

MODERNE WISKUNDE AC



Noordhoff

$$\sin_1(x) = \cos(x - \tfrac{1}{2}\pi)$$

12e editie

Moderne Wiskunde

vwo AC deel 2

Serieoverzicht Tweede Fase

	havo		vwo		
klas 4	A 1	B 1	AC 1		B 1
klas 5	A 2	B 2	AC 2		B 2
klas 6	A 3	B 3	A 3	C 3	B 3
			A 4	C 4	B 4

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleenen.



0 / 20

© 2020 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsenauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-89216-6

12e editie

Moderne Wiskunde

vwo AC deel 2

Harm Bakker
Bert Boon
Dick Bos
Ferdi Doddema
Wim Doekes
Gerben van der Hoek
Ilse de Jong
Boris Nolte
Gerard van Proosdij
Rindert Reijenga
Geertrui Schaberg
Ron Sinkeldam
Carolijn Tacken

7 Kansen 6

- Voorkennis 8
- 7.1 Experimentele kansen 10
- 7.2 Theoretische kansen 14
- 7.3 Kansen berekenen 18
- 7.4 Kansen en roosters 22
- 7.5 Vaasmodel 26
- 7.6 Kansverdeling en verwachtingswaarde 30
- 7.7 Gemengde opdrachten 34
 - Onderzoeksopdrachten 35
 - Samenvatting 36
 - Test jezelf 40
 - Extra oefening 42

8A De afgeleide 44

- Voorkennis 46
- 8A.1 Hellingen berekenen 48
- 8A.2 Hellinggrafieken 52
- 8A.3 De afgeleide functie 56
- 8A.4 Regels voor differentiëren 60
- 8A.5 Maxima en minima 64
- 8A.6 Gemengde opdrachten 68
 - Onderzoeksopdrachten 69
 - Samenvatting 70
 - Test jezelf 74
 - Extra oefening 76

8C Vorm en ruimte 78

- Voorkennis 80
- 8C.1 Gelijkvormigheid 82
- 8C.2 De gulden snede 86
- 8C.3 Aanzichten 90
- 8C.4 Werken met aanzichten 94
- 8C.5 Symmetrie 98
- 8C.6 Inhoud en schaalvergroting 102
- 8C.7 Gemengde opdrachten 106
 - Onderzoeksopdrachten 107
 - Samenvatting 108
 - Test jezelf 112
 - Extra oefening 114

Vaardigheden 4 116

- Systematisch tellen 118
- Lineaire formules 120

9 Formules herleiden 122

- Voorkennis 124
- 9.1 Lineaire formules 126
- 9.2 Gebroken formules 130
- 9.3 Wortelformules 134
- 9.4 Machtsformules 138
- 9.5 Substituties 142
- 9.6 Gemengde opdrachten 146
 - Onderzoeksopdrachten 147
 - Samenvatting 148
 - Test jezelf 152
 - Extra oefening 154

10 Verdelingen en steekproeven (met ICT) 156

- Voorkennis 158
- 10.1 Frequentieverdelingen 160
- 10.2 Continue en discrete variabelen 164
- 10.3 De normale verdeling 168
- 10.4 Werken met de normale verdeling 172
- 10.5 Steekproeven 176
- 10.6 Gemengde opdrachten 180
 - Onderzoeksopdrachten 181
 - Samenvatting 182
 - Test jezelf 186
 - Extra oefening 188

Vaardigheden 5 190

- Metten 192
- Vergelijkingen en ongelijkheden oplossen 193
- Formules herleiden 195
- Hellingen benaderen 195

11 Toevalsvariabelen 196

- 11.1 Voorkennis 198
- 11.1 Stochasten 200
- 11.2 Standaardafwijking van een stochast 204
- 11.3 Normale verdeling 208
- 11.4 Rekenregels voor stochasten 212
- 11.5 De $\sqrt{n}$ -wet 216
- 11.6 Gemengde opdrachten 220
- Onderzoeksopdrachten 221
- Samenvatting 222
- Test jezelf 226
- Extra oefening 228

Keuzeonderwerpen 230

Uit de geschiedenis van de wiskunde 232

Trefwoorden 252

Moderne Wiskunde

vwo AC deel 2



An aerial photograph of a town. In the foreground, there's a large parking lot filled with cars. To the right, a river flows through the town. The town itself is built on a hillside, with many houses having red-tiled roofs. There are green spaces and trees throughout the town.

SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In de onderbouw heb je kennis gemaakt met het begrip kans en heb je eenvoudige kansproblemen leren oplossen.

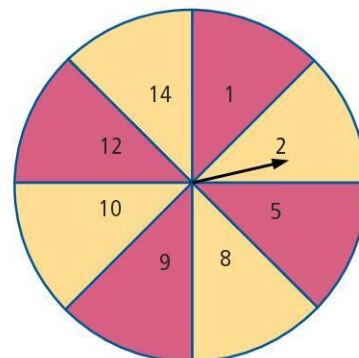
In dit hoofdstuk leer je nieuwe kansproblemen op te lossen. Je hebt daarbij kennis nodig hoe je in complexe situaties het aantal mogelijkheden telt. Daarmee sluit dit hoofdstuk ook aan op wat je in hoofdstuk 1 hebt geleerd.

In de delen 2 en 3 wordt deze kennis toegepast in allerlei situaties waarin toeval een rol speelt. Je bent daardoor in staat om bijvoorbeeld betrouwbare uitspraken te doen naar aanleiding van de uitslag van een steekproef.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 45
- *Ordenen en structureren* opdracht 27
- *Abstraheren* opdracht 23

- V1** Een kanstol is verdeeld in acht even grote sectoren. De wijzer geeft na draaien een willekeurige sector aan.
- Hoe groot is de kans dat de wijzer de 5 aanwijst? Geef je antwoord in een breuk.
 - Hoe groot is de kans dat de wijzer een even getal aanwijst? Geef je antwoord als een decimaal getal.
 - Hoeveel procent is de kans dat de wijzer een rood vak aanwijst?
 - Hoe groot is de kans dat de wijzer een rood vak met een oneven getal aanwijst? Geef je antwoord op drie manieren.
 - De wijzer wordt 1000 keer gedraaid. Annet redeneert: 'De kans op het getal 14 is hier $\frac{1}{8}$, dus de wijzer zal $\frac{1}{8} \times 1000 = 125$ keer op het getal 14 blijven staan.' Wat vind je van deze redenering?



Aanpak

Hoe bereken je een kans bij een kansexperiment waarbij alle mogelijkheden even waarschijnlijk zijn?

- Tel het totaal aantal mogelijkheden.
- Tel hoeveel van die mogelijkheden voldoen aan de gestelde eis.
- Deel het aantal mogelijkheden die voldoen aan de gestelde eis door het totaal aantal mogelijkheden.

Voorbeeld

Bereken de kans dat bij het gooien met twee dobbelstenen de som van de ogen gelijk is aan 5.

Oplossing

- In een schema kun je alle mogelijkheden weergeven. Je telt een totaal van $6 \times 6 = 36$ mogelijkheden.
- Vier van de mogelijkheden voldoen aan de gestelde eis.
- De kans dat de som van de ogen gelijk is aan 5 is $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

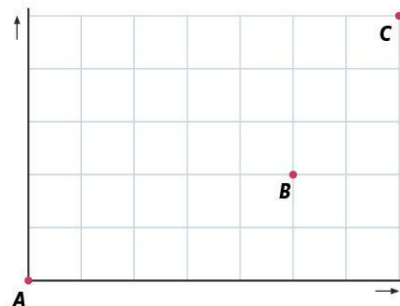
	1	2	3	4	5	6
1	(1-1)	(1-2)	(1-3)	(1-4)	(1-5)	(1-6)
2	(2-1)	(2-2)	(2-3)	(2-4)	(2-5)	(2-6)
3	(3-1)	(3-2)	(3-3)	(3-4)	(3-5)	(3-6)
4	(4-1)	(4-2)	(4-3)	(4-4)	(4-5)	(4-6)
5	(5-1)	(5-2)	(5-3)	(5-4)	(5-5)	(5-6)
6	(6-1)	(6-2)	(6-3)	(6-4)	(6-5)	(6-6)

- V2** Een kaartspel bestaat uit 52 kaarten, waarvan 13 harten, 13 ruiten, 13 schoppen en 13 klaveren.
- Janet trekt één kaart uit het hele spel. Bereken de kans dat de kaart een schoppen is.
 - Nadat Janet de kaart heeft teruggelegd, pakt Charl een kaart. Bereken de kans op een schoppen vrouw.
 - Charl legt de schoppenvrouw niet terug. Nu trekt Matthijs een kaart. Hoe groot is de kans op een vrouw?

- V3** Je gooit met twee dobbelstenen.
- Bereken de kans dat de som van de ogen gelijk is aan 4.
 - Bereken de kans dat het verschil van de ogen gelijk is aan 0.
 - Bereken de kans dat de getallen 1, 2 en 3 op geen van beide dobbelstenen voorkomen.

Bij herhaalde keuze uit twee alternatieven waarbij het aantal per alternatief vastligt gebruik je een rooster als telmodel. Een route van lengte n met r stappen naar rechts komt overeen met een combinatie van r uit n . Het aantal combinaties van r uit n noteer je als $\binom{n}{r}$ en bereken je met je rekenmachine. In andere gevallen kan een boomdiagram een handig telmodel zijn.

- V4**
- Leg uit dat er 21 kortste routes zijn er van A naar B .
 - Hoeveel kortste routes zijn er van A naar C ?
 - Waarom is $\binom{12}{5}$ gelijk aan $\binom{12}{7}$?
 - Hoeveel kortste routes zijn er van A via B naar C ?



- V5** In de vaas zitten acht verschillend gekleurde knikkers.
- Jon haalt de acht knikkers uit de vaas en legt ze op een rijtje naast elkaar.
Hoeveel verschillende rijtjes kan Jon maken?
 - Peter haalt vier knikkers uit de vaas.
Hoeveel verschillende rijtjes kan Peter maken?
 - Joke pakt een knikker, schrijft de kleur op en legt de knikker weer terug. Dit herhaalt ze nog vier keer.
Hoeveel verschillende rijtjes kan Joke maken?



- V6** Je gooit vijf keer met een dobbelsteen en noteert na elke worp het aantal ogen. Er ontstaat zo een getal van vijf cijfers.
- Hoeveel verschillende getallen zijn er zo mogelijk?
 - Maike gooit drie keer een 1 en twee keer een 6.
Hoeveel verschillende getallen kun je maken met deze cijfers?
 - Merel gooit drie keer een 4, één keer een 5 en één keer een 6.
Hoeveel verschillende getallen kan zij maken?
 - Hoeveel verschillende getallen kun je maken met vijf verschillende uitkomsten van de worp met een dobbelsteen?

7.1 Experimentele kansen

Je leert

- wat een experimentele kans is
- hoe je met toevalsgetallen een experiment simuleert

Leerroutes

- ondersteunend: 1—02—3—4—5—6
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6
- uitdagend: 1—2—4—5—6—U1

Als een punaise valt, komt hij 'op zijn rug' of 'op zijn kant' terecht. Stel je hebt een doosje met 20 punaises.

- Kun je hiermee laten zien dat bij een worp met een punaise de kans op 'rugligging' niet gelijk is aan 50%?
- Is deze kans groter of kleiner dan $\frac{1}{2}$?



- 1 Masho en Peter spelen vaak darts met elkaar. Masho heeft bijgehouden hoe vaak hij gewonnen heeft en hoe vaak Peter gewonnen heeft. In de tabel staat het resultaat. Hoe groot schat je op basis van deze tabel de kans dat Masho een spelletje darts wint van Peter? Geef je antwoord in een breuk en als procenten.

	aantal keer gewonnen
Masho	148
Peter	102

Theorie

Bij een **toevalsexperiment** of **kansexperiment** staat het resultaat (de uitkomst) niet van tevoren vast, omdat de uitkomst door toeval wordt bepaald. Een uitkomst of een aantal uitkomsten bij elkaar heet een **gebeurtenis**. Door een experiment vele malen uit te voeren en het aantal keren dat de gebeurtenis optreedt te delen door het totale aantal experimenten, kun je met de gevonden **relatieve frequentie** de kans op de gebeurtenis schatten. De op deze manier gevonden schatting heet een **experimentele kans**.

Kansen kun je aangeven met procenten, maar vaak wordt gekozen voor een getal tussen 0 en 1. In plaats van 'de kans is 13%' of 'de kans is 13 op 100' zeg je: 'De kans is $\frac{13}{100}$ of 0,13'.

Voorbeeld

Een tuinder heeft een grote partij zonnebloemzaadjes. Om vast te stellen hoe groot de kans is dat de zaadjes kiemen, zaait hij een aantal zaadjes. Hoe groot schat je de kans dat een willekeurig zaadje uit deze partij kiemt?

gekiemd	ja	nee
aantal	68	12

Oplossing

Het is een experimentele kans. Het aantal gezaaide zaadjes is $68 + 12 = 80$.

De relatieve frequentie van het aantal gekiemde zaadjes is $\frac{68}{80} = \frac{17}{20}$.

De experimentele kans op de gebeurtenis 'Het zaadje kiemt' is $\frac{17}{20}$ of 0,85.

Ondersteunende route → maak opdracht 02

2

H

Voor een kunstdriedaagse op school moeten de leerlingen een keuze maken uit muziek, dans, beeldende kunst of foto&film. De organisatie vraagt 48 leerlingen om een keuze te maken. Zo hoopt zij een beeld te krijgen hoe er gekozen gaat worden. In de tabel zie je hoe de leerlingen gekozen hebben. Ook zie je hoe de verdeling naar geslacht is. Geef je antwoorden op de volgende vragen als een getal tussen 0 en 1.

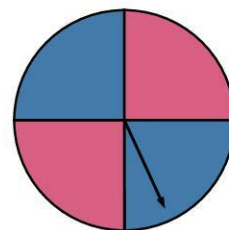
- Bereken de kans dat een willekeurige leerling beeldende kunst kiest.
- Hoe groot is de kans dat een leerling muziek of dans kiest?
- Bereken de kans dat een jongen voor dans kiest.
- Bereken de kans dat een willekeurige leerling die foto&film kiest een meisje is.

	j	m	totaal
muziek	5	4	9
dans	1	9	10
beeldende kunst	2	3	5
foto&film	14	10	24
totaal	22	26	48

3

Jeroen draait de kanstol 80 keer en noteert 48 keer blauw.

- Hoe groot is op basis van dit experiment de kans op de uitkomst blauw?
- Hoeveel keer verschilt het aantal keer blauw met het aantal dat je zou verwachten?



4

Marlijn komt uit een gezin met vier kinderen. Hij heeft drie zussen. Hij wil weten hoe groot de kans is dat een willekeurig gezin met vier kinderen bestaat uit drie meisjes en een jongen. Hij gooit met vier geldstukken. Elke geldstuk stelt een kind voor. Het kind is een meisje als munt wordt gegoooid en het kind is een jongen als er kop wordt gegoooid. Dit experiment herhaalt hij 10 keer, 25 keer en 100 keer. Hij telt telkens het aantal keer dat hij munt heeft gegoooid. In de tabel lees je bijvoorbeeld af dat van de 25 keer gooien met vier geldstukken er zeven keer een rijtje lag met drie keer munt.

aantal worpen met vier geldstukken	aantal keren munt				
	0	1	2	3	4
10 keer	0	3	4	1	2
25 keer	1	5	10	7	2
100 keer	4	24	41	26	5

- Welke gezinssamenstelling hoort bij een rijtje met 2 keer kop en 2 keer munt?
- Hoeveel keer lag er bij 100 keer gooien twee keer munt boven?
- Welke kolom kun je het beste gebruiken om de kans op een gezin met drie meisjes en een jongen te schatten? Waarom?
- Hoe groot zal Marlijn de kans op een gezin met drie meisjes en een jongen schatten?

Theorie

Rekenmachines en computers kunnen toevalsgetallen of randomgetallen produceren. Dat zijn willekeurige getallen uit het interval $\langle 0, 1 \rangle$. Met behulp van toevalsgetallen kun je een experiment naspelen of **simuleren**.

Voorbeeld

.6181231184	.7245328176
.2050809542	.3017450175
.9846634426	.2492764264

- 5** In bepaalde delen van India worden meer jongens dan meisjes geboren. In de provincie Punjab is de verhouding van het aantal geboren jongens en het aantal geboren meisjes gelijk aan 3 : 2.

H

- Leg uit dat de kans op een meisje gelijk is aan 0,4.
- Als je let op gezinnen met vijf kinderen in de provincie Punjab, dan kun je met behulp van toevalsgetallen de samenstelling van deze gezinnen simuleren.
In het voorbeeld zie je zes toevalsgetallen. Elk getal bestaat uit 10 cijfers. Een groepje van vijf cijfers stelt een gezin van vijf kinderen voor.
Verdeel de toevalsgetallen in groepjes van vijf cijfers.
- Waarom kun je zeggen 'De cijfers 0, 1, 2 en 3 in een toevalsgetal stellen een meisje voor en de cijfers 4, 5, 6, 7, 8 en 9 stellen een jongen voor.'?
- Hoeveel gezinnen met drie meisjes zijn op deze manier gesimuleerd?
- Bereken de experimentele kans op een gezin met drie meisjes en twee jongens.
- Hoe groot is de experimentele kans op een gezin met vijf jongens?

- 6** In de tabel staat het resultaat van een simulatie van 100 keer, 500 keer en 5000 keer gooien met een geldstuk.
- Hoeveel verschilt het aantal keren kop bij 100 keer gooien in de tabel met het aantal dat je zou verwachten?
 - En hoeveel bij 500 keer? En bij 5000 keer?
 - Bereken hoeveel procent het percentage kop bij 100 keer, 500 keer en 5000 keer gooien afwijkt ten opzichte van het percentage dat je verwacht.
 - Welke conclusie trek je uit je antwoorden van opdracht c?

aantal worpen

	100	500	5000
kop	58	262	2576
munt	42	238	2424

Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

02

Een school heeft geteld welke profielen hun leerlingen in vwo 4 volgen. In de tabel zie je, uitgesplitst naar geslacht, het resultaat. Zo zijn er bijvoorbeeld 83 meisjes in vwo 4 die het profiel NT volgen.

- Vul de tabel verder in.
- Hoeveel leerlingen volgen in vwo 4 het profiel EM?
- Leg uit dat de kans dat een willekeurige leerling in vwo 4 het profiel EM volgt, gelijk is aan $\frac{169}{540} \approx 0,31$.
- Leg uit dat de kans dat een willekeurig meisje in vwo 4 het profiel CM volgt, gelijk is aan $\frac{29}{287} \approx 0,10$.
- Hoeveel leerlingen in vwo 4 volgen het profiel NG of het profiel NT?
- Bereken de kans dat een leerling in vwo 4 het profiel NG of het profiel NT volgt. Geef je antwoord als een getal tussen 0 en 1.
- Bereken de kans dat een willekeurige leerling in vwo 4 die het profiel NG volgt een meisje is.

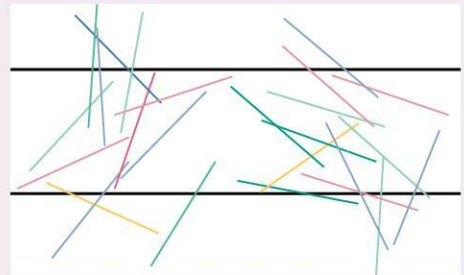
profiel	geslacht		totaal
	j	m	
CM	8	29	37
EM	83	86	...
NG	48	89	...
NT	114	83	...
totaal	253	...	...

Uitdagende opdrachten

U1

De Franse wetenschapper de Buffon (1707-1788) voerde een bijzonder toevalsexperiment uit. Hij liet 25 naalden van gelijke lengte vallen op een stuk papier waarop twee evenwijdige zwarte lijnen waren getekend. Daarbij is de afstand tussen de evenwijdige lijnen gelijk aan de lengte van de naalden. Hij lette op de gebeurtenis dat een willekeurige naald één van de zwarte lijnen snijdt. In de tekening zie je zo'n uitgevoerd experiment.

- Bereken op basis van de tekening de experimentele kans op die gebeurtenis.
- De Buffon toonde aan dat je ook kon beredeneren hoe groot deze kans moest zijn. Hij kwam op $\frac{2}{\pi}$.
Gebruik dit resultaat en je antwoord bij opdracht a om een benadering van π te geven.
- Hoe zou je een betere benadering van het getal π kunnen krijgen?



7.2 Theoretische kansen

Je leert

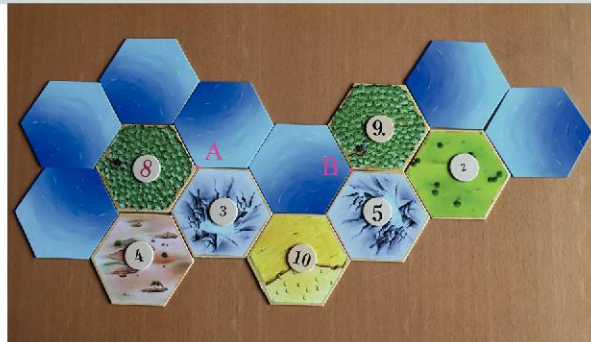
- wat een theoretische kans is
- wat een complementaire gebeurtenis is

Leerroutes

- ondersteunend: 7—08—9—10—11—012—13
- doorlopend: 7—8—9—10—11—12—13
- uitdagend: 7—8—9—10—11—13—U2

Marten moet in het spel Catan een dorp plaatsen in A of in B. In het spel wordt met twee dobbelstenen gegooid. Degene die zijn dorp in A heeft geplaatst, krijgt een grondstof als in totaal 3 of 8 ogen worden gegooid. Degene die zijn dorp in B heeft geplaatst, krijgt een grondstof als in totaal 5 of 9 ogen worden gegooid. Marten denkt dat hij met een dorp in A vaker een grondstof krijgt dan met een dorp in B.

- Ben je dat met hem eens?



7 In een vaas zitten vier witte, zes blauwe en vijf rode knikkers.

a Piet trekt een rode knikker.

Hoe groot is de kans dat de volgende knikker die hij trekt ook rood is?

b Alle knikkers gaan weer terug in de vaas en Marleen trekt twee witte knikkers en een blauwe knikker uit de vaas.

Bereken de kans dat de volgende knikker die zij trekt rood is.

Theorie

Kansen op gebeurtenissen die je vindt door redeneren en rekenen, heten **theoretische kansen**.

$P(G)$ is de notatie voor de kans op gebeurtenis G .

Bij toevalsexperimenten waarbij alle mogelijke N uitkomsten even waarschijnlijk zijn, bereken je de kans op een gebeurtenis G als volgt: deel het aantal voor G gunstige uitkomsten $n(G)$

door het totaal aantal uitkomsten N , dus $P(G) = \frac{n(G)}{N}$

Voorbeeld

Bij een worp met twee dobbelstenen is gebeurtenis A : De som van de ogen is vier.

Bereken $P(A)$.

Oplossing

Er zijn $6 \times 6 = 36$ mogelijke uitkomsten.

Er zijn 3 gunstige uitkomsten, namelijk (1,3), (2,2) en (3,1).

$$P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 08

8 Liesbeth stelt Peter de volgende weddenschap voor:

‘We gooien met twee dobbelstenen. Als er een 1 of een 6 valt of allebei, dan win ik. Anders win jij.’

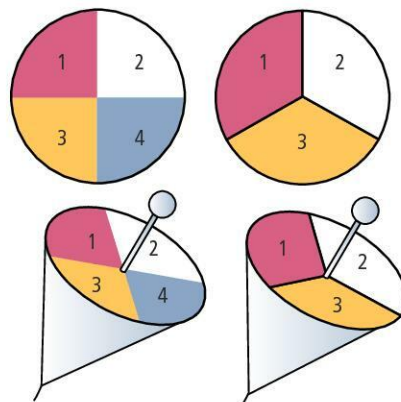
Maak een schema met alle mogelijke uitkomsten en zoek uit of deze weddenschap gunstig is voor Peter.

- 9 Je ziet twee kanstolletjes. Het tolletje links heeft vier gelijke delen en het tolletje rechts heeft drie gelijke delen. Elk tolletje wordt één keer gedraaid. Een mogelijke uitkomst is $(4 - 2)$, waarbij het tolletje links op kant 4 en het tolletje rechts op kant 2 terecht is gekomen.

- Waarom is de uitkomst $(2 - 4)$ niet mogelijk?
- Maak een schema met alle mogelijke uitkomsten.
- Bereken de kans dat de som van de getallen van een uitkomst gelijk is aan 4.
- Vul de tabel verder in.

som	2	3	4	5	6	7
kans	...	...	...	...	...	...

- Bereken de kans dat de som van de getallen van een uitkomst minstens 5 is.



Bij twee dobbelstenen, twee geldstukken of twee tolletjes kun je een alle uitkomsten overzichtelijk in een schema zetten. Bij drie dobbelstenen, drie geldstukken of drie tolletjes kun je geen schema gebruiken, maar gebruik je bijvoorbeeld een boomdiagram.

- 10 Je gooit drie keer met een geldstuk en je noteert bij elke worp kop of munt.

H

- Hoeveel mogelijke uitkomsten zijn er?
- De gebeurtenis KMM is: Je gooit eerst kop en daarna twee keer munt. Bereken $P(KMM)$.
- Op hoeveel manieren kun je één keer kop en twee keer munt gooien?
- Bereken de kans dat je één keer kop en twee keer munt gooit.
- Bereken de kans dat je twee keer kop en één keer munt gooit.



- 11 Bij een toevalsexperiment wordt met een dobbelsteen gegooid. Op het blaadje staan vijf gebeurtenissen gedefinieerd.

- Leg uit dat $P(A) = 1$.
- Waarom is $P(B) + P(C) = 1$?
- Leg zonder de kansen uit te rekenen uit dat ook moet gelden: $P(D) + P(E) = 1$.
- Hoe komt het dat $P(C) + P(E) > 1$?

A: Het aantal ogen is positief.
 B: Het aantal ogen is oneven.
 C: Het aantal ogen is even.
 D: Het aantal ogen is zes.
 E: Het aantal ogen is minder dan zes.

Theorie

Bij elk toevalsexperiment geldt dat de som van de kansen op alle uitkomsten gelijk is aan 1.

Twee gebeurtenissen heten **complementair** als ze samen alle uitkomsten bevatten, maar geen enkele uitkomst gemeenschappelijk hebben.

Het **complement** van de gebeurtenis A wordt genoteerd als $\text{niet-}A$.

Omdat $P(A) + P(\text{niet-}A) = 1$, geldt de complementregel:
 $P(A) = 1 - P(\text{niet-}A)$.

Voorbeeld

Bij een worp met twee dobbelstenen is gebeurtenis A : De som van de ogen is minstens 3.

Bereken $P(A)$.

Oplossing

De gebeurtenis $\text{niet-}A$ is: De som van de ogen is kleiner dan 3.

Daarbij hoort de uitkomst $(1, 1)$.

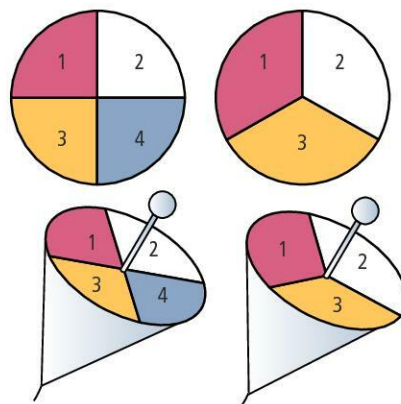
$P(\text{niet-}A) = \frac{1}{36}$ en $P(A) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$

Ondersteunende opdracht → maak opdracht 012

12 Deze opdracht gaat over de twee kanstolletjes van opdracht 9.

H

- Gebeurtenis A is: De som van de getallen van een uitkomst is gelijk aan 7.
Bereken $P(\text{niet-}A)$.
- Gebeurtenis B is: De som van de getallen van een uitkomst is gelijk aan 4.
Gebeurtenis C is: Het verschil van de getallen van een uitkomst is gelijk aan 1.
Bereken $P(B)$ en $P(C)$.
- De gebeurtenis X bestaat uit de uitkomsten waarbij gebeurtenis B wel optreedt en gebeurtenis C niet.
Bereken $P(X)$.
- Gebeurtenis D is: Het verschil van de getallen van een uitkomst is groter dan 1.
Bereken $P(\text{niet-}D)$.



- 13** Je gooit met drie dobbelstenen.
- Hoeveel mogelijke uitkomsten zijn er?
 - Bij hoeveel van die uitkomsten is de som van de ogen gelijk aan 4?
 - Gebeurtenis A is: De som van de ogen is meer dan 4.
Omschrijf de gebeurtenis $\text{niet-}A$.
 - Bereken $P(\text{niet-}A)$.
 - Gebeurtenis B is: De som van de ogen is minder dan 17.
Bereken $P(B)$.

Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

- 08**
- Petra gooit met twee dobbelstenen en let op de som van de ogen.
Vul het schema verder in.
 - Op hoeveel manieren kun je een som van acht ogen gooien?
 - Petra zegt: 'De kans op de som van acht ogen is gelijk aan $\frac{5}{36}$ '.
Hoe kun je dat beredeneren?
 - Hoeveel mogelijkheden zijn er waarbij met één of beide dobbelstenen 2 of 5 ogen wordt gegooid?
 - Bereken de kans dat met één of beide dobbelstenen 2 of 5 ogen wordt gegooid.

som	1	2	3	4	5	6
1	2	3	...	...	...	...
2	3	...	...	...	...	...
3	...	...	...	...	...	...
4	...	...	...	...	...	...
5	...	...	...	...	...	...
6	...	...	...	...	...	...

- 012**
- Je gooit met een gewone dobbelsteen en met een viervlaksdobbelsteen. Een viervlaksdobbelsteen heeft de uitkomsten 1 tot en met 4. Op de foto zie je dat met de viervlaksdobbelsteen 1 is gegooid.
- Maak een schema waarin je alle mogelijke uitkomsten aangeeft en leg uit waarom er 24 mogelijke uitkomsten zijn.
 - Gebeurtenis A is: De som van de getallen van een uitkomst is gelijk aan 7.
In hoeveel van de 24 mogelijke uitkomsten gebeurt dit?
 - Bereken $P(A)$ en $P(\text{niet-}A)$
 - Gebeurtenis B is: Het verschil van de getallen van een uitkomst is gelijk aan 1.
In hoeveel van de 24 mogelijke uitkomsten is dit het geval?
 - Bereken $P(B)$ en $P(\text{niet-}B)$.
 - Gebeurtenis X bestaat uit de uitkomsten waarbij gebeurtenis B wel optreedt en gebeurtenis A niet.
Bereken $P(X)$.



Uitdagende opdrachten

- U2**
- Bij lootje trekken voor bijvoorbeeld Sinterklaas gebeurt het nogal eens dat iemand zijn eigen lootje trekt. De vraag is hoe groot de kans is dat dit gebeurt. Abe, Bente, Charlotte en Daan besluiten om lootjes te trekken. Ze doen hun naam in een pot en trekken één voor één een naam.
- Bereken de kans dat niemand zijn eigen lootje trekt.
 - Hoe groot is de kans dat minstens één persoon zijn eigen lootje trekt?
 - Zodra iemand zijn eigen lootje trekt, worden alle lootjes weer terug gedaan in de pot en wordt er opnieuw geloot. Bereken de kans dat degene die als laatste een lootje uit de pot neemt zijn eigen lootje trekt.



7.3 Kansen berekenen

Je leert

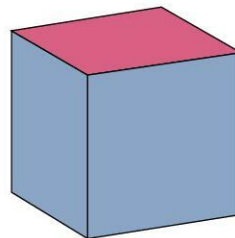
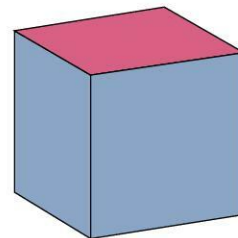
- wat een kansboom is

Leerroutes

- ondersteunend: 14–15–16–017–18–019–19
- doorlopend: 14–15–16–17–18–19–20
- uitdagend: 14–15–16–17–18–19–U3

Van een dobbelsteen worden twee vlakken rood en vier vlakken blauw gekleurd. De gebeurtenis R is: Een rood vlak ligt boven. De gebeurtenis B is: Een blauw vlak ligt boven. De kans op gebeurtenis R en de kans op gebeurtenis B zijn niet even groot, omdat er twee keer zoveel blauwe vlakken als rode vlakken zijn.

- Je gooit twee keer met deze dobbelsteen. Is de kans op gebeurtenis BB ook twee keer zo groot als de kans op gebeurtenis RR ?



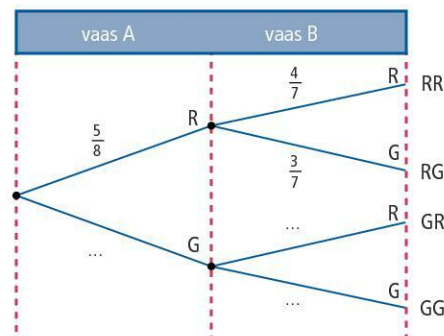
- 14** Er zijn twee vazen A en B. In vaas A zitten vijf rode en drie groene knikkers en in vaas B vier rode en drie groene knikkers. Je trekt uit iedere vaas één knikker. In het schema zie je de samenstelling van de vazen weergegeven.

- Ga na dat er 56 mogelijke uitkomsten zijn.
- Leg uit dat de kans op een rode knikker uit vaas A en een rode knikker uit vaas B gelijk is aan $\frac{5 \times 4}{8 \times 7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$.
- De gebeurtenis RG is: Je trekt een rode knikker uit vaas A en een groene knikker uit vaas B. Bereken $P(RG)$ en $P(GR)$. Zijn deze kansen gelijk?
- Bereken $P(GG)$.
- Ga na dat $P(RR) + P(RG) + P(GR) + P(GG) = 1$.

	vaas A							
	R	R	R	R	R	G	G	G
vaas B	R							
	R							
	R							
	R							
	G							
	G							
	G							

- 15** Je kunt het kansexperiment bij opdracht 14 ook weergeven met een boomdiagram.

- Leg uit waarom er bij vaas A bij de tak met rood $\frac{5}{8}$ staat.
- Wat moet er bij vaas A bij de tak met groen staan?
- Leg uit waarom bij het pakken van een knikker uit vaas B de kansen $\frac{4}{7}$ en $\frac{3}{7}$ horen.
- Wanneer je de kansen bij de takken langs de route RR in het boomdiagram vermenigvuldigt, krijg je $\frac{5}{8} \times \frac{4}{7}$. Vergelijk dit met je antwoord bij opdracht 14b.
- Bereken ook de kansen van opdracht 14c door de kansen langs de takken met elkaar te vermenigvuldigen.
- Bereken met het boomdiagram $P(GG)$.
- Hoe groot is de kans op twee knikkers van dezelfde kleur?



Theorie

Een **kansboom** is een boomdiagram met kansen langs de takken. In een kansboom kun je de **kans** op een **route** (en daarmee de kans op een uitkomst) berekenen door de **kansen** langs de takken met elkaar **te vermenigvuldigen**.

Soms bestaat een gebeurtenis uit meerdere routes. De kans op die gebeurtenis bereken je door de **kansen** op die routes bij elkaar **op te tellen**.

Voorbeeld

Bij twee vierkeuzevragen gok je het antwoord.
Hoe groot is de kans dat je één antwoord goed gokt?

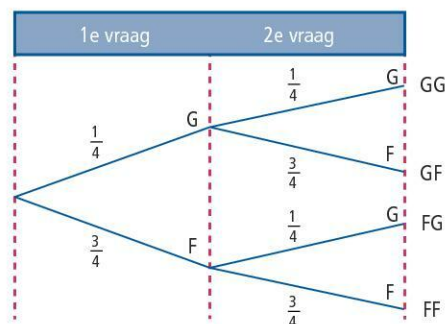
Oplossing

De kans dat je een vraag goed gokt, is $\frac{1}{4}$. De kans dat je een vraag fout gokt, is $\frac{3}{4}$.

Het gaat om de gebeurtenissen GF en FG .

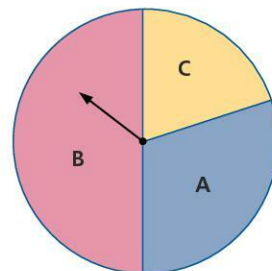
$$P(GF) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16} \text{ en } P(FG) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

$$\text{De kans dat je één vraag goed gokt, is } \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$



- 16** Bij de kanstol geldt: $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,5$ en $P(C) = 0,2$. Elke keer als er gedraaid is, wordt de uitkomst A , B of C genoteerd. Er wordt twee keer gedraaid.

- Teken de kansboom bij deze situatie.
- Gebeurtenis X is: Je draait een A en een B .
Laat zien dat $P(X) = 0,3$.
- Bereken $P(AA)$.
- Gebeurtenis Y is: Je draait twee keer dezelfde letter.
Bereken $P(Y)$.



Ondersteunende route → maak opdracht 017

- 17** Carlijn komt op weg naar school langs vier verkeerslichten. De kansen dat deze op rood staan, zijn achtereenvolgens 0,6; 0,4; 0,7 en 0,8.

- Bereken de kans dat alle vier verkeerslichten op rood staan.
- Hoe groot is de kans dat de eerste op rood staat, de tweede op groen, de derde op rood en de laatste op groen?
- Bereken de kans dat er één stoplicht op groen staat en de andere drie verkeerslichten op rood staan.

- 18** Jarne weet dat hij bij handboogschieten gemiddeld zeven van de tien keer de roos raakt. In een wedstrijd mag hij vier keer schieten.
- Bereken de kans dat Jarne alleen de eerste en de derde keer de roos raakt.
 - Hoe groot is de kans dat hij één van de vier keer de roos raakt?
 - Bereken de kans dat hij hoogstens drie keer de roos raakt.
 - Hoe groot is de kans dat hij vier keer de roos raakt?
 - Waarom zijn de kansen uit opdracht c en d bij elkaar opgeteld gelijk aan 1?

Bij vragen over 'hoogstens', 'minstens', 'meer dan' of 'minder dan' kun je gebruikmaken van de complementregel:
 $P(A) = 1 - P(\text{niet-}A)$. Dat doe je alleen als de kans op de complementaire gebeurtenis eenvoudiger is uit te rekenen.

	symbool
meer dan	>
minder dan	<
hoogstens	$\leq$
minstens	$\geq$

Ondersteunende route → maak opdracht 019

- 19** Een toets bestaat uit 20 vierkeuzevragen. Pieter weet 16 vragen zeker en moet bij vier vragen gokken.
- H**
- Bereken de kans dat Pieter alle vragen goed beantwoordt.
 - Hoe groot is de kans dat Pieter minstens één fout heeft?
 - Bereken de kans dat Pieter hoogstens twee fouten heeft.
 - Maaïke weet bij dezelfde toets 13 vragen zeker en moet bij zeven vragen gokken.
- Bereken de kans dat Maaïke minstens 15 vragen goed heeft.

- 20** Een drachtige leeuwint werpt meestal twee welpen, maar soms ook slechts één welp of zelfs drie welpen. In de tabel zie je hoe vaak dat gemiddeld voorkomt.

aantal welpen	1	2	3
relatieve frequentie in procenten	20	50	30

In een dierentuin zijn drie leeuwinnen drachtig.

- Hoe groot is de kans op minstens vier welpen?
- Bereken de kans op hoogstens zeven welpen.

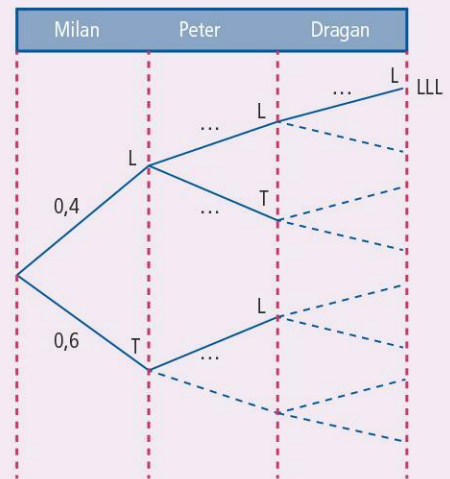
Uitdagende route → maak opdracht U3



Ondersteunende opdrachten

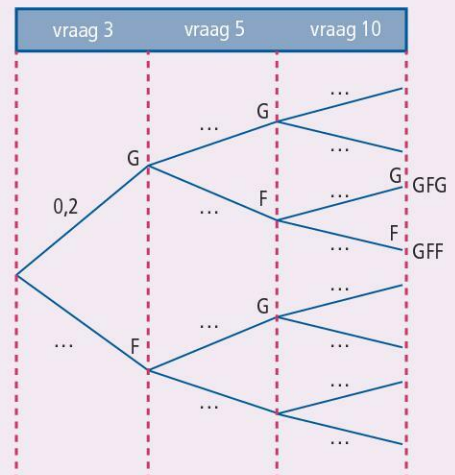
017 De kans dat Milan, Peter en Dragan op een willekeurige dag te laat op school komen, is achtereenvolgens 0,4; 0,3 en 0,6. Je ziet een begin van een kansboom. In de kansboom staat *L* voor dat die persoon te laat is en *T* voor dat die persoon op tijd is.

- Leg uit waarom bij de tak van Milan bij te laat 0,6 staat.
- Vul de kansboom verder in.
- Leg uit dat de kans dat de jongens op een dag alle drie op tijd zijn gelijk is aan $P(TTT) = 0,6 \times 0,7 \times 0,4 = 0,168$.
- Dragan is te laat en de andere twee zijn op tijd. Hierbij hoort de route *TTL* in de kansboom. Bereken de kans op deze gebeurtenis.
- Op een dag zijn twee van de drie jongens te laat. Welke mogelijke routes in de kansboom horen hier bij?
- Bereken de kans dat twee van de drie jongens te laat zijn.



019 Een toets bestaat uit een aantal vijfkeuzevragen. Marrie moet de vragen 3, 5, en 10 gokken. In de kansboom staat *G* voor dat ze de vraag goed gokt en *F* voor dat ze een vraag fout gokt.

- Leg uit dat de kans dat Marrie een vraag goed gokt gelijk is aan 0,2.
- Vul de kansboom verder in.
- Bereken de kans dat Marrie twee van de drie vragen goed gokt.
- Leg uit dat de gebeurtenis 'hoogstens twee vragen goed' betekent: nul, één of twee vragen goed.
- Bereken de kans op 'hoogstens twee vragen goed'.
- Leg uit dat de gebeurtenis 'hoogstens twee vragen goed' ook betekent 'niet drie vragen goed'.
- Bereken de kans op 'hoogstens twee vragen goed' met de complementregel.



Uitdagende opdrachten

U3 Van een ziekte is bekend, dat 8 op de 1000 mensen eraan lijden. Een test geeft bij 85% van de zieke mensen een juiste uitslag. Bij gezonde mensen geeft de test bij 95% een juiste uitslag. De test wordt jaarlijks bij ongeveer 62 000 mensen uitgevoerd.

- Hoeveel mensen krijgen waarschijnlijk te horen dat zij ziek zijn?
- Hoe groot is de kans op een verkeerde uitslag?
- Hoeveel procent van de mensen die te horen krijgen dat ze ziek zijn, is ook werkelijk ziek?
- Bij een andere test is de kans op een juiste uitslag 90%. Dit geldt voor zowel zieke als gezonde mensen. Is deze test betrouwbaarder?

onderzochte persoon is	uitslag	
	ziek	gezond
ziek	85%	15%
gezond	5%	95%

7.4 Kansen en roosters

Je leert • hoe je een kans op een gebeurtenis berekent met een rooster

Leerroutes • ondersteunend: 21—022—23—24—25—26
• doorlopend: 21—22—23—24—25—26
• uitdagend: 21—22—23—25—26—U4

Harm fietst elke dag van huis naar school. Hij kiest steeds willekeurig een zo kort mogelijk route. Door het rechthoekig stratenpatroon heeft hij veel keuzemogelijkheden. In de tekening is één van de mogelijke routes aangegeven. Zijn moeder die in de bakkerij werkt, zegt: 'Ik zie hem ongeveer in de helft van alle keren dat hij naar school fietst langs komen.'

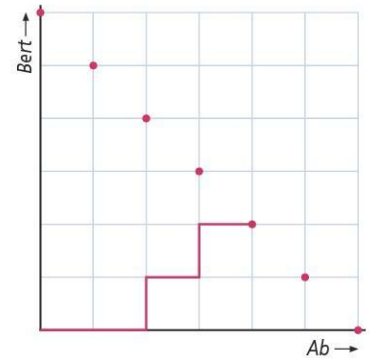
- Uit hoeveel routes kan Harm kiezen?
- Kan de moeder van Harm gelijk hebben?



21 Ab en Bert spelen een biljartwedstrijd over zes partijen. De kans dat Ab een partij wint is 0,6. Een partij kan niet in remise eindigen, dus de kans dat Bert een partij wint is 0,4.

In het rooster zie je de gebeurtenis *AABABA*. Deze gebeurtenis is een mogelijk scoreverloop naar de eindstand 4-2, waarbij Ab vier van de zes wedstrijden wint.

- Bereken de kans op de gebeurtenis *AABABA*.
- Bedenk een ander scoreverloop met dezelfde eindstand en bereken de bijbehorende kans.
- Hoeveel mogelijke routes zijn er naar de eindstand 4-2?
- Bereken de kans dat Ab met 4-2 wint.
- Bereken de kans dat de eindstand 1-5 wordt.



Aanpak

Hoe bereken je de kans op een gebeurtenis met een rooster?

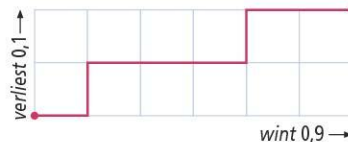
- Bereken de kans op een route.
- Bereken het aantal routes dat bij de gebeurtenis past.
- Vermenigvuldig het aantal routes met de kans op één zo'n route.

Voorbeeld

Een schaakgrootmeester speelt een simultaanwedstrijd tegen acht personen.
De kans dat hij een simultaanwedstrijd wint, is 0,9.
Bereken de kans dat hij zes van de acht wedstrijden wint.

Oplossing

- 1 De kans op een route is $0,9^6 \times 0,1^2$.
- 2 Er zijn $\binom{8}{2} = 28$ verschillende routes.
- 3 De kans dat hij zes van de acht wedstrijden wint, is $28 \times 0,9^6 \times 0,1^2 \approx 0,1488$.



Ondersteunende route → maak opdracht 022

- 22 Slechts bij één op de tien pogingen slaagt een tijger er in de beoogde prooi te vangen. Een tijger doet veertig pogingen om een prooi te vangen.
- a Bereken de kans dat er één prooi wordt gevangen.
 - b Hoe groot is de kans dat er vier keer een prooi wordt gevangen?
 - c Bereken de kans dat er maximaal twee keer een prooi wordt gevangen.
 - d Hoe groot is de kans dat er minstens één prooi wordt gevangen?
- 23 Van een scheikundeproef weet de lerares uit ervaring dat deze in slechts 80% van de gevallen lukt.
- H**
- a Vier leerlingen voeren deze proef uit. Bereken de kans dat bij twee leerlingen de proef lukt.
 - b Hoe groot is de kans dat bij minstens drie van de vier leerlingen de proef lukt?
 - c In een andere klas voeren tien leerlingen deze proef uit. Bereken de kans dat bij de helft van de leerlingen de proef mislukt.



- 24** Je vult een test bestaande uit twaalf vierkeuzevragen op de gok in.
- Bereken de kans dat je één vraag goed hebt.
 - Hoe groot is de kans dat je vier vragen fout hebt?
 - Bereken de kans op drie vragen goed.
 - Hoe groot is de kans dat je hoogstens drie vragen goed hebt?
 - Om voor de test te slagen, moeten ten minste tien van de twaalf vragen goed beantwoord worden.
Laat zien dat de kans om te slagen met uitsluitend gokken vrijwel gelijk aan 0 is.

- 25** Bij een jaar lang sporten is de kans op een blessure ongeveer 0,15. In een vwo 4 klas zijn er twaalf jongens die sporten.
- Bereken de kans dat geen van de twaalf jongens dit jaar een blessure krijgt.
 - Gebeurtenis X is: Dit jaar krijgen vijf van de twaalf jongens een blessure. Gebeurtenis Y is: Dit jaar krijgen vijf van de twaalf jongens geen blessure.
Beredeneer, zonder de kansen uit te rekenen, welke kans groter is: $P(X)$ of $P(Y)$.
 - Bereken de kans dat minstens één van de twaalf jongens dit jaar een blessure krijgt.



- 26** De kans dat je een prijs wint met een kraslot is 15%. Willem koopt net zo lang krasloten totdat hij een prijs wint.
- Hoe groot is de kans dat hij precies drie loten koopt?
 - Hoe groot is de kans dat hij precies zes loten koopt?
 - Birgit koopt in één keer vijf loten.
Laat zien dat de kans op twee prijzen ongeveer 0,1382 is.
 - Je koopt in één keer vijf loten.
Vul de tabel verder in.

aantal prijzen	0	1	2	3	4	5
kans	...	...	0,1382	...	...	...

- Hoe groot is de kans dat je minstens twee prijzen wint?

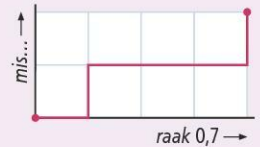
Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten

022

Robin is een beginnend darter. Hij weet dat hij in 70% van de worpen punten scoort. De kans dat hij met een worp punten scoort, is dus 0,7. Robin gooit zes keer een pijltje naar het bord.

- Hoe groot is de kans dat een worp van Robin geen punten oplevert?
- In vier van de zes worpen punten scoren correspondeert met een mogelijke route $RMRRRM$, waarbij M staat voor 'mis' en R staat voor 'raak'. Bereken de kans op die route.
- Hoe groot is de kans op een andere route die hoort bij 'in vier van de zes worpen punten scoren'?
- Hoeveel verschillende routes zijn er bij de gebeurtenis 'in vier van de zes worpen punten scoren'?
- Bereken de kans dat Robin in vier van de zes worpen punten scoort.
- Bij een andere poging scoort Robin in minstens één van de zes worpen punten. Geef de bijbehorende complementaire gebeurtenis.
- Gebruik de complementregel om de kans te berekenen dat Robin in minstens één van de zes worpen punten scoort.



Uitdagende opdrachten

U4

Voor het toelatingsexamen van een opleiding doet Carolien de testen A, B en C. Elke test bestaat uit een aantal vierkeuzevragen. Test A bestaat uit 10 vragen, test B uit 15 vragen en test C uit 20 vragen. Carolien weet bij test A van 7 vragen zeker dat ze die goed heeft beantwoord. Bij test B zijn dat er 10 en bij test C zijn dat er 18. De vragen die ze niet zeker wist, heeft ze gegokt. Om toegelaten te worden tot de opleiding dienen alle drie de testen met een voldoende te zijn afgesloten. Een test is voldoende als minimaal 80% van de vragen goed beantwoord is. Bereken de kans dat Carolien wordt toegelaten tot de opleiding.

7.5 Vaasmodel

Je leert

- hoe je met een vaasmodel kansen berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 27—28—29—030—31—032—33
- doorlopend: 27—28—29—30—31—32—33
- uitdagend: 27—28—29—30—32—33—U5

In een schaal liggen 160 M&M's in de kleuren groen, geel, rood, oranje en blauw. Van elke kleur zijn er 32. Ron en Janna mogen willekeurig vier M&M's pakken. Ron pakt één M&M, bekijkt de kleur en stopt hem in zijn mond. Vervolgens doet hij dit nog drie keer. Janna pakt vier M&M's uit de bak, bekijkt de kleuren en stopt ze alle vier in haar mond.

- Wie van de twee heeft de grootste kans op precies twee groene M&M's en twee van een andere kleur?



- 27** In een vaas zitten twintig rode en acht witte knikkers. Willem trekt een knikker, noteert de kleur en legt de knikker weer terug in de vaas. Vervolgens trekt hij een tweede knikker. Tom trekt ook twee keer een knikker, maar hij legt de eerste knikker niet terug.
- Bereken voor beiden de kans op de gebeurtenis RW en de kans op gebeurtenis WR .
 - Bereken voor beiden $P(WW)$.
 - Joe trekt in één greep twee knikkers uit de vaas. Leg uit waarom geldt $P(WW) = \frac{8}{28} \times \frac{7}{27} = \frac{56}{756} = \frac{2}{27}$.
 - Heeft Willem of Tom een even grote kans op de gebeurtenis WW als Joe?
 - De manier waarop Tom twee knikkers pakt en de manier waarop Joe twee knikkers pakt is niet hetzelfde. Toch is de kans op gebeurtenis WW bij beiden even groot. Hoe komt dat?

Theorie

Bij **aselecte** (blindelings, willekeurige) trekking van een knikker uit een vaas heeft elke knikker in de vaas evenveel kans om te worden getrokken.

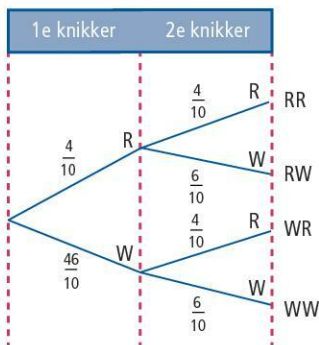
Bij **trekken met terugleggen** blijven de kansen bij elke trekking gelijk. Bij **trekken zonder terugleggen** veranderen de kansen bij elke volgende trekking. Meer knikkers in één greep trekken komt op hetzelfde neer als na elkaar trekken zonder terugleggen.

Voorbeeld

In een vaas zitten vier rode en zes witte knikkers. Je trekt aselect twee knikkers. Hoe groot is de kans op twee knikkers van dezelfde kleur als je de eerste knikker teruglegt? En hoe groot is die kans als je de eerste knikker niet teruglegt?

Oplossing

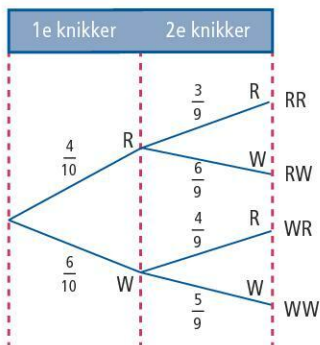
De eerste knikker wel terugleggen.



De kans op twee knikkers van dezelfde kleur is

$$P(RR) + P(WW) = \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} \\ = \frac{16}{100} + \frac{36}{100} = \frac{52}{100} = \frac{13}{25} = 0,52$$

De eerste knikker niet terugleggen.



De kans op twee knikkers van dezelfde kleur is

$$P(RR) + P(WW) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \\ = \frac{12}{90} + \frac{30}{90} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15} \approx 0,4667$$

28 Uit een vaas met vier rode en vijf witte knikkers worden met terugleggen drie knikkers gepakt.

H

- Bereken de kans op drie witte knikkers.
- Bereken de kans op één witte en twee rode knikkers.
- Maak de opdrachten a en b voor het geval dat de drie knikkers in één greep worden gepakt.

Theorie

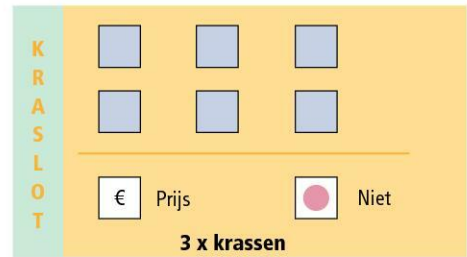
Veel kansproblemen kun je oplossen door ze te beschrijven met een **vaasmodel**. In een vaasmodel worden uit een vaas aselect knikkers getrokken. Je moet vaststellen hoeveel knikkers er in de vaas zitten en welke kleur deze knikkers hebben. Ook moet je bedenken of het een trekking met of zonder terugleggen is.

29 Wendy houdt van pistoolschieten. Haar moyenne is 0,6. Dat betekent dat ze gemiddeld zes van de tien keer raak schiet. Voor een wedstrijd schiet ze tien keer.

- Leg uit dat je dit kansexperiment kunt zien als het tien keer aselect trekken van een knikker uit een vaas waarin drie rode en twee witte knikkers zitten.
- Waarom is dit een trekking met terugleggen?
- Bereken de kans op zeven keer raak schieten.
- Bereken de kans op hoogstens acht keer raak schieten.

Ondersteunende route → maak opdracht 030

- 30** Op een kraslot is onder de helft van de vakjes een prijssteken verborgen, onder de andere helft niet. Je mag drie vakjes openkrassen. Je wilt weten hoe het met de kans op prijzen zit.
- Beschrijf het vaasmodel dat je hierbij kunt gebruiken.
 - Bereken de kans op twee keer een prijs krassen.
 - Hoe groot is de kans op drie keer een prijs krassen?
 - Bereken de kans dat je minimaal één prijs krast.



- 31** Uit een volledig kaartenspel (52 stuks) worden in één keer vier kaarten getrokken. Er wordt gelet op het aantal hartenkaarten.
- Beschrijf het vaasmodel bij dit experiment.
 - Bereken de kans op precies twee hartenkaarten.
 - Hoe groot is de kans op minstens twee hartenkaarten?

Ondersteunende route → maak opdracht 032

- 32** In een doos zitten twaalf batterijen waarvan er vier leeg zijn. Karin heeft vier volle batterijen nodig. Zij pakt steeds aselekt zonder terugleggen een batterij uit de doos en test deze. Ze stopt zodra ze vier volle batterijen heeft. Bereken de kans dat Karin precies zes testen nodig heeft.

Bij een grote populatie verandert de samenstelling van de populatie nauwelijks als er een kleine steekproef getrokken wordt. Je mag een trekking zonder terugleggen dan opvatten als een trekking met terugleggen.

- 33** Een container bevat 20 000 blikken met bonen. De verkoper beweert dat de partij voor 90% van kwaliteit A is. Een koper neemt een steekproef van tien blikken om deze bewering te controleren.
- Waarom kun je hier trekken zonder terugleggen benaderen door trekken met terugleggen?
 - Stel de verkoper heeft gelijk. Bereken de volgende kansen.
 - De kans dat één van de blikken niet van kwaliteit A is.
 - De kans dat twee van de tien blikken niet van kwaliteit A zijn.
 - De kans dat minstens zeven van de tien blikken van kwaliteit A zijn.



Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

030 Op een plankje staan zes bekers. Onder vier bekers is een euromunt verstopt. Je mag twee bekers oplichten en als er een euromunt ligt, mag je het houden.

- a** Leo wil de kans berekenen op het winnen van één euro. Hij gebruikt daarvoor een vaasmodel. Hij vult een vaas met vier rode en twee witte knikkers. Waarvoor staat het trekken van een rode knikker?
- b** Moet er met of zonder terugleggen getrokken worden?
- c** Leg uit waarom de gebeurtenis 'het winnen van één euro' in dit vaasmodel neerkomt op het trekken van een rode en een witte knikker.
- d** Bereken de kans dat Leo één euro wint.
- e** Hoe groot is de kans dat Leo niets wint?



032 In een doos zitten negen lampjes waarvan er drie kapot zijn. Annemarie heeft drie werkende lampjes nodig. Ze pakt steeds een lampje, test deze en legt hem apart. Ze stopt zodra ze drie werkende lampjes heeft.

- a** Annemarie moet vijf lampjes testen voordat ze drie werkende lampjes gevonden heeft. Waarom moet het vijfde lampje dat ze test een werkend lampje zijn?
- b** Een gebeurtenis is $KWKW W$ waarbij K staat voor een kapot lampje en W een werkend lampje. Laat met een berekening zien dat de kans op de gebeurtenis $KWKW W$ even groot is als op de gebeurtenis $WWKK W$.
- c** Leg met behulp van een rooster uit dat er zes mogelijke volgordes zijn waarbij vijf keer testen nodig is.
- d** Bereken de kans dat Annemarie precies vijf lampjes moet testen.

Uitdagende opdrachten

U5 In vaas A zitten een rode en vier groene knikkers. In vaas B zitten vier rode en een groene knikker. Julia pakt willekeurig een knikker uit vaas A en doet deze in vaas B. Vervolgens pakt ze een knikker uit vaas B en doet deze in vaas A. In beide vazen zitten dus weer vijf knikkers.

- a** Hoe groot is de kans dat in vaas A alleen groene knikkers en in vaas B alleen rode knikkers zitten?
- b** Hoe groot is de kans dat ze twee rode knikkers heeft gepakt?

7.6 Kansverdeling en verwachtingswaarde

Je leert

- hoe je een kansverdeling opstelt
- hoe je de verwachtingswaarde berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 34—35—036—37—38—039—40
- doorlopend: 34—35—36—37—38—39—40
- uitdagend: 34—36—37—38—39—40—U6

Op de voetbalclub van Loes worden elke zaterdagmiddag 40 loten verkocht. Op één lot valt op het einde van de middag een prijs van € 75,-. Loes koopt 80 weken achter elkaar een lot.

- Hoe vaak mag je verwachten dat Loes in 80 weken een prijs wint?
- Hoeveel euro per week zal zij gemiddeld winnen?



- 34** Drie leerlingen uit vwo 4 hebben voor een actiedag een spel met als thema 'Het Casino' bedacht. Het spel gaat als volgt. Iemand zet een bepaald bedrag in en werpt vervolgens met vier geldstukken. Bij nul keer kop volgt geen uitbetaling. Bij één keer kop betalen ze € 0,50 uit aan de speler. Bij twee keer kop € 1,-, bij drie keer kop € 2,- en bij 4 keer kop € 4,-.

a Vul de tabel verder in.

aantal keer kop	0	1	2	3	4
uitbetaling	0	0,50	...	...	...
kans	...	...	...	...	...

- b** Hoe groot is de som van de kansen in de tabel?
- c** Karel speelt 'Het Casino' 800 keer.
Hoeveel keer zal hij naar verwachting vier euro krijgen?
- d** Breid de tabel uit met nog een rij en zet daarin hoeveel keer Karel naar verwachting € 0,-; € 0,50; € 1,-; € 2,- en € 4,- zal krijgen.
- e** Hoe groot is de totale uitbetaling die Karel mag verwachten?
- f** Bereken de gemiddelde uitbetaling per spel die Karel mag verwachten.
- g** Laat zien dat je dit gemiddelde ook kunt uitrekenen door elke uitkomst met de bijbehorende kans te vermenigvuldigen en de producten bij elkaar op te tellen.
- h** Leg uit waarom opdracht f en g hetzelfde antwoord geven.

Theorie

Een **kansverdeling** is een tabel met alle mogelijke uitkomsten van een kansexperiment en de bijbehorende kansen. De som van de kansen in een kansverdeling is gelijk aan 1.

De **verwachtingswaarde** van een kansexperiment is de gemiddelde uitkomst die je mag verwachten als het experiment een groot aantal keren wordt herhaald.

Om de verwachtingswaarde te berekenen, heb je de kansverdeling van het experiment nodig. Je vermenigvuldigt elke mogelijke uitkomst met de bijhorende kans en telt alle producten bij elkaar op.

Voorbeeld

In een vaas zitten zes rode en vier blauwe knikkers. Je pakt zonder terugleggen drie knikkers uit de vaas.

Stel een kansverdeling op van het aantal blauwe knikkers en bereken de verwachtingswaarde van het aantal blauwe knikkers.

Oplossing

Het aantal blauwe knikkers kan 0, 1, 2 of 3 zijn.

De kans op twee blauwe knikkers is $3 \times \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{6}{8} = \frac{216}{720} = \frac{3}{10}$.

De kansverdeling is:

aantal blauwe knikkers	0	1	2	3
kans	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

De verwachtingswaarde is $0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{30} = 1\frac{1}{5}$.

- 35 a Laat met berekeningen zien dat de andere kansen in de kansverdeling van het voorbeeld kloppen.
- b De verwachtingswaarde van het aantal blauwe knikkers in het voorbeeld is $1\frac{1}{5}$. Annet zegt: 'Dit kan niet kloppen, want het aantal blauwe knikkers moet een geheel getal zijn.'
- Heeft Annet gelijk?

Ondersteunende route → maak opdracht 036

- 36 Bij een fruitautomaat (een one-armed bandit) is het mechanisme zo geconstrueerd dat
- 1 keer per 100 spelletjes € 50,- wordt uitbetaald,
 - 6 keer per 100 spelletjes € 10,- wordt uitbetaald,
 - 30 keer per 100 spelletjes € 2,- wordt uitbetaald.
- Elk spelletje kost € 2,-. Je speelt het spel één keer.
- a Stel een kansverdeling op van de uitbetaling en van de winst.
- b Bereken de verwachtingswaarde van de winst per spelletje.



- 37** Een rijkschool heeft door de jaren heen goed bijgehouden hoe vaak haar cliënten het rijexamen moeten doen. In de tabel zie je de resultaten. Op het blaadje zie je de kosten van de rijlessen.

<i>aantal keer examen</i>	1	2	3	4	5
<i>percentage</i>	40	30	10	10	10

- Vat de tabel op als de kansverdeling van het aantal keer dat een cliënt rijexamen moet doen.
Bereken de verwachtingswaarde van dat aantal examens.
- Bereken de verwachtingswaarde van de kosten voor het behalen van een rijbewijs.

De kosten van de rijlessen zijn:
 € 1.200,- bij slagen in één keer
 € 1.700,- bij slagen in twee keer
 € 2.000,- bij slagen in drie keer
 € 2.200,- bij slagen in vier keer
 € 2.400,- bij slagen in vijf keer

- 38** Bij een spel werp je met twee dobbelstenen. Het aantal punten dat je krijgt, is gelijk aan het hoogste aantal ogen dat voorkomt in de worp. Als je bijvoorbeeld (4 - 2) gooit, krijg je vier punten. Als je (5 - 5) gooit, krijg je vijf punten.

H

- Welke aantallen punten zijn mogelijk?
- Stel een kansverdeling op van het aantal punten.
- Bereken de verwachtingswaarde van het aantal punten.

Ondersteunende route → maak opdracht 039

- 39** In een servieswinkel is een maand lang bijgehouden hoeveel borden er door de klanten worden gekocht. Van de klanten die minstens één bord kochten, nam 20% twee borden mee, 7% drie borden, 35% vier borden, 20% zes borden en de overige slechts één bord. Andere aantallen borden werden deze maand niet verkocht. Ook is bekend dat 95% van de personen die deze servieswinkel bezochten helemaal geen bord kochten.

- In een maand bezochten 4000 personen de winkel.
Bereken hoeveel personen vier borden hebben gekocht.
- Bereken de verwachtingswaarde van het aantal gekochte borden per persoon die de winkel bezochten.



- 40** Twee volleybalteams spelen een 'best of five' wedstrijd tegen elkaar. Het team dat als eerste drie sets wint, heeft de wedstrijd gewonnen. Omdat de teams in het verleden al vaak tegen elkaar gespeeld hebben, heeft men kunnen vaststellen dat team A een kans van 0,6 heeft om een set te winnen. Je let op het aantal sets dat de wedstrijd duurt.
- Bereken de kans dat de wedstrijd drie sets duurt.
 - Bereken de verwachtingswaarde van het aantal sets dat de wedstrijd duurt.

Uitdagende route → maak opdracht U6

Ondersteunende opdrachten

036 Bij een loterij zijn er 500 loten. Er zijn 80 prijzen van € 10,-, 20 prijzen van € 50,- en één prijs van € 100,-. Je koopt één lot.

- Laat met een berekening zien dat de kans op een prijs van € 10,- gelijk is aan $\frac{4}{25}$.
- Vul de tabel verder in.
- Waarom is de som van de kansen in de tabel niet gelijk aan 1?
- Breid de tabel uit met een kolom voor de 'uitbetaling' van € 0,- en maak de kansverdeling compleet.
- Vul in: De verwachtingswaarde van de uitbetaling per lot is $0 \times \dots + 10 \times \frac{4}{25} + 50 \times \dots + 100 \times \dots = \dots$
- Als de organisatie € 5,- per lot vraagt, hoeveel winst mag de organisatie dan per lot verwachten?

uitbetaling in euro's	10	50	100
kans	$\frac{4}{25}$	...	...

039 In een kraam is gedurende een maand bijgehouden hoeveel personen bij de kraam stonden en hoeveel olieballen een klant kocht. In de tabel zie je dat er door 45% van de klanten die olieballen kochten tien olieballen werden gekocht. Van alle personen bij de kraam stonden, kocht 40% geen olieballen. Die maand stonden er 800 personen bij de kraam.

- Hoeveel personen bij de kraam kochten olieballen?
- Hoeveel van deze klanten kochten vijf olieballen?
- Leg uit dat je het antwoord op opdracht b direct kunt berekenen met $0,6 \times 800 \times 0,3$.
- Ga na dat de kans dat een willekeurig persoon bij de kraam vijf olieballen kocht gelijk is aan 0,18.
- Stel een kansverdeling op van het aantal olieballen per persoon.
- Bereken de verwachtingswaarde van het aantal gekochte olieballen per persoon.

aantal olieballen	percentage
1	25
5	30
10	45

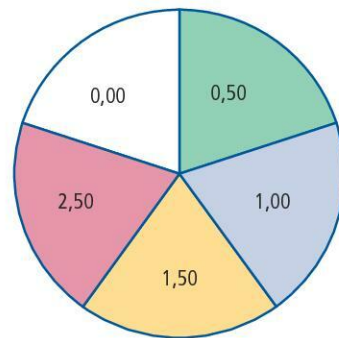
Uitdagende opdrachten

U6 Op 18 januari 2018 woedde er een hevige storm in Nederland. De stormvloedkering Ramspol in Noord-West Overijssel is in 2018 sinds 1 januari al voor de derde keer gesloten om het opringerige water uit het IJsselmeer tegen te houden. Normaal gebeurt dit één keer per jaar. Ga ervan uit dat de kans dat de stormvloedkering op een willekeurige dag in werking moet treden gelijk is aan $\frac{1}{365}$.

- Bereken de kans dat in een willekeurig jaar drie of meer keer de stormvloedkering gesloten moet worden.
- In de krant stond: Het gebeurt eens in de 12 jaar dat de stormvloedkering drie of meer keer gesloten wordt. Klopt dat met jouw antwoord? Leg uit.



- 41** De eigenaar van een café heeft een spel bedacht. Er wordt met pijltjes naar een snel ronddraaiende schijf gegooid. Tegen betaling van € 1,- mag je net zolang werpen tot de schijf geraakt is. Het geraakte bedrag wordt dan uitgekeerd. Alle sectoren op de schijf zijn even groot.
- Bereken de kans dat je meer dan € 0,50 verliest.
 - Het is ook mogelijk om met een inzet van € 2,50 net zo lang te gooien, totdat je met twee pijltjes de schijf geraakt hebt. De geraakte bedragen worden dan opgeteld. Hoe groot is de kans om je inzet uitgekeerd te krijgen?
 - Bereken de kans op een uitkering van meer dan € 1,50.
- 42** In een bak liggen 5000 pennen waarvan 80% het doet. Drie personen willen zes pennen uit de bak controleren of ze het doen. Jan wil dat doen zonder terugleggen, Sophie wil dat doen met terugleggen en Dirk wil dat doen door de zes pennen in één greep te pakken.
- Bereken de kans dat Jan vijf pennen pakt die het doen.
 - Hoe groot is de kans dat Sophie maximaal twee pennen pakt die het doen?
 - Bereken de kans dat Dirk minstens vijf werkende pennen pakt.
- 43** Mark gooit net zolang met een dobbelsteen tot hij een zes gooit.
- Bereken de kans dat Mark vier keer moet gooien.
 - Hoe groot is de kans dat Mark maximaal drie keer moet gooien?
 - Stel de kans op de eerste zes in de n^e worp is kleiner dan 0,01. Hoe groot is n minimaal?
- 44** Piet heeft € 7,- op zak en speelt met zijn vriend Frank een spel. Op het blaadje zie je hoe het spel gaat. Frank krijgt altijd de inzet van Piet. Maar als Piet wint, betaalt Frank hem het dubbele van zijn inzet ervoor terug.
- Geef in een boomdiagram de mogelijke spelverlopen weer.
 - Hoe groot is de kans dat Piet € 1,- wint?
 - Stel een kansverdeling op voor de winst van Piet.
 - Bereken de verwachtingswaarde van de winst voor Piet.
 - Bereken de verwachtingswaarde van het aantal worpen dat Piet doet.
 - Kan Piet zijn zeven euro ook op een andere manier inzetten, zó dat de winstverwachting hoger wordt? De spelregels blijven gelijk.



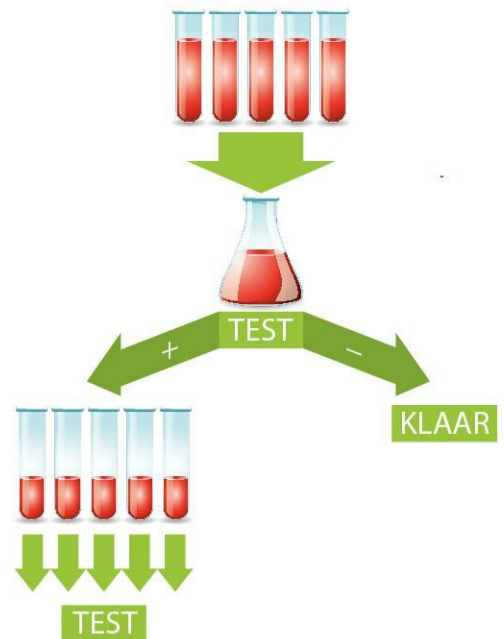
Bij de eerste worp met een munt zet Piet € 1,- op kop en stopt als hij wint.
 Als hij verliest, zet hij € 2,- op kop bij de tweede worp en stopt als hij wint.
 Als hij opnieuw verliest, zet hij zijn laatste vier euro op kop bij de derde worp. Na de derde worp stopt hij.



45 In de Tweede Wereldoorlog moesten in de Verenigde Staten in korte tijd honderdduizenden rekruten medisch worden gekeurd. Onder meer moest via een bloedonderzoek worden bepaald of de rekrut drager was van de verwekker van de geslachtsziekte syfilis. Laboratoriumonderzoek kostte tijd en geld. Laboranten konden natuurlijk het bloed van elke rekrut onderzoeken, maar ze bedachten een manier om het aantal tests terug te brengen.

De rekruten werden in groepen verdeeld. Van een groep werd van elke rekrut een gedeelte van zijn bloedmonster genomen. Het bloed van alle rekruten uit zo'n groep werd gemengd en op dit mengsel werd de test uitgevoerd. Viel de test negatief uit (geen ziekteverwekker geconstateerd), dan was men in één keer klaar met een groep rekruten. Was de uitslag van de test positief, dan moest alsnog het bloed van alle rekruten uit de groep onderzocht worden.

- Stel dat er twintig groepen van vijftien rekruten getest werden en dat de test van drie van de twintig groepen positief was.
Onderzoek hoeveel tests er minder nodig waren om er achter te komen wie van de 300 rekruten drager was van de bacterie die syfilis kan veroorzaken.
- Voor de rest van deze opdracht ga je uit van 10 000 rekruten. Veronderstel dat er getest werd in groepen van tien en dat de test bij 400 groepen positief was.
Hoeveel bloedmonsters werden er dan in totaal getest?
- Volgens de keuringsadministratie leed 5% van de mannen aan syfilis in de jaren 1940 en 1941. Veronderstel dat de rekruten werden getest in groepen van acht. Dan waren er dus 1250 groepen. Als je weet hoe groot de kans was om de syfilis bacterie aan te treffen bij één of meer rekruten in een groep, dan kun je het aantal groepen berekenen waarin je verwacht syfilis aan te treffen.
Bereken dat aantal.
- Bereken hoeveel bloedmonsters er in totaal werden getest.
- Onderzoek bij welke groeps grootte het aantal tests minimaal was.



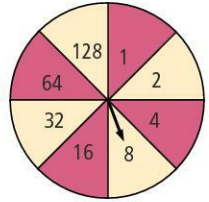
Theorie

Experimentele kans

Bij een toevalsexperiment of kansexperiment staat het resultaat (de uitkomst) niet van tevoren vast, omdat de uitkomst door toeval wordt bepaald. Een uitkomst of een aantal uitkomsten bij elkaar heet een gebeurtenis. Door een experiment vele malen uit te voeren en het aantal keren dat de gebeurtenis optreedt te delen door het totale aantal experimenten, kun je met de gevonden relatieve frequentie de kans op de gebeurtenis schatten. De op deze manier gevonden schatting heet een experimentele kans.

Voorbeeld

Jill draait de kanstol 1000 keer en noteert 448 keer rood. Hoe groot is op basis van dit experiment de kans op de uitkomst rood?



Oplossing

De experimentele kans op de uitkomst rood is $\frac{448}{1000} = \frac{61}{125} = 0,448$.

- S1** Bij het 1000 keer draaien van de kanstol in het voorbeeld noteert Jill 864 keer een even getal.
- Bereken de experimentele kans op een even getal.
 - Hoeveel keer verwacht je dat Jill een rood vak heeft gedraaid?

Theorie

Theoretische kans

Kansen op gebeurtenissen die je vindt door redeneren en rekenen heten theoretische kansen. $P(G)$ is de notatie voor de kans op gebeurtenis G . Bij toevalsexperimenten waarvoor alle mogelijke uitkomsten even waarschijnlijk zijn, bereken je de kans op een gebeurtenis G als volgt: deel het aantal voor G gunstige uitkomsten door het totaal aantal uitkomsten.

- S2** Op het blaadje staan twee gebeurtenissen gedefinieerd bij het draaien met de kanstol in het voorbeeld bovenaan de bladzijde.
- Bereken de kans op $P(A)$.
 - Bereken de kans op $P(B)$.

A: De wijzer wijst 1 aan.

B: De wijzer wijst een geel vlak aan.

Theorie

Complementaire gebeurtenis

Twee gebeurtenissen heten complementair als ze samen alle uitkomsten bevatten, maar geen enkele uitkomst gemeenschappelijk hebben. Het complement van de gebeurtenis A schrijf je als *niet-A*. Bij vragen over 'hoogstens', 'minstens', 'meer dan' of 'minder dan' is het soms handig om de complementregel $P(A) = 1 - P(\text{niet-A})$ te gebruiken.

Voorbeeld

Bij de kanstol uit het voorbeeld bovenaan de bladzijde is gebeurtenis C : De wijzer wijst 1 of 2 aan. Omschrijf gebeurtenis *niet-C* en bereken $P(\text{niet-C})$.

Oplossing

De gebeurtenis *niet-C* is: De wijzer wijst een getal groter dan 2 aan.

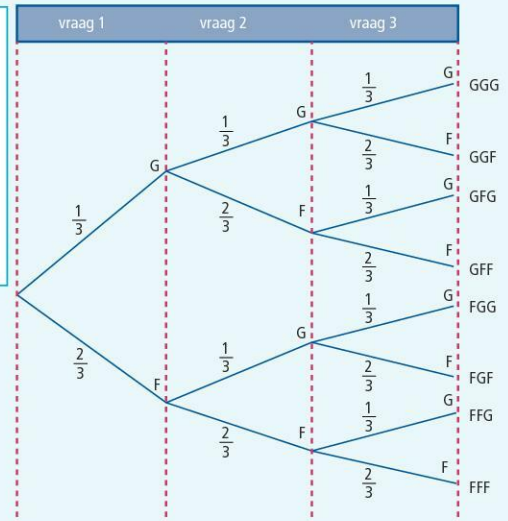
$$P(\text{niet-C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{2}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

- S3** Je gooit met twee dobbelstenen en let op de som van de ogen. Gebeurtenis A is: De som van de ogen is minstens 4.
- Wat is het complement van de gebeurtenis A ?
 - Bereken $P(A)$.

Theorie

Kansboom

Een kansboom is een boomdiagram met kansen langs de takken. De kans op een bepaalde route bereken je door de kansen bij de takken van die route met elkaar te vermenigvuldigen. Als de gebeurtenis uit meerdere routes bestaat, bereken je de kans door de kansen op die routes bij elkaar op te tellen.



- S4** Els moet bij een toets met driekeuzevragen bij drie vragen gokken.
- Waarom moet bij de tak bij G (goed gokken) $\frac{1}{3}$ staan?
 - Hoe groot is de kans op $P(GGG)$?
 - Bereken de kans dat Els één vraag goed gokt.

Vaardigheid

Je kunt met toevalsgetallen een experiment simuleren.

Rekenmachines en computers kunnen toevalsgetallen of randomgetallen produceren. Dat zijn willekeurige getallen uit het interval $[0, 1]$.

Voorbeeld

Simuleer met de toevalsgetallen
 .9251782617
 .6243702242
 .3330249178
 een worp met een dobbelsteen
 en bereken daarmee de kans dat
 de uitkomst 3 is.

Oplossing

Streep de cijfers 0, 7, 8 en 9 weg,
 want die aantallen ogen kun je
 met een dobbelsteen niet gooien.
 .9251782617
 .6243702242
 .3330249178

In de 20 cijfers die je over
 houdt, zit vier keer een 3.
 De kans op uitkomst 3, is
 $\frac{4}{20} = 0,2$.

- S5** Anke speelt regelmatig een spelletje Monopoly met haar opa. De kans dat zij een spelletje wint is 40%. Ze gaan vier spelletjes spelen en Anke vraagt zich af hoe groot de kans is dat zij twee van de vier spelletjes wint. Simuleer met de toevalsgetallen in het voorbeeld een aantal series van vier spelletjes en bereken daarmee de kans dat zij twee van de vier spelletjes wint.

Vaardigheid

Je kunt een kans op een gebeurtenis berekenen met een rooster.

- 1 Bereken de kans op een route.
- 2 Bereken het aantal routes dat bij de gebeurtenis past.
- 3 Vermenigvuldig het aantal routes met de kans op één zo'n route.

Voorbeeld

Voor een examen is de kans om te slagen 0,92.
Bereken de kans dat vijf van de zeven kandidaten slagen.

Oplossing

- 1 De kans op een route is $0,92^5 \times 0,08^2$.
- 2 Er zijn $\binom{7}{5} = 21$ verschillende routes.
- 3 De kans dat vijf van de zeven kandidaten slagen, is $21 \times 0,92^5 \times 0,08^2 \approx 0,1040$.



- S6** Je vult op de gok tien driekeuzevragen in.
Hoe groot is de kans dat je van de tien vragen er precies drie goed hebt?

Vaardigheid

Je kunt met een vaasmodel kansen berekenen.

In een vaasmodel wordt aselekt uit een vaas met knikkers getrokken. Je moet vaststellen hoeveel knikkers er in de vaas zitten en welke kleur deze knikkers hebben. Ook moet je bedenken of het een trekking met of zonder terugleggen is.

Voorbeeld

Bij een loterij met lotnummers 01 tot en met 20 zijn twee prijzen te winnen. Je koopt twee loten.
Bereken de kans dat je precies één prijs wint.

Oplossing

Stel je een vaas voor gevuld met 20 knikkers, waarvan 2 rood en 18 wit. De rode knikkers stellen jouw lotnummers voor en de witte knikkers stellen de andere lotnummers voor. Je trekt twee knikkers uit de vaas zonder terugleggen.

De gevraagde kans is

$$P(RW) + P(WR) = \frac{2}{20} \times \frac{18}{19} + \frac{18}{20} \times \frac{2}{19} = \frac{36}{380} + \frac{36}{380} = \frac{72}{380} = \frac{18}{95} \approx 0,19.$$

- S7**
- Leg uit waarom de trekking uit de vaas in het voorbeeld onderaan de vorige bladzijde een trekking zonder terugleggen is.
 - Stel je koopt niet twee loten, maar vijf loten. Hoe groot is dan de kans dat je één prijs wint?

Vaardigheid

Je kunt een kansverdeling opstellen.

Een tabel met alle mogelijke uitkomsten van een kansexperiment en de bijbehorende kansen heet een kansverdeling.

De som van de kansen in een kansverdeling is gelijk aan 1.

Voorbeeld

Je trekt aselekt en zonder terugleggen twee knikkers uit een vaas met vijf rode en één witte knikker.

Stel de kansverdeling op van het aantal witte knikkers.

Oplossing

Het aantal witte knikkers kan 0 of 1 zijn.

aantal wit	0	1
kans	$\frac{5}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$	$2 \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

- S8**
- In het voorbeeld is een kansverdeling van het aantal witte knikkers opgesteld.
Stel ook een kansverdeling op van het aantal rode knikkers.

Vaardigheid

Je kunt een verwachtingswaarde berekenen.

De verwachtingswaarde van een kansexperiment is de gemiddelde uitkomst die je mag verwachten als het experiment een groot aantal keren wordt herhaald.

Om de verwachtingswaarde te berekenen, heb je de kansverdeling van het experiment nodig. Je vermenigvuldigt elke mogelijke uitkomst met de bijbehorende kans en telt alle producten bij elkaar op.

Voorbeeld

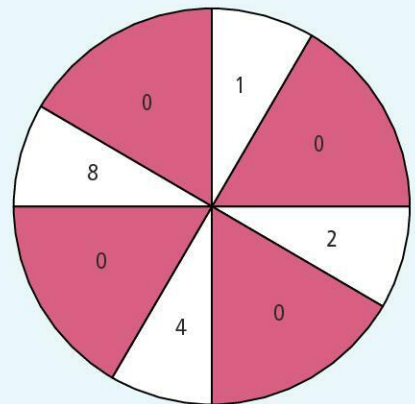
Hoeveel witte knikkers pak je gemiddeld in het voorbeeld hierboven?

Oplossing

De verwachtingswaarde van het aantal witte knikkers is $0 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.
Je pakt gemiddeld $\frac{1}{3}$ witte knikker.

- S9**
- Je trekt aselekt en zonder terugleggen twee knikkers uit een vaas met acht rode en twee witte knikkers.
- Bereken de verwachtingswaarde van het aantal rode knikkers.
 - Stel je trekt met terugleggen in plaats van zonder terugleggen. Hoeveel rode knikkers pak je dan gemiddeld?

- T1** Je gooit met een witte en een rode dobbelsteen.
- a Bereken de kans dat je met beide dobbelstenen drie ogen gooit.
 - b Hoe groot is de kans dat je met de witte dobbelsteen vier ogen en met de rode dobbelsteen vijf ogen gooit?
 - c Hoe groot is de kans dat je met de rode dobbelsteen meer ogen gooit dan met de witte dobbelsteen?
 - d Gebeurtenis A is: De som van de ogen is 11 of minder. Welke gebeurtenis is de complementaire gebeurtenis?
 - e Bereken $P(A)$.
- T2** Bij een onzuiver geldstuk is de kans op kop 48% en de kans op munt 52%. Je gooit zes keer met dit geldstuk.
- a Bereken de kans op eerst vier keer kop en dan twee keer munt.
 - b Hoe groot is de kans op vier keer kop en twee keer munt?
 - c Bereken de kans op hoogstens vier keer kop.
- T3** Bij een loterij worden 100 loten verkocht. Er zijn 10 prijzen te winnen: één eerste prijs, drie tweede prijzen en zes derde prijzen. Je hebt vijf loten gekocht.
- a Bereken de kans dat je precies twee prijzen wint.
 - b Hoe groot is de kans dat je minstens één prijs wint?
 - c Bereken de kans dat je de eerste prijs, een tweede prijs en een derde prijs wint.
- T4** Een klas voert een actie voor een goed doel. Daarbij wordt een roulettebord gebruikt. De witte segmenten van het bord hebben een hoek van 30° en de rode segmenten hebben een hoek van 60° . Bij het spelen wordt het bord snel rondgedraaid en wordt er een balletje in geworpen. Als het bord tot stilstand is gekomen, ligt het balletje in een van de vakken. Het getal van het vak waarin het balletje ligt, is het bedrag in euro's dat je krijgt uitbetaald.
- a Stel de kansverdeling op van bedrag dat je uitbetaald kunt krijgen.
 - b Bereken verwachtingswaarde van de winst voor een speler die € 1,- betaalt om het spel te spelen.
 - c Het doel van de actie is om € 300,- bij elkaar te krijgen. Ze laten het spel 400 keer spelen. Bereken hoeveel euro per spel ze een speler moeten laten betalen om hun doel te bereiken.



- T5** Op de foto zie je een dobbelsteen met acht vlakken. Op de zijvlakken van de dobbelsteen staan de cijfers 1 tot en met 8. Hieronder staan vier toevalsgetallen.

.7010889045 .8822247576

.3709130273 .1175763719

- Leg uit hoe je met deze toevalsgetallen een aantal worpen met deze dobbelsteen kunt simuleren.
- Hoe groot is de experimentele kans om met deze dobbelsteen het cijfer 2 te gooien?
- Je gooit twaalf keer met deze dobbelsteen. Bereken de theoretische kans dat je geen enkele keer het cijfer 2 hebt gegooid.



- T6** Een docent neemt een korte toets met vijf vierkeuzevragen af. Voor elk goed antwoord geeft hij een punt, voor elk fout antwoord trekt hij halve punt af. Dit geeft voor elke leerling een score S . Ahmed gokt bij elke vraag.

- A is het aantal vragen dat Ahmed goed heeft beantwoord. Vul de tabel verder in.

A	0	1	2	3	4	5
$P(A)$	...	...	...	0,0879	0,0147	0,0010

- Stel de kansverdeling op van de mogelijke scores S die Ahmed kan halen.
- De docent rekent de scores om naar een cijfer C met de formule $C = 4 + 1,2S$. Bereken, in één decimaal nauwkeurig, het cijfer dat Ahmed kan verwachten.

- T7** Op dit totoformulier moet je van zes voetbalwedstrijden de uitslag voorspellen. Daarbij kun je kiezen uit 1-thuis wint, x-gelijk of 2-uit wint. Bij zes goede voorspellingen win je de eerste prijs, bij vijf goede voorspellingen de tweede prijs en bij vier goede voorspellingen de derde prijs.

- Bereken voor elk van deze prijzen de kans, ervan uitgaande dat je het totoformulier willekeurig invult.
- Stel je vult volstrekt willekeurig zo'n totoformulier in. Hoeveel goede voorspellingen verwacht je dan te hebben?

TOTO VOORSPELLING VAN JOHAN DERKSEN

1 - THUIS	X - GELIJK	2 - UIT
REAL MADRID	X	BARCELONA
FEYENOORD	X	FC TWENTE
WILLEM II	X	PSV
JUVENTUS	X	AC MILAN
AZ	X	SC HEERENVEEN
MANCHESTER CITY	X	LIVERPOOL

Je kunt met toevalsgetallen een experiment simuleren.

- E1** Je wilt met toevalsgetallen de samenstelling van gezinnen met vijf kinderen simuleren. Ga ervan uit dat er evenveel jongens als meisjes worden geboren. Op het blaadje zie je zes toevalsgetallen.

- a Willem zegt: 'De even cijfers stellen jongens voor, de oneven cijfers stellen de meisjes voor.'
Leg uit waarom deze keuze van Willem mogelijk is.
- b Leg uit hoe Willem met deze zes toevalsgetallen twaalf gezinnen met vijf kinderen kan simuleren.
- c Bereken de experimentele kans dat er in een gezin van vijf kinderen drie meisjes zijn.

.7256724654 .2682529773
.1008181319 .7309104949
.2215558542 .4620919025

Je kunt een kans op een gebeurtenis berekenen met een rooster.

- E2** Bij de Tweede Kamerverkiezingen in 2017 stemde 12% van de kiezers op het CDA.

- a Bereken de kans dat in een groep van acht willekeurige Nederlanders die aan de Kamerverkiezing in 2017 hebben deelgenomen, er drie op het CDA hebben gestemd.
- b Hoe groot is de kans dat tenminste één van de acht Nederlanders op het CDA heeft gestemd?

Je kunt met een vaasmodel kansen berekenen.

- E3** De eigenaar van een Chinees restaurant verwelkomt zijn gasten met een 'gelukscookie'. Op een avond heeft hij een schaal vol met 60 'gelukscookies'. In een kwart van de 'gelukscookies' heeft hij een bonnetje gestopt waarop je een gratis drankje krijgt aangeboden. Ben en Leo gaan eten bij dit Chinese restaurant en mogen als eerste een 'gelukscookie' pakken.

- a Beschrijf het vaasmodel bij dit experiment.
- b Bereken de kans dat ze ieder een gratis drankje krijgen.

Je kunt een kansverdeling opstellen.

- E4** Renée speelt een spel met een 12-kantige blauwe dobbelsteen en een gewone rode dobbelsteen. Op de blauwe dobbelsteen staan de getallen 1 tot en met 12 en op de rode dobbelsteen staan de getallen 1 tot en met 6. Bij één worp met de twee dobbelstenen zijn er de volgende punten te verdienen.
- 1 punt als het getal op de blauwe dobbelsteen groter is dan het getal op de rode dobbelsteen.
 - 5 punten als het getal op de blauwe dobbelsteen gelijk is aan het getal op de rode dobbelsteen.
 - 10 punten als het getal op de blauwe dobbelsteen kleiner is dan het getal op de rode dobbelsteen.
- Stel de kansverdeling op van het aantal punten bij één worp met de dobbelstenen.



Je kunt een verwachtingswaarde berekenen.

- E5** Bekijk nog een keer het spel dat Renéé speelt in opdracht E4.
- Bereken de verwachtingswaarde van het aantal punten bij één worp.
 - Hoeveel punten mag Renéé verwachten als ze het spel 20 keer speelt?

- E6** Peter en Hans spelen regelmatig een spelletje Wordfeud. Uit de gegevens in de app blijkt dat Pieter 60% kans heeft om een spelletje te winnen en Hans 40%. Peter en Hans spelen een reeks van spelletjes Wordfeud tegen elkaar volgens het principe ‘best of three’. Dat betekent dat de eerste die twee spelletjes gewonnen heeft de winnaar is. Bereken de theoretische kans dat Peter de winnaar wordt.



- E7** Je gooit met twee dobbelstenen. Op de ene dobbelsteen staan de cijfers 1, 1, 3, 3, 5 en 5. Op de andere dobbelsteen staan de cijfers 2, 2, 4, 4, 4 en 6.
- Gebeurtenis A is: De som van de ogen is minstens 9. Bereken de kans op de complementaire gebeurtenis van A .
 - Gebeurtenis B is: Het product van de ogen is minstens 10. Gebeurtenis C is: Het product van de ogen is gelijk aan een veelvoud van 4. Zijn de gebeurtenissen B en C complementair? Leg uit.

- E8** Francien weet uit ervaring dat haar kans om bij bowlen een strike (alle kegels omver) te gooien 0,6 is. Ze gooit vier keer.
- Bereken de kans dat ze minstens één strike gooit.
 - Hoe groot is de kans op twee strikes?
 - Bereken de kans op meer dan twee strikes.
 - Hoe groot is de kans op hoogstens drie strikes?

- E9** In een vaas zitten tien gekleurde knikkers: vier witte, drie rode en drie blauwe knikkers. Er worden zonder terugleggen vier knikkers uit de vaas getrokken.
- Bereken de kans op vier witte knikkers.
 - Hoe groot is de kans dat er in een willekeurige volgorde één blauwe knikker, één witte knikker en twee rode knikkers worden getrokken?



SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In hoofdstuk 6 heb je geleerd hoe je de gemiddelde verandering over een interval, ofwel het differentiequotiënt, van een functie berekent. Ook heb je geleerd hoe je grafisch de helling van een grafiek in een punt benadert.

In dit hoofdstuk leer je hoe je de helling in een punt van een grafiek bij een gegeven functievoorschrift benadert. Deze helling kun je gebruiken om het verloop van de grafiek te beschrijven.

Vervolgens leer je hoe je een functie opstelt waarmee je de waarden van de hellingen van de grafiek berekent.

In dit hoofdstuk werk je alleen met functies die opgebouwd zijn uit machtsfuncties. In klas 5 en 6 krijgt dit een vervolg bij andere functies.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 36
- *Modelleren en algebraïseren* opdracht 13
- *Abstraheren* opdracht 24



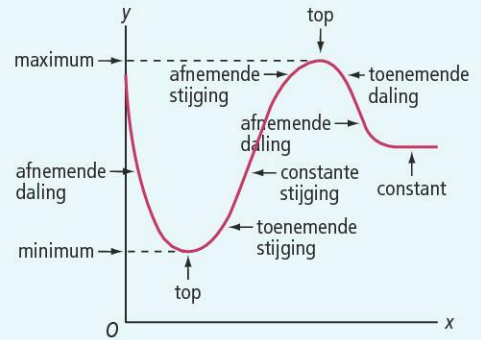
- V1** Van een rivier wordt om de twee dagen bijgehouden met hoeveel cm de waterhoogte is gestegen of gedaald. De resultaten van april staan in het toename-diagram.

- Gedurende welke periode ging het water steeds sneller dalen?
- Op welke dag werd de hoogste waterstand gemeten?
- Op welke dag nam de waterhoogte het snelst toe?
- Op 7 april was de waterhoogte 5,50 meter. Maak een tabel voor de waterhoogten in april.

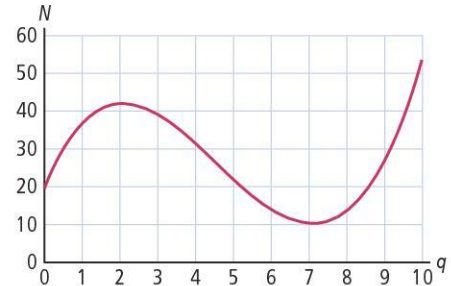


Theorie

Het verloop van een grafiek kan **stijgend**, **dalend** of **constant** zijn. Een **top** is een hoogste of laagste punt van een grafiek. Een **maximum** is een hoogste waarde. De grafiek gaat dan over van stijgen in dalen. Een **minimum** is een laagste waarde. De grafiek gaat dan over van dalen naar stijgen. Een grafiek kan op verschillende manieren stijgen of dalen: **toenemende stijging**, **constante stijging**, **afnemende stijging**, **toenemende daling**, **constante daling** en **afnemende daling**.



- V2** De grafiek geeft het verband weer tussen de variabelen q en N .
- Bij welke waarde van q heeft N een maximum? Hoe groot is dat maximum?
 - Lees uit de grafiek het minimum van N af.
 - Lees uit de grafiek af bij welke waarden van q de grafiek toenemend stijgend is.
 - Bij welke waarden van q is de grafiek afnemend dalend?

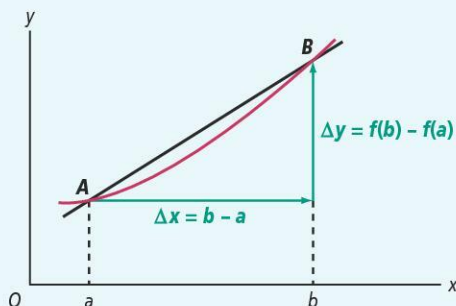


- V3** Gegeven is de formule $h = 10 + 30t - 5t^2$.
- Bereken de toename van h tussen $t = 1$ en $t = 3$.
 - Bereken de gemiddelde toename van h tussen $t = 0$ en $t = 3$.
 - Ga met een berekening na dat h afneemt tussen $t = 3$ en $t = 5$.
 - Bereken de gemiddelde afname van h over het interval $[3, 5]$.

Theorie

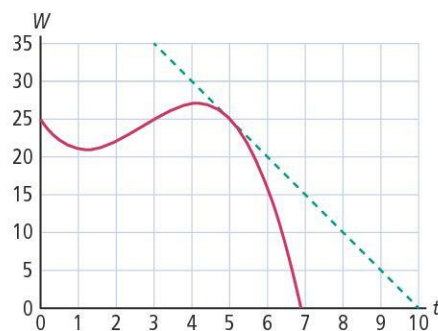
De **gemiddelde verandering** of het **differentiequotiënt** van een functie f over het interval $[a, b]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Het differentiequotiënt van de functie over een interval is de richtingscoëfficiënt van de lijn door het beginpunt en het eindpunt van de grafiek op dat interval.

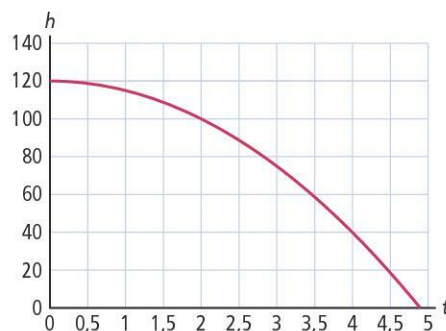


- V4** Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 1$.
- Bereken $f(2)$ en $f(4)$.
 - Bereken de gemiddelde verandering van f over het interval $[2, 4]$.
 - Bereken het differentiequotiënt van f over het interval $[-5, 1]$.
 - Op de grafiek van f liggen de punten $A(-4, 17)$ en $B(0, 1)$. Bereken de richtingscoëfficiënt van lijn AB .

- V5** De grafiek geeft het verband weer tussen de variabelen t en W .
- Is de grafiek tussen $t = 6$ en $t = 7$ afnemend dalend of toenemend dalend?
 - Maak een toenamediagram (met een stapgrootte van 1) van W tussen $t = 0$ en $t = 4$.
 - Lees uit de grafiek de waarden van W af bij $t = 2$ en $t = 4$ en bereken daarmee de gemiddelde toename van W over het interval $[2, 4]$.
 - De raaklijn aan de grafiek in het punt $(5, 25)$ is getekend. Benader grafisch de helling van de grafiek bij $t = 5$.



- V6** Lars laat vanaf een toren een steen omlaag vallen. Voor de hoogte h in meters geldt bij benadering de formule $h = 120 - 5t^2$ met t de tijd in seconden.
- Bereken na hoeveel seconden de steen op de grond valt. Rond je antwoord af op twee decimalen.
 - Bereken de gemiddelde snelheid waarmee de steen is gevallen.
 - Benader grafisch de snelheid waarmee de steen valt op het tijdstip $t = 2$.



8A.1 Hellingen berekenen

Je leert

- hoe je de helling van een grafiek in een punt met een differentiequotiënt benadert

Leerroutes

- ondersteunend: 1—2—03—04—4—6—7
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7
- uitdagend: 1—2—3—4—6—7—U1

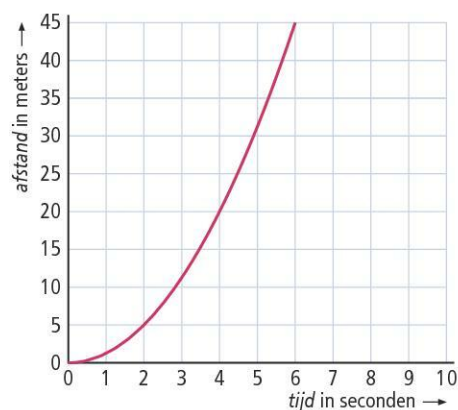
Een tijdsperiode die 0 seconden lang is, heet een tijdstip. In die tijd legt een auto 0 meter af, dus de snelheid van een auto op een bepaald tijdstip is altijd 0 meter per seconde.

- Wat is er mis met bovenstaande redenering?



- 1 Je ziet in de grafiek het verband tussen de tijd t in seconden en de afstand s in meters die een auto heeft gereden nadat deze heeft stil gestaan bij een verkeerslicht.

- Hoe zie je aan de grafiek dat de auto vanuit stilstand vertrekt?
- De grafiek is toenemend stijgend. Wat betekent dat voor de snelheid van de auto?
- Bereken de gemiddelde snelheid van de auto over de eerste zes seconden.
- Bereken het differentiequotiënt $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ over het interval $[0, 4]$.
- Wat betekent je antwoord van opdracht d voor de auto?
- Teken de raaklijn aan de grafiek in het punt $(4, 20)$ en bereken de helling van deze raaklijn.
- Wat betekent je antwoord van opdracht f voor de auto?



Met een differentiequotiënt bereken je de gemiddelde verandering over een gegeven interval. In een tijd-afstand situatie is dit de gemiddelde snelheid over het interval. De helling van de grafiek in een punt is gelijk aan de snelheid op dat moment. De helling in een punt kun je grafisch benaderen. In de volgende opdracht leer je hoe je de helling van een grafiek in een punt benadert als het functievoorschrift bij de grafiek gegeven is.

- 2 Bij de grafiek uit opdracht 1 hoort de formule $s = 1,25t^2$ met s in meters en t in seconden.
- Een klein interval bij $t = 4$ is het interval $[4; 4,1]$.
Bereken het differentiequotiënt van f over dit interval.
 - Bereken ook het differentiequotiënt van f over de intervallen $[4; 4,01]$ en $[4; 4,001]$ in drie decimalen nauwkeurig.
 - Welke van de drie berekende differentiequotiënten is de beste benadering voor de snelheid op $t = 4$?

$$\begin{array}{c|c|c} t & 4 & 4,1 \\ \hline s & 20 & \dots \end{array} \quad \begin{array}{l} \Delta t \\ \Delta s \end{array} \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\dots}{\dots}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 03

- 3 Gegeven is de formule $s = 3\sqrt{t}$. Je gaat de helling van de grafiek in het punt met $t = 5$ benaderen. Kies een voldoende klein interval bij $t = 5$, bijvoorbeeld $[5; 5,001]$ en bereken het differentiequotiënt $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ over het gekozen interval.

Aanpak

Hoe benader je de helling van de grafiek van een functie f in een punt met een differentiequotiënt?

- Kies een klein interval bij $x = a$, bijvoorbeeld $[a; a + 0,001]$.
- Bereken het differentiequotiënt $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ over het interval.

Voorbeeld 1

Benader de helling van de grafiek bij de functie $f(x) = 5 \cdot 2^x$ in het punt $(2, 20)$.

Oplossing

- Kies het interval $[2; 2,001]$.

$$2 \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(2,001) - f(2)}{2,001 - 2} = \frac{20,013\,867\dots - 20}{0,001} \approx 13,868$$

De helling van de grafiek in het punt $(2, 20)$ is ongeveer 13,868.

Voorbeeld 2

Benader de helling van de grafiek bij de formule $A = p^3 - 4$ in het punt met $p = -5$.

Oplossing

- Kies het interval $[-5; -4,999]$.

$$2 \quad \frac{\Delta A}{\Delta p} = \frac{A(-4,999) - A(-5)}{-4,999 - (-5)} = \frac{-128,925\,015\dots - (-129)}{0,001} \approx 74,985$$

De helling van de grafiek in het punt met $p = -5$ is ongeveer 74,985.

Ondersteunende route → maak opdracht O4

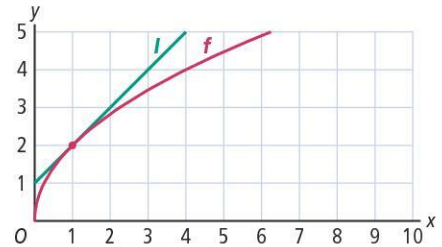
- 4 Benader de helling van de grafiek in het gegeven punt.

- H**
- a $f(x) = x^3 + 2x$ in het punt $(3, 33)$
 - b $N = 200 \cdot 1,5^t$ in het punt $(1, 300)$
 - c $U(p) = \sqrt{p+5} - 3p$ in het punt met $p = -4$

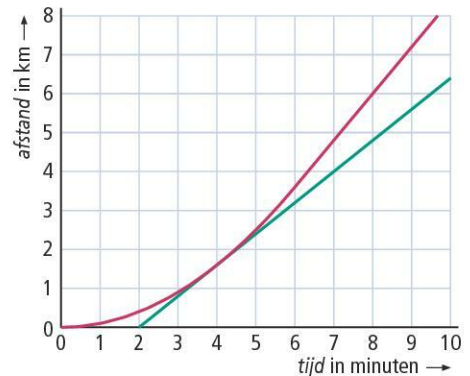
- 5 Jorrit rijdt op de fiets. De afgelegde afstand s in meters na t seconden kun je berekenen met de formule $s = \frac{20t^2}{3t + 20}$

- a Hoe groot is zijn snelheid in meter per seconde na 60 seconden?
- b En hoe groot is zijn snelheid na 100 seconden?

- 6 Gegeven is de functie $f(x) = 2\sqrt{x}$. De lijn l is de raaklijn van de grafiek van f in het punt $P(1, 2)$ en heeft een richtingscoëfficiënt die gelijk is aan de helling van de grafiek van f in het punt $P(1, 2)$. Controleer dit door uit de figuur de richtingscoëfficiënt van lijn l af te lezen en de helling van de grafiek van f in het punt $P(1, 2)$ te benaderen met een differentiequotient.



- 7 Bart doet mee aan een tijdrit fietsen over 8 km. In de grafiek zie je het verloop van zijn race.
- a Gebruik de grafiek om de gemiddelde snelheid tussen $t = 0$ en $t = 8$ te berekenen.
 - b Waarom kun je uit het antwoord van opdracht a niet de snelheid op $t = 4$ afleiden?
 - c Benader grafisch de snelheid van Bart op tijdstip $t = 4$.
 - d De grafiek tussen $t = 0$ en $t = 6$ hoort bij benadering bij de formule $s = 0,1t^2$. Benader met de formule de snelheid op $t = 4$ en op $t = 5$.
 - e Na $t = 6$ rijdt Bart met een constante snelheid de wedstrijd uit. Bereken de snelheid op tijdstip $t = 9$.



Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

03 Gegeven is de formule $s = 4 + \sqrt{t}$. Je gaat de helling van de grafiek van s in het punt met $t = 4$ benaderen.

a Bij $t = 4$ kies je het interval $[4, 4,001]$.

Vul de tabel verder in.

t	4,001	4
s	...	...

b Bereken het differentiequotiënt $\frac{\Delta s}{\Delta t}$.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(4,001) - s(4)}{4,001 - 4} = \frac{\dots - \dots}{0,001} \approx \dots$$

04 Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 5$. Je kunt een tabel maken om de helling van de grafiek in het punt $(2, 3)$ te benaderen.

a Vul de tabel verder in.

b Bereken Δx en Δf .

c Vul in: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\dots - 3}{0,001} = \dots$

d Hoe groot is de helling van de grafiek in het punt $(2, 3)$ afgerond op drie decimalen?

e Gegeven is de formule $U = p + \sqrt{p - 1}$.
Vul de tabel verder in.

f Benader de helling van de grafiek in het punt met $p = 5$.

x	2	2,001
$f(x)$	3	...

Δx
 Δf

p	5	5,001
U	...	...

Uitdagende opdrachten

U1 Van een hoeveelheid radioactieve stof meet men wekelijks de hoeveelheid straling s in Becquerel (Bq). De resultaten staan in de tabel.

t in weken	0	1	2	3	4	5	6
s in Bq	4500	4275	4061	3858	3665	3482	3308

a Toon aan dat de hoeveelheid straling exponentieel afneemt.

b Benader op $t = 8,5$ de snelheid waarmee de straling afneemt in Bq per week.



8A.2 Hellinggrafieken

Je leert

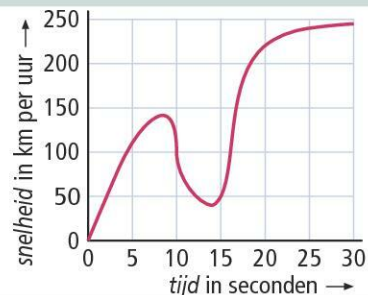
- hoe je met de hellinggrafiek van een functie f een uitspraak doet over de grafiek van f

Leerroutes

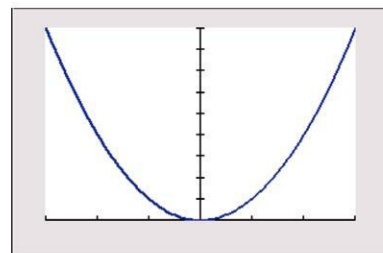
- ondersteunend: 8—9—010—11—012—12
- doorlopend: 8—9—10—11—12—13
- uitdagend: 8—9—10—12—13—U2

In de grafiek zie je hoe de snelheid van een raceauto verandert gedurende de eerste 30 seconden na de start.

- Hoeveel bochten heeft de raceauto gemaakt in de eerste 30 seconden?
- Hoeveel meter heeft de raceauto afgelegd tussen $t = 25$ en $t = 30$?



- 8 Je ziet een plot van de grafiek van $f(x) = x^2$.
- Bereken het differentiequotient van f over het interval $[1; 1,001]$.
 - Hoe groot is de helling van de grafiek van f bij $x = 1$?
 - Laat op dezelfde manier zien dat de helling van de grafiek bij $x = 3$ gelijk is aan 6.
 - Vanwege de lijnsymmetrie in de y -as weet je nu in twee andere punten van de grafiek ook de helling. Welke twee punten zijn dat en hoe groot is de helling in elk van die punten?
 - Hoe groot is de helling van de grafiek in het punt $(0, 0)$?
 - In het punt $(2, 4)$ is de helling van de grafiek gelijk aan 4. In welk punt is de helling van de grafiek gelijk aan -4 ?

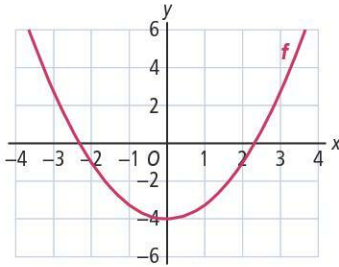
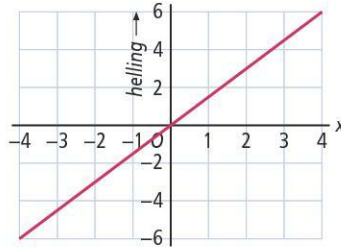


Je kunt met je rekenmachine een tabel maken met de hellingen van de grafiek van een functie in verschillende punten. Daarvoor voer je bij y_1 het functievoorschrift in en bij y_2 de formule $(y_1(x + 0,001) - y_1(x)) / 0,001$.

Voorbeeld

x	$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 4$	<i>helling</i>
-1	-3,25	-1,5
0	-4	0
1	-3,25	1,5
2	-1	3
3	2,75	4,5

→ Instructie rekenmachine | Hellingen



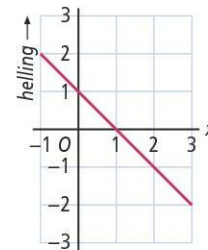
- 9 Naast de grafiek van $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 4$ zie je de grafiek van de hellingen.
- Bij welke waarden van x daalt de grafiek van f ? Hoe zie je dat aan de grafiek van de hellingen?
 - Bij welke waarden van x stijgt de grafiek van f ? Hoe zie je dat aan de grafiek van de hellingen?
 - Hoe kun je aan de grafiek van de hellingen zien dat functie f bij $x = 0$ een minimale waarde bereikt?

Theorie

In de **hellinggrafiek** van een functie f kun je zien hoe groot de helling in elk punt van de grafiek van f is.

- Als de hellinggrafiek boven de x -as ligt, zijn de hellingen van de grafiek van f positief, dus dan stijgt de grafiek van f .
- Als de hellinggrafiek onder de x -as ligt, zijn de hellingen van de grafiek van f negatief, dus dan daalt de grafiek van f .
- Als de hellinggrafiek de x -as snijdt, dus als de helling nul is, dan heeft de grafiek van f een horizontale raaklijn.

Voorbeeld



Bij $x < 1$ is de hellinggrafiek positief, dus de grafiek van f stijgt daar.
Bij $x > 1$ is de hellinggrafiek negatief, dus de grafiek van f daalt daar.

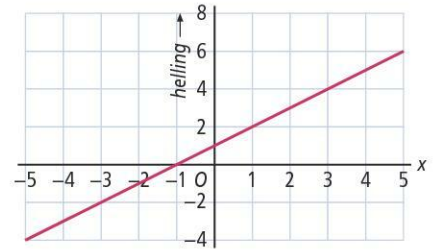
Ondersteunende route → maak opdracht 010

10

H

- Maak een tabel met hellingen van de grafiek bij de functie $f(x) = x^3 - 12x + 1$. Kies voor x de waarden -5 tot en met 5 met stapgrootte 1 .
- Teken aan de hand van de tabel met hellingen de hellinggrafiek.
- Gebruik de hellinggrafiek om uit te zoeken bij welke waarden van x de grafiek van f stijgt.
- Lees uit de hellinggrafiek af bij welke waarden van x de grafiek van f een top heeft.
- Is er sprake van een minimum of een maximum? Hoe zie je dat aan de hellinggrafiek?
- Controleer de antwoorden van deze opdracht met behulp van een plot van de grafiek van f .

- 11** De grafiek is de hellinggrafiek van een functie f .
- Hoe groot is de helling van de grafiek van f bij $x = -1$?
 - Leg uit waarom de grafiek van f links van $x = -1$ daalt en rechts van $x = -1$ stijgt.
 - Leg met het antwoord van opdracht b uit dat de grafiek van f bij $x = -1$ een top heeft.
 - Heeft functie f bij $x = -1$ een maximum of een minimum?

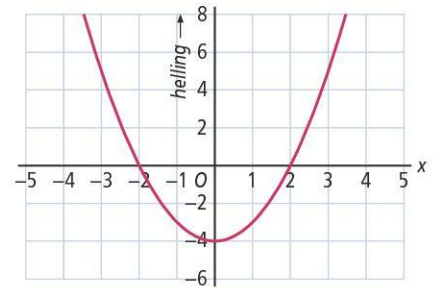


Daar waar de waarden van de helling overgaan van positief naar negatief, heeft de grafiek van f een overgang van stijgen naar dalen. Dat betekent dat bij die x -waarde de functie f een maximum heeft.

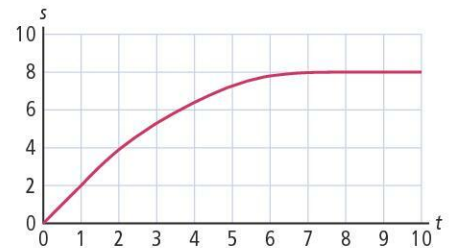
De functie f heeft een minimum bij die x -waarde waar de waarde van de helling overgaat van negatief naar positief.

Ondersteunende route → maak opdracht 012

- 12** Gegeven is de hellinggrafiek van een functie f . Deze hellinggrafiek snijdt de x -as bij $x = -2$ en bij $x = 2$.
- Hoe loopt de raaklijn aan de grafiek van f in deze punten?
 - Leg uit dat bij $x = 0$ de grafiek van f geen top heeft.
 - Bij welke waarden van x is de grafiek van f toenemend stijgend?
 - Bij welke waarden van x is de grafiek van f afnemend dalend?
 - Schets een mogelijke grafiek bij de functie f .



- 13** Een automobilist nadert een verkeerslicht en remt af. In de grafiek zie je het verband tussen de afgelegde weg s in meters vanaf het moment van remmen en de tijd t in seconden.
- Bepaal in een aantal punten grafisch de helling van de grafiek en schets de grafiek die de snelheid van deze automobilist weergeeft.
 - Welke eenheid hoort er bij de verticale as van de grafiek van opdracht a?
 - Hoe zie je in de zojuist getekende grafiek wanneer de auto tot stilstand gekomen is? En hoe zie je dit in de grafiek hiernaast?



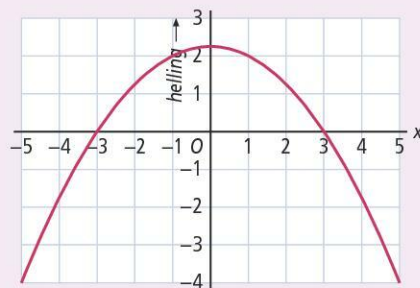
Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

- 010**
- Maak een tabel met hellingen van de grafiek bij de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$. Kies voor x de waarden -3 tot en met 5 met stapgrootte 1 .
 - Teken aan de hand van de tabel met hellingen de hellinggrafiek.
 - Bij welke waarden van x is de hellinggrafiek positief?
 - Welke conclusie kun je trekken uit het antwoord van opdracht c over het verloop van de grafiek van f ?
 - Leg uit dat bij $x = -1$ de grafiek van f van stijgen overgaat naar dalen.
 - Hoe zie je aan de grafiek dat f bij $x = -1$ een maximum heeft?
 - Controleer de antwoorden van deze opdracht met behulp van een plot van de grafiek van f .

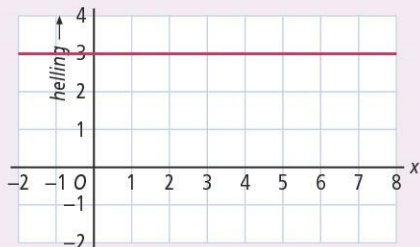
Om een tabel te maken met de hellingen van een grafiek voer je bij y_1 het functievoorschrift in en bij y_2 de formule $(y_1(x + 0,001) - y_1(x))/0,001$.

- 012**
- Je ziet de hellinggrafiek van een functie f . Deze hellinggrafiek snijdt de x -as bij $x = -3$ en bij $x = 3$.
- Hoe groot is de helling van de grafiek van f bij $x = -3$ en bij $x = 3$?
 - En hoe kun je zien dat de grafiek van f stijgt op het interval $\langle -3, 3 \rangle$?
 - Hoe zie je dat de grafiek van f daalt voor $x < -3$?
 - Leg uit dat de grafiek van f een minimum heeft bij $x = -3$.
 - Leg ook uit dat de grafiek van f een maximum heeft bij $x = 3$.



Uitdagende opdrachten

- U2**
- Je ziet de hellinggrafiek van functie f . De grafiek van f gaat door het punt $(8, 3)$. Stel het functievoorschrift van f op.



8A.3 De afgeleide functie

Je leert

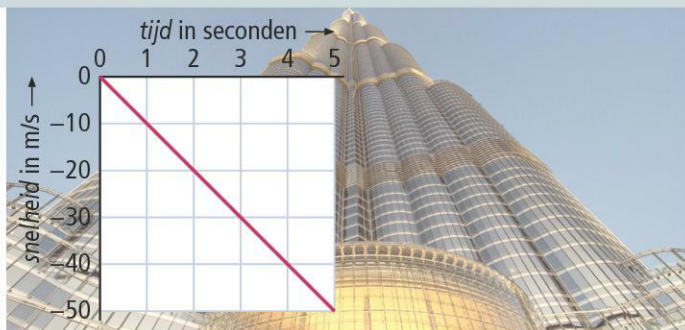
- wat een afgeleide functie is

Leerroutes

- ondersteunend: 14–15–16–17–18–019–20–021–22
- doorlopend: 14–15–16–17–18–19–20–21–22
- uitdagend: 14–16–17–18–19–21–22–U3–U4

De Burj Khalifa is een 830 meter hoge toren, in Dubai. Van de top van deze toren valt een steentje. In de grafiek zie je de snelheid van het steentje na t seconden.

- Waarom is de snelheid negatief?
- Na 13 seconden valt het steentje op de grond. Met welke snelheid zal het steentje op de grond vallen?



- 14 De tabel met functiewaarden en hellingen hoort bij $f(x) = x^2$.
- Welke vorm heeft de hellinggrafiek van f ?
 - Hoe groot is de helling van de grafiek van f bij $x = 5$?
 - Welk functievoorschrift hoort bij de hellinggrafiek van f ?
 - In welk punt van de grafiek van f is de helling van de grafiek van f gelijk aan 7?

x	$f(x)$	helling
-2	4	-4
-1	1	-2
0	0	0
1	1	2
2	4	4

Theorie

De functie die bij de hellinggrafiek van f hoort, heet **hellingfunctie** of **afgeleide functie** van f . De notatie voor de afgeleide functie is f' (spreek uit als f -accent). Zo is de afgeleide functie van $f(x) = x^2$ gelijk aan $f'(x) = 2x$.

De afgeleide van de formule $K = a^2$ wordt genoteerd als $\frac{dK}{da} = 2a$.

De helling van een grafiek in een gegeven punt wordt ook wel de **afgeleide waarde** genoemd. In een tijd-afstand situatie is de afgeleide waarde de **snelheid**.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = x^2$. Bereken de helling van de grafiek van f in het punt $(-4, 16)$.

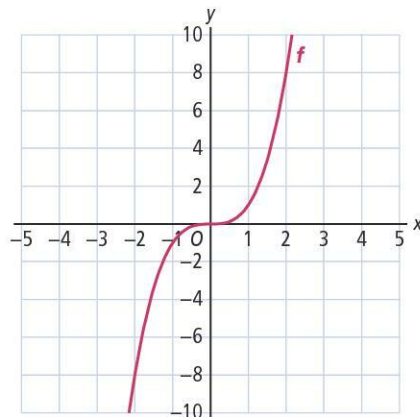
Oplossing

De afgeleide functie is $f'(x) = 2x$. De helling van de grafiek van f in het punt $(-4, 16)$ is $f'(-4) = 2 \times -4 = -8$.

- 15 Gegeven is $f(x) = x^2$.
- Bereken $f'(7)$.
 - Bereken de afgeleide waarde bij $x = 2,9$.
 - In welk punt van de grafiek van f is de helling gelijk aan 9?

- 16** Gegeven is de formule $A = p^2$.
- H** a Bereken met behulp van $\frac{dA}{dp}$ de helling van de grafiek in het punt $(-5, 25)$.
- b Bereken de helling van de grafiek bij $p = 3,5$.

- 17** Deze opdracht gaat over de afgeleide functie van $f(x) = x^3$.
- a Plot en schets de hellinggrafiek van f .
- b Welke vorm heeft de hellinggrafiek van f ?
- c De vorm van de hellinggrafiek suggereert dat het functievoorschrift van f' te schrijven is als $f'(x) = a \cdot x^2$. Is daarbij de waarde van a positief of negatief?
- d Ga na dat de helling van de grafiek van f in het punt $(2, 8)$ gelijk is aan 12 en bereken daarmee de waarde van a .
- e Lees uit de hellinggrafiek de helling van de grafiek van f af in het punt $(1, 1)$ en controleer daarmee de waarde van a die je in opdracht d berekend hebt.
- f In welke punten van de grafiek van f is de helling gelijk aan 75?
- 18** a Ga op de manier van opdracht 17 na dat de afgeleide van $f(x) = x^4$ gelijk is aan $f'(x) = 4x^3$.
- b Doe een voorspelling voor $g'(x)$ bij $g(x) = x^{10}$.



Theorie

Als $f(x) = x^2$ dan is $f'(x) = 2x$.

Als $f(x) = x^3$ dan is $f'(x) = 3x^2$.

Algemeen geldt: als $f(x) = x^n$ dan is $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Het berekenen van een afgeleide functie heet **differentiëren**.

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie $f(x) = x^7$.
Bereken de helling van de grafiek van f in het punt $(-2, -128)$.

Oplossing

De afgeleide functie is $f'(x) = 7x^6$.
De helling van de grafiek van f in het punt $(-2, -128)$ is $f'(-2) = 7 \times (-2)^6 = 448$.

Voorbeeld 2

In welk punt van de grafiek bij $g(x) = x^8$ is de helling van de grafiek gelijk aan 1024?

Oplossing

De afgeleide functie is $g'(x) = 8x^7$. De helling van de grafiek van g is gelijk aan 1024 als $g'(x) = 1024$.
 $8x^7 = 1024$ geeft $x^7 = 128$ dus $x = 2$.
 $g(2) = 2^8 = 256$. Het gevraagde punt is $(2, 256)$.

Ondersteunende route → maak opdracht 019

- 19** Gegeven zijn de functies $f(x) = x^{20}$ en $g(x) = x^4$.
- H**
- Bereken $f'(x)$ en de helling van de grafiek van f in het punt $(-1, 1)$.
 - Bereken de helling van de grafiek van g in het punt $(2, 16)$.
 - In welk(e) punt(en) van de grafiek van g is de helling gelijk aan 108?
- 20** Gegeven is een lijn met functievoorschrift $f(x) = x$.
- Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van deze lijn?
 - Hoe groot zijn dus $f'(-2)$ en $f'(3)$?
 - Geef op basis van je antwoorden bij opdracht b een functievoorschrift voor f' .
 - Ga na dat je met de regel: 'Als $f(x) = x^n$, dan is $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ ', hetzelfde functievoorschrift voor f' krijgt als bij opdracht c.

Ondersteunende route → maak opdracht 021

- 21** Gegeven is de functie $g(t) = 7t$.
- Hoe groot is de helling in elk punt van de grafiek van g ?
 - Geef een functievoorschrift voor g' .
 - Gegeven is de functie $h(t) = 7t + 19$.
Geef een functievoorschrift van h' .
 - Geef een functievoorschrift voor k' van de constante functie $k(x) = 5$.

De afgeleide van een lineaire functie $f(x) = ax + b$ is $f'(x) = a$.

De afgeleide van de constante functie $f(x) = c$ is $f'(x) = 0$.

Voorbeeld

De afgeleide van $A = 5 - \frac{1}{2}t$ is $\frac{dA}{dt} = -\frac{1}{2}$.

De afgeleide van $f(x) = 3$ is $f'(x) = 0$.

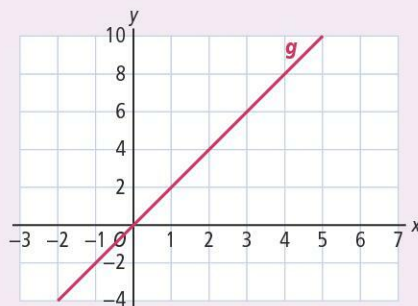
- 22** Gegeven zijn de functies $f(x) = x^5$ en $g(x) = 10x - 8$.
- H**
- Plot en schets de grafieken van f en g .
 - Leg met behulp van de grafieken van f en g uit dat de vergelijking $f'(x) = g'(x)$ twee oplossingen heeft.
 - Los de vergelijking $f'(x) = g'(x)$ op.

Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4

Ondersteunende opdrachten

- 019** Gegeven is de functie $f(x) = x^6$.
- a** Met welke regel voor het differentiëren kun je aantonen dat $f'(x) = 6x^5$?
 - b** Bereken $f(2)$ en $f'(2)$.
 - c** Welke betekenis heeft de uitkomst van $f(2)$? En welke betekenis heeft $f'(2)$?
 - d** Gegeven is $g(x) = x^5$. Bereken $g'(x)$.
 - e** Welk getal moet je voor x invullen om de helling van de grafiek van g in het punt $(-2, -32)$ te berekenen?
 - f** Bereken de helling van de grafiek van g in het punt $(-2, -32)$.
 - g** Om te berekenen bij welke waarden van x de helling van de grafiek van g gelijk aan 20 is, moet je de vergelijking $5 \cdot x^4 = 20$ oplossen. Los deze vergelijking op.
 - h** In welke punten van de grafiek van g is de helling gelijk aan 405?

- 021** Gegeven is de functie $g(x) = 2x$.
- a** De helling van de grafiek van g is in elk punt van de grafiek even groot. Hoe groot?
 - b** Leg uit dat de afgeleide van g de constante functie $g'(x) = 2$ is.
 - c** Waarom is de afgeleide van $h(x) = 2x + 11$ gelijk aan de afgeleide van functie g ?
 - d** Teken de grafiek bij de constante functie $k(x) = 4$.
 - e** Hoe groot is de helling van de grafiek van k ?
 - f** Geef een functievoorschrift voor k' .



Uitdagende opdrachten

- U3** Gegeven zijn de functies $f(x) = x^5$ en $g(x) = x^6$. De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten $(0, 0)$ en $(1, 1)$. Er is voor $0 < x < 1$ een waarde van x waarvoor de grafieken precies dezelfde helling hebben. Bereken voor welke waarde van x dat het geval is.
- U4** Gegeven is de formule $y = x^3$. Bereken voor welke waarden van x geldt dat $\frac{dy}{dx} \geq 48$.

8A.4 Regels voor differentiëren

Je leert

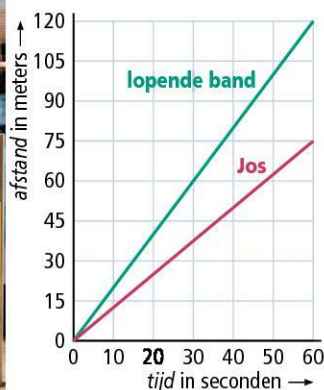
- hoe je de rekenregels voor differentiëren gebruikt

Leerroutes

- ondersteunend: 23—24—25—026—027—27—28
- doorlopend: 23—24—25—26—27—28—29
- uitdagend: 23—25—26—27—28—29—U5

Op vliegvelden zijn lopende banden waarop passagiers zich kunnen verplaatsen. De rode grafiek laat zien hoeveel meter Jos aflegt als hij naast de band loopt. De groene grafiek laat zien hoeveel meter Jos op de lopende band aflegt als hij stilstaat op de band.

- Met welke snelheid zal Jos zich verplaatsen als hij gaat lopen op de lopende band?



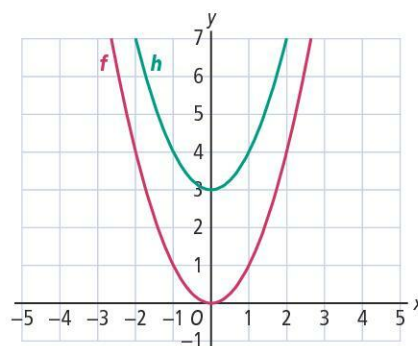
- 23** In de tabel zie je de hellingen van de grafieken bij de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = 5x^2$.

- Bij $x = 1$ is de helling van de grafiek van f gelijk aan $f'(1) = 2$.
Hoeveel keer zo groot is de helling van de grafiek van g bij $x = 1$?
- Met welk getal moet je de helling van de grafiek van f telkens vermenigvuldigen om de helling van de grafiek van g te krijgen?
- Geef het functievoorschrift van g' .

x	$f'(x)$	$g'(x)$
-3	-6	-30
-2	-4	-20
-1	-2	-10
0	0	0
1	2	10
2	4	20
3	6	30
4	8	40

- 24** De grafieken horen bij de functies $f(x) = x^2$ en $h(x) = x^2 + 3$.

- Leg uit hoe de grafiek van h ontstaat uit die van f .
- Maak een tabel met functiewaarden en hellingen van de grafieken van f en h .
- Vergelijk de hellingen van de grafieken van f en h .
Wat valt je op? Geef hiervoor een verklaring met behulp van de grafieken van f en h .
- Geef het functievoorschrift van h' .



- 25** Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ en de somfunctie $s(x) = f(x) + g(x)$, dus $s(x) = x^2 + x^3$.
- Maak een tabel voor de hellingen van de grafiek van s . Hoe groot zijn de waarden van $s'(-2)$ en $s'(1)$?
 - Bereken $f'(-2)$ en $g'(-2)$ en controleer dat $s'(-2) = f'(-2) + g'(-2)$.
 - Ga op dezelfde manier na dat $s'(1) = f'(1) + g'(1)$.
 - Welk vermoeden heb je voor $s'(x)$?
 - Onderzoek op dezelfde manier wat de afgeleide van de verschilfunctie $v(x) = f(x) - g(x)$ is.

Theorie

Bij het **differentiëren** gelden de volgende **regels**.

functie	afgeleide functie
$g(x) = c \cdot f(x)$	$g'(x) = c \cdot f'(x)$
$g(x) = f(x) + c$	$g'(x) = f'(x)$
$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$ (somregel)
$v(x) = f(x) - g(x)$	$v'(x) = f'(x) - g'(x)$

Voorbeeld

functie	afgeleide
$f(x) = 4x^3$	$f'(x) = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2$
$g(x) = x^5 + 2$	$g'(x) = 5x^4$
$h(x) = x^3 + x^5$	$h'(x) = 3x^2 + 5x^4$
$i(x) = 3x^4 - 2x$	$i'(x) = 4 \cdot 3x^3 - 2 = 12x^3 - 2$

Ondersteunende route → maak opdracht 026

- 26** Differentieer de functies.

H

- $f(x) = 20x^3$
- $F(t) = 15t^6$
- $A(p) = 23p^2 + 9$
- $h(u) = -0,75u + 12,3$
- $n(x) = 0,01x^{25} - 0,07$
- $s(t) = 0,5t^7 - 4t^2$
- $Q(p) = 210 - 34p$
- $k(q) = 7q - 0,9q^3$

Ondersteunende route → maak opdracht 027

- 27** Bereken met de afgeleide functie de helling van de grafiek bij $x = -1$.

H

- a** $f(x) = -6x^2 + 5x - 1$ **d** $k(x) = 5x^2 + 5x^3 + 2x$
b $g(x) = -3x^5 - 8x^2$ **e** $l(x) = x^4 - x^2 + 3$
c $h(x) = 10x^2 - 28x - 6$ **f** $m(x) = 5x^2 + 8$



- 28** Een ballonvaarder gooit op 200 meter hoogte een zandzak als ballast overboord. De hoogte h van de zandzak in meters voldoet de eerste 3 seconden aan de formule $h = 200 - 4,9t^2$ met t in seconden. Vanaf $t = 3$ verandert de snelheid van het vallen van de zandzak niet meer.
- a** Bereken met behulp van differentiëren de snelheid waarmee de zandzak valt op $t = 3$.
b Hoe hoog is de zandzak op $t = 3$?
c Leg uit waarom vanaf $t = 3$ voor de hoogte van de zandzak de formule $h = at + b$ geldt.
d Bereken voor de formule uit opdracht c de waarde van a en b .
e Na hoeveel seconden valt de zandzak op de grond?
- 29** Van een functie f is de afgeleide $f'(x) = -5 + 6x$. Geef twee mogelijke functievoorschriften voor f .

Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

- 026** Gegeven zijn de functie $f(x) = x^4$, $g(x) = 6 \cdot x^4$, $h(x) = 8x$ en $s(x) = x^4 + 8x$.
- a** Bereken $f'(x)$.
 - b** Met welke constante moet je $f(x)$ vermenigvuldigen om $g(x)$ te krijgen?
 - c** Vul in: $g'(x) = \dots \cdot f'(x) = \dots$
 - d** Bereken $h'(x)$.
 - e** De afgeleide van $s(x) = f(x) + h(x)$ is $s'(x) = f'(x) + h'(x)$.
Vul in: $s'(x) = f'(x) + h'(x) = 4x^3 + \dots$

Differentieer de volgende functies.

- f** $f(x) = 2x^7$
- i** $n(t) = 0,2t^{30} - 0,9$
- g** $K(p) = 3p^3 + 9p$
- j** $P(v) = 50 - 4v^2$
- h** $t(a) = -0,5a + 89$
- k** $T(q) = 5q^2 - 2q^3$

- 027** Gegeven is de functie $g(x) = 3x^3 - x^2$.
- a** Bereken de afgeleide $g'(x)$.
 - b** Bereken $g'(2)$.
 - c** Hoe groot is de helling van de grafiek van g bij $x = 2$?

Uitdagende opdrachten

- U5** Bram doet mee aan een crosscountryloop in de Ardennen. Hij bereikt na 2 uur en 48 minuten de finish. Het aantal kilometers s dat hij na t uur afgelegd heeft, wordt benaderd door de formule $s = t^3 - 4,5t^2 + 12t$.
Bereken hoelang de snelheid van Bram lager was dan zijn gemiddelde snelheid. Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

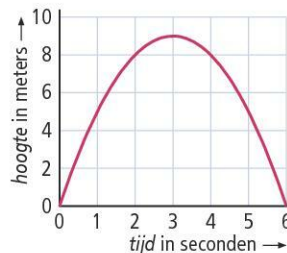


Je leert

- hoe je maxima en minima van een functie berekent

Leerroutes

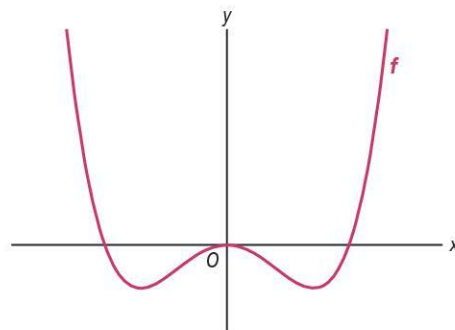
- ondersteunend: 30—031—32—033—33—34—35
- doorlopend: 30—31—32—33—34—35—36
- uitdagend: 30—32—33—34—35—36—U6



Lieke schiet bij een training de bal recht omhoog. In de grafiek zie je de hoogte van de bal uitgezet tegen de tijd.

- Wat kun je zeggen over de snelheid van de bal op $t = 3$?

- 30 De grafiek hoort bij de functie $f(x) = x^4 - 2x^2$.
- Hoe loopt de raaklijn aan de grafiek in de toppen?
 - Hoe groot is de helling van de grafiek in de toppen?
 - Bereken $f''(x)$.
 - Ga na dat $f'(x) = 0$ bij $x = 0$, bij $x = -1$ en bij $x = 1$.
 - Hoe loopt de raaklijn aan de grafiek in de punten waarbij geldt $f'(x) = 0$?
 - Bereken $f'(\frac{1}{2})$. Stijgt of daalt de grafiek bij $x = \frac{1}{2}$?
 - Wat weet je van het verloop van de grafiek als $f'(x) < 0$?



Theorie

Bij de x -waarden waar $f'(x)$ positief is, stijgt de grafiek van f .

Bij de x -waarden waar $f'(x)$ negatief is, daalt de grafiek van f .

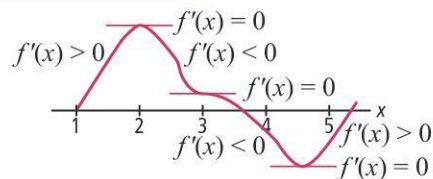
Bij de x -waarden waar $f'(x)$ gelijk is aan 0, loopt de raaklijn aan de grafiek van f horizontaal.

Als de grafiek van f bij $x = a$ overgaat van stijgen in dalen, heeft f een **maximum** dat gelijk is aan $f(a)$.

Als de grafiek van f bij $x = a$ overgaat van dalen in stijgen, heeft f een **minimum** dat gelijk is aan $f(a)$.

Maximale en minimale functiewaarden heten **extreme waarden**.

Voorbeeld

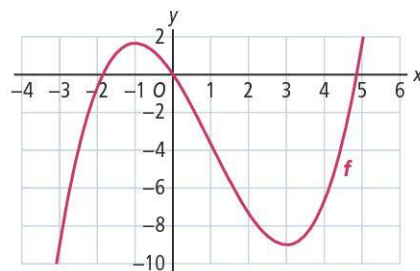


Bij $x = 2$ gaat de grafiek over van stijgen in dalen, dus $f(2)$ is een maximum.

Bij $x = 4,5$ gaat de grafiek over van dalen in stijgen, dus $f(4,5)$ is een minimum.

Ondersteunende route → maak opdracht 031

- 31** De grafiek hoort bij de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$.
- H** a Lees af bij welke waarden van x de grafiek van f een horizontale raaklijn heeft.
- b Bereken $f'(x)$ en ga hiermee na dat $f'(x) = 0$ bij de in opdracht a gevonden waarden van x .
- c Op welk interval is $f''(x) < 0$?



- 32** Je gaat de extreme waarden van $K(p) = -p^3 + 3p^2 + 7$ berekenen.
- a Bereken $K'(p)$.
- b Los op $K'(p) = 0$.
- c Ga met een plot van de grafiek na of er bij de waarden van p waarin $K'(p) = 0$ sprake is van een minimum of een maximum van K .
- d Bereken het maximum en het minimum van K .

Aanpak

Hoe bereken je de extreme waarden van een functie f ?

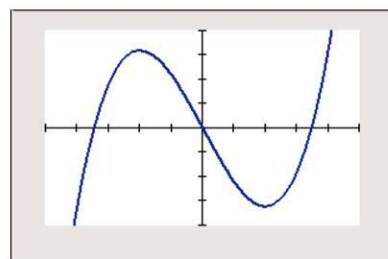
- 1 Bereken $f'(x)$.
- 2 Los op $f'(x) = 0$.
- 3 Ga met een plot na of de grafiek van f bij de oplossingen van $f'(x) = 0$ een top heeft.
- 4 Bereken de y -coördinaat van een eventuele top. Geef aan of het een maximum of een minimum betreft.

Voorbeeld

Bereken de extreme waarden van de functie $f(x) = 2x^3 - 24x$.

Oplossing

- 1 $f'(x) = 6x^2 - 24$
- 2 $f'(x) = 0$
 $6x^2 - 24 = 0$
 $6x^2 = 24$
 $x^2 = 4$
 $x = -2$ en $x = 2$
- 3 In een plot zie je dat er een maximum is bij $x = -2$ en een minimum bij $x = 2$.
- 4 Het maximum van f is $f(-2) = 32$.
 Het minimum van f is $f(2) = -32$.



Ondersteunende route → maak opdracht 033

33 Bereken de extreme waarden.

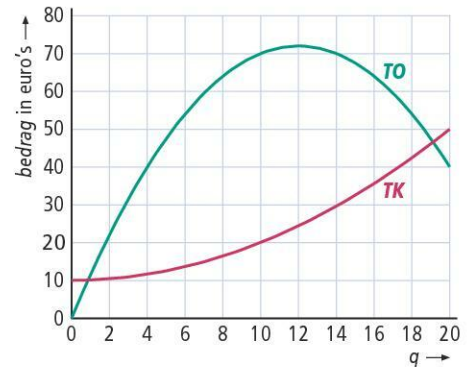
- H** a $L(m) = -8m^2 + 16m$ c $T(q) = -q^3 + 5q^2 - 3q$
 b $h(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$ d $w(r) = r^3 - 8r^2 + 6$

34 Gegeven zijn de functies $H(q) = (q - 6) \cdot 1,5^q$ en $K(x) = -x^2 + 104x + 10$.

- H** a Bereken met je rekenmachine het minimum van H . Rond af op twee decimalen.
 b Bereken met de afgeleide het maximum van K .

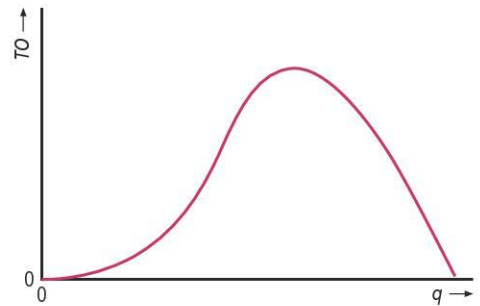
35 Een fabrikant levert sleutelhangers. Je ziet de grafieken van de totale opbrengst TO en de totale kosten TK in euro's. Hierbij is q het aantal sleutelhangers in tientallen.

- a Hoe kun je aan de grafieken zien dat de winst bij een productie van 60 sleutelhangers groter is dan de winst bij een productie van 180 sleutelhangers?
 b Leg uit hoe je in de figuur de maximale winst terug vindt en geef aan bij welk aantal sleutelhangers de winst maximaal is.
 c Bij de opbrengst hoort de formule $TO = 12q - 0,5q^2$. Bereken met behulp van differentiëren bij welke waarde van q de opbrengst maximaal is.
 d Voor de kosten geldt de formule $TK = 0,1q^2 + 10$. Maak een formule voor de winst $TW = TO - TK$.
 e Bereken met behulp van differentiëren bij welk aantal sleutelhangers de winst maximaal is.



36 Een producent verkoopt q eenheden van een product. De totale opbrengst in euro's is TO . Bij de grafiek die het verband tussen TO en q weergeeft, hoort de formule $TO = -0,01q^3 + k \cdot q^2$.

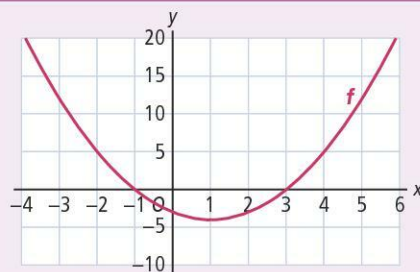
- a Bereken met behulp van differentiëren de maximale totale opbrengst bij $k = 3$.
 b Bij welke waarde van k is TO maximaal bij $q = 300$?
 c Leg uit dat bij de gemiddelde opbrengst per eenheid product de formule $GO = -0,01q^2 + k \cdot q$ hoort.
 d Neem weer $k = 3$ en bereken de maximale gemiddelde opbrengst.



Uitdagende route → maak opdracht U6

Ondersteunende opdrachten

- 031** De grafiek hoort bij de functie $f(x) = x^2 - 2x - 3$.
- a** Lees uit de grafiek af bij welke waarde van x de grafiek een horizontale raaklijn heeft.
 - b** Waarom geldt voor deze waarde van x dat $f'(x) = 0$?
 - c** Ga met een berekening na dat $f'(x) = 0$ bij de in opdracht a gevonden waarde van x .
 - d** Bij welke waarden van x daalt de grafiek?
 - e** Bij welke waarden van x is $f'(x) < 0$?

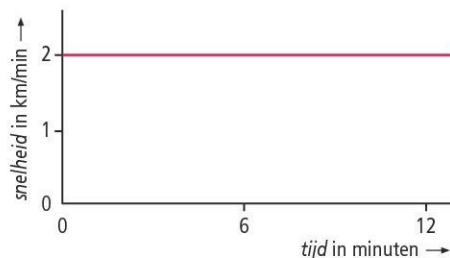


- 033** Je gaat de extreme waarden van de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 8x$ berekenen.
- a** Bereken $f'(x)$.
 - b** Ga na dat $f'(x) = 0$ bij $x = -4$ en bij $x = 2$.
 - c** Ga met een plot van de grafiek van f na of er sprake is van een minimum of maximum bij $x = -4$ en bij $x = 2$.
 - d** Bereken de y -coördinaten van de toppen door het invullen van $x = -4$ en $x = 2$ in de functie f .

Uitdagende opdrachten

- U6** Gegeven zijn de functies $f(x) = x^5 + x^3 + x - 2$ en $g(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2x + 2$.
- a** Beredeneer dat de grafiek van f de x -as tussen $x = 0$ en $x = 1$ snijdt.
 - b** Beredeneer met behulp van $f'(x)$ dat de grafiek van f de x -as niet nog een keer snijdt.
 - c** Lijn l gaat door de twee toppen van de grafiek van g . Stel met behulp van differentiëren een vergelijking van de lijn l op.

- 37** Mevrouw Snoek heeft een rit gemaakt op de snelweg. Haar tijd-afstand grafiek wordt beschreven door de formule $s = -0,012t^3 + 0,18t^2 + 1,6t$. Hierin is s de afstand in km en t de tijd in minuten. De rit duurde 12 minuten.
- Plot de grafiek van s en beschrijf haar rijgedrag.
 - Onderzoek met behulp van de afgeleide van s op welk moment haar snelheid het grootst was.
 - Hoe groot was de snelheid op dat moment?
 - Hiernaast is de tijd-snelheid grafiek van meneer Barends geschetst. Hij reed hetzelfde traject. Hoeveel kilometer legt hij af in 12 minuten?
 - Geef een formule voor de afstand s in km die meneer Barends heeft afgelegd, uitgedrukt in de tijd t in minuten.
 - Plot de hellinggrafiek van $s = -0,012t^3 + 0,18t^2 + 1,6t$ en onderzoek gedurende hoeveel minuten mevrouw Snoek harder reed dan meneer Barends. Rond je antwoord af op één decimaal.



- 38**
- Plot de grafiek bij de formule $A = 27u^2 - u^3 - 168u + 450$.
 - De grafiek lijkt een minimum te hebben bij $u = 4$.

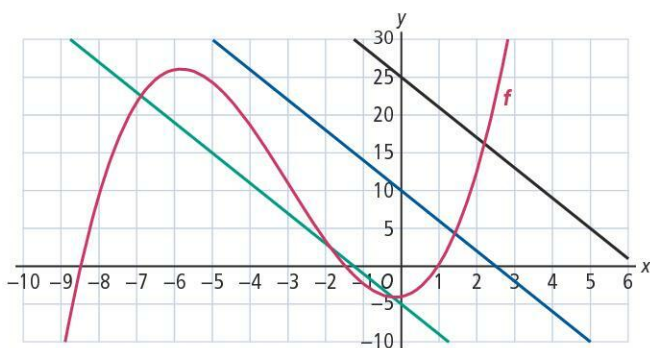
Ga met de afgeleide $\frac{dA}{du}$ na of dat inderdaad het geval is en bereken het minimum van A .

- Gebruik de afgeleide om te onderzoeken of A ook een maximum heeft.

- 39** Een zwembad wordt geleegd door een stop in de bodem los te trekken. De hoeveelheid water in het zwembad voldoet aan de formule $V = 10 \cdot (2 - \frac{1}{60}t)^2$. Hierin is V het volume in m^3 en t de tijd in minuten.

- Hoeveel water bevat het zwembad op het tijdstip $t = 0$?
- Na hoeveel minuten is het zwembad leeg?
- Plot en schets de grafiek van V .
- Waarom is de helling van de grafiek van V voor elke waarde van t negatief?
- Bereken de gemiddelde uitstroomsnelheid over de gehele periode waarin het zwembad leegloopt.
- Op welk moment stroomt het zwembad het snelst leeg?
- Laat zien dat je de formule van V kunt herleiden tot $V = 40 - \frac{2}{3}t + \frac{1}{360}t^2$.
- Bereken met de afgeleide het moment waarop de uitstroomsnelheid precies gelijk is aan de gemiddelde uitstroomsnelheid.





- 40** De grafiek bij de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + x - 4$ is getekend. Ook zijn enkele lijnen getekend met een vergelijking van de vorm $y = -4x + c$. Onderzoek met behulp van de afgeleide voor welke waarden van c de lijn $y = -4x + c$ de grafiek van f raakt.

- 41** Hout krimpt in de eerste maanden nadat het is gezaagd. Door de structuur van het hout krimpt het in de lengte anders dan in de breedte. Een houten plaat heeft, nadat het pas gezaagd is, een lengte en een breedte van 60 cm. Voor de lengte L en de breedte B , beide in cm, gelden de formules $L = -0,0135t^2 + 60$ en $B = 60 - 0,05t$. In deze formules is t de tijd in maanden.
- De plaat is op $t = 0$ een vierkant van 60 cm bij 60 cm. Onderzoek na hoeveel maanden de plaat weer vierkant is.
 - Op welk tijdstip krimpen de lengte en de breedte van de plaat met dezelfde snelheid?

- 42** De belangstelling voor een rit met een zweefmolen is niet alleen afhankelijk van de prijs, maar ook van de duur van de rit. Uiteraard is een langere rit aantrekkelijker, maar de wachttijd neemt dan toe en daardoor zal het aantal klanten weer afnemen. Er blijkt dat voor het gemiddeld aantal

klanten q de volgende formule geldt: $q = 86 - 24 \cdot \frac{p}{t} - 6 \cdot t$.

Hierin is p de prijs van een rit in euro's en t de tijdsduur van een rit in minuten.

- Toon aan dat je de totale opbrengst TO kunt berekenen met de formule $TO = 86 \cdot p - 24 \cdot \frac{p^2}{t} - 6 \cdot t \cdot p$.
- Bij een rittijd van 4 minuten is er een prijs p waarvoor de totale opbrengst maximaal is. Onderzoek bij welke prijs de totale opbrengst maximaal is.



Theorie

Hellingfunctie, afgeleide functie, differentiëren, afgeleide waarde

De functie die bij de hellinggrafiek van f hoort, heet de hellingfunctie of de afgeleide functie van f . De notatie voor de afgeleide functie is f' . (spreek uit als f -accent). Zo is de afgeleide functie van $f(x) = x^2$ gelijk aan $f'(x) = 2x$.

De afgeleide van de formule $K = a^2$ wordt genoteerd als

$$\frac{dK}{da} = 2a.$$

De helling in een gegeven punt wordt ook wel de afgeleide waarde genoemd. In een tijd-afstand situatie is de afgeleide waarde de snelheid.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.

Bereken de helling van de grafiek van f in het punt $(-4, 16)$.

Oplossing

De afgeleide functie is $f'(x) = 2x$.

De helling van de grafiek van f in het punt $(-4, 16)$ is $f'(-4) = 2 \times -4 = -8$.

- S1** Een steen valt van een 45 meter hoge toren. De hoogte van de steen kun je berekenen met de formule $h = 45 - 4,9t^2$. Hierin is h de hoogte in meters en t de tijd in seconden. De afgeleide van deze formule is $\frac{dh}{dt} = 9,8t$.

- Bereken de helling van de grafiek van h in het punt $(1; 40,1)$.
- Bereken $\frac{dh}{dt}$ bij $t = 2$.
- Welke snelheid heeft de steen op het tijdstip $t = 3$?

Vaardigheid

Je kunt een helling van een grafiek in een punt benaderen.

- Kies een klein interval bij $x = a$, bijvoorbeeld $[a; a + 0,001]$.
- Bereken het differentiequotient $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ over het interval.

Voorbeeld

Benader de helling van de grafiek bij de functie $f(x) = 2 \cdot 3^x$ in het punt $(2, 18)$.

Oplossing

- Kies het interval $[2; 2,001]$.

$$2 \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(2,001) - f(2)}{2,001 - 2} = \frac{18,019\,785\dots - 18}{0,001} \approx 19,786$$

De helling van de grafiek in het punt $(2, 18)$ is ongeveer 19,786.

- S2** Benader de helling van de grafiek in het gegeven punt.

- $f(x) = -6\sqrt{x} + 5x$ in het punt $(9, 27)$
- $g(x) = -3 \cdot 0,5^x$ in het punt met $x = -2$

Vaardigheid

Je kunt met de hellinggrafiek van een functie f een uitspraak doen over de grafiek van f .

- Liggt de hellinggrafiek boven de x -as, dan zijn de hellingen van de grafiek van f positief en dus is de grafiek van f stijgend.
- Liggt de hellinggrafiek onder de x -as, dan zijn de hellingen van de grafiek van f negatief en dus is de grafiek van f dalend.
- Bij de snijpunten van de hellinggrafiek met de x -as heeft de grafiek van f een horizontale raaklijn. Er kan dan sprake zijn van een minimum, een maximum of geen van beide.

Voorbeeld

Gegeven is de hellinggrafiek van functie f .

Wat kun je aan de hand daarvan zeggen over de grafiek van f ?

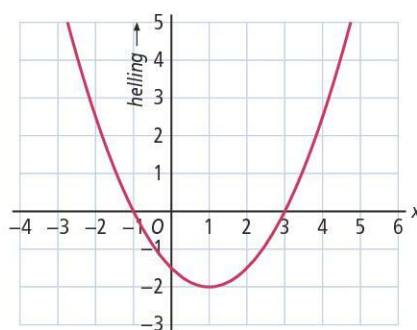
Oplossing

Voor $x < -1$ en voor $x > 3$ stijgt de grafiek van f .

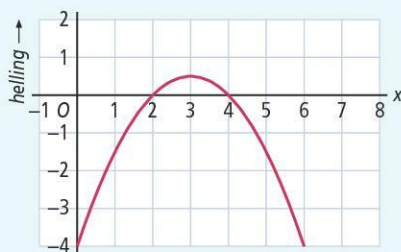
Voor $-1 < x < 3$ daalt de grafiek van f .

Bij $x = -1$ heeft f een maximum.

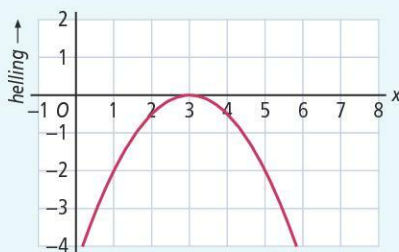
Bij $x = 3$ heeft f een minimum.



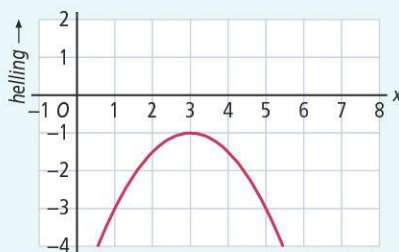
S3 De hellinggrafieken A, B en C horen bij de functies f , g en h .



A



B



C

- Bij welke waarden van x heeft de grafiek van f toppen?
- Bij welke waarde van x heeft f een maximum?
- De grafiek van g heeft een horizontale raaklijn. Waarom heeft de grafiek van g geen top?
- Schets het verloop van de grafiek van h .

Vaardigheid

Je kunt de rekenregels voor differentiëren gebruiken.

Voor een machtsfunctie $f(x) = x^n$ geldt de differentieerregel $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Voor een lineaire functie $f(x) = ax + b$ geldt $f'(x) = a$.

Voor een constante functie $f(x) = c$ geldt $f'(x) = 0$.

Andere regels voor differentiëren zijn:

functie	afgeleide functie
$g(x) = c \cdot f(x)$	$g'(x) = c \cdot f'(x)$
$g(x) = f(x) + c$	$g'(x) = f'(x)$
$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$ (somregel)
$v(x) = f(x) - g(x)$	$v'(x) = f'(x) - g'(x)$

Voorbeeld

functie	afgeleide functie
$f(x) = 3x^6$	$f'(x) = 6 \cdot 3x^5 = 18x^5$
$g(x) = 4x + 3$	$g'(x) = 4$
$s(x) = x^2 + 5x$	$s'(x) = 2x + 5$
$v(x) = 3x^4 - 5x^2$	$v'(x) = 3 \cdot 12x^3 - 10x = 12x^3 - 10x$

S4 Differentieer de functies.

- a $f(x) = -16x^5$
- b $H(t) = -2t^4 + 3t$
- c $W(q) = -q + 7$

S5 Bereken met de afgeleide functie de helling van de grafiek bij $x = 3$.

- a $f(x) = 2x^2 + 5x + 1$
- b $g(x) = -x^4 + 8x$
- c $h(x) = 6x^2 - 10$

Vaardigheid

Je kunt de extreme waarden van een functie f berekenen.

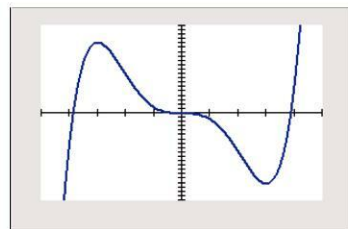
- 1 Bereken $f'(x)$.
- 2 Los op $f'(x) = 0$.
- 3 Ga met een plot na of de grafiek van f bij de oplossingen van $f'(x) = 0$ een top heeft.
- 4 Bereken de y -coördinaat van een eventuele top. Geef aan of het een maximum of een minimum betreft.

Voorbeeld

Bereken de extreme waarden van de functie $f(x) = 0,1x^5 - 1,5x^3$.

Oplossing

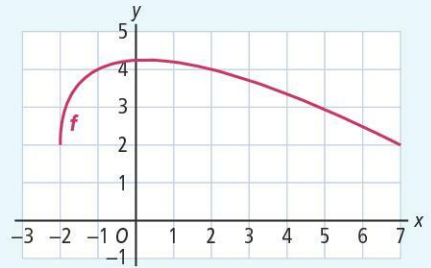
- 1 $f'(x) = 0,5x^4 - 4,5x^2$
- 2 $f'(x) = 0$
 $0,5x^4 - 4,5x^2 = 0$
 $0,5x^2(x^2 - 9) = 0$
 $0,5x^2 = 0$ of $x^2 - 9 = 0$
 $x^2 = 0$ of $x^2 = 9$
 $x = 0$ of $x = -3$ of $x = 3$
- 3 In een plot zie je dat er een maximum is bij $x = -3$ en een minimum is bij $x = 3$. Bij $x = 0$ is geen top.
- 4 $f(-3) = 16,2$ is een maximum van f .
 $f(3) = -16,2$ is een minimum van f .



S6 Bereken extreme waarden.

- a $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$
- b $P(x) = 0,5x^3 - 6x - 2$
- c $H(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 6$

- T1** De grafiek hoort bij de functie $f(x) = 3\sqrt{x+2} - x$.
- Bereken de differentiequotienten van f over de intervallen $[2; 2,01]$ en $[2; 2,001]$.
 - Hoe groot is de helling van de grafiek bij $x = 2$?
 - En hoe groot is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(-1, 4)$?
 - Controleer met een berekening of de lijn $y = -0,5x + 5,5$ de grafiek in het punt $(7, 2)$ raakt.

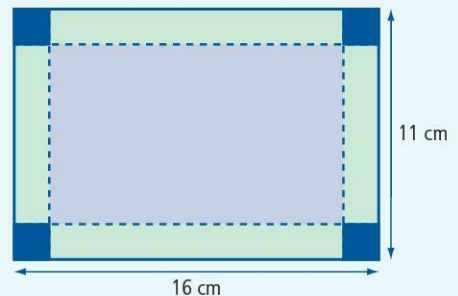


- T2** Gegeven zijn de functies $g(x) = x^6$ en $h(x) = x^{17}$.
- Bereken $g'(x)$ en de helling van de grafiek van g in het punt $(-1, 1)$.
 - In welk(e) punt(en) van de grafiek van g is de helling gelijk aan 192?
 - Bereken $h'(x)$ en de helling van de grafiek van h in het punt $(-1, -1)$.
 - Gegeven is de functie $m(x) = 17x - 16$.
Los de vergelijking $h'(x) = m'(x)$ op en leg uit wat je antwoord betekent voor de grafieken van h en m .

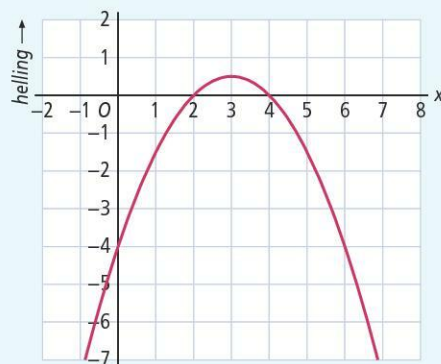
- T3** Je kunt van een rechthoekig stuk karton van 11 cm bij 16 cm een bakje maken. Knip daarvoor bij de hoeken gelijke vierkantjes af en vouw langs de stippellijnen.

- Bereken de inhoud van het bakje als de uitgeknipte vierkantjes 1 cm bij 1 cm zijn.
- Hoe groot is de inhoud van het bakje als de vierkantjes 2 cm bij 2 cm zijn?
- Noem de zijde van de uitgeknipte vierkantjes x cm. Leg uit dat voor de inhoud I in cm^3 van het bakje geldt $I = x(16 - 2x)(11 - 2x)$.
- Toon aan dat de formule uit opdracht b te herleiden is tot $I = 4x^3 - 54x^2 + 176x$.

- Bereken met behulp $\frac{dI}{dx}$ bij welke waarde van x de inhoud van het bakje maximaal is. Rond je antwoord af op één decimaal.
- Hoe groot is de maximale inhoud van het bakje?



- T4** Je ziet de hellinggrafiek van functie f .
- Bij welke waarden van x stijgt de grafiek van f ?
 - Bij $x > 4$ is de grafiek van f toenemend dalend. Hoe zie je dat aan de hellinggrafiek?
 - Bij welke waarden van x is de grafiek van f afnemend dalend?
 - Bij $x = 4$ heeft de grafiek van f een maximum. Hoe zie je dat aan de hellinggrafiek?
 - Bij welke waarde van x heeft de grafiek van f een minimum?
 - Bij $x = 3$ heeft de hellinggrafiek een top. Heeft de grafiek van f bij $x = 3$ ook een top?

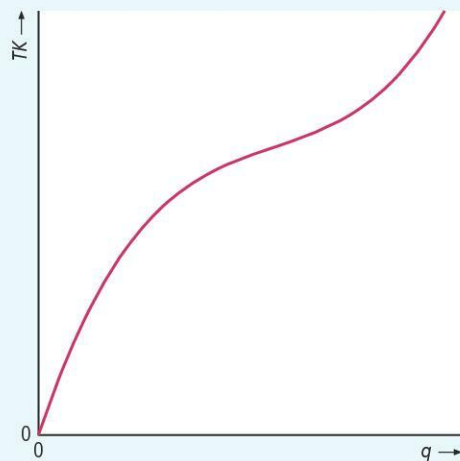


- T5** Gegeven is de functie $f(x) = -3x^4 + 20x^3 + 25$.
- Bereken $f'(x)$ en los op $f'(x) = 0$.
 - Op welk interval is de grafiek van f dalend?
 - Bereken het maximum van f .
 - Gegeven is de functie $L(p) = 2p^3 - 3p^2 - 12p + 5$. Bereken de extreme waarden van L .

- T6** Differentieer de functies.

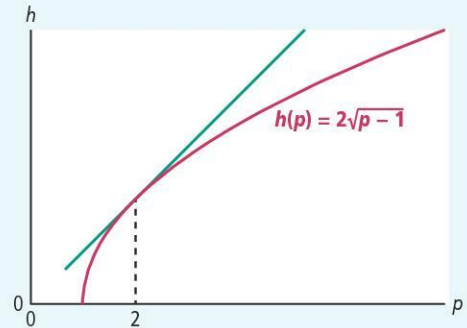
- $p(x) = -\frac{1}{2}x^8 + 8\frac{1}{2}$
- $d(p) = 9p^5$
- $h(t) = -t^2 + 5t - 9$

- T7** Een fabrikant produceert hamers in grote aantallen. De totale kosten TK die de fabrikant per week maakt, worden gegeven door de formule $TK = 0,1q^3 - 2q^2 + 15q$. Hierin is TK in honderden euro's en q de productie in duizendtallen.
- Bereken de totale kosten van de fabrikant bij een weekproductie van 6000 hamers.
 - Geef de formule van de afgeleide $\frac{dTK}{dq}$.
 - Beredeneer met behulp van de afgeleide dat TK geen maxima en minima heeft en dat de grafiek van TK overal stijgend is.
 - De fabrikant verkoopt de hamers voor € 1,75 per stuk. Voor de totale opbrengst TO in honderden euro's geldt dan de formule $TO = 17,5q$ met q in duizendtallen. Onderzoek met differentiëren bij welke productieomvang de totale winst maximaal is.



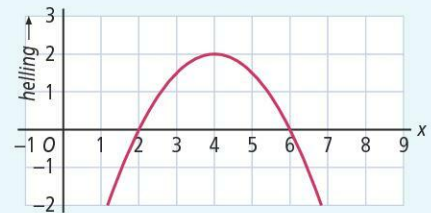
Je kunt een helling van een grafiek in een punt benaderen.

- E1** De grafiek hoort bij de functie $h(p) = 2\sqrt{p-1}$.
- Benader de helling van de grafiek in het punt met $p = 3$. Rond je antwoord af op één decimaal.
 - De raaklijn aan de grafiek in het punt $(2, 2)$ is getekend. Benader de richtingscoëfficiënt van deze raaklijn.
 - De grafiek van h is afnemend stijgend. Onderzoek of de helling van de grafiek in het punt met $p = 100$ afgenomen is tot onder $0,1$.



Je kunt met de hellinggrafiek van een functie f een uitspraak doen over de grafiek van f .

- E2** De grafiek is de hellinggrafiek van functie f .
- Bij welke waarden van x heeft de grafiek van f toppen?
 - En bij welke waarde van x heeft functie f een maximum?
 - Bij welke waarden van x is de grafiek van f toenemend stijgend?
 - Bij welke waarden van x is de grafiek van f afnemend dalend?



Je kunt de rekenregels voor het differentiëren gebruiken.

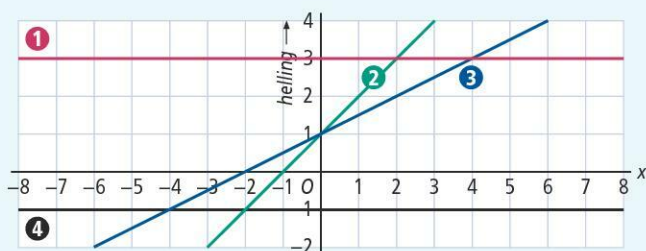
- E3**
- Differentieer de functies.

A $h(q) = 3q^2 + 6$	C $K(p) = -7p^2 + 1$
B $S(t) = -t^5 + 3t^2 - 8t$	D $A(n) = \frac{1}{4}n^6 + 78$
 - Bereken met de afgeleide functie de helling van de grafiek bij $x = 2$.

E $f(x) = -x^2 + 5$	F $g(x) = 3x^3 + 8x$
---------------------	----------------------

Je kunt de extreme waarden van een functie berekenen.

- E4** Een producent van grondstoffen voor drop heeft nu vijf machines en wil dit aantal uitbreiden zodat hij meer grondstoffen kan verwerken. Hij vraagt zich af bij welke hoeveelheid grondstoffen de opbrengst maximaal is. Met de formule $TO = -q^3 + 24q^2 + 51q$ kun je de totale opbrengst berekenen. Hierin is TO de totale opbrengst in duizenden euro's en is q de hoeveelheid grondstoffen in honderden kilo's.
- Bereken met de afgeleide de hoeveelheid grondstoffen waarbij de opbrengst maximaal is.
 - Hoe groot is de maximale opbrengst?



E5 De grafieken 1, 2, 3 en 4 zijn hellinggrafieken van vier functies.

Welk functievoorschrift hoort bij welke hellinggrafiek?

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$$

$$h(x) = -x + 3$$

$$g(x) = 3x + 1$$

$$i(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$$

E6 Gegeven is de formule $H = q^{13}$.

a Bereken met de afgeleide de helling van de grafiek in het punt (2, 8192).

b In welk(e) punt(en) is de helling van grafiek gelijk aan 13?

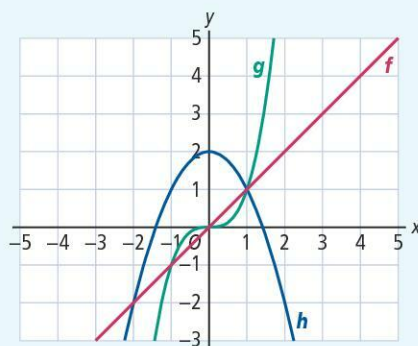
c Bereken $\frac{dH}{dq}$ bij $q = 1,7$.

E7 De grafieken horen bij de functies $f(x) = x$, $g(x) = x^3$ en $h(x) = -x^2 + 2$. De drie grafieken gaan door het punt (1, 1).

a Bereken voor elke grafiek de helling in het punt (1, 1).

b Bereken in welk punt de raaklijn aan de grafiek van h evenwijdig is aan de grafiek van f .

c Bij welke waarden van x hebben de grafieken van g en h dezelfde helling?



E8 Herman doet een veldloop. Voor het verband tussen s en t geldt de formule $s = 1,1t^2 - 0,02t^4$. Hierin is s de afgelegde afstand in km en t de tijd in kwartieren.

a Herman finisht na 85 minuten.

Bereken de gemiddelde snelheid van Herman in km per uur.

b Bereken met de afgeleide van s de snelheid van Herman als hij drie kwartier onderweg is.



SE

CE

K



In dit hoofdstuk

Vorm en ruimte is een onderwerp speciaal voor de leerlingen die wiskunde C als profiel vak hebben gekozen. Het bouwt voort op wat je in de onderbouw geleerd hebt over verhoudingen, meetkundige figuren, hoeken, ruimtefiguren, oppervlakte en inhoud.

In dit hoofdstuk zie je dat kunstenaars en architecten al eeuwen lang in hun werk gebruik maken van speciale wiskundige verhoudingen en verbanden. Je leert die verbanden kennen en toepassen. Je leert dat aanzichten van een ruimtelijk object je veel vertellen over het object zelf.

In deel 3 wordt deze kennis nog uitgebreid bij het maken en analyseren van perspectieftekeningen.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- Ordenen en structureren
- Abstraheren
- Logisch redeneren en bewijzen

opdracht 24
opdracht 38
opdracht 39

- V1** Een fotolijstje is rechthoekig met zijden van 15 cm en 10 cm. Je gaat de lengte van de diagonaal van het fotolijstje met de stelling van Pythagoras berekenen.
- Vul het schema verder in.
 - Hoe lang is de diagonaal van het fotolijstje? Geef je antwoord in millimeters nauwkeurig.

zijde	kwadraat
10	...
15	... +
diagonaal	...
diagonaal = $\sqrt{\dots} \approx \dots$	

Theorie

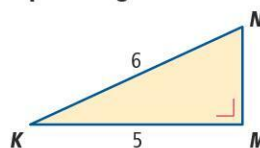
In elke rechthoekige driehoek geldt de **stelling van Pythagoras**: $a^2 + b^2 = c^2$. Hierin zijn a en b de lengtes van de twee rechthoekszijden en is c de lengte van de langste zijde.

Voorbeeld

Van $\triangle KMN$ is $\angle M = 90^\circ$, $KM = 5$ en $KN = 6$.

Bereken de lengte van zijde MN .

Oplossing



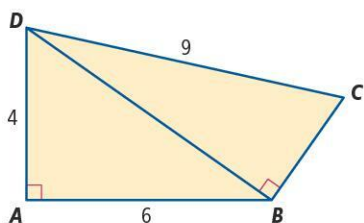
zijde	kwadraat
$KM = 5$	25
$MN = \dots$	11 +
$KN = 6$	36

$$MN = \sqrt{11} \approx 3,3$$

- V2** Bereken voor de driehoeken de lengte van de onbekende zijde.

- $\triangle ABC$ met $\angle B = 90^\circ$, $AB = 12$ en $BC = 9$
- $\triangle DEF$ met $\angle D = 90^\circ$, $DE = 7$ en $DF = 7$
- $\triangle PQR$ met $\angle R = 90^\circ$, $PQ = 13$ en $PR = 3$

- V3** Bereken van vierhoek $ABCD$ de lengte van lijnstuk BD en van zijde BC .



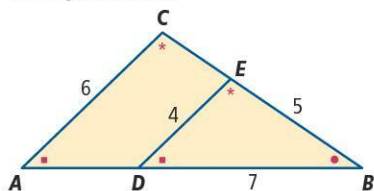
Theorie

Bij een **vergroting** van een figuur blijven de hoeken hetzelfde en worden alle afmetingen met hetzelfde getal vermenigvuldigd. Dit getal heet de **factor**.

Voorbeeld

Driehoek ABC is een vergroting van driehoek DBE .

Bereken de lengte van zijde AB en de lengte van lijnstuk CE .



Oplossing

zijden driehoek DBE	$DE = 4$	$DB = 7$	$BE = 5$
zijden driehoek ABC	$AC = 6$	$AB = \dots$	$BC = \dots$

De factor is $\frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$.

De lengte van zijde AB is $7 \times 1\frac{1}{2} = 10\frac{1}{2}$.

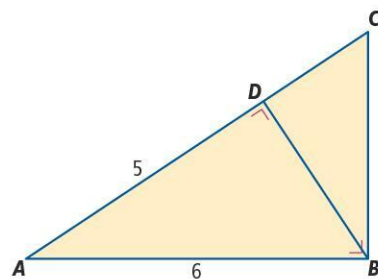
De lengte van zijde BC is $5 \times 1\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$.

De lengte van lijnstuk CE is $7\frac{1}{2} - 5 = 2\frac{1}{2}$.

- V4 Je kunt in het voorbeeld op de vorige bladzijde driehoek DBE ook een vergroting noemen van driehoek ABC . Welke factor hoort bij deze vergroting?

- V5 Van driehoek ABC is $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle ADB = 90^\circ$, $AB = 6$ en $AD = 5$.

- Leg uit dat driehoek ABC even grote hoeken heeft als driehoek ADB .
- Driehoek ABC is een vergroting van driehoek ADB . Welke factor hoort bij deze vergroting?
- Bereken de lengte van lijnstuk CD .



- V6 Veel gebruikte fotoformaten zijn 20×30 cm en 9×13 cm.
- Zijn deze formaten een vergroting van elkaar?
 - Bereken de oppervlakte van elk van deze formaten.

Theorie

Bij het berekenen van oppervlaktes kun je gebruik maken van de volgende oppervlakteformules:

oppervlakte rechthoek: $A = b \times h$

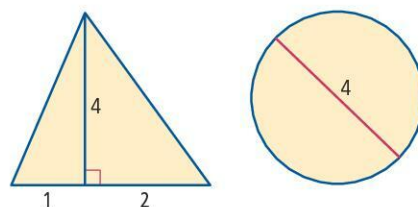
oppervlakte driehoek: $A = \frac{1}{2} \times b \times h$

oppervlakte cirkel: $A = \pi \times r^2$

In deze formules is A de oppervlakte, b de basis, h de hoogte en r de straal.

Voorbeeld

Bereken de oppervlakte van de driehoek en de cirkel.

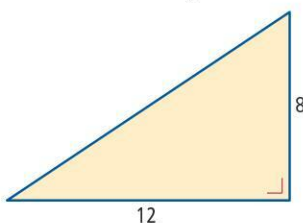


Oplossing

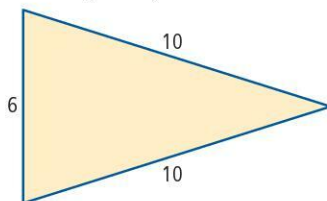
Oppervlakte driehoek is $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$.

Oppervlakte cirkel is $\pi \times 2^2 = 4\pi \approx 12,6$.

- V7 Bereken de oppervlakte van de rechthoekige en de gelijkbenige driehoek. Rond je antwoorden zo nodig af op één decimaal.



A



B

- V8
- Teken een rechthoek van 6 bij 4 cm.
 - Bereken de oppervlakte van de grootste cirkel die binnen deze rechthoek past.
 - Hoeveel procent van de oppervlakte van de rechthoek is gevuld met de cirkel?
 - Bereken de oppervlakte van de cirkel die door de vier hoekpunten van de rechthoek gaat.

8C.1 Gelijkvormigheid

Je leert

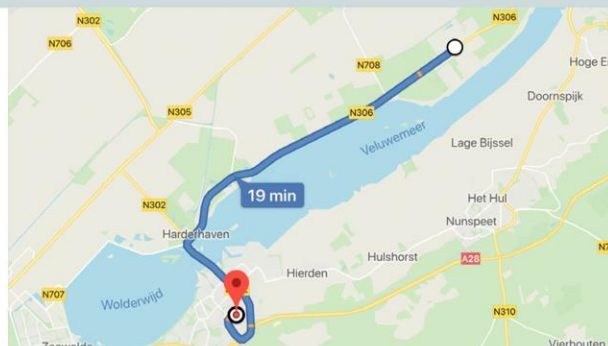
- hoe je met vergrotingsfactoren rekt

Leerroutes

- ondersteunend: 1–02–3–4–5–6–7–08–9–10
- doorlopend: 1–2–3–4–5–6–7–8–9–10
- uitdagend: 1–3–4–5–6–7–8–9–10–U1

Je ziet de route die de bus van het station van Harderwijk naar het festivalterrein van Lowlands aflegt. Deze route is 18 kilometer lang.

- Welke schaal heeft deze kaart?



- 1 Van een fotolijstje van 10×24 cm is de lengte van de diagonaal 26 cm.
Bereken, zonder gebruik te maken van de stelling van Pythagoras, de lengte van de diagonaal van een rechthoekige fotolijst van 20×48 cm.

Theorie

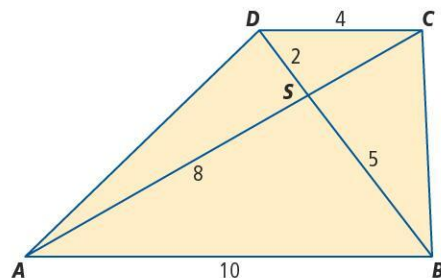
Twee figuren heten **gelijkvormig** als de ene figuur een vergroting van de andere is. Elke lengte in de ene figuur moet je met dezelfde **vergrotingsfactor** vermenigvuldigen om de overeenkomstige lengte in de andere figuur te krijgen.

Ondersteunende route → maak opdracht 02

- 2 Van een foto met afmetingen 18×24 cm is een vergroting gemaakt. De lengte van de diagonaal van de vergroting is 48 cm.
Bereken de vergrotingsfactor en de afmetingen van de vergroting.
- 3 Rechthoek A met afmetingen $10 \times 22,5$ cm is gelijkvormig met rechthoek B waarvan één zijde een lengte van 54 cm heeft.
 - a Leg uit dat de andere zijde van rechthoek B twee verschillende lengtes kan hebben.
 - b Bereken de mogelijke lengtes van de andere zijde.

- 4 In trapezium $ABCD$ zie je onder andere de vier driehoeken ABS , BCS , CDS en DAS .

- Leg uit waarom driehoek ABS en driehoek CDS gelijkvormig zijn.
- Bereken de vergrotingsfactor.
- Bereken de lengte van lijnstuk CS .



- Leg uit waarom twee vierkanten altijd gelijkvormig zijn.
 - Twee rechthoeken hoeven niet gelijkvormig te zijn. Geef de afmetingen van twee rechthoeken die niet gelijkvormig zijn.
 - Zijn twee cirkels altijd gelijkvormig? Leg uit.
- 6 Rechthoek C is 5 bij 4 cm. Rechthoek D is een vergroting van rechthoek C. De vergrotingsfactor is 3.
- Geef de afmetingen van rechthoek D.
 - Hoeveel keer zo groot is de oppervlakte van rechthoek D als die van rechthoek C?

Theorie

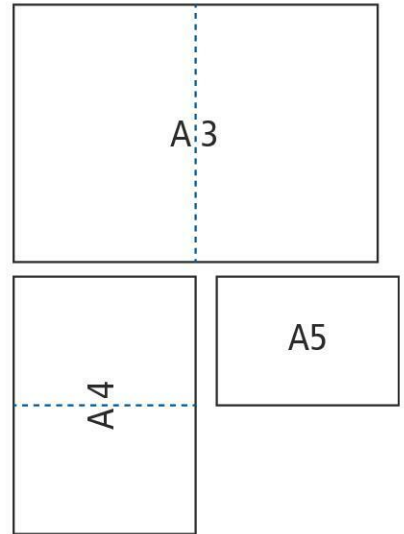
Als twee figuren gelijkvormig zijn met een vergrotingsfactor k , dan geldt voor de **oppervlakte** van de twee figuren een **vergrotingsfactor** k^2 .



- 7 De lengte van de diagonaal van beeldscherm A is 14 inch en de lengte van de diagonaal van beeldscherm B is 21 inch.
- Beeldscherm B is een vergroting van beeldscherm A. Bereken de vergrotingsfactor.
 - De oppervlakte van beeldscherm A is 160 vierkante inch. Bereken de oppervlakte beeldscherm B.
 - Beeldscherm C is ook een vergroting van beeldscherm A en heeft een oppervlakte van 90 vierkante inch. Bereken de lengte van de diagonaal van beeldscherm C.

Ondersteunende route → maak opdracht O8

- 8** Het papierformaat dat het meest gebruikt wordt heet A4. Leg je twee A4-tjes met de lange zijde tegen elkaar aan, dan krijg je een formaat dat A3 wordt genoemd. Halveer je een A4 formaat over de lange zijde, dan krijg je het zogenaamde A5 formaat. Op deze wijze doorgaand kennen we onder andere ook de A2, A1, A0 en A6 formaten. De afmetingen zijn zo gekozen dat elk formaat gelijkvormig is met elk ander formaat.
- Met welk getal moet je de oppervlakte van een A4 formaat vermenigvuldigen om de oppervlakte van een A3 formaat te krijgen?
 - Bereken met het antwoord van opdracht a de vergrotingsfactor van een A4 formaat naar een A3 formaat. Geef dit getal zowel exact als afgerond op twee decimalen.
 - De afmetingen van een A4 formaat zijn 210 bij 297 mm. Hoeveel mm zijn de afmetingen van een A3 formaat?
 - Bereken ook de afmetingen van een A5 formaat in mm nauwkeurig.



- 9** Op een wegenkaart staat de aanduiding 1 : 50 000. Dit betekent dat werkelijke afstanden een vergrotingsfactor van 50 000 hebben ten opzichte van die op de kaart.
- Tussen twee plaatsen op deze wegenkaart wordt een afstand van 3,2 cm gemeten. Bereken de werkelijke afstand in meters nauwkeurig.
 - De oppervlakte van een bosgebied is in werkelijkheid 8,7 ha. Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van dit bos op de wegenkaart?

$$1 \text{ ha is } 100 \text{ m} \times 100 \text{ m} = 10\,000 \text{ m}^2$$

- 10** Muziek wordt onder andere op cd en op lp uitgebracht. Beide formaten zijn cirkelvormig en zijn dus gelijkvormig.
- Meet de diameter van de cd en van de lp in de foto en bereken hiermee de vergrotingsfactor.
 - Een cd heeft een diameter van 12 cm. Bereken de oppervlakte van een lp.

Uitdagende route → maak opdracht U1



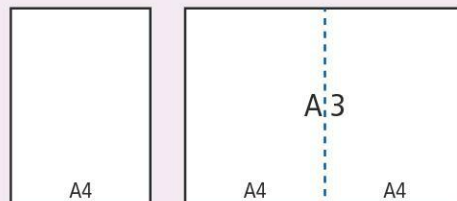
Ondersteunende opdrachten

02 Van een foto met afmetingen 15×20 cm is een vergroting gemaakt. De lengte van de diagonaal van de vergroting is 45 cm.

- a Bereken de lengte van de diagonaal van de foto.
- b Laat met een berekening zien dat de vergrotingsfactor 1,8 is.
- c Bereken de afmetingen van de vergroting.

08 Het papierformaat dat het meest gebruikt wordt heet A4. Leg je twee A4'tjes met de lange zijde tegen elkaar aan, dan krijg je een formaat dat A3 wordt genoemd. De afmetingen van de formaten zijn zo gekozen dat ze gelijkvormig zijn.

- a Met welk getal moet je de oppervlakte van een A4 formaat vermenigvuldigen om de oppervlakte van een A3 formaat te krijgen?
- b Noem de vergrotingsfactor waarmee je de afmetingen van de zijden van het A4 formaat moet vermenigvuldigen om dat van het A3 formaat te krijgen k . Leg uit waarom geldt $k^2 = 2$.
- c Bereken k . Geef dit getal zowel exact als afgerond op twee decimalen.
- d De afmetingen van een A4 formaat zijn 210 bij 297 mm. Bereken de afmetingen van een A3 formaat in mm nauwkeurig.



Uitdagende opdrachten

U1 Een spiegelreflexcamera maakt foto's met een breedte : hoogte verhouding van 3 : 2. Als deze foto getoond wordt op een breedbeeldscherm met een breedte : hoogte verhouding van 16 : 9, dan past de foto niet. Er komen links en rechts van de foto grijze randen. Ga uit van een breedbeeldscherm met een beelddiagonaal van 37 inch. (1 inch $\approx$ 2,54 cm)

- a Laat met een berekening zien dat het scherm ongeveer 82 cm breed en ongeveer 46 cm hoog is.
- b Een 3 : 2 foto past precies in de volle hoogte van het scherm. Hoe breed zijn de grijze randen links en rechts van de foto samen?
- c Hoeveel cm hoger zou het scherm moeten zijn om de foto precies in het hele scherm te kunnen tonen?



8C.2 De gulden snede

Je leert

- wat de gulden snede is

Leerroutes

- ondersteunend: 11—12—013—14—015—15—16—17
- doorlopend: 11—12—13—14—15—16—17—18
- uitdagend: 11—12—13—14—15—17—18—U2

Bij het maken van het schilderij 'Parade de Cirque' is de Franse schilder Georges Seurat (1851 - 1891) uitgegaan van een rechthoek. Deze rechthoek verdeelde hij in een vierkant en een nieuwe rechthoek, die hij ook weer onderverdeelde in een vierkant en een rechthoek. Dit proces herhaalde hij nog één keer. Op de foto zijn in zijn schilderij deze vierkanten en rechthoeken met blauwe lijnen aangegeven.

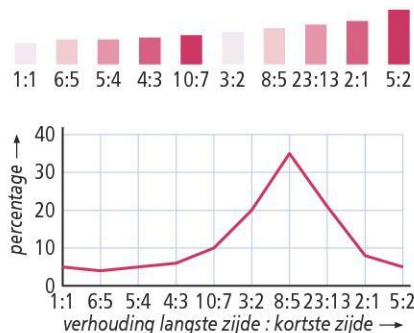
- Onderzoek of er gelijkvormige rechthoeken te vinden zijn.



- 11
- Teken met je liniaal of geodriehoek een rechthoek met een mooie verhouding tussen de lengte en de breedte.
 - Meet van jouw rechthoek de lengte en de breedte.
 - Hoe groot is bij jou de verhouding tussen de lengtes van de beide zijden? Schrijf je antwoord in de vorm *lengte langste zijde : lengte kortste zijde* = ... : ...
 - Vergelijk jouw uitkomst met die van je medeleerlingen. Valt je iets op?

- 12
- De Duitse psycholoog Gustav Fechner (1801 - 1887) heeft onderzoek gedaan naar wat mensen een mooie rechthoek vinden. Hiernaast kun je zien uit welke tien rechthoeken men de favoriete mocht aangeven. In de grafiek is op de verticale as bij elke rechthoek af te lezen welk percentage van de deelnemers deze rechthoek als favoriet had.

- Vul in.
Voor de rechthoek die het meest favoriet is geldt:
lengte langste zijde : lengte kortste zijde = ... : ...
- Je kunt deze verhouding ook schrijven als $g : 1$.
Bereken g .



Ondersteunende route → maak opdracht 013

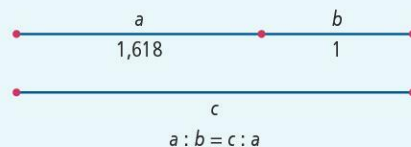
- 13 a Meet in mm nauwkeurig de lengte van de lijnstukken AC , BC en AB .



- b Ga met de antwoorden van opdracht a na dat de volgende verhouding ongeveer geldt: $AC : BC = AB : AC$.

Theorie

De **gouden verhouding** of **gouden snede** is de verhouding $1,618... : 1$. Als je een lijnstuk verdeelt in twee delen die zich tot elkaar verhouden zoals het hele lijnstuk zich verhoudt tot het grootste deel, dan ontstaat de gouden snede. Kies je de lengte van het kleinste lijnstuk gelijk aan 1, dan is de lengte van het grootste lijnstuk bij benadering gelijk aan 1,618. In de wiskunde wordt het getal $1,618...$ vaak aangegeven met het symbool ϕ (spreek uit als 'fi').



- 14 a Leg uit dat in de figuur c gelijk is aan 2,618.
b Laat zien dat voor het lijnstuk in de figuur geldt dat de verhouding $2,618 : 1,618$ gelijk is aan de verhouding $1,618 : 1$.

Theorie

De gouden snede wordt door architecten soms gebruikt bij het ontwerpen van gebouwen of tuinen. Ook kunstenaars en designers bedienen zich soms van de gouden snede bij hun creaties. Een **gouden rechthoek** is een rechthoek waarbij de verhouding van de lengte en breedte gelijk is aan $\phi : 1$.

Ondersteunende route → maak opdracht 015

- 15 **H** De architect Le Corbusier (1887 - 1965) heeft in zijn ontwerpen vaak een gouden rechthoek gebruikt. Je ziet het door hem ontworpen 'Paviljon de L'Esprit'. De raampartij aan de voorzijde rechts is opgebouwd uit twee soorten gouden rechthoeken. De kleinste rechthoek heeft een korte zijde van 35 cm. Bereken in cm nauwkeurig de afmetingen van de zijden van de grote rechthoek.



- 16** De gulden snede verhouding komt ook in de natuur voor en eveneens in het menselijke lichaam.

- a** Meet de afstand van je navel tot de grond en bereken
 vervolgens $\frac{\text{eigen lengte}}{\text{afstand navel tot grond}}$
- b** Vergelijk je uitkomst van opdracht a met die van je medeleerlingen en met het getal ϕ . Wat is je conclusie?

- 17** Je ziet een foto van een slakkenhuis waarin een spiraalvorm is te zien. De tekening onder het slakkenhuis is gemaakt door te beginnen met twee kleine vierkantjes met zijde 1 cm op elkaar. Daarnaast is een vierkant met zijde 2 cm getekend, daaronder een vierkant met zijde 3 cm, dan een vierkant met zijde 5 cm enzovoort.

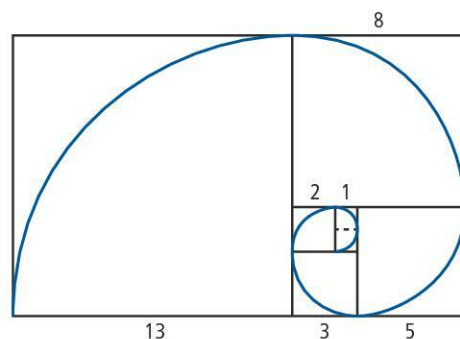
- a** Teken op het werkblad de uitbreiding van deze figuur door de volgende twee vierkanten erbij te tekenen.
- b** In elk vierkant zijn kwartcirkels getekend.
 Teken op het werkblad in de twee vierkanten die je erbij getekend hebt eveneens kwartcirkels zodat de spiraalvorm nog groter wordt.
- c** In de tabel is steeds de uitkomst te zien van de deling van twee opvolgende stralen van de kwartcirkels, te beginnen bij de kleinste twee, dan de op één na kleinste en op twee na kleinste, enzovoort.

Vul de tabel verder in. Rond de uitkomsten steeds af op drie decimalen.

$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	...	...	...	...
1,000	2,000	1,500	...	...	...	...	...	...

- d** Wat valt je op bij de uitkomsten op de onderste rij?

- 18**
- a** Teken een gulden rechthoek waarbij de kortste zijde 4 cm is.
- b** Teken een gulden rechthoek waarbij de langste zijde 4 cm is.
- c** Laat met een berekening zien dat de verhouding $\text{lengte grote rechthoek} : \text{breedte kleine rechthoek}$ gelijk is aan $\phi^2 : 1$. Je kunt een verhoudingstabel gebruiken.



Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

- 013** Lijnstuk AB wordt door punt C verdeeld in een stuk van 55 mm en een stuk van 89 mm.



- Ga na dat de verhouding tussen de lengte van lijnstuk AC en de lengte van lijnstuk BC ongeveer is gelijk aan $1,618 : 1$.
- Bereken ook de verhouding tussen de lengte van lijnstuk AB en de lengte van lijnstuk AC . Schrijf de verhouding als $\dots : 1$.
- Ga met de antwoorden van de opdracht a en b na dat de volgende verhouding ongeveer geldt: $AC : BC = AB : AC$.

- 015** Je ziet twee gulden rechthoeken naast elkaar. Rechthoek B heeft een kortste zijde van 42 cm.

- Leg uit waarom de lengte van de langste zijde van rechthoek B gelijk is aan $42 \times \varphi \approx 67,956$ cm.
- Hoe lang is de kortste zijde van de rechthoek A?
- Bereken de lengte van de langste zijde van rechthoek A.



Uitdagende opdrachten

- U2** Je kunt het gulden snede getal φ exact berekenen. Het lijnstuk is verdeeld volgens de gulden snede, dus in twee stukken die zich verhouden als $\varphi : 1$. De totale lengte van het lijnstuk is gelijk aan $\varphi + 1$.

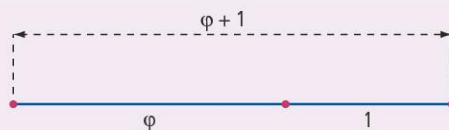
- Volgens de gulden snede geldt $\varphi : 1 = (\varphi + 1) : \varphi$. Leg uit dat de verhouding $\varphi : 1$ ook gelijk is aan $\varphi^2 : \varphi$.

- Leg uit dat uit opdracht a volgt dat $\varphi^2 = \varphi + 1$.

- Herleid de vergelijking $\varphi^2 = \varphi + 1$ op nul en gebruik de abc -formule om aan te tonen dat

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ of } \varphi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ oplossingen zijn van deze vergelijking.}$$

- Leg uit dat de ene oplossing niet voldoet en laat zien dat de andere oplossing inderdaad ongeveer gelijk is 1,618.



De oplossingen van een kwadratische vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ zijn

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ of}$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Je leert • hoe je van een ruimtelijk object aanzichten maakt

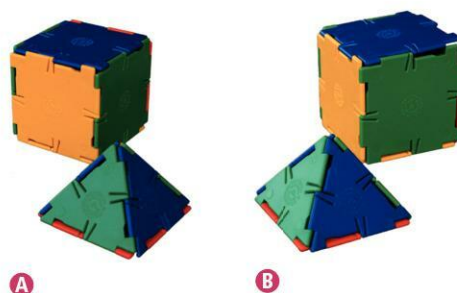
Leerroutes • ondersteunend: 19—20—21—022—23—24
 • doorlopend: 19—20—21—22—23—24
 • uitdagend: 19—21—22—23—24—U3

Je ziet twee foto's van een kunstwerk dat uit zes even lange buizen bestaat. De rechterfoto is recht van voren genomen.

• Weet je nu hoe het kunstwerk eruitziet?



- 19** Van een piramide en een kubus zijn twee foto's gemaakt. Bij het maken van de foto's zijn de kubus en piramide niet verplaatst. Op foto A zie je de kubus links van de piramide en op foto B zie je de kubus rechts van de piramide. Geef hiervoor een verklaring.

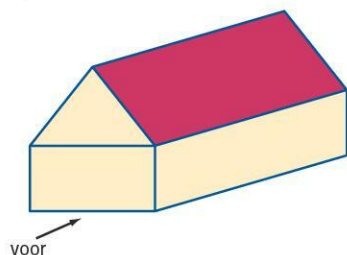


Theorie

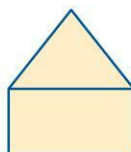
Om meer inzicht te krijgen hoe een ruimtelijk object eruitziet of hoe de positie van verschillende voorwerpen ten opzichte van elkaar is, zijn meerdere foto's of tekeningen nodig. In de wiskunde heten dit **aanzichten**.

Voorbeeld

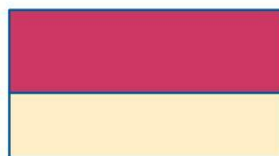
Teken het vooraanzicht, het rechter zijaanzicht en het bovenaanzicht van dit huisje.



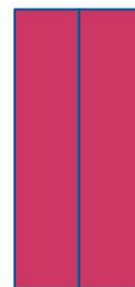
Oplossing



vooraanzicht

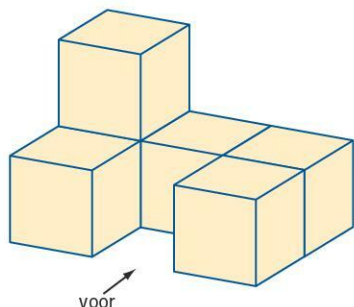


rechter zijaanzicht



bovenaanzicht

- 20 Teken bij het kubusbouwsel het vooraanzicht, het rechter zijaanzicht en het bovenaanzicht.

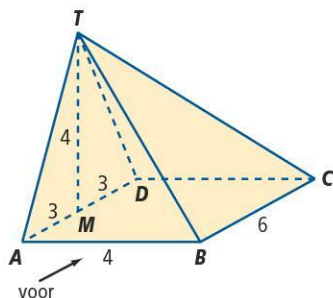


- 21 Op de foto zie je een bijzonder huis. De foto geeft geen volledige informatie over hoe het huis eruitziet. Schets een mogelijk vooraanzicht, een mogelijk rechter zijaanzicht en een mogelijk bovenaanzicht.

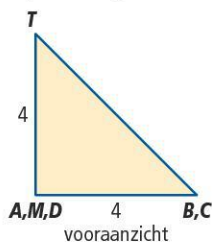
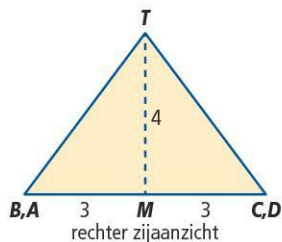
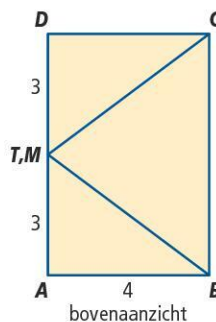
Als je in plaats van een schets de aanzichten van een ruimtelijk object precies wilt tekenen, dan heb je de afmetingen ervan nodig.

Voorbeeld

Van piramide T . $ABCD$ ligt de top T recht boven het midden van ribbe AD . De afmetingen zijn in cm. Teken het vooraanzicht, het rechter zijaanzicht en het bovenaanzicht.



Oplossing



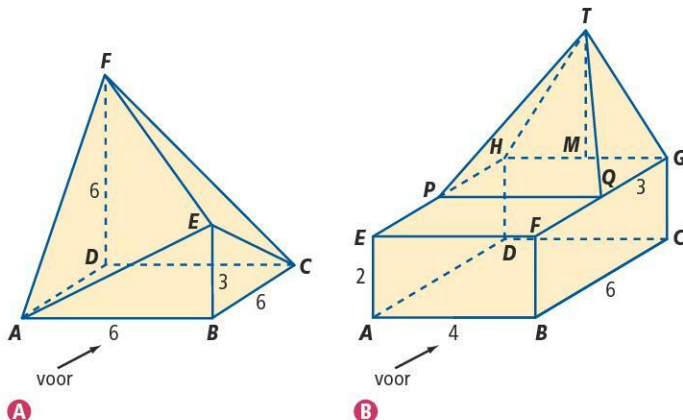
Ondersteunende route → maak opdracht 022

22

H

Ruimtefiguur A linksonder heeft een vierkant grondvlak $ABCD$. Hoekpunt F ligt recht boven hoekpunt D en hoekpunt E ligt recht boven hoekpunt B . De afmetingen zijn in cm.

Teken op ware grootte het vooraanzicht, het rechter zijaanzicht en het bovenaanzicht.



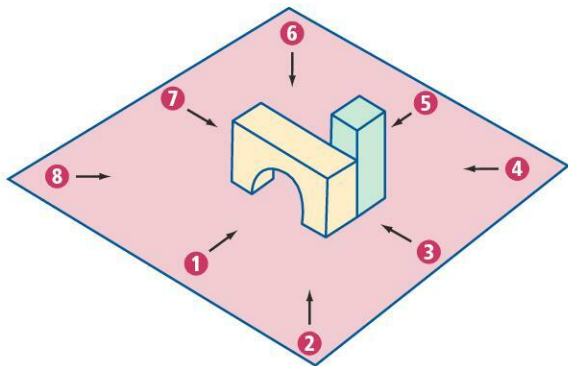
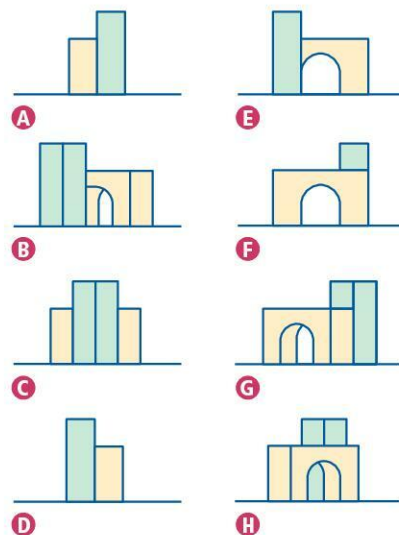
23

Ruimtefiguur B rechtsboven is opgebouwd uit een balk en een piramide. De top T ligt recht boven het midden M van ribbe HG . De punten P en Q zijn de middens van ribbe EH en ribbe FG . De afmetingen zijn in cm. De totale hoogte van het ruimtefiguur is 5 cm.

Teken op ware grootte het vooraanzicht, het rechter zijaanzicht en het bovenaanzicht.

24

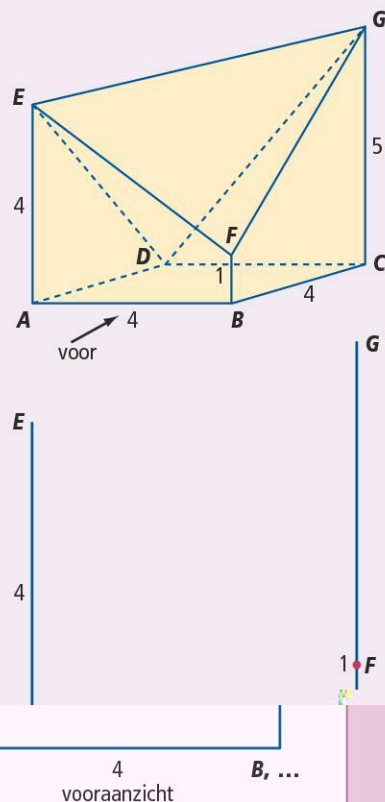
Op een tafel zijn twee speelgoedblokkjes tegen elkaar aangezet. Vanuit acht richtingen zijn aanzichten getekend. Welke kijkrichting hoort bij welk aanzicht?



Uitdagende route → maak opdracht U3

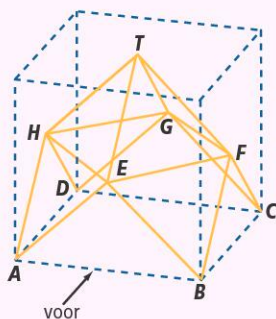
022

- Welke ribben zie je nog meer op ware grootte als je in de richting van de pijl kijkt?
- In het vooraanzicht vallen de hoekpunten A en D samen. Welke hoekpunten vallen in het vooraanzicht nog meer samen?
- Leg uit dat in het vooraanzicht ribbe BF samenvalt met een deel van ribbe CG .
- Welke ribben vallen in het vooraanzicht nog meer (gedeeltelijk) met elkaar samen?
- Maak het vooraanzicht verder af.
- Teken op dezelfde manier ook het rechter zijaanzicht en het bovenaanzicht.



U3

A yellow geometric sculpture in a park, featuring a large triangular structure with internal bracing, set against a backdrop of trees and residential buildings.



a Bereken de hoogte van het klimtoestel.
b Teken op schaal 1 : 100 het vooraanzicht en het
bovenaanzicht van het klimtoestel.
(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2007, 1e tijd

8C.4 Werken met aanzichten

Je leert

- hoe je met aanzichten het bijbehorende ruimtelijk object beschrijft

Leerroutes

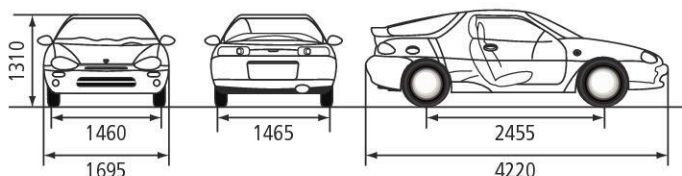
- ondersteunend: 25—026—27—28—29—30
- doorlopend: 25—26—27—28—29—30
- uitdagend: 25—26—27—29—30—U4

Je ziet een foto van een ruimtelijk object.

- Bedenk drie mogelijke ruimtefiguren waaruit het ruimtelijk object op de foto opgebouwd kan zijn.



25 Je ziet drie aanzichten van een auto. De afmetingen zijn in mm.

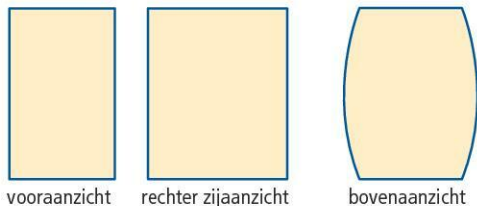


- Geef de afmetingen van het bovenaanzicht van de auto.
- Teken het bovenaanzicht van de auto en geef hierin de afmetingen aan.

Aanzichten, met soms wel en soms geen afmetingen daarin, worden vaak gebruikt om te verduidelijken hoe een ruimtelijk object er in werkelijkheid uit ziet. Vanuit gegeven aanzichten kun je vaak een goede voorstelling maken van hoe een ruimtelijk object er uit ziet.

Voorbeeld

Van een ruimtelijk object zijn drie aanzichten getekend. Maak een schets van dit ruimtelijke object.



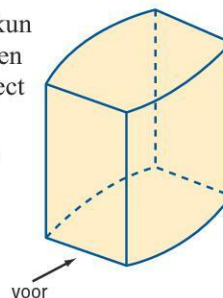
vooraanzicht

rechter zij aanzicht

bovenaanzicht

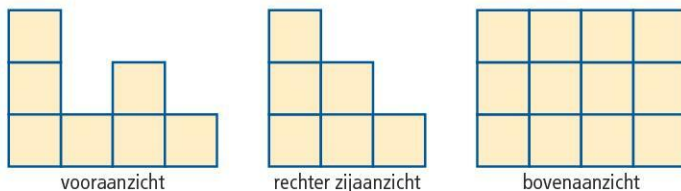
Oplossing

In het bovenaanzicht kun je zien dat de zijvlakken van het ruimtelijk object twee rechte en twee gebogen vlakken zijn.



Ondersteunende route → maak opdracht 026

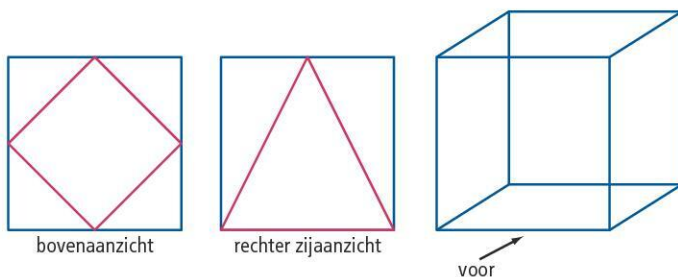
- 26** a Bedenk een kubusbouwsel bij deze aanzichten waarbij je zo veel mogelijk kubusjes gebruikt. Geef in het bovenaanzicht met getallen aan hoeveel kubusjes op elkaar staan.



- b Hoeveel kubusjes heb je in totaal nodig in opdracht a?
c Maak de opdrachten a en b ook voor het geval je zo weinig mogelijk kubusjes gebruikt.

- 27** Een kunstwerk is opgebouwd uit 16 rode buizen en past precies in een kubus met ribben van 40 cm. Van het kunstwerk zie je het bovenaanzicht en het rechter zijaanzicht. Het vooraanzicht, achteraanzicht en het linker zijaanzicht zijn gelijk aan het rechter zijaanzicht.

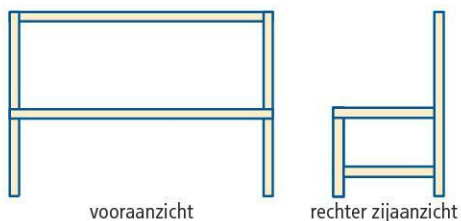
H

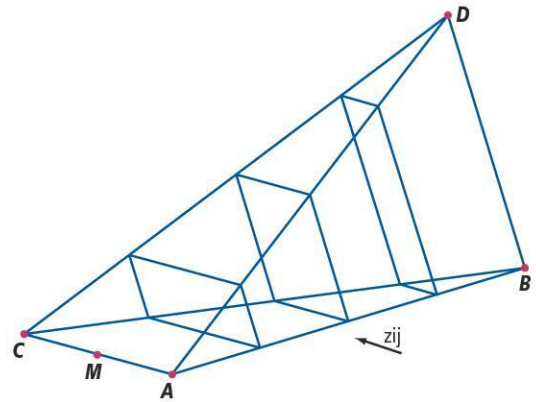


- a Teken het kunstwerk in de kubus.
b Teken op schaal 1 : 10 het aanzicht als je kijkt in de richting van een diagonaal van het grondvlak van de kubus.

- 28** Je ziet een vooraanzicht en rechter zijaanzicht van een ruimtelijk object.

- a Wat voor ruimtelijk object is dit?
b Teken het bovenaanzicht van dit ruimtelijke object.





- 29** Het kunstwerk op de foto bestaat uit stalen buizen die samen een ruimtfiguur vormen. De vier denkbeeldige zijvlakken hebben de vorm van een gelijkbenige driehoek met twee zijden van 2 meter en één zijde van 1 meter. De overige twaalf buizen zijn zo bevestigd dat ze de buizen van 2 meter in vier gelijke stukken verdelen. Naast de foto staat een tekening van het kunstwerk met letters bij de hoekpunten. Punt M is het midden van ribbe AC .
- a** Laat met een berekening zien dat de afstand tussen hoekpunt B en punt M ongeveer 194 cm is.
 - b** Bereken de oppervlakte van het grensvlak ABC .
 - c** Leg uit dat hoekpunt D even ver van punt M af ligt als hoekpunt B .
 - d** Teken op schaal 1 : 40 een zijaanzicht van dit kunstwerk, waarbij de kijkrichting evenwijdig is aan ribbe AC .
- 30** In Noord-Nederland staat een aantal kerktorens met een spits zoals op de foto. De toren heeft een vierkant grondvlak met zijden van 6 meter. De spits van de toren bestaat uit vier ruitvormige dakhellingen en is 10 meter hoog. De hele toren is 40 meter hoog.
- a** Teken op schaal 1 : 100 het bovenaanzicht van de hele toren.
 - b** Teken ook op dezelfde schaal een zijaanzicht van de torenspits waarbij de kijkrichting recht op een muur is.

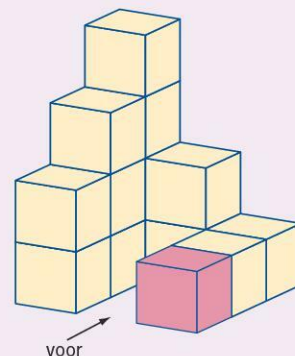
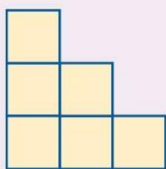


Uitdagende route → maak opdracht U4

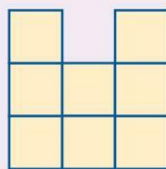
Ondersteunende opdrachten

026

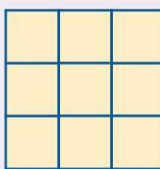
- Uit hoeveel kubussen bestaat het kubusbouwsel?
- Teken het vooraanzicht, het rechter zijaanzicht en het bovenaanzicht bij het kubusbouwsel.
- Welke aanzichten veranderen als je de rode kubus weghaalt?
- Hoeveel kubussen kun je weghalen zonder dat het bovenaanzicht verandert?
- Van een ander kubusbouwsel zie je hieronder het vooraanzicht, het rechter zijaanzicht en het bovenaanzicht. Bedenk een kubusbouwsel bij deze aanzichten waarbij je zo veel mogelijk kubusjes gebruikt. Geef in het bovenaanzicht met getallen aan hoeveel kubusjes op elkaar staan.



vooraanzicht



rechter zijaanzicht



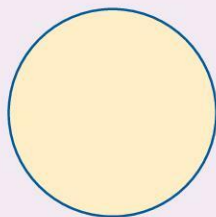
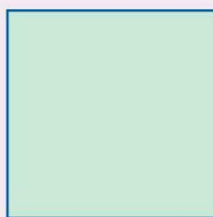
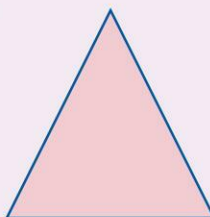
bovenaanzicht

- Hoeveel kubusjes heb je in totaal nodig in opdracht e?
- Maak de opdrachten e en f ook voor het geval je zo weinig mogelijk kubusjes gebruikt.

Uitdagende opdrachten

U4

Je ziet drie aanzichten, één met de vorm van een cirkel, één met de vorm van een vierkant en één met de vorm van een gelijkbenige driehoek. De middellijn van de cirkel, de zijde van het vierkant en de basis van de driehoek zijn even lang.



Maak een schets van het ruimtelijk object of beschrijf hoe het ruimtelijk object er uit ziet als:

- je alleen de eerste twee aanzichten hebt.
- je alle drie de aanzichten hebt.

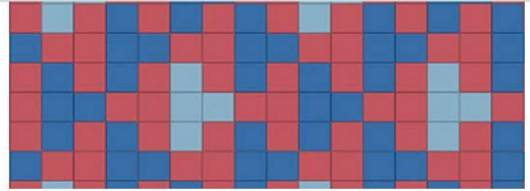
8C.5 Symmetrie

Je leert

- hoe je verschillende vormen van symmetrie herkent

Leerroutes

- ondersteunend: 31—32—033—34—35—36—37—38
- doorlopend: 31—32—33—34—35—36—37—38
- uitdagend: 31—33—34—35—36—37—U5—U6



Je kunt op heel veel verschillende manieren een vloer of een pad betegelen.
Je ziet twee voorbeelden van een deel van een vloer.

- Vind je dat hier sprake is van symmetrie? Zo ja, omschrijf wat die symmetrie inhoudt.

- 31** Je ziet een foto van Villa Nora, een ontwerp van architect Robert van Hoff (1887 - 1979).
Waarom wordt dit gebouw lijnsymmetrisch genoemd?

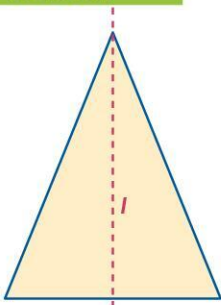


Theorie

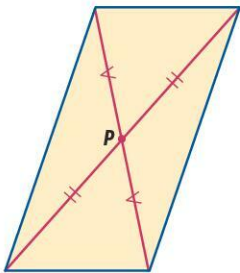
Gebouwen of figuren vertonen soms symmetrie.

- Bij **lijnsymmetrie** spiegel je een figuur in een lijn waarbij de figuur niet verandert.
 - Bij **puntsymmetrie** spiegel je een figuur in een punt waarbij de figuur niet verandert.
 - Bij **draaisymmetrie** draai je een figuur om een punt over een bepaalde hoek waarbij de figuur niet verandert.
- Puntsymmetrie is hetzelfde als draaisymmetrie over 180° .

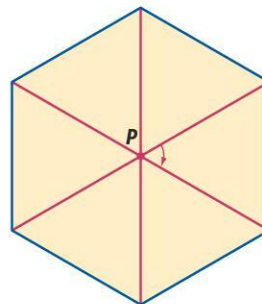
Voorbeeld



De gelijkbenige driehoek is lijnsymmetrisch in lijn l .



Het parallellogram is puntsymmetrisch in punt P .



De regelmatige zeshoek is draaisymmetrisch over 60° .

- 32 a Leg uit waarom de regelmatige zeshoek in het voorbeeld draaisymmetrisch is over 60° .
 b De regelmatige zeshoek is ook lijnsymmetrisch. In hoeveel lijnen is de regelmatige zeshoek lijnsymmetrisch?

Ondersteunende route → maak opdracht 033

- 33 Noem alle vormen van symmetrie van:
H a een gulden rechthoek c een parallellogram
 b een cirkel d een ruit

Een regelmatige veelhoek is een veelhoek waarvan alle zijden even lang zijn en alle hoeken even groot. Om de grootte van de hoeken van een regelmatige veelhoek te berekenen kun je gebruikmaken van de draaisymmetrie.

Voorbeeld

Bereken de grootte van de hoek van een regelmatige vijfhoek.

Oplossing

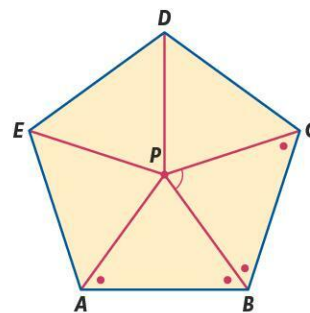
Gevraagd wordt hoek ABC te berekenen.

Een regelmatige vijfhoek is draaisymmetrisch in punt P .

De vijfhoek kun je verdelen in vijf even grote gelijkbenige driehoeken, waarvan punt P de tophoek is.

Hoek P is $360^\circ : 5 = 72^\circ$. De basishoek van één zo'n gelijkbenige driehoek is $(180^\circ - 72^\circ) : 2 = 54^\circ$.

Hoek ABC is precies twee maal een basishoek, dus $2 \times 54^\circ = 108^\circ$.

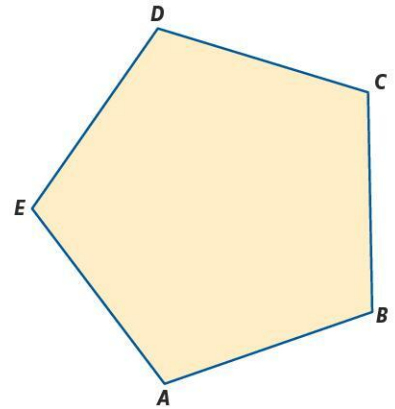


- 34 Bereken de grootte van de hoek van een regelmatige zeshoek.

35

H

- a Geef alle vormen van symmetrie van de regelmatige vijfhoek $ABCDE$. Teken bij draaisymmetrie het draaipunt en geef de grootte van de kleinste draaihoek aan. Teken bij lijnsymmetrie de symmetrieassen en bij puntsymmetrie het punt van symmetrie.
- b Meet zo nauwkeurig mogelijk de lengte van diagonaal AD en de lengte van zijde AB .
- c Deel de lengte van diagonaal AD door de lengte van zijde AB . Wat valt je op?



36

De architect Henry Elliott (1823 - 1892) ontwierp dit achthoekige huis. De buitenste rand van het bovenaanzicht is een regelmatige achthoek met zijden van 6 meter.

- a Bereken de grootte van de hoek van een regelmatige achthoek.
- b Teken de achthoek op schaal 1 : 200.
- c Geef alle vormen van symmetrie van de achthoek. Geef bij draaisymmetrie de grootte van de kleinste draaihoek aan en geef in geval van lijnsymmetrie het aantal symmetrieassen.
- d De hoogte van het huis is 10 meter. Teken op schaal 1 : 200 een zijaanzicht van dit huis waarbij de kijkrichting recht op één van de zijmuren is. Maak gebruik van je bovenaanzicht. De ruimte op het dak en de schoorstenen op het dak hoef je niet mee te nemen.
- e Bereken de oppervlakte van het achthoekige dak. Rond je antwoord af op een geheel aantal m^2 .



37

H

Je ziet een foto van een deksel van een in Syrië vervaardigd houten kistje. In dit deksel is een patroon verwerkt. De dikke zwarte lijnen vormen een regelmatige achtpuntige ster. Geef alle vormen van symmetrie van deze ster. Geef bij draaisymmetrie de grootte van de kleinste draaihoek aan en geef in geval van lijnsymmetrie het aantal symmetrieassen.

38

Teken een figuur die lijnsymmetrisch en draaisymmetrisch is, maar niet puntsymmetrisch.

Uitdagende route → maak opdracht U5 en U6

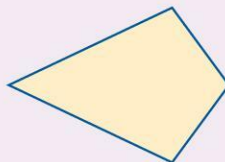
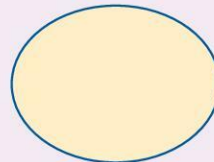


Ondersteunende opdrachten

033

W

- a** De rechthoek is lijnsymmetrisch in twee lijnen.
Teken deze twee symmetrielijnen.



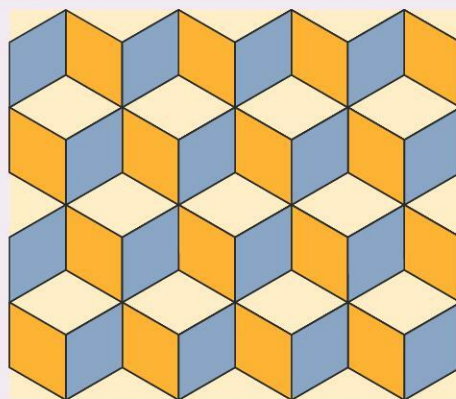
- b** De rechthoek is ook draaisymmetrisch.
Teken het draaipunt en bereken de grootte van de kleinste draaihoek.
- c** Is de rechthoek ook puntsymmetrisch? Leg uit.
- d** Geef alle vormen van symmetrie van het parallellogram.
Geef bij draaisymmetrie de grootte van de kleinste draaihoek aan en geef in geval van lijnsymmetrie het aantal symmetrieassen.
- e** Maak opdracht d ook voor de vlieger en de ellips.
- f** Waarin verschilt de symmetrie van de ellips met de symmetrie van een cirkel?

Uitdagende opdrachten

U5

Je kunt een vloer niet met ronde tegels betegelen zonder dat er tussenruimtes overblijven. Met tegels in de vorm van bijvoorbeeld een rechthoek, een vlieger, of een ruit lukt dat wel. Een betegeling van een vlak zonder tussenruimtes heet een vlakvulling. Om een vlakvulling te maken is het noodzakelijk dat de hoeken die in één punt samenkomen samen 360° zijn. Je ziet een vlakvulling gebaseerd op gele, oranje en blauwe ruiten.

- a** Is hier sprake van symmetrie? Maak onderscheid of je wel of niet rekening houdt met de kleuren.
- b** Kies een punt waar drie tegels samenkomen.
Hoe groot zijn de hoeken van de tegels daar?



U6

De grootte van een hoek in graden van een regelmatige

n -hoek kun je berekenen met de formule $hoek = 180 - \frac{360}{n}$

- a** Controleer deze formule voor een regelmatige driehoek, regelmatige vierhoek en regelmatige vijfhoek.
- b** Leg uit dat deze formule voor elke regelmatige veelhoek geldt.

8C.6 Inhoud en schaalvergroting

Je leert

- hoe je de inhoud van een ruimtelijk object berekent
- hoe je met de vergrotingsfactor de inhoud van gelijkvormige figuren berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 39—040—41—42—043—44
- doorlopend: 39—40—41—42—43—44
- uitdagend: 39—40—41—42—43—U7

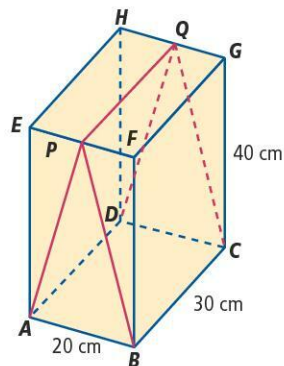
De liter-kan heeft een cirkelvormige bodem met straal 5 cm en is 15 cm hoog. Een fabrikant wil ook een halfliter-kan gaan fabriceren. Hij zou de liter-kan in hoogte of in de breedte kunnen halveren, maar dat wil hij niet. Hij wil dat de halfliter-kan gelijkvormig is met de liter-kan.

- Welke afmetingen moet de halfliter-kan dan krijgen?



39 Je ziet een balk $ABCD.EFGH$ van 20 cm bij 30 cm bij 40 cm.

- Bereken de inhoud van de balk.
- De punten P en Q zijn de middens van de ribben EF en HG . Ruimtefiguur $ABP.DCQ$ is een prisma. Waarom is de inhoud van het prisma gelijk aan de helft van de inhoud van de balk?
- Hoe groot is de oppervlakte van driehoek ABP ?
- Laat met een berekening zien dat je de inhoud van het prisma ook kunt berekenen door de oppervlakte van driehoek ABP te vermenigvuldigen met de lengte van ribbe BC .



Theorie

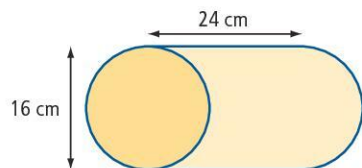
De **inhoud van een balk, een prisma en een cilinder** bereken je met de formule $I = G \times h$.

De inhoud van **een piramide en een kegel** bereken je met de formule $I = \frac{1}{3} \times G \times h$.

In deze formules is I de inhoud, G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte.

Voorbeeld

Bereken de inhoud van de cilinder.



Oplossing

Het grondvlak van de cilinder is een cirkel.

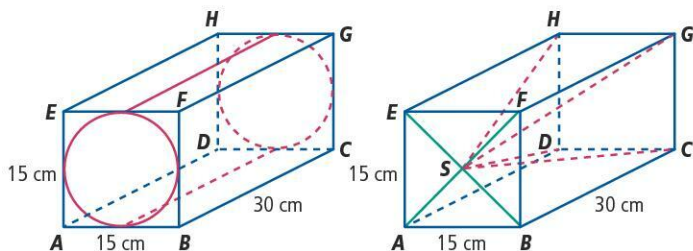
De cirkel heeft een straal van 8 cm.

De oppervlakte G van het grondvlak is $\pi \times 8^2 = 64\pi \text{ cm}^2$.

De inhoud van de cilinder is $64\pi \times 16 \approx 4825 \text{ cm}^3$.

Ondersteunende route → maak opdracht 040

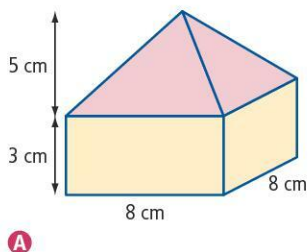
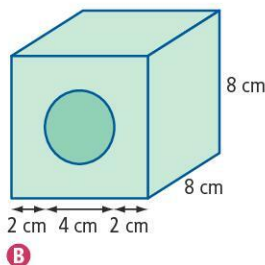
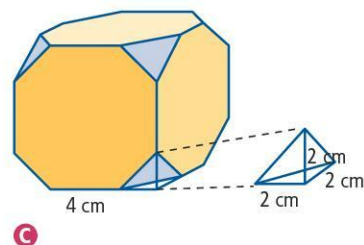
- 40** In de balk van 15 cm bij 30 cm bij 15 cm passen precies een cilinder en een piramide.



- Bereken de inhoud van de cilinder.
- Hoeveel procent van de inhoud van de balk wordt door de cilinder ingenomen?
- Punt S is het snijpunt van de diagonalen AF en BE . Bereken de inhoud van de piramide $S.DCGH$.
- Een kegel heeft het punt S als top en als grondvlak een cirkel die door de punten D , C , G en H gaat. Bereken de inhoud van de kegel.

Ruimtelijke objecten zijn soms te splitsen in delen waarvan je met een formule de inhoud kunt berekenen.

- 41**
- Bereken de inhoud van ruimtefiguur A die is samengesteld uit een balk en een piramide.
 - Ruimtefiguur B is een kubus waar een cilindervormig gat doorheen is geboord. Hoeveel cm^3 is de inhoud van ruimtefiguur B?
 - Ruimtefiguur C is ontstaan door van een kubus met ribben van 8 cm op 2 cm van alle hoekpunten stukjes af te zagen. De afgezaagde stukjes hebben de vorm van een piramide. Bereken de inhoud van ruimtefiguur C.



- 42** De Rubikkubus op de foto is 6 cm bij 6 cm bij 6 cm en bestaat uit allemaal kleine kubusjes van 2 cm bij 2 cm bij 2 cm.
- De Rubikkubus is een vergroting van zo'n klein kubusje. Geef de vergrotingsfactor.
 - Bereken de inhoud van de Rubikkubus en de inhoud van zo'n klein kubusje.
 - Hoeveel keer zo groot is de inhoud van de Rubikkubus vergeleken met de inhoud van zo'n klein kubusje?
 - Hoe had je het antwoord van opdracht c ook direct met de vergrotingsfactor van opdracht a kunnen berekenen?



Theorie

Zijn twee ruimtelijke objecten gelijkvormig met vergrotingsfactor k , dan geldt voor de **inhoud de vergrotingsfactor k^3** . Als de afmetingen van een ruimtelijk object k keer zo groot worden, dan is de inhoud van het hierdoor ontstane ruimtelijke object k^3 keer zo groot.

Ondersteunende route → maak opdracht 043

- 43** De piramide is opgebouwd uit tien even hoge lagen. De bovenste laag is een piramide. Samen met de laag daaronder geeft dit een tweede piramide waarvan de afmetingen twee keer zo groot zijn als de eerste piramide. De bovenste piramide heeft een inhoud van 3 cm^3 .
- Bereken de inhoud van de vierde piramide.
 - Bereken de inhoud van de onderste laag.



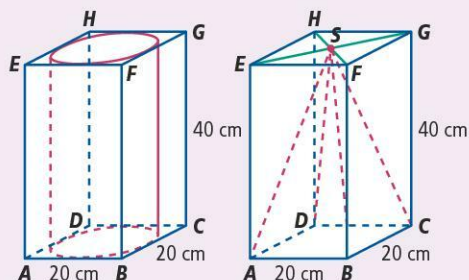
- 44** Een architect heeft een maquette gemaakt van een huis dat in werkelijkheid een inhoud heeft van 550 m^3 . De maquette heeft een inhoud van $3,52 \text{ dm}^3$.
- Laat met een berekening zien dat de inhoud van het huis 156 250 keer zo groot is als de inhoud van de maquette.
 - Bereken de schaal waarop de maquette is gemaakt.

Uitdagende route → maak opdracht U7

Ondersteunende opdrachten

040 In de balken van 20 cm bij 20 cm bij 40 cm passen precies een cilinder en een piramide.

- Bereken de inhoud van de balk en de inhoud van de cilinder.
- Hoeveel procent van de inhoud van de balk wordt ingenomen door de cilinder?
- Punt S is het snijpunt van de diagonalen EG en HF . Bereken de inhoud van piramide $S.ABCD$.
- Een kegel heeft het punt S als top en als grondvlak een cirkel die door de punten A, B, C en D gaat. Laat met een berekening zien dat de diameter van de cirkel gelijk is aan $\sqrt{800} \approx 28,3$ cm.
- Bereken de inhoud van de kegel.



043 Je ziet een kegelvormige pilon met vijf even hoge lagen. De bovenste laag (1) is een kegel met een inhoud van 16 cm^3 . Samen met de laag daaronder (2) geeft dit een tweede kegel waarvan de afmetingen twee keer zo groot zijn als de eerste kegel.

- De eerste kegel en de tweede kegel zijn gelijkvormig. Waarom is de vergrotingsfactor gelijk aan 2?
- Met welk getal moet je de inhoud van de eerste kegel vermenigvuldigen om de inhoud van de tweede kegel te krijgen?
- Bereken de inhoud van de tweede kegel.
- Waarom is de vergrotingsfactor van de eerste en de derde kegel gelijk aan 3?
- Bereken de inhoud van de derde kegel.
- Hoe groot is de inhoud van de vierde kegel?
- De inhoud van laag 3 is gelijk aan de inhoud van de derde kegel min de inhoud van de tweede kegel. Bereken de inhoud van laag 3.



Uitdagende opdrachten

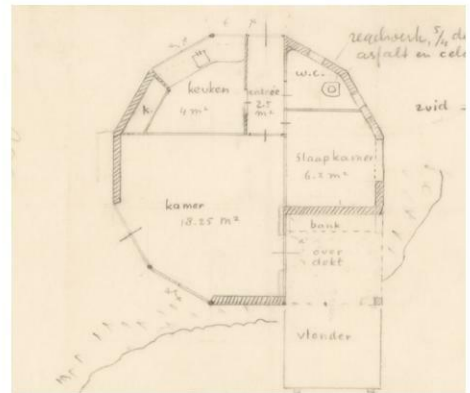
U7 De drie poppetjes hebben precies dezelfde vorm. De inhoud van de poppetjes zijn 117, 55 en 20 cm^3 .

- Het middelste poppetje is 7 cm hoog. Bereken de hoogte van de andere poppetjes.
- Het kleinste poppetje heeft een oppervlakte van 44 cm^2 . Bereken de oppervlakte van de andere poppetjes.



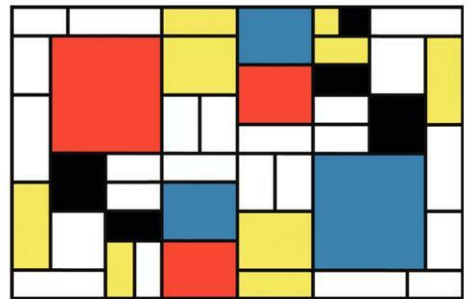
- 45** De beroemde Nederlandse architect Gerrit Rietveld (1888 - 1964) heeft in zijn ontwerpen veel gebruikgemaakt van meetkundige vormen. Bij een ontwerp van een zomerhuis gebruikte Rietveld een regelmatige twaalfhoek als uitgangspunt. Op de foto zie je het ontwerp.

- Bereken de grootte van de hoek van een regelmatige twaalfhoek.
- De regelmatige twaalfhoek bestaat uit twaalf gelijkbenige driehoeken. De afmetingen van elke gelijkbenige driehoek zijn in werkelijkheid 3,5 meter bij 3,5 meter bij 1,8 meter. Bereken de oppervlakte van de twaalfhoek.
- De hoogte van het zomerhuis is 2,3 meter. Bereken in hele m^3 de inhoud van het zomerhuis.



- 46** De Nederlandse schilder Piet Mondriaan (1872 - 1944) heeft veel gewerkt met rechthoeken. Je ziet één van zijn schilderijen met rechthoeken. Michel heeft dit schilderij op canvas laten drukken. Reken in deze opdracht de zwarte randen niet mee.

- Ga door meten en bereken na dat er gulden rechthoeken voorkomen in dit schilderij en geef er een aantal aan.
- Het schilderij op canvas is in werkelijkheid 180 cm breed en 120 cm hoog. Bereken op welke schaal het hier is weergegeven.

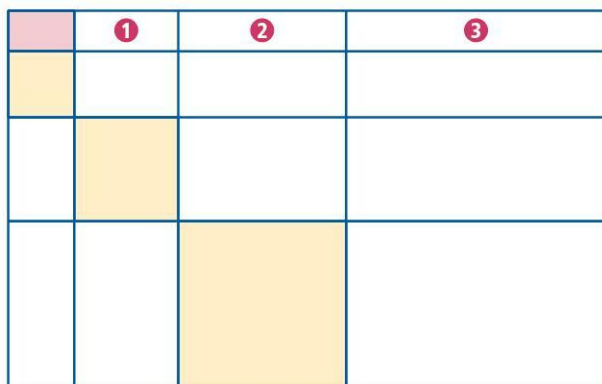


- 47** Het patroon op de foto is te vinden op één van de binnenmuren van het Alhambra in Granada. Het bestaat uit slechts één figuur, een achthoek, die in twee richtingen steeds wordt herhaald, zodat een vlakvulling ontstaat. Op het werkblad is een begin gemaakt met een tekening van dit patroon.

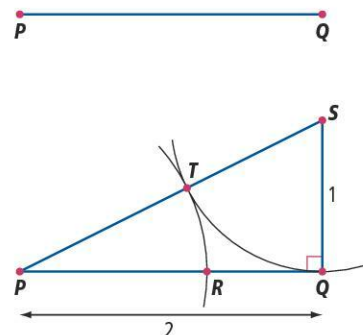
- Breid de tekening naar rechts en naar boven uit met een aantal van deze achthoeken.
- Geef alle vormen van symmetrie van de achthoek. Geef bij draaisymmetrie de grootte van de kleinste draaihoek aan en geef in geval van lijnsymmetrie het aantal symmetrieassen.
- De vierkantjes van het roosterpapier op het werkblad hebben zijden van 1 cm. Bereken de lengten van de zijden van de achthoek in hele mm nauwkeurig.
- Teken een zo klein mogelijke rechthoek om één van de getekende achthoeken en bereken de verhouding *oppervlakte achthoek : oppervlakte rechthoek*.



- 48** De figuur bestaat uit een patroon van rechthoeken. De rode rechthoek is een gulden rechthoek. Rechthoek 1 heeft een breedte die ϕ zo groot is als die van de rode rechthoek. Net zo heeft rechthoek 2 een breedte die ϕ keer zo groot is als rechthoek 3. Op dezelfde manier wordt van boven naar beneden bij elke volgende rechthoek de lengte steeds met factor ϕ vermenigvuldigd.



- a** Leg uit waarom er in de figuur drie vierkanten voorkomen.
b Onderzoek of er behalve de aangegeven rechthoek nog meer gulden rechthoeken in de figuur zitten.
- 49** **a** Teken op lijnstuk PQ een punt R zó dat het lijnstuk verdeeld wordt in de gulden snede waarbij geldt $PR : QR = \phi : 1$
b Waarschijnlijk heb je in opdracht a gebruik gemaakt van het getal $\phi \approx 1,618$. Je kunt punt R met meten nooit precies tekenen, omdat het getal 1,618 een benadering is van ϕ . In deze opdracht ga je de plaats van punt R met construeren bepalen. In de tekening zie je hoe dat gedaan is. Uitgangspunt is lijnstuk PQ en lijnstuk QS dat daar loodrecht op staat, waarbij geldt $PQ = 2$ en $QS = 1$. Punt T is het snijpunt van lijnstuk PS en een cirkel met middelpunt S en straal 1. Teken punt T .
c Punt R op lijnstuk PQ is het snijpunt van lijnstuk PQ met een cirkel met middelpunt P en straal PT . Teken punt R .
d Toon met een berekening aan dat $PR = \sqrt{5} - 1$.
e Toon aan dat punt R lijnstuk PQ verdeelt volgens de gulden snede.



Theorie

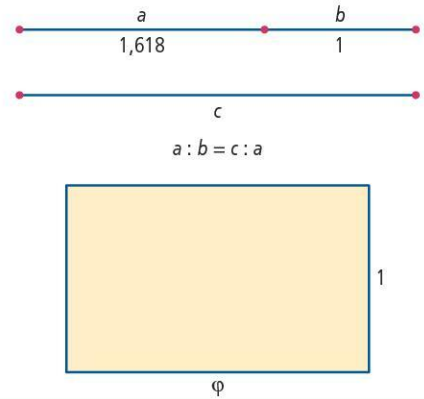
Gulden snede

De gulden verhouding of gulden snede is de verhouding $1,618... : 1$.

Als je een lijnstuk verdeelt in twee delen die zich tot elkaar verhouden zoals het hele lijnstuk zich verhoudt tot het grootste deel, dan ontstaat de gulden snede.

Kies je de lengte van het kleinste lijnstuk gelijk aan 1, dan is de lengte van het grootste lijnstuk bij benadering gelijk aan 1,618. In de wiskunde wordt het getal 1,618... vaak aangegeven met het symbool φ (spreek uit als 'fi').

Een gulden rechthoek is een rechthoek waarvan de lengtes van de zijden zich tot elkaar verhouden als $\varphi : 1$.



- S1
- Teken een gulden rechthoek met een kortste zijde van 5 cm.
 - Teken ook een gulden rechthoek waarvan de langste zijde 5 cm is.

Vaardigheid

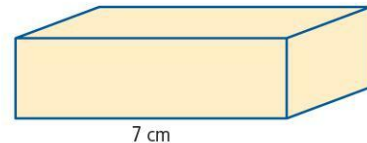
Je kunt met vergrotingsfactoren rekenen.

In twee gelijkvormige figuren kun je elke lengte in de ene figuur met dezelfde vergrotingsfactor vermenigvuldigen om de overeenkomstige lengte in de andere figuur te krijgen.

Bij twee gelijkvormige figuren met vergrotingsfactor k geldt voor de oppervlakte van de twee figuren vergrotingsfactor k^2 en voor de inhoud vergrotingsfactor k^3 .

Voorbeeld

De balk heeft een oppervlakte van 118 cm^2 en een inhoud van 70 cm^3 . Van de balk wordt een vergroting gemaakt. De vergroting heeft een lengte van 21 cm. Bereken de vergrotingsfactor en van de vergroting de oppervlakte en de inhoud.



Oplossing

De vergrotingsfactor is $21 : 7 = 3$.

De oppervlakte van de vergroting is $118 \times 3^2 = 1062 \text{ cm}^2$.

De inhoud van de vergroting is $70 \times 3^3 = 1890 \text{ cm}^3$.

- S2** Op de foto zie je een maquette van een kubuswoning. De lengte van de ribbe van de kubus is in werkelijkheid 7,5 meter. In het model is de lengte van de ribbe 15 cm.

- Bereken de vergrotingsfactor.
- De oppervlakte van het dak is bij de maquette 675 cm^2 . Hoeveel m^2 is de oppervlakte van het dak in werkelijkheid?
- De inhoud van het woongedeelte is bij de maquette 3200 cm^3 . Bereken de inhoud van het woongedeelte van een kubuswoning in m^3 .



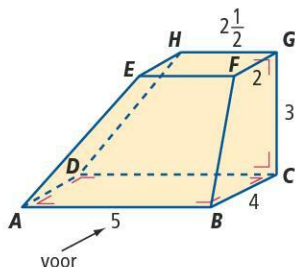
Vaardigheid

Je kunt aanzichten van een ruimtelijk object maken.

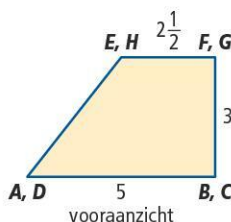
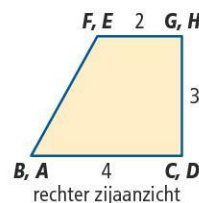
Door van verschillende kanten naar een ruimtelijk object te kijken kun je aanzichten maken.

Voorbeeld

De gegeven afmetingen van het ruimtelijk object zijn in cm. Teken het vooraanzicht en het rechter zij aanzicht.



Oplossing



- S3** Teken van het ruimtelijk object in het voorbeeld op ware grootte een bovenaanzicht.

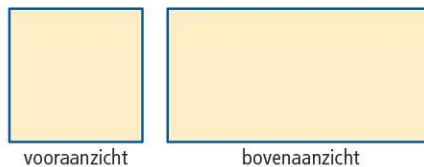
Vaardigheid

Je kunt met aanzichten het bijbehorende ruimtelijke object beschrijven.

Vanuit gegeven aanzichten kun je vaak een goede voorstelling maken van hoe een ruimtelijk object er uit ziet. Soms heb je meerdere aanzichten nodig om een goed beeld te krijgen van een ruimtelijk object.

Voorbeeld

Je ziet een vooraanzicht en een bovenaanzicht van een ruimtelijk object.
Welke ruimtelijke objecten passen bij deze aanzichten?



Oplossing

Het ruimtelijk object zou een balk of een prisma kunnen zijn. Een zijaanzicht moet uitsluitend geven.

- S4**
- Stel het ruimtelijk object in het voorbeeld is een prisma. Teken het bijbehorende rechter zijaanzicht.
 - Van een ander ruimtelijk object zie je drie aanzichten.



Maak een schets van het ruimtelijk object of beschrijf hoe het ruimtelijk object eruitziet.

Vaardigheid

Je kunt verschillende vormen van symmetrie herkennen.

Er zijn drie vormen van symmetrie:

- lijnsymmetrie, spiegelen in een lijn geeft dezelfde figuur
- puntsymmetrie, spiegelen in een punt geeft dezelfde figuur
- draaisymmetrie, draaien om een punt over een bepaalde hoek geeft dezelfde figuur.

Puntsymmetrie is hetzelfde als draaisymmetrie over 180° .

Voorbeeld

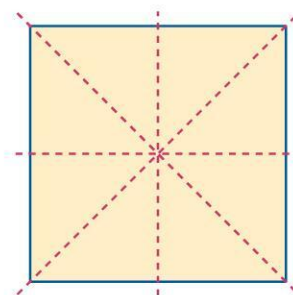
Geef alle vormen van symmetrie van een vierkant. Teken bij draaisymmetrie het draaipunt en geef de grootte van de kleinste draaihoek aan. Teken bij lijnsymmetrie de symmetrieassen en bij puntsymmetrie het punt van symmetrie.

Oplossing

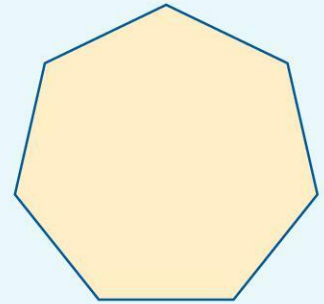
Een vierkant is lijnsymmetrisch en heeft vier symmetrieassen.

Een vierkant is draaisymmetrisch in het snijpunt van de diagonalen over een hoek van 90° .

Een vierkant is puntsymmetrisch in het snijpunt van de diagonalen.



- S5** Geef alle vormen van symmetrie van de regelmatige zevenhoek. Teken bij draaisymmetrie het draaipunt en geef de grootte van de kleinste draaihoek aan. Teken bij lijnsymmetrie de symmetrieassen en bij puntsymmetrie het punt van symmetrie.



Vaardigheid

Je kunt de inhoud van een ruimtelijk object berekenen.

De inhoud van een balk, een prisma en een cilinder bereken je met de formule $I = G \times h$.

De inhoud van een piramide en een kegel bereken je met de formule $I = \frac{1}{3} \times G \times h$.

In deze formules is I de inhoud, G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte. Ruimtelijke objecten zijn soms te splitsen in delen waarvan je met een formule de inhoud kunt berekenen.

Voorbeeld

De bodem van een koffiekkan heeft een diameter van 16 cm.
De hoogte van de koffiekkan tot aan het maatstreepje is 9 cm.
Hoeveel liter koffie past er in de kan tot aan het maatstreepje?



Oplossing

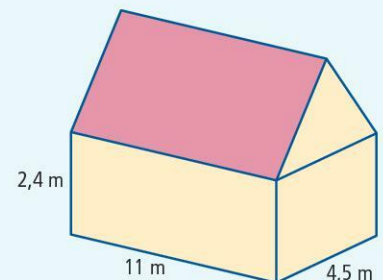
De koffiekkan heeft de vorm van een cilinder.

De oppervlakte van het grondvlak is $\pi \times 0,8^2 = 0,64\pi \text{ dm}^2$.

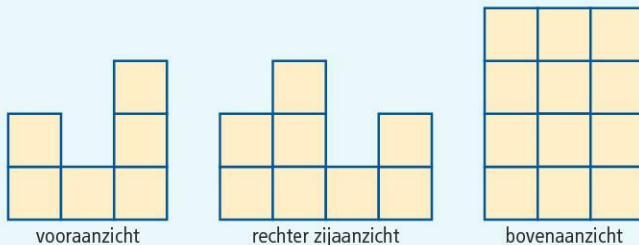
De inhoud van de koffiekkan is $0,64\pi \times 0,9 \approx 1,8 \text{ dm}^3$.

Tot aan het maatstreepje past ongeveer 1,8 liter koffie in de kan.

- S6** Je ziet een tekening van een huis. De begane grond heeft de vorm van een balk en de eerste verdieping heeft de vorm van een prisma. Het grondvlak van het prisma is een gelijkzijdige driehoek.
Bereken in hele m^3 de inhoud van het huis.

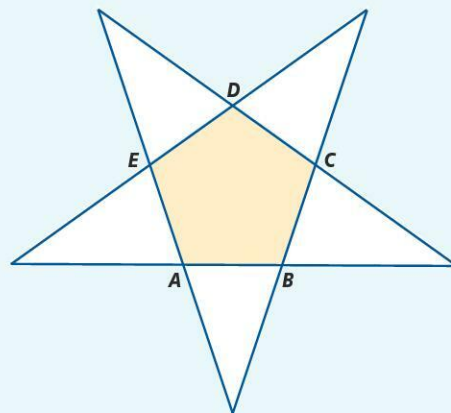


- T1** In een winkel liggen drie gelijkvormige tegels. Tegel A heeft een lengte van 70 cm en een oppervlakte van 3150 cm^2 . Tegel B heeft een lengte van 56 cm. De oppervlakte van tegel C is 6174 cm^2 .
- Tegel B kun je zien als een vergroting van tegel A. Bereken de vergrotingsfactor.
 - Bereken de oppervlakte van tegel B.
 - Bereken de lengte van tegel C.
 - Bereken de breedte van tegel A en onderzoek of deze tegel de vorm van een gulden rechthoek heeft.

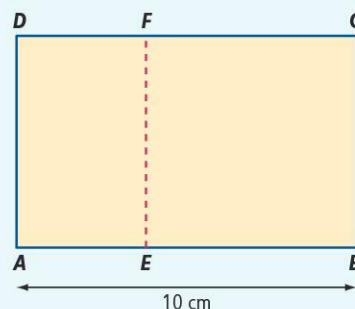


- T2**
- Bedenk een kubusbouwsel bij de aanzichten waarbij je zo veel mogelijk kubusjes gebruikt. Geef in het bovenaanzicht met getallen aan hoeveel kubusjes op elkaar staan.
 - Teken het linker zijaanzicht.
- T3** Een fabrikant brengt een tablet op de markt met een scherm met een diagonaal van 12,2 inch. In het persbericht staat dat het schermoppervlak ongeveer 50 % groter is dan het bestaande model met een 10 inch diagonaal. De schermen van de tablets zijn gelijkvormig. Ga met een berekening na of deze bewering klopt.

- T4** De vijfpuntige ster bestaat uit een regelmatige vijfhoek $ABCDE$ en vijf gelijkbenige driehoeken.
- Is de vijfpuntige ster lijnsymmetrisch? Zo ja, teken alle symmetrieassen.
 - Is de vijfpuntige ster puntsymmetrisch? Zo ja, teken het punt van symmetrie.
 - Is de vijfpuntige ster draaisymmetrisch? Zo ja, teken het draaipunt en bereken de kleinste draaihoek.
 - Bereken de grootte van de scherpe hoek bij de punten van de ster.

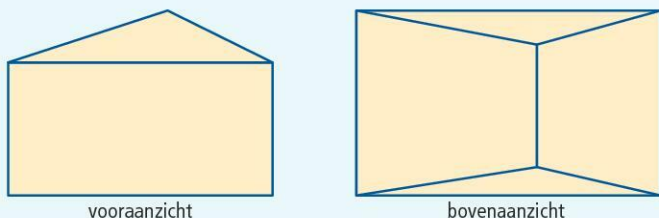


- T5** Van de gulden rechthoek $ABCD$ is $AB = 10$ cm.
- Bereken de lengte van zijde AD . Rond je antwoord af op twee decimalen.
 - Van rechthoek $ABCD$ wordt vierkant $EBCF$ afgehaald. Laat met een berekening zien dat rechthoek $AEFD$ ook een gulden rechthoek is.

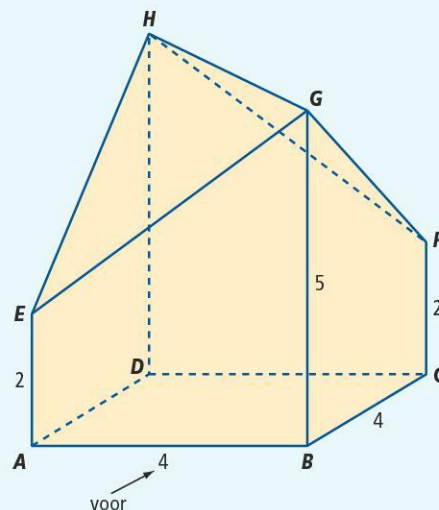


- T6** Een autodesigner heeft een schaalmodel van een auto gemaakt met een inhoud van 32 dm^3 . In werkelijkheid heeft de auto een inhoud van 8 m^3 . Bereken de schaal van het model.

- T7** Je ziet twee aanzichten van een ruimtelijk object.



- Maak een schets van het ruimtelijk object of beschrijf hoe het ruimtelijk object er uit ziet.
 - Teken het rechter zijaanzicht.
- T8** De ruimtefiguur is ontstaan door van een balk twee gelijke stukken af te zagen. De afmetingen zijn in cm.
- Teken op ware grootte het vooraanzicht en het rechter zijaanzicht van de ruimtefiguur.
 - De oorspronkelijke balk heeft vierkant $ABCD$ als grondvlak en een hoogte van 5 cm. De van de balk afgezaagde stukken hebben de vorm van een piramide. Laat met een berekening zien dat de inhoud van één zo'n piramide gelijk is aan 8 cm^3 .
 - Bereken de inhoud van de ruimtefiguur. Rond je antwoord af op een geheel aantal cm^3 .



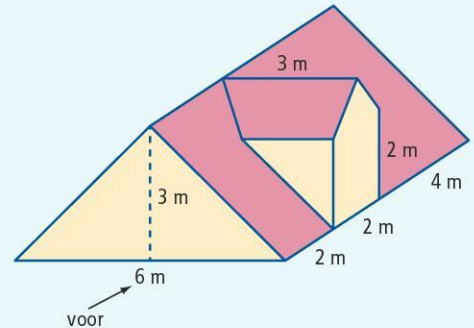
Je kunt met vergrotingsfactoren rekenen.

- E1** Op de foto zie je een klok die de vorm heeft van een piramide. Het grondvlak van de klok is een vierkant met zijden van 12 cm. De klok is 12,4 cm hoog. Door het kleurverschil van het materiaal zie je drie piramides. De lengtes van de opstaande zijden zijn achtereenvolgens 2,5 cm, 11,5 cm en 15 cm.
- Bereken de inhoud van de klok.
 - Bereken de hoogte van de bovenste piramide.
 - Bereken de inhoud van de bovenste piramide.
 - De cijferplaat van de klok is het grondvlak van de tweede piramide.
Bereken de oppervlakte van de cijferplaat.

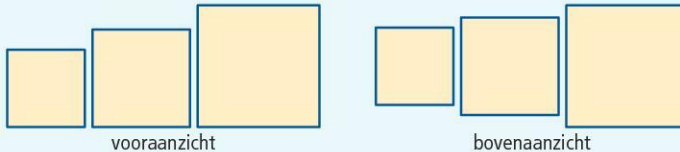


Je kunt aanzichten van een ruimtelijk object maken.

- E2** Op het dak van een woning is een dakkapel geplaatst. Het dak rust op een rechthoekige vloer van 6 meter bij 8 meter. Teken op schaal 1 : 100 het vooraanzicht en het bovenaanzicht van het dak met de dakkapel.



Je kunt met aanzichten het bijbehorende ruimtelijk object beschrijven.



- E3** Je ziet het vooraanzicht en het bovenaanzicht van een kunstwerk.
- Maak een schets van het kunstwerk of beschrijf hoe het kunstwerk er uit ziet.
 - Teken het linker zij aanzicht van dit kunstwerk.

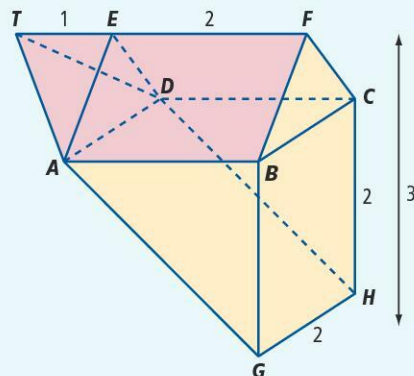
Je kunt verschillende vormen van symmetrie herkennen.

- E4** Het tegelpatroon van een vloer in een moskee in Istanbul bestaat onder andere uit een regelmatige zeshoek en een regelmatige zespuntige ster.
- W** Geef alle vormen van symmetrie van de regelmatige zespuntige ster. Teken bij draaisymmetrie het draaipunt en geef de grootte van de kleinste draaihoek aan. Teken bij lijnsymmetrie de symmetrieassen en bij puntsymmetrie het punt van symmetrie.

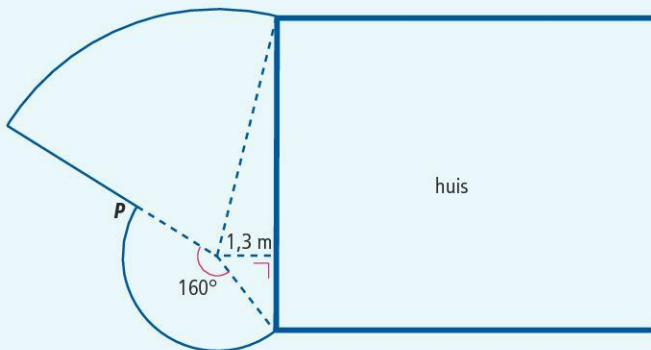


Je kunt de inhoud van een ruimtelijk object berekenen.

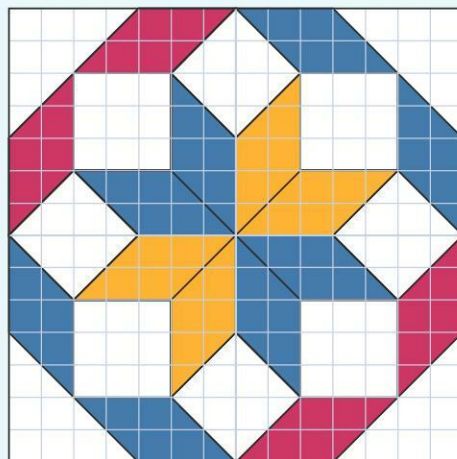
- E5** De dakkapel van opdracht E2 bestaat uit het prisma $ABG.DCH$, het prisma $ADE.BCF$ en de piramide $T.ADE$. De afmetingen zijn in meter. Bereken in m^3 nauwkeurig de inhoud van de dakkapel.



- E6** Je ziet de plattegrond van een ontwerp van de architect Gerrit Rietveld (1888 - 1964) voor de uitbreiding van een woning. De vloer van deze uitbreiding bestaat uit twee cirkelsectoren en een driehoek. De twee cirkelbogen hebben hetzelfde middelpunt. De stralen van de beide cirkels zijn 6,55 meter en 2,5 meter en de hoeken van de cirkelsectoren zijn 72° en 160° . De hoogte van de driehoek is 1,3 meter.



- a** Ga door een berekening na dat punt P de straal van de grote cirkel verdeelt volgens de gulden snede.
b Hoeveel m^2 is de oppervlakte van de uitbreiding? Rond je antwoord af op één decimaal.
- E7** **a** Is de figuur lijnsymmetrisch? Zo ja, teken de symmetrieassen.
b Is de figuur puntsymmetrisch? Zo ja, geef het punt van symmetrie aan.
c Is de figuur draaisymmetrisch? Zo ja, bereken de kleinste draaihoek.
d De blauwe delen bestaan uit parallellogrammen. Eén zo'n parallellogram kun je verdelen in twee driehoeken met basis drie hokjes en hoogte twee hokjes. Hoeveel procent van de tegel is blauw?



Historische kansen

In de zestiende en zeventiende eeuw nam de belangstelling toe voor vraagstukken van kansen en risico's. Dat kwam enerzijds door de opkomst van de overzeese handel. Schepen vergingen en daarmee kostbare investeringen. De vraag was hoe dit risico te dekken. Anderzijds waagde men ter ontspanning graag een gokje in het koffiehuis. De ridder de Méré was zo'n gokker en hij legde in 1654 de Franse geleerde Blaise Pascal enkele vragen voor. Pascal besprak ze met Pierre de Fermat en daarmee werd de grondslag van de kansrekening gelegd.

De Méré's eerste probleem

Bij hoeveel worpen met twee dobbelstenen heb je een kans van een half of meer op minstens één dubbelzes? Volgens De Méré's berekeningen kon het zowel 24 als 25 zijn. Daarom stelde hij dat de wiskunde met zichzelf in tegenspraak was. Pascal liet zien dat dit niet zo was. Hij schreef alle mogelijke worpen systematisch uit en bij 24 worpen bleek de kans op een dubbelzes 0,491. Te klein, het moest dus 25 zijn.

De Méré's tweede probleem

Het tweede was een verdelingsvraagstuk, een bekend type probleem in de zeventiende-eeuwse gokwereld. Hier ging het om twee dobbelaars. Elk gewonnen spel levert een punt op. Wie het eerst drie punten heeft wint de pot. De gokkers hebben ieder 32 'pistoles' ingezet. Zij moeten het spel echter voortijdig afbreken. Hoe kunnen ze de pot op een eerlijke manier verdelen?

In zijn brief aan Fermat op 29 juli 1654 zette Pascal de mogelijkheden op een rijtje. Stel, de ene speler heeft twee punten, de andere één. Wat kan er bij de volgende worp gebeuren? Als de eerste speler wint is de pot van 64 'pistoles' van hem. Als hij verliest is de score twee-twee en zouden ze beiden 32 'pistoles' moeten krijgen. Op basis van deze verwachting kan de eerste speler dus zeggen: "Ik ben zeker van 32 'pistoles' en op de andere 32 hebben we evenveel kans. Laten we die gelijk verdelen. Ik krijg dus in totaal 48 'pistoles' en jij 16." Op dezelfde manier bekeek Pascal de andere gevallen: wanneer de stand twee-nul of één-nul is.

Opdracht

- Laat met een berekening zien dat na 25 keer gooien met twee dobbelstenen de kans op minstens één dubbelzes voor het eerst groter is dan 0,5.
- Bereken op de manier van Pascal de verdeling van de 'pistoles' bij de stand twee-nul en één-nul.



SE

CE

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Systematisch tellen
- Lineaire formules

Departures

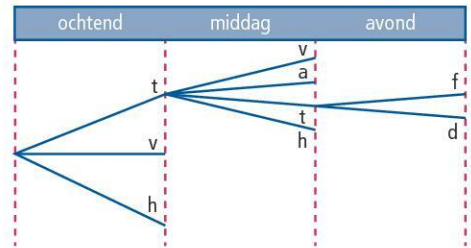
Flt No.	Remarks
Gate Opens 16:50	
Gate Opens 16:40	
Gate Opens 16:50	
Gate Opens 16:55	
Gate Opens 16:55	
Gate Opens 17:00	
Gate Opens 17:00	
Gate Opens 17:10	
Gate Opens 17:15	
Gate Opens 17:15	
Gate Opens 17:15	
Gate Opens 17:15	

Departures

Time	Destination	Flt No.	Remarks
20:05	Vienna		Gate Open
20:05	an Bergamo		Gate Open
20:05	Barcelona		Gate Open
20:10	Cologne		Gate Open
20:10	Bologna		Gate Open
20:20	Hanover		Gate Open
20:25	Stuttgart		Gate Open
20:25	Wroclaw		Gate Open

Systematisch tellen

- 1 Tijdens een sportdag moeten leerlingen voor het ochtendprogramma kiezen uit tennis, volleybal of handbal. Voor de middag is er de keuze uit voetbal, atletiek, tafeltennis en hockey. 's Avonds dient er nog gekozen worden tussen fitness en dansen, zodat elke leerling aan een drietal sportactiviteiten deelneemt. Hoeveel mogelijkheden heeft een leerling om een dergelijk drietal samen te stellen?



Theorie

Bij een telprobleem kun je een boomdiagram gebruiken. Je krijgt daarmee een idee welke berekening je moet uitvoeren. Van belang is dan of bij elke splitsing het aantal takken gelijk blijft of dat het aantal takken telkens met één afneemt.

Voorbeeld 1

In een gang van het schoolgebouw zijn vijf lokalen. In elk van deze lokalen is het licht aan of uit. Op hoeveel manieren kan dit?

Oplossing

In het eerste lokaal is het licht wel óf niet aan, dus er zijn twee mogelijkheden. Bij elk volgend lokaal zijn er weer deze twee mogelijkheden. Het aantal manieren waarop dit kan is $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$.

Voorbeeld 2

In een klas zitten 29 leerlingen. Hoeveel verschillende rijtjes van vijf leerlingen kun je voor het bord zetten?

Oplossing

Voor de eerste leerling van de rij kun je kiezen uit 29 leerlingen, voor de tweede leerling uit 28 leerlingen enzovoort. Het aantal verschillende rijtjes van vijf leerlingen is $29 \times 28 \times 27 \times 26 \times 25 = 14\,250\,600$.

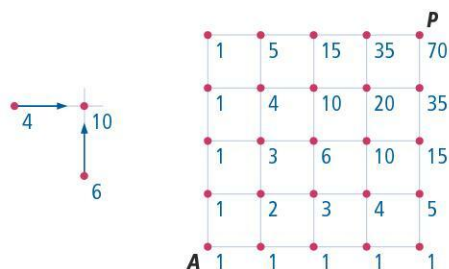
- 2 a Op de boekenlijst van Theo staan 12 boeken. Hij moet ze alle 12 nog lezen. In hoeveel verschillende volgorden kan hij dat doen?
- b Pierre moet voor Frans nog vijf boeken lezen en voor Nederlands nog zeven. Hij leest eerst de Franse boeken en daarna de Nederlandse boeken. In hoeveel verschillende volgorden kan hij dat doen?
- 3 Het schilderij bestaat uit zes even grote driehoeken en een vierkant. Voor de invulling is gebruik gemaakt van de zes kleuren wit, zwart, oranje, groen, roze en blauw. Door de kleuren anders te verdelen, ontstaat er een ander schilderij. Bereken hoeveel schilderijen er mogelijk zijn als alle zes kleuren gebruikt worden en de buitenste twee driehoeken dezelfde kleur krijgen.



- 4 In de figuur zie je hoe je het aantal kortste routes van A naar B kunt berekenen.

Bereken het aantal kortse routes van het punt linksonder naar het punt rechtsboven in een rooster van:

- zeven breed en vier hoog
- acht breed en twee hoog
- vijf breed en vijf hoog
- negen breed en één hoog



Theorie

Een combinatie van 3 uit 10 is een keuze van een drietal uit een tiental: drie wel kiezen en zeven niet kiezen. Een rooster is een geschikt telmodel om het aantal mogelijke drietallen te berekenen, want elke keuze van drie uit tien komt overeen met een route in een rooster van drie stappen naar rechts en zeven stappen omhoog.

Het aantal combinaties van 3 uit 10 noteer je als $\binom{10}{3}$.

Dit getal kun je met je rekenmachine berekenen.

Voorbeeld

In een bak liggen 17 verschillende pennen. Je pakt zes pennen uit de bak. Hoeveel mogelijke zestallen zijn er?

Oplossing

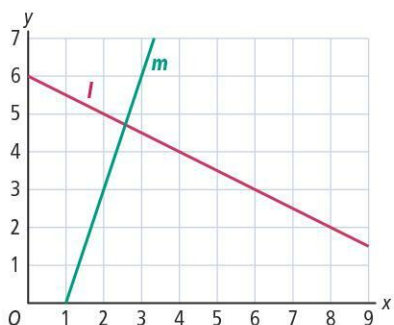
Je pakt 6 pennen wel en 11 niet. Het aantal combinaties van 6 uit 17 is het aantal kortste routes in een rooster van 6 breed en 11 hoog.

Dit is gelijk aan $\binom{17}{6}$.

De rekenmachine geeft 12 376.

- 5
- Iemand legt negen rode en zes witte knikkers op een rij. Hoeveel verschillende rijtjes kan hij op zo maken?
 - Een docent kiest willekeurig een groep van vier leerlingen uit een klas van 24 leerlingen. Bereken het aantal verschillende mogelijke viertallen.
 - De klas van 24 leerlingen wordt verdeeld in drie groepen van acht.
Leg uit dat je op $\binom{24}{8} \times \binom{16}{8} \times \binom{8}{8}$ manieren de klas in drie groepen van acht leerlingen kunt verdelen.
 - Bereken het aantal manieren waarop een klas van 24 leerlingen verdeeld kan worden in een groep van tien, een groep van acht en een groep van zes leerlingen.
- 6 De twintig helpers bij een feest worden verdeeld in drie groepen:
- een groep van vijf mensen die de inkoop regelen
 - een groep van zeven mensen die de zaal versieren
 - een groep van acht mensen die na afloop schoonmaken.
- Op hoeveel manieren kunnen de twintig helpers over de drie groepen worden verdeeld?

Lineaire formules



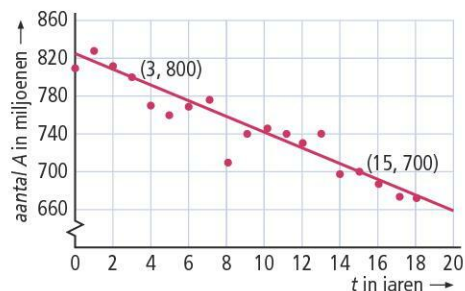
•	Lijn m gaat door de punten $(1, 0)$ en $(3, 6)$.
•	De richtingscoëfficiënt $= \frac{6 - 0}{3 - 1} = 3$
•	$y = 3x + b$
•	De coördinaten van $(1, 0)$ invullen geeft:
•	$0 = 3 \times 1 + b$
•	$b = \dots$

- 7**
- Lijn l is de grafiek bij een lineair verband tussen de variabelen x en y .
Lees het startgetal en de richtingscoëfficiënt van lijn l af.
 - Geef een lineaire formule die bij lijn l past.
 - Naast de grafiek zie je hoe je de richtingscoëfficiënt en het startgetal van lijn m kunt berekenen.
Maak deze berekening af en geef een formule bij lijn m .

Theorie

Een lineaire formule $y = a \cdot x + b$ hoort bij een rechte lijn die niet evenwijdig is met de y -as. Hierin is a de richtingscoëfficiënt en b het startgetal, dat is de waarde van y bij $x = 0$. Een lijn evenwijdig aan de x -as heeft richtingscoëfficiënt 0 en dus is de formule $y = b$. Een lijn evenwijdig aan de y -as heeft als formule $x = p$.

- 8** Stel een formule op van de lijn die gaat door de punten:
- $(0, -3)$ en $(2, 13)$
 - $(-20, 7)$ en $(-20, 9)$
 - $(9, -13)$ en $(12, 14)$
 - $(7, -1)$ en $(-3, 4)$
- 9** De stippen in de grafiek geven het aantal ondervoede kinderen in de wereld weer in de periode 1990 - 2008. Hierin komt $t = 0$ overeen met het jaar 1990. Tussen de tijd in jaren en het aantal ondervoede kinderen bestaat bij benadering een lineair verband dat wordt weergegeven door de lijn die door twee aangegeven punten gaat.
- Stel een formule op bij deze lijn.
 - In welk jaar zullen voor het eerst minder dan 580 miljoen kinderen ondervoed zijn als de daling zich zo voortzet?



Theorie

Bij een rechte lijn door de oorsprong hoort de formule $y = a \cdot x$. In dat geval is y recht evenredig (of gewoon evenredig) met x .

Voor twee variabelen die recht evenredig zijn geldt: als de ene variabele k keer zo groot wordt, dan wordt de andere variabele ook k keer zo groot.

- 10** Ga na of er in de volgende gevallen sprake is van een evenredig verband tussen de twee grootheden. Geef bij een evenredig verband een passende formule.
- a** De tijd t in uren en de afstand s in km, als er met een constante snelheid van 6,5 km per uur gelopen wordt.
 - b** De opbrengst O in euro's van het aantal verkochte kaartjes k , als de kaartjes € 16,- per stuk kosten.
 - c** Het bedrag b in euro's dat een ieder krijgt als je € 1.200,- mag verdelen onder p personen.
 - d** De oppervlakte A van een vierkant met zijden van lengte l .
- 11**
- a** Schrijf de formule $C = 2(15 - X) - 12$ zonder haakjes en zo kort mogelijk.
 - b** Is het verband tussen C en X lineair? Is het verband recht evenredig?
- 12** Schrijf de formules zonder haakjes en zo kort mogelijk.
- a** $g = 3(k + 3) - 4(k - 1)$
 - c** $R = -2(t - 1) + 7(t + 1)$
 - b** $N = 2a - (4 - a)$
 - d** $A = 7(p + 3) - 4(1 - p)$
- 13** Herleid de formule $B = \frac{12P + 56}{8} + 2(P - 1)$ tot de vorm $B = a \cdot P + b$.
- 14** Gegeven is de formule $H = \frac{7F + 3F \cdot G}{3 - F}$
- a** Bereken de waarde van H als $F = 1$ en $G = 5$.
 - b** Bereken de waarde van G als $H = 50$ en $F = 2,5$.
 - c** Vul in $F = -1$ en herleid de formule tot de vorm $H = a \cdot G + b$.
- 15** Gegeven is de formule $Q = 24,3 + \frac{50 - X}{2,5} \cdot 12$.
Je kunt de formule herleiden tot de vorm $Q = a \cdot X + b$.
Bereken de waarde van a en van b .

Voorbeeld

Gegeven is de formule $H = \frac{5p \cdot t + 24}{2p}$

Vul $p = 4$ in en herleid de formule tot de vorm $H = a \cdot t + b$.

Oplossing

Invullen van $p = 4$ geeft $H = \frac{20 \cdot t + 24}{8}$

$H = \frac{20t}{8} + \frac{24}{8}$ dus $H = 2\frac{1}{2}t + 3$



SE

CE

K

In dit hoofdstuk

Dit hoofdstuk is een vervolg op het hoofdstuk verbanden en machtsfuncties uit deel 1.

Behalve de verbanden die daar aan de orde komen, is er aandacht voor wortelverbanden. Het oplossen van vergelijkingen is geen doel op zich, maar een hulpmiddel voor het aanleren van de technieken die nodig zijn voor het herleiden van formules. Tot slot leer je formules herleiden door middel van het vervangen van een variabele door een andere formule.

Bij de vaardigheden en in de analyse hoofdstukken van deel 3 en deel 4 wordt het manipuleren met formules uitgebreid en onderhouden.

Voorbeelden van WDA in dit hoofdstuk

- | | |
|---|-------------|
| - Problemen oplossen en analytisch denken | opdracht 7 |
| - Ordenen en structureren | opdracht 26 |
| - Abstraheren | opdracht 18 |
| - Logisch redeneren en bewijzen | opdracht 22 |

V1 Schrijf zonder haakjes.

a $y = 3(x + 2)$

c $y = -2(x^2 - 3x)$

b $y = 3x(2x - 1)$

d $y = -2x(12 - 3x^2)$

V2 a Op het blaadje zie je hoe je de formule $y = (x + 4)^2 - 2(4x - 5)$ kunt herleiden tot $y = x^2 + 26$. Omschrijf bij elke stap welke bewerking is gedaan.

b Herleid de formules op dezelfde manier.

A $K = 5n^2 + 2(n^2 - 3)$

C $a = (b + 3)(b + 7)$

B $P = 3q - 2(q - 7)^2$

D $g = h(h + 5) + 3(h^2 - 2)$

	$y = (x + 4)^2 - 2(4x - 5)$	
	$y = (x + 4)(x + 4) - 8x + 10$	1
	$y = x^2 + 8x + 16 - 8x + 10$	2
	$y = x^2 + 26$	3

Breuken kun je bij elkaar optellen of van elkaar aftrekken door de breuken gelijknamig te maken.

Breuken kun je vermenigvuldigen door de tellers met elkaar te vermenigvuldigen en de noemers met elkaar te vermenigvuldigen.

Je kunt breuken vereenvoudigen door teller én noemer door hetzelfde getal te delen of met hetzelfde getal te vermenigvuldigen.

Voorbeeld 1

Herleid en schrijf als één breuk:

$$q = \frac{8}{3} - \frac{5}{x}$$

Oplossing

$$q = \frac{8 \cdot x}{3 \cdot x} - \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot x}$$

$$q = \frac{8x}{3x} - \frac{15}{3x}$$

$$q = \frac{8x - 15}{3x}$$

Voorbeeld 2

Herleid en schrijf als één breuk:

$$q = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3x^2} \cdot \frac{6}{x}$$

Oplossing

$$q = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3x^2} \cdot \frac{6}{x}$$

$$q = \frac{1 \cdot 8 \cdot 6}{2 \cdot 3x^2 \cdot x}$$

$$q = \frac{48}{6x^3} \text{ ofwel } q = \frac{8}{x^3}$$

Voorbeeld 3

Herleid en schrijf als één breuk:

$$y = 6 \cdot \frac{2x + 1}{3x}$$

Oplossing

$$y = \frac{6}{1} \cdot \frac{2x + 1}{3x}$$

$$y = \frac{6(2x + 1)}{3x}$$

$$y = \frac{12x + 6}{3x} \text{ ofwel } y = \frac{4x + 2}{x}$$

V3 Herleid de formules en schrijf als één breuk.

a $q = \frac{p}{3} + \frac{5p}{3}$

e $t = \frac{3k}{k^2} \cdot \frac{k}{6k}$

b $k = \frac{s}{4} + \frac{3s}{5}$

f $k = 3 \cdot \frac{2q}{q + 1}$

c $k = \frac{2}{3} + \frac{5}{2m}$

g $p = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{7g}$

d $a = \frac{3}{b} - \frac{5}{2b}$

h $m = \frac{2}{p - 4} \cdot \frac{p}{4}$

Voor het rekenen met machten gelden de volgende rekenregels.

$$g^0 = 1 \qquad (g^p)^q = g^{pq} \qquad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$g^p \cdot g^q = g^{p+q} \qquad g^{-n} = \frac{1}{g^n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\frac{g^p}{g^q} = g^{p-q} \qquad g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$$

Voorbeeld 1

Schrijf $\left(\frac{x^3 \cdot x^2}{x}\right)^2$ als één macht.

Oplossing

$$\left(\frac{x^3 \cdot x^2}{x}\right)^2 = \left(\frac{x^5}{x}\right)^2 = (x^4)^2 = x^8$$

Voorbeeld 2

Schrijf $(p^2 \cdot \sqrt{p})^4$ als één macht.

Oplossing

$$(p^2 \cdot \sqrt{p})^4 = (p^2 \cdot p^{\frac{1}{2}})^4 = (p^{2\frac{1}{2}})^4 = p^{10}$$

V4 Schrijf als één macht.

a $x^3 \cdot x^{-1}$

d $q^5 \cdot \sqrt{q}$

b $(x^5)^{12}$

e $p \cdot \sqrt[3]{p} \cdot \sqrt{p}$

c $\frac{x^7}{x^3 \cdot x^0}$

f $\frac{s^2}{s\sqrt{s}}$

V5 Schrijf als één wortel.

a $\sqrt{2a} \cdot \sqrt{3b}$

c $\sqrt{2g} \cdot \sqrt{3g} \cdot \sqrt{3h}$

b $\frac{\sqrt{6pq}}{\sqrt{3p}}$

d $\frac{\sqrt{8k}}{\sqrt{2}}$

$$\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$$

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$$

V6 Schrijf als $K = c \cdot \sqrt{p}$. Rond c zo nodig af op twee decimalen.

a $K = \sqrt{25p}$

c $K = 12,4 \cdot \sqrt{3p}$

b $K = \sqrt{\frac{p}{7}}$

d $K = 25 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}p}$

V7 Op het blaadje zie je hoe je de formule $w = \frac{2q^3 + 6q^2 - 4q - 5}{2q}$ kunt herleiden.

Herleid de formules op dezelfde manier.

a $K = \frac{12p^3 - 6p^2}{3}$

c $Q = \frac{k^3 - 4k + 3}{2k}$

b $a = \frac{-4b^5 + 3b^2 + b}{b}$

d $t = \frac{5x^6 - 8x^3 + 2x^2}{x^2}$

$$\begin{aligned} w &= \frac{2q^3 + 6q^2 - 4q - 5}{2q} \\ w &= \frac{2q^3}{2q} + \frac{6q^2}{2q} - \frac{4q}{2q} - \frac{5}{2q} \\ w &= q^2 + 3q - 2 - 2\frac{1}{2}q^{-1} \end{aligned}$$

9.1 Lineaire formules

Je leert • hoe je een lineaire formule herleidt

Leerroutes • ondersteunend: 1—02—2—3—4—05—6
 • doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7
 • uitdagend: 1—2—3—4—5—7—U1

De tijd die nodig is voor een bergwandeling is te berekenen met de regel van Naismith:
neem de tijd die voor dezelfde afstand op een vlakke weg nodig is en tel er 20 minuten per 100 meter stijging bij op.

Freek en Yael maken een wandeling van 4 uur.
 Op vlak terrein is hun wandeltempo 5 km per uur.
 • Leg uit dat het verband tussen de afstand a in km en het aantal gestegen meters h wordt gegeven door de formule $4 = \frac{1}{5}a + \frac{1}{300}h$.



- 1 Op het blaadje is een begin gemaakt met het oplossen van de vergelijking $3x + 5(6 - 2x) = 14 - 4(\frac{1}{2}x + 1)$.
- Welke bewerking is bij stap 1 gedaan?
 - En welke bij stap 2 en stap 3?
 - Los de vergelijking verder op.
 - Los op dezelfde manier de vergelijking $2x + 3(4 - x) = 5 - 4(\frac{1}{2}x - 1)$ op.

•	$3x + 5(6 - 2x) = 14 - 4(\frac{1}{2}x + 1)$	
•	$3x + 30 - 10x = 14 - 2x - 4$	1
•	$-7x + 30 = 10 - 2x$	2
•	$-5x + 30 = 10$	3
•	...	

Lineaire vergelijkingen of **eerstegraads vergelijkingen** kun je oplossen met de **balansmethode**: links en rechts van het gelijkteken voer je dezelfde bewerking uit. Daarmee vereenvoudig je de vergelijking zo ver dat de onbekende nog maar aan één kant van het gelijkteken staat. Soms moet je eerst breuken en/of haakjes weggewerken.

Voorbeeld

Los op: $2x + \frac{2}{5} = 1 - \frac{1}{2}(-x - 4)$

Oplossing

$2x + \frac{2}{5} = \frac{1}{2}x + 3$	haakjes weggewerkt
$20x + 4 = 5x + 30$	links en rechts $\times 10$
$15x + 4 = 30$	links en rechts $- 5x$
$15x = 26$	links en rechts $- 4$
$x = \frac{26}{15} = 1\frac{11}{15}$	links en rechts : 15

Ondersteunende route → maak opdracht 02

- 2 Los de vergelijkingen op.
- $8x - 4 = 3x + 7$
 - $9x = 6x - 5(2 - 3x)$
 - $15 - (2x - 6) = 7x + 4$
 - $2\frac{3}{7}x + 1 = 2x - 3$
 - $2\frac{1}{2}x + 4 = 2 - (\frac{1}{2}x + 7)$
 - $\frac{1}{3}x = 1\frac{1}{3}(3 - x)$

- 3** Een Friese staartklok wordt aangedreven door een gewicht. Als de tijd verloopt, zakt het gewicht. Om 9.00 uur hangt het gewicht op een hoogte van 140 cm. De hoogte van het gewicht voldoet aan de formule $h = -0,15t + 147$, met h in cm en t in minuten na 9.00 uur.

- Met welke vergelijking kun je berekenen na hoeveel minuten het gewicht op de grond komt?
- Hoe laat zal de klok gaan stilstaan?
- Bereken de tijdstippen bij de volgende hoogten: 120 cm en 33 cm.
- Om bij een gegeven waarde van h de bijbehorende waarde van t uit te rekenen, is het handig om een formule te hebben waarbij h is uitgedrukt in t .
Leg uit waarom uit de gegeven formule volgt dat $-0,15t = h - 147$.
- Uit de formule van opdracht d volgt $t = \dots h + \dots$.
Vul op de puntjes de juiste getallen in.



- 4** Bij lijn l hoort de formule $5x + 2y = 8$. Op het blaadje zie je hoe deze formule herleid is tot de vorm $y = a \cdot x + b$.

- Leg uit wat er in stap 1 is gebeurd.
- En wat is er in stap 2 gebeurd?
- Herleid de formule $5y - 8 = 7x$ tot de vorm $y = a \cdot x + b$.
- Herleid de formule $3(2q - p) = 8$ tot de vorm $q = \dots + \dots$.

●	$5x + 2y = 8$		
●	$2y = -5x + 8$		1
●	$y = 2\frac{1}{2}x + 4$		2
●			

Theorie

De formule $2w - 3v = 14$ wordt ook wel een **vergelijking van een lijn** genoemd. De vergelijking is te herleiden tot

$w = 1\frac{1}{2}v + 7$. In deze formule is w **uitgedrukt in** v .

Bij het herleiden gebruik je, net als bij het oplossen van vergelijkingen, de balansmethode.

Voorbeeld 1

Herleid de vergelijking $3a = 12 - 2b$ waarbij je b uitdrukt in a .

Oplossing

$12 - 2b = 3a$	links en rechts verwisseld
$-2b = 3a - 12$	links en rechts -12
$b = -1\frac{1}{2}a + 6$	links en rechts $: -2$

Voorbeeld 2

Herleid de vergelijking $8k + 2p = 15$ waarbij je p uitdrukt in k .

Oplossing

$2p = -8k + 15$	links en rechts $-8k$
$p = -4k + 7\frac{1}{2}$	links en rechts $: 2$

Ondersteunende route → maak opdracht 05

5 Herleid de formules waarbij je q uitdrukt in p .

- H**
- | | |
|--------------------------|----------------------------------|
| a $8p - 4q = 9$ | e $4q + 16 = 20p$ |
| b $p + 2q = 0$ | f $3(q + 1) = 6p + 5$ |
| c $15p = 3q + 27$ | g $2p - \frac{1}{2}q = 1$ |
| d $5q + 3p = 6$ | h $2(p + q) = p - q$ |

6 Inwoners van de provincie Groningen betalen voor hun waterverbruik € 0,925 per m^3 . Daarnaast betalen ze € 30,- vaste kosten per jaar. Deze vaste kosten voor het verbruik van water noem je vastrecht. Inwoners van de provincie Drenthe betalen € 40,- vastrecht en € 0,88 per m^3 water. In deze opdracht is b het te betalen bedrag in euro's en is w het waterverbruik in m^3 .

- Leg uit dat voor de provincie Groningen de formule $b = 30 + 0,925w$ geldt.
- Geef ook de formule voor de provincie Drenthe.
- Met welke vergelijking kun je berekenen bij welk waterverbruik het te betalen bedrag in beide provincies even hoog is?
- Bij welk waterverbruik is het te betalen bedrag in de provincie Drenthe kleiner dan het te betalen bedrag in de provincie Groningen?

7 Een meubelfabriek maakt twee soorten stoelen. Voor stoel A is 0,5 uur machinetijd nodig en voor stoel B 1,5 uur. Per dag draait de machine 15 uur. Het aantal stoelen van model A is a en het aantal stoelen van model B is b .

- Hoeveel stoelen A kunnen er per dag maximaal worden geproduceerd?
- Is het mogelijk om elf stoelen A en zeven stoelen B op één dag te produceren?
- Hoeveel productietijd is nog beschikbaar nadat er negen stoelen A en vijf stoelen B zijn gemaakt?
- Leg uit dat voor een dagproductie geldt $0,5a + 1,5b = 15$.
- Druk a uit in b .
- Onderzoek welke verschillende verdelingen van de aantallen stoelen A en B mogelijk zijn als de productietijd van 15 uur volledig benut wordt.



Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

- 02** Op het blaadje is een begin gemaakt met het oplossen van de vergelijking $3(2a - 4) + a = 2(a - 1)$.
- a** Leg uit wat er in stap 1 is gebeurd.
 - b** In stap 2 worden de gelijksoortige termen samengenomen.
Maak de vergelijking in stap 2 af.
 - c** Leg uit wat er in stap 3 is gebeurd.
 - d** Los de vergelijking verder op.

●	$3(2a - 4) + a = 2(a - 1)$				
●	$6a - 12 + a = 2a - 2$				1
●	$7a - 12 = \dots$				2
●	$5a - 12 = \dots$				3
●	$\dots$				

- 05** Op het blaadje zie je hoe de vergelijking $7(p - 3) = 6 + 2q$ is herleid zodat q uitgedrukt wordt in p .
- a** Noteer bij elke stap welke bewerkingen zijn gedaan.

Herleid de volgende vergelijkingen zodat q uitgedrukt wordt in p .

- b** $8q + 6p = 12$
- c** $5p + 15q = 0$
- d** $3p + 5q = 18$
- e** $2p + q = 3p + 2q - 4$
- f** $4p - 2q = p + 9$
- g** $12p + 12 = 2(q + 7)$
- h** $5 - 2(q - 3) = 4p + 8$
- i** $p + 3(p - 2) = 10q + 8$

●	$7(p - 3) = 6 + 2q$				
●	$7p - 21 = 6 + 2q$				1
●	$6 + 2q = 7p - 21$				2
●	$2q = 7p - 27$				3
●	$q = 3\frac{1}{2}p - 13\frac{1}{2}$				4

Uitdagende opdrachten

- U1** Abel, Bert en Chris hebben hetzelfde contract bij het energiebedrijf voor het leveren van elektriciteit. Ze betalen een vast bedrag per jaar en maken gebruik van het dubbeltarief. Dat wil zeggen dat je tijdens daluren (in het weekend en 's nachts) goedkopere stroom hebt dan tijdens normale uren. Bij de jaarafrekening blijkt dat Bert evenveel kWh tijdens daluren heeft afgenomen als Abel maar 10% meer kWh tijdens normale uren heeft gebruikt. Bert moet € 23,46 meer betalen dan Abel. Chris heeft 8% meer kWh van het lage en het hoge tarief gebruikt dan Abel. Hij betaalt € 39,58 meer dan Abel. Hoeveel kWh gebruikt Abel totaal tijdens normale uren? En hoeveel gebruikt hij tijdens de daluren?

tarief elektriciteit

kWh prijs inclusief belastingen

normale uren	€ 0,23
daluren	€ 0,215
vastrecht	€ 88,50

9.2 Gebroken formules

Je leert • hoe je een gebroken formule herleidt

Leerroutes • ondersteunend: 8—09—10—11—12
 • doorlopend: 8—9—10—11—12
 • uitdagend: 8—9—10—12—U2

Voor een stadsuitbreiding is 40 000 m² grond beschikbaar. De kavels voor de woningen krijgen allemaal dezelfde oppervlakte. Voor de groenvoorziening en de wegen is per woning 100 m² nodig. De oppervlakte per kavel K in m², bij het aantal kavels a , kun je bereken met de

$$\text{formule } K = \frac{40000 - 100a}{a}$$

- Als de oppervlakte van de kavels gehalveerd wordt, kun je dan ook twee keer zoveel kavels maken?



- 8** De firma Wortel produceert onder andere hardhouten tuinbankjes. De gemiddelde kosten per bankje worden berekend met de formule $GK = 65 + \frac{6000}{B+5}$. Hierin is GK de gemiddelde kosten in euro's en B het aantal geproduceerde bankjes.

Met de vergelijking $65 + \frac{6000}{B+5} = 75$ kun je berekenen hoeveel bankjes geproduceerd moeten worden zodat de gemiddelde kosten 75 euro bedragen.

- a** Je kunt de vergelijking oplossen met je rekenmachine, maar het kan ook zonder. Op het bovenste blaadje zie je hoe je dat doet.

Leg uit wat er bij elke stap is gebeurt.

- b** Bereken op dezelfde manier hoeveel bankjes er moeten worden geproduceerd als $GK = 80$ en als $GK = 70$.
c Om bij een gegeven waarde van GK de waarde van B uit te rekenen, is het handig om een formule te hebben waarin B is uitgedrukt in GK . Op het onderste blaadje is een begin gemaakt met de herleiding.

Maak de herleiding af en laat zien dat $B = \frac{6000}{GK - 65} - 5$.

●	$65 + \frac{6000}{B+5} = 75$	
●	$\frac{6000}{B+5} = 10$	1
●	$6000 = 10(B+5)$	2
●	$600 = B+5$	3
●	$B+5 = 600$	4
●	$B = 595$	5

●	$GK = 65 + \frac{6000}{B+5}$	
●	$65 + \frac{6000}{B+5} = GK$	1
●	$\frac{6000}{B+5} = GK - 65$	2
●	$6000 = (GK - 65)(\dots + \dots)$	3
●	$B+5 = \dots$	4
●	$B = \dots$	5

Theorie

Een formule heet een **gebroken formule** als er een variabele in een noemer voorkomt. Een gebroken formule kun je herleiden en soms vereenvoudigen. Daarbij kun je gebruik maken van:

$$\frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C} \text{ en } A \cdot \frac{B}{C} = \frac{A \cdot B}{C}$$

Uit $\frac{A}{B} = C$ volgt $A = B \cdot C$ en dus ook $\frac{A}{C} = B$.

Uit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ volgt $A \cdot D = B \cdot C$.

Voorbeeld 1

Herleid $\frac{5}{b} - 3a = 1$, waarbij je b uitdrukt in a .

Oplossing

$$\begin{array}{ll} \frac{5}{b} = 1 + 3a & \text{links en rechts } + 3a \\ 5 = b \cdot (1 + 3a) & \frac{A}{B} = C \text{ dus } A = B \cdot C \\ b \cdot (1 + 3a) = 5 & \text{links en rechts verwisseld} \\ b = \frac{5}{1 + 3a} & A = B \cdot C \text{ dus } C = \frac{A}{B} \end{array}$$

Voorbeeld 2

Herleid $\frac{q^2 + 3q}{q} = \frac{p}{-8}$, waar bij je p uitdrukt in q .

Oplossing

$$\begin{array}{ll} \frac{q^2 + 3q}{q} = \frac{p}{-8} & \frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C} \\ q + 3 = \frac{p}{-8} & \text{vereenvoudigd} \\ -8(q + 3) = p & \text{links en rechts } \times -8 \\ p = -8(q + 3) & \text{links en rechts verwisseld} \\ p = -8q - 24 & \text{haakjes weggewerkt} \end{array}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 09

9 Herleid de vergelijkingen waarbij je b uitdrukt in a .

H

$$\begin{array}{ll} \text{a } a = \frac{12}{b} & \text{d } \frac{4}{b} = 6a - 7 \\ \text{b } \frac{b-1}{a^2} = 7 & \text{e } \frac{5b^2 - 3b}{b} = a + 3 \\ \text{c } 2a = \frac{8}{b+4} & \text{f } \frac{7}{b} = \frac{2a+1}{a} \end{array}$$

10 a Toon aan dat je de formule $A = \frac{3p^2 - p^{1,5} + 8p^{0,6}}{2p}$ kunt

herleiden tot $A = 1\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}p^{0,5} + 4p^{-0,4}$.

b Toon aan dat je de formule $Q = \frac{p^2 - 2 \cdot \sqrt{p}}{2 \cdot \sqrt{p}} + \frac{1}{2}p \cdot \sqrt{p}$ kunt herleiden tot $Q = p \cdot \sqrt{p} - 1$.

- 11** Een schaatsenfabriek heeft een nieuw type klapschaats ontwikkeld. De gemiddelde productiekosten per paar schaatsen hangen af van het geproduceerde aantal q .
De formule $GK = \frac{200q + 12000}{q + 10}$ geeft de gemiddelde productiekosten in euro's per paar schaatsen.
- Hoe hoog zijn de gemiddelde productiekosten per paar als er 200 paar geproduceerd worden? En bij 400 paar?
 - Tijdens een strenge winter wordt de productie sterk opgevoerd. De gemiddelde kosten per paar zijn gedaald tot € 210,-.
Hoeveel paar schaatsen zijn er geproduceerd?
 - Hoe groot zijn de totale kosten bij 200 paar schaatsen? En bij 400 paar?
 - Geef de formule voor de totale kosten TK in euro's bij het produceren van q paar schaatsen.
 - Hoeveel paar schaatsen kun je laten produceren voor € 250.000,-?



- 12** Een schoonmaakbedrijf berekent voor het reinigen van vloeren eerst de prijs per m^2 met de formule $P = \frac{0,13V + 0,12}{V}$.
Hierin is P de prijs in euro's per m^2 en V de vloeroppervlakte in duizenden m^2 .
- Bereken voor een vloeroppervlak van 2000 m^2 de prijs per m^2 en vervolgens de totale kosten in euro's.
 - Laat met een berekening zien dat bij een vloeroppervlak van 580 m^2 de totale kosten € 195,40 zijn.
 - Laat zien dat je de formule $P = \frac{0,13V + 0,12}{V}$ kunt herleiden tot $P = 0,13 + \frac{0,12}{V}$.
 - Hoe kun je aan de formule $P = 0,13 + \frac{0,12}{V}$ zien dat de prijs per m^2 lager is naarmate een grotere oppervlakte moet worden schoongemaakt?
 - Geef een formule voor de totale kosten TK voor het reinigen van een vloeroppervlakte V met TK het bedrag in euro's en V de vloeroppervlakte in duizenden m^2 .

Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

09 Gegeven is de formule $\frac{12}{1+b} = 2a+3$. Op het blaadje is een begin gemaakt met een herleiding zodat b wordt uitgedrukt in a .

a Omschrijf wat er in elke stap is gebeurd.

b Maak de herleiding af.

Herleid de vergelijkingen waarbij je b uitdrukt in a .

c $a = \frac{b}{5}$

f $a - 5 = \frac{2b-4}{3}$

d $\frac{2}{b} = 3a + 7$

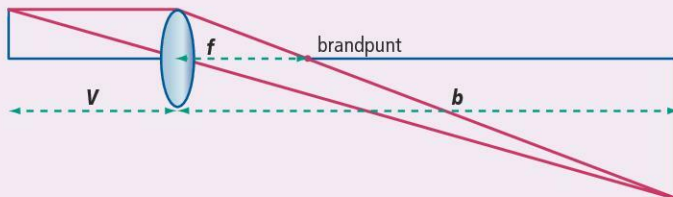
g $a \cdot b = 4$

e $2 + \frac{3}{b} = 4a - 8$

h $\frac{a}{2b} = 4 + a$

	$\frac{12}{1+b} = 2a+3$			
	$12 = (2a+3)(1+b)$		1	
	$(2a+3)(1+b) = 12$		2	
	$1+b = \frac{12}{\dots}$		3	
	$b = \dots$			

Uitdagende opdrachten



U2 Voor lenzen geldt de zogenaamde lenzenformule $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{v}$. Hierin is f de brandpuntsafstand, is b de afstand van het beeld tot de lens en v de afstand van het voorwerp tot de lens. Alle afmetingen zijn in cm.

a Je wilt een lampje afbeelden op een scherm dat op 120 cm afstand van de lens staat. Je gebruikt een lens met $f = 15$. Op welke afstand van de lens moet je het lampje zetten?

b Neem $b = 50$ en druk v uit in f .

c Neem $f = 10$ en laat zien dat je de formule kunt herleiden tot $b = \frac{10v}{v-10}$

d De vergroting N van het voorwerp kun je berekenen met de formule $N = \frac{b}{v}$

Bereken v en b als gegeven is dat $N = 1,5$ en $f = 10$.

9.3 Wortelformules

Je leert • hoe je een wortelformule herleidt

Leerroutes • ondersteunend: 13—14—015—16—17—18
• doorlopend: 13—14—15—16—17—18
• uitdagend: 13—14—15—17—18—U3

De afstand van je ogen tot de horizon kun je berekenen met de formule $d = 3,57 \cdot \sqrt{h}$.

Hierin is d de afstand in km en h de ooghoogte in meters.

Sil staat op een duin, onderaan de vuurtoren van Texel. Hij kan 12,4 km ver kijken. Samir staat op de omloop van de vuurtoren. Hij staat drie keer zo hoog als Sil.

• Hoeveel keer zo ver kan Samir kijken?



13 Het bereik van een zendantenne voor mobiele telefonie hangt af van de hoogte van de zendantenne. Bij benadering geldt dat het bereik R in km afhangt van de hoogte h in meters volgens de formule $R = 3,6 \cdot \sqrt{h + 0,8}$.

- Hoe groot is het zendbereik als de zender op de grond zou staan?
- Een zendantenne heeft een hoogte van 12 meter en wordt 3 meter hoger gemaakt.
Met hoeveel km neemt het bereik toe?
- Welke vergelijking moet je oplossen om te berekenen bij welke hoogte het zendbereik gelijk is aan 18 km?
- Welke waarde heeft $\sqrt{h + 0,8}$ bij $R = 18$?
- En welke waarde heeft $h + 0,8$ bij $R = 18$?
- Hoe hoog is een zendmast met een bereik van 18 km?
- Bereken h bij $R = 36$.

14 Gegeven is de formule $p = \sqrt{2q - 5}$.

- Bereken q bij $p = 3$.
- Welke waarde heeft q bij $p = 6$?
- Op het blaadje is een begin gemaakt bij het herleiden van de formule $p = \sqrt{2q - 5}$ zodat q wordt uitgedrukt in p .
Omschrijf wat er in de stappen 1, 2 en 3 is gebeurd.
- Maak deze herleiding verder af.
- Controleer je antwoorden van de opdrachten a en b met de formule die je bij opdracht d hebt gevonden.

	$p = \sqrt{2q - 5}$			
	$p^2 = 2q - 5$			1
	$2q - 5 = p^2$			2
	$2q = p^2 + \dots$			3
	$q = \dots$			

Theorie

Een formule waar een variabele onder het wortelteken voorkomt, heet een **wortelformule**.

Een wortelformule herleid je door links en rechts van het gelijkteken dezelfde bewerking uit te voeren.

Je gebruikt de regel:

Uit $\sqrt{A} = B$ volgt $A = B^2$ (voor $B \geq 0$).

Je kunt bij het herleiden van wortelformules dezelfde technieken gebruiken als bij het oplossen van wortelvergelijkingen.

Voorbeeld 1

Herleid $b = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a+1}$ waarbij je a uitdrukt in b .

Oplossing

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{a+1} = b \quad \text{links en rechts verwisseld}$$

$$\sqrt{a+1} = 2b \quad \text{links en rechts} \times 2$$

$$a+1 = (2b)^2 \quad \text{links en rechts gekwadrateerd}$$

$$a+1 = 4b^2 \quad \text{haakjes weggewerkt}$$

$$a = 4b^2 - 1 \quad \text{links en rechts} - 1$$

Voorbeeld 2

Herleid $2 \cdot \sqrt{p-8} - 1 = 2q$ tot de vorm $p = a \cdot q^2 + b \cdot q + c$.

Oplossing

$$2 \cdot \sqrt{p-8} = 2q + 1 \quad \text{links en rechts} + 1$$

$$4(p-8) = (2q+1)^2 \quad \text{links en rechts gekwadrateerd}$$

$$4p - 32 = 4q^2 + 4q + 1 \quad \text{haakjes weggewerkt}$$

$$4p = 4q^2 + 4q + 33 \quad \text{haakjes en rechts} + 32$$

$$p = q^2 + q + 8\frac{1}{4} \quad \text{links en rechts} : 4$$

Ondersteunende route → maak opdracht 015

15 Herleid de formules waarbij je p uitdrukt in q .

H

a $q = \sqrt{3p+1}$

d $q = 2 + \sqrt{p-1}$

b $q = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{p+3}$

e $q = \sqrt{2p-6} + 1$

c $q = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2p+5}$

f $q = 3 \cdot \sqrt{p+2} - 3$

16 a Laat zien dat uit $\sqrt{2p+q} = 3q-1$ volgt $p = 4\frac{1}{2}q^2 - 3\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}$.

b Laat zien dat uit $q + 2\sqrt{1-p} = 6$ volgt $p = -\frac{1}{4}q^2 + 3q - 8$.

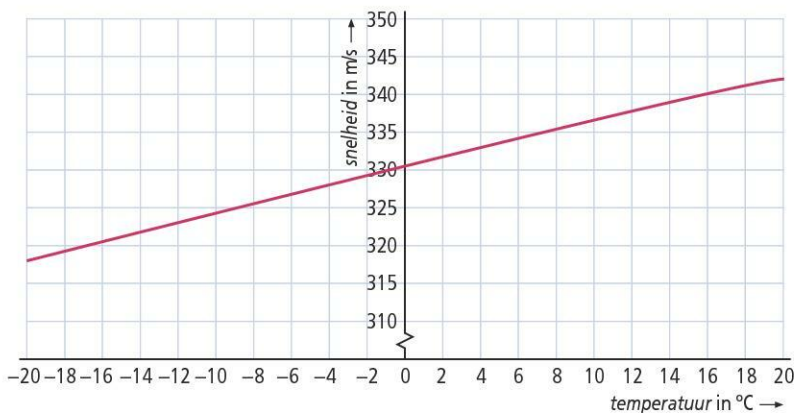
- 17** De waterhoogte in een reservoir dat wordt gevuld met water kun je beschrijven met de formule $H = \sqrt{0,25t^2 + 100}$.

Hierin is H de waterhoogte in cm en t de tijd in minuten.

- Hoe hoog staat het water op $t = 0$?
- Na hoeveel minuten is de waterhoogte 40 cm?
- Laat zien dat je de formule $H = \sqrt{0,25t^2 + 100}$ kunt herleiden tot $H = 0,5 \cdot \sqrt{t^2 + 400}$.
- Geef een formule waarbij je t uitdrukt in H .
- Het reservoir heeft een hoogte van 1,5 meter. Hoe lang duurt het vullen van het reservoir?
- Hoelang duurt het voordat de waterhoogte van 50 cm naar 60 cm is gestegen? Rond af op hele minuten.

Vergelijkingen kun je ook oplossen met je rekenmachine.

- 18** Voor de snelheid van het geluid door de lucht geldt bij benadering de formule $v = 20 \cdot \sqrt{273 + t}$. Hierin is v de snelheid van het geluid in meter per seconde en is t de luchttemperatuur in $^{\circ}\text{C}$.
- Bereken de snelheid van het geluid bij de luchttemperatuur van 16°C .
 - Bij welke temperatuur is de snelheid van het geluid 335 meter per seconde?
 - Herleid de formule zodat t wordt uitgedrukt in v .



- De grafiek hoort bij de formule $v = 20 \cdot \sqrt{273 + t}$ voor $-20 \leq t \leq 20$. De grafiek is vrijwel een rechte lijn. Benader de formule $v = 20 \cdot \sqrt{273 + t}$ door een formule van de vorm $v = a \cdot t + b$. Bereken a en b in één decimaal.
- Bereken het verschil van v tussen de formules bij $t = 10$.

Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

- 015** Gegeven is de formule $\sqrt{b-a} = 5 + a$. Samira heeft een begin gemaakt met een herleiding zodat b wordt uitgedrukt in a .
- Omschrijf wat er in de stappen 1 tot en met 3 is gebeurd.
 - Maak de herleiding van Samira af.

	Samira		Sonja
●	$\sqrt{b-a} = a + 5$	●	$2 = -1(a - \sqrt{b})$
●	$b - a = (a + 5)^2$	1	$2 = -a + \sqrt{b}$
●	$b - a = a^2 + \dots + \dots$	2	$-a + \sqrt{b} = 2$
●	$b = \dots$	3	$\sqrt{b} = a + 2$

- Sonja heeft een begin gemaakt met de herleiding van $2 = -1(a - \sqrt{b})$.
Omschrijf welke stappen ze heeft gemaakt.
- Laat zien dat $2 = -1(a - \sqrt{b})$ te herleiden is tot $b = a^2 + 4a + 4$.

Herleid de formules waarbij je b uitdrukt in a .

- | | |
|--|---|
| e $a = \sqrt{b+3}$ | h $a - 5 = \sqrt{4b+3}$ |
| f $a = \sqrt{b-7}$ | i $a = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{b+1}$ |
| g $a = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3b-1}$ | j $\sqrt{2b+1} = -2a$ |

Uitdagende opdrachten

- U3** In opdracht 18 wordt voor de snelheid van het geluid de formule $v = 20 \cdot \sqrt{273 + t}$ gebruikt. Hierin is v in meter per seconde en t de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$.

Voor de snelheid van geluid wordt ook wel de formule

$$v = 331 \cdot \sqrt{1 + \frac{t}{273}}$$

gebruikt.

Laat zien hoe je de formule $v = 331 \cdot \sqrt{1 + \frac{t}{273}}$ kunt herleiden tot $v = 20 \cdot \sqrt{273 + t}$.

9.4 Machtsformules

Je leert • hoe je een machtsformule herleidt

Leerroutes • ondersteunend: 19—020—20—021—22
 • doorlopend: 19—20—21—22—23
 • uitdagend: 19—21—22—23—U3

De inhoud van een bol met straal r kun je berekenen met de formule $I = 4,19 \cdot r^3$.
 De formule voor de oppervlakte van een bol is $A = 12,56 \cdot r^2$.
 De oppervlakte van de planeet Mars is ongeveer twee keer zo groot als de oppervlakte van de planeet Mercurius.
 • Is de inhoud van Mars ook twee keer zo groot als de inhoud van Mercurius?



- 19** De levensverwachting L van een zoogdier hangt af van zijn gewicht G . Voor het verband tussen L en G geldt $L = 11,75 \cdot G^{0,2}$ met L in jaren en G in kg.
- Bereken de levensverwachting van een olifant van 4000 kg.
 - Ga na dat deze formule niet voor mensen geldt.
 - Met welke vergelijking kun je het gewicht berekenen van een zoogdier met een levensverwachting van 40 jaar?
 - Op het blaadje zie je hoe je de vergelijking van opdracht c kunt oplossen.
Leg uit wat er in elke stap is gebeurt.
 - Bereken het gewicht als de levensverwachting 80 jaar is.
 - Herleid de formule $L = 11,75 \cdot G^{0,2}$ tot $G = 0,000\,004\,5 \cdot L^5$.
 - Bereken het gewicht als de levensverwachting 60 jaar is.

●	$11,75 \cdot G^{0,2} = 40$		
●	$G^{0,2} \approx 3,404$		1
●	$G \approx 3,404^{\frac{1}{0,2}}$		2
●	$G \approx 457$		3

Theorie

Bij het herleiden van formules van de vorm $y = c \cdot x^a$ gebruik je de rekenregels voor machten.
 In de formule $A = 4 \cdot s^{1,6}$ is A uitgedrukt in s .
 Met behulp van de regel $x^a = c$ geeft $x = c^{\frac{1}{a}}$ kun je de formule herleiden naar een formule waarmee je s uitdrukt in A .

$$\begin{aligned}
 g^p \cdot g^q &= g^{p+q} & g^{-n} &= \frac{1}{g^n} \\
 \frac{g^p}{g^q} &= g^{p-q} & \frac{1}{g^n} &= \sqrt[n]{g} \\
 (g^p)^q &= g^{p \cdot q} & (a \cdot b)^p &= a^p \cdot b^p
 \end{aligned}$$

Voorbeeld 1

Schrijf $K = \frac{4x^2}{\frac{1}{2}x^{0,4}}$ in de vorm $K = b \cdot x^a$.

Oplossing

$$K = \frac{8x^2}{x^{0,4}} \quad \text{teller en noemer} \times 2$$

$$K = 8x^{2-0,4} \quad \text{rekenregel } \frac{g^q}{g^q} = g^{p-q}$$

$$K = 8x^{1,6}$$

Voorbeeld 2

Herleid $A = 4 \cdot s^{1,6}$ waarbij je s uitdrukt in A .

Oplossing

$$4 \cdot s^{1,6} = A \quad \text{links en rechts verwisseld}$$

$$s^{1,6} = \frac{1}{4} \cdot A \quad \text{links en rechts : 4}$$

$$(s^{1,6})^{\frac{1}{1,6}} = \left(\frac{1}{4} \cdot A\right)^{\frac{1}{1,6}} \quad \text{links en recht tot de macht } \frac{1}{1,6}$$

$$s = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{1,6}} \cdot A^{\frac{1}{1,6}} \quad \text{rekenregel } (a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$$

$$s \approx 0,42 \cdot A^{0,625}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 020

20 Herleid de formules tot de vorm $K = b \cdot x^a$.

H

a $K = 3x^{-0,6} \cdot 2x^{1,3}$

d $K = \frac{1}{2}x \cdot \sqrt[3]{x} \cdot 2 \cdot \sqrt{x}$

b $K = \frac{1}{4x^3}$

e $K = \frac{x^3}{2x^{-3}}$

c $K = 8x^{1,2} \cdot 2x^{2,3} \cdot x$

f $K = (2x^2 \cdot \sqrt{x})^3$

Ondersteunende route → maak opdracht 021

21 Herleid de formules tot de vorm $p = c \cdot Q^a$. Rond a en c zo nodig af op twee decimalen.

H

a $Q = 8p^3$

d $Q \cdot p^{-3} = 5 \cdot p^{-2}$

b $Q = \frac{2,5}{p^2}$

e $\frac{1}{4} \cdot \sqrt{p} = p^2 \cdot Q$

c $\frac{2p}{Q} = 3p^4$

f $Q = \frac{7p^{-3} \cdot 4p^4}{2p^2}$

22

H

In het algemeen geldt: hoe groter een gebied, des te meer diersoorten er leven. Voor vogels in Noord-Amerika is het verband tussen de oppervlakte A in vierkante mijl en het aantal daar levende vogelsoorten S bij benadering een machtsformule $S = k \cdot A^n$.

A	1	2	3	4	5
S	40,0	44,9	48,0	50,4	52,3

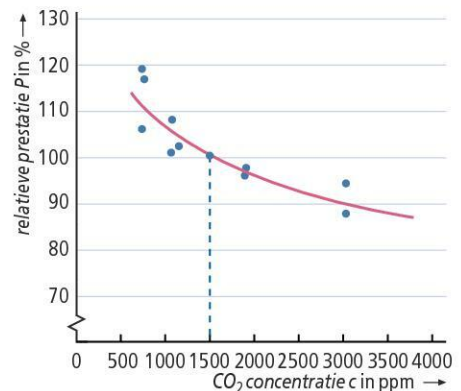
- Bij $A = 1$ hoort $S = 40$.
Gebruik deze waarden om k te berekenen.
- Bereken de waarde van n met behulp van andere waarden van A en S en geef de formule.
- Geef ook een formule waarbij A wordt uitgedrukt in S .
- Yellowstone National Park is ongeveer tien keer zo groot als Zion National Park.
Onderzoek hoeveel keer zoveel vogelsoorten je in Yellowstone als in Zion mag verwachten.



23

Uit onderzoek is gebleken dat een verhoogde CO_2 -concentratie in een klaslokaal de leerprestaties van leerlingen negatief beïnvloedt. De relatieve prestatie P wordt bij een concentratie c van 1500 ppm gesteld op 100%. Als de concentratie kleiner is, dan is de relatieve prestatie groter dan 100%. In de figuur is de grafiek van $P = a \cdot c^{-0,159}$ getekend, waarbij a een constante is. Deze grafiek past redelijk bij de meetgegevens van de verschillende onderzoeken. Door de waarde van a te bepalen is het mogelijk om met behulp van de formule te onderzoeken vanaf welke CO_2 -concentratie de relatieve prestatie onder de 80% uitkomt.

- Toon aan dat a ongeveer gelijk is aan 320 en bereken met de formule vanaf welke CO_2 -concentratie de relatieve prestatie onder de 80% uitkomt.
- Schrijf de formule $P = a \cdot c^{-0,159}$ als een gebroken formule en beredeneer daarmee dat de grafiek dalend is.
(Ontleend aan CE vwo wiskunde C 2013 2e tijdvak)



Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten

020 Je gaat in deze opdracht de formule $A = \frac{8x^2 \cdot \sqrt[4]{x}}{(2x^{1,5})^2}$ herleiden

tot de vorm $A = b \cdot x^a$.

- Schrijf $\sqrt[4]{x}$ als macht van x .
- Neem in de teller de machten van x samen door de exponenten op te tellen.
- Vul in: de noemer $(2x^{1,5})^2$ is gelijk aan $2^2 \cdot (x^{1,5})^2$ en dus gelijk aan $\dots x^{\dots}$.
- Ga na dat je de formule nu geschreven hebt als

$$A = \frac{8x^{2\frac{1}{4}}}{4x^3} \text{ en gebruik de rekenregel } \frac{g^a}{g^b} = g^{a-b} \text{ om de}$$

formule te herleiden tot de vorm $A = b \cdot x^a$.

021 Op het blaadje is een begin gemaakt met de herleiding van de formule $P = 2 \cdot Q^{2,5}$ tot de vorm $Q = a \cdot P^b$.

- Leg uit wat er in stap 1 tot en met stap 3 is gebeurd.
- In stap 4 is de rekenregel $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$ gebruikt. Maak de herleiding tot de vorm $Q = a \cdot P^b$ verder af. Rond a af op twee decimalen.

Herleid de formules tot de vorm $Q = a \cdot P^b$. Rond a en b zo nodig af op twee decimalen.

- | | |
|-------------------------------------|---|
| c $P = Q^{\frac{1}{4}}$ | f $3P^{1,5} = P^2 \cdot \frac{3}{5} \cdot Q^{\frac{1}{5}}$ |
| d $P = 5Q^{-\frac{1}{2}}$ | g $P = 0,72 \cdot Q^{-1,4}$ |
| e $\frac{P}{0,2} = 5Q^{0,4}$ | h $P = \frac{12Q^{1,8} \cdot Q^{-5}}{2Q^{0,8}}$ |

●	$P = 2 \cdot Q^{2,5}$				
●	$2 \cdot Q^{2,5} = P$				1
●	$Q^{2,5} = 0,5 \cdot P$				2
●	$Q = (0,5 \cdot P)^{\frac{1}{2,5}}$				3
●	$Q = 0,5^{\frac{1}{2,5}} \cdot P^{\frac{1}{2,5}}$				4
●	$Q = \dots \cdot P^{\dots}$				5

Uitdagende opdrachten

- U4** Een groenteboer verpakt kostbare groente en fruit in piramidevormige doosjes. De oppervlakte A in cm^2 van deze doosjes kun je berekenen met de formule $A = 2,73 \cdot r^2$ waarbij r de lengte van de ribben in cm is. De inhoud I in cm^3 van de doosjes kun je berekenen met de formule $I = 0,236 \cdot r^3$. Hoeveel keer zo groot wordt de oppervlakte als de inhoud n keer zo groot wordt?



9.5 Substituties

Je leert

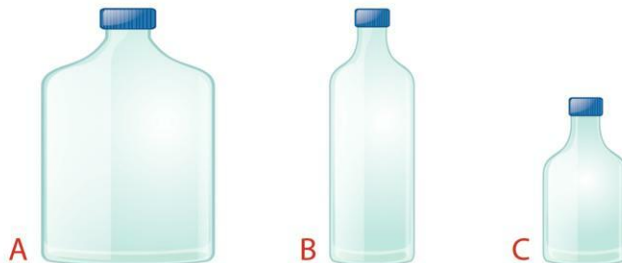
- hoe je in een formule een variabele vervangt door een andere formule

Leerroutes

- ondersteunend: 24—025—26—27—28—29
- doorlopend: 24—25—26—27—28—29
- uitdagend: 24—25—26—28—29—U5

De inhoud van fles A kun je berekenen met de formule $V = 0,78 \cdot h \cdot d^2$. Hierin is V het volume in cm^3 , h de hoogte in cm en d de diameter in cm. Fles B heeft dezelfde hoogte maar de diameter is de helft van fles A. Van fles C is de diameter en de hoogte de helft van fles A.

- Hoe verhouden de inhouds van de flessen zich tot elkaar?



- 24** Een formule om het ideale lichaamsgewicht te berekenen is die van Hamwi. Volgens deze formule is het ideale lichaamsgewicht G voor vrouwen $G = 45,4 + 0,89L$. Daarbij is G het gewicht in kg. De waarde van L bereken je met de formule $L = l - 152$. In deze formule is l de lichaamslengte in cm.

- Bereken het ideale gewicht voor een vrouw met lengte 176 cm.
- In de formule $G = 45,4 + 0,89L$ is G uitgedrukt in L . In de formule $L = l - 152$ is L uitgedrukt in l . Om G uit te drukken in l moet je L in de formule $G = 45,4 + 0,89L$ vervangen door $l - 152$. Op het blaadje is daarmee een begin gemaakt. Maak de berekening af.
- Wat is het voordeel van de formule die je bij opdracht b hebt gevonden?

●	$G = 45,5 + 0,89L$	
●		$L = l - 152$
●	$G = 45,5 + 0,89(l - 152)$	
●	$G = 45,4 + \dots l - \dots$	
●	$G = \dots + \dots l$	

Theorie

In een formule kun je een variabele vervangen door een uitdrukking met een andere variabele. Je noemt dit **substitueren**.

Bij het substitueren gebruik je haakjes. Daarna werk je de haakjes weg en vereenvoudig je, indien mogelijk, de ontstane formule.

Voorbeeld 1

Substitueer $t = -7x + 1$ in $y = 4t + 8$ en vereenvoudig het resultaat.

Oplossing

$$\begin{array}{ll} y = 4(-7x + 1) + 8 & \text{substitueren} \\ y = -28x + 4 + 8 & \text{haakjes wegwerken} \\ y = -28x + 12 & \text{vereenvoudigen} \end{array}$$

Voorbeeld 2

Substitueer $t = \frac{1}{2}x - 4$ in $y = 8t^2 - 4t$ en vereenvoudig het resultaat.

Oplossing

$$\begin{array}{ll} y = 8\left(\frac{1}{2}x - 4\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}x - 4\right) & \text{substitueren} \\ y = 2x^2 + 32x + 128 - 2x + 16 & \text{haakjes wegwerken} \\ y = 2x^2 + 30x + 144 & \text{vereenvoudigen} \end{array}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 025

- 25** Substitueer formule B in formule A en vereenvoudig het resultaat.

H

- a** A: $y = 3t + 14$ en B: $t = 5x - 6$
 - b** A: $y = -5t + 89$ en B: $t = 19x + 18$
 - c** A: $y = 8t^2 + 10$ en B: $x + \frac{1}{2}t = 1$
 - d** A: $y = 6 - 3t$ en B: $x^2 = t - 4$
- 26**
- a** Substitueer $t = 2x - 6$ in de formule $y = 2t^2 + 8t$ en vereenvoudig het resultaat.
 - b** De substitutie $t = a \cdot x + 1$ in de formule $y = t^2 + 2t$ heeft na herleiden als resultaat $y = 9x^2 + 12x + 3$. Onderzoek welke waarde a heeft.

- 27** Gegeven is de formule $K = \frac{12B - 45}{2C + 12}$

- a** Substitueer $C = 4$ en druk K uit in B .
- b** Substitueer $K = 1$ en druk C uit in B .
- c** Substitueer $K = 9$ en druk B uit in C .
- d** Neem $K = B$ en druk C uit in B .

- 28** Bij het leegpompen van een vol vat water geldt voor de hoogte van het water de formule $h = 100 - 0,4V$. Hierin is h de hoogte van het water in het vat in cm en is V het volume van het weggepompte water in liters.

H

- Hoeveel water zit er in een vol vat?
- Er is een verband tussen de tijd t in minuten en het volume V van het weggestroomde water. De formule bij dit verband is $V = \sqrt{2500t}$.
Op $t = 0$ wordt er gestart met pompen.
Combineer de formules voor h en V tot een formule waarbij h wordt uitgedrukt in t .
- Bereken na hoeveel minuten de hoogte van het water 40 cm is. Hoeveel liter water is dan uit het vat weggepompt?
- Bereken na hoeveel minuten het vat leeg is.



- 29** Voor een bepaald type windmolen geldt de formule $P = 0,4 \cdot v^3 \cdot h^{0,75}$. Hierin is P het afgegeven elektrische vermogen in watt, v de windsnelheid in meter per seconde op één meter hoogte boven de grond en h de hoogte van de as van de rotorbladen in meters.

- De as van de rotorbladen zit 20 meter boven de grond. Hoe groot is het vermogen van deze windmolen bij $v = 6$?
- Met hoeveel procent neemt het vermogen van deze windmolen toe als de as twee keer zo hoog boven de grond wordt geplaatst?
- Geef een formule waarbij P is uitgedrukt in v voor een windmolen met de as op een hoogte van 20 meter.
- Om te bereken met hoeveel procent het vermogen toeneemt als de windsnelheid met 10% toeneemt, kun je in de formule v vervangen door $1,1 \cdot v$. Maak de berekening op het blaadje verder af.
- Met hoeveel procent neemt het vermogen toe?
- Bereken op dezelfde manier met hoeveel procent P toeneemt als v met 50% toeneemt.

●	$P = 3,78 \cdot v^3$
●	$P = 3,78 \cdot (1,1 \cdot v)^3$
●	$P = 3,78 \cdot 1,1^3 \cdot v^3$
●	$P = \dots \cdot v^3$

Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

025 Ali substitueert de formule $p = 2 - 5w$ in de formule $K = 1 - 2p$. Daarvoor vervangt hij de variabele p door $2 - 5w$.

- Waarom is het nodig om bij stap 1 haakjes te gebruiken?
- Leg uit wat er bij stap 2 is gebeurd.
- Maak de herleiding van Ali verder af.

	Ali
$K = 1 - 2p$ en $p = 2 - 5w$	
$K = 1 - 2(2 - 5w)$	1
$K = 1 - 4 + 10w$	2

	Ronnie
$K = 3p^2 + p - 5$ en $p = 2w - 5$	
$K = 3(2w - 5)^2 + (2w - 5) - 5$	1
$K = \dots$	2

- Welke substitutie heeft Ronnie gedaan?
- Laat zien dat je de formule van Ronnie kunt herleiden tot $K = 12w^2 - 58w + 65$.

Substitueer formule B in formule A en vereenvoudig het resultaat.

- A: $b = 4t - 13$ en B: $t = -3p$
- A: $b = -3t^2 + 9$ en B: $t = 2p - 8$
- A: $b = 2 - 5t$ en B: $t = 5p^2 - p$

Uitdagende opdrachten

- U5**
- Gegeven zijn de formules $A = 3b^{0,4}$ en $b = \frac{5}{t}$.
Geef een formule waarbij t uitgedrukt is in A .
 - Gegeven zijn de formules $y = \frac{6}{3x - 6}$ en $3x - 4y = 1$.
Toon aan dat voor de y -coördinaten van de snijpunten van de bijbehorende grafieken moet gelden dat $4y^2 - 5y - 6 = 0$.
 - De substitutie $t = ax + b$ in de formule $y = 4 - 2t + t^2$ heeft na herleiden als resultaat $y = 9x^2 + 18x + 12$.
Onderzoek welke waarden a en b hebben.

9.6 Gemengde opdrachten

- 30** Substitueer formule B in formule A en vereenvoudig het resultaat.
- a $A: Q = -3 - 9w$ en $B: w = \frac{1}{2}p - 1$
- b $A: Q = w^2 - 3w$ en $B: w = 5 - p$
- 31** Herleid de formules waarbij je a uitdrukt in b .
- a $2a + 3b = 12$
- b $b = -\frac{1}{2}a - 7$
- c $8 + \frac{6}{b} = 7a - 6$
- d $b = 3 \cdot a^{\frac{1}{2}}$
- e $b = 2\sqrt{3a + 2} - 10$
- f $\frac{12}{a + 5} = \frac{5}{b + 6}$
- 32** Sylvia woont 10 km van school. Zij fietst elke schooldag heen en terug. Als er geen wind is, is haar snelheid constant 20 km per uur. Haar totale reistijd is dan 1 uur. Meestal waait het echter. Veronderstel dat Sylvia altijd wind mee heeft op de heenweg en wind tegen op de terugweg en dat de wind de hele dag constant is. Dan is Sylvia's snelheid op de heenweg $20 + w$ km per uur en op de terugweg $20 - w$ km per uur. Hierbij is w de windsnelheid in km per uur en er geldt $0 \leq w \leq 20$.
- a Op een dag is $w = 5$.
Bereken hoeveel minuten haar totale reistijd die dag langer is dan 1 uur.
- b De reistijd voor de heenweg is $\frac{10}{20 + w}$ uur en voor de terugweg $\frac{10}{20 - w}$ uur.
Laat zien dat Sylvia's totale reistijd T in uren wordt gegeven door de formule $T = \frac{400}{400 - w^2}$
- c Bereken w als de totale reistijd 1 uur en 20 minuten is.
- d Beredeneer met de formule voor T , zonder te rekenen, dat haar totale reistijd op een dag met wind groter is dan op een dag zonder wind.
- e Laat zien dat $T = \frac{400}{400 - w^2}$ te herleiden is tot
$$w = 20 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{T}}$$





- 33** Elk jaar wordt er onderzoek gedaan naar het verband tussen de schelpenlengte en het gewicht van het vlees van de gewone mossel in de Waddenzee. Hiervoor worden van een groot aantal van deze mosselen de schelpenlengte en het gewicht van het vlees gemeten. De resultaten voor het jaar 2006 zijn in de tabel weergegeven.

L in mm	30	40	50	60	70
W in grammen	0,12	0,28	0,55	0,95	1,51

Bij de tabel hoort een formule van de vorm $W = a \cdot L^b$.
Bereken a en b .

(Ontleend aan CE havo wiskunde B pilot 2011 2e tijdvak)

- 34** In de bosbouw wordt voor veel bomen de te verwachten hoogte berekend met de formule van Chapman-Richards:

$$h = a(1 - b^t)^c.$$

Hierin is h de hoogte van de boom in meters en t de leeftijd in jaren. De waarde van de getallen a , b en c hangen af van de soort boom. In de tabel zijn deze waarden voor twee boomsoorten weergegeven.

boom	a	b	c
zomereik	39,143	0,9867	0,966 67
Amerikaanse eik	29,026	0,9790	0,808 20

Pas na een groot aantal jaren is de zomereik groter dan de Amerikaanse eik.

Onderzoek na hoeveel jaren dit volgens deze formule voor het eerst het geval is.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde C 2010 1e tijdvak)

Vaardigheid

Je kunt een lineaire formule herleiden.

De formule $5k + 2p = 10$ wordt ook wel een vergelijking van een lijn genoemd. De vergelijking is te herleiden tot de formule $p = -2\frac{1}{2}k + 5$. In deze formule is p uitgedrukt in k .

Bij het herleiden gebruik je, net als bij het oplossen van vergelijkingen, de balansmethode.

Voorbeeld

Herleid $2(4p - 5) = p - 2q$ waarbij je q uitdrukt in p .

Oplossing

$8p - 10 = p - 2q$	haakjes weggewerkt
$p - 2q = 8p - 10$	links en rechts verwisseld
$-2q = 7p - 10$	links en rechts $-p$
$q = -3\frac{1}{2}p + 5$	links en rechts $: -2$

S1 Herleid de formules waarbij je k uitdrukt in b .

a $8k + 5b = -17$

b $7b - 2k = 0$

c $6(k + 1) - 2b = -2(3 - \frac{1}{2}k)$

Vaardigheid

Je kunt een gebroken formule herleiden.

Een formule heet een gebroken formule als er een variabele in een noemer voorkomt. Een gebroken formule kun je herleiden en vereenvoudigen. Daarbij kun je gebruik maken van:

- $\frac{A + B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C}$
- $A \cdot \frac{B}{C} = \frac{A \cdot B}{C}$
- Uit $\frac{A}{B} = C$ volgt $A = B \cdot C$ en dus ook $\frac{A}{C} = B$.
- Uit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ volgt $A \cdot D = B \cdot C$.

Voorbeeld

Herleid $\frac{3}{x} = \frac{7}{y+5}$ waarbij je y uitdrukt in x .

Oplossing

$$3(y+5) = 7 \cdot x$$

$$3y + 15 = 7x$$

$$3y = 7x - 15$$

$$y = 2\frac{1}{3}x - 5$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \text{ dus } A \cdot D = B \cdot C$$

haakjes weggewerkt

links en rechts $- 15$

links en rechts $: 3$

S2 Herleid de vergelijkingen waarbij je p uitdrukt in q .

a $\frac{3}{q} = \frac{1}{p+5}$

b $\frac{3}{p} = 2q + 5$

c $4q = \frac{p-15}{\frac{1}{2}} + 3q$

Vaardigheid

Je kunt een wortelformule herleiden.

Een formule waar een variabele onder het wortelteken voorkomt, heet een wortelformule.

Een wortelformule herleid je door links en rechts van het gelijktteken dezelfde bewerking uit te voeren.

Je gebruikt de regel:

Uit $\sqrt{A} = B$ volgt $A = B^2$ (voor $B \geq 0$).

Voorbeeld

Herleid $\sqrt{4y+1} - x - 1 = 0$ waarbij je y uitdrukt in x .

Oplossing

$$\sqrt{4y+1} = x + 1$$

$$4y + 1 = (x + 1)^2$$

$$4y + 1 = x^2 + 2x + 1$$

$$4y = x^2 + 2x$$

$$y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$$

links en rechts $+ x + 1$

links en rechts gekwadraterd

haakjes weggewerkt

links en rechts $- 1$

links en rechts $: 4$

S3 Herleid de formules waarbij je p uitdrukt in q .

a $q = \sqrt{p+1}$

b $q = 0,1 \cdot \sqrt{2p+1}$

c $q = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{p+5} - 2$

d $q+2 = \sqrt{5p-6}$

Vaardigheid

Je kunt een machtsformule herleiden.

Bij het herleiden van formules van de vorm $y = c \cdot x^a$ gebruik je de rekenregels voor machten.

In de formule $K = 0,2 \cdot q^{2,5}$ is K uitgedrukt in q .

Met behulp van de regel $x^a = c$ geeft $x = c^{\frac{1}{a}}$ kun je de formule herleiden naar een formule waarmee je q uitdrukt in K .

Voorbeeld

Herleid $Q = 2 \cdot P^{1,25}$ waarbij je P uitdrukt in Q .

Oplossing

$$2 \cdot P^{1,25} = Q$$

links en rechts verwisseld

$$P^{1,25} = \frac{1}{2} \cdot Q$$

links en rechts : 2

$$P = \left(\frac{1}{2} \cdot Q\right)^{\frac{1}{1,25}}$$

rekenregel $x^a = c$ geeft $x = c^{\frac{1}{a}}$

$$P = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1,25}} \cdot Q^{\frac{1}{1,25}}$$

rekenregel $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$

$$P \approx 0,57 \cdot Q^{0,8}$$

S4 Herleid de formules tot de vorm $a = c \cdot K^b$. Rond b en c zo nodig af op twee decimalen.

a $0,5K = 2,5a^5$

b $2a \cdot \sqrt{a} = a^3 \cdot \frac{2}{5} K$

Vaardigheid

Je kunt in een formule een variabele vervangen door een andere formule.

In een formule kun je een variabele vervangen door een uitdrukking met een andere variabele. Je noemt dit substitueren. Bij het substitueren gebruik je haakjes. Daarna werk je de haakjes weg en vereenvoudig je, indien mogelijk, de ontstane formule.

Voorbeeld

Substitueer $x = 1 + 4t$ in $u = x^2 + x - 3$ en vereenvoudig het resultaat.

Oplossing

$u = (1 + 4t)^2 + (1 + 4t) - 3$	substitutie $x = 1 + 4t$
$u = 1 + 8t + 16t^2 + 1 + 4t - 3$	haakjes weggewerkt
$u = 16t^2 + 12t - 1$	vereenvoudigd

S5 Substitueer formule B in formule A en vereenvoudig het resultaat.

a A: $S = t^2 - t$ en B: $t = a + 1$

b A: $S = \frac{2t}{t-7}$ en B: $t = 5 - 2a$

c A: $S = \sqrt{t+4}$ en B: $t = 1 - a^2$

T1 Herleid de formules waarbij je p uitdrukt in q .

a $\frac{4}{2 + p \cdot q} = 3$

c $q + 8 - \frac{1}{p + 6} = 0$

b $4 + \frac{3}{p} = q + 5$

d $2(q + 1) = 4p - 5$

T2 Herleid de formules tot de vorm $a = c \cdot K^b$. Rond b en c zo nodig af op twee decimalen.

a $K = 7a^3$

c $K = 3a^{-0,2}$

b $\frac{3a}{2K} = 6K^{6,2}$

d $K = \frac{7\sqrt[3]{a}}{2a}$

T3 Een voorwerp wordt opgehangen aan een slinger. De bekende 17e-eeuwse natuurkundige Christiaan Huygens

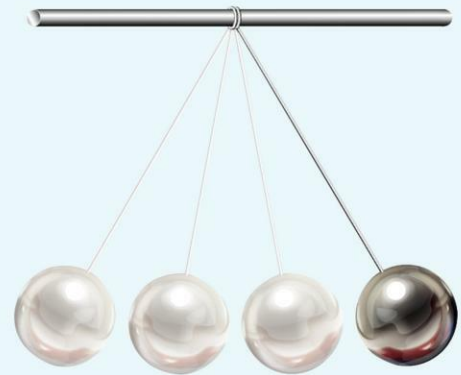
vond de beroemde formule $T = 6,28 \cdot \sqrt{\frac{l}{9,8}}$

Met deze formule wordt de tijd T die één slingerbeweging duurt (in seconden) uitgedrukt in de lengte l van de slinger (in meters).

a Herleid de formule tot de vorm $T = c \cdot \sqrt{l}$.

b Geef een formule waarbij l wordt uitgedrukt in T .

c Als je de slingertijd wilt verdubbelen, wat moet er dan met de lengte van de slinger gebeuren?



T4 Op een dag neemt de temperatuur in de atmosfeer tot op 10 kilometer hoogte lineair af volgens de formule $T = 15 - 6,5h$.

Hierin is T de temperatuur in graden Celsius en h de hoogte in kilometers.

a Op welke hoogte is de temperatuur gelijk aan -20°C ?

b Geef een formule waarbij je h uitdrukt in T .

c In de Verenigde Staten wordt de temperatuur uitgedrukt in graden Fahrenheit. Voor het omrekenen kun je de formule $F = 1,8T + 32$ gebruiken.

Hierin is F de temperatuur in graden Fahrenheit.

Geef een formule waarbij je de temperatuur F uitdrukt in de hoogte h .

- T5** Biologen hebben onderzocht of er een verband is tussen het aantal fruitvliegjes per dm^3 en de vruchtbaarheid van de fruitvliegjes. Het aantal fruitvliegjes per dm^3 is de dichtheid d . De vruchtbaarheid v is het aantal eitjes per vrouwtje.

In de tabel staan enkele resultaten van het onderzoek.

d	1	10	50	100	200	400	800
v	670	385	262	222	188	159	135

Volgens de onderzoekers is er een verband tussen d en v dat voldoet aan een formule van de vorm $v = c \cdot d^a$.

- Gebruik de waarden (1, 670) uit de tabel om de waarde van c te berekenen.
- Bereken de waarde van a met behulp van andere waarden voor d en v .
- Geef de formule waarbij je v uitdrukt in d .
- Hoe kun je aan de formule zien dat de vruchtbaarheid v afneemt als de dichtheid d toeneemt?
- Geef ook een formule waarbij je d uitdrukt in v .
- Hoeveel keer zo groot wordt d als v halveert?



- T6** Voor iedere gemeente is voor basisscholen een opheffingsnorm vastgesteld. Deze opheffingsnorm is gebaseerd op de leerlingendichtheid d . Dat is het aantal basisschoolleerlingen per km^2 in de gemeente. De opheffingsnorm N kan dan

$$\text{berekend worden met de formule } N = \frac{0,6d}{0,15 + 0,0027d}$$

- De gemeente Rijswijk heeft een oppervlakte van $14,5 \text{ km}^2$. In 2012 had de gemeente Rijswijk 3263 basisschoolleerlingen. Bereken voor 2012 de opheffingsnorm in Rijswijk.
- De gemeente Heerenveen heeft een oppervlakte van 180 km^2 .

Toon aan dat voor de gemeente Heerenveen de opheffingsnorm N bij het aantal basisschoolleerlingen a kan

$$\text{worden berekend met de formule } N = \frac{0,6 \cdot a}{27 + 0,0027 \cdot a}$$

- Toon aan dat je de opheffingsnorm N voor een gemeente met een oppervlakte van $P \text{ km}^2$ en a basisschoolleerlingen kunt berekenen met de formule $N = \frac{0,6a}{0,15P + 0,0027a}$

Je kunt een lineaire formule herleiden.

E1 Herleid de formules waarbij je n uitdrukt in k .

a $8k - 3n = 7$

d $6k - 6 = 4n + 3$

b $5n + 2k = 0$

e $10n - 4k = 6(k + 2)$

c $15k = 5n + 50$

f $5(n + 1) = -11k + 20$

Je kunt een gebroken formule herleiden.

E2 Herleid de vergelijkingen waarbij je p uitdrukt in q .

a $q + 2 = \frac{12}{p}$

b $\frac{q-1}{p} = -2$

c $\frac{3+q}{p} = \frac{5}{q}$

Je kunt een wortelformule herleiden.

E3 Herleid de formules waarbij je p uitdrukt in q .

a $q = \sqrt{p+1}$

c $q = 3 - 0,1\sqrt{p+5}$

b $q = 0,1\sqrt{2p+1}$

d $q + 2 = \sqrt{5p-6}$

Je kunt een machtsformule herleiden.

E4 Herleid de formules tot de vorm $p = c \cdot K^a$. Rond a en c zo nodig af op twee decimalen.

a $K = 4p^5$

b $K = 0,5p^{-2,5}$

c $6p^{0,25} \cdot \sqrt{p} = p^2 \cdot \frac{1}{3} K$

d $K = \frac{p^{-0,8} \cdot p^{1,8}}{2p^{0,2}}$

Je kunt in een formule een variabele vervangen door een andere formule.

E5 Substitueer formule B in formule A en vereenvoudig het resultaat.

a A: $u = 8 - 9t$ en B: $t = 3p + 1$

b A: $u = q^2 + 2q$ en B: $4p + 2q = 5$

c A: $u = 3a - a^2$ en B: $a = 1 - \sqrt{p}$

- E6** Het volume V van een bepaald model glas kun je berekenen met de formule $V = 0,26 \cdot D^2 \cdot h$.
Hierin is V het volume in cm^3 , h de hoogte in cm en D de diameter in cm.
- Geef een formule waarbij je de diameter D uitdrukt in de hoogte h en het volume V .
 - Glas A heeft hetzelfde volume als glas B. De diameter van glas A is de helft van de diameter van glas B.
Hoeveel keer zo hoog is glas A als glas B?
- E7** Koppelingsplaten van een motor bestaan uit twee ronde platen met een gat voor de as erin. Bij het schakelen worden de platen tegen elkaar aangezet en drijven daarmee de wielen aan. Daarvoor moet de oppervlakte van de platen groot genoeg zijn. Voor het verband tussen de straal r in cm en de oppervlakte A in cm^2 van de koppelingsplaat geldt de formule $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} + 9$.
- Een koppelingsplaat heeft een oppervlakte van 50 cm^2 .
Bereken hoe groot de straal is van deze koppelingsplaat.
 - Van een andere koppelingsplaat is de straal gelijk aan $6,23 \text{ cm}$.
Bereken hoe groot de oppervlakte van deze koppelingsplaat is.
 - Herleid de formule waarbij je A in r uitdrukt.
- E8** Bij een mens is de huidoppervlakte onder andere afhankelijk van het gewicht en de lengte. De huidoppervlakte kun je benaderen met de formule $H = 0,006\,681 \cdot G^{0,425} \cdot L^{0,725}$.
Hierin is H de huidoppervlakte in m^2 , G het gewicht in kilogrammen en L de lengte in centimeters.
- Bereken met behulp van de formule het gewicht van iemand die 160 cm lang is en een huidoppervlakte heeft van $1,5 \text{ m}^2$.
 - Voor iemand met een lengte van 180 cm kun je een formule afleiden met de vorm $H = c \cdot G^{0,425}$.
Bereken c en rond af op twee decimalen.
 - Geef een formule waarmee je voor mensen met een lengte van 180 cm het gewicht G uitdrukt in H .
 - Een man en een vrouw hebben dezelfde huidoppervlakte. De vrouw is 180 cm lang en weegt 75 kg . De man is slechts 150 cm lang.
Bereken het gewicht van de man.
 - Iemand is na een vermageringskuur 20% van zijn gewicht kwijtgeraakt.
Met welk percentage is zijn huidoppervlakte verminderd?



SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In hoofdstuk 3 heb je gezien dat er verschillende manieren zijn om statistische gegevens te verwerken. Je hebt geleerd hoe je op zoek kunt gaan naar verschillen tussen groepen en variabelen.

In dit hoofdstuk leer je meer over een veel voorkomende vorm van een verdeling, de zogenaamde normale verdeling. Bij deze verdeling horen vuistregels. Met deze vuistregels kun je berekenen hoeveel procent van een populatie aan een bepaalde eigenschap voldoet.

Aan de hand van de resultaten van een steekproef kun je uitspraken doen over de populatie.

In hoofdstuk 11 zie je hoe de normale verdeling een rol speelt bij de kansrekening.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Probleem oplossen en analytisch denken*
- *Ordenen en structureren*
- *Abstraheren*

opdracht 36
opdracht 15
opdracht 19



- V1** De dataset geeft informatie over het weer in de Bilt in 2013.
-  **a** Waarom heeft het geen zin het gemiddelde te berekenen bij de variabele *dag van de maand*?
- b** Beantwoord de volgende vragen. Sorteert daarvoor de variabelen.
- A Op welke dag is de laagste gemiddelde temperatuur gemeten?
 - B Werd op die dag ook de laagste maximale temperatuur gemeten?
 - C Op welke dag was het verschil in maximum en minimum temperatuur het grootst?
- c** Zoek uit voor welke gemiddelde dagtemperatuur geldt dat de helft de dagen van 2013, de gemiddelde dagtemperaturen niet hoger was dan dit gemiddelde.

Theorie

Statistische variabelen kun je verdelen in **kwantitatieve** en **kwalitatieve** variabelen. De waarde van een kwantitatieve variabele is een getal, die van een kwalitatieve variabele geeft een kenmerk weer en hoeft niet in een getal te zijn uitgedrukt. Frequenties kun je **absoluut** of **relatief** weergeven. De **absolute frequentie** is het getelde aantal, de **relatieve frequentie** is de verhouding van het getelde aantal tot het totaal. Deze kan worden weergegeven als een getal tussen 0 en 1 of als een percentage. De waarneming met de grootste frequentie heet de **modus**. Van een rij waarnemingen die op volgorde staan van klein naar groot heet de middelste waarneming de **mediaan**. Modus, mediaan en **gemiddelde** heten **centrummaten**.

Voorbeeld

In de tabel staat het aantal huisdieren van de 23 leerlingen uit klas 4B.

<i>huisdieren</i>	0	1	2
<i>frequentie</i>	12	10	1

De variabele is kwantitatief.
 De relatieve frequentie van één huisdier is $10 : 23 \approx 0,43$.
 De modus is 0 huisdieren.
 De mediaan is de 12e waarneming dus ook gelijk aan 0 huisdieren.
 $(12 \times 0 + 10 \times 1 + 1 \times 2) : 23 \approx 0,52$
 Het gemiddelde is 0,52 huisdieren.

- V2** Geef een voorbeeld van een kwantitatieve en een kwalitatieve variabele uit de dataset.

- V3**
-  **a** Geef een schatting van de gemiddelde jaartemperatuur in 2013 door gebruik te maken van de gemiddelde temperatuur van de dagen.
- b** Geef de mediaan van de gemiddelde dagtemperatuur in 2013.
- c** Geef de modus van de gemiddelde dagtemperatuur.
- d** Hoe groot is de frequentie van het aantal dagen met een maximale dagtemperatuur groter of gelijk aan 20°C ?
- e** Hoe groot is de relatieve frequentie van het aantal dagen met een maximale dagtemperatuur groter of gelijk aan 30°C ?

- V4**
- a Janice telt het aantal leerlingen met een e-bike. Welke aantallen zitten in de klasse 50-55?
 - b De lengtes van leerlingen wordt afgerond op hele cm. Geef de intervalnotatie bij de klasse 150-155.
 - c Geef de intervalnotatie bij de leeftijd van kinderen in de klasse 6-12 jaar.
 - d Geef bij de opdrachten b en c ook het klassenmidden en de klassenbreedte.

- V5**
- Op een online filmforum gaven mensen een score van 1 tot en met 100 aan de nieuwste James Bond-film. In de dataset zijn deze gegevens opgenomen.



- a Maak staafdiagrammen van de waarderingen van de jongeren en van de ouderen.
- b In welke groep zijn de meningen het meeste verdeeld over de film? Licht je antwoord toe.
- c Maak boxplots van de waarderingen van de jongeren en van de ouderen.
Hoe zie je het verschil in waarderingen van de jongeren en de ouderen terug in de boxplots?



Theorie

Met **spreidingsmaten** geef je aan hoe ver gegevens van elkaar af liggen. De eenvoudigste spreidingsmaat is de **spreidingsbreedte**, dat is het verschil tussen het grootste en het kleinste waarnemingsgetal.

Een andere spreidingsmaat is het verschil tussen het derde kwartiel Q_3 en het eerste kwartiel Q_1 , de **kwartielafstand** of **interkwartielafstand**.

De **standaardafwijking** of **standaarddeviatie** is een spreidingsmaat die iets zegt over de spreiding rond het gemiddelde.

- V6**
- a Bij welke groep is de interkwartielafstand het grootst?
 - b Waarom is de spreidingsbreedte hier niet een geschikte maat om de spreiding weer te geven?
 - c Leg uit hoe je aan de staafdiagrammen kunt zien bij welke groep de standaardafwijking het grootst is.
 - d Geef de standaardafwijking van beide groepen.



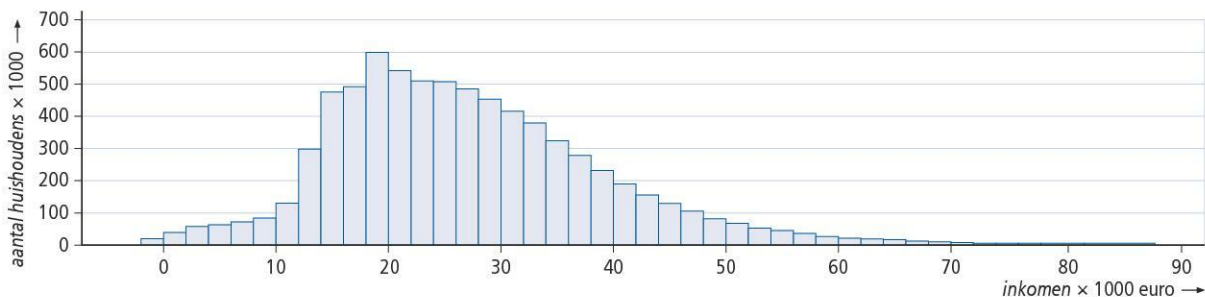
10.1 Frequentieverdelingen

Je leert

- wat de verschillende vormen van een frequentieverdeling zijn

Leerroutes

- ondersteunend: 1–2–3–4–05–5
- doorlopende: 1–2–3–4–5–6
- uitdagend: 1–2–4–5–6–U1



In het diagram zie je de inkomensverdeling in Nederland.

- Vind je dat de inkomens in Nederland eerlijk verdeeld zijn? Geef argumenten voor je mening.
- Maak een schets van een inkomensverdeling waarbij de inkomens volgens jou eerlijk verdeeld zijn.

1

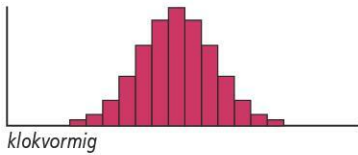
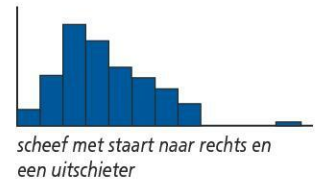
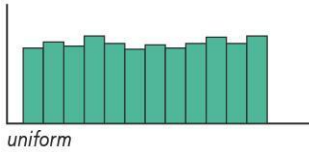
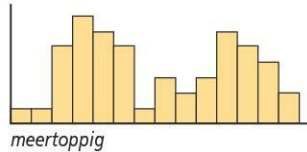
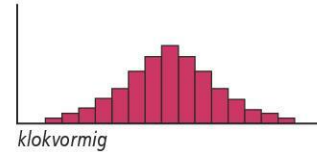


- Welke variabelen bevat de dataset?
- Welke variabelen zijn kwantitatief en welke zijn kwalitatief?
- Maak staafdiagrammen bij de volgende variabelen.
 - inkomen ouders*, met de eerste klasse $[10, 15)$.
 - geboorte maand*.
 - lengte*, met de eerste klasse $[155, 160)$.
 - gewicht*, met de eerste klasse $[40, 45)$.
- Welke staafdiagrammen zijn min of meer symmetrisch?
- Bij welke variabelen in opdracht c komen waarden voor die sterk afwijken van de meeste andere waarden?

Theorie

Datasets kun je ordenen in bijvoorbeeld frequentietabellen of staafdiagrammen. Dit zijn beide voorbeelden van een **frequentieverdeling**. De vorm van een staafdiagram geeft informatie over de frequentieverdeling. Een **klokvormige verdeling** is een symmetrische verdeling met in het midden de hoogste staaf. Bij een klokvormige verdeling zijn de modus, de mediaan en het gemiddelde aan elkaar gelijk. Bij een **scheve verdeling** ligt de hoogste staaf meer naar links of naar rechts. Bij een **uniforme verdeling** zijn alle staven ongeveer even hoog. Bij een **meertoppige verdeling** zie je in het staafdiagram meer dan één top. Een waarneming die erg afwijkt van de andere waarnemingen noem je een **uitschieter**.

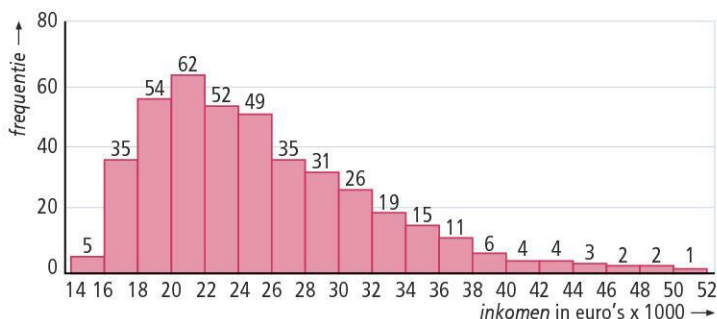
Voorbeeld



- 2
 - a Welke verdelingen in het voorbeeld zijn min of meer symmetrisch?
 - b Bij welke verdeling zijn de modus, de mediaan en het gemiddelde gelijk aan elkaar?
 - c Schets een meertoppige verdeling met één uitschieter.
- 3
 - a Welke vorm hebben de staafdiagrammen die je vond in opdracht 1?
 - b Voorspel de vorm van het staafdiagram bij de variabele *vergoeien*.
 - c Controleer het antwoord van opdracht b door het maken van een staafdiagram waarbij de eerste klasse $[6, 9)$ is.
- 4
 - a Van hoeveel accu's onderzoekt de fabrikant de levensduur?
 - b Maak een staafdiagram bij de variabele *levensduur*. Neem als klassenbreedte 1 uur. Welke vorm heeft je staafdiagram?
 - c Welke vormen hebben de staafdiagrammen die je krijgt als je splitst op de variabele *type*?
 - d Er is één uitschieter. Van welk type is deze uitschieter?
 - e Hoe groot is de spreidingsbreedte en de kwartielfstand van de twee type accu's?
 - f Hoe verandert de spreidingsbreedte en de kwartielfstand door het weglaten van de uitschieter?



Ondersteunende route → maak opdracht 05



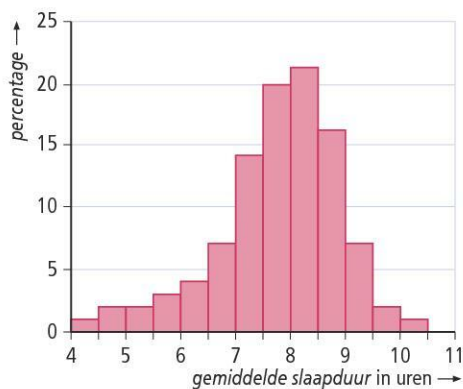
5 Je ziet de frequentieverdeling van de netto maandinkomens van de huishoudens in een dorp.



- Hoe karakteriseer je de vorm van deze verdeling?
- Welke klasse is bij deze klassenindeling de modale klasse?
- Geef de mediaan en het gemiddelde.
- Zoek uit hoeveel procent van de huishoudens meer verdient dan het gemiddelde.
- Welke centrummaat zal veranderen door de vijf hoogste inkomens uit de dataset te verwijderen? Verklaar je antwoord.
- Verwijder de vijf hoogste inkomens uit de dataset en bereken opnieuw het gemiddelde en de mediaan.

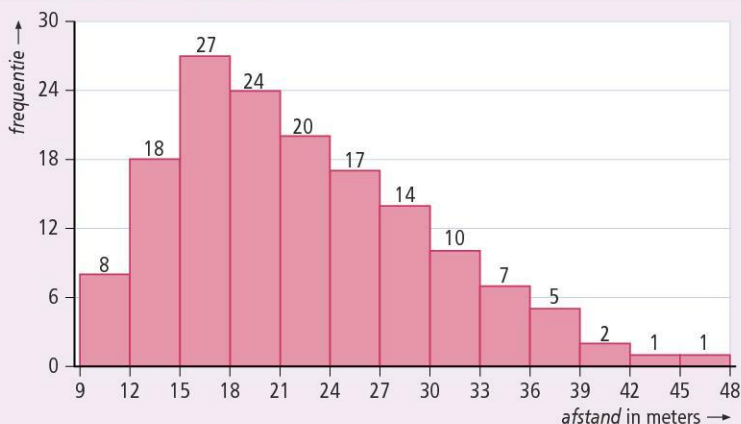
6 In de figuur zie je de verdeling van de gemiddelde slaapduur van de Nederlandse bevolking.

- Hoe karakteriseer je de vorm van deze verdeling?
- Welke klasse is de modale klasse?
- Leg uit hoe je zonder berekening kunt zien dat Nederlanders gemiddeld korter dan modaal slapen.
- Mensen met een slaapduur van minder dan 6 uur hebben een grote kans op een chronisch slaapttekort. Hoeveel procent van de Nederlandse bevolking behoort ongeveer tot deze groep?



Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten



05



- Je ziet een staafdiagram bij de variabele *vergooien* waarbij de eerste klasse $[9, 12)$ is. Welke vorm heeft het staafdiagram?
- De modale klasse is de klasse met de hoogste frequentie. Geef de modale klasse.
- Zoek uit wat het gemiddelde is.
- Sorteer de leerlingen op de variabele *vergooien* en ga na hoeveel leerlingen verder hebben gegooid dan het gemiddelde.
- Hoeveel procent van de leerlingen heeft verder dan het gemiddelde gegooid?

Uitdagende opdrachten

U1

Geef bij de volgende situaties aan welke vorm het bijbehorende staafdiagram heeft. Verklaar je antwoord.

- De schoenmaten van een groep kinderen bestaande uit evenveel 6-jarigen als 12-jarigen.
- Het eindcijfer wiskunde van een groep leerlingen die goed in wiskunde zijn.
- De uitkomsten van het totaal aantal ogen bij 100 keer werpen met twee dobbelstenen.

	som					
	7	8	9	10	11	12
	6	7	8	9	10	11
	5	6	7	8	9	10
	4	5	6	7	8	9
	3	4	5	6	7	8
	2	3	4	5	6	7

10.2 Continue en discrete variabelen

Je leert

- wat een continue en wat een discrete variabele is

Leerroutes

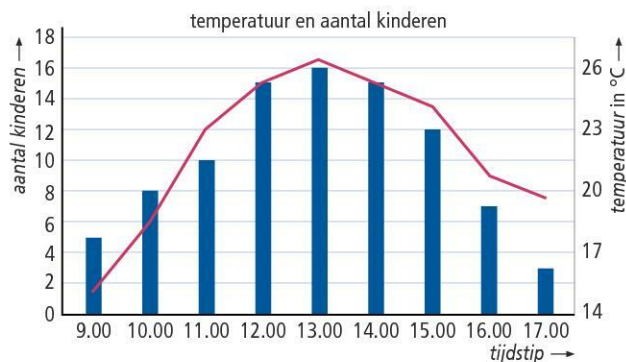
- ondersteunend: 7—08—9—10—11—12
- doorlopende: 7—8—9—10—11—12
- uitdagend: 7—8—10—11—12—U2

Een docent Frans geeft altijd een SO waarbij je 15 punten kunt verdienen. Het valt Claire op dat er in haar klas met 20 leerlingen altijd twee of meer leerlingen zijn met hetzelfde cijfer.

- Hoe kan het dat er steeds twee of meer leerlingen hetzelfde cijfer hebben?



- 7** Bij een speeltterrein is op een dag elk uur genoteerd hoeveel kinderen er waren en wat de temperatuur was. Op de linker as kun je met het staafdiagram het aantal kinderen aflezen. Op de rechter as kun je met het rode lijndiagram de temperatuur aflezen.



- Welke minimum temperatuur en welke maximum temperatuur is er gemeten?
- Leg uit dat de temperatuur alle waarden tussen de minimum en maximum temperatuur heeft aangenomen.
- Hoeveel kinderen waren er minimaal en hoeveel kinderen waren er maximaal op het speeltterrein aanwezig?
- Welke waarden kan het aantal kinderen hebben aangenomen?

Theorie

Bij variabelen maak je onderscheid tussen **discrete** en **continue** variabelen. Een discrete variabele neemt alleen bepaalde waarden aan. Een continue variabele kan in principe alle waarden op een interval aannemen.

Je kunt de mogelijke waarden van een continue variabele voorstellen door een aaneengesloten (continue) lijn.

De mogelijke waarden van een discrete variabele kun je voorstellen met losse punten.

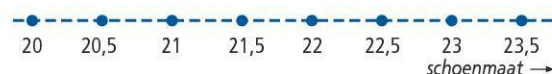
Voorbeeld 1

De voetlengte in cm van peuters is een continue variabele.



Voorbeeld 2

De schoenmaat van peuters is een discrete variabele.



Ondersteunende route → maak opdracht 08

- 8** Zijn de volgende variabelen discreet of continu? Licht je antwoord toe.

H

- a De score die iemand haalt op multiplechoicetest met 50 vragen.
- b De duur van een broedperiode van zwanen.
- c Het gewicht van een bospaddenstoel.
- d De lengte van de dikke darm van een persoon.
- e Het aantal zonnebloempitten in een zonnebloem.

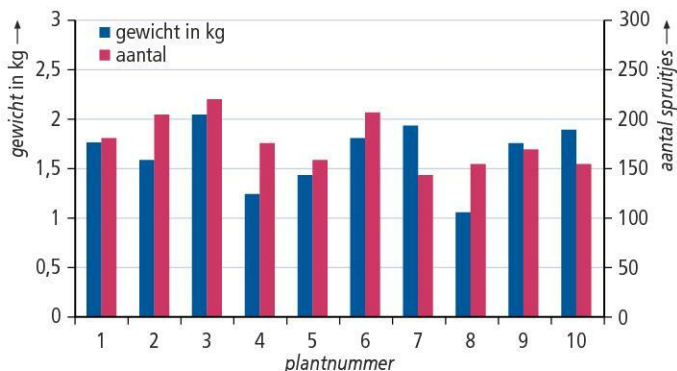
- 9**
- a Geef twee voorbeelden van continue variabelen.
 - b Geef twee voorbeelden van discrete variabelen.

- 10** In de dataset staat informatie over de houtproductie in een productiebos.



- a Welke variabelen zijn kwantitatief?
- b Ga na welke van de kwantitatieve variabelen in de dataset continu zijn en welke discreet. Licht je antwoord toe.

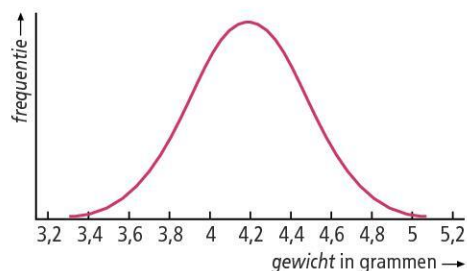




- 11** Bij een onderzoek naar de opbrengst van tien spruitjesplanten is gekeken naar het totale gewicht van de spruitjes per plant en het aantal spruitjes per plant.
- Welke variabele is continu? En welke variabele is discreet?
 - Hoeveel planten hebben een opbrengst van meer dan 200 spruitjes?
 - Welke plant heeft gemiddeld de zwaarste spruitjes?
 - En welke plant heeft gemiddeld de lichtste spruitjes?
 - Hieronder is een begin gemaakt van een kruistabel. Vul deze kruistabel verder in.

aantal	gewicht in kg		
	$[1; 1,5>$	$[1,5; 2>$	$[2; 2,5>$
$[100, 150>$	0	1	...
$[150, 200>$	...	...	...
$[200, 250>$	...	...	...

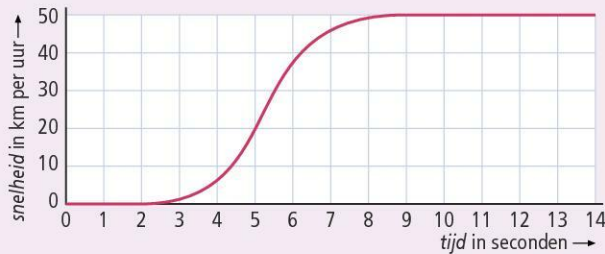
- Hoeveel planten met meer dan 200 spruitjes hebben een opbrengst van meer dan 1,5 kg?
- 12** In de frequentieverdeling is het gewicht in grammen van potloden weergegeven.
- Is de variabele *gewicht* discreet of continu?
 - Hoe groot is het gemiddelde gewicht van deze potloden?
 - Welk gewicht is de mediaan?
 - Hoe karakteriseer je deze verdeling?
 - Waarom is de kans groter op een potlood met een gewicht tussen 4 gram en 4,4 gram, dan op een potlood met een gewicht tussen 3,2 gram en 3,6 gram?



Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

- 08** Iemand gooit met een dobbelsteen en noteert het aantal ogen.
- a** Geef de mogelijke uitkomsten weer op een getallenlijn.
 - b** Is het aantal ogen van een dobbelsteen een continue of een discrete variabele?



- c** In de grafiek zie je de snelheid van een auto die uit stilstand optrekt. Welke snelheden worden aangenomen?
- d** Geef de snelheden weer op een getallenlijn.
- e** Is de snelheid een continue of een discrete variabele?
- f** Zijn de volgende variabelen discreet of continu? Leg uit.
 - A Het aantal winegums in een zakje.
 - B De duur van een winterslaap van een bruine beer.
 - C Het gewicht van een stuk kaas.
 - D Het cijfer dat iemand haalt voor een toets.

Uitdagende opdrachten



A



B

- U2**
- a** Waarom is de variabele *kleur* in afbeelding A een kwalitatieve variabele?
 - b** In afbeelding B kun je *kleur* opvatten als een kwantitatieve variabele. Leg uit waarom.
 - c** Is de variabele *kleur* in afbeelding B discreet of continu?

10.3 De normale verdeling

Je leert

- wat de normale verdeling is
- hoe je kunt nagaan of een variabele normaal verdeeld is

Leerroutes

- ondersteunend: 13—14—015—16—17—18—19
- doorlopende: 13—14—15—16—17—18—19
- uitdagend: 13—14—15—17—18—19—U3

Op een sportdag worden de leerlingen ingedeeld op hun lengte. De gymsectie heeft poortjes gemaakt met lengtes van 150-160 cm tot en met 200-210 cm. De poortjes staan op volgorde van klein naar groot. Leerlingen moeten een rij vormen bij het poortje van hun lengte.

- Schets hoe een bovenaanzicht van de rijen eruit zal zien.



13



In Nederland worden van baby's allerlei kwantitatieve variabelen zoals gewicht, lengte en hoofdomtrek gemeten. Dat gebeurt op een zogenaamd consultatiebureau. In de dataset staan de gewichten in grammen van baby's van 3 maanden oud. Je ziet de gegevens van de eerste week van januari, van de maand januari en van het hele jaar.

- Maak achtereenvolgens staafdiagrammen met klassenbreedte 200 gram bij de data van de eerste week van januari, van de maand januari en van het hele jaar.
- Welke van de staafdiagrammen heeft het meest een klokvorm?
- Hoe komt het dat het staafdiagram van de data van een week niet klokvormig is maar het staafdiagram van de data van een jaar wel?
- Hoe kun je aan het staafdiagram zien dat bij de gegevens van het hele jaar het gemiddelde en mediaan ongeveer gelijk zijn?

14



In de dataset zie je de gegevens van de variabele *hoofdomtrek* van baby's van drie maanden oud.

- Maak een staafdiagram met klassenbreedte 1 cm bij de variabele *hoofdomtrek*. Is het staafdiagram klokvormig?
- Geef het gemiddelde μ en de standaardafwijking σ van de hoofdomtrek. Rond af op één decimaal.
- Bereken met behulp van een frequentietabel het percentage baby's met een hoofdomtrek tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$.
- Bereken het percentage baby's met hoofdomtrek die niet meer dan tweemaal de standaardafwijking van het gemiddelde afwijkt.

Voor het gemiddelde wordt vaak het symbool μ gebruikt. Voor de standaardafwijking of standaarddeviatie wordt vaak het symbool σ gebruikt.

Theorie

De frequentieverdeling van een variabele kun je vaak benaderen met een klokvormige grafiek. De belangrijkste kenmerken van zo'n grafiek zijn:

- de grafiek is symmetrisch
- de symmetrieas ligt bij het gemiddelde μ
- het gemiddelde, de mediaan en de modus vallen samen
- de standaardafwijking σ is de afstand van de symmetrieas tot de buigpunten van de grafiek.

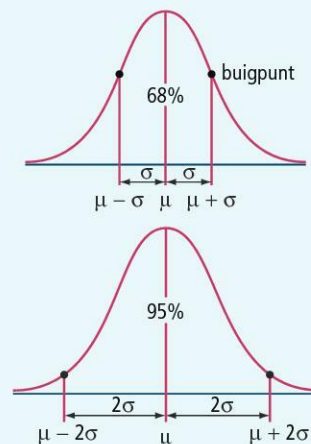
Bij een normale verdeling gelden de volgende vuistregels.

- 1 van de data ligt ongeveer 68% tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$.
- 2 van de data ligt ongeveer 95% tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$.

De klokvormige verdeling wordt de **normale verdeling** genoemd. Een variabele waarvan de frequentieverdeling benaderd kan worden door de normale verdeling heet **normaal verdeeld**.

Om na te gaan of een variabele normaal verdeeld is, controleer je of het bijbehorende staafdiagram klokvormig is. Om meer zekerheid te hebben, kun je controleren of de 1e en de 2e vuistregel kloppen bij de frequentieverdeling.

In een buigpunt verandert een toenemende stijging (of daling) in een afnemende stijging (of daling).



Ondersteunende route → maak opdracht 015

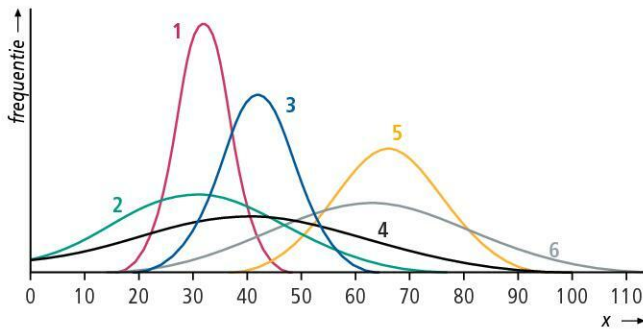
- 15 Onderzoek of de lengte van drie maanden oude baby's normaal verdeeld is door te controleren of de grafiek klokvormig is en of aan de twee vuistregels voldaan is.



- 16 a Maak een staafdiagram bij de variabele *armlengte*.
b Waarom kun je op basis van het staafdiagram meteen zeggen dat de armlengte niet normaal verdeeld is?

- 17** Je ziet zes grafieken die bij zes statistische variabelen horen die normaal verdeeld zijn.

H



- Welke verdeling heeft het grootste gemiddelde? En welke het kleinste?
- Welke verdeling heeft de grootste standaardafwijking? En welke de kleinste?
- Geef van elke grafiek het gemiddelde en de standaardafwijking.

- 18** Controleer je antwoorden van opdracht 17 met de animatie.

- 19**
- Wat gebeurt er met de grafiek van een normale verdeling als het gemiddelde kleiner wordt en de standaardafwijking gelijk blijft?
 - En wat gebeurt er met de grafiek van een normale verdeling als de standaardafwijking kleiner wordt en het gemiddelde gelijk blijft?

Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

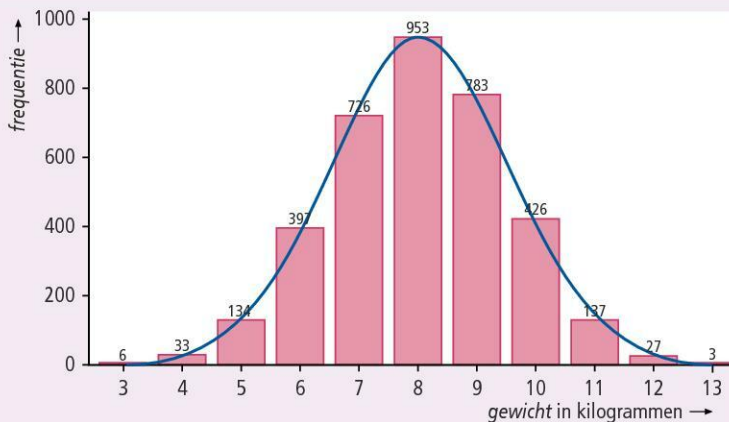
015

In de dataset staan data over baby's van drie maanden. Je gaat onderzoeken of de *borstomvang* normaal verdeeld is.



- Maak een staafdiagram bij de variabele *borstomvang* waarvan de eerste klasse $[30, 32)$ is. Is de verdeling klokvormig?
- Geef het gemiddelde μ en de standaardafwijking σ . Rond af op gehelen.
- Bereken $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$.
- Maak een relatieve frequentietabel waarbij de eerste klasse $[28, 32)$ is.
- Bereken het percentage baby's met een borstomvang tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$ is.
- Bereken het percentage baby's met een borstomvang tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$ is.
- Vind je dat de borstomvang van baby's van drie maanden normaal verdeeld is?

Uitdagende opdrachten



U3

Van 3625 biggen van vier weken oud is het gewicht gemeten. Het gewicht is afgerond op hele kg.



- Geef de intervalnotatie van het gewicht van de biggen van 7 kg.
- Onderzoek met het bestand en de vuistregels of het gewicht van de biggen normaal verdeeld is.

10.4 Werken met de normale verdeling

Je leert

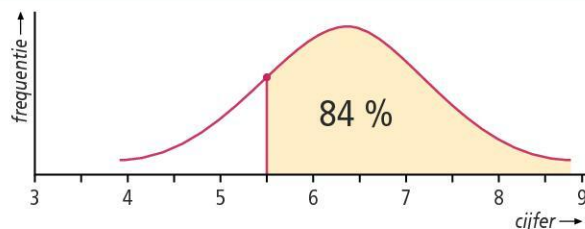
- hoe je met de vuistregels van een normale verdeling rekent

Leerroutes

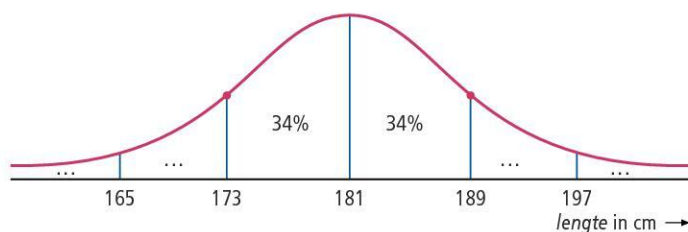
- ondersteunend: 20—21—022—023—24
- doorlopende: 20—21—22—23—24
- uitdagend: 20—22—23—24—U4

De resultaten voor de rekentoets zijn in de grafiek weergegeven. Zo kun je zien dat 84% van de leerlingen een 5,5 of hoger heeft gehaald. De resultaten van de rekentoets zijn normaal verdeeld.

- Hoe kun je op basis van deze grafiek het gemiddelde en de standaardafwijking van de resultaten van de rekentoets bepalen?

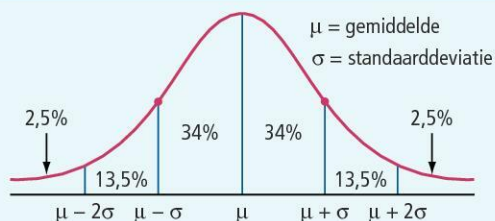


- 20** Tot 1996 kende Nederland militaire dienstplicht. Elk jaar werden jonge mannen opgeroepen voor de dienstkeuring. Daarbij werden allerlei gegevens zoals bijvoorbeeld lengte en gewicht gemeten. Van de laatste groep dienstplichtigen was de gemiddelde lengte 181 cm en de standaardafwijking 8 cm. Ga ervan uit dat de variabele lengte normaal verdeeld is.

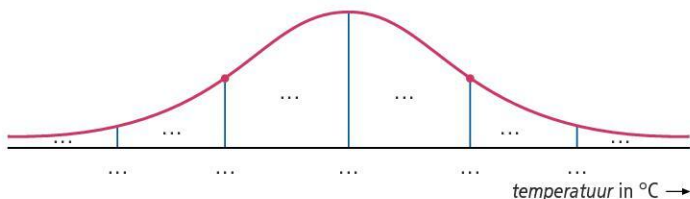


- Waarom staat bij de horizontale as 181 onder de top van de grafiek?
- En waarom staat bij de horizontale as onder de buigpunten van de grafiek 173 en 189?
- Volgens de 1e vuistregel hadden 68% van de dienstplichtigen een lengte tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$. Verklaar waarom onder de grafiek twee keer 34% staat.
- Gebruik de 2e vuistregel om de andere vier percentages onder de grafiek uit te rekenen en vul deze op de puntjes in.
- Hoeveel procent van de dienstplichtigen had een lengte tussen 173 en 197 cm?
- Hoeveel procent van de jongens was langer dan 189 cm?

Met de vuistregels kun je de oppervlakte onder de grafiek van een normale verdeling opsplitsen in zes stukken. Bij het maken van opdrachten waarin gegeven is dat een variabele normaal verdeeld is, is het handig om een schets te maken van de grafiek van de bijbehorende normale verdeling.



- 21** Een monteur onderzoekt de temperatuur van 300 kopjes koffie uit een koffiezetapparaat. De temperatuur van de kopjes koffie is normaal verdeeld. Het gemiddelde is 78 °C en de standaardafwijking is 2,5 °C.



- Vul bij de schets op de puntjes de juiste waarden in.
- Hoeveel procent van de kopjes koffie is warmer dan 80,5 °C?
- De ideale temperatuur voor een kopje koffie ligt tussen 73 °C en 80,5 °C.
Hoeveel kopjes koffie hebben een ideale temperatuur?

Ondersteunende route → maak opdracht 022

- 22** Een supermarkt verkoopt waspoeder in pakken van 4 kg. Een consumentenorganisatie controleert het gewicht van 500 pakken. Het gemiddelde gewicht blijkt 4,06 kg te zijn, met een standaardafwijking van 0,12 kg. Neem aan dat de gewichten van de pakken waspoeder normaal verdeeld zijn.
- Maak een schets van de grafiek bij de normale verdeling.
 - Bereken het aantal pakken met een gewicht tussen 3,94 kg en 4,30 kg.
 - Twintig procent van de pakken blijkt zwaarder te zijn dan 4,16 kg.
Welk gewicht hebben de twintig procent pakken met het laagste gewicht?
 - Geef een schatting van het percentage pakken met een gewicht minder dan 4 kg.



Ondersteunende route → maak opdracht 023

23

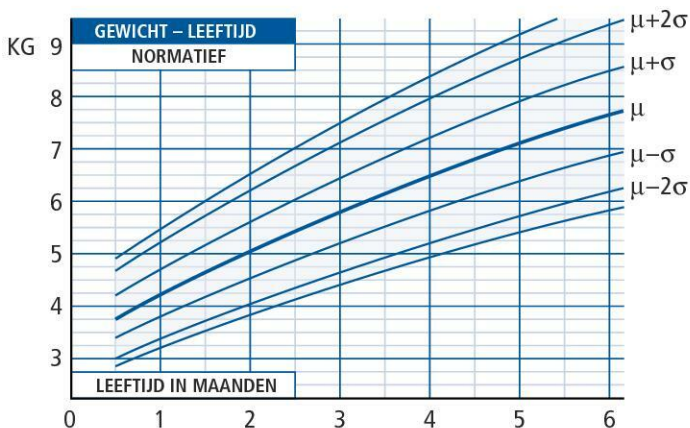
H

In een kantoorgebouw worden lampen gebruikt met een brandtijd van gemiddeld 1400 uur en een standaardafwijking van 150 uur. Neem aan dat de variabele *brandtijd* normaal verdeeld is. Alle lampen worden tegelijk vervangen om arbeidsloon te besparen. Pas als 16% van de lampen stuk is, mag er vervangen worden.

- Na hoeveel branduren is dat het geval?
- Na een aantal jaren besluit de directie om over te stappen op ledverlichting. De brandtijd van deze lampen is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 75 uur.
Na 3200 branduren is 2,5% van deze lampen stuk.
Bereken de gemiddelde brandtijd van deze lampen.

24

Kinderartsen gebruiken zogenaamde groeidiagrammen om de groei van kinderen in de eerste maanden van hun leven bij te houden. Het gewicht van jonge kinderen is bij benadering normaal verdeeld. In het groeidiagram kun je bijvoorbeeld aflezen dat het gewicht van baby's van vier maanden gemiddeld 6,5 kg is met een standaardafwijking van 0,75 kg.



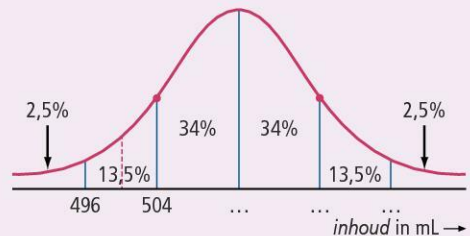
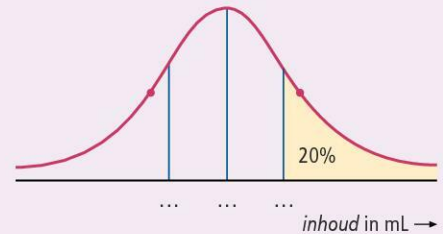
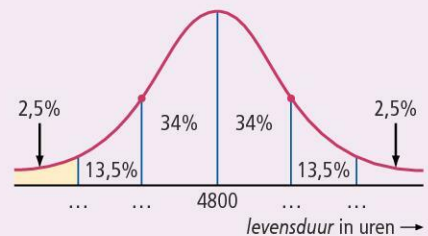
- Geef het gemiddelde en de standaardafwijking van het gewicht van baby's van twee maanden.
- Bart is vijf maanden oud en behoort tot de 2,5% zwaarste baby's.
Hoe zwaar is Bart minstens?
- Hoe kun je aan het diagram zien dat de standaardafwijking steeds groter wordt naarmate de leeftijd toeneemt?
- Leg uit wat dit betekent voor het gewicht van de baby's.

Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten

022 Een machine vult flesjes met 500 mL shampoo. Bij een controle van 1000 flesjes is de gemiddelde inhoud 512 mL en de standaardafwijking 8 mL. Neem aan dat de inhoud van de flesjes normaal verdeeld is.

- Vul bij de horizontale as de juiste waarden in.
- Hoeveel procent van de flesjes heeft een inhoud tussen 504 mL en 520 mL? Hoeveel flesjes zijn dat?
- Het lijntje dat hoort bij 500 mL ligt precies tussen 496 mL en 504 mL.
Waarom is het percentage tussen 496 mL en 500 mL toch kleiner dan 6,75%?
- Geef een schatting van het percentage flesjes met minder dan 500 mL.
- Van 20% van de flesjes is de inhoud 519 mL of meer. Gebruik de symmetrie van de grafiek om de inhoud van de 20% flesjes met de minste inhoud te bepalen.



023 De lampen van de lantaarnpalen bij een snelweg hebben een levensduur van gemiddeld 4800 uur en een standaardafwijking van 250 uur. Neem aan dat de variabele levensduur van de lampen normaal verdeeld is.

- Vul de schets verder in.
- Hoeveel procent van de lampen is na 4800 uur defect?
- Alle lampen worden in één keer vervangen als 2,5% van de lampen defect is.
Na hoeveel uren is dat het geval?
- Na een aantal jaren wordt er overgestapt op een ander merk lamp. De levensduur van deze lampen is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 175 uur.
Na 4000 uren is 2,5% van deze lampen defect.
Bereken de gemiddelde levensduur van deze lampen.

Uitdagende opdrachten



- U4**
- Leg met behulp van de vuistregels uit dat deze boxplot niet bij een normale verdeling kan horen.
 - Leg uit dat de kwartielf afstand bij een normale verdeling altijd kleiner is dan het verschil tussen $\mu + \sigma$ en $\mu - \sigma$.

Je leert

- wat een aselechte en representatieve steekproef is

Leerroutes

- ondersteunend: 25—26—27—28—29—030—30
- doorlopend: 25—26—27—28—29—30—31
- uitdagend: 25—26—27—29—30—31—U5

In een kleine gemeente vraagt de gemeenteraad zich af of er draagvlak is voor een autoloze binnenstad. Om antwoord te krijgen op deze vraag werd er een advertentie in een lokale krant geplaatst met de oproep om online te stemmen. Van de 452 reacties waren er 230 tegen een autoloze binnenstad.

- Mag men nu concluderen dat er geen draagvlak is voor een autoloze binnenstad?



25 De directie van een school met 1425 leerlingen beweert dat 60% van de leerlingen minder dan 8 kilometer van school woont. Een paar vwo leerlingen willen nagaan of het percentage klopt. Het ontbreekt ze aan tijd om dit aan elke leerling afzonderlijk te vragen.

- a** Aan vijf willekeurige leerlingen vragen ze hoe ver ze van school wonen. Twee van de vijf wonen minder dan 8 km van school.

Mag je nu concluderen dat de directie niet gelijk heeft?

- b** Is het mogelijk dat geen enkele van deze vijf leerlingen minder dan 8 km van school woont?

- c** Stel dat ze dezelfde vraag stellen aan 25 willekeurige leerlingen.

Is het mogelijk dat geen enkele van deze leerlingen minder dan 8 km van school woont?

Theorie

Om iets te weten te komen over een groep onderzoek je meestal slechts een deel van de groep. Je noemt dat een **steekproef**. De uitslag van een steekproef wordt voor een deel door het toeval bepaald. Door de **steekproefomvang** groter te maken, krijg je een betere schatting. Om juiste conclusies te kunnen trekken over een populatie, moet de steekproef **aselect** zijn. Dat wil zeggen dat iedereen (of ieder ding) uit de populatie evenveel kans moet hebben om in de steekproef terecht te komen. Een steekproef die **representatief** is, vormt een goede afspiegeling van de hele populatie.

Voorbeeld

Een bestuur van een vereniging wil een onderzoek houden onder haar 1168 leden naar de waardering van de activiteiten. De voorzitter stelt voor de mening van de 34 aanwezigen op de vergadering te peilen.

De secretaris wil willekeurige 60 namen uit de ledenlijst prikken en die leden een vragenlijst laten afnemen.

De steekproef in het voorstel van de voorzitter is niet aselect, die van de secretaris wel.

26 Bekijk het voorbeeld op de vorige bladzijde. Waarom levert het voorstel van de voorzitter geen aselechte steekproef op en het voorstel van de secretaris wel?

27  Om na te gaan of je conclusies kunt trekken uit het resultaat van een steekproef ga je het nemen van een aselechte steekproef simuleren. Met een computer kun je het nemen van een steekproef van vijf leerlingen simuleren. Daarbij is de kans op een leerling die minder dan 8 km van school woont 60%.

- a** Simuleer 2000 keer het trekken van een steekproef van 5 leerlingen.
Noteer het resultaat in de tabel.
- b** In hoeveel van de 2000 keer komt het voor dat geen enkele leerling in de steekproef minder dan 8 km van school woont?

<i>percentage leerlingen met afstand kleiner dan 8 km</i>	<i>frequentie</i>
0	...
20	...
40	...
60	...
80	...
100	...

- 28** 
- a** Kies een steekproefgrootte van 25.
Welke percentages van leerlingen die minder dan 8 km van school wonen zijn nu mogelijk?
 - b** Simuleer 2000 keer het trekken van een steekproef van 25 leerlingen.
 - c** In hoeveel van de 2000 keer komt het voor dat geen enkele leerling minder dan 8 km van school woont?

Door toeval komt het resultaat van een steekproef meestal niet overeen met wat voor de hele populatie geldt. Je kunt er zelfs flink naast zitten. In de praktijk houdt men bij de conclusie altijd een zekere marge aan. De kans op een steekproefresultaat binnen die marge is bij een grote steekproef groter dan bij een kleine steekproef. Vandaar dat een goede steekproefomvang van belang is.

29  In de doos met 250 knikkers zitten 120 blauwe knikkers. Sanne trekt 100 knikkers uit de vaas en telt het aantal blauwe knikkers.

- 
- a** Hoeveel blauwe knikkers zal ze naar verwachting trekken?
 - b** Met een computer kun je het trekken van knikkers simuleren. In het bestand zie je het resultaat van 1000 steekproeven met een steekproefomvang van 100.
Maak een staafdiagram bij het aantal blauwe knikkers.
 - c** Is het staafdiagram min of meer klokvormig?
 - d** Hoe groot is het gemiddelde en de standaardafwijking van de van het aantal blauwe knikkers?
 - e** Bij hoeveel procent van de steekproeven ligt het aantal tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$?

Theorie

Door een groot aantal simulaties uit te voeren, zie je dat de resultaten van de steekproeven normaal verdeeld zijn. Je noemt dit de **steekproevenverdeling**.

Ondersteunende route → maak opdracht O30

30



Het bedrijf Popsi wil een nieuwe frisdrank op de markt brengen. Om in de fabriek het productieproces te controleren, gaat men dagelijks een steekproef nemen. Men vraagt zich af wat een goede steekproefomvang is, 50 blikjes (A), 100 blikjes (B), 200 blikjes (C) of 500 blikjes (D). Van een steekproef wordt nagegaan hoeveel procent van de blikjes voldoende frisdrank bevat.

- Geef een voordeel en een nadeel van steekproefomvang A en van steekproefomvang D.
- Om te besluiten welke methode Popsi zal gebruiken, wordt eerst voor elke steekproefomvang een simulatie van 1000 steekproeven gemaakt. Bij deze simulatie gaat men er van uit dat 90% van de blikjes voldoende frisdrank bevat. In de dataset zie je de resultaten. Maak een staafdiagram van het percentage blikjes met voldoende frisdrank. Neem een klassenbreedte van 2% en splits op *methode*.
- Hoe verandert de vorm van het staafdiagram als de steekproefomvang toeneemt?
- Leg aan de hand van de staafdiagrammen uit dat het percentage blikjes met voldoende frisdrank beter te schatten is naarmate de steekproefomvang groter is.

31



In een frisdrankfabriek wordt gedurende drie jaar iedere dag een steekproef van 100 blikjes genomen. Van de steekproef wordt het percentage blikjes waarin voldoende frisdrank zit berekend. De data staan in de dataset.

- Er is een dag waarop het percentage het kleinst is. Hoeveel blikjes met te weinig frisdrank waren er die dag in de steekproef?
- Geef het gemiddelde en standaardafwijking van de steekproevenverdeling.
- Tussen welke waarden ligt de middelste 68% van de resultaten van de steekproeven?

Uitdagende route → maak opdracht U5

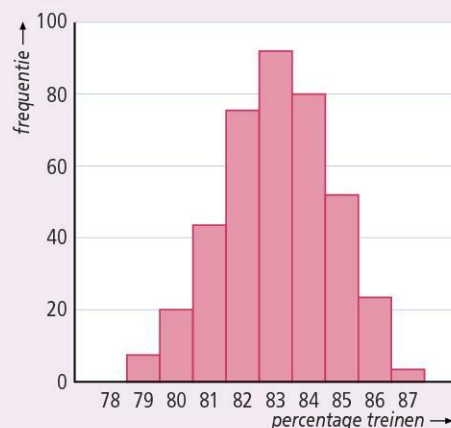


Ondersteunende opdrachten

030

De NS houdt bij hoeveel procent van de treinen op tijd rijdt. Elke dag neemt de NS een steekproef bij 200 treinen of ze op tijd rijden. Dit doen ze 400 dagen lang. In de steekproevenverdeling zie je de resultaten.

- Bij een steekproef is het percentage treinen dat op tijd rijdt gelijk aan 80%.
Hoeveel van de 200 treinen zijn dat?
- De steekproevenverdeling is normaal verdeeld.
In een normale verdeling is het gemiddelde gelijk aan de modus en de mediaan.
Hoe groot is het gemiddelde van de steekproevenverdeling?
- Schat op basis van deze steekproevenverdeling hoeveel procent van de treinen op tijd rijdt.
- De standaardafwijking van deze steekproevenverdeling is ongeveer 3%.
Tussen welke waarden ligt de middelste 68% van de steekproefresultaten?



Uitdagende opdrachten

U5



In een vaas met 10 000 knikkers waarvan er 2000 blauw zijn, worden een aantal knikkers getrokken. Met de computer is dit kansexperiment gesimuleerd met steeds een andere steekproefomvang n .

- Hoeveel procent blauwe knikkers verwacht je in een steekproef?
- Maak een staafdiagram van het percentage blauwe knikkers met klassenbreedte 2 en splits op *steekproefomvang*.
Hoe verandert het staafdiagram als de steekproefomvang toeneemt?
- Vul de tabel in met $\sigma(n)$ op drie decimalen nauwkeurig.
- Controleer met de tabel dat bij benadering geldt:

$$\sigma(n) = \frac{0,4}{\sqrt{n}}$$
- Leg met behulp van de formule van opdracht d uit dat je het percentage van een populatie dat een bepaalde eigenschap heeft beter kunt schatten bij een grotere steekproef.

n	100	200	300	400	500
$\sigma(n)$	...	...	...	...	...

32



In de dataset is informatie opgenomen over de lengte van leerlingen in de eerste klas en leerlingen in de zesde klas.

- Onderzoek met een staafdiagram van de gegevens wat de kenmerkende vorm is van de verdeling bij de variabele *lengte*.
- Geef een verklaring voor deze kenmerkende vorm.
- Maak staafdiagrammen van de groepen afzonderlijk. Welke vorm hebben deze staafdiagrammen?
- Bij welke groep is de standaardafwijking het grootst?
- Bereken het gemiddelde, de mediaan en de standaardafwijking van de groepen afzonderlijk. Rond af op hele centimeters.
- Tussen welke waarden ligt de middelste 68% van de lengtes van de leerlingen uit de zesde klas?
- Is de lengte van de leerlingen uit de zesde klas normaal verdeeld? Verklaar je antwoord.



33

Uit onderzoek is gebleken dat leerlingen gemiddeld ruim 8 uur per week aan huiswerk besteden en dat meisjes meer tijd aan huiswerk besteden dan jongens. De tijd in uren die leerlingen per week aan hun huiswerk besteden, noemen we de huiswerktijd. In de figuur zie je de resultaten van het onderzoek.

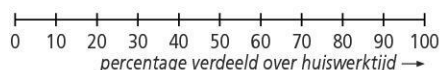
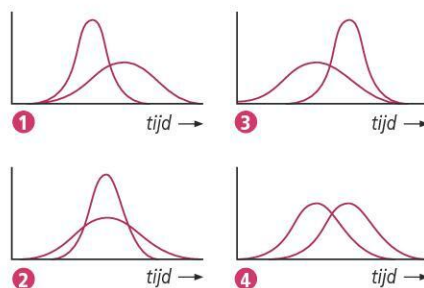
- Hoeveel procent van de meisjes besteedt 8 uur of meer per week aan het huiswerk? Licht je antwoord toe.
- Ga ervan uit dat de huiswerktijd van de meisjes normaal verdeeld is met een gemiddelde van 8,8 uur en een standaardafwijking van 3,2 uur. Hoeveel procent van de meisjes besteedt minstens 12 uur per week aan huiswerk?
- De huiswerktijd van de jongens is ook normaal verdeeld. Het gemiddelde is 7,5 uur. Verder is gegeven dat 16 procent van hen minder dan 5 uur per week aan huiswerk besteedt. Bereken de standaardafwijking van de huiswerktijd van de jongens.
- Men heeft een soortgelijk onderzoek gedaan onder studenten. Daarbij is gekeken naar de tijd die mannelijke en vrouwelijke studenten thuis aan hun studie besteden. Het onderzoek wijst uit dat vrouwen per week meer tijd aan 'huiswerk' besteden dan mannen. De spreiding in huiswerktijd bij de mannen is kleiner dan bij de vrouwen. Welk van de figuren past het best bij de gegevens over de studenten? Licht je antwoord toe.
(Ontleend aan *CE havo wiskunde A 2007, tijdvak 2*)

huiswerktijd van meisjes

0-<4	4-<6	6-<8	8-<10	10-<12	12-<16
------	------	------	-------	--------	--------

huiswerktijd van jongens

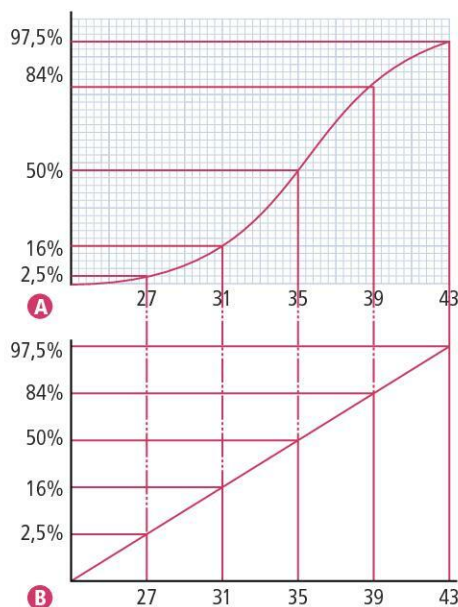
0-<4	4-<6	6-<8	8-<10	10-<12	12-<16
------	------	------	-------	--------	--------



- 34** Je ziet twee grafieken van een cumulatieve frequentiepolygoon van een normaal verdeelde variabele. De tweede grafiek is uit de eerste ontstaan door de verticale as aan te passen.

Zowel boven als onder de 50% is de as in toenemende mate opgerekt. Hierdoor is de kromme in grafiek A een rechte lijn geworden in grafiek B.

- Ga na dat de grafieken met elkaar overeenstemmen.
- In grafiek A ligt op de verticale as de waarde 67% precies midden tussen de waarden 50% en 84%. Leg uit waarom dat in grafiek B niet het geval is.
- Lees het gemiddelde en de standaardafwijking van de data af.
- De data ondervinden een aanpassing zo, dat elke waarneming 4 groter wordt. Leg voor beide grafieken uit hoe ze veranderen.
- De data ondervinden een aanpassing zo dat de standaardafwijking tweemaal zo groot wordt. Leg voor beide grafieken uit hoe ze veranderen.



- 35** Een assenstelsel met een schaalverdeling zoals bij grafiek B in opdracht 34 noem je een normaalwaarschijnlijkheidspapier. In de dataset zie je de resultaten van een Engels onderzoek naar de lengte van mannen.

- Maak een frequentietabel met als eerste klasse $[57, 60)$.
- Onderzoek met normaalwaarschijnlijkheidspapier hoe groot de gemiddelde lengte en de standaardafwijking is.
- Controleer je antwoord van opdracht b met de data op de computer.

- 36** In een meubelfabriek worden planken gemaakt. De zaagmachine produceert planken waarvan de lengte normaal verdeeld is met een gemiddelde van 800 mm en een standaardafwijking van 2 mm. De planken horen 800 mm lang te zijn, maar als ze hoogstens 2 mm langer of korter zijn, is het ook goed. Planken die langer dan 802 mm zijn, worden met de hand op maat gemaakt. Planken die korter zijn dan 798 mm zijn onbruikbaar. Op elke goede plank maakt de fabriek € 3,25 winst. Het op maat maken van een te lange plank kost € 1,50. Elke onbruikbare plank levert een verliespost van € 2,- op.

Er komt een bestelling binnen voor 1000 planken. Hoe groot is het verschil van de winstverwachting als de machine wordt ingesteld op een gemiddelde lengte van 802 mm in plaats van 800 mm? Ga ervan uit dat de extra kosten voor het hout te verwaarlozen zijn.



Theorie

Frequentieverdeling, klokvormige verdeling, scheve verdeling, uniforme verdeling, meertoppige verdeling, uitschieter

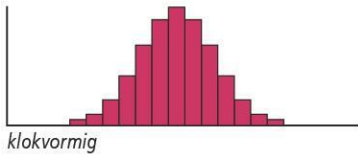
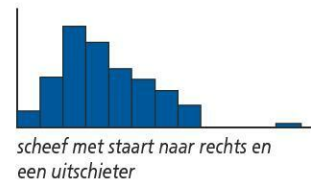
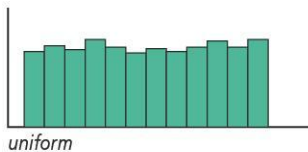
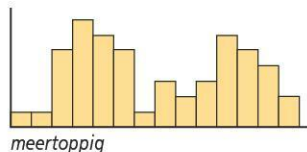
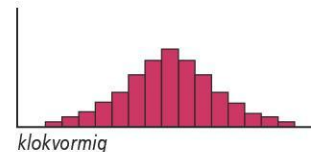
Datasets kun je ordenen in bijvoorbeeld frequentietabellen of staafdiagrammen. Dit zijn beide voorbeelden van een frequentieverdeling. De vorm van een staafdiagram geeft informatie over de frequentieverdeling.

Een klokvormige verdeling is een symmetrische verdeling met in het midden de hoogste staaf. Bij een klokvormige verdeling zijn de modus, de mediaan en het gemiddelde aan elkaar gelijk. Bij een scheve verdeling ligt de hoogste staaf meer naar links of naar rechts.

Bij een uniforme verdeling zijn alle staven ongeveer even hoog. Bij een meertoppige verdeling zie je in het staafdiagram meer dan één top.

Een waarneming die erg afwijkt van de andere waarnemingen noem je een uitschieter.

Voorbeeld



S1 Je ziet de gegevens van 404 jongeren.



- Welke vorm heeft het staafdiagram bij de variabele *lengte*, met de eerste klasse $[130, 135)$?
- Welke vorm heeft het staafdiagram bij de variabele *gewicht*, met de eerste klasse $[30, 40)$?

Theorie

Continu, discreet

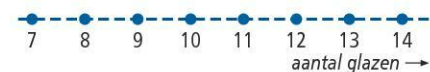
Een discrete variabele neemt alleen bepaalde waarden aan. Een continue variabele kan in principe alle waarden op een interval aannemen.

Je kunt de mogelijke waarden van een continue variabele voorstellen door een aaneengesloten (continue) lijn.

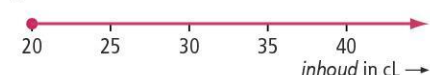
De mogelijke waarden van een discrete variabele kun je voorstellen met losse punten. Een discrete variabele kun je voorstellen met losse punten.

Voorbeeld

Het aantal glazen limonade is een discrete variabele.



De hoeveelheid limonade in cL in een glas is een continue variabele.



- S2** Autohandelaar Zwartjes verkoopt tweedehands Tesla's. Hij heeft vijf verschillende types op voorraad. De minimum leeftijd is 40 weken. Alle auto's hebben meer dan 32 000 km gereden. De kleuren zijn rood, blauw, zwart en grijs. Welke variabelen zijn discreet en welke variabelen zijn continu?

Theorie

Normale verdeling

De frequentieverdeling van een variabele kun je vaak benaderen met een klokvormige grafiek. De belangrijkste kenmerken van zo'n grafiek zijn:

- de grafiek is symmetrisch
- de symmetrieas ligt bij het gemiddelde μ
- het gemiddelde, de mediaan en de modus vallen samen
- de standaardafwijking σ is de afstand van de symmetrieas tot de buigpunten van de grafiek

Bij een normale verdeling gelden de volgende vuistregels.

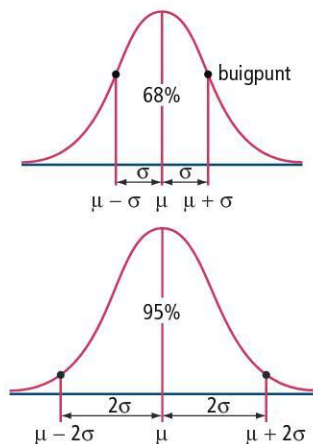
- 1 van de data ligt ongeveer 68% tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$.
- 2 van de data ligt ongeveer 95% tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$.

Deze verdeling wordt de normale verdeling genoemd.

Een variabele waarvan de frequentieverdeling benaderd kan worden door de normale verdeling heet normaal verdeeld.

Om na te gaan of een variabele normaal verdeeld is, controleer je of het bijbehorende staafdiagram klokvormig is. Om meer zekerheid te hebben, kun je controleren of de 1e en de 2e vuistregel kloppen bij de frequentieverdeling.

In een buigpunt verandert een toenemende stijging (of daling) in een afnemende stijging (of daling).



- S3** Van een normaal verdeelde dataset is bekend dat de meest voorkomende waarde gelijk is aan 12 en dat bij de frequentieverdeling de afstand van de symmetrieas tot het buigpunt gelijk is aan 3.
Tussen welke waarden ligt 95% van de data?

Theorie

Steekproef, steekproefomvang, aselekt, representatief

Om iets te weten te komen over een groep onderzoek je meestal slechts een deel van de groep. Je noemt dat een steekproef. Om juiste conclusies te kunnen trekken over een populatie, moet de steekproefomvang groot genoeg zijn en moet de steekproef aselekt zijn. Dat wil zeggen dat iedereen (of ieder ding) uit de populatie evenveel kans moet hebben om in de steekproef terecht te komen.
Een steekproef die representatief is, vormt een goede afspiegeling van de hele populatie.

Voorbeeld

De directie van een school met 2200 leerlingen wil onderzoeken of het beter is om de school om 8.30 uur te laten beginnen in plaats van om 8.15 uur.

Ze nemen twee steekproeven.

- A** Ze ondervragen bij de fietsenstalling de eerste 200 leerlingen die daar aankomen.
- B** Ze kiezen willekeurig 200 leerlingen uit het leerlingenbestand.

Steekproef A is niet aselekt en steekproef B wel.

- S4**
- a** Waarom is steekproef A in het voorbeeld niet aselekt?
 - b** Hoe groot is in beide steekproeven de steekproefomvang?
- S5**
-  Een fastfoodketen onderzoekt het percentage klanten dat met pin betaalt. Op honderd dagen wordt in een steekproef van 50 klanten bekeken hoeveel procent van de klanten met pin betaalt.
- a** Op een bepaalde dag is het aantal klanten dat met pin betaalt in de steekproef het grootst.
Hoeveel klanten in de steekproef betalen die dag met pin?
 - b** Maak een staafdiagram bij de variabele *percentage dat met pin betaalt*.
 - c** Schat hoeveel procent van de klanten gemiddeld met pin betaalt.



Vaardigheid

Je kunt nagaan of een variabele normaal verdeeld is.

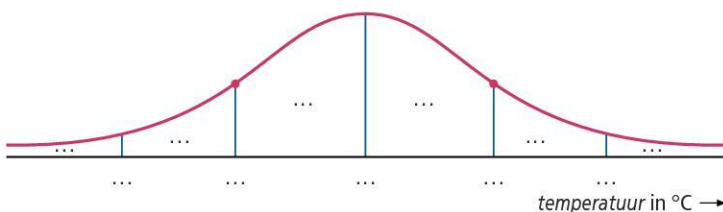
Om na te gaan of een variabele normaal verdeeld is, controleer je of het bijbehorende staafdiagram klokvormig is. Om meer zekerheid te hebben, kun je controleren of de 1e en de 2e vuistregel kloppen bij de frequentieverdeling.

- S6** Van 154 leerlingen zijn bij het onderdeel vergooien de resultaten genoteerd. De resultaten staan in de dataset.
-  **a** Zijn de prestaties bij het onderdeel vergooien normaal verdeeld?
- b** Zijn de prestaties van de jongens op het onderdeel vergooien normaal verdeeld?

Vaardigheid

Je kunt met de vuistregels van een normale verdeling rekenen.

Met de vuistregels kun je de oppervlakte onder de grafiek van een normale verdeling opsplitsen in zes stukken. Bij het maken van opdrachten waarin gegeven is dat een variabele normaal verdeeld is, is het handig om een schets te maken van de grafiek van de bijbehorende normale verdeling.



- S7** In een onderzoek van een fastfoodketen blijkt dat het bedrag dat een mannelijke klant uitgeeft bij een bestelling normaal verdeeld is met een gemiddelde van € 7,19 en een standaardafwijking van € 0,34.
- a** Hoeveel procent van de mannelijke klanten geeft tussen de € 6,85 en de € 7,87 uit?
- b** Van de vrouwelijke klanten is bekend dat 50% meer dan € 6,63 uitgeeft en 2,5% meer dan € 7,19 uitgeeft. Ook hier is sprake van een normale verdeling. Bereken de standaardafwijking van het bedrag dat een vrouwelijke klant uitgeeft.

- T1** Zijn de volgende variabelen discreet of continu? Licht je antwoord toe.
- a** De tijdsduur die een vertegenwoordiger doorbrengt bij een klant.
 - b** Het aantal vakantiewoningen dat jaarlijks in Friesland gebouwd wordt.
 - c** Het aantal schoolboeken van een 6 vwo leerling.
 - d** Het gemiddelde benzineverbruik per 100 kilometer van een personenauto.

- T2**  De directie van een school meent dat slechts 30% van de leerlingen het huiswerk dagelijks op orde heeft. Twee leerlingen in 5 vwo denken dat dit percentage hoger is.
- a** Op welke manier kunnen de leerlingen een aselechte representatieve steekproef organiseren?
 - b** In een aselechte representatieve steekproef onder 163 leerlingen blijkt dat 38% het huiswerk dagelijks wel op orde heeft.
Hoeveel leerlingen in de steekproef hadden hun huiswerk op orde?
 - c** Om te kijken of de 38% van de steekproef op toeval kan berusten, simuleren de leerlingen steekproeven op de computer. In deze simulatie wordt 1000 keer een steekproef genomen van 163 leerlingen uit een populatie waarvan 30% het huiswerk op orde heeft. In de dataset zie je de resultaten. In hoeveel steekproeven was het percentage 38% of hoger?

- T3**  Een autofabrikant is van plan een nieuw type autoband op de markt te brengen. Natuurlijk wordt een nieuw type band uitvoerig getest. Onder allerlei omstandigheden wordt er 35 000 km met de banden gereden en daarna wordt de profieldiepte opgemeten. In de dataset staan de testgegevens van 1000 banden.
- a** Maak een staafdiagram bij de variabele *profiel diepte* waarbij de eerste klasse $[0,60; 0,80)$ is.
 - b** Is het staafdiagram bij benadering klokvormig?
 - c** Onderzoek met de 1e en 2e vuistregel of de profieldiepte van de 5000 banden normaal verdeeld is.
 - d** De profieldiepte van een ander merk band, met de merknaam Excellent, is na 35 000 km normaal verdeeld met een gemiddelde van 1,75 mm en een standaardafwijking van 0,1 mm.
Volgens de wet wordt een band met een profieldiepte van minder dan 1,6 mm afgekeurd.
Geef een schatting van het percentage banden van dit merk dat na 35 000 km wordt afgekeurd.



T4 In de dataset vind je gegevens van kinderen in de leeftijd van 12 tot 16 jaar.



- a Maak staafdiagrammen bij de variabelen *leeftijd*, *schoenmaat* en *handspan*.
- b Beschrijf de karakteristieke vorm van elke verdeling.



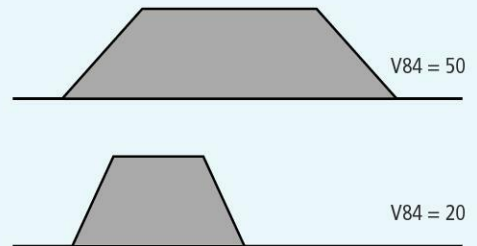
T5 In een textielfabriek worden rollen linnen gemaakt. Elke rol hoort 100 meter stof te bevatten. Er worden 400 rollen precies nagemeten. Het resultaat is een gemiddelde per rol van 102,1 meter met een standaarddeviatie van 2,1 meter.

- a Er worden 9000 rollen stof per dag afgeleverd. Hoeveel meter verwacht je dat er per dag gemiddeld te veel wordt afgeleverd?
- b Veronderstel dat de lengte van een rol normaal verdeeld is. Maak een schets van de grafiek van deze normale verdeling.
- c Hoeveel procent van de rollen bevat te weinig linnen?
- d De directie vindt dat te veel rollen te weinig linnen bevatten. Zij wil het percentage terugbrengen tot 2,5%. Dat kun je doen door de gemiddelde lengte per rol te verhogen.
Op welke lengte moet het gemiddelde worden afgesteld zo dat aan de wens van de directie wordt voldaan?

T6 Verkeersdrempels zijn bedoeld om de snelheid van automobilisten te beïnvloeden. Afhankelijk van de gewenste snelheid worden de drempels steiler of minder steil gemaakt. De drempel met $V_{84}=50$ is zo ontworpen dat 84% van de automobilisten de drempel passeert met een snelheid van minder dan 50 km per uur. In de praktijk blijkt dat de passeersnelheid bij een drempel normaal verdeeld is. Bij de drempel met $V_{84}=50$ werd een gemiddelde passeersnelheid van 43,2 km per uur gevonden, met een standaardafwijking van 6,8 km per uur.

- a Laat zien dat bij deze verdeling inderdaad 84% van de automobilisten niet harder dan 50 km per uur rijdt.
- b Voor een test zal de snelheid van 1200 automobilisten worden gemeten bij een drempel met $V_{84}=50$. Bij hoeveel van deze 1200 metingen kan op grond van eerdere ervaringen een snelheid van meer dan 36,4 km per uur worden verwacht?
- c In een kinderrijke buurt worden verkeersdrempels met $V_{84}=20$ aangebracht. De passeersnelheid is weer normaal verdeeld met een standaardafwijking is 2,1 km per uur. Bereken de gemiddelde passeersnelheid bij dit type drempels.

(Ontleend aan *CE havo wiskunde A 1990, tijdvak 1*)



Je kunt nagaan of een variabele normaal verdeeld is.

- E1** In een onderzoek onder 404 kinderen is onder andere het gewicht en de schoenmaat opgemeten.
- a** Maak een staafdiagram bij de variabele *schoenmaat* waarbij de eerste klasse $[0, 2)$ is.
 - b** Is het staafdiagram bij benadering klokvormig?
 - c** Bereken het percentage kinderen met een schoenmaat tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$.
 - d** Hoeveel procent van de kinderen heeft een schoenmaat tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$?
 - e** Is de schoenmaat van de kinderen normaal verdeeld?
 - f** Onderzoek of het gewicht van deze kinderen normaal verdeeld is.

- E2** In een fabriek worden metalen buizen voor de industrie geproduceerd. De buizen worden na productie tot op de tiende millimeter opgemeten met behulp van lasers.
- a** Is het staafdiagram bij de variabele *lengte* min of meer klokvormig?
 - b** Onderzoek met de 1e en de 2e vuistregel of de lengte van de buizen normaal verdeeld is.

Je kunt met de vuistregels van een normale verdeling rekenen.

- E3** Een tomatenteler weet uit jarenlange ervaring dat het gewicht van de tomaten die hij oogst normaal verdeeld is. Het gemiddelde gewicht van de tomaten is 68 gram met een standaardafwijking van 18 gram. Tomaten die minder wegen dan 50 gram worden geselecteerd om verwerkt te worden tot tomatenpuree. Tomaten met een gewicht tussen 50 gram en 104 gram zijn bestemd voor de binnenlandse handel en tomaten met een gewicht van meer dan 104 gram zijn bedoeld voor de export.
- a** Bereken welk percentage van de tomaten voor puree is, welk percentage in Nederland wordt verkocht en welk percentage voor de export bestemd is.
 - b** Een andere teler gebruikt meer kunstmest. Het gemiddelde gewicht van zijn tomaten is 86 gram en de standaardafwijking van de gewichten is ook 18 gram. Deze teler heeft een opbrengst van 4 200 000 tomaten. Bereken hoeveel kg van deze tomaten verwerkt worden tot puree.



E4 Een jamfabrikant heeft twee vulmachines. Machine A die tamelijk precies afgesteld kan worden zodat de standaardafwijking van het gewicht 6 gram is en machine B waarbij de standaardafwijking 15 gram is. Op de wikkel van de jampotjes komt te staan dat het netto gewicht 340 gram is. Machine A wordt op een gemiddelde van 346 gram en machine B op een gemiddelde van 355 gram afgesteld.

De gewichten zijn bij beide machines normaal verdeeld.

- a** Schets in één figuur voor beide machines de grafiek van de normale verdeling.
- b** Aan welke machine geef jij als consument de voorkeur? Waarom?
- c** Ga voor beide machines na hoeveel procent van de potjes minder dan 340 gram zal wegen.
- d** De fabrikant besluit machine B te vervangen door een nieuwe. De machine die nu wordt aangeschaft vult de potjes met een standaardafwijking van 3,5 gram. De machine wordt zo afgesteld dat maximaal 2,5% van de potjes een gewicht onder de 340 gram heeft. Op welk gemiddelde gewicht wordt de machine afgesteld?

E5  **a** Geef de modus van de leeftijd van de docenten die in 2012 werkzaam waren in het Voortgezet Onderwijs.

- b** Wat is de modus van docenten dat in 2002 in het vo werkzaam waren?
- c** Hoe zie je dat de leeftijdsverdeling van docenten werkzaam in het vo in 2012 niet normaal verdeeld is?
- d** Bereken hoeveel procent van de docenten werkzaam in het vo in 2012 ouder was dan 50 jaar.

E6 Een omroepvereniging hield een enquête onder haar leden om de waardering voor haar programma's te onderzoeken. Aan 2000 leden werd een enquêteformulier toegestuurd met 25 vragen. Het formulier werd teruggestuurd door 1143 leden, waarvan er 973 tevreden waren.

- a** Uit welke populatie is deze steekproef getrokken?
- b** Hoe groot is de steekproef?
- c** Waarom is het niet zeker dat de meerderheid van de leden van de omroepvereniging tevreden is?
- d** Zeggen de resultaten van de steekproef iets over de waardering van alle Nederlanders voor de programma's van die omroep?

Steekproeven

Over het algemeen zal een grote steekproef een betrouwbaarder resultaat geven dan een kleine dachten ze in 1936 bij het blad *The Literary Digest*. In 1936, midden in een economische crisis met veel werklozen, stuurden ze 10 miljoen briefkaarten naar hun abonnees en naar personen uit telefoonboeken en uit registers van autokentekens. Op de briefkaart kon de keuze tussen Landon (republikein) en Roosevelt (democraat) vermeld worden. Het resulteerde in 2,4 miljoen reacties met 57% voor Landon en 43% voor Roosevelt. De verkiezingen werden echter door Roosevelt gewonnen met 61% tegen 37%. Het blad verloor aan geloofwaardigheid en aan aanzien en was twee jaar later verdwenen. Uiteraard volgde er een onderzoek naar oorzaken van dit falen.

Opdracht

- Wat kunnen volgens jou de oorzaken zijn dat deze zeer grote steekproef faalde?

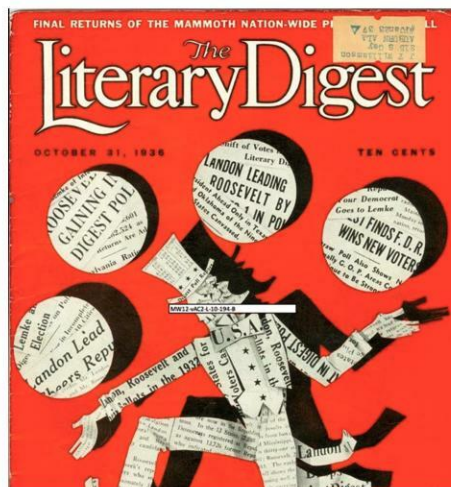
Het gevolg was dat er gezocht werd naar methoden waarbij steekproeven gebaseerd zijn op kansrekening, waardoor personen aselekt werden gekozen. George Gallup, oprichter van het onderzoeksbureau Gallup, dat in meer dan 20 landen opinieonderzoek doet, gebruikte deze methode in 1948. Zijn bureau voorspelde dat de democraat Truman het zou verliezen van zijn uitdager Dewey. Steekproeven wezen uit dat Dewey met 49,5% tegen 44,5% zou winnen. De *Chicago Daily Tribune* was hiervan zo overtuigd dat deze krant de uitslag vroegtijdig publiceerde. Truman won echter de verkiezing met 49,1% tegen 45,1%. Met veel plezier toonde Truman dan ook de miskleun van de krant.

De belangrijkste oorzaken van het falen van de onderzoekers was het stoppen van de interviews tien dagen voor de verkiezing en de aanname dat mensen die nog geen keuze konden maken niet zouden stemmen.

In Nederland voelen veel mensen zich overvallen door telefonische enquêtes. Onderzoeksbureaus hanteren daarom ook wel bestanden waarin allerlei soorten mensen zijn opgenomen die bereid zijn om mee te werken aan onderzoeken. Je kunt, als je ouder bent dan 18 jaar, je aanmelden voor het *EenVandaag* *Opiniepanel*. Je moet wel gegevens, zoals leeftijd, opleiding, beroep, inkomen, afkomst en dergelijke invullen.

Opdracht

- Is dit panel representatief voor Nederland?
- Noem enkele vragen waarvoor je het panel kunt gebruiken.



SE

CE

Vaardigheden

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Meten
- Vergelijkingen en ongelijkheden oplossen
- Formules herleiden
- Hellingen benaderen

Flt No.	Remarks
	Gate Opens 16:50
	Gate Opens 16:40
	Gate Opens 16:50
	Gate Opens 16:55
	Gate Opens 16:55
	Gate Opens 17:00
	Gate Opens 17:00
	Gate O

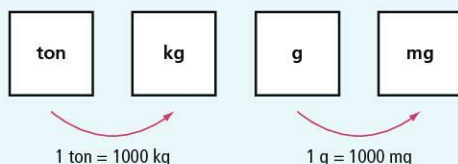
Time	Destination	Flt No.	Remarks
20:05	Vienna		
20:05	an Bergamo		Gate Open
20:05	Barcelona		Gate Open
20:10	Cologne		Gate Open
20:10	Bologna		Gate Open
20:20	Hanover		Gate Open
20:25	Stutter		Gate Open

Meten**1** Vul in.

- a** $9600 \text{ dm} = \dots \text{ km}$ **f** $1,3 \text{ m}^2 = \dots \text{ cm}^2$
b $9600 \text{ dm}^2 = \dots \text{ km}^2$ **g** $0,0082 \text{ km} = \dots \text{ cm}$
c $9600 \text{ dm}^3 = \dots \text{ kuub}$ **h** $1,3 \text{ kuub} = \dots \text{ L}$
d $9600 \text{ mm}^3 = \dots \text{ cL}$ **i** $0,24 \text{ cm}^3 = \dots \text{ mm}^3$
e $38 \text{ dL} = \dots \text{ cc}$ **j** $4,8 \text{ hm} = \dots \text{ dm}$

Theorie

Veel gebruikte maten voor gewichten zijn ton, kilogram, gram en milligram. Voor het omrekenen van die maten kun je het volgende schema gebruiken. Elke stap naar rechts betekent $\times 1000$, elke stap naar links betekent : 1000.

**2** Vul in.

- a** $1,2 \text{ ton} = \dots \text{ kg}$ **d** $180 \text{ mg} = \dots \text{ g}$
b $1,5 \text{ kg} = \dots \text{ g}$ **e** $800 \text{ kg} = \dots \text{ ton}$
c $67 \text{ g} = \dots \text{ mg}$ **f** $250 \text{ g} = \dots \text{ kg}$

Theorie

Bij het rekenen met tijden kun je niet het decimale stelsel gebruiken. In een uur gaan immers 60 minuten en in een minuut gaan 60 seconden. Voor het noteren van tijden gebruik je tussen de uren, minuten en seconden een punt.

Voorbeeld

$1.07.45,67$ uur is 1 uur, 7 minuten en 45,67 seconden.
 Dat is $60 \times 60 + 7 \times 60 + 45,67 = 4065,67$ seconden.

3 Vul in.

- a** $2.16.33 \text{ uur} = \dots \text{ seconden}$
b $28.14,23 \text{ minuten} = \dots \text{ seconden}$
c $1234,56 \text{ seconden} = \dots \text{ minuten} + \dots \text{ seconden}$
d $1\,000\,000\,000 \text{ seconden} = \dots \text{ jaar} + \dots \text{ dagen}$

- 4** **a** Een jachtluipaard heeft een snelheid van 25 meter per seconde. Bereken zijn snelheid in km per uur.
b Een wielrenner heeft een snelheid van 56 km per uur. Bereken zijn snelheid in meter per seconde.
c Een roeier legt 9500 meter af in 48 minuten. Bereken zijn gemiddelde snelheid in km per uur.

Vergelijkingen en ongelijkheden oplossen

5 Los de vergelijkingen op met de balansmethode.

a $5x - 1 = 2x + 8$

d $13 - 4x = 2(x + 7)$

b $8x + 5 = 5(x + 8)$

e $x(x - 6) = x^2 + 12$

c $10 - 3(x + 1) = 11x$

f $x(x - 1) = (x - 2)(x - 3)$

Theorie

Vergelijkingen kun je vaak oplossen met de balansmethode. Soms moet je ze eerst vereenvoudigen. De regels die je daarbij kunt gebruiken, staan hieronder.

Uit $A \cdot B = 0$ volgt $A = 0$ of $B = 0$.

Uit $\frac{A}{B} = C$ volgt $A = B \cdot C$. ($B \neq 0$)

Uit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ volgt $A \cdot D = B \cdot C$. ($B \neq 0$, $D \neq 0$)

Voorbeeld

Los op: $\frac{1}{2x+7} = \frac{4}{x}$

Oplossing

$$\frac{1}{2x+7} = \frac{4}{x}$$

$$x = 4(2x + 7)$$

$$x = 8x + 28$$

$$-7x = 28 \text{ dus } x = -4$$

6 Los de vergelijkingen op.

a $(x + 7)(x - 1) = 0$

d $2x^2(4x - 21) = 0$

b $(3x + 8)(2x - 1) = 0$

e $x^3(3x - 4) = 0$

c $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$

f $(x^3 - 8)(x^5 - 1) = 0$

7 Los de vergelijkingen op.

a $\frac{n+32}{n} = 17$

e $\frac{a+4}{a} - 5 = 2$

b $\frac{7p+1}{5-3p} = 4$

f $\frac{9}{x+2} = \frac{8}{x}$

c $\frac{1}{y} + 3 = \frac{6}{y} - 2$

g $\frac{7}{2a-1} = \frac{18}{7a-10}$

d $2 + \frac{x}{x-2} = -3$

h $\frac{6}{p+1} = \frac{12p}{2p^2+1}$

8 a Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^2 = 25$?

b Los op $x^2 = 9$

c Los op $x^2 = 15$

- 9 In deze opdracht los je de vergelijking $(x + 3)^2 = 25$ op.
- Welke getallen kunnen er op de plaats van $x + 3$ staan?
 - Vul in.
 $x + 3 = \dots$ of $x + 3 = \dots$
 $x = \dots$ of $x = \dots$
- 10 Gegeven is de vergelijking $(x - 5)(2x - 1) = (x - 5)(x + 6)$.
- Controleer dat $x = 5$ een oplossing van de vergelijking is.
 - Als je aan beide kanten deelt door $(x - 5)$, houd je de vergelijking $2x - 1 = x + 6$ over.
Los deze vergelijking op.
 - Leg uit waarom de gevonden oplossing in opdracht b ook voldoet aan de oorspronkelijke vergelijking.
 - Wat zijn dus de oplossingen van de oorspronkelijke vergelijking?

Theorie

Uit $A \cdot B = A \cdot C$ volgt $A = 0$ of $B = C$.

Uit $A^2 = B^2$ volgt $A = B$ of $A = -B$.

Voorbeeld 1

Los op: $(x - 7)(4x + 5) = (x - 7)(3x + 11)$

Oplossing

$$(x - 7)(4x + 5) = (x - 7)(3x + 11)$$

$$x - 7 = 0 \text{ of } 4x + 5 = 3x + 11$$

$$x = 7 \text{ of } x = 6$$

Voorbeeld 2

Los op: $(2x + 5)^2 = (x - 2)^2$

Oplossing

$$(2x + 5)^2 = (x - 2)^2$$

$$2x + 5 = x - 2 \text{ of } 2x + 5 = -(x - 2)$$

$$x = -7 \text{ of } 2x + 5 = -x + 2$$

$$x = -7 \text{ of } 3x = -3$$

$$x = -7 \text{ of } x = -1$$

- 11 Los de vergelijkingen op.
- $(3x + 7)(x - 3) = (3x + 7)(2x + 1)$
 - $(3t + 7)(t - 3) = (2t + 1)(t - 3)$
 - $p(5p - 8) = p(3p + 2)$
 - $(x - 2)(4x - 3) = (x + 2)(x - 2)$

- 12 Los de vergelijkingen op.

a $(7a + 8)^2 = 100$

d $d^2 = (d + 1)^2$

b $(12 - 2b)^2 = 144$

e $(24 - e)^2 = (5e)^2$

c $(3c + 5)^2 = (c - 3)^2$

f $(4f + 9)^2 = (2f)^2$

- 13** De oplossing van $\sqrt{x} = 7$ is 49, want $\sqrt{49} = 7$.

a Vul in.

$$\sqrt{x-3} = 7$$

$$x-3 = \dots, \text{ want } \dots$$

$$x = \dots$$

b Los op $\sqrt{2x+1} = 9$.

Theorie

Uit $\sqrt{A} = B$ volgt $A = B^2$ ($B \geq 0$)

Voorbeeld

Los op: $-4 + \sqrt{x-3} = 1$

Oplossing

$$-4 + \sqrt{x-3} = 1$$

$$\sqrt{x-3} = 5 \quad \text{links en rechts} + 4$$

$$x-3 = 25 \quad \text{gekwadrateerd}$$

$$x = 28 \quad \text{links en rechts} + 3$$

- 14** Los de vergelijkingen op.

a $\sqrt{7x-1} = 6$

d $5 + \sqrt{p-7} = 18$

b $\sqrt{7x-1} = \sqrt{x}$

e $-3 + \sqrt{8-t} = 5$

c $\sqrt{7x-1} = \sqrt{x+6}$

f $4 - \sqrt{6-3T} = 0$

Formules herleiden

- 15** Herleid; druk y uit in x .

a $5x + 2y + 8 = 0$

e $x = \sqrt{y} + 3$

b $2(y+5) = x-3$

f $\frac{x}{y} = 8 - 3x$

c $2(x+y) - (2-x) = y$

g $\frac{y}{x} - 3 = x$

d $x = \sqrt{y+3}$

h $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$

Hellingen benaderen

- 16** Een productiebedrijf berekent haar totale opbrengst per dag in duizenden euro's met de formule $TO = 10q - q^2$.

Hierin is q het aantal producten in duizendtallen.

De dagproductie ligt meestal rond de 4000 stuks.

a Bereken de dagopbrengst bij 4000 stuks.

b De opbrengst van één extra product (de marginale opbrengst) is ongeveer gelijk aan de helling bij $q = 4$. Benader grafisch deze helling.

Voorbeeld

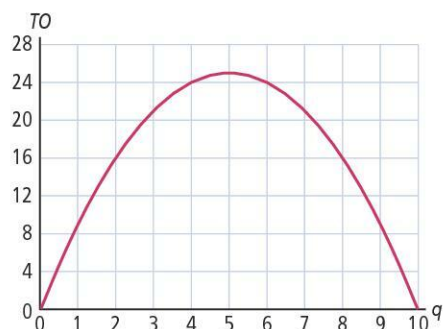
Herleid $\frac{x}{y} + 2x = 5$; druk y uit in x .

Oplossing

$$\frac{x}{y} = 5 - 2x \quad \text{links en rechts} - 2x$$

$$x = (5 - 2x) \cdot y \quad \text{links en rechts} \cdot y$$

$$y = \frac{x}{5 - 2x} \quad \text{links en rechts} : (5 - 2x)$$





SE

CE

K



In dit hoofdstuk

In het hoofdstuk 7 heb je geleerd hoe je kansen berekent en wat een kansverdeling en de verwachtingswaarde is. In hoofdstuk 10 heb je gezien wat een normale verdeling is bij een statistische variabele.

Ook een kansverdeling kan normaal verdeeld zijn en de vuistregels van de normale verdeling kun je bij deze kansverdelingen gebruiken. Verder leer je een aantal rekenregels die je kunt toepassen bij het berekenen van de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van variabelen die afhangen van toeval.

In deel 3 komt nog een hoofdstuk waarbij je leert hoe je met behulp van deze kennis uitspraken kunt doen over de betrouwbaarheid van kansexperimenten.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 42
- *Ordenen en structureren* opdracht 14
- *Logisch redeneren en bewijzen* opdracht 22

V1 Victor en Anton spelen al jaren schaak met elkaar. Ze hebben steeds het resultaat bijgehouden. Gemiddeld wint Victor 14% van de partijen en Anton 18%. Die percentages veranderen nauwelijks.

- Bereken de kans dat een partij eindigt in remise.
- Bereken de kans dat Victor de eerstkomende vier partijen wint.
- Bereken de kans dat Anton van de eerstkomende vijf partijen geen één weet te winnen.
- Degene die een partij wint, krijgt 1 punt. Eindigt een partij in remise, dan krijgen beide spelers een $\frac{1}{2}$ punt. Bereken de kans dat beide spelers na drie partijen evenveel punten hebben.

Theorie

Bij een herhaald kansexperiment met steeds twee mogelijkheden kun je een **rooster** tekenen. De kans op een gebeurtenis die hoort bij een punt in het rooster bereken je door de kans op een route naar dat punt te vermenigvuldigen met het aantal routes.

Bij vragen over 'hoogstens', 'minstens', 'meer dan' of 'minder dan' kun je gebruik maken van de **complementregel**:
 $P(A) = 1 - P(\text{niet-}A)$.

Voorbeeld

Je werpt acht keer met een dobbelsteen.
 Bereken de kans dat je drie keer een 4 gooit.

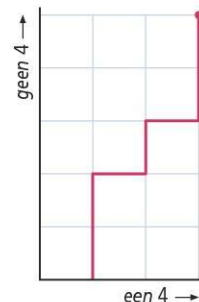
Oplossing

De gebeurtenis 'drie keer een 4' komt overeen met het punt (3, 5) in het rooster.

Het aantal routes naar dit punt is $\binom{8}{3} = 56$.

De kans op één van die routes naar het punt (3, 5) is $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^5$.

De gevraagde kans is $56 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0,1042$.

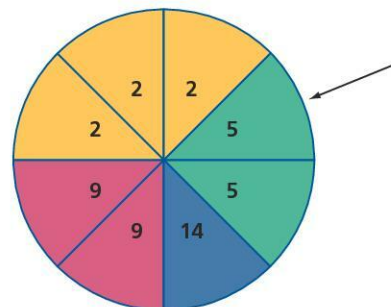


V2 In een vaas zitten zeven rode en drie witte knikkers. Carolien trekt zonder terugleggen vijf keer een knikker uit de vaas en legt ze in volgorde van trekking naast elkaar op tafel.

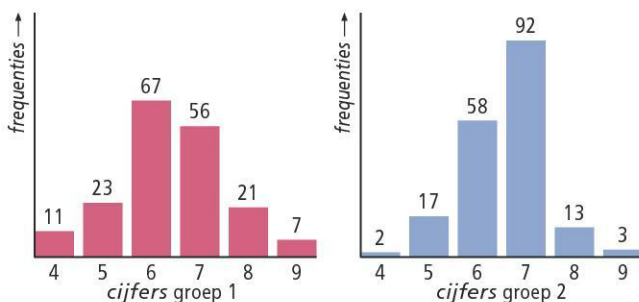
- Bereken de kans op de volgorde *rood, rood, rood, wit, wit*.
- Bereken het aantal mogelijke rijtjes met drie rode en twee witte knikkers.
- Bereken de kans op drie rode en twee witte knikkers.
- Bereken de kans op minstens één witte knikker.

- V3** Een kanstol is verdeeld in acht even grote sectoren. In elke sector staat een getal. De tol wordt gedraaid; de uitslag is het getal dat wordt aangewezen.

<i>uitkomst</i>	2	5	9	14
<i>kans</i>	...	...	...	...



- a** Vul de kansverdelingstabel in.
- b** Als je het experiment 1000 keer uitvoert, hoe vaak kun je dan de uitslag 14 verwachten?
- c** De verwachtingswaarde is de gemiddelde uitkomst die je kunt verwachten als je het experiment heel vaak uitvoert. Bereken de verwachtingswaarde van de uitslag.
- V4** Je gaat in de vakantie de planten van Jeroen verzorgen. Je hebt zijn sleutelbos met vier sleutels gekregen, maar je bent vergeten welke sleutel van de voordeur is. Je zult ze dus één voor één moeten proberen. Een sleutel die je eenmaal hebt geprobeerd, probeer je niet opnieuw.
- a** Stel een kansverdeling op van het aantal sleutels dat je moet proberen om de voordeur van het slot te krijgen.
- b** Hoe groot is de kans dat je meer dan twee sleutels moet proberen?
- V5** Twee groepen van elk 185 studenten hebben aan het begin van hun studie meegedaan aan een instaptoets wiskunde. De staafdiagrammen geven de verdeling van de cijfers weer. Je leest bijvoorbeeld af dat 58 studenten in groep 2 het cijfer 6 hebben gehaald.



- a** Bereken het gemiddelde cijfer van elk van de twee groepen.
- b** De standaardafwijkingen van de verdelingen zijn 0,86 en 1,14. Welke standaardafwijking hoort bij groep 1? Verklaar je antwoord.

De standaardafwijking is een spreidingsmaat. De grootte ervan zegt iets over de spreiding van de data rond het gemiddelde.

11.1 Stochasten

Je leert

- wat een toevalsvariabele of een stochast is
- wat onafhankelijke en afhankelijke gebeurtenissen zijn

Leerroutes

- ondersteunend: 1–2–3–4–5–6–7–08–9
- doorlopend: 1–2–3–4–5–6–7–8–9
- uitdagend: 1–2–4–5–6–7–8–9–U1

Bij verschillende kansexperimenten worden variabelen gedefinieerd.

- Welke waarden kunnen de variabelen A , L , K en I aannemen?

A is het aantal keer 3 ogen gooien met vijf dobbelstenen.

L is de lengte van een willekeurige leerling.

K is de kleur van een willekeurige M&M.

I is het inkomen van een willekeurige Nederlander.

- 1 Uit een vaas met vijf rode en acht blauwe knikkers worden zonder terugleggen drie knikkers gepakt. R is het aantal rode knikkers. In de tabel zie je de mogelijke uitkomsten u van R . Met $P(R = u)$ wordt bedoeld de kans dat R gelijk is aan u . De kans op één rode knikker is gelijk aan 0,4895.

a Ga met een berekening na dat $P(R = 1) = 0,4895$.

b Vul de tabel verder in.

c Bereken de verwachtingswaarde van het aantal rode knikkers in dit experiment.

uitkomst u	$P(R = u)$
0	...
1	0,4895
2	...
3	...

Theorie

Een **toevalsvariabele** of een **stochast** is een variabele waarvan de waarde een getal is dat afhangt van de toevallige uitkomst in een kansexperiment. Met $P(X = 2)$ wordt bedoeld de kans op de uitkomst 2, dat wil zeggen de kans dat stochast X de waarde 2 aanneemt.

Een overzicht met alle mogelijke waarden die X kan aannemen en de bijbehorende kansen heet de **kansverdeling** van die stochast. De **verwachtingswaarde** $E(X)$ is de gemiddelde waarde die je mag verwachten als het experiment een groot aantal keren wordt herhaald.

Voorbeeld

Er wordt drie keer zonder terugleggen een bal getrokken uit een vaas met twee rode en drie witte ballen. Stochast X is het aantal rode ballen in de trekking.

Stel de kansverdeling van X op en bereken $E(X)$.

Oplossing

X kan de waarden 0, 1 en 2 aannemen.

$$P(X = 1) = 3 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = 0,6$$

uitkomst u	0	1	2
$P(X = u)$	0,1	0,6	0,3

$$E(X) = 0 \times 0,1 + 1 \times 0,6 + 2 \times 0,3 = 1,2$$

2 Ga bij het voorbeeld na dat $P(X = 0) = 0,1$ en $P(X = 2) = 0,3$.

3 In een vaas zitten 20 balletjes. Op elf van die balletjes staat het getal 100 gedrukt, op zes het getal 200, op twee het getal 500 en op één het getal 1000. Je trekt willekeurig een bal uit de vaas. X is het getal op het getrokken balletje.

- Waarom is X een toevalsvariabele?
- Stel de kansverdeling van X op.
- Bereken $E(X)$.

4 Er wordt met twee dobbelstenen gegooid. Stochast V is het verschil van de aantallen ogen.

- Beschrijf gebeurtenis $V = 0$. Hoe groot is de kans daarop?
- Stel de kansverdeling van V op.
- Bereken de verwachtingswaarde van V .

5 Het valt Marieke op dat veel leerlingen op haar school met een spijkerbroek aan ook sportschoenen dragen. Ze vraagt zich af of leerlingen in een spijkerbroek eerder voor sportschoenen kiezen. In de tabel zie je een inventarisatie in de hele vwo5-afdeling van haar school op een bepaalde dag.

	spijkerbroek	geen spijkerbroek
sportschoenen	15	4
geen sportschoenen	29	28

Gebeurtenis A is: Een willekeurige leerling draagt sportschoenen. Gebeurtenis B is: Een willekeurige leerling draagt een spijkerbroek.

- Bereken de kans op gebeurtenis A .
- Leg uit dat de kans op gebeurtenis A onder de voorwaarde dat gebeurtenis B plaats vindt gelijk is aan $\frac{15}{44}$.
- Welke conclusie zal Marieke trekken?

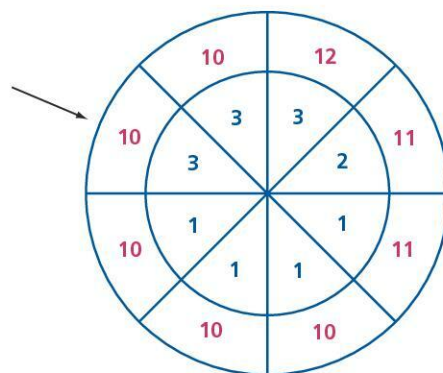
6 Een draaischijf is verdeeld in een aantal sectoren. In de buitenste ring staan rode getallen, in de binnenste ring staan blauwe getallen. Na draaien is R de uitkomst van de buitenring en B de uitkomst van de binnenring.

In de figuur geldt dus $R = 10$ en $B = 3$.

- Bereken $P(B = 3)$.
- Is de kans op $B = 3$ onder de voorwaarde dat $R = 10$ plaats vindt, even groot is als $P(B = 3)$? Verklaar je antwoord.
- Bereken $P(B = 1)$.
- Hoe groot is de kans op $B = 1$ onder de voorwaarde dat $R = 11$?

Een uitkomst of een aantal uitkomsten van een kansexperiment heet een gebeurtenis.

Onder voorwaarde dat gebeurtenis B plaats vindt, betekent dat je in dit geval alleen naar de groep kijkt die aan gebeurtenis B voldoen.



Theorie

Twee gebeurtenissen A en B heten **onafhankelijk** als geldt:

- $P(A)$ gelijk is aan de kans op gebeurtenis A onder de voorwaarde dat B plaats vindt. In dat geval heeft het optreden van B geen invloed op de kans dat A gebeurt.
- $P(B)$ gelijk is aan de kans op gebeurtenis B onder de voorwaarde dat A plaats vindt. In dat geval heeft het optreden van A geen invloed op de kans dat B gebeurt.

Vaak is direct aan de gebeurtenissen te zien dat ze geen invloed op elkaar hebben en dus onafhankelijk zijn. In andere gevallen moet je de kansen apart berekenen en vergelijken.

Gebeurtenissen die niet onafhankelijk zijn, heten **afhankelijk**.

Twee stochasten X en Y heten onafhankelijk als voor alle mogelijke uitkomsten a van X en b van Y geldt dat gebeurtenis $X = a$ geen invloed heeft op $P(Y = b)$ en omgekeerd.

Voorbeeld

Je trekt een kaart uit een volledig spel. Zijn de gebeurtenissen H de kaart is een harten en V de kaart is een vrouw onafhankelijk?

Oplossing

	vrouw	geen vrouw	totaal
hart	1	12	13
geen hart	3	36	39
totaal	4	48	52

$$P(H) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

De kans op een harten als je weet dat de kaart een vrouw is, is ook gelijk aan $\frac{1}{4}$.

$$P(V) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

De kans op een vrouw als je weet dat de kaart een harten is, is ook gelijk aan $\frac{1}{13}$.

De gebeurtenissen H en V zijn onafhankelijk.

- 7 In een kaartspel is de gebeurtenis A het trekken van een aas en gebeurtenis K het trekken van een klaver. Ga na of de gebeurtenissen A en K onafhankelijk zijn.

Ondersteunende route → maak opdracht 08

- 8 Een vaas bevat negen rode en zes blauwe genummerde knikkers. Je ziet welke nummers en hoe ze verdeeld zijn. Er wordt één knikker getrokken.

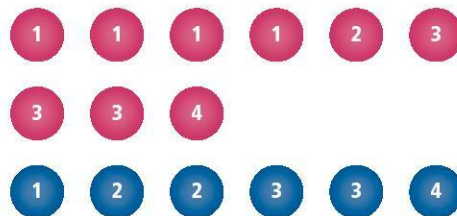
Gebeurtenis R is: De knikker is rood.

Gebeurtenis D is: De knikker heeft nummer 3.

Gebeurtenis T is: De knikker heeft nummer 2.

a Ga na of de gebeurtenissen R en D onafhankelijk zijn.

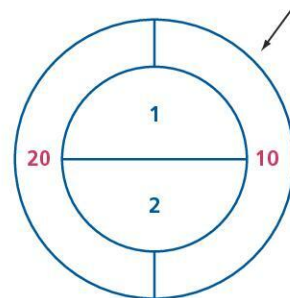
b Ga na of de gebeurtenissen R en T onafhankelijk zijn.



- 9 Een draaischijf is in vier delen verdeeld. De buitenste delen bevatten rode getallen, de binnenste delen bevatten blauwe getallen. Na draaiing is R de uitkomst van het rode getal en B de uitkomst van het blauwe getal. In de figuur is $R = 10$ en $B = 1$.

a Welke uitkomsten zijn er mogelijk bij stochast R ? En welke bij stochast B ?

b Onderzoek of de stochasten R en B onafhankelijk zijn.



Uitdagende route → maak opdracht U1

08

Een vaas bevat tien groene en zes geel genummerde knikkers. Je ziet welke nummers en hoe ze verdeeld zijn. Er wordt één knikker getrokken.

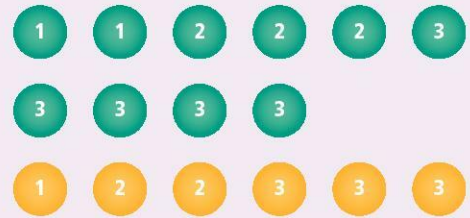
Gebeurtenis A is: De knikker heeft nummer 3.

Gebeurtenis B is: De knikker is groen.

Gebeurtenis C is: De knikker heeft nummer 1.

Gebeurtenis D is: De knikker is geel.

- Elke knikker heeft een kleur en een nummer. Hoe die verdeeld zijn kun je overzichtelijk in een tabel weergeven. Zo zie je bijvoorbeeld dat het nummer 2 in totaal vijf keer voorkomt en dat er drie gele ballen met het nummer 3 zijn.
Vul de tabel verder in.
- Laat zien dat bij het trekken van een knikker de kans op een knikker met nummer 3 gelijk is aan $\frac{1}{2}$.
- Hoeveel groene knikkers hebben het nummer 3?
- Laat zien dat de kans dat een knikker het nummer 3 heeft onder de voorwaarde dat hij groen is, gelijk is aan $\frac{1}{2}$.
- Waarom zijn de gebeurtenissen A en B onafhankelijk?
- Bereken de kans op een groene knikker.
- Bereken de kans op een groene knikker onder de voorwaarde dat de knikker het nummer 1 heeft.
- Waarom zijn de gebeurtenissen B en C afhankelijk?
- Ga na of de gebeurtenissen A en D onafhankelijk zijn.



	groen	geel	totaal
nummer 1	2	...	...
nummer 2	3	...	5
nummer 3	...	3	...
totaal	10	...	16

Uitdagende opdrachten

U1

Theo en Anke moeten als huiswerkopdracht twintig keer tossen met een geldstuk en de uitkomsten opschrijven. Daar hebben ze geen zin in en daarom schrijven ze zo maar wat op.

- Laat zien dat de kans dat de rij van Theo wordt gegooid even groot is als de kans dat de rij van Anke wordt gegooid.
- Volgens Anke is de rij van Theo niet geloofwaardig. Waarom zou Anke dat denken?
- Je kunt ook letten op het aantal wisselingen in de rij, van K naar M en omgekeerd. Noem de stochast W het aantal wisselingen.
Leg uit dat er maximaal 19 keer gewisseld kan worden en dat de kans op een wisseling gelijk is aan 50%.
- Hooveel wisselingen kun je in een rij verwachten?
- Welke rij uitkomsten vind jij geloofwaardiger, die van Theo of die van Anke?

									Theo
m-m-m-m-m-m-m-m-m-m-									
k-k-k-k-k-k-k-k-k-k									
								Anke	
k-m-k-m-m-k-m-k-m-k-									
m-k-m-m-k-m-k-m-k-m									

11.2 Standaardafwijking van een stochast

Je leert

- hoe je de standaardafwijking van een stochast berekent

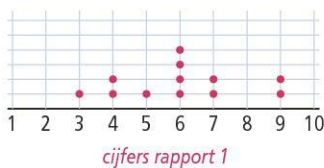
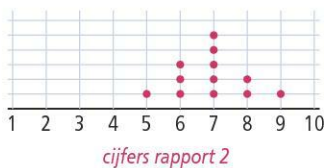
Leerroutes

- ondersteunend: 10—11—12—013—13—15—16
- doorlopend: 10—11—12—13—14—15—16
- uitdagend: 10—11—12—13—14—16—U2



Een computer heeft 1000 keer het gooien met dobbelstenen gesimuleerd. Je ziet de frequentieverdeling van de som van de ogen bij twee dobbelstenen en bij drie dobbelstenen in de vorm van staafdiagrammen.

- Bij welke twee verdelingen is de standaardafwijking het grootst?



- 10** In de dotplots zie je de cijfers op rapport 1 en rapport 2 voor van een aantal leerlingen voor wiskunde C. Je leest er bijvoorbeeld in af dat op rapport 1 vier leerlingen een 6 hadden en geen enkele leerling een 8.

- a** Vul bij rapport 1 de frequentietabel verder in en bereken het gemiddelde rapportcijfer.

cijfer	3	4	5	6	7	8	9
frequentie	...	...	...	4	...	0	...

- b** Bereken met je rekenmachine de standaardafwijking.
c Bij rapport 2 ziet de dotplot van de cijfers er anders uit. Leg zonder berekening uit waarom de standaardafwijking kleiner is geworden.



→ Instructie rekenmachine | centrum en spreidingsmaten

- 11** Volgens het etiket zitten er 100 pepermuntjes in een doosje. In de praktijk ligt dat gemiddelde vaak iets hoger. In de tabel zie je de resultaten van een steekproef van 200 doosjes.

<i>aantal</i>	98	99	100	101	102	103
<i>frequentie</i>	4	9	165	11	7	4

Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking.



- 12** Neem aan dat de steekproef van opdracht 11 representatief is geweest.

- a** Leg uit dat de kans dat een willekeurig gekozen doosje 101 pepermuntjes bevat gelijk is aan 0,055.
b Het aantal pepermuntjes in een verpakking kun je opvatten als een stochast X met een kansverdeling.

uitkomst u	98	99	100	101	102	103
$P(X = u)$	...	...	...	0,055	...	...

Vul de kansverdeling verder in en bereken $E(X)$.

- c** Leg uit waarom $E(X)$ gelijk is aan het gemiddelde wat je berekend hebt bij opdracht 11.
d Bereken de standaardafwijking door in plaats van de frequenties de kansen in te vullen. Vergelijk je antwoord met de standaardafwijking bij opdracht 11.

Theorie

Net zoals je bij een frequentieverdeling het gemiddelde kunt berekenen, kun je bij een kansverdeling van een stochast X de verwachtingswaarde $E(X)$ berekenen.

Op dezelfde manier als bij een frequentieverdeling kun je bij de kansverdeling van een stochast X een standaardafwijking berekenen. Dit noem je de **standaardafwijking van X** . Je noteert dit als $\sigma(X)$. In plaats van standaardafwijking zeg je ook wel standaarddeviatie.

Voorbeeld

Bij het werpen met een dobbelsteen is X het aantal geworpen ogen. Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.

Oplossing

<i>aantal ogen</i>	1	2	3	4	5	6
<i>kans</i>	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Met de rekenmachine vind je $E(X) = 3,5$ en $\sigma(X) \approx 1,71$.

Ondersteunende route → maak opdracht 013

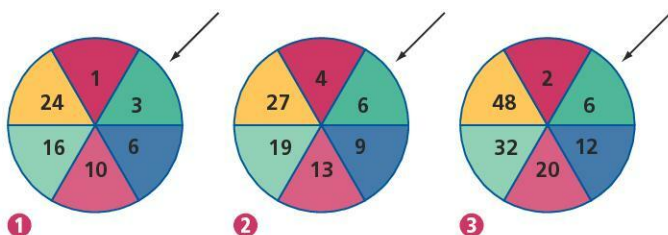
- 13** Je werpt drie keer met een zuivere munt. De toevalsvariabele K is het aantal keer dat je kop werpt. Bereken $E(K)$ en $\sigma(K)$.

- 14** In een vaas zitten drie rode en tien witte knikkers. Je trekt zonder terugleggen knikkers uit de vaas tot je een witte knikker hebt getrokken. X is het aantal knikkers dat je trekt. Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van X .

- 15** Bij een actie van een supermarkt krijg je na besteding van minstens € 25,- een kraslot waarbij je drie vakjes moet openkrassen. Als je na het openkrassen drie plaatjes van een winkelwagentje hebt gekrast, krijg je € 200,-. Bij twee winkelwagentjes krijg je € 100,- en bij het krassen van één winkelwagentje krijg je € 10,-. De kans dat je een winkelwagentje krast, is bij elk vakje 10%. Iemand krijgt een lot en gaat krassen.
- Welk bedrag zul je naar verwachting per kraslot ontvangen?
 - Welke standaardafwijking hoort hier bij?



- 16** Bij de kanstolletjes zijn X , Y en Z de uitkomsten van respectievelijk de eerste, de tweede en de derde tol.



- Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.
- Wat valt je op als je de getallen op de tweede tol vergelijkt met die van de eerste?
- Welke waarden verwacht je voor $E(Y)$ en $\sigma(Y)$? Ga met berekeningen na of je vermoeden klopt.
- Welke waarden verwacht je voor $E(Z)$ en $\sigma(Z)$? Ga met berekeningen na of je vermoeden klopt.

Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

013

In een vaas zitten 3 blauwe en 2 gele knikkers. Je trekt met terugleggen drie knikkers uit de vaas. De toevalsvariabele G is het aantal gele knikkers dat je trekt.

- Roos gaat de kansverdeling maken van G en moet bedenken welke waarden G kan aannemen.
Waarom kan G de waarden 0, 1, 2 of 3 aannemen?
- Roos pakt een gele, dan een blauwe en daarna weer een gele knikker.
Leg uit dat de kans hierop gelijk is aan $\frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{125}$.
- Leg uit dat Roos op 3 manieren twee gele en één blauwe knikker kan pakken.
- Leg uit dat $P(G = 2) = 3 \times \frac{12}{125}$.
- Vul de kansverdeling verder in.
- Voer de waarden van G en de bijbehorende kansen in je rekenmachine in en bereken $E(G)$ en $\sigma(G)$.

uitkomst u	0	1	2	3
$P(G = u)$	...	...	0,288	...

Uitdagende opdrachten

U2

Klaas en Menno spelen een spel met een zuivere munt. Bij kop wint Klaas en bij munt wint Menno. Na elke worp betaalt de verliezer een bedrag aan de winnaar. Dat bedrag is bij de eerste worp 1 euro en bij elke worp wordt dat bedrag verdubbeld.

Ze beginnen elk spel met 6 euro per persoon. Op het moment dat één van de spelers niet meer aan zijn betaalverplichting kan voldoen, is het spel afgelopen. A is het aantal keer dat de munt wordt geworpen voor het spel is afgelopen.

- Beredeneer dat A niet willekeurig groot kan worden.
- Bij de start heeft Klaas 6 euro en Menno 6 euro. Dit kun je noteren als $(K6, M6)$. Na één worp kan $(K7, M5)$ de situatie zijn. Dus Klaas won de eerste ronde en heeft nu 7 euro, Menno heeft 5 euro.
Geef nog een mogelijke uitkomst na de eerste worp.
- Na de tweede ronde betaalt de verliezer twee euro.
Geef alle mogelijke uitkomsten na de tweede ronde.
- Hoe groot is de kans dat het spel na de derde ronde is afgelopen?
- Bereken $E(A)$ en $\sigma(A)$.



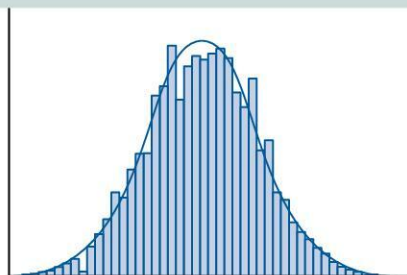
11.3 Normale verdeling

Je leert

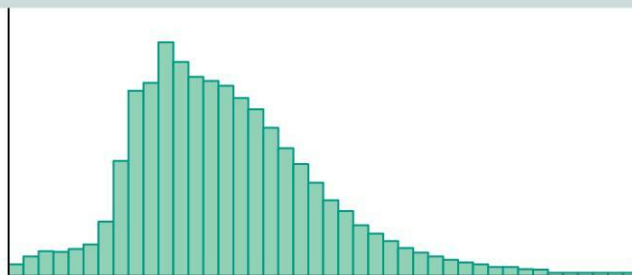
- wat een normaal verdeelde stochast is

Leerroutes

- ondersteunend: 17—18—19—020—21—22
- doorlopend: 17—18—19—20—21—22
- uitdagend: 17—18—19—21—22—U3



A



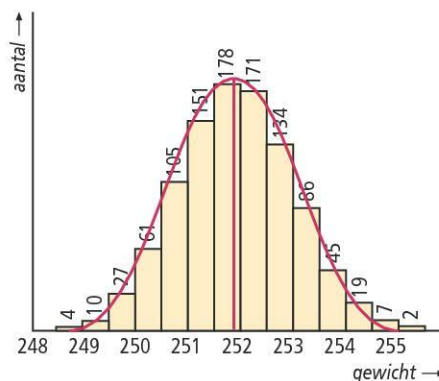
B

De twee grafieken gaan over de inkomensverdeling in Nederland en de lengte van 17-jarige jongens.

- Welke grafiek hoort bij de inkomensverdeling?
- Welke bewering is waar?
Er zijn ongeveer evenveel lange als kleine jongens.
Er zijn ongeveer evenveel rijken als armen in Nederland.

- 17** Bij een steekproef van 1000 zakjes geraspte kaas van merk A wordt de inhoud nauwkeurig gewogen. In het staafdiagram zijn de meetwaarden verwerkt. Het gemiddelde gewicht is 251,9 gram en de standaardafwijking is 1,1 gram.

- Geef een schatting van het aantal zakjes met een gewicht tussen 250,8 en 253 gram.
- Hoeveel procent van de zakjes heeft een gewicht tussen 250,8 gram en 253 gram?
- Schat het percentage zakjes met een gewicht tussen $\bar{x} - 2\sigma$ en $\bar{x} + 2\sigma$.
- In de figuur is de best passende klokvorm getekend. Bij welk gewicht ligt de top van de grafiek?
- Leg uit dat het redelijk is om ervan uit te gaan dat de gewichten van de zakjes normaal verdeeld zijn.



- 18** Neem aan dat de steekproef van opdracht 17 representatief is geweest voor alle zakjes kaas van merk A.

- Leg uit dat het gewicht van een willekeurig gekozen zakje een gewicht heeft dat ligt tussen $E(X) - \sigma(X)$ en $E(X) + \sigma(X)$ ongeveer gelijk is aan 0,68.
- Het gewicht van een zakje kun je opvatten als een stochast X .
Waarom geldt $E(X) = 251,9$?
- Bereken $P(X > 253)$.
- Hoe groot is de kans op een zakje met een gewicht tussen $E(X) - 2\sigma(X)$ en $E(X) + 2\sigma(X)$?

Theorie

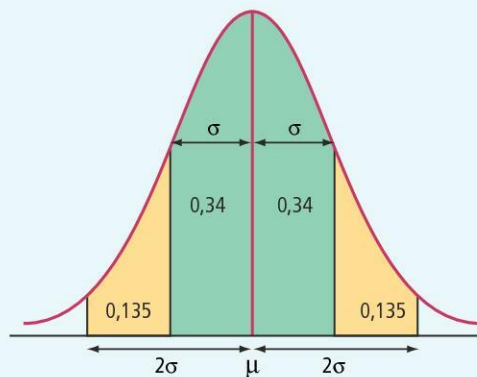
Een **normaal verdeelde** stochast X is een toevalsvariabele waarvan de kansverdeling benaderd mag worden door een normale verdeling.

De kansverdeling van X wordt in dat geval volledig bepaald door twee **parameters**: de verwachtingswaarde $E(X) = \mu$ en de standaardafwijking $\sigma(X) = \sigma$.

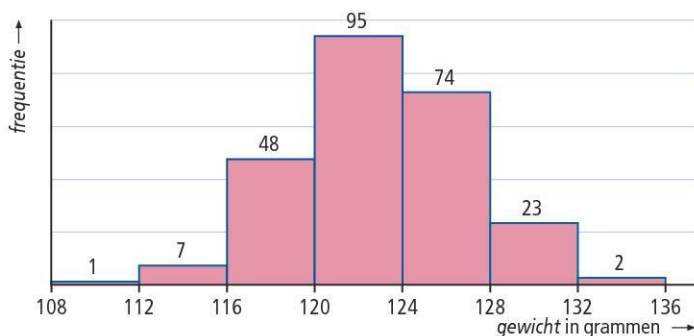
Je noteert dat als: de stochast X is $\text{Norm}(\mu, \sigma)$ -verdeeld.

Er gelden de volgende twee vuistregels.

- 1 $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$
- 2 $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$



- 19 Uit een partij sinaasappels worden er willekeurig 250 gekozen en gewogen. De resultaten van deze metingen staan in het staafdiagram. Het gewicht van een sinaasappel uit deze partij kun je opvatten als een toevalsvariabele X .



- a Geef een schatting van de kans dat een willekeurig gekozen sinaasappel minder weegt dan 120 gram.
- b Is het op grond van het staafdiagram redelijk om de kansverdeling van X te benaderen met de normale verdeling?
- c Bereken met behulp van de klassenmiddens het gemiddelde en de standaardafwijking. Rond je antwoorden af op één decimaal.
- d Bereken $P(X \leq 115)$.
- e Bereken $P(X \geq 119)$.

Ondersteunende route → maak opdracht O20

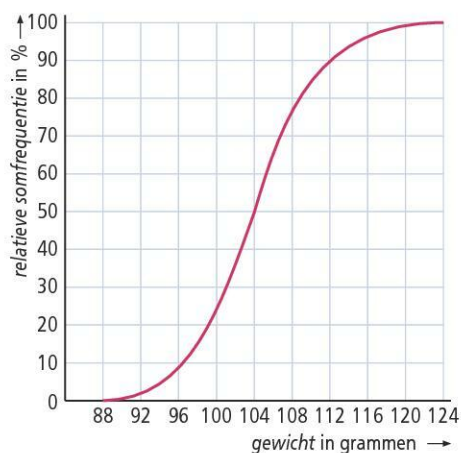
- 20** Olijven worden verkocht in potjes. Het gewicht van de olijven in grammen van een willekeurig gekozen potje is een stochast X . Deze is $\text{Norm}(164,4; 5,4)$ -verdeeld.

- Hoeveel gram olijven zit er minstens in de 2,5% zwaarste potjes?
- Bij hoeveel procent van de potjes zit het gewicht tussen 159 gram en 169,8 gram?
- Welk van de kansen is groter $P(159 < X < 161,7)$ of $P(161,7 < X < 164,4)$? Licht je antwoord toe.



- 21** Een student heeft onderzoek gedaan naar het gewicht van Jonagold appels uit een aantal boomgaarden. Het resultaat heeft hij verwerkt in de relatieve somfrequentiepolygoon. Het gewicht G van een Jonagold appel uit deze boomgaarden kun je opvatten als een toevalsvariabele die voldoet aan een normale verdeling.

- Waarom is de verwachtingswaarde van G gelijk aan de mediaan?
- Lees uit de grafiek de waarde van $E(G)$ af.
- Bereken met behulp van de grafiek $P(G < 100)$.
- Bereken met behulp van de eerste vuistregel en de grafiek de waarde van $\sigma(G)$.



- 22** Op twee scholengemeenschappen in verschillende delen van het land is de lengte van de leerlingen in de brugklas gemeten. X is de lengte in cm van een brugklasser van school A, Y is de lengte in cm van een brugklasser van school B.

X is $\text{Norm}(153,0; 7,8)$ -verdeeld en

Y is $\text{Norm}(154,5; 6,8)$ -verdeeld.

- Bereken $P(X < 145,2)$.
- Welke kans is groter $P(X > 168,6)$ of $P(Y > 168,6)$? Leg je antwoord uit.
- Van elke school worden willekeurig twee brugklassers gekozen. Bereken de kans dat deze vier leerlingen allemaal kleiner zijn dan het gemiddelde van de brugklassers van hun school.

Uitdagende route → maak opdracht U3

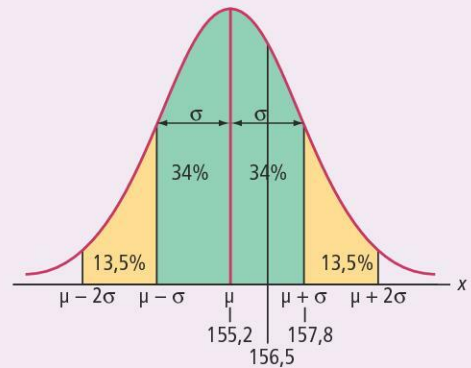
Ondersteunende opdrachten

020

Cashewnoten worden verkocht in zakjes. Het gewicht van de noten in grammen van een willekeurig gekozen zakje is een stochast X . Deze is $\text{Norm}(155,2; 2,6)$ -verdeeld.

- Leg uit dat $E(X) = 155,2$.
- Hoe groot is $\sigma(X)$?
- Leg uit dat bij ongeveer 68% van de zakjes het gewicht ligt tussen 152,6 gram en 157,8 gram.
- Bij hoeveel procent van de zakjes is het gewicht hoogstens 150 gram?
- Janneke heeft een zakje nootjes en zegt: 'Het gewicht van de noten in dit zakje hoort bij de 2,5% zwaarste zakjes.'
Leg uit dat je dan weet dat het gewicht van de noten in dat zakje minstens 160,4 gram is.
- Hoeveel gram noten zit er hoogstens in de 16% lichtste zakjes?
- In de figuur is het midden 156,5 gram aangewezen van 155,2 en 157,8 gram.

Leg uit hoe je met behulp van de figuur en zonder berekening kunt aantonen dat $P(155,2 < X < 156,5)$ groter is dan $P(156,5 < X < 157,8)$.



Uitdagende opdrachten

U3

Stichting Kijkonderzoek (SKO) is verantwoordelijk voor het onderzoek naar het kijkgedrag van de Nederlandse bevolking. Ze hebben onderzoek gedaan naar het kijkgedrag van kinderen tussen 8 jaar en 12 jaar. Eén van de vragen was hoeveel tijd ze tussen 07.00 uur en 18.00 uur naar de televisie kijken.

In een publicatie staat dat deze kijktijd redelijk normaal verdeeld is en dat ongeveer twee derde van deze kinderen tussen de 70 minuten en 120 minuten overdag naar de televisie kijkt.

Jordan trekt hieruit de conclusie dat het gemiddelde van deze kijktijd ongeveer 95 minuten is met een standaardafwijking van ongeveer 25 minuten.

- Hoe komt Jordan aan deze getallen?
- Leg uit dat hij geen gelijk hoeft te hebben.



11.4 Rekenregels voor stochasten

Je leert • hoe je de rekenregels voor stochasten toepast

Leerroutes • ondersteunend: 23—24—25—026—27—28—29
• doorlopend: 23—24—25—26—27—28—29
• uitdagend: 23—24—25—27—28—29—U4

De standaardafwijking van de gewone dobbelsteen met de getallen 1, 2, 3, 4, 5 en 6 is bij één keer gooien 1,71. Op de andere dobbelsteen staan de getallen 10, 20, 30, 40, 50 en 60.

- Is de standaardafwijking van deze dobbelsteen minder, meer of precies tien keer zo groot als van de gewone dobbelsteen?



- 23** In een groot bedrijf zijn de maandsalarissen in euro's van het administratieve personeel Norm(1930, 420)-verdeeld. Bij het decembersalaris krijgt elk personeelslid op de administratie een extra beloning van 100 euro. S is het normale maandsalaris en D het decembersalaris.
- a Hoe groot is $E(D)$?
 - b Welk verband is er tussen $E(S)$ en $E(D)$?
 - c Leg uit waarom geldt $\sigma(S) = \sigma(D)$.
 - d Per januari krijgen alle personeelsleden op de administratie een salarisverhoging van 3% ten opzichte van het normale salaris. J is het maandsalaris in januari. Welk verband is er tussen $E(S)$ en $E(J)$?
 - e Waarom is $\sigma(J) = 1,03 \cdot \sigma(S)$?

Theorie

De waarde van een stochast X kan met een constante c worden opgeteld of met een constante c worden vermenigvuldigd. De verwachtingswaarde en de verwachte standaardafwijking wijzigen dan als volgt:

$$\begin{array}{ll} E(X + c) = E(X) + c & E(c \cdot X) = c \cdot E(X) \\ \sigma(X + c) = \sigma(X) & \sigma(c \cdot X) = c \cdot \sigma(X) \quad (c > 0) \end{array}$$

Voorbeeld

Van de stochast X is bekend dat $E(X) = 16,3$ en $\sigma(X) = 1,7$. De stochasten Y en Z worden gegeven door $Y = X + 2,1$ en $Z = 5 \cdot X$. Bereken verwachtingswaarde en standaardafwijking van Y en Z .

Oplossing

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(X + 2,1) = E(X) + 2,1 = 18,4 \\ \sigma(Y) &= \sigma(X + 2,1) = \sigma(X) = 1,7 \\ E(Z) &= E(5 \cdot X) = 5 \cdot E(X) = 81,5 \\ \sigma(Z) &= \sigma(5 \cdot X) = 5 \cdot \sigma(X) = 8,5 \end{aligned}$$

24 Van de stochast U is bekend dat $E(U) = 125$ en $\sigma(U) = 35$.

- H**
- a $X = U - 40$. Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.
 - b $Y = 0,2 \cdot U$. Bereken $E(Y)$ en $\sigma(Y)$.
 - c $Z = 0,2 \cdot U - 40$. Bereken $E(Z)$ en $\sigma(Z)$.

25 De stochast $-V$ neemt de tegengestelde waarden aan van de stochast V en heeft verder dezelfde kansverdeling.

- a Laat met een berekening zien dat voor de toevalsvariabelen V en $-V$ in de tabel geldt dat de verwachtingswaarde van $-V$ tegengesteld is aan die van V , dus $E(-V) = -E(V)$.
- b Ga na dat de standaardafwijking van $-V$ gelijk is aan die van V , dus $\sigma(-V) = \sigma(V)$.

v	-3	-2	-1	5
$-v$	3	2	1	-5
kans	0,1	0,1	0,2	0,6

Ondersteunende route → maak opdracht 026

26 Bij een gokspelletje wordt aan de speler nul, één, vijf of tien euro uitgekeerd. U is het uitgekeerde bedrag.

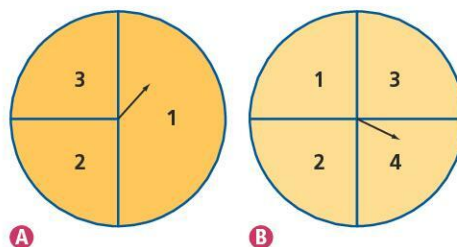
H

uitkering u	0	1	5	10
$P(U = u)$	0,4	0,3	0,2	0,1

- a Ga na $E(U) = 2,3$ euro en $\sigma(U) \approx 3,16$ euro.
- b Om het spelletje te mogen spelen, moet de speler drie euro inleggen. De winst W per spelletje voor de organisator is het bedrag dat hij overhoudt wanneer hij de inleg verrekenet met het uitgekeerde bedrag.
Met andere woorden $W = 3 - U$.
Bij welke uitkeringen maakt de organisator verlies?
- c Geef $E(W)$ en $\sigma(W)$.

27 De kanstolletjes worden gedraaid. X is de uitkomst van tolletje A en Y is de uitkomst van tolletje B.

- a Zijn X en Y afhankelijk of onafhankelijk?
- b Bereken $E(X)$, $\sigma(X)$, $E(Y)$ en $\sigma(Y)$.
- c S is de som van beide uitkomsten, dus $S = X + Y$.
Stel de kansverdeling van S op.
- d Bereken $E(S)$ en $\sigma(S)$.
- e Druk $E(S)$ uit in $E(X)$ en $E(Y)$.
- f Geldt ook $\sigma(S) = \sigma(X) + \sigma(Y)$?
- g Bereken de kwadraten van $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$ en $\sigma(S)$.
Welk verband bestaat er tussen deze kwadraten?



Theorie

Als X en Y twee stochasten zijn dan geldt:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

Als X en Y onafhankelijke stochasten zijn dan geldt:

$$\sigma(X + Y)^2 = \sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2 \text{ ofwel } \sigma(X + Y) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2}.$$

Voorbeeld

Gegeven zijn twee onafhankelijke stochasten X en Y .

Voor X geldt $\mu = 25$ en $\sigma = 3$.

Voor Y geldt $\mu = 12$ en $\sigma = 1$.

Bereken $E(X + Y)$ en $\sigma(X + Y)$.

Oplossing

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 25 + 12 = 37$$

$$\sigma(X + Y) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} \approx 3,16$$

28 U en V zijn twee onafhankelijke stochasten.

Voor U geldt $\mu = 108$ en $\sigma = 21$.

Voor V geldt $\mu = 75$ en $\sigma = 9$.

a Bereken μ en σ van $W = U + V$.

b Bereken μ en σ van $W = U - V$.

c Bereken μ en σ van $W = U + 2V$.

d Bereken μ en σ van $W = 2U + V + 30$.

29 Een populaire lunch in een restaurant is een kop soep geserveerd met twee stukjes stokbrood, al dan niet gevolgd door een broodje kroket. Het zoutgehalte van de soep, de stokbroodjes en het broodje kroket is normaal verdeeld. In de tabel vind je de parameters van deze normale verdelingen. X is het zoutgehalte dat een willekeurige gast binnenkrijgt na het nuttigen van een kop soep met twee stukjes stokbrood.

a Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.

b Hoeveel zout krijgen gasten die twee koppen soep en vier stukjes stokbrood eten gemiddeld binnen?

c Y is het zoutgehalte dat een willekeurige gast binnenkrijgt na het nuttigen van een kop soep met twee stukjes stokbrood en een broodje kroket.

De toevalsvariabele Y is normaal verdeeld.

Tussen welke twee waarden zal Y met 68% kans liggen?



zoutgehalte	μ in gram	σ in gram
soep	1,75	0,75
2 stukjes stokbrood	0,5	0,15
broodje kroket	1,3	0,6

Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten

026

Bij een gokspelletje wordt aan de speler 0, 2, 20 of 50 euro uitgekeerd. U is het uitgekeerde bedrag. Je ziet de kansverdeling van U .

u	$P(U = u)$
0	0,39
2	0,5
20	0,1
50	0,01

- Ga na dat $E(U) = 3,50$ euro en $\sigma(U) \approx 7,40$ euro.
- Om het spelletje te mogen spelen, moet de speler vijf euro inleggen. W is de winst die de organisator per spelletje maakt.
Leg uit waarom geldt $P(W = 3) = P(U = 2)$.
- De organisator kan ook verlies maken op een spelletje.
Voor welke waarden van U is dat het geval?
- Stel de kansverdeling van W op.
- Leg uit dat het verband tussen W en U is $W = 5 - U$.
- Bereken $E(W)$.
- Leg uit dat $\sigma(W) = \sigma(5 - U)$.
- Hoe groot is dus $\sigma(W)$?

Uitdagende opdrachten

U4

Een kansspel wordt gespeeld met vier dobbelstenen. X is het aantal (verschillende) waarden in een worp. Voor de worp van de foto geldt $X = 3$. Gooi je bijvoorbeeld vier keer zes, dan is $X = 1$.

x	1	2	3	4
$P(X = x)$	...	...	$\frac{5}{9}$	...

- Bereken de verwachtingswaarde van X .
- Een speler betaald € 10,- om met de vier dobbelstenen te mogen werpen. De spelleider betaalt na de worp $3X$ euro uit aan de speler. Bij de worp op de foto krijgt de speler dus € 9,-. W is de winst van de spelleider.
Bereken $E(W)$ en $\sigma(W)$.

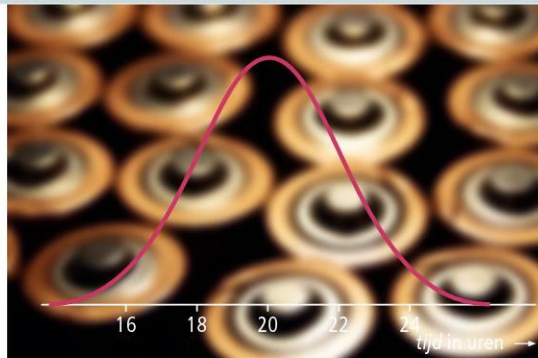


Je leert • hoe je de $\sqrt{n}$ -wet gebruikt

Leerroutes • ondersteunend: 30—31—32—033—34—35—36—37
 • doorlopend: 30—31—32—33—34—35—36—37
 • uitdagend: 30—31—32—33—34—35—37—U5

Een bepaald type batterij heeft een levensduur in uren die Norm $(20, 2)$ -verdeeld is. Jasper beweert dat de kans dat je met 10 batterijen een totale levensduur hebt tussen 180 uur en 220 uur gelijk is aan 0,68.

- Ben je het met Jasper eens?



30 Bij het werpen met één dobbelsteen is X het aantal ogen van de worp. Voor X geldt $E(X) = 3,5$ en $\sigma(X) \approx 1,708$.

a Er wordt met twee dobbelstenen geworpen. X_1 is het aantal ogen op de eerste dobbelsteen en X_2 is het aantal ogen op de tweede dobbelsteen. De som van de geworpen ogen op de twee dobbelstenen is $S = X_1 + X_2$.

Leg uit dat $E(S) = 7$ en $\sigma(S) = \sqrt{1,708^2 + 1,708^2} \approx 2,415$.

b Bij het werpen met drie dobbelstenen is X_3 het aantal ogen van de derde dobbelsteen. T is de som van de ogen van de drie dobbelstenen.

Leg uit $T = S + X_3$.

c Bereken $E(T)$ en $\sigma(T)$.

31 Als je met tien dobbelstenen tegelijk gooit, heb je te maken met tien stochasten: $X_1, X_2, \dots, X_{10}$, elk gelijk aan X .

a S is de som van de ogen van de tien dobbelstenen, dus $S = X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$. Bereken $E(S)$.

b Vul in.

$$\sigma(S) = \sqrt{\sigma(X_1)^2 + \sigma(X_2)^2 + \dots + \sigma(X_{10})^2} = \sqrt{10 \cdot \sigma(X)^2} = \sqrt{\dots} \cdot \sqrt{\sigma(X)^2} = \sqrt{\dots} \cdot \sigma(X)$$

c Bereken de standaarddeviatie van S .

d Welk verband is er tussen de verwachtingswaarde van S en die van X ?

e En welk verband is er tussen de standaardafwijking van S en die van X ?

- 32** Bij het werpen met twee dobbelstenen is $\bar{X}$ het gemiddelde aantal ogen van de dobbelstenen.
- Ga na dat $P(\bar{X} = 4) = \frac{5}{36}$
 - Stel de kansverdeling van $\bar{X}$ op.
 - Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van $\bar{X}$.
 - In opdracht 30 heb je gezien dat $E(X) = 3,5$ en $\sigma(X) \approx 1,708$.
Welk verband is er tussen de verwachtingswaarde van $\bar{X}$ en die van X ?
 - Ga na dat $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{2}}$

Theorie

Zijn $X_1, X_2, \dots, X_n$ onafhankelijke stochasten, elk met dezelfde kansverdeling als X , dan geldt de **$\sqrt{n}$ -wet**.

- Voor de som $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ van de uitkomsten geldt: $E(S) = n \cdot E(X)$ en $\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$.
- Voor het gemiddelde $(\bar{X}) = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ van de uitkomsten geldt: $E(\bar{X}) = E(X)$ en $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Voorbeeld

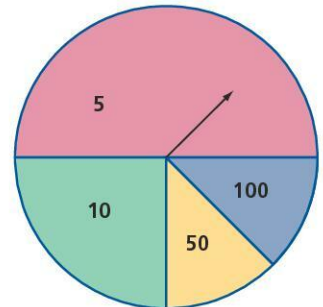
Een kansexperiment met uitkomst stochast X wordt 25 keer herhaald.
 $E(X) = 534$ en $\sigma(X) = 43$.
 S is de som van de uitkomsten.
 Bereken $E(S)$ en $\sigma(S)$, $E(\bar{X})$ en $\sigma(\bar{X})$.

Oplossing

$$\begin{aligned}
 E(S) &= 25 \times 534 = 13\,350 \\
 \sigma(S) &= \sqrt{25} \times 43 = 215 \\
 E(\bar{X}) &= 534 \\
 \sigma(\bar{X}) &= \frac{43}{\sqrt{25}} = 8,6
 \end{aligned}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 033

- 33** De verwachtingswaarde van de kanstol is $E(U) = 23,75$ en de standaardafwijking is $\sigma(U) = 32,19$.
- Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van de som van de uitkomsten bij vijf keer draaien.
 - Bereken ook de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het gemiddelde van de uitkomsten bij vijf keer draaien.



- 34** Van pakken koffie is het gewicht X in gram Norm(250, 6)-verdeeld.
Iemand koopt tien pakken koffie.
 T is het gewicht van de tien pakken samen.
 $\bar{X}$ is het gemiddelde gewicht van de tien pakken.
- Bereken $E(T)$ en $\sigma(T)$.
 - Bereken ook $E(\bar{X})$ en $\sigma(\bar{X})$.



- 35**
- Ga na dat in de vorige opdracht geldt $\sigma(\bar{X}) < \sigma(X)$.
 - Je kunt met de rekenregels verklaren dat de $\sigma(\bar{X})$ altijd kleiner is dan $\sigma(X)$.
Leg uit hoe.
 - Geef ook een verklaring zonder dat je de rekenregels gebruikt.
- 36** Een fabrikant vervaardigt kaarsen waarvan de brandduur normaal verdeeld is. Gemiddeld is de brandduur 4 uur, de standaardafwijking is 10 minuten.
- Hoelang branden de 2,5% langst brandende kaarsen minimaal?
 - De fabrikant verpakt de kaarsen in dozen van 25 stuks. Bereken de verwachte totale brandduur per doos en de standaardafwijking van de totale brandduur.
 - Bereken de standaardafwijking van de gemiddelde brandduur per kaars uit een doos van 25 stuks.
 - Hoeveel kaarsen moet de fabrikant in een doos verpakken zodat de standaardafwijking van de gemiddelde brandduur gelijk is aan één minuut?

- 37** V is het resultaat van het werpen met een viervlaksdobbelsteen.
 $E(V) = 2,5$ en $\sigma(V) = 1,118$.
Bij het werpen met twee van deze dobbelstenen zijn V_1 en V_2 achtereenvolgens de aantallen op de twee dobbelstenen.
- Jos gooit één keer met één dobbelsteen en verdubbelt de uitkomst. Femke gooit één keer met twee dobbelstenen en telt de uitkomsten op.
Bij wie verwacht je de grootste standaardafwijking?
Verklaar je antwoord.
 - Bereken $E(2X)$ en $\sigma(2X)$.
 - Bereken $E(X_1 + X_2)$ en $\sigma(X_1 + X_2)$.



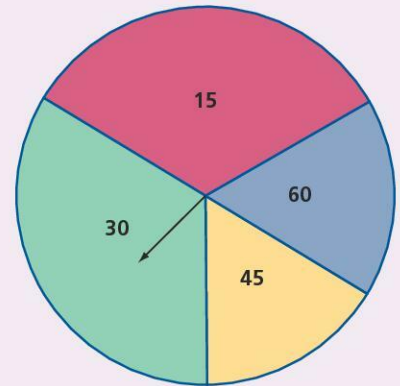
Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

033 X is de uitkomst van de kanstol. Je ziet de kansverdeling van X .

x	15	30	45	60
$P(X = x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- Toon aan $E(X) = 32,5$ en $\sigma(X) \approx 16,01$.
- Je draait drie keer met de kanstol. De som van de uitkomsten is een stochast S .
Bedenk twee manieren waarop je $S = 150$ kunt krijgen.
- Voor S geldt $S = X_1 + X_2 + X_3$, waarbij X_1 de uitkomst van de kanstol is na de eerste draaiing, X_2 de uitkomst van de tweede draaiing en X_3 die van de derde draaiing.
Leg uit dat X_1 , X_2 en X_3 dezelfde verwachtingswaarde en standaardafwijking hebben.
- Met welke rekenregel kun je de verwachtingswaarde $E(S)$ berekenen? Bereken $E(S)$.
- Met welke rekenregel kun je de standaardafwijking $\sigma(S)$ berekenen? Bereken $\sigma(S)$.
- Noem $\bar{X}$ de gemiddelde uitkomst na drie keer draaien.
Met welke rekenregel kun je de verwachtingswaarde $E(\bar{X})$ berekenen? Bereken $E(\bar{X})$.
- Met welke rekenregel kun je de standaardafwijking $\sigma(\bar{X})$ berekenen? Bereken $\sigma(\bar{X})$.



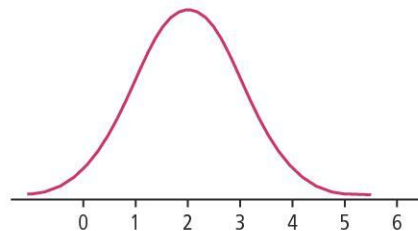
Uitdagende opdrachten

U5 Op het etiket van zakken zilvervriesrijst staat dat er 500 gram rijst in zit. Het gewicht is normaal verdeeld met een gemiddelde van 507 gram en een standaardafwijking van 9,5 gram. Volgens de voorschriften mag hoogstens 2,5% van de zakken een gewicht hebben dat kleiner is dan wat er op het etiket is vermeld.

- Leg uit dat niet aan de voorschriften is voldaan.
- Door een aantal zakken samen in een doos te verpakken, kan er voor worden gezorgd dat in hoogstens 2,5% van de dozen het gemiddelde gewicht van een zak rijst minder is dan 500 gram.
Bereken het minimaal aantal zakken dat per doos moet worden verpakt.

11.6 Gemengde opdrachten

- 38** Je ziet de grafiek van een kansverdeling met $\mu = 2$ en $\sigma = 1$. Een tweede kansverdeling heeft $\mu = 4$ en $\sigma = 2$.
- Ligt de top van de grafiek van de tweede kansverdeling hoger of lager dan die van de eerste?
 - Schets in de figuur de grafiek van de tweede kansverdeling.



- 39** In een vaas zitten drie witte en twee rode balletjes. Uit deze vaas worden, zonder terugleggen, balletjes getrokken, totdat er geen rode balletjes meer in de vaas zitten. Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het aantal benodigde trekkingen.

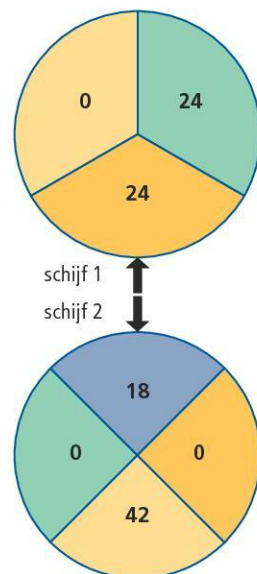
- 40** Een firma produceert klosjes garen. De lengte in meters van de draad op een klosje is Norm(504, 19)-verdeeld. De firma verpakt de klosjes in doosjes met een vast aantal.
- Er zijn doosjes met tien klosjes garen. Bereken de standaardafwijking van de gemiddelde lengte van de draad op de klosjes in deze doosjes.
 - Bereken het kleinste aantal waarvoor geldt dat de standaardafwijking van de gemiddelde lengte van de draad van de klosjes in een doos kleiner is dan 2 meter.

- 41** Bij een spel worden twee schijven onafhankelijk van elkaar aan het draaien gebracht. Zodra de schijven tot stilstand zijn gekomen, wordt vastgesteld naar welke getallen de pijlen wijzen.

X is de uitkomst van schijf 1 met $E(X) = 16$ en $\sigma(X) \approx 11,3$.

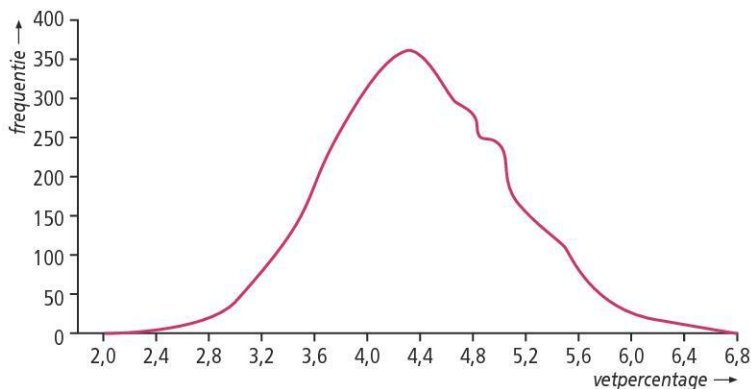
Y is de uitkomst van schijf 2.

- Bereken $E(Y)$ en $\sigma(Y)$.
- De som van de uitkomsten van schijf 1 en 2 wordt aan de speler uitbetaald in euro's. Bereken de verwachte uitbetaling per spel en de standaardafwijking daarvan.
- Een speler heeft € 400,- op zak voordat hij met spelen start. Eén spel, het één keer laten draaien van de beide schijven, kost € 32,-. Hij speelt het spel 10 keer. Hoeveel euro heeft hij naar verwachting na die 10 keer spelen op zak?





In 2018 werd op een aantal veebedrijven onderzoek gedaan naar het vetpercentage en het eiwitpercentage in de melk. In de figuur zie je dat de verdeling van het vetpercentage in de melk bij benadering normaal verdeeld is. Het gemiddelde vetpercentage is 4,4% en de standaardafwijking is 0,7%.



Ook bij het eiwitpercentage mogen we uitgaan van een normale verdeling. Het gemiddelde eiwitpercentage is 3,6% en de standaardafwijking is 0,4%. De stochast V is het vetpercentage van de melk van een willekeurige koe en de stochast W is het eiwitpercentage van de melk van een willekeurige koe. We nemen aan dat de stochasten V en W onafhankelijk zijn.

Als het vetpercentage van de melk lager is dan het eiwitpercentage bestaat het risico dat de koe last krijgt van pensverzuring. Een koe loopt dus het risico op pensverzuring als $V < W$, ofwel als $V - W < 0$.

Onderzoek bij hoeveel procent van de koeien het risico op pensverzuring bestaat.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2017 2^e tijdvak)

Theorie

Toevalsvariabele, stochast

Een toevalsvariabele of een stochast is een variabele waarvan de waarde een getal is dat afhangt van de toevallige uitkomst in een kansexperiment. Met $P(X = 2)$ wordt bedoeld de kans op de uitkomst 2, dat wil zeggen dat stochast X de waarde 2 aanneemt.

Een overzicht met alle mogelijke waarden die X kan aannemen en de bijbehorende kansen heet de kansverdeling van die stochast. De verwachtingswaarde $E(X)$ is de gemiddelde waarde die je mag verwachten als het experiment een groot aantal keren wordt herhaald.

Voorbeeld

Gegeven is de kansverdeling van een stochast X .

x	10	12	18
$P(X = x)$	0,3	0,3	0,4

Bereken de verwachtingswaarde $E(X)$.

Oplossing

$$E(X) = 10 \times 0,3 + 12 \times 0,3 + 18 \times 0,4 = 13,8$$

S1 Gegeven is de kansverdeling van een stochast U .

u	-10	-14	18
$P(U = u)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Bereken de verwachtingswaarde $E(U)$.

Theorie

Onafhankelijke en afhankelijke gebeurtenissen

Twee gebeurtenissen A en B heten onafhankelijk als geldt:

- $P(A)$ gelijk is aan de kans op gebeurtenis A onder de voorwaarde dat B plaats vindt. In dat geval heeft het optreden van B geen invloed op de kans dat A gebeurt.
- $P(B)$ gelijk is aan de kans op gebeurtenis B onder de voorwaarde dat A plaats vindt. In dat geval heeft het optreden van A geen invloed op de kans dat B gebeurt.

Gebeurtenissen die niet onafhankelijk zijn, heten afhankelijk.

Twee stochasten X en Y heten onafhankelijk als voor alle mogelijke uitkomsten a van X en b van Y geldt dat gebeurtenis $X = a$ geen invloed heeft op $P(Y = b)$ en omgekeerd.

Voorbeeld

Een vaas is gevuld met 40 ballen, genummerd 1 tot en met 40.
Gebeurtenis A is het trekken van een bal met een even nummer.
Gebeurtenis B is het trekken van een bal waarvan het nummer een vijfvoud is.
Onderzoek of de gebeurtenissen A en B onafhankelijk zijn.

Oplossing

	even	oneven	totaal
een vijfvoud	4	4	8
geen vijfvoud	16	16	32
totaal	20	20	40

De kans op een even nummer is $P(A) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$.

De kans op een even nummer als je weet dat het nummer een vijfvoud is, is gelijk aan $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.
of

De kans op een vijfvoud is $P(B) = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$.

De kans op een vijfvoud als je weet dat het nummer even is, is gelijk aan $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.

De gebeurtenissen A en B zijn onafhankelijk.

- S2 In de situatie van het voorbeeld is C de gebeurtenis het trekken van een bal waarvan het nummer een tienvoud is.
Onderzoek of de gebeurtenissen A en C onafhankelijk zijn.

Theorie

Normaal verdeelde stochast, parameter

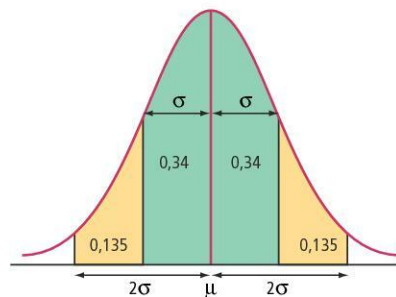
Een normaal verdeelde stochast X is een toevalsvariabele waarvan de kansverdeling benaderd mag worden door een normale verdeling.

De kansverdeling van X wordt in dat geval volledig bepaald door twee parameters: de verwachtingswaarde $E(X) = \mu$ en de standaardafwijking $\sigma(X) = \sigma$.

Je noteert dat als: de stochast X is $\text{Norm}(\mu, \sigma)$ -verdeeld.

Er gelden de volgende twee vuistregels.

- 1 $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$
- 2 $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$



- S3 Drop wordt verkocht in zakjes van 250 gram. Het gewicht van een willekeurig zakje drop is een $\text{Norm}(254, 2)$ -verdeeld.
- a Hoeveel gram wegen de 2,5% zwaarste zakjes minstens?
 - b Welke van de kansen is groter: $P(254 < X < 256)$ of $P(X < 254)$? Licht je antwoord toe.

Vaardigheid

Je kunt de standaardafwijking van een stochast X berekenen.

- 1 Ga na welke waarden X kan aannemen.
- 2 Stel een kansverdeling van X op.
- 3 Gebruik je rekenmachine om de standaardafwijking van X te berekenen. Je noteert dit als $\sigma(X)$.

Voorbeeld

Je trekt aselekt zonder terugleggen vier knikkers uit een vaas met drie rode en zeven witte knikkers.

Stochast Y is het rangnummer van de trekking die de eerste witte knikker oplevert.

Bereken $E(Y)$ en $\sigma(Y)$.

Oplossing

- 1 Y kan de waarden 1, 2, 3 en 4 aannemen.

- 2

u	1	2	3	4
$P(Y = u)$	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{1}{120}$

- 3 Met de rekenmachine vind je $E(Y) = 1,375$ en $\sigma(Y) \approx 0,633$.

- S4** Je werpt met 5 zuivere geldstukken. X is het aantal keer kop. Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.

Vaardigheid

Je kunt de rekenregels voor stochasten toepassen.

De waarde van een stochast X kan met een constante c worden verhoogd of met een constante c worden vermenigvuldigd.

De verwachtingswaarde en de verwachte standaardafwijking bereken je met de rekenregels:

$$\begin{aligned} E(X + c) &= E(X) + c & E(c \cdot X) &= c \cdot E(X) \\ \sigma(X + c) &= \sigma(X) & \sigma(c \cdot X) &= c \cdot \sigma(X) \quad (c > 0) \end{aligned}$$

Bij het optellen van stochasten gelden de rekenregels:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$\sigma(X + Y) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2} \quad (\text{als } X \text{ en } Y \text{ onafhankelijke stochasten zijn})$$

Voorbeeld

X is de uitkomst van een dobbelsteen, $E(X) = 3,5$ en $\sigma(X) = 1,71$.

De uitkomst Y van een viervlaksdobbelsteen is 1, 2, 3 of 4. $E(Y) = 2,5$ en $\sigma(Y) = 1,12$.

Bereken de verwachtingswaarde en de standaarddeviatie van de som S van het aantal ogen.

Oplossing

$$E(S) = E(X) + E(Y) = 3,5 + 2,5 = 6$$

$$\sigma(S) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2} = \sqrt{1,71^2 + 1,12^2} \approx 2,04$$

- S5** X en Y zijn twee onafhankelijke stochasten. Gegeven is dat $E(X) = 15$, $\sigma(X) = 4$, $E(Y) = 23$ en $\sigma(Y) = 7$.
- a** Bereken $E(X + Y)$ en $\sigma(X + Y)$.
 - b** Bereken $\sigma(2X)$ en $\sigma(X + 2)$.
 - c** Tussen de stochasten X en Z bestaat het verband $Z = 2X - 3$.
Bereken $E(Z)$ en $\sigma(Z)$.

Vaardigheid

Je kunt de $\sqrt{n}$ -wet gebruiken.

Voor de som S van n onafhankelijke stochasten $X_1, X_2, \dots, X_n$, elk met dezelfde kansverdeling als X geldt:

- $E(S) = n \cdot E(X)$
- $\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$.

Voor het gemiddelde $\bar{X}$ geldt:

- $E(\bar{X}) = E(X)$
- $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Voorbeeld

Een pak suiker weegt gemiddeld 1,1 kg met $\sigma = 0,04$ kg. Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking voor het totale gewicht van 48 pakken.

Oplossing

De verwachtingswaarde van het totale gewicht is

$$48 \times 1,1 = 52,8 \text{ kg.}$$

De standaardafwijking is $\sqrt{48} \times 0,04 \approx 0,277$ kg.

- S6** De inhoud van een literpak sinaasappelsap is stochast X waarvoor geldt $E(X) = 1015$ mL en $\sigma(X) = 9$ mL. Voor het vervoer worden de literpakken in dozen gedaan. Een doos bevat 10 pakken frisdrank. Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van de gemiddelde inhoud van de pakken sinaasappelsap uit deze doos.



aantal gevraagde dagbladen x	$P(X = x)$
35	0,02
36	0,07
37	0,11
38	0,12
39	0,21
40	0,19
41	0,15
42	0,09
43	0,03
44	0,01

T1 Een tijdschriftenkiosk verkoopt het dagblad Trouw. Het aantal exemplaren dat op een willekeurige zaterdag wordt gevraagd, kun je beschouwen als een stochast X waarvan de kansverdeling gegeven is.

- De kioskhouder koopt elke zaterdag 40 exemplaren van dagblad Trouw in.
Hoe groot is de kans dat hij niet aan de vraag kan voldoen?
- Hoe groot is de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van de vraag naar dagblad Trouw op een willekeurige zaterdag?

T2 Spaarlampen van het merk Lumi gaan gemiddeld 6000 uur mee. De brandduur B in uren van een willekeurige lamp is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 800 uur.

- Schets een grafiek van de verdeling van B . Geef het gemiddelde en de standaardafwijking in je tekening aan.
- Hoe groot is de kans dat een willekeurige lamp minder dan 5200 uur zal branden?
- Hoe groot is de kans dat een willekeurige lamp tussen 5200 uur en 6800 uur zal branden?
- Van spaarlampen van het merk Sol is de brandduur $\text{Norm}(5600, 200)$ -verdeeld.
Schets de grafiek van deze verdeling in de tekening van opdracht a.
- Bij welk van de twee soorten lampen is de kans het grootst dat je een lamp treft die minder dan 5200 uur mee gaat?
Leg je antwoord uit.

T3 De toevalsvariabelen X en Y zijn onafhankelijk.
Voor de stochast X geldt $\mu = 16$ en $\sigma = 3$.
Voor de stochast Y geldt $\mu = 19$ en $\sigma = 4$.

- Bereken μ en σ voor de stochast $Z = 4X - 7$.
- Bereken μ en σ voor de stochast $S = X + Y$.

- T4** Je gooit met een rode en een blauwe dobbelsteen.
Gebeurtenis R is: Met de rode dobbelsteen gooi je zes ogen.
Gebeurtenis B is: Met de blauwe dobbelsteen gooi je zes ogen.
Gebeurtenis S is: De som van de aantallen ogen is groter dan 9.
- Leg uit waarom de gebeurtenissen R en B onafhankelijk zijn.
 - Onderzoek of de gebeurtenissen R en S onafhankelijk zijn.



- T5** Een firma fabriceert open haardblokken als alternatief voor echt openhaardhout. De brandduur van de blokken is gemiddeld 2 uur met een standaarddeviatie van 15 minuten. De firma verpakt de open haardblokken in dozen van 10 stuks.
- Bereken de verwachte totale brandduur per doos en de standaardafwijking hiervan.
 - Bereken de standaardafwijking van de gemiddelde brandduur per blok voor dozen van 10 stuks.
 - De firma overweegt ook grotere verpakkingen in de handel te brengen.
Hoeveel blokken moeten er in een verpakking worden opgenomen als je wilt bereiken dat de standaardafwijking van de gemiddelde brandduur per blok hoogstens 0,05 uur is?
- T6** Op een fancy fair wil Joris met een spel geld verdienen voor het goede doel. In een vaas zitten drie balletjes, genummerd 1, 2 en 3. Om aan het spelletje mee te doen betaal je € 2,-. De speler trekt zonder terugleggen één voor één de balletjes uit de vaas. Na de eerste trekking legt Joris één euro op een schoteltje. Bij elke volgende trekking geldt: als het getrokken nummer lager is dan het vorige, dan is het spel afgelopen en krijgt de speler het bedrag dat op het schoteltje ligt. Is het getrokken getal groter dan de vorige, dan verdubbelt Joris het bedrag op het schoteltje. Als de speler de balletjes trekt in de volgorde 1, 2, 3 dan betaalt Joris vier euro uit. De stochast U is het bedrag dat Joris aan de speler uitbetaalt.
- Welke waarden kan U aannemen?
 - Stel de kansverdeling van U op.
 - Bereken de verwachtingswaarde en standaardafwijking van U .
 - Josephine speelt dit spel tien keer. De stochast W is haar totale winst in die tien spelletjes.
Bereken $E(W)$ en $\sigma(W)$.

Je kunt de standaardafwijking van een stochast berekenen.

- E1** Sjoerd heeft per ongeluk twee lege batterijen in een doosje gedaan waar al vier volle batterijen in zaten. Hij heeft drie volle batterijen nodig. Eén voor één neemt hij de batterijen uit de doos en test ze of ze vol zijn. Daar gaat hij mee door tot hij drie volle batterijen heeft gevonden.

Stochast X is het aantal tests dat hiervoor nodig is.

- Stel de kansverdeling van X op.
- Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.

Je kunt de rekenregels voor stochasten toepassen.

- E2** De stochasten X en Y zijn onafhankelijk. Gegeven is dat $E(X) = 14$, $\sigma(X) = 2$, $E(Y) = 19,2$ en $\sigma(Y) = 7,1$.

- Bereken $E(3X + 2,2)$ en $\sigma(3X + 2,2)$.
- Bereken $E(X + Y)$ en $\sigma(X + Y)$.

- E3** T_F is de hoogste temperatuur (in graden Fahrenheit) op een dag in de maand juli in New York. Voor T_F geldt $E(T_F) = 84$ en $\sigma(T_F) = 9$. Voor het omrekenen van Fahrenheit naar Celsius geldt de formule $T_C = \frac{5}{9} \cdot (T_F - 32)$. Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van de hoogste temperatuur op een willekeurige dag in de maand juli in New York in graden Celsius.

Je kunt de $\sqrt{n}$ -wet gebruiken.

- E4** Voor pakken suiker geldt dat het gemiddelde gewicht 1000 gram is met een standaardafwijking van 12 gram. Iemand koopt twintig pakken suiker. Noem het totale gewicht daarvan T .

- Leg uit dat $E(T) = 20000$.
- Bereken $\sigma(T)$.
- Het gemiddelde gewicht van de twintig pakken suiker is G . Bereken $E(G)$ en $\sigma(G)$.

- E5** In de tabel kun je op overzichtelijke wijze de mogelijkheden weergeven bij het twee keer achter elkaar werpen van een dobbelsteen. Gebeurtenis A is: De eerste worp is een 3. Gebeurtenis B is: De tweede worp is een 5. Gebeurtenis C is: Beide worpen zijn gelijk.

- Leg zonder berekeningen uit dat de gebeurtenissen A en B onafhankelijk zijn.
- Onderzoek of de gebeurtenissen A en C onafhankelijk zijn.

	1	2	3	4	5	6
1	(1-1)	(1-2)	(1-3)	(1-4)	(1-5)	(1-6)
2	(2-1)	(2-2)	(2-3)	(2-4)	(2-5)	(2-6)
3	(3-1)	(3-2)	(3-3)	(3-4)	(3-5)	(3-6)
4	(4-1)	(4-2)	(4-3)	(4-4)	(4-5)	(4-6)
5	(5-1)	(5-2)	(5-3)	(5-4)	(5-5)	(5-6)
6	(6-1)	(6-2)	(6-3)	(6-4)	(6-5)	(6-6)

E6 Een discotheekeeigenaar heeft berekend dat het aantal liter cola dat op een avond verkocht wordt normaal verdeeld is met $\mu = 307$ en $\sigma = 31$. Er wordt ook cola light verkocht. Het aantal verkochte liter cola light op een avond is Norm(65, 12)-verdeeld.

- De eigenaar vindt het voldoende om te weten hoeveel liter cola de middelste 68% van de avonden verkocht wordt. Tussen welke twee waarden schommelt deze vraag?
- Maak opdracht a ook voor cola light.
- Hoeveel liter verwacht de eigenaar dat er totaal aan cola (gewoon en light samen) wordt verkocht op een avond?
- Tussen welke twee waarden zal 68% van de totale colaconsumptie liggen?



E7 Op een pakje thee staat dat er 100 gram thee in het pakje zit. Natuurlijk zullen niet alle pakjes thee precies 100 gram wegen. Bij een gewichtscontrole blijkt het gewicht van de pakjes Norm(102,2; 3,2)-verdeeld, met het gewicht in grammen.

- In een doos zitten 80 pakjes thee. Tussen welke twee waarden zit het gewicht van de middelste 68% van de pakjes thee in de doos?
- Hoeveel gram thee verwacht je dat per doos teveel wordt geleverd?

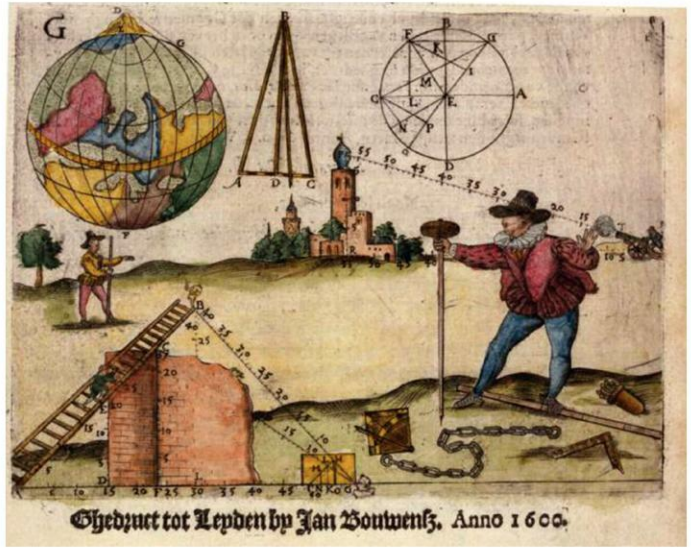
E8 Een bedrijf verwerkt en verpakt tulpenbollen en narcissenbollen. Het gemiddelde gewicht van de tulpenbollen is 10 gram en de standaarddeviatie is 1,5 gram. Van de narcissenbollen is dat achtereenvolgens 3,5 gram en 0,7 gram. De bollen worden verpakt in zakken waarvan je het gewicht mag verwaarlozen.

- Een zak tulpenbollen bevat 100 bollen. Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het totale gewicht van een zak met tulpenbollen.
- Een zak narcissenbollen bevat 40 bollen. Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het totale gewicht van een zak met narcisbollen.
- In een doos worden vier zakken tulpenbollen en tien zakken narcissenbollen verpakt. Het gewicht van de doos zelf is te verwaarlozen. Stochast G is het gewicht in grammen van de doos met zakken bollen. Bereken $E(G)$ en $\sigma(G)$.





Keuzeonderwerpen



Uit de geschiedenis van de wiskunde

Romeinse cijfers	236
Egyptische rekenkunde	240
Babylonische rekenkunde	244
Pythagoras	248
Geschiedenis van π	252



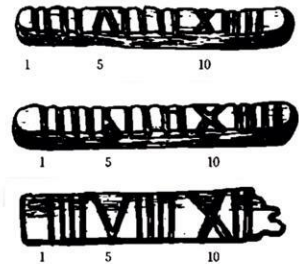
In prehistorische tijden ontstond de behoefte aan een vorm van tellen. Als een herder bijvoorbeeld met schapen op stap ging, maakte hij voor ieder schaap dat de stal verliet, een kerfje in een stuk hout of bot. Als hij 's avonds terugkeerde, controleerde hij of alle schapen er waren door bij elk binnenkomend schaap zijn vinger telkens een kerfje op te schuiven. Het is nog turven zonder getallen namen te geven of te tellen.

- 1 Als er geteld gaat worden, ontstaat de behoefte de streepjes te groeperen, omdat je al bij meer dan vier streepjes moeite hebt om in één oogopslag te zien om hoeveel streepjes het gaat.
 - a Tel het aantal turfjes in dit rijtje: |||||
 - b Zet dit aantal turfjes in je schrift, maar groepeer ze nu per vijf.

Turven en tellen deden mensen al ver voordat het schrift was uitgevonden. De oudst bekende schrifttekens worden gedateerd rond 3100 - 2900 v. Chr.. In die tijd ontstonden ook tekens voor cijfers en getallen.



- 2 Op de kerfstokken zijn aparte tekens voor 5 en 10 aangebracht.
 - a Wat is het teken dat voor 10 werd gebruikt?
 - b Welke tekens werden voor 5 gebruikt?
 - c Naderhand besepte men dat je bijvoorbeeld voor het getal 5 in plaats van IIIIV ook eenvoudig V kunt schrijven. Om zo weinig mogelijk tekens te gebruiken, werd voor het getal 4 op een bepaald moment niet meer IIII maar IV gebruikt. Laat zien hoe de Romeinse cijfers voor 4 en 9 vanuit de kerfstok zijn ontstaan.



- 3 Aan de oorspronkelijke weergave van de Romeinse cijfers is nog duidelijk te zien, dat er gekerfd moest worden.
 - a Hoe denk je dat de tekens voor 50 en 100 uit de voorgaande cijfers zijn ontstaan?
 - b En hoe zou het teken voor 1000 zijn ontstaan?
 - c En hoe van daaruit het teken voor 500?

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

In de loop der eeuwen veranderden de tekens tot ze ten slotte werden vervangen door letters van het alfabet. Zo wordt het teken voor 100, , wat ronddertien, en verandert ten slotte in C. Hiernaast zie je welke ontwikkelingen de tekens voor 50, 500 en 1000 hebben door gemaakt.

 →  →  → L
 →  →  → D → IO → D
 →  → CIO → M

Theorie

Het huidige getallenstelsel is een **positioneel** stelsel, de positie van het cijfer bepaalt de waarde. Zo heeft de 3 in het getal 358 de waarde 300 en 5 de waarde 50. Het Romeinse getallenstelsel is een **additief** stelsel. Je vindt de waarde van het getal door de cijfers bij elkaar op te tellen. (additio betekent toevoeging).

In het Romeinse getallenstelsel worden de volgende **Romeinse cijfers** gebruikt:

I = 1, **V** = 5, **X** = 10, **L** = 50, **C** = 100, **D** = 500, **M** = 1000

Om het aantal tekens in een getal te beperken, werd een teken met een kleinere waarde links van een teken met grotere waarde geplaatst. Je moet dan de waarde van het kleinere teken aftrekken van de waarde van het grotere teken. Dit wordt de **aftrekregel** genoemd. Dus IV is V – I (5 – 1 = 4) en net zo is XC is C – X (100 – 10 = 90).

Je mag alleen een getal aftrekken van een getal waarvan de waarde vijf of tien keer zo hoog is. Dus voor 1999 niet MIM, maar MCMXCIX: M(1000) CM(900) XC(90) IX (9).

Voorbeeld

Schrijf met Romeinse letters 48 en 1499.

Oplossing

48 wordt XLVIII, want

XL = L – X = 40 en

VIII = 8

1499 wordt MCDXCIX, want

M = 1000,

CD = D – C = 400,

XC = C – X = 90 en

IX = X – I = 9

- 4 Deze inscriptie is gevonden op een mijlpaal in Lucania (Italië), opgericht door C. Publius Popilius Laenas, consul in 132 en in 158 v. Chr.. In de inscriptie staan negen getallen.

a Spoor die getallen op.

b Schrijf de eerste drie op in de huidige notatie.

Let op: er worden ook oudere tekens gebruikt!

- 5 Voor grotere getallen werd vanaf de keizertijd (0 - 400 na Chr.) de volgende notatie gebruikt.

– een streep boven het getal betekent × 1000

– een open kader om het getal × 100 000

Dus $\overline{V}$ = 5000 en $\boxed{V}$ = 500 000.

a Welk getal werd bedoeld met $\overline{XII}$ DCCLXVI?

b En met $\boxed{XV}$ $\overline{LXII}$ CCCLXXI?

- 6 De notaties voor grote getallen konden snel voor misverstanden zorgen. In het boek De Wereld van het Getal van Georges Ifrah staat het verhaal uit de jeugd van Keizer Tiberius. De keizer moest aan de erfgenamen van zijn moeder Livia grote bedragen betalen. Met een van hen, de latere keizer Galba, kreeg hij ruzie over het juiste bedrag, want in plaats van 50 000 000 sestertiën gaf hij hem er 500 000. Livia had bepaald dat hij zou $\overline{CCCCC}$ krijgen.

Hoe kwam het misverstand in de wereld?



7 Schrijf met Romeinse cijfers.

- | | |
|--------|-----------------------|
| a 377 | d 999 |
| b 1945 | e 158 469 |
| c 2019 | f de datum 23-04-1975 |

8 De Marforio fontein in het Capitolijns Museum in Rome werd gerestaureerd in het jaar MDCCXXXIII. Welk jaar is dat?

9 Op de gevel van de Westerkerk in Amsterdam is in Romeinse cijfers het bouwjaar vermeld. Welk jaar staat op deze gevel?



Een jaardicht of chronogram (chronos (Grieks) is tijd, grafein (Grieks) is schrijven) bestaat uit één of meer versregels, of een korte spreuk. De letters M, D, C, L, X, U (= V), V, W (= VV), I en J (= I) worden als Romeinse cijfers beschouwd, die bij samentelling een bepaald jaartal geven. Alle letters in de tekst, die een Romeins cijfer voorstellen, moeten gebruikt worden. Je kunt chronogrammen vooral vinden op gevels en eerste stenen.

Voorbeeld

reMbrandt Is VersChenen
In welk jaar werd Rembrandt geboren?

Oplossing

M(1000) + D(500) + I(1) + V(5) + C(100)
= 1606

10 Uit het chronogram
'reMbrandt Is heengegaan en zIet het eeUWIge LIChT'
kun je vinden in welk jaar Rembrandt gestorven is.
Welk jaar is dat?

11 In de voorgevel van de St. Eusebiuskerk in Arnhem werd boven de kerkdeuren van de hoofdingang een gedenksteen aangebracht met daarop een chronogram, geschreven door Bernard Grothues. Zowel het chronogram als het aantal woorden en letters geven het jaar aan waarin de kerk na drie jaar restauratie in gebruik werd genomen.
Welk jaar was dat?

VOOR U STAAT HIER EUSEBIUS
RECHTOP EN HIER VAAK BESCHOTEN
EN ZO LANG GEKWELED
GERESTAUREERD EN IN PRACHT
HERSTELD

12 Hiernaast zie je nog een chronogram van Bernard Grothues.
In welk jaar won Ajax in Wenen de Europacup?

SENSATIE EN EEN SPECTACULAIRE ONTKNOPING
IN HET PRATER VAN WENEN. AJAX OPNIEUW
WINNAAR VAN DE EUROPA CUP, DANKZIJ
KLUIVERTS GOUDEN BENEN.

- 13** Optellen en aftrekken met Romeinse cijfers is een lastige klus. Je kunt de getallen dan beter eerst zonder de aftrekregel schrijven.

Bereken op de manier van het voorbeeld en controleer je antwoorden door de getallen wél om te zetten.

- a $LXIX + XLV$ c $XLVII - XXIX$
b $XCIX + XLVI$ d $MCXI - CXCIX$

Voorbeeld

Bereken $XLVII + XXIX$.

Oplossing

$XLVII + XXIX =$
 $XXXXXVII + XXVIII =$
 $XXXXXXVVIIIIII = LXXVI$

Theorie

Gezien de moeilijkheden met het rekenwerk ontwikkelden de Romeinen de **abacus**, een rekentafel waarin met kiezelsteentjes (Latijn: calculi) werd gewerkt. Op de abacus zie je een gereconstrueerd draagbaar model (11,2 cm bij 8 cm) voor kooplieden. De eerste zeven kolommen geven machten van 10 aan en bestaan uit twee delen. Het balletje in het bovenste deel is vijf keer zo veel als een balletje in het deel er onder.



Voorbeeld

In de schematische voorstelling van de abacus zijn de getallen 10 000, 100 000 en 1 000 000 aangegeven met $\overline{X}$, $\overline{C}$ en $\overline{M}$.

Welk getal is bedoeld?

Oplossing

In de eerste kolom staan de miljoenen, drie balletjes omhoog dus 3 000 000.

In de tweede kolom is het balletje in het bovenste deel naar beneden geschoven. Dat is 500 000. In het onderste deel is één balletje naar boven geschoven. Dat is nog eens 100 000, dus samen 600 000.

Zo vind je in de derde kolom 80 000, in de vierde 7000, in de vijfde 400, in de zesde 30 en in de zevende 9.

Het getal is dus 3 687 439.

•				•	•	
	•	•	•			•
$\overline{M}$	$\overline{C}$	$\overline{X}$	M	C	X	I
•	•	•	•	•	•	•
•		•	•	•	•	•
•		•		•	•	•
	•			•		•
	•		•			
•	•	•	•		•	

- 14** a Geef in een abacus de getallen 68, 5749 en 1 926 074 aan.
w b Schrijf de getallen ook in Romeinse cijfers.

Suggesties voor verder onderzoek

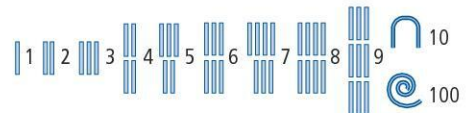
De Romeinse geldeenheid was de as, die weer onderverdeeld was in twaalf unciae (enkelvoud: uncia). In de achtste kolom van de abacus kun je het aantal unciae aangeven en in de negende zelfs nog twaalfde delen.

Onderzoek hoe je het aantal unciae kunt aangeven en hoe je ook alle twaalfde ($\frac{1}{12}$, $\frac{1}{6}$, ..., $\frac{11}{12}$) van de uncia kunt aangeven.

In het oude Egypte werden door de overstroming van de Nijl elk voorjaar de grenzen van de akkers uitgewist. Dus waren landmeters (harpedonapten zijn koordmeters) nodig om die grenzen opnieuw vast te stellen. Ook het bijhouden van voorraden graan, het aantal bakstenen nodig voor de bouw van een opslagplaats en het verdelen van voedsel onder de arbeiders waren vraagstukken waarvoor de Egyptenaren moesten kunnen rekenen en waartoe symbolen voor getallen ontwikkeld werden. Het oudste document over het rekenen in Egypte is de papyrus Rhind. Het is een soort rekenboekje, geschreven door Ahmes rond 1650 v. Chr.. De papyrus is genoemd naar de Schotse antiquair Henry Rhind die de tekst in 1858 kocht in Luxor en daarna aan het British museum schonk.

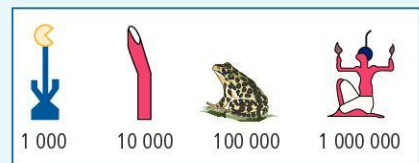


- 15 Hiernaast zie je het cijferschrift van de Egyptenaren. Hoe hebben zij het groeperen van turfjes opgelost?



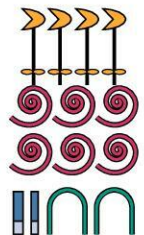
Theorie

Het Egyptisch getallenstelsel is additief. De symbolen voor 1000, 10 000, 100 000 en 1 000 000 zijn **hiërogliefen**, achtereenvolgens een gestileerde lotusbloem, een vinger, een kikker en een man met opgeheven armen.



- 16 Hiërogliefen werden van rechts naar links geschreven, waarbij de symbolen in spiegelbeeld kwamen te staan, maar ook van boven naar beneden. Dat gold ook voor de getallen.

- a Welk getal is ?
b Het getal hiernaast is gevonden op een inscriptie in Karnak.
Welk getal is het?



- 17 Schrijf je geboortjaar in hiërogliefen.

- 18 Vermenigvuldig  met .

- 19 De Egyptenaren vermenigvuldigden twee getallen door te verdubbelen. In de papyrus Rhind staat de volgende berekening van 12×12 .

		IIU	I	1	12		
		IIUU	II	2	24		
		IIIIUUUU	IIII /	4	48		
IIIIUUUUU		IIIIUUUUUUUU	IIII /	8	96	som	144

Je begint met 1×12 , daarna verdubbel je steeds. Zoek in de eerste kolom twee getallen die samen 12 zijn: 4 en 8. Je vindt het antwoord door de corresponderende getallen in de tweede kolom op te tellen: $48 + 96$.

- a Leg uit waarom deze methode klopt.
b Wat zou betekenen?

Aanpak

Hoe vermenigvuldig je in het oude Egypte twee getallen a en b met elkaar?

- 1 Maak twee kolommen. Begin in de eerste kolom met 1, in de tweede kolom met b .
- 2 Verdubbel telkens de getallen in beide kolommen.
- 3 Schrijf a als som van getallen uit de eerste kolom.
- 4 Tel de bijbehorende getallen in de tweede kolom op.

Voorbeeld

Bereken 37×73 .

Oplossing

1	/	1	73
2		2	146
	/	4	292
		8	584
		16	1168
	/	32	2336
3	$37 = 1 + 4 + 32$		
4	$73 + 292 + 2336 = 2701$		

- 20 Bereken de vermenigvuldigingen op de Egyptische manier.

- a 17×22 c 108×111
b 27×134 d 51×51

- 21 Om de deling $a : b$ te berekenen, kijkt de Egyptenaar naar hoe vaak b in a past. In de tweede kolom zet je b . Je verdubbelt telkens, maar nu schrijf je a als som van de getallen in de tweede kolom. De som van de bijbehorende getallen in de eerste kolom is nu het antwoord. Bereken op de manier van het voorbeeld.

- a $133 : 7$ c $238 : 17$
b $360 : 24$ d $1001 : 77$

Voorbeeld

Bereken $63 : 7$.

Oplossing

1	7	/	$7 + 56 = 63$
2	14		Het antwoord is $1 + 8 = 9$.
4	28		
8	56	/	

Als een deling niet ‘opgaat’, dat wil zeggen geen geheel getal als uitkomst heeft, zul je breuken moeten gebruiken. In de papyrus Rhind leer je vooral in praktische situaties rekenen met breuken. Zo werden arbeiders veelal betaald met voedsel en daar kwamen niet-opgaande delingen bij kijken. Alle arbeiders krijgen niet alleen evenveel, maar ook in dezelfde porties.

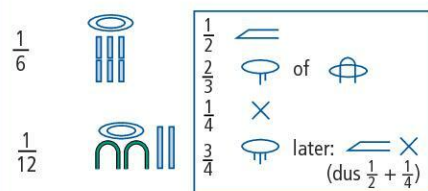
22 Om bijvoorbeeld 9 broden te verdelen over 10 arbeiders, werd als volgt gerekend.

- Snij 5 broden doormidden en geef elke arbeider één stuk.
- Snij de overige 4 broden elk in 3 stukken en geef elke arbeider één stuk.
- Je houdt 2 derde delen over, deel elk derde deel in vijven.
- a** Welk deel van een brood krijgt elke arbeider na de eerste stap?
- b** Welk deel van een brood krijgt hij erbij na de tweede stap?
- c** En welk deel na de derde stap?
- d** Vul in: $\frac{9}{10} = \frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots}$

Theorie

De Egyptenaren kenden ook breuken, maar op twee uitzonderingen na alleen breuken met in de teller een 1, zogenaamde **stambreuken**. De uitzonderingen zijn $\frac{2}{3}$ en $\frac{3}{4}$.

Bij een stambreuk wordt het teken  boven het getal in de noemer geschreven. Voor $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ en $\frac{3}{4}$ bestaan aparte tekens, zie hiernaast. In deze paragraaf worden de volgende notaties gebruikt: $\frac{1}{5} = \bar{5}$, $\frac{2}{3} = \bar{3}$ en $\frac{3}{4} = \bar{2} + \bar{4}$.



23 Schrijf de getallen in de huidige notatie.

- | | |
|--|--|
| a $4 + \bar{3}$ | d $\bar{3} + \bar{4}$ |
| b $\bar{4} + \bar{5}$ | e $6 + \bar{6} + \bar{18}$ |
| c $\bar{2} + \bar{4} + \bar{8}$ | f $\bar{3} + \bar{10} + \bar{30}$ |

Bij niet-opgaande delingen wordt het antwoord gegeven als een som van stambreuken met verschillende noemers. In het voorbeeld zie je hoe 19 broden verdeeld worden over 12 arbeiders, zodat ieder dezelfde porties krijgt. Iedere arbeider krijgt één heel brood. Er blijven dan nog zeven broden over. Van zes broden krijgt ieder de helft. Van het overgebleven brood krijgt ieder een twaalfde deel.

Voorbeeld

1	12	$(1 \times 12 = 12)$
$\bar{2}$	6	$(\frac{1}{2} \times 12 = 6)$
$\bar{12}$	1	$(\frac{1}{12} \times 12 = 1)$
$12 + 6 + 1 = 19$		
Het antwoord is $1 + \bar{2} + \bar{12}$.		

24 Schrijf als som van stambreuken met verschillende noemers.

a $\frac{7}{8}$

c $\frac{11}{12}$

b $\frac{17}{12}$

d $\frac{47}{60}$

Om het antwoord van een deling als som van stambreuken te schrijven, vereiste heel wat creativiteit van de Egyptische rekenaars. De papyrus Rhind bevat voor $n = 3$ tot en met $n = 101$ een tabel om delingen van de vorm $2 : n$ snel te kunnen berekenen.

<i>breuk</i> $2 : n$	<i>noemers</i> <i>stambreuken</i>
3	2, 6
5	3, 15
7	4, 28
9	6, 18
11	6, 66
13	8, 52, 104
15	10, 30
17	12, 51, 68
19	12, 76, 114
21	14, 42
23	12, 276
25	15, 75
27	18, 54
29	24, 58, 174, 232
31	20, 124, 155
33	22, 66
35	30, 42

- 25**
- a** Uit de tabel kun je aflezen dat $\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66} = \overline{6} + \overline{66}$. Laat zien dat dat klopt.
 - b** Waarom staan in de tabel voor n alleen oneven getallen?
 - c** Er is een patroon te zien bij breuken waarbij n deelbaar is door 3. Kun je dat verklaren?
 - d** Welke noemers zullen er staan bij $n = 39$?

26 Schrijf, met behulp van de tabel, als som van stambreuken (en eventueel $\frac{2}{3}$) met verschillende noemers. Gebruik in het antwoord de huidige notatie voor breuken.

a $\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}$ en $\frac{6}{7}$

b $\frac{4}{11}, \frac{5}{11}$ en $\frac{8}{11}$

27 Laat zien hoe je tien broden over 6, 7 of 8 arbeiders kunt verdelen door de breuken $\frac{6}{10}, \frac{7}{10}$ en $\frac{8}{10}$ als som van stambreuken te schrijven.

28 Als de teller van een breuk de som is van getallen waardoor je de noemer kunt delen, is er een slimme manier om die breuk als som van stambreuken te schrijven. Zo is $\frac{13}{36}$ te schrijven als $\frac{9+4}{36} = \frac{9}{36} + \frac{4}{36}$.

Schrijf de breuken $\frac{13}{36}, \frac{9}{20}$ en $\frac{17}{30}$ als som van stambreuken met verschillende noemers.

Voorbeeld

Schrijf $\frac{4}{9}$ en $\frac{5}{9}$ als som van stambreuken.

Oplossing

$$\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \overline{6} + \overline{18}$$

$$\frac{4}{9} = 2 \times \frac{2}{9} = \frac{2}{6} + \frac{2}{18} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$$

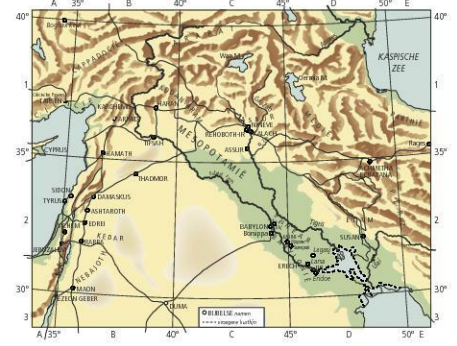
$$\frac{5}{9} = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$$

Suggesties voor verder onderzoek

De papyrus Rhind vermeld ook het gebruik van zogeheten rode hulpgetallen.

Onderzoek wat rode hulpgetallen zijn en welke rol zij speelden bij het delen.

In het 4e millennium v. Chr. vestigden de Soemeriërs zich in het gebied waar de Eufraat en de Tigris uitmonden in de Perzische golf (in het huidige zuid-oost Irak). De Soemeriërs behoorden tot de allereerste volken die konden schrijven. Zij ontwikkelden het spijkerschrift (Duits: Keilschrift; Engels: cuneiform writing) en gebruikten het getal 60 als basis voor hun getallenstelsel. De Babyloniërs (18e eeuw v. Chr.) die na hen kwamen, hebben zowel hun schrift als getallenstelsel overgenomen. Restanten daarvan vind je terug in onze tijdsaanduiding en in de verdeling van de cirkel in 360° .



- 29** Ons getallenstelsel is een positiestelsel met 10 als basis. Je spreekt daarom van het tientallig of decimale stelsel. Je hebt dan tien tekens nodig om elk getal op te kunnen schrijven.

- a** Wat is de waarde van 4 in het getal 3456?
b Op het blaadje zie je hoe 3456 geschreven wordt als som van machten van 10.
 Schrijf 23 816 als som van machten van 10.

$$3456 = 3 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 6 \times 10^0$$

of korter

$$3456 = 3 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 5 \times 10 + 6 \times 1$$

- 30** Computers werken met het tweetallig of binaire stelsel. Dan heb je maar twee tekens nodig om elk getal op te kunnen schrijven, de 0 en de 1. Op het blaadje zie dat 1101 gelijk is aan 13.

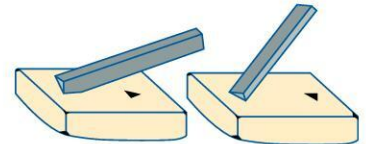
- a** Schrijf het binaire getal 110101 als decimaal getal.
b Schrijf het decimaal getal 99 als binair getal.

$$1101 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1 \times 1 = 13$$

Theorie

Het Soemerische **zestigtallige** of **sexagesimale** stelsel kent maar twee tekens: een 'spijker' ∇ met waarde 1 en een 'winkelhaak' $\angle$ met waarde 10. Net als andere schrifttekens werden die met een griffel in de klei aan gebracht. Met deze tekens kreeg men de getallen 1 tot en met 59 als volgt:

∇	$\nabla\nabla$	$\nabla\nabla\nabla$	$\nabla\angle$	$\nabla\angle\angle$	$\nabla\angle\angle\angle$	$\nabla\angle\angle\angle\angle$	$\nabla\angle\angle\angle\angle\angle$	$\nabla\angle\angle\angle\angle\angle\angle$	$\angle$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\angle\nabla$	$\angle\nabla\nabla$		$\angle\angle\angle$		$\angle\angle\angle\angle$		$\angle\angle\angle\angle\angle$	$\angle\angle\angle\angle\angle\angle$	59
11	12		21		33				



- 31** Schrijf de getallen 23, 48 en 51 in spijkerschrift, waarbij je de tekens $\angle$ voor 10 en ∇ voor 1 gebruikt.

De Soemeriërs kenden nog een uitsluitend additief systeem. Babylonische geleerden waren de eersten die aan het begin van het tweede millennium v. Chr. het positiestelsel ontdekten. Zij gingen het teken ∇ ook voor 60 en elke macht van 60 gebruiken. Zo nodig worden de 'cijfers' gescheiden door tussenruimtes.

Voorbeeld

$\nabla \nabla \quad \overline{\nabla \nabla \nabla} \quad \triangleleft \nabla \nabla$ is

$$2 \times 60^2 + 6 \times 60 + 12 =$$

$$2 \times 3600 + 360 + 12 = 7572$$

- 32 Welk getal staat hiernaast?



- 33 Ontcijfer het getal hiernaast.
 $\dots \times 60^2 + \dots \times 60 + \dots = \dots$



- 34 De stad Babylon was in 689 v. Chr. door de Assyrische koning Sennacherib verwoest. Elf jaar later liet zijn zoon Asarhaddon, koning van Assyrië van 680 tot 669 v. Chr., de stad herbouwen. Dit tot onvrede van zijn volk. Om deze vervroegde wederopbouw te rechtvaardigen riep hij een anekdote in het leven, die is terug te vinden op de 'Zwarte Steen van Asarhaddon'.

Nadat hij op de Tafel der Lotsbestemmingen het getal 70 had geschreven voor het aantal jaren dat Abylon leeg moest blijven, kwam de god Mardoek in zijn barmhartigheid op zijn beslissing terug. Hij verwisselde de cijfers en besloot daardoor dat de stad al na elf jaar weer bewoond mocht worden. Leg deze anekdote uit.

Theorie

Omdat spijkerschrifttekens veel plaats innemen en lastig te lezen zijn, wordt een getal in deze paragraaf omgezet (getranscribeerd) in de 'kloknotatie'. Behalve voor het voorste getal worden, net als op een digitale klok, steeds paren cijfers gebruikt, dus 1 : 05 in plaats van 1 : 5.



$\triangleleft \nabla \nabla \quad \triangleleft \nabla \quad \triangleleft \nabla \nabla \nabla$ schrijf je dan als 48 : 21 : 33.

In het decimale stelsel is dat dus het getal $48 \times 60^2 + 21 \times 60 + 33 = 174\,093$. Een omzetting in een andere notatie heet een **transcriptie**.

Voorbeeld

Schrijf 34 567 in de kloknotatie en 5 : 43 : 21 als decimaal getal.

Oplossing

$34\,567 : 60^2 = 9$ rest 2167
 $2167 : 60 = 36$ rest 7
 Het antwoord is 9 : 36 : 07.

$5 \times 60^2 + 43 \times 60 + 21 \times 1 = 20\,601$
 Het antwoord is 20 601.

- 35 a Hoeveel uren, minuten en seconden zijn 100 000 seconden?
 b Schrijf 100 000 in spijkerschrift en in de kloknotatie.
 c Schrijf de getallen 99 en 9999 in de kloknotatie.

36 Schrijf de getallen als decimaal getal.

- a 1 : 01 : 01 c 5 : 08 : 38 : 31
b 59 : 59 : 59 d 7 : 00 : 08

37 Op het blaadje zie je hoe je in het zestigtalligstelsel de getallen 23 : 34 en 18 : 48 kunt optellen.

- a Leg uit waarom 41 : 82 gelijk is aan 42 : 22
b Bereken op dezelfde manier.

- A 2 : 53 + 3 : 07 C 50 : 20 + 20 : 50
B 12 : 48 + 25 : 25 D 47 : 36 + 51 : 47

●	23 : 34 + 18 : 48 =				
●	(23 + 18 = 41 en 34 + 48 = 82)				
●	41 : 82 = 42 : 22				

38 Zoals jij op de basisschool de tafels van 1 tot en met 10 leerde, moest een Soemerische rekenaar werken met de tafels van 1 tot en met 59. Er zijn veel kleitabletten met tabellen gevonden. Hiernaast zie je een voorbeeld met een deel van de tafel van 7. Linksboven staat 7. Daarachter het woord  (a-rá) dat 'maal' betekent.

- a Ontcijfer de complete tabel.
b In het algemeen liep een tafel niet van 1 tot en met 59, maar van 1 tot en met 20 en dan vervolgens 30, 40 en 50. Hoe kun je 43×7 met deze tafel berekenen?

39 Bereken. Schrijf het antwoord als een sexagesimaal getal en als decimaal getal.

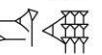
- a 3 a-rá 12 : 25 c 6 : 10 a-rá 2 : 00
b 5 : 30 a-rá 18 d 3 : 00 a-rá 3 : 00

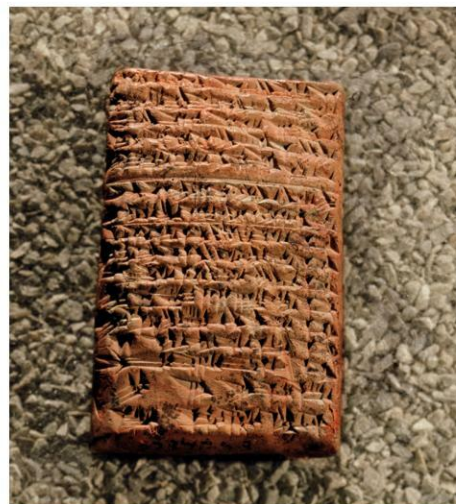
40 Hieronder zie je gedeeltes van drie (fictieve) tabellen met in de linker kolom van elke tabel de getallen 1, 2, 3, 4 en 5.

A B C

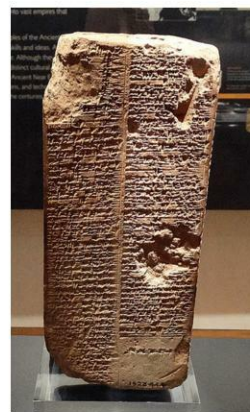
- a Ga voor elke tabel na welk verband er tussen de kolommen bestaat.
b Geef bij elke tabel het zesde getal in de rechter kolom.

			
			
			
U.S.W			
			
			
			
			
			

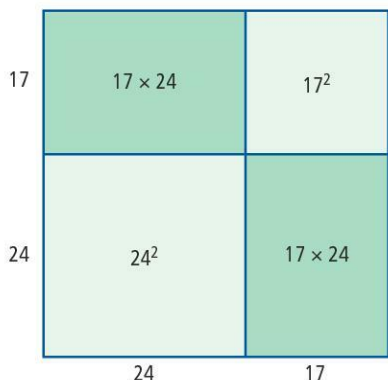


- 41** Het kleitablot op de foto is gevonden in Kish en dateert uit de Nieuw-Babylonische periode (750 - 500 v. Chr.). Het bevat de kwadraten van de getallen 1 tot en met 59. Met een kwadratentabel kon men ook vermenigvuldigingen uitrekenen. Om bijvoorbeeld 17×24 te berekenen gebruikte men het volgende recept:

- Zoek de kwadraten van 17, 24 en $17 + 24$ op in de tabel.
 - Bereken $(17 + 24)^2 - 17^2 - 24^2$.
 - Deel het antwoord door 2.
- a** Reken zelf de kwadraten uit en bereken 17×24 met bovenstaand recept.
- b** Schrijf het antwoord als sexagesimaal getal en als decimaal getal.



- 42** **a** Leg het recept uit aan de hand van de figuur hieronder.



- b** Laat door haakjes weg te werken of met een meetkundige figuur zien dat $2ab = (a + b)^2 - a^2 - b^2$.

- 43** Bereken met dit recept de vermenigvuldigingen.

- a** 42×58
- b** 97×103
- c** 33×467

Suggesties voor verder onderzoek

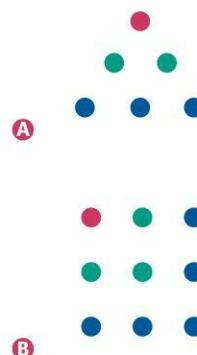
De Soemeriërs kenden ook sexagesimale breuken, ook wel Soemerische breuken geheten. Onderzoek hoe de Soemeriërs breuken noteerden en gebruikten bij het uitvoeren van delingen.

De Griekse wiskundige Pythagoras ca. 572 - 500 v. Chr. werd geboren op het eiland Samos. Op zijn vele reizen kwam hij in aanraking met de Egyptische en Babylonische wiskunde. Omstreeks 530 v. Chr. stichtte hij in Croton, een toenmalige Griekse kolonie in de laars van Italië, een school. Pythagoras ontdekte dat, als je een gespannen snaar verdeelt in de verhouding 1 : 2, de toon die beide delen voortbrengen een octaaf vormen: een lage C (do) wordt dan bijvoorbeeld een hoge C. Bij een verhouding 2 : 3 hoort een kwint (vijf tonen hoger en bij de verhouding 3 : 4 een kwart (vier tonen hoger). Dat bevestigde zijn overtuiging dat alle dingen gebaseerd zijn op getallen. De belangrijkste getallen waren 1, 2, 3 en 4. Zij vormen samen de tetraktys, een volmaakte driehoek.

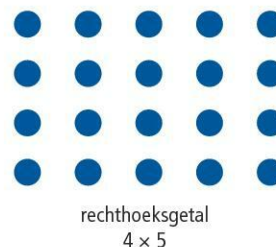


- 44** De Pythagoreeërs, zoals de volgelingen van Pythagoras werden genoemd, legden een verband tussen getallen en meetkunde. Zo spraken zij over driehoeksgetallen, vierhoeksgetallen en vijfhoeksgetallen.

- In figuur A zie je de eerste drie driehoeksgetallen namelijk: 1, $1 + 2 = 3$ en $1 + 2 + 3 = 6$. Geef de drie volgende driehoeksgetallen.
- De driehoek met driehoeksgetal 10 noemt Pythagoras de tetraktys, een volmaakte driehoek. Teken deze driehoek.
- In figuur B zie je de eerste drie vierhoeksgetallen namelijk $1, 1 + 3 = 4$ en $1 + 3 + 5 = 9$. Schrijf de volgende drie vierhoeksgetallen op.
- Schrijf 49 als som van opeenvolgende oneven getallen.
- Schrijf 100 als som van opeenvolgende oneven getallen. Hoeveel getallen heb je nodig?



- 45** Getallen die het product zijn van twee opeenvolgende getallen zoals $2 (1 \times 2)$ en $6 (2 \times 3)$ worden rechthoeksgetallen genoemd.
- Teken een stippenfiguur bij deze twee rechthoeksgetallen.
 - Laat met een figuur zien dat elk rechthoeksgetal het dubbele is van een driehoeksgetal.
 - Het eerste rechthoeksgetal is 2. Wat is het twintigste rechthoeksgetal?
 - Wat is dus het twintigste driehoeksgetal?
 - Hoe groot is het 50e driehoeksgetal?



- 46** Het getal 6 is, behalve door zichzelf, deelbaar door 1, 2, 3.
- Bereken de som van deze delers.
 - Schrijf de delers van 28 op die kleiner zijn dan 28.
 - Bereken de som van die delers. Wat valt je op?

Theorie

Een **volmaakt** getal is gelijk aan de som van de delers van dat getal die kleiner zijn dan het getal zelf.

- 47** Volmaakte getallen zijn zeldzaam. De Pythagoreeër Nicomachus van Gerasa (60 - 120 n. Chr.) gaf als voorbeelden 6, 28, 496 en 8128.
- De delers van 496 zijn 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248 en 496.
Laat zien dat 496 een volmaakt getal is.
 - In boek IX van de Elementen van de Griekse wiskundige Euclides (300 v. Chr.) staat de stelling: Als p een priemgetal is, dan is $2^{p-1}(2p - 1)$ een volmaakt getal.
Laat zien dat de formule de genoemde volmaakte getallen geeft.
 - Bereken met de formule het eerstvolgende volmaakte getal.
- 48** Toen men Pythagoras vroeg wat een vriend was, antwoordde hij 'een tweede ik' en noemde daarbij de getallen 284 en 220.
- De delers van 220 kleiner dan 220 zijn 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 en 110.
Bereken de som van deze delers.
 - Bereken de som van de delers van 284 kleiner dan 284.
 - Wat bedoelt Pythagoras met bevriende getallen?

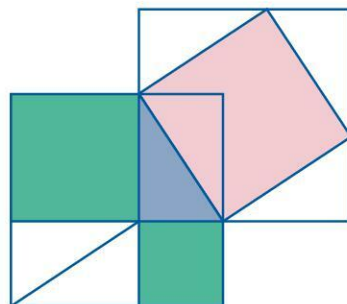
Pythagoras is bij iedereen bekend als de naamgever van de stelling met de bekende formule $a^2 + b^2 = c^2$. De stelling van Pythagoras kun je als volgt formuleren:

In een rechthoekige driehoek is de oppervlakte van het vierkant op de langste zijde gelijk aan de som van de oppervlakten van de vierkanten op de twee andere zijden.
Op de postzegel zie je die stelling afgebeeld met $3^2 + 4^2 = 5^2$.

p is een priemgetal als p twee delers heeft: 1 en p .
5 is priem; delers 1 en 5
6 is niet priem, delers 1, 2, 3 en 6.
De eerste vijf priemgetallen zijn 2, 3, 5, 7 en 11.



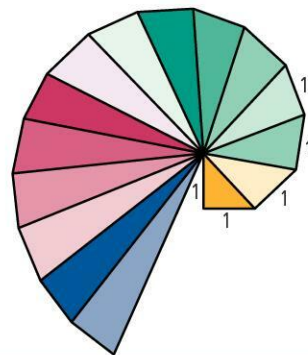
- 49** Het oudste bewijs van de stelling van Pythagoras vind je in de Elementen van Euclides boek I, stelling 47. De figuur hoort bij het bewijs van Multatuli, pseudoniem van Eduard Douwes Dekker (1820 - 1887). Op de zijden van de blauwe rechthoekige driehoek zijn vierkanten getekend. Vervolgens zijn zowel het roze vierkant als de twee groene vierkanten ingelijst.
- Waarom zijn die lijsten twee even grote vierkanten?
 - Leg uit dat de oppervlakte van de twee groene vierkanten gelijk is aan de oppervlakte van het roze vierkant. Multatuli zelf vond: "Eenvoudiger kan het niet!"



De overtuiging van de Pythagoreërs dat alles op gehele getallen en hun verhoudingen (breuken) gebaseerd was, kreeg een hevige knak toen bleek dat er getallen waren die niet als breuk te schrijven zijn. De Pythagoreër Hippasus toonde aan dat $\sqrt{2}$ niet als breuk is te schrijven.

- 50** Met de Pythagorasspiraal kun je lijnstukken construeren met een wortelgetal als lengte.

- De gele driehoek is gelijkbenig en rechthoekig met rechthoekszijden 1.
Bereken de lengte van de hypotenusa (langste zijde) van deze driehoek. Laat de wortel in het antwoord staan.
- Deze hypotenusa is een rechthoekszijde van de volgende rechthoekige driehoek. De andere rechthoekszijde is 1.
Bereken de lengte van de hypotenusa van deze driehoek.
- Herhaal dat proces en bereken van de laatste drie driehoeken de lengte van de hypotenusa.



Theorie

De Pythagoreërs kenden naast de 3-4-5 driehoek nog meer driehoeken waarvan de zijden gehele getallen als lengte hebben. In de Elementen van Euclides (boek X, stelling 28) vind je zelfs een recept om zulke driehoeken te maken. Drie getallen a , b en c waarvoor geldt dat $a^2 + b^2 = c^2$ vormen samen een **Pythagoreïsch drietal** (a , b , c).

Grieks recept

Kies twee positieve getallen voor m en n met m groter dan n .
Dan is $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ een Pythagoreïsch drietal.

- 51** Bereken de Pythagoreïsche drietallen bij de gegeven m en n .

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| a $m = 2$ en $n = 1$ | c $m = 5$ en $n = 2$ |
| b $m = 3$ en $n = 2$ | d $m = 5$ en $n = 4$ |

- 52** **a** Schrijf zonder haakjes.
 $(m^2 - n^2)^2 = (m^2)^2 - 2m^2n^2 + \dots = m^4 - \dots + \dots$
 $(2mn)^2 = 2^2m^2n^2 = \dots$
 $(m^2 + n^2)^2 = \dots + \dots + \dots$
b Laat zien dat $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ een Pythagoreïsch drietal is.

- 53** De postzegel uit Suriname hoort bij het Pythagoreïsch drietal (8, 15, 17).
a Ga na dat (8, 15, 17) inderdaad een Pythagoreïsch drietal is.
b Welke waarden voor m en n horen daarbij?

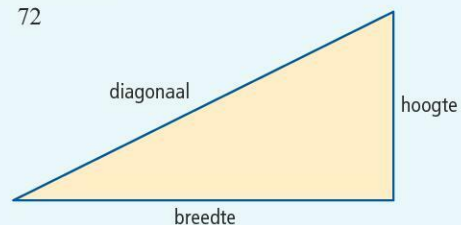


De stelling van Pythagoras was al bij de Babyloniërs bekend. Dat blijkt uit de bestudering van dit kleitablet, genaamd Plimpton 322 uit ca. 1800 v. Chr. en genoemd naar George Plimpton, die het kocht van een antiekhandelaar en na zijn dood in 1936 naliet aan de Columbia Universiteit. Naar alle waarschijnlijkheid heeft Pythagoras op zijn reizen kennis gemaakt met die Babylonische wetenschap. Het kleitablet heeft vijf kolommen. In de laatste kolom staan de regelnummers 1 tot en met 15. Boven de tweede kolom staat breedte en boven de derde kolom diagonaal. In de tabel hieronder vind je een transcriptie van de eerste vijf regels van die twee kolommen. Daarnaast een omzetting in het decimale stelsel.



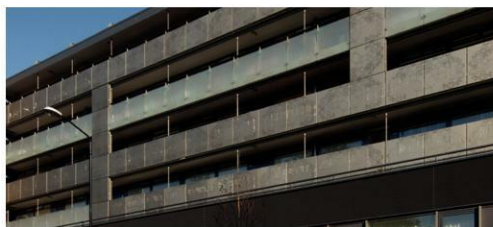
<i>breedte</i>	<i>diagonaal</i>		<i>breedte</i>	<i>diagonaal</i>		<i>hoogte</i>
1:59	2:49	1	119	169	1	120
56:7	3:12:01	2	3367	11521	2	11018,019....
1:16:41	1:50:49	3	4601	6649	3	4800
3:31:49	5:09:01	4	12709	18541	4	13500
1:05	1:37	5	65	97	5	72

Bereken je voor elke rij de hoogte met de stelling van Pythagoras: $\text{breedte}^2 + \text{hoogte}^2 = \text{diagonaal}^2$, dan vind je de getallen in de meest rechtse kolom. Dat zijn meestal gehele getallen. Dat geldt ook voor de overige regels. Voor de uitzonderingen zijn acceptabele verklaringen gevonden.



Suggesties voor verder onderzoek

Langs de galerij van een flat in Leidschendam vind je een tekening van Pythagorasbomen. Deze boom van Pythagoras is bedacht door Ir. A.E. Bosman (1891 - 1961) en in 1957 gepubliceerd in zijn boekje *Het wondere onderzoekingsveld der vlakke meetkunde*.

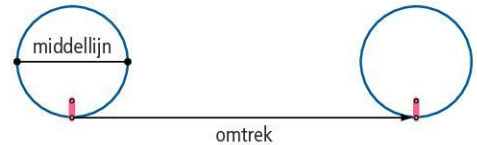


Onderzoek hoe de ‘boom’ in elkaar zit. Door te beginnen met een niet-gelijkbenige rechthoekige driehoek kun je ook ‘scheve’ bomen maken. Met een tekenprogramma als *Geogebra* teken je snel de mooiste bomen.

Maak je een cirkel twee keer zo groot, dan wordt niet alleen de middellijn, maar ook de omtrek twee maal zo groot. De verhouding tussen de omtrek en de middellijn blijft altijd hetzelfde. Al in de bijbel (in 1 Koningen 7) vind je een passage waaruit blijkt dat men al vroeg (ca. 950 v. Chr.) wist dat de omtrek van een cirkel ongeveer drie maal zo groot is als zijn middellijn. Koning Salomo laat zijn bronggieter Chiram voor de bouw van de tempel een groot bronzen waterbekken maken: 'Die waterbak was 5 meter breed en 2,5 meter hoog en de omtrek was 15 meter'.



- 54**
- Neem een rond voorwerp (een munt, een damsteen, een wiel) en zet een merkteken op de rand. Rol het voorwerp over papier. Begin en eindig met het merkteken op de rand. Zo krijg je een lijnstuk dat net zo lang is als de omtrek van de cirkel.
 - Teken een lijnstuk dat net zo lang is als de middellijn van het voorwerp. Pas de middellijn af op de omtrek. Hoeveel keer gaat dat?
 - Je houdt een stukje van de omtrek over. Pas dat stukje af op de middellijn. Hoeveel keer gaat dat?

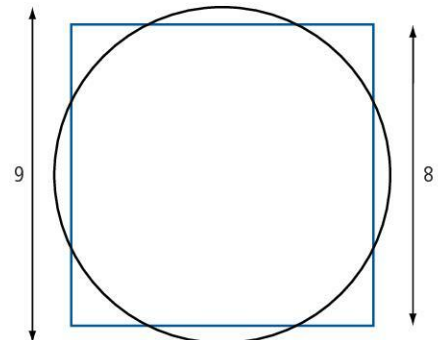


Theorie

Voor alle cirkels is de verhouding *omtrek* : *middellijn* gelijk. Voor deze verhouding wordt het symbool π gebruikt, dus voor een cirkel geldt $omtrek = \pi \times diameter$ of $O = \pi d$. $\pi \approx 3,14$; een goede breukbenadering is $3\frac{1}{7}$. Voor de oppervlakte A van een cirkel met straal r geldt $A = \pi r^2$.

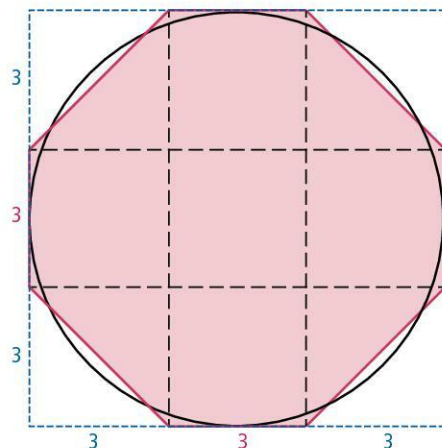
Het symbool π wordt voor het eerst aangetroffen bij de Engelse wiskundige William Oughtred (1574 - 1660), die het gebruikte voor de omtrek van een cirkel (perimeton (Grieks) is omtrek). Als symbool voor de verhouding omtrek : middellijn wordt algemeen π gebruikt sinds de grote Zwitserse wiskundige Leonard Euler (1707 - 1783) dat deed in zijn boek *Introductio in analysin infinitorum*.

- 55** De vroegste vermelding van deze verhouding is te vinden in de Papyrus Rhind van Ahmes.
- Neem een rond veld met een diameter van 9 khet. Wat is de oppervlakte? Haal 1/9 af van de diameter, namelijk 1; de rest is 8. Vermenigvuldig 8 met 8; dat geeft 64. Daarom omvat het veld 64 setat land.*
- Ahmes schrijft hier dat een cirkel met diameter 9 dezelfde oppervlakte heeft als een vierkant met zijde 8.
- Laat zien dat hieruit voor π de waarde $\frac{256}{81} \approx 3,1605$ volgt.
 - Hoeveel procent wijkt die waarde af van $\pi = 3,1415$?



- 56** In de papyrus Rhind benadert Ahmes de oppervlakte van een cirkel met diameter 9 met een achthoek zoals in de figuur aangegeven. Mogelijk is hij zo aan zijn waarde van π gekomen. Laat zien dat de oppervlakte van deze achthoek bijna gelijk is aan de oppervlakte van een vierkant met zijde 8.

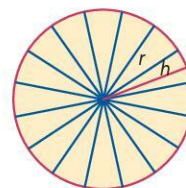
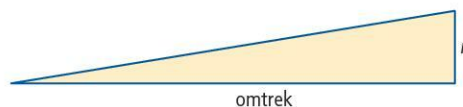
De Egyptenaren gebruikten nog geen vaste waarde voor π . Per geval ontwikkelden zij rekenregels als hierboven. Een nauwkeurige breukbenadering van π wordt gegeven door de Griekse wiskundige, natuurkundige en uitvinder Archimedes (287 - 212 v. Chr.) in zijn werk 'Over het meten van de cirkel'. In dat boekje benadert hij de cirkel met in- en omgeschreven regelmatige veelhoeken. Dat is een compleet nieuwe gedachte!



- 57** De eerste stelling uit het boekje van Archimedes luidt:
De oppervlakte van een cirkel is gelijk aan de oppervlakte van een rechthoekige driehoek waarvan de ene rechthoekszijde gelijk is aan de straal en de andere rechthoekszijde gelijk is aan de omtrek van de cirkel.

Archimedes bewijst dat door aan te tonen dat de oppervlakte van de cirkel niet groter en niet kleiner kan zijn dan die van de driehoek. Hier eerst een wat intuïtiever 'bewijs'.

- a** In de cirkel met straal r is een regelmatige 16-hoek getekend. De hoogte van de driehoekjes is h . Laat zien dat de oppervlakte van de zestienhoek gelijk is aan $\frac{1}{2} \cdot h \cdot \text{omtrek zestienhoek}$.
- b** Naar welke waarde nadert de omtrek van de veelhoek als het aantal zijden van de veelhoek steeds groter wordt? En de hoogte van de driehoekjes?

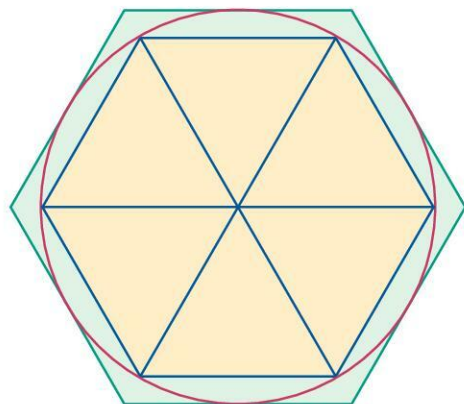


- 58** Archimedes begint zijn benadering van π door de omtrek van een cirkel te vergelijken met die van een ingeschreven en een omgeschreven regelmatige zeshoek. Neem $r = 1$.

- a** Hoe lang is de zijde z_6 van de ingeschreven zeshoek?
- b** Hoe groot is de omtrek o_6 van de ingeschreven zeshoek?
- c** Je kunt berekenen dat de zijde Z_6 van de omgeschreven zeshoek gelijk is aan $\frac{2}{\sqrt{3}}$

Bereken de omtrek O_6 van de omgeschreven zeshoek in vier decimalen nauwkeurig.

- d** Hoeveel procent wijkt het gemiddelde van o_6 en O_6 af van de omtrek van de cirkel?



- 59 Archimedes benadert wortels met breuken. Zo gebruikt hij dat $\sqrt{3}$ kleiner is dan $\frac{1351}{780}$ en groter is dan $\frac{265}{153}$. In hoeveel decimalen zijn die benaderingen correct?

Om de omtrek van de cirkel nauwkeuriger te benaderen, verdubbelt Archimedes het aantal zijden van de veelhoek en berekent de zijden van de in- en omgeschreven twaalfhoek met behulp van meetkundige verhoudingen in driehoeken. Door nog eens driemaal het aantal zijden te verdubbelen en de uitkomsten met breuken te benaderen vindt hij ten slotte voor de zijden van de in- en omgeschreven 96-hoek:

$$\frac{1}{2} z_{96} > 66 : 2017 \frac{1}{4} \text{ en } \frac{1}{2} z_{96} < 153 : 4673 \frac{1}{2}.$$

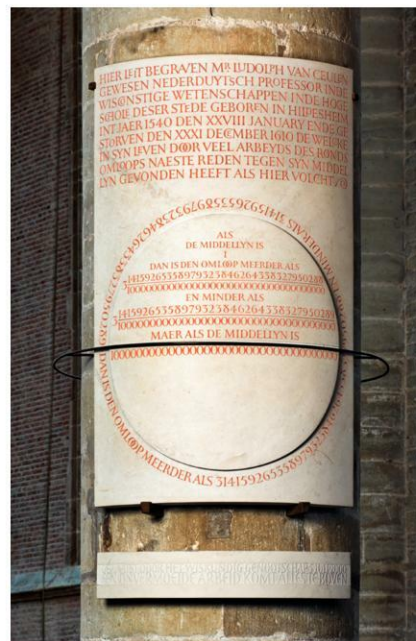
Voor de omtrek van de cirkel geldt:
 $96 \times z_{96} < \text{omtrek cirkel} < 96 \times Z_{96}$



- 60 Laat zien dat op grond van zijn breukbenaderingen van z_{96} en Z_{96} de conclusie van Archimedes dat $3\frac{10}{71} < \frac{\text{omtrek cirkel}}{\text{middellijn}} < 3\frac{1}{7}$ juist is.

In het voetspoor van Archimedes heeft de Duits/Nederlandse wiskundige Ludolph van Ceulen (1540 - 1610) een groot deel van zijn leven (handmatig!) gerekend aan benaderingen van π . Met een veelhoek van 32 212 254 720 zijden gaf hij een benadering van π in 20 decimalen nauwkeurig. Uiteindelijk berekende hij 35 decimalen, die hij op zijn grafsteen liet beitelen. Een reconstructie van die grafsteen is op 5 juli 2000 door ZKH Prins Willem-Alexander onthuld in de Pieterskerk te Leiden.

- 61 a Uit de tekst hierboven blijkt dat Van Ceulen zijn benadering niet gevonden kan hebben door het aantal zijden van een zeshoek steeds maar te verdubbelen. Hoe blijkt dat?
- b Stel dat Ludolph van Ceulen met een zo klein mogelijke n -hoek is begonnen en daarna telkens het aantal zijden verdubbelde. Welke n -hoek is dat dan geweest en hoeveel verdubbelingen heeft hij dan nodig gehad?



- 62** In de loop van de eeuwen zijn er verschillende formules gevonden om π te berekenen. De Schotse wiskundige James Gregory (1638 - 1675) en de Duitse wiskundige Leibniz (1646 - 1716) vonden onafhankelijk van elkaar de formule:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots \text{ enzovoorts.}$$

Stop bij $\frac{1}{9}$ en geef een benadering van $\frac{1}{4}\pi$. Hoe nauwkeurig is die benadering?

- 63** De al genoemde Zwitser Euler vond een bijzondere formule:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

Onderzoek tot en met welke breuk je nodig hebt om een waarde van π groter dan 3 te vinden.

- 64** Een bijzondere vermelding verdient ook het Indiase genie Ramanujan (1887 - 1920) die een wel heel aparte benadering voor π gaf:

$$\pi \approx \left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{\frac{1}{4}} \text{ ofwel } \pi \approx \sqrt[4]{97 \frac{9}{22}}$$

In hoeveel decimalen is de benadering correct?

Er zijn veel rijmpjes gemaakt om de eerste decimalen van π uit het hoofd te leren.

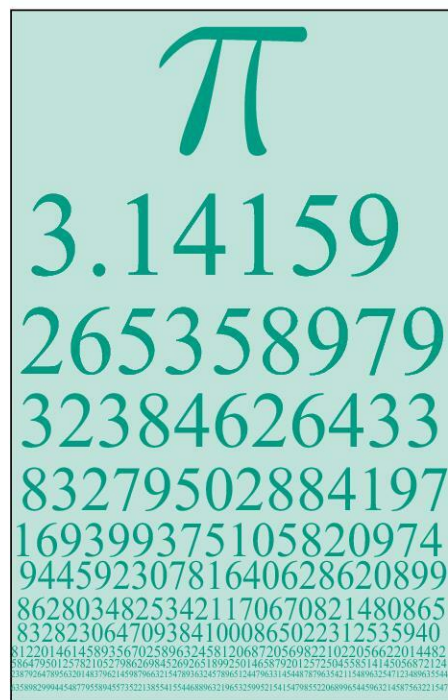
Eva o lief, o zoete hartedief uw blauwe oogen
zyn wreed bedrogen

See, i have a rhyme assisting my feeble brain
its tasks oft-times resisting

Que j'aime à faire apprendre ce nombre utile aux sages! Immortel
Archimède antique, ingénieur,
Qui de ton jugement peut sonder la valeur?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.

Suggestie voor verder onderzoek

Onderzoek welke benaderingen van π gebruikt werden in andere oude culturen, zoals in Babylonië en China.



- A** aanzichten 90
absolute frequentie 158
absoluut 158
afgeleide functie 56
afgeleide waarde 56
afhankelijk 202
afnemende daling 46
afnemende stijging 46
aselect 26, 176
- B** balansmethode 126
- C** centrummaten 158
complement 16
complementregel 16, 198
complementair 16
constant 46
constante daling 46
constante stijging 50
continue variabele 169
- D** dalend 50
differentiequotiënt 51
differentiëren 61
discrete variabele 169
draaisymmetrie 102
- E** eerstegraads vergelijkingen 130
experimentele kans 14
extreme waarde 68
- F** factor 84
frequentieverdeling 164
- G** gebeurtenis 14
gebroken formule 135
gelijkvormig 86
gemiddelde 162
gemiddelde verandering 51
gulden rechthoek 91
gulden snede 91
gulden verhouding 91
- H** helling berekenen 53
hellingfunctie 60
hellinggrafiek 57
- I** inhoud balk 106
inhoud cilinder 106
inhoud kegel 106
inhoud piramide 106
inhoud prisma 106
interkwartielfstand 163
- K** kans 23
kansen berekenen 26
kansboom 23
kansen optellen 23
kansen vermenigvuldigen 23
kansexperiment 14
kansverdeling 35, 204
klokvormige verdeling 164
kwalitatieve variabele 162
kwantitatieve variabele 162
kwartielfstand 163
- L** lijnsymmetrie 102
lineaire vergelijking 130
- M** machtsformules 142
maximum 50, 68
mediaan 162
meertoppige verdeling 164
minimum 50, 68
modus 162
- N** normaal verdeeld 173, 213
normale verdeling 173
- O** onafhankelijk 206
oppervlakte cirkel 85
oppervlakte driehoek 85
oppervlakte rechthoek 85
- P** parameters 213
puntsymmetrie 102
- R** regels voor differentiëren 65
rekenregels voor
stochasten 216, 218
rekenregels voor machten 129
relatief 162
relatieve frequentie 14, 162
representatief 180
rooster 202
route 23

- S** scheve verdeling 164
 simuleren 16
 snelheid 60
 somregel 65
 spreidingsbreedte 163
 spreidingsmaten 163
 standaardafwijking 163
 standaardafwijking van stochast 209
 standaarddeviatie 163
 steekproef 180
 steekproefomvang 180
 steekproevenverdeling 182
 stelling van Pythagoras 84
 stijgend 50
 substitueren 146
- T** theoretische kans 18
 toenemende daling 50
 toenemende stijging 50
 toevalsexperiment 14
- toevalsvariabele 204
 trekken met terugleggen 30
 trekken zonder terugleggen 30
- U** uitgedrukt in 131
 uitschieter 164
 uniforme verdeling 164
- V** vaasmodel 31
 vergelijking van een lijn 131
 vergroting 84
 vergrotingsfactor 86, 87, 108
 verwachtingswaarde 31, 200
 vuistregels 173
- W** wortel formule 139
 wortel- n wet 221

Ontwerp omslag G2K, Groningen/Amsterdam

Fotografie omslag Getty Images

Ontwerp binnenwerk Ebel Kuipers, Sappemeer

Illustraties Peter Fitzverploegh, Utrecht

Technisch tekenwerk Integra Software Services, India

Beeldresearch Daliz, Den Haag

Fotoverantwoording

Marco van Middelkoop/ Aerophotostock, Amsterdam: p. 6-7

Rindert Reijenga, Leeuwarden: p. 10, 14

Shutterstock, New York: p. 20, 23, 25, 48, 60, 62, 68, 126, 132, 134, 140, 144, 153, 161, 165, 166, 181, 186, 188, 206, 210, 214, 218b, 221, 229b

Dave de Bruin/ Daliz, Den Haag: p. 17, 26, 41, 42, 43, 94, 96b, 109, 200, 215, 218o, 227, 229m, 229o, 266

Dziurek/ Shutterstock.com: p. 24

Alamy/ Image Select, Wassenaar: p. 28, 86, 190b, 231, 232, 233, 235, 236, 242, 243, 244, 245, 250b

iStockphoto/ Getty Images, Amsterdam: p. 30, 31, 32, 44-45, 78-79, 84, 180, 196-197, 205, 211

Rijkswaterstaat, Den Haag: p. 33

Bettman Archives/ Getty Images, Amsterdam: p. 35

Toto/ Nederlandse Loterij, Den Haag: p. 41

Shutterstock, New York: p. 51, 56, 63, 88, 104o, 105, 111, 114o, 130, 138, 147, 159, 173, 176, 178, 204, 207, 216, 258l, 265, 270

Ivan Garcia/ Shutterstock.com: p. 52

AP Images/ Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 64

Reimar/ Shutterstock.com: p. 69

Google maps: p. 82

Federico Covre, Rome: p. 87

Gerardus/ Wiki Commons: p. 90b

Eduard Hueber, Archphoto.com: p. 91

Examenblad.nl: p. 93

Stichting Beeld dragers /Nationale Beeldbank, Den Haag: p. 96o

René Van Beek: p. 98

Nova Scotia Museum, Halifax Canada: p. 100b

Popartic/ Shutterstock.com: p. 104b

Gerrit Rietveld/ Pictoright, Amsterdam: p. 106b

Daliz, Den Haag: p. 106, 278

Getty Images, Amsterdam: p. 116-117, 190-191

Private Collection/ Christies/ Pictoright, Amsterdam: p. 116b

Universal Images Group Editorial/ Getty Images, Amsterdam: p. 116o

AE Photo/ Getty Images, Amsterdam: p. 122-123

Zuiderzee Museum, Enkhuizen: p. 127

Rietveld originals, Eindhoven: p. 128

Guus Schonewille/ Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 146

David Rozing/ Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 156-157

Richard van der Woude Fotografie/ Nationale Beeldbank, Den Haag: p. 164

Kim van Dam/ Nationale Beeldbank, Den Haag: p. 168

Michiel Wijnbergh Fotografie/ Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 169

Lex van Lieshout/ ANP Photo, Den Haag: p. 184

Underwood Archives / Getty Images, Amsterdam: p. 190o
Koos Busters/ Nationale Beeldbank, Den Haag: p. 226
Suriyapong Thongsawang/ Getty Images, Amsterdam: p. 230-231
Fritzbruno/ Wiki Commons: p. 234
Wiki Commons: p. 246, 248
Rare Book and Manuscript Library at Columbia University in New York: p. 247b
Ana, Amsterdam: 247o
Rijksdienst voor het Cultureel Erfgoed, Amersfoort: p. 250o
David Johnson/ Dreamstime, San Francisco: p. 252-253
Theo Verburg Architecten, Ede: p. 258r
Kim van Dam/ Nationale Beeldbank, Den Haag: p. 259
Jan de Groen/ Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 261
JW Rutgers/ JWR2018/ Flickr: p. 271
Henk van Bennekum, Sequence V, 86/87, gegalvaniseerd staal 2 x 2 x 55 m, Hugo de Vrieslaan, Watergraafsmeer Amsterdam: p. 271m



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.

Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.

Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.

Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.



www.modernewiskunde.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-89216-6



9 789001 892166