

MODERNE WISKUNDE

A

$$\nu = \frac{4h}{2(h+z) - zh}$$



Noordhoff

Dit boek is van jou:

NAAM

KLAS

12e editie

Moderne Wiskunde

vwo A deel 3

Serieoverzicht Tweede Fase

	havo		vwo		
klas 4	A 1	B 1	AC 1		B 1
klas 5	A 2	B 2	AC 2		B 2
klas 6	A 3	B 3	A 3	C 3	B 3
			A 4	C 4	B 4

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleen.

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 21

© 2021 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsenauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-89198-5

12e editie

Moderne Wiskunde

vwo A deel 3

Jeroen van den Boom

Bert Boon

Ferdi Doddema

Wim Doekes

Ilse de Jong

Gerard van Proosdij

Colin Roll

Geertrui Schaberg

Ron Sinkeldam

Carolijn Tacken

12 Logaritmische functies 6

- Voorkennis 8
- 12.1 Logaritmen 10
- 12.2 Logaritmen berekenen 14
- 12.3 Grafieken van logaritmische functies 18
- 12.4 Rekenregels voor logaritmen 22
- 12.5 Formules herleiden 26
- 12.6 Logaritmische schalen 30
- 12.7 Gemengde opdrachten 34
- Onderzoeksopdrachten 35
- Samenvatting 36
- Test jezelf 40
- Extra oefening 42

Vaardigheden 6 44

- Vergelijkingen en ongelijkheden 46
- Groeifactoren en percentages 47
- Substitueren en herleiden 48
- Gebroken formules 48

13 Binomiale verdelingen 50

- Voorkennis 52
- 13.1 De binomiale verdeling 54
- 13.2 Werken met binomiale verdelingen 58
- 13.3 Cumulatieve kansen 62
- 13.4 Verwachtingswaarde en standaardafwijking 66
- 13.5 Gemengde opdrachten 70
- Onderzoeksopdrachten 71
- Samenvatting 72
- Test jezelf 76
- Extra oefening 78

14 Rijen en recursie 80

- Voorkennis 82
- 14.1 Recursieve formules 84
- 14.2 Rijen weergeven 88
- 14.3 Directe formules 92
- 14.4 Som van rekenkundige rij 96
- 14.5 Som van meetkundige rij 100
- 14.6 Gemengde opdrachten 104
- Onderzoeksopdrachten 105
- Samenvatting 106
- Test jezelf 110
- Extra oefening 112

Vaardigheden 7 114

- Functies met machten 116
- Redeneren met formules 117
- Hellingen 118
- Systematisch tellen 119

15 Normale verdelingen 120

- Voorkennis 122
- 15.1 Percentage berekenen 124
- 15.2 Grenswaarde berekenen 128
- 15.3 Gemiddelde en standaardafwijking berekenen 132
- 15.4 Normale verdeling met discrete waarden 136
- 15.5 Gemengde opdrachten 140
- Onderzoeksopdrachten 141
- Samenvatting 142
- Test jezelf 146
- Extra oefening 148

16 Samengestelde functies 150

- Voorkennis 152
- 16.1 Machtsfuncties 154
- 16.2 Machtsfuncties differentiëren 158
- 16.3 Kettingfuncties 162
- 16.4 Kettingfuncties differentiëren 166
- 16.5 Gebroken functies differentiëren 170
- 16.6 Redeneren met de afgeleide 174
- 16.7 Gemengde opdrachten 178
- Onderzoeksopdrachten 179
- Samenvatting 180
- Test jezelf 184
- Extra oefening 186

Vaardigheden 8 188

- Rijen 190
- Rekenmachine 191
- Logaritmische schalen 192
- Systematisch tellen 193

17 Hypothese toetsen 194

- Voorkennis 196
- 17.1 Hypotheses 198
- 17.2 Fouten van de eerste en tweede soort 202
- 17.3 Het kritieke gebied 206
- 17.4 Eenzijdige toets van het gemiddelde 210
- 17.5 Eenzijdig binomiaal toetsen 214
- 17.6 Tweezijdig toetsen 218
- 17.7 Gemengde opdrachten 222
- Onderzoeksopdrachten 223
- Samenvatting 224
- Test jezelf 228
- Extra oefening 230

Keuzeonderwerpen 232

Perspectief 234

Extra 248

Meer oefenen 250
Oefenproefwerken 262

Werkbladen 274
Trefwoorden 276

Moderne Wiskunde

vwo A deel 3





In dit hoofdstuk

In hoofdstuk 5 heb je geleerd wat exponentiële functies zijn. Je hebt ook geleerd hoe je exponentiële vergelijkingen met je rekenmachine kunt oplossen.

In dit hoofdstuk leer je hoe je exponentiële vergelijkingen zonder je rekenmachine kunt oplossen. Hiervoor heb je logaritmen nodig. Je leert wat logaritmen zijn en waarvoor je ze kunt gebruiken. Je kunt exponentiële formules herleiden tot logaritmische formules. Verder leer je wat een logaritmische schaalverdeling is en waar je deze voor kunt gebruiken.

In deel 4 ga je logaritmen weer tegenkomen. Je leert dan hoe je logaritmische formules en exponentiële functies differentieert.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk:

- | | |
|--|-------------|
| • Logisch redeneren en bewijzen | opdracht 33 |
| • Formules manipuleren | opdracht 42 |
| • Probleem oplossen en analytisch denken | opdracht 57 |

V1 Schrijf als één macht en zonder negatieve of gebroken exponenten.

- a** $5^3 \cdot 5^4$ **d** $7^{\frac{1}{2}}$
b 5^{-3} **e** $(4^{-3})^2$
c $(7^2)^5$ **f** $2^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$

Theorie

Voor het rekenen met machten en exponenten kun je de volgende rekenregels gebruiken:

$$\begin{aligned}
 g^p \cdot g^q &= g^{p+q} & \frac{g^p}{g^q} &= g^{p-q} \\
 (g^p)^q &= g^{p \cdot q} & g^{-p} &= \frac{1}{g^p} \quad (g \neq 0) \\
 g^0 &= 1 \quad (g \neq 0) & g^{\frac{1}{p}} &= \sqrt[p]{g} \quad (g \geq 0)
 \end{aligned}$$

Voorbeeld

$$\begin{aligned}
 5^0 &= 1 & \left(\frac{1}{4}\right)^0 &= 1 \\
 3^{-2} &= \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} & x^{-12} &= \frac{1}{x^{12}} \\
 4^{-5} \cdot 4^7 &= 4^{-5+7} = 4^2 & x^4 \cdot x^a &= x^{4+a} \\
 (p^{\frac{1}{6}})^4 &= p^{\frac{1}{6} \cdot 4} = p^{\frac{4}{6}} = p^{\frac{2}{3}} & (x^a)^2 &= x^{2a}
 \end{aligned}$$

V2 Schrijf als één macht.

- a** $a^{-3} \cdot a^{-5} \cdot a^{12}$ **c** $(d^{\frac{1}{2}})^4 \cdot d^3$
b $\frac{w^{-2}}{w^{-5}}$ **d** $\frac{7^{x+3}}{7^{x-3}}$

V3 Schrijf zonder negatieve of gebroken exponent.

- a** a^{-3} **c** $5a^{\frac{1}{2}}$
b $\frac{1}{g^{-5}}$ **d** $\left(\frac{1}{m}\right)^{-2}$

V4 De dagwaarde van een bepaald type auto neemt exponentieel af. In de tabel is de waarde W in euro's na t jaar voor een aantal waarden van t af te lezen.

- a** Hoe kun je met behulp van de tabel berekenen dat de groeifactor per jaar gelijk is aan 0,9?
b Vul de tabel verder in.
c Met hoeveel procent neemt de waarde per jaar af?
d Bereken de groeifactor per 10 jaar. Rond je antwoord af op drie decimalen.
e Met hoeveel procent neemt de waarde per 10 jaar af?
f Stel een formule bij de tabel op met de vorm $W = b \cdot g^t$.
g Na hoeveel jaar is de auto minder dan € 4.000,- waard?

t in jaren	W in euro's
0	25 000
1	...
2	20 250
3	...
4	16 403
5	14 762

Theorie

Als g de **groefactor per tijdseenheid** is, dan is de groefactor per n tijdseenheden g^n .

De groefactor voor een n -de deel van de tijdseenheid is $g^{\frac{1}{n}}$ ofwel $\sqrt[n]{g}$.

Voorbeeld

Als de groefactor per jaar gelijk is aan 4,

dan is de groefactor per 3 jaar $4^3 = 64$.

De groefactor per half jaar is $4^{\frac{1}{2}} = 2$.

De groefactor per kwartaal is $4^{\frac{1}{4}} \approx 1,414$.

t in kwartalen	0	1	2	3	4
N	640	905	1280	1810	2560
		$\times 1,414$	$\times 1,414$	$\times 1,414$	$\times 1,414$
			$\times 4$		

- V5** Bij een groeiproses is de groefactor per dag 2,5.
Rond in deze opdracht je antwoorden af op twee decimalen.
- Bereken de groefactor per week.
 - Bereken de groefactor per halve dag.
 - Bereken de groefactor per zeven uur.
- V6** Een insectenpopulatie neemt toe met 6,3% per dag.
Op 1 februari is het aantal insecten 14 800.
- Leg uit dat het aantal insecten N kan worden berekend met de formule $N = 14\,800 \cdot 1,063^t$ met t de tijd in dagen en $t = 0$ op 1 februari.
 - Bereken het aantal insecten op 2 februari.
 - Bereken het aantal insecten op 29 januari.
 - Met hoeveel procent neemt het aantal insecten per week toe?
 - Bereken de procentuele toename per acht uur.
 - Bereken na hoeveel dagen het aantal insecten gegroeid is tot 50 000.
- V7** In 2009 had een dorp 2456 inwoners. Het aantal inwoners nam in de jaren daarna met 1,6% per jaar af.
- Stel een formule op waarmee je het aantal inwoners A kunt berekenen als je de tijd t in jaren na 2009 weet.
 - Bereken de groefactor per 5 jaar.
 - Met hoeveel procent neemt het aantal inwoners per 10 jaar af?
 - In welk jaar zullen er voor het eerst minder dan 2000 inwoners zijn?
 - De verwachting is dat het aantal inwoners na 2025 met 2% per jaar zal stijgen.
In welk jaar zullen er dan net zoveel inwoners zijn als er in 2009 waren?

12.1 Logarithmen

Je leert

- wat een logaritme is

Leerroutes

- ondersteunend: 1-2-3-4-5-06-6-07-8-9
- doorlopend: 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10
- uitdagend: 1-2-3-5-6-7-8-9-10-U1

Het aantal bacteriën in een petrischaal kan zich elk uur vertienvoudigen.

Het aantal bacteriën A kan worden berekend met de formule $A = 10^t$ met t de tijd in uren.

- Leg uit waarom je wel makkelijk kunt berekenen na hoeveel uren er 1000 bacteriën zijn, maar niet na hoeveel uren er 2000 bacteriën zijn.



- 1** Gegeven is de exponentiële vergelijking $2^t = 8$. Je kunt deze vergelijking exact oplossen.
- a** Laat zien dat $t = 3$ de oplossing van deze vergelijking is.
 - b** Vul in: $16 = 2^{\dots}$, dus de oplossing van de vergelijking $2^t = 16$ is $t = \dots$.
 - c** Op het blaadje wordt de vergelijking $3^{t-1} = 9$ opgelost. Maak de berekening op het blaadje af.

$$\begin{aligned} 3^{t-1} &= 9 \\ 3^{t-1} &= 3 \dots \\ t-1 &= \dots \\ t &= \dots \end{aligned}$$

- 2** Los de vergelijkingen exact op.

H

- a** $2^7 = 128$ **d** $3^{7+2} = 81$
b $9^7 = 81$ **e** $5^{1-27} = 25$
c $13^7 = 13$ **f** $2 \cdot 6^7 = 432$

- 3** De formule $A = 2^t$ hoort bij de groei van een aantal bacteriën. Hierin is A de hoeveelheid bacteriën na een tijd van t kwartier.
- a** Na hoeveel kwartier waren er 32 bacteriën?
 - b** Om te berekenen na hoeveel kwartier er 7 bacteriën zijn, moet je de vergelijking $2^t = 7$ oplossen. Waarom kun je deze vergelijking niet oplossen zonder je rekenmachine te gebruiken?
 - c** Leg uit waarom de oplossing van deze vergelijking tussen 2 en 3 kwartier moet liggen.
 - d** Laat zien dat de oplossing tussen $t = 2,80$ en $t = 2,81$ ligt.
 - e** De formule $A = 3^t$ hoort bij een andere bacteriesoort. Je wilt weten na hoeveel kwartier er 28 bacteriën waren. Laat zien dat de oplossing tussen 3 en 4 kwartier ligt.

- 4 Geef van de vergelijkingen aan tussen welke opeenvolgende gehele getallen de oplossing ligt.

a $3^t = 25$ c $2^t = 20$
 b $10^t = 50$ d $7^t = 14$

- 5 Tijdens een griepgolf verdubbelt het aantal griepgevallen zich elke week. Aan het begin waren er 150 griepgevallen.

- a Wat betekent de oplossing van de vergelijking $150 \cdot 2^t = 1650$ voor de griepgolf?
 b Laat zien dat je de vergelijking van opdracht a kunt schrijven als $2^t = 11$.
 c Bereken met je rekenmachine de oplossing van de vergelijking $2^t = 11$.
 d Kun je de vergelijking $2^t = 11$ oplossen zonder je rekenmachine te gebruiken?

Theorie

De exacte oplossing van de vergelijking $g^t = a$ heet de **logaritme** van a met **grondtal** g . Je noteert deze oplossing als $t = {}^g \log(a)$. Je spreekt dit uit als ' g log a '.

De basisregel voor logaritmen luidt als volgt:

Uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g \log(a)$ en omgekeerd

uit ${}^g \log(a) = t$ volgt $a = g^t$

Hierbij is $a > 0$, $g > 0$ en $g \neq 1$.

tot de macht

$${}^{10} \log(1000) = 3$$

is

Voorbeeld 1

Geef de exacte oplossing van de vergelijking $4^t = 13$.

Oplossing

Uit $4^t = 13$ volgt $t = {}^4 \log(13)$.

Voorbeeld 2

Geef de exacte oplossing van de vergelijking $6^{t-2} = 19$.

Oplossing

Uit $6^{t-2} = 19$ volgt $t - 2 = {}^6 \log(19)$.

Dus $t = {}^6 \log(19) + 2$.

Ondersteunende route → maak opdracht 06

- 6 Geef de exacte oplossing.

H a $7^t = 4$ d $5^{t-3} = 14$
 b $7^{t+2} = 10$ e $5^{2t} = 125$
 c $4^t = 27$ f $12^{2t+1} = 20$

Ondersteunende route → maak opdracht 07

- 7** Je weet dat ${}^3\log(9)$ de oplossing is van de vergelijking $3^x = 9$. Vul in.

H

- a ${}^3\log(9) = 2$, want $9 = 3^{\dots}$
- b ${}^2\log(32) = \dots$, want $32 = 2^{\dots}$
- c ${}^7\log(1) = \dots$, want $1 = 7^{\dots}$
- d ${}^{10}\log(1\,000\,000) = \dots$, want $1\,000\,000 = 10^{\dots}$
- e ${}^3\log(3) = \dots$, want $3 = 3^{\dots}$
- f Waarom kun je ${}^1\log(7)$ niet uitrekenen?

- 8**
- a Welke van de getallen ${}^2\log(8)$, ${}^2\log(12)$, ${}^2\log(16)$ en ${}^2\log(20)$ is een geheel getal?
 - b Vul in: ${}^2\log(\dots) = 6$ want $2^{\dots} = \dots$
 - c Vul in: $4 = {}^2\log(\dots)$ en $10 = {}^2\log(\dots)$.

- 9** Irene zet een bedrag van € 5.000,- op de bank tegen een rente van 0,3% per jaar.
- a Stel een formule op waarmee je kunt berekenen hoe groot het bedrag B in euro's is dat na t jaar op de bank staat.
 - b Wat betekent de oplossing van de vergelijking $5000 \cdot 1,003^t = 6000$ voor Irene?
 - c Geef de exacte oplossing van deze vergelijking en een benadering afgerond op hele jaren.

- 10** De tekst staat op de bijsluiter van het geneesmiddel Temazepam. Van dit middel is bekend dat elk uur 20% van de werkzame hoeveelheid wordt afgebroken.
- a Hoe groot is de groeifactor per uur die hoort bij de hoeveelheid Z in mg die nog in het lichaam aanwezig is?
 - b Een formule voor de hoeveelheid Temazepam Z in mg is $Z = 50 \cdot 0,8^t$. Hoe groot is de hoeveelheid Z op het tijdstip $t = 0$?
 - c Leg uit dat je met de vergelijking $50 \cdot 0,8^t = 20$ kunt berekenen wanneer er nog 40% van het medicijn in het lichaam aanwezig is.
 - d Vereenvoudig deze vergelijking tot de vorm $0,8^t = \dots$
 - e Geef de exacte oplossing van deze vergelijking.
 - f Los de vergelijking van opdracht d met je rekenmachine op. Rond je antwoord af op één decimaal.

Invloed op de rijvaardigheid en de bekwaamheid om machines te gebruiken.

Temazepam kan het reactievermogen en het functioneren van ledematen nadelig beïnvloeden door sufheid, geheugenverlies en spierverslapping. Pas daarom op met deelname aan het verkeer en het bedienen van machines.

Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

- 06**
- a** Geef de oplossingen van de vergelijkingen $7^t = 7$, $7^t = 49$ en $7^t = 343$.
 - b** Waarom is de oplossing van $7^t = 40$ niet een geheel getal?
 - c** Om de exacte oplossing van de vergelijking $7^t = 40$ te geven, gebruik je de regel 'Uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$ '. Geef bij de vergelijking $7^t = 40$ de waarde van g en de waarde van a .
 - d** Vul in: Uit $7^t = 40$ volgt $t = {}^7\log(\dots)$.
 - e** Geef op dezelfde manier de exacte oplossing van de vergelijking $4^t = 5$.
 - f** Gebruik je antwoord van opdracht e om de vergelijking $4^{t+3} = 5$ op te lossen.

- 07**
- a** Vul in: ${}^3\log(81)$ is de oplossing van de vergelijking $\dots^t = 81$.
 - b** Maak de berekening op het blaadje af.
 - c** Vul in: $5^{\dots} = 125$.
 - d** Leg uit waarom je nu weet hoeveel ${}^5\log(125)$ is.

Vul in.

- e** ${}^8\log(64) = \dots$, want $64 = 8^{\dots}$
- f** ${}^{12}\log(12) = \dots$, want $12 = 12^{\dots}$
- g** ${}^{10}\log(10\,000) = \dots$, want $10\,000 = 10^{\dots}$
- h** ${}^6\log(1) = \dots$, want $1 = 6^{\dots}$

Uitdagende opdrachten

- U1**
- De oppervlakte van waterplanten op een meer neemt exponentieel toe. Aan het begin is er 1 m^2 aan waterplanten. Per week verdubbelt de oppervlakte zich.
- a** Geef de exacte oplossing van $2^t = 9$.
 - b** Wat betekent de oplossing van opdracht a voor de oppervlakte van de waterplanten?
 - c** Waarom duurt het één week langer om 18 m^2 waterplanten te krijgen?
 - d** Hoe kun je het antwoord van opdracht c gebruiken om te berekenen na hoeveel weken er 144 m^2 aan waterplanten op het meertje groeit?



12.2 Logaritmen berekenen

Je leert

- hoe je logaritmen met je rekenmachine berekent
- hoe je de verdubbelingstijd en de halveringstijd met logaritmen berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 11–12–13–14–15–016–17–018–18–19
- doorlopend: 11–12–13–14–15–16–17–18–19–20
- uitdagend: 11–13–14–15–16–17–18–19–U2–U3

Internet of Things (IoT) apparaten zijn apparaten die verbinding kunnen maken met het internet. Het aantal Internet of Things apparaten in januari 2018 was 7,11 miljard. De verwachting is dat dit aantal tot 2025 met ongeveer 0,486% per week zal stijgen.

- Zal het aantal apparaten voor 2025 zijn verdubbeld?



- 11
- Zoek de log-knop op je rekenmachine en bereken $\log(5)$, $\log(10)$, $\log(50)$, $\log(100)$, $\log(1000)$. Rond je antwoorden af op twee decimalen.
 - Voor welke waarde van t is $\log(t) = 3$? En $\log(t) = 5$?
 - Welk grondtal gebruikt de rekenmachine bij de log-knop?
 - Waarom is $\log(1\,000\,000) = 6$ en $\log(0,000\,1) = -4$?

Theorie

Op rekenmachines zit een log-toets. Op de meeste rekenmachines wordt daarbij het grondtal niet vermeld. Het grondtal bij deze logaritme is 10. Als ergens $\log(\dots)$ staat, wordt $^{10}\log(\dots)$ bedoeld.

Voorbeeld

Los op: $10^t = 50$

Oplossing

$t = \log(50) \approx 1,70$

- 12 Los de vergelijkingen op.

H

- | | |
|---------------------|-----------------|
| a $10^t = 100$ | e $10^t = 275$ |
| b $10^t = 1$ | f $10^t = 29$ |
| c $10^t = 10$ | g $10^t = 0,4$ |
| d $10^t = 100\,000$ | h $10^t = 5000$ |

- 13
- De oplossing van de vergelijking $10^t = 5$ is $t = \log(5)$. Leg uit dat daaruit volgt dat $10^{\log(5)} = 5$.
 - Geef zonder de rekenmachine te gebruiken de uitkomsten van $10^{\log(564)}$, $10^{\log(0,1)}$ en $10^{\log(0,08)}$.
 - Schrijf de getallen 14, 400 en 0,003 als een macht met grondtal 10.

14 In deze opdracht leer je hoe je ${}^5\log(12)$ kunt herleiden tot logaritmen met grondtal 10.

- In stap 1 worden 5 en 12 als macht van 10 geschreven. Vul dit verder in.
- In stap 2 wordt 5^t als macht van 10 geschreven. Maak ook deze stap verder af.
- In stap 3 wordt het resultaat van de stappen 1 en 2 gesubstitueerd in de vergelijking $5^t = 12$. Vul op de puntjes het ontbrekende getal in.
- In stap 4 worden de exponenten van de vergelijking van stap 3 aan elkaar gelijk gesteld. Vul stap 4 en stap 5 op het blaadje verder in.
- Waarom volgt uit deze berekening dat

$${}^5\log(12) = \frac{\log(12)}{\log(5)}?$$

●	$5 = 10^{\log(5)}$ en $12 = 10^{\log(\dots)}$	1
●	$5^t = (10^{\log(5)})^t = 10^{\dots}$	2
●	$5^t = 12$ wordt dan	
●	$10^{t \cdot \log(5)} = 10^{\dots}$	3
●	$t \cdot \log(5) = \log(\dots)$	4
●	$t = \frac{\dots}{\log(5)}$	5
●		

Theorie

Je kunt met behulp van de rekenregel ${}^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$ elke logaritme met je rekenmachine berekenen.

Voorbeeld 1

Bereken ${}^7\log(4)$ in twee decimalen.

Oplossing

$${}^7\log(4) = \frac{\log(4)}{\log(7)} \approx 0,71$$

Voorbeeld 2

Los de vergelijking $5^{t+1} = 23$ op. Geef een exacte oplossing en ook een benadering in twee decimalen.

Oplossing

$$5^{t+1} = 23 \text{ geeft } t+1 = {}^5\log(23).$$

Het exacte antwoord is $t = {}^5\log(23) - 1$.

Een benadering in twee decimalen is $t = \frac{\log(23)}{\log(5)} - 1 \approx 0,95$.

→ Instructie rekenmachine | Logaritmen

15 Bereken de logaritmen in twee decimalen.

- | | |
|-------------------------------|----------------------------|
| H a ${}^9\log(35)$ | c ${}^5\log(10)$ |
| b ${}^{\frac{1}{3}}\log(128)$ | d ${}^4\log(\frac{1}{13})$ |

Ondersteunende route → maak opdracht 016

16 Los de vergelijkingen op. Geef een exacte oplossing en ook een benadering in twee decimalen.

- | | |
|---------------------------|-------------------|
| H a $3^{t+4} = 12$ | c $4^{2t-3} = 10$ |
| b $9^{t-6} = 5$ | d $3^{3t-1} = 14$ |

- 17** Bij een exponentieel groeiproces hoort de functie $A(t) = 600 \cdot 0,8^t$ met t de tijd in uren en beginhoeveelheid 600.
- Hoe groot is de groeifactor per uur?
 - Met welke vergelijking kun je uitrekenen wanneer de beginhoeveelheid is gehalveerd?
 - Vereenvoudig deze vergelijking tot de vorm $0,8^t = \dots$
 - Los de vergelijking van opdracht c op.
 - Waarom heet de oplossing van de vergelijking $0,8^t = \frac{1}{2}$ de halveringstijd?

Theorie

Bij een exponentieel groeiproces met groeifactor g is de **verdubbelingstijd** de tijd die nodig is om een hoeveelheid te verdubbelen. Deze tijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = 2$. De verdubbelingstijd is dus $t = {}^g\log(2)$.
De **halveringstijd** is de tijd die nodig is om een hoeveelheid te halveren. Deze tijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = \frac{1}{2}$.
De halveringstijd is dus $t = {}^g\log\left(\frac{1}{2}\right)$.

Voorbeeld

Het aantal eitjes neemt met 2,4% per jaar af.
Bereken de halveringstijd.

Oplossing

De groeifactor is 0,976 per jaar.
De halveringstijd t bij een groeiproces met groeifactor 0,976 is
 $t = {}^{0,976}\log(0,5) \approx 28,5$ jaar.

Ondersteunende route → maak opdracht 018

- 18** **H**
- Op het spaargeld wordt 0,2% rente per jaar gegeven. Bereken de verdubbelingstijd.
 - Het aantal bezoekers neemt met 1,4% per maand af. Bereken de halveringstijd.
 - Het aantal vogels neemt met 2,71% per jaar toe. Bereken de verdubbelingstijd.
- 19** De stof Radium-228 heeft een halveringstijd van 6,6 jaar.
- Leg uit dat de groeifactor van de hoeveelheid straling per 6,6 jaar gelijk is aan 0,5.
 - Hoe groot is de groeifactor per jaar?
 - Bereken na hoeveel jaar de straling met 90% is afgenomen. Rond af op één decimaal.



- 20**
- Het volume van de stam van een spar neemt per jaar met 5% toe.
- Benader de verdubbelingstijd in hele jaren nauwkeurig.
 - Na hoeveel jaar is het volume van de spar verviervoudigd?

Uitdagende route → maak opdracht U2 en U3

Ondersteunende opdrachten

016 Op het blaadje wordt de vergelijking $5^{2t+3} = 18$ opgelost.

- Van welke regel is in stap 1 gebruik gemaakt?
- Wat is er in stap 2 gebeurd?
- Maak de berekening op het blaadje af. Rond de oplossing af op twee decimalen.

Los de vergelijkingen op. Geef een exacte oplossing en ook een benadering in twee decimalen.

f $8^{2t+1} = 24$

q $11^{3t-2} = 100$

$5^{2t+3} = 18$	
$2t + 3 = {}^5\log(18)$	1
$2t = {}^5\log(18) - \dots$	2
$t = \frac{{}^5\log(18) - \dots}{\dots}$	3
dust $t \approx \dots$	

018 De hoeveelheid algen neemt met 12% per week toe.

- a Laat zien dat de groeifactor 1,12 is.
- b Op het blaadje Bashir begonnen met het berekenen van de verdubbelingstijd.
Waarom schrijft hij de vergelijking $1,12^t = 2$ op?
- c Leg uit wat er in stap 1 is gebeurd.
- d Gebruik in stap 2 de regel $^g \log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$ om de berekening van Bashir af te maken.

		<i>Bashir</i>
●	$1, 12^t = 2$	
●	$t = 1, 12^{\log(2)}$	1
●	$t \approx \dots$	2
●		

Uitdagende opdrachten

U2 Het aantal insecten neemt elke week met een vast percentage toe. Na drie weken waren er 8000 insecten. Na tien weken waren er 11 000 insecten.
Bereken de verdubbelingstijd van het aantal insecten in weken.
Rond af op één decimaal.

U3 Van twee bacteriesoorten wordt het aantal bacteriën vergeleken. Van soort A neemt het aantal bacteriën elk uur met $p\%$ af. Van soort B neemt het aantal bacteriën elk uur met $p\%$ toe. De halveringstijd van het aantal bacteriën van soort A gelijk is aan 6,52 uur. Bereken de verdubbelingstijd in uren van het aantal bacteriën van soort B. Rond af op twee decimalen.

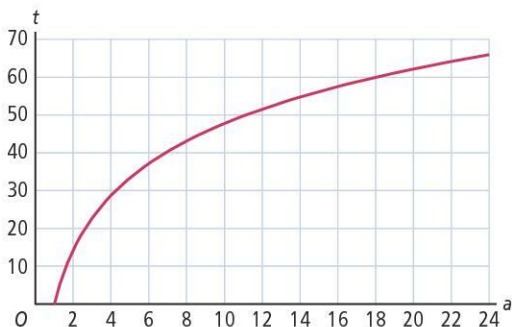
12.3 Grafieken van logaritmische functies

Je leert

- wat de kenmerken van de grafiek van de logaritmische functie $f(x) = {}^9\log(x)$ zijn

Leerroutes

- ondersteunend: 21—22—023—24—25—26—027—27
- doorlopend: 21—22—23—24—25—26—27—28
- uitdagend: 21—23—25—26—27—28—U4—U5



In de grafiek is het verband weergegeven tussen het aantal deelnemers a aan een mars in duizendtallen en de tijd t in minuten.

- Dion beweert dat het aantal deelnemers steeds minder snel groeit. Ben je het met Dion eens?

21 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x$ en $g(x) = {}^2\log(x)$.

a Vul de tabel in.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	...	...	...	...	...	...

b Vul de tabel in.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$g(x)$	...	...	...	...	...	...

c Teken de grafieken van f en g in één figuur.

d Teken ook de lijn $y = x$ in je figuur.

Wat valt je op?

22 Gegeven zijn de functies $f(x) = 5^x$ en $k(x) = {}^5\log(x)$.

a Plot de grafieken van f en k .

b Geef de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as.

c Geef de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van k met de x -as.

d Elk van deze grafieken heeft een asymptoot. Geef een vergelijking van elke asymptoot.

De functie $g(x) = {}^2\log(x)$ kun je invoeren op je rekenmachine door gebruik te maken van de rekenregel ${}^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$

Je voert dan $y = \log(x) / \log(2)$ in.

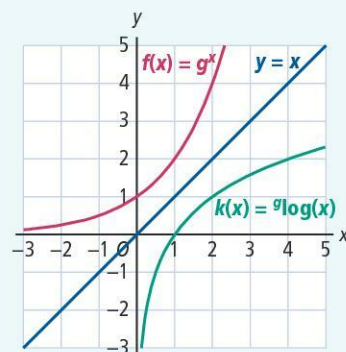
Theorie

De grafieken van $f(x) = g^x$ en $k(x) = {}^g\log(x)$ zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

De grafiek van f snijdt de y -as in het punt $(0, 1)$, want $g^0 = 1$.

De grafiek van k snijdt de x -as in het punt $(1, 0)$, want ${}^g\log(1) = 0$.

Bij beide functies geldt dat het grondtal g positief is, maar niet gelijk aan 1.



Ondersteunende route → maak opdracht 023

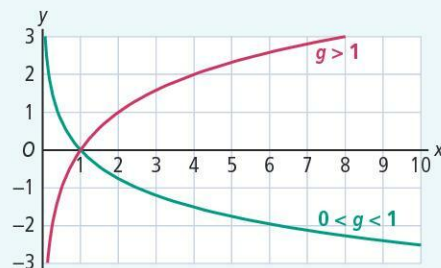
- 23** Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^{1,2}\log(x)$ en $g(x) = {}^{0,8}\log(x)$.
- Plot de grafieken van f en g .
 - Geef de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g met de horizontale as.
 - De grafiek van h is het spiegelbeeld van de grafiek van f in de lijn $y = x$.
Geef het functievoorschrift van h .
 - Geef de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van h met de verticale as.
- 24** De formule $t = {}^{11}\log(A)$ hoort bij de groei van een hoeveelheid bacteriën A . Hierbij is t de tijd in uren na het begin van het experiment.
- Plot de grafiek van t .
 - Geef de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de horizontale as en leg uit wat dit betekent voor het aantal bacteriën.
 - Is de grafiek van t afnemend of toenemend stijgend?
 - Wat betekent je antwoord van opdracht c voor het aantal bacteriën?
- 25** Het aantal inwoners in een dorp neemt elk jaar met een vast percentage af. Bij het aantal inwoners A in tienduizendtallen hoort de formule $t = {}^{0,97}\log(A)$. Hierin is t de tijd in jaren na 1 januari 2005.
- Plot de grafiek van t .
 - Op wat voor manier stijgt of daalt de grafiek van t ?
 - Wat betekent het snijpunt van de grafiek met de horizontale as voor het aantal inwoners?
 - In welk jaar heeft het dorp nog maar 8000 inwoners?

- 26** Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^3\log(x)$ en $g(x) = \frac{1}{3}\log(x)$.
- Plot de grafieken van f en g .
 - Welke grafiek is afnemend stijgend?
 - Op wat voor manier stijgt of daalt de andere grafiek?
 - Hoe ontstaat de grafiek van de functie $h(x) = 4 + {}^3\log(x)$ uit de grafiek van f ?
 - Hoe ontstaat de grafiek van $j(x) = -3 + \frac{1}{3}\log(x)$ uit de grafiek van g ?

Theorie

Voor $0 < g < 1$ is de grafiek van een logaritmische functie $f(x) = {}^g\log(x)$ afnemend dalend en voor $g > 1$ afnemend stijgend.

De grafiek van $h(x) = a + {}^g\log(x)$ ontstaat door de grafiek van $f(x) = {}^g\log(x)$, a eenheden omhoog te verschuiven.



Ondersteunende route → maak opdracht 027

- 27** Vier functies en vier grafieken zijn gegeven.

H

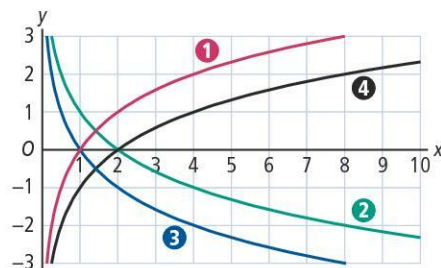
$$f(x) = \frac{1}{2}\log(x) + 1$$

$$g(x) = {}^2\log(x)$$

$$h(x) = \frac{1}{2}\log(x)$$

$$i(x) = {}^2\log(x) - 1$$

Welke grafiek hoort bij welke functie?



- 28** De luchtdruk hangt af van de hoogte. Per kilometer stijging is de luchtdruk 11,5% lager. De luchtdruk op zeeniveau is 1 atmosfeer.
- Stel een formule op bij het verband tussen de hoogte h in km en de luchtdruk P in atmosfeer. Druk hierbij h uit in P .
 - Plot de grafiek van h .
 - Op wat voor manier stijgt of daalt de grafiek van h ?
 - Wat is de praktische betekenis van het snijpunt van de grafiek met de horizontale as?
 - Het menselijk lichaam kan nog voldoende zuurstof uit de lucht halen bij een luchtdruk van 0,51 atmosfeer. Wat is de grootste hoogte die voor mensen bewoonbaar is?

Uitdagende route → maak opdracht U4 en U5

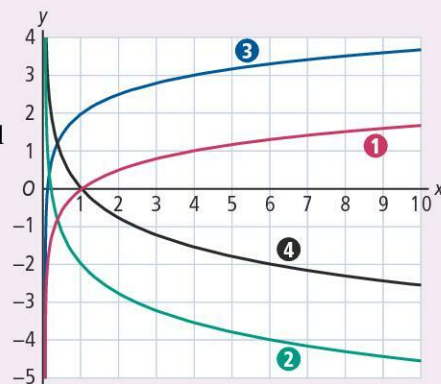
Ondersteunende opdrachten

- 023** Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^{0,75}\log(x)$ en $g(x) = {}^{1,25}\log(x)$.
- Plot de grafieken van f en g .
 - Je weet dat de grafiek van $k(x) = {}^s\log(x)$ de x -as snijdt in het punt $(1, 0)$, want ${}^s\log(1) = 0$.
Welke punt ligt dus op zowel de grafiek van f als die van g ?
 - Waarom ligt dit punt op de horizontale as?
 - Vul in: het spiegelbeeld van de grafiek van $g(x) = {}^{1,25}\log(x)$ in de lijn $y = x$ is de grafiek van $h(x) = \dots^x$.
 - Vul in: de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van h met de verticale as zijn $(0, \dots)$.

- 027** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 + {}^4\log(x)$, $g(x) = {}^{0,4}\log(x)$, $h(x) = {}^4\log(x)$ en $i(x) = -2 + {}^{0,4}\log(x)$.

De bijbehorende grafieken zijn in een assenstelsel getekend.

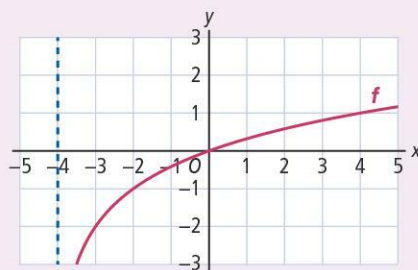
- Vul in: de grafiek van f is afnemend ... omdat het grondtal groter is dan 1.
- Waarom is de grafiek van g afnemend dalend?
- Geef van de grafieken van h en van i aan of ze afnemend stijgend of afnemend dalend zijn.
- De grafieken van f en van h hebben hetzelfde grondtal.
Vul in: de grafiek van f ontstaat door elke punt op de grafiek van h ... omhoog te verschuiven.
- Hoe ontstaat de grafiek van i uit de grafiek van g ?
- Welke grafiek hoort bij welke functie?



Uitdagende opdrachten

- U4** De grafiek van de functie h ontstaat door eerst de grafiek van $f(x) = 2^x$ te spiegelen in de lijn $y = x$, en daarna de zo ontstane grafiek p eenheden verticaal te verschuiven. De grafiek van h snijdt de x -as in het punt $(4, 0)$. Stel het functievoorschrift op van h .

- U5** Gegeven is de grafiek van een functie $f(x) = p + {}^2\log(x + q)$. Gegeven is dat de lijn $x = -4$ de asymptoot is van de grafiek van f en dat de grafiek door de oorsprong gaat. Onderzoek met behulp van een berekening of het punt $(12, 2)$ op de grafiek van f ligt.



12.4 Rekenregels voor logaritmen

Je leert

- hoe je met de rekenregels voor logaritmen rekent

Leerroutes

- ondersteunend: 29—30—031—31—32—33—034—35
- doorlopend: 29—30—31—32—33—34—35—36
- uitdagend: 29—31—32—33—34—36—U6—U7

Pim berekent hoelang het duurt tot het aantal bladluizen twee keer verdrievoudigd is met de formule $t = {}^g\log(3) + {}^g\log(3)$.

Murat gebruikt de formule $t = {}^g\log(9)$.

- Vinden ze hetzelfde antwoord? Leg uit waarom wel of waarom niet.



29 Op het blaadje is een begin gemaakt met het aantonen dat ${}^2\log(3) + {}^2\log(7) = {}^2\log(3 \cdot 7) = {}^2\log(21)$.

- Vul bij stap 3 op de puntjes een macht van 2 in.
- Leg uit dat uit stap 3 volgt $p + q = {}^2\log(21)$.
- Waarom heb je nu aangetoond dat ${}^2\log(3) + {}^2\log(7) = {}^2\log(21)$?
- Laat zien dat ${}^3\log(5) + {}^3\log(15) = {}^3\log(75)$.
- Laat zien dat ${}^3\log(75) - {}^3\log(15) = {}^3\log(5)$.
- Vul in: ${}^5\log(2) + {}^5\log(2) + {}^5\log(2) = \dots \cdot {}^5\log(2)$.
- Laat zien dat $3 \cdot {}^5\log(2) = {}^5\log(2^3)$.

•	Stel ${}^2\log(3) = p$ en ${}^2\log(7) = q$	1
•	Dan geldt: $3 = 2^p$ en $7 = 2^q$	2
•	En $21 = 3 \cdot 7 = 2^p \cdot 2^q = \dots$	3

Theorie

Voor het rekenen met logaritmen gelden de volgende **rekenregels**.

$${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$$

$${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$$

met $g > 0$, $g \neq 1$, $a > 0$ en $b > 0$.

Voorbeeld 1

Schrijf als één logaritme ${}^4\log(3) + \frac{1}{2} \cdot {}^4\log(36) + 1$.

Oplossing

$${}^4\log(3) + \frac{1}{2} \cdot {}^4\log(36) + 1 =$$

$${}^4\log(3) + {}^4\log(36^{\frac{1}{2}}) + {}^4\log(4) =$$

$${}^4\log(3) + {}^4\log(6) + {}^4\log(4) =$$

$${}^4\log(72)$$

Voorbeeld 2

Schrijf als één logaritme ${}^3\log(7x) - {}^2\log(7)$.

Oplossing

$$3 \cdot {}^2\log(7x) - {}^2\log(7) =$$

$${}^2\log((7x)^3) - {}^2\log(7) =$$

$${}^2\log(343x^3) - {}^2\log(7) =$$

$${}^2\log\left(\frac{343x^3}{7}\right) = {}^2\log(49x^3)$$

30 Schrijf als één logaritme.

a ${}^2\log(7) + {}^2\log(3)$

d $6 \cdot {}^{0,3}\log(2)$

b $4 \cdot {}^3\log(2)$

e ${}^2\log(5) + 3 = {}^2\log(5) + {}^2\log(\dots)$

c $2 \cdot {}^{12}\log(8)$

f $\log(8) + \log(3) - 2$

Ondersteunende route → maak opdracht 031

31 Schrijf als één logaritme.

H

a $2 \cdot {}^5\log(4) + {}^5\log(a)$

d $\log(8) + \log(10) - 2 \cdot \log(2)$

b $3 \cdot {}^6\log(x) + 1$

e ${}^7\log(48) - ({}^7\log(3) + {}^7\log(2))$

c ${}^3\log(128) - 2 \cdot {}^3\log(8)$

f ${}^5\log(a) + {}^5\log(a+1) + 2$

32 **a** Bereken ${}^4\log(4^1)$, ${}^4\log(4^2)$, ${}^4\log(4^3)$ en ${}^4\log(4^4)$.

b Vul in: ${}^g\log(g^a) = \dots$

c Bereken.

A ${}^6\log(6^3)$

D ${}^7\log(49)$

B ${}^{12}\log(12^9)$

E ${}^2\log(64)$

C ${}^8\log(8^3)$

F ${}^5\log(625)$

33 In opdracht 14 heb je de vergelijking $5^t = 12$ opgelost door 5 en 12 beide te schrijven als macht van 10. In plaats van 10 had je daar ook elk willekeurig ander getal b kunnen kiezen.

a Welke regel is gebruikt in stap 2?

b Welke regel is gebruikt in stap 3?

c Maak de berekening op het blaadje af.

d Waarom volgt uit de berekening ${}^5\log(12) = \frac{{}^b\log(12)}{{}^b\log(5)}$?

	$5^t = 12$		
	$(b^p)^t = 12$ met $b^p = 5$	1	
	$b^{p \cdot t} = 12$	2	
	$p \cdot t = {}^b\log(12)$	3	
	$t = \frac{{}^b\log(12)}{p} = \frac{{}^b\log(12)}{\dots}$	4	

Theorie

Voor het berekenen van logaritmen kun je de rekenregel

$$g \log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)} \text{ gebruiken.}$$

Deze rekenregel is een speciaal geval van de algemene regel

$${}_g \log(a) = \frac{{}^b \log(a)}{{}^b \log(g)} \text{ waarbij } b > 0, b \neq 1 \text{ en } a > 0.$$

Met deze regel kun je elk logaritme herschrijven naar een logaritme met een ander grondtal.

Voorbeeld

Bereken ${}^9\log(27)$ en ${}^{243}\log(27)$ door op grondtal 3 over te gaan.

Oplossing

$${}^9\log(27) = \frac{{}^3\log(27)}{{}^3\log(9)} = \frac{{}^3\log(3^3)}{{}^3\log(3^2)} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

$${}^{243}\log(27) = \frac{{}^3\log(27)}{{}^3\log(243)} = \frac{{}^3\log(3^3)}{{}^3\log(3^5)} = \frac{3}{5}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 034

34 Marie berekent ${}^8\log(128)$ op het blaadje.

H

- Waarom gebruikt zij grondtal 2?
- Vul het blaadje verder in.
- Bereken ${}^4\log(32)$ door op grondtal 2 over te gaan.
- Bereken ${}^{27}\log(9)$ door op grondtal 3 over te gaan.
- Bereken ${}^{16}\log(4)$.
- Bereken ${}^8\log(\sqrt{2})$.

35 De snelwegen in Nederland zijn vooral asfaltbetonwegen. Voor deze wegen is de formule voor het verband tussen het geluidsniveau D in dB van het verkeer en de snelheid v in km/uur van het verkeer $D = 35,9 \cdot \log(v) + 4,1$.

- b** Toon aan dat met elke verdubbeling van de snelheid het geluidsniveau ongeveer 11 dB toeneemt. Gebruik daarbij dat $\log(2v) = \log(2) + \log(v)$.

36 De kracht van aardbevingen wordt gemeten op de schaal van Richter. Hierbij hoort de formule $n = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{1}{2}E\right) - 3$ met n de magnitude (sterkte) van de aardbeving op de schaal van Richter en E de geschatte vrijgekomen energie in joule (J).

- Bereken de magnitude van een aardbeving waarbij er 60×10^6 joule vrijkwam.
- Vul in: $3 = \log(\dots)$.
- Schrijf de formule in de vorm $n = \log(\dots)$.
- Controleer je antwoord van opdracht a met behulp van je formule van opdracht c.

Uitdagende route → maak opdracht U6 en U7

Marie

$$8_{\log(128)} = \frac{2_{\log(128)}}{2_{\log(8)}} =$$
$$\frac{2_{\log(2^7)}}{2_{\log(2^3)}} = \dots$$

Ondersteunende opdrachten

031 Als je een uitdrukking met logaritmen korter wilt schrijven, moet je niet alleen rekening houden met de rekenregels, maar ook met de rekenvolgorde.

Gegeven is ${}^3\log(36) - ({}^3\log(6) + {}^3\log(2))$.

- Welk deel van de uitdrukking moet je als eerste gaan herschrijven en welke rekenregel gebruik je hiervoor?
- Schrijf de uitdrukking als één logaritme.
- Gegeven $3 \cdot {}^3\log(4) - {}^3\log(2)$.
Welk deel van de uitdrukking moet je als eerste gaan herschrijven en welke rekenregel gebruik je hiervoor?
- Welke rekenregel kun je als tweede stap gebruiken?
- Schrijf de uitdrukking als één logaritme.

Voor de volgorde bij berekeningen geldt:

- eerst uitrekenen wat tussen haakjes staat
- dan vermenigvuldigen delen van links naar rechts
- dan optellen en aftrekken van links naar rechts.

034 Op het blaadje wordt ${}^4\log(128)$ berekend door gebruik te

maken van de rekenregel ${}^g\log(a) = \frac{{}^b\log(a)}{{}^b\log(g)}$

- Waarom is het niet handig om van grondtal 4 over te gaan op grondtal 3, maar wel over te gaan op grondtal 2?
- Maak de berekening op het blaadje af.
- Nu ga je ${}^9\log(27)$ met dezelfde regel berekenen. Hiervoor moet je een grondtal b kiezen zodat ${}^b\log(27)$ en ${}^b\log(9)$ zonder rekenmachine te berekenen zijn.
Leg uit dat $b = 3$ in dat geval een goede keuze is.
- Vul in: ${}^9\log(27) = \frac{{}^3\log(27)}{{}^3\log(9)} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$
- Bereken ${}^{16}\log(64)$, ${}^9\log(243)$ en ${}^{25}\log(\sqrt{5})$ door op andere grondtallen over te gaan.

●						
●						
●						
●						
●						
●						

$${}^4\log(128) = \frac{{}^2\log(128)}{{}^2\log(4)}$$

$${}^2\log(128) = 7 \text{ want } 2^7 = 128$$

$${}^2\log(4) = 2 \text{ want } 2^2 = 4$$

$$\text{dus } {}^4\log(128) = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

Uitdagende opdrachten

U6 Gegeven is dat $\log(2) \approx 0,3010$ en $\log(3) \approx 0,4771$.

- Bereken met dit gegeven en zonder rekenmachine $\log(4)$, $\log(6)$, $\log(8)$ en $\log(9)$.
- Toon aan dat $\log(5) = 1 - \log(2)$.
- Voor welke getallen tussen 10 en 21 kun je met deze gegevens de logaritme met grondtal 10 berekenen?

U7 Schrijf als één logaritme.

- $10^{\log(4)} \cdot {}^9\log(2)$
- $\log(x^3) - \log(2x)$
- ${}^2\log(8) + {}^7\log(3x) + {}^7\log(x^2)$
- $3 \cdot {}^{0,5}\log(p) - {}^{0,5}\log(p^2)$

12.5 Formules herleiden

Je leert • hoe je een exponentiële formule herleidt tot een logaritmische formule

Leerroutes • ondersteunend: 37—38—39—40—041—042—42—43—44
• doorlopend: 37—38—39—40—41—42—43—44—45
• uitdagend: 37—38—39—41—42—44—45—U8—U9

Een bepaalde helheluchtballon kan bij buitentemperatuur van 0°C ongeveer 334 kg tillen. Bij elke temperatuurstijging van 10°C , wordt dit gewicht 12% minder. Er bestaat een verband tussen het gewicht G in kg en de temperatuur t in $^\circ\text{C}$.

• Hoe kun je aan de hand van het gewicht dat de ballon kan tillen de buitentemperatuur bepalen?



- 37** Gegeven is de formule $y = 3^{t+2}$.
- a** Laat met behulp van de rekenregel $g^{a+b} = g^a \cdot g^b$ zien dat je de formule kunt herleiden tot $y = 9 \cdot 3^t$.
 - b** Welke rekenregel gebruik je om de formule $y = (5^{2t})$ te herleiden tot $y = 25^t$?
 - c** Herleid de formule $y = 4^{2t+3}$ tot de vorm $y = b \cdot g^t$.

Theorie

Bij het herleiden van exponentiële formules tot de vorm $y = b \cdot g^t$ gebruik je de rekenregels voor machten en exponenten.

Voorbeeld

Schrijf $y = 4 \cdot 2^{5t-1}$
in de vorm $y = b \cdot g^t$.

Oplossing

$$y = 4 \cdot 2^{5t} \cdot 2^{-1}$$

$$y = 4 \cdot (2^5)^t \cdot \frac{1}{2}$$

$$y = 2 \cdot 32^t$$

$$g^{a+b} = g^a \cdot g^b$$

$$g^{a \cdot b} = (g^a)^b$$

- 38** Schrijf in de vorm $y = b \cdot g^t$.

H

a $y = 2^{3+t}$

b $y = 15 \cdot 2^{t+4}$

c $y = 3^{-2+3t}$

d $y = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1-t}$

e $y = 6 \cdot 4^{\frac{1}{2}t-2}$

f $y = 4^{2t-1}$

39 Op het blaadje herschrijft Corinne de formule $y = 4^x + 6$ zodat x uitgedrukt wordt in y .

- Leg uit wat er in stap 1 en stap 2 is gebeurd.
- Welke regel gebruikt Corinne in stap 3?
- Maak stap 3 af.
- Herschrijf op dezelfde manier de formule $y = 3^x - 8$ zodat x uitgedrukt wordt in y .

					Corinne
	$4^x + 6 = y$				1
	$4^x = y - 6$				2
	$x = \dots \log(\dots)$				3

40 Een batterij verliest bij gebruik 4% van zijn lading per uur, en onbruikbaar als er minder dan 20% van de lading over is.

- Leg uit dat je het percentage P van de lading na t uren gebruik kunt berekenen met de formule $P = 100 \cdot 0,96^t$.
- Op het blaadje wordt de formule herschreven zodat t uitgedrukt wordt in P .
Wat is er in stap 2 gebeurd?
- Maak de berekening op het blaadje af.
- Gebruik je formule van opdracht c om te berekenen na hoeveel uur de batterij onbruikbaar is geworden.

	$100 \cdot 0,96^t = P$				1
	$0,96^t = \frac{P}{100}$				2
	$t = \dots \log(\dots)$				3

Theorie

Een exponentiële formule kun je herleiden tot een logaritmische formule.
Je gebruikt de basisregel: uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $a = 7 \cdot 6^x$.
Druk x uit in a .

Oplossing

$$7 \cdot 6^x = a$$

$$6^x = \frac{a}{7} \quad \text{links en rechts : 7}$$

$$6^x = \frac{1}{7}a$$

$$x = {}^6\log\left(\frac{1}{7}a\right) \quad g^t = a \text{ geeft } t = {}^g\log(a)$$

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $R = 2 + 3 \cdot 5^t$.
Druk t uit in R .

Oplossing

$$2 + 3 \cdot 5^t = R$$

$$3 \cdot 5^t = R - 2 \quad \text{links en rechts } - 2$$

$$5^t = \frac{R - 2}{3} \quad \text{links en rechts : 3}$$

$$5^t = \frac{1}{3}R - \frac{2}{3} \quad \text{breuk gesplitst}$$

$$t = {}^5\log\left(\frac{1}{3}R - \frac{2}{3}\right) \quad g^t = a \text{ geeft } t = {}^g\log(a)$$

Ondersteunende route → maak opdracht 041

41 Druk p uit in q .

- | | |
|-----------------------------|---|
| a $q = 14^p$ | d $q = 5 \cdot 3^p$ |
| b $q = 9 + 2^p$ | e $q = 8^p - 5$ |
| c $q = 9 \cdot 10^p$ | f $q = 3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^p$ |

Ondersteunende route → maak opdracht 042

42 Druk t uit in N .

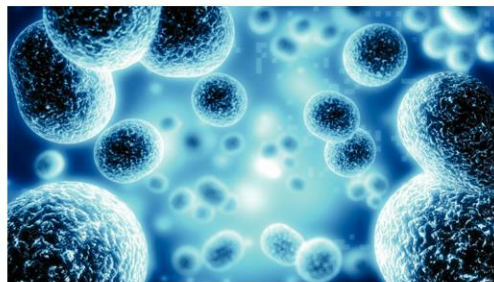
- H**
- a** $N = 3 \cdot 4^t$ **d** $3N - 2 = \frac{1}{12} \cdot 4^t$
b $N = -16 + 4 \cdot 5^t$ **e** $15N \cdot 6^t = 5$
c $6 \cdot 10^t + 2 = 8N$ **f** $4N + 2 \cdot 2^t = 16$

- 43** Een aantal bacteriën verdubbelt zich per dag. Op het tijdstip $t = 0$ is het aantal bacteriën gelijk aan 600.
- a** Geef een formule N die bij dit groeiproces hoort. Neem de tijd t in dagen.
b Geef een formule waarbij t is uitgedrukt in N .
c Na hoeveel dagen zijn er 30 000 bacteriën? Geef eerst de exacte waarde en daarna een benadering in twee decimalen.

- 44** In de tabel staat voor een aantal jaren het aantal knaagdieren in een natuurgebied op 1 januari.

jaartal	2018	2019	2020	2021	2022
aantal knaagdieren	8000	7600	7220	6859	6516

- a** Laat zien dat het aantal knaagdieren exponentieel afneemt met 5% per jaar.
b Geef een formule waarmee je het aantal knaagdieren K kunt berekenen na t jaren met $t = 0$ op 1 januari 2018.
c Bereken de halveringstijd van het aantal knaagdieren.
d Druk t uit in K .
e Controleer je antwoord van opdracht c met behulp van de formule van opdracht d.
- 45** Een kop thee wordt ingeschonken. De temperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ van de thee in het kopje is te berekenen met de formule $T = 21 + 66 \cdot 0,9^t$. Hierbij is t de tijd in minuten met $t = 0$ op het moment van inschenken.
- a** Hoeveel graden was de temperatuur van de thee toen hij ingeschonken werd?
b Hoeveel graden is de omgevingstemperatuur?
c De tijd t kun je uitdrukken in de temperatuur T . Toon aan dat je de formule $t = 39,8 + {}^{0,9}\log(T - 21)$ krijgt.
d Thee is goed drinkbaar als de temperatuur tussen 35°C en 60°C ligt. Bereken hoeveel minuten de thee goed drinkbaar is. Rond je antwoord af op één decimaal.



Uitdagende opdrachten → maak opdracht U8 en U9

Ondersteunende opdrachten

041

Gegeven is de formule $h = 12 \cdot 2^t$.

Je gaat t uitdrukken in h , waarvoor je gebruik maakt van de basisregel 'Uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$ '. Om deze te kunnen gebruiken moet je de formule eerst herleiden tot de vorm $g^t = a$. Op het blaadje is dit uitgewerkt.

- a Schrijf op wat er in de stappen 2 en 3 is gebeurd.
- b Van welke regel wordt in stap 4 gebruik gemaakt?
- c Vul op het blaadje de ontbrekende getallen in.

Druk t uit in h .

- d $h = 9^t$
- e $h = \frac{1}{10} \cdot 3^t$
- f $h = 12^t + 8$
- g $h = 5 + 6^t$
- h $h = 2 \cdot 10^t$
- i $h = 7 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^t$

☐	$h = 12 \cdot 2^t$				
☐	$12 \cdot 2^t = h$			1	
☐	$2^t = \frac{h}{12}$			2	
☐	$2^t = \dots h$			3	
☐	$t = \dots \log(\dots)$			4	

042

Gegeven is de formule $y = 4 \cdot 5^x - 8$.

Je gaat x uitdrukken in y . Op het blaadje zie je hoe de formule herschreven wordt waarbij x uitgedrukt is in y .

- a Wat is er in de stappen 1 en 2 gebeurd?
- b Welk getal hoort op de puntjes te staan bij stap 3? Waarom?
- c Wat is er in stap 4 gebeurd?
- d Vul op het blaadje de ontbrekende getallen in.
- e Laat op dezelfde manier zien dat als je $y = 2 \cdot 5^x + 4$ herleidt tot een formule waarin je x uitdrukt in y , je de formule $x = {}^5\log\left(\frac{1}{2}y - 2\right)$ krijgt.

☐	$y = 4 \cdot 5^x - 8$				
☐	$4 \cdot 5^x - 8 = y$			1	
☐	$4 \cdot 5^x = y + 8$			2	
☐	$5^x = \frac{y+8}{\dots}$			3	
☐	$5^x = \dots y + \dots$			4	
☐	$x = \dots \log(\dots)$			5	

Uitdagende opdrachten

U8

Druk p uit in q .

- a $2(4p - 3) \cdot 3^q = 32$
- b $10^p - 3 \cdot 10^p = 10q$
- c $7 \cdot 3^{2p+2} - 14q = 0$
- d $q = 2(3 - 5^{3p+4})$
- e $7^{p \cdot q} = 10$
- f $3^{2p-6} = 9q$

U9

Gegeven is de formule $m = 18,24 \cdot 0,301^c$.

Je kunt de formule schrijven als ${}^3\log(m) = a - b \cdot c$.

Bereken de waarde van a en van b . Rond af op twee decimalen.

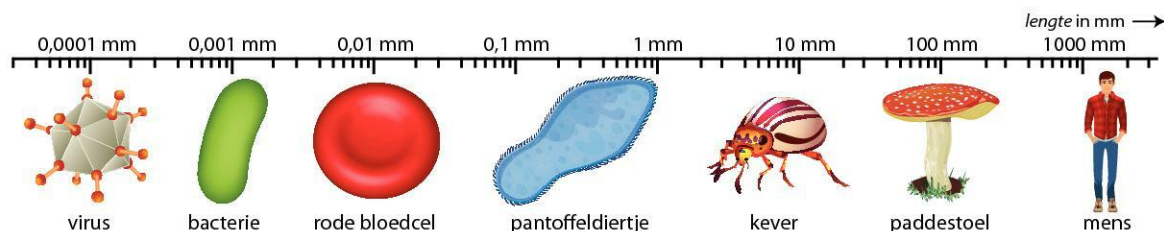
12.6 Logaritmische schalen

Je leert

- wat een logaritmische schaalverdeling is
- hoe je een logaritmische schaalverdeling afleest

Leerroutes

- ondersteunend: 46—47—048—48—49—50
- doorlopend: 46—47—48—49—50—51
- uitdagend: 46—47—48—50—51—U10



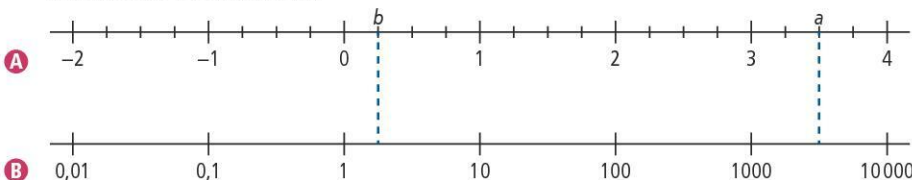
Langs een horizontale as is een aantal afbeeldingen geplaatst.

- Hoeveel keer zo groot is een bacterie als een virus? En hoeveel keer zo groot is een rode bloedcel als een bacterie?
- Wat valt je op als je naar de schaalverdeling kijkt?

46 Van een aantal visjes is de lengte en het gewicht gemeten. De resultaten staan in de tabel.

- Laat zien dat er een exponentieel verband bestaat tussen de lengte en het gewicht van de visjes.
- Teken een grafiek bij deze tabel. Neem op de horizontale as de lengte van een visje met een stapgrootte van 5 mm.
- Waarom is het lastig een goede schaalverdeling voor de verticale as te bedenken?

<i>lengte in mm</i>	<i>gewicht in mg</i>
10	12
20	53
30	233
40	1029
50	4539



47 Gegeven zijn twee schaalverdelingen A en B.

Op schaalverdeling B zijn machten van 10 weergegeven.

- Welke getallen horen er bij a en b op de schaalverdeling A?
- Schrijf de getallen van de schaalverdeling B als machten van 10.
- Welke machten van 10 horen er bij a en b op de schaalverdeling B?
- Geef de waarden die bij a en b horen op de schaalverdeling B. Schrijf de waarden als decimale getallen en rond daarbij af op twee decimalen.
- Iemand geeft het getal 550 aan op de schaalverdeling B. Welke getal hoort hierbij op de schaalverdeling A?

Theorie

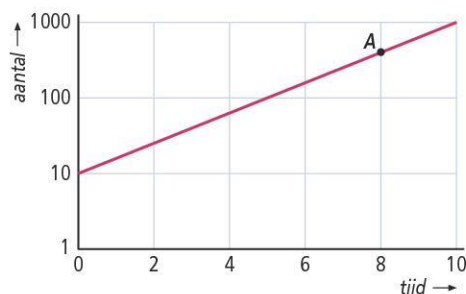
Bij een lineaire schaalverdeling wordt bij gelijke stappen telkens hetzelfde getal opgeteld.

Een schaalverdeling waar bij gelijke stappen telkens met dezelfde factor wordt vermenigvuldigd, heet een **logaritmische schaalverdeling** of kortweg **log-schaal**.

Je gebruikt een log-schaal als je zowel erg grote als erg kleine waarden in één grafiek moet verwerken.

Voorbeeld 1

Lees af wat het aantal is in punt A.



Oplossing

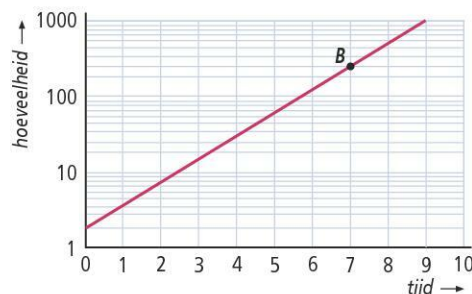
In het assenstelsel heeft de verticale as een logschaal. Bij A ligt het aantal tussen $100 = 10^2$ en $1000 = 10^3$.

A ligt op $\frac{3}{5}$ deel van de stap tussen 10^2 en 10^3 dus

het aantal is $10^{2\frac{3}{5}} = 10^{2,6}$ dus ongeveer 398.

Voorbeeld 2

Lees af wat de hoeveelheid is in punt B.



Oplossing

In het assenstelsel heeft de verticale as een logschaal.

De afstand van 10 tot 100 is even groot als die van 100 tot 1000. Tussen de getallen 100 en 1000 op de verticale as geven de horizontale lijnen de waarden 200, 300, 400 tot en met 900 weer.

De hoeveelheid in punt B is dus 300.

Ondersteunende route → maak opdracht 048

48 Gegeven is de exponentiële formule $y = 2 \cdot 10^x$.

a Vul de tabel in.

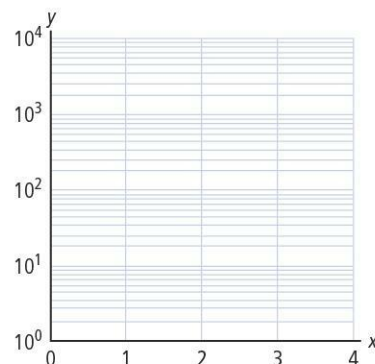
x	0	1	2	3	4
y	...	...	...	...	...

b Hoe kun je zien dat in het assenstelsel de verticale as een log-schaal heeft?

c Teken in het assenstelsel de grafiek bij de formule.

d Teken in hetzelfde assenstelsel de grafiek bij de exponentiële formule $y = 8000 \cdot 0,5^x$.

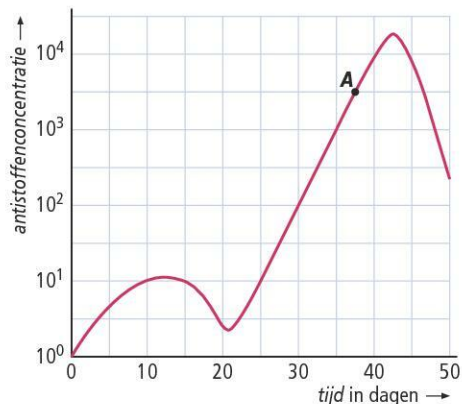
e Welke vorm hebben de grafieken?



In een assenstelsel met op de verticale as een logaritmische schaalverdeling is de grafiek bij een exponentieel verband een rechte lijn.

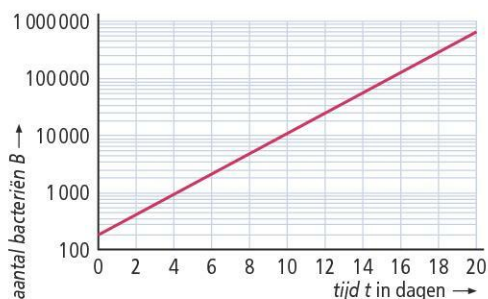
- 49** Als een lichaamsvreemde stof het lichaam van een zoogdier binnendringt, worden er antistoffen aangemaakt. In de grafiek zie je hoe het lichaam reageert als dit besmet wordt met een lichaamsvreemde stof. Het lichaam maakt eerst een hoeveelheid antistoffen aan, die daarna grotendeels weer verloren gaan. Bij een volgende besmetting maakt het lichaam snel een nog grotere hoeveelheid antistoffen aan.

- a** Lees af wanneer de concentratie 10, 100 en 1000 is.
b Leg uit dat de concentratie in punt A ongeveer 3162 is.
c De grafiek is tussen 25 en 40 dagen bij benadering een rechte lijn.
 Lees de concentratie af bij 25 dagen en bij 40 dagen.
d Bereken de groeifactor per dag bij dit deel van de grafiek.
e Stel een formule op die bij dit deel van de grafiek hoort.



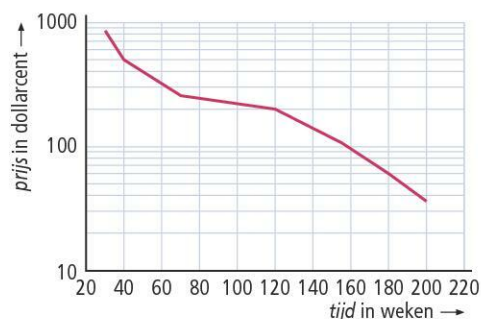
- 50** Voor een proef werd een kip bewaard in de koelkast die op 0 °C is ingesteld en een andere kip in een koelkast die op 6 °C is ingesteld. De beginhoeveelheid bacteriën was bij beide kippen even groot. In de figuur staat hoe het aantal bacteriën in de kip zich ontwikkelde bij de kip in de koelkast van 0 °C.

- a** Leg uit dat het aantal bacteriën exponentieel toenam.
b Stel een exponentiële formule op bij de grafiek.
c Welke verdubbelingstijd hoort er bij de grafiek?
d Bij de kip in de koelkast van 6 °C was het aantal bacteriën na 10 dagen 100 keer zo groot als het aantal bacteriën bij de kip in de koelkast van 0 °C op datzelfde moment.
 Teken de grafiek van het aantal bacteriën in deze koelkast.
e Stel ook een formule op bij deze grafiek.



- 51** Het verband tussen de prijs van een cryptomunt en de tijd in weken na het begin van de verkoop is in een grafiek verwerkt.

- a** Welke prijs had de cryptomunt na 120 weken?
b Waarom mag je ervan uitgaan dat het verband tussen de prijs P van de cryptomunt en de tijd in weken t vrijwel exponentieel zal zijn?
c Teken een lijn die dit verband zo goed mogelijk weergeeft.
d Stel een formule op bij de lijn die je getekend hebt.
e Hoeveel zal de cryptomunt volgens je formule waard zijn na 250 weken?



Uitdagende route → maak opdracht U10

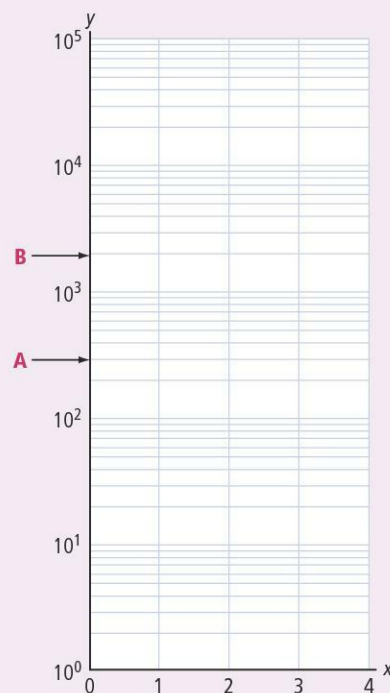
Ondersteunende opdrachten

048 Bij het assenstelsel staan langs de verticale as machten van 10.

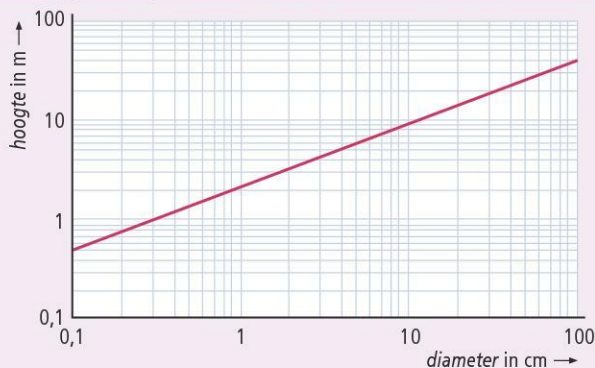
- Ga na dat $10^0 = 1$ en bereken ook de andere machten.
- Hoe kun je zien dat in het assenstelsel de verticale as een log-schaal heeft?
- Pijltje A staat bij een lijn tussen 10^2 en 10^3 .
Ga na dat bij pijltje A de waarde 300 aangeeft.
- Welke waarde hoort bij de lijn van pijltje B?
- Gegeven de exponentiële formule $y = 3 \cdot 10^x$.
Vul de tabel verder in.

x	0	1	2	3	4
y	3	...	...	...	...

- Teken de punten uit de tabel in het assenstelsel en teken een vloeiende lijn door deze punten.
- Teken ook de grafiek bij de exponentiële formule $y = 800 \cdot 0,5^x$ in het assenstelsel.
- Welke vorm hebben de grafieken?



Uitdagende opdrachten



U10 In het assenstelsel zie je voor een bepaalde boomsoort het verband tussen de diameter van de stam in centimeters en de hoogte in meters. Bij het verband hoort een formule van de vorm $H = c \cdot d^a$.

Hierin is H de hoogte in meters en d de diameter in meters. Leg uit hoe uit de grafiek volgt dat $c = 40$ en bereken de waarde van a . Rond de waarde van a af op twee decimalen.

52 Herleid de formules zo dat t wordt uitgedrukt in P .

a $P = 3^{2t+5}$

c $P = 7(1 - 2^t)$

b $2P - 4 \cdot 6^t = 12$

d $\frac{2P}{12^t} = 1$

53 Een patiënt krijgt 100 mg geneesmiddel toegediend door inspuiting in het bloed. Per dag wordt door het lichaam 25% van de aanwezige hoeveelheid afgebroken.

a Stel het functievoorschrift op waarmee de nog aanwezige aantal mg geneesmiddel $g(t)$ na t dagen berekend kan worden.

b Bereken na hoeveel tijd er nog 15 mg geneesmiddel in het bloed zit. Geef je antwoord in uren nauwkeurig.

c Schrijf de halveringstijd van dit afbraakproces als een logaritme.

d Benader deze halveringstijd in uren nauwkeurig.



54 Schrijf als één logaritme.

a $^4\log(2x) - ^4\log(3x^2)$

c $^5\log(x-1) + ^5\log(x+1) - 2 \cdot ^5\log(x)$

b $^8\log(64) \cdot ^4\log(10)$

d $^3\log(12) - (3 \cdot ^3\log(4) - ^3\log(2))$

55 Gegeven is de functie $f(x) = -2 + ^{0.8}\log(x)$.

a Plot de grafiek van f .

b Is de grafiek van f afnemend stijgend of afnemend dalend?

c Hoe ontstaat de grafiek van f uit de grafiek van $g(x) = ^{0.8}\log(x)$?

56 In de periode van 1959 tot en met 1966 registreerde een bioloog in de Alpen het verloop van een rupsenplaaag door telkens op 1 juli het aantal rupsen per km^2 vast te stellen. In de grafiek is aangegeven hoe dit verloop is geweest.

a Van welke soort groei is er sprake tussen 1959 en 1962? Leg uit hoe je aan je antwoord komt.

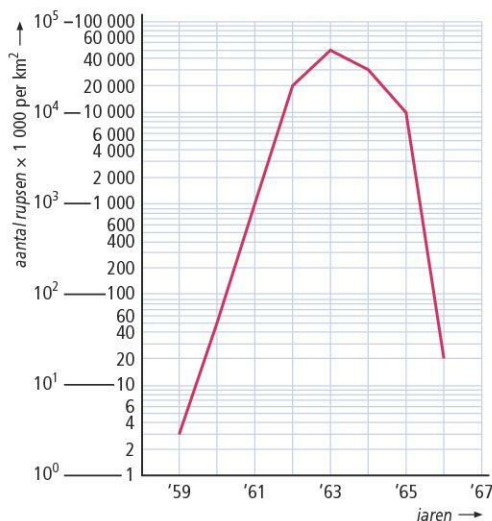
b Bereken voor de periode 1959-1962 de groeifactor per jaar en de jaarlijkse procentuele toename.

c In hoeveel dagen verdubbelde het aantal rupsen per km^2 in de periode 1959-1962?

d Vul in: van 1 juli ... tot 1 juli ... was de jaarlijkse absolute toename van het aantal rupsen het grootst.

e Neem aan dat het aantal rupsen in de periode 1965-1966 exponentieel afnam.

Stel voor deze periode een formule op voor het aantal rupsen A per km^2 . Neem voor t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 juli 1965.





57 In de Verenigde Staten heeft men rond 1990 vastgesteld dat geluidssterktes van meer dan 90 dB (decibel) waaraan iemand langer dan 8 uur per dag wordt blootgesteld, gehoorschade kunnen opleveren. Ter bescherming van de werknemers is daarom de volgende norm ingevoerd:

- bij een voortdurende geluidssterkte van 90 dB bedraagt de maximale werktijd 8 uur;
- bij elke toename van de geluidssterkte met 5 dB moet de maximale werktijd gehalveerd worden.

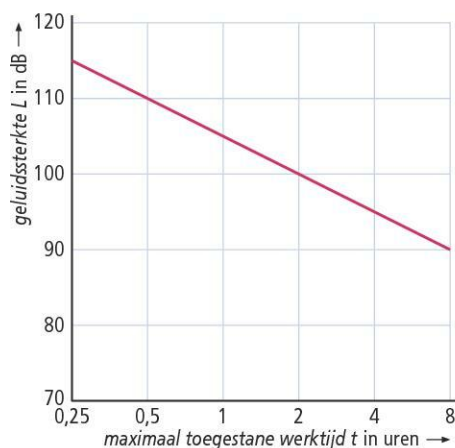
In het assenstelsel is een lijn getekend die het verband weergeeft tussen de geluidssterkte L in dB en de maximale toegestane werktijd t in uren zoals die gebruikt wordt in de VS. De bijbehorende formule is $L = -16,6 \cdot \log(t) + 105$.

De Europese norm is strenger dan de norm van de VS:

- bij een voortdurende geluidssterkte van 80 dB bedraagt de maximale werktijd 8 uur;
- bij elke toename van de geluidssterkte met 3 dB moet de maximale werktijd gehalveerd worden.

De geluidssterkte in twee fabrieken in de VS en in Europa is voor de werknemers hetzelfde. In de Amerikaanse fabriek mag je vanwege de geluidssterkte maximaal 6 uur per dag werken. Onderzoek hoeveel tijd per dag men in de Europese fabriek maximaal zou mogen werken.

(Ontleend aan het examen havo wiskunde B1 2001 tijdvak 1)



58 Van een bedrag dat tegen een rentepercentage p op de bank is gezet, kun je de verdubbelingstijd T berekenen met de vuistregel $T = 70 : p$.

Onderzoek voor welke gehele rentepercentages p de met de vuistregel berekende verdubbelingstijd T niet meer dan 1% afwijkt van de werkelijke verdubbelingstijd.

Theorie

Logaritme en grondtal

De exacte oplossing van de vergelijking $g^t = a$ heet de logaritme van a met grondtal g . Je noteert deze oplossing als $t = {}^g\log(a)$. Je spreekt dit uit als 'g log a'.

De basisregel voor logaritmen luidt als volgt:

Uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$ en omgekeerd

uit ${}^g\log(a) = t$ volgt $a = g^t$

Hierbij is $a > 0$, $g > 0$ en $g \neq 1$.

$$\begin{array}{c} \text{tot de macht} \\ \curvearrowright \\ {}^{10}\log(1000) = 3 \\ \curvearrowleft \\ \text{is} \end{array}$$

Voorbeeld

Geef de exacte oplossing van de vergelijking $12^{t+1} = 146$.

Oplossing

$12^{t+1} = 146$ geeft $t+1 = {}^{12}\log(146)$ dus $t = {}^{12}\log(146) - 1$.

- S1 a Geef de exacte oplossing van de vergelijking $3^t = 25$.
b Geef de exacte oplossing van de vergelijking $6^{t-4} = 20$.

Theorie

Kenmerken van de grafiek van de logaritmische functie $f(x) = {}^g\log(x)$.

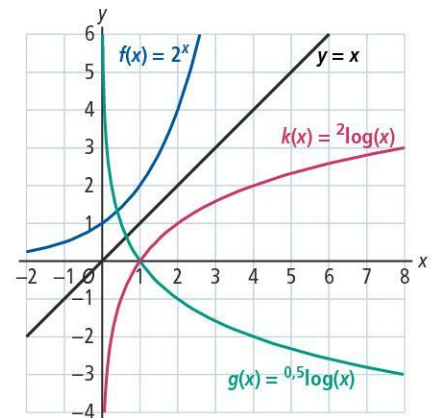
De grafieken van $f(x) = g^x$ en $k(x) = {}^g\log(x)$ zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

De grafiek van f snijdt de y -as in het punt $(0, 1)$, want $g^0 = 1$.

De grafiek van k snijdt de x -as in het punt $(1, 0)$, want ${}^g\log(1) = 0$. Bij beide functies geldt dat het grondtal g positief is, maar niet gelijk aan 1.

Voor $0 < g < 1$ is de grafiek van een logaritmische functie $k(x) = {}^g\log(x)$ afnemend dalend en voor $g > 1$ afnemend stijgend.

De grafiek van $h(x) = a + {}^g\log(x)$ ontstaat door de grafiek van $k(x) = {}^g\log(x)$, a eenheden omhoog te verschuiven.

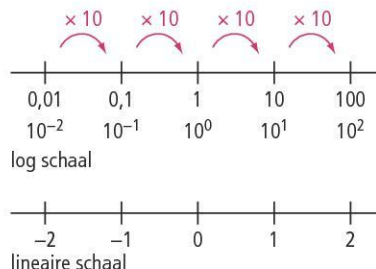
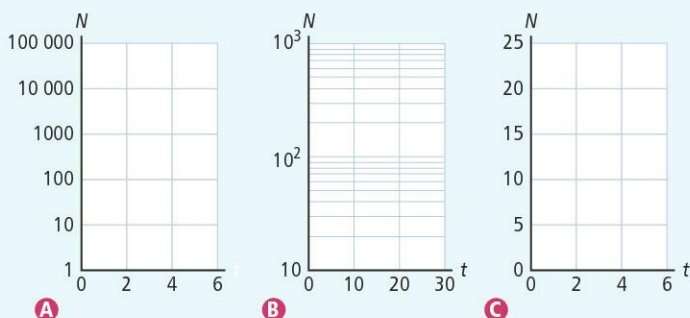


- S2 a Welke vorm heeft de grafiek van $f(x) = {}^{0.99}\log(x)$?
b Hoe ontstaat de grafiek van $g(x) = 7 + {}^{0.99}\log(x)$ uit de grafiek van f ?

Theorie

Logaritmische schaalverdeling

Bij een lineaire schaalverdeling wordt bij gelijke stappen telkens hetzelfde getal opgeteld. Een schaalverdeling waar bij gelijke stappen telkens met dezelfde factor wordt vermenigvuldigd, heet een logaritmische schaalverdeling of kortweg log-schaal.



- S3** Bij welke assenstelsels heeft de verticale as een logaritmische schaalverdeling? Leg uit hoe je dit kunt zien.

Vaardigheid

Je kunt logaritmen met je rekenmachine berekenen.

Je kunt met behulp van de rekenregel ${}^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$ elke logaritme met je rekenmachine berekenen.

Voorbeeld

Los de vergelijking $3^{t-5} = 18$ op.

Oplossing

$3^{t-5} = 18$ geeft $t - 5 = {}^3\log(18)$.

De exacte oplossing is $t = {}^3\log(18) + 5$

Een benadering is $t = \frac{\log(18)}{\log(3)} + 5 \approx 7,63$.

- S4** Los de vergelijking op. Geef een exacte oplossing en ook een benadering in twee decimalen.

a $4^x = 7$

b $9^{2x-6} = 14$

Vaardigheid

Je kunt de verdubbelingstijd en de halveringstijd met logaritmen berekenen.

Bij een exponentieel groeiproces met groeifactor g is de verdubbelingstijd de tijd die nodig is om een hoeveelheid te verdubbelen. Deze tijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = 2$. De verdubbelingstijd is dus $t = {}^g\log(2)$.

De halveringstijd is de tijd die nodig is om een hoeveelheid te halveren. Deze tijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = \frac{1}{2}$. De halveringstijd is dus $t = {}^g\log\left(\frac{1}{2}\right)$.

Voorbeeld

De export van uien neemt met 20% per jaar toe.
Bereken de verdubbelingstijd.

Oplossing

De groeifactor is 1,20 per jaar.

De verdubbelingstijd t bij een groeiproces met groeifactor 1,20 is $t = {}^{1,20}\log(2) \approx 3,802$ jaar.

- S5**
- a Bereken de halveringstijd bij een groeifactor 0,8 per jaar.
 - b Bereken de verdubbelingstijd bij een groeifactor 2,3 per uur.

Vaardigheid

Je kunt rekenen met de rekenregels voor logaritmen.

Voor het rekenen met logaritmen gelden de volgende rekenregels.

$${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$$

$${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$$

$${}^g\log(a) = \frac{{}^b\log(a)}{{}^b\log(g)}$$

met $g > 0$, $g \neq 1$, $a > 0$ en $b > 0$.

Voorbeeld

Schrijf als één logaritme
 $2 \cdot {}^5\log(6) - {}^5\log(3) + 2$.

Oplossing

$$2 \cdot {}^5\log(6) - {}^5\log(3) + 2 =$$

$${}^5\log(6^2) - {}^5\log(3) + {}^5\log(5^2) =$$

$${}^5\log(36) - {}^5\log(3) + {}^5\log(25) =$$

$${}^5\log\left(\frac{36}{3} \cdot 25\right) = {}^5\log(300)$$

- S6**
- a Schrijf $3 \cdot {}^2\log(5) + {}^2\log(4)$ als één logaritme.
 - b Schrijf ${}^4\log(x^5) - 2 \cdot {}^4\log(x) + 3$ als één logaritme.
 - c Bereken ${}^{16}\log(32)$ door over te gaan op een ander grondtal.

Vaardigheid

Je kunt een exponentiële formule herleiden tot een logaritmische formule.

Een exponentiële formule kun je herleiden tot een logaritmische formule.

Je gebruikt de basisregel: uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $r = 4 \cdot 1,5^s$.
Druk s uit in r .

Oplossing

$$4 \cdot 1,5^s = r$$

$$1,5^s = \frac{1}{4}r$$

$$s = 1,5\log\left(\frac{1}{4}r\right)$$

S7 Druk q uit in p .

a $p = 6^q - 3$

b $p = 5 + 2 \cdot 3^q$

Vaardigheid

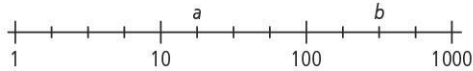
Je kunt een logaritmische schaalverdeling aflezen.

Je gebruikt een logaritmische schaalverdeling als je zowel erg grote als erg kleine waarden in één grafiek moet verwerken.

In een assenstelsel met op de verticale as een logaritmische schaalverdeling is de grafiek bij een exponentieel verband een rechte lijn.

Voorbeeld

Geef de waarde van het getal bij a op de getallenlijn.

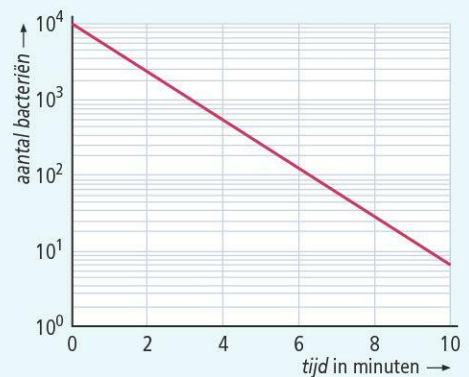
**Oplossing**

Bij de schaal horen de machten 10^0 , 10^1 , 10^2 en 10^3 .

a ligt tussen 10^1 en 10^2 ; $a = 10^{1\frac{1}{4}} = 10^{1,25}$

$$a \approx 17,78$$

- S8**
- a** Bereken de waarde van het getal b in het voorbeeld.
 - b** In de grafiek zie je het aantal bacteriën tijdens een experiment.
Hoeveel bacteriën waren er in het begin van het experiment?
 - c** En hoeveel bacteriën waren er nog na acht minuten?



T1 Los op. Geef de exacte oplossing en een benadering in twee decimalen.

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| a $8^t = 5$ | d $4^{t-2} = 12$ |
| b $3^t + 1 = 14$ | e $6 + 9^t = 23$ |
| c $10^t = 19$ | f $5^{2t+3} = 24$ |

T2 In een gebied op Antarctica leven 600 pinguïns. Hun aantal neemt elk jaar met 20% af.

- Na hoeveel jaar is het aantal pinguïns gehalveerd?
- Op een bepaald moment zijn er 100 pinguïns. Bereken hoeveel jaar het vanaf dan duurt totdat het aantal pinguïns is afgenomen tot 50.
- In hetzelfde gebied komen ook veel zeevogels en zeehonden voor. Het aantal zeevogels neemt elk jaar met 5,4% toe. Het aantal zeehonden neemt elk jaar met 1,8% af. Bereken het verschil tussen de verdubbelingstijd van het aantal zeevogels en de halveringstijd van het aantal zeehonden. Rond je antwoord af op hele jaren.



T3 Schrijf als één logaritme.

- | | |
|--|--|
| a ${}^{24}\log(3) + {}^{24}\log(18)$ | d ${}^4\log(15) - 2 \cdot {}^4\log(\sqrt{3})$ |
| b ${}^2\log(12) - {}^2\log(2)$ | e $3 \cdot {}^7\log(6) - {}^7\log(9)$ |
| c ${}^4\log(8) + 2 \cdot {}^4\log(3)$ | f ${}^6\log(g+4) + {}^6\log(g-4)$ |

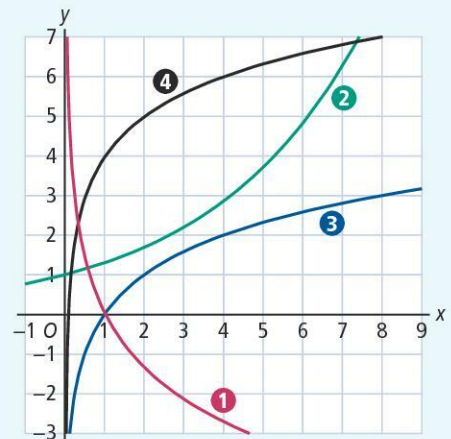
T4 **a** Bereken ${}^4\log(128)$ door op grondtal 2 over te gaan.

b Bereken ${}^{36}\log(216)$.

c Bereken ${}^{100}\log(\sqrt{10})$.

T5 In het assenstelsel zijn grafieken bij een aantal logaritmische en exponentiële functies getekend.

- Grafiek 1 hoort bij een logaritmische functie. Wat weet je van het grondtal van deze functie?
- Grafiek 2 hoort bij een exponentiële functie. Wat weet je van het grondtal van deze functie?
- Grafiek 3 hoort bij de functie $f(x) = {}^2\log(x)$. De grafiek wordt gespiegeld in de lijn $y = x$. Geef een functievoorschrift van de grafiek die zo ontstaat.
- Grafiek 4 krijg je door grafiek 3 omhoog te verschuiven. Geef een functievoorschrift van grafiek 4.





T6 De grafiek beschrijft de groei van de oppervlakte van waterplanten in een groot meer. De oppervlakte A is jaarlijks gemeten.

a Vul de tabel in.

t in jaren	0	1	2	3	4	5	6	7	8
A in km^2	...	...	...	...	...	...	...	...	...

b Controleer met behulp van de tabel dat de groei eerst vrijwel exponentieel verloopt en daarna wordt afgeremd.

c Hoe is in de grafiek te zien dat de groei eerst vrijwel exponentieel verloopt?

d Stel een functievoorschrift op voor de groei in de eerste vijf jaar.

e Na een aantal jaren is de oppervlakte van het meer helemaal bedekt met waterplanten.
Bepaal de grootte van het meer in km^2 .

T7 Druk t uit in R .

a $R = 8^t$

d $R = 6^t - 5$

b $R = 12 \cdot 14^t$

e $12R = 6 \cdot 7^t - 24$

c $R = 4 \cdot 5^t + 6$

f $R \cdot 3^{t-2} = 5$

T8 Een ballon die is gevuld met helium loopt langzaam leeg. Per dag verdwijnt 20% van de nog aanwezige hoeveelheid helium.

a Met welke vergelijking kun je berekenen hoelang het duurt voordat er nog maar de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid helium in de ballon zit?

b Los de vergelijking van opdracht a op.

c Na hoeveel uur is er nog maar 25% van de oorspronkelijke hoeveelheid helium in de ballon?

Je kunt logaritmen met je rekenmachine berekenen.

E1 Bereken in drie decimalen.

- a** $^{100}\log(175)$ **c** $^{0,3}\log(23,78)$
b $^{1,5}\log(75)$ **d** $^{\frac{1}{4}}\log(15)$

E2 Los de vergelijking op. Geef een exacte oplossing en ook een benadering in twee decimalen.

- a** $15^t = 30$ **c** $6^{t+6} = 18$
b $5^{3t} = 40$ **d** $8^{2t-3} = 6$

Je kunt de verdubbelingstijd en de halveringstijd met logaritmen berekenen.

- E3**
- a** Het aantal algen neemt met 3,2% toe per week. Bereken de verdubbelingstijd in hele weken.
- b** Het aantal m² gras in een stad neemt met 1,65% af per jaar. Bereken de halveringstijd. Rond af op hele jaren.

Je kunt rekenen met de rekenregels voor logaritmen.

E4 Schrijf als één logaritme.

- a** $5 \cdot ^3\log(2) + 3$ **e** $^7\log(5a^2) + ^7\log(3a)$
b $\log(24) - 3 \cdot \log(2)$ **f** $^{13}\log(b+1) + ^{13}\log(b-1)$
c $4 \cdot ^6\log(3) - ^6\log(9)$ **g** $2 \cdot ^8\log(3p^2)$
d $3 \cdot ^5\log(6) - ^5\log(36)$ **h** $^{1,2}\log(10x^2) - ^{1,2}\log(5x)$

E5 Bereken door op een ander grondtal over te gaan.

- a** $^4\log(8)$ **c** $^{49}\log(343)$
b $^{27}\log(3)$ **d** $^8\log(256)$

Je kunt een exponentiële formule herleiden tot een logaritmische formule.

E6 Druk t uit in P .

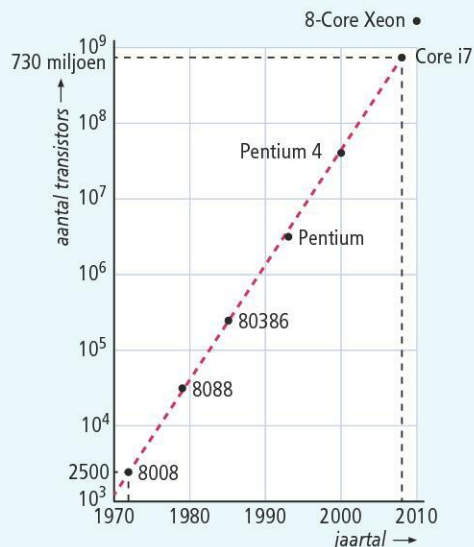
- a** $P = 4^t - 3$ **d** $P - 5^t = 0$
b $P = 9^{t-1}$ **e** $15P \cdot 3^t = 45$
c $P = 3 \cdot 2^t$ **f** $5 \cdot 6^t - 15P = 30$

Je kunt een logaritmische schaalverdeling aflezen.

E7 Volgens de wet van Moore neemt het aantal transistors in de processor van een computer exponentieel toe. Deze wet is met een stippellijn in de figuur aangegeven.

In 1972 had de 8008 processor ongeveer 2500 transistors en in 2008 waren dat er bij de Core i7 processor 730 miljoen.

- In het jaar 2000 kwam de Pentium 4 processor uit. Schat aan de hand van de figuur hoeveel transistors er in een Pentium 4 processor zaten.
- Stel een formule op bij dit groeimodel. Neem T voor het aantal transistors en t voor de tijd in jaren met $t = 0$ in 1972. Rond de groeifactor af op vier decimalen.
- Bereken de verdubbelingstijd van dit groeimodel.
- Bereken hoeveel procent de 8-Core Xeon processor uit 2010 met 2,3 miljard transistors van het groeimodel afwijkt.

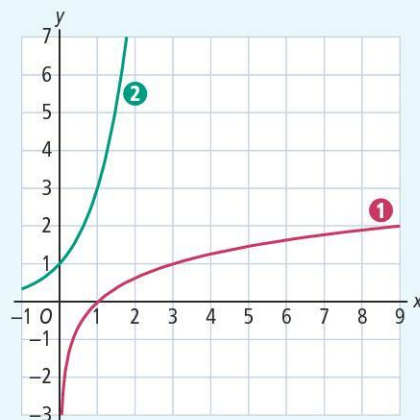


E8 Het aantal kakkerlakken in een natte schuur neemt elke week met 4,8% toe. Op 1 februari waren er 80 kakkerlakken.

- Stel een formule op waarmee je het aantal kakkerlakken K kunt berekenen t weken na 1 februari.
- Bereken de verdubbelingstijd van het aantal kakkerlakken.
- Druk t uit in K .
- Na hoeveel weken waren er 1000 kakkerlakken? Rond je antwoord af op een geheel aantal weken.

E9 In het assenstelsel zijn twee grafieken getekend.

- Vul in: de grafieken zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn ...
- De functie $f(x) = {}^3\log(x)$ hoort bij grafiek 1. Geef een functievoorschrift van de functie die bij grafiek 2 hoort.
- Grafiek 1 wordt zeven eenheden omlaag verschoven. Geef een functievoorschrift van de functie die bij de zo ontstane grafiek hoort.
- Iemand wil de grafiek van de functie $j(x) = 2 + {}^{0,95}\log(x)$ in hetzelfde assenstelsel tekenen. Welke vorm heeft de grafiek van j ?



Al-Khwarizmi

Bij het algebraïsch oplossen van vergelijkingen heb je vaak gebruik gemaakt van de bordjes- en de balansmethode. Al in 830 gebruikte een Perzische wiskundige, Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi deze middelen bij het oplossen van vergelijkingen. Ter ere van hem werd in 1983 in de voormalige Sovjet-Unie een postzegel uitgebracht.

Het ging al-Khwarizmi om het oplossen van allerlei dagelijkse problemen zoals hij die tegenkwam bij de handel en bij het verdelen van erfenissen. Hij beschreef zijn methoden in een boek, *Hisab al-jabr al-muqabala*. Dit werk is één van de eerste boeken over Algebra. Latere West-Europese vertalers wisten zich geen raad met het woord al-jabr en maakten daar algebra van.

In zijn boek behandelt hij alleen lineaire en kwadratische vergelijkingen met één variabele. De notatie van variabelen was in die tijd niet bekend, dus werden de oplossingen met woorden omschreven.

Hij maakte onderscheid in zes verschillende soorten vergelijkingen. Je ziet voorbeelden van deze zes vergelijkingen in onze notatie.

Het oplossen van deze vergelijkingen beschreef Al-Khwarizmi in woorden, waardoor het lastig is om zijn berekeningen te doorgronden. Gelukkig lichtte hij zijn berekeningen toe met meetkunde.



$$4x^2 = 3x$$

$$x = 25$$

$$x^2 + 21 = 10x$$

$$3x^2 = 5$$

$$x^2 + 10x = 39$$

$$4x + 12 = x^2$$

Opdracht

Je gaat deze meetkundige methode gebruiken voor het oplossen van $4x + 12 = x^2$.

De oppervlakte van het vierkant is x^2 en de oppervlakte van het witte vierkant is A .

- Laat zien dat de oppervlakte van het gekleurde deel te schrijven is als $4x - 4$.

- Dit levert $4x - 4 + A = x^2$.

De oorspronkelijke vergelijking is $4x + 12 = x^2$.

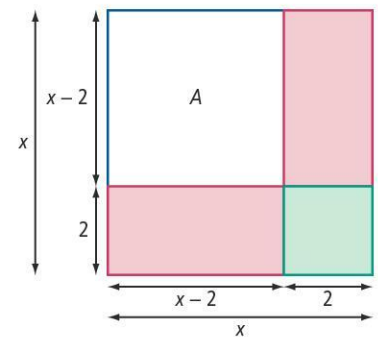
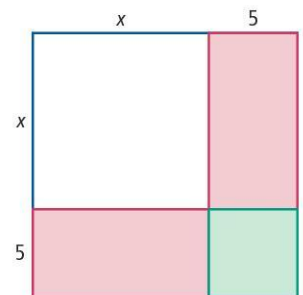
Dus A moet dan gelijk aan 16 zijn.

Ook geldt $A = (x - 2)^2$.

Controleer dat de positieve oplossing $x = 6$ is.

- Los met behulp van de tekening hiernaast op: $x^2 + 10x = 39$

Merk op dat A nu de oppervlakte van het hele vierkant is.



Vaardigheden 6

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Vergelijkingen en ongelijkheden
- Groeifactoren en percentages
- Substitueren en herleiden
- Gebroken formules



Vergelijkingen en ongelijkheden

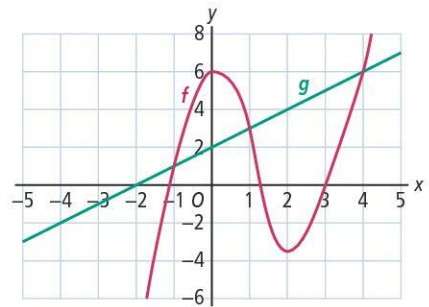
1 Los op.

- | | |
|-----------------------|--------------------------|
| a $3x + 1 = -3x + 6$ | d $4(b - 10) = 8(b + 4)$ |
| b $7 - 3k = 2(k + 5)$ | e $13 + 8g = 15 - 2g$ |
| c $3(2r - 7) = 33$ | f $45 + h = 3(h + 1)$ |

2 Los op.

- | | |
|-------------------------|-------------------------------|
| a $(x + 5)(x - 3) = 0$ | d $\frac{1}{4}(4x - 1)^2 = 1$ |
| b $(x + 5)(2x - 5) = 0$ | f $x^2 + 11x + 10 = 0$ |
| c $(x + 3)^2 = 81$ | g $(x - 4)(x + 4) = 9$ |

- 3 a Lees uit de grafieken af welke van de volgende beweringen waar is: $f(2) > g(2)$ of $f(2) < g(2)$.
 b Is $f(0) > g(0)$ of is $f(0) < g(0)$?
 c Lees uit de grafieken de oplossing af van de ongelijkheden $f(x) > g(x)$ en $f(x) \leq g(x)$.

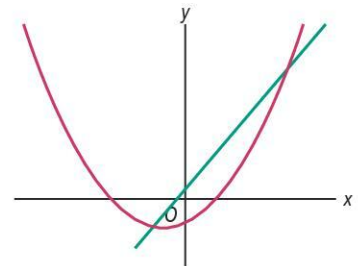


Theorie

De oplossing van een ongelijkheid is meestal één of meer intervallen. Als de oplossing tussen 1 en 4 ligt kun je dat noteren als $1 < x < 4$ of in de intervalnotatie $\langle 1, 4 \rangle$. Voor alle waarden x groter of gelijk aan 4 noteer je $x \geq 4$ of in de intervalnotatie $[4, \rightarrow)$.

- 4 Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ en $g(x) = 7x + 1$.

- a Bereken de x -coördinaten van de snijpunten.
 b Voor welke waarden van x ligt de grafiek van f boven de grafiek van g ?
 c Welke ongelijkheid hoort bij opdracht b?
 $2x^2 + 3x - 5 < 7x + 1$ of $2x^2 + 3x - 5 > 7x + 1$



5 Los de ongelijkheden op.

- | | |
|---|----------------------------------|
| a $3x + 10 \leq -6$ | d $-3x^2 + 8x > 11 - 6x$ |
| b $12 - \frac{2}{3}x > 4x - 16$ | e $5 - 2(3 - x) \geq 3(x + 3)$ |
| c $5 \cdot x^3 \cdot \sqrt{x} < 0,5x + 2$ | f $0,0343 \cdot x^{1,083} > 350$ |

Groefactoren en percentages

Theorie

Als g de groeifactor per tijdseenheid is, dan is de groeifactor per n tijdseenheden g^n .

De groeifactor voor een n -de deel van de tijdseenheid is $g^{\frac{1}{n}}$ ofwel $\sqrt[n]{g}$.

Voorbeeld

Als de groeifactor per jaar gelijk is aan 3, dan is:

de groeifactor per 4 jaar $3^4 = 81$.

de groeifactor per half jaar

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \approx 1,732.$$

de groeifactor per kwartaal

$$3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3} \approx 1,316.$$

- 6 Bij een groeiproses is de groeifactor 1,2 per uur.
- Bereken de groeifactor per half uur in drie decimalen.
 - Bereken de groeifactor per minuut in vijf decimalen.
 - Bereken de groeifactor per dag in één decimaal.

Theorie

Een toename van 100% per tijdseenheid komt overeen met de groeifactor 2, want $100\% + 100\% = 200\%$ en dat is $2 \times 100\%$.

Bij een afname van 8% per tijdseenheid is de groeifactor 0,92 want $100\% - 8\% = 92\%$ dat is $0,92 \times 100\%$.

Een groeifactor van 1,05 komt overeen met een toename van 5% want $1,05 \times 100\% = 105\%$ en dat is een toename van 5%.

Voorbeeld

Bereken het groeipercentage per week bij een groeipercentage per dag van 2,3%.

Oplossing

Bij een groeipercentage van 2,3% per dag hoort een groeifactor van 1,023 per dag. Dit geeft een groeifactor van $1,023^7 \approx 1,1725$ per week, dus een groeipercentage van 17,3% per week.

- 7 Bereken het groeipercentage per dag.
- Een afname van 1,7% per halve dag.
 - Een toename van 3% per uur.
 - Een afname van 8,7% per week.
 - Een afname van 0,02% per 10 minuten.
 - Een toename van 0,7% per uur.
- 8 Iemand zet € 800,- op zijn spaarrekening tegen een rente van 1,5% per jaar.
- Geef een formule waarmee je het bedrag B na t jaar kunt berekenen.
 - Bereken hoe groot het bedrag na 15 jaar is.
- 9 Bij een exponentieel groeiproses is de beginwaarde 45 en de verdubbelingstijd is 3,5 uur. Stel de bijbehorende formule op met de tijd t in uren.

$N = b \cdot g^t$ is de algemene vorm voor exponentiële groei. Hierin is b de beginhoeveelheid op tijdstip $t = 0$ en g de groeifactor.

Substitueren en herleiden

Theorie

In een formule als $y = -2t + 8$ zeg je dat de variabele y is uitgedrukt in de variabele t . Je kunt ook zeggen y is geschreven als functie van t .

In een formule kun je een variabele vervangen door een getal of door een andere formule. Je noemt dit substitueren.

Het vereenvoudigen of herschrijven van een formule noem je het herleiden van de formule.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $y = -2t + 8$.
Substitueer hierin de formule $t = -3x + 5$ en druk y uit in x .

Oplossing

$$y = -2(-3x + 5) + 8$$

$$y = 6x - 10 + 8$$

$$y = 6x - 2$$

- 10** Substitueer formule A in formule B, druk q uit in p en herleid het resultaat zoveel mogelijk.

a A: $t = p + 2$

B: $q = 2t - 5$

b A: $x = p - 1$

B: $q = x^2 - 2x + 8$

c A: $k = 3 - 2p$

B: $q = 2k^2 - k + 7$

- 11** Gegeven is de formule $N = (1 - M)(0,5t + 2)$.

a Substitueer $M = 9$ en laat zien dat $N = -4t - 16$

b Toon aan dat de formule $N = -4t - 16$ te herleiden is tot

$$t = -\frac{1}{4}N - 4.$$

- 12** Gegeven zijn de formules $y \cdot (t - 7) = -12$ en $t + 2x = 1$.

a Herleid de formule $t + 2x = 1$ tot een vorm waarbij t wordt uitgedrukt in x .

b Substitueer het antwoord van opdracht a in de formule $y \cdot (3t - 7) = -12$ en herleid deze tot een vorm waarbij y wordt uitgedrukt in x .

Gebroken formules

Theorie

Breuken vermenigvuldig je met elkaar door de tellers met elkaar te vermenigvuldigen en de noemers met elkaar te vermenigvuldigen. Breuken kun je vereenvoudigen door de teller en de noemer door hetzelfde getal te delen of met hetzelfde getal te vermenigvuldigen.

Voorbeeld

$$\frac{3p}{q} \cdot \frac{7q^2}{2p^3} = \frac{\cancel{3} \cdot 7 \cdot \cancel{q} \cdot q}{\cancel{q} \cdot 2 \cdot \cancel{p} \cdot p \cdot p} = \frac{21q}{2p^2}$$

$$5 \cdot \frac{7}{10} = \frac{5}{1} \cdot \frac{7}{10} = \frac{5 \cdot 7}{1 \cdot 10} = \frac{\cancel{5} \cdot 7}{2 \cdot \cancel{5}} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$$

- 13** Vermenigvuldig en vereenvoudig het antwoord.

a $3 \cdot \frac{5}{18}$

c $\frac{60p}{3p-9} \cdot \frac{p-3}{5}$

b $\frac{-12a^2}{b^3} \cdot \frac{7b}{6a}$

d $3q^7 \cdot \frac{2}{q^2} \cdot \frac{1}{12q^3}$

- 14 Op het blaadje zie je hoe je de formule $A = \frac{4}{p} + \frac{3}{p+1}$ als één breuk kunt schrijven

- a Leg uit wat er in stap 1 gebeurd is.
b En wat is er in stap 2 gebeurd?

$A = \frac{4}{p} + \frac{3}{p+1}$	
$A = \frac{4(p+1)}{p(p+1)} + \frac{3p}{p(p+1)}$	1
$A = \frac{7p+4}{p^2+p}$	2

- 15 Herleid de formules tot één breuk.

a $k = \frac{6}{p} + \frac{1}{5}$ c $T = \frac{b}{1-b} + \frac{3}{1+b}$
b $q = \frac{1}{a} - \frac{8}{a+5}$ d $H = \frac{5}{m} + \frac{3m+1}{2m}$

- 16 In de formule $t = \frac{8}{p-1}$ is t uitgedrukt in p .
Je kunt ook p uitdrukken in t . Hiernaast staat een begin.
Neem de berekening over en laat zien dat de formule te herleiden is tot $p = \frac{8}{t} + 1$.

$t = \frac{8}{p-1}$	
$t(p-1) = 8$ links en rechts $\times (p-1)$	
$\dots = \frac{8}{t}$ links en rechts $: t$	
$p = \dots$	

- 17 Gegeven zijn de formules $L \cdot B = 30$ en

$$K = \frac{18547}{L} + 56,6L + \frac{5279}{B} + 90,8B.$$

Druk K uit in L en herleid deze tot de vorm $K = a \cdot L + \frac{b}{L}$

Theorie

Een verband tussen de variabelen A , B en C kun je herleiden door links en rechts van het $=$ -teken te vermenigvuldigen met dezelfde factor of te delen door dezelfde factor.

Uit $\frac{A}{B} = C$ volgt dan $A = B \cdot C$ en ook

$B = \frac{A}{C}$ met $B \neq 0$ en $C \neq 0$.

Voorbeeld

$Q = \frac{-2}{P-3,5}$, druk P uit in Q .

Oplossing

$$(P-3,5) \cdot Q = -2$$

$$P-3,5 = \frac{-2}{Q} \text{ ofwel } P = \frac{-2}{Q} + 3,5$$

- 18 Druk P uit in T .

a $T = 6 + \frac{1}{P}$ d $T \cdot (P+3) = 11$
b $T = \frac{-8}{0,5P}$ e $6 = \frac{T}{\sqrt{P}}$
c $T = \frac{-3}{4P+8}$ f $T = 4 - \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{P}}$



SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In hoofdstuk 7 heb je geleerd hoe je in verschillende situaties de kans op een gebeurtenis kunt berekenen.

Bij veel kansexperimenten zijn telkens twee uitkomsten mogelijk waarbij bij iedere herhaling de kans op succes gelijk blijft. In dit hoofdstuk leer je hoe je bij een dergelijk kansexperiment de kans op een gebeurtenis met een formule of met je rekenmachine berekent.

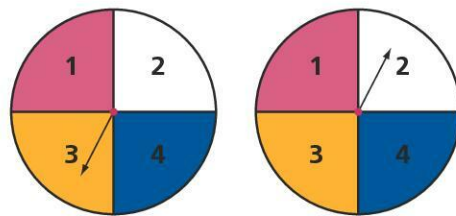
Ook leer je hoe je bij deze kansexperimenten de verwachtingswaarde en de bijbehorende standaardafwijking kunt berekenen.

In hoofdstuk 17 gebruik je deze kennis om een uitspraak te doen over de betrouwbaarheid van een resultaat waarbij toeval een rol speelt.

Voorbeelden van WDA in dit hoofdstuk

- Probleem oplossen en analytisch denken opdracht 29
- Logisch redeneren en bewijzen opdracht 27
- Modelleren en algebraïseren opdracht 32

- V1** De twee toltetjes hebben vier gelijke delen. Elk toltetje wordt één keer gedraaid. De uitkomst S is de som van de getallen op de toltetjes.
- In het schema zie je de uitkomsten op de toltetjes. Vul het schema verder in.
 - Hoe groot is de kans dat $S = 2$?
 - Hoe groot is de kans op uitkomst 5?
 - Waarom is $P(S = 4)$ groter dan $P(S = 2)$?
 - Bereken $P(S \geq 5)$.



+	1	2	3	4
1	...	3	...	...
2	...	...	5	...
3	...	...	6	...
4	...	...	...	...

- V2** Je gooit met vier geldstukken. De uitkomst U is het aantal keren kop.
- Leg uit dat $P(U = 4) = \frac{1}{16}$.
 - Hoe groot is de kans dat je met de eerste drie geldstukken kop en met het vierde geldstuk munt gooit?
 - Hoeveel verschillende rijtjes zijn er met drie keer kop en één keer munt?
 - Bereken $P(U = 3)$.

Theorie

Een variabele waarvan de waarde afhangt van het toeval heet **toevalsvariabele** of **stochast**. De uitkomst van een stochast is altijd een getal. Met $P(X = 2)$ wordt bedoeld de kans dat stochast X de waarde 2 aanneemt. Een overzicht van de mogelijke waarden van X met de bijbehorende kansen heet de **kansverdeling** van stochast X . Bij een kansverdeling is de som van de kansen gelijk aan 1. De **verwachtingswaarde** van stochast X is de gemiddelde waarde van X die je mag verwachten bij een groot aantal herhalingen van het experiment. De notatie van de verwachtingswaarde van X is $E(X)$.

Voorbeeld

Je gooit met drie dobbelstenen. Stochast X is het aantal vieren. Geef de kansverdeling van X .

Oplossing

X kan de waarden 0, 1, 2 en 3 aannemen.

$$P(X = 1) = 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{75}{216}$$

u	0	1	2	3
$P(X = u)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

De som van de kansen is 1.

$$E(X) = 0 \times \frac{125}{216} + 1 \times \frac{75}{216} + 2 \times \frac{15}{216} + 3 \times \frac{1}{216} = \frac{1}{2}$$

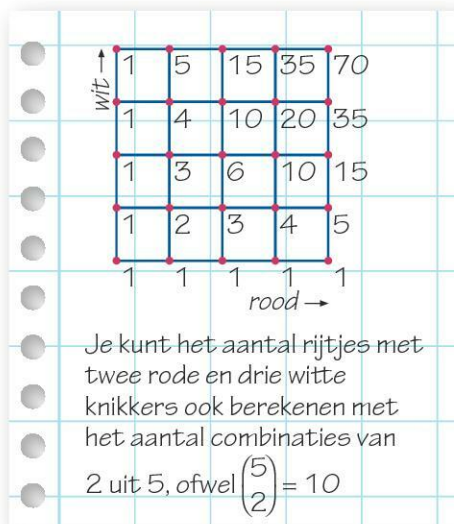
- V3** In het voorbeeld zie je dat $P(X = 2) = \frac{15}{216}$. Laat met een berekening zien dat deze kans klopt.
- V4** In een vaas zitten vier rode en zes blauwe balletjes.
- Simone trekt met terugleggen drie balletjes uit de vaas. Stochast B is het aantal blauwe balletjes. Geef de kansverdeling van B en bereken $E(B)$.
 - Sahid trekt drie balletjes uit de vaas zonder terugleggen. Hoe groot is de kans dat hij twee blauwe balletjes trekt?

V5 Een vaas bevat twaalf rode en acht witte knikkers. Je trekt met terugleggen vijf knikkers uit de vaas.

- Veronderstel dat je het rijtje *WRWRW* hebt getrokken, in deze volgorde. Laat met een berekening zien dat de kans op deze gebeurtenis gelijk is aan ongeveer 0,0230.
- Hoe groot is de kans op het rijtje *WWWR*?
- Leg uit hoe je in het rooster kunt zien dat er 10 rijtjes zijn met twee rode en drie witte knikkers.
- Leg zonder berekening uit waarom $\binom{5}{2}$ gelijk is aan $\binom{5}{3}$.
- Bereken de kans op twee rode en drie witte knikkers in willekeurige volgorde.
- Hoe groot is de kans op drie rode en twee witte knikkers?

V6 Je trekt vijf keer met terugleggen een knikker uit de vaas van opdracht V5. Stochast X is het aantal rode knikkers in de trekking.

- Bereken $P(X = 4)$ in vier decimalen.
- Hoe groot is de kans op hoogstens vier rode knikkers?



Theorie

Bij vragen over 'minstens', 'hoogstens', 'meer dan' en 'minder dan' is het soms handiger om eerst de complementaire kans te berekenen, dat is de kans op 'de rest'.

Voorbeeld

Je gooit met twee dobbelstenen en je let op de som van de aantallen ogen.

Bereken $P(\text{hoogstens } 10 \text{ ogen})$.

Oplossing

Er zijn in totaal $6 \times 6 = 36$ verschillende worpen.

Met de worpen (5, 6), (6, 5) en (6, 6) gooi je meer dan 10 ogen.

$$P(\text{meer dan } 10 \text{ ogen}) = \frac{3}{36}$$

$$P(\text{hoogstens } 10 \text{ ogen}) = 1 - \frac{3}{36} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$$

V7 In een vogelkwartetspel zitten 48 kaarten waarvan vier mezen. Levi pakt willekeurig vier van de 48 kaarten.

- Leg uit dat de kans dat Levi geen enkele mees pakt gelijk is aan $\frac{44}{48} \times \frac{43}{47} \times \frac{42}{46} \times \frac{41}{45}$.
- Bereken in vier decimalen de kans dat Levi geen enkele mees pakt.
- Bereken de kans dat Levi minstens één mees pakt.
- Bereken de kans dat Levi hoogstens drie mezen pakt.



13.1 De binomiale verdeling

Je leert

- wat een binomiale verdeling is
- wat de parameters van een binomiale verdeling zijn

Leerroutes

- ondersteunend: 1—2—3—04—5—6—7
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7
- uitdagend: 1—2—3—4—6—7—U1

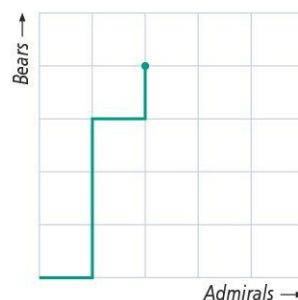
Bij een loterij zijn er 10 000 loten verkocht. Er zijn 100 prijzen. Guus heeft drie loten gekocht. Hij zegt dat de kans dat hij drie prijzen wint $0,01^3$ is.

- Ben je het met Guus eens? Verklaar je antwoord.



- 1 In het rooster is een serie van zes wedstrijden tussen twee honkbalteams, de Admirals en de Bears, weergegeven. Bij elke wedstrijd is er een winnaar; gelijkspel is niet mogelijk. Als de teams even sterk zijn, dan is de kans dat een team een wedstrijd wint, gelijk aan 0,5. De kans op de serie *ABBBAB* is dan gelijk aan $0,5 \times 0,5 \times 0,5 \times 0,5 \times 0,5 \times 0,5 = 0,5^6$.

- Bereken de kans op de serie *BBABAB*.
- Neem nu aan dat de kans dat de Admirals een wedstrijd winnen gelijk is aan 0,6 en de kans dat de Bears winnen dus 0,4.
Hoe groot is dan de kans op de serie *BBABAB*? En op de serie *ABBBAB*?
- Op hoeveel manieren kan de eindstand 3-3 bereikt worden?
- Hoe groot is de kans op deze eindstand als de kans dat de Admirals winnen 0,6 is en dat de Bears winnen 0,4 is?



- 2 Johan gooit vijf maal met een dobbelsteen. Hij telt daarbij het aantal keer dat hij een zes gooit.
- Hoe groot is de kans dat Johan de eerste twee keer wel en de laatste drie keer géén zes gooit?
 - Hoeveel uitkomsten zijn er waarbij je twee keer een zes gooit en drie keer géén zes?
 - Bereken de kans dat Johan bij de vijf worpen met de dobbelsteen precies twee keer een zes gooit.

Theorie

Een kansexperiment met maar twee mogelijke uitkomsten heet een Bernoulli-experiment. De twee mogelijke uitkomsten noem je succes (s) en mislukking (m).

Veel kansexperimenten kun je opvatten als het herhaald uitvoeren van hetzelfde Bernoulli-experiment. Je krijgt dan als uitkomst een rij van de vorm $s, m, m, m, s, s, \dots, m$.

De kans op een succes blijft bij iedere trekking gelijk.

Stochast X telt het aantal successen. Bij n experimenten kan X de waarden $0, 1, 2, \dots, n$ aannemen.

De kansverdeling van stochast X heet een **binomiale verdeling**. De kansverdeling van een binomiaal verdeelde stochast X is vastgelegd door het aantal herhalingen van het experiment n en de kans p op succes van het experiment. Hierbij heten n en p de **parameters** van de binomiale verdeling.

Voorbeeld

Ga bij de kansexperimenten na of er een binomiale verdeling bij kan horen.

A: Tien keer werpen met een geldstuk waarbij je let op het aantal keren munt.

B: Het trekken zonder terugleggen van vier kaarten uit een kaartspel waarbij je let op het aantal hartenkaarten.

Oplossing

A: Hier wordt een kansexperiment 10 keer herhaald met twee mogelijke uitkomsten, kop of munt. De kans op succes bij de herhalingen is steeds gelijk. Hierbij hoort een binomiale verdeling. X is het aantal keren kop, $n = 10$ en $p = 0,5$.

B: Hierbij hoort geen binomiale verdeling. De kans op een hartenkaart verandert na elke trekking.

- 3** Ga van elk experiment na of er een binomiale verdeling bij kan horen. Leg uit waarom niet. Formuleer in de gevallen dat de verdeling binomiaal is stochast X en geef de bijbehorende waarden van n en p .

H

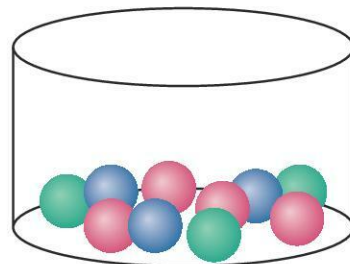
- Het maken van een driekeuzetoets Russisch, bestaande uit twintig vragen, door een kandidaat die deze taal totaal niet kent. Waarbij je let op het aantal goede antwoorden.
- Het kiezen van zes leerlingen uit een klas met tien meisjes en twaalf jongens waarbij je let op het aantal jongens.
- Het gooien van vijf dobbelstenen waarbij je per dobbelsteen let op het aantal ogen.
- Het gooien van vijf dobbelstenen waarbij je let op het aantal tweeën.
- Het aantal rode knikkers bij zes keer trekken zonder teruglegging uit een vaas met vijf rode en vijftien blauwe knikkers.

Ondersteunende route → maak opdracht 04

- 4** Lucas haalt met terugleggen vijf keer een knikker uit een vaas met drie blauwe, drie groene en vier rode knikkers. Stochast X is het aantal rode knikkers dat hij trekt.

H

- Waarom is de kansverdeling van X een binomiale verdeling?
- Hoe groot is de kans dat hij drie van de vijf keer een rode knikker trekt?



- 5** In een vaas liggen 5 blauwe en 20 rode knikkers. Je haalt in één keer vijf knikkers uit de vaas. Stochast Y is het aantal getrokken rode knikkers.

- Leg uit waarom Y niet binomiaal verdeeld is.
- Bereken $P(Y = 5)$.
- Bereken $P(Y < 4)$.

- 6** Uit de vazen A, B en C met rode en witte ballen worden drie ballen genomen. Eén keer met terugleggen en één keer zonder terugleggen. De aantallen rode en witte ballen in de vazen zijn verschillend, maar de verhouding van de aantallen rode en witte ballen is steeds hetzelfde.

Stochast X is het aantal rode ballen in de steekproef.

vaas	aantal ballen		$P(X = 2)$	
	rood	wit	met terugleggen	zonder terugleggen
A	4	6	...	...
B	40	60	...	...
C	400	600	...	...

- Bereken in elk van de gevallen de kans op twee rode ballen. Rond je antwoorden af op vier decimalen.
- Vergelijk de resultaten.
Welke conclusie kun je nu trekken?

Bij een grote populatie verandert de samenstelling van de populatie nauwelijks als er een kleine steekproef uit getrokken wordt. Je mag de trekking dan opvatten als een trekking met terugleggen.

Als het in de steekproef bovendien gaat om twee mogelijke uitkomsten (succes of mislukking), is de bijbehorende kansverdeling binomiaal.

- 7** In een doos zitten 50 chocoladetoffees en 150 droptoffees. Sanne pakt in één keer drie toffees uit de doos. Stochast X is het aantal droptoffees dat ze pakt.

- Waarom is X niet binomiaal verdeeld?
- Verklaar waarom je de verdeling van X goed kunt benaderen met een binomiale verdeling.
- Geef de kansverdeling van X .

Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

04

De tol is verdeeld in vijf even grote sectoren.

a Hoe groot is de kans dat de pijl op rood komt? En hoe groot is de kans dat de pijl niet op rood komt?

b Willem draait tien keer met de tol. Stochast R is het aantal keren dat de tol op rood komt.

Waarom is de kansverdeling van R een binomiale verdeling?

c Op het blaadje zie je hoe Willem de kans op vier keer rood berekent.

Welke betekenis heeft de uitkomst van $\binom{10}{4}$?

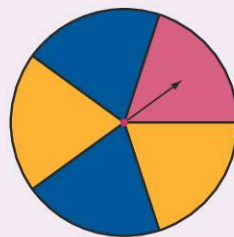
d Verklaar de factoren $0,2^4$ en $0,8^6$.

e Maak de berekening van Willem verder af. Rond je antwoord af op vier decimalen.

f Else draait 12 keer met de tol. Stochast B is het aantal keren dat ze blauw draait.

Leg uit dat de kansverdeling van B een binomiale verdeling is. Geef de bijbehorende waarden voor n en p .

g Bereken de kans dat Else zeven keer blauw draait.



Willem				
				De kans op vier keer rood is
				$\binom{10}{4} \times 0,2^4 \times 0,8^6 = \dots$

Uitdagende opdrachten



U1

De lotto is een kansspel. Van de nummers 1 tot en met 45 moet je er zes aankruisen en verder moet je kiezen uit een van de zes kleuren. Je wint een prijs als je twee of meer getallen goed hebt. De prijzen variëren van een gratis spel tot de Jackpot van 7,5 miljoen euro.

a Voor de Jackpot van 7,5 miljoen euro moet je alle zes de getallen en de kleur goed hebben.

Ga na of de kans op de Jackpot inderdaad 1 op 49 miljoen is.

b De kans op een prijs is 17,5%.

Johan heeft tien formulieren ingevuld.

Bereken de kans dat hij ten minste één keer een prijs heeft.

Jackpot: 1 op 49 miljoen



13.2 Werken met binomiale verdelingen

Je leert • hoe je een binomiale kans berekent

Leerroutes • ondersteunend: 8—09—9—10—11—12
• doorlopend: 8—9—10—11—12—13
• uitdagend: 8—10—12—13—U2—U3

Cathrien gooit acht keer met een geldstuk. Ze telt het aantal keren kop.

- Hoeveel keer zo groot is de kans op drie keer kop als de kans op één keer kop?



- 8 Uit verkeerstellingen op een weg door een dorp blijkt dat 75% van de automobilisten zich aan de maximumsnelheid houdt. Op een dag wordt de snelheid van 20 automobilisten gemeten. De stochast X is het aantal mensen dat zich aan de maximumsnelheid houdt.

- Leg uit dat X een binomiaal verdeelde stochast is en geef de parameters n en p .
- Bereken de kans dat geen enkele automobilist te hard rijdt.
- Bereken $P(X = 15)$.
- De kans dat er precies 16 mensen zijn die zich aan de maximumsnelheid houden, kun je noteren als

$$P(X = 16) = \binom{20}{16} \cdot 0,75^{16} \cdot 0,25^4$$

Leg de notatie uit en bereken de kans.



Theorie

Als stochast X binomiaal verdeeld is, noteer je dat als X is $\text{Bin}(n; p)$ -verdeeld. Hierin is n het aantal herhalingen en is p de kans op succes.

$P(X = k)$ is de kans op de gebeurtenis van k successen.

Deze gebeurtenis kan op $\binom{n}{k}$ verschillende volgorden plaatsvinden.

De kans op precies k successen en $n - k$ mislukkingen is

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}.$$

Voorbeeld 1

Je vult dertig vierkeuzevragen op de gok in.
Bereken de kans op tien goede antwoorden.

Oplossing

Stochast X is het aantal goede antwoorden.
 X is $\text{Bin}(30; 0,25)$ -verdeeld.

$$P(X = 10) = \binom{30}{10} \cdot 0,25^{10} \cdot 0,75^{20} \approx 0,0909$$

Voorbeeld 2

Thijs gooit acht keer met een dobbelsteen.
Bereken de kans dat hij drie keer een 6 gooit.

Oplossing

Stochast D is het aantal keer dat Thijs een 6 gooit.
 D is $\text{Bin}(8; \frac{1}{6})$ -verdeeld.

$$P(D = 3) = \binom{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0,1042$$

Ondersteunende route → maak opdracht 09

- 9** In de scheikundeles worden 15 experimenten gedaan. Een experiment kan slagen maar ook mislukken. Bij elk experiment is de succeskans 0,85. Stochast X is het aantal geslaagde experimenten.

- Bereken $P(X = 12)$.
- Bereken de kans dat alle experimenten slagen.

- 10** Je gooit vijf keer met een dobbelsteen. Stochast X is het aantal keren dat je een 2 gooit.

H

- Leg uit dat de kansverdeling van X binomiaal is.
- Geef de waarden van n en p die bij de kansverdeling van X horen.
- Hoe groot is $P(X = 4)$?
- Bereken $P(X = 2)$ en $P(X = 3)$.

Theorie

Op je rekenmachine zit een optie waarmee je de kansen bij een binomiale kansverdeling in één keer kunt berekenen. Daarbij is het van belang dat je de waarden in de juiste volgorde invoert op je rekenmachine.

Voorbeeld

Janna gooit acht keer met een dobbelsteen.
Bereken de kans dat ze drie keer een 6 gooit.

Oplossing

Optie: binomiaal
Invoer: $n = 8$, $p = \frac{1}{6}$ en $x = 3$
Dit geeft $P(X = 3) \approx 0,1042$.

→ Instructie rekenmachine | Binomiale kansen

- 11** Stochast X is $\text{Bin}(13; 0,65)$ -verdeeld.

H

- Bereken $P(X = 5)$ en $P(X = 13)$ met behulp van de formule $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$.
- Controleer je antwoorden van opdracht a door de parameters n en p en het aantal successen in te voeren in je rekenmachine.

- 12** Tess gooit vijf keer met een viervlaksdobbelsteen. Stochast X is het aantal keren dat 4 bovenkomt.

H

- Geef de parameters van de kansverdeling van X .
- Bereken de kans dat de 4 drie keer bovenkomt.
- Maak op je rekenmachine een tabel met de kansen van stochast X en vul de tabel in.

$x = u$	0	1	2	3	4	5
$P(X = u)$	...	...	...	...	...	...



- 13** De Oosterschelddam is een pijlerdam die bestaat uit een serie van 62 gigantische schuiven, die bij zware storm worden neergelaten. Als de schuiven zijn neergelaten, fungeert deze dam als stormvloedkering. Normaal staan de schuiven open zodat de getijdebeweging op de Oosterschelde blijft bestaan. Elk van de schuiven wordt, onafhankelijk van de andere schuiven, door een computer bestuurd. De stormvloedkering werkt alleen als alle 62 schuiven zijn neergelaten. Neem aan dat een schuif één op de honderd keer weigert en vat het neerlaten van de 62 schuiven op als een toevalsexperiment.

- Formuleer een binomiaal verdeelde stochast X en geef de parameters n en p .
- Bereken de kans dat geen enkele schuif weigert.
- De bouwers gaan ervan uit dat de schuif 1 op de 10 000 keer weigert.
Hoe groot is de kans dat geen van de 62 schuiven weigert?
- Hoe groot is de kans op twee weigerende schuiven als de bouwers gelijk hebben?
- Is het voor de berekening van de kansen van belang dat de schuiven onafhankelijk bestuurd worden? Verklaar je antwoord.

Uitdagende route → maak opdracht U2 en U3

Ondersteunende opdrachten

- 09** Van de 26 900 studenten in Leiden heeft 12% groene ogen. Stochast Y is het aantal studenten met groene ogen in een groep van 30 willekeurig aangewezen studenten.
- a** Waarom is Y binomiaal verdeeld?
- b** Sophie berekent de kans dat er zes studenten in de groep zitten met groene ogen.
Leg uit hoe Sophie aan de getallen 0,88 en 24 komt.

	Sophie
•	Y is $\text{Bin}(30; 0,12)$ -verdeeld.
•	$n = 30$
•	$p = 0,12$
•	$Y = 6$
•	$P(Y = 6) = \binom{30}{6} \cdot 0,12^6 \cdot 0,88^{24}$

- c** Maak de berekening van Sophie verder af.
- d** Joost wil weten hoe groot de kans op vijf studenten met groene ogen in een groep van 25 studenten is. Stochast X is het aantal studenten met groene ogen in deze groep.
Hoe groot zijn in dat geval n en p ?
- e** Hoe groot is de kans op vijf studenten met groene ogen in een groep van 25?

Uitdagende opdrachten

- U2** Stochast X is $\text{Bin}(10; 0,8)$ -verdeeld.
Bereken bij welke waarden van a geldt $P(X = a) \geq 0,2$.
- U3** Gegeven is een kansexperiment met drie mogelijke uitkomsten 1, 2 en 3 die optreden met respectievelijke kansen p_1, p_2 en p_3 . Stochast X_1 is het aantal keren met uitkomst 1 en stochast X_2 is het aantal keren met uitkomst 2.
Er worden n onafhankelijke uitvoeringen van het kansexperiment gedaan.
- a** Wat kun je concluderen over de som $p_1 + p_2 + p_3$?
- b** Toon aan dat
- $$P(X_1 = k \text{ en } X_2 = l) = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{l} \cdot p_1^k \cdot p_2^l \cdot p_3^{n-k-l}.$$

13.3 Cumulatieve kansen

Je leert

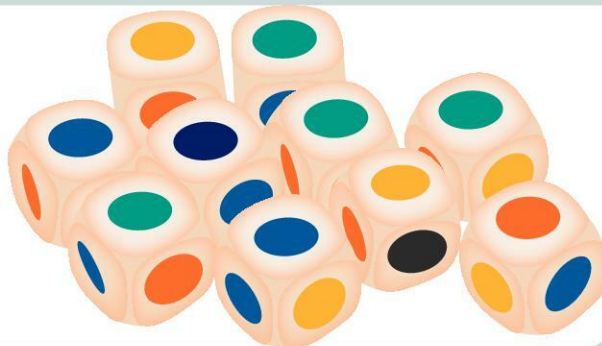
- hoe je een cumulatieve kans berekent bij een binomiale verdeling

Leerroutes

- ondersteunend: 14—15—16—017—18—019—19—20
- doorlopend: 14—15—16—17—18—19—20—21
- uitdagend: 14—15—16—17—18—19—21—U4

Chantal heeft tien dobbelstenen met op iedere dobbelsteen de kleuren groen, geel, blauw, paars, oranje en rood. Ze werpt met deze dobbelstenen.

- Wat is groter, de kans dat geel twee keer bovenkomt of de kans dat geel ten minste twee keer bovenkomt?



- 14 Lois neemt bij handballen vaak de strafworpen. De kans dat ze scoort is 0,9. Bij een training neemt ze acht strafworpen. Stochast X is het aantal strafworpen waarmee ze scoort.
- Bereken $P(X = 8)$ en $P(X = 7)$.
 - Hoe groot is de kans dat ze één of meer keer mist?
 - Hoe groot is de kans dat ze hoogstens zes keer scoort?

Theorie

Als X $\text{Bin}(n, p)$ -verdeeld is, dan is

$$P(X \leq k) = P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = k).$$

$P(X \leq k)$ noem je een **cumulatieve kans**.

Voorbeeld

Aaf gooit zes keer met een geldstuk. Bereken de kans dat ze hoogstens twee keer kop gooit.

Oplossing

Stochast K is het aantal keer dat Aaf kop gooit. K is $\text{Bin}(6; 0,5)$ -verdeeld.

De kans op hoogstens twee keer kop is $P(K \leq 2) = P(K = 0) + P(K = 1) + P(K = 2) \approx 0,3438$.

- 15
- Bereken bij het voorbeeld $P(K \leq 3)$.
 - Op je rekenmachine zit een optie om $P(K \leq 3)$ in één keer te berekenen. Zoek uit hoe dat op jouw rekenmachine moet en controleer je antwoord van opdracht a.

→ Instructie rekenmachine | Binomiale kansen

- 16** Jente maakt een meerkeuze toets. Bij elke vraag moet ze kiezen uit drie mogelijke antwoorden. Acht vragen weet ze niet en gokt ze het antwoord. Stochast X is het aantal vragen dat ze goed gokt.
- Leg uit dat $X \text{ Bin}(8, \frac{1}{3})$ -verdeeld is.
 - Bereken de kans dat ze hoogstens drie vragen goed gokt.
 - De groene punten op de getallenlijn horen bij de gebeurtenissen hoogstens drie vragen goed. Welke gebeurtenis hoort bij de rode punten op de getallenlijn?
 - Vul in: de kans bij de rode punten is $P(X \geq \dots)$
 - Hoe kun je met behulp van het antwoord van opdracht b de kans van opdracht d berekenen? Bereken deze kans.
 - Om een voldoende te halen moet Jente ten minste vijf van de acht vragen goed gokken. Bereken de kans dat Jente een voldoende haalt.



Met je rekenmachine kun je bij een binomiale verdeling cumulatieve kansen van de vorm $P(X \leq k)$ berekenen. Soms moet je de gevraagde cumulatieve kans eerst omwerken naar de vorm $P(X \leq k)$ voordat je de rekenmachine kunt gebruiken. Op de getallenlijn zie je dat $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5)$.



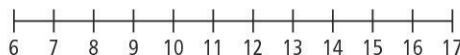
Ondersteunende route → maak opdracht 017

- 17** Stochast X is $\text{Bin}(14; 0,35)$ -verdeeld.

- Bereken $P(X \leq 6)$.
- En hoe groot is $P(X \geq 7)$?
- Bereken $P(X \geq 9)$.

- 18** Ga ervan uit dat er gemiddeld evenveel meisjes als jongens worden geboren. Gedurende een etmaal worden er in een ziekenhuis twintig kinderen geboren. Stochast Y is het aantal jongens.

- Geef de parameters n en p van de kansverdeling van Y .
- Bereken de kans dat er meer jongens dan meisjes geboren worden.
- Geef op de getallenlijn de gebeurtenissen aan dat er minder dan 15 jongens maar meer dan 8 jongens geboren worden.
- Vul in: de kans op minder dan 15 maar meer dan 8 jongens is $P(Y \leq \dots) - P(Y \leq \dots)$.
- Bereken de kans van opdracht d.



Aanpak**Hoe bereken je een cumulatieve kans bij een binomiale verdeling?**

- 1 Formuleer stochast X en stel de parameters n en p vast.
- 2 Schrijf de gevraagde kans zo nodig als verschil van cumulatieve binomiale kansen.
- 3 Voer op je rekenmachine de cumulatieve binomiale kans(en) in, met de parameters n en p en het aantal successen en bereken de gevraagde kans.

Voorbeeld

Tim gooit 15 keer met een dobbelsteen. Bereken de kans dat hij meer dan twee keer, maar minder dan zeven keer 6 gooit.

Oplossing

- 1 Stochast D is het aantal keer dat Tim 6 gooit. D is $\text{Bin}(15; \frac{1}{6})$ -verdeeld.

- 2



- 3 $P(D \leq 6) - P(D \leq 2) = 0,9934... - 0,5322... \approx 0,4612$

Ondersteunende route → maak opdracht 019

- 19** Stochast X is $\text{Bin}(30; 0,7)$ -verdeeld. Bereken de kansen.

- | | | |
|----------|--------------------|-------------------------|
| H | a $P(X < 12)$ | d $P(9 \leq X \leq 19)$ |
| | b $P(X \geq 23)$ | e $P(X > 21)$ |
| | c $P(17 < X < 25)$ | f $P(7 \leq X < 25)$ |

- 20** Vijftig personen nemen deel aan een cursus 'Stoppen met roken'. Gemiddeld is 30% van de deelnemers aan die cursus succesvol. Dit houdt in dat ze na de cursus minstens een jaar niet roken.

- a Hoe groot is de kans dat meer dan de helft van het aantal deelnemers succesvol is?
- b Bereken de kans dat meer dan 12 maar minder dan 18 deelnemers succesvol zijn.

- 21** Een bloembollenhandelaar biedt een partij van 2000 tulpenbollen aan. Van de aangeboden tulpenbollen is 18% rot. Aiden koopt 20 tulpenbollen. X is het aantal rotte tulpenbollen.

- a Leg uit waarom X niet binomiaal verdeeld is.
- b Waarom kun je de kansverdeling van X wel benaderen met een binomiale verdeling? Geef de bijbehorende parameters.
- c Hoe groot is de kans dat Aiden meer dan twee rotte tulpenbollen aantreft?
- d Bereken de kans dat het aantal rotte tulpenbollen tussen twee en zes ligt.
- e Bereken de kans dat de eerste 12 tulpenbollen die Aiden plant niet rot zijn en dat er in totaal minstens twee tulpenbollen rot zijn.

**Uitdagende route → maak opdracht U4**

Ondersteunende opdrachten

017 Stochast X is $\text{Bin}(12; 0,42)$ -verdeeld.

a De kans $P(X \leq 5)$ kun je met je rekenmachine berekenen. Welke waarden moet je voor n , p en X invoeren in je rekenmachine?

b Bereken $P(X \leq 5)$.

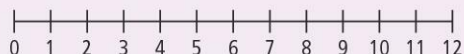
c Bereken $P(X \leq 6)$.

d Geef op de getallenlijn de gebeurtenissen $X \geq 4$ aan.

e Vul in: $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq \dots)$.

f Bereken $P(X \geq 4)$.

g Bereken $P(X \geq 9)$ en $P(X \geq 6)$.



019 Stochast A is $\text{Bin}(10; 0,3)$ -verdeeld.

a Geef op de getallenlijn aan welke gebeurtenissen horen bij $2 \leq A \leq 7$.

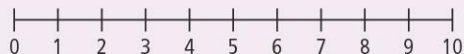
b Vul in: $P(2 \leq A \leq 7) = P(A \leq \dots) - P(A \leq \dots)$.

c Bereken $P(2 \leq A \leq 7)$.

d Geef op de getallenlijn de gebeurtenissen $3 \leq A < 7$ aan.

e Vul in: $P(3 \leq A < 7) = P(A \leq \dots) - P(A \leq \dots)$.

f Bereken $P(3 \leq A < 7)$.



Uitdagende opdrachten

U4 Jeroen koopt drie doosjes met schroeven. Volgens de verkoper zit in 90% van de doosjes 25 of meer schroeven.

a Jeroen merkt dat er in twee van de drie doosjes minder dan 25 schroeven zitten.

Stel dat de bewering van de verkoper klopt.

Hoe groot is de kans dat er in twee van de drie doosjes minder dan 25 schroeven zitten?

b De fabrikant van de schroeven wil niet dat er te veel geklaagd wordt. Hij wil dat de kans dat er van de 20 doosjes meer dan 2 doosjes zijn met te weinig schroeven, kleiner is dan 0,01.

Hoeveel procent van de doosjes mag te weinig schroeven bevatten? Geef je antwoord in één decimaal.

13.4 Verwachtingswaarde en standaardafwijking

Je leert

- hoe je de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van een binomiaal verdeelde stochast berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 22—23—024—25—26—27
- doorlopend: 22—23—24—25—26—27
- uitdagend: 22—23—24—25—27—U5

Als je in de binnenstad van Haarlem een half uur fout parkeert, is de kans op een parkeerbon 20%.

- Hoeveel parkeerbonnen kun je na vijf keer een half uur fout parkeren verwachten? En na 50 keer verkeerd parkeren?
- Wanneer zal het werkelijke aantal meer afwijken van het verwachte aantal, na vijf keer of na 50 keer fout parkeren?



22 Je trekt één kaart uit een volledig kaartspel. Stochast X is het aantal getrokken hartenkaarten.

- Leg uit dat X de waarden 0 en 1 kan aannemen en dat $E(X) = 0,25$.
- Je trekt nu zes keer met terugleggen een kaart uit een volledig spel kaarten. Stochast T is het aantal getrokken hartenkaarten. In de tabel zie je de kansverdeling van T .

u	0	1	2	3	4	5	6
$P(T = u)$	0,178	0,356	0,2966	0,1318	0,033	0,0044	0,0002

Bereken $E(T)$ met behulp van de tabel.

- De verwachtingswaarde van het totaal aantal hartenkaarten na zes keer trekken kun je ook berekenen met het antwoord van opdracht a en de somregel voor stochasten.
Bereken $E(T)$ met de somregel.

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

23 Je gooit drie keer met een geldstuk. Stochast M is het aantal keren dat je munt gooit.

- Geef de kansverdeling van M .
- Voer de kansverdelingstabel in op je rekenmachine en bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van M .
- Laat zien dat je dezelfde antwoorden krijgt met de formule voor de verwachtingswaarde: $E(M) = n \cdot p$ en de formule voor de standaardafwijking: $\sigma(M) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$.
- Je gooit vijf keer met een dobbelsteen en telt het aantal enen. Bepaal op de manier van opdracht b de verwachtingswaarde en de standaardafwijking en controleer ook hier of de regels van opdracht c kloppen.

Theorie

Als een stochast X binomiaal verdeeld is met parameters n en p dan is de **verwachtingswaarde** $E(X) = n \cdot p$ en is de **standaardafwijking** $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$.

Voorbeeld 1

Je gooit dertig keer met een geldstuk.
Stochast M is het aantal keer dat je munt gooit.
Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van M .

Oplossing

M is Bin $(30; 0,5)$ -verdeeld.

Het verwachte aantal keer munt is $30 \times 0,5 = 15$.

De standaardafwijking is $\sqrt{30 \times 0,5 \times (1 - 0,5)} \approx 2,74$.

Voorbeeld 2

Je vult achttien vierkeuzevragen op de gok in.
Stochast X is het aantal goed beantwoorde vragen.
Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.

Oplossing

X is Bin $(18; 0,25)$ -verdeeld.

$E(X) = 18 \times 0,25 = 4,5$

$\sigma(X) = \sqrt{18 \times 0,25 \times (1 - 0,25)} \approx 1,84$

Ondersteunende route → maak opdracht 024

24

H

Gemiddeld haalt 58% van de eerstejaarsstudenten aan een hbo-opleiding het eerste jaar binnen één jaar. In een groep aan deze hbo-opleiding zitten vijftig eerstejaarsstudenten.
Stochast X is het aantal studenten dat het eerste jaar binnen één jaar haalt.

- Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.
- In een andere groep zitten 70 eerstejaarsstudenten.
Bereken van deze groep de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het aantal geslaagden.

25

H

Van de reizigers die dagelijks vertrekken van het station in Utrecht maakt 6% gebruik van de fietsenstalling. Bij een onderzoek naar het gebruiksgemak worden 250 reizigers die vertrekken van het station ondervraagd.
Stochast X is het aantal van deze reizigers dat gebruikmaakt van de fietsenstalling.

- Hoeveel van deze reizigers zullen er naar verwachting gebruikmaken van de fietsenstalling? En hoe groot is de standaardafwijking?
- Bereken de kans dat X minder dan één keer de standaardafwijking afwijkt van het verwachte aantal.



- 26** Bij de productie van DAB+-radio's is de kans op een defecte radio 4%. Een groothandel bestelt 500 radio's. Er heeft geen controle op de radio's plaatsgevonden, dus ook defecte radio's verlaten de fabriek.

- Hoever defecte radio's verwacht je dat de er bij de groothandel terechtkomen?
- Bereken de standaardafwijking van het aantal defecte radio's in de bestelling van de groothandel.
- Bereken de kans dat het aantal defecte radio's in de bestelling meer is dan het verwachte aantal plus één keer de standaardafwijking.



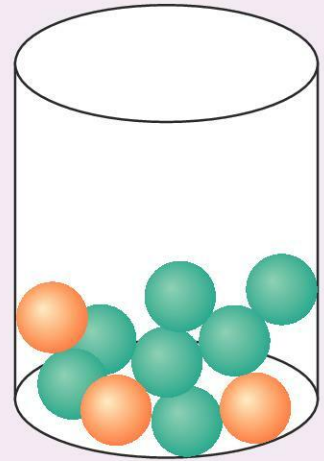
- 27** De minister beweert dat slechts 15% van de wiskundedocenten tegen het verplicht stellen van het vak wiskunde is. De vakbond denkt dat dit percentage veel hoger is. In een bliksemonderzoek wordt een aselechte steekproef van vijftig wiskundedocenten genomen.

- Waarom mag je hier gebruikmaken van een binomiale verdeling?
- Neem aan dat de minister gelijk heeft. Hoeveel tegenstanders van verplichting verwacht je dan? En hoe groot is de standaardafwijking?
- De vakbond besluit een grootschalig onderzoek in te stellen als de steekproef van vijftig docenten te veel tegenstanders bevat.
Bereken de kans op minstens acht tegenstanders in de steekproef in het geval de minister gelijk heeft.
- Zou jij bij acht tegenstanders in de steekproef de minister gelijk geven? Licht je antwoord toe.
- De vakbond wil een grootschalig onderzoek starten als het aantal tegenstanders in de steekproef duidelijk groter is dan door de minister verwacht wordt.
Stochast X is het aantal tegenstanders in de steekproef. Het aantal tegenstanders a in de steekproef moet zo groot zijn dat de kans dat er minstens a tegenstanders in de steekproef voorkomen kleiner is dan 10%. Hierbij wordt er van uit gegaan dat de minister gelijk heeft.
Onderzoek bij welke aantallen tegenstanders de vakbond een grootschalig onderzoek start.

Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

- 024** In een vaas zitten zeven groene en drie oranje knikkers. Je trekt n keer met terugleggen een knikker uit de vaas. Stochast X is het aantal oranje knikkers.
- a** Leg uit dat X binomiaal verdeeld is.
 - b** Hoe groot is de kans p dat je een oranje knikker trekt?
 - c** Nienke trekt tien keer met terugleggen een knikker. Welke waarden hebben de parameters n en p bij het kansexperiment van Nienke?
 - d** Met welke formule kun je het verwachte aantal oranje knikkers berekenen met behulp van de parameters n en p ?
 - e** Bereken deze verwachtingswaarde.
 - f** Met welke formule kun je de standaardafwijking van het aantal verwachte oranje knikkers berekenen?
 - g** Bereken deze standaardafwijking.
 - h** Joost trekt zes keer met terugleggen een knikker uit de vaas. Stochast G is het aantal groene knikkers dat hij trekt. Bereken $E(G)$ en $\sigma(G)$.



Uitdagende opdrachten

- U5** In een suikerfabriek worden machinaal kilopakken suiker gevuld. Het minimaal toegestane gewicht van een pak suiker is 980 gram. Lichtere pakken worden machinaal verwijderd. Door een wat onzuivere afstelling van de sorteermachine wordt af en toe een te licht pak doorgelaten. Hierdoor heeft 0,5% van de pakken een lager gewicht dan toegestaan is. De pakken suiker worden verpakt in dozen van vijftig stuks. Als een keuringsdienst in een doos een te licht pak aantreft, wordt de gehele doos afgekeurd. Op een dag worden van twintig dozen alle pakken suiker gecontroleerd. Van hoeveel dozen kun je verwachten dat ze worden afgekeurd?



- 28** Bij een loterij worden wekelijks honderd loten verkocht. De loten kosten twee euro per stuk. Er is een eerste prijs van vijftig euro en er zijn twee tweede prijzen van vijftien euro te winnen. Per lot kun je maar één prijs winnen.

- a Janneke koopt vijf weken lang elke week een lot. Bereken de kans dat ze twee keer een prijs wint.
- b Hoe groot is de kans dat Janneke na vijf weken winst heeft gemaakt?

- 29** Rechtshandige softbalspelers dragen een linkerhandschoen. Zo kunnen ze met hun linkerhand een bal vangen en met hun rechterhand gooien. Bij linkshandige spelers is dit andersom. Ongeveer 10% van de Nederlandse bevolking is linkshandig en heeft dus een rechterhandschoen nodig bij softbal. Een docent lichamelijke opvoeding heeft twee rechterhandschoenen en achttien linkerhandschoenen.

- a Een brugklas van twintig leerlingen krijgt softballen. Elke leerling heeft dan een handschoen nodig. Hoe groot is de kans dat de docent te weinig rechterhandschoenen heeft?
- b Bereken de kans dat minstens één leerling uit een klas van twintig leerlingen met een verkeerde handschoen moet softballen.
- c Neem aan dat de klassen op de school van deze docent bestaan uit twintig leerlingen. De docent geeft op een dag aan acht klassen les. Hoe vaak kan hij een tekort aan een bepaalde soort handschoen verwachten?



- 30**
- a Ard beweert dat 75% van de Nederlanders kan fietsen. Stel dat Ard gelijk heeft. Hoeveel personen kunnen naar verwachting fietsen bij een aselechte steekproef van twintig personen? En hoe groot is de standaardafwijking?
 - b Gert beweert dat slechts 40% van de Nederlanders kan fietsen. Stel dat Gert gelijk heeft. Bereken de kans dat er minstens acht en hoogstens veertien personen uit een aselechte steekproef van twintig kunnen fietsen.
 - c Ard en Gert willen door een aselechte steekproef van twintig personen uitmaken wie gelijk heeft. De afspraak is dat bij minder dan 12 fietsers Gert gelijk krijgt, anders krijgt Ard gelijk. Stel dat Ard gelijk heeft. Hoe groot is de kans dat Gert gelijk krijgt?
 - d Bereken de kans dat Ard ten onrechte gelijk krijgt.

- 31** Een supermarkt heeft een weggeefactie. Voor elke twintig euro die je besteedt, ontvang je een enveloppe. De helft van alle enveloppen bevat een waardebon. Bij inlevering van vijf waardebonnen, ontvang je een cadeaubon van € 10,-. De vraag is hoeveel je moet besteden, zodat de kans op minstens vijf waardebonnen groter dan 0,95 wordt. Kies als stochast X het aantal bonnen en neem $p = 0,5$. Onderzoek hoeveel enveloppen je minstens moet hebben en welk bedrag je dus minstens moet besteden.
- 32** Het bestuur van de stichting van vrienden van een Nederlands beroepsorkest organiseert jaarlijks een concert voor de vrienden. In de concertzaal is plaats voor 900 bezoekers. Het bestuur zit met een dilemma: hoeveel vrienden kunnen ze uitnodigen, in de wetenschap dat niet iedereen op een uitnodiging zal ingaan? Enerzijds is het inefficiënt als er veel stoelen leeg blijven, anderzijds is het vervelend als er meer vrienden komen dan er stoelen zijn. Het is bekend dat de respons op een uitnodiging 60% is. Het bestuur besluit om precies zoveel mensen uit te nodigen dat de kans dat er meer mensen komen dan er plaatsen zijn, kleiner is dan één procent.
- Bereken het maximaal aantal mensen dat het bestuur kan uitnodigen voor het concert.
 - Hoeveel stoelen zullen er naar verwachting leeg blijven bij dat aantal uitnodigingen?



Theorie

Binomiale verdeling en parameters

Een kansexperiment met maar twee mogelijke uitkomsten heet een Bernoulli-experiment. Veel kansexperimenten kun je opvatten als het herhaald uitvoeren van hetzelfde Bernoulli-experiment.

De kans op een succes blijft bij iedere trekking gelijk.

Stochast X telt het aantal successen. Bij n experimenten kan X de waarden $0, 1, 2, \dots, n$ aannemen.

De kansverdeling van stochast X heet een binomiale verdeling.

De kansverdeling van een binomiaal verdeelde stochast X is vastgelegd door het aantal herhalingen van het experiment n en de kans p op succes van het experiment. Hierbij heten n en p de parameters van de binomiale verdeling.

Voorbeeld

Ga bij de volgende kansexperimenten na of er een binomiale verdeling bij kan horen.

A: In één keer vijf zuurtjes pakken uit een trommel met tien gele en tien rode zuurtjes waarbij je let op het aantal gele zuurtjes.

B: Het gokken van vijf driekeuzevragen bij een toets Duits waarbij je let op het aantal goede antwoorden.

Oplossing

A: Hierbij hoort geen binomiale verdeling. De kans op een geel zuurtje blijft niet gelijk.

B: Het antwoord is goed of fout. De kans op een goed antwoord blijft bij de vijf vragen hetzelfde. Hierbij hoort dus een binomiale verdeling.

X is het aantal goed beantwoorde vragen, $n = 5$ en $p = \frac{1}{3}$.

S1 Geef bij deze kansexperimenten aan of er een binomiale verdeling bij kan horen. Geef in die gevallen de waarden van de parameters n en p .

- Twaalf keer werpen met een dobbelsteen waarbij je let op het aantal uitkomsten groter dan vier.
- Het in één keer trekken van vier kaarten uit een volledig kaartspel waarbij je let op het aantal schoppen.
- Het trekken met terugleggen van 20 knikkers uit een vaas met 60 witte knikkers en 40 zwarte knikkers, waarbij je let op het aantal witte knikkers.
- Het trekken zonder terugleggen van 20 knikkers uit een vaas met 3000 witte knikkers en 2000 zwarte knikkers, waarbij je let op het aantal witte knikkers.



Vaardigheid

Je kunt een binomiale kans berekenen.

Als stochast X binomiaal verdeeld is, noteer je dat als X is $\text{Bin}(n; p)$ -verdeeld. Hierin is n is het aantal herhalingen en is p de kans op succes.

$P(X = k)$ is de kans op de gebeurtenis van k successen.

Deze gebeurtenis kan op $\binom{n}{k}$ verschillende volgorden plaatsvinden.

De kans op precies k successen en $n - k$ mislukkingen is

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Deze kans kun je ook met je rekenmachine berekenen.

Voorbeeld

Barend heeft bij boogschieten een kans van 0,6 om raak te schieten.

Hoe groot is de kans dat hij bij tien keer schieten acht keer raak schiet?

Oplossing

Stochast X is het aantal keren raak.

X is $\text{Bin}(10; 0,6)$ -verdeeld.

$$P(X = 8) = \binom{10}{8} \cdot 0,6^8 \cdot 0,4^2 \approx 0,1209$$

of met de rekenmachine:

Optie: binomiaal

Invoer: $n = 10$, $p = 0,6$ en $x = 8$

Dit geeft $P(X = 8) \approx 0,1209$.

S2 Bij het trainen op strafschoppen heeft Hakim een kans van 0,85 om te scoren.

- Bereken de kans dat hij van de 20 keer precies 16 keer scoort.
- Bereken de kans dat Hakim van de tien keer precies zeven keer scoort.

Vaardigheid

Je kunt een cumulatieve kans berekenen bij een binomiale verdeling.

- 1 Formuleer stochast X en stel de parameters n en p vast.
- 2 Schrijf de gevraagde kans zo nodig als verschil van cumulatieve binomiale kansen.
- 3 Voer op je rekenmachine de cumulatieve binomiale kans(en) in, met de parameters n en p en het aantal successen en bereken de gevraagde kans.

Voorbeeld 1

Gerrit heeft 15% kans om bij bowlen een strike te gooien.
Bereken de kans dat hij hoogstens twee van de vijf keer een strike gooit.

Oplossing

- 1 Stochast X is het aantal keren strike.
 X is $\text{Bin}(5; 0,15)$ -verdeeld.
- 2 $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$
- 3 Met de rekenmachine:
Optie: binomiaal cumulatief
Invoer: $n = 5$, $p = 0,15$ en $X = 2$
Dit geeft $P(X \leq 2) \approx 0,9734$.

Voorbeeld 2

Margje heeft 35% kans om bij bowlen een strike te gooien.
Bereken de kans dat zij van de acht keer meer dan twee maar minder dan zes keer een strike gooit.

Oplossing

- 1 Stochast X is het aantal keren strike.
 X is $\text{Bin}(8; 0,35)$ -verdeeld.
- 2 
- 3 $P(2 < X < 6) = P(X \leq 5) - P(X \leq 2)$
 $P(X \leq 5) - P(X \leq 2) =$
 $0,9746... - 0,4278... \approx 0,5469$

- S3** Stochast A is $\text{Bin}(12; 0,42)$ -verdeeld.
Bereken de volgende kansen.

- | | |
|------------------------|----------------------------|
| a $P(A \leq 4)$ | c $P(3 < A \leq 8)$ |
| b $P(A \geq 6)$ | d $P(A > 10)$ |

- S4** De kans dat een willekeurige deelnemer slaagt bij het praktijkexamen voor het brommerrijbewijs is 85%. Op een dag zijn er 30 deelnemers.

- a** Bereken de kans dat er meer dan 25 deelnemers slagen voor het praktijkexamen.
- b** Bereken de kans dat meer dan 20 maar minder dan 25 deelnemers slagen voor het praktijkexamen.

Vaardigheid

Je kunt de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van een binomiaal verdeelde stochast berekenen.

Als een stochast X binomiaal verdeeld is met parameters n en p dan is de verwachtingswaarde $E(X) = n \cdot p$ en is de standaardafwijking $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$.

Voorbeeld

Van een grote partij krokusbolletjes is bekend dat 30% van de bolletjes een gele bloem geeft en 70% een blauwe bloem. Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het aantal bolletjes met gele bloemen als je 40 van deze bolletjes plant.

Oplossing

Stochast X is het aantal van de 40 bolletjes met gele bloemen.

$$n = 40 \text{ en } p = 0,3$$

$$E(X) = 40 \times 0,3 = 12$$

$$\sigma(X) = \sqrt{40 \times 0,3 \times 0,7} \approx 2,90$$

- S5** Van een partij smarties is gegeven dat 15% rood is.
- Henry koopt een doosje met 36 smarties.
Hoeveel smarties zullen naar verwachting rood zijn en hoe groot is de standaardafwijking?
 - Iris koopt een verpakking met 400 smarties.
Hoeveel smarties zullen er naar verwachting rood zijn en hoe groot is de standaardafwijking in dit geval?



- T1** Bij de productie van monitoren is de kans 8% dat er defecte pixels zijn. Er worden 15 monitoren gecontroleerd. Stochast X is het aantal monitoren met defecte pixels.
- a** Bereken de kans dat er drie monitoren zijn met defecte pixels.
 - b** Hoe groot is de kans dat er meer dan twee monitoren zijn met defecte pixels?
 - c** Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.
 - d** Het aantal defecte monitoren is a . Bij welke waarden van a is $P(X \geq a) \leq 0,01$?
- T2** Stochast Y is $\text{Bin}\left(25, \frac{1}{3}\right)$ -verdeeld. Bereken de kansen.
- a** $P(Y \leq 8)$
 - b** $P(Y < 5)$
 - c** $P(Y \geq 15)$
 - d** $P(5 < Y \leq 14)$
 - e** $P(Y > 10)$
 - f** $P(7 \leq Y < 9)$
- T3** Tim gooit vijf keer met een geldstuk en noteert het aantal keren kop. Het is een bijzonder geldstuk, want er geldt $P(\text{munt}) = 0,45$. De stochast K is het aantal keren kop.
- a** Waarom hoort bij K een binomiale kansverdeling?
 - b** Geef de kansverdeling van K .
 - c** Bereken $P(K \leq 2)$.
 - d** Bereken de kans dat Tim meer dan drie keer munt gooit.
- T4** Tom en Harry spelen een spel. Volgens de spelregels moeten ze 25 keer achter elkaar met een dobbelsteen gooien. Bij elke worp met een even aantal ogen krijgt Tom een punt, bij een oneven aantal ogen krijgt Harry een punt. Wie na afloop de meeste punten heeft, wint de pot. In de pot zit 30 euro.
- a** Bereken de kans dat, na 12 keer gooien, Tom acht punten heeft en Harry vier.
 - b** Nadat ze 12 keer gegooid hebben, besluiten ze om te stoppen en de pot te verdelen. Op dat moment heeft Tom acht punten en Harry vier. Tom stelt voor de pot te verdelen in de verhouding van het aantal punten dat ieder heeft behaald.
Hoeveel euro krijgt elk dan?
 - c** Hoeveel euro zou ieder krijgen als ze de pot verdelen in de verhouding van de kans die elk heeft om te winnen?

- T5** Een lerares biologie geeft een multiplechoiceproefwerk met twintig vierkeuzevragen. Ze besluit dat er voor elke fout een halve punt van 10 afgaat.
Stochast X is het aantal goed beantwoorde vragen.
- Bereken de kans dat een leerling die alle vragen gokt precies een zes haalt.
 - Bereken de kans dat iemand die alle vragen gokt, minstens een zes haalt.
 - De toets wordt door 124 leerlingen gemaakt. Alle leerlingen gokken bij elke vraag het antwoord.
Hoe groot is de verwachtingswaarde van het aantal leerlingen dat een zes of meer scoort?
 - Bereken $E(X)$ voor iemand die alle vragen gokt.
 - Hoe groot is de kans voor iemand die alle vragen gokt, dat het aantal goed beantwoorde vragen niet meer dan één keer de standaardafwijking afwijkt van de verwachtingswaarde?
 - Welk cijfer mag je verwachten als je vier vragen zeker weet en de rest gokt?
 - Judith heeft haar proefwerk niet geleerd, maar weet nog zoveel, dat ze bij elke vraag slechts tussen twee mogelijkheden hoeft te gokken.
Hoe groot is de kans dat Judith minstens een zes haalt?



- T6** Een leliëweker biedt bollen van leliesoort *Lilium Rubrum* aan. De bollen worden verpakt in dozen van 50 en van 100 stuks. Volgens de leliëweker heeft elke bol een kans van 0,90 om te gaan bloeien. Ga ervan uit dat de bloeikans inderdaad 0,90 is.
- Bereken de kans dat van een doos van 50 bollen precies 45 bollen gaan bloeien.
 - Een bedrijf koopt een doos met 50 en een doos met 100 bollen.
Bij welke van de twee dozen is de kans dat minstens 90% van de bollen gaat bloeien het grootst?
 - Een ander bedrijf koopt vijf dozen met 50 bollen.
Bereken de kans dat er van vier van de vijf dozen minstens 45 bollen tot bloei komen.
- T7** Een sportarts beweert dat 12% van de gewichtsheffers die deelnemen aan een internationale wedstrijd gebruikmaakt van verboden stimulerende middelen. Na afloop van elke wedstrijd worden tien, door loting aangewezen, gewichtsheffers gecontroleerd.
- Hoe groot is de kans dat geen van deze tien gewichtsheffers stimulerende middelen heeft gebruikt als deze sportarts gelijk heeft?
 - Er worden vijf internationale wedstrijden gehouden.
Hoe groot is de kans dat bij geen van deze wedstrijden een gewichtsheffer op het gebruik van stimulerende middelen wordt betrapt?

Je kunt een binomiale kans berekenen.

- E1** De kans dat een basketballer een vrije worp mist, is elke keer 25%. Deze speler mag tijdens een wedstrijd tien vrije worpen nemen. Stochast X is het aantal keer dat de speler een vrije worp mist.
- a Geef de parameters die bij de kansverdeling van X horen.
 - b Bereken de kans dat de speler drie keer mist.
 - c Bereken de kans dat hij acht keer scoort.
- E2** Bij een tuinwinkel waar de producten uitsluitend verkocht worden via het internet, betaalt 58% van de klanten met iDEAL.
- a Op een dag worden er acht bestellingen gedaan. Bereken de kans dat vijf klanten met iDEAL betalen.
 - b Hoe groot is de kans dat van de acht klanten precies de helft met iDEAL betaalt?

Je kunt een cumulatieve kans berekenen bij een binomiale verdeling.

- E3** De stochast X is $\text{Bin}(13; 0,6)$ -verdeeld. Bereken de kansen.
- a $P(X > 4)$
 - b $P(X \geq 6)$
 - c $P(4 < X < 8)$
 - d $P(2 \leq X < 7)$
 - e $P(X < 10)$
 - f $P(X > 0)$
- E4** Je gooit met 15 dobbelstenen en je let op het aantal zessen dat je gooit.
- a Bereken de kans op geen enkele zes.
 - b Bereken de kans op hoogstens drie zessen.
 - c Bereken de kans op meer dan drie zessen.
 - d Bereken de kans op meer dan twee maar minder dan zeven zessen.

Je kunt de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van een binomiaal verdeelde stochast berekenen.

- E5** Volgens de politie heeft 85% van de fietsers verlichting op de fiets. Op een winterochtend wordt de verlichting van de fietsen van 20 personen gecontroleerd. Stochast X is het aantal personen dat bij deze controle geen licht heeft op de fiets.
- a Geef de parameters die bij de kansverdeling van X horen.
 - b Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.

E6 Tijdens de uitverkoop heeft een winkelier rode en zwarte paraplu's in de aanbieding. Uit ervaring weet de winkelier dat gemiddeld 45% van de kopers een rode paraplu neemt, de rest kiest een zwarte.

Op een regenachtige dag worden er 100 kopers van een paraplu verwacht.

- a Hoeveel rode paraplu's zullen er naar verwachting op deze dag worden verkocht?
- b Hoe groot is de kans dat er precies 45 klanten een rode paraplu willen?
- c Bereken de kans dat er meer zwarte dan rode paraplu's worden verkocht.
- d Bereken de kans dat er meer rode dan zwarte paraplu's worden verkocht.



E7 In een vaas liggen 10 witte en 15 rode knikkers. Je haalt in één keer vijf knikkers uit de vaas.

Stochast Y is het aantal getrokken rode knikkers.

- a Leg uit waarom de stochast Y niet binomiaal verdeeld is.
- b Bereken $P(Y = 5)$.

In een andere vaas liggen 500 witte en 750 rode knikkers. Je haalt weer in één keer vijf knikkers uit de vaas.

Stochast X is het aantal getrokken rode knikkers.

- c Waarom kun je de kansverdeling van X benaderen met een binomiale verdeling?
- d Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.
- e Bereken de kans dat je meer dan twee, maar hoogstens vier witte knikkers trekt.

E8 Neem aan dat 19% van de vrouwen in Nederland rookt. Aan 40 willekeurige vrouwen wordt gevraagd of ze roken.

- a Formuleer een stochast X en geef de bijbehorende parameters.
- b Bereken de kans dat er minder dan acht vrouwen uit deze groep roken.
- c Bereken de kans dat er meer dan vijf vrouwen uit deze groep roken.
- d Hoe groot is de kans dat het percentage rokende vrouwen in deze groep ligt tussen de 15% en 25%?





In dit hoofdstuk

Je hebt al veel geleerd over lineaire en exponentiële formules. Deze kennis ga je in dit hoofdstuk gebruiken bij het rekenen aan rijen.

Bij een rij getallen kun je soms de volgende waarde berekenen met de voorgaande waarden. Dit heet recursie. De bijbehorende formule heet een recursieve formule. Er zijn rijen waarbij de volgende term wordt berekend door steeds met een vast getal te vermenigvuldigen of steeds een vast getal bij op te tellen. Bij deze rijen leer je hoe je met een formule de som van een aantal termen kunt berekenen.

Na dit hoofdstuk weet je alles wat je over rijen en recursie moet weten voor het centraal examen.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk:

- Modelleren en algebraïseren
- Formules manipuleren
- Probleem oplossen en analytisch denken

opdracht 8
opdracht 35
opdracht 46

- V1 a** Hoe zie je aan de tabel dat deze bij een lineair verband hoort?

x	2	3	4	5	6	7	8
y	19	23	27	31	35	39	43

- b** Waarom heb je de bijbehorende lineaire formule niet nodig om de waarde van y bij $x = 10$ te berekenen?
c Welke waarde heeft y bij $x = 10$?
d Waarom is het wel handig om de lineaire formule te hebben als je de waarde van y wilt berekenen bij $x = 82,7$?
e Stel een lineaire formule op bij de tabel.
f Bereken de waarde van y bij $x = 20$ en bij $x = 82,7$.

Theorie

Een verband tussen x en y is een **lineair verband** als het volgende geldt: als de waarde van x met een vast getal toeneemt, dan neemt de waarde van y ook met een vast getal toe. De toename van y kan positief of negatief zijn. Bij een lineair verband tussen de variabelen x en y hoort de formule $y = ax + b$. Hierin is a de **richtingscoëfficiënt** en is b het **startgetal**. Het startgetal is de waarde van y bij $x = 0$.

Voorbeeld

Gegeven is de tabel.

x	2	6	10	14	18
y	15	13	11	9	7

Stel een formule op bij de tabel en bereken de waarde van y bij $x = 36$.

Oplossing

Als in de tabel x met 4 toeneemt, neemt y met 2 af. Dus als x met 1 toeneemt, neemt y met $\frac{1}{2}$ af.

De richtingscoëfficiënt is dus $-\frac{1}{2}$.

Bij $x = 0$ is $y = 15 - 2 \times -\frac{1}{2} = 16$.

Een formule bij de tabel is $y = -\frac{1}{2}x + 16$.

Bij $x = 36$ is $y = -\frac{1}{2} \times 36 + 16 = -2$.

- V2** Stel bij elke tabel een formule op en bereken bij elke tabel de waarde van p bij $t = 20$.

A

t	7	8	9	10	11
p	9	11	13	15	17

B

t	2	4	6	8	10
p	120	115	110	105	100

C

t	3	4	5	6	7
p	4,8	5,1	5,4	5,7	6,0

- V3**
- Ga na dat de tabel bij een exponentieel verband hoort.
 - Waarom heb je de formule niet nodig om de waarde van y bij $x = 8$ te berekenen?
 - Welke waarde heeft y bij $x = 8$?
 - Waarom is het wel handig om de formule te hebben als je de waarde van y wilt berekenen bij $x = 25$?
 - Stel een exponentiële formule op bij de tabel.

x	3	4	5	6	7
y	64	80	100	125	156,25

Theorie

Een verband tussen x en y is een **exponentieel verband** als geldt: als de waarde van x met een vast getal toeneemt, dan wordt de waarde van y steeds met hetzelfde getal vermenigvuldigd.

Bij een exponentieel verband tussen de variabelen x en y hoort de formule $y = b \cdot g^x$. Hierin is g de **groefactor** en b de **beginhoeveelheid**. De beginhoeveelheid is de waarde van y bij $x = 0$.

Voorbeeld

Gegeven is de tabel.

x	3	4	5	6	7
y	27,65	33,18	39,81	47,78	57,33

Stel een formule op bij de tabel en bereken de waarde van y bij $x = 35$.

Oplossing

$$33,18 : 27,65 = 1,2; 39,81 : 33,18 \approx 1,2;$$

$$47,78 : 39,81 \approx 1,2; 57,33 : 47,78 \approx 1,2$$

Als in de tabel x met 1 toeneemt, wordt y steeds met 1,2 vermenigvuldigd. De groefactor is dus 1,2.

$$\text{Bij } x = 0 \text{ is } y = 27,65 : 1,2^3 \approx 16.$$

$$\text{Een formule bij de tabel is } y = 16 \cdot 1,2^x.$$

$$\text{Bij } x = 35 \text{ is } y = 16 \cdot 1,2^{35} \approx 9450,69.$$

- V4** De drie tabellen horen elk bij een exponentieel verband. Stel bij elke tabel een formule op en bereken bij elke tabel de waarde van p bij $t = 15$.

A

t	0	1	2	3	4
p	10	11	12,1	13,31	14,641

B

t	7	8	9	10	11
p	48	96	192	384	768

C

t	6	7	8	9	10
p	1024	256	64	16	4

- V5**
- Ga bij elk van de drie tabellen na of er sprake kan zijn van een lineair verband, een exponentieel verband of geen van beide.
 - Geef bij elke tabel de waarde van y bij $x = 12$.

A

x	2	3	4	5	6
y	90	81	72,9	65,61	59,05

B

x	3	4	5	6	7	8	9	10
y	3	1	0	0	1	3	6	10

C

x	5	6	7	8	9
y	-1,5	1	3,5	6	8,5

14.1 Recursieve formules

Je leert

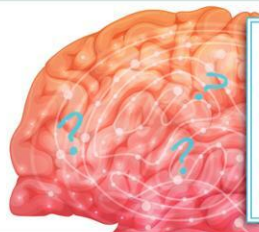
- wat een rij, een term en een recursieve formule is
- hoe je een recursieve formule bij een rij opstelt

Leerroutes

- ondersteunend: 1—2—3—04—5—6—07—8
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7—8
- uitdagend: 1—2—3—4—5—7—8—U1

Bij een IQ-test is het de bedoeling om het volgende getal in een rij getallen op te schrijven.

- Geef van elke rij het volgende getal.



A:	4,	7,	10,	13,	16,	...
B:	48,	24,	12,	6,	3,	...
C:	9,	18,	15,	30,	27,	...
D:	1,	4,	9,	16,	25,	...
E:	3,	7,	15,	31,	63,	...

- 1 Gegeven zijn twee rijen getallen.
- Welke regelmaat zie je in rij A?
 - Schrijf de volgende drie getallen van rij A op.
 - Ga na dat je in rij B het volgende getal kunt berekenen door het voorafgaande getal in de rij met 3 te vermenigvuldigen en van het resultaat 7 af te trekken.
 - Bereken van rij B de volgende drie getallen.
 - Vul in: bij rij B hoort de woordformule
 $\text{nieuwe waarde} = \dots \cdot \text{oude waarde} - \dots$

A:	3,	4,	6,	9,	13,	...	...	...
B:	4,	5,	8,	17,	...	...	...	...

Theorie

Een opeenvolging van getallen heet een **rij** en de getallen in de rij heten de **termen**. Als er in een rij een regelmaat zit, kun je deze regelmaat vaak met een formule beschrijven. In zo'n formule noem je de volgende term de nieuwe waarde en de voorafgaande term de oude waarde.

Voorbeeld

Gegeven is de rij 2, 9, 37, 149, 597.
De termen zijn 2, 9, 37, 149 en 597.
Bij de rij hoort de formule
 $\text{nieuwe waarde} = 4 \cdot \text{oude waarde} + 1$.

- 2 Je ziet drie rijen op het blaadje.
- Een formule die past bij rij A is
 $\text{nieuwe waarde} = 2 \cdot \text{oude waarde} + 1$.
Met deze formule kun je stap voor stap de volgende term berekenen.
Vul in: De vijfde term is $2 \times 23 + 1 = \dots$ en de zesde term is $2 \times \dots + 1 = \dots$
 - Geef bij rij B een formule en bereken daarmee de vijfde en de zesde term van de rij.
 - Geef ook een formule bij rij C en bereken daarmee de vijfde en zesde term van de rij.

A:	2,	5,	11,	23,	...	...
B:	800,	400,	200,	100,	...	...
C:	3,	7,	19,	55,	...	...

- 3 De rij getallen 46, 54, 66, 84, ... is gegeven.
- Laat zien dat bij deze rij de formule $\text{nieuwe waarde} = 1,5 \cdot (\text{oude waarde} - 10)$ hoort.
 - Bereken de volgende twee termen van de rij.
 - Laat zien dat de rij 74, 96, 129, 178,5 ook bij de formule van opdracht a hoort.
 - Maak zelf een rij getallen bij de formule met als eerste term 34.

Theorie

Bij veel getallenrijen kun je de volgende term berekenen uit de voorafgaande term(en) met een formule. Dit heet **recursie** en de bijbehorende formule heet een **recursieve formule**.

De termen van een rij noteer je met de indexnotatie zoals u_0 , u_1 en u_n , of met de functienotatie $u(0)$, $u(1)$ en $u(n)$.

De getallen 0, 1, 2, 3, ..., $n-1$, n , $n+1$ zijn de **rangnummers** van de rij.

De eerste term van een rij heet de **beginterm**, dit kan $u(0)$ of $u(1)$ zijn. Om een rij vast te leggen, heb je één term nodig.

Meestal kies je daarvoor de beginterm.

Voorbeeld 1

De rij 3, -6, 12, -24, 48, ... heeft beginterm $u(0)$. Bereken de volgende twee termen van deze rij en geef een recursieve formule voor deze rij u .

Oplossing

n	0	1	2	3	4	5	6
$u(n)$	3	-6	12	-24	48	...	...

Je ziet dat je de volgende term kunt berekenen door de voorafgaande term met -2 te vermenigvuldigen.

$$u(5) = -2 \cdot 48 = -96 \text{ en } u(6) = -2 \cdot -96 = 192$$

Een recursieve formule in woorden is

$$\text{nieuwe waarde} = -2 \cdot \text{oude waarde}, \text{ met } u(0) = 3.$$

Voorbeeld 2

De rij 24, 21, 18, 15, 12, ... heeft beginterm v_1 . Bereken de volgende twee termen van deze rij en geef een recursieve formule voor de rij v .

Oplossing

n	1	2	3	4	5	6	7
v_n	24	21	18	15	12	...	...

Je ziet dat je de volgende term kunt berekenen door 3 af te trekken van de voorafgaande term.

$$v_6 = 12 - 3 = 9 \text{ en } v_7 = 9 - 3 = 6$$

Een recursieve formule in woorden is

$$\text{nieuwe waarde} = \text{oude waarde} - 3, \text{ met } v_1 = 24.$$

Ondersteunende route → maak opdracht 04

- 4 Gegeven is de rij 3, 7, 11, 15, 19, ...

H

- Vul de tabel verder in.
- Geef een recursieve formule bij deze rij.
- Geef ook een recursieformule bij de rij 5, 20, 80, 320 met de beginterm $w_1 = 5$.

n	0	1	2	3	4	5	6
$u(n)$	3	7	11	...	...	...	...

- 5** Bij een rij hoort de recursieve formule
nieuwe waarde = $2 \cdot \text{oude waarde} + 1$ met beginterm $u(1) = 4$.
- Bereken $u(2)$, $u(3)$, $u(4)$ en $u(5)$.
 - Leg uit dat je de recursieve formule ook kunt schrijven als $u(n+1) = 2 \cdot u(n) + 1$.

Theorie

Als in een recursieve formule de oude waarde gelijk is aan $u(n)$, dan is de nieuwe waarde gelijk aan $u(n+1)$.
 De recursieve formule *nieuwe waarde* = $3 \cdot \text{oude waarde}$ kun je schrijven als $u(n+1) = 3 \cdot u(n)$ met bijvoorbeeld $u(0) = 7$.

Voorbeeld

Een rij is gedefinieerd door $u_{n+1} = 3 \cdot u_n - 5$ met beginterm $u_0 = 4$.
 Bereken de termen u_1 , u_2 en u_3 .

Oplossing

Een bijbehorende woordformule is
nieuwe waarde = $3 \cdot \text{oude waarde} - 5$.
 $u_0 = 4$
 $u_1 = 3 \cdot u_0 - 5 = 3 \cdot 4 - 5 = 12 - 5 = 7$
 $u_2 = 3 \cdot u_1 - 5 = 3 \cdot 7 - 5 = 21 - 5 = 16$
 $u_3 = 3 \cdot u_2 - 5 = 3 \cdot 16 - 5 = 48 - 5 = 43$

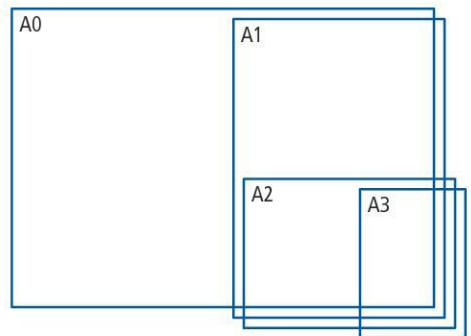
- 6** Schrijf de formule *nieuwe waarde* = $1,4 \cdot \text{oude waarde} - 5$ in de vorm $u(n+1) = \dots$

Ondersteunende opdrachten → maak opdracht 07

- 7** Schrijf de eerste vier termen op van deze rijen.
- $u(n+1) = 10 \cdot u(n) + 4$ met beginterm $u(1) = 2$
 - $u(n+1) = \frac{1}{2} \cdot u(n)$ met beginterm $u(0) = 34$
 - $u_{n+1} = 2 \cdot u_n + 3$ met beginterm $u_0 = -\frac{1}{2}$

- 8** De oppervlakte van een vel A0 is 1 m^2 . De oppervlakte van elk volgend vel is de helft van de vorige. Zo is de oppervlakte van een vel A1 de helft van A0 en van een vel A2 de helft van A1.
- Bereken de oppervlakte van een vel A1, A2 en A3.
 - Geef een recursieve formule voor de oppervlakte $A(n)$.
 - Bereken de oppervlakte van een vel A6.

Uitdagende route → maak opdracht U1



Ondersteunende opdrachten

- 04** Het begin van de rij $-1, 2, 5, 8, \dots$ is in een tabel gezet. De beginterm van de rij is $u(0)$.

- Vul de gegeven termen van de rij in de tabel in.
- Welke regelmaat zie je in de tabel?
- Vul de tabel verder in door gebruik te maken van je antwoord van opdracht b.
- Vul in: de recursieve formule bij deze rij is
nieuwe waarde = *oude waarde* + ... met beginterm
 $u(\dots) = \dots$
- De rij $240, 120, 60, 30, 15, \dots$ is gegeven. De beginterm van de rij is $w_1 = 240$.
 Maak een tabel bij deze rij en bereken w_6 en w_7 .
- Welke regelmaat zie je in de tabel?
- Vul in: de recursieve formule bij deze rij is
nieuwe waarde = ... $\cdot$ *oude waarde* met beginterm $w_{\dots} = \dots$.

n	0	1	2	3	4	5
$u(n)$	-1	2	...	...	...	...

- 07** Gegeven is de rij $u(n+1) = 3 \cdot u(n) - 2$ met beginterm $u(1) = 4$.

- Vul in: als $u(1)$ de oude waarde is, dan is $u(\dots)$ de nieuwe waarde.
- Laat zien dat $u(2) = 10$.
- Vul het blaadje verder in.

Schrijf de eerste vier termen op van de volgende rijen.

- $u_{n+1} = 7 \cdot u_n + 1$ met beginterm $u_1 = 0$
- $u(n+1) = 6 \cdot u(n) + 1$ met beginterm $u(0) = 0,5$

☐	nieuwe waarde =				
☐	$3 \times$ oude waarde $- 2$				
☐	$u(1) = 4$				
☐	$u(2) = 3 \times 4 - 2 = \dots$				
☐	$u(3) = 3 \times \dots - 2 = \dots$				
☐	$u(4) = \dots \times \dots - \dots = \dots$				
☐	$u(5) = \dots \times \dots - \dots = \dots$				

Uitdagende opdrachten

- U1** Leonardo van Pisa, beter bekend als Fibonacci, werd geboren in 1170. Hij schreef een aantal boeken over wiskunde. Hij is beroemd geworden door de naar hem genoemde rij van Fibonacci: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$. Je vindt de volgende term door de twee voorafgaande op te tellen. De recursieve formule is $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ met begintermen $F_0 = 0$ en $F_1 = 1$. De termen F_0, F_1 en F_2 in de rij van Fibonacci zijn kwadraten. Wat is het rangnummer van de eerstvolgende term in de rij die ook een kwadraat is?



14.2 Rijen weergeven

Je leert

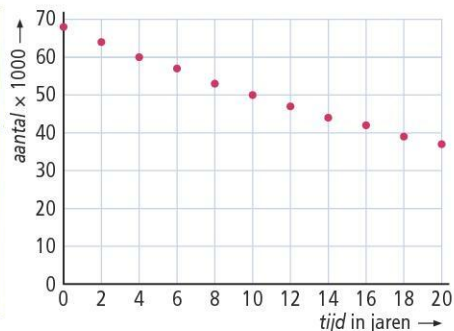
- hoe je met je rekenmachine een rij weergeeft

Leerroutes

- ondersteunend: 9—10—011—12—13—014—15—16
- doorlopend: 9—10—11—12—13—14—15—16
- uitdagend: 9—10—11—12—13—15—16—U2

Het aantal grutto's neemt in Nederland de laatste jaren af. In de grafiek zie je de schatting van het aantal broedparen met $t = 0$ in het jaar 2000.

- Waarom is er geen vloeiende lijn door de punten getekend?
- Stel een recursieve formule op bij de grafiek.



- 9 Gegeven is de recursieve formule $u(n+1) = 4 \cdot u(n) + 7$ met beginterm $u(1) = 0$.

- Vul in: $u(2) = 4 \cdot u(\dots) + 7 = 4 \cdot \dots + 7 = \dots$
- Vul de tabel verder in.

n	1	2	3	4	5
$u(n)$	0	...	...	...	...

- 10 De recursieve formule $u(n) = 2 \cdot u(n-1) - 4$ met beginterm $u(0) = 5$ is gegeven.

- Laat zien dat $u(1) = 6$.
- Vul de tabel verder in.
- Teken een assenstelsel. Zet n langs de horizontale as en $u(n)$ langs de verticale as. Neem de horizontale as van 0 tot en met 5 en de verticale as van 0 tot en met 40 en teken de punten uit de tabel in het assenstelsel.
- Waarom mag je de punten niet verbinden met een vloeiende lijn?

n	0	1	2	3	4	5
$u(n)$	5	6	...	...	...	...

Theorie

Een ontwikkeling in de tijd die door een rij wordt beschreven, kun je weergeven in een grafiek of in een tabel. Hierin wordt het verband tussen de tijd en de bijbehorende waarde van de rij weergegeven. De grafiek bestaat uit losse punten omdat de rangnummers van de rij gehele getallen zijn.

Voorbeeld

De recursieve formule $A(t+1) = 1,2 \cdot A(t) - 60$ met $A(0) = 400$ beschrijft het aantal herten A in een natuurgebied na t jaar.

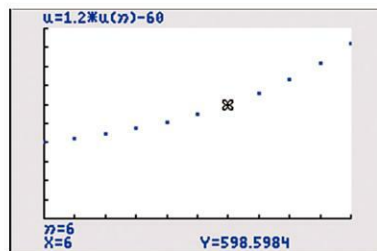
Na hoeveel jaar zijn er meer dan 550 herten?

Oplossing

Voer de formule in op je rekenmachine en maak een tabel of een grafiek.

Na 6 jaar is het aantal herten groter dan 550.

n	$u(n)$
0	400
1	420
2	444
3	472,8
4	507,36
5	548,83
6	598,6



→ Instructie rekenmachine | Rijen en recursie

Ondersteunende route → maak opdracht 011

- 11** Gegeven is de recursieve formule $u(n+1) = 2 \cdot u(n) + 24$ met $u(0) = 10$.
- Ga met behulp van je rekenmachine na vanaf welk rangnummer de bijbehorende term groter is dan 100 000.
 - Beantwoord dezelfde vraag voor de rij met de recursieve formule $t(n+1) = 1,5 \cdot (t(n))^2 - 10$ met $t(1) = 3$.
- 12** Gegeven is de recursieve formule $P(t+1) = 1,4 \cdot P(t) + 2$ met $P(1) = 5$.
- Plot de bijbehorende grafiek.
 - Vanaf welk rangnummer is $P(t) > 100$?
- 13** Gegeven is de recursieve formule $u(n+1) = 3 \cdot u(n) + 10$ met beginterm $u(1) = 0$.
- Bereken $u(2)$ tot en met $u(5)$.
 - Lot schrijft de recursieve formule in de vorm $u(n) = 3 \cdot u(n-1) + 10$ met $u(1) = 0$. Laat zien dat je met deze formule dezelfde antwoorden krijgt als in opdracht a.
 - Vul in: De recursieve formule $a(n+1) = a(n) - 5$ kun je ook schrijven als $a(n) = a(\dots) - \dots$.

Een recursieve formule kan beginnen met $u(n+1)$, maar ook met $u(n)$.

Als je in de woordformule *nieuwe waarde* = $1,3 \cdot$ *oude waarde* voor de nieuwe waarde $u(n+1)$ neemt, dan hoort bij de oude waarde $u(n)$.

Neem je $u(n)$ voor de nieuwe waarde, dan hoort bij de oude waarde $u(n-1)$.

Ondersteunende route → maak opdracht 014

- 14** De recursieve formule $a(t) = 0,9 \cdot a(t-1) + 2000$ met beginterm $a(0) = 40\,000$ is een benadering van het gemiddelde aantal bezoekers per dag van een dierenpark in een jaar. Hierbij is t de tijd in jaren na 2011.

- a** Vul de tabel verder in.
b In welk jaar zijn er voor het eerst gemiddeld minder dan 25 000 bezoekers per dag?

t	0	1	2	3	4
$a(t)$	40 000	38 000	...	...	...

- 15** In een vijver zijn 10 000 vissen. Door natuurlijke aanwas neemt het aantal vissen elk jaar met 1,2% toe. Aan het einde van elk jaar worden er 500 vissen gevangen. Bij deze situatie hoort de recursieve formule $V(t) = a \cdot V(t-1) - b$ met $V(0) = 10\,000$.

H

- a** Leg uit dat $a = 1,012$ en geef de recursieve formule bij het aantal vissen.
b Voer de recursieve formule in op je rekenmachine. Hoeveel vissen zijn er na 10 jaar?
c Hoeveel vissen zullen er op den duur in de vijver zijn?
d Beredeneer dat het aantal vissen toeneemt als elk jaar 100 in plaats van 500 vissen worden gevangen.

- 16** In een productiebos staan 12 000 bomen. Elk jaar worden er bomen gekapt en nieuwe bomen bij geplant. Het aantal bomen B na t jaren wordt beschreven door de recursieve formule $B(t+1) = 0,8 \cdot B(t) + 3000$ met $B(0) = 12\,000$.
- a** Geef de betekenis van de getallen 3000 en 0,8.
b Plot de grafiek en beschrijf de ontwikkeling van het aantal bomen in de komende 50 jaar.
c Er worden niet 3000 maar 3500 bomen per jaar bij geplant. Hoeveel bomen staan er op den duur in het bos?



Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

- 011** Gegeven is de recursieve formule $N_{t+1} = 2 \cdot N_t - 3$ met beginterm $N_0 = 8$.
- Waarom bestaat de grafiek bij de formule uit losse punten?
 - Voer de formule in op je rekenmachine en vul de tabel verder in.
 - Teken een grafiek bij de tabel.
 - Je wilt weten vanaf welk rangnummer $N_t > 100$.
Leg uit waarom $t = 5$ de oplossing van de ongelijkheid is.
 - Gegeven is de recursieve formule $u(n+1) = 3 \cdot u(n) - 5$ met $u(0) = 20$.
Ga met behulp van je rekenmachine na vanaf welk rangnummer de bijbehorende term groter is dan 300 000.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
N_t	8	13	23	...	...	...	...	...	...

- 014** Het totaal aantal grieppatiënten in een dorp na t weken voldoet aan de recursieve formule $a(t+1) = 1,6 \cdot a(t) + 2$. Hierbij is de beginterm $a(0) = 10$.
- Vul in: *nieuwe waarde* = ... $\times$ *oude waarde* + ...
 - Hoe is de nieuwe waarde in de formule $a(t+1) = 1,6 \cdot a(t) + 2$ geschreven?
 - En hoe is de oude waarde geschreven?
 - Je kunt de formule ook schrijven als $a(t) = 1,6 \cdot a(\dots) + 2$.
De nieuwe waarde is nu $a(t)$.
Hoe is de oude waarde dan geschreven?
 - Een huisarts wil weten wanneer er in totaal meer dan 100 grieppatiënten zullen zijn.
Bereken na hoeveel weken dat zal zijn door gebruik te maken van een tabel of van een grafiek op je rekenmachine.

Uitdagende opdrachten

- U2** Twee populaties dieren die in hetzelfde gebied leven, beïnvloeden elkaar. De recursieve formules op het blaadje laten zien hoe je met het aantal dieren in jaar t , de aantallen in het jaar $t+1$ kunt berekenen.
- Plot een grafiek van beide populaties voor de eerste dertig jaren.
 - Beschrijf de ontwikkeling van de grootte van de twee populaties.

$$\begin{aligned} a_{t+1} &= 0,8 \cdot a_t - 1,4 \cdot b_t + 1000 \\ b_{t+1} &= 0,6 \cdot a_t - 0,2 \cdot b_t - 500 \\ \text{met } a_0 &= 2000 \text{ en } b_0 = 525 \end{aligned}$$

14.3 Directe formules

Je leert

- hoe je een directe formule bij een rij opstelt
- wat een rekenkundige rij en een meetkundige rij is

Leerroutes

- ondersteunend: 17—018—19—020—20—21—22
- doorlopend: 17—18—19—20—21—22—23
- uitdagend: 17—18—19—21—22—23—U3

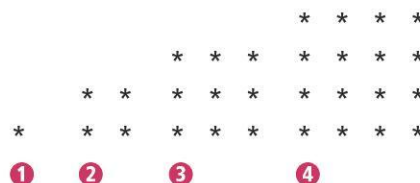
Elk uur is gemeten hoeveel bacteriën er in een petrischaal zijn. De getallen in de rij zijn de aantallen gemeten bacteriën.

- Hoe kun je snel berekenen hoeveel bacteriën er na 50 uur zijn?



17 Een rij met vier figuren is gegeven.

- Hoeveel sterren zullen er in de vijfde figuur staan?
- Vul de tabel verder in.
- Laat zien dat de recursieve formule $a(n) = a(n-1) + 2n - 1$ bij de aantallen sterren van de rij figuren hoort.
- Welk figuur heeft voor het eerst meer dan 50 sterren?
- Ga na dat het aantal sterren te berekenen is met de formule $a(n) = n^2$.
- Controleer je antwoord van opdracht c met behulp van de formule van opdracht e.
- Welke formule vind je makkelijker om $a(30)$ mee uit te rekenen: de recursieve formule of de formule van opdracht e? Leg uit waarom.



n	1	2	3	4	5
$a(n)$	1	...	...	...	...

Theorie

Bij sommige rijen kun je de waarde van een term $u(n)$ berekenen zonder gebruik te maken van voorafgaande termen of een recursieve formule.

Je gebruikt dan een **directe formule**. Bij een directe formule is $u(n)$ uitgedrukt in het rangnummer n .

Voorbeeld

De termen van de rij 2, 5, 10, 17, 26, ... met beginterm $u(1) = 2$ kun je berekenen met de directe formule $u(n) = n^2 + 1$.

$$\begin{aligned}
 u(1) &= 1^2 + 1 = 2 \\
 u(2) &= 2^2 + 1 = 5 \\
 u(3) &= 3^2 + 1 = 10 \\
 u(4) &= 4^2 + 1 = 17 \\
 u(5) &= 5^2 + 1 = 26
 \end{aligned}$$

- 18** Een rij is gegeven door de directe formule $u(n) = n^2 + 3n$.
H **a** Hoe zie je aan de formule dat het een directe formule is?
b Vul de tabel verder in.
c Bereken vanaf welke waarde van n er geldt dat $u(n) > 1000$.

n	0	1	2	3	4
$u(n)$	0	...	...	...	...

- 19** Gegeven zijn de rijen A en B.
a Stel bij elke rij een recursieve formule op.
b Bij rij A hoort een lineair verband.
 Vul in: een directe formule bij rij A is $v(n) = \dots \cdot n + \dots$
c Wat voor soort verband hoort er bij rij B?
d Vul in: een directe formule bij rij B is $w(n) = \dots \cdot \dots^n$.

A

n	0	1	2	3	4	5
$v(n)$	14	11	8	5	2	-1

B

n	0	1	2	3	4
$w(n)$	96	192	384	768	1536

Theorie

Een rij waarvan je een term vindt door bij de voorafgaande term een constante a op te tellen of af te trekken, heet een **rekenkundige rij**. De constante a heet het **verschil** van de rekenkundige rij.

De recursieve formule is $u(n+1) = u(n) + a$ met beginterm $u(0) = b$. De directe formule is $u(n) = a \cdot n + b$.

Een rij waarvan je een term vindt door de voorafgaande term met een constante r te vermenigvuldigen, heet een **meetkundige rij**.

De factor r heet de **reden** van de meetkundige rij.

De recursieve formule is $u(n+1) = r \cdot u(n)$ met beginterm $u(0) = b$. De directe formule is $u(n) = b \cdot r^n$.

Voorbeeld 1

Geef een recursieve formule en een directe formule bij de rij $u_0 = 23, u_1 = 25, u_2 = 27, u_3 = 29, \dots$.

Oplossing

n	0	1	2	3
u_n	23	25	27	29

u is een rekenkundige rij.

Het verschil is 2 en de beginterm is 23.

Een recursieve formule is $u_n = u_{n-1} + 2$ met $u_0 = 23$.

Een directe formule is $u_n = 2n + 23$.

Voorbeeld 2

Geef een recursieve formule en een directe formule bij de rij $w(1) = 54, w(2) = 18, w(3) = 6, w(4) = 2$.

Oplossing

n	1	2	3	4
$w(n)$	54	18	6	2

w is een meetkundige rij met reden $\frac{1}{3}$.

Een recursieve formule is $w(n) = \frac{1}{3} \cdot w(n-1)$ met

$w(1) = 54$. $w(0)$ is $54 : \frac{1}{3} = 162$.

Een directe formule is $w(n) = 162 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Ondersteunende route → maak opdracht O20

- 20** a Stel een recursieve formule en een directe formule op bij de rij: $u(0) = 324, u(1) = 216, u(2) = 144, u(3) = 96, \dots$

H

- b Stel een recursieve formule en een directe formule op bij de rij: $w_1 = 212, w_2 = 198, w_3 = 184, w_4 = 170, \dots$

- 21** Zes rijen zijn gegeven. Van elke rij heeft het eerste getal rangnummer 0.

- a Bereken de volgende term van elke rij.
 b Welke rijen zijn rekenkundige rijen?
 Geef bij elke rekenkundige rij de waarde van het verschil.
 c Geef bij elke rekenkundige rij een directe formule.
 d Welke rijen zijn meetkundige rijen?
 Geef bij elke meetkundige rij de waarde van de reden.
 e Geef bij elke meetkundige rij een directe formule.

A: 12, 17, 22, 27, ...
 B: 1, 3, 6, 10, ...
 C: 100, 50, 25, $12\frac{1}{2}$, ...
 D: 3, 6, 12, 24, ...
 E: 20, 17, 14, 11, ...

- 22** De secretaris van kunstrijvereniging Amaranth houdt elk jaar bij hoeveel leden de vereniging op 1 augustus telt. Deze aantallen L staan in de tabel met $t = 0$ op 1 augustus 2017.

t	0	1	2	3	4
L_t	75	87	99	111	123

- a Stel een recursieve formule bij de tabel op.
 b Stel een directe formule voor L_t op.
 c Het aantal jongens op de vereniging is te berekenen met $J_t = J_{t-1} + 4$, met weer $t = 0$ op 1 augustus 2017. De beginterm $J_0 = 15$.
 Bereken het percentage jongens van de leden van de vereniging op 1 augustus 2021.



- 23** Van een rij is gegeven $u(1) = 72$ en $u(4) = 243$.
 a Geef een recursieve formule en een directe formule als u een rekenkundige rij is.
 b Ga er nu van uit dat u een meetkundige rij is.
 Laat zien dat de reden van deze rij gelijk is aan 1,5.
 c Geef een recursieve formule en een directe formule in het geval u een meetkundige rij is.

Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

- 018** Een rij is gegeven door de directe formule $u(n) = n^2 + 2n$.
- a** Hoe zie je aan de formule dat het een directe formule is?
 - b** Vul in: $u(1) = 1^2 + 2 \cdot \dots = \dots + \dots = \dots$
 - c** Welke waarde van n vul je in om $u(2)$ te berekenen?
 - d** Bereken $u(2)$ en $u(3)$.
 - e** Pedro wil de ongelijkheid $u(n) > 100$ oplossen.
Vul de tabel in.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$u(n)$	0	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

- f** Leg uit dat Pedro de oplossing $n \geq 10$ vindt.

- 020** Van de rekenkundige rij a zijn de termen $a_1 = 12$, $a_2 = 19$, $a_3 = 26$ en $a_4 = 33$ gegeven.

- a** Vul de tabel in.
- b** Hoe groot is het verschil van rij a ?
- c** Welke waarde heeft a_0 ?
- d** Vul in: een directe formule is $a_n = \dots n + \dots$
- e** De eerste termen van rij c staan in de tabel.
Waarom is rij c een meetkundige rij?
- f** Wat is de reden van rij c ?
- g** Bereken $c(0)$.
- h** Geef een directe formule van de vorm $c(n) = b \cdot r^n$ voor rij c .

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	12	19	...	...	...	...	...

n	1	2	3	4
$c(n)$	10 000	8000	6400	5120

Uitdagende opdrachten

- U3** Van een rekenkundige rij u is het verschil -7 en $u(100) = 5700$.
Een meetkundige rij w heeft reden 2 en $w(4) = 80$.
Vanaf welke rangnummer is $u(n) < w(n)$?

14.4 Som van rekenkundige rij

Je leert

- hoe je de som van een rekenkundige rij berekent
- wat de somrij is

Leerroutes

- ondersteunend: 24—25—26—027—28—29—30—031—31
- doorlopend: 24—25—26—27—28—29—30—31—32
- uitdagend: 24—25—26—28—30—31—32—U4—U5

De toen 9-jarige Carl Friedrich Gauss (geboren op 30 april 1777 in Brunswijk, Duitsland) kreeg op zijn basisschool de opdracht om de som van alle gehele getallen van 1 tot en met 100 te berekenen. Volgens Gauss was deze som gelijk aan $50 \times 101 = 5050$.

- Leg uit dat deze berekening goed is.



24 De rij u is gegeven door de directe formule $u(n) = 2n + 16$.

- Vul de tabel verder in.
- Bereken $u(0) + u(1) + \dots + u(5)$.
- Hoeveel termen heb je bij elkaar opgeteld?
- Uit hoeveel termen bestaat de som $u(4) + u(5) + \dots + u(11)$?

n	0	1	2	3	4	5
$u(n)$	16	13	...	...	...	...

Theorie

De **som van de termen** $u(p)$ tot en met $u(q)$ noteer je als $\sum_{k=p}^q u(k) = u(p) + u(p+1) + \dots + u(q)$.

Het symbool $\sum$ (de Griekse hoofdletter sigma) staat voor som.

Voorbeeld

Gegeven is de rij $u(n) = n^2 + 1$.

Bereken $\sum_{k=3}^8 u(k)$.

Oplossing

$$\sum_{k=3}^8 u(k) = u(3) + u(4) + u(5) + u(6) + u(7) + u(8) = 10 + 17 + 26 + 37 + 50 + 65 = 205$$

25 De rij u is gegeven door de directe formule $u(n) = 10n - 1$.

- Waarom is dit een rekenkundige rij?
- Vul in: $\sum_{k=2}^5 u(k) = u(\dots) + u(\dots) + u(\dots) + u(\dots)$
- Bereken $\sum_{k=2}^5 u(k)$.

26 De rij u is gegeven door de directe formule $u(n) = 3n + 4$.

- Uit hoeveel termen bestaat de som $\sum_{k=0}^5 u(k)$?
- Bereken $\sum_{k=0}^5 u(k)$.
- Op het blaadje zie je een manier om $\sum_{k=0}^5 u(k)$ te berekenen.
Leg uit dat $\sum_{k=0}^5 u(k) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 23$.
- Leg op dezelfde manier uit dat $\sum_{k=5}^{15} u(k) = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot$
- Bereken de uitkomst van de som van opdracht c

$$s = 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19$$
$$s = 19 + 16 + 13 + 10 + 7 + 4 +$$

$$23 + 23 + 23 + 23 + 23 + 23$$

Theorie

Bij een **rekenkundige rij** u is de **som** van een aantal termen $u(p)$ tot en met $u(q)$ gelijk aan:

$$\sum_{k=p}^q u(k) = \frac{1}{2} \cdot \text{aantal termen} \cdot (\text{eerste term} + \text{laatste term}).$$

Voorbeeld 1

Gegeven is de rij $u(n) = 5n + 3$.

Bereken $\sum_{k=0}^{24} u(k)$.

Oplossing

De rij u is een rekenkundige rij.

Het aantal om op te tellen termen is 25.

De eerste term is $u(0) = 5 \cdot 0 + 3 = 3$.

De laatste term is $u(24) = 5 \cdot 24 + 3 = 123$.

De som is $\frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (23 + 123) = 1825$.

Voorbeeld 2

Gegeven is de rij $v(n) = 4n - 5$.

Bereken $\sum_{k=4}^{19} v(k)$.

Oplossing

De rij v is een rekenkundige rij.

Het aantal termen om op te tellen is $19 - 3 = 16$.

De eerste term is $v(4) = 4 \cdot 4 - 5 = 11$.

De laatste term is $v(19) = 4 \cdot 19 - 5 = 71$.

De som is $\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot (11 + 71) = 656$.

Ondersteunende route → maak opdracht 027

27 Gegeven is de rij met directe formule $u(n) = 1,5n + 100$.

- a** Hoeveel termen moet je optellen om $\sum_{k=0}^{80} u(k)$ te berekenen?
- b** Bereken $\sum_{k=0}^{80} u(k)$.

28 Bereken.

H

$$\mathbf{a} \quad \sum_{k=0}^{11} (2k + 5)$$

$$\mathbf{c} \quad \sum_{k=5}^{19} (0,5k - 3)$$

b $\sum_{k=3}^{17} (4k - 20)$

$$\mathbf{d} \quad \sum_{k=19}^{104} (1 - 3k)$$

29 Lies wil de som van de getallen 2, 6, 10, ..., 74 berekenen. De beginterm van de rij is $u(0)$.



- Geef een directe formule bij de rij.
- Welke rangnummer hoort bij de term met waarde 74?
- Hoeveel termen moet Lies optellen?
- Vul in: de som is $\frac{1}{2} \cdot \dots \cdot (2 + 74) = \dots$
- Bereken op dezelfde manier $4 + 7 + 10 + \dots + 67$.

30 Gegeven is de rij met directe formule $u(n) = 2n - 5$.

- a** Waarom is $\sum_{k=0}^0 u(k) = -5$?
- b** Bereken $\sum_{k=0}^1 u(k)$, $\sum_{k=0}^2 u(k)$, $\sum_{k=0}^3 u(k)$, $\sum_{k=0}^4 u(k)$ en $\sum_{k=0}^5 u(k)$.

Theorie

Bij een rij $u(n)$ vormen de uitkomsten van de sommen

$$s(0) = \sum_{k=0}^0 u(k), s(1) = \sum_{k=0}^1 u(k), s(2) = \sum_{k=0}^2 u(k), \dots,$$

$$s(n) = \sum_{k=0}^n u(k) \text{ ook weer een rij getallen.}$$

Deze rij uitkomsten noem je de **somrij** s.

Voorbeeld

Gegeven is de rij $u(n+1) = 2 \cdot u(n) + 1$
met beginterm $u(0) = 3$.
Bereken $s(0)$ tot en met $s(3)$.

Oplossing

$$u(0) = 3, u(1) = 7, u(2) = 15, u(3) = 31$$

$$s(0) = u(0) = 3$$

$$s(1) = u(0) + u(1) = 3 + 7 = 10$$

$$s(2) = u(0) + u(1) + u(2) = 3 + 7 + 15 = 25$$

$$s(3) = u(0) + u(1) + u(2) + u(3) = 3 + 7 + 15 + 31 = 56$$

Ondersteunende route → maak opdracht 031

31 Gegeven is de rij $u(n) = 4n + 3$.



Bereken de termen $s(0)$ tot en met $s(4)$ van de somrij s .

32 Gegeven is de rij u met recursieve formule $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}$ en met beginterm $u_0 = 6$. De rij s is de somrij van de rij u .

- Op het blaadje wordt een directe formule voor s_n opgesteld.
Vul het blaadje verder in.
- Bereken de kleinste waarde van n waarvoor $s_n > 1000$.

Uitdagende route → maak opdracht U4 en U5

Het is een rekenkundige rij dus

$$S_n = \frac{1}{2} \times \text{aantal termen} \times (\dots + \dots).$$

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (u(\dots) + u(\dots))$$

$$S_n = \frac{1}{2}(n+1)(\dots + \dots)$$

Ondersteunende opdrachten

- 027** Gegeven is de rij met directe formule $u(n) = 3n - 8$.

n	0	1	2	3	4	5
$u(n)$	-8	...	...	...	...	...

- Vul de tabel verder in.
- Laat zien dat de termen van u een rekenkundige rij vormen.
- Uit hoeveel termen bestaat de som $\sum_{k=0}^5 u(k)$?
- Welke waarde heeft de eerste term? En welke waarde heeft de laatste term?
- Vul in $\sum_{k=0}^5 u(k) = \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot (\dots + \dots) = \dots$.

Bij een rekenkundige rij is de som van de termen gelijk aan $\frac{1}{2} \cdot \text{aantal termen} \cdot (\text{eerste term} + \text{laatste term})$.

- 031** Gegeven is de rij $u(n) = 4 - 3n$.

- Vul de waarden van $u(n)$ in de tabel in.
- Waarom is rij u een rekenkundige rij?
- Je weet dat $s(0) = u(0) = 4$ en $s(1) = u(0) + u(1) = 5$. Laat zien dat $s(2) = 3$.
- Vul de ontbrekende waarden van $s(n)$ in de tabel.

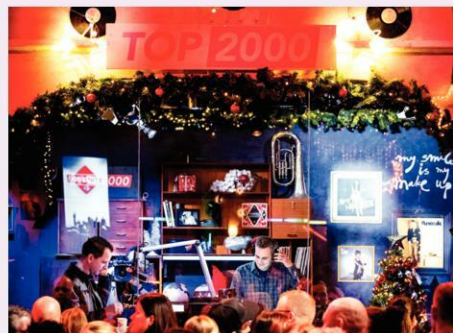
n	0	1	2	3	4	5
$u(n)$	4	1	-2	...	...	...
$s(n)$	4	5	...	...	...	...

Uitdagende opdrachten

- U4** De rij s is de somrij van een rekenkundige rij u .
De rij s heeft als directe formule $s(n) = n^2 + 22n + 21$.
Geef een recursieve formule en een directe formule voor rij u .

- U5** De Top2000 is een radioprogramma dat elk jaar tussen kerst en oud en nieuw wordt uitgezonden. Begin december mogen mensen op maximaal 35 nummers stemmen. Op grond van de stemmen wordt een ranglijst van 2000 nummers samengesteld.

- Een nummer moet minstens 150 stemmen krijgen om in de lijst te komen. Neem aan dat elk van de 2000 uitgezonden nummers een ander aantal stemmen heeft gekregen. Bereken hoeveel stemmen er dan minstens zijn uitgebracht.
- De aantallen uitgebrachte stemmen worden niet vrijgegeven. Neem aan dat het aantal stemmen $u(n)$ dat op nummer n van de lijst is uitgebracht, voor de bovenste 100 nummers voldoet aan de recursieve formule $u(n) = u(n-1) - 420 + n$. Hierbij is $u(1)$ nummer 1 van de lijst en $u(100)$ nummer 100. Hoe groot is het verschil in het aantal stemmen tussen nummer 1 en nummer 100.



14.5 Som van meetkundige rij

Je leert

- hoe je de som van een meetkundige rij berekent

Leerroutes

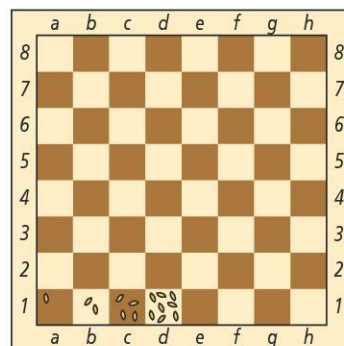
- ondersteunend: 33—34—036—36—037—38—39—40—41
- doorlopend: 33—34—35—36—37—38—39—40—41
- uitdagend: 33—35—36—37—38—40—41—U6—U7

Soms wordt een roddel snel verspreid. In het eerste uur hebben 20 mensen de roddel gehoord. Het aantal mensen dat de roddel in het volgende uur voor het eerst hoort, neemt steeds met 25% toe.

- Hoe zou je het totaal aantal mensen dat de roddel na tien uur gehoord heeft, kunnen berekenen?



- 33** Volgens een legende mocht de bedenker van het schaakspel Sissa ben Dahir een beloning kiezen van de Indiase koning Shirham. Hij vroeg om graankorrels op zijn schaakbord te leggen: één op het eerste veld, twee op het tweede veld, vier op het derde veld, acht op het vierde veld, enzovoort. De aantallen graankorrels van elk veld vormen rij u .
- Hoeveel graankorrels liggen er op het 10e veld?
 - Waarom is u een meetkundige rij?
 - Leg uit dat er 2^{63} korrels op het 64e veld liggen.



- 34** De som van de graankorrels op alle 64 velden van het schaakbord kun je berekenen met handig rekenwerk.
- Leg uit dat voor de som s van alle graankorrels geldt:
 $s(64) = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{63}$.
 - Op het blaadje staat op de tweede regel de som van de 64 termen $s(64)$ en op de eerste regel $2 \cdot s(64)$. Ga na dat de eerste rij inderdaad het dubbele is van de tweede rij.

$2 \cdot s(64)$	=	$2 + 4 + 8 + \dots + 2^{63} + 2^{64}$
$s(64)$	=	$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{63}$
$2 \cdot s(64) - s(64) =$		$-1 \qquad \qquad \qquad + 2^{64}$

- De twee regels worden van elkaar afgetrokken. Ga na dat je overhoudt: $s(64) = 2^{64} - 1$.

$3 \cdot s$	=	$4 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^4 + \dots + 4 \cdot 3^{10} + 4 \cdot 3^{11}$
s	=	$4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^4 + \dots + 4 \cdot 3^{10}$
$3 \cdot s - s(64)$	=	$-4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^{11}$

35 Gegeven is de meetkundige rij $u(n) = 4 \cdot 3^n$. Je gaat $\sum_{k=2}^{10} u(k)$ berekenen, de som van $u(2)$ tot en met $u(10)$.

a Ga na dat op de tweede regel van het blaadje de som s van $u(2)$ tot en met $u(10)$ staat.

b Op de eerste regel staat de som $3 \cdot s$.
Waarom is hier gekozen voor de factor 3?

c $3 \cdot s$ is de som van de termen $u(3)$ tot en met $u(11)$.

Leg uit dat $\sum_{k=2}^{10} u(k) = \frac{u(11) - u(2)}{3 - 1}$

d Bereken $\sum_{k=2}^{10} u(k)$.

Theorie

Bij een **meetkundige rij** u met $u(n) = b \cdot r^n$ geldt voor de **som** van de termen $u(p)$ tot en met $u(q)$:

$$\text{som} = \frac{\text{eerstvolgende term} - \text{eerste term}}{\text{reden} - 1}$$

Je kunt dit ook schrijven als $\sum_{k=p}^q u(k) = \frac{b \cdot r^{q+1} - b \cdot r^p}{r - 1}$

Voorbeeld 1

Bereken $\sum_{k=1}^{12} (5 \cdot 2^k)$.

Oplossing

De reden is $r = 2$. De eerste term is $u(1) = 5 \cdot 2^1 = 10$.

De eerstvolgende term is $u(13) = 5 \cdot 2^{13} = 40\,960$.

De som is

$$\sum_{k=1}^{12} u(k) = \frac{u(13) - u(1)}{2 - 1} = \frac{40\,960 - 10}{1} = 40\,950.$$

Voorbeeld 2

Bereken $16 + 24 + 36 + \dots + 615,09375$.

Oplossing

De reden is $\frac{24}{16} = 1,5$ en de eerste term is 16.

De eerstvolgende term is $1,5 \cdot 615,09375 \approx 922,64$.

De som is $\frac{922,64 - 16}{1,5 - 1} = \frac{906,64}{0,5} \approx 1813,28$.

Ondersteunende opdrachten → maak opdracht O36

- 36** Bereken en rond je antwoord zo nodig af op vier decimalen.

H

a $\sum_{k=0}^{11} (3 \cdot 1,2^k)$

c $\sum_{k=5}^{16} \left(\frac{3}{4}\right)^k$

b $\sum_{k=3}^7 3^k$

d $\sum_{k=7}^{22} (5 \cdot 1,03^k)$

Ondersteunende opdrachten → maak opdracht O37

- 37** Jante wil de som $3 + 6 + 12 + \dots + 768$ berekenen.

H

- a** Bereken de eerstvolgende term met behulp van de reden.
b Bereken de som met behulp van de formule voor de som van een meetkundige rij.
c Bereken op dezelfde manier de som $4 + 2 + 1 + \dots + \frac{1}{32}$.

- 38** Joris huurt op 1 januari 2020 een kantoorpand voor € 80.000,- per jaar. Elk jaar wordt dit bedrag met 1,8% verhoogd.

- a** Laat zien dat de recursieve formule $j_{n+1} = 1,018 \cdot j_n$ met $j_0 = 80000$ bij de jaarlijkse bedragen aan huur in euro's hoort.
b Hoeveel euro huur heeft Joris na tien jaar in totaal betaald?

- 39** Gegeven is de rij u met directe formule $u(n) = 20 \cdot 1,1^n$. De rij s is de somrij van de rij u met eerste term $u(0)$.

- a** Bereken $s(4)$ en $s(5)$.
b Alicia wil een directe formule bij de rij s maken. Leg uit wat Alicia in de eerste stap heeft gedaan.
c Wat is er in stap 2 in de teller gebeurd?
d Vul het blaadje verder in.
e Bereken vanaf welke waarde van n geldt: $s(n) > 1000$.

		Alicia	
●			
●	$s(n) = \frac{20 \cdot 1,1^{n+1} - 20}{1,1 - 1}$		1
●	$s(n) = \frac{20 \cdot 1,1 \cdot 1,1^n - 20}{0,1}$		2
●	$s(n) = \dots \cdot 1,1^n - \dots$		3

- 40** Gegeven is de rij u met directe formule $u_n = 5n + 7$.

- a** Bereken u_0 tot en met u_6 .
b Bereken de verschillen $u_1 - u_0, u_2 - u_1, \dots, u_6 - u_5$.
c Wat valt je op aan de verschillen?

- 41** Gegeven is de rij w met directe formule $w_n = 5 \cdot 3^n$.

- a** Bereken de verschillen $w_1 - w_0, w_2 - w_1, \dots, w_6 - w_5$.
b Wat valt je op aan de verschillen?
c Stel een recursieve formule en een directe formule op bij de rij verschillen v . Neem $v_0 = w_1 - w_0$.

Uitdagende route → maak opdracht U6 en U7

Ondersteunende opdrachten

036 Gegeven is de rij $u(n) = 5 \cdot 2^n$. Je gaat de som $\sum_{k=0}^8 u(k)$ berekenen.

- a** Waarom is de reden van de rij u gelijk aan 2?
- b** Vul in: de eerste term van de rij u is $u(0) = \dots$
- c** Vul in: $u(8) = \dots$ en de eerstvolgende term $u(9) = \dots$
- d** Gebruik de regel $\text{som} = \frac{\text{eerstvolgende term} - \text{eerste term}}{\text{reden} - 1}$

en vul in: $\sum_{k=0}^8 (5 \cdot 2^k) = \frac{\dots - \dots}{\dots} = \dots$

037 Je wilt de som $2 + 10 + 50 + \dots + 781\,250$ berekenen. De termen van de som vormen een rij u_n met $u_0 = 2$.

- a** Vul de tabel in en laat zien dat u een meetkundige rij is.
- b** Wat is de reden van de rij?
- c** Wat is de eerste term van de rij?
- d** Vul in: de eerstvolgende term van de rij is $\dots \cdot 781\,250 = \dots$
- e** Laat met behulp van de regel zien dat de som gelijk is aan 976 562.
- f** Bereken $7 + 14 + 28 + \dots + 114\,688$.

n	0	1	2	3	4
u_n	2	10	...	...	...

Uitdagende opdrachten

U6 De recursieve formule $s_{n+1} = 3 \cdot s_n + 5$ hoort bij de rij s . Deze rij is de somrij van de rij u met eerste term $u_0 = 5$. Geef een directe formule voor u_n en stel daarmee een directe formule op voor de rij s .

U7 De rij u heeft als recursieve formule $u(n+1) = u(n) + 2n + 3$ met $u(0) = 9$. De verschillen $v(0) = u(1) - u(0)$, $v(1) = u(2) - u(1)$, $v(2) = u(3) - u(2)$ enzovoort vormen een rekenkundige rij.

- a** Geef een directe formule voor de rij v .
- b** Geef een directe formule voor de somrij van v .
- c** Geef een directe formule voor $u(n)$.

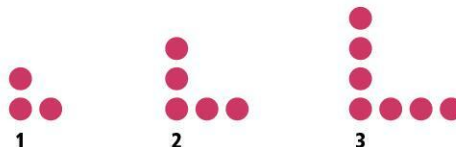
14.6 Gemengde opdrachten

- 42** Ga na of de rijen rekenkundig of meetkundig zijn. Geef een recursieve formule en een directe formule en bereken steeds de tiende term. De beginterm van alle rijen is $u(0)$.

- a 54, 18, 6, 2, ... c 10, 110, 1210, 13 310, ...
b 1, 4, 7, 10, ... d 9; 7,5; 6; 4,5; ...

- 43** Het aantal stippen in de figuren vormt een rij.

- a Hoeveel stippen heeft figuur nummer 6?
b Stel een recursieve formule op die bij de aantallen stippen van deze rij hoort. Neem voor $u(1)$ het aantal stippen dat bij figuur 1 hoort.
c Hoeveel stippen heeft de 25e figuur?
d Iemand heeft de eerste 25 figuren uit deze rij getekend. Hoeveel stippen heeft hij in totaal getekend?



- 44** Bereken de som.

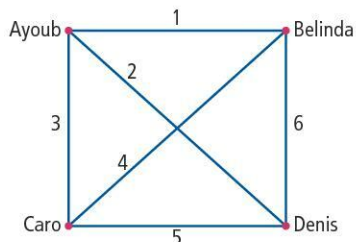
- a $\sum_{k=5}^{13} (10 - 2k)$ c $235\,298 + 33\,614 + 4802 + \dots + \frac{2}{49}$
b $\sum_{k=6}^{19} (5 \cdot 1,17^k)$ d $4\frac{1}{2} + 4 + 3\frac{1}{2} + \dots + -6\frac{1}{2}$

- 45** Michiel en Sandra hebben een huis gekocht. Om deze aankoop te financieren, hebben ze een lening van € 150.000,- bij een bank afgesloten. Ieder jaar betalen ze een vaste rente van 2,2% over de resterende schuld. De lening moet in 20 jaar worden afgelost.

- a Ga ervan uit dat Michiel en Sandra aan het eind van ieder jaar de rente betalen plus steeds hetzelfde bedrag aan aflossing.
Bereken de grootte van deze aflossing.
b Bereken de rente die ze moeten betalen over het eerste jaar.
c Bereken de rente die ze moeten betalen over het tweede jaar.
d Bereken het totale bedrag aan rente dat ze in 20 jaar moeten betalen.
e Ze kunnen de lening ook aflossen door ieder jaar een vast bedrag te betalen. Een deel van dit bedrag is dan de verschuldigde rente; de rest van het bedrag is aflossing.
Ga ervan uit dat ze aan het eind van elk jaar € 9.000,- aan de bank betalen.
Bereken hoe groot de schuld nog is na 20 jaar.



- 46** Aan het begin van een vergadering geven alle personen elkaar een hand. In de tekening wordt elke persoon met een punt en elke handdruk met een lijn weergegeven. In de tekening zie je dat als vier personen aanwezig zijn er zes handdrukken gegeven worden.



- a** Hoeveel handdrukken worden er gegeven als er een vijfde persoon bijkomt?
b Onderzoek hoeveel handdrukken er in totaal worden gegeven bij een vergadering met 50 personen.
- 47** De verkoop van cd's is de laatste jaren sterk aan het dalen. Een belangrijke reden van deze terugloop is de mogelijkheid om muziek te downloaden van het internet. We zoeken een model waarmee we de toekomstige downloadverkoop kunnen beschrijven. Een model dat redelijk past bij de gegevens tot nu toe wordt gegeven door de formule

$$D(n) = \frac{19,0}{1 + 26,14 \cdot 0,73^n}. \text{ Hierin is } D(n) \text{ het aantal}$$

downloadverkopen in miljoenen in jaar n , met $n = 0$ is het jaar 2008. Een model dat de toekomstige cd-verkoop beschrijft is het volgende $C(n) = 0,91 \cdot C(n - 1)$ met $C(0) = 18,0$. Hierbij is $C(n)$ het aantal verkochte cd's in miljoenen in jaar n , met $n = 1$ is het jaar 2009. Dus er zijn 18 miljoen cd's verkocht in 2008.

Onderzoek in welk jaar het aantal verkochte cd's voor het eerst kleiner is dan het aantal downloadverkopen.
 (Ontleend aan pilotexamen vwo wiskunde A 2014 tijdvak 2)

Theorie

Rij, term, recursie, recursieve formule, rangnummers en beginterm

Een opeenvolging van getallen heet een rij en de getallen in de rij heten de termen.

Bij veel getallenrijen kun je de volgende term berekenen uit de voorafgaande term(en) met een formule. Dit heet recursie en de bijbehorende formule heet een recursieve formule.

De termen van een rij noteer je met de indexnotatie zoals u_0 , u_1 en u_n , of met de functienotatie $u(0)$, $u(1)$ en $u(n)$.

De getallen $0, 1, 2, 3, \dots, n-1, n, n+1$ zijn de rangnummers van de rij.

Het rangnummer is een positief, geheel getal. De eerste term van een rij heet de beginterm, dit kan $u(0)$ of $u(1)$ zijn. Om een rij vast te leggen, heb je één term nodig. Meestal kies je daarvoor de beginterm.

- S1** Gegeven is de recursieve formule
 $\text{nieuwe waarde} = (\text{oude waarde})^2 + 1$. De beginterm is $u(1) = -2$.
 Bereken de tweede en de derde term van deze rij.
- S2** Gegeven is de rij $a_{n+1} = \frac{2}{a_n} - 5$ met beginterm $a_1 = 1$.
a Is hier de indexnotatie of de functienotatie gebruikt?
b Bereken a_2 en a_3 .

Theorie

Rekenkundige rij, verschil, meetkundige rij en reden

Een rij waarvan je een term vindt door bij de vorige term een constante a op te tellen, heet een rekenkundige rij.

De constante a heet het verschil van de rekenkundige rij.

De recursieve formule is $u(n+1) = u(n) + a$ met beginterm $u(0) = b$.

Een rij waarvan je een term vindt door de vorige term met een constante r te vermenigvuldigen, heet een meetkundige rij.

De factor r heet de reden van de meetkundige rij.

De recursieve formule is $u(n+1) = r \cdot u(n)$ met beginterm $u(0) = b$.

Voorbeeld 1

5, 9, 13, 17, ... is een rekenkundige rij.

Het verschil is 4.

Een recursieve formule voor de rij is

$u(n+1) = u(n) + 4$ met $u(0) = 5$.

Voorbeeld 2

120, 60, 30, 15, ... is een meetkundige rij. De reden is 0,5.

Een recursieve formule voor de rij is

$u(n+1) = 0,5 \cdot u(n)$ met $u(0) = 5$.

- S3** a Welke formule(s) horen bij een rekenkundige rij?
Geef van deze formule(s) het verschil.
- b Welke formule(s) horen bij een meetkundige rij?
Geef van deze formule(s) de reden.

A: $u(n+1) = u(n) - 4$ C: $u(n) = 4 \cdot u(n-1) - 7$
 B: $u(n) = 2 \cdot u(n-1)$ D: $u(n) = 4 \cdot 9^n$

Theorie

Som van termen en somrij

De som van de termen $u(p)$ tot en met $u(q)$ noteer je als

$$\sum_{k=p}^q u(k) = u(p) + u(p+1) + \dots + u(q).$$

Bij een rij $u(n)$ vormen de uitkomsten van de sommen

$$s(0) = \sum_{k=0}^0 u(k), s(1) = \sum_{k=0}^1 u(k), s(2) = \sum_{k=0}^2 u(k), \dots, s(n) = \sum_{k=0}^n u(k)$$

ook weer een rij getallen.

Deze rij uitkomsten noem je de **somrij** s .

Voorbeeld

De rij u is gegeven door de directe formule $u(n) = 3n^2 - 5$.

Bereken $\sum_{k=4}^{10} u(k)$.

Oplossing

$$\begin{aligned} \sum_{k=4}^{10} u(k) &= u(4) + u(5) + \dots + u(10) \\ &= 43 + 70 + 103 + 142 + 187 + 238 + 295 \\ &= 1078 \end{aligned}$$

S4 Bereken de som $\sum_{k=8}^{12} \left(\frac{1}{2}k^2 - 3\right)$.

- S5** Gegeven is de rij $u(n) = n^3 - 2$.
- a Vul de tabel verder in.
- b Bereken $s(0)$ tot en met $s(4)$.

n	0	1	2	3	4
$u(n)$	-2	...	...	...	...

Vaardigheid

Je kunt een recursieve formule bij een rij opstellen.

Als je een recursieve formule bij een rij geeft, dan vermeld je altijd wat de beginterm van de rij is. Een recursieve formule kan beginnen met $u(n+1)$ maar ook met $u(n)$.

Voorbeeld

Gegeven is de rij $u(0) = 9, u(1) = 5, u(2) = 1, u(3) = -3, \dots$.
 Bereken de volgende twee termen van deze rij en geef een recursieve formule voor deze rij u .

Oplossing

Je berekent de volgende term door van de voorafgaande term 4 af te trekken.

$$u(4) = -3 - 4 = -7 \text{ en } u(5) = -7 - 4 = -11$$

Een recursieve formule is $u(n+1) = u(n) - 4$ of

$$u(n) = u(n-1) - 4 \text{ met } u(0) = 9.$$

- S6** Geef een recursieve formule bij de rij
 $u(0) = -108, u(1) = -72, u(2) = -48, u(3) = -32, \dots$

Vaardigheid

Je kunt met je rekenmachine een rij weergeven.

Een ontwikkeling in de tijd die door een rij wordt beschreven, kun je weergeven in een grafiek of in een tabel. Hierin wordt het verband tussen de tijd en de bijbehorende waarde van de rij weergegeven. De grafiek bestaat uit losse punten omdat de rangnummers van de rij gehele getallen zijn.

Voorbeeld

Gegeven is de recursieve formule $N_t = 0,9 \cdot N_{t-1} + 5$ met $N_0 = 100$. Vanaf welk rangnummer is $N_t < 70$?

Oplossing

Voer $u(n) = 0,9u(n-1) + 5$ in je rekenmachine in.
 In een tabel of een grafiek zie je dat vanaf $t = 9$ geldt $N_t < 70$.

- S7** Gegeven is de formule $A(t+1) = 1,4 \cdot A(t) + t$ met $A(0) = 2$. Vanaf welk rangnummer is $A(t) > 3000$?

Vaardigheid

Je kunt een directe formule bij een rij opstellen.

Bij sommige rijen kun je de waarde van een term $u(n)$ direct berekenen met het rangnummer n , zonder gebruik te maken van voorafgaande termen of een recursieve formule.

Je gebruikt dan een directe formule.

De directe formule van een rekenkundige rij met verschil a en

$$u(0) = b \text{ is } u(n) = a \cdot n + b.$$

De directe formule van een meetkundige rij met reden r en

$$u(0) = b \text{ is } u(n) = b \cdot r^n.$$

Voorbeeld 1

Gegeven is de rij $u_{n+1} = u_n - 9$ met $u_1 = 42$.
 Stel een directe formule op bij deze rij.

Oplossing

n	1	2	3	4
u_n	42	33	24	15

u is een rekenkundige rij.
 Het verschil is -9 . $u_0 = 42 + 9 = 51$.
 De directe formule is $u_n = -9n + 51$.

Voorbeeld 2

Gegeven is de rij $v(n) = 0,9 \cdot v(n-1)$ met $v(1) = 72$.
 Stel een directe formule op bij deze rij.

Oplossing

n	1	2	3	4
$v(n)$	72	64,8	58,32	52,488

v is een meetkundige rij.
 De reden is $0,9$. $v(0) = 72 : 0,9 = 80$.
 De directe formule is $v(n) = 80 \cdot 0,9^n$.

- S8** Gegeven is de rij 384, 288, 216, 162, ... met beginterm $v(0) = 384$.
Geef een recursieve formule en een directe formule bij de rij.
b De rij 76, 81, 86, 91, 96 heeft beginterm $w(1) = 76$.
Geef een recursieve formule en een directe formule bij rij w .

Vaardigheid

Je kunt de som van een rekenkundige rij berekenen.

Bij een rekenkundige rij is de som van een aantal termen gelijk aan: $\sum u(n) = \frac{1}{2} \cdot \text{aantal termen} \cdot (\text{eerste term} + \text{laatste term})$.

Voorbeeld

Bereken $\sum_{k=12}^{31} u(k)$ bij de rij $u(n) = 2,5n - 12$.

Oplossing

De rij u is een rekenkundige rij.

Het aantal op te tellen termen is $31 - 11 = 20$.

De eerste term is $u(12) = 2,5 \cdot 12 - 12 = 18$.

De laatste term is $u(31) = 2,5 \cdot 31 - 12 = 65,5$.

$$\sum_{k=12}^{31} u(k) = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot (18 + 65,5) = 835$$

- S9** Bereken de som $\sum_{k=8}^{26} (142 - 5k)$.

Vaardigheid

Je kunt de som van een meetkundige rij berekenen.

Bij een meetkundige rij u met $u(n) = b \cdot r^n$ geldt voor de som van de termen $u(p)$ tot en met $u(q)$:

$$\text{som} = \frac{\text{eerstvolgende term} - \text{eerste term}}{\text{reden} - 1}$$

$$\text{Je kunt dit ook schrijven als } \sum_{k=p}^q u(k) = \frac{b \cdot r^{q+1} - b \cdot r^p}{r - 1}$$

Voorbeeld

Bereken $\sum_{k=2}^9 (8 \cdot (\frac{2}{3})^k)$.

Oplossing

De reden is $r = \frac{2}{3}$.

De eerste term is $u(2) = 8 \cdot (\frac{2}{3})^2$.

De eerstvolgende term $u(10) = 8 \cdot (\frac{2}{3})^{10}$.

$$\begin{aligned} \text{De som is } \sum_{k=2}^9 u(k) &= \frac{u(10) - u(2)}{\frac{2}{3} - 1} = \\ &= \frac{8 \cdot (\frac{2}{3})^{10} - 8 \cdot (\frac{2}{3})^2}{-\frac{1}{3}} \approx 10,3 \end{aligned}$$

- S10** Bereken de som $\sum_{k=4}^{14} (\frac{1}{9} \cdot 3^k)$.

T1 Gegeven zijn de drie rijen u , v en w .

u : 200, 202, 204, 206, ...

v : 200, 300, 450, 675, ...

w : 200, 100, 50, 25, ...

- a Geef de volgende twee termen van elke rij.
- b Stel bij elk van de drie rijen getallen een recursieve formule op.

T2 Het aantal schapen op een boerderij kan worden berekend met de recursieve formule $A(t+1) = 1,04 \cdot A(t)$. Hierin is A het aantal schapen en t de tijd in jaren na april 2019.

Op 1 april 2019 zijn er 800 schapen.

- a Leg uit dat A een meetkundige rij is.
- b Met hoeveel procent neemt het aantal schapen elk jaar toe?
- c Geef een directe formule waarmee je het aantal schapen kunt berekenen als je de tijd in jaren na 1 april 2019 weet.
- d Na hoeveel jaar zijn er voor het eerst meer dan 1000 schapen?



T3 Gegeven is de meetkundige rij u : $1\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$, 5, ... met $u(0) = 1\frac{1}{4}$.

- a Geef van deze rij een recursieve formule en een directe formule.
- b Welke rangnummer heeft de eerste term in deze rij die groter is dan 1 miljoen?
- c Bereken van deze rij de som van de eerste 15 termen.
- d Geef een directe formule voor de somrij $\sum_{k=0}^n u_k$.

T4 Stijn krijgt vanaf 1 januari 2020 per maand € 10,- zakgeld. Zijn ouders verhogen dit bedrag elk kwartaal met € 1,-.

- a Waarom vormen de bedragen die Stijn maandelijks aan zakgeld krijgt geen rekenkundige rij?
- b Geef een directe formule voor de bedragen die Stijn per kwartaal aan zakgeld krijgt.
- c Stijn spaart de helft van zijn zakgeld. Wanneer heeft hij meer dan € 300,- gespaard?

T5 Bij een rij getallen hoort de recursieve formule

$u(n+1) = 0,75 \cdot u(n) + 80$ met $u(0) = 320$.

- a Bereken de tweede, derde en vierde term van deze rij.
- b Walt valt je op aan de rij getallen van opdracht a? Hoe kun je dit aan de formule zien?



- T6** Het aantal boeken in een bibliotheek neemt elk jaar met 2% toe. Aan het einde van elk jaar worden de oudste 100 boeken weggedaan. Op 1 januari 2021 waren er 2500 boeken.
- Een recursieve formule voor het aantal boeken B na t jaren is $B(n) = p \cdot B(n-1) + q$.
Geef de waarden van p en q in deze formule.
 - Bereken het aantal boeken na twee jaar en na vijf jaar.
 - De bibliotheek wil dat er op 1 januari van elk jaar steeds 2500 boeken zijn. Neem aan dat het aantal boeken nog steeds met 2% per jaar toeneemt.
Hoeveel boeken moeten er in dit geval elk jaar worden weggedaan?

- T7** Gegeven zijn de rijen
 $u_n : 2; 0,2; 0,02; 0,002; \dots$ met $u_0 = 2$
 $w_n : 480, 430, 380, 330, \dots$ met $w_0 = 480$

- Bereken $\sum_{k=0}^8 u_k$.
- Bereken $\sum_{k=11}^{20} w_k$.

- T8** In 2001 bevonden zich in de Barentszee 760 zeerobben. Door geboorte bedraagt de jaarlijkse groei van dat aantal 12%. Met recursie kun je nu voorspellen wat de invloed van de jacht op de grootte van de populatie is.
- Stel dat men elk jaar 110 zeerobben vangt.
- Bereken het aantal zeerobben in 2002 en 2003.
 - Geef een recursieve formule van deze groei en laat met behulp van een grafiek of een tabel zien dat het aantal zeerobben voortdurend afneemt.
 - Wil men de populatie behouden, dan moet een vangstquotum worden ingesteld. Dat wil zeggen een maximum aantal zeerobben dat jaarlijks gevangen mag worden.
Onderzoek de groei van de populatie als er jaarlijks 80 zeerobben gevangen worden.
 - Is er een toegestane vangstgrootte waarbij het aantal zeerobben constant of nog net groeiend is? Zo ja, hoe groot is dat vangstquotum?



Je kunt een recursieve formule bij een rij opstellen.

- E1** a Geef een recursieve formule bij de rij
 $u(0) = 96, u(1) = 72, u(2) = 54, u(3) = 40\frac{1}{2}, \dots$
- b Geef een recursieve formule bij de rij
 $v_0 = 12, v_1 = 5, v_2 = -2, v_3 = -9, \dots$

Je kunt met je rekenmachine een rij weergeven.

- E2** Gegeven is de recursieve formule $B(t) = 1,6 \cdot B(t-1) + 5$ met $B(0) = 2$.
- a Maak een tabel bij de rij. Neem voor t de waarden 0 tot en met 10.
- b Plot de bijbehorende grafiek.
- c Vanaf welk rangnummer is $B(t) > 300$?

Je kunt een directe formule bij een rij opstellen.

- E3** a Geef een directe formule bij de rij $u_0 = 22, u_1 = 31, u_2 = 40, u_3 = 49, \dots$
- b Geef een directe formule bij de rij $v(1) = 9, v(2) = 27, v(3) = 81, v(4) = 243, \dots$
- c Geef een directe formule bij de rij 1, 4, 9, 16, ... met beginterm $w(1) = 1$.

Je kunt de som van een rekenkundige rij berekenen.

- E4** Gegeven is de rij $u(n) = 200 - 6n$.

- a Bereken de som $\sum_{k=0}^{11} u(k)$.
- b Bereken de som $\sum_{k=7}^{23} u(k)$.
- c Bereken $6 + 11 + 16 + \dots + 266$.

Je kunt de som van een meetkundige rij berekenen.

- E5** Gegeven is de rij $a(n) = 5 \cdot 1,06^n$.

- a Bereken de som $\sum_{k=0}^{14} a(k)$.
- b Bereken de som $\sum_{k=14}^{26} a(k)$.
- c Bereken $3 + 6 + 12 + \dots + 3072$.

- E6** a Schrijf de eerste vier termen op van de rijen A, B en C.

A: $u(n+1) = 2 \cdot u(n) - 4$ met $u(0) = 3$

B: $K_{n+1} = -\frac{1}{2} \cdot K_n + 1$ met $K_0 = 20$

C: $p(n+1) = (p(n))^2 - p(n)$ met $p(0) = 2$

- b Gegeven is de rij 64, -32, 16, -8, ... met $u(0) = 64$.

Geef een recursieve formule bij deze rij.

- E7** In de Japanse Zee wordt op walvissen gejaagd. De populatie neemt daardoor af, maar aan de andere kant neemt de populatie weer toe omdat er jongen worden geboren. Het aantal walvissen A na t jaar wordt beschreven door $A(t+1) = 1,1 \cdot A(t) - 30$ met $A(0) = 230$.

De tellingen vinden één keer per jaar plaats. Het aantal walvissen is een geheel getal.

- a Geef de betekenis van de getallen 30, 230 en 1,1 voor de walvispopulatie.
- b Plot en schets een grafiek van het voorspelde aantal walvissen voor de eerstkomende 15 jaar.
- c Schets de grafiek die ontstaat als er per jaar 20 walvissen zouden worden gevangen.
- d Onderzoek bij welk jaarlijkse vangstquotum de walvispopulatie stabiel blijft.



- E8** Ga van de rijen na of er sprake is van een rekenkundige rij of een meetkundige rij, of geen van beide.

Geef bij een rekenkundige rij het verschil en bij een meetkundige rij de reden. Geef ook bij elke rekenkundige en meetkundige rij de tiende term.

- | | |
|---------------------------|---------------------------------|
| a 72, 24, 8, ... | d 0,3; 0,03; 0,003; 0,0003; ... |
| b 111, 114, 117, 120, ... | e 1,8; 1,62; 1,458; 1,3122; ... |
| c 23, 14, 8, 5, ... | f 1, -2, 4, -8, ... |

- E9** Meneer Sanders wil deze zomer de vierdaagse van Nijmegen lopen, een evenement dat in week 29 van het jaar wordt gehouden. Hij moet hiervoor flink trainen. Omdat meneer Sanders nog nooit aan wandeltochten heeft deelgenomen, begint hij rustig. In de eerste week van januari loopt hij in totaal zes kilometer. Elke volgende week loopt hij 1,5 kilometer meer.

- a Leg uit dat de wekelijkse afstanden die meneer Sanders loopt een rekenkundige rij vormen.
- b Week 28 is de laatste week waarin meneer Sanders traint. Bereken hoeveel kilometer hij in totaal heeft gelopen als hij aan de vierdaagse begint.

Fibonacci

Leonardo van Pisa, beter bekend als Fibonacci, werd in 1170 geboren in Pisa. Fibonacci komt van 'filius Bonacci', wat 'zoon van Bonacci' betekende. Zijn vader was Guilielmo Bonacci. Leonardo groeide op in Bugia (Noord-Afrika) waar zijn vader diplomaat was.

Hij leerde wiskunde in Bugia en reisde veel rond met zijn vader waarbij hij de wiskundige kennis van landen zoals Egypte, Syrië, Griekenland, Sicilië en de Provence (Frankrijk) bestudeerde. Hij leerde onder andere werken met de Indische symbolen voor getallen: 0, 1, 2, ..., 9 en hun positiestelsel.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
◊	ۛ	ۜ	۝	۞	۟	۠	ۡ	ۢ	ۣ

Fibonacci realiseerde zich dat het rekenen met de Indische cijfers veel sneller gaat dan met getallen in Romeinse cijfers, waarvoor vrijwel altijd een abacus (= telraam) werd gebruikt.

Omstreeks 1200 keerde Fibonacci terug naar Pisa, daar schreef hij een aantal boeken over wiskunde. Zijn belangrijkste werk was de Liber Abaci (1202), een leerboek over het rekenen met Indische cijfers.

Fibonacci is beroemd geworden door de naar hem genoemde rij: 1, 1, 2, 3, 5, ... waarbij je de volgende term vindt door de twee vorige op te tellen, notatie $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, met $F_1 = F_2 = 1$. Fibonacci introduceert de rij met een raadsel over konijnen, waarbij het gaat over het aantal nakomelingen.

Opdracht

- Schrijf de eerste 15 termen op van de rij van Fibonacci.
- Het derde en het zesde getal uit de rij is even, klopt dat ook voor het 9e en 12e getal?
- Als je van twee opeenvolgende getallen uit de rij de kwadraten optelt, krijg je weer een getal uit de rij. Controleer dat voor een aantal paren.



In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Functies met machten
- Redeneren met formules
- Hellingen
- Systematisch tellen



Functies met machten

- 1 Sommige van de volgende functies kun je schrijven als een machtsfunctie $N(t) = t^m$. Zoek uit welke dat zijn en geef in die gevallen de waarde van de exponent m .

a $N(t) = t^2 \cdot t^3$ **d** $N(t) = t^4 + t^6$
b $N(t) = t^{1,3} \cdot t^{2,5} \cdot t$ **e** $N(t) = (t^3)^{2,6}$
c $N(t) = \frac{t^{12}}{t^3}$ **f** $N(t) = \frac{(t^{1,5})^4}{t^2 \cdot t}$

Theorie

Bij het rekenen met machten gelden de volgende rekenregels.

1 $g^0 = 1$ **5** $g^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{g}$
2 $g^1 = g$ **6** $g^p \cdot g^q = g^{p+q}$
3 $g^{\frac{1}{2}} = \sqrt{g}$ **7** $\frac{g^p}{g^q} = g^{p-q}$
4 $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$ **8** $(g^p)^q = g^{p \cdot q}$

Voorbeeld 1

Schrijf als een macht van x .

$$x^3 \cdot x^2 \cdot x^9 = x^{14}$$

$$x \cdot x^{3,2} \cdot x^{-2} = x^{2,2}$$

$$x^{6,4} \cdot \sqrt{x} = x^{6,9}$$

Voorbeeld 2

Schrijf als een macht van q .

$$\frac{q^4 \cdot q^5}{q^3} = \frac{q^9}{q^3} = q^6$$

$$q^{-0,2} \cdot (q^{4,2})^{0,5} = q^{-0,2} \cdot q^{2,1} = q^{1,9}$$

Voorbeeld 3

Schrijf als een som van machten van t .

$$\frac{2t^4 - 6t^{3,8} + 8t^{1,5}}{4t^2} =$$

$$\frac{2t^4}{4t^2} - \frac{6t^{3,8}}{4t^2} + \frac{8t^{1,5}}{4t^2} = \frac{1}{2}t^2 - 1\frac{1}{2}t^{1,8} + 2t^{-0,5}$$

- 2 Schrijf op de manier van de voorbeelden de functies als som of verschil van machtsfuncties.

a $f(v) = v^3 \cdot v^{6,5} + 4v^{10} \cdot v^{-0,5}$
b $H(p) = 2p \cdot p^2 + 5p^{1,3} - 6p^3$
c $m(t) = 3t \cdot (t^{1,6})^2 - 7,8t^{3,1} \cdot t$
d $h(a) = \frac{a^2 \cdot 9a^3}{a^{6,4}}$
e $N(d) = 15d^3 \cdot 2d^{1,5} \cdot 4\sqrt{d}$
f $K(q) = \frac{18q^{3,2} + 7q^{4,9} - 6,4q + 78}{q}$
g $W(p) = \frac{-6p^{3,8} + 9p^{2,3} - 2p + 7,3}{10p}$

Theorie

Door na te gaan hoe een formule is opgebouwd, kun je beredeneren hoe de uitkomst van een formule verandert. Je kunt bijvoorbeeld gebruik maken van de volgende eigenschappen.

- g^t is stijgend als $g > 1$
- g^t is dalend als $0 < g < 1$
- bij een vaste positieve waarde van c en positieve waarde van n wordt de breuk $\frac{c}{n}$ kleiner als n groter wordt.

Voorbeeld

Voor $t \geq 0$ is gegeven $P = \frac{2}{4 + 6 \cdot 0,7^t}$
Beredeneer naar welke grenswaarde P nadert.

Oplossing

Bij $t = 0$ is $P = \frac{2}{4 + 6 \cdot 0,7^0} = \frac{2}{10} = 0,2$.

Als t heel groot wordt, nadert $6 \cdot 0,7^t$

naar nul. Dus $4 + 6 \cdot 0,7^t$ nadert naar 4.

Als t groot wordt, nadert P naar $\frac{2}{4} = 0,5$.

De waarden van P naderen naar 0,5.

- 3** In de formules stelt t de tijd voor en P een hoeveelheid. Beredeneer met de formule naar welke waarde P op den duur nadert.

a $P = 40 + 10 \cdot 0,5^t$

d $P = 250(2 - 65 \cdot 1,5^{-t})$

b $P = 560 - 13 \cdot 0,95^t$

e $P = 750 + 8(5 \cdot 0,2^t - 7)$

c $P = 200 - \frac{10}{5 + 0,3^t}$

f $P = 1000 - \frac{235}{3,5 + 1,2^t}$

- 4** Een slager haalt een stuk vlees uit de vriescel en legt het in de koelcel. De temperatuur T in graden Celsius van het vlees t uur nadat het vlees in de koelcel is gelegd is te berekenen met de

formule $T = 6 - \frac{24}{\sqrt{3t + 1}}$

- a** Welke temperatuur had het vlees op het moment dat het in de koelcel werd gelegd?
- b** Leg uit dat de temperatuur T bij toenemende waarden van t zal blijven stijgen.
- c** Leg uit hoe je aan de formule kunt zien dat de temperatuur van de koelcel 6°C is.

- 5** Een kippenboer mest haantjes van een bepaald ras voor de slacht. Voor de gewichtstoename van haantjes van dat ras geldt de formule $G = \frac{10000}{4 + 200 \cdot 0,4^t}$. Hierbij is G het gewicht in grammen en t de tijd in weken.

- a** Leg uit hoe je uit de formule kunt afleiden dat de grafiek van G stijgend is bij toenemende t .
- b** Als de boer doorgaat met mesten, dan zullen de kippen niet onbegrensd in gewicht blijven toenemen. Welke grenswaarde is er voor het gewicht van de kippen van dit ras? Leg uit hoe je aan je antwoord gekomen bent.

Hellingen

- 6** Gegeven is de functie $A(p) = 6\sqrt{p} - 2p - 1$.
- Bereken de gemiddelde toename van A over het interval $[1, 9]$.
 - Bereken het differentiequotient van A over het interval $[0, 4]$.
 - Benader de helling in het punt $(1, 3)$ door de gemiddelde verandering van A te berekenen over het interval $[1; 1,001]$.

- 7** Gegeven is de functie $p(t) = (t^3 - 4) \cdot 2^t$. In de tabel zie je de waarden van de afgeleide $p'(t)$.

t	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$p'(t)$	-0,695	-0,451	0,054	0,689	0,921	-0,233	-2,773

- Hoe kun je uit deze tabel afleiden dat de grafiek een top heeft voor een waarde van t tussen -5 en -4 ?
- Waarom volgt uit de tabel dat de grafiek nog minstens één top heeft?

Theorie

Voor het differentiëren van een functie gelden de volgende regels:

- als $f(x) = x^n$ dan is $f'(x) = nx^{n-1}$
- als $g(x) = f(x) + c$ dan is $g'(x) = f'(x)$
- als $g(x) = c \cdot f(x)$ dan is $g'(x) = c \cdot f'(x)$
- als $s(x) = f(x) + g(x)$ dan is $s'(x) = f'(x) + g'(x)$

- 8** Differentieer.

- | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|
| a $f(x) = 5x^3 + 7x - 2$ | d $R(m) = 4(6m - 3)^2$ |
| b $Q(t) = 12 - 6t + 8t^4$ | e $K(p) = 2 - 0,8p$ |
| c $p(t) = -t(5t - 1)$ | f $Q(w) = (4w - 1)(w^5 + 4w)$ |

- 9** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x$.

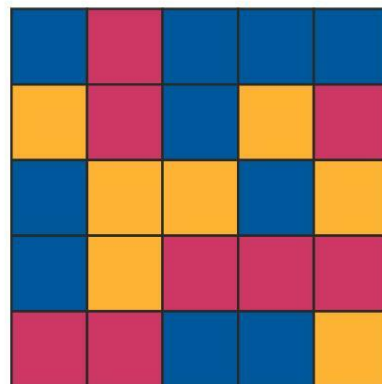
- Geef het functievoorschrift van f' en bereken de waarden van x waarbij $f'(x)$ gelijk is aan 0.
- Bereken de extreme waarden van f .
- Hoe kun je aan het voorschrift van de afgeleide zien dat de grafiek van f stijgt voor $x > 3$?
- Op welk interval daalt de grafiek van f ?
- Gebruik de afgeleide om uit te leggen dat de grafiek van f het sterkst daalt bij $x = 0$.

Systematisch tellen

Theorie

Het oplossen van een telprobleem vereist een systematische aanpak. Dat kan met behulp van een boomdiagram, een wegendigram, een rooster of door de mogelijkheden op een overzichtelijke manier weer te geven.

- 10**
- a** Een rode bal, een blauwe bal en een gele bal worden op een rijtje op tafel gelegd.
Bereken het aantal verschillende rijtjes dat je op deze manier op tafel kunt leggen.
 - b** In een bak zitten vijf zwarte en vijf witte ballen. Uit de bak worden drie ballen gehaald die op een rij op tafel worden gelegd.
Bereken het aantal verschillende rijtjes dat je op deze manier op tafel kunt leggen.
- 11** Uit de bak met vijf rode, vijf blauwe en vijf gele ballen worden drie ballen getrokken en naast elkaar op een rijtje gelegd.
- a** Hoeveel verschillende rijtjes zijn er in totaal mogelijk?
 - b** Hoeveel rijtjes zijn er mogelijk met twee rode ballen?
 - c** Leg uit dat er twaalf verschillende rijtjes mogelijk zijn waarin één rode bal voorkomt.
 - d** Gebruik de antwoorden op opdracht 11b en c om het aantal verschillende rijtjes te berekenen waarin minstens één rode bal voorkomt.
- 12** Deze opdracht gaat over de bak met ballen van opdracht 11. Er worden weer drie ballen op een rijtje gelegd.
- a** Hoeveel verschillende rijtjes zijn er mogelijk als er in het rijtje alleen gele of blauwe ballen voor mogen komen?
 - b** Verklaar dat je het antwoord op opdracht 11d ook had kunnen vinden door van het antwoord op opdracht 11a het antwoord op opdracht 12a af te trekken.
- 13** De 25 leerlingen van een brugklas gaan een kunstwerk maken. Iedere leerling verft een vierkant bordje in de kleur rood, geel of blauw. Daarna worden de bordjes samengevoegd tot één groot vierkant.
- a** Hoeveel verschillende kunstwerken kunnen de leerlingen maken?
 - b** Door de leerlingen zijn acht rode bordjes gemaakt, zeven gele en tien blauwe. Daarvan kun je een kunstwerk maken zoals hiernaast.
Hoeveel verschillende kunstwerken zijn er mogelijk met deze aantallen rode, gele en blauwe bordjes?





A close-up photograph of a sheep's head, showing its eye and ear. In the background, the heads of other sheep are visible, slightly out of focus. The sheep has a thick, white, woolly coat.

SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In de hoofdstukken 10 en 11 heb je al kennisgemaakt met de normale verdeling. Met behulp van de vuistregels van de normale verdeling rekende je bijvoorbeeld een percentage, een kans of een grenswaarde uit.

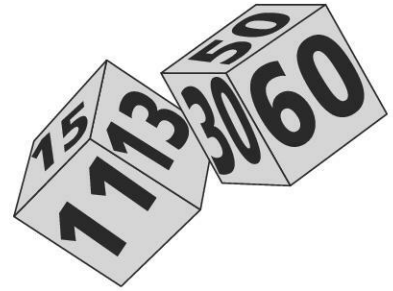
In dit hoofdstuk leer je hoe je deze berekeningen met de rekenmachine kunt doen, want niet alle vraagstukken zijn bij de normale verdeling met de vuistregels op te lossen. Aan het eind van het hoofdstuk leer je hoe je de normale verdeling kunt gebruiken bij het berekenen van kansen bij discrete stochasten.

Het werken met de normale verdeling speelt een belangrijke rol in hoofdstuk 17.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk:

- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 13
- *Abstraheren* opdracht 30
- *Logisch redeneren en bewijzen* opdracht 25

- V1** Op een dobbelsteen staan de getallen 1 tot en met 6. Stochast X is het getal dat boven komt bij een worp met de dobbelsteen.
- Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.
 - Op een tweede dobbelsteen staan de getallen 11, 12, ..., 16. Bij een worp met deze dobbelsteen hoort stochast Y . Bereken $E(Y)$ en $\sigma(Y)$.
 - Op een derde dobbelsteen staan de getallen 10, 20, ..., 60. De bijbehorende stochast is Z . Bereken $E(Z)$ en $\sigma(Z)$.
 - Wat valt je op als je de uitkomsten van de opdrachten a, b en c vergelijkt?



Theorie

Een variabele waarvan de waarde afhangt van het toeval heet een **stochast**. De waarde van een stochast is een getal. De waarde van een stochast X kan met een constante c worden verhoogd of met een constante c worden vermenigvuldigd. De **verwachtingswaarde** en de verwachte **standaardafwijking** wijzigen dan als volgt:

$$\begin{aligned} E(X + c) &= E(X) + c & E(c \cdot X) &= c \cdot E(X) \\ \sigma(X + c) &= \sigma(X) & \sigma(c \cdot X) &= c \cdot \sigma(X) \quad (c > 0) \end{aligned}$$

Voor de stochasten X en Y geldt:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Als X en Y onafhankelijk stochasten zijn dan geldt:

$$\sigma(X + Y) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2}.$$

Voorbeeld

Van de stochast X is bekend dat $E(X) = 9,7$ en $\sigma(X) = 2,1$. De stochasten Y en Z worden gegeven door $Y = X + 4,1$ en $Z = 10 \cdot X$. Bereken verwachtingswaarde en standaardafwijking van Y en van Z .

Oplossing

$$E(Y) = E(X + 4,1) = E(X) + 4,1 = 13,8$$

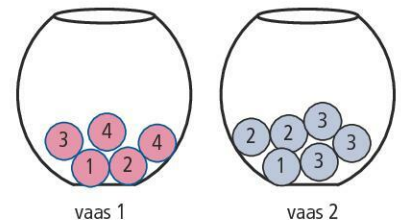
$$\sigma(Y) = \sigma(X + 4,1) = \sigma(X) = 2,1$$

$$E(Z) = E(10 \cdot X) = 10 \cdot E(X) = 97$$

$$\sigma(Z) = \sigma(10 \cdot X) = 10 \cdot \sigma(X) = 21$$

- V2** De maximumdagtemperatuur in graden Fahrenheit in New York op een willekeurige dag in augustus is stochast F met $E(F) = 77$ en $\sigma(F) = 4,2$. De temperatuur in graden Celsius is stochast C . Het verband tussen C en F is $C = 0,56 \cdot F - 17,78$. Bereken $E(C)$ en $\sigma(C)$.

- V3** Uit elke vaas wordt één balletje getrokken. Stochast X is het getal op het balletje uit vaas 1 en stochast Y is het getal op het balletje uit vaas 2.
- Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.
 - Bereken $E(Y)$ en $\sigma(Y)$.
 - Stochast Z is de som van de twee getrokken getallen. Bereken $E(Z)$ en $\sigma(Z)$.



Theorie

Zijn $X_1, X_2, \dots, X_n$ onafhankelijke stochasten, elk met dezelfde kansverdeling als X , dan geldt de $\sqrt{n}$ -wet.

- Voor de som $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ van de uitkomsten geldt: $E(S) = n \cdot E(X)$ en $\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$.
- Voor het gemiddelde $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ van de uitkomsten geldt: $E(\bar{X}) = E(X)$ en $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Voorbeeld

Een kansexperiment met uitkomst stochast X wordt 25 keer herhaald. Er geldt $E(X) = 6$ en $\sigma(X) = 3$. S is de som van de uitkomsten en $\bar{X}$ is het gemiddelde van de uitkomsten. Bereken $E(S)$, $\sigma(S)$, $E(\bar{X})$ en $\sigma(\bar{X})$.

Oplossing

$$E(S) = n \cdot E(X) = 25 \cdot 6 = 150$$

$$\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X) = \sqrt{25} \cdot 3 = 15$$

$$E(\bar{X}) = E(X) = 6$$

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{25}} = 0,6$$

V4 Uit vaas 1 van opdracht V3 wordt 10 keer met terugleggen een balletje getrokken.

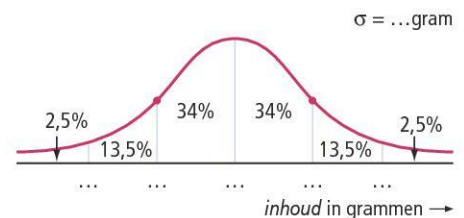
- Stochast S is de som van de getrokken getallen. Bereken $E(S)$ en $\sigma(S)$.
- Stochast $\bar{X}$ is het gemiddelde van de getrokken getallen. Bereken $E(\bar{X})$ en $\sigma(\bar{X})$.

V5 Een fabrikant verpakt 100 koekjes in een blik. Het gewicht van een willekeurig koekje uit de partij is een stochast Z met $E(Z) = 12$ gram en $\sigma(Z) = 0,3$ gram. Het gewicht van een leeg blik is een stochast D met $E(D) = 46$ gram en $\sigma(D) = 1,2$ gram.

- Stochast $\bar{Z}$ is het gemiddelde gewicht van de 100 koekjes. Bereken $E(\bar{Z})$ en $\sigma(\bar{Z})$.
- Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het totale gewicht van een blik met 100 koekjes.

V6 De inhoud X in grammen van blikjes kattenvoer is normaal verdeeld met een gemiddelde $\mu = 405,4$ gram en een standaardafwijking $\sigma = 7,4$ gram. Dat noteer je als $\text{Norm}(405,4; 7,4)$ -verdeeld.

- Vul bij de schets op de puntjes de juiste waarden in.
- Bereken $P(X < 398)$.
- Bereken $P(398 \leq X \leq 420,2)$.
- Hoeveel gram kattenvoer bevatten de 2,5% blikjes met de meeste inhoud minimaal?



15.1 Percentage berekenen

Je leert

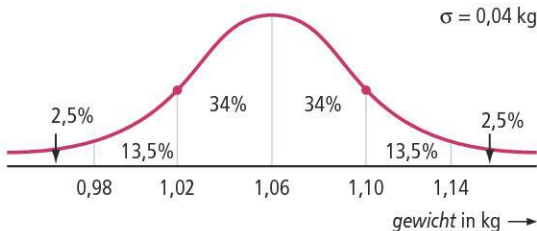
- hoe je een percentage of een kans bij een normaal verdeelde stochast berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 1—2—3—4—05—06
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6
- uitdagend: 1—2—3—5—6—U1

Van een partij galiemeloenen is het gewicht normaal verdeeld met een gemiddelde van 1,06 kg en een standaardafwijking van 0,04 kg.

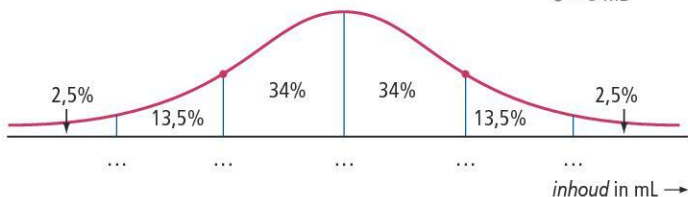
$$\sigma = 0,04 \text{ kg}$$



- Hoeveel procent van de galiemeloenen weegt meer dan 1 kg?

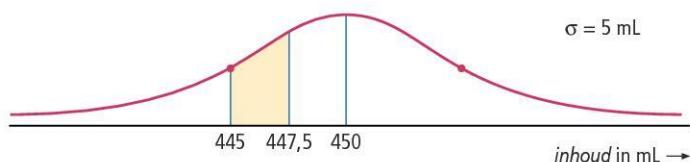
- 1 Afwasmiddel wordt verkocht in flesjes met een netto-inhoud van 450 mL. De machine die de flesjes vult, doet echter niet steeds precies 450 mL in het flesje. De ene keer wat meer, de andere keer wat minder. Er is vastgesteld dat de inhoud in mL Norm(450, 5)-verdeeld is.

$$\sigma = 5 \text{ mL}$$



- Vul bij de schets op de puntjes de juiste waarden in.
- Hoeveel procent van de flesjes bevat meer dan 460 mL afwasmiddel?
- Hoe groot is de kans dat een willekeurig flesje minder dan 445 mL afwasmiddel bevat?
- 34% van de flesjes bevat tussen de 445 mL en 450 mL afwasmiddel.
Zal het percentage van de flesjes dat tussen de 445 mL en 447,5 mL afwasmiddel bevat minder, ongeveer of meer dan 17% zijn?

- 2 Je gaat met de rekenmachine het percentage flesjes berekenen dat tussen de 445 mL en 447,5 mL afwasmiddel bevat.



- Bereken met je rekenmachine, in vier decimalen, de kans dat een willekeurig flesje tussen de 445 mL en 447,5 mL afwasmiddel bevat. Hoeveel procent van de flesjes bevat dus tussen de 445 mL en 447,5 mL afwasmiddel
- Komt je antwoord bij 2a overeen met je antwoord van opdracht 1d?

→ Instructie rekenmachine | Normale verdeling

Aanpak

Hoe bereken je bij een normaal verdeelde stochast een percentage of een kans?

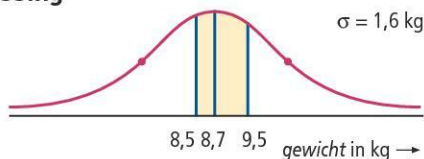
- Teken zo nodig een klokvorm en geef daarin de bekende waarden aan.
- Geef de grenzen aan en arceer het bedoelde gebied.
- Bereken met je rekenmachine de gevraagde kans.

Voorbeeld

Het gewicht in kg van zakken tuinaarde is $\text{Norm}(8,7; 1,6)$ -verdeeld.
Hoeveel procent van de zakken tuinaarde heeft een gewicht tussen de 8,5 kg en 9,5 kg?

Oplossing

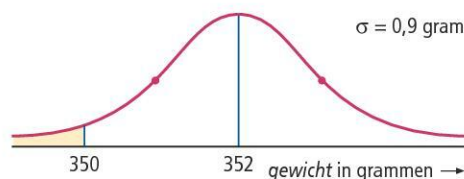
-
-



- Optie: normaal cumulatief
ondergrens = 8,5, bovengrens = 9,5, $\mu = 8,7$ en $\sigma = 1,6$
Dit geeft 0,2412...
Ongeveer 24% van de zakken tuinaarde heeft een gewicht tussen 8,5 kg en 9,5 kg.

- Hoeveel procent van de zakken tuinaarde uit het voorbeeld heeft een gewicht tussen 8,0 kg en 9,0 kg?
 - Hoe groot is de kans dat een willekeurig zak tuinaarde een gewicht heeft tussen de 7,0 kg en 8,5 kg?

- 4** Het gewicht in grammen van potten pindakaas is Norm(352; 0,9)-verdeeld. Je gaat berekenen hoeveel procent van de potten een gewicht heeft van minder dan 350 gram.
- Leg uit dat het aangegeven gebied geen linkergrens heeft.
 - Gebruik een voldoende klein getal als linkergrens (bijvoorbeeld -10^{99}) en bereken het gevraagde percentage.



Als een gebied onder de klokvorm geen linkergrens heeft, dan voer je als linkergrens het getal -10^{99} in. Heeft een gebied geen rechtergrens, dan neem je 10^{99} als rechtergrens.

Ondersteunende route → maak opdracht 05

- 5** Bij het jaarlijkse onderzoek onder tweedeklassers constateert de schoolarts dat de lengte in cm van de 14-jarige jongens Norm(164; 7,2)-verdeeld is.
- Bereken de kans dat een willekeurige jongen kleiner is dan 168,5 cm.
 - Hoeveel procent van de jongens is langer dan 180 cm?
 - Bereken de kans dat twee willekeurige jongens beiden langer zijn dan 175 cm.
 - De school heeft 292 jongens met een leeftijd van 14 jaar. Hoeveel jongens zijn naar verwachting langer dan 175 cm?

Ondersteunende route → maak opdracht 06

- 6** Ilona bakt pannenkoeken waarvan het gewicht in grammen Norm(78; 5,7)-verdeeld is.
- Bereken de kans dat een willekeurige pannenkoek meer dan 80 gram weegt.
 - Je wilt de kans berekenen dat vier willekeurige pannenkoeken samen meer dan 320 gram wegen. Waarom moet je hier de $\sqrt{n}$ -wet gebruiken?
 - Bereken de kans van opdracht b.
 - Ilona heeft borden waarvan het gewicht in grammen Norm(170, 25)-verdeeld is. Bereken de kans dat een willekeurig bord met één willekeurige pannenkoek erop tussen de 250 gram en 300 gram weegt.

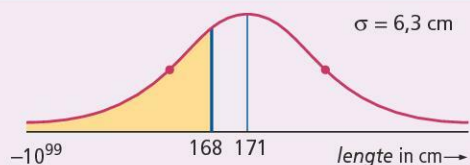
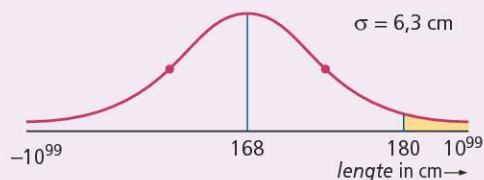


Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

05 De lengte in cm van de 14-jarige meisjes op een school is Norm(171; 6,3)-verdeeld.

- Bereken de kans dat een willekeurig meisje kleiner is dan 168 cm. Neem als linkergrens -10^{99} .
- Welk getal vul je als rechtergrens in als je wilt berekenen hoe groot de kans is dat een willekeurig meisje langer dan 180 cm is? Bereken deze kans.
- Vul in: de kans dat twee willekeurige meisjes beiden langer zijn dan 180 cm is $\dots \cdot \dots \approx \dots$
- Bereken de kans dat twee willekeurige meisjes beiden kleiner zijn dan 165 cm.
- De school heeft 198 meisjes van 14 jaar. Hoeveel meisjes zijn naar verwachting langer dan 180 cm?



06 Karen maakt kaarsen van bijenwas. Het gewicht in grammen van de kaarsen is Norm(290, 17)-verdeeld.

- Bereken de kans dat een willekeurige kaars meer dan 300 gram weegt.
- De stochast T is het gewicht van de zes willekeurige kaarsen samen. Je gaat de kans berekenen dat zes willekeurige kaarsen samen meer dan 1800 gram wegen. Daarbij heb je de $\sqrt{n}$ -wet nodig. Vul op het bovenste blaadje de ontbrekende getallen in.
- Bereken de gevraagde kans van opdracht b.
- Bo maakt kaarsenstandaards van ruw hout. Het gewicht in grammen van deze standaards is Norm(185, 25)-verdeeld. S is het gewicht van een kaarsenstandaard met één kaars. Vul op het onderste blaadje de ontbrekende getallen in en bereken de kans dat een kaarsenstandaard met één willekeurige kaars tussen de 450 gram en 500 gram weegt.

Uitdagende opdrachten

U1 Het nettogewicht in grammen van puddingpoeder in pakjes puddingpoeder is Norm(100, 5)-verdeeld. Het tarragewicht (het gewicht van een leeg pakje) is Norm(6; 1,5)-verdeeld. Het brutogewicht is het nettogewicht plus het tarragewicht.

- Bereken de kans dat een willekeurig pakje puddingpoeder bruto meer dan 110 gram weegt.
- De pakjes met puddingpoeder worden in dozen van 200 stuks verpakt. Het gewicht in grammen van een lege doos is Norm(950, 90)-verdeeld. Hoe groot is de kans dat een volle doos meer dan 22,5 kg weegt?

15.2 Grenswaarde berekenen

Je leert

- hoe je een grenswaarde berekent bij een gegeven kans van een normaal verdeelde stochast

Leerroutes

- ondersteunend: 7—8—09—10—011—11—12
- doorlopend: 7—8—9—10—11—12—13
- uitdagend: 7—8—9—11—12—13—U2

Van een bepaald ras van konijnen is het gewicht van volwassen dieren normaal verdeeld met een gemiddelde van 2,05 kg en een standaardafwijking van 0,35 kg. Flip is een van deze konijnen en behoort tot de 10 procent zwaarste konijnen.

- Is het gewicht van Flip meer of minder dan 2,5 kg?



- 7 Het gewicht G in grammen van honing in potten is Norm(354,2; 3,8)-verdeeld.

- a Ga na dat de kans dat een willekeurig gekozen pot hoogstens 350 gram honing bevat ongeveer gelijk is aan 0,1345.
- b Vul de tabel verder in.

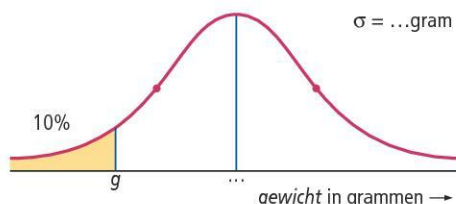
g in grammen	350	351	352	353	354
$P(G \leq g)$	0,1345	...	...	...	...

- c Henk wil weten hoeveel gram honing er maximaal zit in de 25% lichtste potten.
Leg met behulp van de tabel uit tussen welke twee gehele getallen dit gewicht ligt.
- d Maak met je rekenmachine een tabel en zoek uit hoeveel gram honing er maximaal zit in de 25% lichtste potten.
Geef je antwoord in één decimaal.

→ Instructie rekenmachine | Normale verdeling

- 8 Deze opdracht gaat over de potten met honing van opdracht 7. Je gaat met de rekenmachine berekenen hoeveel gram honing de 10% lichtste potten bevatten. Noem deze waarde g .

- a Vul bij de schets op de puntjes de juiste waarden in.
- b Waarom is het lijntje bij g links van het gemiddelde getekend?
- c Bereken $\mu - \sigma$ en $\mu - 2 \cdot \sigma$.
- d Leg uit dat g tussen 346,6 en 350,4 ligt.
- e Bereken met je rekenmachine hoeveel gram honing de 10% lichtste potten maximaal bevatten.



Aanpak

Hoe bereken je een grenswaarde bij een gegeven kans van een normaal verdeelde stochast?

- 1 Teken zo nodig een klokform en geef daarin het gemiddelde en de standaardafwijking aan.
- 2 Arceer het gegeven gebied en geef de kans die bij het gebied hoort.
- 3 Bereken met je rekenmachine de gevraagde grenswaarde.

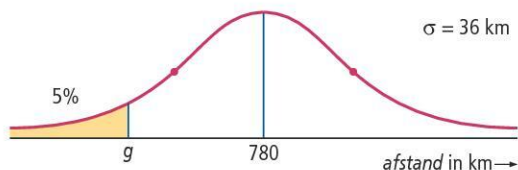
Voorbeeld

De afstand in km die een bepaald type auto op een volle tank met een constante snelheid kan rijden, is Norm(780, 36) -verdeeld. Een auto behoort tot de 5% van de auto's die het minst ver kan rijden op een volle tank.

Hoeveel km kan deze auto maximaal rijden?

Oplossing

1
2



- 3 Invoer: $y_1 = \text{normaal cum. } (-10^{99}, x, 780, 36)$
 $y_2 = 0,05$
Venster: $700 \leq x \leq 780, 0 \leq y \leq 0,1$
Optie: snijpunten
De coördinaten van het snijpunt zijn (720,79; 0,05).
De auto kan maximaal 720 km rijden.

Ondersteunende route → maak opdracht 09

- 9 Van 2000 batterijen wordt de levensduur in uren gemeten. Deze blijkt Norm(52, 9)-verdeeld te zijn.
- a Hoe groot is de levensduur minimaal van de batterij die behoort tot de 8% batterijen met de grootste levensduur?
 - b En hoe groot is de levensduur maximaal van een batterij die behoort tot de groep van 10 batterijen met de kortste levensduur?

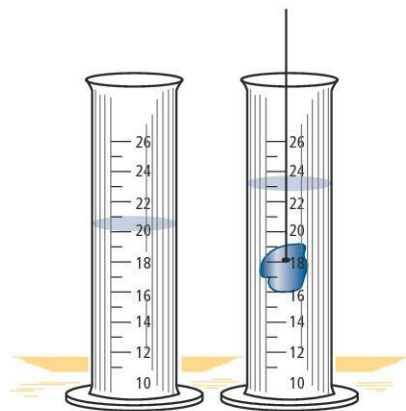
- 10 **H** Tot 1996 moesten jongens nog in militaire dienst. De lengte in cm van de dienstplichtigen in 1987 is Norm(181,3; 7)-verdeeld.

- a Welke lengte hadden in 1987 de 4% kleinste dienstplichtigen maximaal? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.
- b En welke lengte hadden de 4% langste dienstplichtigen minimaal?
- c Zowel de 5% kleinste als de 5% grootste dienstplichtigen werden op basis van hun lengte afgekeurd. Welke lengte hadden deze afgekeurde dienstplichtigen?



Ondersteunende route → maak opdracht 011

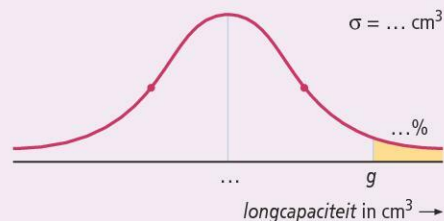
- 11** Elk jaar bepalen leerlingen het volume in cm^3 van een steentje met de onderdompelingsmethode. De resultaten zijn bij benadering normaal verdeeld met een gemiddelde van $64,3 \text{ cm}^3$ en een standaardafwijking van $2,6 \text{ cm}^3$.
- Hoeveel procent van de leerlingen vinden naar verwachting een volume tussen 63 cm^3 en 65 cm^3 ?
 - Tussen welke grenzen ligt het gemeten volume van het steentje bij de 40% leerlingen die het dichtst bij het gemiddelde zitten?
 - De 20% leerlingen waarbij het gemeten volume het meest van het gemiddelde afwijkt, moeten de proef opnieuw doen. Welke volume hebben deze leerlingen bij de eerste proef gemeten?
- 12** Een fabrikant levert pakken volle melk waarvan het vetgehalte in procenten Norm(3,50; 0,02)-verdeeld is.
- H**
- Bereken het minimale vetgehalte van de 13% pakken volle melk met het hoogste vetgehalte.
 - Tussen welke grenzen ligt het vetgehalte van de middelste 80% pakken?
 - Joris koopt drie willekeurige pakken volle melk. Bereken de kans dat alle drie de pakken een vetgehalte hebben van meer dan 3,51%.
- 13** Bij een sportactiviteit tijdens Koningsdag doen alle leerlingen van groep 6 van de basisscholen van een stad mee. Er worden vijf groepen gemaakt waarbij de leerlingen op basis van hun lengte worden ingedeeld. De lengte in cm van deze leerlingen is Norm(132,4; 8,6)-verdeeld. De organisator maakt een klassenindeling bij de lengte waarbij in elk van de vijf klassen evenveel leerlingen komen. Bereken van alle klassen de klassengrenzen.



Uitdagende route → maak opdracht U2

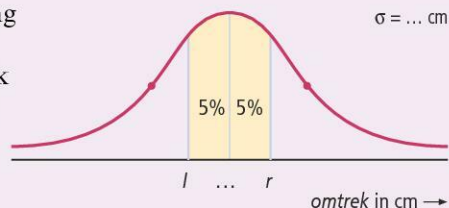
Ondersteunende opdrachten

- 09** Van 1600 mannelijke studenten is de longcapaciteit gemeten. Deze blijkt normaal verdeeld te zijn met een gemiddelde van 4100 cm^3 en een standaardafwijking van 400 cm^3 .
- Vul bij de schets op de puntjes de juiste waarden in.
 - Je gaat de minimale longcapaciteit van een student berekenen die behoort tot de 4% studenten met de grootste longcapaciteit. Noem deze waarde g .
Waarom is het lijntje bij g rechts van het gemiddelde getekend?
 - Bereken $\mu + \sigma$ en $\mu + 2 \cdot \sigma$.
 - Leg uit dat g tussen 4500 en 4900 ligt.
 - Bereken de linkergrens van het getekende gebied.
 - Welke longcapaciteit hebben deze studenten minimaal?
 - Je gaat nu de maximale longcapaciteit berekenen van een student die behoort tot de groep van 240 studenten met de kleinste longcapaciteit.
Welk percentage hoort bij 240 van de 1600 studenten?
 - Bereken de maximale longcapaciteit van deze studenten.



- 011** Al jarenlang laat een docent zijn tweede klas leerlingen de omtrek van een blikje meten. De resultaten zijn normaal verdeeld met een gemiddelde van $19,15 \text{ cm}$ en een standaardafwijking van $1,06 \text{ cm}$.

- Hoeveel procent van de leerlingen vinden naar verwachting een omtrek tussen $19,0 \text{ cm}$ en $19,5 \text{ cm}$?
- Je gaat berekenen tussen welke grenzen de gemeten omtrek ligt bij de 10% leerlingen die het dichtst bij de gemiddelde omtrek zitten.
Waarom staat er in de schets twee keer 5%?
- Vul bij de schets op de puntjes de juiste waarden in.
- Van de leerlingen heeft 5% een omtrek gemeten tussen $l \text{ cm}$ en $19,15 \text{ cm}$.
Bereken met je rekenmachine l .
- Bereken met je rekenmachine r .
- Tussen welke grenzen ligt de gemeten omtrek bij deze leerlingen?



Uitdagende opdrachten

- U2** De stochast X is $\text{Norm}(230,2; 17,1)$ -verdeeld. Voor de getallen p en q geldt $P(p \leq X \leq q) = 0,11$.
- Bereken p als $q = 219,4$.
 - Bereken q als $p = 219,4$.
 - Bereken p als geldt $q = p + 10$.

15.3 Gemiddelde en standaardafwijking berekenen

Je leert

- hoe je een gemiddelde of een standaardafwijking berekent van een normaal verdeelde stochast

Leerroutes

- ondersteunend: 14—15—16—017—018—19
- doorlopend: 14—15—16—17—18—19
- uitdagend: 14—15—17—18—19—U3

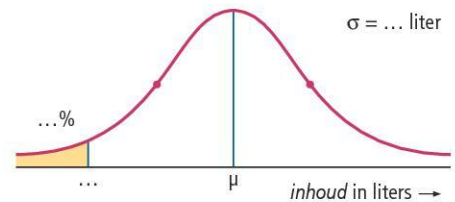
Op consultatiebureaus in Nederland worden drie maanden oude baby's gecontroleerd op hun ontwikkeling. Daarbij wordt onder andere de lengte in cm gemeten. De lengte van baby's was in 2020 normaal verdeeld met een standaardafwijking van 4,0 cm. Zo'n 8 % van de baby's was kleiner dan 54,4 cm. Joop vraagt zich af hoeveel cm de gemiddelde lengte van de baby's was. Hij gokt dat de gemiddelde lengte minder 58 cm was.

- Onderzoek of Joop gelijk heeft.



- 14** Een machine vult flessen motorolie. De inhoud V in liters is Norm(4,3; 0,2)-verdeeld. De flessen worden gecontroleerd voordat ze de fabriek verlaten. Flessen die minder dan 4 liter motorolie bevatten, worden opnieuw gevuld.
- Hoeveel procent van de flessen wordt naar verwachting opnieuw gevuld?
 - De fabrikant besluit de machine op een ander gemiddelde in te stellen zodat slechts 1% van de flessen opnieuw gevuld wordt. Daarbij verandert de standaardafwijking niet. Is het nieuwe gemiddelde hoger of lager dan 4,3 liter?
 - Wordt aan de eis voldaan als de machine wordt ingesteld op een gemiddelde inhoud van 4,5 liter?

- 15** Je gaat met de rekenmachine berekenen op welk gemiddelde μ je de machine van opdracht 14 moet instellen zodat slechts 1% van de flessen opnieuw gevuld wordt.
- Vul bij de schets op de puntjes de juiste waarden in.
 - Leg uit dat het gemiddelde meer dan 4,4 liter moet zijn.
 - Bereken met je rekenmachine de waarde van μ . Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.
 - Op welk gemiddelde wordt de machine ingesteld als aan de eis wordt voldaan?



→ Instructie rekenmachine | Normale verdeling

Aanpak

Hoe bereken je een gemiddelde of standaardafwijking bij een gegeven kans van een normaal verdeelde stochast?

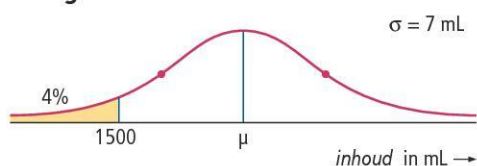
- 1 Teken zo nodig een klokform en geef daarin de bekende waarden aan.
- 2 Arceer het gegeven gebied en geef de kans die bij het gebied hoort.
- 3 Voer de gegevens in je rekenmachine in en bereken het gemiddelde of de standaardafwijking.

Voorbeeld 1

De inhoud van pakken melk is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 7 mL. Zo'n 4% van de pakken bevat minder dan 1500 mL. Bereken het gemiddelde.

Oplossing

1
2



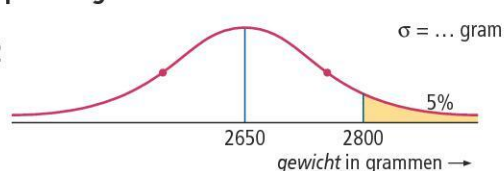
- 3 Invoer: $y_1 = \text{normal cum. } (-10^{99}, 1500, x, 7)$
 $y_2 = 0,04$
Venster: $1500 \leq x \leq 1515, 0 \leq y \leq 0,1$
Optie: snijpunt
De coördinaten van het snijpunt zijn (1512,25; 0,04).
Het gemiddelde is ongeveer 1512 mL.

Voorbeeld 2

Het gewicht van aardappelen is normaal verdeeld met een gemiddelde van 2650 gram. Zo'n 5% van de zakken bevat meer dan 2800 gram. Bereken de standaardafwijking.

Oplossing

1
2



- 3 Invoer: $y_1 = \text{normal cum. } (2800, 10^{99}, 2650, x)$
 $y_2 = 0,05$
Venster: $50 \leq x \leq 150, 0 \leq y \leq 0,1$
Optie: snijpunt
De coördinaten van het snijpunt zijn (91,19; 0,05).
De standaardafwijking is ongeveer 91,2 gram.

- 16 a Bereken de gemiddelde inhoud van een pak melk uit voorbeeld 1 als niet 4% maar 2% van de pakken minder dan 1500 mL bevat.
- b Bereken de standaardafwijking van het gewicht van de zakken aardappelen uit voorbeeld 2 als niet 5% maar 8% van de zakken meer dan 2800 gram aardappelen bevat.

Ondersteunende route → maak opdracht 017

- 17 **H** Een machine vult pakken houtskool. Het gewicht van de pakken is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 80 gram. De fabrikant wil dat 2% van de pakken een gewicht heeft van minder dan de 2,5 kg die op het pak staat vermeld.
- a Bereken het gemiddelde waarop de machine moet worden ingesteld om aan de 2%-eis te voldoen.
- b Bij een andere nauwkeurige machine wordt aan de eis voldaan als het gemiddelde ingesteld wordt op 2520 gram. Bereken de standaardafwijking van deze machine.

Ondersteunende route → maak opdracht 018

- 18** In een bouwmarkt liggen in twee bakken schroeven. De lengte van de schroeven is in beide bakken normaal verdeeld.
- H**
- a** In bak A liggen 1000 schroeven. De gemiddelde lengte van deze schroeven 4,03 cm. Slechts 50 schroeven zijn korter dan 4 cm.
Bereken, in twee decimalen, de standaardafwijking van de schroeven in deze bak.
- b** In bak B liggen 800 schroeven. De standaardafwijking van de lengte van de schroeven is 0,07 cm. In deze bak zijn 12 schroeven langer dan 5,2 cm.
Bereken de gemiddelde lengte in cm van de schroeven in deze bak. Rond af op twee decimalen.

- 19** IJsproducent Pinguïn produceert 2,94 miljoen bekertjes roomijs. De hoeveelheid ijs die in de bekertjes gedaan wordt, is bij benadering normaal verdeeld. Op zo'n bekertje staat dat het 125 mL ijs bevat. Pinguïn stelt het gemiddelde van de vulmachine in op 129,8 mL, zodat er gemiddeld 129,8 mL ijs in de bekertjes terechtkomt. De standaardafwijking van de hoeveelheid ijs die in de bekertjes terechtkomt, is 2,2 mL.

- a** Bereken hoeveel bekertjes er naar verwachting tussen 124 mL en 126 mL ijs bevatten. Geef je antwoord in duizenden bekertjes nauwkeurig.
- b** De overheid eist dat hooguit 5% van de bekertjes minder dan 125 mL ijs bevat.
Toon aan dat Pinguïn met zijn instelling van de vulmachine aan de eis van de overheid voldoet.
- c** Pinguïn kan zijn gemiddelde lager instellen en toch aan de eis van de overheid blijven voldoen. Bij elk lager gemiddelde blijft de standaardafwijking 2,2 mL. Het instellen van zo'n lager gemiddelde levert bij 2,94 miljoen bekertjes een aardige besparing op aan de hoeveelheid roomijs die men moet produceren. De productiekosten van het roomijs bedragen 0,73 euro per liter.
Bereken hoeveel euro Pinguïn maximaal kan besparen.

(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2005, tijdvak 2)

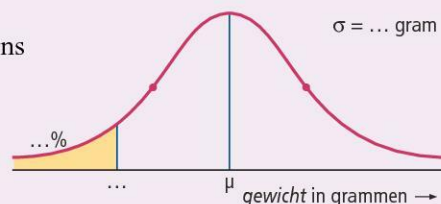


Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

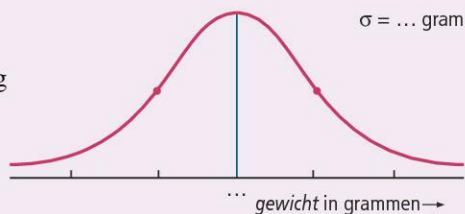
017 Een machine vult pakken waspoeder. De hoeveelheid poeder per pak in grammen is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 8 gram. De fabrikant wil dat hoogstens 5% van de pakken een vulgewicht heeft van minder dan de 1000 gram die op het etiket staat vermeld.

- Vul bij de schets op de puntjes de juiste waarden in.
- Waarom is het gemiddelde meer dan 1008 gram maar minder dan 1016 gram?
- Bereken het gemiddelde gewicht waarop de machine moet worden ingesteld om aan de 5%-eis te voldoen.
- Een andere machine vult de pakken nauwkeuriger. Bij deze machine wordt aan de 5%-eis voldaan als het gemiddelde ingesteld wordt op 1007 gram. Maak een nieuwe schets en zet de gegeven waarden er in.
- Waarom zal de standaardafwijking bij deze machine kleiner dan 8 gram zijn?
- Bereken de standaardafwijking van deze machine.



018 Van een kastanjeboom zijn de kastanjes gewogen. Het gewicht van de kastanjes in grammen is normaal verdeeld met een gemiddelde van 18,6 gram. Van de 80 kastanjes zijn er 6 zwaarder dan 22,2 gram.

- Hoeveel procent is 6 van de 80 kastanjes?
- Breng in de schets de gegeven waarden aan.
- Beredeneer met de schets waarom de standaardafwijking kleiner is dan 3,6 gram.
- Bereken in één decimaal de standaardafwijking van het gewicht van de kastanjes.
- Van een perenboom worden 120 peren gewogen. Het gewicht in grammen is normaal verdeeld en heeft een standaardafwijking van 9,2 gram. Drie peren wegen meer dan 240 gram. Bereken het gemiddelde gewicht van de peren. Rond je antwoord af op hele grammen.



Uitdagende opdrachten

U3 In een bak liggen 500 tennisballen. Het gewicht van de tennisballen is normaal verdeeld. Van de 500 tennisballen hebben er 450 een gewicht tussen 50 gram en 60 gram. De standaardafwijking van het gewicht van de tennisballen is 2,6 gram. Welke waarden kan het gemiddelde gewicht van de tennisballen in de bak hebben?

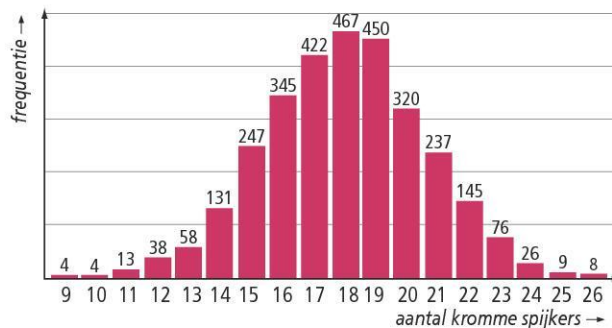
15.4 Normale verdeling met discrete waarden

Je leert • hoe je de normale verdeling gebruikt om een discrete stochast te benaderen

Leerroutes • ondersteunend: 20—21—022—22—23—024—25
• doorlopend: 20—21—22—23—24—25—26
• uitdagend: 20—21—22—24—25—26—U4

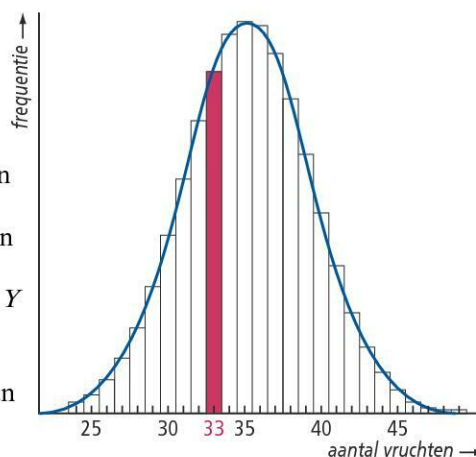
In een doosje zitten precies 1000 spijkers. Bij een controle van 3000 doosjes is het aantal kromme spijkers geteld. Het gemiddelde aantal kromme spijkers per doosje is 18 spijkers met een standaardafwijking van 2,6 spijkers. Bridget wil weten in hoeveel procent van de doosjes het aantal kromme spijkers minder dan 20 is.

- Hoe kan zij dit percentage berekenen?
- Kun je dit percentage met een normale verdeling benaderen?



- 20** Van de planten in een kas met kerstomaten wordt het aantal vruchten geteld. De relatieve frequenties van het aantal kerstomaten per plant zijn in het staafdiagram weergegeven. De stochast X is het aantal vruchten aan een plant.

- a Leg uit dat X een discrete stochast is.
- b Waarom kan de verdeling van X worden benaderd met een normale verdeling?
- c Het gemiddelde van de stochast X is 35,2 vruchten met een standaardafwijking van 4,1 vruchten. In de figuur is ook de klokvorm van de continue stochast Y getekend die $\text{Norm}(35,2; 4,1)$ -verdeeld is. Het gekleurde staafje geeft de kans aan dat een plant 33 vruchten heeft. Leg uit dat, als je deze kans wilt benaderen met behulp van de stochast Y , dat je dan moet kiezen voor het gebied $[32,5; 33,5)$ onder de klokvorm.
- d Bereken met behulp van de stochast Y de kans $P(X = 33)$.
- e Leg met behulp van de figuur uit waarom het antwoord van opdracht d een benadering is.



- 21** Kijk nog eens naar de figuur van opdracht 20.
- a Welke getallen zijn afgerond op helen kleiner dan 38?
 - b Leg uit dat als $P(X < 38)$ wilt benaderen met de normale verdeling, je $P(Y < 37,5)$ moet gebruiken.
 - c Welke getallen zijn afgerond op helen kleiner of gelijk aan 34?
 - d Leg uit dat als $P(X \leq 34)$ wilt benaderen met de normale verdeling, je $P(Y < 34,5)$ moet gebruiken.

Theorie

Als de verdeling van een discrete stochast X klokvormig is, dan kan de verdeling van X worden benaderd door de verdeling van de continue stochast Y die normaal verdeeld is met hetzelfde gemiddelde en dezelfde standaardafwijking als X .

Bij de berekening van kansen pas je de grenswaarden van Y zo aan, dat het gebied past bij de bedoelde waarden van X .

Deze aanpassing heet **continuïteitscorrectie**.

Voorbeeld

Het aantal jassen dat in een winkel per dag wordt verkocht, is bij benadering Norm(25,8; 4,7)-verdeeld.

Bereken de kans dat op een willekeurige dag in de winkel meer dan 20 jassen maar ten hoogste 24 jassen worden verkocht.

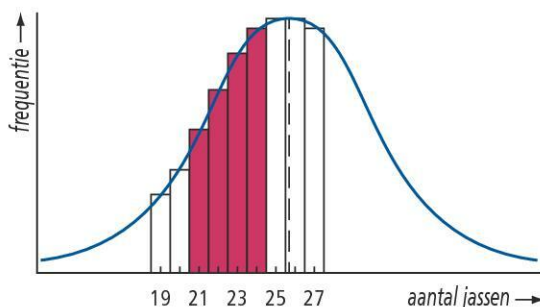
Oplossing

Het aantal jassen X is een discrete stochast die benaderd kan worden door de continue stochast Y die Norm(25,8; 4,7)- verdeeld is.

De gevraagde kans is $P(20 < X \leq 24)$ en benader je met $P(20,5 \leq Y < 24,5)$.

Invoeren in de rekenmachine geeft $P(20,5 \leq Y < 24,5) \approx 0,2613$.

De gevraagde kans is ongeveer 0,2613.



Ondersteunende route → maak opdracht 022

22

Het aantal dropjes X in een zak is bij benadering

H

Norm(62,1; 4,9)-verdeeld.

Bereken in vier decimalen.

a $P(X \geq 65)$

d $P(X = 58)$

b $P(X < 60)$

e $P(59 < X < 63)$

c $P(X \leq 66)$

f $P(62 \leq X \leq 64)$

23

Bij een controle van een groot aantal pakken printpapier blijkt dat niet elk pak 500 vellen papier bevat. Het aantal vellen papier in een pak is bij benadering normaal verdeeld met een gemiddelde van 503 vellen en een standaardafwijking van 2 vellen.

Bereken het percentage pakken met minder dan 500 vellen.

- 24** Het aantal broodjes dat in de kantine van een school per dag wordt verkocht, is bij benadering $\text{Norm}(56,2; 4,9)$ -verdeeld. Hoe groot is de kans dat op een willekeurige dag de volgende aantallen broodjes worden verkocht?
- a minimaal 52 broodjes
 - b precies 52 broodjes
 - c maximaal 67 broodjes
 - d tussen de 55 broodjes en 60 broodjes

Ondersteunende route → maak opdracht 025

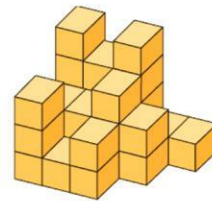


- 25** H In een restaurant is het aantal gasten op een zaterdagavond bij benadering $\text{Norm}(29,8; 5,4)$ -verdeeld.
- a Bereken de kans dat er op een willekeurige zaterdagavond 35 gasten zijn.
 - b Hoeveel zaterdagavonden met tussen de 20 gasten en 30 gasten zijn er naar verwachting over een periode van 10 weken?
 - c En hoeveel zaterdagavonden met meer dan 30 gasten zijn er naar verwachting over een periode van 52 weken?
 - d De stochast T is het totaal aantal gasten op de zaterdagavonden over een periode van 52 weken. Bereken $E(T)$ en $\sigma(T)$.
 - e Bereken de kans dat het totaal aantal gasten op de zaterdagavonden over een periode van 52 weken meer dan 1500 is.

- 26** Bij een onderzoek naar het ruimtelijk inzicht van leerlingen in leerjaar 2, moeten zij 30 vragen van oplopende moeilijkheidsgraad oplossen. Voor vwo-leerlingen is het aantal correct beantwoorde vragen bij benadering normaal verdeeld met een gemiddelde van 19,3 vragen goed en een standaardafwijking van 2,7 vragen goed.
- a Hoeveel procent van de leerlingen beantwoordt meer dan de helft van de vragen goed?
 - b Govert behoort tot de 10% best scorende leerlingen. Hoeveel vragen heeft hij minstens goed?
 - c In klas V2c zitten 25 leerlingen. Bereken de kans dat al deze leerlingen meer dan de helft van de vragen goed heeft.
 - d Hoe groot is de kans dat het gemiddeld aantal goed beantwoorde vragen van de leerlingen uit V2c groter is dan 20?

Vraag 3

Het bouwwerk hieronder is gemaakt door kubussen te stapelen. Uit hoeveel kubussen bestaat het bouwwerk?



Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten

022 Het aantal zilveruitjes X in een pot is bij benadering Norm(75,3; 6,8)-verdeeld. Je gaat kansen berekenen door de discrete stochast X te benaderen door de continue stochast Y .

- a Welke getallen zijn afgerond op helen groter dan 73?
- b Vul in: $P(X > 73) \approx P(Y \geq \dots)$.
- c Bereken $P(X > 73)$.
- d Welke getallen zijn afgerond op helen kleiner of gelijk aan 76?
- e Vul in: $P(X \leq 76) \approx P(Y < \dots)$.
- f Bereken $P(X \leq 76)$.
- g Vul in: $P(74 \leq X < 77) \approx P(\dots \leq Y < \dots)$.
- h Bereken $P(74 \leq X < 77)$.

025 Bij een bepaalde ranonkelsoort varieert het aantal kelkbladeren. Dit aantal A is bij benadering Norm(4,99; 0,55)-verdeeld.

- a Bereken de kans dat een willekeurige ranonkel hoogstens vier kelkbladeren heeft.
- b Een tuinderij neemt een aselechte steekproef van 150 exemplaren.
Hoeveel ranonkels met zes kelkbladeren zijn er naar verwachting in de steekproef?
- c De ranonkels worden verkocht in boeketten van 16 stuks.
De stochast T is het totaal aantal kelkbladeren van de bloemen in het boeket.
Vul in: $E(T) = \dots \cdot 4,99 = \dots$ en $\sigma(T) = \sqrt{\dots} \cdot 0,55 = \dots$
- d Bereken de kans dat het totaal aantal kelkbladeren van de bloemen in een boeket precies 75 is.



Uitdagende opdrachten

U4 In een grote verkeerscontrole onder 800 fietsers controleert de politie of de fietsers wel met verlichting fietsen. Uit eerdere controles blijkt dat 14% van de fietsers zonder verlichting fietst. Stochast X is het aantal fietsers dat zonder verlichting fietst.

- a Bereken de kans op maximaal 100 fietsers die zonder verlichting fietsen met de binomiale verdeling.
- b Benader dezelfde kans met de normale verdeling.
- c Welke manier heeft je voorkeur en waarom?

Als stochast X binomiaal verdeeld is geldt:

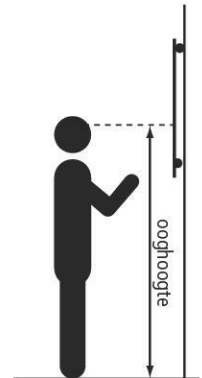
$$E(X) = n \cdot p$$

$$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

- 27** Op een dag maakt bakker Klomp 400 broden. Het gewicht van de broden in grammen is $\text{Norm}(805, 30)$ -verdeeld.
- Bereken hoeveel broden meer dan 850 gram zullen wegen.
 - Hoeveel gram maximaal wegen de 15% lichtste broden?
 - Bereken het gewicht van de 30% broden waarvan het gewicht het dichtst bij het gemiddelde zit.
 - Op welk gemiddelde gewicht moet de bakker zijn machine instellen om het voor elkaar te krijgen dat 5% van de lichtste broden maximaal dan 780 gram wegen?
 - Op een andere dag is het gemiddelde gewicht van de broden 850 gram. Van zo'n 12% van de broden is het gewicht maximaal 780 gram.
Hoeveel gram is op deze dag de standaardafwijking?
- 28** Philip teelt diverse vruchten en maakt hier jam van. De potjes jam verkoopt hij in een stalletje aan de weg. Omdat Philip de jam in kleine hoeveelheden produceert, is er een vrij grote spreiding in het percentage vruchten. Het percentage vruchten in de aardbeienjam is normaal verdeeld met een gemiddelde van 38,7 en een standaardafwijking van 3,2.
Jam mag volgens de Warenwet pas jam heten, als het voor minstens 35% uit vruchten bestaat.
- Bereken hoeveel procent van de potjes aardbeienjam eigenlijk geen jam mogen heten.
 - Als er minstens 45% vruchten in een potje zit, dan mag je het 'extra jam' noemen.
Hoeveel procent van de potjes aardbeienjam zou Philip kunnen verkopen als 'extra jam'?
 - Het percentage vruchten in de kruisbessenjam is normaal verdeeld met een gemiddelde van 37,3 procent.
Zo'n 9% van de potjes bevat minder dan het voorgeschreven minimaal percentage vruchten.
Bereken de standaardafwijking.
- 29** Het aantal paperclips in doosjes is bij benadering $\text{Norm}(202,3; 1,4)$ -verdeeld.
- Hoe groot is de kans dat een willekeurige doosje de volgende aantallen paperclips bevat?
A minimaal 200 paperclips
B precies 200 paperclips
C tussen 199 paperclips en 205 paperclips
 - De fabrikant neemt een steekproef van 16 doosjes.
Hoe groot is de kans dat alle doosjes tussen 199 paperclips en 205 paperclips bevatten?
 - Bereken de kans dat in de 16 doosjes gemiddeld minimaal 202 paperclips zitten.



- 30** De firma RAB verhuurt fietsen. Het verhuurbedrijf is elke dag open. De huurprijs is € 11,- per fiets per dag. Elke fiets, verhuurd of niet, kost de RAB € 2,- per dag aan vaste kosten. Als een fiets verhuurd wordt, komt daar per dag € 1,- aan kosten voor onderhoud en reparatie bij. RAB beschikt over 195 fietsen. Uit de administratie blijkt dat de vraag naar fietsen normaal verdeeld is met gemiddeld 186 fietsen per dag en een standaardafwijking van 37 fietsen per dag.
- a Toon aan dat op ongeveer 40% van de dagen ten minste één klant teleurgesteld moest worden omdat alle fietsen verhuurd zijn.
 - b Als RAB één fiets meer zou hebben, dan zou dus op 40% van de dagen € 8,- meer winst behaald zijn en op 60% van de dagen € 2,- minder winst.
- Onderzoek hoeveel euro extra winst RAB met deze 196e fiets dit jaar zou hebben gehaald. Ga uit van 365 dagen in een jaar.
- 31** In een katoenfabriek wikkelen twee machines steeds linnen op een rol. Op een rol moet 400 meter linnen komen. Bij beide machines wordt een steekproef genomen. Bij machine A bevat 7% van de rollen minder dan 400 meter linnen en is de standaardafwijking is 1,3 meter. Bij machine B bevat 6% van de rollen minder dan 400 meter linnen en is het gemiddelde is 400,2 meter. Onderzoek of de machine die gemiddeld het minste linnen op een rol wikkelt ook de machine is die het nauwkeurigst is.
- 32** Om goed in de spiegel te kunnen kijken, moet de spiegel zo zijn opgehangen dat de onderkant minstens 12 cm beneden de ooghoogte en de bovenkant minstens 12 cm boven de ooghoogte zit. De ooghoogte van volwassen mensen in Nederland is normaal verdeeld met een gemiddelde van 159,4 cm en een standaardafwijking van 9,0 cm. Onderzoek hoe hoog een spiegel minstens moet zijn zodat deze zo opgehangen kan worden dat hij voor de middelste 90% van de volwassen Nederlanders goed hangt.



Vaardigheid

Je kunt bij een normaal verdeelde stochast een percentage of een kans berekenen.

- 1 Teken zo nodig een klokvorm en geef daarin de bekende waarden aan.
- 2 Geef de grenzen aan en arceer het bedoelde gebied. Als een gebied onder de klokvorm geen linkergrens heeft, dan voer je als linkergrens het getal -10^{99} in. Heeft een gebied geen rechtergrens, dan neem je 10^{99} als rechtergrens.
- 3 Bereken met je rekenmachine de gevraagde kans.

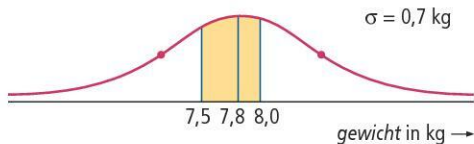
Voorbeeld 1

Het gewicht in kg van zakken cementpoeder is Norm(7,8; 0,7)-verdeeld.

Hoe groot is de kans dat een willekeurige zak cementpoeder tussen de 7,5 en 8 kg weegt?

Oplossing

- 1
- 2



- 3 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 7,5
 bovengrens = 8,0
 $\mu = 7,8$
 $\sigma = 0,7$

De kans is ongeveer 0,2783.

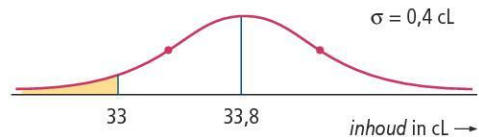
Voorbeeld 2

De inhoud in cL van een blikje fris is Norm(33,8; 0,4)-verdeeld.

Hoe groot is de kans dat een willekeurig blikje minder dan 33 cL bevat?

Oplossing

- 1
- 2



- 3 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = -10^{99}
 bovengrens = 33
 $\mu = 33,8$
 $\sigma = 0,4$

De kans is ongeveer 0,0228.

- S1 De jaarlijkse hoeveelheid neerslag in mm in een polder is Norm(830, 60)-verdeeld.
- a Bereken in hoeveel procent van de jaren tussen de 800 mm en 915 mm neerslag valt.
 - b Hoe groot is de kans dat in een willekeurig jaar meer dan 850 mm neerslag valt?
 - c Bereken de kans dat in een willekeurig jaar minder dan 800 mm neerslag valt.
 - d Bereken de kans dat in twee willekeurige jaren na elkaar in beide jaren minder dan 800 mm neerslag valt.

Vaardigheid

Je kunt een grenswaarde berekenen bij een gegeven kans van een normaal verdeelde stochast.

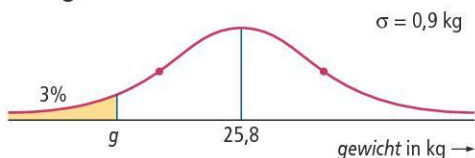
- 1 Teken zo nodig een klokform en geef daarin het gemiddelde en de standaardafwijking aan.
- 2 Arceer het gegeven gebied en geef de kans die bij het gebied hoort.
- 3 Bereken met je rekenmachine de gevraagde grenswaarde.

Voorbeeld 1

Het gewicht in kg van zakken split is Norm(25,8; 0,9)-verdeeld.
Hoeveel kg split zit er maximaal in de 3% minst gevulde zakken?

Oplossing

1
2



- 3 Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, x; 25,8; 0,9)$
 $y_2 = 0,03$
Venster: $23 \leq x \leq 26, 0 \leq y \leq 0,06$
Optie: snijpunt
De coördinaten van het snijpunt zijn (24,11; 0,03).
In deze zakken split zit maximaal 24,1 kg.

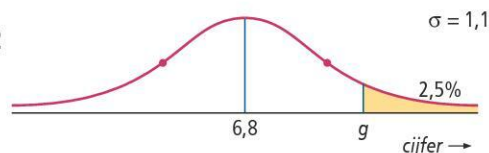
Voorbeeld 2

Het cijfer voor een examen Duits is Norm(6,8; 1,1)-verdeeld. Het examen is door 120 leerlingen gemaakt.
Welk cijfer halen de beste drie leerlingen minstens voor dit examen?

Oplossing

- 1 3 van de 120 is $3 : 120 \cdot 100\% = 2,5\%$.

2



- 3 Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x; 10^{99}; 6,8; 1,1)$
 $y_2 = 0,025$
Venster: $7 \leq x \leq 9, 0 \leq y \leq 0,1$
Optie: snijpunt
De coördinaten van het snijpunt zijn (8,96; 0,025).
Deze leerlingen haalden minstens een 9,0.

S2 Het gewicht in grammen van 800 potten appelmoes is Norm(284,6; 2,8)-verdeeld.

- a Hoeveel gram wegen de zwaarste 4% potten appelmoes?
- b En hoeveel gram wegen de lichtste 20 potten appelmoes?
- c Tussen welke grenzen ligt het gewicht van de middelste 6% potten appelmoes?

Vaardigheid

Je kunt een gemiddelde of standaardafwijking berekenen bij een gegeven kans van een normaal verdeelde stochast.

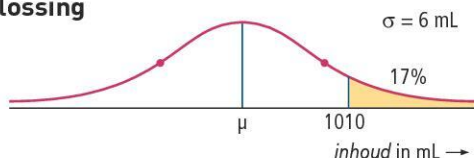
- 1 Teken zo nodig een klokvorm en geef daarin de bekende waarden aan.
- 2 Arceer het gegeven gebied en geef de kans die bij het gebied hoort.
- 3 Voer de gegevens in je rekenmachine in en bereken het gemiddelde of de standaardafwijking.

Voorbeeld 1

De inhoud van pakken vla is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 6 mL. 17% van de pakken bevat meer dan 1010 mL. Bereken het gemiddelde.

Oplossing

1
2



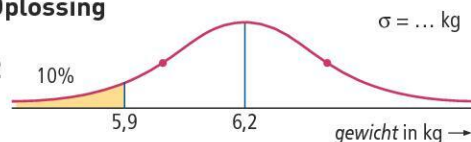
- 3 Invoer: $y_1 = \text{normaal cum. } (1010, 10^{99}, x, 6)$
 $y_2 = 0,17$
 Venster: $1000 \leq x \leq 1010, 0 \leq y \leq 0,2$
 Optie: snijpunt
 De coördinaten van het snijpunt zijn (1004,3; 0,17).
 Het gemiddelde is ongeveer 1004,3 mL.

Voorbeeld 2

Het gewicht van een bepaald type terrastegel is normaal verdeeld met een gemiddelde van 6,2 kg. 10% van de tegels is lichter dan 5,9 kg. Bereken de standaardafwijking.

Oplossing

1
2



- 3 Invoer: $y_1 = \text{normaal cum. } (10^{99}, 5,9; 6,2; x)$
 $y_2 = 0,1$
 Venster: $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 0,2$
 Optie: snijpunt
 De coördinaten van het snijpunt zijn (0,234; 0,1).
 De standaardafwijking is ongeveer 0,23 kg.

- S3** Van twee merken suiker is het gewicht van een pak in grammen van elk merk normaal verdeeld.
- a Van merk A is het gemiddelde gewicht van de pakken 1002,7 gram en is slechts 8% van de pakken lichter dan 1000 gram. Bereken de standaardafwijking van de pakken suiker van merk A.
 - b Van merk B is de standaardafwijking van het gewicht van de pakken suiker 1,3 gram. Van dit merk zijn 120 van de 500 pakken zwaarder dan 1005 gram. Bereken het gemiddelde gewicht van de pakken suiker van merk B.

Vaardigheid

Je kunt de normale verdeling gebruiken om een discrete stochast te benaderen.

Als de verdeling van een discrete stochast X klokvormig is, dan kan de verdeling van X worden benaderd door de verdeling van de continue stochast Y die normaal verdeeld is met hetzelfde gemiddelde en dezelfde standaardafwijking als X .

Voorbeeld 1

Het aantal bloemkolen dat een groenteman per dag verkoopt, is bij benadering Norm(21,3; 5,7)-verdeeld. Bereken de kans dat hij op een willekeurige dag meer dan 20 maar maximaal 25 bloemkolen verkoopt.

Oplossing

Het aantal bloemkolen X is een discrete stochast die benaderd kan worden door een continue stochast Y die Norm(21,3; 5,7)-verdeeld is.

De gevraagde kans is $P(20 < X \leq 25)$ en benader je met $P(20,5 \leq Y < 25,5)$.

Invoeren in de rekenmachine geeft

$P(20,5 \leq Y < 25,5) \approx 0,3252$.

De gevraagde kans is ongeveer 0,3252.

Voorbeeld 2

Het aantal behaalde punten op een examen is bij benadering Norm(43,6; 10,7)-verdeeld. Bereken de kans dat een willekeurige leerling minstens 50 punten haalt.

Oplossing

Het aantal behaalde punten X is een discrete stochast die benaderd kan worden door de continue stochast Y die Norm(43,6; 10,7)-verdeeld is.

De gevraagde kans is $P(X \geq 50)$ en benader je met $P(Y \geq 49,5)$.

Invoeren in de rekenmachine geeft

$P(Y \geq 49,5) \approx 0,2907$.

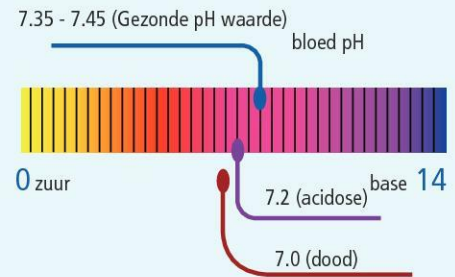
De gevraagde kans is ongeveer 0,2907.

- S4** Het aantal snoepjes in de zakken is bij benadering Norm(83,6; 2,4)-verdeeld. Hoe groot is de kans dat in een willekeurige zak de volgende aantallen snoepjes zitten?
- a maximaal 85 snoepjes
 - b minimaal 82 snoepjes
 - c precies 85 snoepjes
 - d minstens 83 snoepjes maar niet meer dan 86 snoepjes



T1 De zuurgraad van vloeistoffen wordt aangegeven met de pH-waarde. Bij mensen is de pH-waarde van het bloed Norm(7,4; 0,15)-verdeeld.

- Bereken het percentage mensen met een gezonde pH-waarde van het bloed, dus tussen 7,35 en 7,45.
- Bij hoeveel procent van de mensen zal het bloed een pH-waarde hebben van meer dan 7,35?
- Welke maximale pH-waarde hebben de 6% mensen met de laagste pH waarde?
- En welke pH-waarde kunnen de mensen hebben die behoren bij de 3% mensen met de hoogste pH-waarde?
- Een groep van 67 mensen ondergaat een medische keuring. Hoeveel van deze mensen hebben naar verwachting een pH-waarde kleiner dan 7,25?



T2 Blikken limonadesiroop worden gevuld door een machine. Het volume van de siroop is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 4,3 mL.

- Bereken bij welk gemiddeld volume geldt dat 8% van de blikken minder dan 750 mL bevat.
- Bereken de waarden van het gemiddelde waarbij het volume van de siroop in 90% van de blikken tussen 745 mL en 760 mL ligt.
- Neem aan dat het gemiddelde wordt ingesteld op 750 mL en dat door betere afstelling de vulmachine nauwkeuriger kan werken. Bereken bij welke standaardafwijking geldt dat het volume van de siroop in 90% van de blikken tussen 745 mL en 760 mL ligt.

T3 Het gewicht in grammen van pennywafels is Norm(16,1; 0,8)-verdeeld.

- Bereken de kans dat een willekeurige pennywafel meer dan 15 gram weegt.
- Bereken de kans dat twee willekeurige pennywafels elk meer dan 15 gram wegen.
- Pennywafels worden verkocht in pakjes van acht stuks. Op de verpakking staat dat de inhoud 125 gram is. Bereken de kans dat een willekeurig gekozen pakje met acht wafels minder dan de vermelde 125 gram weegt.
- Het gewicht in grammen van spritsen is Norm(21,7; 1,1)-verdeeld. Sonja neemt elke dag één pennywafel en twee spritsen mee naar school. Bereken de kans dat ze op een willekeurige dag minstens 60 gram aan koekjes bij zich heeft.



T4 Op kilopakken suiker treft men op het etiket de tekst ‘1000g e’ aan. Deze e (van estimate) betekent dat de fabrikant zich bij het vullen van het pak onder andere heeft gehouden aan de volgende EU-norm: ten hoogste 2% van de kilopakken mag een ondergewicht hebben van meer dan 15 gram. Een fabrikant heeft een machine die pakken suiker vult met een gemiddelde van 1003 gram en een standaardafwijking van 12 gram. Het gewicht van de pakken suiker is normaal verdeeld.

- Voldoet deze fabrikant aan de EU-norm?
- De fabrikant wil weten op welk gemiddelde hij zijn machine minimaal moet instellen om aan de norm te voldoen.
Bereken dat gemiddelde.
- De fabrikant van de pakken suiker besluit een nieuwe machine aan te schaffen die nauwkeuriger vult. Hij wil een zodanige standaardafwijking dat hij de machine kan instellen op een gemiddelde van 1003 gram om aan de EU-norm te voldoen.
Bereken waaraan de standaardafwijking van de nieuwe machine moet voldoen.



T5 De spiegelkarper heeft een erfelijk schubbenpatroon met schubben van verschillende grootte. Het aantal schubben is bij benadering Norm(82, 4)-verdeeld.

- Bereken de kans dat een willekeurig exemplaar minder dan 75 schubben heeft.
- Bereken de kans dat een willekeurig exemplaar tussen de 80 en 85 schubben heeft.
- Tussen welke aantallen ligt het aantal schubben van de middelste 90% van de populatie?
- Hoe groot is de kans dat tien willekeurige spiegelkarpers samen minder dan 800 schubben hebben?



T6 Een machine kan worden gebruikt om verpakkingen van verschillend volume te vullen. Het blijkt dat de standaardafwijking niet constant is, maar afhangt van het ingestelde vulgewicht volgens de formule $\sigma = 1,21 + 0,04 \cdot \mu$. De inhoud van de verpakking is bij elk ingesteld vulgewicht normaal verdeeld.

- De machine wordt ingesteld op 103 gram.
Bereken hoeveel procent van de verpakkingen minder dan 100 gram bevat.
- Er moeten verpakkingen van 350 gram worden gevuld.
Bereken het ingestelde vulgewicht waarvoor geldt dat 2% van de verpakkingen minder dan 350 gram bevat.

Je kunt bij een normaal verdeelde stochast een percentage of een kans berekenen.

- E1** De lengte in centimeters van volwassen Nederlandse mannen is Norm(180,7; 7,1)-verdeeld.
- a** Hoeveel procent van de volwassen Nederlandse mannen heeft een lengte tussen 180 cm en 190 cm?
 - b** Een gangbare hoogte voor deuropeningen in Nederland is 203 cm.
In Nederland wonen ruim 6,5 miljoen volwassen mannen. Hoeveel mannen moeten naar verwachting bukken als ze door zo'n deur gaan? Rond je antwoord af op duizendtallen.

Je kunt een grenswaarde berekenen bij een gegeven kans van een normaal verdeelde stochast.

- E2** De lengte in centimeters van volwassen Nederlandse vrouwen is Norm(167,6; 6,5)-verdeeld.
- a** Bereken de minimale lengte van de 25% langste vrouwen van Nederland. Rond je antwoord af op hele centimeters.
 - b** Welke lengte kunnen de 7% kleinste vrouwen van Nederland hebben?

Je kunt een gemiddelde of standaardafwijking berekenen bij een gegeven kans van een normaal verdeelde stochast.

- E3**
- a** Het gewicht van broden is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 30 gram. De kans dat een willekeurig brood zwaarder is dan 850 gram, mag niet meer dan 1% zijn.
Bereken het maximale gemiddelde gewicht van deze broden.
 - b** De dikte van de pennen die een machine produceert, is normaal verdeeld met een gemiddelde van 6 mm. Pennen die dunner zijn dan 5,90 mm en pennen die dikker zijn dan 6,05 mm zijn onbruikbaar.
De fabriek wil dat hoogstens 1% van de pennen onbruikbaar is.
Bereken de maximaal toegestane waarde van de standaardafwijking.

Je kunt de normale verdeling gebruiken om een discrete stochast te benaderen.

- E4** Het aantal dropjes in zakjes Simpsonsdrop is bij benadering Norm(47,2; 3,7)-verdeeld.
- a** Bereken de kans dat in een willekeurig zakje 52 dropjes zitten.
 - b** Bereken de kans dat in een willekeurig zakje minstens 50 dropjes zitten.
 - c** Liza koopt vijf willekeurige zakjes Simpsonsdrop.
Bereken de kans dat zij in totaal minstens 250 dropjes heeft.

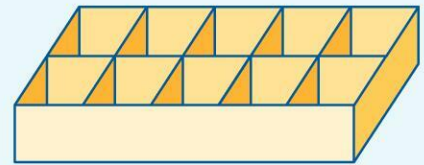
E5 In een ziekenhuis is het duur om elke lamp die defect is direct te vervangen. Het blijkt in de praktijk goedkoper te zijn om op een bepaald moment alle lampen, ook die het nog doen, tegelijk te vervangen. De plafondlampen in de gangen van het ziekenhuis hebben een gemiddelde levensduur van 3500 uur met een standaardafwijking van 400 uur. De levensduur is normaal verdeeld.

- a Hoe groot is de kans dat een willekeurige lamp na 3000 uur defect is?
- b De technische dienst wil de lampen gaan vervangen als 15% defect is.
Bereken om de hoeveel tijd de lampen moeten worden vervangen.
- c De directie overweegt om over te stappen op LED-lampen. Deze lampen zijn veel duurder, maar ze hebben een levensduur van gemiddeld 30 000 uur met een standaardafwijking van 2500 uur. Vervanging is nodig als 10% van de lampen defect is.
Bereken hoeveel keer zo duur een LED-lamp mag zijn zodat de vervangingskosten even hoog zijn als bij traditionele lampen.

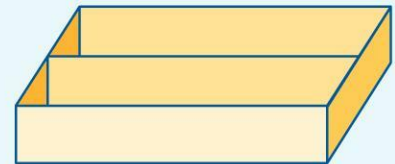
E6 Een bollenkweker heeft een grote partij bijzondere bollen die hij wil verpakken in rechthoekige dozen. De bollen zijn nagenoeg bolvormig. De diameter in cm van de bollen is $\text{Norm}(10; 0,8)$ -verdeeld.

Er zijn twee typen dozen om de bollen in te verpakken. Doos 1 is 60 cm bij 24 cm bij 12 cm en is verdeeld in tien kubusvormige vakjes. Doos 2 is 55 cm bij 24 cm bij 12 cm en is verdeeld in twee langwerpige vakjes.

- a Bereken de kans dat een willekeurig gekozen bloembol een diameter heeft die groter is dan 12 cm. Rond je antwoord af op vier decimalen.
- b Bereken de kans dat een willekeurig tiental bollen in doos 1 past.
- c In doos 2 moeten in beide vakjes telkens 5 bollen op een rij komen. Als je alleen let op de lengte van de rij, hoe groot is dan de kans dat een willekeurig vijftal bollen in een vakje van doos 2 past?
- d De bollenkweker wil dat de afmetingen van doos 2 vrijwel geen belemmering vormen bij het verpakken van de bollen. Onderzoek wat meer zin heeft om te vergroten, de lengte of de breedte van de doos.



1



2



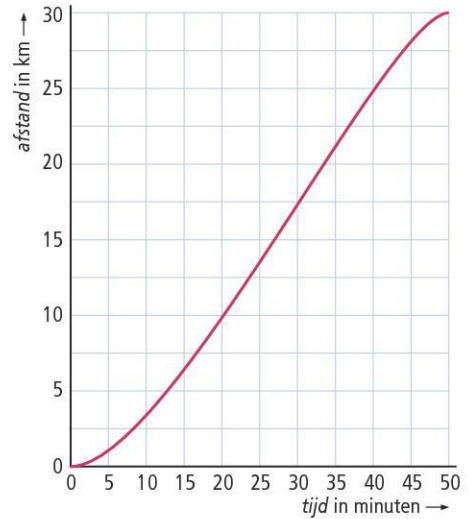
In dit hoofdstuk

Je hebt in deel 2 geleerd hoe je een functie zoals $f(x) = 2 \cdot x^4 - 3 \cdot x^2 + 5\frac{1}{2}x + 12,3$ kunt differentiëren en hoe je de afgeleide kunt gebruiken.

In dit hoofdstuk zie je dat je ook de afgeleide kunt bepalen van machtsfuncties van de vorm $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ of $f(x) = x^{-3}$, dus als de exponent geen geheel getal maar een breuk of een negatief getal is. Verder leer je hoe je de afgeleide bepaalt van wortelfuncties en gebroken functies.

In deel 4 leer je hoe exponentiële en logaritmische functies differentieert.

- V1** In een wielerronde is een tijdrit van 30 km gereden. Van de tijdrit van Marian is een tijd-afstand-grafiek gemaakt.
- Hoe kun je zien dat Marian niet met een constante snelheid heeft gereden?
 - Met welke gemiddelde snelheid in km per minuut reed Marian de tijdrit? En in km per uur?
 - En met welke gemiddelde snelheid in km per uur reed ze de eerste 10 minuten?
 - Benader met een raaklijn de snelheid van Marian op het tijdstip $t = 10$. Geef je antwoord in km per uur.
 - De formule bij de grafiek is $S = -0,0003t^3 + 0,025t^2 + 0,1t$. Bereken met deze formule de gemiddelde snelheid op de intervallen $[10, 15]$, $[10, 11]$, $[10, 10,1]$ en $[10, 10,001]$.
 - Welke snelheid in km per uur, heeft Marian op $t = 10$ volgens de formule?



Theorie

De **helling** van de grafiek van een functie f in een punt $A(a, f(a))$ is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de **raaklijn** in A .

Je kunt deze helling benaderen door het **differentiequotient**

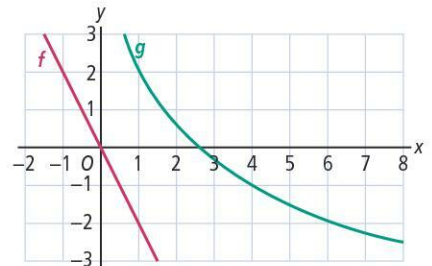
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ over een klein interval te berekenen.}$$

- V2** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x+1}$.
- Benader de helling in het punt $(0, 1)$ en in het punt $(3, 2)$.
 - In de tabel zie je de functiewaarden $f(x)$ en de bijbehorende hellingen. Vergelijk je antwoorden van opdracht a met de tabel.
 - Maak zelf een tabel en zoek uit bij welke waarden van x de helling van de grafiek van f kleiner is dan 0,1.

x	$f(x)$	helling
0	1	0,5
1	1,4142	0,3535
2	1,7321	0,2887
3	2	0,25
4	2,2361	0,2236

→ Instructie rekenmachine | Hellingen

- V3** Gegeven zijn de functies $f(x) = -2x$ en $g(x) = 2 - 5 \cdot \log(x)$.
- Hoe groot is de helling in elk punt van de grafiek van f ?
 - Bereken de gemiddelde toename van de grafiek van g over het interval $[1, 4]$.
 - Benader in twee decimalen de helling van de grafiek van g in het punt waarvoor geldt $x = 3$.
 - Benader in één decimaal de waarde van x waar de helling van de grafiek van g gelijk is aan de helling van de grafiek van f .



Theorie

Met de **afgeleide functie** van f kun je de helling in een punt van de grafiek van f exact berekenen.

De notatie voor de afgeleide functie is f' .

Het berekenen van de afgeleide functie heet **differentiëren**.

Hierbij gelden de volgende regels:

- $f(x) = x^n$ $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
- $f(x) = c$ (een constante) $f'(x) = 0$
- $g(x) = f(x) + c$ $g'(x) = f'(x)$
- $g(x) = c \cdot f(x)$ $g'(x) = c \cdot f'(x)$
- $s(x) = f(x) + g(x)$ $s'(x) = f'(x) + g'(x)$

Voorbeeld

Gegeven is de functie

$$f(x) = 2x^3 + 7x - 5.$$

Bereken de helling van de grafiek in het punt $P(1, 4)$.

Oplossing

$$f'(x) = 6x^2 + 7$$

$$f'(x) = 6 \cdot 1^2 + 7 = 13$$

De helling in punt P is 13.

V4 Differentieer.

a $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$ **c** $h(p) = (4p - 3)(p - 1)$

b $g(t) = -3t - 7$ **d** $A(x) = 12x^6 - 5x^2$

Theorie

Bij de x -waarden waar $f'(x) = 0$ loopt de raaklijn aan de grafiek van f horizontaal. Met behulp van een plot kun je vaststellen of de grafiek van f in dat punt een maximum, een minimum of geen van beide heeft.

V5 Gegeven is de functie $f(x) = -16x + \frac{1}{2}x^4$.

- a** Geef de afgeleide $f'(x)$.
- b** Bij welke waarde van x is $f'(x) = 0$?
- c** Bereken de extreme waarde van f .
- d** Is deze extreme waarde een maximum of een minimum?

V6 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x$.

- a** Differentieer f .
- b** Bij welke waarden van x is $f'(x) = 0$?
- c** Plot de grafiek van f . Bij welke waarden van x is $f'(x) < 0$?
- d** Ga met behulp van $f'(x)$ na dat f een minimum heeft bij $x = 2$.

16.1 Machtsfuncties

Je leert

- hoe je een functie met machten herleidt

Leerroutes

- ondersteunend: 1—2—3—04—5—6—7—08—9
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7—8—9
- uitdagend: 1—2—4—5—6—7—8—9—U1

Bij muizen geldt voor het verband tussen de oppervlakte van de huid en hun gewicht bij benadering de formule $H = 0,09 \cdot G^{\frac{2}{3}}$. Hierin is H de huidoppervlakte in dm^2 en G het gewicht in grammen. Deze formule wordt ook wel geschreven als $G = 37 \cdot H^{1,5}$.

- Geven beide formules voor een muis van 50 gram dezelfde huidoppervlakte?



- 1 In een frisdrankfabriek wordt limonadesiroop geproduceerd. Voor het verband tussen de hoeveelheid geproduceerde siroop q in liters en de kosten TK in euro's geldt $TK = 25 \cdot q^{0,64}$. Voor de opbrengst TO in euro's geldt $TO = 78 \cdot q^{0,5}$.
 - a Bereken TK bij een productie van 500 liter.
 - b Bereken de extra kosten als de productie stijgt van 500 naar 501 liter.
 - c Bereken ook de extra opbrengst als de productie stijgt van 500 naar 501 liter.
 - d Zal de directie bij een productie van 500 liter besluiten om de productie op te voeren? Verklaar je antwoord.
 - e De winst is het verschil tussen de opbrengst en de kosten. Geef de formule TW voor de winst in euro's.
 - f Plot de grafiek bij de formule TW . Bij welk aantal liters is de winst maximaal? En hoe groot is deze winst?
- 2
 - a Plot en schets de grafieken van $f(x) = x^2$, $g(x) = x^{0,5}$ en $h(x) = x^{-2}$.
 - b Gegeven zijn de functies $p(x) = \frac{1}{x^2}$ en $r(x) = \sqrt{x}$. Welke van deze functies is gelijk aan g en welke is gelijk aan h ?

- 6 a Op het blaadje zie je hoe je de functie

$A(p) = \frac{3p^2 - 8p^{1,5} + 10}{2p}$ kunt schrijven als een som van termen van de vorm $c \cdot p^a$.
Maak deze herleiding verder af.

- b Schrijf de functies $W(p) = \frac{8p^4 + 5p^2 + p + 1}{4p}$ en $N(t) = \frac{-2t^{3,5} + 4t^{2,1} - 2t^{0,3} + 6}{2t}$ ook in deze vorm.

- 7 In de formule $p = 32 \cdot q^{2,5}$ is de variabele p uitgedrukt in de variabele q . Je gaat de formule herleiden tot de vorm $q = a \cdot p^b$.

- a Leg uit wat er in stap 1 en stap 2 is gebeurd.
b In stap 3 is de regel: ' $x^a = c$ geeft $x = c^{\frac{1}{a}}$ ' gebruikt. Waarom staan er haakjes om $\frac{1}{32} \cdot p$?
c Welke rekenregel is in stap 4 gebruikt?
d Maak de herleiding af.

$$\begin{aligned} A(p) &= \frac{3p^2 - 8p^{1,5} + 10}{2p} \\ A(p) &= \frac{3p^2}{2p} - \frac{8p^{1,5}}{2p} + \frac{10}{2p} \\ A(p) &= \dots p - \dots p^{\dots} + \dots p^{-1} \end{aligned}$$

$p = 32 \cdot q^{2,5}$	
$32 \cdot q^{2,5} = p$	1
$q^{2,5} = \frac{1}{32} \cdot p$	2
$q = \left(\frac{1}{32} \cdot p\right)^{\frac{1}{2,5}}$	3
$q = \left(\frac{1}{32}\right)^{0,4} \cdot p^{0,4}$	4

Ondersteunende route → maak opdracht 08

- 8 Gegeven is telkens een formule voor het verband tussen u en v .
Schrijf u in de vorm $u = a \cdot v^b$. Rond a en b indien nodig af op drie decimalen.

- a $v = 8 \cdot u^3$ c $v = 2 \cdot \sqrt[3]{u}$
b $v = 2,35 \cdot \sqrt[4]{u}$ d $v = 12,3 \cdot u^{1,25}$

- 9 Biologen hebben gemeten hoeveel zuurstof een zoogdier nodig heeft om één kilometer af te leggen. Ze vonden voor het verband de formule $Z = 0,4 \cdot L^{0,67}$. Hierbij is Z het aantal milliliter zuurstof dat verbruikt wordt per kilometer en is L het lichaamsgewicht in kilogrammen.

- a Een olifant weegt 4500 kg.
Bereken Z .
b Hoeveel milliliter zuurstof heeft een hond van 40 kg nodig om een afstand van 7 kilometer af te leggen?
c Druk L uit in Z en bereken met de formule het gewicht van een zebra die 35 milliliter zuurstof per kilometer verbruikt.



Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

- 04** a Op het blaadje zie je een aantal herleidingen van machtsfuncties. Geef bij iedere herleiding aan welke rekenregel is gebruikt.
- b Schrijf de functie $j(x) = \frac{1}{x^7}$ in de vorm $j(x) = x^a$. Welke rekenregel heb je gebruikt?
- c Schrijf $p(x) = x^{-2,8} \cdot x^{-1,3}$ in de vorm $p(x) = x^a$.
- d $k(x) = 3(x^{-2})^5$ is te schrijven als $k(x) = 3x^b$. Welke waarde heeft b ?
- e De functie $p(x) = \frac{x^{2,8} \cdot x^3}{x^4}$ kun je schrijven als $p(x) = \frac{x^c}{x^4}$. Welke waarde heeft c ?
- f Schrijf de functie p als een machtsfunctie.
- g Schrijf de functies $f(x) = \frac{x^3 \cdot x^{2,2}}{x^{0,5}}$ en $h(x) = x^{3,2} \cdot \sqrt[5]{x}$ als machtsfuncties.

☐	A	$f(x) = \frac{x^4}{x^7}$	ofwel $f(x) = x^{-3}$
☐	B	$g(x) = x^{1,7} \cdot x^{-4}$	ofwel $g(x) = x^{-2,3}$
☐	C	$h(x) = (x^{1,3})^3$	ofwel $h(x) = x^{3,9}$
☐	D	$j(x) = \sqrt[5]{x}$	ofwel $j(x) = x^{\frac{1}{5}}$

- 08** Op het blaadje is een begin gemaakt met de herleiding van de formule $P = 4 \cdot Q^{0,2}$ tot de vorm $Q = a \cdot P^b$.
- a In stap 1 zijn de linkerkant en de rechterkant verwisseld. Leg uit wat er in stap 2 gebeurd is.
- b Gebruik in stap 3 de regel: ' $x^a = c$ geeft $x = c^{\frac{1}{a}}$ ' om het juiste getal op de puntjes in te vullen.
- c In stap 4 gebruik je de rekenregel $(p \cdot q)^c = p^c \cdot q^c$. Maak de herleiding tot de vorm $Q = a \cdot P^b$ verder af.

☐	$P = 2,5 \cdot Q^{0,2}$	
☐	$2,5 \cdot Q^{0,2} = P$	1
☐	$Q^{0,2} = 0,4 \cdot P$	2
☐	$Q = (0,4 \cdot P)^{\dots}$	3
☐	$Q = \dots$	4

Schrijf u in de vorm $u = a \cdot v^b$. Rond a en b indien nodig af op drie decimalen.

- d $v = \frac{1}{4} \cdot u^2$ f $v = 0,1 \cdot \sqrt[5]{u}$
- e $v = 2,5 \cdot \sqrt[3]{u}$ g $v = 1,15 \cdot u^{2,25}$

Uitdagende opdrachten

- U1** a Gegeven is de functie $h(x) = c \cdot x^a$. De grafiek van h gaat door de punten (1, 6) en (4, 48). Bereken a en c .
- b De formule $P = m \cdot Q^{\frac{1}{3}}$ is te herleiden tot de vorm $Q = \frac{1}{8} \cdot P^b$. Bereken de waarde van m en de waarde van b .

16.2 Machtsfuncties differentiëren

Je leert

- hoe je een functie met machten differentieert

Leerroutes

- ondersteunend: 10—11—12—13—14—015—15—16
- doorlopend: 10—11—12—13—14—15—16—17
- uitdagend: 10—11—12—14—15—16—17—U2

Loise beweert dat haar auto vanuit stilstand binnen 10 seconden een snelheid van 100 km per uur bereikt. Als haar auto vanuit stilstand vertrekt, voldoet de afgelegde afstand aan de formule $s = 6t\sqrt{t}$, met s in meters en t in seconden.

- Is de bewering van Loise in overeenstemming met deze formule?



10 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{x}$

- a** Bereken met je rekenmachine de helling van de grafiek van f bij $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ en $x = 4$.

- b** Je kunt $f(x) = \frac{1}{x}$ ook schrijven als de machtsfunctie $f(x) = x^{-1}$.

Laat zien dat als de regel hiernaast ook geldt voor negatieve exponenten, de afgeleide functie $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ is.

- c** Controleer of de uitkomsten van opdracht a hiermee overeenstemmen.

$$\text{Als } f(x) = x^n$$

$$\text{dan } f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

11 **a** Bereken met je rekenmachine de hellingen van de grafiek van de functie $g(x) = \frac{2}{x^3}$ bij $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ en $x = 4$.

- b** Je kunt $g(x) = \frac{2}{x^3}$ ook schrijven als $g(x) = 2x^{-3}$.

Hoe ziet volgens de regel naast opdracht 10 de afgeleide $g'(x)$ er dan uit?

- c** Bereken met de afgeleide functie die je bij opdracht b hebt gevonden de hellingen van de grafiek van g bij $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ en $x = 4$.

Komen de hellingen overeen met de waarden die je in opdracht a hebt gevonden?

- 12** Gegeven is de functie $h(x) = x^{0,7}$.
Met de rekenmachine is een tabel van de functiewaarden $h(x)$ en de hellingen van de functie h gemaakt.
- Wat wordt volgens de regel naast opdracht 10 de afgeleide $h'(x)$?
 - Bereken met de afgeleide functie $h'(x)$ die je bij opdracht a hebt gevonden de hellingen bij $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ en $x = 4$.
 - Kan de functie van opdracht a de afgeleide van h zijn?

x	$h(x)$	helling
0	0	-
1	1	0,7
2	1,625	0,569
3	2,158	0,503
4	2,639	0,462
5	3,085	0,432

Theorie

De afgeleide functie van $f(x) = x^a$ is $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$ voor elke waarde van $a \neq 0$.

Dit betekent dat a ook een negatief getal of een breuk kan zijn.

Voorbeeld 1

Differentieer de functie $g(x) = 4x^{5\frac{1}{2}} - x^{-6}$.

Oplossing

$$g'(x) = 5\frac{1}{2} \cdot 4x^{4\frac{1}{2}} - -6 \cdot x^{-7}$$

$$g'(x) = 22x^{4\frac{1}{2}} + 6x^{-7}$$

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $K = 4\sqrt{p} + 5$.

Geef de afgeleide $\frac{dK}{dp}$

Oplossing

$$K = 4p^{\frac{1}{2}} + 5$$

$$\frac{dK}{dp} = 2p^{-\frac{1}{2}}$$

- 13** Differentieer.

H

- $f(x) = x^{1,9}$
- $K(q) = 0,5q^2 + 3q^{-1}$
- $A = -10g^{10,3} + g^{-1}$
- $N = 2,4p^{-3,4} - 67$

- 14** **a** Schrijf de functie $f(x) = \sqrt{x}$ als een machtsfunctie.

b Laat zien dat $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

c Laat zien dat je de functie $g(x) = \frac{1}{x^2} + \sqrt{x} \cdot x^3$ kunt schrijven als $g(x) = x^{-2} + x^{3\frac{1}{2}}$

d Geef de afgeleide $g'(x)$.

e Laat zien dat je de functie $h(x) = \frac{2x^{3,5} + x^2 - 3}{x^2}$ kunt schrijven als $h(x) = 2x^{1,5} + 1 - 3x^{-2}$.

f Geef de afgeleide $h'(x)$. Schrijf je antwoord zonder negatieve en gebroken exponenten.

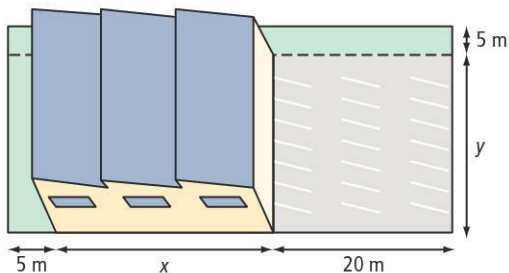
Ondersteunende route → maak opdracht 015

- 15** Differentieer. Schrijf je antwoorden zonder negatieve en gebroken exponenten.

H

a $S(p) = 3\sqrt{p}$ **d** $TW = 4q^{1,5} + 2q \cdot \sqrt[3]{q}$
b $g(d) = \frac{5}{d^3} + d^{2,5}$ **e** $A = 4p^{0,5} - \frac{3}{p^2}$
c $T(p) = \frac{1}{2\sqrt{p}} + 3p$ **f** $K = \frac{t^2 \cdot \sqrt{t} + t^2 + 3}{t}$

- 16** Een fabrikant levert babyvoeding in poedervorm voor € 30,- per kg. Voor het verband tussen de hoeveelheid geproduceerde babyvoeding q in kg en de kosten TK in euro's geldt de formule $TK = 100 + q^{1,6}$.
- a** Bereken de winst van de fabrikant bij een levering van 75 kg.
b Maak een formule voor de winst TW in euro's.
c Bereken met behulp van de afgeleide voor welke waarde van q de winst maximaal is.
- 17** Een bedrijf wil een magazijn neerzetten met een oppervlakte van 1125 m^2 . Vóór het magazijn komt een strook van 20 meter parkeerruimte, en langs twee zijden nog een groenstrook van 5 meter.



- a** Leg uit dat moet gelden $x \cdot y = 1125$.
b Neem voor de lengte van het magazijn x meter en voor de breedte van het magazijn y meter. Schrijf een formule op die het verband tussen x en y weergeeft en toon daarmee aan dat de oppervlakte van de benodigde grond is te berekenen met de formule
- $$O = 5x + 1250 + \frac{28125}{x}$$
- c** Bereken met behulp van de afgeleide de afmetingen van het stuk grond in het geval de oppervlakte ervan minimaal is.

Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

●	$f(x) = x^3 \cdot x^{0,7} + \frac{1}{x^{1,9}}$	Ties	
●			
●	$f(x) = x^{3,7} + x^{-1,9}$	1	
●	$f'(x) = \dots x^{\dots} + \dots x^{\dots}$	2	

●	$g(x) = x\sqrt{x} + \frac{2}{x^3}$	Marie	
●			
●	$g(x) = x^{1\frac{1}{2}} + 2x^{-3}$	1	
●	$g'(x) = \dots x^{\frac{1}{2}} + \dots x^{\dots}$	2	

015 a Ties differentieert de functie $f(x) = x^3 \cdot x^{0,7} + \frac{1}{x^{1,9}}$

Welke rekenregels heeft Ties gebruikt in stap 1?

b Maak de afgeleide in stap 2 verder af.

c Marie differentieert de functie $g(x) = x\sqrt{x} + \frac{2}{x^3}$

Welke rekenregels heeft Marie gebruikt in stap 1?

d Maak de afgeleide van de functie g op het blaadje verder af.

e Laat zien dat je de afgeleide van g kunt herleiden tot

$$g'(x) = 1\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{6}{x^4}$$

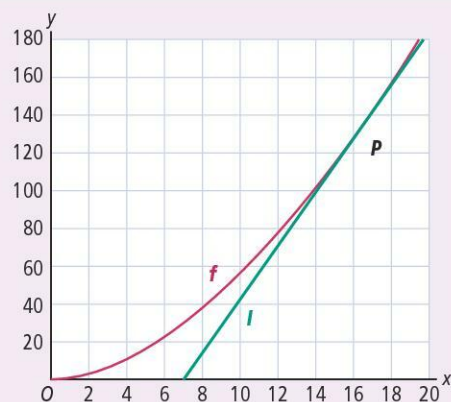
f Schrijf de functie $K(v) = \frac{2v^3 + 3v - 4}{2v^2}$ in de vorm

$K(v) = v^{\dots} + \dots v^{\dots} - \dots v^{\dots}$ en geef $K'(v)$.

Uitdagende opdrachten

U2 Lijn l raakt de grafiek van de functie $f(x) = x \cdot (\sqrt[4]{x})^3$ in het punt $P(16, 128)$.

Bereken de coördinaten van het punt waar lijn l de y -as snijdt.



16.3 Kettingfuncties

Je leert

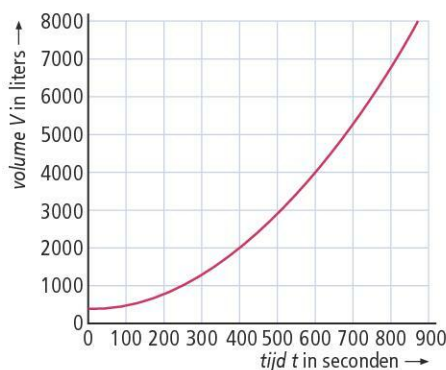
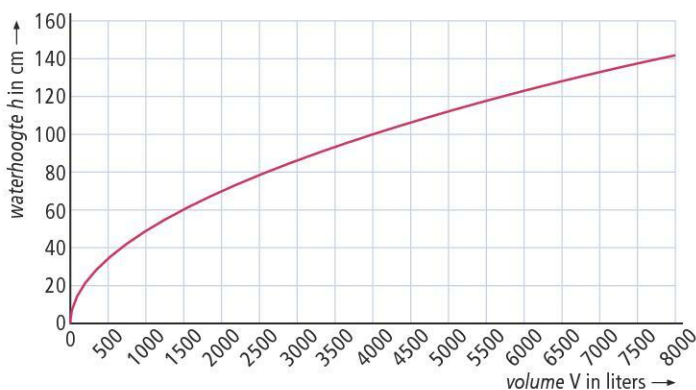
- hoe je herkent uit welke schakels een kettingfunctie is samengesteld

Leerroutes

- ondersteunend: 18—19—020—021—21—22—24
- doorlopend: 18—19—20—21—22—23—24
- uitdagend: 18—19—20—21—23—24—U3

Een vat is gevuld met gas. Als het vat verwarmd wordt, neemt ook de temperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ van het gas toe, en daarmee de druk p in hPa van het gas in het afgesloten vat. T voldoet aan de formule $T = 20 + 0,5t$ met t de tijd in minuten en p aan de formule $p = 3,4T + 932$.

- Bereken de druk bij $t = 10$.
- Hoe kun je de druk van het gas op een bepaald tijdstip uitrekenen zonder eerst de temperatuur te berekenen?



- 18** In een reservoir kan 8000 liter water. Het reservoir, waar al 400 liter water in staat, wordt gevuld. In de linker grafiek zie je het verband tussen het volume V in liters en de tijd t in seconden. In de rechter grafiek zie je het verband tussen het volume en de waterhoogte h in cm.

- Hoeveel liter water zit er in het reservoir op $t = 400$?
- Hoe hoog staat het water op het tijdstip $t = 400$?
- Op welk tijdstip staat het water ongeveer 80 cm hoog?
- Het functievoorschrift bij de linker grafiek is $V(t) = 0,01t^2 + 400$. Bij de rechter grafiek is het functievoorschrift $h(V) = \sqrt{2,5 \cdot V}$. Bereken de waterhoogte op het tijdstip $t = 200$.
- Bereken op welk tijdstip de waterhoogte 60 cm is.
- Laat zien dat je de waterhoogte na t seconden kunt berekenen met de functie $h(t) = \sqrt{2,5(0,01t^2 + 400)}$.

- 19** Tijdens een gymnastiekles moeten leerlingen een aantal conditietesten doen. Per onderdeel krijgen de leerlingen punten. Voor het onderdeel 400 meter hardlopen gebruikt de leraar daarbij de regel:

het aantal punten is $170 - 1,5 \times$ de tijd in seconden

- Joost heeft de 400 meter in 72 seconden gelopen. Hoeveel punten heeft hij gehaald op dit onderdeel?
- De leerlingen krijgen ook een cijfer voor hun prestatie bij de 400 meter hardlopen. Om het cijfer te berekenen gebruikt de leraar de formule $C = 0,09(170 - 1,5t) + 1$. Hierin is C het cijfer en t de tijd in seconden. Welk cijfer krijgt Joost?
- Achmed heeft de 400 meter in 56 seconden gelopen. Hoeveel punten heeft hij behaald en welk cijfer heeft hij gekregen?
- Geef een formule voor het aantal punten P , uitgedrukt in het aantal seconden t .
- Geef een formule waarbij het cijfer C uitgedrukt is in P .



Theorie

Functies zijn soms samengesteld uit meerdere functies. Dit noem je **samengestelde functies** of **kettingfuncties**. Je kunt deze functies ontleden in eenvoudigere schakels. Andersom kun je uit schakels een kettingfunctie samenstellen.

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie $f(t) = \frac{3}{2t^3 + 1}$

Uit welke schakels is deze functie opgebouwd?

Oplossing

$$f(u) = \frac{3}{u} \text{ en } u = 2t^3 + 1$$

De schakels zijn dus $y = \frac{3}{u}$ en $u = 2t^3 + 1$.

Voorbeeld 2

Gegeven zijn de schakels $y = \sqrt{u + 3}$ en $u = 1 + t^2$. Stel een formule op waarbij y uitgedrukt is in t .

Oplossing

$$y = \sqrt{u + 3} \text{ en } u = 1 + t^2$$

$$y = \sqrt{1 + t^2 + 3}$$

$$y = \sqrt{t^2 + 4}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 020

- 20**
- Gegeven zijn de schakels $y = \frac{1}{u}$ en $u = 0,5 + t$. Stel een formule op waarbij y uitgedrukt is in t .
 - De functie g ontstaat uit de schakels $y = \sqrt{u}$ en $u = 0,5 + 2t$. Stel het functievoorschrift $g(t)$ op.

H

Ondersteunende route → maak opdracht 021

- 21** De gegeven functies zijn telkens samengesteld uit twee schakels.

H

Schrijf bij elke functie de twee schakels op.

a $k(q) = \sqrt{2^q + 19}$ **c** $s(t) = 0,7 \cdot (3t + 6)^2$

b $w(x) = \frac{3}{2x - 5}$ **d** $d(a) = \frac{-4}{(x + 5)^2}$

- 22** **a** Gegeven is de functie $f(t) = (3 + \sqrt{t})^{-1}$.
Uit welke twee schakels is deze functie samengesteld?
b Uit welke schakels is $g(t) = \sqrt{3 + t^{-1}}$ samengesteld?

- 23** Gegeven zijn de functies $f(x) = (2x + 1)^{0,3}$ en
 $g(x) = \frac{5}{2x^{0,3} + 1}$

- a** Schrijf de schakels op waaruit functie f is samengesteld.
b Uit welke schakels is functie g samengesteld?

- 24** Gewicht, volume, lengte en huidoppervlakte van dieren hangen met elkaar samen. Biologen gebruiken vuistregels voor deze verbanden. Voor een antilopensoort geldt voor het gewicht G in kg, het volume V in dm^3 , de lengte L in dm en de huidoppervlakte O in dm^2 :

$$G = 0,2 \cdot V, \quad V = 0,1 \cdot L^3 \quad \text{en} \quad O = 2 \cdot L^2$$

- a** Een pasgeboren antilope heeft een lengte van 60 cm.
Hoe groot is de huidoppervlakte?
b Bereken het gewicht van dit jong.
c Stel een formule op waarbij het gewicht G van een antilope wordt uitgedrukt in de lichaamslengte L .
d Een volwassen mannetje weegt 80 kilo.
Bereken zijn huidoppervlakte.



Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

					Tjeerd
☐	$y = \sqrt{2p - 5}$	en	$p = x^2 + 1$		
☐	$f(x) = \sqrt{2(x^2 + 1) - 5}$			1	
☐	$f(x) = \sqrt{\dots - \dots}$			2	

020 Tjeerd stelt een functievoorschrift $f(x)$ samen uit de schakels

$$y = \sqrt{2p - 5} \text{ en } p = x^2 + 1.$$

- a** Waarom is het nodig om bij stap 1 haakjes te gebruiken?
- b** Maak de herleiding van Tjeerd verder af.

Stel een formule op waarbij y uitgedrukt is in x .

- c** $y = u^4$ en $u = x^2 + 5$
- d** $y = \frac{1}{u}$ en $u = 3x + 1$
- e** $y = \sqrt{2 - 3u}$ en $u = x^3 + 2x$

021 **a** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{14}{2x^2 + 3}$

Op het blaadje is $f\left(\frac{1}{2}\right)$ berekend.

Bereken op dezelfde manier $f(1)$.

- b** Vul in: de schakels van het functievoorschrift zijn $y = \dots$ en $u = \dots + \dots$
- c** Gegeven is de functie $g(x) = (2x + 5)^4$. Bereken $g(-1)$.
- d** Uit welke twee schakels is functie $g(x) = (2x + 5)^4$ samengesteld?

☐	$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{14}{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3}$		
☐			
☐	$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{14}{3\frac{1}{2}}$		
☐	$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4$		

Uitdagende opdrachten

- U3** **a** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{2(x^2 + x)^3 - 5}$. Geef de drie schakels waaruit deze functie is samengesteld.
- b** Gegeven zijn de schakels $y = \frac{3}{v}$, $v = \sqrt{4u}$ en $u = 3 - x^2$. Geef een functievoorschrift $f(x)$ dat ontstaat uit de samenstelling van deze schakels.

16.4 Kettingfuncties differentiëren

Je leert

- hoe je een kettingfunctie differentieert

Leerroutes

- ondersteunend: 25—26—027—28—29—030—31
- doorlopend: 25—26—27—28—29—30—31
- uitdagend: 25—26—27—29—30—31—U4

Bij de tienkamp krijg je punten voor de prestatie bij de 100 meter hardlopen. Als een atleet sneller loopt dan een ander krijgt hij meer punten.

Het aantal punten kun je berekenen met de formule $P = 25,4347 \cdot (18 - T)^{1,81}$. Hierin is P het aantal punten en T de tijd in seconden.

Volgens Simone is de afgeleide van deze

formule $\frac{dP}{dT} = 46,04(18 - T)^{0,81}$.

- Leg uit hoe Simone aan deze afgeleide komt.
- Waarom kan deze afgeleide niet goed zijn?



25 Bij het vullen van een reservoir gelden de formules

$V(t) = t^2 + 50$ en $h(V) = 2\sqrt{V}$ met t in seconden, V in liters en h in cm.

- Hoe groot is $\frac{\Delta V}{\Delta t}$, de gemiddelde vulsnelheid in liters per seconde, gedurende het tijdsinterval $[10, 20]$?
- Hoe groot is $\frac{\Delta h}{\Delta V}$, de gemiddelde verandering van de hoogte in cm per liter, gedurende dat tijdsinterval?
- Hoe groot is $\frac{\Delta h}{\Delta t}$, de gemiddelde stijgsnelheid in cm per seconde, gedurende tijdsinterval $[10, 20]$?
- Leg uit dat $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{\Delta h}{\Delta V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t}$
- Met behulp van een klein interval, bijvoorbeeld $[10; 10,001]$, kun je de stijgsnelheid berekenen van het water op $t = 10$.
Bereken de stijgsnelheid van het water op $t = 10$.
- Laat zien dat je de stijgsnelheid van het water op $t = 10$ ook kunt berekenen door de waarden van de afgeleiden van V en h bij $t = 10$ te vermenigvuldigen.

Theorie

Je vindt de afgeleide van een kettingfunctie door de afgeleiden van de afzonderlijke schakels met elkaar te vermenigvuldigen.

In formulevorm: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Deze manier om de afgeleide te vinden, heet de **kettingregel**.

- 26** Gegeven is de functie $f(x) = (2 - 3x)^4$.
De schakels waaruit de functie f is samengesteld zijn $y = u^4$ en $u = 2 - 3x$.

- a** Vul op het blaadje stap 2 en stap 3 verder in.
b Na stap 3 is $\frac{dy}{dx}$ uitgedrukt in de variabele u .
Schrijf $f'(x)$ als functie van x door de substitutie van u door $2 - 3x$.
c Bereken op dezelfde manier de afgeleide van de functie $g(x) = (5x + 1)^3$

●	$f(x) = (2 - 3x)^4$				
●	$y = u^4$ en $u = 2 - 3x$				1
●	$\frac{dy}{du} = \dots u^{\dots}$ en $\frac{du}{dx} = -3$				2
●	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \dots u^{\dots} \cdot -3$				3
●	$\frac{dy}{dx} = -\dots u^{\dots}$ met $u = 2 - 3x$				

Aanpak

Hoe differentieer je een kettingfunctie?

- Schrijf de schakels op waaruit de functie is samengesteld.
- Bepaal van elke schakel de afgeleide.
- Vermenigvuldig de afgeleiden van de afzonderlijke schakels met elkaar.
- Schrijf door substitutie het resultaat als een functie van één variabele.

Voorbeeld 1

Differentieer de functie $f(x) = (2x - 7)^2$.

Oplossing

- $y = u^2$ en $u = 2x - 7$
- $\frac{dy}{du} = 2u$ en $\frac{du}{dx} = 2$
- $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \cdot 2 = 4u$
- $f'(x) = 4(2x - 7)$ ofwel $f'(x) = 8x - 28$

Voorbeeld 2

Differentieer de functie $g(x) = 5(2x^3 + x)^4$.

Oplossing

- $y = 5u^4$ en $u = 2x^3 + x$
- $\frac{dy}{du} = 20u^3$ en $\frac{du}{dx} = 6x^2 + 1$
- $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 20u^3 \cdot (6x^2 + 1)$
- $g'(x) = 20(2x^3 + x)^3 \cdot (6x^2 + 1)$

Ondersteunende route → maak opdracht 027

27 Differentieer.

- H** a $w(x) = (1 - 3x)^4$ c $g(x) = (x^3 + 7x)^3$
 b $h(x) = 2(3x^2 + 8)^{1,5}$ d $p(x) = 4(2 - x)^{-5}$

28 Gegeven is de functie $f(x) = (4x + 5)^2$.

- a Bepaal de afgeleide met behulp van de kettingregel.
 b Werk de haakjes van $f(x)$ weg en differentieer het resultaat.
 c Heb je bij opdracht a en b dezelfde afgeleide gevonden?
 d Welke methode kun je het beste gebruiken om de functie $g(x) = (2x + 5)^4$ te differentiëren? Leg uit waarom.
 e Differentieer de functie $g(x) = (2x + 5)^4$.

29 Op het blaadje is een begin gemaakt met het differentiëren van de wortelfunctie $A(x) = \sqrt{x^3 + 4x}$.

- a Maak de berekening verder af.
 b Gegeven is de functie $h(x) = \sqrt{10 - 10x^2}$.

Laat zien dat $h'(x) = \frac{-10x}{\sqrt{10 - 10x^2}}$ de afgeleide is van functie h .

●	$A(x) = \sqrt{x^3 + 4x}$			
●	$y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ en $u = x^3 + 4x$			
●	$\frac{dy}{du} = \dots$ en $\frac{du}{dx} = 3x^2 + 4$			
●	$A'(x) = \dots$			

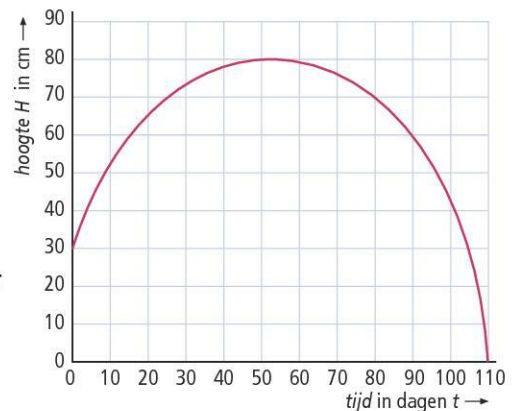
Ondersteunende route → maak opdracht 030

30 Differentieer.

- H** a $f(x) = \sqrt{4x}$ c $h(x) = \sqrt{2x - x^2}$
 b $g(x) = \sqrt{2x + 1}$ d $k(x) = 1 + \sqrt{x^2}$

31 De waterhoogte in een waterton wordt beschreven door de formule $H = \sqrt{-2t^2 + 210t + 900}$ met H in cm en de tijd t in dagen.

- a Bereken met de afgeleide na hoeveel dagen de waterhoogte maximaal is. Hoe hoog staat het water dan?
 b Bereken de snelheid in cm per dag waarmee de waterhoogte daalt op $t = 100$.
 c Bereken met de afgeleide de snelheid waarmee het water stijgt als de waterhoogte voor het eerst 60 cm hoog is.



Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten

- 027** Gegeven is de functie $k(x) = (7x^3 - 9)^5$.
Op het blaadje is de afgeleide van k berekend.
- a** Vul stap 2 verder in.
b Welke bewerking is er in stap 4 en stap 5 uitgevoerd?
- Differentieer.
- c** $f(x) = (6x + 1)^3$
d $g(x) = (12 - 5x^2)^4$
e $h(x) = (2x^{1,4} + 2,5)^6$
f $k(x) = (x^2 + 8x)^3$

☐	$k(x) = (7x^3 - 9)^4 \text{ dus}$	
☐	$y = u^4 \text{ en } u = 7x^3 - 9$	1
☐	$\frac{dy}{du} = \dots \cdot u \dots \text{ en } \frac{du}{dx} = \dots$	2
☐	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4u^3 \cdot 21x^2$	3
☐	$\frac{dy}{dx} = 4(7x^3 - 9)^3 \cdot 21x^2$	4
☐	$k'(x) = 84x^2 (7x^3 - 9)^3$	5

- 030** Je gaat de functie $f(x) = \sqrt{2x + 5}$ differentiëren.

- a** Je kunt $f(x)$ schrijven als $f(x) = (2x + 5)^{\frac{1}{2}}$.

Vul in: $y = u \dots$ en $u = \dots$

$$\frac{dy}{du} = \dots \text{ en } \frac{du}{dx} = \dots$$

- b** Laat zien dat $f''(x) = (2x + 5)^{-\frac{3}{2}}$.

Differentieer.

- c** $g(x) = \sqrt{3x}$ **e** $k(x) = \sqrt{1 - 5x^2}$
d $h(x) = \sqrt{3 + 4x}$ **f** $l(x) = \sqrt{4x + x^2}$

Uitdagende opdrachten

- U4** **a** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{2(x^3 + x)^2 + 1}$.
Bereken met behulp van $f'(x)$ in welk(e) punt(en) de grafiek een top heeft.
- b** Toon aan dat de lijn $y = 1,2x + 1,4$ de grafiek van de functie $g(x) = \sqrt{2x^2 + 7}$ raakt.

16.5 Gebroken functies differentiëren

Je leert

- hoe je een gebroken functie differentieert

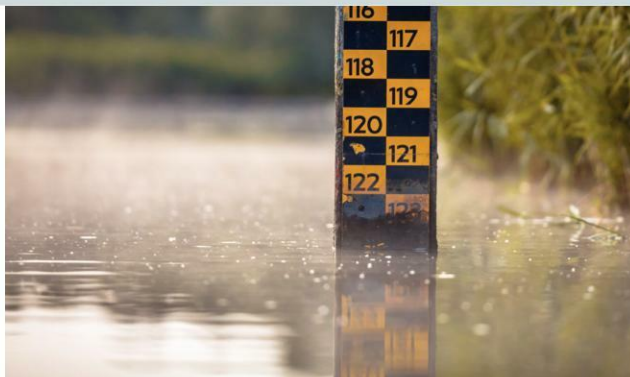
Leerroutes

- ondersteunend: 32—33—034—35—36—37—38
- doorlopend: 32—33—34—35—36—37—38
- uitdagend: 32—33—34—36—37—38—U5

Gedurende de maand augustus kun je de waterhoogte in een rivier berekenen met de

functie $H(t) = \frac{180}{(0,01t + 1)^2}$. Hierin is H de waterhoogte in cm en t de tijd in dagen.

- Hoe kun je aan het functievoorschrift zien dat de afgeleide $H'(t)$ voor alle waarden van t negatief is?



- 32** Een schoonmaakbedrijf berekent de kosten voor het schoonmaken van vloeren met de formule $P = 13,4 + \frac{12,2}{A}$. Hierin is P de prijs in euro's per m² vloeroppervlakte per jaar en is A de oppervlakte in duizenden m².
- a Bereken de kosten per jaar voor een vloeroppervlakte van 2000 m².
 - b Beredeneer met de formule dat de kosten per m² per jaar nooit lager zijn dan € 13,40.
 - c Wat gebeurt er met de kosten per m² als de vloeroppervlakte klein is?
 - d Bereken $\frac{dP}{dA}$ als $A = 100$.
 - e Welke betekenis heeft je antwoord van opdracht d?

- 33** De functie $f(x) = \frac{1}{(4x^2 - 5)^3}$ kun je schrijven als $f(x) = (4x^2 - 5)^{-3}$.
- a Waarom moet je de kettingregel gebruiken om deze functie te differentiëren?
 - b Vul in: $y = u^{\dots}$ en $u = 4x^2 - 5$
 $\frac{dy}{du} = \dots$ en $\frac{du}{dx} = \dots$
 - c Geef de afgeleide $f'(x)$.

Theorie

Gebroken functies als $f(x) = \frac{5}{(2x+3)^2}$ kun je differentiëren met behulp van de kettingregel.

Voorbeeld 1

Differentieer de functie $f(x) = \frac{5}{(2x+3)^2}$

Oplossing

$$y = 5u^{-2} \text{ en } u = 2x + 3$$

$$\frac{dy}{du} = -10u^{-3} \text{ en } \frac{du}{dx} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -10u^{-3} \cdot 2 = -20u^{-3}$$

$$f'(x) = -20(2x+3)^{-3} \text{ ofwel } f'(x) = \frac{-20}{(2x+3)^3}$$

Voorbeeld 2

Geef de afgeleide van de functie $g(x) = \frac{-6}{(x^2+4)^3}$

Oplossing

$$y = -6u^{-3} \text{ en } u = x^2 + 4$$

$$\frac{dy}{du} = 18u^{-4} \text{ en } \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 18u^{-4} \cdot 2x = 36x \cdot u^{-4}$$

$$g'(x) = 36x(x^2+4)^{-4} \text{ ofwel } g'(x) = \frac{36x}{(x^2+4)^4}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 034

34 Differentieer.

H

a $f(x) = \frac{14}{2x+7}$

c $h(x) = \frac{1}{(2x+3)^4}$

b $g(x) = -\frac{3}{9-2x}$

d $j(x) = \frac{-2}{\left(4 - \frac{1}{2}x\right)^2}$

35 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{5}{(2x^3+4)^3} + 6x^2 - 5$.
Deze functie kun je zien als de som van de functies

$$g(x) = \frac{5}{(2x^3+4)^3} \text{ en } h(x) = 6x^2 - 5.$$

a Laat zien dat $g'(x) = -\frac{90x^2}{(2x^3+4)^4}$

b Geef de afgeleide $h'(x)$.

c Geef de afgeleide $f'(x)$.

36 Differentieer.

a $h(x) = \frac{3}{2x+8} + 5x$

c $k(x) = 6 - \frac{3}{(2x-2)^4}$

b $j(x) = 4x^2 + (8x-5)^{-3}$

d $m(x) = (3x^2+4)^{-2} + 2x$

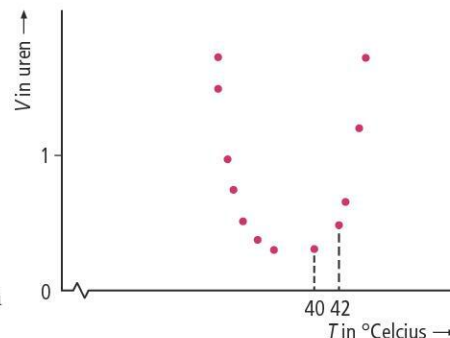
- 37** Onderzoekers hebben muggen in een afgesloten ruimte gebracht. Het aantal muggen blijkt redelijk benaderd te kunnen worden met de functie $N(t) = 1500 - \frac{600}{2 + 3t}$

Hierin is N het aantal muggen en t de tijd in dagen.

- Hoeveel muggen hebben de onderzoekers in de afgesloten ruimte gebracht?
- Neemt het aantal muggen volgens het functievoorschrift toe? Licht je antwoord toe.
- Bereken na hoeveel dagen het aantal muggen meer dan 1490 is.
- Geef de afgeleide $N'(t)$.
- Bereken de snelheid waarmee het aantal muggen toeneemt op $t = 5$.



- 38** Bij het verteren van voedsel spelen colibacteriën een belangrijke rol. Zij komen voor in de darmen. In laboratoria wordt veel onderzoek gedaan naar de groei van populaties van colibacteriën. Daarbij gebruikt men een kweekvloeistof waarmee men de omstandigheden zoals die in de darmen voorkomen, zoveel mogelijk nabootst. Bij constante temperatuur blijken deze populaties exponentieel te groeien. Men meet de verdubbelingstijd V , dat is de tijd in uren die het experiment moet duren om twee keer zoveel bacteriën te krijgen. Uit waarnemingen blijkt dat V afhangt van de ingestelde temperatuur T in graden Celsius.



In de figuur is het resultaat van de waarnemingen in beeld gebracht.

- Is de groei van de populatie bij 42°C sterker dan de groei bij 40°C ? Licht je antwoord toe met behulp van de figuur.
- Binnen het temperatuurgebied waarin de waarnemingen zijn gedaan, blijkt men het verband tussen T en V redelijk te kunnen benaderen met de formule: $V = \frac{16,9}{-T^2 + 75T - 1350}$

Bereken met behulp van de afgeleide $\frac{dV}{dT}$ bij welke temperatuur de groei volgens de formule het sterkst is.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A12 1994 tijdvak 1)

Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

034 Op het blaadje is een begin gemaakt met het differentiëren van de functie $f(x) = \frac{6}{(5x-4)^2}$ ofwel $f(x) = 6 \cdot (5x-4)^{-2}$.

- a** Leg uit wat er in stap 1 is gebeurd.
- b** Maak stap 2 en stap 3 verder af.
- c** Geef de afgeleide van functie f uitgedrukt in x .

Differentieer.

d $A(x) = \frac{1}{(2x-6)^2}$

f $k(x) = \frac{-5}{(x^4+1)^2}$

e $T(x) = \frac{2}{(4x^3+1)^4}$

g $q(x) = -\frac{3}{(4x-2)^3}$

☐	$f(x) = \frac{6}{(5x-4)^2}$				
☐	$f(x) = 6 \cdot (5x-4)^{-2}$				
☐	$y = 6u^{-2}$ en $u = 5x-4$				1
☐	$\frac{dy}{du} = \dots u \dots$ en $\frac{du}{dx} = \dots$				2
☐	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \dots$				3
☐	$f'(x) = \dots$				

Uitdagende opdrachten

U5 Door een technische storing om 13.00 uur in de airconditioning van een groot gebouw neemt het zuurstofgehalte tijdelijk af. De technische staf heeft voor het verloop van het zuurstofgehalte een formule opgesteld: $Z = 200 - \frac{2000}{3t+10} + \frac{20000}{(3t+10)^2}$

Hierin is Z het aantal cm^3 zuurstof per liter lucht en t de tijd in minuten na 13.00 uur. Op het tijdstip $t = 0$ is het zuurstofniveau normaal.

- a** Na verloop van tijd nadert het zuurstofgehalte weer tot het normale niveau.

Toon aan dat de formule hiermee in overeenstemming is.

- b** Laat zien dat de afgeleide van Z te schrijven is in de vorm

$$\frac{dZ}{dt} = 6000 \cdot \frac{3t-10}{(3t+10)^3} \text{ en bereken met de afgeleide dat}$$

het zuurstofgehalte vanaf het moment van de stroomstoring direct begint te dalen.

- c** Bereken het tijdstip waarop het zuurstofgehalte volgens de formule minimaal is.

16.6 Redeneren met de afgeleide

Je leert

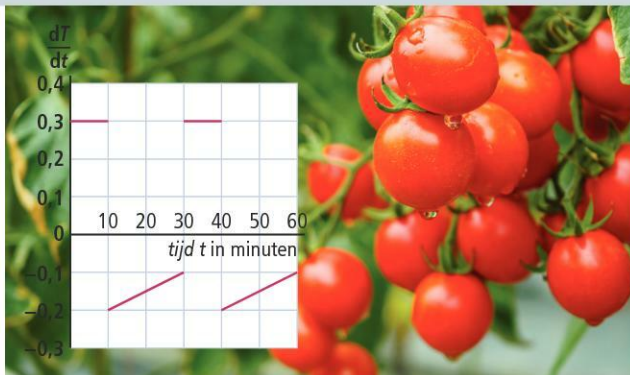
- hoe je met een afgeleide van een functie eigenschappen van de functie vaststelt

Leerroutes

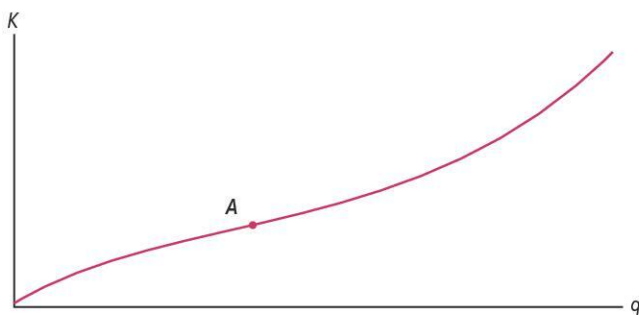
- ondersteunend: 39—40—041—41—43
- doorlopend: 39—40—41—42—43
- uitdagend: 39—40—42—43—U6

Een tomatenteler wil de temperatuur zo constant mogelijk houden. Als de temperatuur onder de 22°C komt, slaat de verwarming van de kas aan. In de grafiek zie je hoe de temperatuur T verandert.

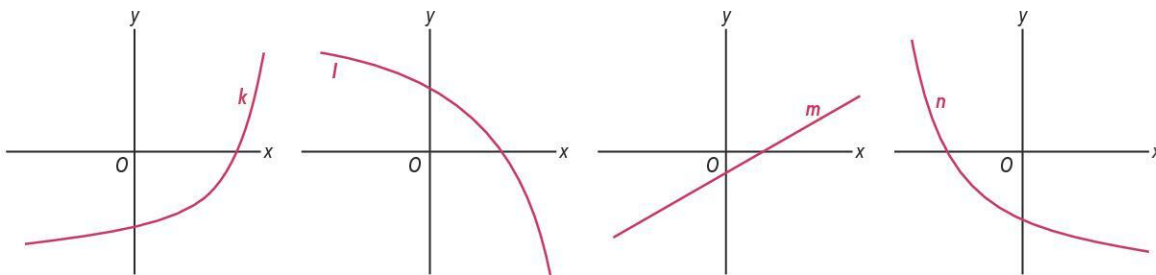
- Geef een beschrijving hoe de temperatuur in de kas verandert.



- 39** Een fabrikant gebruikt voor het vaststellen van de kosten van het maken van een artikel de functie K . Van deze functie is de grafiek getekend. Hierin K in euro's en q het aantal artikelen.



- Je ziet dat het getekende deel van de grafiek stijgend is. Wat kun je zeggen over de waarde van de afgeleide $K'(q)$ op dit deel?
- De stijging van de grafiek verloopt tot punt A anders dan na punt A . Op welk deel is de grafiek van K toenemend stijgend?
- Beschrijf de stijging op het andere deel.

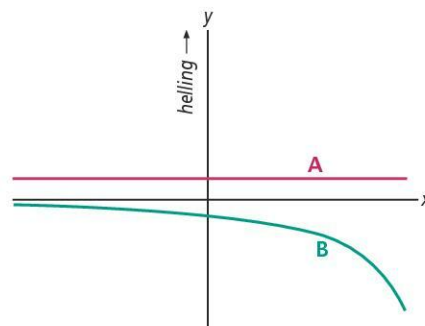


40

H

Van de functies k , l , m en n zijn de grafieken geschetst.

- Van welke functie is de grafiek afnemend dalend?
- Van welke functie is de grafiek constant stijgend?
- Geef van de overgebleven functies aan op welke manier de grafiek stijgt of daalt.
- Bij een functie p hoort een afnemend stijgende grafiek. Maak een schets van de grafiek van functie p .
- Bij de functies k , l , m en n kun je schetsen maken van de bijbehorende afgeleide functies.
Van welke functie is grafiek A de grafiek van de afgeleide?
En van welke functie is grafiek B de grafiek van de afgeleide?
- Schets ook bij de twee overige functies de grafiek van de afgeleide.



Theorie

Om vast te stellen hoe de functiewaarden toe- of afnemen kun je kijken naar de afgeleide.

Als de afgeleide positief is, dan stijgt de grafiek van de functie.

Als de afgeleide negatief is, dan daalt de grafiek van de functie.

Als afgeleide naar nul nadert, heb je te maken met een afnemende stijging of daling.

Als de afgeleide steeds verder weg van nul gaat, heb je te maken met een toenemende stijging of daling.

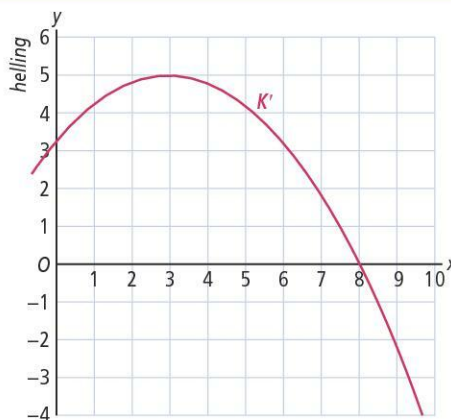
Voorbeeld

De grafiek is van de afgeleide functie K' .

Beschrijf hoe de grafiek van K verloopt.

Oplossing

- Van $x = 0$ tot $x = 3$ is de helling positief en neemt toe.
De grafiek van K is toenemend stijgend.
- Van $x = 3$ tot $x = 8$ is de helling positief en neemt af.
De grafiek van K afnemend stijgend.
- Bij $x = 8$ verandert de helling van positief naar negatief.
De grafiek van K gaat over van stijgen naar dalen en heeft dus een top. K heeft bij $x = 8$ een maximum.
- Bij $x > 8$ is de helling negatief en neemt af.
De grafiek van K is toenemend dalend.



Ondersteunende route → maak opdracht 041

- 41** De functie die bij de grafiek van opdracht 39 hoort is $K(q) = 0,01q^3 - 6q^2 + 2000q + 10000$.
- Bepaal de afgeleide $K'(q)$ en plot de grafiek van K' .
 - Hoe zie je aan de grafiek van K' dat de grafiek van K stijgt voor $q > 0$?
 - Voor welke waarde van q is de stijging het kleinst?
 - Hoe groot is deze minimale stijging?
Wat betekent dit voor de kosten K ?
 - Op welk interval is de grafiek van K toenemend stijgend?

- 42** Een tuinder heeft een waterreservoir om bij gebrek aan regenwater de planten water te kunnen geven. Voor een bepaalde periode kun je de inhoud van het reservoir berekenen met de formule $I = \frac{120}{(0,05t + 1)^2}$

Hierin is I de inhoud in m^3 en t de tijd in dagen.

- Uit welke schakels is de formule I opgebouwd?
- Beredeneer met behulp van de schakels dat de inhoud afneemt.
- Geef de afgeleide $\frac{dI}{dt}$ en schets de grafiek van $\frac{dI}{dt}$.
- Beredeneer met behulp van de grafiek dat de inhoud van het reservoir steeds langzamer afneemt.

- 43** De meeste roofdieren proberen iedere dag hun voedsel zo snel mogelijk te vangen. Het wiskundig model geeft de opbrengstfunctie bij het verband tussen de hoeveelheid voedsel r en de tijd t in uren die nodig is om die hoeveelheid voedsel te vangen.

Een bepaalde roofdiersoort is één uur onderweg naar zijn jachtgebied (een half uur heen en een half uur terug). Voor deze roofdieren is de opbrengstfunctie gegeven door de formule $r = 4\sqrt{t-1}$ als $t > 1$

Deze opbrengstfunctie heeft voor $t > 1$ de volgende twee eigenschappen:

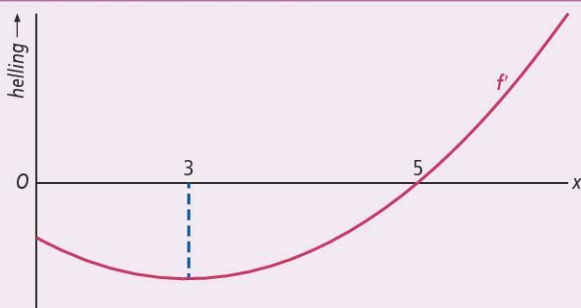
- een langere tijd levert altijd een hogere opbrengst op;
- de toename van de opbrengst wordt steeds geringer naarmate t groter wordt.

Beredeneer met behulp van de afgeleide dat de opbrengstfunctie aan beide eigenschappen voldoet.
(Ontleend aan CE vwo wiskunde A12 2006 tijdvak 1)



Uitdagende route → maak opdracht U6

Ondersteunende opdrachten



041 Gegeven is voor $x \geq 0$ de grafiek van de afgeleide van een functie f .

- Wat weet je van f' als f daalt?
- Bij welke waarden van x daalt de grafiek van f ?
- Leg uit dat de grafiek van f het snelst daalt bij $x = 3$.
- Bij welke waarde van x gaat de daling van de grafiek van f over in een stijging?
- Bij welke waarde van x heeft de grafiek van f een top? Heeft de functie f daar een maximum of een minimum?

Uitdagende opdrachten

U6 Een bedrijf produceert USB-sticks. Met de formule $K = \frac{1}{6}q^3 - 2q^2 + 10q$ kun je de productiekosten K in euro's berekenen. Hierin is q het aantal USB-sticks in honderdtallen.

- Onderzoek met behulp van de afgeleide voor welke waarden van q de grafiek van K afnemend stijgend is.
- De USB-sticks worden voor € 6,50 per stuk aan de detailhandel verkocht. Bereken de maximale winst die volgens de formule behaald kan worden met de productie van de USB-sticks.



44 Differentieer.

a $f(t) = t \cdot \sqrt{4t} \cdot t^{1,5}$

c $Z(a) = 2a + 7^2$

b $A(p) = \frac{2p^{2,3} + 10p^2 - p^{1,4}}{5p}$

d $K(q) = 7q^2 + \frac{1}{2q^2 + 3}$

45 Men gaat er vaak van uit dat de geluidssnelheid in lucht 340 meter per seconde is. Dat is niet helemaal waar. In werkelijkheid hangt de snelheid van het geluid af van de temperatuur en de windsnelheid. Bij windstil weer wordt het verband bij benadering weergegeven door de formule

$V = 331 \cdot \sqrt{1 + \frac{T}{273}}$. Hierin is V de snelheid van het geluid in meters per seconde bij een temperatuur van T graden Celsius. In de atmosfeer neemt de temperatuur tot op 10 km hoogte lineair af tot -50°C volgens de formule $T = 15 - 6,5h$. Hierin is h de hoogte in kilometers.

a Laat zien dat je door substitutie van $T = 15 - 6,5h$ de

formule $V = 331 \cdot \sqrt{1 + \frac{T}{273}}$ kunt herleiden tot

$$V = 331 \cdot \sqrt{1,0549 - 0,0238 \cdot h}.$$

b Bereken op welke hoogte de geluidssnelheid volgens de formule gelijk is aan 320 meter per seconde.

c Bereken $\frac{dV}{dh}$ en schets de grafiek van $\frac{dV}{dh}$ voor $0 \leq h \leq 10$.

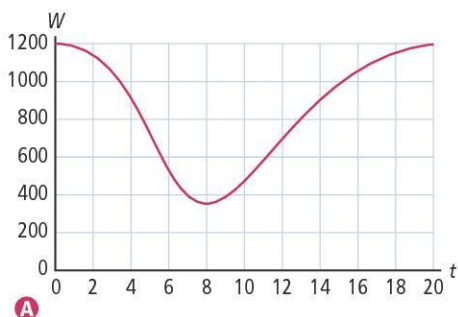
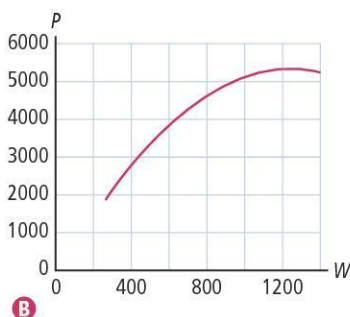
d Hoe verandert de geluidssnelheid tussen $h = 0$ en $h = 10$?

46 Door onderzoek is vastgesteld dat de hoeveelheid melk die een koe geeft, beïnvloed kan worden door een preparaat aan het voer toe te voegen. Er is een formule opgesteld die goed past bij de metingen die in het onderzoek zijn verricht. Als er dagelijks g gram ($g \leq 15$) van het preparaat aan het voer wordt toegevoegd, is de extra hoeveelheid melk in liters die een koe per keer geeft $M = 2,94 \cdot g^{0,67} - g$.

a Bereken $\frac{dM}{dg}$

b Bereken met behulp van $\frac{dM}{dg}$ de hoeveelheid preparaat g die de grootste mogelijke opbrengst oplevert.

c Een wettelijke bepaling beperkt de maximale dagelijkse hoeveelheid preparaat tot 6 gram. Bereken de gevolgen voor de melkproductie.



47 In een fabriek werken ongeveer 1200 mensen. Ten gevolge van een griep epidemie had het bedrijf in de maand februari veel ziekteverzuim. In grafiek A staat het aantal nog aanwezige werknemers W uitgezet tegen de tijd t in dagen met $t = 0$ op 31 januari. De productie P per dag is in grafiek B uitgezet tegen W .

- In welke periode was de productie meer dan 1000 minder dan normaal?
- Onderzoek hoeveel minder dan normaal de productie was op 6 februari.

48 De zevenkamp bij vrouwen is een atletiekwedstrijd over zeven onderdelen. Voor elk van de onderdelen krijg je punten. Bij het verspringen kun je de punten berekenen met de formule $P = 0,188807 \cdot (a - 210)^{1,41}$. Hierin is P het aantal punten en is a de afstand in cm.

- Onderzoek met de afgeleide hoe het aantal punten verandert als een atlete steeds verder springt.
- Welke betekenis heeft je antwoord van opdracht a voor de atleten in de praktijk?



Vaardigheid

Je kunt een functie met machten herleiden.

Functies van de vorm $f(x) = x^a$ heten machtsfuncties. De exponent a kan ook negatief of gebroken zijn. De regels voor het rekenen met machten kun je gebruiken bij het rekenen en herschrijven van machtsfuncties met negatieve en gebroken exponenten.

$$\begin{aligned} g^a \cdot g^b &= g^{a+b} & (g^a)^b &= g^{a \cdot b} \\ \frac{g^a}{g^b} &= g^{a-b} & g^{-a} &= \frac{1}{g^a} \\ g^0 &= 1 & g^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{g} \end{aligned}$$

Voorbeeld 1

Schrijf $f(x) = \frac{x^{-2,1} \cdot x^{1,3} \cdot x^{0,8}}{x^{3,5}}$ in de vorm $f(x) = x^a$.

Oplossing

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^0}{x^{3,5}} & g^a \cdot g^b &= g^{a+b} \\ f(x) &= \frac{1}{x^{3,5}} & g^0 &= 1 \\ f(x) &= x^{-3,5} & \frac{1}{g^a} &= g^{-a} \end{aligned}$$

Voorbeeld 2

Schrijf $g(x) = \sqrt{x} \cdot (x^{\frac{1}{4}})^6$ in de vorm $g(x) = x^a$.

Oplossing

$$\begin{aligned} g(x) &= x^{\frac{1}{2}} \cdot (x^{\frac{1}{4}})^6 & g^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{g} \\ g(x) &= x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{1\frac{1}{2}} & (g^a)^b &= g^{a \cdot b} \\ g(x) &= x^2 & g^a \cdot g^b &= g^{a+b} \end{aligned}$$

S1 Schrijf de functies in de vorm $f(x) = b \cdot x^a$.

- a** $f(x) = x^3 \cdot x^{\frac{2}{5}} \cdot x^{-1\frac{1}{5}}$
- b** $f(x) = 9 \cdot (x^4)^{\frac{1}{2}}$
- c** $f(x) = 4x^2 \cdot \frac{2,5}{\sqrt[3]{x}}$
- d** $f(x) = \frac{x^{2,7} \cdot x^{4,3}}{6x^7}$

Vaardigheid

Je kunt een functie met machten differentiëren.

De afgeleide functie van $f(x) = x^a$ is $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$ voor elke waarde van $a \neq 0$.

Om een gebroken functie of een wortelfunctie te differentiëren schrijf je deze eerst in de vorm $f(x) = c \cdot x^a$.

Voorbeeld 1

Differentieer $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$.

Oplossing

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{2\frac{1}{3}} \\ f'(x) &= 2\frac{1}{3} \cdot x^{1\frac{1}{3}} \text{ ofwel } f'(x) = 2\frac{1}{3} \cdot x\sqrt[3]{x} \end{aligned}$$

Voorbeeld 2

Bepaal $\frac{dp}{dt}$ van de formule $p = \frac{6}{t^4}$

Oplossing

$$\begin{aligned} p &= 6t^{-4} \\ \frac{dp}{dt} &= -24t^{-5} \text{ ofwel } \frac{dp}{dt} = \frac{-24}{t^5} \end{aligned}$$

S2 Differentieer.

a $f(x) = 8x\sqrt{x}$

c $h(x) = 6x^{1,4} \cdot x^{-3}$

b $g(x) = \frac{5}{2x^7}$

d $i(x) = \frac{3x^5 + 5x - 1}{x^2}$

Vaardigheid

Je kunt herkennen uit welke schakels een kettingfunctie is samengesteld.

Functies zijn soms samengesteld uit meerdere functies.

Je kunt deze functies ontleden in eenvoudigere schakels.

Andersom kun je uit schakels een kettingfunctie samenstellen.

Voorbeeld 1

Gegeven zijn de schakels $y = 2u^3$ en $u = \frac{1}{2}t^2 + 1$.
Geef een formule waarbij y uitgedrukt is in t .

Oplossing

$$y = 2u^3 \text{ en } u = \frac{1}{2}t^2 + 1$$

$$y = 2\left(\frac{1}{2}t^2 + 1\right)^3$$

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie $f(t) = \frac{1}{2}\sqrt{t^2 + t}$.

Uit welke twee schakels is deze functie samengesteld?

Oplossing

$$f(t) = \frac{1}{2}\sqrt{t^2 + t}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}\sqrt{u} \text{ en } u = t^2 + t$$

De schakels zijn dus $y = \frac{1}{2}\sqrt{u}$ en $u = t^2 + t$.

S3 **a** Gegeven zijn de schakels $u = t^2 - 3t$ en $y = \frac{1}{u}$

Geef het functievoorschrift $f(t)$.

b De functie $g(t)$ ontstaat uit de schakels $u = 3,5 + 2t$ en

$$y = 2\sqrt{u}.$$

Geef het functievoorschrift $g(t)$.

S4 Geef de schakels waaruit de functies k en l zijn opgebouwd.

a $k(x) = (x^2 - 7)^5$

b $l(x) = \frac{1}{2}\sqrt{(2x - 5)}$

Vaardigheid

Je kunt een kettingfunctie differentiëren.

- 1 Schrijf de schakels op waaruit de functie is samengesteld.
- 2 Bepaal van elke schakel de afgeleide.
- 3 Vermenigvuldig de afgeleiden van de afzonderlijke schakels.
- 4 Schrijf door substitutie het resultaat als een functie van één variabele.

Voorbeeld 1

Differentieer de functie $f(x) = (3x + 7)^4$.

Oplossing

- 1 $y = u^4$ en $u = 3x + 7$
- 2 $\frac{dy}{du} = 4u^3$ en $\frac{du}{dx} = 3$
- 3 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4u^3 \cdot 3 = 12u^3$
- 4 $f'(x) = 12(3x + 7)^3$

Voorbeeld 2

Differentieer de functie $g(x) = 8\sqrt{2x^3 - 6}$.

Oplossing

- 1 $y = 8u^{\frac{1}{2}}$ en $u = 2x^3 - 6$
- 2 $\frac{dy}{du} = 4u^{-\frac{1}{2}}$ en $\frac{du}{dx} = 6x^2$
- 3 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4u^{-\frac{1}{2}} \cdot 6x^2 = 24x^2 \cdot u^{-\frac{1}{2}}$
- 4 $g'(x) = 24x^2 \cdot (2x^3 - 6)^{-\frac{1}{2}}$ ofwel $g'(x) = \frac{24x^2}{\sqrt{2x^3 - 6}}$

S5 Differentieer.

a $f(x) = 5(x^4 + 6x)^3$

b $g(x) = \sqrt{4x^3 + 5x}$

Vaardigheid

Je kunt een gebroken functie differentiëren.

Bij het differentiëren van gebroken functies van de vorm

$f(x) = \frac{-2}{(3x - 4)^2}$ kun je de kettingregel gebruiken.

Voorbeeld

Differentieer de functie $f(x) = \frac{-2}{(3x - 4)^2}$

Oplossing

$y = -2u^{-2}$ en $u = 3x - 4$

$\frac{dy}{du} = 4u^{-3}$ en $\frac{du}{dx} = 3$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4u^{-3} \cdot 3 = 12u^{-3}$

$f'(x) = 12(3x - 4)^{-3}$ ofwel $f'(x) = \frac{12}{(3x - 4)^3}$

S6 Differentieer.

a $A(q) = \frac{-2}{3q - 5}$

b $k(p) = \frac{2}{(4p^2 - 1)^3}$

Theorie

Je kunt met de afgeleide van een functie eigenschappen van de functie vaststellen.

Om vast te stellen hoe de functiewaarden toe- of afnemen kun je kijken naar de afgeleide.

Als de afgeleide negatief is, dan daalt de grafiek van de functie.

Als de afgeleide positief is, dan stijgt de grafiek van de functie.

Als afgeleide naar nul nadert, heb je te maken met een afnemende stijging of daling.

Als de afgeleide steeds verder weg van nul gaat, heb je te maken met een toenemende stijging of daling.

Voorbeeld

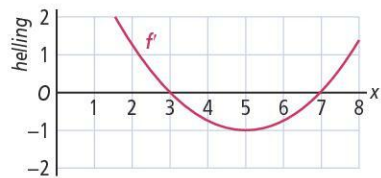
Gegeven is de grafiek van de afgeleide van een functie f .
Hoe verloopt de grafiek van f op het interval $\langle 3, 7 \rangle$?

Oplossing

Op het interval $\langle 3, 7 \rangle$ is de afgeleide negatief dus de grafiek van f daalt.

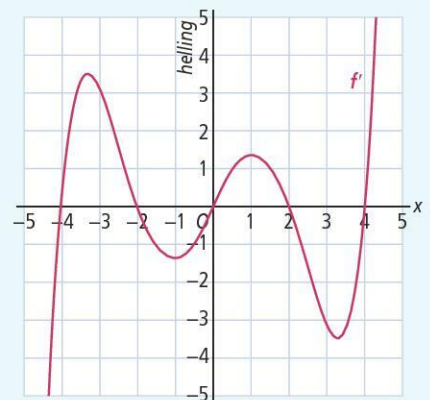
Op het interval $\langle 3, 5 \rangle$ daalt de grafiek van f' dus de grafiek van f is toenemend dalend.

Op het interval $\langle 5, 7 \rangle$ stijgt de grafiek van f' dus de grafiek is afnemend dalend.



S7 Gegeven is de grafiek van de afgeleide van functie f .

- a Op welke intervallen daalt de grafiek van f ?
- b Op welke intervallen stijgt de grafiek van f ?
- c Bij welke waarde(n) van x heeft f een maximum?
- d Bij welke waarde(n) van x heeft f een minimum?
- e Op welke intervallen is de grafiek van f toenemend dalend?



T1 Schrijf in de vorm $K = b \cdot p^a$, rond zo nodig af op drie decimalen.

a $K = p^{-\frac{1}{2}} \cdot p^{\frac{2}{5}}$

d $p = 3 \cdot K^5$

b $K = (4p^{-12})^{-\frac{1}{2}}$

e $p = (16K)^{1,25}$

c $K = 6p \cdot \frac{(1,5p)^2}{\sqrt[5]{p}}$

f $K = \frac{\sqrt{p^3} \cdot \left(\frac{1}{2}p\right)^3}{p^2 \cdot \sqrt{p}}$

T2 Geef de afgeleide.

a $f(x) = 4x^{-3} - 2x^{\frac{1}{2}}$

d $K(p) = \sqrt{2 - 5p}$

b $f(x) = \frac{1}{x^2} + 5x$

e $A(q) = -\frac{2q^3 - q^{5,8}}{2q}$

c $g(t) = \frac{4t^3 - t^2\sqrt{t} + 1}{t}$

f $L(x) = 45\sqrt{16 - x^2}$

T3 Bepaal $\frac{dP}{dt}$

a $P = \sqrt{(2t + 3)^4}$

c $P = 2(t^2 + 10)^3$

b $P = \frac{3}{2(t^2 - 1)}$

d $P = \frac{1}{2 - 3t} + t^4$

T4 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{4 - x^{-2,7}}$.

a Uit welke twee schakels is de functie f samengesteld?

b Beredeneer met behulp van de schakels dat $f(x)$ op den duur tot 2 nadert.

c Geef $f'(x)$ en schets de grafiek van f' .

d Beschrijf met behulp van de afgeleide het verloop van de grafiek van f .

T5 Voor het verband tussen het gewicht G in grammen de huidoppervlakte H in cm^2 van een muis geldt bij benadering de formule $G = 0,037 \cdot H^{1,5}$.

a Geef een formule waarbij H uitgedrukt is in G . Rond indien nodig af op drie decimalen.

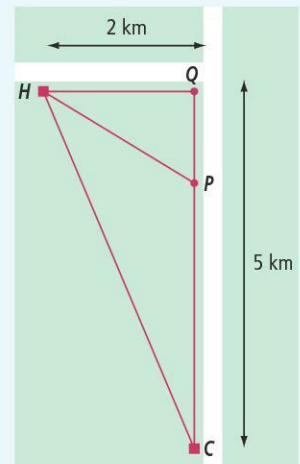
b Een muis van twee weken oud weegt zeven gram. Bereken met behulp van de afgeleide met welke snelheid de huidoppervlakte per gram op dat moment toeneemt.



- T6** Gegeven is de functie $g(t) = \frac{1000}{t+8} - \frac{5000}{(t+8)^2} + 8$.
- Naar welke waarde daalt de grafiek van g op den duur? Licht je antwoord toe met behulp van het functievoorschrift.
 - Geef de afgeleide $g'(t)$.
 - Onderzoek met behulp van $g'(t)$ vanaf welke waarde van t de grafiek van g afnemend daalt.

- T7** Op de marketingafdeling van een fabriek wordt een onderzoek gedaan naar de opbrengst van pas op de markt gebrachte artikelen. Voor het verband tussen het aantal verkochte artikelen q en de opbrengst TO geldt $TO = 20000 - \frac{10^7}{q+500}$
- Bereken voor welke waarde van q de opbrengst gelijk is aan 10 000 euro.
 - Toon met behulp van $\frac{dTO}{dq}$ aan dat bij een opbrengst van 10 000 euro de opbrengst nog niet maximaal is.
 - Onderzoek of er in deze situatie een aantal artikelen bestaat waarvoor de opbrengst maximaal is.

- T8** In een bos is onlangs een huis H gebouwd. Uiteraard wil de bewoner van dit huis elektriciteit in zijn woning. Daarom moet naar dit huis vanaf de elektriciteitscentrale C een leiding worden aangelegd. Deze leiding kan langs verschillende trajecten worden aangelegd.
- In zijn geheel langs de weg, dus volgens route CQH .
 - In zijn geheel door het bos, dus volgens route CH .
 - Deels langs de weg en deels door het bos dus volgens route CPH .
- Langs de weg is het aanleggen van de leiding goedkoper dan wanneer dat door het bos gebeurt. De kosten langs de weg zijn € 20,- per meter. Door het bos zijn de kosten € 25,- per meter.
- Bereken welke oplossing goedkoper is, geheel door het bos of geheel langs de weg.
 - Toon aan dat voor de aanlegkosten de formule geldt:
 $AK = 100\,000 - 20x + 25 \cdot \sqrt{x^2 + 4000\,000}$
 Hierbij is AK de aanlegkosten in euro's en is x de afstand PQ in meters.
 - Onderzoek met behulp van de afgeleide hoe hoog de kosten voor de aanleg minimaal zijn.



Je kunt een functie met machten herleiden.

- E1** Schrijf de functievoorschriften in de vorm $f(x) = b \cdot x^a$. Rond b zo nodig af op twee decimalen.

a $f(x) = x^{-3} \cdot x^{\frac{2}{5}} \cdot x^{-\frac{3}{5}}$ **c** $f(x) = \left(3x^{-\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{4}{5}}$
b $f(x) = (0,5 \cdot x^{1,3})^{-3}$ **d** $f(x) = (2x^8)^{-0,25}$

Je kunt een functie met machten differentiëren.

- E2** Differentieer.

a $f(x) = 2x^3 - 7x^{-3}$ **c** $f(x) = x^{3,5}\sqrt{x}$
b $f(x) = \frac{x^6 + 2x^4}{x^2}$ **d** $f(x) = \frac{7}{x^3} + 3x^2$

Je kunt herkennen uit welke schakels een kettingfunctie is samengesteld.

- E3** **a** Uit welke schakels is functie $f(t) = \frac{1}{4 - t^{-2}}$ samengesteld?
b Uit welke schakels is de functie $g(x) = \sqrt{7x - 56}$ samengesteld?

Je kunt een kettingfunctie differentiëren.

- E4** Differentieer.

a $A(k) = (3k + 5)^4$ **c** $p(t) = (-7t - 5)^6$
b $Z(p) = \sqrt{\frac{1}{3}p^3 - \frac{1}{6}p^2}$ **d** $f(x) = -(x^5 - 1)^2$

Je kunt een gebroken functie differentiëren.

- E5** Geef de afgeleide $\frac{dA}{dp}$

a $A = \frac{-5}{\frac{1}{2}p - 4}$ **c** $A = \frac{2}{7 - 3p}$
b $A = \frac{1}{(3p - 4)^2}$ **d** $A = \frac{-10}{(5 - p)^2}$

Je kunt met de afgeleide van een functie eigenschappen van de functie vaststellen.

- E6** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{4}{(0,5x^2 + 1)^2}$ voor $x > 0$.
- a** Differentieer f en plot de grafiek van f' .
b Leg uit hoe je aan de grafiek van de afgeleide kunt zien dat de grafiek van f voor $x > 0$ daalt.
c Op welk interval is er sprake van een toenemende daling?

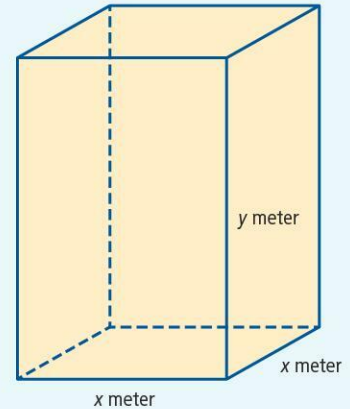
E7 Gegeven is de functie $g(t) = 0,000\,013t^3 - 0,078t^2 + 200t + 30000$. Onderzoek met behulp van $g'(t)$ bij welke waarde van t de grafiek van g overgaat van afnemend stijgend in toenemend stijgend.

E8 Een timmerman krijgt de opdracht een kist zonder deksel te maken. De vierkante bodem bestaat uit materiaal dat € 36,- per m² kost. De zijanten worden begroot op € 27,- per m². Het bedrag dat aan materiaal mag worden uitgegeven, is maximaal € 432,-.

- Schrijf de kosten van de bodem als functie van x .
- Druk de kosten van de vier zijanten samen uit in x en y .
- Als de totale kosten € 432,- zijn, geldt voor het verband tussen x en y de formule $y = \frac{12 - x^2}{3x}$.

Toon dat aan.

- Toon aan dat je de inhoud van de kist kunt berekenen met de functie $I(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$.
- Geef de afgeleide $I'(x)$.
- Bij welke afmetingen is de inhoud maximaal? Bereken de maximale inhoud.
- De waarde van x neemt toe van 0 tot 2. Beredeneer dat de grafiek van y dan afnemend stijgend is.



E9 Een blok ijs heeft de vorm van een kubus met ribbe 10 cm. Het blok ijs wordt op een plek gezet waar het ijs gelijkmatig begint te smelten. Neem aan dat het blok ijs hierbij steeds de vorm van een kubus blijft houden. Verder gaat het smelten in een zodanig tempo dat de ribben per minuut een halve millimeter korter worden.

- Hoe groot is de lengte van een ribbe na zes minuten?
- Hoe groot is het volume van het blok ijs in mm³ na zes minuten?
- Geef een formule voor het verband tussen de lengte r van een ribbe in mm en de tijd t in minuten.
- Geef een formule voor het verband tussen het volume V in mm³ en de tijd t in minuten.
- Geef een formule voor de snelheid waarmee het volume V van het blok ijs verandert na t minuten.
- Na hoeveel minuten verandert het volume V drie keer zo langzaam als bij het begin van het smeltproces?



Intelligentiequotiënt

In 1904 kreeg de psycholoog Alfred Binet (1857-1911) een aanstelling van de Franse overheid om onderzoek te doen naar leerlingen die op school slecht presteerden. Binet maakte een test die hij bij Parijse scholieren afnam en die model staat voor hedendaagse intelligentietesten.

De Amerikaanse psycholoog Lewis Madison Terman (1877-1956) vervolmaakte deze test. Hij verbond er een score aan die de naam intelligentiequotiënt (IQ) kreeg.

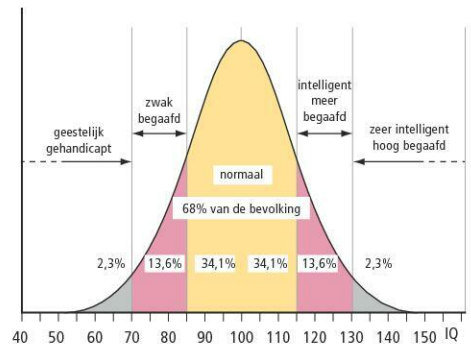
$$IQ = \frac{\text{verstandelijke leeftijd}}{\text{werkelijke leeftijd}} \times 100$$

Bij een gemiddelde begaafdheid hoort $IQ = 100$.

Voor volwassenen ging die berekening niet op, omdat intelligentie niet meer toeneemt vanaf het 18e levensjaar.

Nieuwe testen waren nodig. David Wechsler (1896-1981) ontwikkelde voor de leeftijden van 16 tot 85 de Wechsler Adult Intelligence Scale (WAIS) en voor de leeftijden van 6 tot 16 de Wechsler Intelligence Scale for Children (WISC). De vernieuwde versies van deze testen worden nog steeds gebruikt.

Bij deze testen worden aan goede antwoorden, punten toegekend. De behaalde score wordt vergeleken met die van mensen van dezelfde leeftijd, de zogenaamde normgroep. De gemiddelde score van deze groep wordt gelijk gesteld aan een IQ van 100. De huidige IQ testen meten dus eigenlijk de verhouding van het IQ van één persoon en het gemiddelde IQ van personen met dezelfde leeftijd. Het IQ is in iedere normgroep (leeftijdsgroep) normaal verdeeld met een gemiddelde van 100 en een standaarddeviatie van 15. Een IQ test is een momentopname: als een deelnemer slecht geslapen heeft of last heeft van faalangst, kan zijn score wel 10% lager uitvallen.



Opdracht

- Welke van de volgende beweringen is waar?
 - Er zijn ongeveer evenveel mensen met een IQ van 80 als met een IQ van 120.
 - Iemand met een IQ van 150 is niet tweemaal zo slim als iemand met een IQ van 75.
 - Er zijn ongeveer 40 keer zoveel mensen met een IQ lager dan 130, dan mensen met een IQ hoger dan 130.
- Er wordt algemeen aangenomen dat iemand met een universitaire opleiding behoort tot de 5% slimste mensen. Geef een schatting voor het IQ van de groep van de 5% intelligentste mensen.

Vaardigheden 8

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Rijen
- Rekenmachine
- Logaritmische schalen
- Systematisch tellen



Rijen

- 1 In de gegeven rij getallen zit een regelmaat.
- Welke regelmaat zie je?
 - Schrijf de volgende drie getallen op van deze rij.
 - Controleer dat de rij vastgelegd is met de formule $u_{n+1} = u_n + n$ en $u_1 = 7$.
 - Een andere rij is vastgelegd met de formule $v(n+1) = 2v(n) + 1$ en $v(0) = -3$.
Schrijf de volgende vijf getallen van de rij op.

7 8 10 13 17 22

Theorie

Als je bij een rij de volgende term kunt berekenen uit de voorafgaande term(en), dan spreek je van recursie. De bijbehorende formule heet een recursieve formule. Bij sommige rijen kun je een term $u(n)$ direct berekenen met het rangnummer n . Je gebruikt dan een directe formule.

- Een rij waarvan je een term vindt door bij de voorafgaande term een constante a op te tellen heet een rekenkundige rij. De constante a heet het verschil.
- Een rij waarvan je een term vindt door de voorafgaande term met een constante r te vermenigvuldigen heet een meetkundige rij. De constante r heet de reden.

Directe formule bij een rekenkundige rij: $u(n) = b + a \cdot n$.
Directe formule bij een meetkundige rij: $u(n) = b \cdot r^n$.
In beide gevallen geldt: $b = u(0)$.

Voorbeeld 1

Geef een directe formule bij de rij:
 $u(1) = 299$, $u(2) = 286$, $u(3) = 273$,

Oplossing

u is een rekenkundige rij met verschil -13 .
 $u(0) = 299 + 13 = 312$
 $u(n) = 312 - 13n$

Voorbeeld 2

Geef een directe formule bij de rij:
 $K_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot K_n$ en $K_4 = 10$

Oplossing

K is een meetkundige rij met reden $\frac{1}{2}$.
 $K_0 = \frac{10}{(\frac{1}{2})^4} = 160$. $K_n = 160 \cdot (\frac{1}{2})^n$

- 2 Schrijf van elke rij de eerste vier termen op.
- $u(n+1) = 3 \cdot u(n) - 2$ met beginterm $u(0) = 2$.
 - $v_{n+1} = 1,5 \cdot v_n$ met beginterm v_1 en met $v_2 = 24$.
- 3 Geef van elk van de rijen A, B, C, D en E een recursieve formule.
- 4
- Welke van de rijen van opdracht 3 zijn rekenkundig en welke zijn meetkundig?
 - Bepaal bij elk van deze rijen een directe formule.

A: 12, 18, 24, 30,
B: 3, 6, 12, 24,
C: 12, 25, 51, 103,
D: 320, -160, 80, -40,
E: 3, -4, -11, -18,

- 5 In januari 2017 krijgt Janneke 12 euro zakgeld per maand en elke volgende maand krijgt zij er 35 cent bij.
- Leg uit dat Janneke n maanden na januari 2017 als zakgeld $B_n = 12 + 0,35n$ euro per maand krijgt en geef ook een recursieve formule voor B_n .
 - Na hoeveel maanden zal het zakgeld voor het eerst boven de 30 euro uitkomen?

Rekenmachine

Theorie

Je kunt met je rekenmachine de coördinaten van toppen en snijpunten berekenen. Als je de rekenmachine gebruikt, geef je aan hoe je de rekenmachine hebt gebruikt. Daarbij neem je de volgende onderdelen op: de invoer, de vensterinstelling en de gebruikte opties.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 2 + 7\sqrt{x+2}$.
 Bereken de coördinaten van de top van de grafiek en bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek met de lijn $y = 4$.
 Rond je antwoorden af op twee decimalen.

Oplossing

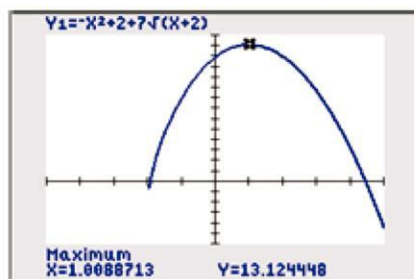
Invoer: $y_1 = -x^2 + 2 + 7\sqrt{x+2}$ en $y_2 = 4$

Venster: $-5 \leq x \leq 5$, $-6 \leq y \leq 14$

Optie: maximum. De top is (1,01; 13,12).

Optie: snijpunten.

De snijpunten zijn (-1,58; 4) en (3,87; 4).



- 6 Gegeven is de functie $A(p) = (2p - 75)(3p + 81)$.
- De snijpunten van de grafiek van A met de p -as kun je zonder rekenmachine berekenen.
Laat zien hoe en geef de coördinaten van de snijpunten.
 - Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van A .
 - Bereken de p -coördinaten van de snijpunten van de grafiek van A met de lijn $A(p) = 1000$. Rond je antwoord af op één decimaal.

- 7 Los op. Rond zo nodig af op twee decimalen.

a $3\sqrt{4x-1} = 5$

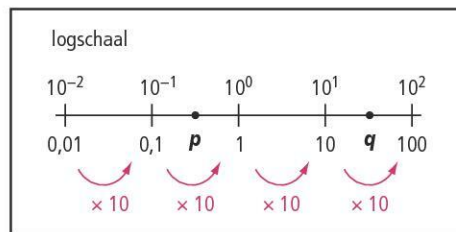
c $p - 4 = p^3 - 3p$

b $\frac{12}{\sqrt{7-2x}} = 4$

d $\frac{2x}{x^2+5} = \frac{1}{3}$

Logaritmische schalen

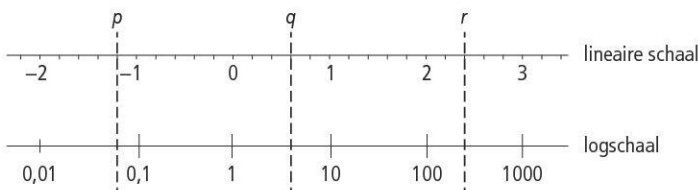
- 8 Je ziet een logaritmische schaalverdeling.
 p is het getal precies midden tussen 0,1 en 1.
 q is het getal precies tussen 10 en 100.
 a Bereken in twee decimalen de waarden van p en q .
 b Hoe kun je het getal q uit p afleiden?



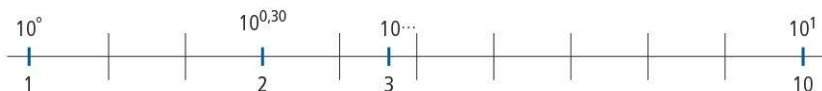
Theorie

Bij een lineaire schaalverdeling wordt bij gelijke stappen een vast getal opgeteld. Bij een logaritmische schaalverdeling of logschaal wordt bij gelijke stappen met een vast getal vermenigvuldigd.

- 9 Gegeven is een lineaire schaal en een logschaal.
 Bereken de getallen die horen bij p , q en r bij zowel de lineaire als de logschaal. Rond indien nodig af op twee decimalen.



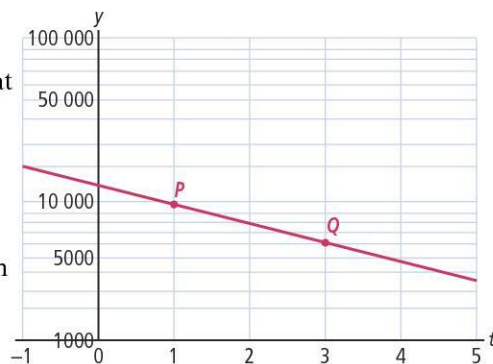
- 10 Op onderstaande logschaal zijn de getallen 1, 2, 3 en 10 weergegeven.



- a Leg uit hoe de plaats van het getal 2 is gevonden.
 b Bereken welk getal er op de puntjes moet staan en controleer of het getal 3 op de juiste plek staat.
 c Zet de getallen 4 tot en met 9 op de juiste plaats op de logschaal.

- 11 Gegeven is de grafiek bij het verband tussen t en y in een assenstelsel, waarvan de y -as een logschaal is. De grafiek gaat door de punten $P(1, 9600)$ en $Q(3, 6144)$.

- a Waarom is dit de grafiek van een exponentieel verband?
 b Bereken de groeifactor die hoort bij dit exponentiële verband.
 c Stel een formule op bij het verband tussen t en y .
 d De grafiek van een andere formule gaat door $(1, 50\,000)$ en is evenwijdig aan de grafiek door de punten P en Q . Wat zegt dat over de groeifactor?
 e Geef een formule bij deze grafiek.



Systematisch tellen

- 12** Een stapeltje kaarten bestaat uit ruiten twee tot en met ruiten zeven. Een tweede stapeltje bestaat uit harten twee tot en met harten zeven.
- Van elk stapeltje wordt één kaart afgenomen. Hoeveel verschillende tweetallen kaarten kun je op die manier krijgen?
 - De getallen op de twee kaarten worden bij elkaar opgeteld. Om de uitkomsten te noteren kun je gebruik maken van een schema.
Hoe vaak komt de uitkomst 8 voor?
 - Bij hoeveel tweetallen is de som van de getallen op de twee kaarten groter dan negen?
 - Je kunt ook op het verschil van de twee getallen op de kaarten letten.
Welk verschil komt het meeste voor? Hoe vaak is dat?

	2	3	4	5	...
2	4	5	...	...	...
3	5	...	...	...	...
4	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...

- 13** Je gooit één keer met een rode, een blauwe en een gele dobbelsteen. De som van de aantallen ogen is 6. Op hoeveel verschillende manieren kun je een totaal aantal ogen 6 krijgen?



- 14** Acht vrienden, Johan, Siebren, Mohammed, Peter, Igor, Herman, Gerrit en Amir gaan een dag op stap. Ze hebben een Volkswagenbusje gehuurd waar precies acht personen in mogen. Alle acht zijn ze in bezit van een rijbewijs.
- Op hoeveel manieren kunnen ze plaatsnemen in de bus?
 - Uit hun midden kiezen ze een chauffeur, iemand die de pot beheert en een woordvoerder. Hiervoor zijn drie verschillende personen nodig.
Op hoeveel manieren kunnen zij zo'n drietal samenstellen?

- 15** Op de foto zie je een stad van keramiek gemaakt door de kunstenares Elly van de Merwe. De huisjes zijn in 3 rijen geplaatst. Er zijn 13 huisjes in het kunstwerk zelf en er is nog 1 reservehuisje. De voorste rij heeft 4 posities om huisjes te plaatsen, de middelste rij heeft 5 posities en de achterste weer 4 posities. De opstelling van de huisjes kan veranderd worden. Je kunt daarbij de huisjes op de voorste rij en de huisjes op de middelste rij willekeurig verwisselen. De huisjes op de achterste rij kunnen alleen onderling verwisseld worden. Het reservehuisje past alleen op de voorste twee rijen. Bereken hoeveel opstellingen er mogelijk zijn met de 14 verschillende huisjes.
(Ontleend aan CE wiskunde vwo A -pilot 2014, tijdvak 1)







In dit hoofdstuk

Je hebt geleerd wanneer een stochast binomiaal of normaal verdeeld is. Bij een normaal en een binomiaal verdeelde stochast kun je kansen, de verwachtingswaarde en de standaardafwijking berekenen.

Bij het doen van statistisch onderzoek gaat men vaak uit van een veronderstelling, ook wel een hypothese genoemd. In het onderzoek ga je na of deze hypothese wel of niet verworpen moet worden, dit noem je een hypothesetoets. In dit hoofdstuk leer je hoe je een hypothesetoets uitvoert als de te onderzoeken variabele binomiaal of normaal verdeeld is.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk:

- | | |
|--|-------------|
| • Modelleren en algebraïseren | opdracht 5 |
| • Probleem oplossen en analytisch denken | opdracht 33 |
| • Abstraheren | opdracht 38 |

- V1** Gonnie gooit twaalf keer met een dobbelsteen.
- Bereken de kans dat ze twee keer een zes gooit.
 - Bereken de kans dat ze hoogstens drie keer een vijf gooit.
 - Bereken de kans dat ze minstens vier keer een twee gooit.
 - Hoe vaak zal ze naar verwachting een vier gooien?

Theorie

Bij een experiment met maar twee mogelijke uitkomsten waarbij de kans op succes p gedurende een aantal herhalingen n niet verandert, hoort een **binomiale verdeling**. Deze verdeling noteer je als $\text{Bin}(n; p)$.

Voor de verwachtingswaarde geldt $E(X) = n \cdot p$.

Voorbeeld

Bij het opblazen van ballonnen gaat 10% kapot. Je blaast dertig ballonnen op. Hoeveel ballonnen zullen naar verwachting kapot gaan? Bereken de kans dat er minstens vijf kapot gaan.

Oplossing

Stochast X is het aantal ballonnen dat kapot gaat.

X is $\text{Bin}(30; 0,1)$ -verdeeld

$$E(X) = 30 \times 0,1 = 3$$

Naar verwachting zullen er drie ballonnen kapot gaan.

De kans dat er minstens vijf kapot gaan is

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) \approx 0,1755.$$

- V2** Stochast X is $\text{Bin}\left(20; \frac{1}{3}\right)$ -verdeeld. Bereken.
- $E(X)$
 - $P(X = 11)$
 - $P(X < 8)$
 - $P(X \leq 6)$
 - $P(X > 5)$
 - $P(5 \leq X \leq 10)$
- V3**
- Een beginnend schutter treft gemiddeld één op de vijf keer de roos. Hij schiet tien keer achter elkaar. Hoe groot is de kans dat hij twee keer raak schiet?
 - Na jaren training heeft hij zijn gemiddelde zo opgevoerd dat hij vier van de vijf keer raak schiet. Hoe groot is de kans dat hij vier van de tien keer mist?
 - En hoe groot is de kans dat hij meer dan acht keer mist?
- V4** In Nederland draagt 12% van de mensen contactlenzen.
- Hoe groot is de kans dat in een willekeurige groep van vier personen er precies één is die contactlenzen draagt?
 - En hoe groot is de kans dat in een willekeurige groep van 20 personen minstens vijf contactlenzen dragen?

- V5** Het gewicht van 14-jarige meisjes is normaal verdeeld met een gemiddelde van 52 kg en een standaardafwijking van 12 kilogram.
- Ga na dat de kans dat een willekeurig gekozen 14-jarig meisje meer dan 65 kg weegt, gelijk is aan 0,1393.
 - Bereken de kans dat twee willekeurig gekozen meisjes van 14 jaar beiden meer dan 60 kg wegen.

Theorie

Zijn $X_1, X_2, \dots, X_n$ onafhankelijke stochasten, elk met dezelfde kansverdeling als X , dan geldt de $\sqrt{n}$ -wet.

- Voor de som $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ van de uitkomsten geldt $E(S) = n \cdot E(X)$ en $\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$.
- Voor het gemiddelde $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ van de uitkomsten geldt $E(\bar{X}) = E(X)$ en $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$.

- V6** Een machine vult flessen melk met het opschrift 'inhoud 3 liter'. De hoeveelheid melk per fles is normaal verdeeld met $\mu = 3,01$ liter en $\sigma = 0,015$ liter.
- Bereken de kans dat een fles minder dan 3 liter melk bevat.
 - Bereken de kans dat de gemiddelde inhoud van 25 willekeurig gekozen flessen minder dan 3 liter is.
- V7** In een land is de lengte van de vrouwen normaal verdeeld met een gemiddelde 165 cm en een standaardafwijking van 9 cm.
- Bereken hoeveel procent van de vrouwen tussen 160 cm en 170 cm lang is.
 - Bereken hoe lang een vrouw kan zijn als ze tot de 5% langste vrouwen behoort.
 - Bereken de kans dat de gemiddelde lengte van 100 willekeurig gekozen vrouwen groter dan 167 cm is.

- V8** Een kweker van mandarijnen kweekt mandarijnen waarvan bekend is dat het gewicht normaal verdeeld is met een gemiddelde van 30 gram en een standaardafwijking van 6 gram. De kweker verkoopt de mandarijnen in netjes van tien.
- Ga na dat de kans dat een netje mandarijnen meer dan 295 gram aan mandarijnen bevat, gelijk is aan 0,6039.
 - Dieneke koopt acht netjes mandarijnen. Bereken de kans dat minstens vijf van deze netjes mandarijnen meer dan 295 gram mandarijnen bevat.



17.1 Hypotheses

Je leert

- wat een statistische toets is
- wat een nulhypothese en een alternatieve hypothese zijn

Leerroutes

- ondersteunend: 1—2—03—04—5
- doorlopend: 1—2—3—4—5
- uitdagend: 1—3—4—5—U1

Daniël heeft ronde dobbelstenen. Hij vermoedt dat hij met deze dobbelstenen vaker dan je zou verwachten een zes gooit. Hij gooit daarom 600 keer met een ronde dobbelsteen en het blijkt dat hij 110 keer een zes heeft gegooit.

- Vermoed je dat bij deze dobbelsteen de kans op een zes inderdaad groter is dan $\frac{1}{6}$?



- 1 Een fruithandelaar biedt een grote partij sinaasappels aan. Hij beweert dat 15% een beschadiging heeft. Als deze bewering klopt, wil een groenteboer de partij wel kopen, maar als het percentage hoger is, niet. Om na te gaan of de bewering klopt, neemt hij een steekproef van 40 sinaasappels. Ga ervan uit dat de bewering van de fruithandelaar klopt. Noem het aantal sinaasappels in de steekproef met een beschadiging X .
- a Leg uit waarom X binomiaal verdeeld is.
 - b Hoeveel sinaasappels met een beschadiging verwacht je in de steekproef?
 - c Wat zal de conclusie van de groenteboer zijn als hij vijf beschadigde sinaasappels aantreft in de steekproef?
 - d En welke conclusie bij 15 beschadigde sinaasappels?
 - e De groenteboer besluit het aanbod af te wijzen als hij negen of meer beschadigde sinaasappels aantreft in de steekproef. Bereken de kans dat de groenteboer het aanbod afwijst terwijl inderdaad 15% van de sinaasappels in de grote partij een beschadiging heeft.

Theorie

Bij een **statistische toets** gaat het om te beslissen of een bepaalde veronderstelling of bewering over een populatie op grond van het resultaat van een steekproef aannemelijk is. Als dat niet zo is, verwerp je de bewering. Deze bewering of veronderstelling heet de **nulhypothese H_0** . Bij het verwerpen van H_0 ga je ervan uit dat een andere hypothese, de **alternatieve hypothese H_1** waar is. Datgene wat in de steekproef gemeten of geteld wordt, heet de **toetsingsgrootte**.

Voorbeeld 1

De eigenaar van een elektronicazaak beweert dat 5% van zijn klanten wel eens klaagt. Een ontevreden klant beweert dat dit percentage hoger ligt. Ze besluiten tot een steekproef van 50 klanten om de bewering van de eigenaar te toetsen. Geef aan wat in deze situatie de toetsingsgrootheid, H_0 en H_1 zijn.

Oplossing

De toetsingsgrootheid X is het aantal klagende klanten in de steekproef van 50 en is binomiaal verdeeld. De bewering van de eigenaar is de nulhypothese $H_0 : p = 0,05$. Het standpunt van de ontevreden klant is de alternatieve hypothese $H_1 : p > 0,05$.

Voorbeeld 2

Een komkommerteler beweert dat de lengte van zijn komkommers normaal verdeeld is met een gemiddelde van 28 cm en een standaardafwijking van 5 cm. Een klant veronderstelt dat dit gemiddelde kleiner is en besluit tot een steekproef van 30 komkommers om de bewering van de teler te toetsen.

Geef aan wat in deze situatie de toetsingsgrootheid, H_0 en H_1 zijn.

Oplossing

De toetsingsgrootheid $\bar{X}$ is de gemiddelde lengte van de 30 komkommers en is normaal verdeeld. De bewering van de teler is de nulhypothese $H_0 : \mu = 28$. De veronderstelling van de klant is de alternatieve hypothese $H_1 : \mu < 28$.

- 2** Beschrijf op de manier van de voorbeelden de toetsingsgrootheid, de nulhypothese en de alternatieve hypothese bij opdracht 1.

Ondersteunende route → maak opdracht 03

- 3** Volgens de directie van een grote bouwmarkt in Alkmaar komt 44% van de klanten uit omliggende plaatsen. Een onderzoeker denkt dat er minder klanten uit omliggende plaatsen komen dan de directie beweert. Om de bewering van de directie te toetsen, besluit deze onderzoeker een steekproef te nemen. Van honderd willekeurig gekozen klanten telt hij hoeveel er in omliggende plaatsen wonen.

H

- Geef aan wat de toetsingsgrootheid X , H_0 en H_1 zijn.
- Welke kansverdeling heeft X als je aanneemt dat de nulhypothese klopt?
- Zal de onderzoeker de bewering van de directie verwerpen bij 46 klanten uit omliggende plaatsen? En bij 36?
- De onderzoeker besluit de bewering van de directie te verwerpen als hoogstens 30 van de honderd klanten uit omliggende plaatsen komen.
Neem aan dat H_0 waar is en ga na dat de kans dat de bewering van de directie wordt verworpen 0,0029 is.
- Leg uit of deze kans juist groter of kleiner wordt als de onderzoeker besluit de grens bij 35 klanten te leggen.

Ondersteunende route → maak opdracht 04

- 4** Volgens medewerkers van een consultatiebureau is de hoofdomtrek van jongetjes van 12 maanden oud normaal verdeeld met een gemiddelde van 46,5 cm en een standaardafwijking van 1,5 cm. Frank, medewerker bij een kinderdagopvang, beweert dat jongetjes van 12 maanden gemiddeld een grotere hoofdomtrek hebben. Hij meet daarom van 20 jongetjes van 12 maanden de hoofdomtrek. De toetsingsgrootte $\bar{X}$ is de gemiddelde hoofdomtrek van de 20 jongetjes.

- Leg uit dat $\bar{X} \text{ Norm}\left(46,5; \frac{1,5}{\sqrt{20}}\right)$ -verdeeld is als de medewerkers van het consultatiebureau gelijk hebben.
- De nulhypothese is $H_0 : \mu = 46,5 \text{ cm}$. Geef de alternatieve hypothese.



- 5** Een fabrikant produceert repen chocolade waarop staat 'gewicht 100 gram'. De fabrikant beweert dat het gewicht van de repen chocolade normaal verdeeld is met een gemiddelde van 101 gram en een standaardafwijking van 0,5 gram. Henrike eet regelmatig een reep chocolade en vermoedt dat het gemiddelde gewicht van de repen chocolade lager dan 101 gram is. Ze neemt daarom een steekproef van tien repen chocolade en berekent het gemiddelde gewicht.

- Geef de toetsingsgrootte $\bar{X}$, de nulhypothese en de alternatieve hypothese.
- Welke kansverdeling heeft $\bar{X}$ als je aanneemt dat de fabrikant gelijk heeft?
- Ze besluit de bewering van de fabrikant te verwerpen als het gemiddelde gewicht van de tien repen chocolade lager dan 100,8 gram ligt.
Neem aan dat de fabrikant gelijk heeft en ga na dat de kans dat Henrike gelijk krijgt, gelijk is aan 0,1030.
- Neem weer aan dat de fabrikant gelijk heeft.
Hoe groot is de kans dat Henrike gelijk krijgt als de grens niet bij 100,8 gram, maar bij 100,5 gram ligt?

Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

- 03** Louis is autoverkoper. Hij beweert dat 30% van de klanten overweegt om een elektrische auto aan te schaffen. Zijn collega Enzo denkt dat dit percentage lager is. Ze besluiten bij 50 willekeurig gekozen klanten bij te houden of deze overwegen om een elektrische auto te kopen. De toetsingsgrootte X is het aantal klanten dat overweegt een elektrische auto te kopen en $H_0 : p = 0,3$.
- a** Geef de alternatieve hypothese.
 - b** Neem aan dat Louis gelijk heeft. Leg uit dat X binomiaal verdeeld is en geef de parameters n en p .
 - c** Waarom verwacht Louis dat 15 mensen een elektrische auto overwegen?
 - d** Zal Louis in het ongelijk worden gesteld als 14 mensen overwegen een elektrische auto te kopen?
 - e** Ze besluiten de bewering van Louis te verwerpen als hoogstens tien klanten een elektrische auto overwegen. Neem aan dat Louis gelijk heeft en bereken $P(X \leq 10)$.
 - f** Is de kans, om de bewering van Louis te verwerpen terwijl Louis wel gelijk heeft, kleiner als de grens bij acht wordt gelegd in plaats van bij tien?

- 04** Jan is kippenboer en beweert dat het gewicht van zijn eieren normaal verdeeld is met een gemiddelde van 55 gram en een standaardafwijking van 2,5 gram. Gijs vermoedt dat de eieren van boer Jan gemiddeld zwaarder zijn en neemt daarom een steekproef van 30 eieren. De toetsingsgrootte $\bar{X}$ is het gemiddelde gewicht van de 30 eieren.
- a** Leg uit dat de verwachtingswaarde van $\bar{X}$ 55 gram is.
 - b** Hoe groot is de steekproefomvang?
 - c** Leg uit dat $\sigma(\bar{X}) = \frac{2,5}{\sqrt{30}}$.
 - d** De nulhypothese is $H_0 : \mu = 55$ gram. Gijs vermoedt dat de eieren van boer Jan zwaarder dan 55 gram zijn. Welke alternatieve hypothese is juist, $H_1 : \mu < 55$ gram of $H_1 : \mu > 55$ gram?



Uitdagende opdrachten

- U1** Bij een statistische toets is de toetsingsgrootte X binomiaal verdeeld, is $H_0 : p = 0,28$ en is $H_1 : p > 0,28$. Men besluit H_0 te verwerpen als $X \geq 65$. De kans dat H_0 wordt verworpen terwijl hij waar is, is gelijk aan 0,0917. Hoe groot is de steekproefomvang?

17.2 Fouten van de eerste en tweede soort

Je leert

- wat fouten van de eerste en tweede soort zijn

Leerroutes

- ondersteunend: 6—7—8—9—O10
- doorlopend: 6—7—8—9—10
- uitdagend: 6—7—8—10—U2

Een vrouw wordt beschuldigd van het plegen van een diefstal. Totdat de rechter een uitspraak doet, wordt de vrouw als onschuldig beschouwd. Twee foute beslissingen die zich kunnen voordoen, zijn:

- De vrouw heeft de diefstal gepleegd, maar wordt onschuldig bevonden.
- De vrouw heeft de diefstal niet gepleegd, maar wordt schuldig bevonden.
- Welke foute beslissing vind jij erger? Leg je antwoord uit.



- 6 Dagmar en Sandra hebben onenigheid over de zuiverheid van een dobbelsteen. Dagmar beweert dat de dobbelsteen zuiver is, maar Sandra heeft het idee dat de uitkomst zes te vaak voorkomt. Ze besluiten tot een steekproef van 36 worpen waarbij X het aantal keren zes is en ze stellen de volgende hypothesen op: $H_0 : p = \frac{1}{6}$ en $H_1 : p > \frac{1}{6}$. Afgesproken wordt om H_0 te verwerpen als $X \geq 7$.
- Bij welke steekproefresultaten wordt H_0 niet verworpen?
 - Neem aan dat H_0 waar is. Bereken de kans dat H_0 niet wordt verworpen.
 - Bereken ook de kans dat H_0 wordt verworpen terwijl H_0 wel waar is.
 - Wie krijgt er gelijk als H_0 wordt verworpen terwijl H_0 wel waar is?

Theorie

Als je op grond van het resultaat van een steekproef besluit om H_0 te verwerpen, bestaat altijd de kans dat H_0 toch juist is. Je trekt dan een foute conclusie. Je spreekt dan van een **fout van de eerste soort**. De fout dat je H_0 ten onrechte niet verwerpt, heet een **fout van de tweede soort**. Bij een beslissing naar aanleiding van de uitslag van een steekproef kunnen zich de vier situaties in het schema voordoen.

		beslissing	
		H_0 wordt niet verworpen	H_0 wordt verworpen
werkelijkheid	H_0 is juist	juiste beslissing	fout van de eerste soort
	H_0 is niet juist	fout van de tweede soort	juiste beslissing

Voorbeeld

Gegeven is een toets met $H_0 : p = 0,6$ en $H_1 : p > 0,6$.
De toetsingsgrootte X is binomiaal verdeeld.
Men neemt een steekproef met $n = 100$.
 H_0 wordt verworpen als $X \geq 68$.
Bereken voor de situatie 'H₀ is juist' zowel de kans dat H_0 niet wordt verworpen als de kans dat H_0 wel wordt verworpen.

Oplossing

H_0 is juist dus X is $\text{Bin}(100; 0,6)$ -verdeeld.
 H_0 wordt niet verworpen als $X \leq 67$.
 $P(X \leq 67) \approx 0,9385$
 H_0 wordt verworpen als $X \geq 68$.
 $P(X \geq 68) = 1 - 0,9385 = 0,0615$

- 7 In het voorbeeld zijn twee kansen berekend.
Welke kans is de kans op een fout van de 1e soort?
- 8 In het onderzoek van opdracht 6 was de nulhypothese $H_0 : p = \frac{1}{6}$ en de alternatieve hypothese $H_1 : p > \frac{1}{6}$.
- a Wie heeft er gelijk als er een fout van de 1e soort optreedt?
 - b Leg uit waarom je bij het berekenen van de kans op een fout van de 1e soort rekent met $p = \frac{1}{6}$.
 - c Beantwoord opdracht a ook voor een fout van de 2e soort.
 - d Waarom is de kans op een fout van de 2e soort niet te berekenen?
 - e Neem aan dat H_0 wordt verworpen bij $X \geq 7$.
Ga na dat de kans op een fout van de 1e soort 0,3933 is.
 - f Waarom zal de grens om H_0 te verwerpen niet bij 7 worden gelegd?
 - g Vul de tabel verder in.
 - h Dagmar en Sandra besluiten de nulhypothese te verwerpen bij alle steekproefresultaten waarbij de kans op een fout van de 1e soort kleiner is dan 0,05.
Bij welke steekproef resultaten zullen Dagmar en Sandra de nulhypothese verwerpen?

	kans dat H_0 niet wordt verworpen	kans op fout van de 1e soort
$X \geq 7$	0,6067	0,3933
$X \geq 8$	...	...
$X \geq 9$	...	...
$X \geq 10$	...	...
$X \geq 11$	...	...
$X \geq 12$	...	...

Theorie

Meestal is de kans op een fout van de tweede soort niet te berekenen. Om te beslissen bij welke steekproefresultaten de nulhypothese wordt verworpen, wordt alleen naar de kans op een fout van de eerste soort gekeken.
De nulhypothese wordt verworpen bij alle steekproefresultaten waarbij de kans op een fout van de eerste soort kleiner is dan een van te voren afgesproken waarde.

Voorbeeld

Layla heeft een muntstuk waarvan ze vermoedt dat het minder vaak op munt terechtkomt dan op kop. Ze gooit daarom 50 keer met het muntstuk en telt hoe vaak munt boven komt.

De nulhypothese wordt verworpen bij alle aantallen munt waarbij een fout van de 1e soort kleiner is dan 0,02.

Bij welke aantallen munt zal Layla de munt als ‘oneerlijk’ bestempelen?

Oplossing

X is het aantal keer dat ze munt gooit.

$H_0 : p = 0,5$ en $H_1 : p < 0,5$.

X is $\text{Bin}(50; 0,5)$ -verdeeld.

Je zoekt de grootst mogelijke waarde van g waarvoor geldt dat $P(X \leq g)$ hoogstens 0,02 is.

Met de rekenmachine vind je:

g	16	17	18
$P(X \leq g)$	0,0077	0,0164	0,0325

Layla zal het muntstuk als ‘oneerlijk’ bestempelen als ze hoogstens 17 keer munt gooit.

- 9** Bereken voor de situatie in het voorbeeld bij welke aantallen munt Layla het muntstuk als ‘oneerlijk’ zal bestempelen als de kans op een fout van de 1e soort niet groter dan 0,05 is.

H

Ondersteunende route → maak opdracht 010

- 10** Batterijen van hoortoestellen gaan lang mee. Op de verpakking van een bepaald type staat dat 90% van de batterijen een hoorapparaat minstens tien dagen goed laat functioneren. De indruk bestaat dat dit percentage lager is. Daarom wordt van 150 van deze batterijen nagegaan of ze inderdaad minstens tien dagen meegaan.

- Geef de toetsingsgrootheid X , H_0 en H_1 .
- Afgesproken wordt dat de kans op een fout van de 1e soort niet groter mag zijn dan 0,01. Maak met je rekenmachine een tabel waarmee je $P(X \leq g)$ uitrekent en ga na voor welke waarde van g de kans op een fout van de 1e soort zo dicht mogelijk onder de afgesproken waarde van 0,01 ligt.
- Bij welke steekproefresultaten zal de nulhypothese verworpen worden?
- De fabrikant van de hoortoestellen vindt de afgesproken waarde van 0,01 te laag en stelt voor om deze waarde te wijzigen in 0,05. Waarom zou de fabrikant deze wijziging voorstellen?



Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

010

Fatima heeft een viervlaksdobbelsteen waarmee ze één, twee, drie en vier ogen kan gooien. Fatima vermoedt dat ze minder vaak een drie gooit dan je zou verwachten. Om dit te toetsen, gooit ze 80 keer met de dobbelsteen en telt het aantal keer dat ze een drie gooit.

- a De toetsingsgrootte X is het aantal keer dat ze drie ogen gooit.
Geef de nulhypothese H_0 en de alternatieve hypothese H_1 .
- b Hoe vaak zou ze naar verwachting een drie gooien als de dobbelsteen eerlijk is?
- c Heeft Fatima bij 19 keer een drie gooien reden om te twijfelen aan de eerlijkheid van de dobbelsteen? En bij 10 keer een drie gooien?
- d Neem aan dat H_0 waar is en ga na dat de kans dat ze hoogstens 19 keer een drie gooit gelijk is aan 0,4572.
- e Maak met je rekenmachine een tabel waarmee je de kans op hoogstens g keer succes uitrekent. Neem voor g de waarden 0 tot en met 20.
- f Fatima wil dat de kans op een fout van de 1e soort kleiner dan 0,05 is.
Bij welke steekproefresultaten zal Fatima de conclusie trekken dat haar dobbelsteen 'oneerlijk' is?

Uitdagende opdrachten

U2

Jayden heeft een achthoekdobbelsteen waarmee hij één tot en met acht ogen kan gooien. Jayden vermoedt dat hij vaker dan je zou verwachten een vijf gooit met de dobbelsteen. Hij gaat daarom 160 keer met de dobbelsteen gooien.
Bereken bij welke steekproefresultaten zijn vermoeden niet wordt bevestigd als de kans op een fout van de 1e soort maximaal 0,05 mag zijn.



17.3 Het kritieke gebied

Je leert

- wat het kritieke gebied is en wat het significantie niveau is

Leerroutes

- ondersteunend: 11–12–013–14–15–16
- doorlopend: 11–12–13–14–15–16
- uitdagend: 11–13–14–15–16–U3

Op een kraslot staat ‘kans van winnen 1 op 2’. Herman en Frits denken dat de kans op winnen kleiner is en kopen daarom 50 krasloten.

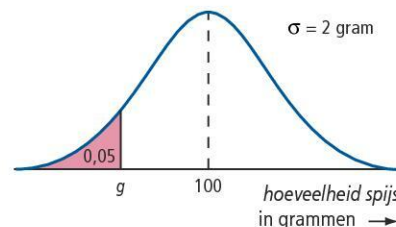
- Bij welke aantallen krasloten zonder prijs zullen ze de bewering op de krasloten in twijfel trekken? Leg je antwoord uit.



- 11** Een supermarktmanager beweert dat slechts 20% van de rollen beschuit één of meerdere gebroken beschuiten bevatten. Ahmed beweert dat dit percentage hoger ligt. Hij neemt een steekproef van 50 beschuitrollen en telt hoeveel van deze rollen minstens één gebroken beschuit bevatten. De toetsingsgrootte X is het aantal rollen dat minstens één gebroken beschuit bevat.
- Geef H_0 en H_1 .
 - In de tabel staat een aantal kansen op een fout van de 1e soort.
Ga met een berekening na dat bij $P(X \geq 11) = 0,4164$.
 - Ahmed wil dat de kans op een fout van de 1e soort zo dicht mogelijk bij 5% ligt, maar niet groter dan 5% is.
Bij welke steekproefresultaten zal H_0 worden verworpen?

H_0 verwerpen	kans op een fout van de 1e soort
$X \geq 11$	0,4164
$X \geq 12$	0,2893
$X \geq 13$	0,1861
$X \geq 14$	0,1106
$X \geq 15$	0,0607
$X \geq 16$	0,0308
$X \geq 17$	0,0144

- 12** Banketbakker Robert verkoopt stollen gevuld met spijs. Robert beweert dat de hoeveelheid spijs per stol normaal verdeeld is met gemiddeld 100 gram en een standaardafwijking van 8 gram. Jannie vermoedt dat de stollen gemiddeld minder spijs bevatten. Ze neemt een steekproef van 16 stollen. $\bar{X}$ is het gemiddelde gewicht in grammen van de spijs.
- De nulhypothese is $H_0 : \mu = 100$.
Geef de alternatieve hypothese.
 - Als H_0 waar is, is $\bar{X}$ Norm(100, σ)-verdeeld.
Ga na dat $\sigma(\bar{X}) = 2$ gram.
 - Jannie wil dat de kans op een fout van de 1e soort hoogstens 0,05 is.
Leg uit dat bij deze situatie het rode gebied hoort.
 - Bereken met je rekenmachine hoe groot de waarde van g is.
 - Welke steekproefresultaten vallen in het rode gebied?



Theorie

De waarden van de toetsingsgrootte waarbij de nulhypothese wordt verworpen, vormen het **kritieke gebied**.

De grens of grenzen van het kritieke gebied worden bepaald door een vooraf gekozen **significantiëniveau** α . Het signifiëantiëniveau is de maximale kans op een fout van de eerste soort. Je kiest de grens zó, dat bij aanname van H_0 het kritieke gebied zo groot mogelijk is terwijl de kans op een fout van de eerste soort maximaal α is.

Voorbeeld 1

Gegeven is de toets met $H_0 : p = 0,35$, $H_1 : p < 0,35$ en steekproefgrootte 75. X is binomiaal verdeeld. Bereken het kritiek gebied bij $\alpha = 0,05$.

Oplossing

Omdat $H_1 : p < 0,35$ bevat het kritieke gebied steekproefresultaten lager dan

$$E(X) = 75 \cdot 0,35 = 26,25.$$

Als H_0 waar is, is X is $\text{Bin}(75; 0,35)$ -verdeeld.

Je zoekt de grootste waarde van g waarvoor geldt

$$P(X \leq g) \leq 0,05.$$

Met je rekenmachine vind je:

g	18	19	20
$P(X \leq g)$	0,0277	0,0485	0,0799

Het kritieke gebied bestaat dus uit de steekproefresultaten 0 tot en met 19.

Voorbeeld 2

Gegeven is de toets met $H_0 : \mu = 36$, $H_1 : \mu > 36$, de steekproefgrootte is 20. X is normaal verdeeld en de standaardafwijking is 5.

Bereken het kritieke gebied van $\bar{X}$ bij $\alpha = 0,05$.

Oplossing

Omdat $H_1 : \mu > 36$ bevat het kritieke gebied steekproefgemiddeldes hoger lager dan 36.

Als H_0 waar is, is $\bar{X}$ $\text{Norm}(36; \frac{5}{\sqrt{20}})$ -verdeeld.

Je zoekt de waarde van g waarvoor geldt dat

$$P(\bar{X} \geq g) = 0,05.$$

Met je rekenmachine vind je: $g \approx 37,84$. Het kritieke gebied bestaat uit de steekproefgemiddeldes 37,84 en hoger.

Ondersteunende route → maak opdracht 013

13

H

Een therapeut beweert dat zijn methode om mensen te laten stoppen met roken heel effectief is: 85% van de deelnemers aan de cursus heeft een jaar na de cursus nog niet weer gerookt.

Een onderzoeker denkt dat de methode minder effectief is en stelt een onderzoek in onder 120 mensen die een jaar geleden de cursus hebben gevolgd.

Neem $\alpha = 0,10$ en bereken bij welke aantallen mensen die na een jaar nog niet weer hebben gerookt, de onderzoeker zal concluderen dat de bewering van de therapeut niet klopt.



- 14** Een teler van bloembollen beweert dat 1 op de 10 bollen niet zal ontkiemen. Jimmy vermoedt dat dit er meer zijn en onderzoekt 230 bollen. De toetsingsgrootheid X is het aantal bollen dat niet ontkiemt en $\alpha = 0,05$.

- Geef de kansverdeling van X en leg uit dat $H_0 : p = 0,1$ en $H_1 : p > 0,1$.
- Waarom bevat het kritieke gebied steekproefresultaten hoger dan 23?
- Vul de tabel in.
- Leg met de tabel uit dat de steekproefresultaten 0 tot en met 30 niet in het kritieke gebied liggen.
- Bij welke aantallen niet ontkiemende bloembollen zal Jimmy de bewering van de teler verwerpen?

g	$P(X \leq g)$
29	...
30	...
31	...
32	...
33	...
34	...

- 15** Als een productieproces minder dan 90% eerste kwaliteit artikelen aflevert, moet het worden bijgesteld. Dit bijstellen is tijdrovend en kostbaar. Om te kunnen besluiten of bijstellen noodzakelijk is, wordt een steekproef van 40 artikelen genomen. De toetsingsgrootheid X is het aantal eerste kwaliteit artikelen in deze steekproef en $\alpha = 0,05$.

- Waarom zal er niet worden bijgesteld bij 37 artikelen van eerste kwaliteit?
- Leg uit dat bij deze toets $H_0 : p = 0,90$ en $H_1 : p < 0,90$ horen en bereken bij welke aantallen artikelen van onvoldoende kwaliteit het productieproces bijgesteld moet worden.

- 16** Een huisarts heeft elke werkdag spreekuur. De ervaring heeft geleerd dat de tijd die ze voor een patiënt nodig heeft normaal verdeeld is met een gemiddelde van tien minuten en een standaardafwijking van vier minuten. De doktersassistente beweert dat dit gemiddelde hoger ligt dan 10 minuten en houdt de spreektijd bij 70 patiënten bij. Neem $\alpha = 0,05$ en bereken bij welke steekproefgemiddeldes de assistente zal concluderen dat de huisarts inderdaad gemiddeld meer dan 10 minuten per patiënt nodig heeft. Rond af op één decimaal.

Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

- 013** Een diëtist heeft een koolhydraatarm dieet ontwikkeld voor mensen met overgewicht. De diëtist beweert dat 70% van de mensen die dit dieet volgen na het dieet gezond blijven leven. Een huisarts denkt dat het dieet minder effectief is dan de diëtist beweert en volgt daarom 100 mensen die het dieet volgen. De toetsingsgrootheid X is het aantal mensen dat na het dieet gezond blijft leven en $H_0: p = 0,7$. Neem $\alpha = 0,05$.
- Leg uit dat X binomiaal verdeeld is en geef de bijbehorende parameters.
 - Volgens de diëtist zullen 70 mensen na het dieet gezond blijven leven.
Vermoedt de huisarts dat dit er meer of minder dan 70 zijn?
 - Geef de alternatieve hypothese.
 - Je zoekt de grootste waarde van g waarvoor geldt $P(X \leq g) \leq 0,05$.
Waarom ligt g onder 70?
 - Vul de tabel in.

g	60	61	62	63	64	65	66	67	68
$P(X \leq g)$	...	...	...	...	...	...	...	...	...

- Welke steekproefresultaten bevat het kritieke gebied?

Uitdagende opdrachten

- U3** Maarten beweert dat 5% van de inwoners van Nederland nooit vlees eet. Marijke beweert dat dit percentage hoger ligt en doet een onderzoek onder een aantal Nederlanders. Zij neemt als significantieniveau 1% en stelt Maarten in het ongelijk als minstens 39 van de ondervraagde inwoners geen vlees eet. Hoeveel inwoners gaat Marijke ondervragen?



17.4 Eenzijdige toets van het gemiddelde

Je leert

- wat een overschrijdingskans is
- hoe je een eenzijdige toets van het gemiddelde uitvoert

Leerroutes

- ondersteunend: 17—18—19—020—21
- doorlopend: 17—18—19—20—21
- uitdagend: 17—18—20—21—U4

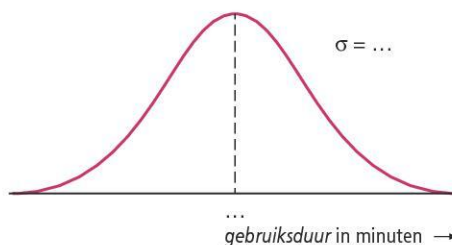
Tristan teelt bloemkolen en beweert dat het gewicht van zijn bloemkolen normaal verdeeld is met een gemiddelde van 900 gram. Bas weegt één bloemkool van 980 gram en Mila weegt tien bloemkolen en die wegen gemiddeld 960 gram.

- Wordt bij beide steekproefresultaten de bewering van Tristan in twijfel getrokken?



- 17 Een fabrikant van laptops gaat ervan uit dat de gebruiksduur van de accu van een bepaalde types laptop normaal verdeeld is met een gemiddelde van 8 uur en een standaardafwijking van 30 minuten. De consumentenorganisatie vermoedt dat de accu's gemiddeld minder lang meegaan en test één van de accu's. De toetsingsgrootte X is de gebruiksduur in minuten. Ga uit van $H_0: \mu = 480$, $H_1: \mu < 480$ en $\alpha = 0,05$.

- Als H_0 waar is, is X normaal verdeeld. Geef de parameters van deze normale verdeling.
- Geef in de tekening aan waar het kritieke gebied ongeveer ligt.
- De geteste accu blijkt 6 uur en 30 minuten mee te gaan. Neem aan dat H_0 waar is en ga na dat de kans dat een accu hoogstens 6 uur en 30 minuten mee gaat gelijk is aan 0,0013.
- Waarom valt het steekproefresultaat 6 uur en 30 minuten in het kritiek gebied?
- Geeft dit steekproefresultaat genoeg aanleiding om de bewering van de fabrikant in twijfel te trekken?



Theorie

Om na te gaan of een steekproefresultaat binnen of buiten het kritieke gebied valt, is het niet nodig om de grens van het kritieke gebied te berekenen. Je berekent daarvoor de **overschrijdingskans**, de kans op het steekproefresultaat of een overschrijding daarvan waarbij je aanneemt dat H_0 waar is. Is de overschrijdingskans kleiner dan of gelijk aan het significantieniveau, dan wordt H_0 verworpen.

- 18** Om een betrouwbaardere uitspraak te kunnen doen over de gebruiksduur van de accu's van opdracht 17, neemt de consumentenorganisatie een steekproef van 20 accu's. Ze vindt een gemiddelde gebruiksduur van 7 uur en 41 minuten. De toetsingsgrootheid is nu de gemiddelde gebruiksduur $\bar{X}$ in minuten van de 20 accu's uit de steekproef.

- Geef de nulhypothese en de alternatieve hypothese.
- Onder H_0 is $\bar{X}$ normaal verdeeld. Bereken $E(\bar{X})$ en $\sigma(\bar{X})$.
- Neem aan dat H_0 waar is en bereken de overschrijdingskansen van 7 uur en 41 minuten.
- Vergelijk je antwoord van opdracht c met $\alpha = 0,05$ en trek je conclusie over de bewering van de fabrikant.

In plaats van
'Als je ervan uitgaat dat H_0 waar is'
kun je ook zeggen
'Onder H_0 '.

Aanpak

Hoe voer je een eenzijdige toets van het gemiddelde uit?

- Formuleer de toetsingsgrootheid $\bar{X}$.
- Stel H_0 en H_1 op. H_0 is van de vorm $H_0: \mu = \mu_0$ en H_1 van de vorm $H_1: \mu < \mu_0$ (linkszijdig) of $H_1: \mu > \mu_0$ (rechtszijdig).
- Stel vast welke parameters de kansverdeling van $\bar{X}$ heeft onder H_0 .
- Bepaal het significantieniveau α .
- Bereken de overschrijdingskansen van het steekproefresultaat.
- Ga na of H_0 verworpen wordt en trek je conclusie.

Voorbeeld

Een leverancier van flessen limonadesiroop beweert dat de vulmachine de flessen vult met een vulinhoud die normaal verdeeld is met een gemiddeld van 755 mL en een standaardafwijking van 10 mL. Iemand vermoedt dat het gemiddelde hoger ligt. Bij controle van 25 flessen blijkt dat de gemiddelde inhoud 760,5 mL is. Neem $\alpha = 5\%$. Is er reden om te twijfelen aan de bewering van de leverancier?

Oplossing

- De toetsingsgrootheid $\bar{X}$ is de gemiddelde inhoud in mL van de 25 flessen.
- $H_0: \mu = 755$ en $H_1: \mu > 755$.
- Onder H_0 is $\bar{X} \text{ Norm}(755; \frac{10}{\sqrt{25}})$ -verdeeld.
- Het significantieniveau is $\alpha = 0,05$.
- Met de rekenmachine vind je $P(\bar{X} \geq 760,5) \approx 0,0030$.
- $0,0030 \leq \alpha$, dus H_0 wordt verworpen. Er zit meer dan 755 mL in de flessen.

- 19** Wat zou in het voorbeeld de conclusie zijn geweest als van 100 flessen het steekproefgemiddelde 756,6 mL was geweest?

Ondersteunende route → maak opdracht O20

20

H

Bij een autowasstraat wordt de auto voordat hij door de wasstraat gaat eerst door een medewerker met een hogedrukreiniger schoon gespoten. De medewerker beweert dat de tijd die hij hier over doet normaal verdeeld is met een gemiddelde van 3 minuten en een standaardafwijking van 30 seconden. De eigenaar van de wasstraat vermoedt dat de medewerker er gemiddeld langer over en houdt de tijd bij 60 auto's bij. De gemiddelde tijd bij deze 60 auto's blijkt 3 minuten en 10 seconden te zijn.

- Geef de toetsingsgrootheid, de nulhypothese en de alternatieve hypothese.
- Is dit een linkszijdige of een rechtszijdige toets? Leg je antwoord uit.
- Geef het steekproefresultaat aanleiding om te concluderen dat de medewerker inderdaad gemiddeld langer dan 3 minuten bezig is met een auto? Neem $\alpha = 0,05$.



21

Chantal gebruikt haar auto uitsluitend om van haar huis naar haar werk en terug te rijden. Aan het eind van elke werkweek is de tank bijna leeg. Ze tankt dan bij het plaatselijke benzinstation de tank weer vol. Ze houdt nauwkeurig de gereden afstand en de getankte hoeveelheid benzine bij en berekent elke week het gemiddelde brandstofverbruik in liter per 100 kilometer. Dit blijkt normaal verdeeld met een gemiddelde van 5,41 en een standaardafwijking van 0,34. Op aandrigen van een collega gaat ze over op benzine van een ander merk. Daarmee zou ze zuiniger moeten rijden.

- De eerste week dat Chantal met nieuwe brandstof heeft gereden, is het gemiddelde verbruik 5,02 liter per 100 km. Neem aan dat de standaardafwijking gelijk is gebleven en neem $\alpha = 0,05$.
Is deze uitslag aanleiding om te concluderen dat de benzine van het andere merk leidt tot een lager verbruik?
- Na tien weken rijden met de andere benzine berekent ze het gemiddelde verbruik over deze periode. Dat blijkt 5,19 liter per 100 km te zijn.
Is deze uitslag aanleiding om te concluderen dat de benzine van het andere merk leidt tot een lager verbruik? Ga ook hier uit van dezelfde standaardafwijking en neem $\alpha = 0,05$.

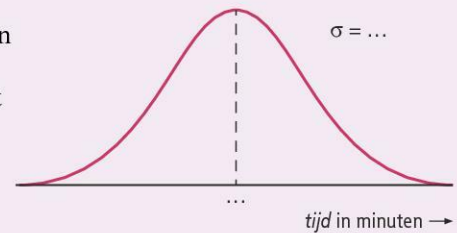
Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten

020

Frans is bedrijfsleider in een kleine buurtsupermarkt. Hij beweert dat de tijd die klanten in de supermarkt zijn normaal verdeeld is met een gemiddelde van 14 minuten en een standaardafwijking van 2,5 minuut. Karlijn is vakkenvuller in deze supermarkt en denkt dat dit gemiddelde hoger ligt. Ze houdt daarom bij 30 klanten bij hoelang ze in de supermarkt zijn en komt op een gemiddelde van 14 minuten en 45 seconden. De toetsingsgrootheid $\bar{X}$ is de gemiddelde tijd in minuten die de 30 klanten in de supermarkt zijn.

- Geef de nulhypothese en de alternatieve hypothese.
- Is dit een linkszijdige of een rechtszijdige toets? Leg je antwoord uit.
- Neem aan dat H_0 waar is.
Geef de verwachtingswaarde van $\bar{X}$ en gebruik de $\sqrt{n}$ -wet om de standaardafwijking van $\bar{X}$ te berekenen.
- Schets in de grafiek het kritieke gebied. Neem $\alpha = 0,02$.
- Leg uit dat 14 minuten en 45 seconden gelijk is aan 14,75 minuten.
- Is de overschrijdingskans gelijk aan $P(\bar{X} \leq 14,75)$ of $P(\bar{X} \geq 14,75)$?
- Bereken de overschrijdingskans en ga na of deze groter dan of kleiner dan het significantieniveau van 2% is.
- Welke conclusie zal Karlijn trekken?



Uitdagende opdrachten

U4

Op een pak bloem staat vermeld dat de inhoud 1000 gram is. De fabrikant beweert dat het vulgewicht van de pakken bloem $\alpha = 0,05$ normaal verdeeld is met een gemiddelde van 1010 gram en een standaardafwijking van 10 gram. Rutger gebruikt deze bloem vaak en beweert dat er gemiddeld minder dan 1010 gram in een pak bloem zit. Hij koopt daarom 20 pakken bloem en neemt als toetsingsgrootheid het totale gewicht van de 20 pakken bloem. Dit blijkt 20 128 gram te zijn. Neem $\alpha = 0,05$ en ga na of dit steekproefresultaat voldoende aanleiding geeft om de bewering van de fabrikant in twijfel te trekken.



17.5 Eenzijdig binomiaal toetsen

Je leert

- hoe je een eenzijdige binomiale toets uitvoert

Leerroutes

- ondersteunend: 22—23—024—25—26—27
- doorlopend: 22—23—24—25—26—27
- uitdagend: 22—24—25—26—27—U5

Juf Anita denkt dat 80% van de kleuters fruit mee naar school neemt om in de pauze op te eten. Meester Gerrit denkt dat dit percentage hoger ligt en ondervraagt de ouders van 50 kleuters.

- Welke conclusie zullen Anita en Gerrit trekken als 44 kinderen fruit mee hebben? En bij 39 kinderen?



- 22** Een socioloog denkt dat 70% van de vrouwen die voor de eerste keer zwanger zijn, het geslacht van hun aanstaande kind hadden willen beïnvloeden als dat technisch zou kunnen. Een verloskundige denkt dat dit percentage lager ligt. Bij een kliniek wordt aan 227 vrouwen die voor het eerst zwanger zijn deze vraag voorgelegd. Van de 227 vrouwen hadden 150 vrouwen het geslacht van hun kindje willen beïnvloeden als dat technisch mogelijk was geweest.

- a Geef de toetsingsgrootte X , H_0 en H_1 .
- b Leg uit dat X binomiaal verdeeld is en geef de waarden van de bijbehorende parameters n en p .
- c Neem aan dat H_0 waar is en bereken de kans dat in de steekproef van 227 vrouwen hoogstens 150 vrouwen het geslacht van hun kindje hadden willen beïnvloeden.
- d Welke conclusie kun je trekken bij $\alpha = 0,05$?

Theorie

Hoe voer je een eenzijdige binomiale toets uit?

- 1 Formuleer de toetsingsgrootte X .
- 2 Stel H_0 en H_1 op. H_0 is van de vorm $H_0 : p = p_0$ en H_1 van de vorm $H_1 : p < p_0$ (linkszijdig) of $H_1 : p > p_0$ (rechtszijdig).
- 3 Stel vast welke parameters de kansverdeling van X heeft onder H_0 .
- 4 Bepaal het significantieniveau α .
- 5 Bereken de overschrijdingskans van het steekproefresultaat.
- 6 Ga na of H_0 verworpen wordt en trek je conclusie.

Voorbeeld

In een grafiek worden pakken met suiker gevuld. De fabrikant beweert dat hoogstens 3% van de pakken minder suiker bevat dan op het pak staat aangegeven. Ter controle wordt een steekproef van 150 pakken genomen. Hierbij worden tien pakken aangetroffen met een te laag gewicht. Is dit met een significantieniveau van 1% te veel?

Oplossing

- 1 De toetsingsgrootte X is het aantal te lichte pakken in de steekproef.
- 2 $H_0 : p = 0,03$ en $H_1 : p > 0,03$.
- 3 Onder H_0 is X Bin(150; 0,03)-verdeeld.
- 4 Het significantieniveau is $\alpha = 0,01$.
- 5 Met de rekenmachine vind je $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) \approx 0,0155$.
- 6 $0,0155 > \alpha$, dus H_0 wordt niet verworpen. Tien pakken suiker met een te laag gewicht is dus niet te veel.

- 23** Wat zou in de fabriek uit het voorbeeld de conclusie zijn als in een steekproef van 300 pakken er 18 worden aangetroffen met een te licht gewicht?

Ondersteunende route → maak opdracht 024

- 24** H In een bepaald land heeft 42,4% van de inwoners bloedgroep A. Een onderzoeker heeft de indruk gekregen dat onder de lijdende aan een bepaalde maagziekte dit percentage hoger ligt. Hij doet onderzoek om zijn vermoeden te toetsen. In een steekproef van 238 lijdende aan de maagziekte blijken 117 personen bloedgroep A te hebben. Neem een significantieniveau van 2,5% en ga na of er voldoende aanleiding is om aan te nemen dat het percentage patiënten met bloedgroep A onder de lijdende aan de maagziekte hoger ligt dan 42,4%.

- 25** Koert en Jorn spelen vaak het spel Pisa. Bij dit spel wordt gegooid met een dobbelsteen met daarop twee rode, twee witte, één blauwe en één groene cirkel. De jongens vermoeden dat ze te weinig groen gooien. Om dit te toetsen, gooien ze 60 keer met de dobbelsteen. Neem als significantieniveau 10% en ga na welke aantallen groen voldoende aanleiding geven om te twijfelen aan de eerlijkheid van de dobbelsteen.





- 26** In de krant stond dat minimaal twee op de drie vwo-leerlingen een halfjaar voor het eindexamen nog niet weet wat ze het volgend jaar willen gaan studeren. Het decanaat denkt dat dit lager ligt en doet een steekproef onder vijftien leerlingen.
- Is de hypothesetoets linkszijdig of rechtszijdig? Leg je antwoord uit.
 - Ze constateren dat zeven leerlingen in de steekproef nog niet wisten welke studie ze volgend jaar gingen doen. Is dit aantal bij een significantieniveau van 5% voldoende afwijkend om de bewering uit de krant in twijfel te trekken?
 - En welke conclusie zou er zijn getrokken als er in een steekproef van 60 leerlingen 31 leerlingen waren geweest die nog niet wisten welke studie ze volgend jaar gingen doen? Neem weer een significantieniveau van 5%.
- 27** Bij het spel CandyCrush kon een speler in 2018 elke dag aan een rad draaien. Dit rad was verdeeld in acht even grote sectoren en de speler won de prijs die de pijl aanwees. Op één van de sectoren staat 'jackpot'. Wilma draaide dagelijks aan het rad en vermoedde dat de pijl niet vaak genoeg de jackpot aanwees. Ze hield daarom gedurende 56 dagen elke dag bij welke prijs ze draaide.
- Neem aan dat Wilma na 56 keer draaien tien keer de jackpot heeft gedraaid. Leg uit dat dit aantal onvoldoende aanleiding geeft om de eerlijkheid van het rad in twijfel te trekken
 - Ga bij een significantieniveau van 5% na of er aanleiding is om de eerlijkheid van het rad in twijfel te trekken als ze slechts drie keer de jackpot heeft gedraaid.

Uitdagende route → maak opdracht U5





- 024** Bij een restaurant kun je kiezen uit een lopend buffet en à la carte. De eigenaar van het restaurant beweert dat 35% van de klanten voor het lopend buffet kiest. De chef-kok van het restaurant denkt dat dit percentage hoger ligt en houdt de keuzes van de 300 klanten bij. De toetsingsgrootte X is het aantal klanten dat voor het lopend buffet kiest.
- De nulhypothese is gelijk aan $H_0 : p = 0,35$. Geef de alternatieve hypothese.
 - Hoeveel van de 300 klanten zullen naar verwachting voor het lopend buffet kiezen als de nulhypothese waar is?
 - Van de 300 klanten kiezen er 116 voor het lopend buffet. Leg uit dat de overschrijdingskans gelijk is aan $P(X \geq 116)$.
 - Bereken $P(X \geq 116)$ vergelijk deze met $\alpha = 0,05$.
 - Is er genoeg aanleiding om de bewering van de restauranteigenaar in twijfel te trekken?

Uitdagende opdrachten

- U5** Gegeven is de statistische toets met $H_0 : p = 0,65$ en $H_1 : p > 0,65$. Bij een significantieniveau van 5% geeft het steekproefresultaat 143 genoeg aanleiding om H_0 te verwerpen. Bereken de maximale steekproefomvang.

17.6 Tweezijdig toetsen

Je leert

- hoe je een tweezijdige toets uitvoert

Leerroutes

- ondersteunend: 28—29—030—30—31—32
- doorlopend: 28—29—30—31—32—33
- uitdagend: 28—30—31—32—33—U6

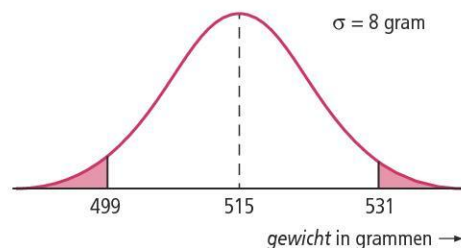
Bij de coopertest moeten leerlingen 12 minuten hardlopen. Van een groep leerlingen is bekend dat de afstand die zij kunnen lopen normaal verdeeld is met $\mu = 2000$ meter en $\sigma = 300$ meter. Gerben vraagt zich af of het eten van een banaan invloed heeft op de afstand die ze kunnen lopen.

- Welke alternatieve hypothese is juist:
 $H_1 : \mu < 2000$ of $H_1 : \mu > 2000$?



28 Een vulmachine vult pakken rijst. Het vulgewicht is normaal verdeeld met een gemiddelde van 515 gram en standaardafwijking van 8 gram. Na een technische storing wil een medewerker toetsen of het gemiddelde vulgewicht nog steeds 515 gram is. Hij controleert daarom het gewicht van een aantal pakken rijst. Neem aan dat de standaardafwijking niet is veranderd na de storing.

- Leg uit dat voor de storing 95% van de pakken een gewicht heeft tussen 499 gram en 531 gram.
- De medewerker toetst de nulhypothese $H_0 : \mu = 515$.
Waarom is $H_1 : \mu \neq 515$?
- Waarom kan de nulhypothese verworpen worden bij zowel lage als hoge gewichten van de pakken?
- In de grafiek is het kritieke gebied geschetst bij significantieniveau $\alpha = 0,05$.
Hoe groot is elk deel van het kritieke gebied?



Theorie

Als de nulhypothese moet worden getoetst tegen de alternatieve hypothese $H_1 : p \neq p_0$ of $H_1 : \mu \neq \mu_0$, dan heet de toets **tweezijdig**.

Je verworpt dan H_0 voor 'te hoge' steekproefresultaten, maar ook voor 'te lage' steekproefresultaten.

Het significantieniveau α waarmee je toetst, wordt over beide delen van het kritieke gebied gelijk verdeeld, beide zijn dus $\frac{1}{2}\alpha$. De nulhypothese wordt dan verworpen als de overschrijdskans kleiner dan of gelijk aan $\frac{1}{2}\alpha$ is.

Voorbeeld

Gideon is darter en weet uit ervaring dat hij met zijn dartpijlen in 40% van de pogingen de bull's eye raakt. Hij koopt nieuwe dartpijlen en is benieuwd of met deze pijlen de kans op het raken van de bull's eye is veranderd. Hij gooit daarom 80 keer met een nieuwe dartpijl en probeert steeds de bull's eye te raken. Dat lukt hem 42 keer. Welke conclusie zal hij trekken bij $\alpha = 0,05$?

Oplossing

De toetsingsgrootte X is het aantal keer dat hij de bull's eye raakt bij de 80 pogingen.

$H_0 : p = 0,4$ en $H_1 : p \neq 0,4$.

Onder H_0 is X Bin(80; 0,4)-verdeeld.

Het significantieniveau is $\alpha = 0,05$.

Onder H_0 is $E(X) = 0,4 \cdot 80 = 32$.

42 is meer dan 32, dus de overschrijdingskans is $P(X \geq 42)$.

Met de rekenmachine vind je:

$P(X \geq 42) = 1 - P(X \leq 41) \approx 0,0158$.

$0,0158 \leq \frac{1}{2} \alpha$, zijn conclusie zal zijn dat de kans op het raken van de bull's eye is veranderd.

- 29 Wat zou in het voorbeeld de conclusie zijn geweest als het steekproefresultaat gelijk was geweest aan 24?

Ondersteunende route → maak opdracht 030

- 30 **H** Bij een bepaald type fiets moet het voorlicht tussen 0° en 4° naar beneden wijzen zodat de fietser het beste zichtbaar is. Bij de productie is de hoek van het voorlicht normaal verdeeld met een gemiddelde van 2° en een standaardafwijking van $0,25^\circ$. Bij een controle van 80 fietsen blijkt de gemiddelde hoek van de koplampen gelijk te zijn aan $1,94^\circ$. Neem als significantieniveau 10% en onderzoek of op grond van de gemiddelde hoek van de steekproef geconcludeerd mag worden dat het gemiddelde niet gelijk is aan 2° .



- 31 Volgens de wet van Mendel zou bij een kruising van twee bepaalde planten 75% van de nakomelingen uit planten bestaan met paarse bloemen en 25% uit planten met roze bloemen. Een bioloog wil dit met een toets onderzoeken. Hij bekijkt 76 planten die voortgekomen zijn uit de kruising. Neem een significantieniveau van 10% en bereken bij welke aantallen planten met roze bloemen hij concludeert dat de wet van Mendel ook hier geldt.

- 32** Voor een bepaald chemisch proces worden twee stoffen A en B gemengd in de verhouding 1: 4. Beide stoffen bestaan uit grove korrels. Ter controle van deze mengverhouding wordt van tijd tot tijd een steekproef van het mengsel genomen en daarin wordt geteld hoeveel korrels van stof A en hoeveel korrel van stof B er zijn.
- a** In een steekproef blijken 43 korrels van stof A en 114 korrels van stof B aanwezig te zijn.
Bereken met $\alpha = 0,05$ of op grond van dit resultaat geconcludeerd kan worden dat de mengverhouding niet goed is.
- b** Om wat gemakkelijker te kunnen beslissen, gaat men als volgt te werk.
Er worden willekeurig 120 korrels gekozen en de aantallen korrels van stof A en stof B worden geteld.
Bij welke aantallen korrels van stof B in deze steekproef wordt de mengverhouding goedgekeurd? Kies weer $\alpha = 0,05$.

- 33** Bij een correcte instelling van een machine die weerstanden maakt, zijn de geproduceerde weerstanden normaal verdeeld. Aangegeven is de gemiddelde weerstand in ohm en de standaardafwijking is 0,5% van de aangegeven waarde. Elk uur wordt er een steekproef van 30 weerstanden uit de productie genomen. Als de gemiddelde waarde in deze steekproef bij $\alpha = 0,03$ significant afwijkt van de aangegeven waarde, dan wordt de machine stilgelegd en opnieuw afgesteld.
- a** Bij de productie van weerstanden van 12 000 ohm worden in drie achtereenvolgende uren de volgende gemiddelden vastgesteld.

<i>uur</i>	1	2	3
<i>gemiddelde weerstand in ohm</i>	12 019,1	12 011,6	12 012,8

Laat zien dat op grond van deze meetresultaten in geen enkel uur reden is geweest om de machine opnieuw af te stellen.

- b** Neem nu de resultaten van de drie uren samen door het gemiddelde van de 90 geteste weerstanden te berekenen. Is er nu genoeg aanleiding om te concluderen dat het gemiddelde afwijkt van de aangegeven waarde?

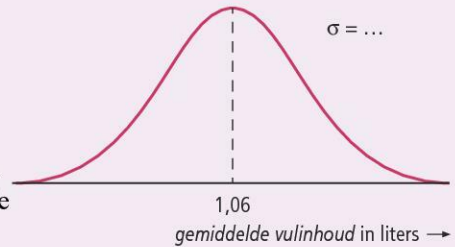
Uitdagende route → maak opdracht U6

Ondersteunende opdrachten

030

Op een blik verf staat dat het 1 liter verf bevat. De fabrikant beweert dat de vulinhoud van de blikken verf normaal verdeeld is met een gemiddelde van 1,06 liter en een standaardafwijking van 0,03 liter. Een schilder vermoedt dat dit gemiddelde niet klopt. Hij controleert daarom vijf blikken verf. De toetsingsgrootheid $\bar{X}$ is de gemiddelde inhoud van de vijf blikken verf en $\alpha = 0,05$.

- Waarom gaat het hier om een tweezijdige toets?
- Geef de nulhypothese en alternatieve hypothese.
- Leg uit dat het kritieke gebied uit twee delen bestaat.
- Hoe groot is elk van deze delen van het kritieke gebied?
- Schets het kritieke gebied in de grafiek van de normale verdeling.
- Het gemiddelde van de vijf blikken is gelijk aan 1,03 liter. Bereken de standaardafwijking van het gemiddelde van de vijf blikken.
- Is de overschrijdingskans dan gelijk aan $P(\bar{X} \leq 1,03)$ of $P(\bar{X} \geq 1,03)$? Leg je antwoord uit.
- Bereken de overschrijdingskans en ga na of 1,03 in het kritieke gebied valt.
- Geef je conclusie.



Uitdagende opdrachten

U6

Een fabrikant van pakken oliebollemix beweert dat het vulgewicht normaal verdeeld is met $\mu = 504$ gram en $\sigma = 2$ gram. Gijs en Mart vermoeden dat de vulmachine niet goed staat afgesteld. Mart is van mening dat de vulmachine te veel mix in de pakken doet, Gijs twijfelt tussen te veel of te weinig. Ze voeren beide een hypothesetoets uit naar het vulgewicht met $H_0: \mu = 504$ en hanteren hetzelfde significantieniveau. Mart weegt 25 pakken en Gijs 75 pakken. Beiden vinden ze een gemiddelde van 504,5 gram. Op basis van de steekproef verwerpt Gijs de nulhypothese, maar Mart niet.

Tussen welke waarden lag het significantieniveau?



34 Gegeven zijn de hypothesen $H_0 : p = 0,6$ en $H_1 : p > 0,6$ met $n = 200$. Het kritieke gebied bestaat uit de getallen g tot en met 200.

- a Kies $g = 132$ en bereken de kans op een fout van de 1e soort.
- b Bij welke waarde van g is het significantieniveau 8%?

35 In verband met de grotere uitstoot van fijnstof en kooldioxide van oudere auto's en vrachtwagens die op diesel rijden, is het college van burgemeester en wethouders van plan om in de binnenstad een milieuzone in te stellen. Dat betekent dat deze voertuigen geen toegang meer hebben tot een deel van de binnenstad. Het college schat dat 70% van de bewoners en van de geregelde bezoekers van de binnenstad dit voornemen steunen. Een automobiellclub die tegen het voorstel is, denkt dat het aantal kleiner is en houdt een steekproef onder 500 meerderjarigen. Er blijken 337 voorstanders te zijn.

- a Is deze uitslag bij een significantieniveau van 5% een significante afwijking van de inschatting van het college?
- b Het bestuur van de winkeliersvereniging denkt dat 60% van haar leden tegen het voorstel van de gemeente zal zijn. Als dit inderdaad zo is, dan zullen ze door middel van een juridische procedure proberen de plannen tegen te houden. Zij houden een kort vooronderzoek onder 40 leden. Neem $\alpha = 0,10$ en bereken bij welke uitslagen van het vooronderzoek het bestuur geen verder onderzoek zal doen, omdat het aantal tegenstanders significant kleiner is dan de verwachte 60%.



36 Voor een beschermd broedgebied van wadvogels geldt dat het aantal nesten per hectare (1 hectare = 10 000 m²) bij benadering normaal verdeeld is met gemiddeld 143 en een standaardafwijking van 19. Bij wijze van proef wordt het gebied opengesteld voor wandelaars. In het broedseizoen worden op vier stukken terrein van 1 ha in dit gebied gemiddeld 129 nesten per ha geteld. Is dit aantal bij een significantieniveau van 10% aanleiding om te veronderstellen dat de openstelling een negatieve invloed heeft op de broedintensiteit?

- 37** De lichaamslengte in cm van 15-jarige jongens is Norm(174; 7,0)-verdeeld.
 Voor 15-jarige meisjes geldt dat hun lengte normaal verdeeld is met $\mu = 168$ cm en $\sigma = 7,0$ cm.
 Een statisticus heeft een lijst van n metingen, allemaal van jongens of allemaal van meisjes, helaas staat dat er niet bij. Om uit te maken of het een jongenslijst dan wel een meisjeslijst betreft, doet de statisticus het volgende:
 Is het gemiddelde van de lijst groter dan 171 cm, dan besluit hij dat het een jongenslijst is. Is het gemiddelde van de lijst kleiner dan 171 cm, dan besluit de statisticus tot een meisjeslijst.
- Neem $n = 25$. Bereken de kans dat de statisticus besluit dat het een jongenslijst is, terwijl het in werkelijkheid een meisjeslijst is.
 - Neem weer $n = 25$. Bereken de kans dat de statisticus ten onrechte besluit dat het een meisjeslijst is.
 - Onderzoek hoe groot n minstens moet zijn zodat beide kansen uit de opdrachten a en b kleiner blijven dan 1%.

- 38** Om te onderzoeken of het dagelijks slikken van vitamine C de kans op een verkoudheid verlaagt of niet, wordt een groep mensen gevraagd om vanaf 1 november 2020 dagelijks een aantal tabletten te slikken. Een aantal deelnemers krijgt vitamine C tabletten; de anderen krijgen een placebo, tabletten zonder werkzame stoffen. Op 1 maart 2021 moeten ze aangeven of ze in de afgelopen periode verkouden zijn geweest.

De resultaten van dit onderzoek staan in de tabel.

	<i>verkouden</i>	<i>niet verkouden</i>
<i>vitamine C</i>	302	105
<i>placebo</i>	335	76

Neem $\alpha = 0,05$ en ga na of op grond van deze uitslag de veronderstelling dat het slikken van vitamine C helpt bij het voorkomen van verkoudheid kan worden aangenomen.

Theorie

Statistische toets, nulhypothese, alternatieve hypothese

Bij een statistische toets gaat het om te beslissen of een bepaalde veronderstelling of bewering over een populatie op grond van het resultaat van een steekproef aannemelijk is. Als dat niet zo is, verwerp je de bewering. Deze bewering of veronderstelling heet de nulhypothese H_0 . Bij het verwerpen van H_0 ga je ervan uit dat een andere hypothese, de alternatieve hypothese H_1 waar is. Datgene wat in de steekproef gemeten of geteld wordt, heet de toetsingsgrootheid.

- S1** Irene heeft een dobbelsteen met zestien vlakken met daarop de getallen 1 tot en met 16. Ze vermoedt dat ze met deze dobbelsteen vaker de getallen 10 tot en met 16 gooit dan je zou verwachten. Ze gooit daarom 100 keer met de dobbelsteen.
- Formuleer de toetsingsgrootheid X .
 - Geef de nulhypothese en de alternatieve hypothese.

Theorie

Fout van de eerste soort, fout van de tweede soort

Als je op grond van het resultaat van een steekproef besluit om H_0 te verwerpen, bestaat altijd de kans dat H_0 toch juist is. Je trekt dan een foute conclusie. Je spreekt dan van een fout van de eerste soort. De fout dat H_0 ten onrechte niet verwerpt, heet een fout van de tweede soort. Bij een beslissing naar aanleiding van de uitslag van een steekproef kunnen zich de vier situaties in het schema voordoen.

		beslissing	
		H_0 wordt niet verworpen	H_0 wordt verworpen
werkelijkheid	H_0 is juist	juiste beslissing	fout van de eerste soort
	H_0 is niet juist	fout van de tweede soort	juiste beslissing

- S2** In een vaas zitten rode en blauwe knikkers. Lieke zegt dat de kans dat je een rode knikker pakt $\frac{1}{2}$ is. Sanne beweert dat de kans op een rode knikker groter is. Ze pakken daarom 30 keer, met terugleggen, een knikker uit de vaas. X is het aantal rode knikkers dat ze pakken en ze verwerpen $H_0 : p = \frac{1}{2}$ als $X \geq 18$.
- Welke situatie treedt op bij een fout van de 1e soort?
 - En bij een fout van de tweede soort?

Theorie

Kritieke gebied en significantieniveau

De waarden van de toetsingsgrootte waarbij de nulhypothese wordt verworpen, vormen het kritieke gebied.

De grens of grenzen van het kritieke gebied worden bepaald door een vooraf gekozen significantieniveau α . Het significantieniveau is de maximale kans op een fout van de eerste soort. Je kiest de grens zó, dat bij aanname van H_0 het kritieke gebied zo groot mogelijk is terwijl de kans op een fout van de eerste soort maximaal α is.

Voorbeeld

Gegeven is de toets met $H_0 : \mu = 80$, $H_1 : \mu < 80$ en steekproefgrootte 10. Onder H_0 is de stochast X normaal verdeeld met $\sigma = 11$. Bereken het kritische gebied bij $\alpha = 0,05$.

Oplossing

Omdat $H_1 : \mu < 80$ bevat het kritieke gebied lage steekproefgemiddeldes. Onder H_0 is de toetsingsgrootte $\bar{X}$ normaal verdeeld met $E(\bar{X}) = 80$ en $\sigma(\bar{X}) = \frac{11}{\sqrt{10}}$.

Je zoekt de waarde van g waarvoor geldt dat $P(\bar{X} \leq g) = 0,05$.

Met de rekenmachine vind je $g \approx 74,28$.

Het kritieke gebied bestaat uit de steekproefgemiddeldes 74,28 en lager.

- S3** Karlijn denkt dat het antwoord C bij vierkeuzetoetsen van het vak Engels vaker voorkomt dan de antwoorden A, B en D. Ze bekijkt in totaal 83 vragen en kiest als significantieniveau 5%. Ga na bij hoeveel vragen met antwoord C, Karlijn de conclusie zal trekken dat het antwoord C vaker voorkomt dan de andere antwoorden.

Theorie

Overschrijdingskans

Om na te gaan of een steekproefresultaat binnen of buiten het kritieke gebied valt, is het niet nodig om de grens van het kritieke gebied te berekenen. Je berekent daarvoor de overschrijdingskans, de kans op het steekproefresultaat of een overschrijding daarvan waarbij je aanneemt dat H_0 waar is. Is de overschrijdingskans kleiner of gelijk aan het significantieniveau, dan wordt H_0 verworpen.

- S4** De politieke partij DPI (Democratische Partij voor Iedereen) beweert dat als er nu verkiezingen zouden zijn, 40% van de kiezers op hen zou stemmen. Een onderzoeksbureau denkt dat dit percentage lager ligt en neemt een steekproef van duizend kiesgerechtigden. Bereken de overschrijdingskans als het onderzoeksbureau 369 DPI-stemmers aantreft in de steekproef.

Vaardigheid

Je kunt een eenzijdige toets van het gemiddelde uitvoeren.

- 1 Formuleer de toetsingsgrootheid $\bar{X}$.
- 2 Stel H_0 en H_1 op. H_0 is van de vorm $H_0 : \mu = \mu_0$ en H_1 van de vorm $H_1 : \mu < \mu_0$ (linkszijdig) of $H_1 : \mu > \mu_0$ (rechtszijdig).
- 3 Stel vast welke parameters de kansverdeling van $\bar{X}$ heeft onder H_0 .
- 4 Bepaal het significantieniveau α .
- 5 Bereken de overschrijdingskans van het steekproefresultaat.
- 6 Ga na of H_0 verworpen wordt en trek je conclusie.

Voorbeeld

Volgens de fabrikant is de diameter van voetballen normaal verdeeld met $\mu = 22$ cm en $\sigma = 0,5$ cm. Arjan meet de diameter van 15 ballen en vindt een gemiddelde van 22,2 cm. Geeft dit resultaat bij $\alpha = 0,1$ reden om H_0 te verwerpen?

Oplossing

- 1 De toetsingsgrootheid $\bar{X}$ is de gemiddelde diameter in cm van de 15 ballen.
- 2 $H_0 : \mu = 22$ en $H_1 : \mu > 22$.
- 3 Onder H_0 is $\bar{X} \sim \text{Norm}(22; \frac{0,5}{\sqrt{15}})$ -verdeeld.
- 4 Het significantieniveau is $\alpha = 0,1$.
- 5 $P(\bar{X} \geq 22,2) \approx 0,0607$
- 6 $0,0607 \leq \alpha$, dus H_0 wordt verworpen. De diameter is groter dan 22 cm.

- S5** Lourens woont vlakbij een weg waar een maximumsnelheid van 80 km per uur is toegestaan. Volgens de politie is de snelheid van automobilisten op die weg normaal verdeeld met een gemiddelde van 80,6 km per uur en een standaardafwijking van 3,8 km per uur. Lourens vermoedt echter dat er harder wordt gereden. Hij meet de snelheid van 100 automobilisten. Zij reden gemiddeld 81,5 km per uur. Ga na of dit gemiddelde bij $\alpha = 0,05$ genoeg aanleiding geeft om te veronderstellen dat er harder wordt gereden dan met een gemiddelde van 80,6 km per uur.

Vaardigheid

Je kunt een eenzijdige binomiale toets uitvoeren.

- 1 Formuleer de toetsingsgrootheid X .
- 2 Stel H_0 en H_1 op. H_0 is van de vorm $H_0 : p = p_0$ en H_1 van de vorm $H_1 : p < p_0$ (linkszijdig) of $H_1 : p > p_0$ (rechtszijdig).
- 3 Stel vast welke parameters de kansverdeling van X heeft onder H_0 .
- 4 Bepaal het significantieniveau α .
- 5 Bereken de overschrijdingskans van het steekproefresultaat.
- 6 Ga na of H_0 verworpen wordt en trek je conclusie.

Voorbeeld

Bij een belpspel op televisie wordt beweerd dat je een kans van 10% hebt om te winnen. Janna vermoedt dat de kans op winnen lager is en belt 80 keer. Van de 80 keer bellen, heeft ze vier keer gewonnen. Is er bij $\alpha = 0,025$ genoeg aanleiding om aan de bewering van het belpspel te twijfelen?

Oplossing

- 1 De toetsingsgrootheid X is het aantal keer dat Janna wint.
- 2 $H_0 : p = 0,1$ en $H_1 : p < 0,1$.
- 3 Onder H_0 is $X \text{ Bin}(80; 0,1)$ -verdeeld.
- 4 Het significantieniveau is $\alpha = 0,025$.
- 5 Met de rekenmachine vind je $P(X \leq 4) \approx 0,0880$.
- 6 $0,0880 > \alpha$, dus H_0 wordt niet verworpen. Er is dus niet genoeg aanleiding om aan de bewering te twijfelen.

- S6** Bij het spel roulette kan het balletje op 18 rode, 18 zwarte en één groen vakje terecht komen. George beweert dat het balletje te vaak op groen komt. Hij gooit het balletje daarom 180 keer en telt hoe vaak hij op het groene vakje terecht komt. Het balletje komt acht keer op groen. Welke conclusie zal George trekken bij een significantieniveau van 2%?

Vaardigheid

Je kunt een tweezijdige toets uitvoeren.

Als de nulhypothese moet worden getoetst tegen de alternatieve hypothese $H_1 : p \neq p_0$ of $H_1 : \mu \neq \mu_0$, dan heet de toets tweezijdig.

Je verworpt dan H_0 voor ‘te hoge’ steekproefresultaten, maar ook voor ‘te lage’.

Het significantieniveau α waarmee je toetst, wordt over beide delen van het kritieke gebied gelijk verdeeld, beide zijn dus $\frac{1}{2}\alpha$. De nulhypothese wordt dan verworpen als de overschrijdskans kleiner dan of gelijk aan $\frac{1}{2}\alpha$ is.

Voorbeeld

Bij een statistische toets is de toetsingsgrootheid $X \text{ Bin}(160, \frac{1}{8})$ -verdeeld en is $H_0 : p = \frac{1}{8}$ en $H_1 : p \neq \frac{1}{8}$.

Ga na of het steekproefresultaat 14 bij $\alpha = 0,05$ genoeg aanleiding geeft om de nulhypothese te verwerpen.

Oplossing

Onder H_0 is $E(X) = 160 \times \frac{1}{8} = 20$.

14 is minder dan 20, dus de overschrijdskans is $P(X \leq 14)$.

$P(X \leq 14) \approx 0,0899$

$0,0899 > \frac{1}{2}\alpha$, dus het steekproefresultaat geeft niet genoeg aanleiding om de nulhypothese te verwerpen.

- S7** Op zakjes puddingpoeder staat dat er 100 gram in zit. De vulinhoud is volgens de productieider normaal verdeeld, met gemiddeld 100,5 gram een standaardafwijking van 3 gram. Adyl vermoedt dat de vulmachine niet op een gemiddelde van 100,5 gram staat ingesteld en hij bepaalt het gewicht aan pudding in 100 zakjes. Hij vindt een gemiddeld gewicht van 101,1 gram. Ga na of er voldoende aanleiding is om de bewering van de productieider in twijfel te trekken bij $\alpha = 0,05$.

T1 In hotel De Horne wordt bij het ontbijt wit brood en bruin brood geserveerd. Men gaat er van uit dat 80% van de gasten de voorkeur geeft aan wit brood. Omdat er de laatste tijd een aantal keren een tekort aan bruin brood was, besluit men te onderzoeken of deze 80% nog wel klopt. Er wordt aan 50 willekeurig gekozen gasten gevraagd waaraan zij de voorkeur geven: wit of bruin. De toetsingsgrootheid X is hier het aantal personen in de steekproef met een voorkeur voor wit brood.

- a Geef de nulhypothese en de alternatieve hypothese.
- b Welke kansverdeling heeft X als H_0 waar is?
- c Waarom is er bij een steekproefuitkomst van 42 liefhebbers van wit brood geen aanleiding om het aandeel wit brood naar beneden bij te stellen?
- d Er wordt afgesproken dat er minder wit brood zal worden geserveerd als in de steekproef van 50 gasten hoogstens 35 de voorkeur geven aan wit brood.
Bereken de kans dat er ten onrechte minder wit brood zal worden geserveerd.

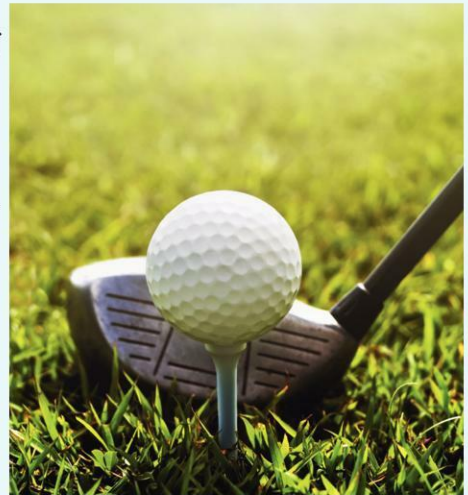


T2 Een machine produceert afvalzakken waarvan de lengte normaal verdeeld is met een gemiddelde van 40 cm en een standaardafwijking van 0,4 cm. Yasin vermoedt dat dit gemiddelde niet klopt en controleert 30 vuilniszakken. Hij vindt een gemiddelde lengte van 39,86 cm.
Neem een significantieniveau van 5% en ga na of de steekproef genoeg aanleiding geeft om te twijfelen aan het gemiddelde waarop de machine staat ingesteld.

T3 Een fabrikant garandeert dat minstens 94% van de door hem geleverde producten goed functioneert. Een consument denkt dat het percentage kleiner is. Om dit te controleren, telt een consument in een steekproef van 100 producten hoeveel er ondeugdelijk zijn. De toetsingsgrootheid X is het aantal ondeugdelijke producten in de steekproef.

- a Geef H_0 en H_1 .
- b Bereken de kans op een fout van de 1e soort als H_0 verworpen wordt bij minimaal tien ondeugdelijke producten in de steekproef.
- c Leg uit wat er aan de hand is als er een fout van de tweede soort optreedt.
- d Bereken het kritieke gebied als $\alpha = 0,05$.
- e De consument treft acht ondeugdelijke producten aan in de steekproef.
Geef de conclusie bij dit steekproefresultaat als $\alpha = 0,05$.

- T4** In 1977 werden 100 000 mannelijke 18-jarige dienstplichtige soldaten gekeurd. Hun lengte bleek normaal verdeeld te zijn met een gemiddelde van 180,1 cm en een standaardafwijking van 7,2 cm. Een onderzoeker van het Ministerie van Defensie werd een aantal jaren later om advies gevraagd over de maten van de uniformkleding. Hij vermoedde dat de gemiddelde lengte van mannelijke 18-jarigen sinds 1977 was toegenomen. In een steekproef van 16 jonge mannen bleek de gemiddelde lengte 182,6 cm te zijn. Geeft dit resultaat voldoende aanleiding om de onderzoeker gelijk te geven? Neem als significantieniveau 5%.
- T5** De stochast X is normaal verdeeld met een gemiddelde van 199 en een standaardafwijking van 8,5. Bij een statistische toets is de toetsingsgrootte $\bar{X}$, $H_0 : \mu = 199$, $H_1 : \mu \neq 199$ en het significantieniveau gelijk aan 4%. Welke conclusie zal er worden getrokken als bij een steekproefomvang van 60 het steekproefgemiddelde gelijk is aan 196,8?
- T6** Golfballen van een bepaald merk worden getest met een slagmachine. De ballen mogen maximaal twee meter minder of twee meter meer dan een bepaalde afstand afleggen. Als er geen storingen in het productieproces zijn opgetreden, is 90% van de geproduceerde ballen goed. Wekelijks wordt er een steekproef van 140 ballen genomen. Als te veel ballen moeten worden afgekeurd, wordt de hele weekproductie gecontroleerd. In een bepaalde week bleken in de steekproef 23 ballen niet goed te zijn.
- Is hier sprake van een eenzijdige of een tweezijdige toets?
 - Geef de nulhypothese en de alternatieve hypothese.
 - Is het resultaat reden genoeg om actie te ondernemen? Neem $\alpha = 0,05$.
 - Van de 23 ballen die in eerste instantie zijn afgekeurd, blijken 18 ballen niet ver genoeg en vijf te ver geslagen te zijn. Wat verandert er aan de toets en aan de conclusie als alleen ballen die niet ver genoeg komen worden afgekeurd? Neem wederom $\alpha = 0,05$.



Je kunt een eenzijdige toets van het gemiddelde uitvoeren.

- E1** Kuipjes margarine worden volgens de fabrikant gevuld met een gemiddelde van 250,5 gram en een standaardafwijking van 2,5 gram. Iemand denkt dat het gemiddelde lager ligt. Bij een steekproef van 100 kuipjes werd een gemiddelde inhoud van 249,5 gram gemeten.

Geef de uitslag bij een significantieniveau van 1% aanleiding om aan het opgegeven gemiddelde te twijfelen?

Je kunt een eenzijdige binomiale toets uitvoeren.

- E2** Volgens een uitkeringsinstantie ontvangt hoogstens 10% van hun cliënten ten onrechte een uitkering. Een politieke groepering denkt dat dit groter is. Er wordt een onderzoek gedaan bij 400 cliënten. Uit het onderzoek blijkt dat van de 400 cliënten er 48 ten onrechte een uitkering ontvangen. Neem als significantieniveau 5% en ga na of deze uitslag voldoende aanleiding geeft om de bewering van de uitkeringsinstantie in twijfel te trekken.

Je kunt een tweezijdige toets uitvoeren.

- E3** Hans gooit 300 keer met een 12-vlaksdobbelsteen met daarop de getallen 1 tot en met 12 en let op het aantal keer dat hij een acht gooit. Hij gooit in totaal 34 keer een acht.

Neem $\alpha = 0,075$ en ga na of je op basis van dit resultaat het feit dat de kans op een acht gelijk is aan $\frac{1}{12}$ is in twijfel mag trekken.

- E4** Psoriasis is een chronische huidaandoening die bij ongeveer 2% van de bevolking voorkomt. Een dermatoloog vermoedt dat bij indianen psoriasis minder vaak voorkomt. Er wordt een steekproef gedaan onder 1000 indianen.

- Bereken hoeveel indianen met psoriasis je in de steekproef verwacht als de 2% ook bij indianen geldt.
- Bereken het kritieke gebied bij een significantieniveau van 5%.

- E5** Herman denkt dat de weerman van het journaal in 80% van de gevallen gelijk krijgt, als hij aankondigt dat het de volgende dag de hele dag droog zal blijven. Joël denkt dat dit percentage niet klopt. Ze besluiten voor 30 dagen waarop droog weer wordt aangekondigd, bij te houden of het de volgende dag droog is of niet. Bereken bij hoeveel dagen met droog weer de nulhypothese zal worden verworpen bij een significantieniveau van 10%.



- E6** Een schoolleider vraagt zich af of er in 3vwo op het eindrapport meer onvoldoendes zijn bij het vak Frans dan bij het vak Duits. Hij heeft daarom van de afgelopen 16 jaar bij de eindrapporten van de leerlingen in klas 3vwo de aantallen onvoldoendes voor de vakken Duits en Frans opgezocht. In 11 jaren waren er meer onvoldoendes bij Frans dan bij Duits. In de overige jaren waren er juist meer onvoldoendes bij Duits. Als er evenveel onvoldoendes zouden vallen, is de kans dat er in een jaar meer onvoldoendes bij Frans vallen, gelijk aan 0,5. Je toetst nu $H_0 : p = 0,5$ tegen $H_1 : p \neq 0,5$. De toetsingsgrootte X is het aantal jaren dat bij Frans meer onvoldoendes zijn dan bij Duits. Neem $\alpha = 0,05$ en ga na of er genoeg aanleiding is om te concluderen dat er bij Frans meer onvoldoendes vallen.



- E7** Er wordt aangenomen dat $\frac{1}{12}$ deel van de Nederlandse bevolking in de maand mei geboren is. Iemand twijfelt of dit wel juist is.
- a** Geef de toetsingsgrootte, de nulhypothese en de alternatieve hypothese.
 - b** In een steekproef van tachtig mensen blijken elf mensen in de maand mei geboren te zijn. Is dat voldoende reden om te twijfelen aan het uitgangspunt bij een significantieniveau van 10%?
 - c** En bij twee mensen die in mei geboren zijn?
 - d** Er wordt een nieuwe steekproef genomen van 140 mensen. Bij welke aantallen mensen geboren in mei in deze steekproef er is niet voldoende aanleiding om te twijfelen aan de bewering dat $\frac{1}{12}$ deel van de Nederlanders in de maand mei geboren is? Neem weer $\alpha = 0,10$.
- E8** Bij een onderzoek naar de invloed van alcohol op het rijgedrag dronken 100 proefpersonen in vijf minuten tijd twee glazen bier. Na een kwartier kregen ze de opdracht een bepaald traject te rijden en zich steeds aan de maximumsnelheden te houden. Er is bekend dat automobilisten die geen alcohol hebben gedronken met deze opdracht dit traject afleggen met een gemiddelde snelheid van 82,3 km/uur met een standaardafwijking van 3,8 km/uur. De honderd automobilisten reden het traject gemiddeld met een snelheid van 83,1 km/uur. Geeft dit resultaat voldoende aanleiding om te concluderen dat alcohol invloed heeft op het rijgedrag? Neem als significantieniveau 5%.



Keuzeonderwerpen

SE

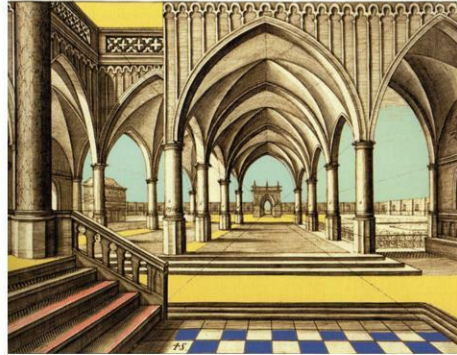
CE

K

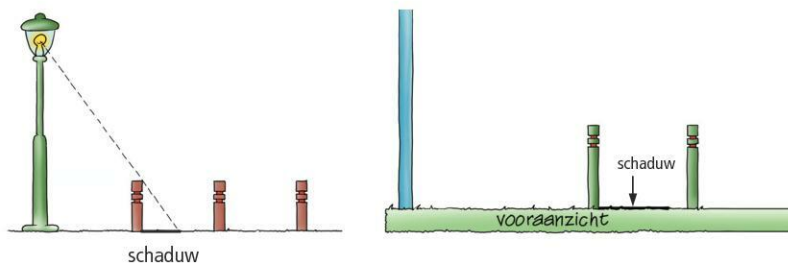
Keuzehoofdstuk Perspectief

Je kunt ruimtelijke objecten op verschillende manieren tekenen.

Je leert eerst wat een centrale projectie en wat een tafereel is. Bij het tekenen op een tafereel maak je een perspectieftekening. Hiervoor gebruik je een verdwijnpunt. Dat verdwijnpunt ligt op de horizon. Een tekening waarbij er sprake is van één verdwijnpunt heet een eenpuntperspectief tekening. Veel kunstenaars maken hiervan gebruik.



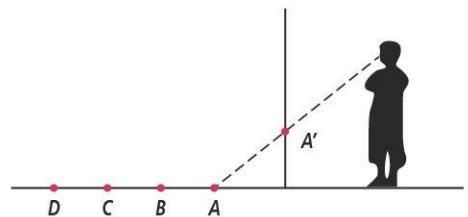
1 Centrale projectie



- 1 Drie even hoge paaltjes worden 's nachts door een lantaarn beschenen. In de linker tekening is in een vooraanzicht het schaduwbeeld van één paaltje getekend.
 - a Teken in dit vooraanzicht het schaduwbeeld van de andere twee paaltjes.
 - b Zijn de schaduwen van alle drie paaltjes even lang?
 - c In de rechter tekening zie je een schijnwerper in de buurt van twee palen. In het vooraanzicht is het schaduwbeeld van de eerste paal getekend. Teken in het vooraanzicht de lamp op de juiste hoogte.
 - d Teken ook het schaduwbeeld van de tweede paal.

- 2 Johan staat voor een raam en kijkt naar een viertal stenen die op gelijke afstand van elkaar liggen. Piet tekent met een viltstift op het raam zoals Johan de stenen ziet. In het zijaanzicht van de situatie zijn de stenen aangegeven door de punten A , B , C en D .

- a De plek van steen A op het raam is punt A' . Teken de plek van de stenen B , C en D op het raam.
- b A , B , C en D liggen op gelijke afstanden van elkaar. Hoe zit dat met de punten A' , B' , C' en D' ?
- c Teken de lijn vanuit het oog van Johan loodrecht op het raam. Het snijpunt van deze lijn met het raam is punt P . Leg uit dat, hoever een steen ook ligt, Johan deze altijd lager dan het punt P ziet.



Theorie

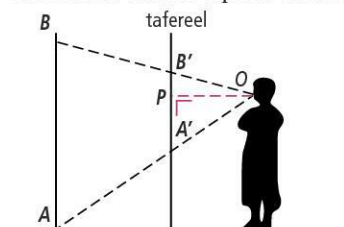
Het schaduwbeeld bij lamplicht en het tekenen van een voorwerp op een glasplaat zoals dat in opdracht 2 gebeurt, zijn voorbeelden van **centrale projectie**.

De lamp is het **centrale punt** of het **oog**.

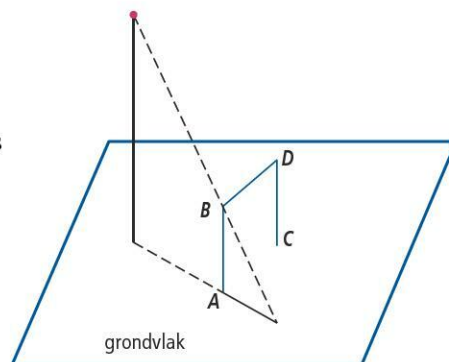
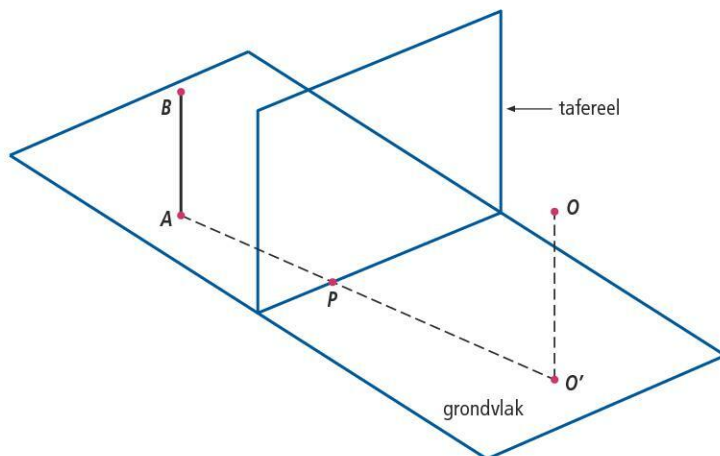
De glasplaat staat tussen het oog en het voorwerp en wordt het **tafereel** of **tekenvlak** genoemd. De loodrechte projectie van het oog op het tafereel heet het **oogpunt**. De tekening die op het tafereel ontstaat, heet het **beeld**. Het beeld is hoe het oog het voorwerp waarneemt.

Voorbeeld

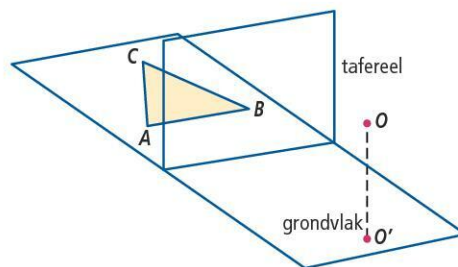
In de tekening is punt O het centrale punt. Het tafereel is tussen de persoon en de paal getekend. Het oogpunt is punt P . Het beeld van AB op het tafereel is $A'B'$.

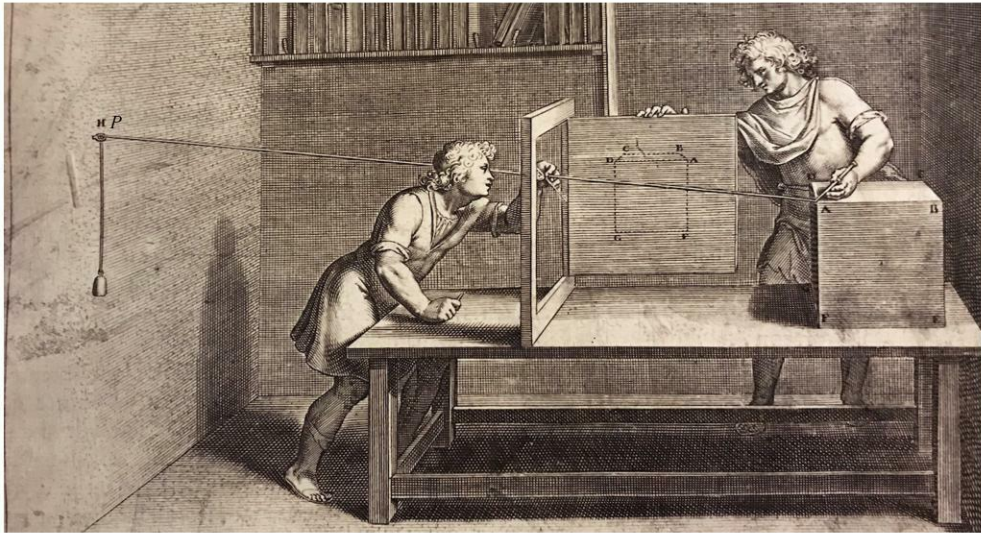


- 3** Wordt het beeld $A'B'$ in het voorbeeld twee keer zo groot als de afstand van het oog tot het tafereel twee keer zo groot wordt? Leg je antwoord uit met een tekening.
- 4** Een hekje staat in de buurt van een lantaarn. De twee staanders AB en CD van het hekje zijn even lang en staan verticaal. In de tekening van de situatie is het schaduwbeeld van staander AB al getekend.
- Beschrijf hoe het schaduwbeeld van punt B is bepaald.
 - Teken op dezelfde manier de schaduw van staander CD .
 - Teken ook het schaduwbeeld van BD .
 - Zijn BD en zijn schaduwbeeld even lang?
- 5** Een tafereel staat loodrecht op het grondvlak. Punt O is het oog en het punt O' is het punt op de grond zodat OO' evenwijdig is met lijnstuk AB en met het tafereel. Het snijpunt van de zogeheten grondlijn $O'A$ met het tafereel is het punt P . In deze opdracht ga je het beeld van lijnstuk AB op het tafereel tekenen.

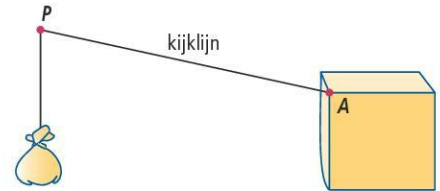


- 6** Gegeven is het driehoekige bord ABC waarvan het beeld op het tafereel moet worden getekend. De drie punten A , B en C liggen in het grondvlak. Teken het beeld van de driehoek ABC op het tafereel.
- 7** Deze opdracht gaat ook over het driehoekige bord ABC . Nu liggen de punten A en B in het grondvlak en is het driehoekige bord ABC evenwijdig met het tafereel.
- Teken het beeld $A'B'C'$ van driehoek ABC op het tafereel.
 - Welke zijden van driehoek $A'B'C'$ zijn evenwijdig met een zijde van driehoek ABC ?

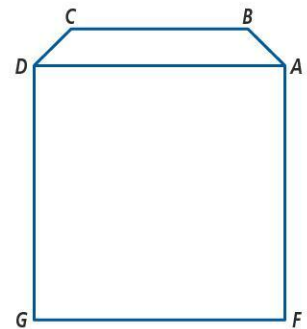




In de prent van Simon de Caes (1576-1626) zie je hoe een kubus op een tafereel getekend wordt. Er is een touw gespannen van een punt P aan de muur naar een hoekpunt van de kubus. Dit punt P is het centrale punt van waaruit de kubus wordt bekeken. Wordt het touw met punt A verbonden, dan is het touw als het ware de kijklijn van punt P naar punt A . De man links legt vast waar het punt A van de kubus op het tafereel komt. Na het terugdraaien van het tafereel kan het punt worden ingetekend.



- 8** In de prent van Simon de Caes is een gedeelte van de kubus al op het tafereel getekend. Dit gedeelte is nogmaals getekend.
- Ga na dat de letters in de tekening overeenkomen met de letters bij de hoekpunten van de kubus op de prent.
 - De voorkant $AFGD$ van de kubus is op het tafereel ook weer een vierkant omdat het vlak $AFGD$ evenwijdig is met het tafereel.
Waarom is de achterkant $BCHE$ ook evenwijdig aan het tafereel en wat is dus de vorm hiervan in de tekening?
 - Teken nu met stippellijnen de achterkant $BCHE$.
 - Verleng met dun getekende lijnen de ribben DC en AB tot ze elkaar snijden. Noem dat snijpunt V .
 - Verleng de ribben GH en FE .
Controleer dat die ook door het punt V gaan.



Theorie

Een tekening zoals die in de prent van Simon de Caes wordt gemaakt, heet een **perspectieftekening**.

Een perspectieftekening is een manier om een ruimtelijk object te tekenen zoals je het in werkelijkheid ook ziet. Foto's zijn altijd in perspectief en de lens van de camera is het oog.

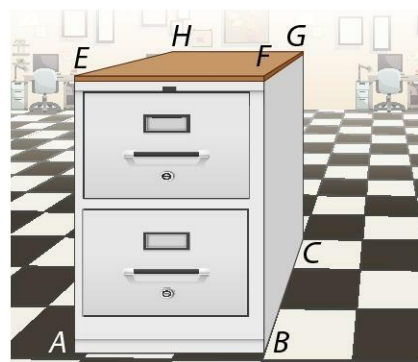
- In een perspectieftekening worden objecten die in werkelijkheid even groot zijn maar zich op ongelijke afstand van het oog bevinden niet even groot afgebeeld. Het object dat verder weg ligt, wordt kleiner afgebeeld.
- Vlakdelen die evenwijdig zijn aan het tafereel, hebben in de tekening dezelfde vorm als in werkelijkheid.
- Lijnen die in werkelijkheid evenwijdig zijn, maar die niet evenwijdig zijn aan het tafereel, snijden in een perspectieftekening elkaar in een zogeheten **verdwijnpunt**.



De spoorrails, die in werkelijkheid evenwijdig lopen, snijden elkaar op de foto in één punt, het verdwijnpunt.

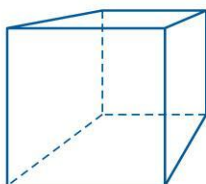
- 9 Op de tekening zie je een archiefkast. De archiefkast heeft de vorm van een balk. Bij de zichtbare hoekpunten zijn letters geplaatst.

- De voorkant van de archiefkast op de tekening heeft dezelfde vorm als in werkelijkheid. Geldt dat ook voor de bovenkant?
- Wat valt je op als je naar de vloertegels kijkt die in werkelijkheid allemaal even grote vierkanten zijn?
- De lijnen EH en FG zijn in werkelijkheid evenwijdig maar in de tekening niet. Verleng EH en FG en teken hun snijpunt V .
- Ga na dat BC na verlenging ook door punt V gaat.

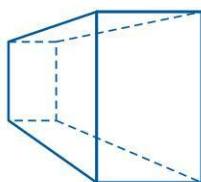


- 10 De breedte van de archiefkast uit opdracht 9 is op de tekening groter dan de diepte van de archiefkast. Hoe kun je aan de tegels zien dat in werkelijkheid de breedte juist kleiner is dan de diepte?

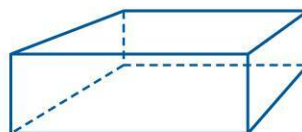
- 11
- Teken in de perspectieftekeningen van balk A en balk B het verdwijnpunt.
 - De tekening van de balk C lijkt een perspectieftekening. Laat zien dat het niet het geval is.



A

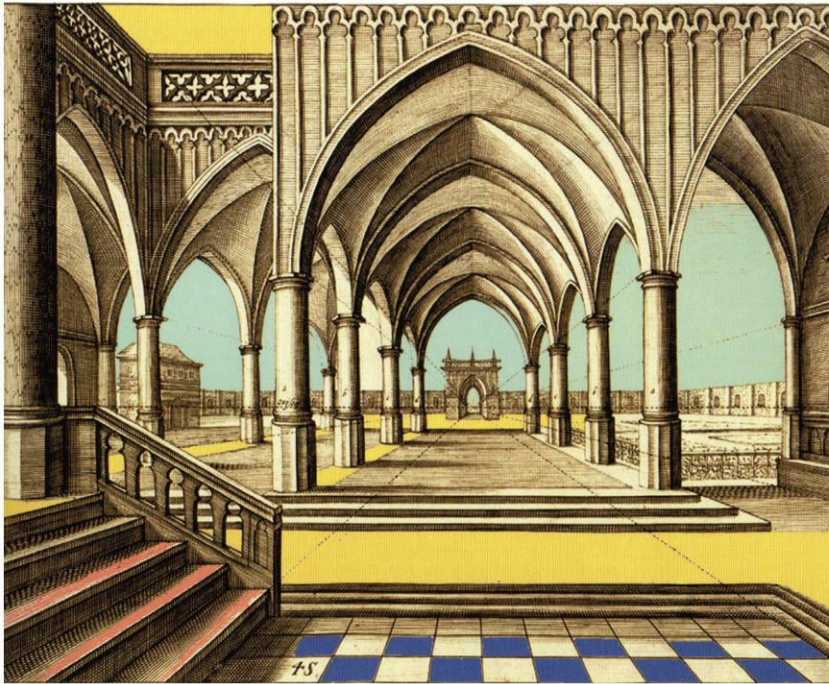


B



C

3 Eenpuntperspectief

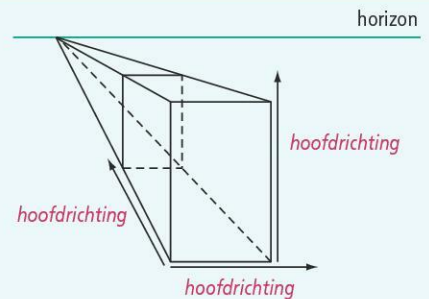


- 12 De perspectieftekening is van de Nederlandse architect en ingenieur Hans Vredeman de Vries (1527-1607). Iemand heeft hierin een aantal stippellijnen getekend met hetzelfde verdwijnpunt. Teken nog twee stippellijnen met hetzelfde verdwijnpunt.

Theorie

De tekening bij opdracht 12 is een tekening in **eenpuntperspectief**. Veel schilders uit de 15e eeuw hebben dit in hun schilderijen toegepast.

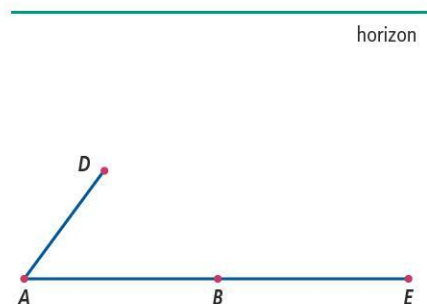
De breedte, hoogte en diepte van een object heten de **hoofdrichtingen** van het object. Bij eenpuntperspectief zijn twee hoofdrichtingen evenwijdig aan het tafereel, de andere hoofdrichting staat loodrecht op het tafereel. Alle lijnen loodrecht op het tafereel hebben hetzelfde verdwijnpunt. De horizontale lijn door het verdwijnpunt heet de **horizon**.



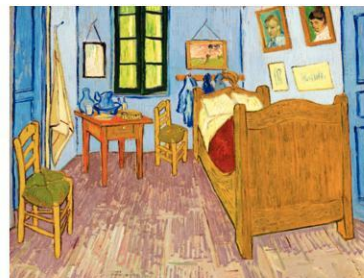
- 13 a Is in de tekening van Hans Vredeman de Vries de horizon al getekend?
b Geef van elk van de drie hoofdrichtingen in deze tekening twee voorbeelden.

- 14** Hiernaast is een begin gemaakt met een tekening in eenpuntperspectief van een tweetal gelijke, naast elkaar liggende, rechthoekige tegels. Van de linker tegel met hoekpunten A , B , C en D zijn drie hoekpunten gegeven. Van de rechter tegel met hoekpunten B , E , F en C zijn de hoekpunten B en E gegeven.

- Teken met behulp van de lijn door de punten A en D het verdwijnpunt V .
- Waarom gaan de lijnen BC en EF ook door V ?
- Welke zijden van de tegels zijn evenwijdig aan de horizon?
- Teken de lijnen BC en EF en de zijden van de tegels evenwijdig aan de horizon om de tekening af te maken.
- Teken een derde, even grote tegel, er aan de rechterkant bij.



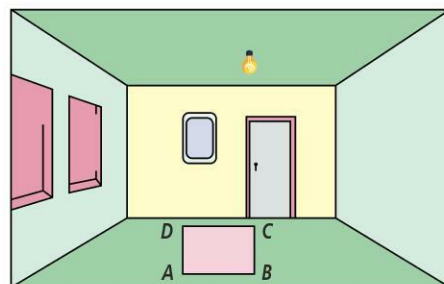
- 15** Deze opdracht gaat ook over de tekening uit opdracht 14.
- Hoe is in werkelijkheid de onderlinge ligging van de diagonalen AC en BF ?
 - Deze diagonalen zijn geen hoofdrichting. Teken deze diagonalen, verleng ze en ga na dat ze elkaar op de horizon snijden.
 - Snijden de diagonalen BD en EC elkaar na verlenging ook op de horizon?



- 16** Links zie je twee kindertekeningen en rechts een schilderij van Vincent van Gogh. Ga na of de regels voor het eenpuntperspectief correct zijn toegepast. Geef aan waarom wel of waarom niet.

- 17** Gegeven is een eenpuntperspectieftekening van een kamer. Er is ook een rechthoek $ABCD$ getekend.

- Teken de horizon.
- Rechthoek $ABCD$ stelt de lijst van een schilderij voor en is evenwijdig aan het tafereel, met zijde AB op de grond. De lijst wordt tegen de achterste wand gezet. Past de lijst onder het raam? Leg je antwoord uit.
- De deur is in werkelijkheid twee meter hoog. Geef een schatting in dm op welke hoogte het oog van de tekenaar zich ongeveer bevindt. Leg je antwoord uit.

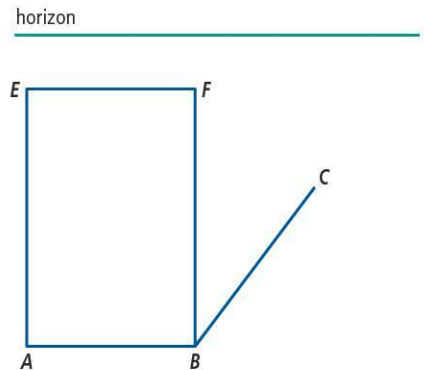


4 Teken in eenpuntperspectief

- 18** Gegeven is deel van een eenpuntperspectieftekening van een balk $ABCD.EFGH$. Het voorvlak $ABFE$ is evenwijdig aan het tafereel.

In deze opdracht ga je deze perspectieftekening afmaken.

- Teken het verdwijnpunt V van zijde BC .
- Punt V is ook het verdwijnpunt van de zijden die evenwijdig aan zijde BC : de zijden AD , FG en EH .
Teken met dunne lijntjes FV , AV en EV .
- Zijde CG is evenwijdig met zijde BF .
Teken punt G .
- Zijde CD is evenwijdig met zijde AB .
Teken punt D .
- Maak de perspectieftekening van de balk af.



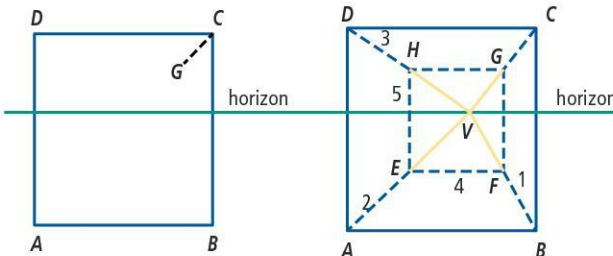
Aanpak

Hoe maak je een eenpuntperspectieftekening?

- Teken het verdwijnpunt V .
- Verbind de overige gegeven hoekpunten met V .
- Gebruik evenwijdigheid van ribben met het (verticale) tafereel om de positie van de ontbrekende hoekpunten te bepalen.
- Teken de nog ontbrekende lijnstukken om de perspectieftekening af te maken.

Voorbeeld

Maak de eenpuntperspectieftekening van de balk af.



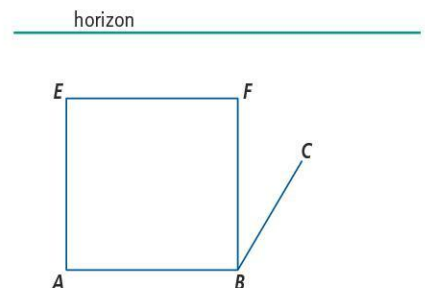
Oplossing

- Verleng CG to aan de horizon.
Het snijpunt is V .
- Teken de lijnen 1, 2 en 3.
- Teken de lijn door G evenwijdig aan BC .
Het snijpunt met BV is punt F .
Teken ten slotte lijn 4 om het punt E te bepalen en lijn 5 om punt H te bepalen.
- Maak de perspectieftekening af met het tekenen van de achterkant $EFGH$ en de lijnstukken BE , DH en HG .

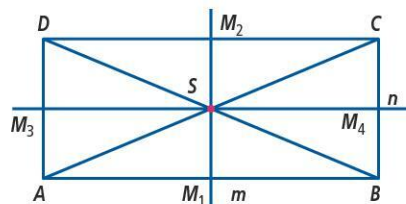
- 19** Van een kubus $ABCD.EFGH$ wordt een eenpuntperspectief tekening gemaakt. Je ziet een begin van de tekening.

W

- Maak deze tekening af.
- Teken een even grote kubus er boven op.



- 20** Gegeven is een bovenaanzicht van rechthoek $ABCD$ en een tekening van de rechthoek in eenpuntperspectief. Punt V is het verdwijnpunt. De diagonalen AC en BD hebben snijpunt S . In het bovenaanzicht is lijn m de lijn door S die evenwijdig loopt met de zijden AD en BC . Deze lijn snijdt de zijden AB en CD in de middens M_1 en M_2 .



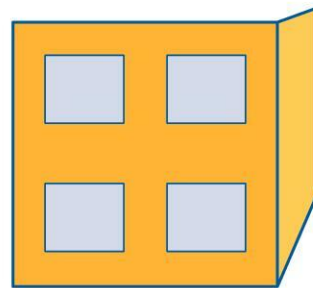
- Leg uit waarom lijn m in de perspectieftekening door S en V gaat.
- Teken met behulp van lijn m in de perspectieftekening de punten M_1 en M_2 .
- Controleer met behulp van meten dat in de perspectieftekening $AM_1 = BM_1$ en dat $DM_2 = CM_2$.
- Lijn n is de lijn door S die evenwijdig loopt met AB en CD . Hij snijdt de zijden AD en BC in de middens M_3 en M_4 . Teken lijn n en ook M_3 en M_4 in de perspectieftekening.
- Controleer met behulp van meten dat in de perspectieftekening AM_3 en DM_3 niet even lang zijn.

Theorie

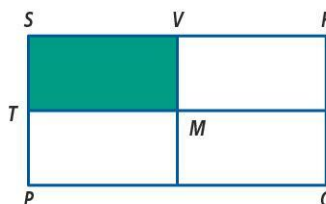
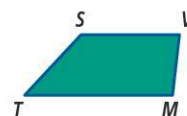
Middens van lijnstukken die loodrecht op het tafereel staan, bepaal je met behulp van diagonalen en een lijn evenwijdig aan de horizon die door het snijpunt van de diagonalen gaat. Middens van lijnstukken die evenwijdig lopen met het tafereel zijn in een perspectieftekening ook weer echte middens. Je mag ze daarom ook vinden met behulp van opmeten, of door het snijpunt van de diagonalen te tekenen.

- 21** Je ziet een deel van een eenpuntperspectieftekening van een flat van twee verdiepingen hoog en twee appartementen breed. Alle appartementen zijn even groot met even grote ramen.

- Teken het dak van deze flat.
- Op de voorgevel komt midden tussen de appartementen een horizontale sierstrip en een verticale regenpijp. Teken de regenpijp en de sierstrip.
- De horizontale sierstrip loopt door over de rechter zijgevel. Op het midden van de zijgevel komt ook een regenpijp. Teken de regenpijp en de sierstrip.



- 22** Gegeven is een patroon van vier gelijke rechthoeken. Van rechthoek $TMVS$ is een eenpuntperspectieftekening gemaakt. Teken de andere rechthoeken in deze tekening erbij.



5 Gemengde opdrachten

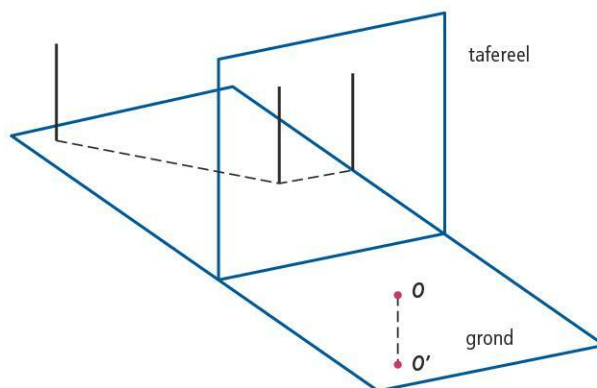
- 23** Van een begin van een eenpuntperspectief tekening van een vierkant $ABCD$ is zijde AB getekend, evenals de horizon met daarop de punten P en Q . Punt Q is het verdwijnpunt van de hoofdrichting en punt P is het verdwijnpunt van diagonaal BD .

W

- Maak de perspectieftekening van het vierkant $ABCD$ af.
- Teken een vierkant $BEFC$ naast vierkant $ABCD$.

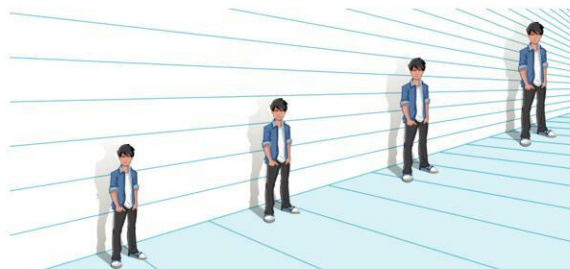


A B

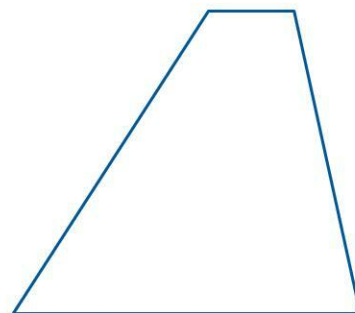


- 24** In de figuur staan op de grond drie even hoge paaltjes. Theo staat voor een glazen plaat en kijkt naar de paaltjes. In de tekening is O het oog van Theo en is O' de loodrechte projectie van O op het grondvlak. Teken op de glazen plaat het beeld van de paaltjes zoals Theo ze ziet.

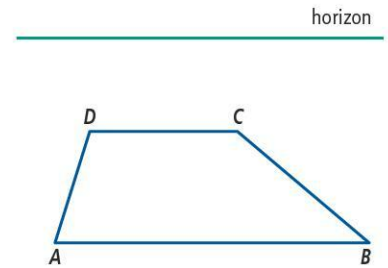
- 25** De lijnen op de wand in de perspectieftekening zijn in werkelijkheid evenwijdig.
- De meest rechtse man lijkt groter dan de meest linkse. Meet dat na. Wat is de oorzaak van de vertekening?
 - Stel dat de twee genoemde mannen in werkelijkheid even groot zijn. Hoeveel mm zou de rechterfiguur op de tekening dan moeten zijn?
 - Stel dat de twee linker mannen op de juiste grootte getekend zijn. De meest linkse man is ongeveer 1,65 m. Bereken de lengte van de tweede man.



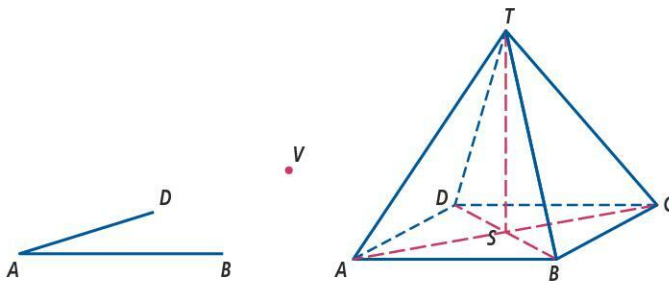
- 26** In de figuur zie je een rechthoek in eenpuntperspectief. Verdeel deze rechthoek in vier achter elkaar liggende, gelijke rechthoeken.



- 27** Gegeven is een eenpuntperspectief tekening van rechthoek $ABCD$. Verder is de horizon gegeven. Teken rechthoek $ABCD$ als het verdwijnpunt over de horizon 2 cm naar rechts wordt verplaatst.



- 28** Gegeven is een piramide $T.ABCD$ met een vierkant grondvlak $ABCD$. De top T ligt recht boven het snijpunt S van de diagonalen AC en BD . Verder is gegeven dat $TS = AB$.



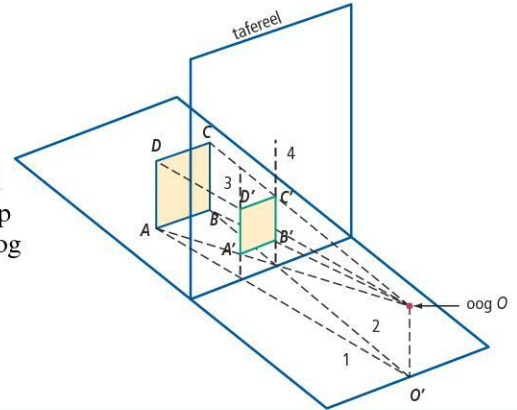
Links zie je een begin van een eenpuntperspectief tekening van de piramide $T.ABCD$ met verdwijnpunt V .

- Waarom is in de perspectieftekening TS korter dan AB ?
 - Maak de perspectieftekening van piramide $T.ABCD$ af.
- 29** De werken van Tommaso Masaccio behoren tot de vroege renaissance. Zijn werk zou later dat van latere kunstenaars zoals Sandro Botticelli en Michelangelo beïnvloeden. Masaccio wordt beschouwd als de eerste belangrijke Italiaanse meester van de 15e eeuw, van belang vanwege de manier waarop hij de personages in zijn schilderijen afbeeldde, en vanwege het gebruik van het licht in zijn werken. Het meeste belang wordt echter gehecht aan het gebruik van het perspectief, waarmee hij een radicale ommezwaai in de Florentijnse schilderkunst teweegbracht. Op het fresco van de *De Heilige Drie-eenheid* in de Santa Maria Novella in Florence (geschilderd tussen 1425 en 1428) zijn de Vader, de Zoon en de Heilige Geest afgebeeld onder een zogeheten tongewelf met Maria en Johannes onder het kruis. De gehele opbouw van het werk geeft een illusie van ruimtelijkheid waarvoor de schilder een perspectiefsysteem met slechts één verdwijnpunt heeft gebruikt.
- Noem een aantal elementen in de opbouw van het schilderij dat de ruimtelijkheid versterkt.
 - Volgens sommige wetenschappers maakte Masaccio foutief gebruik van het eenpuntperspectief. Onderzoek of deze wetenschappers wel of geen gelijk hebben.



Centrale projectie, oogpunt, tafereel, beeld

Het schaduwbeeld bij lamplicht en het tekenen van een voorwerp op een glasplaat zijn voorbeelden van centrale projectie. De lamp is het centrale punt of het oog. De glasplaat tussen het oog en het voorwerp wordt het tafereel of tekenvlak genoemd. De loodrechte projectie van het oog op het tafereel heet het oogpunt. De tekening die op het tafereel ontstaat, heet het beeld. Het beeld is hoe het oog het voorwerp waarneemt.



Perspectieftekening, verdwijnpunt

Een perspectieftekening is een manier om een ruimtelijk object te tekenen zoals je het in werkelijkheid ook ziet. Foto's zijn altijd in perspectief en de lens van de camera is het oog.

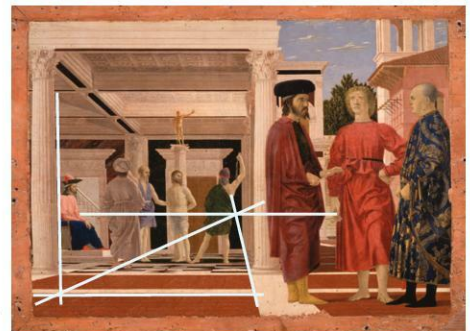
- In een perspectieftekening worden objecten die in werkelijkheid even groot zijn maar zich op ongelijke afstand van het oog bevinden, niet even groot afgebeeld. Het object dat verder weg ligt, wordt kleiner afgebeeld.
- Vlakdelen die evenwijdig zijn aan het tafereel, hebben in de tekening dezelfde vorm als in werkelijkheid.
- Lijnen die in werkelijkheid evenwijdig zijn, maar niet evenwijdig zijn aan het tekenvlak, snijden in een perspectieftekening elkaar in een zogeheten verdwijnpunt.



In werkelijkheid lopen de spoorrails evenwijdig aan elkaar. In de foto snijden ze elkaar in één punt, het verdwijnpunt.

Eenpuntperspectief, hoofdrichtingen, horizon

Het schilderij *De geseling van Christus* van Piero della Francesca (ca. 1460), is gemaakt in eenpuntperspectief. De breedte, hoogte en diepte van een object heten de hoofdrichtingen van het object. In het schilderij zijn de twee hoofdrichtingen aangegeven die evenwijdig aan het tafereel zijn. De andere hoofdrichting staat loodrecht op het tafereel. Twee lijnen die evenwijdig zijn aan deze derde hoofdrichting zijn in het schilderij aangegeven. Het snijpunt van deze lijnen is het verdwijnpunt. De horizontale lijn door het verdwijnpunt heet de horizon en is in het schilderij eveneens aangegeven.



Je kunt nagaan of in een tekening of schilderij de regels voor het tekenen in eenpuntperspectief correct zijn toegepast.

Ga na of twee hoofdrichtingen evenwijdig zijn met het tafereel en alle lijnen die evenwijdig zijn aan de derde hoofdrichting één verdwijnpunt hebben.

In het schilderij hiernaast van de Nederlandse schilder Michiel Schrijver is dat niet het geval. De lijnen evenwijdig aan de derde hoofdrichting snijden elkaar niet in één punt.



Je kunt een eenpuntperspectieftekening maken.

Bij het tekenen maak je gebruik van het verdwijnpunt en evenwijdigheid aan het tekenvlak.

Voorbeeld

Van een eenpuntperspectieftekening van de balk $ABCD.EFGH$ zijn de zijden AB , BC en BF gegeven. Maak deze tekening af.

Oplossing

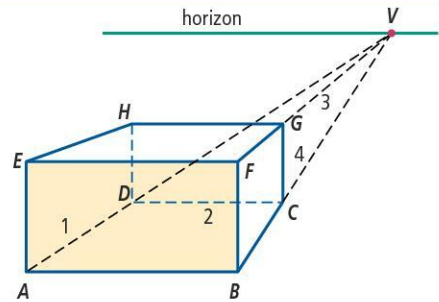
Verleng zijde BC tot de horizon; dit geeft het verdwijnpunt V .

De rechthoek $ABFE$ zie je in de tekening als een rechthoek. De punten A , B en F zijn gegeven, dus kun je punt E tekenen.

Door achtereenvolgens de stippellijnen 1 tot en met 4 te tekenen ontstaan de punten D en G .

De rechthoek $DCGH$ zie je in deze tekening weer als een rechthoek, dus kun je het punt H tekenen.

Door de ontbrekende ribben te tekenen maak je de perspectieftekening af.



Je kunt in een perspectieftekening het midden van een zijde bepalen.

Je maakt gebruik van de diagonalen van een rechthoek om het midden te vinden van een zijde die niet evenwijdig is met het tafereel.

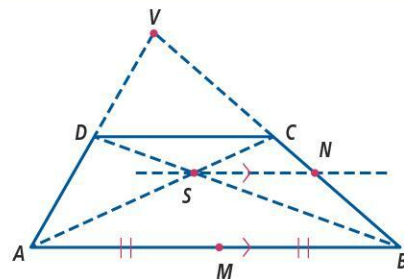
Voorbeeld

Gegeven is een eenpuntperspectief tekening van een rechthoek $ABCD$.

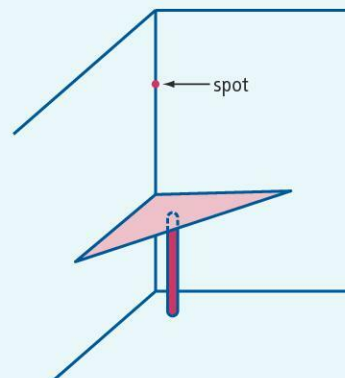
Omdat AB evenwijdig is met het tafereel, kun je het midden M van AB via meten bepalen; $AM = BM$. Zijde BC is niet evenwijdig aan het tafereel.

Teken de diagonalen AC en BD en hun snijpunt S . De lijn door S evenwijdig aan AB snijdt BC in N .

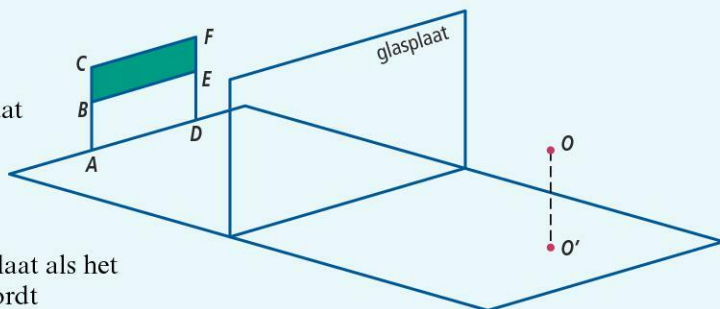
Punt N is het midden van BC .



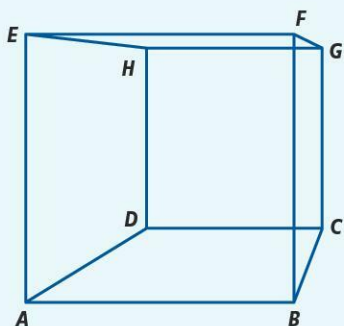
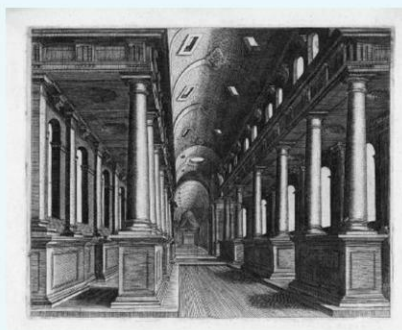
- T1** In de hoek van een kamer staat een bijzettafeltje. Het blad hiervan heeft de vorm van een rechthoekige, gelijkbenige driehoek. In de hoek is een spot opgehangen. Deze spot geeft een schaduw van het tafelblad op de vloer.
- Teken deze schaduw op de vloer.
 - Als de spot lager wordt opgehangen, wat is dan het gevolg voor de schaduw?
 - Onderzoek in de tekening van opdracht a of de spot op een hoogte kan worden gehangen zodat de afmetingen van de schaduw het $\frac{2}{3}$ deel zijn van die in opdracht a. Leg je antwoord uit.



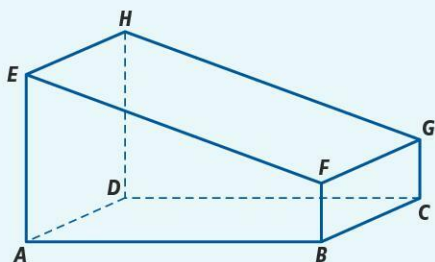
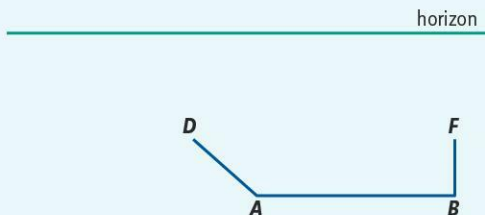
- T2** In de tekening kijk je met je oog in O door een glasplaat naar een spandoek, aangegeven met $BCFE$. Het spandoek staat evenwijdig aan de verticale glasplaat en is bevestigd aan twee palen, in de tekening aangegeven met AC en DF .
- Teken het beeld van het spandoek op de glasplaat.
 - Hoe verandert het beeld op de glasplaat als het spandoek verder van de glasplaat wordt geplaatst?



- T3** Links zie je een eenpuntperspectief tekening van een draadmodel van kubus $ABCD.EFGH$. Teken het verdwijnpunt en de horizon.



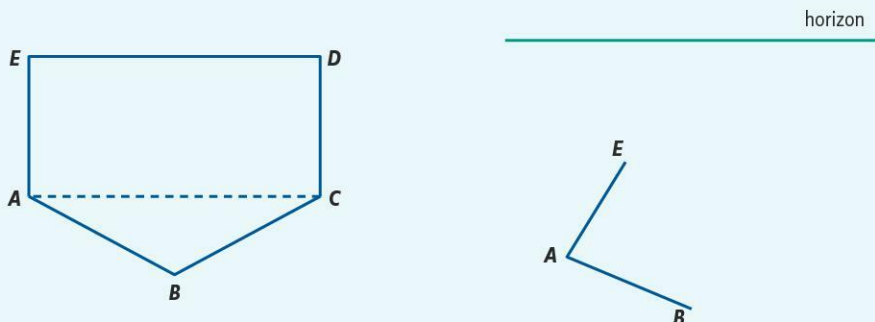
- T4** Rechts zie je een tekening van Hans Vredeman de Vries.
- Teken van elk van de drie hoofdrichtingen twee lijnen.
 - Ga na of de regels van het eenpuntperspectief correct zijn toegepast.



- T5** Gegeven is een scheef afgeknotte balk $ABCD.EFGH$.
 Zijde AE is drie keer zo lang als zijde BF .
 In de tekening rechts is een begin gemaakt met een
 eenpuntperspectieftekening van de gegeven afgeknotte balk.

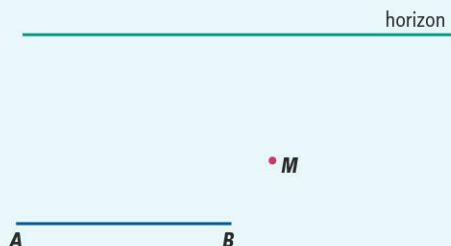
- Maak deze tekening af.
- Teken het midden M van zijde EF en het midden N van zijde AD .
- Teken in de figuur van opdracht a een balk $BPQC.FRSG$ waarvan geldt dat zijde BF even lang is als zijde BP .

- T6** Gegeven is een vijfhoek $ABCDE$. Het deel $ACDE$ is een rechthoek en
 driehoek ABC is gelijkbenig met $BA = BC$.
 Naast de vijfhoek is een begin gemaakt met een eenpuntperspectieftekening.
 De zijde ED en de diagonaal AC lopen evenwijdig aan de horizon.
 De zijden AE en CD staan loodrecht op de horizon.



- Maak deze perspectieftekening af.
- Teken in de perspectieftekening het midden van zijde AE .

- T7** Van een eenpuntperspectief tekening van een rechthoek
 $ABCD$ is zijde AB gegeven en het midden M van zijde BC .
 Maak deze perspectieftekening af.





Meer oefenen 250

In ieder hoofdstuk wordt bij enkele opdrachten extra oefening aangeboden. In de extra oefeningen wordt in het algemeen hetzelfde type opdracht gegeven maar met andere getallen.

Oefenproefwerken 262

Bij ieder hoofdstuk vind je hier een oefenproefwerk. Dit oefenproefwerk kun je gebruiken om je voor te bereiden op het echte proefwerk. De oefenproefwerken zijn in het algemeen wat langer dan een proefwerk dat je in een les van 45 of 50 minuten moet maken.

In een proefwerk komen verschillende soorten opdrachten voor:

- opdrachten voor waarmee getoetst wordt of je de vaardigheden van het hoofdstuk beheerst;
- opdrachten waarmee getoetst wordt of je de vaardigheden kunt toepassen binnen een grotere wiskundige opdracht of binnen een context of binnen een situatie die meer denkstappen vraagt en dus meer inzicht.



2 Los de vergelijkingen exact op.

a $10^x = 10000$

d $7^{x-3} = \frac{1}{7}$

b $5^x = 125$

e $5^{4+2x} = \frac{1}{125}$

c $3^x = \sqrt{3}$

f $8 \cdot 2^x = 2\sqrt{2}$

6 Geef de exacte oplossing.

a $3^x = 11$

d $7^{x+4} = 17$

b $5^x = 117$

e $10^{4x} = 0,3$

c $3^{x-1} = 32$

f $6^{1-x} = 1$

7 Vul in.

a ${}^3\log(243) = \dots$, want $243 = 3^{\dots}$

b ${}^4\log(1) = \dots$, want $1 = 4^{\dots}$

c ${}^5\log\left(\frac{1}{125}\right) = \dots$, want $\frac{1}{125} = 5^{\dots}$

d ${}^4\log\left(\frac{1}{4}\right) = \dots$, want $\frac{1}{4} = 4^{\dots}$

e ${}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{16}\right) = \dots$, want $\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\dots}$

f ${}^2\log(\sqrt{2}) = \dots$, want $\sqrt{2} = 2^{\dots}$

12 Los de vergelijkingen op.

a $10^t = 0,1$

c $10^t = 350$

b $10^t = 10000$

d $10^t = 2700$

15 Bereken de logaritmen in twee decimalen.

a ${}^6\log(231)$

c ${}^{\frac{1}{7}}\log(23)$

b ${}^{11}\log(17)$

d ${}^3\log\left(\frac{1}{11}\right)$

16 Los op. Geef de exacte oplossing en een benadering in twee decimalen.

a $11^{x+4} = 7$

c $3^{x+1} = 5$

b $6^{x-1} = 10$

d $2^{4x+7} = 3\sqrt{2}$

18 **a** Bij een groeiproses is de toename 8% per jaar.
Bereken de groeifactor en de verdubbelingstijd.
b Bij een groeiproses is de afname 13% per jaar.
Bereken de groeifactor en de halveringstijd.

- 27** Vier functies en vier grafieken zijn gegeven.

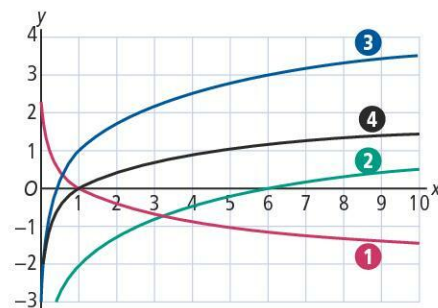
$$f(x) = {}^{2\frac{1}{2}}\log(x) + 1$$

$$g(x) = {}^5\log(x)$$

$$h(x) = {}^{\frac{1}{5}}\log(x)$$

$$i(x) = {}^{2\frac{1}{2}}\log(x) - 2$$

Welke grafiek hoort bij welke functie?



- 31** Schrijf als één logaritme.

a ${}^3\log(21) - {}^3\log(3) + {}^3\log(2)$

b ${}^7\log(p) + 3 \cdot {}^7\log(2)$

c ${}^4\log(3) - ({}^4\log(3) + {}^4\log(2))$

d $4 \cdot {}^{\frac{1}{5}}\log(p) + {}^{\frac{1}{5}}\log(p) - {}^{\frac{1}{5}}\log(p^3)$

- 34** a Vul in: ${}^8\log(16) = \frac{{}^2\log(\dots)}{{}^2\log(\dots)} = \dots$

b Bereken ${}^{\frac{1}{4}}\log(8)$ door over te gaan op grondtal 2.

c Bereken ${}^{1000}\log(100)$ door over te gaan op grondtal 10.

- 38** Schrijf in de vorm $A(x) = b \cdot g^x$.

a $A(x) = 3^{x+2}$

c $A(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}$

b $A(x) = 8 \cdot 4^{x-1}$

d $A(x) = 8^{\frac{1}{3}x-2}$

- 42** Druk x uit in y .

a $y = 4 \cdot 3^x$

c $5y \cdot 7^x = 10$

b $2^x = 8^y$

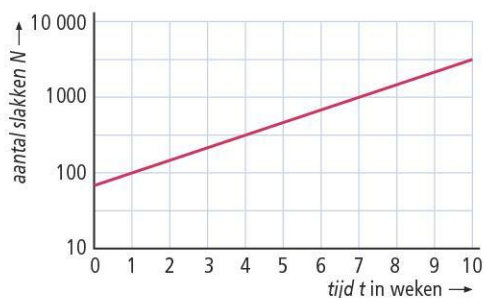
d $y = 3 - 7 \cdot 10^x$

- 49** Biologen hebben in het voorjaar een aantal weken lang de slakken geteld in een bepaald gebied. Het resultaat is in een grafiek verwerkt.

a Hoe kun je aan de grafiek zien dat het aantal slakken zich exponentieel ontwikkelde?

b De grafiek gaat door de punten (1, 100) en (7, 1000). Stel een formule $N = b \cdot g^t$ op bij de grafiek. Rond b af op een geheel getal en g op twee decimalen.

c Na hoeveel weken waren er ongeveer 2000 slakken? Rond je antwoord af op één decimaal.



3 Ga van elk experiment na of er een binomiale verdeling bij kan horen. Leg uit waarom niet. Formuleer in de gevallen dat de verdeling binomiaal is stochast X en geef de bijbehorende waarden van n en p .

- a Vijf keer werpen met een euro; je telt het aantal keer munt.
- b Je gooit een dobbelsteen net zo lang tot je een zes gegooid hebt. Je telt het aantal worpen.
- c Het trekken met terugleggen van zes knikkers uit een vaas met vijf rode, vijftien blauwe en tien gele knikkers, waarbij je het aantal rode knikkers telt.
- d Dezelfde situatie als bij opdracht c, maar nu trek je zonder terugleggen.

4 Ries doet mee aan wedstrijden kleiduivenschietsen. Hij weet uit ervaring dat hij een kans heeft van 0,7 om raak te schieten. In elke ronde wordt tien keer geschoten.

Stochast X is het aantal keren dat Ries raak schiet.

- a Waarom is de kansverdeling van X binomiaal?
- b Bereken de kans dat Ries in een ronde vijf keer raak schiet.
- c Bereken de kans dat hij acht keer raak schiet.
- d Ries heeft bij de eerste vijf pogingen vijf keer raak geschoten. Hoe groot is de kans dat hij bij de laatste vijf pogingen twee keer raak schiet?

7 Ilse trekt zonder terugleggen vier knikkers uit een vaas met 400 witte en 200 rode knikkers.

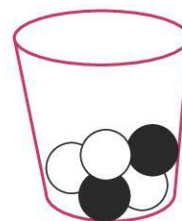
Stochast R is het aantal rode knikkers dat ze trekt.

- a Waarom is de kansverdeling van R geen binomiale verdeling?
- b Waarom kun je de kansverdeling van R wel benaderen met een binomiale verdeling?
- c Geef de kansverdeling van R .

10 Een vaas heeft twee zwarte en drie witte knikkers. Je trekt acht keer met terugleggen een knikker uit de vaas.

Stochast Z is het aantal zwarte knikkers dat je trekt.

- a Leg uit dat de kansverdeling van Z binomiaal is.
- b Geef de waarden van n en p van de kansverdeling van Z .
- c Hoe groot is $P(Z = 2)$?
- d Bereken $P(Z = 3)$ en $P(Z = 5)$.



11 Stochast X is $\text{Bin}(24; 0,45)$ -verdeeld.

- a Bereken $P(X = 10)$ en $P(X = 13)$ met behulp van de formule.
- b Controleer je antwoorden van opdracht a door de parameters n en p en het aantal successen in te voeren in je rekenmachine.

- 12** Een conciërge weet uit ervaring dat in het algemeen 12% van de leerlingen, die in een pauze iets kopen, een koek neemt. Op een dag komen 250 leerlingen iets kopen. Stochast X is het aantal van de 250 leerlingen dat een koek neemt.
- Geef de parameters van de kansverdeling van X .
 - Hoe groot is de kans dat die dag precies 12% van de kopers een koek neemt?
 - Maak op je rekenmachine een tabel met de kansen van stochast X en controleer daarmee je antwoord bij opdracht b.
- 19** Stochast X is $\text{Bin}(40; 0,85)$ -verdeeld. Bereken de kansen.
- $P(X \leq 30)$
 - $P(X \geq 32)$
 - $P(30 < X < 35)$
 - $P(25 \leq X \leq 32)$
 - $P(X > 34)$
 - $P(X = 30)$
- 20** Een machine produceert pakken koffie van 250 gram. Vijf procent van de pakken koffie heeft een gewicht van minder dan 250 gram. Op een dag wordt een steekproef genomen van 120 pakken koffie.
- Bereken de kans op minstens elf pakken koffie die lichter zijn dan 250 gram.
 - Hoe groot is de kans op minstens 107 en hoogstens 118 pakken koffie met een gewicht van minstens 250 gram?
- 24** Een agent beweert dat van alle scooters in Nederland 40% is opgevoerd. Neem aan dat hij gelijk heeft. De politie controleert op een middag 40 scooters.
- Van hoeveel scooters in deze steekproef verwacht je dat ze zijn opgevoerd? En hoe groot is de standaardafwijking?
 - Op een andere dag worden 25 scooters gecontroleerd. Stochast X is het aantal opgevoerde scooters. Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.
- 25** Van een grote partij mandarijnen is 9% beschimmeld. De mandarijnen worden machinaal in netjes van 20 stuks verpakt. Daarbij wordt niet op de kwaliteit van de mandarijnen gelet.
- Hoeveel beschimmelde mandarijnen kun je in een netje verwachten?
 - En wat is de standaardafwijking?
 - Bereken de kans op een netje met 20 goede mandarijnen.
 - Bereken de kans op een netje waarvan het aantal beschimmelde mandarijnen niet meer dan één keer de standaardafwijking afwijkt van het verwachte aantal.

4 Gegeven is de rij 100, 97, 94, 91, 88, ...

a Vul de tabel verder in.

b Geef een recursieve formule bij deze rij.

c Geef ook een recursieve formule bij de rij 2, 4, 10, 28, 82, ... met beginterm $v(1) = 2$.

n	0	1	2	3	4	5	6
$u(n)$	100	97	...	...	...	...	...

7 Schrijf de eerste vier termen op van deze rijen.

a $u(n+1) = 3 \cdot u(n) - 4$ met beginterm $u(0) = 3$.

b $u_{n+1} = -2 \cdot u_n$ met beginterm $u_0 = 1$.

c $u(n+1) = \frac{1}{1-u(n)}$ met beginterm $u(0) = \frac{1}{3}$.

d $u_{n+1} = (u_n + 1)^2$ met beginterm $u_0 = 0$.

12 Gegeven is de recursieve formule $m(t+1) = 1,9 \cdot m(t) - 8$ met $m(0) = 10$.

Vanaf welk rangnummer is $m(t) > 1000$?

15 Een aantal jaren geleden is een gebied dat eerst in gebruik was voor landbouw teruggegeven aan de natuur. Na enkele jaren begonnen zeldzame wilde planten zich daar te vestigen.

Een bioloog heeft onderzoek gedaan naar de verspreiding van wilde orchideeën. Uit de jaarlijkse tellingen stelde hij de volgende recursieve formule op

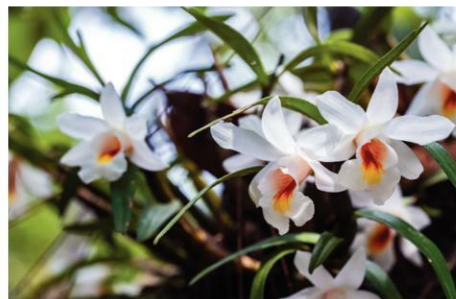
$$u(n+1) = 0,001 \cdot u(n) \cdot (1400 - u(n)).$$

Hierin is $u(n)$ het aantal bloeiende orchideeën in het gebied met $n = 0$ in 2018 en $u(0) = 17$.

a Bereken $u(1)$, $u(2)$ en $u(3)$.

b Bereken het aantal orchideeën in het jaar 2035.

c Plot de grafiek bij de rij u en beschrijf met behulp van de grafiek de groei van het aantal orchideeën in het gebied.



18 Een rij is gegeven door de directe formule $u(n) = 3n^2 + 1$. De beginterm is $u(0)$.

a Hoe zie je aan de formule dat het een directe formule is?

b Vul de tabel verder in.

c Bereken voor welke n geldt $u(n) > 1000$.

n	0	1	2	3	4
$u(n)$	1	...	...	...	...

20 Stel bij de rijen een directe formule op.

a $u_{n+1} = \frac{2}{3} \cdot u_n$ met $u_0 = 6$

b $u_{n+1} = -2 \cdot u_n$ met $u_0 = 3$

c $u_{n+1} = u_n + 2,5$ met $u_6 = 10$

d 4, 9, 14, ... met $u(1) = 4$

e 8, 1, -6, ... met $u(0) = 8$

f 1, 2, 4, 8, ... met $u_1 = 1$

28 a Bereken $\sum_{k=1}^8 u(k)$ voor de rij $u(n) = 3n - 7$.

b Bereken $\sum_{k=4}^{30} (5k - 7)$.

29 a Bereken $25 + 32 + 39 + 46 + \dots + 172$.

b Bereken $33 + 29 + 25 + 21 + \dots + (-19)$.

c Bereken $\frac{3}{14} + \frac{5}{14} + \frac{7}{14} + \frac{9}{14} + \dots + 10\frac{11}{14}$.

31 Gegeven is de rij $u(n) = 7 - 3n$.
Bereken de termen $s(0)$ tot en met $s(4)$.

36 Bereken.

a $\sum_{k=1}^8 \left(\frac{2}{3}\right)^k$

b $\sum_{k=0}^9 (3 \cdot 0,8^k)$

c $\sum_{k=7}^{12} (5 \cdot 1,3^k)$

d $\sum_{k=3}^{14} (2 \cdot 1,01^k)$

37 Bereken de sommen.

a $2 + 6 + 18 + 54 + \dots + 4374$

b $168 + 84 + 42 + 21 + \dots + 0,164\,062\,5$

c $1\,679\,616 + 1\,119\,744 + 746\,496 + 497\,664 + \dots + 65\,536$

- 5** Een bioloog heeft van 1000 wormen vastgesteld dat de lengte in cm $\text{Norm}(6,1; 1,3)$ -verdeeld is.
- a Bereken hoeveel procent van de wormen een lengte heeft tussen de 5,0 cm en 6,0 cm.
 - b Hoeveel procent van deze wormen is korter dan 6,5 cm?
 - c Bereken de kans dat een willekeurige worm een lengte heeft van meer dan 6,0 cm.
 - d De bioloog pakt willekeurig vier wormen. Bereken de kans dat deze vier wormen allemaal een lengte hebben van meer dan 6,0 cm.
 - e Hoeveel wormen van de 1000 wormen hebben naar verwachting een lengte van meer dan 8,0 cm?
- 10** De duur in dagen van voldragen zwangerschappen is bij de mens $\text{Norm}(280, 12)$ -verdeeld.
- a Bereken de kans dat een zwangerschap minstens 275 dagen duurt.
 - b Hoelang kan een zwangerschap duren als zij behoort tot de 10% kortste voldragen zwangerschappen?
 - c Hoelang duurt een zwangerschap minimaal als zij behoort tot de 15% langste zwangerschappen?
- 12** In een 10 km lange veldloop is de tijd van de deelnemers in minuten $\text{Norm}(61,3; 9,7)$ -verdeeld.
- a Binnen hoeveel tijd finishten de 20% snelste deelnemers?
 - b Hoeveel minuten zijn de 10% langzaamste deelnemers minimaal onderweg geweest?
 - c Tussen welke tijdgrenzen zit de middelste 60% van de deelnemers?
 - d Een verslaggever interviewt willekeurig vijf deelnemers. Bereken de kans dat elk van deze vijf deelnemers minder dan 65 minuten over de veldloop hebben gedaan.
- 17** De lengte van de songs in de popmuziek die in een jaar worden uitgebracht blijkt redelijk normaal verdeeld.
- a In 2000 was het gemiddelde 242 seconden. Bereken de standaardafwijking als je weet dat 22% van de songs minder dan 220 seconden duurden.
 - b De lengte van de songs in 1992 had een groot gemiddelde en een grote spreiding. De standaardafwijking was 33 seconden en 67% van de songs duurde minstens vier minuten. Bereken de gemiddelde lengte van een song uit 1992.
 - c In de jaren zestig waren de songs veel korter. De middelste 50% van de in 1965 uitgebrachte songs hadden een lengte tussen de 150 seconden en 172 seconden. Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van de lengte van de songs.

- 18** Elk jaar laat de natuurkunde docent een proef uitvoeren waarbij de vwo 6 leerlingen hun reactiesnelheid moeten meten. Elk jaar blijkt de reactietijd normaal verdeeld.

a In 2018 hadden 86 van de 113 leerlingen een reactietijd van minder dan 0,9 seconden. De gemiddelde reactietijd was 0,83 seconden.

Bereken de standaardafwijking van de reactietijd.

b In 2019 had 12% van de vwo 6 leerlingen een reactietijd van meer dan 1,0 seconden en was de standaardafwijking van de reactietijd 0,106 seconden.

Bereken de gemiddelde reactietijd.



- 22** Het aantal parkeerboetes dat in Zwolle per dag wordt uitgeschreven, is bij benadering $\text{Norm}(41,8; 7,1)$ -verdeeld. Bereken in vier decimalen.

a $P(35 < X < 50)$

d $P(X \geq 42)$

b $P(X \leq 55)$

e $P(X = 43)$

c $P(40 \leq X \leq 45)$

f $P(41 \leq X < 43)$

- 25** Een hobbywinkel verkoopt kraaltjes in doosjes. Het aantal kraaltjes in een doosje is normaal verdeeld. Een doosje bevat gemiddeld 26,1 kraaltjes met een standaardafwijking van 4,7 kraaltjes.

a Jo koopt een willekeurig doosje kraaltjes.

Bereken de kans dat Jo tussen de 25 kraaltjes en 35 kraaltjes heeft.

b Hoeveel doosjes met tussen de 25 kraaltjes en 35 kraaltjes heb je naar verwachting bij het kopen van 25 willekeurige doosjes?

c De stochast T is het totaal aantal kraaltjes bij het kopen van 25 willekeurige doosjes.

Bereken $E(T)$ en $\sigma(T)$.

d Bereken de kans dat het totaal aantal kraaltjes in de 25 doosjes meer dan 600 is.

4 Schrijf in de functies in de vorm $f(x) = b \cdot x^a$.

a $f(x) = \frac{x^8 \cdot x^{0,9}}{4x^{6,3}}$

d $f(x) = (\sqrt[4]{x})^2$

b $f(x) = x^{-2} \cdot \sqrt[5]{x}$

c $f(x) = 3\sqrt{x} \cdot 7\sqrt[3]{x}$

5 Herleid de formules tot de vorm $N = a \cdot t^b$.

a $N = (2t)^3 \cdot 3t^{\frac{1}{3}}$

c $N = (16t^7)^{-0,25} \cdot (3t)^2$

b $N = (32t^4)^{-\frac{1}{5}}$

d $N = (\sqrt{5} \cdot t^{-3,7})^{-2}$

8 Gegeven is telkens een verband tussen q en P .

Schrijf P in de vorm $P = a \cdot q^b$. Rond a en b indien nodig af op drie decimalen.

a $q = 3 \cdot P^{0,2}$

c $q = 5 \cdot \sqrt{P}$

b $q = 1,2 \cdot \sqrt[4]{P}$

d $q = 8,2 \cdot P^{2,3}$

13 Differentieer.

a $f(x) = x^{0,7}$

c $f(x) = 0,7x^3 - 2,3x^2 + 11$

b $f(x) = x^{1,23} + x^{-1,23}$

d $f(x) = 1,7x^{0,7} - \sqrt{3}$

15 Differentieer. Schrijf je antwoorden zonder negatieve en gebroken exponenten.

a $W(t) = 6\sqrt[3]{t} \cdot t^2$

d $GW = (\frac{1}{2}q)^3 + q^2\sqrt{q}$

b $N(p) = p^3 + \frac{2}{p^2}$

e $V = -m^4 + \frac{3}{m^2}$

c $K(n) = \frac{2n^3 - 2n}{n^2}$

f $S = \frac{x^2 - x}{\sqrt{x}}$

20 **a** Gegeven zijn de schakels $y = 2^u$ en $u = 2t - 3$.

Stel een formule op waarbij y uitgedrukt is in t .

b De functie $g(t)$ ontstaat uit de schakels $y = 2u - 3$ en $u = 2^t$.

Stel het functievoorschrift $g(t)$ op.

21 De functies $f(x) = \sqrt{2x^2 - 7}$ en $g(x) = (x^3 - 4)^5$ zijn beide samengesteld uit twee schakels.

a Schrijf de schakels op waaruit de functie f is samengesteld.

b Uit welke schakels is de functie g samengesteld?

27 Geef de afgeleide $\frac{dy}{dx}$

a $y = (x^2 - 5)^3$

c $y = (x^3 - 2x^2 + 6x)^4$

b $y = \frac{1}{6}(4x^3 - 3)^{\frac{1}{2}}$

d $y = 1,25(2 - 3x^2)^{-4}$

30 Differentieer.

a $f(x) = \sqrt{3x - 7}$

c $h(x) = \sqrt{2x^4 - 3}$

b $g(x) = \sqrt{(6 - 5x)^4}$

d $j(x) = 4\sqrt{1 - x^2}$

34 Differentieer.

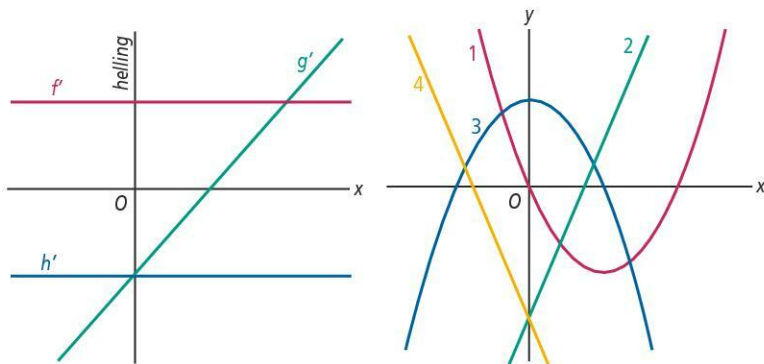
a $f(x) = -\frac{1}{x^2 + 1}$

c $h(x) = \frac{11}{(3x - 6)^3}$

b $i(x) = \frac{5}{\sqrt{7 - 3x}}$

d $k(x) = \frac{-6}{x^3 - 3x^2}$

40 Je ziet een schets van de grafieken van de afgeleide functies f' , g' en h' . Daarnaast staan de grafieken van de bijbehorende functies f , g en h en de grafiek van een functie j .



- Wat kun je uit de grafiek van f' afleiden over het stijgen of dalen van de grafiek van functie f ?
- Wat kun je uit de grafiek van g' afleiden over het stijgen of dalen van de grafiek van functie g ?
- Welke grafiek uit het rechterplaatje hoort bij f ? Welke hoort bij g ? En welke bij h ?
- Maak een schets van de afgeleide van functie j .

- 3** Veel jongeren die hun eindexamen hebben gehaald, gaan op examenreis naar het buitenland. Roel beweert dat zo'n 60% van deze jongeren kiest voor een bestemming in Spanje. Harry denkt dat dit percentage lager ligt. Ze besluiten een onderzoek te doen. Van 40 leerlingen die op examenreis gaan, noteren ze hoeveel er kiezen voor een bestemming in Spanje.

- Geef aan wat de toetsingsgrootheid X , H_0 en H_1 zijn.
- Welke kansverdeling heeft X als je aanneemt dat de nulhypothese klopt?
- Leg uit dat de bewering van Roel zal worden verworpen bij een klein aantal leerlingen dat voor een bestemming in Spanje kiest.
- Roel en Harry spreken van te voren af dat Roel gelijk krijgt als minimaal 21 leerlingen voor een bestemming in Spanje kiezen. Bij 20 of minder krijgt Harry gelijk. Ga ervan uit dat Roel gelijk heeft.

Ga na dat de kans dat Harry ten onrechte gelijk krijgt 0,1298 is.

- Leg uit of deze kans juist groter of kleiner wordt als de grens bij 18 komt te liggen.



- 9** Janet heeft een dobbelsteen waarvan ze vermoedt dat ze minder vaak dan je zou verwachten zes ogen gooit. Ze gooit daarom 100 keer met de dobbelsteen en telt hoe vaak ze zes ogen gooit. Ze wil dat de kans op een fout van de eerste soort zo dicht mogelijk bij 0,1 ligt, maar niet hoger dan 0,1 is. Bij welke aantallen zes ogen zal Janet de dobbelsteen als 'oneerlijk' bestempelen?

- 13** In een plattelandsgemeente wordt elke maand een huis-aan-huis blad rondgebracht met nieuws uit alle dorpen en met mededelingen vanuit de gemeenteraad en het college van burgemeester en wethouders. De gemeenteraad beweert dat slechts 22% van de inwoners deze mededelingen daadwerkelijk leest. De redactie van het huis-aan-huis blad beweert echter dat dit percentage hoger ligt. Daarom wordt er een steekproef genomen onder 200 inwoners en wordt gekeken hoeveel inwoners de mededelingen lezen. Neem $\alpha = 0,05$ en bereken bij welke aantallen inwoners die de mededelingen lezen de bewering van de gemeenteraad in twijfel zal worden getrokken.

- 20** De tijd die iemand onder de douche staat verschilt behoorlijk van persoon tot persoon. In een landelijk onderzoek is gebleken dat de tijd die mensen tussen 30 en 50 jaar oud onder de douche staan normaal verdeeld is met gemiddeld 8,4 minuten en een standaardafwijking van 1,9 minuten.

Een milieuorganisatie vermoedt dat haar leden in alles rekening houden met de gevolgen voor het milieu en dat ze dus ook korter douchen. Om dit vermoeden te onderbouwen, doen ze een onderzoek onder 400 leden tussen 30 en 50 jaar oud. De uitslag van het onderzoek is dat de gemiddelde duur van een douchebeurt 8,1 minuten is.

- a Geef de toetsingsgrootte, de nulhypothese en de alternatieve hypothese.
- b Neem $\alpha = 0,05$ en ga na of het steekproefresultaat aanleiding geeft om te veronderstellen de leden van de milieuorganisatie korter onder de douche staan.

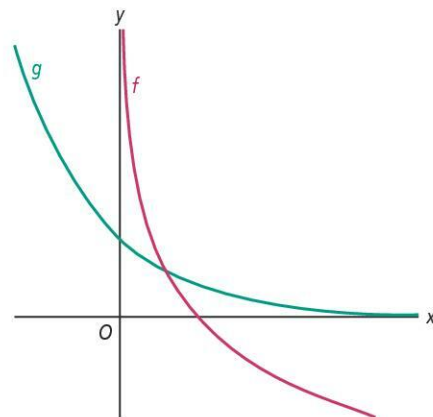


- 24** In Nederland is het percentage huishoudens met minimaal één huisdier gelijk aan 59%. Een Belg vermoedt dat dit percentage in België hoger ligt en neemt een steekproef van 2000 huishoudens van België. In 1269 van de huishoudens is minimaal één huisdier aanwezig.

Neem $\alpha = 0,1$ en ga na of dit steekproefresultaat voldoende aanleiding geeft om te veronderstellen dat het percentage huishoudens met minimaal één huisdier in België hoger ligt dan in Nederland.

- 30** Veel geneesmiddelen hebben bijwerkingen. Van een nieuw geneesmiddel tegen reumatoïde artritis moet worden vastgesteld of het de zuurgraad van het bloed beïnvloedt. Bekend is dat de zuurgraad in pH van volwassenen normaal verdeeld is met een gemiddelde van 7,4 en een standaardafwijking van 1,7. In een studie krijgen 30 patiënten met artritis gedurende drie maanden het nieuwe geneesmiddel voorgeschreven. Aan het eind van de drie maanden blijkt de gemiddelde zuurgraad van het bloed van de deelnemers 8,0 te zijn. Neem aan dat de standaardafwijking nog steeds 1,7 is. Geeft deze uitslag bij een significantieniveau van 5% voldoende aanleiding om te veronderstellen dat het geneesmiddel de zuurgraad van het bloed niet verandert?

- 1 Leg bij elk van de volgende logaritmen uit of je deze kunt berekenen zonder je rekenmachine te gebruiken. Licht je antwoorden toe.
 - a ${}^2\log(8)$
 - b ${}^5\log(625)$
 - c ${}^6\log(12)$
 - d $\sqrt{x}\log(x)$
- 2 Los op. Geef je antwoord met een logaritme en geef een benadering in drie decimalen.
 - a $4^{2x} = 7$
 - b $8 \cdot 0,6^{t+5} = 20$
- 3 Schrijf als één logaritme.
 - a ${}^4\log(8) + {}^4\log(3) - 2$
 - b ${}^7\log(12) - {}^7\log(4) + 2 \cdot {}^7\log(5)$
 - c ${}^2\log(d) - {}^2\log({}^3\log(81)) + 2 \cdot {}^2\log(2d)$
- 4 Iemand zet € 1.000,- op een spaarrekening bij een bank. Deze bank betaalt 1,1% rente per jaar. Het spaarbedrag groeit daardoor exponentieel.
 - a Stel een formule op die het verband weergeeft tussen het spaarbedrag B in euro's en de tijd t in jaren.
 - b Bereken hoelang het duurt totdat het spaarbedrag is verdubbeld.
- 5 Gegeven zijn de grafieken van de functies f en g . Bij f hoort het functievoorschrift $f(x) = {}^{0,4}\log(x)$.
 - a Laat met een berekening zien dat het punt $(6\frac{1}{4}, -2)$ op de grafiek van f ligt.
 - b Waarom is de grafiek van f dalend?
 - c De grafieken van f en g zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.
Stel een functievoorschrift op van g .
 - d Geef vergelijkingen van de asymptoten van de grafieken van f en g .



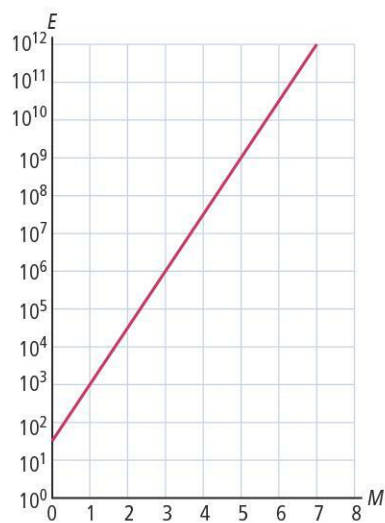
6 Druk t uit in N .

- a $N = 5^{t+3}$
- b $N = 4 \cdot 16^{0,2t}$
- c $N = 3 \cdot 2^{2t-1}$
- d $N = 1,2^t - 3$

7 De sterkte van een aardbeving volgens de schaal van Richter, noemt men de magnitude M van een aardbeving. Deze magnitude is een maat voor de hoeveelheid energie die bij een aardbeving vrijkomt.

Het verband tussen de vrijkomende hoeveelheid energie E in kilojoules en de magnitude M volgens de schaal van Richter wordt gegeven door de formule $E = 25 \cdot 32^M$.

- a Bereken hoeveel kilojoule energie vrijkwam bij een aardbeving in de buurt van Helling (Noordoost-Groningen) in september 2015, die een magnitude had van $M = 3,1$.
- b Bij de aardbeving in Japan van 2011 kwam $8,8 \cdot 10^{14}$ kilojoule aan energie vrij. Bereken de magnitude M van deze aardbeving.
- c De grafiek van de gegeven formule heeft op de verticale as een logaritmische schaalverdeling. Lees af bij welke magnitude er $6 \cdot 10^9$ kilojoule vrijkomt. Leg uit hoe je dit doet.



8 Als gevolg van de aardbeving in Japan was er een tsunami. Deze leidde tot grote problemen in de kerncentrale van Fukushima. Een kernramp volgde en er kwam radioactief materiaal vrij, onder andere jodium-131 en cesium-137. De halfwaardetijd van jodium-131 is 8 dagen en die van cesium-137 is 30 jaar.

- a Bereken voor beide elementen hoelang het duurt totdat de radioactiviteit is teruggebracht tot 5%.
- b Stel dat het gebied als veilig wordt beschouwd als de radioactiviteit is teruggebracht tot 0,1%. Hoeveel keer langer duurt dit bij cesium-137 dan bij jodium-131? Rond je antwoord af op tientallen.

- 1** In een grote partij USB-sticks is 3% onbruikbaar. Een handelaar neemt een steekproef ter grootte van tien. Stochast X is het aantal onbruikbare USB-sticks in de steekproef.
- Leg uit dat stochast X binomiaal verdeeld is en geef de waarden van n en p .
 - Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat in de steekproef van tien USB-sticks er één of meer onbruikbaar zijn.
 - Hoe groot is de kans dat in een partij van 100 USB-sticks er meer dan 10 onbruikbaar zijn? Rond je antwoord af op vier decimalen.



In een doos zitten 1000 USB-sticks.

Een bedrijf wil voor een reclameactie meerdere dozen inslaan. Ga ervan uit dat in elke doos met 1000 USB-sticks er 40 onbruikbaar zijn. Voor de controle of een doos goed genoeg is voor de reclameactie neemt het bedrijf bij iedere doos een steekproef ter grootte van 20. Als er in deze steekproef drie of meer onbruikbaar zijn, dan wordt de hele doos met USB-sticks afgekeurd.

De kans dat een doos wordt afgekeurd is ongeveer 0,02.

- Bereken deze kans in vier decimalen.
 - Het bedrijf bestelt 10 dozen.
Bereken de kans dat deze 10 dozen allemaal goedgekeurd worden. Geef je antwoord in hele procenten.
- 2** Lieke heeft een zak met 10 droptoffees en 10 karameltoffees. Ze neemt zonder terugleggen vier keer een toffee uit de zak.
- Leg uit of het aantal droptoffees dat ze pakt binomiaal verdeeld is.
 - Bereken de kans op twee droptoffees.
 - Amaya heeft een bak met 200 toffees, waarvan 10 droptoffees. Arie pakt willekeurig vier toffees. Stochast X is het aantal droptoffees.
Leg uit dat je de kansverdeling van X goed kunt benaderen met een binomiale verdeling.
 - Vul in de tabel de binomiale benadering van de kansen in.

u	0	1	2	3	4
$P(X = u)$	...	...	...	...	...

- 3** De stochast X is $\text{Bin}\left(100, \frac{2}{3}\right)$ -verdeeld.
Bereken in vier decimalen.
- a $P(X \leq 60)$
 - b $P(X > 60)$
 - c $P(50 \leq X < 70)$
 - d $P(X = 80)$
- 4** Mevrouw Huigenbosch, de docent van het vak M&O, geeft een multiplechoice proefwerk met 10 vierkeuzevragen.
- a Bereken de kans dat Phebe precies drie vragen goed heeft als ze alles gokt. Rond je antwoord af op vier decimalen.
 - b Bereken de kans dat Anne minstens zes vragen goed heeft als ze alles gokt. Rond je antwoord af op vier decimalen.
 - c Hoe groot is de verwachtingswaarde van het aantal goede antwoorden als je alle vragen gokt?
 - d Hoe groot is de standaardafwijking van het aantal goede antwoorden? Geef je antwoord in twee decimalen.
 - e Thom weet zeker dat hij de helft van alle vragen goed heeft. De andere helft gokt hij.
Bereken de kans dat Thom minstens zes vragen goed heeft. Rond je antwoord af op vier decimalen.
 - f Hoeveel van de tien vragen moet je zeker weten om te mogen verwachten dat je zeven vragen goed hebt?
- 5** In een bedrijf worden machinaal kilopakken rijst gevuld. Het minimaal toegestane gewicht van een pak rijst is 980 gram. Lichtere pakken worden machinaal verwijderd. Door een wat onzuivere afstelling van de sorteermachine wordt af en toe een te licht pak doorgelaten. Hierdoor heeft 0,5% van de pakken een lager gewicht dan toegestaan.
De pakken rijst worden verpakt in dozen van vijftig stuks.
- a Hoe groot is de kans dat een doos geen enkel te licht pak bevat? Rond je antwoord af op vier decimalen.
 - b Hoeveel te lichte pakken verwacht je in een doos? En hoe groot is de standaardafwijking?
 - c Als een keuringsdienst in een doos een te licht pak aantreft, wordt de gehele doos afgekeurd. Op een dag worden van twintig dozen alle pakken gecontroleerd. Van hoeveel dozen kun je verwachten dat ze worden afgekeurd?

- 1 Een rij getallen begint met 20, -10 , 5 , $-2\frac{1}{2}$, ...
 - a Leg uit of hier sprake kan zijn van een rekenkundige of meetkundige rij of geen van beide.
 - b Geef de twee termen van de rij volgend op $-2\frac{1}{2}$.
 - c Geef een recursieve formule die bij deze rij hoort.

- 2 Het aantal vissen in een natuurpark neemt jaarlijks met 15% toe. Elk najaar, na de toename, worden er 200 gevangen. In 2020 is het aantal vissen 1600.
 - a Bereken het aantal vissen in 2022.
 - b Geef een recursieve formule waarmee het aantal vissen $u(n)$ jaarlijks te berekenen is vanaf 2020.

- 3 Aan een sporttoernooi kunnen maximaal 40 000 mensen deelnemen. In 2000 zijn er 12 000 deelnemers. Het aantal deelnemers in de jaren na 2000 is te berekenen met de recursieve formule $A(t + 1) = 1,35 \cdot A(t) - 4000$ met $t = 0$ het jaar 2000.
 - a Bereken in welk jaar voor het eerst verwacht mag worden dat het maximale aantal deelnemers bereikt wordt.
 - b Na 2015 maakt de organisatie geen reclame meer voor het toernooi waardoor het aantal deelnemers terugloopt. In 2016 zijn er 38 000 deelnemers, in 2017 zijn er 35 900. Met de recursieve formule $A(t + 1) = a \cdot A(t) - 4000$ worden deze aantallen berekend nu met $t = 0$ het jaar 2016. Bereken de waarde van a .
 - c Bereken de waarde van a waarvoor geldt dat het aantal deelnemers na 2016 stabiel blijft.

- 4 Een stuiterbal wordt 1 meter boven de grond losgelaten. Na elke stuit verliest de bal 10% van zijn hoogte. De hoogten na elke stuit vormen de volgende rij getallen: 90, 81, ... met de hoogten in centimeters.
 - a Geef bij deze rij een recursieve formule en een directe formule met $u(0) = 100$.
 - b Bereken de afstand die de stuiterbal heeft afgelegd vanaf het moment dat hij losgelaten wordt tot het moment dat hij de tiende keer de grond raakt. Rond af op hele meters.

- 5** Gegeven is de rij u met recursieve formule $u(n+1) = 450 - 0,8 \cdot u(n)$ met $u(0) = 500$.
- Bereken $u(1)$ tot en met $u(4)$.
 - Plot de grafiek van de rij u .
 - Naar welke waarde nadert de waarde van $u(n)$ als n heel groot wordt? Licht je werkwijze toe.
- 6** Gegeven is de rekenkundige rij $u_n = 3n + 1$.
- Bereken $\sum_{k=10}^{30} u_k$.
 - De rij s is de somrij van de rij u .
Bereken $s_{500} - s_{499}$
 - Stel een directe formule op voor de rij s .
- 7** In 2008 was de overheidssubsidie voor recreatie en cultuur nog zes miljoen euro. Jaarlijks krimpt de subsidie met een zesde deel van het subsidiebedrag in het voorafgaande jaar. In 2009 was de subsidie dus nog vijf miljoen euro, enzovoort. De subsidiebedragen vormen zo een meetkundige rij met de recursieve formule $u(n) = \frac{5}{6} \cdot u(n-1)$ met $u(0) = 6$ in het jaar 2008.
- Geef van deze rij een directe formule met $u(n)$ in miljoenen euro.
 - Vanaf welk jaar zal de subsidie minder dan 100 000 euro bedragen?
 - Bereken hoeveel subsidie er in de jaren 2008 tot en met 2014 in totaal is uitgegeven aan recreatie en cultuur.
 - De rij s is de somrij van de rij u .
Stel een directe formule op voor de rij s .
 - Bereken vanaf welk jaar de totale subsidie die sinds 2008 is uitgekeerd voor het eerst de 30 miljoen euro overschrijdt.
- 8** De rij s is de somrij van een rekenkundige rij u .
De rij s heeft als directe formule $s(n) = n^2 + 10n + 9$.
- Bereken $u(3)$.
 - Stel een recursieve formule op voor de rij u .

- 1** Een chocoladefabriek maakt pindarotsjes. Het gewicht van de geproduceerde pindarotsjes is normaal verdeeld met een gemiddelde van 20 gram en een standaardafwijking van 2,5 gram.

Alleen de rotsjes die een gewicht hebben tussen 18 gram en 22 gram zijn geschikt voor de verkoop. De rotsjes worden verpakt in doosjes van verschillende formaten. Zonder verdere maatregelen komen er rotsjes die ongeschikt zijn voor de verkoop in zo'n doos terecht.

- a Bereken hoeveel procent van de pindarotsjes ten onrechte terecht komt in een doos voor de verkoop.
- b De fabriek heeft een sorteermachine aangeschaft met de bedoeling om te kleine en te grote pindarotsjes uit de productie te verwijderen. Het gemiddelde gewicht van de pindarotsjes die worden doorgelaten is 20 gram met een standaardafwijking van 1,5 gram.
Bereken de kans dat een doosje waarin tien pindarotsjes worden verpakt een vulgewicht heeft van minder dan 190 gram.

De chocoladefabriek krijgt ondanks het inzetten van de sorteermachine toch nog klachten van klanten. Deze klanten klagen over teveel te kleine pindarotsjes in een doos. De technische dienst van de chocoladefabriek besluit daarop het gemiddelde van de sorteermachine te verhogen. De standaardafwijking blijft 1,5 gram.

- c Op welk gemiddelde moet de sorteermachine worden ingesteld zodat het percentage pindarotsjes dat eigenlijk te klein is, lager is dan 1%?
- d De chocoladefabriek kan een betere sorteermachine kopen waarmee je een kleinere standaardafwijking krijgt. De chocoladefabriek wil beslist dat het gemiddelde van hun pindarotsjes op 20 gram blijft. Welke standaardafwijking moeten zij vragen zodat minimaal 97% van de pindarotsjes een gewicht heeft van meer dan 18 gram?

- 2** De Maremmen Berghond van Marlies is zwanger. Het aantal puppy's dat bij een Maremmen Berghond geboren wordt, is $\text{Norm}(6,6; 2,6)$ -verdeeld.

- a Bereken de kans dat de hond van Marloes minder dan 4 puppy's krijgt.
- b Bereken de kans dat deze hond minstens vier maar hoogstens acht puppy's krijgt.
- c Bereken de kans op precies vijf puppy's.



- 3** De trainingstijden van John bij tien kilometer hardlopen zijn normaal verdeeld met een gemiddelde van 41 minuten en een standaardafwijking van 53 seconden.
- a** Bereken hoeveel procent van de trainingstijden van John onder de 40 minuten liggen.
 - b** Binnen welke tijd liggen zijn 30% snelste trainingstijden?
 - c** Binnen welke grenzen liggen zijn middelste 60% trainingstijden?
- 4** In de koffiekamer van een bedrijf staat een automaat waaruit diverse warme dranken getapt kunnen worden. Voor elke soort drank geldt dat de geleverde hoeveelheid normaal verdeeld is, maar gemiddelde en standaardafwijking hangen af van de gekozen drank.
- a** Voor espresso geldt dat de gemiddelde hoeveelheid 42 mL is met een standaardafwijking van 3,3 mL. Bereken de kans dat een kopje espresso tussen de 35 mL en 45 mL bevat.
 - b** De gemiddelde hoeveelheid koffie is 121 mL. De gebruikte kopjes hebben een inhoud van 135 mL. De leverancier van de automaat garandeert dat in minder dan 0,1% van de gevallen er zoveel koffie wordt geleverd dat het kopje overstroomt. Bereken hoe groot de standaardafwijking hoogstens is.
 - c** De automaat levert gemiddeld 119 mL chocolademelk met een standaardafwijking van 4,1 mL. Sjaak gebruikt altijd zijn eigen mok met een inhoud van 260 mL om chocolademelk te tappen. Omdat de mok groot genoeg is, tapt hij per keer twee porties. Bereken de kans dat Sjaak hoogstens 230 mL chocolademelk krijgt.
- 5** De inhoud van potjes jam is normaal verdeeld met een gemiddelde van 350 gram en een standaardafwijking van 20 gram. De potjes zelf hebben een gemiddeld gewicht van 240 gram met een standaardafwijking van 10 gram.
- a** Bereken het gemiddelde gewicht van een potje met jam.
 - b** Bereken ook de bijbehorende standaardafwijking.
 - c** Bereken de kans dat een potje jam een totaal gewicht heeft van meer dan 600 gram.
 - d** Bereken de kans dat in een doos van 12 potjes jam geen enkel gevuld potje meer weegt dan 600 gram.
 - e** Bereken de kans dat alle 12 gevulde potjes samen meer wegen dan 7,3 kg.



1 Schrijf de functies in de vorm $f(x) = a \cdot x^n$.

a $f(x) = (4x^3)^2 \cdot (2x^{0,5} \cdot x^{-0,7})^5$

b $f(x) = \frac{3x^4 \cdot 4x^3}{(2x^4)^3}$

c $f(x) = 4x^{\frac{1}{6}} \cdot (3\sqrt[3]{x^2})^2$

d $f(x) = (x^{-0,36})^{0,4} \cdot (-2\sqrt[3]{x^{2,2}})^2$

2 Gegeven zijn de functies $k(x) = 4x + \frac{1}{x}$ en $m(x) = 2(x - 1) - \sqrt{x}$.

a Bereken met behulp van het functievoorschrift van k' voor welke waarden van x de grafiek van k stijgt.

b Bereken met behulp van het functievoorschrift van m' het minimum van m .

3 Na het inschenken van een kop thee koelt deze weer af. Je kunt de temperatuur van de afkoelende thee benaderen

met de formule $C = \frac{4,5t + 180}{0,25t + 2,25}$

Hierin is C de temperatuur van de thee in graden Celsius, en is t het aantal minuten vanaf het moment van inschenken.

a Welke temperatuur had de thee toen deze ingeschonken werd?

b Bereken in één decimaal na hoeveel minuten de thee is afgekoeld tot 40 graden Celsius.

c De grafiek van C heeft een horizontale asymptoot. Geef de formule van deze horizontale asymptoot.

d Wat is in deze situatie de betekenis van deze horizontale asymptoot?

4 Gegeven is de grafiek van de functie $h(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 1$ op het interval $[-1, 4]$.

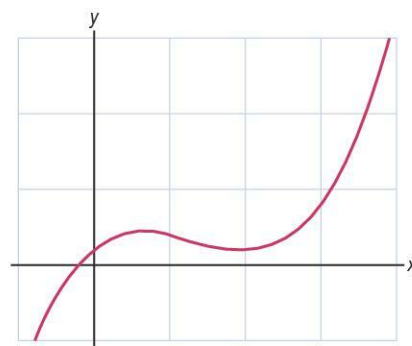
Bereken met behulp van het functievoorschrift van h' op welk interval:

a de grafiek van h toenemend stijgt;

b de grafiek van h afnemend stijgt;

c de grafiek van h afnemend daalt;

d de grafiek van h toenemend daalt.



5 Differentieer de functies.

a $f(x) = -\frac{2}{3} \cdot x^{1,5}$

b $g(x) = 2 \cdot x^{3,1} \cdot (x^2)^{0,25}$

c $p(a) = (2 + 5\sqrt{a})^4$

d $q(b) = \frac{10}{7b^3 + 5}$

e $r(c) = c^2 + c - 2\sqrt{2c + 1}$

6 Je ziet een glas met daarin een kaars.

De formule die bij benadering het verband beschrijft tussen de hoogte h in cm van de kaars en de diameter d van de bovenkant van de kaars, ook in cm, luidt $h = 15 - \frac{60}{d}$

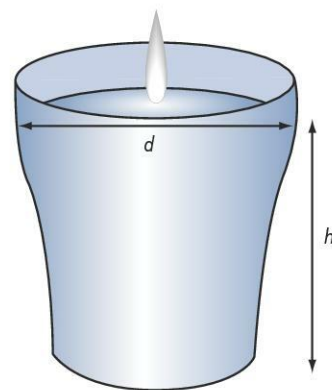
Het verband tussen de diameter d in cm van de bovenkant van de kaars en de brandtijd t in uren van de kaars wordt gegeven door de formule $d = 6 - \sqrt{0,4 \cdot t}$.

a Welke waarden kan de diameter aannemen?

b De formules h en d vormen de schakels van een kettingfunctie met een formule waarbij h wordt uitgedrukt in t .

Geef de formule van h .

c Bereken met behulp van het antwoord van opdracht b hoeveel cm per uur de hoogte van de kaars afneemt op tijdstip $t = 2$.



7 De inhoud V van een sinaasappel hangt af van de diameter d volgens de formule $V = \frac{1}{6}\pi d^3$. Hierin is V in cm^3 en d in cm. De diameter van een sinaasappel groeit volgens de formule $d = 1,10t$ met d in cm en t in maanden, met $0 \leq t \leq 9$.

a Bereken de inhoud van een sinaasappel van 5 maanden.

b Bereken met behulp van differentiëren met hoeveel cm^3 per maand de inhoud van een sinaasappel groeit op $t = 4$.

c De lengte l in cm van de bladeren van een sinaasappelboom hangt af van de leeftijd t in maanden

volgens de formule $l = 2t^{\frac{2}{3}}$ met $0 \leq t \leq 9$.

Bereken met behulp van differentiëren de snelheid waarmee de bladlengte l toeneemt op tijdstip $t = 5$.

d Aan een sinaasappelboom zitten op een zeker moment bladeren van 8 cm lang.

Bereken met hoeveel cm^3 per maand de inhoud van een sinaasappel op dat moment toeneemt.



- 1 Een winkelketen organiseert een actie met krasloten. De directie beweert dat op 30% van de loten een prijs valt. Onderzoekers twijfelen hieraan gezien de vele klachten die ze hierover hebben gekregen. Zij veronderstellen dat minder dan 30% van de loten een prijs oplevert. Om na te gaan of de bewering van de directie van de winkelketen kan worden verworpen, wordt een steekproef van 200 krasloten genomen.
 - a Wat is de toetsingsgrootheid?
 - b Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese.
 - c Welke kansverdeling heeft de toetsingsgrootheid als de directie gelijk heeft en wat zijn de parameters van deze verdeling?
 - d Er wordt afgesproken dat de nulhypothese wordt verworpen als op minder dan 50 van de loten in de steekproef een prijs valt. Bereken de kans op een fout van de eerste soort.

- 2 Uit onderzoek is gebleken dat het marktaandeel van het wasmiddel HagelWit zo'n 21% is. Om het marktaandeel te verhogen wordt een intensieve reclamecampagne gevoerd. Om na te gaan of het aantal mensen dat HagelWit gebruikt is toegenomen, worden na de campagne 100 mensen bevraagd. Hiervan blijken 26 met HagelWit te wassen.
 - a Geef aan wat in deze situatie X , H_0 en H_1 zijn.
 - b Bereken het kritieke gebied bij een significantieniveau van 10% en onderzoek of de nulhypothese wel of niet wordt verworpen.
 - c In een parallel onderzoek door een onderzoeksbureau worden 1000 mensen ondervraagd. Nu zijn er 241 gebruikers van het wasmiddel HagelWit. Neem als significantieniveau 2% en onderzoek weer of er sprake is van een toegenomen gebruik van HagelWit.

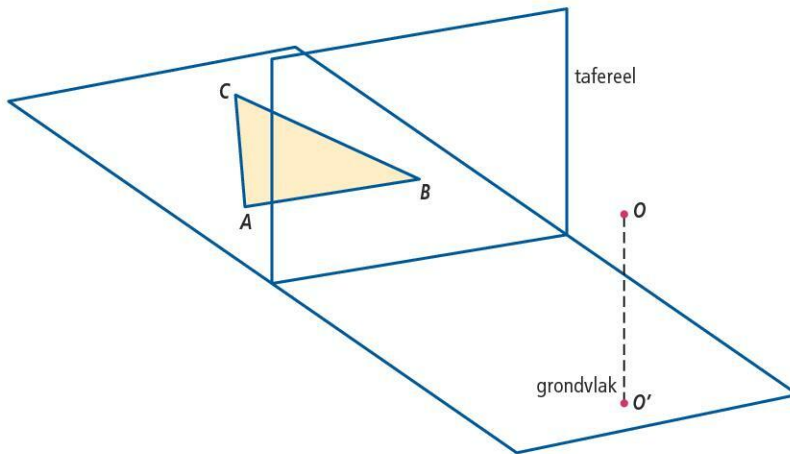
- 3 Onderzoeken in andere landen laten zien dat daar meisjes beter op wiskunde scoren als ze wiskunde onderwijs krijgen in groepen zonder jongens. Een school wil een experiment doen waarbij meisjes in aparte klassen wiskunde krijgen. Voordat de meisjes apart wiskunde kregen, was de score van de meisjes op het proefwerk over het onderwerp 'normale verdelingen' normaal verdeeld met een gemiddelde van 6,9 en een standaardafwijking van 1,2. Dit jaar was in een klas van 25 meisjes die apart les kregen, het gemiddelde cijfer voor het proefwerk over dit onderwerp een 7,1. Is deze uitslag bij een significantieniveau van 5% voldoende aanleiding om te veronderstellen dat meisjes beter presteren op wiskunde als ze apart les krijgen?

- 4** In Nederland woont 30% van de mensen in steden van 100 000 of meer inwoners. Een onderzoekster van het Openbaar Ministerie denkt dat in verhouding inwoners van steden met meer dan 100 000 inwoners vaker betrokken zijn bij criminele handelingen dan inwoners uit kleinere plaatsen. Een maand lang verzamelt zij gegevens bij een rechtbank. Dat levert het volgende resultaat:
532 veroordelingen voor criminele activiteiten, waarvan 173 door inwoners van steden met meer dan 100 000 inwoners.
- a** Formuleer de statistische toets.
 - b** Onderzoek bij een significantieniveau van 5% of de onderzoekster gelijk krijgt.
- 5** Op potjes jam staat dat de inhoud 450 gram is. De vulmachine levert potjes jam waarvan de inhoud normaal verdeeld is met standaarddeviatie 5 gram. De vulmachine moet zo zijn afgesteld dat het gemiddelde vulgewicht 453 gram is.
Regelmatig wordt een steekproef van 50 potjes genomen om te kijken of de machine nog goed is afgesteld. Als het gemiddelde van de steekproef te sterk afwijkt van 453, dan wordt de productie stopgezet en wordt de machine opnieuw afgesteld. Dit stilleggen van de productie is duur en moet dus alleen gebeuren als dat echt nodig is.
- a** Leg uit dat dit een tweezijdig toetsingsprobleem is.
 - b** Formuleer het toetsingsprobleem.
 - c** Bereken bij $\alpha = 0,05$ het kritieke gebied.
- 6** Elk jaar kunnen scholieren bij het LAKS klachten indienen over examens. Dat kan zowel gaan over de inhoud van het examen als over het verloop ervan.
Volgens de examencommissie vond 25% van de leerlingen het examen vwo Nederlands veel te moeilijk. Volgens het LAKS (Landelijk Aktie Komitee Scholieren) was dit echter hoger, maar volgens de vereniging Levende Talen (voor docenten Nederlands) was het percentage juist lager.
Er wordt een steekproef gehouden onder 900 leerlingen die deelnamen aan dat examen vwo Nederlands.
- a** Hoeveel leerlingen in de steekproef moeten het examen veel te moeilijk hebben gevonden, opdat het LAKS gelijk krijgt? Neem een significantieniveau van 10%.
 - b** Uit de steekproef blijkt dat 202 leerlingen het examen te moeilijk vond.
Wie krijgt er gelijk? Neem $\alpha = 0,05$.

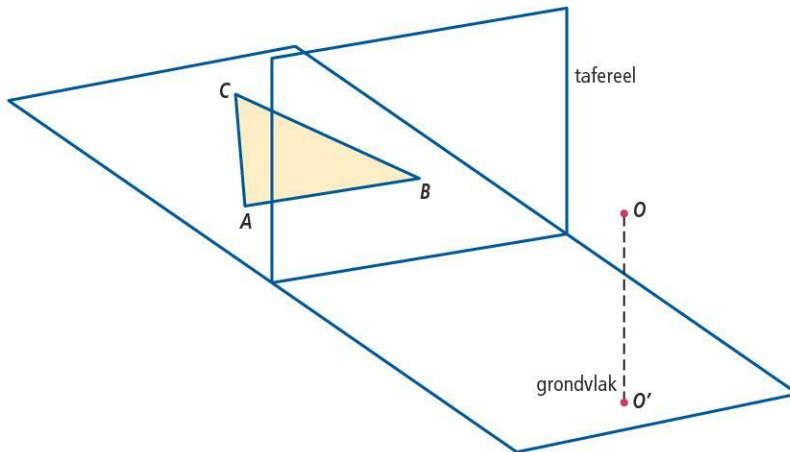


Keuzehoofdstuk Perspectief

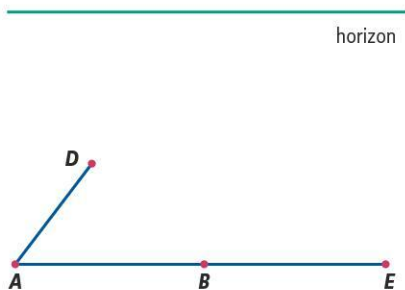
6



7

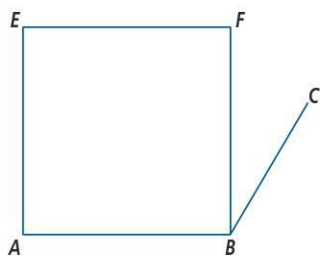


14

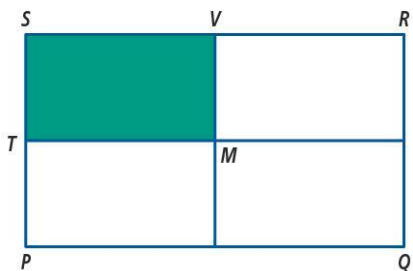
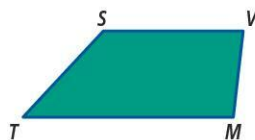


19

horizon



22



23



- A** afgeleide functie 153
afgeleide van een machtsfunctie 159
alternatieve hypothese 198
- B** beeld 234
beginhoeveelheid 83
beginterm 85
binomiale toets 214
binomiale verdeling 55
- C** centrale projectie 234
centrale punt 234
continuïteitscorrectie 137
cumulatieve kans 62
- D** differentiequotiënt 152
differentiëren 153
directe formule 92
- E** eenpuntperspectief 238
exponentieel verband 83
- F** fout van de eerste soort 202
fout van de tweede soort 202
- G** gebroken functie differentiëren 170
gemiddelde berekenen bij normale verdeling 133
grafieken van een logaritmische functie 20
grenswaarde berekenen bij normale verdeling 129
groefactor 83
groefactor per tijdseenheid 9
- H** halveringstijd 16
helling in een punt 152
hoofdrichtingen 238
horizon 238
- K** kansverdeling 52
kettingfunctie 163
kettingfunctie differentiëren 167
kettingregel 167
kritieke gebied 207
- L** lineair verband 82
logaritme 11
logaritmische schaal 31
- M** machtsfunctie 155
meetkundige rij 93
- N** nulhypothese 198
- O** oog 234
oogpunt 234
overschrijdingskans 210
- P** parameters van een binomiale verdeling 55
percentage berekenen bij normale verdeling 125
perspectieftekening 237
- R** raaklijn 152
rangnummer 85
recursie 85
recursieve formule 85
reden 93
rekenkundige rij 93
rekenregels voor logaritmen 22
rekenregels voor stochasten 122
richtingscoëfficiënt 82
rij 84
- S** samengestelde functie 163
significantieniveau 207
somrij 98
som van een meetkundige rij 101
som van een rekenkundige rij 97
som van termen 96
startgetal 82
standaardafwijking berekenen bij normale verdeling 133
standaardafwijking van een binomiale verdeling 67
statistische toets 198
stochast 52

- T** tafereel 234
tekening in eenpuntperspectief 240
tekenvlak 234
termen 84
toetsingsgrootheid 198
toets van het gemiddelde 211
toevalsvariabele 52
tweezijdige toets 218
- V** verdubbelingstijd 16
verdwijnpunt 237
verwachtingswaarde 52
verwachtingswaarde van een binomiale verdeling 67
- W** $\sqrt{n}$ -wet 123

Ontwerp omslag G2K Creative Agency, Groningen/Amsterdam

Fotografie omslag Getty Images

Ontwerp binnenwerk Ebel Kuipers grafisch ontwerp, Sappemeer (Paul Kooi en G2K Creative Agency, Groningen/Amsterdam)

Illustraties Peter Fitzverploegh, Utrecht

Technisch tekenwerk Integra Software Services, India

Beeldresearch Daliz, Den Haag

Fotoverantwoording

iStockphoto/ Getty Images, Amsterdam: p. 6- 7, 10, 13, 44- 45, 54, 68, 90, 114- 115, 163, 169, 188- 189, 216, 248- 249

Shutterstock, New York: p. 14, 16, 18, 22, 26, 28, 34, 35, 40, 60o, 64, 66, 69, 70, 72, 75, 79, 88, 94, 100, 104, 110, 111, 113, 120- 121, 124, 126, 128, 129, 132, 138, 139, 140, 147o, 154, 158, 162, 164, 166, 170, 172, 174, 177, 184, 187, 197, 200, 201, 204, 208, 210, 212, 213, 214, 217, 218, 219, 221, 222, 228, 229, 237, 244b, 254, 257, 261, 264, 268, 269, 271

Wikimedia Commons: p. 44

Moment/ Getty Images, Amsterdam: p. 50- 51, 232- 233

Dave de Bruin/ Daliz, Den Haag: p. 53, 58, 60b, 146, 147b, 198, 205, 206, 215, 230,

Yvonne Smits/ Nationale Beeldbank, Den Haag: p. 57

Actime, Helmond: p. 58

ANP/ Hans van Rhooen, Den Haag: p. 67

Julius Kielaitis/ Shutterstock.com: p. 71

Alamy/ Image Select, Wassenaar: p. 77, 114, 237r

TASS/ Getty Images, Amsterdam: p. 80- 81

Granger/ Image Select, Wassenaar: p. 87

Jensen/ Wikimedia Commons: p. 96

ANP/ Koen van Weel, Den Haag: p. 99

VanderWolf Images/ Shutterstock.com: p. 129

Examenblad.nl: p. 134

Karolis Kavolelis/ Shutterstock.com: p. 145

E+/ Getty Images, Amsterdam: p. 150- 151

Ron Sinkeldam, Hierden: p. 156

Geertrui Schaberg, Mildam: p. 176

US National Library of medicine, Bethesda: p. 188l

ANP/ Science Photo Library, Den Haag: p. 188r

Elly van de Merwe, Drijbe: p. 193

ANP/ Gino Press B.V., Den Haag: p. 194- 195

ANP/ Piroshka van de Wouw, Den Haag: p. 202

Steve Heap/ Shutterstock.com: p. 209

Hans Vredeman de Vries/ Wikimedia Commons: p. 233, 238, 246

AKG/Image Select, Wassenaar: p. 236, 243, 244

www.ikkrijgthuisonderwijs.nl/perspectief-tekenen: p. 237l

Jacqueline Bredenoord/ www.beterbijleren.nl: p. 237m

De geschiedenis van een stad/ Michiel Schrijver, Baarn: p. 245

Veja/ Shutterstock.com: p. 260

Met FLEX heb je:

Boeken die je mag houden

- elk schooljaar krijg je een nieuw boek
- dit boek mag je houden om in te markeren en te werken
- zo wordt je boek een effectief leermiddel

Een persoonlijke digitale leeromgeving

- waarin je wordt uitgedaagd om het beste uit jezelf te halen
- met oefentoetsen, interactieve opdrachten en feedback
- en met inzicht in je resultaten



Altijd actueel lesmateriaal

- actuele inhoud met opdrachten en toetsen
- zowel in je boek als digitaal
- aangevuld met nieuw lesmateriaal op basis van het nieuws en actualiteiten



Noordhoff



www.modernewiskunde.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-89198-5



9 789001 891985