn door de oorsprong, dus A is recht evenredig met $\sqrt{G}$.

De evenredigheidsconstante is de richtingscoëfficiënt van de grafiek.

$$\frac{\Delta A}{\Delta(\sqrt{G})} = \frac{500}{600} = \frac{5}{6}, \text{ dus de evenredigheidsconstante is } \frac{5}{6}.$$

- b** $A = \frac{5}{6} \cdot \sqrt{360\,000} = \frac{5}{6} \cdot 600 = 500$

De vleugeloppervlakte is 500 m².

- c** $A = \frac{5}{6} \cdot \sqrt{G}$ ofwel $A = \frac{5}{6} \cdot G^{\frac{1}{2}}$.

Als G twee keer zo groot wordt, dan wordt A dus $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ keer zo groot.

De vleugeloppervlakte moet met $\sqrt{2}$ vermenigvuldigd worden.

- d** Het vliegtuig heeft een vleugeloppervlakte $A = \frac{5}{6} \sqrt{480\,000}$.

Het model heeft een vleugeloppervlakte $A = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6} \sqrt{480\,000}$.

Dit invullen in $A = \frac{5}{6} \cdot \sqrt{G}$ geeft voor het model $\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6} \sqrt{480\,000} = \frac{5}{6} \cdot \sqrt{G}$

$$\sqrt{G} = \frac{1}{4} \sqrt{480\,000}$$

$$G = \frac{1}{16} \cdot 480\,000 = 30\,000$$

Het draagvermogen van het model is 30 000 kg.

- T6 a** $\frac{30}{44} \approx 0,68$ en $\frac{123}{89} \approx 1,38$

De uitkomst van $\frac{r}{v}$ is niet constant, dus is er geen recht evenredig verband

tussen v en r . Het is ook te zien aan de grafiek: het is wel een rechte lijn, maar de stapgrootte op de horizontale as is niet overal gelijk.

b $r = c \cdot v^p$

$v = 44$ en $r = 30$ geeft $30 = c \cdot 44^p$.

$v = 89$ en $r = 123$ geeft $123 = c \cdot 89^p$.

$$\frac{c \cdot 89^p}{c \cdot 44^p} = \frac{123}{30}$$

$$\left(\frac{89}{44}\right)^p = 4,1$$

$$p = {}^{89}_{44}\log(4,1) = 2,002\dots \text{ en } c = \frac{30}{44^{2,002\dots}} \approx 0,015$$

Een formule is $r = 0,015 \cdot v^2$.

- c** De snelheid in km per uur is $1607 : 1000 = 1,607$ keer zo hoog als de snelheid in mijl per uur.

$$v_{\text{nieuw}} = 1,607 \cdot v_{\text{oud}} \text{ geeft } r_{\text{nieuw}} = 0,015 \cdot (1,607 \cdot v_{\text{oud}})^2.$$

$$r_{\text{nieuw}} = 0,015 \cdot 1,607^2 \cdot (v_{\text{oud}})^2$$

$$r_{\text{nieuw}} \approx 0,039 \cdot (v_{\text{oud}})^2$$

Een formule is $r = 0,039 \cdot v^2$.

- T7 a** De omtrek van een halve cirkel is $\frac{1}{2} \cdot 2\pi r = \pi \cdot r$.

De oppervlakte van de halve cilindermantel is $A = \pi \cdot 3 \cdot 10 = 30\pi \approx 94,2 \text{ m}^2$.

- b** De oppervlakte van een halve cilindermantel is $A = \pi \cdot r \cdot l$.

- c** Bij vaste lengte l geldt $A = c \cdot r$ waarin c een constante waarde is met grootte $\pi \cdot l$. Dus is A recht evenredig met r .

- d** De geluidsintensiteit I is omgekeerd evenredig met de oppervlakte A , dus $I \cdot A = k$ waarin k een constante is.

$$\text{Met } A = c \cdot r \text{ volgt hieruit } I \cdot c \cdot r = k \text{ ofwel } I \cdot r = \frac{k}{c}$$

Omdat k en c constanten zijn, is $I \cdot r = \text{constant}$ en dus is I omgekeerd evenredig met r .

Extra oefening

- E1 a** De tabellen A, B en C horen bij een lineair verband.

A: als b met 3 toeneemt, dan neemt k steeds met 0,6 af.

B: als n met 1 toeneemt, dan neemt w steeds met $2\frac{1}{2}$ af.

C: als p met 1 toeneemt, dan neemt q steeds met $1\frac{1}{2}$ toe.

- b** Tabel A hoort bovendien bij een recht evenredig verband, immers

$$\frac{-1}{5} = \frac{-1,6}{8} = \frac{-2,2}{11} = -0,2.$$

- c** A: $k = -0,2b$

$$\text{B: } w = -2\frac{1}{2}n + b$$

$$n = 6 \text{ en } w = 80 \text{ invullen geeft } 80 = -2\frac{1}{2} \cdot 6 + b \text{ dus } b = 95.$$

$$\text{Een formule is } w = -2\frac{1}{2}n + 95.$$

$$\text{C: } q = 1\frac{1}{2}p + b$$

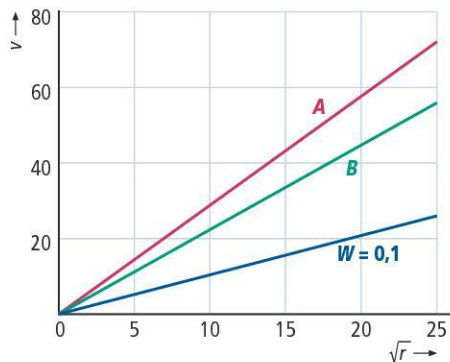
$$p = 2 \text{ en } q = 7 \text{ invullen geeft } 7 = 1\frac{1}{2} \cdot 2 + b \text{ dus } b = 4.$$

$$\text{Een formule is } q = 1\frac{1}{2}p + 4.$$

E2 a $8 = \frac{1}{2}mv^2$
 $16 = mv^2$
 $m = \frac{16}{v^2}$ ofwel $m = 16 \cdot \frac{1}{v^2}$ dus m is omgekeerd evenredig met het kwadraat van v .

b $16 = mv^2$
 $v^2 = \frac{16}{m}$
 $v = \sqrt{\frac{16}{m}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{m}}$ ofwel $v = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{m}}$
 De snelheid v is omgekeerd evenredig met de wortel van de massa m .
 De evenredigheidsconstante is 4.

E3 a $w = 0,1$ geeft $v = \sqrt{0,1 \cdot 9,8 \cdot r}$ ofwel $v \approx 0,99\sqrt{r}$.
 De bijbehorende grafiek gaat door $(0, 0)$ en $\sqrt{r} = 25$ en $v = 24,75$.



b Grafiek A gaat door $(0, 0)$ en $(25, 70)$.
 Dan is $v = 70$ en $\sqrt{r} = 25$ dus $r = 625$.
 Invullen bij $v = \sqrt{w \cdot 9,8 \cdot r}$ geeft $70 = \sqrt{w \cdot 9,8 \cdot 625}$.
 $w \cdot 9,8 \cdot 625 = 4900$
 $w = \frac{4900}{9,8 \cdot 625} = 0,8$

Bij grafiek A hoort $w = 0,8$.
 Grafiek B gaat door $(0, 0)$ en $(25, 55)$.
 Dan is $v = 55$ en $\sqrt{r} = 25$ dus $r = 625$.
 Invullen bij $v = \sqrt{w \cdot 9,8 \cdot r}$ geeft $55 = \sqrt{w \cdot 9,8 \cdot 625}$.
 $w \cdot 9,8 \cdot 625 = 3025$
 $w = \frac{3025}{9,8 \cdot 625} \approx 0,5$

Bij grafiek B hoort $w = 0,5$.

c $v = \sqrt{w \cdot 9,8 \cdot r}$ geeft $w \cdot 9,8 \cdot r = v^2$ ofwel $r = \frac{1}{w \cdot 9,8} \cdot v^2$.
 Als v twee keer zo groot wordt, wordt r dus $2^2 = 4$ keer zo groot.

E4 a De groeifactor over de eerste 300 kelvin zou zijn $g = \frac{16,7}{6,8} \approx 2,47$ en de groeifactor over de tweede 300 kelvin zou zijn $g = \frac{34,5}{16,7} \approx 2,07$.
 De factoren zijn niet gelijk, dus er is geen sprake van exponentiële groei.

b $E = c \cdot T^p$

$T = 1200$ en $E = 6,8$ invullen geeft $6,8 = c \cdot 1200^p$.

$T = 2400$ en $E = 110$ invullen geeft $110 = c \cdot 2400^p$.

$$\frac{c \cdot 2400^p}{c \cdot 1200^p} = \frac{110}{6,8}$$

$$2^p = 16,176\dots$$

$$p = {}^2\log(16,176\dots) = 4,015\dots \text{ en } c = \frac{6,8}{1200^{4,015\dots}} \approx 2,93 \cdot 10^{-12}$$

Een formule is $E = 2,93 \cdot 10^{-12} \cdot T^{4,02}$.

- E5 a** Bij de formules A en D is sprake van een recht evenredig verband.
b Bij de formules B, C en F is er sprake van een omgekeerd evenredig verband.

E6 a Tussen 1900 en 1928 was de groeifactor $g = \left(\frac{17}{10}\right)^{\frac{1}{28}} \approx 1,019$ per jaar.

Tussen 1928 en 1952 was de groeifactor $g = \left(\frac{27}{17}\right)^{\frac{1}{24}} \approx 1,019$ per jaar.

Tussen 1952 en 1986 was de groeifactor $g = \left(\frac{50,5}{27}\right)^{\frac{1}{34}} \approx 1,019$ per jaar.

Tussen 1986 en 1988 was de groeifactor $g = \left(\frac{52,4}{50,5}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1,019$ per jaar.

De groeifactor is constant, dus het verband is exponentieel.

b $A = 10 \cdot 1,019^t$

c Voor 2011 geldt $t = 111$. De formule geeft $A = 10 \cdot 1,019^{111} \approx 80,8$.

In 2011 zou de bevolking volgens de formule 80,8 miljoen zijn.

Het werkelijke aantal van 83,2 miljoen wijkt $\frac{83,2 - 80,8}{80,8} \times 100\% \approx 3\%$ af.

- E7 a** A is recht evenredig met het kwadraat van a . Er geldt dan: als a vier keer zo groot wordt, dan wordt A dus $4^2 = 16$ keer zo groot.
 I is recht evenredig met het a^3 . Er geldt dan: als a vier keer zo groot wordt, dan wordt I dus $4^3 = 64$ keer zo groot.

b Uitdrukken van a in A :

$$A = \left(3 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \cdot a^2 \text{ geeft } a^2 = \frac{A}{3 + \frac{1}{2}\sqrt{3}} \text{ ofwel } a = \left(\frac{A}{3 + \frac{1}{2}\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Dit substitueren in $I = \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot a^3$ geeft

$$I = \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot \left(\left(\frac{A}{3 + \frac{1}{2}\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^3 \text{ ofwel } I = \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot \left(\frac{A}{3 + \frac{1}{2}\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$I = \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{3 + \frac{1}{2}\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot A^{\frac{3}{2}} \text{ ofwel } I = \frac{\sqrt{3}}{4\left(3 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot A^{\frac{3}{2}}$$

De waarde van c afgerond op twee decimalen geeft $I \approx 0,06 \cdot A^{\frac{3}{2}}$.

c $I \approx 0,06 \cdot A^{\frac{3}{2}}$ dus I is recht evenredig met $A^{\frac{3}{2}}$.

Er geldt: als A tien keer zo groot wordt, dan wordt I dus $10^{\frac{3}{2}} \approx 31,62$ keer zo groot.

- 1 a** In stap 1 is de formule zonder haakjes geschreven.
b Alle termen met q zijn naar links gehaald. De overige termen zijn rechts van het $=$ -teken geplaatst.
c Je moet q uitdrukken in p , dus je moet links q overhouden. Na stap 3 kun je delen door datgene dat tussen de haakjes staat.

$$\begin{aligned} d \quad -12pq - q &= 1 - 6p \\ q(-12p - 1) &= 1 - 6p \\ q &= \frac{1 - 6p}{-12p - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad a \quad 3p + 2(4q - 5) &= 7p + 6 \\ 3p + 8q - 10 &= 7p + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8q &= 4p + 16 \\ q &= \frac{1}{2}p + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b \quad q - 1 &= \frac{3}{p} \\ q &= \frac{3}{p} + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c \quad 100 \cdot 4^q - p &= 0 \\ 100 \cdot 4^q &= p \\ 4^q &= \frac{1}{100}p \\ q &= {}^4\log\left(\frac{1}{100}p\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d \quad 4p + \log(2q) &= 6 \\ \log(2q) &= 6 - 4p \\ 2q &= 10^{6-4p} \\ q &= \frac{1}{2} \cdot 10^{6-4p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e \quad 25q^3 &= 100p \\ q^3 &= 4p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q &= (4p)^{\frac{1}{3}} \\ q &= \sqrt[3]{4p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \quad \frac{4q - 2}{p + 5} &= \frac{3}{2} \\ 2(4q - 2) &= 3(p + 5) \\ 8q - 4 &= 3p + 15 \\ 8q &= 3p + 19 \\ q &= \frac{3}{8}p + 2\frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \quad 3 \cdot \log(p) + \log(q) &= -2 \\ \log(p^3) + \log(q) &= \log\left(\frac{1}{100}\right) \\ \log(p^3q) &= \log\left(\frac{1}{100}\right) \\ p^3q &= \frac{1}{100} \\ q &= \frac{1}{100p^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h \quad 0,1p(q - 4)^3 &= 1 \\ p(q - 4)^3 &= 10 \\ (q - 4)^3 &= \frac{10}{p} \\ q - 4 &= \left(\frac{10}{p}\right)^{\frac{1}{3}} \\ q &= \sqrt[3]{\frac{10}{p}} + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad a \quad y &= 5^{x-1} \\ y &= 5^{-1} \cdot 5^x \\ y &= \frac{1}{5} \cdot 5^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b \quad y &= 6 \cdot 3^{x+2} \\ y &= 6 \cdot 3^2 \cdot 3^x \\ y &= 6 \cdot 9 \cdot 3^x \\ y &= 54 \cdot 3^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c \quad y &= 0,125 \cdot 2^{3x+4} \\ y &= 0,125 \cdot 2^4 \cdot 2^{3x} \\ y &= 0,125 \cdot 16 \cdot (2^3)^x \\ y &= 2 \cdot 8^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d \quad y &= 100 \cdot 5^{x-2} \cdot 5^x \\ y &= 100 \cdot 5^{-2} \cdot 5^x \cdot 5^x \\ y &= 100 \cdot \frac{1}{25} \cdot 5^{2x} \\ y &= 4 \cdot (5^2)^x \\ y &= 4 \cdot 25^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } y &= 4 \cdot 3^{x+1} \cdot 2^{x-2} \\ y &= 4 \cdot 3^1 \cdot 3^x \cdot 2^{-2} \cdot 2^x \\ y &= 12 \cdot 3^x \cdot \frac{1}{4} \cdot 2^x \\ y &= 3 \cdot 6^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } y &= 6 \cdot 0,5^x \cdot 2 \cdot 4^{x+2} \\ y &= 6 \cdot (2^{-1})^x \cdot 2 \cdot (2^2)^{x+2} \\ y &= 12 \cdot 2^{-x} \cdot 2^{2x+4} \\ y &= 12 \cdot 2^{x+4} \\ y &= 12 \cdot 2^4 \cdot 2^x \\ y &= 12 \cdot 16 \cdot 2^x \\ y &= 192 \cdot 2^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{4 a } f(x) &= 2 \cdot {}^4\log(x) + {}^4\log(7) \\ f(x) &= {}^4\log(x^2) + {}^4\log(7) \\ f(x) &= {}^4\log(7x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } f(x) &= {}^6\log(2x-1) - {}^6\log(x) \\ f(x) &= {}^6\log\left(\frac{2x-1}{x}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } f(x) &= {}^2\log(x+5) - \frac{1}{2} \cdot {}^2\log(x) \\ f(x) &= {}^2\log(x+5) - {}^2\log(x^{\frac{1}{2}}) \\ f(x) &= {}^2\log\left(\frac{x+5}{\sqrt{x}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } f(x) &= 3 + {}^5\log(x-2) \\ f(x) &= {}^5\log(125) + {}^5\log(x-2) \\ f(x) &= {}^5\log(125(x-2)) \\ f(x) &= {}^5\log(125x-250) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } f(x) &= \log(8-2x) - 1 \\ f(x) &= \log(8-2x) - \log(10) \\ f(x) &= \log\left(\frac{8-2x}{10}\right) \\ f(x) &= \log\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } f(x) &= 1 - 2 \cdot {}^{\frac{1}{4}}\log(x) \\ f(x) &= {}^{\frac{1}{4}}\log\left(\frac{1}{4}\right) - {}^{\frac{1}{4}}\log(x^2) \\ f(x) &= {}^{\frac{1}{4}}\log\left(\frac{1}{4x^2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{5 a } 6^{x+1} \cdot 6^{4-2x} = 6^{5-x}$$

$$\begin{aligned} \text{b } 3^{x+8} \cdot 3^{4x} \cdot 27 &= \\ 3^{x+8} \cdot 3^{4x} \cdot 3^3 &= 3^{5x+11} \end{aligned}$$

$$\text{c } \frac{5^{3x+2}}{25} = \frac{5^{3x+2}}{5^2} = 5^{3x}$$

$$\begin{aligned} \text{d } 8^x \cdot 2^{x+1} &= (2^3)^x \cdot 2^{x+1} = \\ 2^{3x} \cdot 2^{x+1} &= 2^{4x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } 2^{2x-1} \cdot 8 \cdot 4^x &= \\ 2^{2x-1} \cdot 2^3 \cdot (2^2)^x &= \\ 2^{2x-1} \cdot 2^3 \cdot 2^{2x} &= \\ 2^{2x-1} \cdot 2^{3+2x} &= 2^{4x+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } \frac{0,5^x \cdot 2^{3+2x}}{4^x} &= \frac{(2^{-1})^x \cdot 2^{3+2x}}{(2^2)^x} = \\ \frac{2^{-x} \cdot 2^{3+2x}}{2^{2x}} &= \frac{2^{3+x}}{2^{2x}} = 2^{3-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{6 a } f(x) &= \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 - x + 8 \\ f'(x) &= 2x^2 - 8x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } f(t) &= 7(4t-3)^{\frac{1}{2}} \\ f'(t) &= 3\frac{1}{2}(4t-3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 \\ f'(t) &= \frac{14}{\sqrt{4t-3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } B(u) &= 6u^{-1} - u^{-6} - 6u \\ B'(u) &= -6u^{-2} + 6u^{-7} - 6 \\ B'(u) &= -\frac{6}{u^2} + \frac{6}{u^7} - 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } M(a) &= 4 + a - (a+6)^{\frac{1}{2}} \\ M'(a) &= 1 - \frac{1}{2}(a+6)^{-\frac{1}{2}} \\ M'(a) &= 1 - \frac{1}{2\sqrt{a+6}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } h(x) &= (3x-1)^2 \\ h'(x) &= 2(3x-1) \cdot 3 \\ h'(x) &= 6(3x-1) \\ h'(x) &= 18x-6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } P(k) &= (3k-11)^{-7} \\ P'(k) &= -7(3k-11)^{-8} \cdot 3 \\ P'(k) &= \frac{-21}{(3k-11)^8} \end{aligned}$$

7 a $g(x) = 4 \cdot (x + 2)^{-1}$

$$g'(x) = -4 \cdot (x + 2)^{-2} \text{ dus } g'(x) = \frac{-4}{(x + 2)^2}$$

$$g'(-1) = \frac{-4}{(-1 + 2)^2} = \frac{-4}{1^2} = -4$$

De helling van de grafiek in $A(-1, 4)$ is -4 .

b $h(x) = 5 - 2 \cdot x^{\frac{1}{2}}$

$$h'(x) = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} \text{ dus } h'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$h'(1) = -\frac{1}{\sqrt{1}} = -1$$

De helling van de grafiek in $A(1, 3)$ is -1 .

8 a $f(2) = \sqrt{4 \cdot 2 + 1} = \sqrt{9} = 3$, dus de grafiek van f gaat door $P(2, 3)$.

b $f(x) = (4x + 1)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(4x + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4$$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x + 1}}$$

$$f'(2) = \frac{2}{\sqrt{4 \cdot 2 + 1}} = \frac{2}{3}, \text{ dus de helling in } P \text{ is } \frac{2}{3}.$$

c $a = \frac{2}{3}$ dus een vergelijking van de raaklijn is van de vorm $y = \frac{2}{3}x + b$.

$$x = 2 \text{ en } y = 3 \text{ invullen geeft } 3 = \frac{2}{3} \cdot 2 + b \text{ dus } b = 1\frac{2}{3}.$$

$$\text{Een vergelijking van de raaklijn is } y = \frac{2}{3}x + 1\frac{2}{3}.$$

9 a $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2 - 7\frac{1}{2}x$

$$f'(x) = x^2 + 5x - 7\frac{1}{2}$$

$$f'(3) = 3^2 + 5 \cdot 3 - 7\frac{1}{2} = 9 + 15 - 7\frac{1}{2} = 16\frac{1}{2}$$

Een vergelijking van de raaklijn is van de vorm $y = 16\frac{1}{2}x + b$.

$$x = 3 \text{ en } y = 9 \text{ invullen geeft } 9 = 16\frac{1}{2} \cdot 3 + b \text{ dus } b = -40\frac{1}{2}.$$

$$\text{Een vergelijking van de raaklijn is } y = 16\frac{1}{2}x - 40\frac{1}{2}.$$

b $g(x) = 5x + x^{-2}$

$$g'(x) = 5 - 2x^{-3} \text{ dus } g'(x) = 5 - \frac{2}{x^3}$$

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = 5 - \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 5 - \frac{2}{\frac{1}{8}} = 5 - 16 = -11$$

Een vergelijking van de raaklijn is van de vorm $y = -11x + b$.

$$x = \frac{1}{2} \text{ en } y = 6\frac{1}{2} \text{ invullen geeft } 6\frac{1}{2} = -11 \cdot \frac{1}{2} + b \text{ dus } b = 12.$$

$$\text{Een vergelijking van de raaklijn is } y = -11x + 12.$$

c $h(x) = 3x - 1 + (6x + 3)^{\frac{1}{2}}$

$$h'(x) = 3 + \frac{1}{2}(6x + 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6 \text{ dus } h'(x) = 3 + \frac{3}{\sqrt{6x + 3}}$$

$$h'(1) = 3 + \frac{3}{\sqrt{6 \cdot 1 + 3}} = 3 + \frac{3}{\sqrt{9}} = 3 + 1 = 4$$

Een vergelijking van de raaklijn is van de vorm $y = 4x + b$.

$$x = 1 \text{ en } y = 5 \text{ geeft } 5 = 4 \cdot 1 + b \text{ dus } b = 1.$$

$$\text{Een vergelijking van de raaklijn is } y = 4x + 1.$$

- 10** $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x$
 $f'(x) = \frac{1}{2}x - 2$
 De helling van de raaklijn $m: y = 2x + p$ is 2.
 $f'(x) = 2$ geeft $\frac{1}{2}x - 2 = 2$.
 $\frac{1}{2}x = 4$
 $x = 8$
 $f(8) = \frac{1}{4} \cdot 8^2 - 2 \cdot 8 = \frac{1}{4} \cdot 64 - 16 = 16 - 16 = 0$
 Het raakpunt is het punt $(8, 0)$.
 Substitutie van $x = 8$ en $y = 0$ in $y = 2x + p$ geeft $0 = 2 \cdot 8 + p$.
 $p = -16$

- 11** Als $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + a$ de x -as raakt, dan moet de afgeleide nul zijn.
 $f'(x) = x^2 - 6x$
 $x^2 - 6x = 0$
 $x(x - 6) = 0$
 $x = 0$ of $x = 6$
 Omdat de raakpunten op de x -as liggen, zijn de coördinaten $(0, 0)$ en $(6, 0)$.
 $f(0) = 0$ geeft $\frac{1}{3} \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 + a = 0$ dus $a = 0$.
 $f(6) = 0$ geeft $\frac{1}{3} \cdot 6^3 - 3 \cdot 6^2 + a = 0$ dus $a = 36$.
 Dus voor $a = 0$ en $a = 36$ raakt de grafiek van f de x -as.

- 12 a** $y = \frac{1}{2} \cdot {}^2\log(64x^3)$
b In stap 3 is de regel ${}^s\log(ab) = {}^s\log(a) + {}^s\log(b)$ toegepast.
c $y = \frac{1}{2} \cdot ({}^2\log(64) + {}^2\log(x^3))$
d In stap 4 zijn eerst de haakjes weggewerkt en vervolgens de regel ${}^s\log(a^p) = p \cdot {}^s\log(a)$ toegepast.
e $y = \frac{1}{2} \cdot {}^2\log(64) + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot {}^2\log(x)$
 $y = \frac{1}{2} \cdot 6 + 1\frac{1}{2} \cdot {}^2\log(x)$
 $y = 3 + 1\frac{1}{2} \cdot {}^2\log(x)$

- 13 a** Substitutie van B in A geeft $y = 3 \cdot {}^2\log\left(\frac{1}{2}x\right)$
 $y = 3({}^2\log\left(\frac{1}{2}\right) + {}^2\log(x))$
 $y = 3 \cdot -1 + 3 \cdot {}^2\log(x)$
 $y = -3 + 3 \cdot {}^2\log(x)$
b Substitutie van B in A geeft $y = 2 + {}^3\log(6 \cdot 1,5x^{-1})$
 $y = 2 + {}^3\log(9x^{-1})$
 $y = 2 + {}^3\log(9) + {}^3\log(x^{-1})$
 $y = 2 + 2 + -1 \cdot {}^3\log(x)$
 $y = 4 - 1 \cdot {}^3\log(x)$
c Substitutie van B in A geeft $y = -{}^{0,5}\log\left(\frac{1}{6} \cdot \frac{12}{x^3}\right)$
 $y = -{}^{0,5}\log(2 \cdot x^{-3})$
 $y = -({}^{0,5}\log(2) + {}^{0,5}\log(x^{-3}))$
 $y = -(-1 - 3 \cdot {}^{0,5}\log(x))$
 $y = 1 + 3 \cdot {}^{0,5}\log(x)$

d Substitutie van B in A geeft $y = 5 + 2 \cdot {}^2\log\left(\frac{4}{2x^5}\right)$

$$y = 5 + 2 \cdot {}^2\log(2 \cdot x^{-5})$$

$$y = 5 + 2 \cdot ({}^2\log(2) + {}^2\log(x^{-5}))$$

$$y = 5 + 2 \cdot (1 - 5 \cdot {}^2\log(x))$$

$$y = 5 + 2 - 10 \cdot {}^2\log(x)$$

$$y = 7 - 10 \cdot {}^2\log(x)$$

14 a Substitutie geeft $k = (t-1)^2 - 2(t-1) + 8$.

$$k = t^2 - 2t + 1 - 2t + 2 + 8$$

$$k = t^2 - 4t + 11$$

b Substitutie geeft $k = \sqrt{(3-2t)^2 - 3(3-2t)}$.

$$k = \sqrt{9 - 12t + 4t^2 - 9 + 6t}$$

$$k = \sqrt{4t^2 - 6t}$$

c Substitutie geeft $k = 2^{3(4t-3)} \cdot 4^{4t-3-6}$.

$$k = 2^{12t-9} \cdot 4^{4t-9}$$

$$k = 2^{12t-9} \cdot (2^2)^{4t-9}$$

$$k = 2^{12t-9} \cdot 2^{8t-18}$$

$$k = 2^{20t-27}$$

d Substitutie geeft $k = \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t} - 2}$

$$k = \frac{1}{t\left(\frac{1}{t} - 2\right)}$$

$$k = \frac{1}{1 - 2t}$$

15 $(x-2)^2 - 4 + (y+5)^2 - 25 = 20$

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 49$$

De coördinaten van het middelpunt zijn $(2, -5)$ en de straal is $\sqrt{49} = 7$.

16 a $x^2 + 6x + y^2 - 2y = 15$

$$(x+3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 = 15$$

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 25$$

De coördinaten van het middelpunt zijn $(-3, 1)$ en de straal is 5.

b $x^2 - x + y^2 = 2$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + y^2 = 2$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 2\frac{1}{4}$$

De coördinaten van het middelpunt zijn $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ en de straal is $\sqrt{2\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2}$.

c $x^2 - 3x + y^2 - 5y = 0$

$$\left(x - 1\frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{1}{4} + \left(y - 2\frac{1}{2}\right)^2 - 6\frac{1}{4} = 0$$

$$\left(x - 1\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - 2\frac{1}{2}\right)^2 = 8\frac{1}{2}$$

De coördinaten van het middelpunt zijn $\left(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$ en de straal is $\sqrt{8\frac{1}{2}}$.

d $x^2 + 0,4x + y^2 - 1,4y = 0,5$

$$(x+0,2)^2 - 0,04 + (y-0,7)^2 - 0,49 = 0,5$$

$$(x+0,2)^2 + (y-0,7)^2 = 1,03$$

De coördinaten van het middelpunt zijn $(-0,2; 0,7)$ en de straal is $\sqrt{1,03}$.

17 a $3x + 5y = 15$

$$5y = -3x + 15$$

$$y = -\frac{3}{5}x + 3 \text{ dus de richtingscoëfficiënt van } l \text{ is } -\frac{3}{5}.$$

De richtingscoëfficiënt van de loodlijn op l is $\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$ want $-\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = -1$.

$x = 1$ en $y = -18$ invullen bij $y = 1\frac{2}{3}x + b$ geeft $-18 = 1\frac{2}{3} \cdot 1 + b$ ofwel

$$b = -19\frac{2}{3}.$$

Een vergelijking van loodlijn n is $y = 1\frac{2}{3}x - 19\frac{2}{3}$.

b $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

$$4x + 3y = 12$$

$$3y = -4x + 12$$

$$y = -\frac{4}{3}x + 4$$

De richtingscoëfficiënt van m is $-\frac{4}{3}$.

De richtingscoëfficiënt van de loodlijn op m is $\frac{3}{4}$ want $-\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = -1$.

$x = 5$ en $y = 14$ invullen bij $y = \frac{3}{4}x + b$ geeft $14 = \frac{3}{4} \cdot 5 + b$ ofwel $b = 10\frac{1}{4}$.

Een vergelijking van loodlijn k is $y = \frac{3}{4}x + 10\frac{1}{4}$.

18 a $P(1, -2)$ is een punt op lijn l .

De richtingscoëfficiënt van m is $-\frac{1}{3}$, dus de richtingscoëfficiënt van een loodlijn op m is 3 (want $-\frac{1}{3} \cdot 3 = -1$).

$x = 1$ en $y = -2$ invullen bij $y = 3x + b$ geeft $-2 = 3 \cdot 1 + b$ ofwel $b = -5$.

Een vergelijking van de loodlijn door P op m is $y = 3x - 5$.

Deze loodlijn snijden met m geeft $3x - 5 = -\frac{1}{3}x + 5$.

$$3\frac{1}{3}x = 10$$

$x = 3$ en $y = -\frac{1}{3} \cdot 3 + 5 = 4$ dus het snijpunt is $S(3, 4)$.

$$d(l, m) = PS = \sqrt{(3-1)^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

b $P(6, 0)$ is een punt op lijn l .

$$m : x = -\frac{1}{2}y - 6\frac{1}{2}$$

$$m : 2x = -y - 13$$

$$m : y = -2x - 13$$

De richtingscoëfficiënt van m is -2 , dus de richtingscoëfficiënt van een loodlijn op m is $\frac{1}{2}$ (want $\frac{1}{2} \cdot -2 = -1$).

$x = 6$ en $y = 0$ invullen bij $y = \frac{1}{2}x + b$ geeft $0 = \frac{1}{2} \cdot 6 + b$ ofwel $b = -3$.

Een vergelijking van de loodlijn door P op m is $y = \frac{1}{2}x - 3$.

Deze loodlijn snijden met m geeft $\frac{1}{2}x - 3 = -2x - 13$.

$$2\frac{1}{2}x = -10$$

$x = -4$ en $y = -2 \cdot -4 - 13 = -5$ dus het snijpunt is $S(-4, -5)$.

$$d(l, m) = PS = \sqrt{(-4-6)^2 + (-5-0)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

- 19 $y = x + 4$ substitueren in $x^2 + y^2 - 6y = 16$ geeft

$$x^2 + (x + 4)^2 - 6(x + 4) = 16$$

$$x^2 + x^2 + 8x + 16 - 6x - 24 - 16 = 0$$

$$2x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x + 4)(x - 3) = 0$$

$$x = -4 \text{ of } x = 3$$

$$y = -4 + 4 = 0 \text{ of } y = 3 + 4 = 7$$

De snijpunten zijn $(-4, 0)$ en $(3, 7)$.

- 20 $c: x^2 + y^2 - 3x + 4y = 6$

$$c: \left(x - 1\frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{1}{4} + (y + 2)^2 - 4 = 6$$

$$c: \left(x - 1\frac{1}{2}\right)^2 + (y + 2)^2 = 12\frac{1}{4}$$

Het middelpunt van c is $M\left(1\frac{1}{2}, -2\right)$ en de straal is $\sqrt{12\frac{1}{4}} = 3\frac{1}{2}$.

$$d: (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 4$$

Het middelpunt van d is $N(4, 5)$ en de straal is 2.

$$MN = \sqrt{\left(4 - 1\frac{1}{2}\right)^2 + (5 - (-2))^2} = \sqrt{6\frac{1}{4} + 49} = \sqrt{55\frac{1}{4}}$$

De twee cirkels liggen geheel buiten elkaar, dus de afstand tussen de cirkels c

$$\text{en } d \text{ is } d(c, d) = \sqrt{55\frac{1}{4}} - 3\frac{1}{2} - 2 = \sqrt{55\frac{1}{4}} - 5\frac{1}{2}.$$

- 21 a $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\angle A)$

$$BC^2 = 144 + 81 - 2 \cdot 12 \cdot 9 \cdot \cos(68^\circ) = 144,084...$$

$$BC = \sqrt{144,084...} \approx 12,0$$

$$\text{b } \frac{AC}{\sin(\angle B)} = \frac{BC}{\sin(\angle A)} \text{ geeft } \frac{9}{\sin(\angle B)} = \frac{12,003...}{\sin(68^\circ)}$$

$$\sin(\angle B) = \frac{9 \cdot \sin(68^\circ)}{12,003...} = 0,695...$$

$$\angle B \approx 44^\circ$$

$$\text{c } CE^2 = AE^2 + AC^2 - 2 \cdot AE \cdot AC \cdot \cos(\angle A)$$

$$CE^2 = 36 + 81 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \cos(68^\circ) = 76,542...$$

$$CE = \sqrt{76,542...} \approx 8,7$$

$$\text{d } \angle BAD = 68^\circ : 2 = 34^\circ$$

$$\angle ADB = 180^\circ - 34^\circ - 44^\circ = 102^\circ$$

$$\frac{AD}{\sin(\angle B)} = \frac{AB}{\sin(\angle ADB)} \text{ geeft } \frac{AD}{\sin(44^\circ)} = \frac{12}{\sin(102^\circ)}$$

$$AD = \frac{12 \cdot \sin(44^\circ)}{\sin(102^\circ)} \approx 8,5$$

- 22 a** $AH = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61}$
 Als $EP = 7$ is $AP = \sqrt{6^2 + 7^2} = \sqrt{85}$ en $HP = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74}$
 $HP^2 = AP^2 + AH^2 - 2 \cdot AP \cdot AH \cdot \cos(\angle HAP)$
 $74 = 85 + 61 - 2 \cdot \sqrt{85} \cdot \sqrt{61} \cdot \cos(\angle HAP)$
 $2 \cdot \sqrt{85} \cdot \sqrt{61} \cdot \cos(\angle HAP) = 72$
 $\cos(\angle HAP) = \frac{72}{2 \cdot \sqrt{85} \cdot \sqrt{61}} = 0,499\dots$
 $\angle HAP = 60,003\dots^\circ \approx 60^\circ$
 $\frac{HP}{\sin(\angle HAP)} = \frac{AH}{\sin(\angle HPA)}$ geeft $\frac{\sqrt{74}}{\sin(60,003\dots^\circ)} = \frac{\sqrt{61}}{\sin(\angle HPA)}$
 $\sin(\angle HPA) = \frac{\sqrt{61} \cdot \sin(60,003\dots^\circ)}{\sqrt{74}} = 0,786\dots$
 $\angle HPA = 51,841\dots^\circ \approx 52^\circ$
 $\angle AHP = 180^\circ - 60,003\dots^\circ - 51,841\dots^\circ \approx 68^\circ$
 De hoeken van $\triangle APH$ zijn 60° , 52° en 68° .
- b** Eerste mogelijkheid: $AP = AH = \sqrt{61}$.
 Dan is $EP = \sqrt{AP^2 - AE^2} = \sqrt{61 - 36} = \sqrt{25} = 5$ en
 $HP = \sqrt{EH^2 + EP^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$.
 $HP^2 = AP^2 + AH^2 - 2 \cdot AP \cdot AH \cdot \cos(\angle HAP)$
 $50 = 61 + 61 - 2 \cdot \sqrt{61} \cdot \sqrt{61} \cdot \cos(\angle HAP)$
 $2 \cdot \sqrt{61} \cdot \sqrt{61} \cdot \cos(\angle HAP) = 72$
 $\cos(\angle HAP) = \frac{72}{122}$
 $\angle HAP \approx 54^\circ$.
- Tweede mogelijkheid: $HP = AH = \sqrt{61}$.
 Dan is $EP = \sqrt{HP^2 - HE^2} = \sqrt{61 - 25} = \sqrt{36} = 6$ en
 $AP = \sqrt{AE^2 + EP^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72}$.
 $HP^2 = AP^2 + AH^2 - 2 \cdot AP \cdot AH \cdot \cos(\angle HAP)$
 $61 = 72 + 61 - 2 \cdot \sqrt{72} \cdot \sqrt{61} \cdot \cos(\angle HAP)$
 $2 \cdot \sqrt{72} \cdot \sqrt{61} \cdot \cos(\angle HAP) = 72$
 $\cos(\angle HAP) = \frac{72}{2 \cdot \sqrt{72} \cdot \sqrt{61}} = 0,543\dots$
 $\angle HAP \approx 57^\circ$
 Samengevat: $EP = 5$ en $\angle HAP \approx 54^\circ$ of $EP = 6$ en $\angle HAP \approx 57^\circ$.

- 1 a** $\sqrt{6x-4}$ bestaat voor $6x-4 \geq 0$, dus het domein is $[\frac{2}{3}, \rightarrow)$.
Voor elke waarde van x binnen het domein is $\sqrt{6x-4} \geq 0$, dus het bereik is $[0, \rightarrow)$.
- b** $(x-3)^2$ bestaat voor iedere waarde van x , dus het domein is $\mathbb{R}$.
Voor elke waarde van x binnen het domein is $(x-3)^2 \geq 0$, dus het bereik is $[0, \rightarrow)$.
- c** $\sin(x)$ bestaat voor iedere waarde van x , dus het domein is $\mathbb{R}$.
Voor elke waarde van x binnen het domein is $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, dus het bereik is $[-1, 1]$.
- d** De noemer van een breuk mag geen 0 zijn, dus het domein is $\langle \leftarrow, 2 \rangle$ of $\langle 2, \rightarrow \rangle$.
De breuk kan alle waarden aannemen behalve 0, dus het bereik is $\langle \leftarrow, 3 \rangle$ of $\langle 3, \rightarrow \rangle$.
- 2 a** Invoer: $y_1 = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 10$
Venster: $-1 \leq x \leq 6, -35 \leq y \leq 35$
Opties: maximum en minimum
De toppen zijn $(1, 21)$ en $(4, -6)$.
De grafiek is stijgend op de intervallen $\langle \leftarrow, 1 \rangle$ en $\langle 4, \rightarrow \rangle$.
- b** De extreme waarden van f zijn maximum $f(1) = 21$ en minimum $f(4) = -6$.
- 3 a** Het domein van f is $\mathbb{R}$, dus de grafiek heeft geen verticale asymptoot.
Bij invullen van grote waarden voor x naderen de functiewaarden niet tot een bepaalde waarde. Er is dus geen horizontale asymptoot.
- b** Het domein van g is $x \neq 0$. De grafiek heeft verticale asymptoot $x = 0$.
De functiewaarden naderen voor grote positieve en grote negatieve waarden van x naar 10. De grafiek heeft horizontale asymptoot $y = 10$.
- c** Het domein van h is $x > 4$. De grafiek heeft verticale asymptoot $x = 4$.
De functiewaarden naderen voor grote waarden van x niet tot een bepaalde waarde. Er is geen horizontale asymptoot.
- d** Het domein van k is $\mathbb{R}$, dus de grafiek heeft geen verticale asymptoot.
Bij invullen van grote waarden van x naderen de functiewaarden naar 25.
De grafiek heeft horizontale asymptoot $y = 25$.
- 4 a** Voor de beeldgrafiek geldt $g(x) = f(\frac{1}{0,5}x) + 4$ ofwel $g(x) = f(2x) + 4$
 $g(x) = (2x)^2 + 6 \cdot 2x + 1 + 4$
 $g(x) = 4x^2 + 12x + 5$
- b** Voor de beeldgrafiek geldt $h(x) = -4 \cdot f(x-3)$
 $h(x) = -4((x-3)^2 + 6(x-3) + 1)$
 $h(x) = -4(x^2 - 6x + 9 + 6x - 18 + 1)$
 $h(x) = -4x^2 + 32$
- c** Voor de beeldgrafiek geldt $k(x) = 2 \cdot (f(x) - 7)$
 $k(x) = 2(x^2 + 6x + 1 - 7)$
 $k(x) = 2x^2 + 12x - 12$
- 5 a** Invoer: $y_1 = 120 - 84 \cdot 0,95^x$ en $y_2 = 100 - 0,5x$
Venster: $-10 \leq x \leq 50, -10 \leq y \leq 120$
Optie: snijpunt geeft $x \approx 20,06$.
De oplossing van de vergelijking is $x \approx 20,06$.

- b** Invoer: $y_1 = 120 - 84 \cdot 0,95^x - 0,5x$
 Venster: $-10 \leq x \leq 100$, $-10 \leq y \leq 120$
 Optie: maximum geeft $x \approx 41,99$ en $y \approx 89,26$.
 Het maximum is $K(41, 99) \approx 89,26$.

- 6 a** Een verschuiving van 2 naar rechts, gevolgd door een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met 2.

Een andere mogelijkheid is: vermenigvuldig eerst ten opzichte van de y -as met 2, gevolgd door een verschuiving 4 naar rechts.

Een derde mogelijkheid is: vermenigvuldig ten opzichte van de x -as met $\frac{1}{8}$ gevolgd door een verschuiving 4 naar rechts.

- b** Voor de snijpunten moet de vergelijking $\left(\frac{1}{2}x - 2\right)^3 = \frac{1}{2}x - 2$ worden opgelost.

$$\left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}x - 2\right) = \frac{1}{2}x - 2$$

$$\frac{1}{2}x - 2 = 0 \text{ of } \left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2 = 1$$

$$\frac{1}{2}x = 2 \text{ of } \frac{1}{2}x - 2 = 1 \text{ of } \frac{1}{2}x - 2 = -1$$

$$x = 4 \text{ of } x = 6 \text{ of } x = 2$$

dus de punten zijn $P(2, -1)$ en $Q(6, 1)$.

De lengte van PQ is $\sqrt{(6-2)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{20} \approx 4,47$.

Opmerking: je mag de vergelijking ook oplossen met de rekenmachine.

- 7 a** De bovenkant van de krantenbak heeft lengte $2x$.

De zijkanen van de bak hebben lengte $\frac{1}{2}(90 - x) = 45 - \frac{1}{2}x$.

De zijkant van de bak is de schuine zijde van een rechthoekige driehoek.

De rechthoekszijden hebben lengte h en $\frac{1}{2}x$.

Volgens de stelling van Pythagoras geldt: $h^2 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \left(45 - \frac{1}{2}x\right)^2$.

$$h^2 = \left(45 - \frac{1}{2}x\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2$$

$$h^2 = 2025 - 45x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^2$$

$$h^2 = 2025 - 45x$$

$$\text{dus } h = \sqrt{2025 - 45x}$$

- b** $I = 0,075x\sqrt{2025 - 45x}$

Invoer: $y_1 = 0,075x\sqrt{2025 - 45x}$

Venster: $0 \leq x \leq 45$, $0 \leq y \leq 60$

Optie: maximum geeft $x = 30$ en $y = 58,456\dots$

De maximale inhoud is $I \approx 58,46 \text{ dm}^3$.

De inhoud van de krantenbak is maximaal als $x = 30 \text{ cm}$ en

$$h = \sqrt{2025 - 45 \cdot 30} \approx 26 \text{ cm}.$$

- c** Er moet gelden $I \geq 30$ en $h \geq 20$.

Invoer: $y_1 = 0,075x\sqrt{2025 - 45x}$ en $y_2 = 30$

Venster: $0 \leq x \leq 45$, $0 \leq y \leq 60$

Optie: snijpunt geeft $x \approx 10,09$ en $x \approx 43,08$.

Uit de plot blijkt dat $I \geq 30$ als $10,09 \leq x \leq 43,08$.

Invoer: $y_1 = \sqrt{2025 - 45x}$ en $y_2 = 20$

Venster: $0 \leq x \leq 45$, $0 \leq y \leq 50$

Optie: snijpunt geeft $x \approx 36,11$.

Uit de plot blijkt dat $h \geq 20$ als $0 \leq x \leq 36,11$.

Om aan beide voorwaarden te voldoen moet gelden $10,1 \leq x \leq 36,1$.

De krantenbakken hebben aan de onderkant een breedte van minimaal 101 mm en maximaal 361 mm.

- 8** Bij gemiddelde golfhoogtes van 5,0 meter hoort de vergelijking $4,82 + 0,60w - 0,0063(7,0 - w)^{3,13} = 5,0$.
 Invoer: $y_1 = 4,82 + 0,60x - 0,0063(7,0 - x)^{3,13}$ en $y_2 = 5$
 Venster: $0 \leq x \leq 7, 0 \leq y \leq 10$
 Optie: snijpunt geeft $x \approx 1,96$.
 De waterstand is ongeveer 2,0 meter ten opzichte van NAP.

9 a $y = ax + b$ met $a = \frac{0 - 6}{3 - 0} = -2$.

De lijn gaat door (0, 6), dus $b = 6$. Een vergelijking is $y = -2x + 6$.

b $y = ax + b$ met $a = \frac{33 - 12}{11 - 5} = 3,5$.

Invullen van $x = 5$ en $y = 12$ in $y = 3,5x + b$ geeft $12 = 3,5 \cdot 5 + b$, dus $b = -5,5$. Een vergelijking is $y = 3,5x - 5,5$.

c $y = ax + b$ met $a = \frac{65 - 30}{100 - 30} = 0,5$.

Invullen van $x = 30$ en $y = 30$ in $y = 0,5x + b$ geeft $30 = 0,5 \cdot 30 + b$, dus $b = 15$. Een vergelijking is $y = 0,5x + 15$.

d $y = ax + b$ met $a = \frac{-5,1 - 3,3}{3,5 - 0,7} = \frac{-8,4}{2,8} = -3$.

Invullen van $x = 0,7$ en $y = 1,3$ in $y = -3x + b$ geeft $3,3 = -3 \cdot 0,7 + b$, dus $b = 5,4$. Een vergelijking is $y = -3x + 5,4$.

10 a $-3x + 12 = 5x - 28$

$12 = 8x - 28$ (links en rechts $+3x$)

$40 = 8x$ (links en rechts $+28$)

$5 = x$ (links en rechts $: 8$)

dus $x = 5$

b $0,7p - 6p + 1,5 = 1,2(4 - 5p)$

$0,7p - 6p + 1,5 = 4,8 - 6p$ (haakjes wegwerken)

$0,7p + 1,5 = 4,8$ (links en rechts $+ 6p$)

$0,7p = 3,3$ (links en rechts $-1,5$)

$p = \frac{33}{7} = 4\frac{5}{7}$ (links en rechts $\times 10$ en $: 7$)

c $300t = -25t + 10(13t + 18)$

$300t = -25t + 130t + 180$ (haakjes wegwerken)

$300t = 105t + 180$ (gelijksoortige termen optellen)

$195t = 180$ (links en rechts $-105t$)

$t = \frac{12}{13}$ (links en rechts $: 195$)

d $\frac{3}{5}x + \frac{1}{2} = 2 - \frac{9}{10}x$

$6x + 5 = 20 - 9x$ (links en rechts $\times 10$)

$15x + 5 = 20$ (links en rechts $+ 9x$)

$15x = 15$ (links en rechts $- 5$)

$x = 1$ (links en rechts $: 15$)

11 a $2x + 6 = 0$ ofwel $x = -3$ is de verticale asymptoot van f .

Bij invullen van grote waarden voor x , naderen de functiewaarden naar $2\frac{1}{2}$ dus de horizontale asymptoot is $y = 2\frac{1}{2}$.

b $x - 3 = 0$ ofwel $x = 3$ is de verticale asymptoot van g .

Bij invullen van grote waarden voor x , naderen de functiewaarden naar 5 dus de horizontale asymptoot is $y = 5$.

- c $2x + 8 = 0$ ofwel $x = -4$ is de verticale asymptoot van h .
 Bij invullen van grote waarden voor x , naderen de functiewaarden naar $1\frac{1}{2}$
 dus de horizontale asymptoot is $y = 1\frac{1}{2}$.
- d $x^2 - 9 = 0$ ofwel $x = -3$ en $x = 3$ zijn de verticale asymptoten van l .
 Bij invullen van grote waarden voor x , naderen de functiewaarden naar 5
 dus de horizontale asymptoot is $y = 5$.

12 a $\frac{a}{4a-5} = 2$
 $a = 2(4a-5)$ (mits $a \neq \frac{1}{4}$)
 $a = 8a - 10$ (haakjes wegwerken)
 $-7a = -10$ (links en rechts $-8a$)
 $a = 1\frac{3}{7}$ (links en rechts $: -7$)

b $\frac{3x-1}{5-x} = 0$
 $3x-1 = 0$ (mits $x \neq 5$)
 $x = \frac{1}{3}$

c $\frac{2-\frac{1}{2}q}{q^2+1} = 0$
 $2-\frac{1}{2}q = 0$ (mits $x \neq -1$ en $x \neq 1$)
 $q = 4$

d $2 + \frac{6}{x} = \frac{x+3}{x+4}$
 $2x(x+4) + 6(x+4) = x(x+3)$ (links en rechts keer x en keer $x+4$)
 mits $x \neq 0$ en $x \neq -4$
 $2x^2 + 8x + 6x + 24 = x^2 + 3x$ (haakjes wegwerken)
 $x^2 + 11x + 24 = 0$ (herleiden op nul)
 $(x+3)(x+8) = 0$ (ontbinden in factoren)
 $x = -3$ of $x = -8$

e $8 + \frac{2p}{p+4} = 1 - \frac{1}{3}p$
 $\frac{2p}{p+4} = -7 - \frac{1}{3}p$ (links en rechts -8)
 $2p = (-7 - \frac{1}{3}p)(p+4)$ (mits $p \neq -4$)
 $2p = -\frac{1}{3}p^2 - 8\frac{1}{3}p - 28$ (haakjes wegwerken)
 $\frac{1}{3}p^2 + 10\frac{1}{3}p + 28 = 0$
 $p^2 + 31p + 84 = 0$ (links en rechts $\times 3$)
 $(p+28)(p+3) = 0$ (ontbinden in factoren)
 $p = -28$ of $p = -3$

f $\frac{x^2+1}{x-2} = 3x+1$
 $x^2+1 = (3x+1)(x-2)$ (mits $x \neq 2$)
 $x^2+1 = 3x^2-5x-2$ (haakjes wegwerken)
 $2x^2-5x-3 = 0$ (vergelijking op nul herleiden)
 $x^2-2\frac{1}{2}x-1\frac{1}{2} = 0$ (links en rechts $: 2$)
 $(x-3)(x+\frac{1}{2}) = 0$ (ontbinden in factoren)
 $x = 3$ of $x = -\frac{1}{2}$

g $\frac{2x-1}{x+3} = \frac{3x+3}{4x-4}$
 $(2x-1)(4x-4) = (3x+3)(x+3)$ (mits $x \neq -3$ en $x \neq 1$)
 $8x^2 - 12x + 4 = 3x^2 + 12x + 9$ (haakjes wegwerken)
 $5x^2 - 24x - 5 = 0$ (herleiden op nul)
 $x^2 - 4,8x - 1 = 0$ (links en rechts : 5)
 $(x-5)(x+0,2) = 0$ (ontbinden in factoren)
 $x = 5$ of $x = -0,2$

h $\frac{a^2-9}{4-3a} = 0$
 $a^2 - 9 = 0$ (mits $a \neq \frac{4}{3}$)
 $a = -3$ of $a = 3$

13 Los op: $x + \frac{1}{x} = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$
 $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{4}x + \frac{4}{x}$
 $x - \frac{1}{4}x = \frac{4}{x} - \frac{1}{x}$
 $\frac{3}{4}x = \frac{3}{x}$ ofwel $\frac{3}{4}x^2 = 3$ (mits $x \neq 0$)
 $x^2 = 4$, dus $x = 2$ of $x = -2$.
 Vanwege het gegeven domein is er één oplossing: $x = 2$.

14 a Voor punt B geldt $\frac{4}{3} = \frac{1}{x} + 1$ ofwel $\frac{1}{3} = \frac{1}{x}$ dus $x = 3$ en $B(3, \frac{4}{3})$.
 De coördinaten van de punten A en C zijn $A(3, 0)$ en $C(0, \frac{4}{3})$.
 Rechthoek $OABC$ heeft lengte 3 en breedte $\frac{4}{3}$.
 De omtrek is $3 + \frac{4}{3} + 3 + \frac{4}{3} = 8\frac{2}{3}$.

b Punt A heeft coördinaten $(b, 0)$ en de coördinaten van C zijn $(0, \frac{1}{b} + 1)$,
 dus OA heeft lengte b en OC heeft lengte $\frac{1}{b} + 1$.
 Er geldt: opp. $(OABC) = b \cdot (\frac{1}{b} + 1) = 1 + b$.
 De waarde van b is gelijk aan de waarde van de x -coördinaat van punt B .
 Gegeven is dat $x > 0$, dus $b > 0$. Hieruit volgt dat de oppervlakte van $OABC$ groter is dan 1.

15 a Er geldt $VP = 12$, dus $12 = \left(\frac{1}{d} \cdot 4,95 - 4,50\right) \cdot 100$.
 Invoer: $y_1 = ((1/x) \cdot 4,95 - 4,5) \cdot 100$ en $y_2 = 12$
 Venster: $0,9 \leq x \leq 1,1$, $0 \leq y \leq 20$
 Optie: snijpunt geeft $x \approx 1,07$
 De dichtheid van het lichaam is ongeveer $1,07 \text{ g/cm}^3$.

b $VL = p \cdot d + q$
 De lijn gaat door $(1,00; 45)$ en $(1,10; 0)$.
 De richtingscoëfficiënt $p = \frac{0 - 45}{1,10 - 1,00} = -450$.
 $d = 1,10$ en $VL = 0$ invullen in $VL = -450 \cdot d + q$ geeft $0 = -450 \cdot 1,10 + q$,
 dus $q = 495$.

c Er geldt $d = \frac{G}{G - W}$ en $VP = \left(\frac{1}{d} \cdot 4,95 - 4,50 \right) \cdot 100$

$G = 100$ geeft $d = \frac{100}{100 - W}$, wat te herleiden is tot $\frac{1}{d} = \frac{100 - W}{100}$

Substitutie van $\frac{1}{d} = \frac{100 - W}{100}$ in $VP = \left(\frac{1}{d} \cdot 4,95 - 4,50 \right) \cdot 100$ geeft

$$VP = \left(\frac{100 - W}{100} \cdot 4,95 - 4,50 \right) \cdot 100$$

$$VP = \left(\frac{495 - 4,95W}{100} - 4,50 \right) \cdot 100$$

$$VP = 495 - 4,95W - 450 \text{ dus } VP = -4,95 \cdot W + 45.$$

16 ab A: recht evenredig want $b = 1,5a$, de evenredigheidsconstante is 1,5.

B: niet recht evenredig want $\frac{7}{1} \neq \frac{10}{2}$

C: recht evenredig want $b = 4a$, de evenredigheidsconstante is 4.

17 a

A	x	3,2	2	8	64	0,16
	y	10	16	4	0,5	200

B	x	2	6	30	5	60
	y	45	15	3	18	1,5

b A $xy = 32$ of $y = \frac{32}{x}$ of $x = \frac{32}{y}$ en B $xy = 90$ of $y = \frac{90}{x}$ of $x = \frac{90}{y}$

18 ab A: niet recht evenredig want $\frac{14}{2} \neq \frac{17}{3}$ en niet omgekeerd evenredig want

$$2 \cdot 14 \neq 3 \cdot 17.$$

B: voldoet aan de formule $p \cdot q = 30$ dus omgekeerd evenredig.

C: voldoet aan de formule $q = 3,5p$ dus recht evenredig.

19 a Neem $t = 1$ en $N = 36$ dan geldt $36 = c \cdot 1^n$, dus $c = 36$.

b Kies één van de andere waarden voor t en N , bijvoorbeeld $t = 16$ en $N = 1152$.

Dan geldt $1152 = 36 \cdot 16^n$ dus is $16^n = 32$ en is $n = \frac{\log(32)}{\log(16)} = 1,25$.

c $N = 36 \cdot 17^{1,25} \approx 1242,7$

20 a Bij $L = 1,9$ hoort $G = 0,25$.

Invoer: $y_1 = 0,014 \cdot 1,9^x$ en $y_2 = 0,25$

Venster: $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 0,5$

Optie: snijpunt geeft $x = 4,4907...$

Dus $b \approx 4,5$.

b Bij een lengte van 10 cm geldt $G = 0,014 \cdot 10^{3,13} \approx 18,885...$

Bij een lengte van 94 cm geldt $G = 0,014 \cdot 94^{3,13} \approx 20990,279...$

Een karper van 94 cm is ongeveer $\frac{20990,279...}{18,885...} \approx 1100$ keer zo zwaar als

een karper van 10 cm.

- 21 a** Alleen de grafiek van de functie f heeft een symmetrieas.
- b** Alle grafieken gaan door het punt $(1, 1)$, want $1^a = 1$ voor elke waarde van a .
De grafieken van de functies g en h gaan door het punt $(-1, -1)$.
- c** De lijn $y = 4$ heeft:
twee snijpunten met de grafiek van f , omdat de exponent positief en even is,
één snijpunt met de grafiek van g , omdat de exponent oneven is,
één snijpunt met de grafiek van h , omdat de exponent oneven is,
één snijpunt met de grafiek van k , omdat de exponent gebroken is met een even noemer.
De lijn $y = -2$ heeft:
geen snijpunten met de grafiek van f , omdat het bereik $[0, \rightarrow)$ is,
één snijpunt met de grafiek van g , omdat de exponent oneven is,
één snijpunt met de grafiek van h , omdat de exponent oneven is,
geen snijpunten met de grafiek van k , omdat het bereik $[0, \rightarrow)$ is.
- d** De grafiek van $m(x) = x^{1,75}$ snijden met de lijn $y = 18$ geeft de vergelijking $x^{1,75} = 18$.
Invoer: $y_1 = x^{1,75}$ en $y_2 = 18$
Venster: $-1 \leq x \leq 10$, $-1 \leq y \leq 30$
Optie: snijpunt geeft $x \approx 5,2$.
De grafiek van m heeft één snijpunt met de lijn $y = 18$.

- 22 a** $0,4 \cdot p^5 + 8 = 2,3$
 $0,4p^5 = -5,7$
 $p^5 = -14,25$
er is één oplossing
 $p = (-14,25)^{\frac{1}{5}}$
 $p \approx -1,70$
- b** $100 - 6 \cdot n^4 = 28$
 $-6 \cdot n^4 = -72$
 $n^4 = 12$
er zijn twee oplossingen
 $n = 12^{\frac{1}{4}}$ of $n = -12^{\frac{1}{4}}$
 $n \approx 1,86$ of $n \approx -1,86$
- c** $13x^{0,7} - 65 = 0$
 $13x^{0,7} = 65$
 $x^{0,7} = 5$
er is één oplossing
 $x = 5^{\frac{1}{0,7}}$
 $x \approx 9,97$
- d** $15 + x^{-\frac{1}{2}} = 38$
 $x^{-\frac{1}{2}} = 23$
er is één oplossing
 $x = 23^{-2}$
 $x \approx 0,00$

- 23 a** $f(x) = 3x(1 - x) + 2x^2$
 $f(x) = 3x - 3x^2 + 2x^2$
 $f(x) = -x^2 + 3x$
 $a = -1 < 0$, dus de grafiek is een bergparabool.
- b** $g(x) = x(8x + 3)^2$
 $g(x) = x(64x^2 + 48x + 9)$
 $g(x) = 64x^3 + 48x^2 + 9x$
De functie is geen kwadratische functie en de grafiek dus geen parabool.
- c** $h(x) = -3(5 - 2x)^2 + 4$
 $h(x) = -3(4x^2 - 20x + 25) + 4$
 $h(x) = -12x^2 + 60x - 75 + 4$
 $h(x) = -12x^2 + 60x - 71$
 $a = -12 < 0$, dus de grafiek is een bergparabool.
- d** $i(x) = 8x^2 + 4x(x - 1)^2$
 $i(x) = 8x^2 + 4x(x^2 - 2x + 1)$
 $i(x) = 8x^2 + 4x^3 - 8x^2 + 4x$
 $i(x) = 4x^3 + 4x$
De functie is geen kwadratische functie en de grafiek dus geen parabool.

$$\begin{aligned} \text{e } j(x) &= (4x + 3)(2x - 1) + (7 - 3x)(x + 1) \\ j(x) &= 8x^2 - 4x + 6x - 3 + 7x + 7 - 3x^2 - 3x \\ j(x) &= 5x^2 + 6x + 4 \end{aligned}$$

$a = 5 > 0$, dus de grafiek is een dalparabool.

$$\text{f } k(x) = x^4 - 5x^2 + 6$$

De functie is geen kwadratische functie en de grafiek dus geen parabool.

$$\begin{aligned} \text{24 a } y &= x^2 - 10x + 3 \\ y &= (x - 5)^2 - 25 + 3 \\ y &= (x - 5)^2 - 22 \end{aligned}$$

De coördinaten van de top zijn $(5, -22)$.

$$\begin{aligned} \text{b } y &= x^2 + 3x - 5 \\ y &= \left(x + 1\frac{1}{2}\right)^2 - \left(1\frac{1}{2}\right)^2 - 5 \\ y &= \left(x + 1\frac{1}{2}\right)^2 - 7\frac{1}{4} \end{aligned}$$

De coördinaten van de top zijn $\left(-1\frac{1}{2}, -7\frac{1}{4}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{c } y &= x^2 - x - 8 \\ y &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 8 \\ y &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 8\frac{1}{4} \end{aligned}$$

De coördinaten van de top zijn $\left(\frac{1}{2}, -8\frac{1}{4}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{d } y &= x^2 - 0,4x + 0,02 \\ y &= (x - 0,2)^2 - 0,2^2 + 0,02 \\ y &= (x - 0,2)^2 - 0,04 + 0,02 \\ y &= (x - 0,2)^2 - 0,02 \end{aligned}$$

De coördinaten van de top zijn $(0,2; -0,02)$.

$$\begin{aligned} \text{25 a } 3x(2x - 7) &= x^2 + 3x + 5 \\ 6x^2 - 21x &= x^2 + 3x + 5 \\ 5x^2 - 24x - 5 &= 0 \\ D &= (-24)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -5 = 676 \\ x &= \frac{24 - \sqrt{676}}{10} = \frac{24 - 26}{10} \text{ of } x = \frac{24 + \sqrt{676}}{10} = \frac{24 + 26}{10} \\ x &= -\frac{1}{5} \text{ of } x = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } (4x - 1)^2 &= 49 \\ 4x - 1 &= -7 \text{ of } 4x - 1 = 7 \\ 4x &= -6 \text{ of } 4x = 8 \\ x &= -1,5 \text{ of } x = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } (6 - 2x)^2 &= 10 \\ 6 - 2x &= -\sqrt{10} \text{ of } 6 - 2x = \sqrt{10} \\ -2x &= -6 - \sqrt{10} \text{ of } -2x = -6 + \sqrt{10} \\ x &= 3 + \frac{1}{2}\sqrt{10} \text{ of } x = 3 - \frac{1}{2}\sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } (10x + 1)(3 - 6x) &= 0 \\ 10x + 1 &= 0 \text{ of } 3 - 6x = 0 \\ 10x &= -1 \text{ of } -6x = -3 \\ x &= -\frac{1}{10} \text{ of } x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } 9x^2 - 7x &= 16 \\ 9x^2 - 7x - 16 &= 0 \\ D &= (-7)^2 - 4 \cdot 9 \cdot -16 = 625 \\ x &= \frac{7 + \sqrt{625}}{18} = \frac{7 + 25}{18} \text{ of } x = \frac{7 - \sqrt{625}}{18} = \frac{7 - 25}{18} \\ x &= 1\frac{7}{9} \text{ of } x = -1 \end{aligned}$$

- f** $(8 - 3x)^2 = 7(8 - 3x)$
 $8 - 3x = 0$ of $8 - 3x = 7$
 $3x = 8$ of $-3x = -1$
 $x = 2\frac{2}{3}$ of $x = \frac{1}{3}$
- g** $16 - 9x^2 = -20$
 $-9x^2 = -36$
 $x^2 = 4$
 $x = -2$ of $x = 2$
- h** $(x - 1)(4x + 9) = (x - 1)(7x - 5)$
 $x - 1 = 0$ of $4x + 9 = 7x - 5$
 $x = 1$ of $-3x = -14$
 $x = 1$ of $x = 4\frac{2}{3}$
- 26 a** Voor het domein geldt $3x - 8 \geq 0$, dus het domein is $[2\frac{2}{3}, \rightarrow)$.
- b** Voor het domein van h geldt $x^2 - 15 \geq 0$, dus het domein is $\langle \leftarrow, -\sqrt{15} \rangle \cup [\sqrt{15}, \rightarrow)$.
 Voor het domein van k geldt $x^2 + 15 \geq 0$, dus het domein is $\mathbb{R}$.
- c** Uit $3\sqrt{6x - 1} \geq 0$ volgt $m(x) \geq -15$, dus het bereik is $[-15, \rightarrow)$.
- d** Het domein van $n(x) = 2\sqrt{x^2 + 5}$ is $\mathbb{R}$, want $x^2 + 5 > 0$ voor elke waarde van x .
 Voor elke waarde van x geldt $\sqrt{x^2 + 5} \geq \sqrt{5}$, dus $n(x) \geq 2\sqrt{5}$ en het bereik is daarom $[2\sqrt{5}, \rightarrow)$.
 Voor het domein van $p(x) = 30 - 6\sqrt{4 - 9x}$ moet gelden $4 - 9x \geq 0$, dus $9x \leq 4$. Het domein is $\langle \leftarrow, \frac{4}{9} \rangle$.
 Voor elke waarde van x uit het domein geldt $\sqrt{4 - 9x} \geq 0$, dus $30 - \sqrt{4 - 9x} \leq 30$. Het bereik is $\langle \leftarrow, 30 \rangle$.
- 27 a** $4 + \sqrt{1 - 2x} = 7$
 $\sqrt{1 - 2x} = 3$
 $1 - 2x = 9$
 $-2x = 8$
 $x = -4$
 Controle: $x = -4$ voldoet.
 De oplossing is $x = -4$.
- b** $4x + \sqrt{1 - 2x} = 1$
 $\sqrt{1 - 2x} = 1 - 4x$
 $1 - 2x = (1 - 4x)^2$
 $1 - 2x = 16x^2 - 8x + 1$
 $16x^2 - 6x = 0$
 $2x(8x - 3) = 0$
 $2x = 0$ of $8x - 3 = 0$
 $x = 0$ of $x = \frac{3}{8}$
 Controle: $x = \frac{3}{8}$ voldoet niet.
 De oplossing is $x = 0$.
- c** $-1 + \sqrt{x^2 + 7} = x$
 $\sqrt{x^2 + 7} = x + 1$
 $x^2 + 7 = (x + 1)^2$
 $x^2 + 7 = x^2 + 2x + 1$
 $2x = 6$
 $x = 3$
 Controle: $x = 3$ voldoet.
 De oplossing is $x = 3$.
- d** $\sqrt{x^2 - 3} - x = 3$
 $\sqrt{x^2 - 3} = x + 3$
 $x^2 - 3 = (x + 3)^2$
 $x^2 - 3 = x^2 + 6x + 9$
 $6x = -12$
 $x = -2$
 Controle: $x = -2$ voldoet.
 De oplossing is $x = -2$.
- 28 a** Uit $\sqrt{-3x + 6} = 0$ volgt $3x = 6$, dus $x = 2$.
 Het gemeenschappelijke punt van de grafiek van f en de x -as is $(2, 0)$.
 $-\frac{7}{4} \cdot 2 + \frac{7}{2} = -\frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 0$, dus lijn k gaat ook door het punt $(2, 0)$.

- b** Invoer: $y_1 = \sqrt{-3x + 6}$ en $y_2(x) = -1,75x + 3,5$
 Venster: $-1 \leq x \leq 3$, $-1 \leq y \leq 3$
 Optie: snijpunt geeft $x \approx 1,02$.
 De gevraagde coördinaat is 1,02.

- 29** Uit de gegevens is af te leiden dat de parabool door de punten (0, 0) en (165, 0) gaat, en dat de top boven het midden tussen deze punten ligt.

De top is (82,5; 51,858).

Een vergelijking is van de vorm $y = a(x - 82,5)^2 + 51,858$.

Omdat de parabool door (0, 0) gaat, geldt $0 = a(0 - 82,5)^2 + 51,858 = 0$ ofwel

$$a \cdot (-82,5)^2 + 51,858 = 0$$

$$a \cdot (-82,5)^2 = -51,858$$

$$\text{dus } a = \frac{-51,858}{(-82,5)^2} = \frac{-51,858}{82,5^2}$$

$$y = \frac{-51,858}{82,5^2}(x - 82,5)^2 + 51,858$$

$$y = \frac{-51,858}{82,5^2}(x^2 - 165x + 6806,25) + 51,858$$

$$y \approx -0,0076x^2 - 1,2572x - 51,858 + 51,858$$

$$y \approx -0,0076x^2 - 1,2572x$$

$$\text{dus } a \approx 0,0076 \text{ en } b \approx 1,2572.$$

- 30 a** $f_{28}(x) = 0$ als $x^2 - 11x + 28 = 0$ of $\sqrt{x} = 0$.
 Uit $(x - 4)(x - 7) = 0$ en $\sqrt{x} = 0$ volgt $x = 0$ of $x = 4$ of $x = 7$.
 De gevraagde x -coördinaten zijn 0, 4 en 7.
- b** Dat is het geval als $x^2 - 11x + c = 0$ precies één oplossing (ongelijk 0) heeft.
 De discriminant moet dan nul zijn, dus moet gelden $(-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 0$.
 Dat is het geval bij $4c = 121$ ofwel $c = 30\frac{1}{4}$.

- 31** Uit $x^2 = x\sqrt{x+2}$ ofwel $x \cdot x = x \cdot \sqrt{x+2}$ volgt $x = 0$ of $x = \sqrt{x+2}$.
 Uit $x = \sqrt{x+2}$ volgt $x^2 = x + 2$ ofwel $x^2 - x - 2 = 0$.
 $(x - 2)(x + 1) = 0$ dus $x = 2$ of $x = -1$.
 Alleen $x = 0$ en $x = 2$ voldoen.
 De snijpunten zijn $A(0, 0)$ en $B(2, 4)$.

- 32 a** De groeifactor per dag is $1,35^{24} \approx 1342,80$.
b De groeifactor per kwartier is $1,35^{\frac{1}{4}} \approx 1,08$.
c De groeifactor per vijf minuten is $1,35^{\frac{1}{12}} \approx 1,03$.
d De groeifactor per 13 minuten is $1,35^{\frac{13}{60}} \approx 1,07$.

- 33 a** De groeifactor per 10 jaar is 1,025.
 De groeifactor per 5 jaar is $1,025^{\frac{1}{2}} \approx 1,0124$.
 Na 5 jaar is er $100 \times 1,0124 \approx 101,24\%$.
 Per 5 jaar is de toename 1,24%.
- b** De groeifactor per jaar is $1,025^{\frac{1}{10}} \approx 1,0025$.
 Na één jaar is er $100 \times 1,0025 \approx 100,25\%$.
 Per jaar is de toename 0,25%.
- c** De groeifactor per 25 jaar is $1,025^{2,5} \approx 1,0637$.
 Na 25 jaar is er $100 \times 1,0637 \approx 106,37\%$.
 Per 25 jaar is de toename 6,37%.

- d** De groeifactor per 100 jaar is $1,025^{10} \approx 1,28$.
 Na 100 jaar is er $100 \times 1,28 \approx 128\%$.
 Per eeuw is de toename 28%.

34 a $2^x = 5$

$$x = {}^2\log(5)$$

b $12 \cdot 6^x = 48$

$$6^x = 4$$

$$x = {}^6\log(4)$$

c $3^{2x+1} = 7$

$$2x + 1 = {}^3\log(7)$$

$$2x = -1 + {}^3\log(7)$$

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(7)$$

d $2 + 5 \cdot 7^{4x} = 17$

$$5 \cdot 7^{4x} = 15$$

$$7^{4x} = 3$$

$$4x = {}^7\log(3)$$

$$x = \frac{1}{4} \cdot {}^7\log(3)$$

e ${}^2\log(x+1) = 5$

$$x+1 = 2^5$$

$$x+1 = 32$$

$$x = 31$$

f $3 \cdot {}^4\log(x-4) = 6$

$${}^4\log(x-4) = 2$$

$$x-4 = 4^2$$

$$x-4 = 16$$

$$x = 20$$

35 a ${}^5\log(4) + {}^5\log(8) = {}^5\log(32)$

b ${}^2\log(36) - {}^2\log(9) + {}^2\log(5) =$

$${}^2\log(4) + {}^2\log(5) = {}^2\log(20)$$

c $\frac{1}{2} \cdot {}^5\log(49) + 2 \cdot {}^5\log(3) =$

$${}^5\log(49^{\frac{1}{2}}) + {}^5\log(3^2) =$$

$${}^5\log(7) + {}^5\log(9) = {}^5\log(63)$$

d $-2 \cdot {}^3\log(0,1) + {}^3\log(a) =$

$${}^3\log(0,1^{-2}) + {}^3\log(a) =$$

$${}^3\log(100) + {}^3\log(a) = {}^3\log(100a)$$

e $-3 + 2 \cdot {}^4\log(9p) =$

$${}^4\log(4^{-3}) + {}^4\log(81p^2) =$$

$${}^4\log\left(\frac{1}{64}\right) + {}^4\log(81p^2) =$$

$${}^4\log\left(\frac{81p^2}{64}\right) = {}^4\log\left(1\frac{17}{64}p^2\right)$$

f ${}^8\log(2a) + {}^8\log(a+3) =$

$${}^8\log(2a \cdot (a+3)) =$$

$${}^8\log(2a^2 + 6a)$$

36 a $8 \cdot 4^{x+2} = 1$

$$2^3 \cdot (2^2)^{x+2} = 2^0$$

$$2^3 \cdot 2^{2x+4} = 2^0$$

$$2^{2x+7} = 2^0$$

$$2x+7 = 0$$

$$2x = -7$$

$$x = -3\frac{1}{2}$$

b $\frac{1}{25} \cdot 5^{x+3} = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x$

$$5^{-2} \cdot 5^{x+3} = 5^1 \cdot (5^{-1})^x$$

$$5^{-2} \cdot 5^{x+3} = 5^1 \cdot 5^{-x}$$

$$5^{x+1} = 5^{-x+1}$$

$$x+1 = -x+1$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

c $3 \cdot 7^{x-4} = 30$

$$7^{x-4} = 10$$

$$x-4 = {}^7\log(10)$$

$$x = 4 + {}^7\log(10)$$

d $14 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 7$

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 7$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 3\frac{1}{2}$$

$$x = {}^{\frac{1}{2}}\log\left(3\frac{1}{2}\right)$$

e $6 - {}^3\log(x+4) = 5\frac{1}{2}$

$${}^3\log(x+4) = \frac{1}{2}$$

$$x+4 = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$x+4 = \sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{3} - 4$$

f $12 + 2 \cdot \log(x) = 8$

$$2 \cdot \log(x) = -4$$

$$\log(x) = -2$$

$$x = 10^{-2}$$

$$x = \frac{1}{100}$$

- 37 a** Voor de x -coördinaat moet de vergelijking $4 - 2^{0,3x-2} = 2$ worden opgelost.

$$2^{0,3x-2} = 2$$

$$2^{0,3x-2} = 2^1$$

$$0,3x - 2 = 1$$

$$0,3x = 3, \text{ dus } x = 10.$$

De x -coördinaat van R is 10.

- b** In punt Q geldt $y = 0$, dus $4 - 2^{0,3x-2} = 0$ moet worden opgelost.

$$2^{0,3x-2} = 4$$

$$2^{0,3x-2} = 2^2$$

$$0,3x - 2 = 2$$

$$0,3x = 4, \text{ dus } x = \frac{4}{0,3} = 13\frac{1}{3} \text{ en } Q(13\frac{1}{3}, 0)$$

De richtingscoëfficiënt van de lijn QP is $\frac{0-5}{13\frac{1}{3}-0} = -\frac{3}{8}$, dus een vergelijking

van de lijn QP is $y = -\frac{3}{8}x + 5$.

Invoer: $y_1 = 4 - 2^{0,3x-2}$ en $y_2 = -(3/8)x + 5$

Venster: $0 \leq x \leq 15$, $0 \leq y \leq 6$

Optie: snijpunt geeft $x = 4,2952\dots$ en $y = 3,3892\dots$

De coördinaten van S zijn $(4,30; 3,39)$.

- c** Het functievoorschrift van g is $g(x) = f(x+20) + 10$, dus

$$g(x) = 4 - 2^{0,3(x+20)-2} + 10$$

$$g(x) = 14 - 2^{0,3x+6-2}$$

$$g(x) = 14 - 2^{0,3x+4}$$

$$g(x) = 14 - 2^4 \cdot 2^{0,3x}$$

$$g(x) = 14 - 16 \cdot 2^{0,3x}, \text{ dus } a = 14 \text{ en } b = -16.$$

- 38 a** $x^2 - 3x + 3 = (x - 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4} + 3 = (x - 1\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$.

$(x - 1\frac{1}{2})^2 \geq 0$ voor elke waarde van x , dus $x^2 - 3x + 3 > 0$ voor elke waarde van x .

De logaritme bestaat voor elke waarde van x en de grafiek heeft daarom geen verticale asymptoot.

- b** Uit ${}^2\log(x^2 - 3x + 3) = 0$ volgt $x^2 - 3x + 3 = 1$.

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-2)(x-1) = 0$$

$$x = 2 \text{ of } x = 1$$

De grafiek van f gaat door $(2, 0)$ en $(1, 0)$.

De grafiek van g gaat door $P(4, 0)$, dus de twee waarden waarover de grafiek van f naar rechts kan worden geschoven zijn $a = 2$ en $a = 3$.

- 39 a** Stel de groeifactor is g per jaar, dan moet gelden $g^{11} = 2$ dus is

$$g = 2^{\frac{1}{11}} = 1,0650\dots$$

Het groeipercentage is 6,5% per jaar.

- b** Dan is $500 \cdot 1,034^t = 750$ ofwel $1,034^t = 1,5$.

$$\text{Dit laatste geeft } t = \frac{{}^{1,034}\log(1,5)}{{}^{1,034}\log(1,034)} \approx 12,1$$

Deze grens werd dus in het jaar 1993 gepasseerd.

- 40** Per 5 graden Celsius neemt de overlevingstijd met de factor 2 toe.
Per graad is de factor $2^{\frac{1}{5}}$.

Bij 0°C is de overlevingstijd $\frac{0,5}{2} = 0,25$ uur.

Dus geldt $Z = 0,25 \cdot 2^{\frac{1}{5}T}$ en is de overlevingstijd bij $T = 17^\circ\text{C}$ gelijk aan $Z(17) = 0,25 \cdot 2^{\frac{1}{5} \cdot 17} \approx 2,6$ uur.

41

hoek in graden	0	30	45	60	90	180
hoek in radialen exact	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	π

- 42 a** $f(x) = 3 \sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$

$a = 3$ dus de amplitude is 3

$b = 1$ dus de periode is $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$

$d = 0$ dus de evenwichtsstand is $y = 0$

- b** $h(x) = -10 + 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

$a = 2$ dus de amplitude is 2

$b = \frac{1}{2}$ dus de periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

$d = -10$ dus de evenwichtsstand is $y = -10$

- c** $k(x) = -3 + \cos(\pi(x - 1))$

$a = 1$ dus de amplitude is 1

$b = \pi$ dus de periode is $\frac{2\pi}{\pi} = 2$

$d = -3$ dus de evenwichtsstand is $y = -3$

- d** $m(x) = \cos(1,5(x - 0,75\pi))$

$a = 1$ dus de amplitude is 1

$b = 1,5$ dus de periode is $\frac{2\pi}{1,5} = \frac{4}{3}\pi$

$d = 0$ dus de evenwichtsstand is $y = 0$

- 43 a** $-1 \leq \sin(4x) \leq 1$

Het maximum van de functie f is 3 als $\sin(4x) = 1$ dus als

$4x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ ofwel $x = \frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$ (met k een geheel getal).

Het minimum is -3 als $\sin(4x) = -1$ dus als

$4x = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ ofwel $x = \frac{3}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$ (met k een geheel getal).

Binnen het interval $[0, 2\pi]$:

Maxima 3 voor $x = \frac{1}{8}\pi, x = \frac{5}{8}\pi, x = \frac{9}{8}\pi$ en $x = \frac{13}{8}\pi$.

Minima -3 voor $x = \frac{3}{8}\pi, x = \frac{7}{8}\pi, x = \frac{11}{8}\pi$ en $x = \frac{15}{8}\pi$.

- b** $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \leq 1$

Het maximum van de functie f is 5 als $\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = 1$, dus als

$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ ofwel $x = \pi + k \cdot 4\pi$

Het minimum is -1 als $\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = -1$ dus als

$\frac{1}{2}x = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ ofwel $x = 3\pi + k \cdot 4\pi$.

Binnen het interval $[0, 2\pi]$:

Maxima 5 aan de randen van het interval $[0, 2\pi]$.

Minimum -1 voor $x = \pi$.

c $-1 \leq \sin\left(x - 1\frac{1}{2}\pi\right) \leq 1$

Het maximum van de functie f is 6 als $\sin\left(x - 1\frac{1}{2}\pi\right) = -1$, dus als

$$x - 1\frac{1}{2}\pi = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ ofwel } x = 3\pi + k \cdot 2\pi$$

Het minimum is 2 als $\sin\left(x - 1\frac{1}{2}\pi\right) = 1$ dus als

$$x - 1\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ ofwel } x = 2\pi + k \cdot 2\pi$$

Binnen het interval $[0, 2\pi]$:

Maximum 6 voor $x = \pi$.

Randminima 2 voor $x = 0$ en $x = 2\pi$.

44 Stel $f(x) = d + a \sin(b(x - c))$.

Het maximum is 105 en het minimum is 35, dus de evenwichtstand

$$d = \frac{1}{2}(35 + 105) = 70 \text{ en de amplitude } a = 105 - 70 = 35.$$

$$\text{De periode is } 140 - 20 = 120, \text{ dus } b = \frac{2\pi}{120} = \frac{1}{60}\pi.$$

De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand in het punt $(110, 70)$, dus $c = 110$.

$$\text{Een functievoorschrift is } f(x) = 70 + 35 \sin\left(\frac{1}{60}\pi(x - 110)\right).$$

45 a $\sin\left(-1\frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$

b $\cos\left(1\frac{1}{3}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

c $\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

d $\sin\left(-2\frac{2}{3}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

e $\sin\left(3\frac{1}{2}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -1$

f $\sin\left(2\frac{1}{4}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

g $\cos\left(-3\frac{5}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

h $\cos\left(6\frac{3}{4}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

46 a Stel $q = \pi x$.

$$\text{Uit } \sin(q) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ volgt } q = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } q = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi.$$

$$\pi x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \pi x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{3} + k \cdot 2 \text{ of } x = \frac{2}{3} + k \cdot 2$$

De oplossingen op $[0, 2]$ zijn $x = \frac{1}{3}$ en $x = \frac{2}{3}$.

b $2\cos(x + \pi) = \sqrt{2}$ ofwel $\cos(x + \pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Stel $q = x + \pi$.

$$\text{Uit } \cos(q) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ volgt } q = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } q = 1\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x + \pi = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x + \pi = 1\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

De oplossing op $[\pi, 2\pi]$ is $x = 1\frac{1}{4}\pi$.

c $2\sin(3x) = 1$ ofwel $\sin(3x) = \frac{1}{2}$

Stel $q = 3x$

$$\text{Uit } \sin(q) = \frac{1}{2} \text{ volgt } q = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } q = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$3x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 3x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \text{ of } x = \frac{5}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

De oplossingen op $\left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$ zijn $x = \frac{1}{18}\pi$ en $x = \frac{5}{18}\pi$.

d Stel $q = \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi$

Uit $\cos(q) = -1$ volgt $q = \pi + k \cdot 2\pi$.

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$\frac{1}{2}x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = 2\frac{1}{3}\pi + k \cdot 4\pi$$

De oplossing op $[0, 6\pi]$ is $x = 2\frac{1}{3}\pi$.

e $6\sin(2\pi x - \frac{1}{2}\pi) = 3$ ofwel $\sin(2\pi x - \frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}$

Stel $q = 2\pi x - \frac{1}{2}\pi$

Uit $\sin(q) = \frac{1}{2}$ volgt $q = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $q = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$$2\pi x - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2\pi x - \frac{1}{2}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$2\pi x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2\pi x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{3} + k \cdot 1 \text{ of } x = \frac{2}{3} + k \cdot 1$$

De oplossingen op $[0, 2]$ zijn $x = \frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$, $x = 1\frac{1}{3}$ en $x = 1\frac{2}{3}$.

f $3 + 6\cos(\pi x) = 0$ ofwel $6\cos(\pi x) = -3$, dus $\cos(\pi x) = -\frac{1}{2}$

Stel $q = \pi x$.

Uit $\cos(q) = -\frac{1}{2}$ volgt $q = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $q = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$$\pi x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \pi x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{2}{3} + k \cdot 2 \text{ of } x = 1\frac{1}{3} + k \cdot 2$$

De oplossingen op $[-\pi, \pi]$ zijn

$$x = -2\frac{2}{3}, x = -1\frac{1}{3}, x = -\frac{2}{3}, x = \frac{2}{3}, x = 1\frac{1}{3} \text{ en } x = 2\frac{2}{3}.$$

47 a De vergelijking $2 + 3\sin(\pi(x + \frac{1}{4})) = \frac{7}{2}$ moet worden opgelost.

$$3\sin(\pi(x + \frac{1}{4})) = 1\frac{1}{2}$$

$$\sin(\pi(x + \frac{1}{4})) = \frac{1}{2}$$

Stel $q = \pi(x + \frac{1}{4})$

Uit $\sin(q) = \frac{1}{2}$ volgt $q = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $q = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$$\pi(x + \frac{1}{4}) = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \pi(x + \frac{1}{4}) = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x + \frac{1}{4} = \frac{1}{6} + k \cdot 2 \text{ of } x + \frac{1}{4} = \frac{5}{6} + k \cdot 2$$

$$x = -\frac{1}{12} + k \cdot 2 \text{ of } x = \frac{7}{12} + k \cdot 2$$

De oplossingen op $[0, 2]$ zijn $x = \frac{7}{12}$ en $x = 1\frac{11}{12}$.

b De periode van g is 4, dus $r = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$.

De grafiek van f heeft een maximum 5 als $\pi(x + \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}\pi$

$$\pi x + \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi$$

$$\pi x = \frac{1}{4}\pi$$

$$x = \frac{1}{4}, \text{ dus } (\frac{1}{4}, 5) \text{ is een hoogste punt van de grafiek van } g, \text{ dus } s = \frac{1}{4}.$$

De amplitude van f is 3, dus de amplitude van g is $2 \cdot 3 = 6$, oftewel $q = 6$.

De evenwichtsstand van g is $y = 5 - 6 = -1$, dus $p = -1$.

Samengevat: $p = -1$, $q = 6$, $r = \frac{1}{2}\pi$ en $s = \frac{1}{4}$.

- 48 a** De vergelijking $1 + 2\cos\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) = 0$ moet worden opgelost.

$$2\cos\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) = -1$$

$$\cos\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Stel } q = 2x + \frac{1}{3}\pi.$$

$$\text{Uit } \cos(q) = -\frac{1}{2} \text{ volgt } q = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } q = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi.$$

$$2x + \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x + \frac{1}{3}\pi = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$2x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \text{ of } x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

De x -coördinaten van P , Q , R en S zijn respectievelijk

$$x = \frac{1}{6}\pi, x = \frac{1}{2}\pi, x = 1\frac{1}{6}\pi \text{ en } x = 1\frac{1}{2}\pi.$$

$$PS = 1\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{6}\pi = 1\frac{1}{3}\pi \text{ en } QR = 1\frac{1}{6}\pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{2}{3}\pi.$$

$$\text{De waarde van } a = \frac{PS}{QR} = \frac{1\frac{1}{3}\pi}{\frac{2}{3}\pi} = 2.$$

b $g(x) = 1 + 2\cos\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) - 2 + 5\cos\left(2\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)\right)$

$$g(x) = -1 + 2\cos\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) + 5\cos\left(2\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)\right)$$

De periode van beide termen met een cosinus is $\frac{2\pi}{2} = \pi$, dus $r = 2$.

$$\text{Invoer: } y_1 = -1 + 2\cos\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) + 5\cos\left(2\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)\right)$$

$$\text{Venster: } 0 \leq x \leq 2\pi, -5 \leq y \leq 5$$

Opties: maximum en minimum geven twee opeenvolgende toppen

(0,6369; 2,4175) en (2,2077; -4,4175).

Hieruit leid je af dat de evenwichtsstand gelijk is aan

$$\frac{2,4175 + -4,4175}{2} = -1, \text{ dus } p = -1.$$

De amplitude is $2,4175 - -1 = 3,4175$, dus $q \approx 3,418$.

Er is een hoogste punt bij $x = 0,6369$, dus $s \approx 0,637$.

- 49 a** De vergelijking $-1 + \sin\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$ moet worden opgelost.

$$\sin\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Stel } q = 2x - \frac{1}{6}\pi.$$

$$\text{Uit } \sin(q) = \frac{1}{2} \text{ volgt } q = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } q = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$2x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$2x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \text{ of } x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn

$$x = \frac{1}{6}\pi, x = \frac{1}{2}\pi, x = 1\frac{1}{6}\pi \text{ en } x = 1\frac{1}{2}\pi.$$

- b** De vergelijking $-1 + \sin\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right) = 0$ moet worden opgelost.

$$\sin\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right) = 1$$

$$2x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$2x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi, \text{ dus de coördinaten van } A \text{ zijn } \left(\frac{1}{3}\pi, 0\right).$$

Overstaande hoeken zijn gelijk, dus $\angle OAB = 75^\circ$ en $\cos(75^\circ) = \frac{OA}{AB}$.

$$\text{Daaruit volgt } AB = \frac{OA}{\cos(75^\circ)} = \frac{\frac{1}{3}\pi}{\cos(75^\circ)} \approx 4,05.$$

- c De periode van f is π , dus de periode van g is $\frac{\pi}{3} = \frac{1}{3}\pi$.

Dat betekent dat $b = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}\pi} = 6$.

De amplitude van f is 1, dus de amplitude van g is $\frac{1}{4}$.

Dat betekent dat $a = \frac{1}{4}$ of $a = -\frac{1}{4}$.

$f(0) = -1 + \sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = -1\frac{1}{2}$, dus $(0, -1\frac{1}{2})$ is een laagste punt van g .

Mogelijke waarden zijn $a = -\frac{1}{4}$, $b = 6$ en $d = -1\frac{1}{4}$.

- 50 a Tot 11 uur is er elk uur een toename.

Van 11 naar 12 uur is de eerste afname.

De waterhoogte bereikt tussen 11 en 12 uur, bijvoorbeeld om ongeveer 11.15 uur, een maximum.

- b De toenames bij 9, 10 en 11 uur zijn even groot.

Dit betekent dat de groei in de periode van 8 tot ongeveer 11 uur lineair is.

- c Van 07.00 uur tot 13.00 uur is de waterhoogte in totaal

$1,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 - 1 - 2 = 0$ meter gestegen.

Om 13.00 uur staat het water opnieuw $3 + 0 = 3$ m hoog.

- 51 De gemiddelde snelheid is $\frac{s(6) - s(3)}{6 - 3} = \frac{400 \cdot 2,3^6 - 400 \cdot 2,3^3}{3} \approx 18116$ meter/uur.

- 52 Neem het interval $[1; 1,001]$.

Dan is $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sqrt{3 \cdot 1,001 + 6} - \sqrt{3 \cdot 1 + 6}}{1,001 - 1} = 0,499\dots$ en

$\frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 1,001^2 - \frac{1}{4} \cdot 1^2}{1,001 - 1} = 0,50025$.

De helling van beide grafieken is bij $x = 1$ ongeveer 0,50. De grafieken lopen bij $x = 1$ dus even steil.

- 53 a $f(x) = x^3 + \sqrt{x} = x^3 + x^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

- b $g(x) = 8x(x - 7)$

$$g(x) = 8x^2 - 56x$$

$$g'(x) = 16x - 56$$

- c $h(x) = 8x\sqrt{x} = 8x^{\frac{3}{2}}$

$$h'(x) = 8 \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} = 12\sqrt{x}$$

- d $k(x) = 5 + \frac{3}{x^2} = 5 + 3x^{-2}$

$$k'(x) = -6x^{-3} = \frac{-6}{x^3}$$

$$e \quad t(x) = \frac{3}{4x - 5} = 3(4x - 5)^{-1}$$

$$t'(x) = -3(4x - 5)^{-2} \cdot 4$$

$$t''(x) = \frac{-12}{(4x - 5)^2}$$

- f $l(x) = (4x + 3) \cdot (2 - x)$

$$l(x) = -4x^2 + 5x + 6$$

$$l'(x) = -8x + 5$$

- g $m(x) = 7(5x + 4)^3$

$$m'(x) = 7 \cdot 3(5x + 4)^2 \cdot 5$$

$$m'(x) = 105(5x + 4)^2$$

- h $n(x) = 4\sqrt{12x - 7} + 5x^3$

$$n(x) = 4(12x - 7)^{\frac{1}{2}} + 5x^3$$

$$n'(x) = 4 \cdot \frac{1}{2}(12x - 7)^{-\frac{1}{2}} \cdot 12 + 15x^2$$

$$n'(x) = \frac{24}{\sqrt{12x - 7}} + 15x^2$$

$$\text{i} \quad p(x) = 6x \cdot \left(1 + \frac{4}{\sqrt{x}}\right)$$

$$p(x) = 6x + \frac{24x}{\sqrt{x}} = 6x + 24\sqrt{x}$$

$$p'(x) = 6 + \frac{24}{2\sqrt{x}} = 6 + \frac{12}{\sqrt{x}}$$

$$\text{j} \quad u(x) = \frac{1}{(7-5x)^2} = (7-5x)^{-2}$$

$$u'(x) = -2 \cdot (7-5x)^{-3} \cdot -5$$

$$u'(x) = \frac{10}{(7-5x)^3}$$

$$\mathbf{54} \quad \text{a} \quad f(x) = 3x + \sqrt{2x+9}$$

$f(0) = 0 + \sqrt{9} = 3$ en $y = 3\frac{1}{3} \cdot 0 + 3 = 3$, dus zowel de lijn als de grafiek van f gaan door het punt $(0, 3)$.

$$f'(x) = 3 + \frac{2}{2\sqrt{2x+9}} = 3 + \frac{1}{\sqrt{2x+9}}, \text{ dus } f'(0) = 3\frac{1}{3}.$$

De helling van de grafiek van f in $(0, 3)$ is $3\frac{1}{3}$, net als de richtingscoëfficiënt van de lijn $y = 3\frac{1}{3}x + 3$.

De lijn $y = 3\frac{1}{3}x + 3$ raakt de grafiek van f dus in $(0, 3)$.

$$\text{b} \quad \text{De richtingscoëfficiënt is } f'(-2\frac{1}{2}) = 3 + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot -2\frac{1}{2} + 9}} = 3 + \frac{1}{\sqrt{4}} = 3\frac{1}{2}.$$

Invullen van het punt $(-2\frac{1}{2}, -5\frac{1}{2})$ in de vergelijking $y = 3\frac{1}{2}x + b$ geeft $-5\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} \cdot -2\frac{1}{2} + b$.

$$b = -5\frac{1}{2} + 8\frac{3}{4} = 3\frac{1}{4}$$

Een vergelijking van de raaklijn is $y = 3\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{4}$.

$$\text{c} \quad f'(x) = 3 + \frac{1}{\sqrt{2x+9}} = 3\frac{1}{4} \text{ geeft } \sqrt{2x+9} = 4 \text{ dus } 2x+9 = 16 \text{ en } x = 3\frac{1}{2}$$

$$f(3\frac{1}{2}) = 3 \cdot 3\frac{1}{2} + \sqrt{7+9} = 10\frac{1}{2} + 4 = 14\frac{1}{2}$$

$$(3\frac{1}{2}, 14\frac{1}{2}) \text{ invullen in } y = 3\frac{1}{4}x + p \text{ geeft } 14\frac{1}{2} = 3\frac{1}{4} \cdot 3\frac{1}{2} + p \text{ dus } p = 3\frac{1}{8}$$

$$\mathbf{55} \quad \text{Uit } f(x) = \frac{12}{0,2x+1} = 12 \cdot (0,2x+1)^{-1} \text{ volgt}$$

$$f'(x) = 12 \cdot -1 \cdot (0,2x+1)^{-2} \cdot 0,2 = \frac{-2,4}{(0,2x+1)^2}$$

$$\text{De helling is } f'(5) = \frac{-2,4}{(0,2 \cdot 5 + 1)^2} = \frac{-2,4}{(1+1)^2} = \frac{-2,4}{4} = -0,6.$$

$$\mathbf{56} \quad \text{Uit } f'(x) = 2x - 24x^{-3} = 2x - \frac{24}{x^3} \text{ volgt } f'(2) = 2 \cdot 2 - \frac{24}{2^3} = 4 - 3 = 1.$$

De vergelijking van de raaklijn is van de vorm $y = x + b$.

Invullen van $(2, 7)$ geeft $7 = 2 + b$ dus $b = 5$.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = x + 5$.

$$\mathbf{57} \quad f'(x) = \frac{2}{3} \cdot 3(x-1)^2 \cdot 1 - \frac{1}{2} = 2(x-1)^2 - \frac{1}{2}$$

Eerst oplossen waar de helling $3\frac{1}{2}$ is, dus $2(x-1)^2 - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$.

$$2(x-1)^2 = 4$$

$$(x-1)^2 = 2$$

$$x-1 = -\sqrt{2} \text{ of } x-1 = \sqrt{2}$$

$$x = 1 - \sqrt{2} \text{ of } x = 1 + \sqrt{2}$$

De grafiek van f' is een dalparabool, dus de afgeleide is groter dan $3\frac{1}{2}$ als $x < 1 - \sqrt{2}$ of $x > 1 + \sqrt{2}$.

58 $f(x) = \frac{2x^2 + 18}{3x} = \frac{2}{3}x + 6x^{-1}$

$$f'(x) = \frac{2}{3} - 6x^{-2} = \frac{2}{3} - \frac{6}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ als } \frac{2}{3} = \frac{6}{x^2} \text{ dus als } 2x^2 = 18 \text{ ofwel } x^2 = 9$$

Dit geeft $x = 3$ of $x = -3$.

De coördinaten zijn $A(-3, -4)$ en $B(3, 4)$.

59 De helling in de punten P en Q is gelijk aan de helling van l , dus 1.
Los op $f'(x) = 1$.

$$f(x) = (9x - 27)^{\frac{1}{3}}, \text{ dus } f'(x) = \frac{1}{3}(9x - 27)^{-\frac{2}{3}} \cdot 9 = \frac{3}{(9x - 27)^{\frac{2}{3}}}$$

Omdat $f'(x) = 1$ moet gelden $(9x - 27)^{\frac{2}{3}} = 3$.

Invoer: $y_1 = (9x - 27)^{\frac{1}{3}}$ en $y_2 = 3$

Venster: $0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 5$

Optie: snijpunt geeft $x \approx 2,42$ of $x \approx 3,58$.

De x -coördinaten van P en Q zijn respectievelijk 2,42 en 3,58.

60 $f(x) = (2x - 3)^{-1} - x - 1$ dus $f'(x) = -(2x - 3)^{-2} \cdot 2 - 1 = \frac{-2}{(2x - 3)^2} - 1$

$$f'(1) = \frac{-2}{(-1)^2} - 1 = -3, \text{ dus de helling van de raaklijn } k \text{ in } A \text{ is } -3.$$

De helling van OA is ook -3 , dus dat is dezelfde lijn.

De raaklijn k gaat door de oorsprong.

61 a $q = -0,2p + 1,3$

$$q - 1,3 = -0,2p$$

$$-5(q - 1,3) = p$$

$$p = -5q + 6,5$$

b $3p + 12q = 16 - p$

$$4p = -12q + 16$$

$$p = -3q + 4$$

c $\frac{5}{p} = 3q + 1$

$$5 = (3q + 1) \cdot p$$

$$\frac{5}{3q + 1} = p$$

$$p = \frac{5}{3q + 1}$$

d $\frac{2p - 3}{8p} = \frac{4q + 5}{7}$

$$(2p - 3) \cdot 7 = (4q + 5) \cdot 8p$$

$$14p - 21 = 32pq + 40p$$

$$-21 = 32pq + 26p$$

$$-21 = p(32q + 26)$$

$$p = \frac{-21}{32q + 26}$$

e $13p - 4(q + 2) = pq$

$$13p - pq = 4(q + 2)$$

$$13p - pq = 4q + 8$$

$$p(13 - q) = 4q + 8$$

$$p = \frac{4q + 8}{13 - q}$$

f $0,3q + 1,2pq - 4,5 = 0$

$$1,2pq = -0,3q + 4,5$$

$$p = \frac{-0,3q + 4,5}{1,2q}$$

$$p = \frac{45 - 3q}{12q} = \frac{15 - q}{4q}$$

$$\begin{aligned} \text{g } 15 + 9q &= \frac{pq}{2q-1} \\ (15+9q)(2q-1) &= pq \\ \frac{(15+9q)(2q-1)}{q} &= p \\ p &= \frac{18q^2 + 21q - 15}{q} \\ p &= 18q + 21 - \frac{15}{q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h } \frac{7q-3p}{p+8} &= \frac{4}{3} \\ 4 \cdot (p+8) &= (7q-3p) \cdot 3 \\ 4p+32 &= 21q-9p \\ 13p &= 21q-32 \\ p &= \frac{21q-32}{13} \end{aligned}$$

62 a $a + 3b = 6$ en $b = 8 - 2p$.
Substitutie geeft $a + 3(8 - 2p) = 6$ dus $a + 24 - 6p = 6$ ofwel $a = 6p - 18$.

b $\frac{a}{b} = 10 + 3b$ en $b = 5p + 1$.

Substitutie geeft $\frac{a}{5p+1} = 10 + 3(5p+1)$ dus $\frac{a}{5p+1} = 15p + 13$ ofwel
 $a = (15p+13)(5p+1)$ dus $a = 75p^2 + 80p + 13$.

c $2b + 3ab = 20$ en $b = 6p$
Substitutie geeft $2 \cdot 6p + 3a \cdot 6p = 20$ dus $12p + 18ap = 20$.
Dan is $6p + 9ap = 10$ en is $9ap = -6p + 10$ dus $a = \frac{-6p+10}{9p}$

d $b - a = b^2$ en $b = p - 1$
Substitutie geeft $p - 1 - a = (p - 1)^2$ dus $p - 1 - a = p^2 - 2p + 1$.
Dus $-a = p^2 - 3p + 2$ ofwel $a = -p^2 + 3p - 2$.

63 a ${}^2\log(a) + {}^2\log(b) = 3$

$${}^2\log(ab) = 3$$

$$ab = 2^3$$

$$ab = 8$$

$$b = \frac{8}{a}$$

b $a + \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(b) = 5$

$$\frac{1}{2} \cdot {}^3\log(b) = 5 - a$$

$${}^3\log(b) = 10 - 2a$$

$$b = 3^{10-2a}$$

c $a + 4 = 0,4b^2 \cdot b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}}$

$$a + 4 = 0,4b^{\frac{5}{6}}$$

$$2,5a + 10 = b^{\frac{5}{6}}$$

$$b = (2,5a + 10)^{\frac{6}{5}}$$

$$b = (2,5a + 10)^{\frac{6}{5}}$$

d $3\sqrt{a} + \sqrt{16a} - 2b = 0$

$$3\sqrt{a} + 4\sqrt{a} - 2b = 0$$

$$7\sqrt{a} - 2b = 0$$

$$2b = 7\sqrt{a}$$

$$b = 3\frac{1}{2}\sqrt{a}$$

64 a $4q - {}^2\log(p+1) = 3$

$$-{}^2\log(p+1) = -4q + 3$$

$${}^2\log(p+1) = 4q - 3$$

$$p+1 = 2^{4q-3}$$

$$p = 2^{4q-3} - 1$$

b $(q-6) \cdot \sqrt[5]{2p} = 1$

$$\sqrt[5]{2p} = \frac{1}{q-6}$$

$$2p = \left(\frac{1}{q-6}\right)^5$$

$$p = \frac{1}{2(q-6)^5}$$

65 a $9^a \cdot (\sqrt{3})^b = \frac{1}{3}$
 $(3^2)^a \cdot (3^{\frac{1}{2}})^b = 3^{-1}$
 $3^{2a} \cdot 3^{\frac{1}{2}b} = 3^{-1}$
 $3^{2a+\frac{1}{2}b} = 3^{-1}$
 $2a + \frac{1}{2}b = -1$
 $\frac{1}{2}b = -2a - 1$
 $b = -4a - 2$

b $2^a \cdot 8 = \left(\frac{1}{2}\right)^b \cdot 4^a$
 $2^a \cdot 2^3 = (2^{-1})^b \cdot (2^2)^a$
 $2^{a+3} = 2^{-b} \cdot 2^{2a}$
 $2^{a+3} = 2^{-b+2a}$
 $a + 3 = -b + 2a$
 $b = a - 3$

c $\frac{1}{2}\sqrt{b} - \sqrt{a+3} = 0$
 $\frac{1}{2}\sqrt{b} = \sqrt{a+3}$
 $b = 4a + 12$
 $\frac{1}{4}b = a + 3$
 $b = 4a + 12$

d $\sqrt{3a} - 2\sqrt{b} = 0$
 $2\sqrt{b} = \sqrt{3a}$
 $4b = 3a$
 $b = \frac{3}{4}a$

66 $K = \log(A) + 1,6\log(D) - 0,15$
 $K = \log(A) + \log(D^{1,6}) + \log(10^{-0,15})$
 $K = \log(10^{-0,15} \cdot A \cdot D^{1,6})$
 dus $p = 10^{-0,15} \approx 0,7$ en $q = 1,6$.

67 a 10 cm betekent $L = 0,1$ dus $S = \frac{700}{0,1^2} = 70\,000$.
 50 cm betekent $L = 0,5$ dus $S = \frac{700}{0,5^2} = 2\,800$.
 Het aantal diersoorten van 10 cm lang is $\frac{70\,000}{2\,800} = 25$ keer zo groot als het
 aantal diersoorten van 50 cm.

b $S = \frac{700}{L^2}$
 $\log(S) = \log\left(\frac{700}{L^2}\right)$
 $\log(S) = \log(700) - \log(L^2)$
 $\log(S) = \log(700) - 2\log(L)$
 $p = \log(700) \approx 2,85$ en $q = -2$.

68 a Vul in formule 1 voor de beginsnelheid $b = 25$ in.
 $h = 0,707 \cdot 25 \cdot t - 4,91 \cdot t^2$
 $h = 13,675t - 4,91 \cdot t^2$
 $h = 0$ geeft $13,675t - 4,91 \cdot t^2 = 0$
 $t(13,675 - 4,91 \cdot t) = 0$
 $t = 0$ of $4,91 \cdot t = 13,675$
 $t = 0$ of $t = 3,5997\dots$
 De speer is na $t = 3,5997\dots$ seconden weer op de grond.
 De geworpen afstand is $d = 0,707 \cdot 25 \cdot 3,5997\dots \approx 64$ meter.

b Invullen van formule (3) bij formule (1) geeft

$$h = 0,707b \cdot \frac{d}{0,707b} - 4,91 \left(\frac{d}{0,707b} \right)^2$$

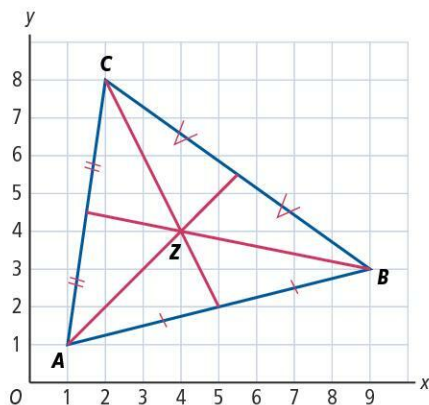
$$h = d - \frac{4,91d^2}{0,4998\dots b^2}$$

$$h \approx d - \frac{9,8d^2}{b^2} \text{ ofwel } h \approx d - \frac{9,8}{b^2} \cdot d^2$$

- 69 $\log(W) = 0,075N + 0,4$
 $W = 10^{0,075N+0,4} = 10^{0,4} \cdot 10^{0,075N} = 10^{0,4} \cdot (10^{0,075})^N$
Dus is $b = 10^{0,4} \approx 2,5$ en is $g = 10^{0,075} \approx 1,2$.

- 70 $\angle CAB = \angle CEB = 50^\circ$ (basishoeken in een gelijkbenige driehoek).
 $\angle ACD = \angle CAB = 50^\circ$ (Z-hoeken), dus $\angle ACD = 50^\circ$.

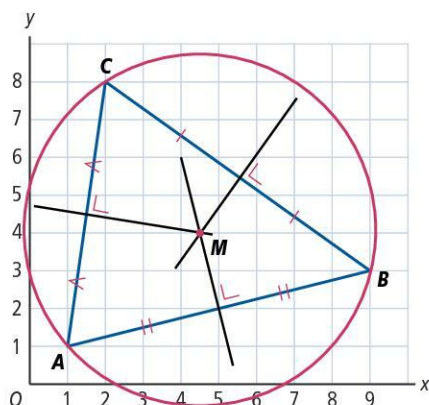
71 a



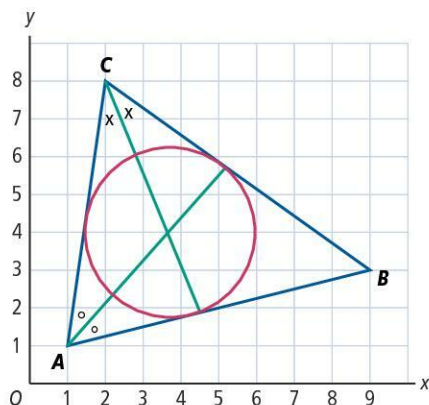
- b Het midden van BC is het punt $D\left(\frac{2+9}{2}, \frac{8+3}{2}\right) = \left(5\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}\right)$.

$$AD = \sqrt{\left(5\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(5\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{\left(4\frac{1}{2}\right)^2 + \left(4\frac{1}{2}\right)^2} = 4\frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ en } AZ = \frac{2}{3}AD = 3\sqrt{2}.$$

- c Het middelpunt van de omgeschreven cirkel is het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden van de driehoek.



- d Het middelpunt van de ingeschreven cirkel is het snijpunt van de deellijnen van de hoeken van de driehoek.



- 72 a** Waar, want elke ruit is een vlieger want een ruit is symmetrisch in de beide diagonalen en niet elke vlieger is een ruit want een vlieger heeft in principe maar één symmetrieas en een ruit heeft er twee.
- b** Waar, want als van een parallellogram alle hoeken even groot zijn dan zijn deze $360^\circ : 4 = 90^\circ$, dus is die vierhoek een rechthoek.
- c** Waar, want als van een ruit alle hoeken recht zijn is er sprake van een vierhoek waarvan de zijden gelijk zijn en alle hoeken 90° , dus is het een vierkant.
- d** Waar, want als een trapezium $ABCD$ een vlieger is dan snijden de diagonalen AC en BD elkaar loodrecht.
Symmetrie in AC geeft dat $AB = AD$ en $BC = CD$.
Omdat $AB \parallel CD$ is volgt $\angle BAC = \angle DCA$ (Z-hoeken).
Dus de overstaande zijden zijn evenwijdig en $ABCD$ is een parallellogram.
Ook geldt $AB = AD = BC = CD$ dus $ABCD$ is een ruit.

- 73 a** $\triangle ABS \sim \triangle CDS$ dus maak een verhoudingstabel:

zijden $\triangle ABS$	$AB = 6$	$AS = \dots$
zijden $\triangle CDS$	$CD = 4$	$CS = \dots$

$$CS : AS = 4 : 6.$$

$$\text{Daaruit volgt } AS = \frac{6}{10} \cdot AC = \frac{6}{10} \cdot 3\sqrt{5} = \frac{9}{5}\sqrt{5} = 1\frac{4}{5}\sqrt{5}.$$

b $CS = \frac{4}{10} \cdot AC = \frac{4}{10} \cdot 3\sqrt{5} = 1\frac{1}{5}\sqrt{5}.$

c $\tan(\angle BDC) = \frac{BC}{DC} = \frac{3}{4}$ dus $\angle BDC \approx 36,9^\circ \approx 37^\circ$ en
 $\angle DBA = \angle BDC$ (Z-hoeken), dus $\angle DBA \approx 37^\circ$.

d $\angle CBS = 90^\circ - \angle DBA \approx 90^\circ - 36,9^\circ = 53,1^\circ$.
 $\triangle BSC$ is gelijkbenig want $BS = BC = 3$, dus $\angle BSC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle CBS) \approx 63^\circ$.
(Dat de hoekensom niet uitkomt op 180° wordt veroorzaakt door het afronden.)

74 a $BP = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$

b $AP = \sqrt{AD^2 + DP^2} = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61}$

c AS bereken je met een verhoudingstabel, want $\triangle ABS \sim \triangle CPS$ met $AC = 10$.
De verhoudingstabel is

zijden $\triangle ABS$	$AB = 8$	$AS = \dots$
zijden $\triangle CPS$	$CP = 3$	$CS = \dots$

$$CS : AS = 3 : 8, \text{ dus } AS = \frac{8}{11} \cdot AC = \frac{8}{11} \cdot 10 = 7\frac{3}{11}.$$

d $\triangle DQP \sim \triangle ADP$ (gelijke hoeken)

zijden $\triangle DQP$	$DQ = \dots$	$DP = 5$
zijden $\triangle ADP$	$AD = 6$	$AP = \sqrt{61}$

$$DQ \cdot \sqrt{61} = 5 \cdot 6 \text{ dus } DQ = \frac{30}{\sqrt{61}} = \frac{30}{\sqrt{61}} \cdot \frac{\sqrt{61}}{\sqrt{61}} = \frac{30}{61}\sqrt{61}$$

e $\tan(\angle PAD) = \frac{DP}{AD} = \frac{5}{6}$ dus $\angle PAD \approx 40^\circ$

f $\angle DPQ = 90^\circ - \angle PAD \approx 50^\circ$

g $\tan(\angle BPC) = \frac{BC}{PC} = \frac{6}{3} = 2$ dus $\angle BPC = 63,434\dots^\circ$

$$\tan(\angle DCA) = \frac{AD}{DC} = \frac{6}{8} \text{ dus } \angle DCA = 36,869\dots^\circ$$

$$\text{Daaruit volgt } \angle ASP = 63,434\dots^\circ + 36,869\dots^\circ \approx 100^\circ.$$

75 De oppervlakte van de cirkel is $\pi \cdot 4^2 = 16\pi$.
 De hoogte van een gelijkzijdige driehoek met zijde 4 is $\sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
 De oppervlakte van de zes gelijkzijdige driehoeken is $6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$.
 $\frac{24\sqrt{3}}{16\pi} = 0,82699\dots$ dus 82,7% van de cirkel wordt bedekt door de zeshoek.

76 a De oppervlakte van vierhoek $ABCP = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 33$.
b De oppervlakte van driehoek $APC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9$.
c De hoogte van driehoek ABS is $\frac{8}{11} \cdot 6 = \frac{48}{11}$ en de oppervlakte van driehoek $ABS = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{48}{11} = \frac{192}{11} = 17\frac{5}{11}$.
d De oppervlakte van vierhoek $ASPD = \text{opp.}(ACD) - \text{opp.}(PSC) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3}{11} \cdot 6 = 24 - \frac{27}{11} = 21\frac{6}{11}$.

77 a De straal van elk van de kwartcirkels is 2.
 De omtrek is $10 + 3 + 3 + 6 + \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 2 = 22 + 2\pi \approx 28,3$ cm.
b De oppervlakte is $10 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot 2^2 = 42 + 2\pi \approx 48$ cm².

78 a $\angle B = 180^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 45^\circ$ en $\frac{a}{\sin(60^\circ)} = \frac{b}{\sin(45^\circ)} = \frac{8,2}{\sin(75^\circ)}$
 Dit geeft $a = \frac{8,2 \cdot \sin(60^\circ)}{\sin(75^\circ)} \approx 7,4$ en $b = \frac{8,2 \cdot \sin(45^\circ)}{\sin(75^\circ)} \approx 6,0$.
b Uit $\frac{18,3}{\sin(\angle B)} = \frac{15}{\sin(45^\circ)}$ volgt $\sin(\angle B) = \frac{18,3 \cdot \sin(45^\circ)}{15} \approx 0,862\dots$ dus $\angle B \approx 60^\circ$ of $\angle B \approx 180 - 60 = 120^\circ$.
 $\angle C \approx 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ$ of $\angle C \approx 180^\circ - 45^\circ - 120^\circ = 15^\circ$.
 In het eerste geval is $\frac{c}{\sin(75^\circ)} = \frac{15}{\sin(45^\circ)}$ dus $c = \frac{15 \cdot \sin(75^\circ)}{\sin(45^\circ)} \approx 20,5$.
 In het tweede geval is $\frac{c}{\sin(15^\circ)} = \frac{15}{\sin(45^\circ)}$ dus $c = \frac{15 \cdot \sin(15^\circ)}{\sin(45^\circ)} \approx 5,5$.
c $b^2 = 5,7^2 + 9,3^2 - 2 \cdot 5,7 \cdot 9,3 \cos(30^\circ) = 27,1639\dots$ dus $b \approx 5,2$.
 γ is zeker scherp, want $c < a$.
 Uit $\frac{5,2}{\sin(30^\circ)} = \frac{5,7}{\sin(\gamma)}$ volgt $\sin(\gamma) = \frac{5,7 \cdot \sin(30^\circ)}{5,2} \approx 0,548\dots$ dus $\gamma \approx 33^\circ$.
 $\alpha \approx 180^\circ - 30^\circ - 33^\circ = 117^\circ$.
d $\beta = 180^\circ - 100^\circ - 35^\circ = 45^\circ$
 $\frac{12,5}{\sin(45^\circ)} = \frac{a}{\sin(35^\circ)} = \frac{c}{\sin(100^\circ)}$
 dus $a = \frac{12,5 \cdot \sin(35^\circ)}{\sin(45^\circ)} \approx 10,1$ en $c = \frac{12,5 \cdot \sin(100^\circ)}{\sin(45^\circ)} \approx 17,4$.
e $BC^2 = 8,3^2 + 4,1^2 - 2 \cdot 8,3 \cdot 4,1 \cdot \cos(120^\circ) = 119,73\dots$ dus $BC \approx 10,9$.
 Uit $\frac{4,1}{\sin(\angle C)} = \frac{10,9}{\sin(120^\circ)}$ volgt $\sin(\angle C) = \frac{4,1 \cdot \sin(120^\circ)}{10,9} \approx 0,324\dots$
 dus $\angle C \approx 19^\circ$ en $\angle B \approx 180^\circ - 120^\circ - 19^\circ = 41^\circ$.
f Uit $\frac{4,1}{\sin(\angle C)} = \frac{8,3}{\sin(120^\circ)}$ volgt $\sin(\angle C) = \frac{4,1 \cdot \sin(120^\circ)}{8,3} \approx 0,4277\dots$
 dus $\angle C \approx 25^\circ$.
 $\angle B \approx 180^\circ - 120^\circ - 25^\circ \approx 35^\circ$.
 Uit $AC^2 = 4,1^2 + 8,3^2 - 2 \cdot 4,1 \cdot 8,3 \cdot \cos(35^\circ) = 29,948\dots$ volgt $AC \approx 5,5$.

- 79** Gebruik de cosinusregel in driehoek ABC :

$$8^2 = 11^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot \cos(\angle A)$$

$$110 \cdot \cos(\angle A) = 82, \text{ dus } \cos(\angle A) = \frac{82}{110}$$

$$\cos(\angle A) = \frac{AD}{5}, \text{ dus } AD = 5 \cdot \frac{82}{110} = \frac{82}{22} = \frac{41}{11}$$

$$\text{Uit } DE \parallel BC \text{ volgt dat } \triangle ADE \sim \triangle ABC, \text{ dus } \frac{DE}{8} = \frac{AD}{11}$$

$$DE = \frac{8AD}{11} = \frac{8}{11} \cdot \frac{41}{11} \approx 2,71$$

- 80** Stel T is het punt aan het eind van de eerste 300 km.

Dan is $\angle SLT = 342^\circ - 310^\circ = 32^\circ$ en is

$$TS^2 = 300^2 + 315^2 - 2 \cdot 300 \cdot 315 \cdot \cos(32^\circ) = 28943,909 \dots$$

Dus is $TS \approx 170,13$ km.

De omweg is ongeveer 470,13 km.

Dit is 155,13 km langer dan de rechtstreekse route.

Uit $\frac{155,13}{470,13} \approx 0,3299$ volgt het gevraagde: 33%.

- 81 a** Pas de sinusregel toe in driehoek ABC :

$$\frac{5}{\sin(55^\circ)} = \frac{6}{\sin(\angle ACB)}, \text{ dus } \sin(\angle ACB) = \frac{6 \cdot \sin(55^\circ)}{5} = 0,98298 \dots$$

$$\angle ACB \approx 79,415^\circ \text{ of } \angle ACB \approx 180 - 79,415 = 100,585^\circ$$

$$\angle ACB \text{ is stomp, dus } \angle BAC \approx 180 - 55 - 100,585 = 24,415^\circ.$$

- b** Stel de punten waar de verticale lijn uit C en D snijden met AB zijn E en F .

$$\frac{h}{5} = \sin(24,415^\circ), \text{ dus } h = 5 \cdot \sin(24,415^\circ) \approx 2,0667 \dots$$

$$AE^2 + h^2 = 5^2, \text{ dus } AE^2 = 25 - h^2 \approx 20,73 \text{ en } AE \approx 4,55$$

$$AF^2 + h^2 = 3^2, \text{ dus } AF^2 = 9 - h^2 \approx 4,73 \text{ en } AF \approx 2,17$$

$$CD = EF = 4,55 - 2,17 = 2,38$$

$$\text{De oppervlakte is gelijk aan } 2,0667 \cdot \frac{6 + 2,38}{2} \approx 8,7$$

- 82 a** Vierhoek $APED$ is een vlieger met $\angle P = \angle D = 90^\circ$.

De lijn AE verdeelt de vlieger in twee rechthoekige driehoeken.

Omdat $\angle DAE = \angle PAE = 25^\circ$ is $DE = PE = \tan(25^\circ)$ immers $AP = AD = 1$.

De oppervlakte van $APED = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DE = 1 \cdot \tan(25^\circ) \approx 0,47$.

- b** Pas de cosinusregel toe in driehoek ABP .

$$BP^2 = AB^2 + AP^2 - 2 \cdot AB \cdot AP \cdot \cos(\angle BAP)$$

$$BP^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(90^\circ - \alpha).$$

$$BP = 0,6 \text{ dus } 0,36 = 2 - 2 \cdot \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$2 \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = 2 - 0,36 \text{ ofwel } \cos(90^\circ - \alpha) = 0,82.$$

Uit $90^\circ - \alpha = \cos^{-1}(0,82) \approx 35^\circ$ volgt $\alpha \approx 55^\circ$.

- 83 a** k : uit $10x - 5y = 7$ volgt $-5y = -10x + 7$ dus $y = 2x - \frac{7}{5}$.

$$p$$
: uit $3x + 6y = -5$ volgt $6y = -3x - 5$ dus $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{6}$.

$$q$$
: uit $3x + y = 10$ volgt $y = -3x + 10$.

- b** De lijnen k en p staan loodrecht op elkaar want $2 \cdot -\frac{1}{2} = -1$.
(De lijnen l en q zijn evenwijdig)

84 a Uit $8x - 4y = 7$ volgt $-4y = -8x + 7$ dus $y = 2x - 1\frac{3}{4}$. De richtingscoëfficiënt van lijn l is 2.

b De richtingscoëfficiënt van de loodlijn is $-\frac{1}{2}$.

Invullen van $(4, -3)$ in $y = -\frac{1}{2}x + b$ geeft $-3 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + b$ dus $b = -1$.

De vergelijking van de loodlijn is $y = -\frac{1}{2}x - 1$.

85 a De vergelijking van lijn l herschrijven geeft $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.

De lijn loodrecht hierop door $P(0, 9)$ heeft vergelijking $y = -1\frac{1}{2}x + 9$.

Voor het snijpunt van de beide lijnen geldt $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = -1\frac{1}{2}x + 9$.

Links en rechts keer 6 geeft $4x + 2 = -9x + 54$ dus $13x = 52$ ofwel $x = 4$.

Dan is $y = -1\frac{1}{2} \cdot 4 + 9$ ofwel $y = 3$ en is $(4, 3)$ het snijpunt.

De afstand van P tot lijn l is $d(P, l) = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

b Een willekeurig punt op lijn n is bijvoorbeeld $P(0, 2)$.

Een loodlijn op lijn n door $P(0, 2)$ is dan $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

Nu het snijpunt van de lijnen $y = -\frac{1}{3}x + 2$ en $y = 3x - 2$ berekenen.

Uit $-\frac{1}{3}x + 2 = 3x - 2$ volgt $-x + 6 = 9x - 6$ dus $10x = 12$ ofwel $x = 1\frac{1}{5}$.

Dan is $y = 3 \cdot 1\frac{1}{5} - 2 = 1\frac{3}{5}$ en het snijpunt $(1\frac{1}{5}, 1\frac{3}{5})$.

De afstand tussen de lijnen is $d(m, n) = \sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{36+4}{25}} = \frac{1}{5}\sqrt{40} = \frac{2}{5}\sqrt{10}$

86 a Herleid $5x - 2y = 10$ tot $y = 2\frac{1}{2}x - 5$.

De richtingscoëfficiënten zijn $2\frac{1}{2}$ en 3.

Stel de hoeken die de lijnen met een horizontale lijn maken zijn α en β .

$\tan(\alpha) = 2\frac{1}{2}$ en $\tan(\beta) = 3$, dus $\alpha \approx 68,2^\circ$ en $\beta \approx 71,6^\circ$.

De hoek tussen de lijnen is $71,6^\circ - 68,2^\circ \approx 3^\circ$.

b Uit $6y + x = 1$ volgt $y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{6}$ en uit $7y - 2x = 4$ volgt $y = \frac{2}{7}x + \frac{4}{7}$.

$\tan(\alpha) = \frac{1}{6}$ en $\tan(\beta) = \frac{2}{7}$, dus $\alpha \approx 9,5^\circ$ en $\beta \approx 15,9^\circ$.

De ene lijn stijgt en de andere daalt, dus de hoek is $15,9 + 9,5 \approx 25^\circ$.

c Herleid $x = 2y - 8$ tot $y = \frac{1}{2}x + 4$.

De richtingscoëfficiënten zijn $\frac{1}{2}$ en -2 .

De hoek tussen de lijnen is 90° want $-2 \cdot \frac{1}{2} = -1$.

87 a $y = 1 - 3x$ invullen in de tweede vergelijking geeft $9x - 2(1 - 3x) = 13$, dus $9x - 2 + 6x = 13$ ofwel $x = 1$.

Dit laatste invullen in $y = 1 - 3x$ geeft $y = -2$.

De oplossing is $x = 1$ en $y = -2$.

b $a = \frac{1}{2}b - 7$ invullen in de eerste vergelijking geeft $7(\frac{1}{2}b - 7) + 3b = -10$, dus $3\frac{1}{2}b - 49 + 3b = -10$.

Dan is $6\frac{1}{2}b = 39$ dus $b = 6$ en $a = \frac{1}{2} \cdot 6 - 7 = -4$.

De oplossing is $a = -4$ en $b = 6$.

88 $f(2) = 2$ geeft $4a + 2b + 2 = 2$ en $f(-1) = 8$ geeft $a - b + 2 = 8$.

Dit kun je herleiden tot het stelsel $\begin{cases} 4a + 2b = 0 \\ a - b = 6 \end{cases}$ ofwel $\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a - b = 6 \end{cases}$

Invullen van $a = b + 6$ in $2a + b = 0$ geeft $2b + 12 + b = 0$, dus $3b = -12$ en $b = -4$.

De oplossing is $a = 2$ en $b = -4$.

- 89 a** $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 5(x - 1) = 2(x - y) \end{cases}$ herleiden tot $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 5x - 5 = 2x - 2y \end{cases}$ ofwel $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$
Dit stelsel correspondeert met twee evenwijdige lijnen en heeft geen oplossing.
- b** $\begin{cases} y = 1\frac{3}{4}x - 7 \\ x = \frac{4}{7}y + 4 \end{cases}$ herleiden tot $\begin{cases} 4y = 7x - 28 \\ 7x = 4y + 28 \end{cases}$ ofwel $\begin{cases} -7x + 4y = -28 \\ 7x - 4y = 28 \end{cases}$
Dit stelsel correspondeert met twee samenvallende lijnen, dus er zijn oneindig veel oplossingen.
- c** $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases}$ herleiden tot $\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = x - 3 \end{cases}$
De corresponderende lijnen staan loodrecht op elkaar, dus er is één oplossing.
- d** $y = 2x + 2$ invullen in de eerste vergelijking geeft $4x - 2(2x + 2) = 5$ ofwel $4x - 4x - 4 = 5$ dus $-4 = 5$.
Dit is niet waar, dus er is geen oplossing.
- 90 a** Je kunt schrijven $(x + 4)^2 + (y - 0)^2 = 5^2$ dus de straal is 5 en het middelpunt is $(-4, 0)$.
- b** Kwadraat afsplitsen geeft $(x - 12)^2 + (y - 4)^2 - 16 = 0$, dus $(x - 12)^2 + (y - 4)^2 = 16$.
De straal is $\sqrt{16} = 4$ en het middelpunt is $(12, 4)$.
- c** Kwadraat afsplitsen geeft $(x + 5)^2 - 25 + (y + 2)^2 - 4 = 1$ ofwel $(x + 5)^2 + (y + 2)^2 = 30$.
De straal is $\sqrt{30}$ en het middelpunt is $(-5, -2)$.
- d** Kwadraat afsplitsen geeft $(x - 2\frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4} + (y - 3\frac{1}{2})^2 - 12\frac{1}{4} = 10$ ofwel $(x - 2\frac{1}{2})^2 + (y - 3\frac{1}{2})^2 = 28\frac{1}{2}$.
De straal is $\sqrt{28\frac{1}{2}}$ en het middelpunt is $(2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$.
- e** Kwadraat afsplitsen geeft $(x + 2\frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4} + (y - 3)^2 - 9 + 16 = 0$ ofwel $(x + 2\frac{1}{2})^2 + (y - 3)^2 = -\frac{3}{4}$. Dat zou betekenen dat $r^2 = -\frac{3}{4}$ en dat kan niet.
- 91 a** $x = -3$ invullen in de vergelijking van de cirkel geeft $(-3 + 1)^2 + (y - 4)^2 = 40$
 $(y - 4)^2 = 36$
 $y - 4 = -6$ of $y - 4 = +6$
 $y = -2$ of $y = 10$
De snijpunten zijn $(-3, -2)$ en $(-3, 10)$.
- b** $x = 1 - 5y$ invullen in de vergelijking van de cirkel geeft
 $(1 - 5y - 4)^2 + (y - 2)^2 = 13$
 $(-5y - 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$
 $25y^2 + 30y + 9 + y^2 - 4y + 4 = 13$
 $26y^2 + 26y = 0$
 $y = 0$ of $y = -1$
 $x = 1 - 5 \cdot 0 = 1$ of $x = 1 - 5 \cdot -1 = 6$
De snijpunten zijn $(1, 0)$ en $(6, -1)$.
- c** $y = x + 3$ invullen in de vergelijking van de cirkel geeft
 $x^2 + (x + 3)^2 = 9$
 $2x^2 + 6x = 0$
 $2x(x + 3) = 0$
 $x = 0$ of $x = -3$
 $y = 0 + 3 = 3$ of $y = -3 + 3 = 0$
De snijpunten zijn $(0, 3)$ en $(-3, 0)$.

- 92** Invullen van $y = 2x + 3$ in de vergelijking van de cirkel geeft
 $x^2 + (2x + 3)^2 - 6x - 7 = 0$
 $x^2 + 4x^2 + 12x + 9 - 6x - 7 = 0$
 $5x^2 + 6x + 2 = 0$
 De discriminant van deze vergelijking is $6^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 36 - 40 = -4 < 0$.
 Er zijn geen oplossingen, dus ze hebben geen punt gemeenschappelijk.
- 93 a** Het middelpunt is $M(2, 1)$. Lijn MP heeft richtingscoëfficiënt $\frac{2-1}{-1-2} = -\frac{1}{3}$
 dus de raaklijn heeft richtingscoëfficiënt 3.
 Invullen van $P(-1, 2)$ in $y = 3x + b$ geeft $b = 5$.
 De raaklijn heeft vergelijking $y = 3x + 5$.
- b** Uit $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 20 = 0$ volgt $(x - 5)^2 - 25 + (y - 2)^2 - 4 + 20 = 0$
 ofwel $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 9$.
 Het middelpunt is $M(5, 2)$. Lijn MP is verticaal, dus de raaklijn is de
 horizontale lijn door $P(5, 8)$.
 Een vergelijking van deze raaklijn is $y = 8$.
- 94** Uit $3x + 2y = 23$ volgt $y = -1\frac{1}{2}x + 11\frac{1}{2}$. Dit invullen in de vergelijking van
 de cirkel geeft $(x - 1)^2 + (-1\frac{1}{2}x + 11\frac{1}{2} - 1)^2 = 25$.
 $x^2 - 2x + 1 + (-1\frac{1}{2}x + 10\frac{1}{2})^2 = 25$
 $x^2 - 2x + 1 + 2\frac{1}{4}x^2 - 31\frac{1}{2}x + 110\frac{1}{4} = 25$
 $3\frac{1}{4}x^2 - 33\frac{1}{2}x + 86\frac{1}{4} = 0$
 $13x^2 - 134x + 345 = 0$
 De discriminant van deze vergelijking is $D = 134^2 - 4 \cdot 13 \cdot 345 = 16$.
 Dus zijn er twee oplossingen en snijdt de lijn de cirkel.
- 95** Bereken eerst de afstand van het middelpunt $(1, 1)$ tot de lijn $k: y = x - 8$.
 De lijn door het middelpunt loodrecht op k heeft vergelijking $y = -x + b$.
 Invullen van $(1, 1)$ geeft $b = 2$.
 De lijn $y = -x + 2$ snijden met $y = x - 8$ geeft $-x + 2 = x - 8$ dus $x = 5$ en
 $y = -3$.
 De afstand van $(1, 1)$ tot $(5, -3)$ is $\sqrt{(5-1)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.
 De straal van de vergrote cirkel is $4\sqrt{2}$.
- 96** Invullen van $y = ax$ in de middelpuntsvergelijking geeft
 $(x - 2)^2 + (ax - 6)^2 = 20$
 $x^2 - 4x + 4 + a^2x^2 - 12ax + 36 = 20$
 $(a^2 + 1)x^2 + (-12a - 4)x + 20 = 0$
 Om te raken moet de discriminant gelijk zijn aan 0, dus
 $(-12a - 4)^2 - 4 \cdot (a^2 + 1) \cdot 20 = 0$
 $(-12a - 4)^2 - 4 \cdot (a^2 + 1) \cdot 20 = 0$
 $144a^2 + 96a + 16 - 80a^2 - 80 = 0$
 $64a^2 + 96a - 64 = 0$
 $2a^2 + 3a - 2 = 0$
 $(2a - 1)(a + 2) = 0$ (of gebruik de abc -formule)
 $a = \frac{1}{2}$ of $a = -2$

97 a De afstand van Q tot het middelpunt $(5, 4)$ is $\sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
 De straal van de cirkel is $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
 De afstand van Q tot de cirkel is $3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$.

b De middelpuntsvergelijking van de cirkel is
 $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 1 + 16 - 12 = 5$, dus de straal is $\sqrt{5}$.
 De afstand van Q tot het middelpunt $(1, 4)$ is $\sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.
 De afstand van Q tot de cirkel is $4\sqrt{5} - \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$.

98 De middelpuntsvergelijking van c_1 is $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$, dus het middelpunt is $(-1, 1)$. Het middelpunt van c_2 is $(4, 6)$.

De afstand tussen de beide middelpunten is

$$\sqrt{(4 - (-1))^2 + (6 - 1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

De straal van c_1 is $\sqrt{2}$ en de straal van c_2 is $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

De afstand tussen de beide cirkels is $5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

99 a Het middelpunt van de cirkel is $(0, 0)$ en de straal is $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Lijn l heeft vergelijking $y = -\frac{1}{2}x + 7\frac{1}{2}$.

De lijn loodrecht op l door $(0, 0)$ heeft de vergelijking $y = 2x$.

Deze lijn snijden met l geeft $2x = -\frac{1}{2}x + 7\frac{1}{2}$, dus $2\frac{1}{2}x = 7\frac{1}{2}$ ofwel $x = 3$.

Dan is $y = 2 \cdot 3 = 6$

De afstand van $(0, 0)$ tot $(3, 6)$ is $\sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

De afstand tussen de cirkel en de lijn is $3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$.

b Het middelpunt is $(-2, 4)$ en straal is $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

De lijn loodrecht op l door $(-2, 4)$ heeft vergelijking $y = -2x + b$.

$x = -2$ en $y = 4$ invullen geeft $4 = -2 \cdot -2 + b$ dus $b = 0$.

Deze lijn snijden met l geeft $-2x = \frac{1}{2}x - 7\frac{1}{2}$, dus $x = 3$. Dan is $y = -6$.

De afstand van $(-2, 4)$ tot $(3, -6)$ is $\sqrt{(3 - (-2))^2 + (-6 - 4)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

De afstand tussen de cirkel en de lijn is $5\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$.

100 a Substitutie van $y = -\frac{4}{3}x + 5$ in $x^2 + y^2 = 9$ geeft

$$x^2 + \left(-\frac{4}{3}x + 5\right)^2 = 9 \text{ ofwel } x^2 + \frac{16}{9}x^2 - \frac{40}{3}x + 25 = 9$$

$$\frac{25}{9}x^2 - \frac{40}{3}x + 16 = 0$$

$$25x^2 - 120x + 144 = 0 \text{ (vermenigvuldigd met 9)}$$

De discriminant is $D = (-120)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 144 = 0$, dus er is slechts één gemeenschappelijk punt wat betekent dat de lijn l raakt aan cirkel c .

b De straal is 3 dus de coördinaten van A zijn $(0, -3)$.

Uit $0 = -\frac{4}{3}x + 5$ volgt $\frac{4}{3}x = 5$, dus $x = \frac{3}{4} \cdot 5 = 3\frac{3}{4}$.

De coördinaten van B zijn $(3\frac{3}{4}, 0)$.

De richtingscoëfficiënt van k is $\frac{0 - (-3)}{3\frac{3}{4} - 0} = \frac{3}{3\frac{3}{4}} = \frac{4}{5}$.

Het product van de richtingscoëfficiënten van k en l is $-\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{16}{15}$ en dat is niet gelijk aan -1 .

De lijnen staan niet loodrecht op elkaar.

- 101 a** Een lijn door P loodrecht op l heeft als vergelijking $y = -\frac{4}{3}x + b$.
 De coördinaten van $P(6, 1)$ invullen geeft $1 = -\frac{4}{3} \cdot 6 + b$, dus $b = 9$.
 Een vergelijking van de loodlijn is $y = -\frac{4}{3}x + 9$.
 Deze loodlijn snijden met lijn l geeft

$$\frac{3}{4}x + \frac{11}{4} = -\frac{4}{3}x + 9$$

$$9x + 33 = -16x + 108 \text{ (vermenigvuldigd met 12)}$$

$$25x = 75, \text{ dus } x = 3. \text{ Het snijpunt is } S(3, 5).$$
 De afstand tussen l en P is gelijk aan $PS = \sqrt{(6-3)^2 + (1-5)^2} = 5$.
- b** Herleiden van de vergelijking van c tot een middelpuntsvergelijking:

$$(x-14)^2 - 196 + (y-16)^2 - 256 = -308$$

$$(x-14)^2 + (y-16)^2 = 144$$
 Het middelpunt is $M(14, 16)$ en de straal is 12.
 De afstand van M tot de x -as is 16.
 De afstand tussen M en P is $12 + 5 = 17$.
 Het verschil tussen deze afstanden is 1.
- 102 a** Het middelpunt van cirkel c is $R(-4, 5)$ en de straal is $\sqrt{49} = 7$.
 De afstand van R tot T is gelijk aan $\sqrt{(p-(-4))^2 + (0-5)^2}$

$$\sqrt{p^2 + 8p + 16 + 25} = \sqrt{p^2 + 8p + 41}.$$
- b** De straal van cirkel d is $\sqrt{16} = 4$.
 De straal van cirkel e is gelijk aan $RT - 7$ en ook gelijk aan $ST - 4$.

$$\sqrt{p^2 + 8p + 41} - 7 = \sqrt{p^2 - 28p + 260} - 4$$
 Op je rekenmachine:
 Invoer: $y_1 = \sqrt{x^2 + 8x + 41} - 7$ en $y_2 = \sqrt{p^2 - 28p + 260} - 4$
 Venster: $0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10$
 Optie: snijpunt geeft $x = 8$.

$$RT - 7 = \sqrt{8^2 + 8 \cdot 8 + 41} - 7 = 13 - 7 = 6$$
 De straal van cirkel e is 6.
- 103 a** Omdat de cirkels elkaar raken is $MT = 9 + 1 = 10$, $MN = 9 + 2\frac{1}{4} = 11\frac{1}{4}$ en
 $MN = 1 + 2\frac{1}{4} = 3\frac{1}{4}$.
 De cosinusregel in driehoek MTN toepassen geeft:

$$\left(11\frac{1}{4}\right)^2 = 10^2 + \left(3\frac{1}{4}\right)^2 - 2 \cdot 10 \cdot 3\frac{1}{4} \cdot \cos(\angle MTN)$$

$$\cos(\angle MTN) = -\frac{16}{65} \text{ dus } \angle MTN \approx 104^\circ.$$
- b** De y -coördinaat van punt T is 1.
 Met punt $A(0, 1)$ is driehoek ATM een rechthoekige driehoek.
 $AT = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ en de coördinaten van punt T zijn dan $(6, 1)$.
 De richtingscoëfficiënt van lijn MT is dan $\frac{9-1}{0-6} = -\frac{4}{3}$.
 De lijn door M en T is van de vorm $y = -\frac{4}{3}x + b$. Invullen van $M(0, 9)$ geeft
 $b = 9$.
 De vergelijking van de lijn door M en T is $y = -\frac{4}{3}x + 9$.

4 Voor de linker grafiek geldt:

Twee opeenvolgende toppen zijn $(\frac{1}{2}\pi, 100)$ en $(1\frac{1}{2}\pi, 400)$.

De evenwichtsstand d is $\frac{100 + 400}{2} = 250$.

De amplitude a is $400 - 250 = 150$.

De periode is 2π , dus $b = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \pi$, dus $c = \pi$.

Een functievoorschrift is $f(x) = 250 + 150 \sin(x - \pi)$.

Of: de grafiek heeft een maximum bij $x = 1\frac{1}{2}\pi$, dus $c = x_{\max} = 1\frac{1}{2}\pi$.

Een functievoorschrift is $f(x) = 250 + 150 \cos(x - 1\frac{1}{2}\pi)$.

Voor de rechter grafiek geldt:

Twee opeenvolgende toppen zijn $(0,05; 1\frac{1}{2})$ en $(0,25; -5\frac{1}{2})$.

De evenwichtsstand d is $\frac{-5\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}}{2} = -2$.

De amplitude a is $1\frac{1}{2} - (-2) = 3\frac{1}{2}$.

Een halve periode is $0,25 - 0,05 = 0,2$, dus de periode is $0,4$ en $b = \frac{2\pi}{0,4} = 5\pi$.

De grafiek heeft een maximum bij $x = 0,05$, dus $c = x_{\max} = 0,05$.

Een functievoorschrift is $g(x) = -2 + 3\frac{1}{2} \cos(5\pi(x - 0,05))$.

5 a Het punt $(\frac{1}{6}\pi, 5)$ is gebruikt.

b $f(x) = 5 + 4 \sin(2(x + \frac{5}{6}\pi))$ of $f(x) = 5 + 4 \sin(2(x - 1\frac{1}{6}\pi))$

c De periode is π , dus de toppen liggen $\frac{1}{4}\pi$ naar rechts ten opzichte van de punten waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.

Twee toppen zijn $(\frac{5}{12}\pi, 9)$ en $(-\frac{7}{12}\pi, 9)$.

Mogelijke functievoorschriften zijn $f(x) = 5 + 4 \cos(2(x - \frac{5}{12}\pi))$ en

$f(x) = 5 + 4 \cos(2(x + \frac{7}{12}\pi))$.

15 a Uit $4 \cos(x) = 2\sqrt{3}$ volgt $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = 1\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

De oplossingen op $[-\pi, 2\pi]$ zijn $x = -\frac{1}{6}\pi$ en $x = \frac{1}{6}\pi$ en $x = 1\frac{5}{6}\pi$.

b Uit $\cos(x) + 1 = 0$ volgt $\cos(x) = -1$.

$x = \pi + k \cdot 2\pi$

De oplossingen op $[-\pi, 2\pi]$ zijn $x = -\pi$ en $x = \pi$.

c Uit $3 \cos(x) - 4 = -2\frac{1}{2}$ volgt $3 \cos(x) = 1\frac{1}{2}$ ofwel $\cos(x) = \frac{1}{2}$.

$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

De oplossingen op $[-\pi, 2\pi]$ zijn $x = -\frac{1}{3}\pi$, $x = \frac{1}{3}\pi$ en $x = 1\frac{2}{3}\pi$.

d Uit $2 + \sin(x) = 3$ volgt $\sin(x) = 1$.

$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

De oplossing op $[-\pi, 2\pi]$ is $x = \frac{1}{2}\pi$.

e Uit $-4\sin(x) + 2\sqrt{2} = 0$ volgt $4\sin(x) = 2\sqrt{2}$ ofwel $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

$$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

De oplossingen op $[-\pi, 2\pi]$ zijn $x = \frac{1}{4}\pi$ en $x = \frac{3}{4}\pi$.

f $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

De oplossingen op $[-\pi, 2\pi]$ zijn $x = -\frac{2}{3}\pi$, $x = -\frac{1}{3}\pi$, $x = 1\frac{1}{3}\pi$ en $x = 1\frac{2}{3}\pi$.

17 a Uit $\cos(x) - 1 = 0$ volgt $\cos(x) = 1$.

$$x = 0 + k \cdot 2\pi$$

b Uit $2\sin(x) = \sqrt{2}$ volgt $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

$$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

c Uit $2\cos(x) + \sqrt{3} = 0$ volgt $2\cos(x) = -\sqrt{3}$ ofwel $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

$$x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

d Uit $6\sin(x) = -3$ volgt $\sin(x) = -\frac{1}{2}$.

$$x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = 1\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

21 a $\cos\left(3\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right) = 1$

$$\text{Stel } q = 3\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$$

De oplossingen van $\cos(q) = 1$ zijn $q = 0 + k \cdot 2\pi$.

$$3\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) = 0 + k \cdot 2\pi$$

$$3x - 1\frac{1}{2}\pi = 0 + k \cdot 2\pi$$

$$3x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

De oplossingen op $[0, 1\frac{1}{2}\pi]$ zijn $x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = 1\frac{1}{6}\pi$.

b Uit $2\sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) = \sqrt{2}$ volgt $\sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$\text{Stel } q = x + \frac{1}{4}\pi$$

De oplossingen van $\sin(q) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ zijn $q = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $q = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$.

$$x + \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x + \frac{1}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = 0 + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

De oplossingen op $[-\pi, \pi]$ zijn $x = 0$ en $x = \frac{1}{2}\pi$.

c Uit $3 + \cos\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) = 2\frac{1}{2}$ volgt $\cos\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

$$\text{Stel } q = x - \frac{2}{3}\pi$$

De oplossingen van $\cos(q) = -\frac{1}{2}$ zijn $q = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $q = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$.

$$x - \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x - \frac{2}{3}\pi = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = 2\pi + k \cdot 2\pi$$

De oplossingen op $[0, 4\pi]$ zijn

$$x = 0, x = 1\frac{1}{3}\pi, x = 2\pi, x = 3\frac{1}{3}\pi \text{ en } x = 4\pi.$$

d Uit $2 - \cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 1\frac{1}{2}$ volgt $\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}$

$$\text{Stel } q = \frac{1}{2}x$$

De oplossingen van $\cos(q) = \frac{1}{2}$ zijn $q = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $q = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$.

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{1}{2}x = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 4\pi \text{ of } x = 3\frac{1}{3}\pi + k \cdot 4\pi$$

De oplossingen op $[-2\pi, 2\pi]$ zijn $x = \frac{2}{3}\pi$ en $x = -\frac{2}{3}\pi$.

- e Uit $2\sin\left(\frac{1}{2}\pi(x+1)\right) = 1$ volgt $\sin\left(\frac{1}{2}\pi(x+1)\right) = \frac{1}{2}$

$$\text{Stel } q = \frac{1}{2}\pi(x+1)$$

De oplossingen van $\sin(q) = \frac{1}{2}$ zijn $q = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $q = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.

$$\frac{1}{2}\pi(x+1) = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{1}{2}\pi(x+1) = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\frac{1}{2}\pi x + \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{1}{2}\pi x + \frac{1}{2}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\frac{1}{2}\pi x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{1}{2}\pi x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{2}{3} + k \cdot 4 \text{ of } x = \frac{2}{3} + k \cdot 4$$

De oplossingen op $[0, 10]$ zijn $x = \frac{2}{3}$, $x = 3\frac{1}{3}$, $x = 4\frac{2}{3}$, $x = 7\frac{1}{3}$ en $x = 8\frac{2}{3}$.

- f Uit $3 - \frac{1}{3}\sin(4x) = 2\frac{2}{3}$ volgt $\frac{1}{3}\sin(4x) = \frac{1}{3}$ ofwel $\sin(4x) = 1$.

$$\text{Stel } q = 4x$$

De oplossingen van $\sin(q) = 1$ zijn $q = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$.

$$4x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

De oplossingen op $[-\pi, \pi]$ zijn $x = -\frac{7}{8}\pi$, $x = -\frac{3}{8}\pi$, $x = \frac{1}{8}\pi$ en $x = \frac{5}{8}\pi$.

- 22 a Invoer: $y_1 = 4\cos(0,25x)$ en $y_2 = 3,2$

Venster: $0 \leq x \leq 12$, $-4 \leq y \leq 4$

Optie: snijpunt

Dit geeft $x \approx 2,57$.

- b Invoer: $y_1 = 12 - 7,5\sin(x)$ en $y_2 = 5,5$

Venster: $2 \leq x \leq 8$, $0 \leq y \leq 20$

Optie: snijpunt

Dit geeft $x \approx 2,09$ of $x \approx 7,33$.

- c Invoer: $y_1 = -305\sin(1,5(x + 0,75)) + 120$ en $y_2 = 250$

Venster: $0 \leq x \leq 8$, $-200 \leq y \leq 600$

Optie: snijpunt

Dit geeft $x \approx 1,64$ of $x \approx 3,15$ of $x \approx 5,83$ of $x \approx 7,33$.

- d Invoer: $y_1 = 1,25 - 0,32\cos(50(x + 10))$ en $y_2 = 1$

Venster: $0 \leq x \leq 0,02$, $0 \leq y \leq 2$

Optie: snijpunt

Dit geeft $x \approx 0,04$ of $x \approx 0,07$ of $x \approx 0,17$ of $x \approx 0,19$.

- e Invoer: $y_1 = \pi\sin(\pi x - 0,3)$ en $y_2 = 2$

Venster: $50 \leq x \leq 52$, $-4 \leq y \leq 4$

Optie: snijpunt

Dit geeft $x \approx 50,32$ of $x \approx 50,88$.

- 23 a $\cos(2x) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 0$

$$\cos(2x) = 0 \text{ of } \cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 0$$

$$2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \text{ of } \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi \text{ of } x = \pi + k \cdot 2\pi$$

De oplossingen op $[0, \pi]$ zijn $x = \frac{1}{4}\pi$, $x = \frac{3}{4}\pi$ en $x = \pi$.

b $(x^2 - \frac{1}{4}) \cdot \sin(\pi x) = 0$

$x^2 - \frac{1}{4} = 0$ of $\sin(\pi x) = 0$

$x^2 = \frac{1}{4}$ of $\pi x = 0 + k \cdot \pi$

$x = \frac{1}{2}$ of $x = -\frac{1}{2}$ of $x = 0 + k \cdot 1$

De oplossingen op $[-2, 2]$ zijn $x = -2, x = -1, x = -\frac{1}{2}, x = 0, x = \frac{1}{2}, x = 1$ en $x = 2$.

c $2 \cos^2(x) + \sqrt{2} \cos(x) = 0$

Stel $\cos(x) = p$, dan wordt de vergelijking $2p^2 + p\sqrt{2} = 0$.

$p(2p + \sqrt{2}) = 0$ dus $p = 0$ of $p = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\cos(x) = 0$ of $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ of $x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

De oplossingen op $[0, 2\pi]$ zijn $x = \frac{1}{2}\pi, x = \frac{3}{4}\pi, x = \frac{1}{4}\pi$ en $x = \frac{5}{4}\pi$.

d $(2 \sin(3(x - \frac{1}{2}\pi)) + 1) \cdot 3 \cos(x) = 0$

$2 \sin(3(x - \frac{1}{2}\pi)) + 1 = 0$ of $3 \cos(x) = 0$

$\sin(3(x - \frac{1}{2}\pi)) = -\frac{1}{2}$ of $\cos(x) = 0$

$3(x - \frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3(x - \frac{1}{2}\pi) = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

$3x - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3x - \frac{1}{2}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

$3x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3x = \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{2}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

$x = \frac{8}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

De oplossingen op $[0, \pi]$ zijn $x = \frac{2}{9}\pi, x = \frac{4}{9}\pi, x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = \frac{8}{9}\pi$.

28 a Los eerst $2 \sin(x) - \sqrt{3} = 0$ op, ofwel $2 \sin(x) = \sqrt{3}$ ofwel $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

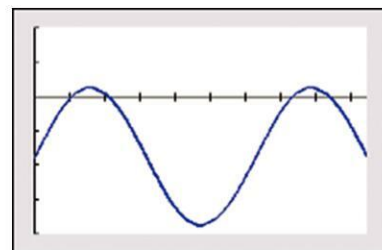
De oplossingen op $[0, 3\pi]$ zijn

$x = \frac{1}{3}\pi, x = \frac{2}{3}\pi, x = 2\frac{1}{3}\pi$ en $x = 2\frac{2}{3}\pi$.

Zie de plot hiernaast.

De oplossing van de ongelijkheid is

$\frac{1}{3}\pi \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ of $2\frac{1}{3}\pi \leq x \leq 2\frac{2}{3}\pi$.



b Los eerst $8 - \sin(x + \pi) = 7\frac{1}{2}$ op, ofwel $\sin(x + \pi) = \frac{1}{2}$.

$x + \pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x + \pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

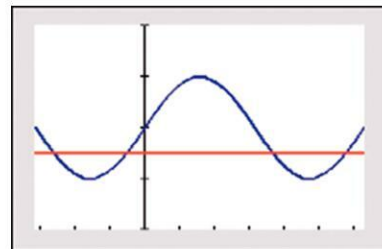
De oplossingen op $[-\pi, 2\pi]$ zijn

$x = -\frac{5}{6}\pi, x = -\frac{1}{6}\pi, x = \frac{1}{6}\pi$ en $x = \frac{5}{6}\pi$.

Zie de plot hiernaast.

De oplossing van de ongelijkheid is

$-\frac{5}{6}\pi \leq x \leq -\frac{1}{6}\pi$ of $\frac{1}{6}\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$.



c Los eerst $\cos(\pi x) = -\frac{1}{2}$ op.

$\pi x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\pi x = \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

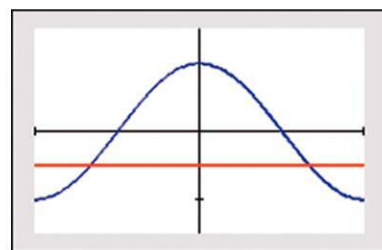
$x = \frac{2}{3} + k \cdot 2$ of $x = \frac{4}{3} + k \cdot 2$

De oplossingen op $[-1, 1]$ zijn $x = -\frac{2}{3}$ en $x = \frac{2}{3}$.

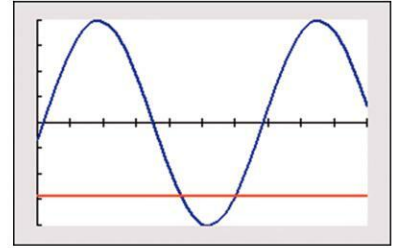
Zie de plot hiernaast.

De oplossing van de ongelijkheid is

$-1 \leq x < -\frac{2}{3}$ of $\frac{2}{3} < x \leq 1$.



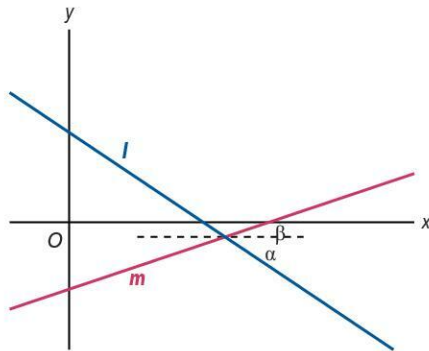
- d** Los eerst $4 \sin\left(\frac{1}{10}\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right) = -2\sqrt{2}$ op, ofwel $\sin\left(\frac{1}{10}\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
- $$\frac{1}{10}\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{1}{10}\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$
- $$\frac{1}{10}x - \frac{1}{20}\pi = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{1}{10}x - \frac{1}{20}\pi = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$
- $$\frac{1}{10}x = \frac{3}{10}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{1}{10}x = \frac{18}{10}\pi + k \cdot 2\pi$$
- $$x = 3\pi + k \cdot 20\pi \text{ of } x = 18\pi + k \cdot 20\pi$$
- De oplossingen op $[0, 30\pi]$ zijn $x = 3\pi$ en $x = 18\pi$.
Zie de plot hiernaast.
De oplossing van de ongelijkheid is $0 \leq x \leq 3\pi$ of $18\pi \leq x \leq 30\pi$.



Hoofdstuk 13 Cirkels

- 3 a** $n: 5x + 2y - 8 = 0$ ofwel $2y = -5x + 8$ of ook $y = -\frac{5}{2}x + 4$
Een vergelijking van m is van de vorm $y = \frac{2}{5}x + b$.
 $P(-5, 4)$ invullen geeft $4 = \frac{2}{5} \cdot -5 + b$, dus $b = 6$.
Een vergelijking van m is $y = \frac{2}{5}x + 6$.
- b** Het midden van lijnstuk AB is $(3, 1)$.
De richtingscoëfficiënt van lijn AB is $\frac{-3 - 5}{1 - 5} = 2$.
Een vergelijking van de middelloodlijn is van de vorm $y = -\frac{1}{2}x + b$.
 $(3, 1)$ invullen geeft $1 = -\frac{1}{2} \cdot 3 + b$, dus $b = 2\frac{1}{2}$.
Een vergelijking van de middelloodlijn is $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$.
- 7 a** De lijn l door R loodrecht op n heeft richtingscoëfficiënt $-\frac{12}{5}$.
 $R(5, -9)$ invullen in $y = -\frac{12}{5}x + b$ geeft $-9 = -\frac{12}{5} \cdot 5 + b$ dus $b = 3$.
 $l: y = -2\frac{2}{5}x + 3$
Voor het snijpunt T van l en n geldt $-2\frac{2}{5}x + 3 = \frac{5}{12}x + 3$.
 $-2\frac{49}{60}x = 0$
 $x = 0$ en $y = 3$, dus $T(0, 3)$.
 $d(R, n) = RT = \sqrt{(0 - 5)^2 + (3 - -9)^2} = \sqrt{169} = 13$
- b** $m: 3x - 2y + 1 = 0$ ofwel $m: y = 1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
De lijn k door S loodrecht op m heeft richtingscoëfficiënt $-\frac{2}{3}$.
 $S(2, -3)$ invullen in $y = -\frac{2}{3}x + b$ geeft $-3 = -\frac{2}{3} \cdot 2 + b$, dus $b = -1\frac{2}{3}$.
 $k: y = -\frac{2}{3}x - 1\frac{2}{3}$
Voor het snijpunt V van k en m geldt $-\frac{2}{3}x - 1\frac{2}{3} = 1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.
 $-4x - 10 = 9x + 3$
 $-13x = 13$, dus $x = -1$ en $y = 1\frac{1}{2} \cdot -1 + \frac{1}{2} = -1$, dus $V(-1, -1)$.
 $d(S, m) = SV = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (-1 - -3)^2} = \sqrt{13}$

10 a



- b $l: y = -\frac{2}{3}x + 2$ en $m: y = \frac{1}{3}x - 1\frac{1}{2}$
 $\tan(\alpha) = \frac{2}{3}$ geeft $\alpha = 33,690\dots^\circ$
 $\tan(\beta) = \frac{1}{3}$ geeft $\beta = 18,434\dots^\circ$
 $\angle(l, m) = \alpha + \beta \approx 52^\circ$

- 14 a De straal van c is $AB = \sqrt{(5-1)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{20}$.
 $c: (x-1)^2 + (y-4)^2 = 20$
b Invullen van $(-1, 0)$ in de cirkelvergelijking geeft $(-1-1)^2 + (0-4)^2 = 20$,
dit klopt dus C ligt op c .
c Het midden van lijnstuk BC is $M(\frac{1}{2}(5+(-1)), \frac{1}{2}(2+0))$ ofwel $M(2, 1)$.
De straal van d is $MB = \sqrt{(5-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{10}$.
 $d: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$
d Invullen van de coördinaten van A en C in de cirkelvergelijking geeft
 $(1-2)^2 + (4-1)^2 = 10$, klopt dus A op c .
 $(-1-2)^2 + (0-1)^2 = 10$, klopt dus C op c .
e Het middelpunt is $(3, -18)$ en de straal is $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

- 18 a $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 3 = 0$
 $x^2 + 6x + y^2 - 4y + 3 = 0$
 $(x+3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 + 3 = 0$
 $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 10$
Middelpunt $(-3, 2)$ en straal $\sqrt{10}$.
b $x^2 + y^2 + x - 5y + 2\frac{1}{2} = 0$
 $x^2 + x + y^2 - 5y + 2\frac{1}{2} = 0$
 $(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + (y - 2\frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} = 0$
 $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - 2\frac{1}{2})^2 = 4$
Middelpunt $(-\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$ en straal 2.
c $x^2 + y^2 = 80x + 18y$
 $x^2 - 80x + y^2 - 18y = 0$
 $(x-40)^2 - 1600 + (y-9)^2 - 81 = 0$
 $(x-40)^2 + (y-9)^2 = 1681$
Middelpunt $(40, 9)$ en straal $\sqrt{1681} = 41$.

- 21 a** Substitutie van $y = -2x - 5$ in de cirkelvergelijking geeft

$$x^2 + (-2x - 5)^2 = 10$$

$$x^2 + 4x^2 + 20x + 25 = 10$$

$$5x^2 + 20x + 15 = 0$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$(x + 1)(x + 3) = 0$$

$$x = -1 \text{ of } x = -3$$

$$x = -1 \text{ geeft } y = -2 \cdot -1 - 5 = -3 \text{ en } x = -3 \text{ geeft } y = -2 \cdot -3 - 5 = 1$$

De snijpunten zijn $(-1, -3)$ en $(-3, 1)$.

- b** Substitutie van $y = \frac{1}{3}x + 2$ in de cirkelvergelijking geeft

$$(x - 2)^2 + \left(\frac{1}{3}x + 2 - 1\right)^2 = 25$$

$$(x - 2)^2 + \left(\frac{1}{3}x + 1\right)^2 = 25$$

$$x^2 - 4x + 4 + \frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + 1 = 25$$

$$1\frac{1}{9}x^2 - 3\frac{1}{3}x - 20 = 0$$

$$10x^2 - 30x - 180 = 0$$

$$x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$(x + 3)(x - 6) = 0$$

$$x = -3 \text{ of } x = 6$$

$$x = -3 \text{ geeft } y = \frac{1}{3} \cdot -3 + 2 = 1 \text{ en } x = 6 \text{ geeft } y = \frac{1}{3} \cdot 6 + 2 = 4$$

De snijpunten zijn $(-3, 1)$ en $(6, 4)$.

- c** $l: x - 5y + 24 = 0$ ofwel $l: x = 5y - 24$

Substitutie van $x = 5y - 24$ in de cirkelvergelijking geeft

$$(5y - 24)^2 + y^2 + 2(5y - 24) - 4y = 8$$

$$25y^2 - 240y + 576 + y^2 + 10y - 48 - 4y - 8 = 0$$

$$26y^2 - 234y + 520 = 0$$

$$y^2 - 9y + 20 = 0$$

$$(y - 4)(y - 5) = 0$$

$$y = 4 \text{ of } y = 5$$

$$y = 4 \text{ geeft } x = 5 \cdot 4 - 24 = -4 \text{ en } y = 5 \text{ geeft } x = 5 \cdot 5 - 24 = 1$$

De snijpunten zijn $(-4, 4)$ en $(1, 5)$.

- 25 a** Invullen van $(3, \sqrt{20})$ in c geeft

$$3^2 + (\sqrt{20})^2 - 6 \cdot 3 = 11$$

$$9 + 20 - 18 = 11 \text{ en dat klopt, dus punt } A \text{ ligt op cirkel } c.$$

- b** Bereken eerst de coördinaten van het middelpunt van de cirkel.

$$x^2 + y^2 - 6x = 11$$

$$x^2 - 6x + y^2 = 11$$

$$(x - 3)^2 - 9 + y^2 = 11$$

$$(x - 3)^2 + y^2 = 20, \text{ dus het middelpunt is } M(3, 0).$$

Lijn MA is de lijn $x = 3$.

De raaklijn is dan de lijn $y = \sqrt{20}$.

- c** Controleer of punt B op c ligt: $1 + 4 - 6 \cdot -1 = 11$, dat klopt.

$$\text{De richtingscoëfficiënt van lijn } MB \text{ is } \frac{-2 - 0}{-1 - 3} = \frac{1}{2}.$$

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is -2 .

Invullen van $B(-1, -2)$ in de vergelijking $y = -2x + b$ geeft $-2 = -2 \cdot -1 + b$, dus $b = -4$ en de raaklijn is $y = -2x - 4$.

- 30 a** $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 3$
 $x^2 - 4x + y^2 + 2y = 3$
 $(x - 2)^2 - 4 + (y + 1)^2 - 1 = 3$
 $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 8$, dus het middelpunt is $M(2, -1)$ en de straal $r = \sqrt{8}$.
 $MA^2 = (1 - 2)^2 + (2 - (-1))^2 = 10$, dus $MA = \sqrt{10}$.
 $MA > r$, dus punt A ligt buiten de cirkel.
 $d(A, c) = MA - r = \sqrt{10} - \sqrt{8} = \sqrt{10} - 2\sqrt{2}$
- b** $MB^2 = (1 - 2)^2 + (1 - (-1))^2 = 5$, dus $MB = \sqrt{5}$.
 $MB < r$, dus punt B ligt binnen de cirkel.
 $d(B, c) = r - MB = \sqrt{8} - \sqrt{5} = 2\sqrt{2} - \sqrt{5}$
- c** Het middelpunt van cirkel d is $M(-3, -4)$ en de straal is $\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.
 $MP^2 = (15 - (-3))^2 + (2 - (-4))^2 = 360$, dus $MP = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}$.
 $MP > r$, dus punt P ligt buiten de cirkel.
 $d(P, d) = MP - r = 6\sqrt{10} - 2\sqrt{10} = 4\sqrt{10}$

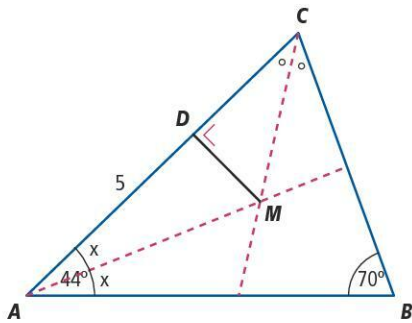
- 32 a** $c_2: x^2 + y^2 + 10x - 4y + 20 = 0$
 $c_2: x^2 + 10x + y^2 - 4y + 20 = 0$
 $c_2: (x + 5)^2 - 25 + (y - 2)^2 - 4 + 20 = 0$
 $c_2: (x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 9$ dus het middelpunt is $N(-5, 2)$ en de straal 3.
 $c_3: (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$ heeft middelpunt $P(3, -1)$ en straal 4.
 $NP = \sqrt{(3 - (-5))^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{73}$
 $d(c_2, c_3) = NP - r_2 - r_3 = \sqrt{73} - 3 - 4 = \sqrt{73} - 7$
- b** $d(c_1, c_3) = 0$, want de cirkels snijden elkaar.
- c** $c_1: x^2 + y^2 + 8x - 2y = 8$
 $c_1: x^2 + 8x + y^2 - 2y = 8$
 $c_1: (x + 4)^2 - 16 + (y - 1)^2 - 1 = 8$
 $c_1: (x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 25$ dus het middelpunt is $M(-4, 1)$ en straal $r_1 = 5$.
 $MN = \sqrt{(-5 - (-4))^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{2}$
 $d(c_1, c_2) = r_1 - r_2 - MN = 5 - 3 - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}$

- 34 a** $l: 2x + y = 25$ ofwel $l: y = -2x + 25$
 c heeft middelpunt $M(0, 0)$ en straal $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
De loodlijn uit M op l heeft als vergelijking $y = \frac{1}{2}x$.
Voor het snijpunt S van l en deze loodlijn geldt
 $-2x + 25 = \frac{1}{2}x$
 $-2\frac{1}{2}x = -25$
 $x = 10$ en $y = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ en $S(10, 5)$.
 $MS = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$
 $d(l, c) = MS - r = 5\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$
- b** $l: y = x + 6$ en c heeft middelpunt $M(8, 0)$ en straal $r = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.
De loodlijn uit M op l heeft als vergelijking $y = -x + b$.
 $M(8, 0)$ invullen geeft $0 = -8 + b$ dus $b = 8$.
De loodlijn heeft als vergelijking $y = -x + 8$.
Voor het snijpunt S van l en deze loodlijn geldt
 $x + 6 = -x + 8$
 $2x = 2$
 $x = 1$ en $y = -1 + 8 = 7$ en $S(1, 7)$.
 $MS = \sqrt{(1 - 8)^2 + (7 - 0)^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$
 $d(l, c) = MS - r = 7\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

- c $l: x - 2y = 6$ ofwel $l: y = \frac{1}{2}x - 3$
 c heeft als middelpunt $M(-1, 4)$ en straal $r = \sqrt{5}$.
 De loodlijn m uit M op l heeft als vergelijking $y = -2x + b$
 $M(-1, 4)$ invullen geeft $4 = -2 \cdot -1 + b$ dus $b = 2$.
 De loodlijn heeft als vergelijking $y = -2x + 2$.
 Voor het snijpunt S van l en deze loodlijn geldt
 $\frac{1}{2}x - 3 = -2x + 2$
 $2\frac{1}{2}x = 5$
 $x = 2$ en $y = -2 \cdot 2 + 2 = -2$ en $S(2, -2)$.
 $MS = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (-2 - 4)^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
 $d(l, c) = MS - r = 3\sqrt{5} - \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

- 37 a** Het middelpunt M van de omgeschreven cirkel is het snijpunt van de middelloodlijnen l en m van de zijden AB en AC .
 Het midden van zijde AB is $(-1, 4)$ en het midden van zijde AC is $(-2, 1)$.
 De richtingscoëfficiënt van lijn AB is $\frac{1-7}{3-(-5)} = -\frac{3}{4}$.
 Een vergelijking van l is van de vorm $y = \frac{4}{3}x + b$.
 Invullen van $(-1, 4)$ geeft $4 = \frac{4}{3} \cdot -1 + b$, dus $b = 5\frac{1}{3}$ en $l: y = \frac{4}{3}x + 5\frac{1}{3}$.
 De richtingscoëfficiënt van lijn AC is $\frac{-5-7}{1-(-5)} = -2$.
 Een vergelijking van m is van de vorm $y = \frac{1}{2}x + b$.
 Invullen van $(-2, 1)$ in $1 = \frac{1}{2} \cdot -2 + b$ geeft $b = 2$ en $m: y = \frac{1}{2}x + 2$.
 Voor het snijpunt van l en m geldt
 $\frac{4}{3}x + 5\frac{1}{3} = \frac{1}{2}x + 2$
 $8x + 32 = 3x + 12$
 $5x = -20$
 $x = -4$ en $y = \frac{1}{2} \cdot -4 + 2 = 0$ dus $M(-4, 0)$.
 $r = MA = \sqrt{(-4 - (-5))^2 + (7 - 0)^2} = \sqrt{50}$
 Een vergelijking van de omgeschreven cirkel is $(x + 4)^2 + y^2 = 50$.
- b** Het middelpunt M van de omgeschreven cirkel is het snijpunt M van de middelloodlijnen l en m van de zijden AB en AC .
 Het midden van zijde AB is $(1, 10)$ en het midden van zijde AC is $(2, 7)$.
 De richtingscoëfficiënt van lijn AB is $\frac{11-9}{-1-3} = -\frac{1}{2}$.
 Een vergelijking van l is van de vorm $y = 2x + b$.
 Invullen van $(1, 10)$ geeft $10 = 2 \cdot 1 + b$, dus $b = 8$ en $l: y = 2x + 8$.
 De richtingscoëfficiënt van lijn AC is $\frac{5-9}{1-3} = 2$.
 Een vergelijking van m is van de vorm $y = -\frac{1}{2}x + b$.
 Invullen van $(2, 7)$ geeft $7 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + b$ dus $b = 8$ en $m: y = -\frac{1}{2}x + 8$.
 l en m gaan beide door $(0, 8)$, dus $M(0, 8)$.
 $r = MA = \sqrt{(0 - 3)^2 + (8 - 9)^2} = \sqrt{10}$
 Een vergelijking van de omgeschreven cirkel is $x^2 + (y - 8)^2 = 10$.

40 a



- b $\angle C = 180^\circ - 70^\circ - 44^\circ = 66^\circ$, $\angle MAC = 22^\circ$ en $\angle MCA = 33^\circ$
 $\angle AMC = 180^\circ - 33^\circ - 22^\circ = 125^\circ$

De sinusregel in $\triangle MAC$ geeft

$$\frac{5}{\sin(125^\circ)} = \frac{AM}{\sin(33^\circ)}, \text{ dus } AM = \frac{5 \cdot \sin(33^\circ)}{\sin(125^\circ)} = 3,324\dots$$

$$\text{In } \triangle ADM \text{ is } \sin(22^\circ) = \frac{MD}{AM}, \text{ dus } MD = AM \cdot \sin(22^\circ) = 1,245\dots$$

De straal van de ingeschreven cirkel is ongeveer 1,2.

Hoofdstuk 14 Verbanden

- 3 a Tabel A: voor elk tweetal waarden a en b geldt $\frac{b}{a} = 3$, dus b is recht evenredig met a .

Tabel B: er geldt niet: $\frac{b}{a} = \text{constant}$, dus b is niet recht evenredig met a .

Tabel C: voor elk tweetal waarden a en b geldt $\frac{b}{a} = -2\frac{1}{3}$, dus b is recht evenredig met a .

- b Bij tabel A is de evenredigheidsconstante 3, bij tabel C is die $-2\frac{1}{3}$.

- 6 a l : de richtingscoëfficiënt is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-20 - 10}{10 - -5} = \frac{-30}{15} = -2$.

$x = -5$ en $y = 10$ substitueren in $y = -2x + b$ geeft $10 = -2 \cdot -5 + b$ dus $b = 0$. Het startgetal is $b = 0$.

$$m: \text{ de richtingscoëfficiënt is } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4,9 - 4,5}{8,5 - 3,5} = \frac{0,4}{5} = 0,08.$$

$x = 3,5$ en $y = 4,5$ substitueren in $y = 0,08x + b$ geeft $4,5 = 0,08 \cdot 3,5 + b$ dus $b = 4,22$. Het startgetal is $b = 4,22$.

$$n: \text{ de richtingscoëfficiënt is } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{18 - 16}{90 - 80} = \frac{2}{10} = 0,2.$$

$x = 80$ en $y = 16$ substitueren in $y = 0,2x + b$ geeft $16 = 0,2 \cdot 80 + b$ dus $b = 0$. Het startgetal is $b = 0$.

- b De lijnen met startgetal 0 gaan door de oorsprong en die horen bij een recht evenredig verband.

Dat zijn de lijnen l en n .

- c Bij de recht evenredige verbanden is de evenredigheidsconstante gelijk aan de richtingscoëfficiënt. De evenredigheidsconstante voor l is dus -2 en voor n is die $0,2$.

10 a	p	0,6	1,2	3	6	64
	q	20	10	4	2	$\frac{3}{16}$

a	1	3	5	10	25
b	225	75	45	22,5	9

b $p \cdot q = 12$

$$q = \frac{12}{p}$$

$$p = \frac{12}{q}$$

$$a \cdot b = 225$$

$$b = \frac{225}{a}$$

$$a = \frac{225}{b}$$

13 a $K = \frac{c}{q^5}$

Invullen van $q = 4$ en $K = 0,3125$ geeft $0,3125 = \frac{c}{4^5}$ ofwel

$$c = 0,3125 \cdot 4^5 = 320.$$

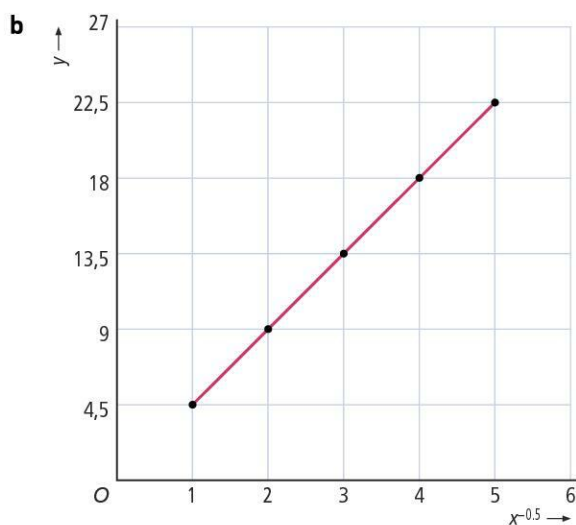
Een formule is $K = \frac{320}{q^5}$

b

q	1	2	3	4	6	9
k	320	10	1,3169	0,3125	0,0412	0,0054

18 a

x	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$
$x^{-0,5}$	1	2	3	4	5
y	4,5	9	13,5	18	22,5



c De grafiek is een rechte lijn.

d Op de horizontale as zet je $x^{2,7}$ en op de verticale as y .
De richtingscoëfficiënt is 12.

22 a $r = 1$ en $d = 12$ invullen bij $d = c \cdot r^n$ geeft $12 = c \cdot 1^n$ dus $c = 12$.

b $r = 36$ en $d = 86$ invullen geeft $86 = 12 \cdot 36^n$.

$$36^n = \frac{86}{12} = 7,166...$$

$$n = {}^{36}\log(7,166...) \approx 0,55$$

Een formule is $d = 12 \cdot r^{0,55}$.

c $r = 400$ geeft $d = 12 \cdot 400^{0,55} \approx 324$

d $d = 148$ geeft $148 = 12 \cdot r^{0,55}$

$$r^{0,55} = \frac{148}{12} = 12,333...$$

$$r = (12,333...)^\frac{1}{0,55} \approx 96$$

27 Een formule bij tabel A is van de vorm $h = c \cdot t^p$.
 $t = 1$ en $h = 5,2$ invullen geeft $5,2 = c \cdot 1^p$ dus $c = 5,2$.
 $t = 12$ en $h = 29,6$ invullen geeft $29,6 = 5,2 \cdot 12^p$.
 $12^p = \frac{29,6}{5,2} = 5,692\dots$
 $p = {}^{12}\log(5,692\dots) \approx 0,70$
 Een formule bij tabel A is $h = 5,2 \cdot t^{0,70}$.

Een formule bij tabel B is van de vorm $h = c \cdot t^p$.
 $t = 4$ en $h = 96$ invullen geeft $96 = c \cdot 4^p$.
 $t = 16$ en $h = 768$ invullen geeft $768 = c \cdot 16^p$.

$$\frac{c \cdot 16^p}{c \cdot 4^p} = \frac{768}{96}$$
 $4^p = 8$

$$p = {}^4\log(8) = 1,5 \text{ en } c = \frac{96}{4^{1,5}} = 12$$

Een formule bij tabel B is $h = 12 \cdot t^{1,5}$.

Een formule bij tabel C is van de vorm $h = c \cdot t^p$.
 $t = 5$ en $h = 69$ invullen geeft $69 = c \cdot 5^p$.
 $t = 21$ en $h = 21,9$ invullen geeft $21,9 = c \cdot 21^p$.

$$\frac{c \cdot 21^p}{c \cdot 5^p} = \frac{21,9}{69}$$
 $4,2^p = 0,317\dots$
 $p = {}^{4,2}\log(0,317\dots) = -0,799\dots$ en $c = \frac{69}{5^{-0,799\dots}} \approx 250$

Een formule is $h = 250 \cdot t^{-0,80}$.

30 $\log(P) = -0,92t + 3,4$
 $P = 10^{-0,92t + 3,4}$
 $P = 10^{-0,92t} \cdot 10^{3,4}$
 $P = 10^{3,4} \cdot (10^{-0,92})^t$
 $P \approx 2512 \cdot 0,12^t$ dus $b \approx 2512$ en $g \approx 0,12$.

31 a $\log(R) = p \cdot \log(S) + q$
 $S = 10$ en $R = 125,6$ invullen geeft
 $\log(125,6) = p \cdot \log(10) + q$
 $\log(125,6) = p \cdot 1 + q$
 $q = \log(125,6) - p$
 $S = 25$ en $R = 1132,5$ invullen geeft
 $\log(1132,5) = p \cdot \log(25) + q$
 $q = \log(1132,5) - p \cdot \log(25)$
 De beide vergelijkingen gelijkstellen geeft
 $\log(125,6) - p = \log(1132,5) - p \cdot \log(25)$
 $p \cdot \log(25) - p = \log(1132,5) - \log(125,6)$
 $p \cdot (\log(25) - 1) = \log(1132,5) - \log(125,6)$
 $p = \frac{\log(1132,5) - \log(125,6)}{\log(25) - 1} = 2,399\dots$ en
 $q = \log(125,6) - 2,399\dots = -0,300\dots$
 Dus $p \approx 2,4$ en $q \approx -0,3$.

b $\log(R) = 2,4 \cdot \log(S) - 0,3$
 $\log(R) = \log(S^{2,4}) + \log(10^{-0,3})$
 $\log(R) = \log(10^{-0,3} \cdot S^{2,4})$ en dus $R = 10^{-0,3} \cdot S^{2,4}$

- 1** Voor de grafiek van functie f geldt: het maximum is 3 en het minimum is -1 .
De evenwichtsstand d is $\frac{1}{2}(3 + (-1)) = 1$. en de amplitude a is $3 - 1 = 2$.

De periode is 6, dus $b = \frac{2\pi}{6} = \frac{1}{3}\pi$.

Omdat de top op de y -as ligt is het handig een functievoorschrift met cosinus te kiezen, dan is $c = x_{\max} = 0$.

Een functievoorschrift is $f(x) = 1 + 2\cos(\frac{1}{3}\pi x)$.

Voor de grafiek van functie g geldt: het maximum is 8 en het minimum -8 .

De evenwichtsstand d is 0 en de amplitude a is 8.

De periode is 0,02 dus $b = \frac{2\pi}{0,02} = 100\pi$.

De grafiek gaat in $(0, 0)$ dalend door de evenwichtsstand, dus een functievoorschrift is $g(x) = -8\sin(100\pi x)$.

- 2 a** $\cos(3\frac{5}{6}\pi) = \cos(-\frac{1}{6}\pi) = \cos(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
b $\sin(-\frac{3}{4}\pi) = -\sin(\frac{3}{4}\pi) = -\sin(\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
c $\sin(8\frac{1}{2}\pi) \cdot \cos(\frac{1}{4}\pi) = \sin(\frac{1}{2}\pi) \cdot \cos(\frac{1}{4}\pi) = 1 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
d $\sin(-1\frac{2}{3}\pi) \cdot \cos(4\frac{1}{6}\pi) = \sin(\frac{1}{3}\pi) \cdot \cos(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}$

- 3 a** De lengte van de drempel is gelijk aan één periode, dus $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 4$.

De lengte is 4 meter.

- b** 10 cm is gelijk aan 0,1 meter, dus de ongelijkheid
 $0,06 + 0,06\sin(\frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{2}\pi) > 0,1$ moet worden opgelost.

Invoer: $y_1 = 0,06 + 0,06\sin(0,5\pi x - 0,5\pi)$ en $y_2 = 0,1$

Venster: $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 0,12$

Optie: snijpunt

Dit geeft $x \approx 1,465$ of $x \approx 2,535$

$2,535 - 1,465 = 1,07$

De gevraagde lengte is 1,07 m of 107 cm.

- c** De periode is 12 m, dus $c = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi$.

De hoogte is 14 cm = 0,14 m, dus de amplitude, die is in deze formule b , is
 $0,14 : 2 = 0,07$ (m).

De evenwichtsstand a is $0,14 - 0,07 = 0,07$ (m).

Bij $x = 0$ is een minimum, dus de grafiek gaat bij een kwart periode stijgend door de evenwichtsstand, dat is bij $x = 12 : 4 = 3$. De grafiek is dus 3 naar rechts geschoven, dat geeft $d = 3$.

Conclusie: $a = 0,07$, $b = 0,07$, $c = \frac{1}{6}\pi$ en $d = 3$.

- 4 a** $2\sin(3x) = \sqrt{2}$

$\sin(3x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Stel $3x = q$, dit geeft $\sin(q) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $q = \frac{1}{4}\pi$ en $q = \frac{3}{4}\pi$.

$3x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

De oplossingen op $[-\pi, \pi]$ zijn:

$x = \frac{1}{12}\pi$ of $x = \frac{3}{4}\pi$ of $x = -\frac{7}{12}\pi$ of $x = \frac{1}{4}\pi$ of $x = \frac{11}{12}\pi$ of $x = -\frac{5}{12}\pi$.

b $1 + 2\cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right) = 0$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right) = -\frac{1}{2}$$

Stel $\frac{1}{2}\pi x = q$, dit geeft $\cos(q) = -\frac{1}{2}$ en $q = \frac{2}{3}\pi$ of $q = 1\frac{1}{3}\pi$.

$$\frac{1}{2}\pi x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{1}{2}\pi x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{4}{3} + k \cdot 4 \text{ of } x = 2\frac{2}{3} + k \cdot 4$$

De oplossingen op $[-\pi, \pi]$ zijn:

$$x = 1\frac{1}{3} \text{ of } x = -2\frac{2}{3} \text{ of } x = -1\frac{1}{3} \text{ of } x = 2\frac{2}{3}.$$

c $\sin\left(x - \frac{2}{3}\pi\right)(\cos(2(x - \pi))) = 0$

$$\sin\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) = 0 \text{ of } (\cos(2(x - \pi))) = 0$$

$$x - \frac{2}{3}\pi = 0 + k \cdot \pi \text{ of } 2(x - \pi) = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi \text{ of } 2x - 2\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi \text{ of } 2x = 2\frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi \text{ of } x = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

De oplossingen op $[-\pi, \pi]$ zijn:

$$x = \frac{2}{3}\pi \text{ of } x = -\frac{1}{3}\pi \text{ of } x = \frac{3}{4}\pi \text{ of } x = \frac{1}{4}\pi \text{ of } x = -\frac{1}{4}\pi \text{ of } x = -\frac{3}{4}\pi.$$

d $3 - 3\sin^2(x) = \sin^2(x)$

$$3 = 4\sin^2(x), \text{ dus } \sin^2(x) = \frac{3}{4}$$

$$\sin(x) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ of } \sin(x) = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

De oplossingen op $[-\pi, \pi]$ zijn:

$$x = \frac{1}{3}\pi \text{ of } x = \frac{2}{3}\pi \text{ of } x = -\frac{1}{3}\pi \text{ of } x = -\frac{2}{3}\pi.$$

5 a Invoer: $y_1 = \sin(2x) + \cos\left(2\left(x - \frac{1}{8}\pi\right)\right)$ en $y_2 = 1$

Venster: $0 \leq x \leq 2\pi$, $-2 \leq y \leq 2$

Optie: snijpunt

Dit geeft $x \approx 0,09$ of $x \approx 1,09$ of $x \approx 3,23$ of $x \approx 4,23$

De oplossing van de ongelijkheid is $0,09 < x < 1,09$ of $3,23 < x < 4,23$.

b Opties: minimum en maximum

Het minimum is $-1,85$ (als $x \approx 2,16$ of $x \approx 5,30$).

Het maximum is $1,85$ (als $x \approx 0,59$ of $x \approx 3,73$).

c De evenwichtsstand d is $\frac{-1,85 + 1,85}{2} = 0$.

De amplitude a is $1,85 - 0 = 1,85$.

Twee opeenvolgende toppen zijn $(2,16; -1,85)$ en $(3,73; 1,85)$.

Een halve periode is $3,73 - 2,16 = 1,57$, dus de periode is $2 \times 1,57 = 3,14$.

$$\text{Daaruit volgt } b = \frac{2\pi}{3,14} \approx 2.$$

Optie: nulpunt geeft $x \approx 2,95$ dus de grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand in $(2,95; 0)$, en dat geeft $c = 2,95$.

Conclusie: $a = 1,85$, $b = 2$, $c = 2,95$ en $d = 0$.

- 6 a** De evenwichtsstand is 1 en de amplitude is 3, dus het maximum is $1 + 3 = 4$.

Het maximum wordt bereikt als $2x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$.

$$2x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ ofwel } x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$$

De waarden op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $x = \frac{5}{12}\pi$ en $x = 1\frac{5}{12}\pi$.

- b** De periode van f is $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

Als er vier oplossingen zijn dan moet het maximum van f_a groter zijn dan het getal 5.

In dit geval moet de amplitude groter zijn dan 4, dus $a > 4$ of $a < -4$.

c $-2\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) + 1 = 2$

$$-2\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = 1$$

$$\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$$

Stel $2x - \frac{1}{3}\pi = q$ dit geeft $\sin(q) = -\frac{1}{2}$ met als oplossing hiervan

$$q = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } q = 1\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$2x - \frac{1}{3}\pi = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x - \frac{1}{3}\pi = 1\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$2x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = 2\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi \text{ of } x = 1\frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi$$

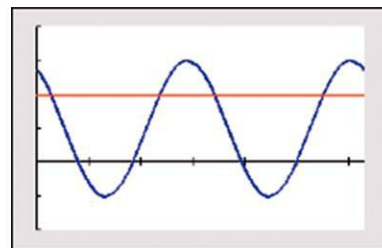
De oplossingen op $[0, 2\pi]$ zijn:

$$x = \frac{1}{12}\pi \text{ of } x = \frac{3}{4}\pi \text{ of } x = 1\frac{1}{12}\pi \text{ of } x = 1\frac{3}{4}\pi.$$

Zie de plot hiernaast.

De oplossing van $-2\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) + 1 > 2$ is

$$0 \leq x < \frac{1}{12}\pi \text{ of } \frac{3}{4}\pi < x < 1\frac{1}{12}\pi \text{ of } 1\frac{3}{4}\pi < x \leq 2\pi.$$



Hoofdstuk 13 Cirkels

- 1 a** $m: 5y = 3x + 5$ substitueren in $l: 2x - 5y + 15 = 0$ geeft

$$2x - (3x + 5) + 15 = 0$$

$$2x - 3x - 5 + 15 = 0$$

$$-x + 10 = 0$$

$$x = 10$$

$$5y = 3 \cdot 10 + 5 = 35, \text{ dus } y = 7.$$

Het snijpunt van l en m is $(10, 7)$.

- b** Herleiden van de vergelijking van l geeft $y = \frac{2}{5}x + 3$.

De hoek van l met een horizontale lijn is $\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = 21,801\dots^\circ$.

Herleiden van de vergelijking van m geeft $y = \frac{3}{5}x + 1$.

De hoek van m met een horizontale lijn is $\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 30,963\dots^\circ$.

De hoek tussen l en m is $30,963\dots^\circ - 21,801\dots^\circ \approx 9^\circ$.

- 2 a** Als $P(1, -2)$ het middelpunt is van de ingeschreven cirkel, dan moet P op gelijke afstanden van de drie zijden van de driehoek liggen.

De afstand van P tot de lijn $l: x = -4$ is $1 - (-4) = 5$.

De afstand van P tot de lijn $m: y = -7$ is $-2 - (-7) = 5$.

$n: 3x + 4y = 20$ ofwel $n: 4y = -3x + 20$ ofwel $n: y = -\frac{3}{4}x + 5$.

De richtingscoëfficiënt van de loodlijn uit $P(1, -2)$ op lijn n is $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$,

want $\frac{4}{3} \cdot -\frac{3}{4} = -1$. Een vergelijking van de loodlijn is $y = 1\frac{1}{3}x + b$.

$P(1, -2)$ invullen geeft $-2 = 1\frac{1}{3} \cdot 1 + b$, dus $b = -3\frac{1}{3}$.

Een vergelijking van de loodlijn uit P op n is $y = 1\frac{1}{3}x - 3\frac{1}{3}$.

Het snijpunt S van deze loodlijn en lijn n berekenen geeft

$$1\frac{1}{3}x - 3\frac{1}{3} = -\frac{3}{4}x + 5$$

$$15x - 40 = -9x + 60$$

$$25x = 100 \text{ dus } x = 4 \text{ en } y = -\frac{3}{4} \cdot 4 + 5 = 2, \text{ het snijpunt is } S(4, 2).$$

De afstand van P tot n is $PS = \sqrt{(4-1)^2 + (2-(-2))^2} = 5$.

Punt P ligt op gelijke afstanden van de drie zijden van driehoek ABC , dus P is het middelpunt van de ingeschreven cirkel.

- b** Het middelpunt is $(1, -2)$ en de straal is 5, dus een vergelijking van de ingeschreven cirkel is $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$.

- 3 a** $x^2 + y^2 + 10x + 14y - 26 = 0$

$$x^2 + 10x + y^2 + 14y = 26$$

$$(x+5)^2 - 25 + (y+7)^2 - 49 = 26$$

De middelpuntsvergelijking van de cirkel is $(x+5)^2 + (y+7)^2 = 100$.

Het middelpunt is $(-5, -7)$ en de straal is 10.

- b** $x^2 + y^2 - 5x + 12y = 0$

$$x^2 - 5x + y^2 + 12y = 0$$

$$\left(x - 2\frac{1}{2}\right)^2 - 6\frac{1}{4} + (y+6)^2 - 36 = 0$$

De middelpuntsvergelijking van de cirkel is $\left(x - 2\frac{1}{2}\right)^2 + (y+6)^2 = 42\frac{1}{4}$.

Het middelpunt is $\left(2\frac{1}{2}, -6\right)$ en de straal is $\sqrt{42\frac{1}{4}} = 6\frac{1}{2}$.

- c** $x^2 + y^2 = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + 1\frac{31}{36}$

$$x^2 - \frac{2}{3}x + y^2 - \frac{1}{3}y = 1\frac{31}{36}$$

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} + \left(y - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} = 1\frac{31}{36}$$

De middelpuntsvergelijking van de cirkel is $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{6}\right)^2 = 2$.

Het middelpunt is $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$ en de straal is $\sqrt{2}$.

- 4** $c: x^2 + y^2 - 60x + 40y = 1200$

$$c: x^2 - 60x + y^2 + 40y = 1200$$

$$c: (x-30)^2 - 900 + (y+20)^2 - 400 = 1200$$

$c: (x-30)^2 + (y+20)^2 = 2500$ dus middelpunt $M(30, -20)$ en straal 50.

$MA = \sqrt{(-10-30)^2 + (-50-(-20))^2} = 50$, dus A ligt op de cirkel.

De afstand van punt A tot de cirkel is 0.

$MB = \sqrt{(40-30)^2 + (-70-(-20))^2} = \sqrt{2600}$, dus B ligt buiten de cirkel.

De afstand van punt B tot de cirkel is $\sqrt{2600} - 50$.

$MC = \sqrt{(75-30)^2 + (-40-(-20))^2} = \sqrt{2425}$, dus C ligt binnen de cirkel.

De afstand van punt C tot de cirkel is $50 - \sqrt{2425}$.

- 5 a** $l: x - 7y + 24 = 0$ ofwel $l: x = 7y - 24$ substitueren in de vergelijking van c
 geeft $(7y - 24)^2 + y^2 + 4(7y - 24) + 8y = 30$.
 $49y^2 - 336y + 576 + y^2 + 28y - 96 + 8y - 30 = 0$
 $50y^2 - 300y + 450 = 0$
 $y^2 - 6y + 9 = 0$
 $(y - 3)^2 = 0$, dus er is één oplossing, $y = 3$.
 $x = 7 \cdot 3 - 24 = -3$, dus het raakpunt is $(-3, 3)$.

- b** Herleiden van de vergelijking van m geeft $x = -\frac{3}{4}y + 1\frac{1}{4}$.
 Substitutie in de vergelijking van c geeft
 $(-\frac{3}{4}y + 1\frac{1}{4})^2 + y^2 + 4(-\frac{3}{4}y + 1\frac{1}{4}) + 8y = 30$.
 $\frac{9}{16}y^2 - \frac{30}{16}y + \frac{25}{16} + y^2 - 3y + 5 + 8y - 30 = 0$
 $9y^2 - 30y + 25 + 16y^2 - 48y + 80 + 128y - 480 = 0$
 $25y^2 + 50y - 375 = 0$
 $y^2 + 2y - 15 = 0$
 $(y + 5)(y - 3) = 0$
 $y = -5$ of $y = 3$
 $x = -\frac{3}{4} \cdot -5 + 1\frac{1}{4} = 5$ of $x = -\frac{3}{4} \cdot 3 + 1\frac{1}{4} = -1$
 De snijpunten zijn $(5, -5)$ en $(-1, 3)$.

- c** De middelpuntsvergelijking van de cirkel is $(x + 2)^2 - 4 + (y + 4)^2 - 16 = 30$
 ofwel $(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 50$. Het middelpunt is $M(-2, -4)$.

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn naar raakpunt $P(-7, 1)$ is $\frac{1 - (-4)}{-7 - (-2)} = -1$,

dus de richtingscoëfficiënt van de raaklijn is 1.

Een vergelijking van de raaklijn is van de vorm $y = x + q$.

$P(-7, 1)$ invullen geeft $1 = -7 + q$, dus $q = 8$.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = x + 8$.

- 6 a** Het middelpunt van cirkel c_1 is $(2, 1)$ en de straal is $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.
 Het middelpunt van cirkel c_2 is $(3, 3)$ en de straal is $\sqrt{2}$.
 De afstand van de middelpunten van de cirkels is $\sqrt{(3 - 2)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{5}$.
 c_2 ligt geheel binnen c_1 dus $d(c_1, c_2) = 3\sqrt{2} - \sqrt{5} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{5}$.

- b** Herleiden van de vergelijking van l geeft $y = \frac{4}{3}x + 6\frac{2}{3}$.
 De richtingscoëfficiënt van de loodlijn vanuit het middelpunt $M(2, 1)$
 op l is $-\frac{3}{4}$, dus een vergelijking is van de vorm $y = -\frac{3}{4}x + b$.
 $M(2, 1)$ invullen geeft $1 = -\frac{3}{4} \cdot 2 + b$, dus $b = 2\frac{1}{2}$ en een vergelijking van de
 loodlijn is $y = -\frac{3}{4}x + 2\frac{1}{2}$.
 $1\frac{1}{3}x + 6\frac{2}{3} = -\frac{3}{4}x + 2\frac{1}{2}$
 $16x + 80 = -9x + 30$
 $25x = -50$, dus $x = -2$ en $y = -\frac{3}{4} \cdot -2 + 2\frac{1}{2} = 4$.
 Het snijpunt van l met de loodlijn is $S(-2, 4)$.
 $MS = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (4 - 1)^2} = 5$
 De afstand van l tot c_1 is $5 - \sqrt{18} = 5 - 3\sqrt{2}$.

7 a Alle lijnen gaan door $P(0, 2)$.

b Substitutie van $y = px + 2$ in $x^2 + y^2 - 8x + 6 = 0$ geeft

$$x^2 + (px + 2)^2 - 8x + 6 = 0$$

$$x^2 + p^2x^2 + 4px + 4 - 8x + 6 = 0$$

$$(1 + p^2)x^2 + (4p - 8)x + 10 = 0$$

Als de lijnen de cirkel raken, dan geldt $D = 0$, dus

$$(4p - 8)^2 - 4(1 + p^2) \cdot 10 = 0$$

$$16p^2 - 64p + 64 - 40 - 40p^2 = 0$$

$$-24p^2 - 64p + 24 = 0$$

$$3p^2 + 8p - 3 = 0$$

$$p = \frac{-8 - \sqrt{8^2 - 4 \cdot 3 \cdot -3}}{6} \text{ of } p = \frac{-8 + \sqrt{8^2 - 4 \cdot 3 \cdot -3}}{6}$$

$$p = \frac{-8 - 10}{6} = -3 \text{ of } p = \frac{-8 + 10}{6} = \frac{1}{3}$$

$p = -3$ geeft $10x^2 - 20x + 10 = 0$ ofwel $x^2 - 2x + 1 = 0$ of $(x - 1)^2 = 0$.

Voor het raakpunt geldt $x = 1$, het raakpunt is $Q(1, -1)$.

$p = \frac{1}{3}$ geeft $\frac{1}{9}x^2 - \frac{6}{3}x + 10 = 0$ ofwel $x^2 - 6x + 9 = 0$ of $(x - 3)^2 = 0$.

Voor het raakpunt geldt $x = 3$, het raakpunt is $R(3, 3)$.

c $c: x^2 - 8x + y^2 + 6 = 0$ ofwel $c: (x - 4)^2 + y^2 = 10$.

Het middelpunt is $M(4, 0)$ en de straal is $\sqrt{10}$.

Hieruit volgt $MQ = MR = \sqrt{10}$.

$$PQ = \sqrt{(1 - 0)^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{10}$$

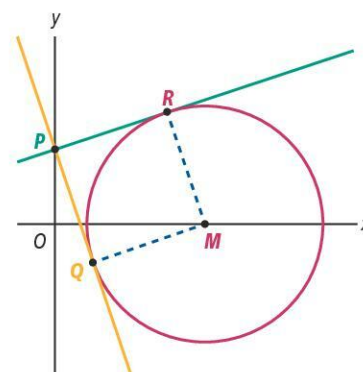
$$PR = \sqrt{(3 - 0)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{10}$$

Vierhoek $PQMR$ heeft dus gelijke zijden en is een ruit.

De richtingscoëfficiënten van PQ en PR zijn -3 en $\frac{1}{3}$.

$-3 \cdot \frac{1}{3} = -1$, dus $\angle QPR = 90^\circ$.

Hieruit volgt dat vierhoek $PQMR$ een vierkant is.



8 De middelloodlijn van zijde OA is $x = 2\frac{1}{2}$.

Het midden van zijde OB is $(1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$ en de richtingscoëfficiënt van lijn OB is 1 .

De richtingscoëfficiënt van de middelloodlijn van zijde OB is -1 .

De middelloodlijn van zijde OB is van de vorm $y = -x + b$.

De coördinaten van $(1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$ invullen geeft $1\frac{1}{2} = -1 \cdot 1\frac{1}{2} + b$ dus $b = 3$.

Een vergelijking van de middelloodlijn van OB is $y = -x + 3$.

De middelloodlijn van OB snijden met de middelloodlijn van OA geeft

$y = -2\frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{2}$. Het snijpunt van de middelloodlijnen is $S(2\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

De straal van de omgeschreven cirkel is $OS = \sqrt{(2\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{6\frac{1}{2}}$.

Een vergelijking van de omgeschreven cirkel is $(x - 2\frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 6\frac{1}{2}$.

Hoofdstuk 14 Verbanden

- 1 a** A: $-4 \times -14,05 = 5 \times 11,24 = 8 \times 7,025 = 20 \times 2,81 = 56,2$, dus p en q zijn omgekeerd evenredig.
 B: $-8 \times 2,875 = -5 \times 4,6 = 4 \times -5,75 = 20 \times -1,15 = -23$, dus p en q zijn omgekeerd evenredig.
 C: $1,6 : -2 = -3,2 : 4 = -9,6 : 12 = -20 : 25 = -0,8$, dus p en q zijn recht evenredig.
 D: $7,8 : 3 = 18,2 : 7 = 31,2 : 12 = 54,6 : 21 = 2,6$, dus p en q zijn recht evenredig.
- b** C: de evenredigheidsconstante is $-0,8$
 D: de evenredigheidsconstante is $2,6$
- c** A: $q = \frac{56,2}{p}$ en B: $q = \frac{-23}{p}$
- 2 a** De omtrek van het bord is $P = z + z + \frac{1}{2}\pi z = (2 + \frac{1}{2}\pi)z$.
 De omtrek van het bord is van de vorm $P = c \cdot z$ met de evenredigheidsconstante c is $2 + \frac{1}{2}\pi$.
- b** $A = \frac{1}{8}\pi \cdot z^2 + \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot z^2 = (\frac{1}{8}\pi + \frac{1}{4}\sqrt{3}) \cdot z^2$
 De oppervlakte van het bord is van de vorm $A = c \cdot z^2$.
 Op de horizontale as moet je dus z^2 uitzetten.
- c** $A = (\frac{1}{8}\pi + \frac{1}{4}\sqrt{3}) \cdot z^2 \approx 0,83 \cdot z^2$
 De richtingscoëfficiënt van de lijn is ongeveer $0,83$.
- d** Stel de afmetingen zijn vermenigvuldigd met een factor k .
 Dan wordt de oppervlakte vermenigvuldigd met k^2 .
 $k^2 = 5$, dus de afmetingen moeten met factor $\sqrt{5}$ vergroot worden.
- 3 a** Stel de factor is g , dan moet gelden $g^{2,9} = \frac{86,41}{67,34} \approx 1,283...$ en dus
 $g = 1,283...^{\frac{1}{2,9}} \approx 1,09$. De waarde bij $p = 0$ is gelijk aan $67,34 : 1,09^3 \approx 52$.
 De formule zou dan zijn $q = 52 \cdot 1,09^p$.
 Controle van de overige gegevens:
 $p = 12$ geeft $q = 52 \cdot 1,09^{12} \approx 146,26$
 $p = 18,5$ geeft $q = 52 \cdot 1,09^{18,5} \approx 256,09$
 $p = 24,3$ geeft $q = 52 \cdot 1,09^{24,3} \approx 422,15$
 Conclusie: er past dus een exponentieel verband bij de tabel en de formule hierbij is $q = 52 \cdot 1,09^p$.
- b** Stel bij tabel B hoort een verband van de vorm $T = a \cdot k^b$.
 Gebruik bijvoorbeeld $11,87 = a \cdot 3^b$ en $1925,2 = a \cdot 25^b$.
 $\frac{a \cdot 25^b}{a \cdot 3^b} = \frac{1925,2}{11,87}$, dus $(8\frac{1}{3})^b = 162,190...$
 $b = {}^{8\frac{1}{3}}\log(162,190...) = 2,400...$ en $a = \frac{11,87}{3^{2,400...}} \approx 0,85$
 De formule is $T = 0,85 \cdot k^{2,4}$.
 Controle van de overige gegevens:
 $k = 6,7$ geeft $T = 0,85 \cdot 6,7^{2,4} \approx 81,66$
 $k = 18,5$ geeft $T = 0,85 \cdot 18,5^{2,4} \approx 934,61$
 $k = 33,5$ geeft $T = 0,85 \cdot 33,5^{2,4} \approx 3886,2$, ze kloppen allemaal.

$$\begin{aligned} \text{c } 200 &= 52 \cdot 1,09^p \\ 1,09^p &= \frac{200}{52} \approx 3,846... \\ p &= {}^{1,09}\log(3,846...) \approx 15,63 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } 0,12 &= 0,85 \cdot k^{2,4} \\ k^{2,4} &= \frac{0,12}{0,85} \approx 0,141... \\ k &= (0,141...)^\frac{1}{2,4} \approx 0,44 \end{aligned}$$

4 a Je kunt de formule schrijven als $a = \frac{1974}{T^2}$

Hieruit volgt dat a en T^2 omgekeerd evenredig zijn.

b Dan wordt T^2 vier keer zo klein, dus a wordt vier keer zo groot.

c Uit $a = \frac{1974}{T^2}$ volgt $T^2 = \frac{1974}{a}$, dus $T = \sqrt{\frac{1974}{a}}$

d a moet zes keer zo klein worden, dus $\frac{1974}{a}$ wordt zes keer zo groot.

T moet met een factor $\sqrt{6} \approx 2,45$ worden vergroot.

5 a Omdat bij (gelijkvormige) lichamen de inhoud steeds evenredig is met lengte, breedte en hoogte en omdat bovendien het gewicht evenredig is met de inhoud (denk aan soortelijke massa).

b

l	50	75	100	125	150	175
$l^{2,3}$	8084	20542	39811	66511	101160	144207
G	3,3	8,7	15,8	24,3	38,3	58,9

Bijvoorbeeld $G = 3,3$ en $l^{2,3} = 8084$ invullen in $G = c \cdot l^{2,3}$ geeft

$$c = \frac{3,3}{8084} \approx 0,0004 \text{ (de andere punten geven dezelfde waarde voor } c\text{).}$$

c Aangenomen wordt dat de bovengrens BMI evenredig is met G .

Uit opdracht b volgt $G = 0,0004 \cdot l^{2,3}$

$$\text{Dus bovengrens BMI} = \frac{c \cdot l^{2,3}}{l^2} = c \cdot l^{0,3}.$$

Neemt de leeftijd toe, dan neemt de lengte toe.

$l^{0,3}$ is een stijgende functie, dus neemt ook de bovengrens BMI toe.

6 a $B = \frac{q}{\sqrt{C}}$ invullen in $A = \frac{P}{B^2}$ geeft $A = \frac{P}{\left(\frac{q}{\sqrt{C}}\right)^2} = \frac{P}{\frac{q^2}{C}} = \frac{P \cdot C}{q^2} = \frac{P}{q^2} \cdot C$

Dus A is recht evenredig met C .

b $\sqrt{C} \cdot B = q$, dus als B door drie wordt gedeeld, wordt $\sqrt{C}$ drie keer zo groot.

Dus dan wordt C vermenigvuldigd met factor 9.



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.
Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.
Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.