

MODERNE WISKUNDE

A


$$w = \frac{L}{1 + (L - 1) \cdot g^t}$$



Noordhoff

Dit boek is van jou:

NAAM

KLAS

12e editie

Moderne Wiskunde

vwo A deel 4

Serieoverzicht Tweede Fase

	havo		vwo		
klas 4	A 1	B 1	AC 1		B 1
	A 2	B 2	AC 2		B 2
klas 5	A 3	B 3			
			A 3	C 3	B 3
klas 6			A 4	C 4	B 4

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleenen.

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 22

© 2022 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-89199-2

12e editie

Moderne Wiskunde

vwo A deel 4

Jeroen van den Boom

Bert Boon

Ferdi Doddema

Wim Doekes

Colin Roll

Geertrui Schaberg

Ron Sinkeldam

Carolijn Tacken

18 Periodieke functies 6

- Voorkennis 8
- 18.1 Sinusfunctie 10
- 18.2 Amplitude en periode 14
- 18.3 Verschuiven 18
- 18.4 Sinusoiden 22
- 18.5 Formules opstellen bij sinusoiden 26
- 18.6 Gemengde opdrachten 30
- Onderzoeksopdrachten 31
- Samenvatting 32
- Test jezelf 36
- Extra oefening 38

Vaardigheden 9 40

- Machtsformules 42
- Formules herleiden 43
- Differentiëren 44
- Exponentiële en logaritmische formules herleiden 45
- Periodieke functies 47

19 Functies bewerken 48

- Voorkennis 50
- 19.1 Grafieken verschuiven 52
- 19.2 Herschalen 56
- 19.3 Somfuncties en verschilfuncties 60
- 19.4 Productfuncties en quotiëntfuncties 64
- 19.5 Redeneren met formules 68
- 19.6 Gemengde opdrachten 72
- Onderzoeksopdrachten 73
- Samenvatting 74
- Test jezelf 78
- Extra oefening 80

20 Differentiëren 82

- Voorkennis 84
- 20.1 Productregel 86
- 20.2 Quotiëntregel 90
- 20.3 Hellinggrafiek 94
- 20.4 Redeneren met de afgeleide 98
- 20.5 Gemengde opdrachten 102
- Onderzoeksopdrachten 103
- Samenvatting 104
- Test jezelf 108
- Extra oefening 110

Vaardigheden 10 112

- Rijen 114
- Formules herleiden 115
- Sinusoiden 116
- Systematisch tellen 118

21 Exponentiële en logaritmische functies 120

- Voorkennis 122
- 21.1 Formules herleiden 124
- 21.2 Het getal e 128
- 21.3 Exponentiële functies differentiëren 132
- 21.4 Logaritmische functies differentiëren 136
- 21.5 Logaritmische schalen 140
- 21.6 Gemengde opdrachten 144
- Onderzoeksopdrachten 145
- Samenvatting 146
- Test jezelf 150
- Extra oefening 152

22 Afsluiting formules en verbanden 154

- 22.1 Voorkennis 156
- 22.2 Lineaire verbanden 158
- 22.2 Evenredig en omgekeerd evenredig 162
- 22.3 Formules opstellen 166
- 22.4 Redeneren met formules 170
- Gemengde opdrachten 174
- Onderzoeksopdrachten 175
- Samenvatting 176
- Test jezelf 180

Vaardigheden 11 182

- Logaritmische en exponentiële formules 184
- Differentiëren 185
- Rijen 187
- Systematisch tellen 188

Examenvoorbereiding 190

- Rekenen 192
 - Functies en grafieken 197
 - Lineaire en gebroken functies 208
 - Machtsfuncties en kwadratische functies en wortelfuncties 216
 - Exponentiële en logaritmische functies 222
 - Periodieke functies 234
 - Veranderingen en afgeleide functies 239
 - Rijen 246
 - Combinatoriek 251
 - Hints bij de examenopdrachten 256
- Formuleblad 260
- Examenwerkwoorden 261

Extra 262

- Meer oefenen 264
- Oefenproefwerken 272

Moderne Wiskunde

vwo A deel 4

Trefwoorden 282



SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In klas 3 heb je kennis gemaakt met periodieke grafieken en heb je gezien wat de evenwichtsstand, de amplitude en de periode zijn.

Je hebt geleerd wat de sinus is en hoe je die kunt gebruiken bij het berekenen van hoeken.

In dit hoofdstuk leer je dat je met de sinus ook periodieke verschijnselen kunt beschrijven. Daarbij gebruik je de sinusfunctie. Je leert wat de belangrijkste eigenschappen van deze functie zijn en welk gevolg het verschuiven of vermenigvuldigen van de grafiek heeft op het functievoorschrift.

In de hoofdstukken hierna zullen de periodieke grafieken nog af en toe terugkomen.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Probleem oplossen en analytisch denken*
- *Logisch redeneren en bewijzen*
- *Formules manipuleren*

opdracht 38

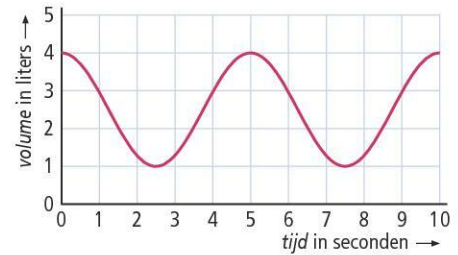
opdracht 23

opdracht 26



- V1** Een persoon ligt in bed en heeft een rustige en regelmatige ademhaling. Bij het inademen neemt de hoeveelheid lucht in de longen toe. Bij het uitademen neemt deze hoeveelheid weer af. In de grafiek zie je hoe de hoeveelheid lucht in de longen in de loop van de tijd varieert.

- Hoeveel seconden duurt een ademhaling?
- Hoeveel lucht zit er minimaal en maximaal in de longen?
- Hoeveel lucht zit er gemiddeld in de longen? En hoe groot is de maximale afwijking ten opzichte van dit gemiddelde?



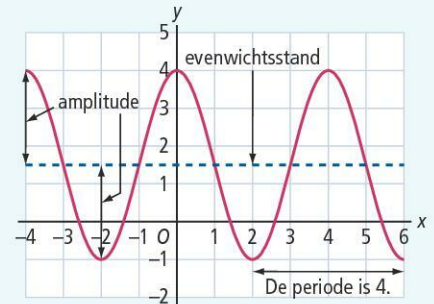
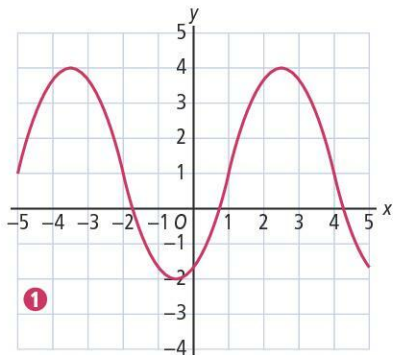
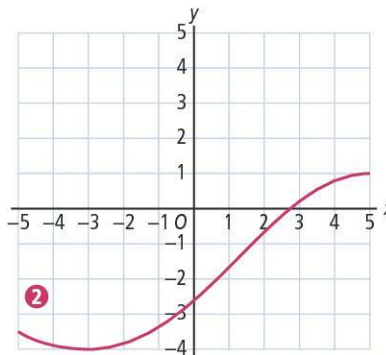
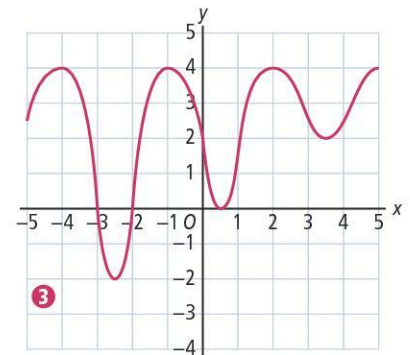
Theorie

Verschuiven die zichzelf steeds herhalen, heten **periodieke verschijnselen**. De bijbehorende grafieken heten **periodieke grafieken**.

De **evenwichtsstand** is de gemiddelde hoogte van de grafiek. De **amplitude** is de grootste afwijking van de grafiek ten opzichte van de evenwichtsstand.

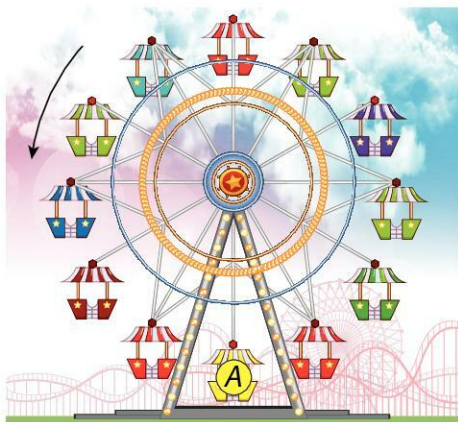
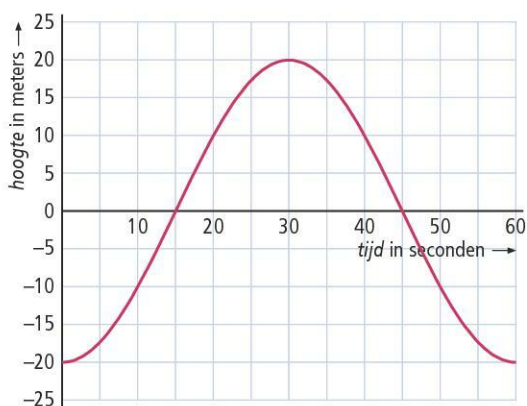
De **periode** is de kleinste afstand waarover je een periodieke grafiek horizontaal kunt verschuiven zodat hij weer samenvalt met zichzelf.

De evenwichtsstand is $1\frac{1}{2}$ en de amplitude is $2\frac{1}{2}$.



- V2**
- De grafieken 1 en 2 hierboven zijn deel van een periodieke grafiek. Geef van beide grafieken de evenwichtsstand, de amplitude en de periode.
 - Waarom is grafiek 3 niet periodiek?

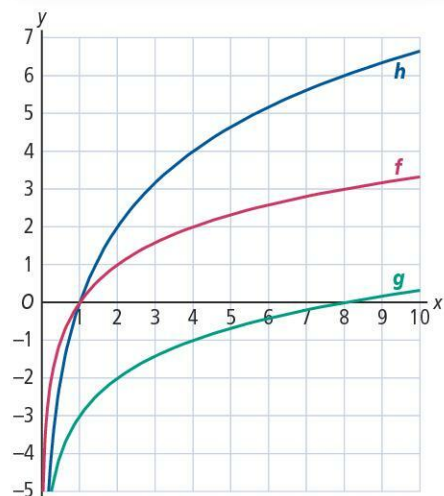
- V3** Schets één periode van een periodieke grafiek met evenwichtsstand 7, amplitude 5 en periode 10.



- V4** Op volle snelheid draait dit reuzenrad in een minuut steeds precies één keer rond.
In het plaatje is punt A het ophangpunt van de onderste cabine.
- Na hoeveel seconden is punt A voor het eerst op de hoogte van de as van het reuzenrad? En hoeveel seconden later weer?
 - Ook zie je een periode van de grafiek die hoort bij de hoogte van punt A ten opzichte van de as van het rad. Hoe groot is de straal van het rad?
 - Hoe hoog is punt A na 80 seconden?
 - Noem vijf tijdstippen waarop punt A zich 10 meter onder de as bevindt.
 - Bereken welke afstand punt A in een minuut aflegt.

De omtrek van een cirkel met straal r is gelijk aan $2 \cdot \pi \cdot r$.

- V5** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = {}^2\log(x)$.
- De grafiek van g is ontstaan door de grafiek van f omlaag te verschuiven. Leg uit dat bij de grafiek van g het functievoorschrift $g(x) = {}^2\log(x) - 3$ hoort.
 - Hoe kun je zien dat de grafiek van h is ontstaan door de grafiek van f te vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as met factor 2?
 - Stel het functievoorschrift van h op.
 - De grafiek van functie f wordt 6 omhoog verschoven. Stel het functievoorschrift $j(x)$ van de beeldgrafiek op.
 - Gebruik de grafiek van f om in het assenstelsel de grafieken van de functies $k(x) = -2 \cdot {}^2\log(x)$ en $l(x) = {}^2\log(x) + 4$ te tekenen.



18.1 Sinusfunctie

Je leert

- wat de sinusfunctie is en hoe de bijbehorende grafiek eruitziet

Leerroutes

- ondersteunend: 1—2—3—4—05—6—7
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7
- uitdagend: 1—2—4—5—6—7—U1

De London Eye is een reuzenrad naast de rivier de Theems in Londen, gebouwd in 1999. Lange tijd was dit het grootste reuzenrad ter wereld. Het is 135 meter hoog en een rondgang duurt 30 minuten. Neem aan dat het instappunt op nul meter hoog ligt.

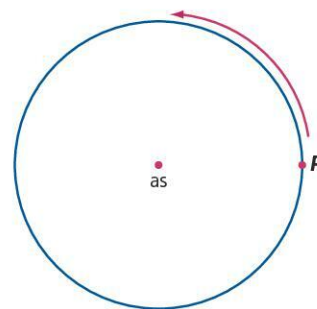
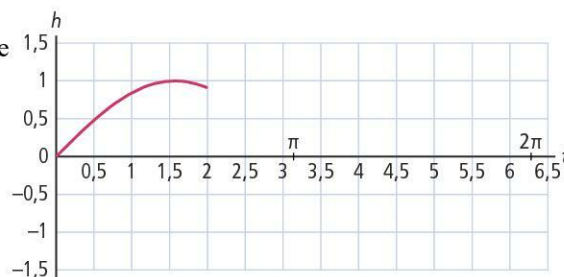
- Twaalf minuten na het instappen ben je op een hoogte van 122 meter.

Na hoeveel minuten ben je voor het eerst weer op een hoogte van 122 meter?



- 1 Een wiel met een straal van een meter draait rond met een constante snelheid. Een punt op de rand van het wiel heeft een snelheid van een meter per seconde. Op tijdstip $t = 0$ bevindt punt P op de rand zich op gelijke hoogte met de as van het wiel zoals in de figuur.

- Leg uit dat de omtrek van het wiel 2π meter is.
- Punt P draait in 2π seconden precies één keer rond. Waar bevindt punt P zich na π seconden?
- Na hoeveel seconden bevindt P zich op het laagste punt? Geef je antwoord uitgedrukt in π en geef vervolgens een antwoord afgerond op twee decimalen.
- Er is een begin gemaakt met het tekenen van een grafiek waarin de hoogte h van punt P ten opzichte van de as van het wiel is uitgezet tegen de tijd t in seconden. Maak de grafiek af op het gegeven interval.
- Na $\frac{1}{2}\pi$ seconden is P op het hoogste punt. Na hoeveel seconden is P opnieuw op het hoogste punt?



- 2 Stel je rekenmachine in op radialen. Neem de x van 0 tot 2π en de y van -1 tot 1 en plot de grafiek van $y = \sin(x)$. Vergelijk je plot met de getekende grafiek uit opdracht 1.

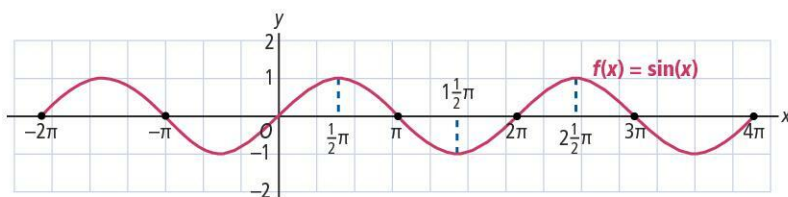
Theorie

Als een punt P met een snelheid van 1 meter per seconde over een cirkel met straal 1 meter beweegt, dan kun je de hoogte van het punt na t seconden berekenen met $\sin(t)$.

De functie $f(x) = \sin(x)$ heet de **sinusfunctie**.

Voor de grafiek van de functie $f(x) = \sin(x)$ geldt:

- De evenwichtsstand is 0.
- De amplitude is 1.
- De periode is 2π .
- In het punt $(0, 0)$ gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand.
- De verticale lijnen door de toppen zijn assen van symmetrie van de grafiek.



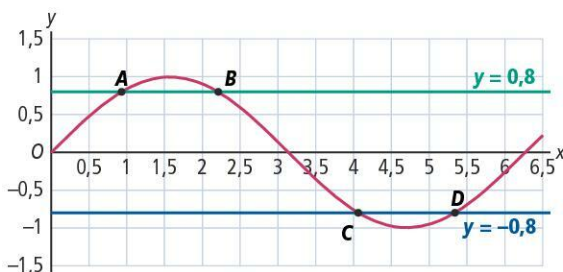
- 3** De grafiek hierboven hoort bij de functie $f(x) = \sin(x)$ op het interval $[-2\pi, 4\pi]$.
- Hoeverel perioden zie je in de grafiek?
 - In welke punten gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand?
 - Geef een interval waarop de grafiek van f toenemend dalend is.
 - Geef twee intervallen waarop de grafiek van f afnemend stijgend is.
 - Geef de coördinaten van zes punten waar de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ op het interval $[-2\pi, 4\pi]$ een top heeft.
- 4**
- In het punt $(\frac{1}{2}\pi, 1)$ heeft de functie $f(x) = \sin(x)$ een maximum.
Leg uit dat de functie f ook in de punten $(2\frac{1}{2}\pi, 1)$ en $(4\frac{1}{2}\pi, 1)$ een maximum heeft.
 - Geef de coördinaten van nog drie punten waar de functie $f(x) = \sin(x)$ een maximum heeft.
 - Geef de coördinaten van drie punten waar f een minimum heeft.
 - Geef de coördinaten van vier punten waar de grafiek van f de x -as snijdt.
 - Waarom zal de grafiek f de x -as ook snijden in $(23\pi, 0)$?

Ondersteunende route → maak opdracht 05

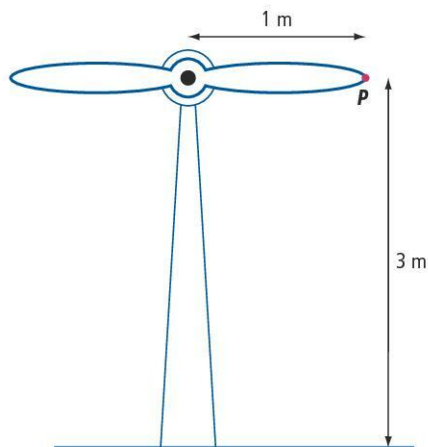
- 5** Leg met behulp van de eigenschappen van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ uit of de volgende punten wel of niet op deze grafiek liggen.

- a** $(7\pi, 1)$ **d** $(-11\pi, 0)$
b $(119\pi, 0)$ **e** $(-8\frac{1}{2}\pi, -1)$
c $(5\frac{1}{2}\pi, 1)$ **f** $(236\frac{1}{2}\pi, 1)$

- 6** De grafiek van $f(x) = \sin(x)$ snijdt de lijn $y = 0,8$ in de punten A en B en de lijn $y = -0,8$ in de punten C en D .

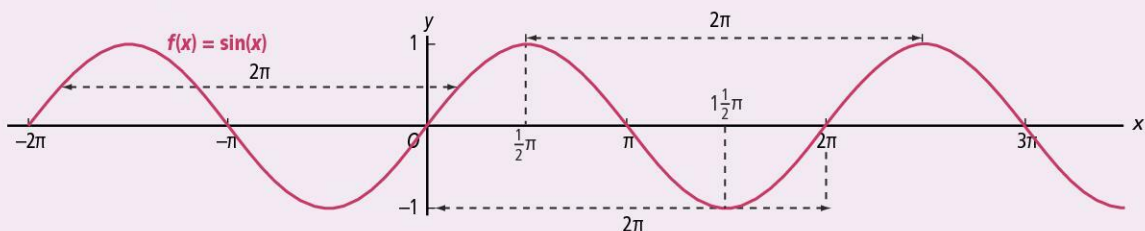


- a** Ga na dat $(0,93; 0,80)$ de coördinaten zijn van punt A .
b Leg uit dat de x -coördinaat van punt B gelijk is aan $\pi - 0,93 \approx 2,21$.
c Gebruik de symmetrie van de grafiek van f om de coördinaten van snijpunten C en D te berekenen.
- 7** De wieken van de windmolen zijn één meter lang. De windmolen draait tegen de klok in. Een omwenteling duurt vier seconden. De stand op de tekening komt overeen met het tijdstip $t = 0$.
- a** Geef drie tijdstippen waarop punt P de grootste hoogte bereikt.
b Teken op het interval $[0, 8]$ een grafiek van de hoogte van het rode punt ten opzichte van de as van de windmolen.
c De as van de windmolen bevindt zich op 3 meter hoogte. Hoe hoog is punt P op het tijdstip $t = 1$?
d Wat is de hoogte van de punt P bij $t = 3$.
e Hoe hoog is punt P op het tijdstip $t = 10$?



Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten



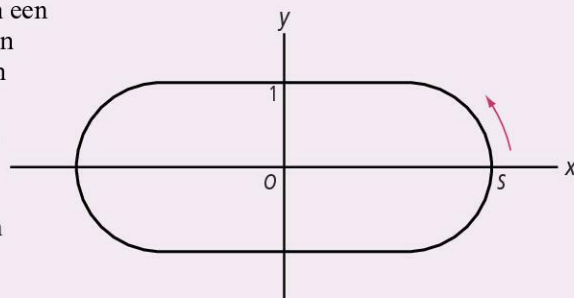
- 05**
- Op de grafiek van f ligt het punt $(\frac{1}{2}\pi, 1)$.
De periode van de grafiek is 2π .
Leg met behulp van de eigenschappen van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ uit dat de punten $(2\frac{1}{2}\pi, 1)$ en $(4\frac{1}{2}\pi, 1)$ ook op de grafiek van f liggen.
 - Leg uit dat het punt $(5\frac{1}{2}\pi, -1)$ op de grafiek van f ligt.
 - In het punt $(0, 0)$ gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand.
Geef nog drie punten waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.
 - Geef drie punten waar de grafiek dalend door de evenwichtsstand gaat.

Ga na of de volgende punten op de grafiek van f liggen.

- | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| e $A(12\frac{1}{2}\pi, 1)$ | h $D(-3\pi, 0)$ |
| f $B(-8\frac{1}{2}\pi, 1)$ | i $E(-4\frac{1}{2}\pi, -1)$ |
| g $C(8\pi, 1)$ | j $F(23\frac{1}{2}\pi, -1)$ |

Uitdagende opdrachten

- U1** In de tekening staat een vereenvoudigd model van een atletiekbaan, geplaatst in een assenstelsel. De baan bestaat uit twee halve cirkels met straal 1 meter en twee rechte stukken met lengte π meter. Een punt beweegt met een constante snelheid van 1 meter per seconde over de baan. Op $t = 0$ bevindt het punt zich in S . De y -coördinaat van het punt S wordt beschreven door het functievoorschrift $h(t)$ met t de tijd in seconden.



- Wat zijn de coördinaten van punt S ?
- Hoeveel keer doorloopt het punt deze baan in één uur?
- Teken de grafiek van h voor één omloop.

18.2 Amplitude en periode

Je leert

- hoe je een functievoorschrift aanpast als de amplitude van de grafiek verandert
- hoe je een functievoorschrift aanpast als de periode van de grafiek verandert

Leerroutes

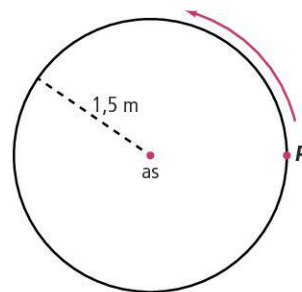
- ondersteunend: 8—9—10—11—12—13—014—14—15—16
- doorlopend: 8—9—10—11—12—13—14—15—16—17
- uitdagend: 8—9—10—11—12—13—14—15—17—U2

De grote wijzer van de klok van de Big Ben is 4,3 meter lang. De kleine wijzer is 2,8 meter lang. Boris maakt twee grafieken. In de eerste grafiek geeft hij de hoogte van het puntje van de grote wijzer ten opzichte van het draaipunt weer. In de tweede grafiek geeft hij de hoogte van het puntje van de kleine wijzer ten opzichte van het draaipunt weer. Op de horizontale as staat de tijd tussen 0 en 24 uur.

- Waarin verschillen deze grafieken?



- 8 Het wiel heeft een straal van 1,5 meter en draait in 2π seconde precies één keer rond. Op tijdstip $t = 0$ bevindt punt P zich op gelijke hoogte met de as van het wiel. Schets een periode van de bijbehorende tijd-hoogte grafiek.



- 9 a Plot op het interval $[-2\pi, 2\pi]$ de grafiek van $g(x) = a \cdot \sin(x)$ voor $a = 3$, $a = -5$ en $a = 0,5$.
 b Welk van de kenmerken evenwichtsstand, amplitude en periode verandert als je a verschillende waarden geeft?
 c Welk effect heeft een negatieve waarde van het getal a op de grafiek?

Theorie

De grafiek van de functie $h(x) = a \cdot \sin(x)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een **vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as** met factor a . Door deze vermenigvuldiging verandert de amplitude van de grafiek. De grafiek wordt verticaal uitgerekt als $a > 1$ of $a < -1$ en in elkaar gedrukt als $-1 < a < 1$.

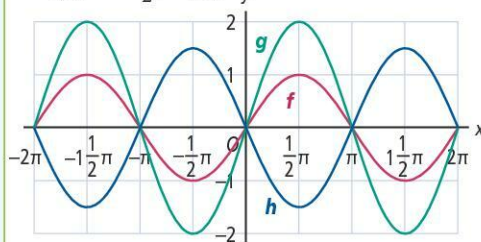
Als het getal a negatief is, dan wordt de grafiek bovendien in de x-as gespiegeld.

De amplitude van de grafiek van $h(x) = a \cdot \sin(x)$ is gelijk aan a als a positief is en gelijk aan $-a$ als a negatief is.

Voorbeeld

Gegeven zijn de grafieken van $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = 2\sin(x)$ en

$$h(x) = -\frac{1}{2}\sin(x).$$



De amplitude van g is gelijk aan 2 en de amplitude van h is $\frac{1}{2}$.

10 Geef de amplitude van de grafieken van de functies.

- H** a $f(x) = 4 \cdot \sin(x)$ c $h(x) = \frac{2}{3} \cdot \sin(x)$
b $g(x) = 1,8 \cdot \sin(x)$ d $i(x) = -8,3 \cdot \sin(x)$

11 Gegeven zijn de functies $f(x) = 5 \sin(x)$ en $g(x) = -5 \sin(x)$.
Geef voor beide functies de coördinaten van de toppen van de grafieken op het interval $[0, 2\pi]$.

- 12** a Plot op het interval $[-2\pi, 2\pi]$ de grafiek van $g(x) = \sin(bx)$ voor $b = 2$, $b = 3$ en $b = 0,5$.
Welk van de kenmerken evenwichtsstand, amplitude en periode verandert als je b verschillende waarden geeft?
b Voor welke positieve waarden van b is de periode kleiner dan 2π ? En voor welke positieve waarden van b is de periode groter dan 2π ?
c Vul de tabel in.
d Welk verband bestaat er tussen b en de periode van $g(x) = \sin(bx)$?

b	0,5	1	3	π	2π
periode	...	...	...	...	...

Theorie

De grafiek van de functie $h(x) = \sin(bx)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een **vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as**. Door deze vermenigvuldiging verandert de periode van de grafiek.

De grafiek wordt in horizontale richting uitgerekt als $0 < b < 1$ en in elkaar gedrukt als $b > 1$.

Als het getal b negatief is, dan wordt de grafiek bovendien in de y-as gespiegeld.

Voor positieve waarden van b is het verband tussen b en de

$$\text{periode: } b = \frac{2\pi}{\text{periode}} \text{ ofwel de periode} = \frac{2\pi}{b}$$

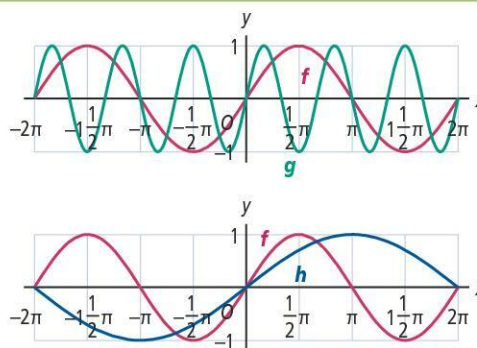
Voorbeeld

Gegeven zijn de grafieken van $f(x) = \sin(x)$,

$$g(x) = \sin(3x) \text{ en } h(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right).$$

$$\text{De periode van } g \text{ is } \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi.$$

$$\text{De periode van } h \text{ is } \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi.$$



13 Bereken de periode van de grafieken van de functies.

a $f(x) = \sin(0,25x)$

c $f(x) = \sin\left(\frac{1}{5}x\right)$

b $f(x) = \sin(5x)$

d $f(x) = \sin(4\pi x)$

Ondersteunende route → maak opdracht 014

14 Bereken van de grafieken van de functies de amplitude en de periode.

H

a $f(x) = 13 \sin(3x)$

c $f(x) = -20 \sin(\pi x)$

b $f(x) = -0,6 \sin(0,6x)$

d $f(x) = \frac{1}{10} \sin(0,3\pi x)$

15 **a** De grafiek van $f(x) = a \cdot \sin(bx)$ heeft amplitude 6 en periode 3.

Schets de grafiek van functie f .

b Geef het functievoorschrift $f(x)$.

c Schets de grafiek van de functie $g(x) = -2 \sin(\pi x)$.

16 De getijdenbeweging in een kustplaats wordt bij benadering beschreven door de functie $h(t) = 1,85 \sin(0,506t)$.

H

Hierbij is h de waterhoogte in meters boven NAP en t is de tijd in uren met $t = 0$ het tijdstip 0.00 uur.

a Hoeveel uren verstrijken er tussen twee opeenvolgende hoogwaterstanden? Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

b Plot en schets de grafiek van h en bereken gedurende hoeveel tijd per periode de waterstand hoger dan 1,20 meter boven NAP is.

c Geef twee tijdstippen waarop de waterhoogte het snelst afneemt.

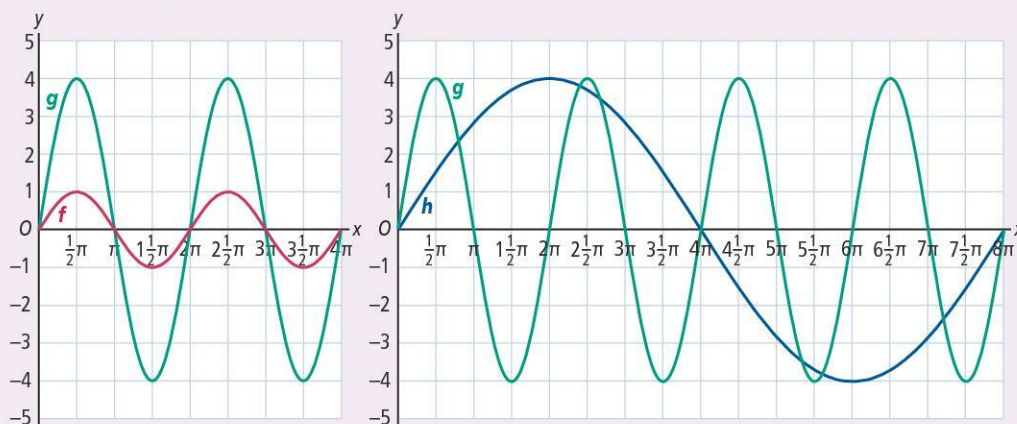
d Op een andere plaats is het verschil tussen hoogwater en laagwater gelijk aan 4,3 meter waarbij de tijdstippen waarop deze optreden gelijk zijn aan die bij opdracht a. Stel het functievoorschrift op dat hier bij past.

17 Je ziet een foto van een waterrad. De straal van het rad is 0,9 meter en het draait rond met een snelheid van één omwenteling per 8 seconden. Op tijdstip $t = 0$ is het punt A op de hoogte van de as en beweegt het omhoog. Bereken de hoogte van punt A na 4,5 seconden.

Uitdagende route → maak opdracht U2



Ondersteunende opdrachten



014 In het linker assenstelsel zie je de grafieken van $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = a \cdot \sin(x)$.

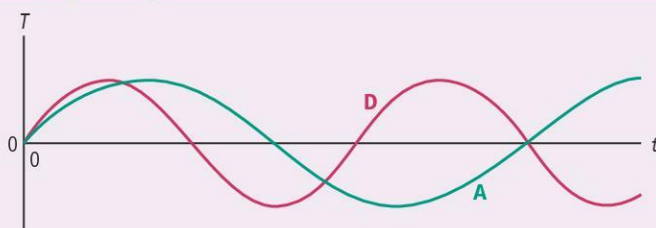
- a** Hoe groot is de amplitude van de grafiek van g ?
- b** Welke waarde heeft a in het functievoorschrift van g ?
- c** In het rechter assenstelsel zie je de grafieken van $g(x) = a \cdot \sin(x)$ en $h(x) = a \cdot \sin(bx)$.

Hoe groot is de periode van de grafiek van h ?

d Vul in: $b = \frac{2\pi}{\text{periode}} = \frac{2\pi}{\dots} = \dots$

e Geef het functievoorschrift van h .

Uitdagende opdrachten



U2 Toonhoogte wordt bepaald door het aantal trillingen per seconde. Van toon A is de frequentie 440 Hz (440 trillingen per seconde). Je kunt bij toon A een formule van de vorm $T_A = \sin(bt)$ opstellen.

- a** Welke waarde heeft b in de formule T_A ?
- b** De frequentie bij toon D is 1,5 keer zo groot als bij toon A. Stel een formule bij toon D.
- c** Bij de trilling van een gitaarsnaar hoort de formule $T_{\text{gitaar}} = \sin(1750t)$. Bereken de frequentie en de periode van deze trilling.

18.3 Verschuiven

Je leert

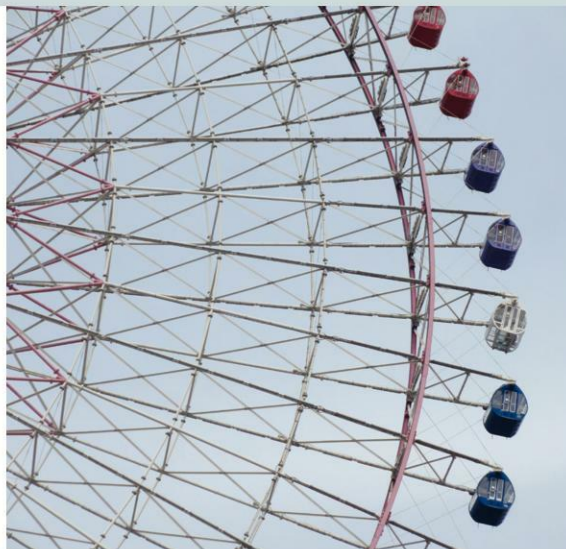
- hoe je een functievoorschrift aanpast als de evenwichtsstand van de grafiek verandert
- hoe je een functievoorschrift aanpast als het beginpunt van de grafiek verandert

Leerroutes

- ondersteunend: 18—19—20—21—022—22—23—024—25
- doorlopend: 18—19—20—21—22—23—24—25—26
- uitdagend: 18—19—20—22—23—24—25—26—U3

Yoji maakt bij een reuzenrad twee grafieken. Hij tekent een grafiek van de hoogte van het bakje ten opzichte van de as van het reuzenrad en een grafiek van de hoogte van het bakje ten opzichte van de grond.

- Wat is het verschil tussen de twee grafieken van Yoji?



- 18 a Plot op het interval $[-2\pi, 2\pi]$ de grafiek van $g(x) = d + \sin(x)$ voor $d = 3$ en voor $d = -5$.
- b Welk van de kenmerken evenwichtsstand, amplitude en periode verandert bij verschillende waarden van d ?

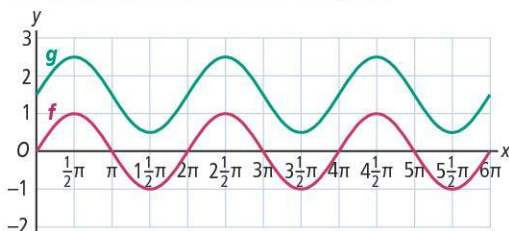
Theorie

De grafiek van de functie $g(x) = d + \sin(x)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een **verticale verschuiving** van d eenheden omhoog.

De evenwichtsstand van de functie g is d .

Voorbeeld

Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x) = \sin(x)$ en g . Stel het functievoorschrift van g op.



Oplossing

De grafiek van g is ontstaan door de grafiek van f $1\frac{1}{2}$ eenheden omhoog te verschuiven.

De evenwichtsstand van g is $1\frac{1}{2}$.

Het functievoorschrift van g is

$$g(x) = 1\frac{1}{2} + \sin(x).$$

19 Geef bij de functies $g(x) = \sin(x) - 5,7$ en $h(x) = 4,5 + \sin(x)$ de evenwichtsstand.

- 20 a Plot op het interval $[-2\pi, 2\pi]$ de grafiek van $h(x) = \sin(x - c)$ voor $c = \frac{1}{2}\pi$, $c = 3$ en $c = -1$.
Geef bij de verschillende waarden van c de coördinaten van de punten waar de grafiek stijgend de x -as snijdt.
- b Welk effect heeft het variëren van de waarde van c op de grafiek van h ?

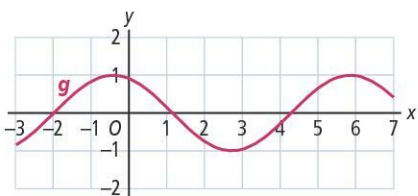
Theorie

De grafiek van de functie $h(x) = \sin(x - c)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een **horizontale verschuiving** van c eenheden naar rechts.

In het punt $(c, 0)$ gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand, zo'n punt heet een **beginpunt** van de grafiek.

Voorbeeld

De grafiek van functie g is ontstaan door een horizontale verschuiving van de grafiek van de functie $f(x) = \sin(x)$.
Stel het functievoorschrift van g op.



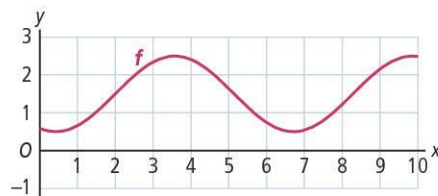
Oplossing

De grafiek van g gaat in het punt $(-2, 0)$ stijgend door de evenwichtsstand, dus $c = -2$.
Het functievoorschrift van g is $g(x) = \sin(x - (-2))$ ofwel $g(x) = \sin(x + 2)$.

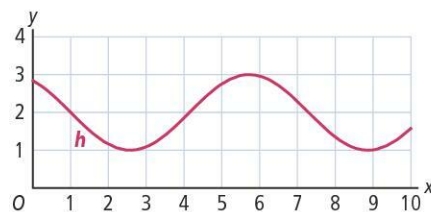
- 21 a Hoe groot is de periode van de grafiek in het voorbeeld?
b Leg uit dat de grafiek in het voorbeeld ook bij $x = -2 + 2\pi \approx 4,28$ stijgend door de evenwichtsstand gaat.

Ondersteunende route → maak opdracht 022

- 22 Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \sin(x - c) + d$.
- Teken in het assenstelsel de evenwichtsstand van de grafiek van f .
 - Welke waarde heeft d in het functievoorschrift van f ?
 - Geef in de figuur de punten aan waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.
 - Welke coördinaten heeft het beginpunt dat het dichtst bij de y -as ligt?
 - Stel het functievoorschrift van f op.



- 23** Gegeven is de grafiek van de functie $h(x) = 2 - \sin(x - 1)$. De grafiek snijdt de evenwichtsstand in het punt $(1, 2)$.
- Hoe kun je aan het functievoorschrift van h zien dat de grafiek in het punt $(1, 2)$ niet stijgend, maar dalend door de evenwichtsstand gaat?
 - Hoe groot is de periode van de grafiek van h ?
 - Geef de coördinaten van een punt waarin de grafiek van h stijgend door de evenwichtsstand gaat.



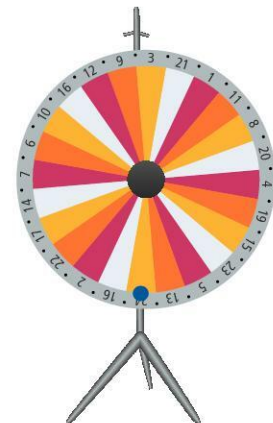
Ondersteunende route → maak opdracht 024

- 24** Geef bij de functies de evenwichtsstand en de coördinaten van een drietal punten waarin de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.

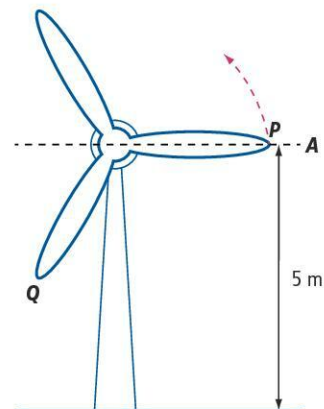
H

- $g(x) = 5 + \sin(x + 3)$
- $g(x) = -4 + \sin\left(x - \frac{2}{3}\pi\right)$
- $g(x) = 5 - \sin(x - 0,3)$
- $g(x) = -4,75 + 4\sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)$

- 25** Het rad van fortuin draait tegen de wijzers van de klok in. De hoogte van het blauwe punt op de rand van het rad wordt gegeven door $h = 1,5 + \sin\left(t - \frac{1}{2}\pi\right)$. Hierin is t de tijd in seconden en h de hoogte in meters ten opzichte van de grond.
- In welke positie bevindt het blauwe punt zich op tijdstip $t = 0$?
 - Leg uit dat de maximale hoogte van het blauwe punt gelijk is aan 2,5 meter.
 - Leg uit dat na ongeveer 3,14 seconden het hoogste punt bereikt wordt.
 - Geef de minimale hoogte van het blauwe punt en alle tijdstippen waarop deze hoogte op het tijdsinterval $[0, 10]$ bereikt wordt.

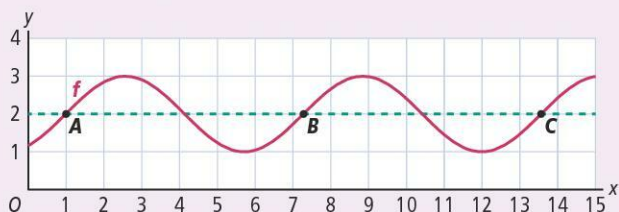


- 26** De wieken van de windmolen zijn 2 meter lang. Het middelpunt ligt 5 meter boven de grond. De wieken draaien in 3 seconden rond. Op $t = 0$ bevindt punt P zich in de getekende positie.
- Leg uit dat de formule $h = 2\sin\left(\frac{2}{3}\pi t\right) + 5$ het verband geeft tussen de hoogte h in meters van het punt P ten opzichte van de grond en de tijd t in seconden.
 - Leg uit dat punt Q op het tijdstip $t = 1$ stijgend door de evenwichtsstand gaat.
 - Stel een formule op die het verband geeft tussen de hoogte in meters van het punt Q ten opzichte van de grond en de tijd in seconden.



Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten



022 Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \sin(x - 1) + 2$.

- In de grafiek is de evenwichtsstand getekend.
Hoe zie je de evenwichtsstand terug in het functievoorschrift?
- De grafiek gaat in het punt $A(1, 2)$ stijgend door de evenwichtsstand.
Hoe zie je de coördinaten van dit punt terug in het functievoorschrift?
- De x -coördinaat van punt B is $1 + 2\pi \approx 7,28$.
Leg dit uit.
- Welke coördinaten heeft punt C ?

024 Gegeven is de functie $f(x) = -4 + \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$.

- Geef de evenwichtsstand van de grafiek van f .
- Leg uit dat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat in het punt $\left(-\frac{1}{2}\pi, -4\right)$.
- Hoe groot is de periode van de grafiek van f ?
- Geef de coördinaten van het volgende punt waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.
- Geef nog twee punten waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.

Geef bij de volgende functies de evenwichtsstand en de coördinaten van een drietal punten waarin de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.

- | | |
|---|---------------------------------------|
| f $g(x) = 1 + \sin(x + \pi)$ | h $g(x) = 5 + \sin(x + 1,3)$ |
| g $g(x) = 2 + \sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$ | i $g(x) = -4,75 + \sin(x + 2)$ |

Uitdagende opdrachten

U3 Een periodieke grafiek gaat dalend door de evenwichtsstand in het punt $\left(\frac{1}{3}\pi, 2\right)$.

Stel een bijbehorend functievoorschrift op van de vorm $f(x) = d + \sin(x + c)$. Leg je antwoord uit.

18.4 Sinusoiden

Je leert

- wat een sinusoïde is
- hoe je de kenmerken van een sinusoïde uit de formule afleidt

Leerroutes

- ondersteunend: 27—028—29—30—031—32
- doorlopend: 27—28—29—30—31—32
- uitdagend: 27—29—30—31—32—U4

De waterhoogte in een haven kan voor een bepaalde dag beschreven worden met de formule $H = 3,2 + 1,8 \sin(0,5t - 2,8)$. Hierin is H de hoogte in meters en t de tijd in uren met $t = 0$ om 0.00 uur.

- Welke gegevens over de waterhoogte kun je afleiden uit deze formule?



- 27 a Gegeven is de functie $g(x) = 3 \sin(2(x - 1)) + 4$. Geef de amplitude, de evenwichtsstand en de periode.
- b Geef de coördinaten van een punt waarin de grafiek van g stijgend door de evenwichtsstand gaat.

Theorie

Periodieke grafieken met een formule van de vorm $y = d + a \sin(b(x - c))$ noem je **sinusoiden**.

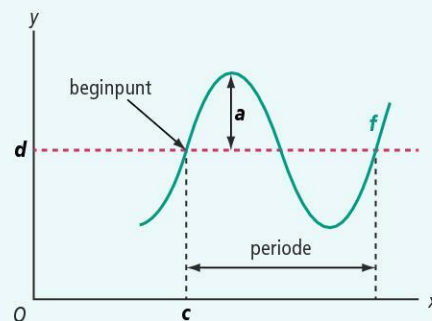
De betekenis van de getallen a , b , c en d voor de grafiek is:

- De amplitude is a als $a > 0$ en de amplitude is $-a$ als $a < 0$.
- De evenwichtsstand is d .
- Met b bereken je de periode.

Voor het verband tussen b (met $b > 0$) en de periode geldt:

$$b = \frac{2\pi}{\text{periode}} \text{ of } \text{periode} = \frac{2\pi}{b}$$

- Een punt waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat, noem je een **beginpunt**. Een beginpunt is bijvoorbeeld het punt (c, d) (als $a > 0$).



Voorbeeld

Gegeven is de formule $y = -8 + 6\sin(\frac{1}{2}(x + 4))$. Bepaal van de bijbehorende sinusoïde de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt.

Oplossing

$d = -8$, de evenwichtsstand is -8 .

$a = 6$, de amplitude is 6 .

$b = \frac{1}{2}$, de periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

$c = -4$, een beginpunt is $(-4, -8)$.

Ondersteunende route → maak opdracht 028

28

H

Bepaal van de sinusoiden bij de formules de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt.

a $y = 2 + 4 \sin\left(\frac{1}{2}(x - 3)\right)$

b $y = 3 + 2 \sin\left(4\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)\right)$

c $y = -200 + 125 \sin(0,1\pi x)$

d $y = \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{3}\pi\left(x - \frac{1}{8}\pi\right)\right)$

29

Gegeven is de functie $f(x) = -3 - 2 \sin(x - 4)$.

- a Leg uit waarom het punt $(4, -3)$ geen beginpunt is van de grafiek van f .
- b Geef de coördinaten van een beginpunt van de grafiek van f .
- c Plot de grafiek van $g(x) = 5 - 8 \sin(x + 2)$ en bereken de coördinaten van het beginpunt op het interval $[0, 2\pi]$.
- d Verklaar je antwoord van opdracht c met behulp van het functievoorschrift $g(x)$.

30

De waterhoogte op het wad kan op een bepaalde dag beschreven worden met de functie $W(t) = 0,7 + 0,65 \cdot \sin(0,5t)$ met W in meters en t in uren.

In deze formule komt $t = 0$ overeen met het tijdstip 0.00 uur.

- a Wat is de maximale waterhoogte op die dag?
- b Hoe groot is de periode van de grafiek van W ?
- c Leg uit dat het water op het tijdstip 3.08 uur de hoogste stand heeft bereikt.
- d Op welk tijdstip bereikt het water opnieuw de hoogste stand?
- e Bereken met behulp van de periode op welke tijdstippen het water die dag het laagste punt bereikt.
- f Plot de grafiek van de waterhoogte voor deze dag en controleer hiermee je antwoord van opdracht e.



Theorie

De y -coördinaten van de toppen van de sinusoïde met formule $y = d + a \sin(b(x - c))$ kun je bepalen met behulp van de evenwichtsstand en de amplitude. De toppen liggen vanwege de symmetrie halverwege twee opeenvolgende snijpunten met de evenwichtsstand.

Voorbeeld

Bereken de coördinaten van twee opeenvolgende toppen van de sinusoïde bij de formule $y = 15 + 20\sin(\frac{1}{3}\pi(x - 2))$.

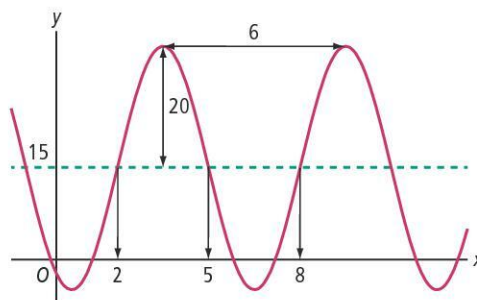
Oplossing

De evenwichtsstand is 15 en de amplitude is 20, dus het maximum is gelijk aan $15 + 20 = 35$ en het minimum is gelijk aan $15 - 20 = -5$.

De periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}\pi} = 6$ en een beginpunt is $(2, 15)$.

De twee hierop volgende snijpunten met de evenwichtsstand zijn dus $(5, 15)$ en $(8, 15)$.

De toppen zitten halverwege deze drie punten en zijn dus $(3\frac{1}{2}, 35)$ en $(6\frac{1}{2}, -5)$.



Ondersteunende route → maak opdracht 031

- 31** Bereken de coördinaten van twee opeenvolgende toppen van de bijbehorende sinusoïden.

a $y = 3 \sin(2x) - 2$ **c** $y = -42 + 28 \sin(0,2\pi(x + 3))$
b $y = 6 + 8 \sin(\pi x)$ **d** $y = 3,2 - 1,3 \sin(\pi x + \pi)$

- 32** De daglengte is de tijdsduur tussen zonsopkomst en zonsondergang. Voor Madrid kan het verband tussen de daglengte D en het aantal dagen na 1 januari van een jaar benaderd worden met de formule $D = 12 + 2,7 \sin(0,0172(t - 80))$. Hierin is t de tijd in dagen met $t = 0$ op 1 januari en D de daglengte in uren.

- a** Leg aan de hand van de formule uit dat de periode een jaar is.
b Geef de maximale en minimale daglengte en de data waarop deze worden bereikt.
c Bereken de daglengte op 1 mei.
d Hoeveel dagen per jaar is de daglengte minder dan 10 uren?
e Stel de formule van de daglengte op als de tijd na 1 januari niet in dagen maar in weken wordt gemeten.

Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten

028

- a** Gegeven is de functie $h(x) = 4 + 3 \sin(2(x - 1))$.
Het functievoorschrift heeft de vorm
 $h(x) = d + a \sin(b(x - c))$.
Vul het blaadje in.
- b** Gegeven is de functie $k(x) = 3 \sin(5x) - 2$.
Welke waarden hebben a , b , c en d bij de functie k ?
- c** Geef de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt van de grafiek van k .

Bepaal van de grafiek van elk van deze functies de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt.

- d** $m(x) = 4 \sin(\pi(x + 2)) + 7$ **f** $p(x) = -50 + 60 \sin(1,5\pi x)$
e $n(x) = -5 + \sin\left(2\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)\right)$ **g** $q(x) = 5\frac{1}{2} \sin(4(x - 2)) - 3$

●	$h(x) = d + a \cdot \sin(b(x - c))$
●	$h(x) = 4 + 3 \sin(2(x - 1))$
●	$d = \dots$, de evenwichtsstand is $\dots$
●	$a = \dots$, de amplitude is $\dots$
●	$b = \dots$, de periode is $\frac{2\pi}{\dots} = \dots$
●	$c = \dots$, de coördinaten van een beginpunt zijn $(\dots, \dots)$

031

- Gegeven is de functie $f(x) = 3 \sin(0,5\pi x) + 2$.
- a** Geef de coördinaten van een punt waar de grafiek van f stijgend door de evenwichtsstand gaat.
- b** Geef de evenwichtsstand, de amplitude en de periode van de grafiek van f .
- c** Leg uit dat de functie f een maximum heeft bij $x = 1$.
- d** Leg uit dat $(1, 5)$ de coördinaten zijn van de top bij $x = 1$.
- e** Bij welke waarde van x heeft de functie f een minimum?
- f** Welke waarde heeft het minimum?

Bereken de coördinaten van twee opeenvolgende toppen van de sinusoiden bij de formules.

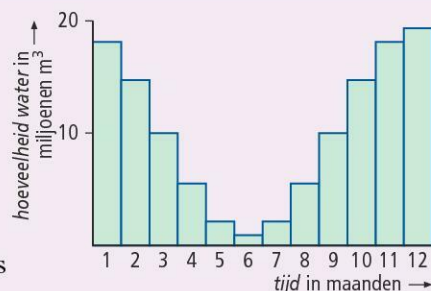
- g** $y = 2 \sin(3x) - 4$ **i** $y = 2 + 17 \sin(\pi(x + 3))$
h $y = 15 + 6 \sin(2(x + 4))$ **j** $y = 38 - 20 \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right)$

●	$f(x) = 3 \cdot \sin(0,5\pi x) + 2$
●	evenwichtsstand: $\dots$
●	amplitude: $\dots$
●	periode: $\frac{2\pi}{0,5\pi} = \dots$

Uitdagende opdrachten

U4

De hoeveelheid regenwater die jaarlijks per maand in een gebied rond een bepaald dorp valt, is gedurende een groot aantal jaren gemeten. In een staafdiagram is de gemiddelde hoeveelheid regen per maand weergegeven. De gemiddelde hoeveelheid regen per maand kan benaderd worden met de formule $r = 10 + 9 \sin\left(\frac{1}{6}\pi(t + 3)\right)$. Hierin is r de hoeveelheid water in miljoenen m^3 en t de tijd in maanden, waarbij de maand januari overeenkomt met $t = 1$. Niet ver van dit dorp is een stuwmeer aangelegd. Van het regenwater uit het gebied rond het dorp bereikt 40% het meer één maand later. Stel een formule op voor de hoeveelheid regenwater s die het stuwmeer maandelijks bereikt.



18.5 Formules opstellen bij sinusoiden

Je leert

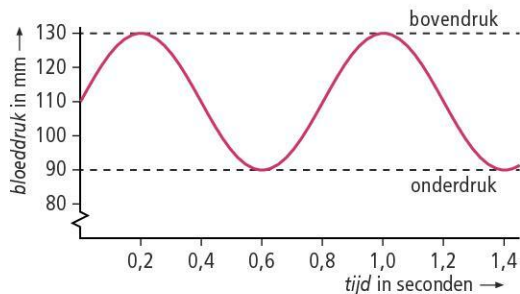
- hoe je een formule opstelt bij een sinusoiden

Leerroutes

- ondersteunend: 33—34—035—35—036—37
- doorlopend: 33—34—35—36—37—38
- uitdagend: 34—35—36—37—38—U5

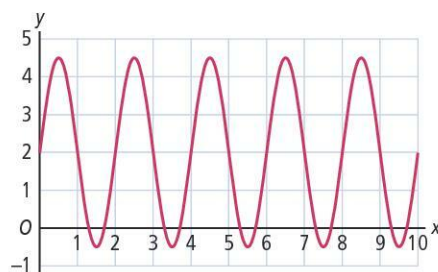
In de grafiek zie je hoe de bloeddruk van een persoon verandert tussen twee hartslagen.

- Welke gegevens kun je uit de grafiek aflezen?



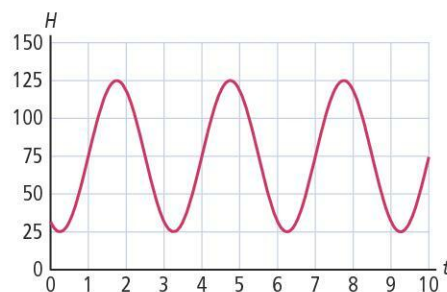
- 33** De grafiek hoort bij een formule van de vorm $y = d + a \sin(b(x - c))$.

- a** Hoe groot is de evenwichtsstand van de sinusoiden?
- b** En hoe groot is de amplitude?
- c** Geef de waarden van a en d .
- d** Laat met een berekening zien dat $b = \pi$.
- e** Hoe kun je aan de grafiek zien dat $c = 0$?
- f** Stel een formule bij de grafiek op.



- 34** De sinusoiden geeft het verband weer tussen de hoogte H in meters van het uiteinde van een rotorblad van een windturbine en de tijd t in seconden. De formule bij de sinusoiden is van de vorm $H = d + a \sin(b(t - c))$.

- a** Lees uit de grafiek het maximum en het minimum af.
- b** Hoe groot is de evenwichtsstand d ?
- c** Hoe groot is de amplitude a ?
- d** Lees de periode af en bereken hiermee de waarde van b .
- e** Geef de coördinaten van een beginpunt.
- f** Stel een formule bij deze sinusoiden op.



Aanpak

Hoe stel je een formule van de vorm $y = d + a \sin(b(x - c))$ op bij een sinusöide?

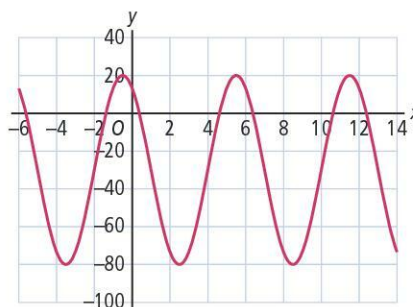
- 1 Lees het maximum en het minimum af.
- 2 Bereken de evenwichtsstand d en de amplitude a .
- 3 Lees de periode af en bereken b met $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$
- 4 Lees een beginpunt van de sinusöide af, de x -coördinaat hiervan is gelijk aan c .
- 5 Schrijf de formule op.

Voorbeeld

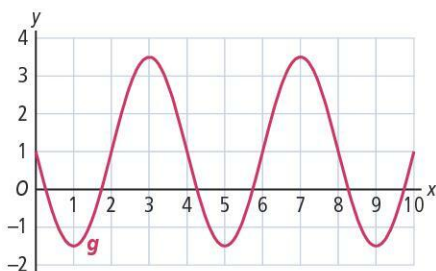
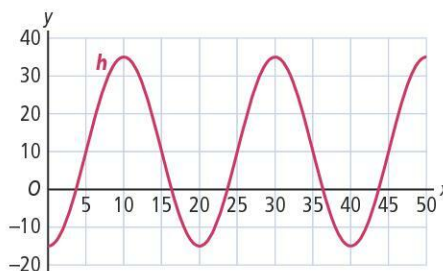
Stel een formule op bij de sinusöide.

Oplossing

- 1 Het maximum is 20 en het minimum is -80 .
- 2 De evenwichtsstand is $d = (20 + (-80)) : 2 = -30$.
De amplitude a is het verschil tussen het maximum en de waarde van d , dus $a = 20 - (-30) = 50$.
- 3 De grafiek gaat bij $x = -2$ en $x = 4$ stijgend door de evenwichtsstand. De periode is 6, dus $b = \frac{2\pi}{6} = \frac{1}{3}\pi$.
- 4 Een beginpunt is $(-2, -30)$. Dus $c = -2$.
- 5 Een formule is $y = -30 + 50\sin(\frac{1}{3}\pi(x + 2))$.



Ondersteunende route → maak opdracht 035

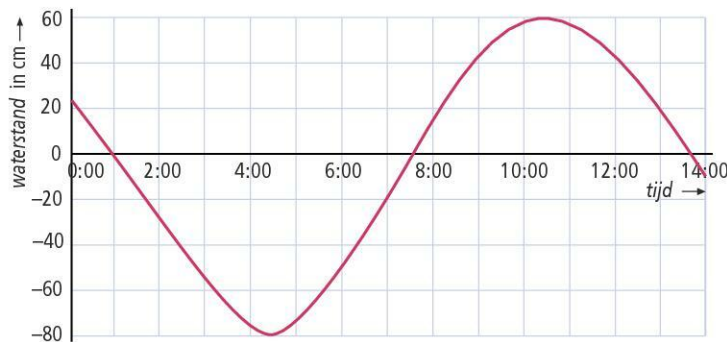


- 35** Gegeven zijn de sinusöiden bij de functies g en h .
H Stel bij beide grafieken een functievoorschrift op.

Ondersteunende route → maak opdracht 036

- 36** Stel een formule op bij de volgende sinusöiden.
- a De periode is 16, een beginpunt is $(4, -12)$ en het maximum is 18.
 - b Een beginpunt is $(0, 6)$ en het dichtstbijzijnde laagste punt is $(3, 2)$.
 - c Twee opeenvolgende toppen zijn $(5, 210)$ en $(17, -100)$.

37



hoog- en laagwater

04.10	LW	-78 cm
10.14	HW	58 cm

Gegeven is de getijdenkromme van 5 mei 2003 van het K13A Platform dat voor de Nederlandse kust is gelegen. In de tabel staat een aantal gegevens.

De waterstand kan redelijk goed beschreven worden door de formule $H = a + b \sin(c(t - d))$. Hierin is H de waterhoogte ten opzichte van het Normaal Amsterdams Peil (NAP) in cm en t de tijd in uren met $t = 0$ om 0.00 uur op 5 mei 2003.

- Geef met behulp van de gegevens uit de tabel en de grafiek, een benadering van de waarden van a , b , c en d en stel de bijbehorende formule op.
- Tussen 0.00 uur en 8.00 uur is de waterstand gedurende een aantal minuten meer dan 60 cm onder NAP. Onderzoek met de formule van opdracht a hoeveel minuten dit het geval is en ga na hoeveel dit aantal verschilt met de grafiek.



38

Boven een houtopslag ligt een zogeheten golflaat.

De voorkant van de plaat die je op de foto ziet, is in werkelijkheid 98 cm breed en het hoogteverschil tussen het hoogste en laagste punt van een golf is 4,2 cm.

Breng een denkbeeldig assenstelsel aan met de y -as aan het begin van de golflaat links en de x -as als evenwichtsstand van het golfpatroon. Dit golfpatroon heeft een vorm die overeenkomt met een sinusoid.

Stel een formule op bij deze sinusoid.

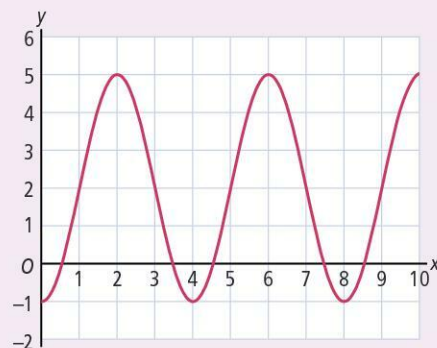
Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

035

In deze opdracht ga je een functievoorschrift van de vorm $f(x) = d + a \sin(b(x - c))$ opstellen bij de sinusoïde.

- Lees in de grafiek het maximum en het minimum af.
- Bereken de evenwichtsstand d .
- Bereken de amplitude a .
- Lees de periode af in de grafiek en bereken hiermee b .
- Lees de horizontale verschuiving af door te kijken in welk punt de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat. Welke waarde heeft c dus?
- Stel het functievoorschrift $f(x)$ op.

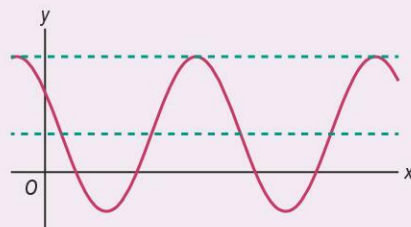


036

Van de sinusoïde bij de formule $y = d + a \sin(b(x - c))$ is gegeven:

- de periode is 5,
- een beginpunt is (3, 2),
- het maximum is 6.

- Zet in de schets de gegevens van deze sinusoïde.
- Leg uit dat de evenwichtsstand gelijk is aan 2 is en de amplitude gelijk aan 4.
- Bereken b .
- Stel een formule op bij de sinusoïde.
- Van een andere sinusoïde is een beginpunt $(-1, 2)$ en het dichtstbijzijnde hoogste punt is $(4, 3)$. Maak een schets van deze sinusoïde en stel de formule op.
- Stel een formule op van een sinusoïde met twee opeenvolgende toppen $(3, 10)$ en $(7, -6)$.



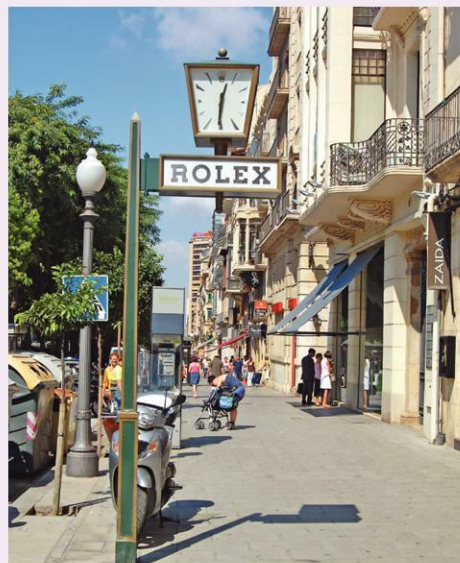
Uitdagende opdrachten

U5

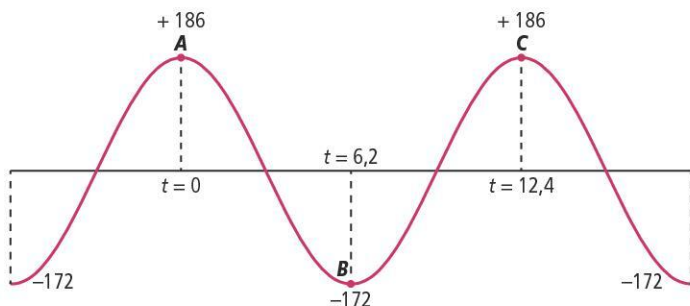
Als het uiteinde van de grote wijzer van de klok op de foto op zijn laagste punt zit, is hij 2,8 meter boven de grond. Op zijn hoogste punt is dat 3,6 meter. De kleine wijzer heeft een lengte die gelijk is aan de helft van de grote.

Als je de hoogte van de uiteinden van de wijzers van de klok ten opzichte van de grond, uitzet tegen de tijd in uren, ontstaan twee sinusoïden.

- Stel formules op bij deze twee sinusoïden. Neem hierbij het tijdstip $t = 0$ op 0.00 uur.
- Hoe vaak passeert de grote wijzer de kleine wijzer gedurende een etmaal?



18.6 Gemengde opdrachten



- 39** Van een Nederlandse kustplaats is de gemiddelde getijkromme getekend. Deze kromme is gebaseerd op gegevens over zowel de dagelijkse tijdstippen voor hoogwater en laagwater als de hoogten (in centimeters) ten opzichte NAP. De tijd is in uren. Stel een formule op die bij de getijkromme past. Druk de hoogte h in cm uit in de tijd t in uren.

- 40** Een formule die bij benadering de hoeveelheid lucht in de longen weergeeft tijdens het hardlopen, is $V = 2,3 + 1,2 \sin(1,1\pi t)$. Hierin is V de hoeveelheid lucht in de longen in liters en t de tijd in seconden.

- Hoelang duurt één ademhaling?
- Hoeveel lucht zit er maximaal in de longen? Geef drie tijdstippen waarop dat het geval is.
- Bereken gedurende hoeveel tijd per ademhaling er minder dan 2 liter lucht in de longen zit.

- 41** Stel een formule op van de volgende sinusoiden.

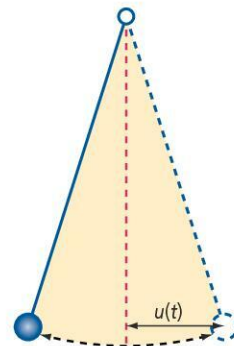
- De periode is 5, een beginpunt is $(3, 1)$ en het maximum is 7.
- Twee opeenvolgende toppen zijn $(2, 10)$ en $(2\frac{1}{2}, -4)$.

- 42** Aan een lange staaldraad is een gewichtje bevestigd. Dit gewichtje slingert naar links en rechts. De uitwijking ten opzichte van een verticale lijn wordt gegeven door de functie

$$u(t) = 8 \sin\left(\frac{2}{3}\pi t\right).$$

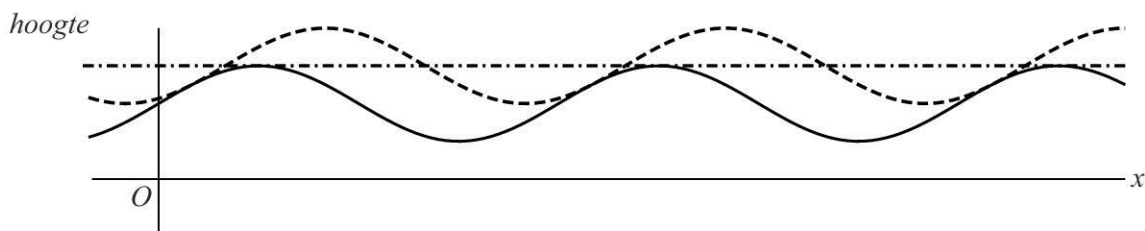
Hierbij is u de uitwijking in cm en t de tijd in seconden.

- Hoelang duurt één periode?
- Op welke tijdstippen gedurende de eerste zes seconden geldt $u(t) = 3$?
- Bereken hoeveel procent van de tijd de uitwijking ten opzichte van de verticale lijn meer dan 6 cm is.





- 43** Langs het Zandpad in Utrecht staat een hek dat bestaat uit twee sinusoïden die elkaar raken. In de figuur zijn de twee sinusoïden in het hek schematisch weergegeven.



De formule die bij de onderste sinusoïde hoort, luidt

$$S_{\text{onderste}} = 100 + 50 \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right).$$

Hierbij is S_{onderste} de hoogte in

centimeters en x de afstand tot het beginpunt op de evenwichtsstand in meters. De toppen van de onderste sinusoïde liggen op de evenwichtsstand van de bovenste sinusoïde. De amplitudes van beide sinusoïden zijn gelijk.

Verder is gegeven dat de twee sinusoïden elkaar bij $x = \frac{1}{2}$ en ook bij $x = 6\frac{1}{2}$ raken.

Stel de formule bij de bovenste sinusoïde op en licht toe hoe je je antwoord gevonden hebt.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2019, tijdvak 1)

Theorie

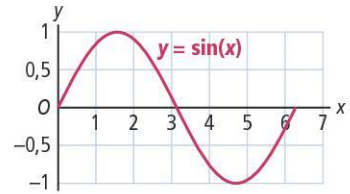
Sinusfunctie, sinusoïde, evenwichtsstand, amplitude en periode

Als een punt P met een snelheid van 1 meter per seconde over een cirkel met straal 1 meter beweegt, dan kun je de hoogte van het punt na t seconden berekenen met $\sin(t)$.

De functie $f(x) = \sin(x)$ heet de sinusfunctie. De grafiek van $f(x) = \sin(x)$ heet een sinusoïde.

Voor de grafiek van de functie $f(x) = \sin(x)$ geldt:

- De evenwichtsstand is 0.
- De amplitude is 1.
- De periode is 2π .
- In het punt $(0, 0)$ gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand.
- De verticale lijnen door de toppen zijn assen van symmetrie van de grafiek.



- S1** Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$.
- In welke punten daalt de grafiek van f op het interval $[2\pi, 6\pi]$ het snelst?
 - Geef de coördinaten van de toppen van de grafiek van f op het interval $[2\pi, 6\pi]$.

Vaardigheid

Je kunt een functievoorschrift aanpassen als de amplitude van de grafiek verandert.

De grafiek van de functie $h(x) = a \cdot \sin(x)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor a .

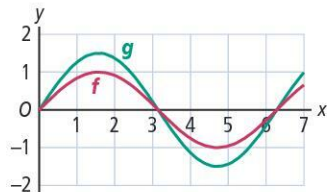
De grafiek wordt verticaal uitgerekt als $a > 1$ of $a < -1$ en in elkaar gedrukt als $-1 < a < 1$.

Als het getal a negatief is, dan wordt de grafiek bovendien in de x -as gespiegeld.

De amplitude van de grafiek van de functie $h(x) = a \cdot \sin(x)$ is gelijk aan a als a positief is en gelijk aan $-a$ als a negatief is.

Voorbeeld

Gegeven zijn de grafieken van $f(x) = \sin(x)$ en van functie g .



De amplitude van g is 1,5.
Het functievoorschrift is $g(x) = 1,5 \sin(x)$.

- S2** De grafiek van functie h ontstaat door spiegeling in de x -as van de grafiek van de functie g uit het voorbeeld.
Stel het functievoorschrift van h op.
- S3** Geef de amplitude van grafieken van de functies $f(x) = 12 \sin(x)$ en $g(x) = -0,8 \sin(x)$.

Vaardigheid

Je kunt een functievoorschrift aanpassen als de periode van de grafiek verandert.

De grafiek van de functie $h(x) = \sin(bx)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as. De grafiek wordt in horizontale richting uitgerekt als $0 < b < 1$ en in elkaar gedrukt als $b > 1$.

Als het getal b negatief is, dan wordt de grafiek bovendien in de y -as gespiegeld.

Voor positieve waarden van b is het verband tussen b en de

periode: $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$ ofwel de $\text{periode} = \frac{2\pi}{b}$

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies

$$f(x) = \sin(0,5\pi x) \text{ en } g(x) = \sin(6x).$$

Bereken de periode van de grafieken van f en g .

Oplossing

$$f: b = 0,5\pi, \text{ de periode is } \frac{2\pi}{0,5\pi} = 4.$$

$$g: b = 6, \text{ de periode is } \frac{2\pi}{6} = \frac{1}{3}\pi.$$

S4 Geef van de grafieken bij de formules de periode.

a $H = \sin(0,25t)$

b $T = \sin(2\pi p)$

c $R = \sin(0,2\pi x)$

Vaardigheid

Je kunt een functievoorschrift aanpassen als de evenwichtsstand van de grafiek verandert.

De grafiek van de functie $g(x) = d + \sin(x)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een verticale verschuiving van d eenheden omhoog.

De evenwichtsstand is d .

Voorbeeld

De grafiek van $f(x) = \sin(x)$ wordt 12 eenheden omlaag verschoven.

Stel het functievoorschrift $g(x)$ op bij de beeldgrafiek.

Oplossing

De evenwichtsstand wordt -12 .

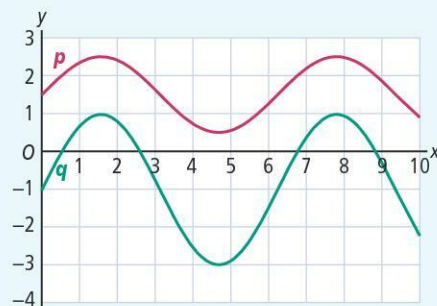
Het functievoorschrift is

$$g(x) = -12 + \sin(x).$$

S5 De grafieken van de functies p en q zijn ontstaan door een verticale verschuiving en een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$

a Geef van beide grafieken de amplitude en de evenwichtsstand.

b Stel de functievoorschriften $p(x)$ en $q(x)$ op.



S6 **a** De grafiek van de functie h ontstaat door de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ 6 eenheden omhoog te verschuiven.

Stel het functievoorschrift $h(x)$ op.

b Gegeven is de functie $k(x) = \sin(x) - 7$.

Hoe ontstaat de grafiek van k uit die van f ?

Vaardigheid

Je kunt een functievoorschrift aanpassen als het beginpunt van de grafiek verandert.

De grafiek van de functie $h(x) = \sin(x - c)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een horizontale verschuiving van c eenheden naar rechts.

In het punt $(c, 0)$ gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand.

Voorbeeld

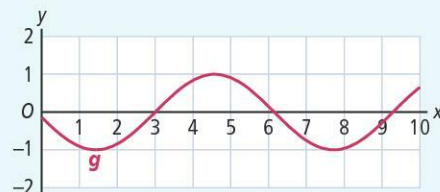
De grafiek van h ontstaat door de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ 3 eenheden naar links te verschuiven.

Stel het functievoorschrift van h op.

Oplossing

3 naar links betekent $c = -3$. Het functievoorschrift is $h(x) = \sin(x + 3)$.

- S7**
- Gegeven is de grafiek van de functie g .
Stel het functievoorschrift $g(x)$ op.
 - Geef de coördinaten van een punt waar de grafiek van $T = \sin(p + 0,5)$ stijgend door de evenwichtsstand gaat.



Vaardigheid

Je kunt kenmerken van een sinusöide uit het functievoorschrift afleiden.

Periodieke grafieken met een formule van de vorm $y = d + a \sin(b(x - c))$ noem je sinusöiden.

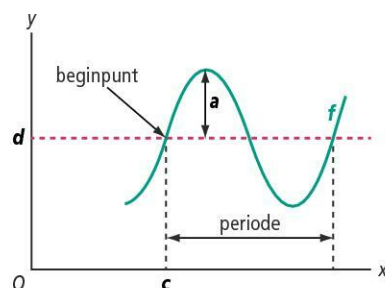
De betekenis van de getallen a , b , c en d voor de grafiek is:

- De amplitude is a als $a > 0$ en de amplitude is $-a$ als $a < 0$.
- De evenwichtsstand d .
- Met b bereken je de periode.

Voor het verband tussen b (met $b > 0$) en de periode geldt:

$$b = \frac{2\pi}{\text{periode}} \text{ of } \text{periode} = \frac{2\pi}{b}$$

- Een punt waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat, noem je een beginpunt. Een beginpunt is bijvoorbeeld het punt (c, d) (als $a > 0$).



Voorbeeld

Bereken de coördinaten van twee opeenvolgende toppen van de sinusöide $y = 5\sin(\frac{1}{2}\pi(x - 1)) - 2$.

Oplossing

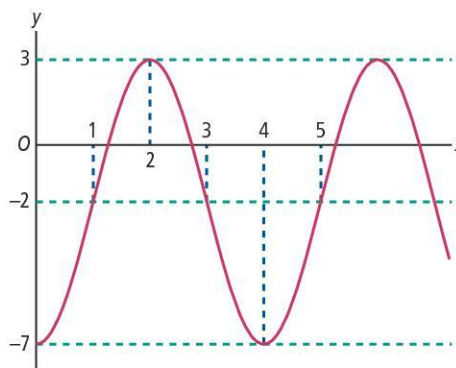
De evenwichtsstand is -2 en de amplitude is 5 .

Het maximum is 3 , het minimum is -7 .

De periode is 4 en een beginpunt is $(1, -2)$.

Twee hierop volgende snijpunten met de evenwichtsstand zijn dus $(3, -2)$ en $(5, -2)$.

De toppen zitten halverwege deze drie punten en zijn dus $(2, 3)$ en $(4, -7)$.



- S8** a Geef de evenwichtsstand, de amplitude en de periode van de grafieken van de functies $f(x) = 3 + 5 \sin\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)\right)$ en $g(x) = -3 \sin\left(\frac{1}{3}\pi x\right) + 10$.
- b Bereken de coördinaten van de toppen van de grafiek van $g(x) = -3 \sin\left(\frac{1}{3}\pi x\right) + 10$ op het interval $[0, 12]$.

Vaardigheid

Je kunt een formule opstellen bij een sinusöide.

- 1 Lees het maximum en het minimum af.
- 2 Bereken hiermee de evenwichtsstand d en de amplitude a .
- 3 Lees de periode af en bereken b met $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$
- 4 Lees een beginpunt van de sinusöide af, de x -coördinaat hiervan is gelijk aan c .
- 5 Schrijf de formule op.

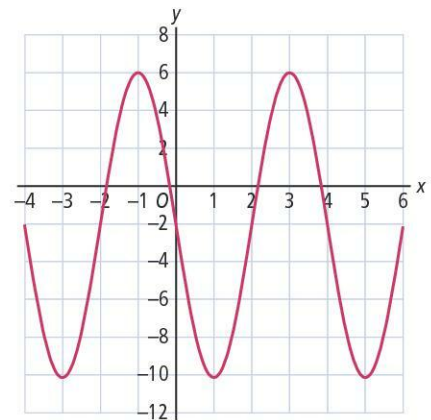
Voorbeeld

Stel een formule op bij de gegeven sinusöide.

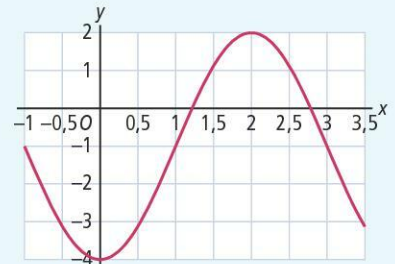
Oplossing

De formule is van de vorm $y = d + a \sin(b(x - c))$.

- 1 Het maximum is 6 en het minimum is -10.
- 2 De evenwichtsstand is $d = \frac{6 - 10}{2} = -2$ en de amplitude $a = 6 - (-2) = 8$.
- 3 De periode is 4, dus $b = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$.
- 4 De grafiek gaat bij $x = -2$ stijgend door de evenwichtsstand, dus $c = -2$.
- 5 Een formule is $y = -2 + 8\sin\left(\frac{1}{2}\pi(x + 2)\right)$.



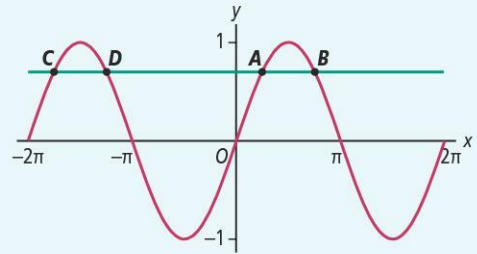
- S9** a De grafiek hoort bij functie f .
Stel het functievoorschrift op van f .
- b De grafiek van de functie g is een sinusöide met periode 12 en evenwichtsstand -2. Het punt $(5, 4)$ is een top van de grafiek van g .
Stel het functievoorschrift $g(x)$ op.



T1 Bepaal van de sinusoiden de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt.

- a $y = -3 + 7 \sin\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)\right)$
- b $y = 7 - 3 \sin(4(x + 4))$
- c $y = -0,23 + 0,65 \sin(0,4\pi x)$

T2 De grafiek van $y = \sin(x)$ en de lijn $y = 0,7$ snijden elkaar op het interval $[-2\pi, 2\pi]$ in de punten A , B , C en D . Het punt A heeft x -coördinaat $0,78$. Geef met behulp van de eigenschappen van de grafiek van $y = \sin(x)$ de x -coördinaten van de punten B , C en D .

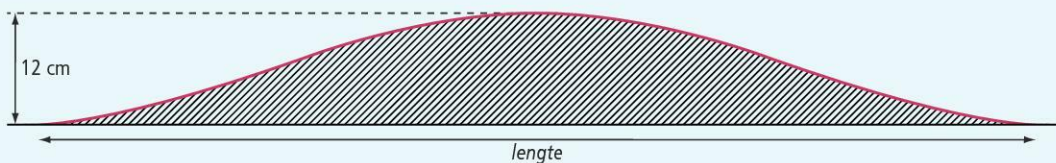


T3 De hoeveelheid lucht in de longen is bij regelmatige ademhaling een periodiek verschijnsel. Een model hiervoor is $H = 1,2 + 0,7 \sin(1,25t)$ met t in seconden en H in liters.

- a Hoe groot is de periode? Geef je antwoord in hele seconden.
- b Hoeveel lucht blijft er bij het uitademen in de longen minimaal achter?
- c Na het leveren van een inspanning is de ademfrequentie 1,5 keer zo hoog en de maximale longinhoud 2,4 liter geworden. De minimale longinhoud is gelijk gebleven. Stel een formule op die hierbij past.

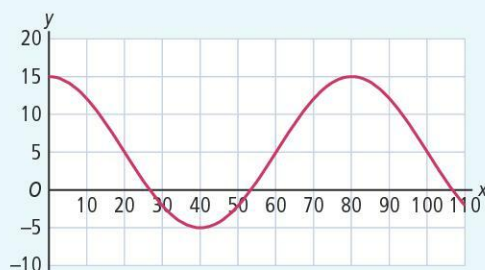
T4 Het zijaanzicht van een verkeersdrempel heeft de vorm van een sinusoid. Hierbij is de volgende formule opgesteld:

$h = 0,06 + 0,06 \sin\left(\frac{1}{2}\pi(x - 1)\right)$. Hierin is h de hoogte en x de horizontale afstand vanaf het (linker-)begin van de drempel, beide in meters.

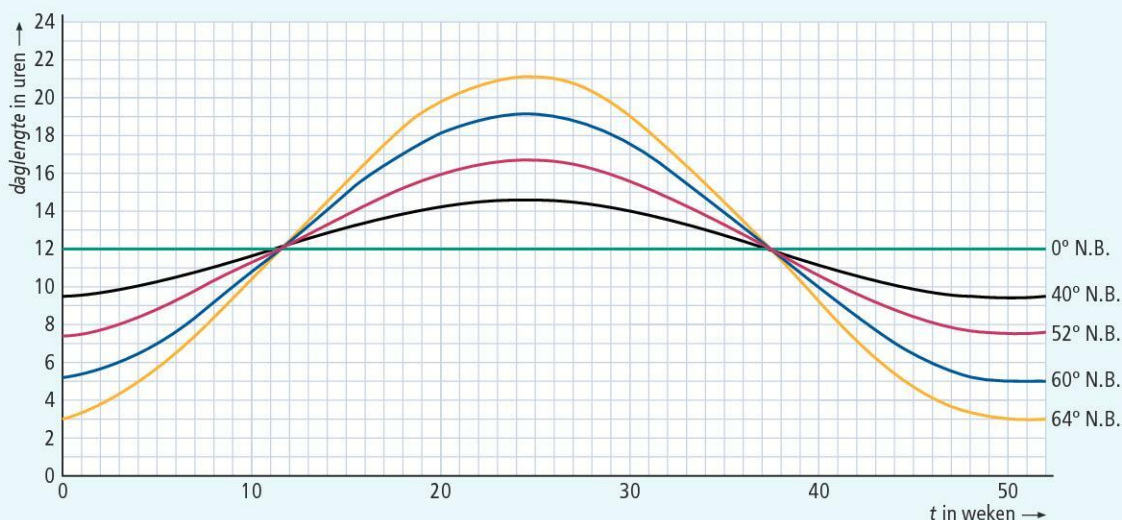


- a Bereken hoeveel meter de lengte van deze drempel is.
- b De helling van de drempel is niet overall even groot. Hoeveel meter van het begin van de drempel ligt het eerste punt waar de drempel een maximale helling heeft?

- T5**
- Bereken de evenwichtsstand, de amplitude en de periode van de sinusoidale.
 - Stel een formule op bij de sinusoidale.



- T6**
- In de figuur is de daglengte weergegeven voor de evenaar en voor vier plaatsen op het noordelijk halfrond. Op de horizontale as is de tijd t in weken uitgezet met $t = 0$ op 1 januari en op de verticale as de daglengte d in uren.



- Wat is de maximale daglengte op 60° NB en wanneer wordt deze bereikt?
- Voor welke waarden van t is de daglengte voor alle breedtegraden gelijk? Welke bijzondere dagen zijn dat?
- Uitgaande van 52 weken in een jaar kun je de daglengte d benaderen met de formule $d = 12 + a \cdot \sin(0,1208 \cdot t)$ met t het aantal weken na 21 maart.
Op welke dag neemt de daglengte het sterkst toe?
- Leg uit dat uit de formule volgt dat de periode 1 jaar is.
- Amersfoort ligt op 52° NB.
Welke waarde van a geldt voor Amersfoort?
- Bereken voor Amersfoort bij welke waarden van t geldt dat $d = 16$.
Wat is de praktische betekenis van het antwoord?
- Stel de formule op voor de daglengte bij een plaats op 64° NB met t de tijd in dagen en $t = 0$ op 1 januari.

Je kunt een functievoorschrift aanpassen als de amplitude verandert.

- E1** Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$.
Stel een functievoorschrift op van de beeldgrafiek na
a een vermenigvuldiging van 4 ten opzichte van de x -as.
b een vermenigvuldiging van -3 ten opzichte van de x -as.

Je kunt het functievoorschrift opstellen als de periode verandert.

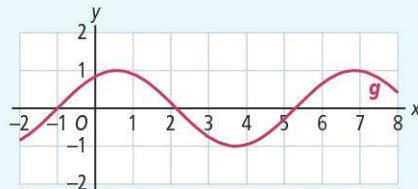
- E2** **a** Gegeven is het functievoorschrift $f(x) = \sin(bx)$.
Hoe groot is b bij een periode van $0,2\pi$? En bij een periode van 8?
b Geef de periode van de grafiek van $g(x) = \sin(1,5x)$ en van de grafiek van $h(x) = \sin(\pi x)$.

Je kunt een functievoorschrift aanpassen als de evenwichtsstand van de grafiek verandert.

- E3** **a** De grafiek van de functie g ontstaat door de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ 3,4 eenheden omlaag te verschuiven.
Stel het functievoorschrift $g(x)$ op.
b Gegeven is de functie $h(x) = 8 + \sin(x)$.
Hoe ontstaat de grafiek van h uit die van f ?

Je kunt een functievoorschrift aanpassen als het beginpunt van de grafiek verandert.

- E4** **a** Gegeven is de grafiek van de functie g .
Stel het functievoorschrift $g(x)$ op.
b In welk punt gaat de grafiek van $K = \sin(t - 2,5)$ stijgend door de evenwichtsstand?

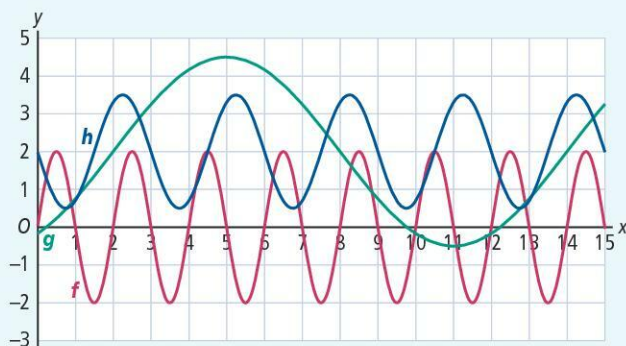


Je kunt kenmerken van een sinusöide uit de formule afleiden.

- E5** Geef de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt van de grafieken bij de volgende functies.
a $g(x) = -3 + 2 \sin(x - 5)$
b $g(x) = 7 + 3 \sin\left(\frac{1}{2}(x + 2)\right)$
c $g(x) = 8 + 5 \sin(3\pi(x - 1))$
d $g(x) = -2,7 - 1,6 \sin(x + 5)$

Je kunt een formule opstellen bij een sinusöide.

E6 Gegeven zijn de grafieken van f , g en h .



- Stel de functievoorschriften $f(x)$ en $g(x)$ op.
- De grafiek van h wordt 2 naar links en 1,5 omhoog verschoven. Stel een formule op bij de beeldgrafiek.

E7 De productie van voedsel is afhankelijk van de lengte van het groeiseizoen. Onder het groeiseizoen wordt verstaan het aantal dagen per jaar dat de gemiddelde dagtemperatuur hoger is dan een bepaalde temperatuur. Voor veel gewassen in Nederland is die temperatuur 6°C .

De gemiddelde dagtemperatuur T gedurende een jaar in ons

land wordt benaderd door de formule $T = 9,5 - 7,5 \sin\left(\frac{1}{6}\pi(x + 3)\right)$.

Hierin is x de tijd in maanden na 1 januari.

- Plot en schets de grafiek van T voor één jaar.
- Hoelang is het groeiseizoen?
- Een bepaald gewas heeft wat meer warmte nodig. De gemiddelde dagtemperatuur moet nu boven 8°C liggen. Hoeveel dagen korter is het groeiseizoen voor dit gewas?

E8 Iemand zit in een reuzenrad dat met een constante snelheid draait. Zijn hoogte ten opzichte van de grond wordt gegeven door de formule $H = 13 + 12 \sin(4\pi(t - 0,125))$.

Hierin is H de hoogte in meters en t de tijd in minuten.

- In hoeveel seconden draait het rad precies één keer rond?
- Op welke hoogte stapt de persoon in?
- Hoe hoog komt de persoon maximaal?
- Bereken op welke hoogte de persoon zich 10 seconden na het instappen bevindt.
- Stel een formule op als de tijd niet in minuten maar in seconden wordt gegeven.

E9 Bij een sinusöide hoort de formule $y = 9 + 5 \sin\left(1\frac{1}{2}\pi\left(x - \frac{2}{3}\right)\right)$.

Beredeneer wat de coördinaten zijn van de toppen op het interval $[0, 2]$.

Discriminatie: ja of nee?

In 1972 spande een groep vrouwen een proces aan tegen een fabriek in Texas die apparaten voor airconditioning produceert. Deze fabriek nam alleen nieuwe personeelsleden in dienst die langer waren dan 170,0 cm. De vrouwen waren bij hun sollicitatie afgewezen omdat ze niet aan deze eis voldeden. De advocaat van de vrouwen benadrukte het discriminerende karakter van deze voorwaarde door te stellen dat 91,0% van alle Amerikaanse vrouwen tussen de 18 en 65 jaar niet lang genoeg was om aangenomen te kunnen worden. Dit percentage ontleende hij aan een onderzoek van het Amerikaanse ministerie van volksgezondheid waaruit bleek dat de lengte van de vrouwen normaal verdeeld was met $\mu = 160,4$ cm.

Je kunt berekenen dat de bijbehorende standaardafwijking $\sigma \approx 7,2$ cm is.

De vertegenwoordiger van de fabriek bij het proces noemde het percentage van 91 sterk overdreven. Het door de tegenpartij aangehaalde onderzoek stamde uit 1948. De gemiddelde lengte was volgens hem in de periode 1948-1972 flink toegenomen. Hij ondersteunde zijn betoog met het resultaat van een recent onderzoek. In een aselechte steekproef van 1000 vrouwen tussen 18 en 65 jaar werd in 1972 bij 117 vrouwen een lengte gemeten van meer dan 172,6 cm.



Waar komt die 172,6 vandaan?

De groep Amerikaanse vrouwen tussen 18 en 65 jaar die langer zijn dan 170,0 cm noem je V . Voor de mediaan m van de lengte van de vrouwen van V geldt dat 50% van de vrouwen uit V langer is dan m . Dan is 4,5% procent van de totale groep vrouwen uit het onderzoek van 1948 langer dan m . Uitgaande van $\mu = 160,4$ cm en $\sigma = 7,2$ cm vind je dan met de normale verdeling $m \approx 172,6$.

De advocaat van de vrouwen gaf toe dat het door hem aangehaalde onderzoek wat verouderd was en de gemiddelde lengte van de vrouwen waarschijnlijk wel was toegenomen. Hij bleef echter benadrukken dat ook in 1972 nog steeds een grote meerderheid van de Amerikaanse vrouwen op grond van hun lengte door het bedrijf zou worden afgewezen. Kreeg hij gelijk?



Opdracht

- a Neem aan dat de standaardafwijking ongewijzigd is, dus $\sigma = 7,2$ cm.

Ga na dat de gemiddelde lengte van de Amerikaanse vrouw volgens het onderzoek uit 1972 gelijk is aan $\mu = 164$ cm.

- b Bereken het percentage Amerikaanse vrouwen in de genoemde leeftijdsgroep dat in 1972 niet lang genoeg was voor een functie bij de fabriek.

SE

CE

K

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Machtsformules
- Formules herleiden
- Differentiëren
- Exponentiële en logaritmische formules herleiden
- Periodieke functies



Machtsformules

Theorie

De macht van een product is gelijk aan het product van de machten. In formule: $(p \cdot q)^a = p^a \cdot q^a$.

Ook geldt de formule $\left(\frac{p}{q}\right)^a = \frac{p^a}{q^a}$

Je kunt van deze formules gebruikmaken om sommige eigenschappen van formules te verklaren of om formules te vereenvoudigen.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $w = 50 \cdot d^{0,75}$.
Wat gebeurt er met w als d tien keer zo groot wordt?

Oplossing

Substitueer voor d een 10 keer zo grote waarde, dat is $10d$, in de formule $w = 50 \cdot d^{0,75}$.

$$w = 50 \cdot (10d)^{0,75}$$

$$w = 50 \cdot 10^{0,75} \cdot d^{0,75} \quad \text{haakjes weggewerkt}$$

$$w = 10^{0,75} \cdot 50 \cdot d^{0,75} \quad \text{volgorde verwisseld}$$

De uitkomst van deze formule is $10^{0,75} \approx 5,62$ keer zo groot als de uitkomst van de formule $w = 50 \cdot 10^{0,75}$.

Dus w wordt dan ongeveer 5,62 keer zo groot.

Voorbeeld 2

Schrijf de formule $K = 48q^2 \cdot \left(\frac{3}{2q}\right)^4$ in de vorm $K = a \cdot q^b$.

Oplossing

$$K = 48q^2 \cdot \frac{3^4}{(2q)^4} \text{ geeft } K = 48q^2 \cdot \frac{81}{16q^4}$$

$$K = \frac{48 \cdot 81 \cdot q^2}{16q^4} \text{ ofwel } K = 243q^{-2}$$

- 1 Bereken hoeveel keer zo groot B wordt in het geval A tien keer zo groot wordt.

a $B = 12,5 \cdot A^{3,4}$

d $B = 0,45 \cdot A^{-0,125}$

b $B = \frac{0,35}{A^{1,34}}$

e $B = \frac{1235}{A^{0,75}}$

c $B = 1,9876A$

f $B = 12\,500 \cdot A^{\frac{1}{3}}$

- 2 Schrijf in de vorm $K = a \cdot q^b$.

a $K = 0,32 \cdot \left(\frac{2}{q}\right)^{1,5}$

d $K = q^5 \cdot \left(\frac{4}{q^2}\right)^3$

b $K = \frac{16}{q} \cdot \left(\frac{1}{2}q\right)^4$

e $K = \frac{10}{q^5} \cdot \left(\frac{3q}{5}\right)^2$

c $K = -3q^4 \cdot \left(\frac{-2}{q}\right)^3$

f $K = \frac{10q}{2q^3} \cdot (4q)^2$

- 3** Het verband tussen lichaamsgewicht en skeletgewicht van landzoogdieren is te benaderen met de formule $S = 0,0343 \cdot M^{1,083}$. Hierin is S het skeletgewicht in grammen en M het lichaamsgewicht in grammen.
- a** Het lichaamsgewicht van een olifant is 200 000 keer zo groot als dat van een muis. Iemand beweert dat het skeletgewicht van de olifant ook 200 000 keer zo groot is als dat van de muis.
Toon aan dat dat niet waar is.
 - b** Hoeveel keer zo groot is het skeletgewicht van de olifant?
 - c** Het lichaamsgewicht van zoogdier A is 60 keer zo groot als dat van zoogdier B.
Welke verhouding hebben hun skeletgewichten?

Formules herleiden

- 4** Schrijf de formules zonder haakjes en zo kort mogelijk.
- a** $y = (p + 4)(p - 5)$
 - d** $K = -7x - 4(3x - 2)$
 - b** $q = (t - 5)(6 - 3t)$
 - e** $A = 18k - (17 - 5k)$
 - c** $m = 3n^2 + 6n(2n + 5)$
 - f** $T = 5r + 3r(2r + 2)$
- 5** Herleid de vergelijkingen naar de vorm $y = ax + b$.
- a** $9x + 2y - 10 = 0$
 - d** $5(x - 2) + 2y = 15 + 8y$
 - b** $5x = 4y + 9$
 - e** $3x + 7y = 12 - 4x + 5y$
 - c** $0,4x + 1,2y = 8$
 - f** $1\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 2\frac{1}{4}$

Theorie

De formule $P = 40 \cdot Q^{2,1}$ hoort bij een machtsverband. In deze formule is P uitgedrukt in Q . Om Q uit de drukken in P , kun je gebruikmaken van de regel: uit $x^a = c$ volgt $x = c^{\frac{1}{a}}$.

Voorbeeld

$P = 40 \cdot Q^{2,1}$
Druk Q uit in P .

Oplossing

$$40 \cdot Q^{2,1} = P$$

$$Q^{2,1} = \frac{P}{40} = 0,025P$$

$$Q = (0,025P)^{\frac{1}{2,1}} = 0,025^{\frac{1}{2,1}} \cdot P^{\frac{1}{2,1}}$$

$$Q \approx 0,173 \cdot P^{0,476}$$

- 6** Druk Q uit in P .
- a** $P = 10 \cdot Q^{0,5}$
 - d** $P = 16 - Q^{0,01}$
 - b** $P = 0,04 \cdot Q^{1,25}$
 - e** $P = 18 + 2 \cdot Q^{0,1}$
 - c** $P = 12 + Q^4$
 - f** $P = 0,25Q^{25} - 18$

- 7** Druk y uit in v .
- a** $y \cdot v = 3$ **d** $2y(v + 6) = -2$
- b** $\frac{y}{v} = 2$ **e** $\frac{3v - 9}{y + 1} = 3$
- c** $\frac{9v}{y} = 15$ **f** $\frac{y}{y - 1} = v$

Theorie

In de formule $K = 500 - B \cdot Q^3$ is de variabele K uitgedrukt in de variabelen B en Q . Bij een gegeven waarde voor B kun je door substitutie en herleiden Q uitdrukken in K .

Voorbeeld

Gegeven $K = 500 - B \cdot Q^3$.
Druk Q uit in K als je weet dat $B = 75$.

Oplossing

$500 - 75 \cdot Q^3 = K$ geeft $-75 \cdot Q^3 = K - 500$.

$$Q^3 = \frac{K - 500}{-75} = -\frac{1}{75}K + 6\frac{2}{3} \text{ en dus } Q = \left(-\frac{1}{75}K + 6\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

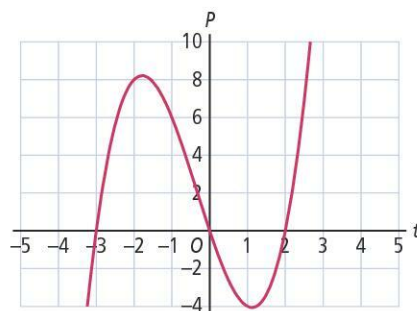
- 8** Gegeven de formule $K = 500 - B \cdot Q^3$ uit het voorbeeld.
- a** Druk B uit in K als je weet dat $Q = 2$.
- b** Substitueer in de formule $K = 100$ en druk B uit in Q .
- 9** Gegeven zijn de formules $K = p \cdot q$ en $q = -2p + 8$.
Druk K uit in q .

Differentiëren

- 10** Differentieer.
- a** $f(x) = 30x + 5x^7 - 30$ **d** $f(p) = (p - 3)^2$
- b** $A(t) = 0,1t^{100} - 10 + 0,01t$ **e** $W(z) = (z^2 - 4)(z^2 + 4)$
- c** $K(q) = 2(-q + 1) + q$ **f** $T(t) = (t^3 - 4)^5$
- 11** Bepaal $\frac{dA}{dt}$
- a** $A = \sqrt{8t^2 + 6}$ **c** $A = 5(3 - \sqrt{t})^6$
- b** $A = \frac{3}{t^4}$ **d** $A = \frac{7}{2\sqrt{t+2}}$

12 Gegeven is de grafiek van de functie $P(t) = t^3 + t^2 - 6t$.

- Op de grafiek van P ligt het punt A met $t = 2$.
Stel een vergelijking op van de raaklijn in A .
- Bereken met behulp van de afgeleide functie bij welke waarden van t de grafiek van P een top heeft. Rond je antwoord af op twee decimalen.
- Bereken met behulp van de afgeleide voor welke waarden van t de helling gelijk is aan 2.



Exponentiële en logaritmische formules herleiden

Theorie

Voor het rekenen met logaritmen gelden de rekenregels hiernaast. Bij deze regels is $g > 0$, $g \neq 1$, $a > 0$ en $b > 0$. Soms is het nodig om een getal eerst als een logaritme te schrijven. Zo kun je bijvoorbeeld 3 schrijven als $3 = {}^2\log(2^3) = {}^2\log(8)$ maar ook als $3 = {}^5\log(5^3) = {}^5\log(125)$.

$$1 \quad {}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$$

$$2 \quad {}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$3 \quad p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$$

Voorbeeld 1

Schrijf als één logaritme $4 + 2 \cdot {}^3\log(5)$.

Oplossing

$$4 + 2 \cdot {}^3\log(5) =$$

$${}^3\log(3^4) + 2 \cdot {}^3\log(5) = \quad 4 = {}^3\log(3^4)$$

$${}^3\log(81) + {}^3\log(5^2) = \quad (\text{regel 3})$$

$${}^3\log(81) + {}^3\log(25) =$$

$${}^3\log(81 \cdot 25) = \quad (\text{regel 1})$$

$${}^3\log(2025)$$

Voorbeeld 2

Schrijf als één logaritme ${}^4\log(2x + 1) - \frac{1}{2} \cdot {}^4\log(x)$.

Oplossing

$${}^4\log(2x + 1) - \frac{1}{2} \cdot {}^4\log(x) =$$

$${}^4\log(2x + 1) - {}^4\log\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \quad (\text{regel 3})$$

$${}^4\log(2x + 1) - {}^4\log(\sqrt{x}) =$$

$${}^4\log\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{x}}\right) \quad (\text{regel 2})$$

13 Schrijf als één logaritme en zo kort mogelijk.

$$\mathbf{a} \quad 2 - 4 \cdot {}^5\log(3) \quad \mathbf{e} \quad 2 \cdot {}^4\log(x) - \frac{1}{2} \cdot {}^4\log(x)$$

$$\mathbf{b} \quad 1 - \log(2) + \log(5) \quad \mathbf{f} \quad \log(2a - 1) + \log(a + 6)$$

$$\mathbf{c} \quad 2 \cdot {}^5\log(3) + {}^5\log(2) \quad \mathbf{g} \quad {}^7\log(4k - 6) - 3 \cdot {}^7\log(k)$$

$$\mathbf{d} \quad \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(16) - {}^3\log(12) \quad \mathbf{h} \quad 3 \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(P) - {}^{\frac{1}{2}}\log(\sqrt{P}) - 3$$

14 Gegeven is de functie $f(x) = -1 + \log(3x - 2)$.

Herleid het functievoorschrift van de functie f tot de vorm $f(x) = \log(ax + b)$.

15 **a** Schrijf $g(x) = -3 + {}^2\log(8x^4)$ in de vorm $g(x) = a \cdot {}^2\log(x)$.

b Schrijf $h(x) = 1 + 2 \cdot \log(x) - \log(x^4 + 5)$ in de vorm $h(x) = \log(\dots)$.

- 16** Bij asfaltbetonwegen met dicht asfaltbeton (DAB-wegen) geldt voor het verband tussen de snelheid v in km per uur van het verkeer en het geluidsniveau D in decibel van het verkeer bij benadering de formule: $D = 4 + 36 \cdot \log(v)$.

- a** In een bebouwde kom is de maximaal toegestane verkeerssnelheid 50 km per uur.
Bereken het maximale geluidsniveau in de bebouwde kom.
- b** Bij welke snelheid is het geluidsniveau 75 dB?
- c** Herleid de gegeven formule tot de vorm $D = \log(a \cdot v^b)$.

- 17** Op het blaadje wordt $N(t) = 4 \cdot 5^{-2t+3}$ in de vorm $N(t) = b \cdot g^t$ geschreven.

In stap 1 is gebruik gemaakt van de rekenregel $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$.

Welke rekenregel is gebruikt in stap 2? En welke in stap 3?

- 18** Schrijf in de vorm $N(t) = b \cdot g^t$.

- a** $N(t) = 3^{3+2t}$ **d** $N(t) = 4^{-2-t}$
- b** $N(t) = 2 \cdot 9^{\frac{1}{2}t}$ **e** $N(t) = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-3t}$
- c** $N(t) = 5 \cdot 3^{t-2}$ **f** $N(t) = 16^{\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}}$

- 19** **a** Gegeven zijn de formules $u = 6 \cdot (0,6)^t$ en $v = 7,2 \cdot (0,6)^{t-1}$.
Laat algebraïsch zien dat geldt: $v = 2u$.
- b** Gegeven zijn de formules $S = 10^{0,4t+2}$ en $U = p \cdot 10^{0,4t}$.
Bereken de waarde van p waarbij geldt dat voor elke waarde van t geldt: $S = 4U$.

	$N(t) = 4 \cdot 5^{-2t+3}$	
	$N(t) = 4 \cdot 5^{-2t} \cdot 5^3$	1
	$N(t) = 4 \cdot 5^3 \cdot (5^{-2})^t$	2
	$N(t) = 500 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^t$	3

Theorie

Naast de rekenregels gebruik je soms de hoofdeigenschap van logaritmen:

Uit ${}^g\log(a) = b$ volgt $a = g^b$ en omgekeerd.

Deze eigenschap gebruik je bijvoorbeeld om een formule met logaritmen te herleiden naar een formule met exponenten of andersom.

Voorbeeld 1

$y = \frac{1}{5} \cdot 2^{x-4}$, druk x uit in y .

Oplossing

$$\begin{aligned} 2^{x-4} &= 5y \\ x-4 &= {}^2\log(5y) \\ x &= 4 + {}^2\log(5y) \end{aligned}$$

Voorbeeld 2

$y = 4 - {}^3\log(5x)$, druk x uit in y .

Oplossing

$$\begin{aligned} {}^3\log(5x) &= 4 - y \\ 5x &= 3^{4-y} \\ y &= \frac{1}{5} \cdot 3^{4-y} \end{aligned}$$

- 20** Druk x uit in y .
- a** $y = 3 \cdot 5^{x+2}$ **d** $y = 2 + 5 \cdot \log\left(\frac{1}{2}x\right)$
b $y = 3 \cdot {}^5\log(x+2)$ **e** $y = -12 + 15 \cdot 7^{2x-1}$
c $y = -1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **f** $y = -4,5 + 1,6 \cdot {}^7\log(4x-3)$

- 21** Het verband tussen de variabelen S en T voldoet aan de formule ${}^2\log(2S) = 3 - {}^2\log(3T)$.
- a** Herleid de gegeven formule tot de vorm ${}^2\log(\dots) = 3$.
b De formule die je opdracht a gevonden hebt, is ook te schrijven als $S \cdot T = a$.
 Bereken algebraïsch de waarde van a .

Periodieke functies

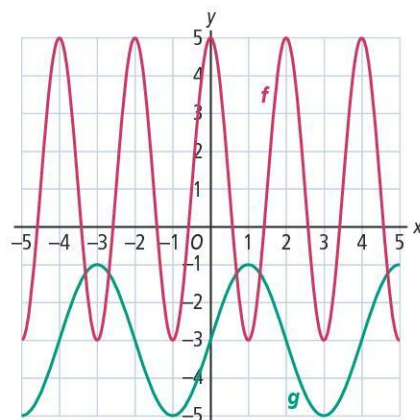
- 22** Gegeven zijn de grafieken van de functies f en g .
- a** Geef van beide grafieken de periode, de evenwichtsstand en de amplitude.
b Stel de functievoorschriften op van f en g .

- 23** Bereken de evenwichtsstand, de amplitude en de periode van de grafieken bij de volgende formules.

- a** $A = 8 - 3 \sin(4(t+3))$
b $B = 200 + 450 \sin(\pi k)$
c $C = 0,3 \sin(4 - 0,1x) - 0,2$

- 24** **a** Van de grafiek van de functie $f(x) = a \sin(bx)$ is de amplitude 5 en de periode $\frac{3}{4}\pi$.
 Bereken a en b .
b Stel een functievoorschrift op van een sinusöide waarvan de punten $\left(\frac{1}{4}\pi, -3\right)$ en $\left(\frac{3}{4}\pi, 3\right)$ toppen zijn.

- 25** De hoeveelheid lucht in de longen is bij een regelmatige ademhaling een periodiek verschijnsel waarvoor bij een persoon bij benadering de formule $V = 2,5 + 1,8 \sin(0,4\pi t)$ geldt. Hierin is t in seconden en V in liters.
- a** Bereken hoeveel lucht zich in de longen bevindt als $t = 3$.
b Hoe vaak wordt volgens deze formule in één minuut in- en uitgeademd?
c Bereken op welke tijdstippen tussen 0 en 10 seconden er zich precies 3 liter lucht in de longen bevindt.
d Bij elke ademhaling is enige tijd minder dan een liter lucht in de longen.
 Bereken hoeveel seconden dit het geval is.





SE

CE

K

In dit hoofdstuk

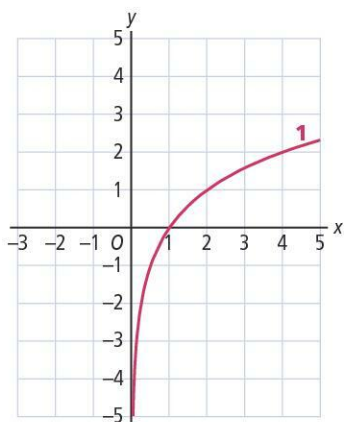
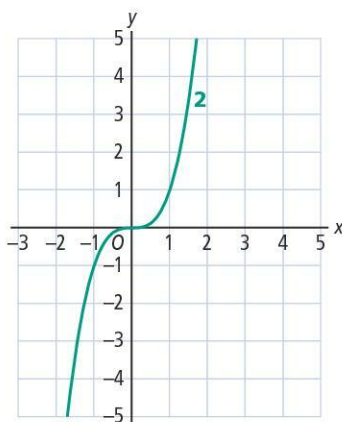
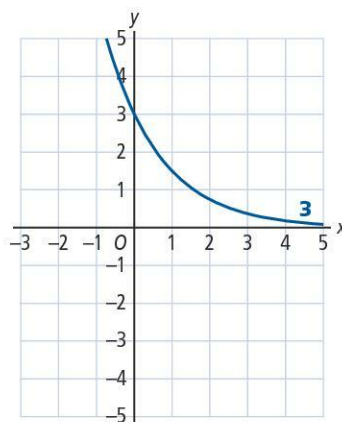
Je hebt in eerdere hoofdstukken veel gewerkt met functies en hun bijbehorende grafieken.

In dit hoofdstuk herhaal je hoe functievoorschriften veranderen als je de bijbehorende grafieken verschuift, of als je de eenheden van de bijbehorende variabelen verandert. Je leert ook wat somfuncties, verschilfuncties, productfuncties en quotiëntfuncties zijn. Als laatste ga je aan de hand van een formule beredeneren hoe de bijbehorende grafiek stijgt of daalt.

In hoofdstuk 20 ga je leren hoe je productfuncties en quotiëntfuncties differentieert.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- | | |
|---|-------------|
| • <i>Formules manipuleren</i> | opdracht 11 |
| • <i>Modelleren en algebraïseren</i> | opdracht 22 |
| • <i>Probleem oplossen en analytisch denken</i> | opdracht 37 |



- V1** Gegeven zijn drie grafieken op het interval $[-3, 5]$ en de vier functies $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $g(x) = {}^2\log(x)$, $h(x) = x^2$ en $i(x) = x^3$. Geef bij elke grafiek aan welke functie erbij hoort.

Theorie

Je bent verschillende soorten functies tegengekomen.

lineaire functie: $f(x) = ax + b$

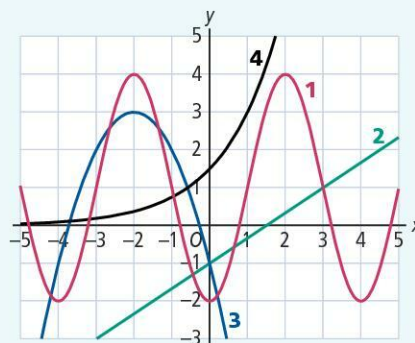
kwadratische functie: $f(x) = ax^2 + bx + c$

machtsfunctie: $f(x) = a \cdot x^n$

sinusfunctie: $f(x) = d + a \sin(b(x - c))$

exponentiële functie: $f(x) = b \cdot g^x$ met $g > 0$ en $g \neq 1$

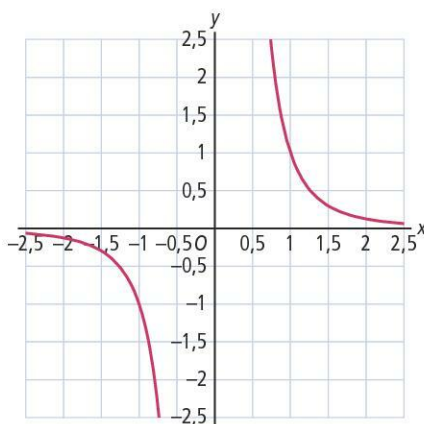
logaritmische functie: $f(x) = {}^g\log(x)$ met $g > 0$ en $g \neq 1$



- V2** In de figuur naast de theorie zie je vier grafieken, elk horend bij een van de genoemde functies.
- Hoe zie je dat grafiek 1 bij een sinusfunctie hoort?
 - Van welke twee functies uit de theorie zie je geen grafiek in de figuur?
 - Geef bij elk van de grafieken 2, 3 en 4 aan van welke soort functie het een grafiek is.

- V3** Gegeven zijn de functies $f(x) = g^x$ en $h(x) = {}^g\log(x)$.
- Kies $g = 3$ en schets de grafieken van f en h in één assenstelsel.
 - Kies $g = \frac{1}{3}$ en schets in een nieuw assenstelsel weer de grafieken van f en h .
 - Voor welke waarden van g zijn de grafieken van f en h stijgend? En voor welke waarden van g zijn de grafieken dalend?

- V4** Gegeven is de machtsfunctie $f(x) = a \cdot x^n$.
- Neem $a = 1$. Plot en schets de grafiek van f voor $n = 5$ en voor $n = -2$ en geef van beide functies aan of hun grafiek toenemend of afnemend stijgend of dalend is.
 - Voor $a = 1$ is een grafiek van f getekend. Deze grafiek gaat door het punt $P(2, \frac{1}{8})$. Welke waarde van n hoort bij deze grafiek?
 - Geef de coördinaten van het punt waar de grafiek van f bij $a = 1$ voor elke waarde van n doorheen gaat.
 - De grafiek van f gaat door de punten $(1, 4)$ en $(3, 36)$. Welke waarde van a volgt uit het gegeven dat de grafiek door het punt $A(1, 4)$ gaat?
 - Bereken voor de grafiek van opdracht d de bijbehorende waarde van n .



- V5** Schrijf zonder haakjes.
- $f(x) = x(3 + 2x) - 5(x - 6)$
 - $g(x) = -3x^4(8x^3 - 7x^6)$
 - $h(x) = (9 - 4x^3)(x + 5)$
 - $i(x) = 5x^4\left(4x + \frac{8}{x^3}\right)$
- V6** Substitueer formule B in formule A en schrijf je antwoord zo eenvoudig mogelijk.
- A: $y = 13 - 4u$ en B: $u = 2x - 3$
 - A: $y = 6 \cdot 9^u$ en B: $u = \frac{1}{2}x$
 - A: $y = u^2$ en B: $u = 2x + 1$
 - A: $y = \frac{12u}{4 - 3u}$ en B: $u = \frac{1}{3}x - 2$

19.1 Grafieken verschuiven

Je leert

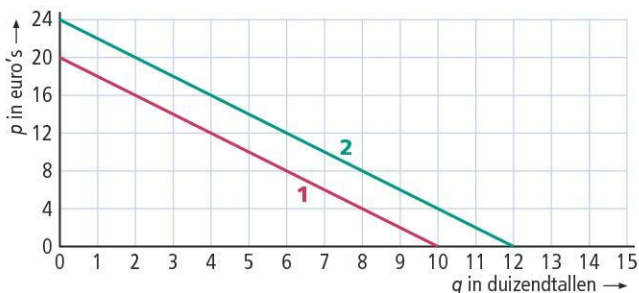
- hoe je na een verschuiving het functievoorschrift opstelt van de beeldgrafiek

Leerroutes

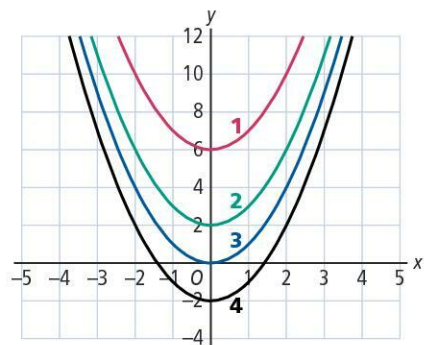
- ondersteunend: 1–2–03–3–4–5–6
- doorlopend: 1–2–3–4–5–6–7
- uitdagend: 1–3–4–5–6–7–U1

In het assenstelsel zijn de grafieken bij twee prijs-afzetfuncties getekend. Grafiek 2 is ontstaan door een verschuiving van grafiek 1.

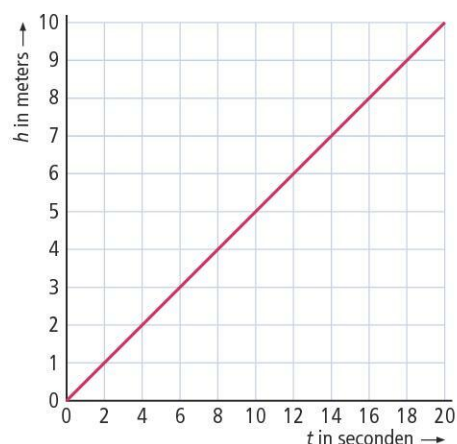
- Welke twee verschuivingen kunnen hierbij horen?



- 1 Gegeven zijn de functies $s(x) = x^2$ en $v(x) = x^2 + 6$. In een assenstelsel zijn vier grafieken getekend.
 - a Welke van de grafieken hoort bij functie s ? En welke grafiek bij functie v ?
 - b Beschrijf hoe de grafiek van v ontstaat uit de grafiek van s .
 - c Hoe zijn de twee overgebleven grafieken ontstaan uit de grafiek van s ?
 - d Stel bij beide overgebleven grafieken een functievoorschrift op.
 - e Gegeven is het functievoorschrift $f(x) = x^2 + a$. De top van de grafiek van f is het punt $(0, 12)$. Welke waarde heeft a in deze functie?



- 2 Harold neemt een roltrap naar boven. De roltrap is 10 meter hoog. In de grafiek kun je aflezen op welke hoogte Harold zich na t seconden bevindt met $t = 0$ het moment dat Harold op de roltrap stapt.
 - a Na hoeveel seconden staat Harold bovenaan de roltrap?
 - b Stel een formule op waarmee je kunt berekenen op welke hoogte h in meters Harold zich na t seconden bevindt.
 - c Elize stapt vier seconden na Harold op de roltrap. Teken in hetzelfde assenstelsel de grafiek die bij de hoogte hoort waarop Elize zich bevindt.
 - d Bij de grafiek van Elize past een formule van de vorm $h = p \cdot (t - q)$. Hoe groot is de waarde van p ? En van q ?



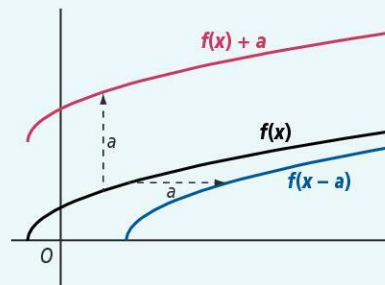
Theorie

Een grafiek kun je verschuiven. De grafiek die hierdoor ontstaat heet de **beeldgrafiek**.

Als je de grafiek van f met a eenheden omhoog verschuift, geldt voor de functie g van de beeldgrafiek $g(x) = f(x) + a$.

Als je de grafiek van f met a eenheden naar rechts verschuift, geldt voor de functie h van de beeldgrafiek $h(x) = f(x - a)$.

Een verschuiving heet ook wel een **translatie**.



Voorbeeld 1

De grafiek van de functie $p(x) = {}^3\log(2x)$ wordt 4 naar rechts en 5 omhoog verschoven. Geef het functievoorschrift $q(x)$ van de beeldgrafiek.

Oplossing

Om de grafiek 4 naar rechts te verschuiven, vervang je x door $x - 4$. Om de grafiek 5 omhoog te verschuiven, tel je 5 bij de functiewaarden op.

Je krijgt dan $q(x) = {}^3\log(2(x - 4)) + 5$,

ofwel $q(x) = {}^3\log(2x - 8) + 5$.

Voorbeeld 2

De grafiek van functie g ontstaat door een translatie van 2 naar links en een translatie van 7 omlaag toe te passen op de grafiek van de functie $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

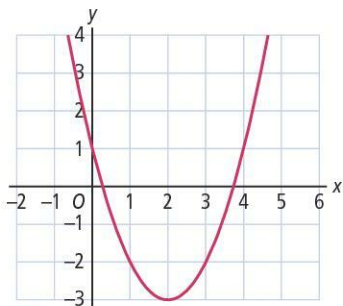
Geef het functievoorschrift $g(x)$ van de beeldgrafiek.

Oplossing

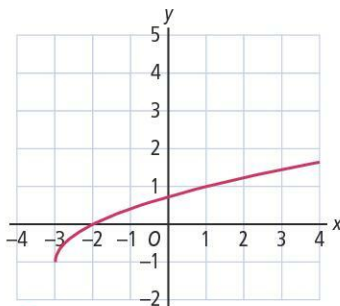
Om de grafiek 2 naar links te verschuiven, vervang je x door $x - 2$, dus $x + 2$. Om de grafiek 7 omlaag te verschuiven, trek je 7 van de functiewaarden af.

Je krijgt dan $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} - 7$.

Ondersteunende route → maak opdracht 03



1



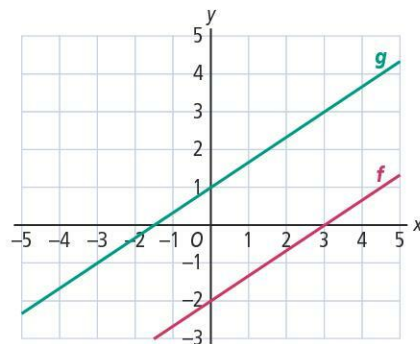
2

3

H

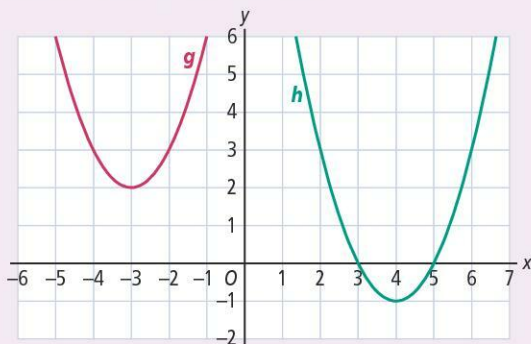
- Grafiek 1 is ontstaan door een horizontale en een verticale translatie toe te passen op de grafiek van $f(x) = x^2$. Welke twee translaties zijn dat?
- Stel een functievoorschrift op bij grafiek 1.
- Grafiek 2 is ontstaan door een horizontale en een verticale translatie toe te passen op de grafiek van $g(x) = \sqrt{x}$. Welke twee translaties zijn dat?
- Stel een functievoorschrift op bij grafiek 2.

- 4** **H** a Gegeven is de functie $m(x) = -7 + 0,5^{x+6}$.
Door welke twee translaties is de grafiek van m ontstaan uit de grafiek van de functie $f(x) = 0,5^x$?
- b Gegeven is de functie $k(x) = 25 + {}^2\log(4x - 20)$.
De grafiek van k is door twee translaties ontstaan uit de grafiek van de functie $f(x) = {}^2\log(4x)$. Jan denkt dat een van deze translaties een horizontale translatie van 20 naar rechts is.
Leg uit waarom Jan ongelijk heeft.
- c Door welke twee translaties is de grafiek van k ontstaan uit de grafiek van f ?
- 5** **H** Gegeven is een sinusöide met formule $y = 4 + 11 \sin(2x - 4)$.
- a Er wordt een translatie van 3 omlaag en een translatie van 5 naar links toegepast op de sinusöide.
Stel een formule op bij de beeldgrafiek.
- b Op de oorspronkelijke sinusöide worden twee andere translaties toegepast. Daardoor ontstaat een sinusöide met formule $y = 9 + 11 \sin(2x - 6)$.
Welke twee translaties zijn nu toegepast?
- 6** Gegeven zijn de grafieken van de functies f en g .
- a Stel een functievoorschrift op van f .
- b Je kunt de grafiek van g zien als een verticale verschuiving van de grafiek van f .
Welke verticale verschuiving?
- c Geef het functievoorschrift $g(x)$.
- d Je kunt de grafiek van g ook zien als een horizontale verschuiving van de grafiek van f .
Welke horizontale verschuiving?
- e Geef met behulp van deze horizontale verschuiving het functievoorschrift $g(x)$.
- f Laat zien dat het functievoorschrift dat je gevonden hebt bij opdracht e hetzelfde is als het functievoorschrift bij opdracht c.
- 7** De lijn k met vergelijking $y = 2x - 3$ wordt 5 naar links verschoven. De beeldgrafiek van k kun je ook krijgen door op lijn k een verticale verschuiving toe te passen.
Onderzoek hoe groot die verschuiving dan is.



Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten



- 03** Gegeven zijn de grafieken van de functies g en h . De grafieken zijn beide ontstaan door de grafiek van $f(x) = x^2$ één keer horizontaal en één keer verticaal te verschuiven.

- Welke coördinaten heeft de top van de grafiek van $f(x) = x^2$?
- Hoeveel is de top van grafiek van g naar links verschoven ten opzichte van de grafiek van f ?
- Hoeveel is de top van grafiek van g omhoog verschoven ten opzichte van de grafiek van f ?
- Op het blaadje is een begin gemaakt met het opstellen van het functievoorschrift van g . Vul het blaadje verder in.
- Stel op dezelfde manier een functievoorschrift op van h .

●					
●					
●					
●					
●					
●					
●					

Om de grafiek ... naar links te verschuiven, vervang je x door $x - \dots$, ofwel $x + \dots$.

Om de grafiek ... omhoog te verschuiven, tel je ... bij de functiewaarden op. Je krijgt dan $g(x) = (x + \dots)^2 + \dots$.

Uitdagende opdrachten

- U1** Op de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$ wordt een horizontale en een verticale translatie toegepast zodat de beeldgrafiek door het punt $(7, 1)$ gaat. Bij de beeldgrafiek hoort een functievoorschrift van de vorm $g(x) = q + \sqrt{x - p}$. Er zijn meerdere mogelijkheden voor de bijbehorende waarden van p en q .
- Welke waarde van q hoort bij $p = 3$?
 - Welke waarde van p hoort bij $q = -2$?
 - Voor welke waarden van q kun je geen waarde van p berekenen?

Je leert

- hoe je een formule aanpast als je de eenheid van variabelen herschaalt

Leerroutes

- ondersteunend: 8—9—010—10—11—12
- doorlopend: 8—9—10—11—12—13
- uitdagend: 8—10—11—12—13—U2

De temperatuur in een mijn kun je berekenen met de formule $T = 18 + 2d$. Hierin is T de temperatuur in graden Celsius en d de diepte van de mijn in honderden meters. Thijs wil een formule maken waarbij de diepte niet in honderden meters maar in meters wordt uitgedrukt.

- Welke formule krijgt Thijs: $T = 18 + 200d$,
 $T = 18 + 20d$, $T = 18 + 0,2d$,
 $T = 18 + 0,02d$ of $T = 18 + 0,002d$?



- 8** Een nieuwe trein wordt getest. Een onderdeel van de test is dat de trein met een constante snelheid op een lang stuk spoor rijdt. Bij deze test hoort de formule $s = 40t$. Hierin is s de afstand die de trein heeft afgelegd in meters en t de tijd in seconden.

- Hoeveel meter legt de trein af per seconde?
- In plaats van de afstand s uit te drukken in meters, kun je de afstand ook uitdrukken in kilometers. De afstand in kilometers is dan S .
Hoeveel kilometer legt de trein af per seconde?
- Vul in: als $s = 1$, dan is $S = \dots$. Hieruit volgt $S = \dots \cdot s$.
- Schrijf deze laatste formule als $S = \dots \cdot t$ door de formule $s = 40t$ hierin in te vullen.
- In plaats van de tijd t uit te drukken in seconden, kun je de tijd ook uitdrukken in minuten. De tijd in minuten is dan T .
Leg uit dat $t = 60 \cdot T$.
- Druk S uit in T en bereken daarmee hoeveel kilometer de trein heeft afgelegd na 10 minuten.



Theorie

Herschalen betekent dat je de eenheid van een of meer variabelen in een formule verandert. Je moet de formule aanpassen op de veranderde eenheid van de variabele.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $s = 6t^2 + 10$ met s de afstand in meters en t de tijd in uren.
 Stel een formule op die de afstand c in centimeters uitdrukt in de tijd t in uren.

Oplossing

Omdat 1 meter gelijk is aan 100 cm, is
 $c = 100 \cdot s$.
 Dit geeft $c = 100 \cdot (6t^2 + 10)$ ofwel
 $c = 600t^2 + 1000$.

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $g = 4t + 7$ met de tijd t in uren en het gewicht g in grammen.
 Stel een formule op die het gewicht g in grammen uitdrukt in de tijd d in dagen.

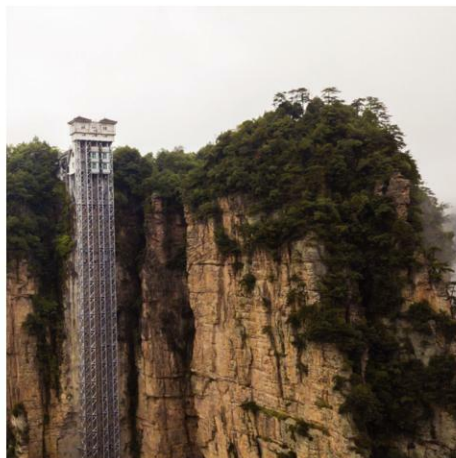
Oplossing

Omdat 1 uur gelijk is aan $\frac{1}{24}$ dag, is
 $d = \frac{1}{24} \cdot t$ ofwel $t = 24 \cdot d$
 $t = 24 \cdot d$ invullen geeft
 $g = 4 \cdot (24 \cdot d) + 7$ ofwel $g = 96d + 7$.

- 9 Met behulp van de oorspronkelijke formule van voorbeeld 1 kun je narekenen dat $s = 106$ als $t = 4$.
 Ga na dat de nieuwe formule $c = 600t^2 + 1000$ hiermee in overeenstemming is.

Ondersteunende route → maak opdracht 010

- 10 Een lift in een hoog gebouw gaat met een constante snelheid in drie minuten omhoog van een hoogte van 120 meter naar een hoogte van 270 meter.
- Laat zien dat je de hoogte h in meters waarop de lift zich bevindt na t minuten, kunt berekenen met de formule $h = 50t + 120$.
 - Noem H de hoogte in decameters (1 decameter is 10 meter). Vul in.
 $H = \dots \cdot h$. Dit geeft $H = \dots \cdot (50t + 120)$.
 - Schrijf de formule voor H zo kort mogelijk.
 - Je gaat de formule voor H herschrijven waarbij je de tijd T in seconden uitdrukt.
 Vul in.
 $T = \dots \cdot t$ ofwel $t = \dots \cdot T$.
 - Gebruik je antwoord van opdracht d om een formule op te stellen waarmee je de hoogte H in decameters kunt berekenen na T seconden.
 - De hoogste buitenlift ter wereld staat in China. In ongeveer 1 minuut en 30 seconden ga je met een constante snelheid van 0 meter hoogte naar 300 meter hoogte.
 Stel een formule op waarmee je de hoogte h in meters kunt berekenen waarop deze lift zich na t minuten bevindt.
 - Stel een formule op waarmee je de hoogte k in kilometers kunt berekenen na s seconden.



- 11** **H** a Gegeven is de formule $P = 3a^2 - 4$. Hierin is P het gewicht in pond (1 pond is 500 gram) en a de lengte in dm. Stel de formule op die het gewicht K in kg uitdrukt in de lengte a in dm.
- b Gegeven is de formule $T = 3 + 5 \sin(\pi(m - 1))$. Hierin is T de temperatuur in °C en m de tijd in maanden. Stel een formule op waarbij T wordt uitgedrukt in de tijd j in jaren.
- c Gegeven is de formule $O = 2\sqrt{5x + 10}$. Hierin is O de oppervlakte in cm^2 . Je weet dat $1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$. Stel een formule op waarbij de oppervlakte A wordt uitgedrukt in m^2 .
- 12** **H** Een batterij van een smartphone die stand-by staat, ontladst bij benadering volgens de formule $V = 3,31 + \frac{21}{t - 148}$ met $t \leq 140$. Hierin is de spanning V in Volt en is t de tijd in uur.
- a Bereken de spanning van een volle batterij.
- b Bereken hoelang het duurt tot de spanning is afgenomen tot 1 Volt.
- c Stel een formule op als de tijd s in minuten wordt gegeven en de spanning W in mV (1 volt = 1000 mV).
- 13** Bij luchtballon A neemt de hoeveelheid draaggas af volgens de formule $A = 1000 \cdot 0,995^t$, met t in dagen en A in m^3 .
- a Ballon B verliest zijn draaggas twee keer zo snel als ballon A en heeft op tijdstip $t = 0$ ook 1000 m^3 draaggas. Bereken na hoeveel dagen de hoeveelheid draaggas in ballon B evenveel is als die in ballon A na vier dagen.
- b Leg uit dat de formule bij de hoeveelheid draaggas bij ballon B gelijk is aan $B = 1000 \cdot 0,995^{2t}$.
- c Ballon C verliest zijn draaggas drie keer zo langzaam als ballon A. Stel een formule op bij ballon C.
- d Stel een formule op bij ballon A waarbij de hoeveelheid draaggas uitgedrukt is in w , de tijd in weken.

Uitdagende route → maak opdracht U2



Ondersteunende opdrachten

010 Een zwembad wordt gevuld met water. De waterhoogte h in dm na t uren kan worden berekend met de formule $h = 6t + 1$. Je gaat eerst een formule maken waarin de waterhoogte H in meters wordt uitgedrukt. Je gaat uiteindelijk een formule maken die de waterhoogte H in meters uitdrukt in de tijd T in minuten.

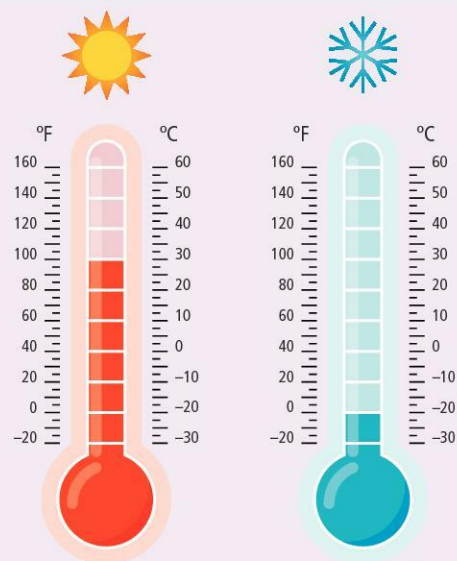
- Op het bovenste blaadje worden bij stap 1 de variabelen die gebruikt worden voor de waterhoogte opgeschreven.
Vul de ontbrekende eenheden bij stap 1 in.
- Vul het ontbrekende getal bij stap 2 in.
- Vul in: als $h = 1$ dan is $H = \dots$
- Gebruik je antwoord van opdracht c om stap 3 in te vullen.
- Leg uit wat er bij stap 4 is gebeurd en laat zien dat je de formule $H = 0,6t + 0,1$ krijgt.
- Je kunt ook een formule maken waarin H in de tijd T in minuten wordt uitgedrukt.
Vul op het onderste blaadje de ontbrekende eenheden in.
- Vul het ontbrekende getal bij stap 2 in.
- Gebruik je antwoord van opdracht g om stap 3 in te vullen.
- Vul het ontbrekende getal bij stap 4 in en schrijf je formule zo kort mogelijk.

•	h is de waterhoogte in ...	1
•	H is de waterhoogte in ...	
•	1 dm is gelijk aan ... m	2
•	Daarom is $H = \dots \cdot h$.	3
•	Dit geeft $H = \dots \cdot (6t + 1)$.	4

•	t is de tijd in ...	1
•	T is de tijd in ...	
•	1 uur is ... minuten	2
•	$T = \dots \cdot t$, dus $t = \dots \cdot T$	3
•	Dit geeft $H = 0,6 \cdot \dots + 0,1$.	4

Uitdagende opdrachten

U2 In Amerika geven ze de temperatuur niet in graden Celsius maar in graden Fahrenheit. Je kunt de temperatuur C in graden Celsius berekenen met de formule $C = \frac{5}{9}F - 17\frac{7}{9}$. Hierin is F de temperatuur in graden Fahrenheit. Tijdens een experiment wordt de temperatuur in een ruimte nauwkeurig geregeld. De temperatuur in de ruimte in graden Celsius kan worden berekend met de formule $C = 0,005m - 10$. Hierin is m de tijd in minuten sinds het begin van het experiment. Stel een formule op voor de temperatuur in de ruimte waarbij de temperatuur F in graden Fahrenheit is gegeven en de tijd u in uren.



19.3 Somfuncties en verschilfuncties

Je leert

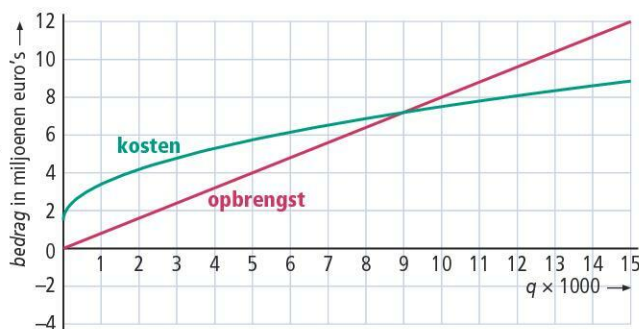
- wat een somfunctie en wat een verschilfunctie is

Leerroutes

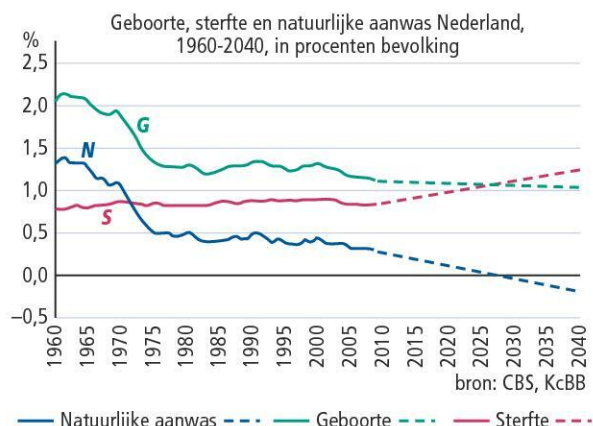
- ondersteunend: 14—015—16—17—18—19
- doorlopend: 14—15—16—17—18—19
- uitdagend: 14—15—17—18—19—U3

Firma Prozi verkoopt racefietsen. In het assenstelsel zijn twee grafieken getekend; één bij de opbrengst en één bij de kosten voor een aantal verkochte racefietsen.

- Teken een grafiek waarmee Prozi het verband kan zien tussen het aantal racefietsen dat het verkoopt en de winst dat er daarbij gemaakt wordt.



- 14 In 2010 is een grafiek gemaakt bij de geboortecijfers, sterftcijfers en natuurlijke aanwas van de bevolking van Nederland.
- Leg uit dat geldt $N = G - S$.
 - Beschrijf hoe je de grafiek van N kunt tekenen als je die van G en S al hebt.
 - Leg uit welke betekenis het snijpunt van de rode en de blauwe grafiek heeft.
 - Wat betekent het dat de grafiek van N op den duur onder de nullijn lijkt te komen?
 - Vanaf 2010, het jaar waarin deze grafiek werd gepresenteerd, zijn de grafieken gestippeld. Bij de stippellijn van S hoort de formule $S = 0,85 + 0,0071t$ en bij die van G hoort de formule $G = 1,1 - 0,0017t$. In deze formules zijn S en G in procenten van de bevolking en is t het aantal jaren na 2010. Stel een formule op bij het gestippelde deel van de grafiek van N .



Theorie

Het functievoorschrift van de **somfunctie** s van twee functies f en g ontstaat door de functievoorschriften van f en g op te tellen. De somfunctie s is $s(x) = f(x) + g(x)$. De bijbehorende grafiek heet de **somgrafiek**. De **verschilfunctie** v is $v(x) = f(x) - g(x)$. De grafiek hierbij heet de **verschilgrafiek**.

Voorbeeld 1

Gegeven zijn de functies $f(x) = 12x^3 - 7x^2$ en $g(x) = 4x^4 - 15x^3 + 6x^2$.

Het functievoorschrift van de somfunctie

$s = f + g$ is

$$s(x) = (12x^3 - 7x^2) + (4x^4 - 15x^3 + 6x^2).$$

$$s(x) = 4x^4 - 3x^3 - x^2$$

Voorbeeld 2

Gegeven zijn de functies $f(t) = 3t - 6$ en $g(t) = 2 + 4t - t^2$.

Het functievoorschrift van de verschilfunctie

$v = f - g$ is $v(t) = (3t - 6) - (2 + 4t - t^2)$.

$$v(t) = 3t - 6 - 2 - 4t + t^2$$

$$v(t) = t^2 - t - 8$$

Ondersteunende route → maak opdracht 015

- 15** Stel de somformule $s = h + k$ en de verschilformule $v = h - k$ op. Vereenvoudig je antwoord.

H

a $h = 3m^2 - 4m + 9$ en $k = 7 + 10m$

b $h = 2 + 6p - \frac{3}{p}$ en $k = 3 - 5p + \frac{2}{p}$

c $h = \frac{2}{3}a(a - 1)$ en $k = (\frac{1}{2}a - 2)(2a + 5)$

d $h = t^2 - \frac{4}{t^2}$ en $k = \frac{2}{t^3} - 0,7t^2$

- 16** Bij de verkoop van een bepaald product geldt voor de totale opbrengst TO in duizenden euro's de formule $TO = 30q - \frac{1}{2}q^2$, waarbij q het aantal verkochte producten in duizendtallen is. De totale kosten in euro's zijn $TK = 54 + q^2$. Voor de totale winst TW in euro's die gemaakt wordt, geldt $TW = TO - TK$.

H

- Stel een formule op voor de totale winst, uitgedrukt in q .
- Teken in één assenstelsel de grafieken van TO , TK en TW .
- Er wordt alleen winst gemaakt als $TW > 0$. Geef in je assenstelsel aan wanneer er winst gemaakt wordt.
- Bereken bij welke waarden van q dit het geval is.
- Bereken de maximale winst. Bij hoeveel verkochte producten wordt deze bereikt?



- 17** Bij de productie van een bepaald artikel geldt de kostenfunctie $TK(q) = -0,295q^2 + 28q + 463$ en de opbrengstfunctie

$$TO(q) = -\frac{1}{9}q^3 + 273q.$$

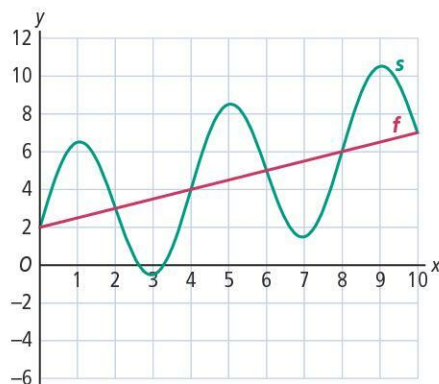
In deze functies is q het aantal per week geproduceerde artikelen in duizendtallen en zijn TK en TO in euro's.

- De winst TW wordt gegeven door $TW(q) = TO(q) - TK(q)$. Bereken met behulp van differentiëren bij welk aantal geproduceerde artikelen er sprake is van maximale winst.
- Hoeveel is de maximale winst?

- 18** Gegeven zijn de functies $f(x) = x + 1$ en $g(x) = 4\sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right)$. Voor de somfunctie s geldt $s(x) = f(x) + g(x)$. De bijbehorende somgrafiek is een grafiek die slingert om de lijn met vergelijking $y = x + 1$.

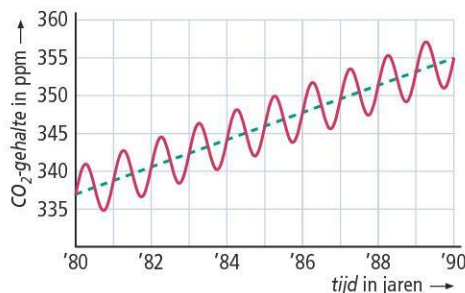
De grafieken van f en s zijn in één assenstelsel getekend.

- Hoe groot is de periode van g ?
- Teken de grafiek van g in hetzelfde assenstelsel.
- Waarom is de grafiek van s niet periodiek?
- Hoe groot is de maximale afwijking van de grafiek van s ten opzichte van die van f ?



- 19** Gegeven is een grafiek van het CO_2 -gehalte op het noordelijk halfrond in de jaren 80 van de vorige eeuw. In deze grafiek geeft de stippellijn de trend aan die de stijging van het CO_2 -gehalte weergeeft. De stippellijn wordt beschreven door de formule $T = mt + n$ waarbij t de tijd is in jaren. Neem $t = 0$ op 1 januari 1980.

- Geef met behulp van de figuur een benadering van m en n .
- Hoe groot is de maximale uitwijking ten opzichte van de stippellijn?
- De vorm van de schommeling ten opzichte van de stippellijn is te benaderen met de formule $S = a\sin(bt)$. Geef een benadering van de waarden van a en b .
- De gegeven grafiek is een somgrafiek waarbij een formule van de vorm $C = T + S$ hoort. Stel dat het CO_2 -gehalte blijft toenemen volgens dit wiskundig model. Bereken in welke maand van welk jaar de concentratie volgens dit model voor het eerst hoger dan 375 ppm was.



Een CO_2 -gehalte van 340 ppm ('parts per million') geeft aan dat er één deel CO_2 is op een totaal van een miljoen atmosferedelen.

Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

015 Gegeven zijn de formules A: $h = 4m^2 + 9m - 13$ en B: $k = -10m + 17$.

- a** Je kunt de somformule s opstellen door de formules A en B bij elkaar op te tellen. Je krijgt dan $s = h + k$.
Op het blaadje is een begin gemaakt met het opstellen van de somformule s .
Vul stap 2 verder in.
- b** In stap 3 wordt de formule zo kort mogelijk geschreven door gelijksoortige termen samen te nemen.
Schrijf de somformule s zo kort mogelijk.
- c** Je kunt de verschilformule v opstellen door de formule B van A af te trekken. Je krijgt $v = h - k$.
Op het blaadje is een begin gemaakt met het opstellen van de verschilformule v .
Waarom staan er in stap 2 haakjes om de formules?
- d** Vul stap 2 verder in.
- e** In stap 3 zijn de haakjes weggewerkt. Er staat een min voor het tweede stel haakjes, dus worden alle termen tussen deze haakjes met -1 vermenigvuldigd.
Vul stap 3 verder in en herleid je antwoord.

●	$s = h + k$					1
●	$s = 4m^2 + 9m - 13 + \dots$					2
●	$s = \dots m^2 - \dots + \dots$					3
●						

●	$v = h - k$					1
●	$v = (4m^2 + 9m - 13) - (\dots)$					2
●	$v = 4m^2 + 9m - 13 + \dots$					3
●	$v = \dots m^2 + \dots m - \dots$					4

Stel de somformule $s = h + k$ en de verschilformule $v = h - k$ op. Vereenvoudig deze formules zoveel mogelijk.

f $h = 8m^2 - 12m - 7$ en $k = 14 - 3m$

g $h = 5 - 3q + \frac{9}{q}$ en $k = 12 + 4q - \frac{7}{q}$

Uitdagende opdrachten

- U3** Veroorzakers van verkeersongevallen waar de politie aan te pas komt, kun je in twee groepen verdelen: de groep personen onder 25 jaar en de groep van personen van 25 jaar en ouder. Elk jaar wordt bepaald hoeveel procent van de verkeersongevallen door elk van deze twee groepen wordt veroorzaakt. De percentages van de afgelopen 15 jaar kun je in een assenstelsel verwerken tot twee grafieken: grafiek O die past bij de percentages van de groep personen onder 25 jaar en grafiek B die past bij de percentages van de groep personen van 25 jaar en ouder.
Beschrijf hoe de somgrafiek eruitziet.

19.4 Productfuncties en quotiëntfuncties

Je leert

- hoe je de nulpunten van een productfunctie berekent
- hoe je de nulpunten en de grenswaarde van een quotiëntfunctie berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 20—021—22—23—024—25
- doorlopend: 20—21—22—23—24—25
- uitdagend: 20—21—23—24—25—U4

Een foto wordt in een passe-partout opgehangen. Een passe-partout is een lijst waarbij overal om de foto een witte rand van 3 cm breed zit. De foto is l cm lang en b cm breed.

- Geef een formule waarmee je de oppervlakte van de gehele lijst kunt berekenen.



- 20 De winst w in euro's die een fruithandelaar maakt per verkocht netje mandarijnen hangt af van de prijs volgens de formule $w = 0,6p - 0,9$. Het aantal netjes mandarijnen a dat hij op een dag verkoopt hangt ook af van de prijs volgens de formule $a = 188 - 30p$. In beide formules is p de prijs van een netje mandarijnen in euro's.
- Bereken het aantal netjes mandarijnen dat hij op een dag verkoopt bij een prijs van € 1,90 per netje.
 - Bereken hoeveel euro winst hij dan maakt.
 - Leg uit dat je de totale winst TW die de fruithandelaar op een dag maakt aan de verkoop van netjes mandarijnen, kunt berekenen met de formule $TW = (188 - 30p)(0,6p - 0,9)$.
 - De fruithandelaar maakt geen winst of verlies als $TW = 0$. Bij welke prijzen per netje is dit het geval?

Theorie

Een functie van de vorm $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ heet een **productfunctie**.

De nulpunten van een productfunctie bereken je door op te lossen: $f(x) = 0$ of $g(x) = 0$. Dit is een toepassing van de regel: uit $A \cdot B = 0$ volgt $A = 0$ of $B = 0$.

Voorbeeld

Bereken van de productfunctie
 $p(x) = (4x - 18) \cdot (4 - \sqrt{x})$
de waarden van x waarvoor $p(x) = 0$.

Oplossing

$p(x) = 0$ als $4x - 18 = 0$ of $4 - \sqrt{x} = 0$
Hieruit volgt $4x = 18$ of $\sqrt{x} = 4$.
Dus $x = 4\frac{1}{2}$ of $x = 16$.

Ondersteunende route → maak opdracht 021

21 Bereken de waarden van x waarvoor $f(x) = 0$.

H a $f(x) = (2x - 5) \cdot (7 + 3\frac{1}{2}x)$ c $f(x) = (x^2 - 1) \cdot (6x - 40)$

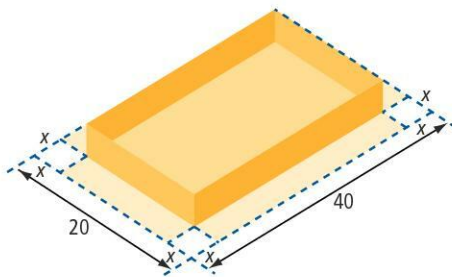
b $f(x) = (2x + 23) \cdot (2^x - 8)$ d $f(x) = x^3(1 - \sqrt{x})$

22 Van een stuk karton van 20 cm bij 40 cm worden in de hoeken vierkantjes van x cm bij x cm afgeknipt. Van het overgebleven deel wordt een doosje gevouwen.

a Leg uit dat $0 < x < 10$.

b Leg uit waarom de inhoud I in cm^3 van zo'n doosje berekend kan worden met de formule $I = x(20 - 2x)(40 - 2x)$.

c Bereken met je rekenmachine de waarde van x waarbij de inhoud maximaal is. Rond af op twee decimalen.



23 Van een artikel hangt de opbrengst O in euro's samen met het aantal verkochte exemplaren q volgens de formule

$$O = \frac{20000q}{q + 500}$$

a Waarom heeft de formule hier geen betekenis voor $q < 0$?

b Bij welke waarde van q is de opbrengst gelijk aan nul?

c Bereken bij welke waarde van q de opbrengst gelijk is aan 10000 euro.

d Maak op je rekenmachine een tabel met stapgrootte 10000 en onderzoek hiermee naar welke waarde de opbrengst nadert bij een steeds groter wordend aantal verkochte exemplaren.

e Schets nu voor $q \geq 0$ de grafiek die bij deze formule hoort.

f Hoe volgt je antwoord op opdracht d uit de grafiek?

Theorie

Een functie van de vorm $q(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ heet een

quotiëntfunctie.

Bij grote waarden van x kunnen de functiewaarden steeds dichter naderen tot een grenswaarde.

Bij de waarde van x waar de grafiek van de functie $q(x)$ de x -as snijdt, geldt $q(x) = 0$. Deze vergelijking los je op door $t(x) = 0$ op te lossen. Dit is een toepassing van de regel:

uit $\frac{A}{B} = 0$ volgt $A = 0$ en $B \neq 0$.

Voorbeeld

Onderzoek of de formule $B = \frac{20q - 150}{4q + 3}$ een grenswaarde heeft en bereken voor welke waarde van q geldt dat $B = 0$.

Oplossing

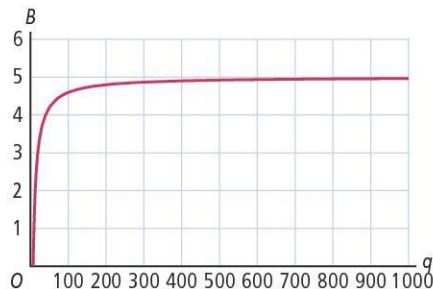
Maak op je rekenmachine een tabel.

q	10	100	1000	10 000
B	1,16	4,59	4,96	5,00

De grenswaarde is dus 5.

$B = 0$ als $20q - 150 = 0$.

Hieruit volgt $q = 7,5$.



Ondersteunende route → maak opdracht 024

- 24** **H** Onderzoek hoe groot de grenswaarde is en bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de horizontale as.

a $M = \frac{4t}{t-1}$

c $M = \frac{100b - 25}{2b + 4}$

b $M = \frac{2p + 5}{p}$

d $M = \frac{3m + 200}{0,1m^2 + 2}$

- 25** Een schaatsenfabriek heeft een nieuw type klapschaats ontwikkeld. De gemiddelde productiekosten per paar schaatsen hangen af van het geproduceerde aantal q .

Met de formule $GK = \frac{200q + 12000}{2q}$ kun je de gemiddelde productiekosten in euro's per paar schaatsen berekenen.

- a** Voor welke waarde van q geldt $GK = 0$? Waarom is deze waarde van q niet van belang voor de producent?
b Onderzoek hoe groot de grenswaarde is van de gemiddelde kosten.
c Stel een formule op voor de totale kosten in euro's bij een geproduceerd aantal q .

Uitdagende route → maak opdracht U4



Ondersteunende opdrachten

- 021** Gegeven is de functie $f(x) = (4x - 3)(2,5x + 10)$.
- Van welke functies is f de productfunctie?
 - Je gaat de waarden van x berekenen waarvoor $f(x) = 0$.
Waarom weet je dat $4x - 3 = 0$ of $2,5x + 10 = 0$?
 - Los de twee vergelijkingen van opdracht b op.
 - Los de vergelijking $f(x) = 0$ op door gebruik te maken van de optie snijpunten op je rekenmachine en laat zien dat je dezelfde antwoorden krijgt als opdracht c.

Bereken de waarden van x waarvoor $f(x) = 0$.

- e** $f(x) = (3x - 15) \cdot (2 + 6x)$ **g** $f(x) = x^2 \cdot (4x - 30)$
f $f(x) = (2x + 1) \cdot (2^x - 16)$ **h** $f(x) = x^3(2 - \sqrt{x})$

- 024** Gegeven is de formule $B = \frac{8x - 4}{1 + 2x}$.
 Je gaat eerst onderzoeken wat de grenswaarde is.

- Vul de tabel verder in.
- Waarom weet je nu dat de grenswaarde 4 is?
- Plot een grafiek bij de formule.
- Om de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de horizontale as te berekenen, los je $B = 0$ op.
Waarom hoeft je alleen de vergelijking $8x - 4 = 0$ op te lossen? Los deze vergelijking op.
- Vul in: de gevraagde coördinaten zijn $(\dots, 0)$.

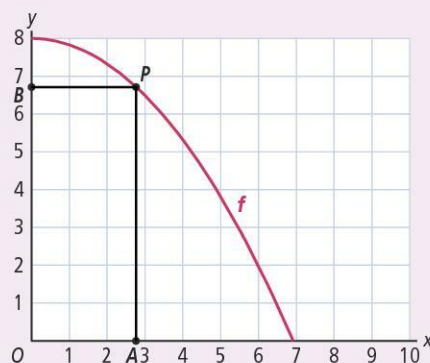
x	10	100	1000	10000
B	3,62	...	...	...

Onderzoek wat de grenswaarde is en bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de horizontale as.

- f** $C = \frac{3q}{2 + q}$ **h** $C = \frac{24s - 6}{14 - 2s}$
g $C = \frac{18 - 2r}{r}$ **i** $C = \frac{5d + 160}{0,2d^2 + 5}$

Uitdagende opdrachten

- U4** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = 8 - \frac{1}{6}x^2$ op het interval $[0, 7]$.
 Het punt P ligt op de grafiek van f en de punten A en B liggen op de assen zodat vierhoek $OAPB$ een rechthoek is.
- De oppervlakte van rechthoek $OAPB$ hangt af van de ligging van punt P met x -coördinaat p .
Leg uit dat je de oppervlakte kunt berekenen met de formule $A = p \cdot (8 - \frac{1}{6}p^2)$.
 - Bereken de maximale oppervlakte van rechthoek $OAPB$.



19.5 Redeneren met formules

Je leert

- hoe je met een formule beredeneert of de grafiek stijgt of daalt en hoe groot de grenswaarde is

Leerroutes

- ondersteunend: 26—027—28—29—30—31—32
- doorlopend: 26—27—28—29—30—31—32
- uitdagend: 26—27—29—30—31—32—U5

Het aantal kakkerlakken A in een verlaten schuur

voldoet aan de formule $A = 14\,000 - \frac{13\,500}{2t + 5}$

Hierin is t de tijd in weken.

- Neemt het aantal kakkerlakken toe of af?
- Wat gebeurt er op den duur met het aantal kakkerlakken?



- 26** De temperatuur van melk stijgt als de melk uit de koelkast wordt gehaald. Met de formule $T = 20 - 16 \cdot 0,75^t$ kun je de temperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ van de melk berekenen. Hierin is t de tijd in uren vanaf het moment dat de melk uit de koelkast is gehaald.

- Welke temperatuur heeft de melk op het moment dat het uit de koelkast wordt gehaald?
- Vul de tabel in.
- Leg uit dat de uitkomsten van $16 \cdot 0,75^t$ op den duur naderen naar nul.
- Naar welke waarde nadert de temperatuur op den duur?

t	$0,75^t$	$16 \cdot 0,75^t$	$20 - 16 \cdot 0,75^t$
0	...	...	...
5	...	...	...
10	...	...	...

Theorie

Door na te gaan hoe een formule is opgebouwd, kun je beredeneren hoe de uitkomst van een formule verandert. Je kunt daarbij onder andere gebruikmaken van de volgende eigenschappen.

- g^t neemt toe als $g > 1$ en t groter wordt.
- g^t neemt af als $g < 1$ en t groter wordt.
- Bij een vaste positieve waarde van c en $n > 0$ neemt $\frac{c}{n}$ af als n groter wordt.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $K = 35 + \frac{100}{t+1}$

Beredeneer of de waarde van K toeneemt of afneemt als t steeds groter wordt en naar welke grenswaarde K nadert.

Oplossing

Bij $t = 0$ is $K = 35 + \frac{100}{0+1} = 135$.

Als t steeds groter wordt, dan neemt $t+1$ toe.

100 wordt gedeeld door een steeds groter wordend getal en daardoor daalt

$\frac{100}{t+1}$ naar 0.

De waarde van K zal dan dalen naar $35 + 0 = 35$. De waarde van K neemt af en de grenswaarde is 35.

Ondersteunende route → maak opdracht 027

- 27** Beredeneer of de waarde van P toeneemt of afneemt als t steeds groter wordt en naar welke grenswaarde P nadert.

H

a $P = \frac{2}{7 + 2t} - 11$

c $P = 3 + \frac{2}{2t^3 + 5}$

b $P = 4 - 0,85^t$

d $P = 7 + 2 \cdot 0,45^t$

- 28** Gegeven is de formule $K = 3 + \frac{5}{1 + 0,7^t}$

a Volgens Bart nadert de waarde van K bij grote waarden van t naar 3.

Laat met een tabel zien dat Bart ongelijk heeft.

b Beredeneer dat de waarde van K nadert naar 8.

c Beredeneer hoe groot de grenswaarde is bij de formule

$$w = 14 - \frac{3}{2 - 0,9^t}$$

d Onderzoek welke waarde de formule $r = \frac{16 - 2^x}{32 + 2^x}$ nadert bij grote waarden van x .

- 29** Bij een gemeente komen elk weekend tientallen telefoontjes binnen van mensen die geluidsoverlast ervaren van bezoekers van een uitgaansgelegenheid. Samen met de eigenaar van deze gelegenheid en de politie wordt een project gestart om door middel van een voorlichtingscampagne en het uitdelen van boetes de bezoekers te bewegen buiten het gebouw minder lawaai te maken. Op grond van de resultaten van de eerste weken na de start van het project stelt een onderzoeker de formule $A = 5 \cdot (2,2 + 5,8 \cdot 0,72^t)$ op.

Hierin is A het aantal telefonische klachten in het weekend en t de tijd in weken na de start van het project.

a Bereken de waarde van A bij de start van het project.

b Bij de start van het project is de doelstelling geformuleerd dat er op den duur hoogstens tien telefonische klachten per weekend binnen komen.

Wordt deze doelstelling gehaald?

- 30** De hoogte van de bovenkant van een klimplant boven de grond kan worden berekend met de formule $H = \frac{320}{1 + 9^{-0,08t+2}}$ met H de hoogte van de klimplant in cm en t de tijd sinds het begin van de meting in weken.

- Na hoeveel dagen is de hoogste punt van de klimplant al een meter boven de grond?
- Hoe hoog komt de bovenkant van de klimplant maximaal boven de grond?



- 31** De snelheid van een voetgangersstroom in een gang hangt onder andere af van de loopruimte die per voetganger beschikbaar is. Voor een bepaalde gang geldt bij benadering de

$$\text{formule } V = \frac{80M - 30}{M + 0,04}$$

Hierin is V de snelheid van de voetgangersstroom in meters per minuut en M het aantal beschikbare m^2 per voetganger.

- Neemt de waarde van V toe of af als de waarde van M toeneemt?
- Bij hoeveel m^2 per voetganger komt de voetgangersstroom tot stilstand?
- Tot welke snelheid nadert V als elke voetganger een onbeperkte bewegingsruimte heeft?
- Stel een formule op met de snelheid S in meters per seconde.

- 32** Indoorbanen, bijvoorbeeld bij atletiek, bestaan uit twee rechte stukken en twee bochten. De bochten zijn twee even grote halve cirkels.

De lengte van zo'n atletiekbaan wordt bepaald door de straal r van de uitgezette cirkels en de afstand d tussen de cirkels met r en d in meter. De cirkels overlappen elkaar niet.

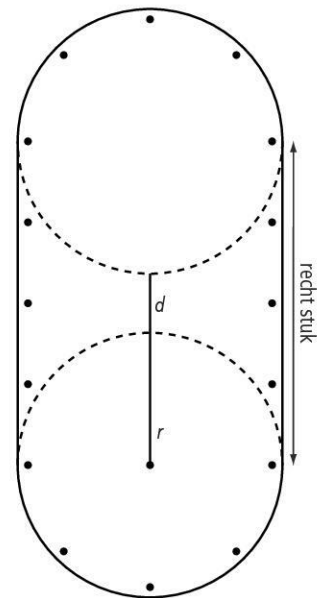
De verhouding tussen de totale lengte van de rechte stukken en de totale lengte van de bochten in de baan is erg belangrijk.

Deze verhouding V is afhankelijk van de straal r van de cirkels

en de afstand d tussen de cirkels. Er geldt: $V = \frac{2r + d}{3,14 \cdot r}$

- Laat met een berekening zien dat bij een straal van 21,5 meter en een afstand van 2 meter tussen de cirkels, deze verhouding ongeveer $\frac{2}{3}$ is.
- Leg uit dat de waarde van V altijd groter is dan 0,6369.
- Als de verhouding V gelijk is aan $\frac{3}{4}$ dan geldt voor het verband tussen r en d een formule van de vorm $r = c \cdot d$. Bereken de waarde van c .

(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2012-pilot, tijdvak 2)



Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

027 Gegeven is de formule $A = 12 + \frac{1}{p+1}$

- Vul de tabel in.
- Wat gebeurt er met de waarde van $p+1$ als p steeds groter wordt?
- Naar welke waarde nadert $\frac{1}{p+1}$ als p steeds groter wordt?
- Neemt de waarde van A toe of af als p steeds groter wordt?
- Welke grenswaarde heeft de formule $A = 12 + \frac{1}{p+1}$?
- Gegeven is de formule $y = 15 - 6 \cdot 0,8^x$.
Vul het blaadje in.

p	$p+1$	$\frac{1}{p+1}$
0	...	...
10	...	...
100	...	...
1000	...	...

☐	Bij $x=0$ is $y = 15 - 6 \cdot 0,8^0 = \dots$
☐	Als x steeds groter wordt, nadert $0,8^x$ naar $\dots$
☐	want $0,8 < 1$.
☐	$6 \cdot 0,8^x$ nadert dan ook naar $\dots$
☐	De waarde van y zal dan naderen naar $y = 15 - \dots = \dots$

- Neemt de waarde van y toe of af als x steeds groter wordt?
- Welke grenswaarde heeft de formule $y = 15 - 6 \cdot 0,8^x$?

Beredeneer of de waarde van N toeneemt of afneemt als t steeds groter wordt en naar welke grenswaarde N nadert.

- $N = \frac{24}{3+t}$
- $N = 38 - \frac{80}{4+6t^2}$
- $N = 14 - 2 \cdot 0,85^t$
- $N = 17 + 7 \cdot 0,45^t$

Uitdagende opdrachten

- U5** Het verband tussen twee variabelen B en m voldoet aan de formule $B^2 - 1 = \frac{84m - 60}{16m}$ waarbij B en m beide groter zijn dan 0.
Onderzoek hoe groot de grenswaarde is van B als m steeds groter wordt.

19.6 Gemengde opdrachten

- 33** In 1961 werd de eerste computerchip ontwikkeld, een elektronische schakeling die bestaat uit transistoren. Deze eerste chip bestond uit vier transistoren. Het aantal transistoren per chip is sindsdien per twee jaar ongeveer verdubbeld.

- Leg uit dat hierbij de formule $A = 4 \cdot 2^{0,5t}$ past. Hierin is A het aantal transistoren en t het aantal jaren na 1961.
- Bereken hoeveel transistoren een chip in 2015 volgens deze formule bevat.
- Bereken hoeveel jaar nodig is om het aantal transistoren 1000 keer zo groot te maken.
- Stel een formule op als het aantal transistoren wordt gegeven in miljarden en de tijd in weken. Ga hierbij uit van 52 weken per jaar.

De formule uit opdracht 33a staat bekend onder de naam 'de wet van Moore'.

Genoemd naar Gordon Moore die in 1961 betrokken was bij de ontwikkeling van de eerste chip. Hij deed in 1965 de voorspelling dat het aantal transistoren per chip ongeveer elke twee jaar verdubbeld zou zijn.

- 34** Het aantal zonnepanelen dat op een veld van 5000 m^2 kan worden geplaatst, is afhankelijk van de oppervlakte x in m^2 per paneel. De prijs van een paneel is ook afhankelijk van de oppervlakte x . Voor het aantal zonnepanelen q geldt de formule $q = 5000 \cdot x^{-1}$. Voor de prijs p van een zonnepaneel in honderden euro's geldt $p = 250 + 30x^2$.

- Stel een formule op voor de totale kosten TK in honderden euro's van de zonnepanelen, uitgedrukt in x .
- Bereken met behulp van de afgeleide van TK bij hoeveel zonnepanelen de totale kosten minimaal zijn.
- Hoe groot zijn de minimale totale kosten? Rond je antwoord af op duizendtallen.

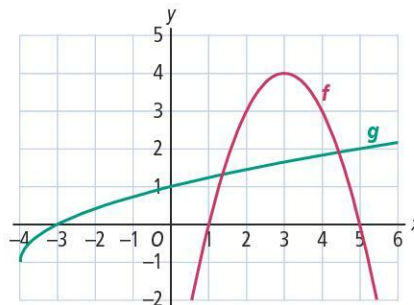


- 35** Gegeven is de productfunctie $f(x) = 2^{-0,1x} \cdot 10 \sin(\pi x)$.

- Plot de grafiek van f op het interval $[0, 20]$.
- Leg met behulp van het functievoorschrift van f uit waarom de grafiek van f slingert om de x -as met een steeds kleiner wordende uitwijking.
- Onderzoek wat de kleinste waarde is van x waarbij een top een afstand heeft tot de x -as die kleiner is dan $0,1$.
- Verander het functievoorschrift zodat de grafiek om de x -as slingert met een steeds groter wordende uitwijking.

- 36** De grafieken van f en g zijn door twee verschuivingen uit de grafieken van $h(x) = -x^2$ en $i(x) = \sqrt{x}$ ontstaan.

- Stel een functievoorschrift op van f .
- Stel een functievoorschrift op van g .





- 37** In de jaren vijftig deed de Amerikaan D.L. Gerlough onderzoek naar de voetgangersveiligheid van wegen. Als er veel verkeer over een weg gaat, is er voor voetgangers weinig gelegenheid om veilig over te steken. Daarom stelde Gerlough de zogenaamde 'veilige norm' op. Een weg voldoet aan deze veilige norm wanneer er zich gemiddeld elke minuut een gelegenheid voordoet om veilig over te steken. Dat lukt alleen als het aantal auto's dat per uur passeert onder een maximum blijft. Dit maximum geven we hier aan met $N_{\max}$ en is afhankelijk van de breedte van de weg.

Gerlough kwam tot de volgende formule:

$$N_{\max} = \frac{8289,3}{B}(1,778 - \log(B))$$

In deze formule is B de breedte van de weg in meters.

Vanzelfsprekend is deze formule een model van de werkelijkheid. Met behulp van dit model kunnen we enig inzicht krijgen in de veiligheid bij de aanleg van wegen.

Bij een brede weg duurt het oversteken langer dan bij een smalle weg. Voor wegen die voldoen aan de veilige norm betekent dit dat er bij een brede weg per uur minder auto's mogen passeren dan bij een smalle weg. De grafiek van $N_{\max}$ moet dus dalend zijn. De formule voor $N_{\max}$ moet hiermee in overeenstemming zijn.

- Leg uit hoe je uitsluitend aan de hand van de formule voor $N_{\max}$ -dus zonder gebruik te maken van je rekenmachine- kunt beredeneren dat hier sprake is van een dalende functie.
- Een weg die voldoet aan de veilige norm wordt 0,50 meter breder gemaakt. Volgens de formule neemt $N_{\max}$ daardoor met 126 af.

Onderzoek hoe breed de weg oorspronkelijk was. Geef je antwoord in decimeters nauwkeurig.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A12 2005, tijdvak 1)

Theorie

Somfunctie, somgrafiek, verschilfunctie, verschilgrafiek

Het functievoorschrift van de somfunctie s van twee functies f en g ontstaat door de functievoorschriften van f en g op te tellen. De somfunctie s is $s(x) = f(x) + g(x)$.

De bijbehorende grafiek heet de somgrafiek.

De verschilfunctie v is $v(x) = f(x) - g(x)$.

De grafiek hierbij heet de verschilgrafiek.

Voorbeeld 1

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 - 2x + 3$ en $g(x) = 7x - 5$.

Het functievoorschrift van de somfunctie

$$s(x) = f(x) + g(x) \text{ is}$$

$$s(x) = (x^2 - 2x + 3) + (7x - 5).$$

$$s(x) = x^2 + 5x - 2$$

Voorbeeld 2

Gegeven zijn de functies $f(x) = 5\log(t) - 2t^2$ en $g(t) = 5\log(t) - 4 - 3t^2$.

Het functievoorschrift van de verschilfunctie

$$v(t) = f(t) - g(t) \text{ is}$$

$$v(t) = (5\log(t) - 2t^2) - (5\log(t) - 4 - 3t^2).$$

$$v(t) = 5\log(t) - 2t^2 - 5\log(t) + 4 + 3t^2$$

$$v(t) = t^2 + 4$$

S1 Stel de functievoorschriften op van de somfunctie $s(x) = f(x) + g(x)$ en de verschilfunctie $v(x) = f(x) - g(x)$.

a $f(x) = 6x^3 + 11x^2 - 5$ en $g(x) = 20x^2 - 7x^3 + 8$

b $f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{18}{x^2}$ en $g(x) = 3\sqrt{x} - \frac{21}{x^2} + 6$

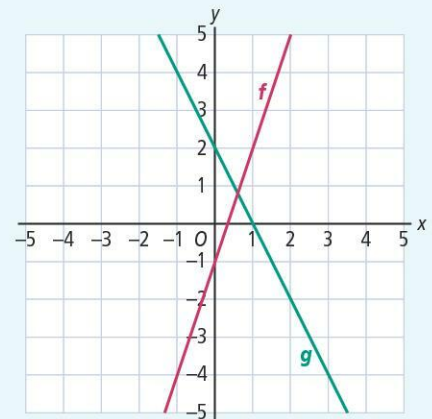
S2 De grafieken van de functies $f(x) = 3x - 1$ en $g(x) = -2x + 2$ zijn in één assenstelsel getekend.

a Stel een functievoorschrift op van de somfunctie

$$s(x) = f(x) + g(x).$$

b Stel een functievoorschrift op van de verschilfunctie

$$v(x) = f(x) - g(x).$$



Vaardigheid

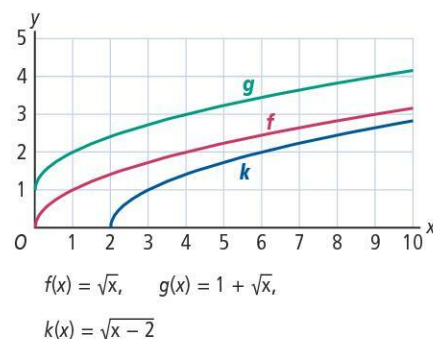
Je kunt na een verschuiving het functievoorschrift opstellen van de beeldgrafiek.

Een grafiek kun je verschuiven. De grafiek die hierdoor ontstaat heet de beeldgrafiek.

Als je de grafiek van f met a eenheden omhoog verschuift, geldt voor de functie g van de beeldgrafiek: $g(x) = f(x) + a$.

Als je de grafiek van f met a eenheden naar rechts verschuift, geldt voor de functie h van de beeldgrafiek: $h(x) = f(x - a)$.

Een verschuiving heet ook wel een translatie.



Voorbeeld

De grafiek van de functie $a(x) = \sqrt{2x}$ wordt 7 naar links en 8 omhoog verschoven. Stel het functievoorschrift $b(x)$ op van de beeldgrafiek.

Oplossing

Om de grafiek 7 naar links te verschuiven, vervang je x door $x - 7$, dus door $x + 7$. Om de grafiek 8 omhoog te verschuiven, tel je 8 bij de functiewaarden op.

$$b(x) = 8 + \sqrt{2(x+7)} \text{ ofwel } b(x) = 8 + \sqrt{2x+14}$$

- S3**
- a** De grafiek van de functie $f(x) = {}^5\log(x)$ wordt 2 naar links en 6 omlaag verschoven. Geef het functievoorschrift $g(x)$ van de beeldgrafiek.
 - b** Gegeven is de functie $j(x) = (x-3)^2 + 5$. Hoe ontstaat de grafiek van j uit de grafiek van de functie $k(x) = x^2$?

Vaardigheid

Je kunt een formule aanpassen als je de eenheid van variabelen herschaalt.

Herschalen betekent dat je de eenheid van een of meer variabelen in een formule verandert. Je moet de formule aanpassen op de veranderde eenheid van de variabele.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $l = 6t + 10$ met de tijd t in dagen en de lengte l in mm. Stel een formule op die de lengte L in cm uitdrukt in de tijd t in dagen.

Oplossing

Omdat 1 mm gelijk is aan 0,1 cm, is $L = 0,1 \cdot l$. Dit geeft $L = 0,1 \cdot (6t + 10)$ ofwel $L = 0,6t + 1$.

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $c = 0,2t + 3$ met de temperatuur c in $^{\circ}\text{C}$ en de tijd t in minuten. Stel een formule op die de temperatuur c in $^{\circ}\text{C}$ uitdrukt in de tijd u in uren.

Oplossing

Omdat 1 minuut gelijk is aan $\frac{1}{60}$ uur, is $u = \frac{1}{60} \cdot t$ ofwel $t = 60 \cdot u$. Dit geeft $c = 0,2 \cdot (60 \cdot u) + 3$ ofwel $c = 12u + 3$.

- S4** De formule $G = 0,5h^2 + 3$ hoort bij het gewicht van kaarsen met G het gewicht in gram en h de hoogte van de kaars in dm. Stel de formule op die het gewicht K in kg uitdrukt in de hoogte H in cm.

Vaardigheid

Je kunt de nulpunten van een productfunctie berekenen.

Een functie van de vorm $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ heet een productfunctie.

De nulpunten van een productfunctie $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ bereken je door op te lossen: $f(x) = 0$ of $g(x) = 0$.

Voorbeeld

Bereken van de productfunctie

$$p(x) = (x^3 + x + 1) \cdot (3 - \sqrt{x})$$

de waarden van x waarvoor $p(x) = 0$.

Oplossing

$$p(x) = 0 \text{ als } x^3 + x + 1 = 0 \text{ of } 3 - \sqrt{x} = 0$$

Deze vergelijkingen met de rekenmachine oplossen geeft $x \approx -0,68$ of $x = 9$.

- S5** Bereken de x -coördinaten van de snijpunten van de grafiek van de functie $p(x) = (5x - 12)(8 - 3x)$ met de x -as.

Vaardigheid

Je kunt de nulpunten en de grenswaarde van een quotiëntfunctie berekenen.

Een functie van de vorm $q(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ heet een quotiëntfunctie.

Bij grote waarden van x kunnen de functiewaarden steeds dichter naderen tot een grenswaarde.

Bij de waarde van x waar de grafiek van de quotiëntfunctie

$q(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ de x -as snijdt, geldt $q(x) = 0$. Deze vergelijking

los je op door $t(x) = 0$ op te lossen.

Voorbeeld 1

Onderzoek of de waarden van $D = \frac{18a - 13}{6a + 2}$ een grenswaarde hebben.

Oplossing

Maak op je rekenmachine een tabel.

a	10	100	1000	10 000
D	2,694	2,968	2,997	3,000

De grenswaarde is 3.

Voorbeeld 2

Bereken van de quotiëntfunctie $q(x) = \frac{2x^3 - x - 4}{4x + 3}$ de waarde van x waarvoor $q(x) = 0$.

Oplossing

$$q(x) = 0 \text{ als } 2x^3 - x - 4 = 0$$

Deze vergelijking met de rekenmachine oplossen geeft $x \approx 1,39$.

S6 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{7-2x}{4x-5}$ en $g(x) = \frac{x^2-9}{2x-13}$

- Onderzoek of $f(x)$ een grenswaarde heeft.
- Bereken de x -coördinaten van de snijpunten met de x -as van de grafiek van g .

Vaardigheid

Je kunt met een formule beredeneren of de grafiek stijgt of daalt en hoe groot de grenswaarde is.

Door na te gaan hoe een formule is opgebouwd, kun je beredeneren hoe de uitkomst van een formule verandert. Je kunt daarbij onder andere gebruikmaken van de volgende eigenschappen.

- g^t neemt toe als $g > 1$ en t groter wordt.
- g^t neemt af als $g < 1$ en t groter wordt.
- Bij een vaste positieve waarde van c en $n > 0$ neemt $\frac{c}{n}$ af als n groter wordt.

Soms kun je bij een quotiëntfunctie met redeneren een eventuele grenswaarde bepalen.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $w = \frac{80}{4+m^2} - 16$.

Beredeneer of de waarde van w toeneemt of afneemt als m steeds groter wordt en naar welke grenswaarde w nadert.

Oplossing

Bij $m = 0$ is $w = \frac{80}{4+0^2} - 16 = 4$.

Als m steeds groter wordt, dan neemt m^2 toe. Daardoor neemt $4 + m^2$ ook toe.

80 wordt gedeeld door een steeds groter wordend getal en daardoor daalt $\frac{80}{4+m^2}$ naar 0.

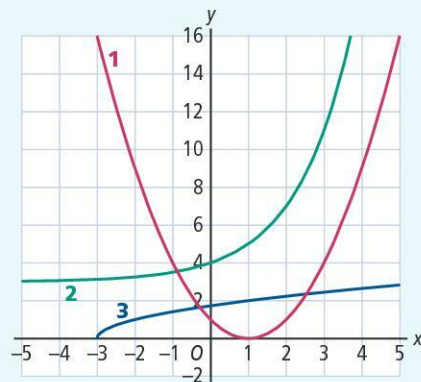
De waarde van w daalt dan naar $0 - 16 = -16$.

De waarde van w neemt af en de grenswaarde is -16 .

S7 Gegeven is de formule $a = 8 - \frac{108}{c^3 + 9}$

Beredeneer of de waarde van a toeneemt of afneemt als c steeds groter wordt en naar welke grenswaarde a nadert.

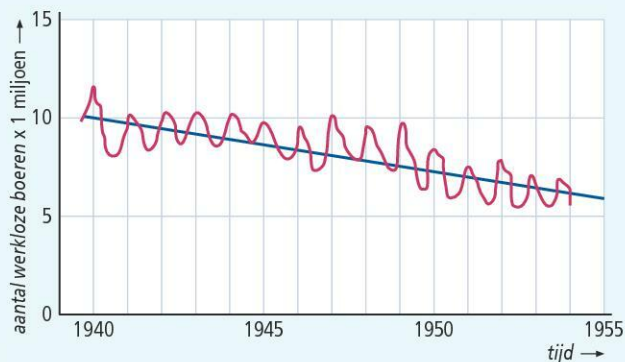
- T1**
- Grafiek 1 is door een verschuiving ontstaan uit de grafiek van de functie $f(x) = x^2$.
Stel het functievoorschrift op bij grafiek 1.
 - Grafiek 2 is door een verschuiving ontstaan uit de grafiek van de functie $f(x) = 2^x$.
Stel het functievoorschrift op bij grafiek 2.
 - Grafiek 3 is door een verschuiving ontstaan uit de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{x}$.
Stel het functievoorschrift op bij grafiek 3.
 - De grafiek van de functie $f(x) = 2 + 4\sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right)$ wordt twee naar links en drie omlaag verschoven.
Gaat de beeldgrafiek door het punt $(1, -5)$? Licht je antwoord toe.



- T2**
- Gegeven zijn de functies $f(x) = (x^2 - 1)(2x + 3)$ en $g(x) = 3x^2 - 2x$.
- Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.
 - Stel de functievoorschriften op van de somfunctie $s(x) = f(x) + g(x)$ en de verschilfunctie $v(x) = f(x) - g(x)$. Schrijf beide functievoorschriften zonder haakjes.
 - Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van g met de horizontale as.

- T3**
- De werkloosheid onder de Amerikaanse boerenbevolking voor de periode 1940-1955 is in beeld gebracht. De werkloosheid lijkt om een rechte lijn te schommelen. Deze lijn heet de trendlijn en deze is eveneens getekend.

- Een formule van de vorm $N = a \cdot t + b + \sin(ct)$ benadert het verloop van de werkloosheid redelijk, waarbij t het aantal jaren na 1940 is en N het aantal werkloze boeren in miljoenen.
Leg uit dat $a \approx -0,27$, $b = 10$ en $c = 2\pi$.
- Stel een formule op voor het aantal werkloze boeren A in duizendtallen en de tijd m in maanden.



T4 De kostprijs van een product hangt mede af van het aantal producten dat geproduceerd wordt. Als andere factoren buiten beschouwing worden gelaten, geldt voor de kostprijs P per product in euro's en het aantal producten q bij benadering de formule $P = \frac{38q + 157}{6q + 18}$

- Bereken tot welke grenswaarde de kostprijs nadert als het aantal producten erg groot wordt.
- Door verbeteringen in het productieproces geldt een andere formule voor de kostprijs, namelijk $K = 5\frac{1}{3} + \frac{33}{6q + 21}$

Beredeneer hoe groot de grenswaarde bij deze formule is.

- Leg aan de hand van de formule uit waarom de grafiek van K de horizontale as niet snijdt.
- Stel een formule op voor de totale productiekosten TK in euro's, uitgedrukt in q .
- Leg uit dat TK geen grenswaarde heeft.



T5 De grafiek beschrijft het verband tussen de gemiddelde lengte en de leeftijd van jongetjes van nul tot tien jaar. Een formule die hierbij past is $L = a + b\sqrt{x}$ waarbij L de gemiddelde lengte in cm is en x de leeftijd in jaren.

- Onderzoek hoe groot de waarden van a en b zijn. Licht je antwoorden toe.
- Omdat iemand vooral geïnteresseerd is in dit verband in de eerste maanden na de geboorte wordt de leeftijd s gegeven in maanden.

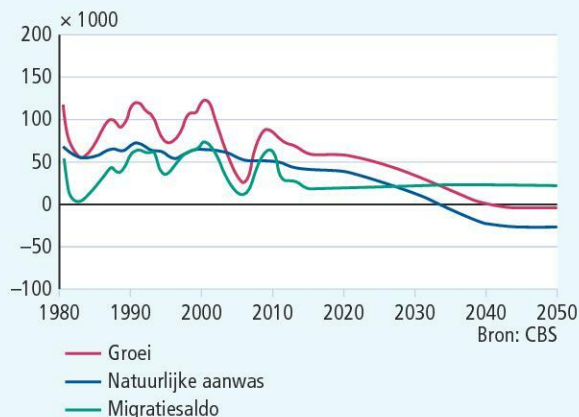
Stel een formule op die L uitdrukt in s .

(Ontleend aan de syllabus vwo wiskunde A 2018)



T6 De grafieken gaan over de groei van de Nederlandse bevolking.

- Welke grafiek is een somgrafiek?
- Hoe kun je zien dat er tussen 2000 en 2010 een fout in de grafieken zit?
- De grafiek voor de groei kun je tussen 2010 en 2040 benaderen met een trendlijn. Stel een formule op voor deze trendlijn.
- Hoe groot is de groei volgens deze trendlijn in 2050?



Je kunt na een verschuiving het functievoorschrift opstellen van de beeldgrafiek.

- E1** Gegeven is de functie $P(m) = 4 + {}^2\log(m - 9)$.
- a** Door welke verschuivingen ontstaat de grafiek van P uit die van de functie $f(m) = {}^2\log(m)$?
 - b** De grafiek van P wordt 5 naar links verschoven. Stel een functievoorschrift op bij de beeldgrafiek.

Je kunt een formule aanpassen als je de eenheid van variabelen herschaalt.

- E2** Gegeven is de formule $K = 3,8(V^2 + 7V)$, met het gewicht K in kilogrammen en het volume V in dm^3 .
De formule wordt veranderd zodat het gewicht O in ons (1 ons = 100 gram) en het volume v in m^3 wordt gegeven.
Stel een nieuwe formule op die het gewicht O uitdrukt in het volume v .

Je kunt nulpunten van een productfunctie berekenen.

- E3** Gegeven zijn de productfuncties $f(x) = (5x - 9) \cdot (2 - 0,5x^2)$ en $g(x) = (x - 4) \cdot \log(2x - 1)$.
- a** Plot en schets de grafiek van f .
 - b** Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met beide assen.
 - c** Maak de opdrachten a en b ook voor functie g .

Je kunt de nulpunten en de grenswaarde van een quotiëntfunctie berekenen.

- E4** Gegeven zijn de quotiëntfuncties $f(x) = \frac{4x + 1}{2 - 3x}$ en $g(x) = \frac{x^2 - 4}{3 - 8x}$
- a** Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de horizontale as.
 - b** Onderzoek of de waarden van $f(x)$ een grenswaarde hebben.
 - c** Maak de opdrachten a en b ook voor functie g .

Je kunt met een formule beredeneren of de grafiek stijgt of daalt en hoe groot de grenswaarde is.

- E5** Beredeneer of de waarde van z toeneemt of afneemt als n steeds groter wordt en naar welke grenswaarde z nadert.

a $z = \frac{3}{n+2} - 1$

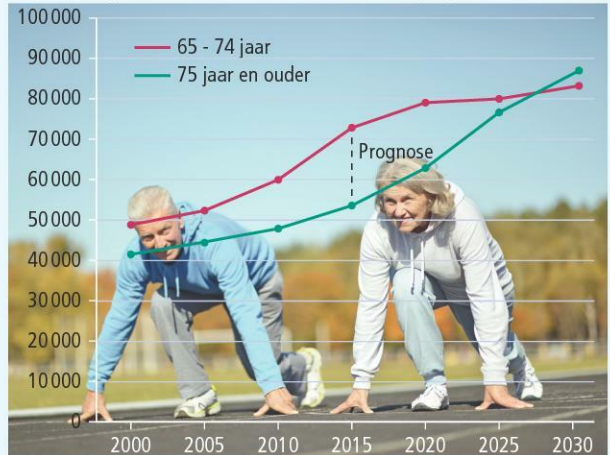
c $z = 4 - \frac{6}{4n+5}$

b $z = 5 + 2 \cdot 0,9^n$

d $z = \frac{4}{\sqrt{n+9}} + 10$

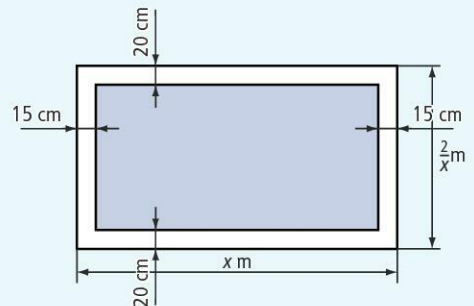
- E6** In de grafieken zie je de ontwikkeling van het aantal inwoners in Friesland van 65 jaar en ouder.
- Geef de betekenis van de somgrafiek van beide grafieken.
 - Het aantal vrouwelijke inwoners f in een dorp in Friesland, t jaar na 2018 kan worden berekend met de formule $f = 820 + 22t$. Het verschil tussen het aantal vrouwelijke inwoners in het dorp en het aantal mannelijke inwoners kan worden berekend met de formule $v = 3t - 14$. Stel een formule op waarmee je het aantal mannelijke inwoners m kunt berekenen.
 - Stel ook een formule op waarmee je het totaal aantal inwoners van het dorp T kunt berekenen.

Ontwikkeling aantal Friese senioren 2000-2015 en prognose tot 2030



- E7** In een land wordt jaarlijks 5 miljoen ton afval verwerkt. Men wil vanaf 2010 deze hoeveelheid verminderen tot 1,75 miljoen ton in het jaar 2030. Een rekenmodel dat gebruikt wordt, is de formule $A = 1,5 + \frac{490}{93t + 140}$. Hierbij is A het aantal miljoenen ton afval per jaar en t is de tijd in jaren met $t = 0$ in 2010.
- Beredeneer of de hoeveelheid afval volgens het model jaarlijks afneemt of jaarlijks toeneemt.
 - Ga met de formule na of het beoogde doel bereikt wordt.

- E8** Een poster heeft een oppervlakte van 2 m^2 . Aan de boven- en onderkant komen onbedrukte randen van 20 cm, terwijl aan de linker- en rechterzijde onbedrukte randen van 15 cm moeten komen. Stel de breedte in meters van de poster gelijk aan x .



- Leg uit dat de hoogte van de poster gelijk is aan $\frac{2}{x}$ meter.
- Leg uit dat de oppervlakte A in m^2 van het bedrukte gedeelte berekend kan worden met de productfunctie $A = (x - 0,3) \cdot \left(\frac{2}{x} - 0,4\right)$.
- Plot en schets de grafiek van A .
- Welk deel van de grafiek is in deze situatie realistisch? Bereken welke waarden van x bij dit deel horen.
- Bereken de maximale oppervlakte in m^2 van het bedrukte deel van de poster.



SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In hoofdstuk 8 en hoofdstuk 16 heb je geleerd hoe je machtsfuncties differentieert en kettingfuncties differentieert.

In dit hoofdstuk leer je functies differentiëren die het product of het quotiënt zijn van twee functies die je al kunt differentiëren.

De technieken die je in dit hoofdstuk leert, heb je in hoofdstuk 21 nodig bij het differentiëren van exponentiële functies en logaritmische functies.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Probleem oplossen en analytisch denken*
- *Formules manipuleren*
- *Logisch redeneren en bewijzen*

opdracht 7
opdracht 9
opdracht 19

V1 Schrijf de functies in de vorm $f(x) = c \cdot x^a$.

a $f(x) = \frac{4}{x^3}$

d $f(x) = (3x^{-2})^3$

b $f(x) = \frac{3}{x^2} \cdot \sqrt{x}$

e $f(x) = \frac{5}{15x^4}$

c $f(x) = (-2x)^4$

f $f(x) = \frac{1}{4}x^2 \cdot \sqrt[5]{32x}$

Theorie

De helling van de grafiek van f in een punt A is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de **raaklijn** aan de grafiek van f in punt A . Je kunt deze helling berekenen door:

- een raaklijn in het punt A aan de grafiek te tekenen en daarvan de richtingscoëfficiënt te bepalen.
- de waarde van de afgeleide functie in punt A te berekenen.

Het opstellen van de formule van een afgeleide functie heet **differentiëren**. De afgeleide van $y = f(x) = c \cdot x^a$ is $f'(x) = c \cdot a \cdot x^{a-1}$ voor elke waarde van $a \neq 0$. Een andere notatie voor de afgeleide is $\frac{dy}{dx} = c \cdot a \cdot x^{a-1}$.

Voorbeeld

Bereken de helling van de grafiek van $K = 2\frac{1}{2}t^2 \sqrt{t}$ in het punt $A(4, 80)$.

Oplossing

$$K = 2\frac{1}{2}t^2 \cdot t^{\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}t^{2\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dK}{dt} = 6\frac{1}{4}t^{1\frac{1}{2}}, \text{ ofwel } \frac{dK}{dt} = 6\frac{1}{4}t\sqrt{t}$$

De helling van de grafiek in het punt A is

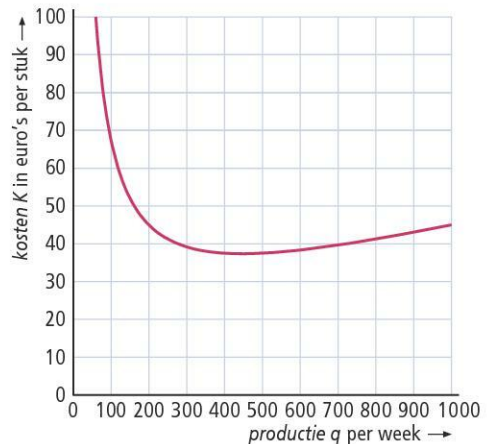
$$\frac{dK}{dt} = 6\frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \sqrt{4} = 50.$$

V2 In de grafiek kun je aflezen hoe de kosten per ledlamp afhangen van de grootte van de productie.

- a Gebruik een raaklijn om de helling van de grafiek in het punt $(200, 45)$ te schatten.
- b Het verband tussen de kosten K in euro's per stuk en de productie q per week wordt gegeven door de formule

$$K = 0,025q + 15 + \frac{5000}{q}$$

Bereken met behulp van differentiëren de helling van de grafiek in het punt $(200, 45)$.



V3 Differentieer.

a $g(x) = -3x^{0,7} \cdot 2x^{1,3}$

d $A = 5\sqrt{p} \cdot \sqrt[4]{p^3}$

b $r(t) = \frac{25t^5}{2t^{1,5}}$

e $h(d) = \frac{4}{3\sqrt[3]{d}} - d^2\sqrt{d}$

c $TK = q^{-0,5} + \frac{15}{3q^2}$

f $p(q) = 5(2q^{0,8})^4 + 6q$

Theorie

Een **kettingfunctie** is een functie die is samengesteld uit meerdere functies. Een voorbeeld van een kettingfunctie is de functie $f(x) = 8(9x^2 - 3)^3$. Deze functie is samengesteld uit de schakels $y = 8u^3$ en $u = 9x^2 - 3$. Je vindt de afgeleide van een kettingfunctie door de afgeleiden van de afzonderlijke schakels met elkaar te vermenigvuldigen.

In formulevorm: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Deze manier om de afgeleide te vinden, heet de **kettingregel**.

Voorbeeld 1

Differentieer $k(x) = (-3x + 5)^4$.

Oplossing

De schakels zijn $y = u^4$ en

$u = -3x + 5$.

$\frac{dy}{du} = 4u^3$ en $\frac{du}{dx} = -3$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4u^3 \cdot -3 = -12u^3$

$k'(x) = -12(-3x + 5)^3$

Voorbeeld 2

Differentieer $l(t) = 80\sqrt{10 - 2t^2}$.

Oplossing

De schakels zijn $y = 80\sqrt{u} = 80u^{\frac{1}{2}}$

en $u = 10 - 2t^2$.

$\frac{dy}{du} = 40u^{-\frac{1}{2}}$ en $\frac{du}{dt} = -4t$

$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = 40u^{-\frac{1}{2}} \cdot -4t$

$\frac{dy}{dt} = -160t \cdot u^{-\frac{1}{2}}$

$l'(t) = -160t(10 - 2t^2)^{-\frac{1}{2}}$

ofwel $l'(t) = \frac{-160t}{\sqrt{10 - 2t^2}}$

Voorbeeld 3

Differentieer $m(r) = \frac{1}{5r + 9}$

Oplossing

De schakels zijn $y = \frac{1}{u} = u^{-1}$ en

$u = 5r + 9$.

$\frac{dy}{du} = -u^{-2}$ en $\frac{du}{dr} = 5$

$\frac{dy}{dr} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dr} = -u^{-2} \cdot 5 = -5 \cdot u^{-2}$

$m'(r) = -5(5r + 9)^{-2}$

ofwel $m'(r) = \frac{-5}{(5r + 9)^2}$

V4 Differentieer.

a $f(x) = (10x - 2)^5$

d $Q(p) = \frac{3}{(p^2 - p)^2}$

b $w(x) = 7(3 - x)^{0,6}$

e $g(f) = 3((25f + 6)^{0,8})^5$

c $A(s) = \sqrt{5s^3 - 10}$

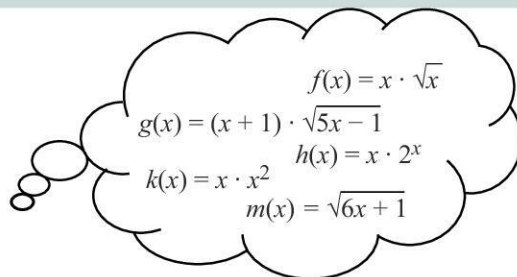
f $h(t) = (3t - 1)\sqrt{3t - 1}$

Je leert • hoe je een productfunctie differentieert

Leerroutes • ondersteunend: 1—03—4—5—06—6—7
 • doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7
 • uitdagend: 1—2—3—4—6—7—U1

Gegeven zijn de functies $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$,
 $g(x) = (x + 1) \cdot \sqrt{5x - 1}$, $h(x) = x \cdot 2^x$,
 $k(x) = x \cdot x^2$ en $m(x) = \sqrt{6x + 1}$.

• Leg uit welke van de functies je kunt differentiëren en welke niet.



1 Gegeven is de functie $p(x) = x^2(1 - x)$. Met een rekenmachine zijn voor een aantal waarden van x de waarden van $p(x)$ en $p'(x)$ berekend, zie de tabel.

- a** Willem berekent de afgeleide $p'(x)$ als volgt: de afgeleide van x^2 is $2x$ en die van $(1 - x)$ is -1 , dus $p'(x) = 2x \cdot -1 = -2x$.
 Ga met behulp van de tabel na dat de afgeleide niet juist is.
- b** Bereken $p'(x)$ door in het functievoorschrift van p eerst de haakjes weg te werken.
- c** Ga na dat je met de afgeleide voor alle waarden van x in de tabel de juiste waarde van de afgeleide vindt.

x	$p(x)$	$p'(x)$
-3	36	-33
0	0	0
1	0	-1
2	-4	-8
5	-100	-65

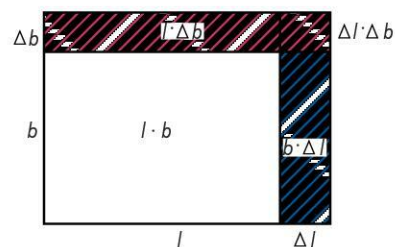
2 Gegeven is de rechthoek met lengte $l(t)$, breedte $b(t)$ en oppervlakte $O(t) = l(t) \cdot b(t)$. Als l toeneemt met Δl en b met Δb , dan is het product $(l + \Delta l)(b + \Delta b)$ de oppervlakte van de rechthoek met zijden $l + \Delta l$ en $b + \Delta b$.

- a** De oppervlakte O van de rechthoek neemt toe met ΔO . Controleer met de figuur dat $\Delta O = \Delta l \cdot b + l \cdot \Delta b + \Delta l \cdot \Delta b$.
- b** Als Δt heel klein is, dan zijn Δl en Δb ook heel klein. Leg uit dat dan geldt $\Delta O \approx \Delta l \cdot b + l \cdot \Delta b$.
- c** Na delen door Δt is $\frac{\Delta O}{\Delta t} = \frac{\Delta l}{\Delta t} \cdot b + \frac{\Delta b}{\Delta t} \cdot l$.

Als Δt heel klein is, dan nadert $\frac{\Delta O}{\Delta t}$ tot $\frac{dO}{dt}$

Ga na dat daaruit volgt: $\frac{dO}{dt} = \frac{dl}{dt} \cdot b + l \cdot \frac{db}{dt}$, oftewel

$$O'(t) = l'(t) \cdot b(t) + l(t) \cdot b'(t).$$



Theorie

Een functie van de vorm $p(x) = g(x) \cdot h(x)$ heet een **productfunctie**.

Een productfunctie differentieer je met de **productregel**
 $p'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$.

Voorbeeld

Differentieer $f(x) = (2 - x^2)(1 + 4x + x^3)$.

Oplossing

De functie $f(x)$ is de productfunctie van $g(x) = 2 - x^2$ en $h(x) = 1 + 4x + x^3$.

De afgeleiden zijn $g'(x) = -2x$ en $h'(x) = 4 + 3x^2$.

Met de productregel vind je:

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$f'(x) = -2x \cdot (1 + 4x + x^3) + (2 - x^2) \cdot (4 + 3x^2)$$

$$f'(x) = -2x - 8x^2 - 2x^4 + 8 + 6x^2 - 4x^2 - 3x^4$$

$$f'(x) = -5x^4 - 6x^2 - 2x + 8$$

Ondersteunende route → maak opdracht 03

- 3** Differentieer met de productregel.

H **a** $f(x) = x^3(x^2 - 1)$ **c** $l(q) = (2q - 7)(3 - 5q^2)$
b $p(x) = (x^2 - 3x)(2x + 5)$ **d** $s(t) = 5(t + 3)(10t - 9)$

- 4** Gegeven is de functie $f(x) = (3x + 5)^2$.

Je gaat in deze opdracht op drie manieren laten zien dat

$$f'(x) = 18x + 30.$$

- a** Werk in $f(x)$ de haakjes weg en differentieer $f(x)$.
- b** Differentieer $f(x)$ met behulp van de kettingregel.
- c** Je kunt de functie f schrijven als $f(x) = (3x + 5)(3x + 5)$.
Differentieer $f(x)$ met de productregel.

- 5** De functie $f(x) = 4x(5x - 10)^3$ is het product van $g(x) = 4x$ en $h(x) = (5x - 10)^3$.

- a** Laat met de kettingregel zien dat $h'(x) = 15(5x - 10)^2$.
- b** Differentieer $f(x)$ met de productregel.

Bij het differentiëren van een productfunctie $p(x) = g(x) \cdot h(x)$ gebruik je de productregel. Voor het differentiëren van g of van h heb je soms de kettingregel nodig.

Voorbeeld

Bereken de afgeleide van $f(x) = 4x^2(5x + 8)^6$.

Oplossing

$f(x) = g(x) \cdot h(x)$ met $g(x) = 4x^2$ en $h(x) = (5x + 8)^6$.

De afgeleide van h bereken je met de kettingregel.

De schakels zijn $y = (5x + 8)^6 = u^6$ en $u = 5x + 8$.

$$\frac{dy}{du} = 6u^5 \text{ en } \frac{du}{dx} = 5 \text{ dus } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 6u^5 \cdot 5 = 30u^5$$

$$h'(x) = 30(5x + 8)^5$$

Met de productregel $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$ vind je:

$$f'(x) = 8x(5x + 8)^6 + 4x^2 \cdot 30(5x + 8)^5$$

$$f'(x) = 8x(5x + 8)^6 + 120x^2(5x + 8)^5$$

Ondersteunende route → maak opdracht O6

6 Differentieer.**H**

a $r(s) = s^2(3s - 5)^3$

d $l(d) = (2d + 5)(4 - d)^2$

b $N(t) = 3t(4t + 1)^5$

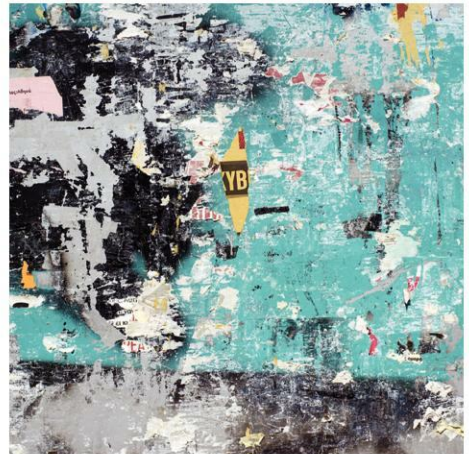
e $k(b) = \left(\frac{1}{2}b + 1\right)^4 \cdot 2b^3$

c $P(n) = 2n^3 \cdot \sqrt{3 + n}$

f $f(x) = (2x + 1)\sqrt{4 - x}$

7 Een actiegroep wil posters laten drukken om 100 m^2 te kunnen beplakken. Voor het aantal te drukken posters q geldt de formule $q = 100x^{-1}$. In deze formule is x de oppervlakte per poster in m^2 . De prijs p in euro's per poster is ook afhankelijk van de oppervlakte x in m^2 . Voor het verband tussen p en x geldt de formule $p = 10 + 5x^2$.

- Hoeveel kost het drukken van de posters als de oppervlakte per poster 1 m^2 is? En bij een oppervlakte van 4 m^2 ?
- Stel een formule op voor de totale kosten in euro's van het drukwerk TK uitgedrukt in x .
- Bereken met behulp van de afgeleide van TK bij welke oppervlakte per poster de totale kosten minimaal zijn.
- Hoe groot zijn de totale kosten als deze minimaal zijn en hoeveel posters worden er dan gedrukt?



Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

- 03** Op het blaadje is een begin gemaakt met het differentiëren van de productfunctie $f(x) = 2x^5(50 + 4x)$.
- Leg uit wat er in stap 1 en stap 2 is gebeurd.
 - Wat moet er op de puntjes staan in stap 3?
 - Maak de berekening af door de haakjes weg te werken en te herleiden.

Differentieer met de productregel.

- $f(x) = 2x^2(8 - x^2)$
- $s(t) = -4(8 - t)(9 + t)$
- $l(q) = (q + 60)(8 - q^3)$
- $p(x) = (6x - 5)(2 - x^3)$

•	$f(x) = 2x^5 \cdot (50 + 4x)$	
•	$g(x) = 2x^5$ en $h(x) = 50 + 4x$	1
•	$g'(x) = 10x^4$ en $h'(x) = 4$	2
•	$f'(x) = 10x^4 \cdot (\dots) + 2x^5 \cdot \dots$	3

- 06** De functie $f(x) = 8x^3\sqrt{6x + 10}$ is het product van de functies $g(x) = 8x^3$ en $h(x) = \sqrt{6x + 10}$.
- Bepaal $g'(x)$.
 - Leg uit dat h een kettingfunctie is.
 - Op het blaadje is een begin gemaakt met het differentiëren van $h(x)$.

•	De schakels zijn $y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ en $u = \dots$
•	$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}$ en $\frac{du}{dx} = \dots$
•	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot \dots = \dots$
•	$h'(x) = \dots$

Maak deze berekening af.

- Differentieer $f(x)$ met de productregel:

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x).$$

Uitdagende opdrachten

- U1** De afgeleide van de functie $u(x) = 3x\sqrt{6x + 5}$ is de functie $u'(x) = \frac{ax + b}{\sqrt{6x + 5}}$
- Bereken de waarden van a en b .

20.2 Quotiëntregel

Je leert

- hoe je een quotiëntfunctie differentieert

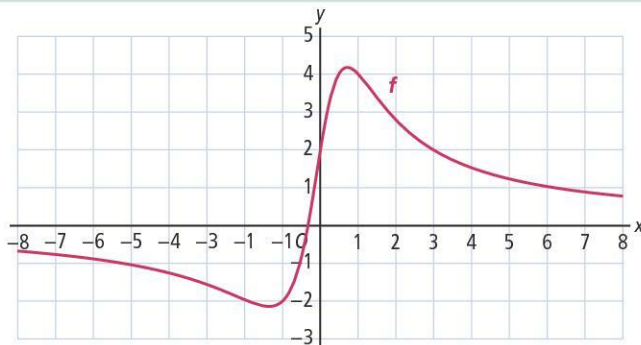
Leerroutes

- ondersteunend: 8—9—011—11—12—13—14
- doorlopend: 8—9—10—11—12—13—14
- uitdagend: 8—9—10—12—13—14—U2

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{6x+2}{x^2+1}$

Er zijn punten op de grafiek van f waarin de helling gelijk is aan 1.

- Hoe kun je deze punten vinden?



- 8 Gegeven de functie $f(x) = \frac{4x+3}{2x+7}$ voor $x > 0$.
- Schets de grafiek van f .
 - Mary differentieert de functie f als volgt:
De afgeleide van $4x+3$ is 4, de afgeleide van $2x+7$ is 2,
dus $f'(x) = \frac{4}{2} = 2$.
Leg met behulp van de grafiek van f uit waarom deze afgeleide niet goed kan zijn.

- 9 De functie uit opdracht 8 kun je ook schrijven als de productfunctie $f(x) = (4x+3) \cdot (2x+7)^{-1}$.
- Leg uit dat je voor het differentiëren van $f(x)$ de productregel en de kettingregel nodig hebt.
 - Op het blaadje wordt $f(x)$ gedifferentieerd.

•	De functie $f(x)$ is de productfunctie van	
•	$g(x) = 4x+3$ en $h(x) = (2x+7)^{-1}$	
•	$g'(x) = 4$	1
•	$h(x) = (2x+7)^{-1} = u^{-1}$ en $u = 2x+7$	2
•	$h'(x) = -u^{-2} \cdot 2 = -2(2x+7)^{-2}$	3
•	$f'(x) = 4 \cdot (2x+7)^{-1} + (4x+3) \cdot -2(2x+7)^{-2}$	4

Leg uit wat er in elke stap is gebeurd.

- Leg uit dat $f'(x) = \frac{4}{2x+7} + \frac{-2(4x+3)}{(2x+7)^2}$
- Laat door herleiding zien dat $f'(x) = \frac{22}{(2x+7)^2}$

10 Een quotiëntfunctie heeft de vorm $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$

Je kunt $f(x)$ schrijven als $f(x) = t(x) \cdot (n(x))^{-1}$.

a Laat met de kettingregel zien dat de afgeleide van

$$(n(x))^{-1} \text{ gelijk is aan } -1 \cdot (n(x))^{-2} \cdot n'(x).$$

b Laat met de productregel zien dat

$$f'(x) = t'(x) \cdot (n(x))^{-1} - t(x) \cdot (n(x))^{-2} \cdot n'(x).$$

c Herleid het resultaat van opdracht b tot

$$f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

Theorie

Een functie van de vorm $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ heet een

quotiëntfunctie.

Een quotiëntfunctie differentieer je met de **quotiëntregel**:

$$f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

Gebruik haakjes waar dat nodig is. De teller werk je zo ver mogelijk uit, het kwadraat in de noemer hoeft je in het algemeen niet uit te werken.

Voorbeeld 1

Differentieer $f(x) = \frac{3x - 2}{x^2 + 1}$

Oplossing

De functie f is het quotiënt van $t(x) = 3x - 2$ en $n(x) = x^2 + 1$.

De afgeleiden zijn $t'(x) = 3$ en $n'(x) = 2x$

Met de quotiëntregel vind je:

$$f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{3 \cdot (x^2 + 1) - (3x - 2) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 3 - 6x^2 + 4x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\text{ofwel } f'(x) = \frac{-3x^2 + 4x + 3}{(x^2 + 1)^2}$$

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie $g(x) = \frac{6x}{4x^2 - 10}$

Bereken $g'(1)$.

Oplossing

De functie g is het quotiënt van $t(x) = 6x$ en $n(x) = 4x^2 - 10$.

De afgeleiden zijn $t'(x) = 6$ en $n'(x) = 8x$.

Met de quotiëntregel vind je:

$$g'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

$$g'(x) = \frac{6 \cdot (4x^2 - 10) - 6x \cdot 8x}{(4x^2 - 10)^2}$$

$$\text{ofwel } g'(x) = \frac{-24x^2 - 60}{(4x^2 - 10)^2}$$

$$g'(1) = \frac{-24 \cdot 1^2 - 60}{(4 \cdot 1^2 - 10)^2} = -2\frac{1}{3}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 011

- 11** Differentieer de functie $f(x) = \frac{5x+6}{2-x^2}$ en toon aan dat

H $f'(x) = \frac{5x^2 + 12x + 10}{(2-x^2)^2}$

- 12** Differentieer.

H **a** $A = \frac{6p - 2p^2}{p + 15}$ **c** $R = \frac{(4s + 5)^3}{s}$

b $L = \frac{1}{u + 3}$ **d** $W = \frac{c}{\sqrt{2-c}}$

- 13** Gegeven de formule $N = \frac{3t^2 - 5}{9}$

a Bepaal $\frac{dN}{dt}$ met de quotiëntregel.

b Leg uit dat je de formule $N = \frac{3t^2 - 5}{9}$ ook kunt schrijven als $N = \frac{1}{3}t^2 - \frac{5}{9}$ en differentieer deze formule.

c Welke manier om de formule N te differentiëren heeft je voorkeur? Leg je antwoord uit.

d Differentieer $N = \frac{3t(t+4)}{2t}$

- 14** Een patiënt krijgt een geneesmiddel toegediend door een injectie in een spier. De concentratie van dit geneesmiddel in het bloed bereikt na enige tijd een maximum en neemt daarna geleidelijk af. Deze concentratie C in mg/liter voldoet aan de formule $C = \frac{8t}{t^2 + 4}$ met t in uren en $0 \leq t \leq 24$.

- a** Bereken met behulp van de afgeleide na hoeveel tijd de concentratie in het bloed maximaal is.
b Hoe groot is de snelheid waarmee het geneesmiddel in het bloed wordt opgenomen op het moment van injecteren?
c En hoe groot is de snelheid van afbraak na vijf uur?
d Na hoeveel uur moet er een tweede injectie worden gegeven om te zorgen dat de concentratie ten minste 1 mg/liter blijft?



Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

011 Gegeven is de quotiëntfunctie $f(x) = \frac{13x^2}{x+6}$

- a** Op het blaadje is een begin gemaakt met het differentiëren van f met behulp van de quotiëntregel.

Het functievoorschrift $f(x)$ is het quotiënt van $t(x) = 13x^2$ en $n(x) = x + 6$.

De afgeleiden zijn $t'(x) = \dots$ en $n'(x) = \dots$

$f'(x) = \frac{\dots \cdot n(x) - \dots \cdot n'(x)}{(\dots)^2}$

$f'(x) = \frac{\dots \cdot (x + 6) - 13x^2 \cdot \dots}{(x + 6)^2}$

Vul de afgeleiden in stap 1 in.

- b** Vul in stap 2 de quotiëntregel verder in.
- c** In stap 3 wordt de quotiëntregel toegepast.
Waarom zijn er in de teller haakjes geplaatst om $x + 6$?
- d** Maak de berekening af en laat door herleiden zien dat

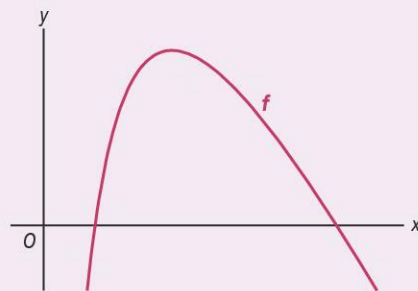
$$f'(x) = \frac{13x^2 + 156x}{(x+6)^2}$$

Uitdagende opdrachten

U2 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{-x^2 + 21x - 56}{x - 1}$ voor $x > 1$.

Je ziet een schets van de grafiek van f .

- a** Differentieer de functie $f(x)$ en toon aan dat je de afgeleide kunt herleiden tot $f'(x) = -1 + \frac{36}{(x-1)^2}$
- b** Bereken $f'(8)$ en leg met behulp van je antwoord uit of de x -coördinaat van de top van de getekende grafiek van f kleiner of groter dan 8 is.



20.3 Hellinggrafiek

Je leert

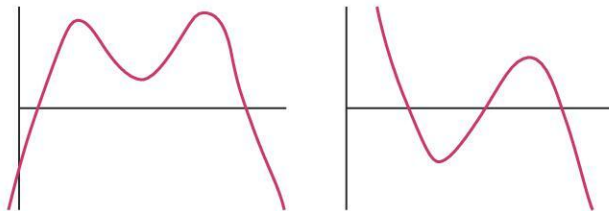
- hoe je met de grafiek van de afgeleide f' uitspraken kunt doen over de grafiek van de functie f

Leerroutes

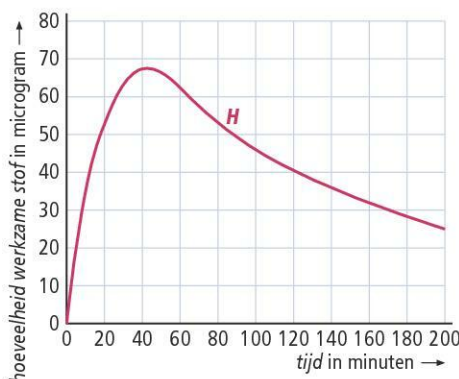
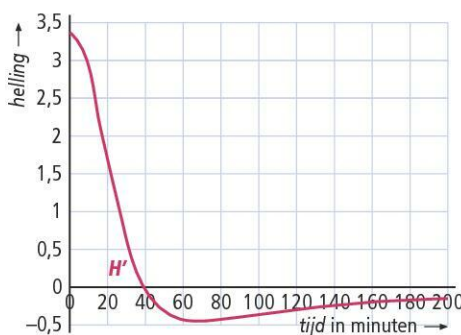
- ondersteunend: 15—16—017—18—19—20
- doorlopend: 15—16—17—18—19—20
- uitdagend: 15—17—18—19—20—U3

Maaïke heeft de grafieken van f en van f' geschetst.

- Welke grafiek is de grafiek van f en welke van f' ? Of valt dit niet uit de schetsen op te maken?



- 15** De hoeveelheid werkzame stof in een geneesmiddel wordt door het bloed opgenomen. Tegelijkertijd begint ook de afbraak van het werkzame middel. Het verband tussen de hoeveelheid werkzame stof $H(t)$ in microgram en de tijd t in minuten met $t = 0$ het moment van inname, kun je beschrijven met een functievoorschrift. Zowel de grafiek van H als van H' zijn gegeven.



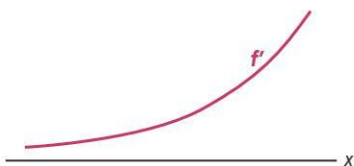
- Ga met de grafiek van H na dat de hoeveelheid werkzame stof na 40 minuten maximaal is.
- Hoe kun je in de grafiek van H' zien dat de hoeveelheid werkzame stof na 40 minuten maximaal is?
- Van 0 tot 40 minuten neemt de hoeveelheid werkzame stof toe en na 40 minuten neemt deze hoeveelheid weer af. Hoe kun je dit zien in de grafiek van H' ?
- Is de grafiek van H na 70 minuten toenemend of afnemend dalend? Hoe kun je dit in de grafiek van H' zien?

Theorie

De grafiek van de afgeleide heet de **hellinggrafiek**. Met behulp van de hellinggrafiek van een functie kun je een beeld krijgen van het verloop van de grafiek van deze functie.

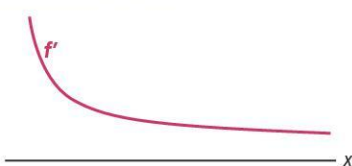
- Als de hellinggrafiek boven de x -as ligt, dan stijgt de grafiek van de functie. Als de hellinggrafiek onder de x -as ligt, dan daalt de grafiek van de functie.
- Als de hellinggrafiek de x -as nadert, dan heb je te maken met een afnemende stijging of daling.
- Als de hellinggrafiek van de x -as weggaat, dan heb je te maken met een toenemende stijging of daling.
- Als de hellinggrafiek de x -as snijdt, dan heeft de grafiek van f een horizontale raaklijn, bijvoorbeeld in een top.

Voorbeeld 1



De hellinggrafiek ligt boven de x -as, dus de grafiek van f is stijgend.
De hellinggrafiek gaat weg van de x -as, dus de grafiek van f is toenemend stijgend.

Voorbeeld 2



De hellinggrafiek ligt boven de x -as, dus de grafiek van f is stijgend.
De hellinggrafiek nadert de x -as, dus de grafiek van f is afnemend stijgend.

Voorbeeld 3



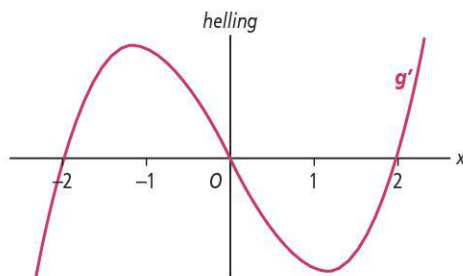
De hellinggrafiek ligt boven de x -as, dus de grafiek van f is stijgend.
De hellinggrafiek is horizontaal, dus de grafiek van f is constant stijgend, oftewel een rechte lijn.

- 16** In de voorbeelden zie je grafieken van f' als de grafiek van f toenemend stijgend, afnemend stijgend en constant stijgend is. Schets grafieken van f' als de grafiek van f toenemend dalend, afnemend dalend en constant dalend is.

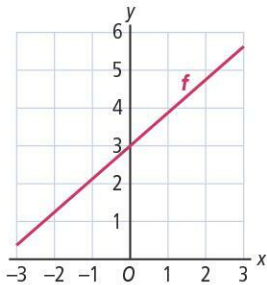
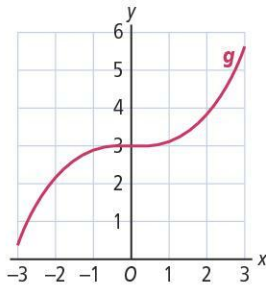
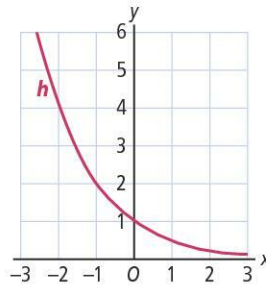
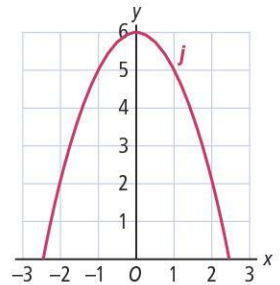
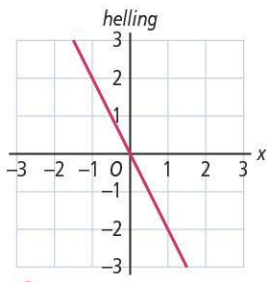
Ondersteunende route → maak opdracht 017

- 17** Je ziet een schets van de grafiek van g' .

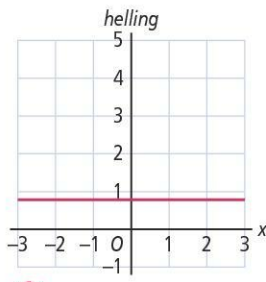
- H**
- Leg uit dat de grafiek van g voor $x < -2$ afnemend dalend is.
 - Hoe kun je aan de grafiek van g' zien dat de grafiek van g een horizontale raaklijn heeft voor $x = -2$?
 - Heeft g een minimum, een maximum of geen van beide voor $x = -2$?
 - Schets de grafiek van g .



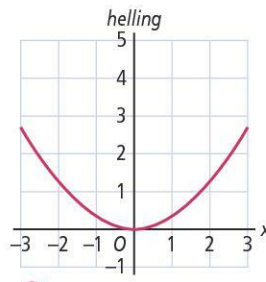
- 18** Je ziet de grafieken van de functies f , g , h en j en vier hellinggrafieken. Elk van de hellinggrafieken hoort bij één van de grafieken.



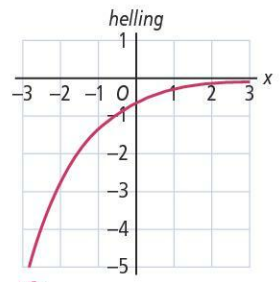
A



B



C



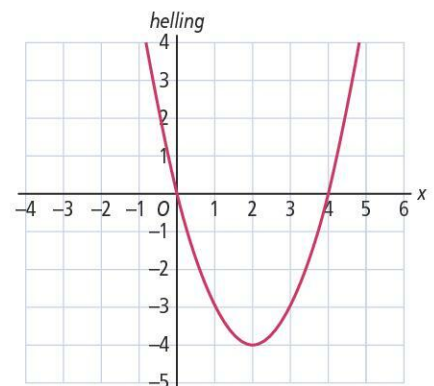
D

Bereken de helling van de hellinggrafiek bij welke functie hoort.

- 19** Voor een bedrijf waar plastics worden geproduceerd, gebruikt men de volgende formule voor het berekenen van de jaarlijkse kosten: $K = 25000 \cdot P^{0,62}$. In deze formule stelt K de kosten in dollars voor en P de productie in tonnen per jaar.
- Bepaal $\frac{dK}{dP}$ en schets de hellinggrafiek van K .
 - Bereken met de hellinggrafiek dat de kosten bij een lage productie veel sneller toenemen dan bij een hoge productie.

- 20** Je ziet de hellinggrafiek van de functie f . Iemand doet een aantal uitspraken over de functie f . Ga bij elke uitspraak na of deze waar is, niet waar is of dat je dat niet de hellinggrafiek kunt opmaken. Licht je antwoord steeds toe.
- De functie f heeft een minimum bij $x = 2$.
 - De functie f heeft één nulpunt.
 - De grafiek van f heeft een top bij $x = 0$ en bij $x = 4$.
 - De grafiek van f is een parabool.
 - De grafiek daalt het snelst bij $x = 2$.

Uitdaging route → maak opdracht U3

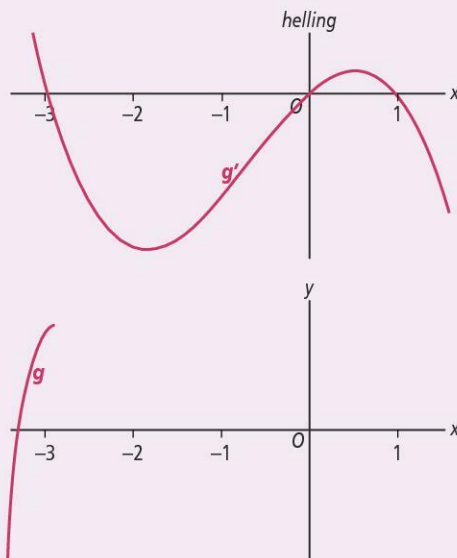


Ondersteunende opdrachten

017

Gegeven is een schets van de grafiek van g' .

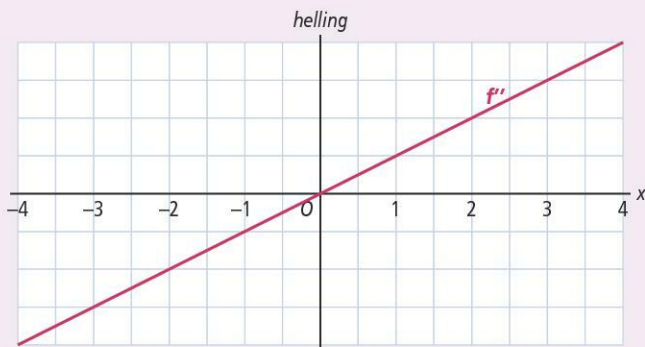
- Op het interval $x < -3$ ligt de grafiek van g' boven de x -as.
Is de grafiek van g stijgend of dalend voor $x < -3$?
- Op het interval $x < -3$ nadert de grafiek van g' de x -as.
Leg uit dat de grafiek van g op dit interval afnemend stijgend is.
- Leg uit dat de grafiek van g in $x = -3$ overgaat van stijgen in dalen.
- Heeft de functie g een minimum of een maximum bij $x = -3$?
- Hoe kun je zien dat de grafiek van g tussen $x = -3$ en $x = -2$ toenemend dalend is?
- Vul in.
Tussen $x = -2$ en $x = 0$ is de grafiek van g ... dalend.
- Er is een begin gemaakt met een mogelijke schets van de grafiek van g .
Maak de schets af.



Uitdagende opdrachten

U3

De grafiek van f' is de hellinggrafiek van f . De grafiek van f'' is de hellinggrafiek van de hellinggrafiek van f . Je ziet de grafiek van f'' .



Maak een mogelijke schets van de grafiek van f .

20.4 Redeneren met de afgeleide

Je leert • hoe je met de afgeleide f' beredeneert hoe de grafiek van f stijgt of daalt

Leerroutes • ondersteunend: 21—022—23—24—25—26
• doorlopend: 21—22—23—24—25—26
• uitdagend: 21—23—24—25—26—U4

In een gebied nam het aantal sprinkhanen N vanaf 1 juli 2020 snel toe. Een bioloog heeft een formule voor N opgesteld. Hij beweert dat de

afgeleide gelijk is aan $\frac{dN}{dt} = \frac{-6420 \cdot 0,8^t}{(1 + 6 \cdot 0,8^t)^2}$ met

t de tijd in dagen en $t = 0$ op 1 juli 2020.

• Waarom kan deze afgeleide niet juist zijn?



21 Voor $x > 0$ is gegeven de functie $h(x) = \frac{5-x}{x+3}$

H

- a Laat zien dat $h'(x) = \frac{-8}{(x+3)^2}$
- b Leg uit dat de waarde van $(x+3)^2$ altijd positief is en steeds groter wordt als x toeneemt.
- c Waarom is de waarde van $h'(x)$ altijd negatief?
- d Leg uit dat de grafiek van $h'(x)$ altijd onder de x -as ligt en steeds dichterbij de x -as komt als x toeneemt.
- e Hoe volgt uit opdracht d dat de grafiek van h afnemend dalend is voor $x > 0$?

Theorie

Met behulp van de afgeleide van een functie kun je beredeneren hoe het verloop van de grafiek van de functie is. Daarbij moet je beredeneren of de afgeleide positief, negatief of nul is en of de afgeleide toeneemt of afneemt.

Voorbeeld

Voor $x > 0$ is gegeven is de functie $f(x) = 6x^{0,67}$. Beredeneer met behulp van de afgeleide dat de grafiek van f afnemend stijgend is.

Oplossing

$$f'(x) = 0,67 \cdot 6x^{-0,33} = 4,02 x^{-0,33} \text{ ofwel } f'(x) = \frac{4,02}{x^{0,33}}$$

Als $x > 0$, dan is $f'(x)$ positief voor elke waarde van x , want de teller en de noemer zijn beide positief en het quotiënt van twee positieve getallen is altijd positief. Hieruit volgt dat de grafiek van f stijgend is. Als x toeneemt, dan neemt $x^{0,33}$ ook toe. 4,02 wordt gedeeld door een

steeds groter getal, dus $\frac{4,02}{x^{0,33}}$ nadert naar 0.

De grafiek van f is afnemend stijgend.

Ondersteunende route → maak opdracht 022

22

H

- a Voor $x > 0$ is gegeven de functie $f(x) = 1250x^{-0,35}$.

Beredeneer met behulp van de afgeleide dat de grafiek van f afnemend dalend is.

- b Voor $x > 0$ is gegeven de functie $g(x) = \frac{-6}{x^{12}}$

Beredeneer met behulp van de afgeleide op welke manier de grafiek van g stijgt of daalt.

23

Het aantal reigers in een natuurgebied is van 1960 tot 2020 behoorlijk toegenomen. Biologen hebben een model opgesteld waarmee de aantallen reigers berekend kunnen worden:

$R = 0,0007(1,5t + 5)^3 + 124,9$. In deze formule is R het aantal reigers en t de tijd in jaren met $t = 0$ het jaar 1960.

Het aantal reigers groeide in de eerste jaren vrij langzaam. Pas na enige tijd namen de aantallen snel toe.

- a Stel de afgeleide $\frac{dR}{dt}$ op en beredeneer met de formule van de afgeleide dat er na 1960 sprake is geweest van een toenemende stijging.

- b In hetzelfde natuurgebied is ook onderzocht hoeveel kikkers er leefden. De aantallen kikkers kunnen berekend worden met de formule $K = 4500 - \frac{1}{20}(t + 30)^2$. Ook in deze formule is t de tijd in jaren met $t = 0$ het jaar 1960.

Beredeneer met een schets van de grafiek van $\frac{dK}{dt}$ op welke manier de aantallen kikkers toenamen of afnamen tussen 1960 en 2020.



- 24** Als het druk is in een tunnel, lopen de voetgangers langzaam. De loopsnelheid hangt af van de ruimte die er per persoon beschikbaar is. Onderzoekers hebben vastgesteld dat de loopsnelheid V in meters per minuut kan worden berekend met

$$\text{de formule } V = 87 - \frac{26}{R}$$

In deze formule is R het aantal beschikbare vierkante meters per voetganger.

- Beredeneer aan de hand van de formule van V dat mensen sneller lopen als er weinig mensen in de tunnel zijn.
- Beredeneer dit ook aan de hand van de formule van $\frac{dV}{dR}$

- 25** De zevenkamp is een atletiekwedstrijd bij vrouwen. De prestaties per onderdeel worden omgerekend naar punten. De punten bij de 200 meter hardlopen worden berekend met de formule $P = 4,99087(42,5 - t)^{1,81}$ met t de tijd in seconden. De aantallen punten worden naar beneden afgerond op gehelen.

- Hoeveel punten krijgt een atlete als ze de 200 meter in een tijd van 23,49 seconden aflegt?
- Beredeneer met behulp van de afgeleide $\frac{dP}{dt}$ op welke manier de grafiek van P stijgt of daalt. Neem de tijd t tussen 0 en 42,5 seconden.
- Vier atletes lopen de 200 meter in respectievelijk 24, 25, 34 en 35 seconden. Het verschil in puntenaantal is bij de twee snelste lopers groter dan bij de twee langzaamste lopers. Beredeneer dit met behulp van de hellinggrafiek.

- 26** Een veelgehoorde bewering is dat het hart van zoogdieren gedurende hun leven ongeveer een miljard keer slaat. Je gaat dat in deze opdracht onderzoeken. Een zeker hondenras heeft een gemiddelde hartslag van 125 slagen per minuut. Met behulp van de bewering kan je de gemiddelde levensduur van dit ras berekenen.

- Bereken de gemiddelde levensduur van dit hondenras.
- Naar aanleiding van deze bewering kan een formule voor het verband tussen de hartslag en de levensverwachting opgesteld worden: $H = \frac{1900}{L}$

Hierin is L de levensverwachting in jaren en H de hartslag in slagen per minuut.

Toon aan dat deze formule uit de bewering volgt.

- Stel de formule van de afgeleide van H op en beredeneer aan de hand van deze formule dat H afnemend dalend is. (Ontleend aan examen vwo wiskunde A pilot 2017, tijdvak 1)



Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten

022 Voor $x > 0$ is gegeven de functie $f(x) = 32x^{1,2}$.

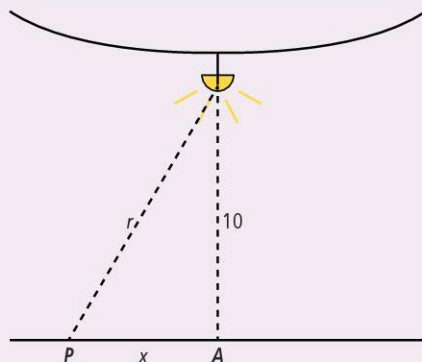
- Laat zien dat $f'(x) = 38,4x^{0,2}$.
- Waarom is $f'(x)$ positief voor $x > 0$?
- Is de grafiek van f stijgend of dalend voor $x > 0$?
- Vul de tabel in.

x	0	100	200	300	400	500
$f'(x)$	...	...	...	...	...	...

- Neemt de afgeleide toe of af als x toeneemt?
- Hoe kun je dit aan het functievoorschrift $f'(x)$ zien?
- Beredeneer met behulp van de afgeleide dat de grafiek van f toenemend stijgend is.
- Beredeneer met de afgeleide op welke manier de grafiek van $g(x) = \frac{-4}{x^2}$ stijgt of daalt als $x > 0$.

Uitdagende opdrachten

U4 Een belangrijke eis die aan wegverlichting gesteld wordt, is dat er overal voldoende licht is langs de te verlichten weg. Om aan te geven hoe licht het op een bepaalde plaats is, gebruikt men het begrip 'verlichtingssterkte', gemeten in lux. Voor het berekenen van de verlichtingssterkte bij één lamp gebruikt men het volgende model. Uitgangspunt is een lamp die op 10 meter hoog boven een wegdek hangt en waarvan het licht zich in alle richtingen naar beneden kan verspreiden. In een punt P op het wegdek met afstand r meter tot de lamp geldt $S = 100\,000 \cdot r^{-3}$. In deze formule is S de verlichtingssterkte in lux in het punt P . Punt A bevindt zich recht onder de lamp en x is de afstand in meters tussen punt A en punt P .



- Toon aan dat $S = \frac{100\,000}{(x^2 + 100)\sqrt{x^2 + 100}}$
- De grafiek van S is eerst toenemend dalend, maar vanaf een bepaalde waarde van x afnemend dalend. Bereken met behulp van de afgeleide $\frac{dS}{dx}$ deze waarde van x .

27 Differentieer de functies.

a $f(t) = t \cdot \sqrt{4t} \cdot \sqrt[3]{t}$

b $T(q) = 7q^2 + \frac{q}{2q^2 + 3}$

c $l(n) = \sqrt{2n-1} \cdot (3n+2)$

d $Z(a) = (2a + \sqrt{9a})^2$

28 Een tuinder heeft een waterreservoir om bij gebrek aan regenwater de planten water te kunnen geven. Voor een bepaalde periode kun je de inhoud van het reservoir berekenen

met de formule $I = \frac{120}{(0,05t + 1)^2}$, waarbij I de inhoud van het reservoir is in m^3 en t de tijd in dagen.

- a Hoe kun je aan de formule zien dat de inhoud afneemt?
- b Beredeneer met een schets van de hellinggrafiek dat de inhoud van het reservoir steeds langzamer afneemt.
- c Beredeneer ook met behulp van de formule van de afgeleide dat de inhoud van het reservoir steeds langzamer afneemt.

29 Het aantal auto's dat per minuut een bepaald punt passeert hangt af van de snelheid van de auto's. Daarbij wordt rekening gehouden met de afstand die de auto's onderling moeten houden. Omdat er bij een hogere snelheid een langere remweg is, moeten auto's bij hogere snelheid een grotere afstand houden. Het aantal auto's A dat per minuut een bepaald punt passeert, kun je berekenen met behulp van

$$A = \frac{1680v}{400 + v^2}$$

Hierin is v de snelheid in km per uur.

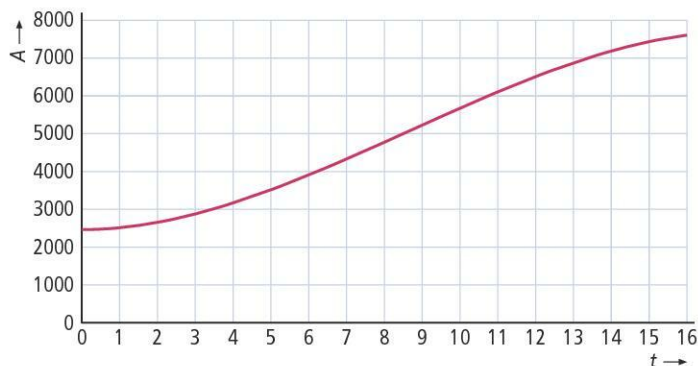
- a Er passeert een file. Alle auto's rijden met een snelheid van 40 km per uur. Ze houden precies de onderlinge afstand die nodig is. De file duurt 15 minuten. Hoeveel auto's passeren er in die tijd?
- b Stel de formule op van de afgeleide van A en bereken daarmee bij welke snelheid het aantal passerende auto's per minuut zo groot mogelijk is.
- c Hoeveel auto's passeren in dat geval per minuut?



- 30** Bert zwemt in een rivier 500 meter tegen de stroom in en vervolgens dezelfde afstand weer terug.
De snelheid van Bert ten opzichte van het water is 1,5 meter per seconde.
De stroomsnelheid van de rivier is v meter per seconde.
- Toon aan dat de tijd die Bert nodig heeft om heen en weer te zwemmen gelijk is aan $\frac{500}{1,5 - v} + \frac{500}{1,5 + v}$ seconden.
 - Onderzoek met behulp van differentiëren of Bert het snelst heen en terug is bij stilstaand water.



- 31** Biologen hebben een schatting gemaakt van het aantal everzwijnen in een natuurgebied. Daarbij is het volgende wiskundige model gemaakt: $A = -2t^3 + 52t^2 + 2t + 2474$. In deze formule is A het aantal everzwijnen en t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2021. Men neemt aan dat dit model zeker tot het jaar 2037 een goede voorspelling geeft. Je ziet de grafiek van A voor $0 \leq t \leq 16$.



- Volgens het model neemt in sommige jaren het aantal everzwijnen sneller toe dan het gemiddelde, en in andere jaren minder snel.
Bepaal met behulp van de grafiek in welke jaren dit aantal sneller toeneemt dan de gemiddelde toename per jaar. Leg je antwoord uit.
- Onderzoek met behulp van differentiëren in welk jaar de grafiek van A overgaat van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.

Vaardigheid

Je kunt een productfunctie differentiëren.

Een functie van de vorm $p(x) = g(x) \cdot h(x)$ heet een productfunctie.

Een productfunctie differentiëer je met de productregel

$$p'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x).$$

Voor het differentiëren van g of van h heb je soms de kettingregel nodig.

Voorbeeld

Stel de afgeleide op van $f(x) = (-4x + 5)^6(8 - 3x)$.

Oplossing

De functie f is het product van $g(x) = (-4x + 5)^6$ en $h(x) = 8 - 3x$.

De afgeleide van g bereken je met de kettingregel.

De schakels zijn $y = (-4x + 5)^6 = u^6$ en $u = -4x + 5$.

$$\frac{dy}{du} = 6u^5 \text{ en } \frac{du}{dx} = -4 \text{ dus } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 6u^5 \cdot -4 = -24u^5$$

$$g'(x) = -24(-4x + 5)^5 \text{ en } h'(x) = -3$$

Met de productregel $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$ vind je:

$$f'(x) = -24(-4x + 5)^5 \cdot (8 - 3x) + (-4x + 5)^6 \cdot -3$$

$$f'(x) = -24(-4x + 5)^5 (8 - 3x) - 3(-4x + 5)^6$$

S1 Differentieer.

a $f(x) = (x^3 + 2x - 6)(8 - 10x - 5x^2)$

b $g(x) = -6x(5x + 90)^{11} + 56$

c $h(x) = 3x(x - 8)^2$

Vaardigheid

Je kunt een quotiëntfunctie differentiëren.

Een functie van de vorm $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ heet een quotiëntfunctie.

Een quotiëntfunctie differentiëer je met de quotiëntregel:

$$f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

Gebruik haakjes waar dat nodig is. De teller werk je zo ver mogelijk uit, het kwadraat in de noemer hoeft je in het algemeen niet uit te werken.

Voorbeeld

$$\text{Differentieer } f(x) = \frac{4x^3}{8x - 3x^2}$$

Oplossing

De functie f is het quotiënt van $t(x) = 4x^3$ en $n(x) = 8x - 3x^2$.

De afgeleiden zijn $t'(x) = 12x^2$ en $n'(x) = 8 - 6x$.

Met de quotiëntregel vind je:

$$f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{12x^2 \cdot (8x - 3x^2) - 4x^3 \cdot (8 - 6x)}{(8x - 3x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{96x^3 - 36x^4 - 32x^3 + 24x^4}{(8x - 3x^2)^2}$$

$$\text{ofwel } f'(x) = \frac{64x^3 - 12x^4}{(8x - 3x^2)^2}$$

S2 Differentieer.

a $f(x) = \frac{5x}{6 - x}$

b $g(x) = \frac{(5 + 3x)^2}{4x}$

c $h(x) = \frac{-5}{(3x + 8)^2}$

d $i(x) = 16 + 3 \cdot \frac{18x}{3x^3 - 2x}$

Vaardigheid

Je kunt met de grafiek van de afgeleide f' uitspraken doen over de grafiek van de functie f .

De grafiek van de afgeleide heet de hellinggrafiek. Met behulp van de hellinggrafiek van een functie kun je een beeld krijgen van het verloop van de grafiek van deze functie.

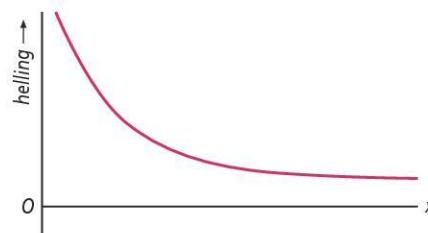
- Als de hellinggrafiek boven de x -as ligt, dan stijgt de grafiek van de functie. Als de hellinggrafiek onder de x -as ligt, dan daalt de grafiek van de functie.
- Als de hellinggrafiek de x -as nadert, dan heb je te maken met een afnemende stijging of daling.
- Als de hellinggrafiek van de x -as weggaat, dan heb je te maken met een toenemende stijging of daling.
- Als de hellinggrafiek de x -as snijdt, dan heeft de grafiek van f een horizontale raaklijn, bijvoorbeeld in een top.

Voorbeeld

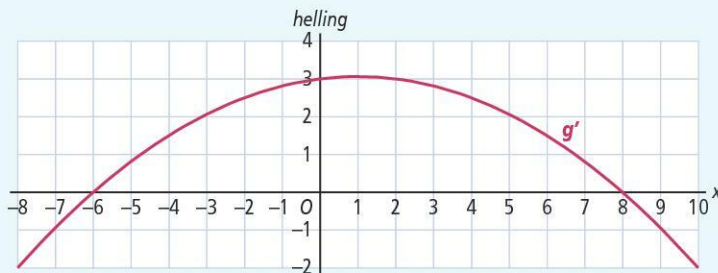
Je ziet een schets van de hellinggrafiek bij de functie f . Beredeneer dat de grafiek van f afnemend stijgend is.

Oplossing

De hellinggrafiek ligt boven de x -as, dus de grafiek van f is stijgend. De hellinggrafiek nadert de x -as, dus de grafiek van f is afnemend stijgend.



S3 Je ziet de hellinggrafiek bij de functie g .



- Leg uit dat de grafiek van g een top heeft bij $x = -6$. Hoort deze top bij een maximum of een minimum van g ?
- Beredeneer voor elk van de intervallen op welke manier de grafiek van g stijgt of daalt:

A: $\langle \leftarrow, -6 \rangle$	C: $\langle 1, 8 \rangle$
B: $\langle -6, 1 \rangle$	D: $\langle 8, \rightarrow \rangle$
- Schets een mogelijke grafiek van g .

Vaardigheid

Je kunt redeneren met de afgeleide.

Met behulp van de afgeleide van een functie kun je beredeneren hoe het verloop van de grafiek van de functie is. Daarbij moet je beredeneren of de afgeleide positief, negatief of nul is en of de afgeleide toeneemt of afneemt.

Voorbeeld

Voor $x > 0$ is gegeven de

$$\text{functie } f(x) = \frac{15}{x^3}$$

Beredeneer met behulp van de afgeleide dat de grafiek van f afnemend dalend is.

Oplossing

$$f(x) = 15x^{-3} \text{ en } f'(x) = -45x^{-4} = \frac{-45}{x^4}$$

Als $x > 0$, dan is $x^4 > 0$. De teller is negatief, dus $f'(x)$ is negatief, want het quotiënt van een negatief en positief getal is altijd negatief. Hieruit volgt dat de grafiek van f dalend is.

Als x toeneemt, dan neemt x^4 ook toe. -45 wordt gedeeld door een steeds groter getal, dus $\frac{-45}{x^4}$ nadert naar 0.

Hieruit volgt dat de grafiek van f afnemend dalend is.

- S4** De Afsluitdijk is 32 kilometer lang. Ron fietst de Afsluitdijk regelmatig op en neer en meestal waait het. Veronderstel dat hij altijd wind mee heeft op de heenweg en wind tegen op de terugweg. Met de formule $T = \frac{1536}{576 - w^2}$ kun je zijn totale reistijd T in uren berekenen voor elke windsnelheid w in km per uur met $0 \leq w < 24$. Beredeneer met de afgeleide van T of de grafiek van T toenemend of afnemend stijgt.



T1 Differentieer.

- a** $f(x) = (2x + 3)(x^2 + 2x)$ **d** $j(x) = (x^3 + x)(3x - 5)$
b $g(x) = 2x^2(4 - 5x)^3$ **e** $k(x) = (x - 1) \cdot \sqrt{2x + 8}$
c $h(x) = \frac{x^3 - 2x}{1 + x}$ **f** $l(x) = \frac{3}{\sqrt{3x + 5}}$

T2 De waterhoogte in een waterton wordt beschreven door de formule $H = \sqrt{-2t^2 + 210t + 900}$ met H de waterhoogte in cm en t de tijd in dagen.

- a** Bereken na hoeveel dagen de waterton leeg is.
b Stel de formule op van $\frac{dH}{dt}$
c Beredeneer met behulp van $\frac{dH}{dt}$ dat de grafiek van H stijgt voor $0 \leq t \leq 52\frac{1}{2}$.
d Na hoeveel dagen is de waterhoogte maximaal? Geef ook de maximale waterhoogte.

T3 Bij het verteren van voedsel spelen colibacteriën een belangrijke rol. Zij komen voor in de darmen. In laboratoria wordt veel onderzoek gedaan naar de groei van populaties van colibacteriën. Daarbij gebruikt men een kweekvloeistof waarmee men de omstandigheden zoals die in de darmen voorkomen, zoveel mogelijk nabootst.

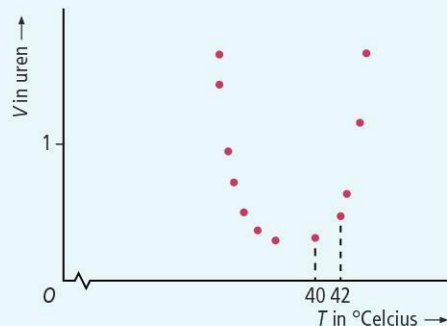
Bij constante temperatuur blijken deze populaties exponentieel te groeien. Men meet de verdubbelingstijd V , dat is de tijd in uren die het experiment moet duren om twee keer zoveel bacteriën te krijgen. Uit waarnemingen blijkt dat V afhangt van de ingestelde temperatuur T in graden Celsius. In de figuur staat het resultaat van de waarnemingen.

- a** Is de groei van de populatie bij 42°C sterker dan de groei bij 40°C ? Licht je antwoord toe met behulp van de figuur.
b Binnen het temperatuurgebied waarin de waarnemingen zijn gedaan, blijkt men het verband tussen T en V redelijk te kunnen benaderen met de formule $V = \frac{16,9}{-T^2 + 75T - 1350}$

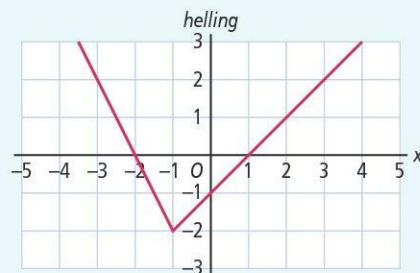
Stel de formule op van $\frac{dV}{dT}$

- c** Bereken met behulp van $\frac{dV}{dT}$ bij welke temperatuur de groei volgens de formule het sterkst is.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A12 1994, tijdvak I)



- T4** Gegeven is de hellinggrafiek van de functie f .
- Leg uit dat de grafiek van f afnemend stijgend is op het interval $\langle \leftarrow, -2 \rangle$.
 - Op welk interval is de grafiek van afnemend dalend? Leg je antwoord uit.
 - Hoeveel toppen heeft de grafiek van f ? Geef van iedere top de bijbehorende x -coördinaat en leg uit of deze top bij een maximum of bij een minimum van f hoort.
 - Schets een mogelijke grafiek van f .



- T5** Voor basisscholen bestaat een opheffingsnorm. Als het aantal leerlingen op een school onder de opheffingsnorm zakt, dan moet de school worden opgeheven. De opheffingsnorm is gebaseerd op de leerlingendichtheid d , dat is het aantal basisschoolleerlingen per km^2 grond in de gemeente.

De opheffingsnorm N kan worden berekend met de formule

$$N = \frac{0,6d}{0,15 + 0,0027d}$$

- In de tabel staan de gegevens uit 2020 van de gemeenten Appingedam en Delfzijl. Bereken voor beide gemeenten de opheffingsnorm.
- Op 1 januari 2021 fuseerden de gemeente Appingedam, Delfzijl en Loppersum tot één gemeente waardoor de opheffingsnorm veranderde. Voor welke gemeente heeft dit nadelige gevolgen voor de opheffingsnorm?
- Stel de formule op van de afgeleide van N .
- Beredeneer aan de hand van de afgeleide van N dat de grafiek van N afnemend stijgend is.
- Een politicus beweert het volgende:

De gemeenten met een grote leerlingendichtheid zijn bevoordeeld. Als de norm niet gehaald wordt, kunnen een paar extra leerlingen de school redden, maar in gemeenten met een geringe leerlingendichtheid kan dat de situatie nog ongunstiger maken.

Ben je het met deze uitspraak eens? Leg je antwoord uit.

	grond- oppervlakte in km^2	aantal basisschool- leerlingen
Appingedam	24	1027
Delfzijl	133	1668
Loppersum	111	710



Je kunt een productfunctie differentiëren.

E1 Differentieer.

a $f(x) = (8 - 3x + 2x^4)(1 + x + 7x^2)$

b $g(x) = x\sqrt{5-x}$

c $h(x) = (3x - 4) \cdot (7 - 2x)^2$

d $j(x) = (5 + \sqrt{x}) \cdot (3 - 6x)^{10}$

e $k(x) = 5x^2\sqrt{x-1}$

f $l(x) = (x + 3) \cdot (x - 3)^2$

Je kunt een quotiëntfunctie differentiëren.

E2 Stel een formule op voor $\frac{dy}{dx}$

a $y = \frac{4-x}{2x+1}$

d $y = \frac{100x-110}{x^2}$

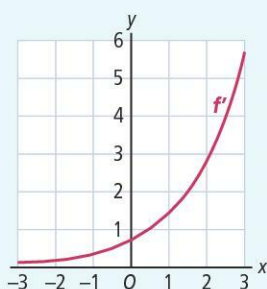
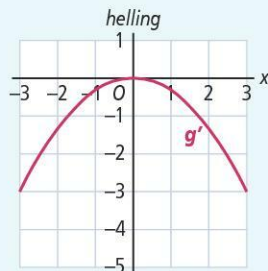
b $y = \frac{6x}{8x+10}$

e $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

c $y = \frac{17}{-x^2+5x}$

f $y = \frac{5x^4-7x}{3x+2}$

Je kunt met de grafiek van de afgeleide f' uitspraken doen over de grafiek van de functie f .



E3 Je ziet de hellinggrafieken van de functies f en g .

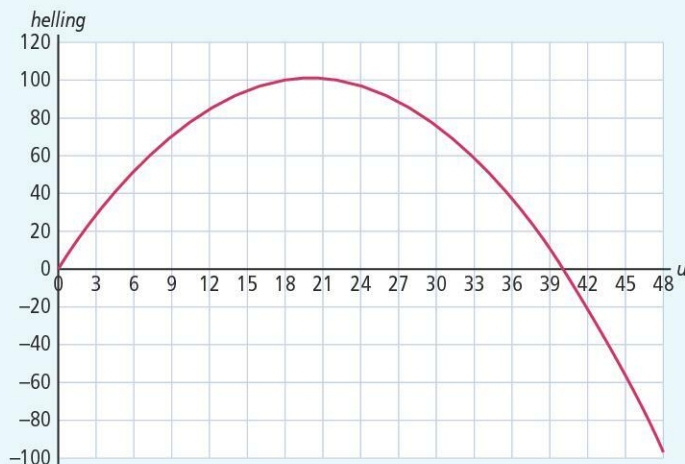
- Leg uit dat de grafiek van f toenemend stijgend is.
- Van welke soort stijgen of dalen is er bij de grafiek van g sprake op het interval $\langle \leftarrow, 0 \rangle$? Leg je antwoord uit.
- Heeft de grafiek van g een top? Leg je antwoord uit.
- Schets de grafiek van g .

Je kunt redeneren met de afgeleide.

- E4** Een schoonmaakbedrijf berekent voor het schoonmaken van een vloer de prijs per m^2 met de formule $G = \frac{75}{x-5} + 15,8$.

Hierin is G de prijs in euro's per m^2 en x het aantal m^2 vloeroppervlak. De minimale grootte van een vloer is 10 m^2 . Toon met behulp van differentiëren aan dat de prijs per m^2 steeds minder sterk daalt bij toenemende grootte van een vloeroppervlak.

- E5** Voor een bedrijf is een winstfunctie W voor de winst in euro's per maand opgesteld. De winst is afhankelijk van het uurtarief u in euro's. Je ziet de hellinggrafiek van W .



- a** Op welk interval neemt de winst W toe?
b Bij welke waarde van u is de winst maximaal?
Leg je antwoord uit.
c Bij welke waarde van u gaat de grafiek van W over van toenemend stijgend naar afnemend stijgend?
- E6** Gegeven is de winstfunctie $W(q) = \frac{180q}{(0,5q+1)^2}$ met W in honderden euro's en q is het aantal verkocht exemplaren in honderdtallen.
- a** Schets de grafiek van W .
b Bereken $W'(q)$.
c Bereken $W'(4)$. Welke betekenis heeft de uitkomst?
d Voor welke waarde van q is de winst maximaal?
e Bereken de maximale winst.

Fileproblemen

Files kunnen door verschillende omstandigheden ontstaan. Wegwerkzaamheden, een ongeluk of de drukte na afloop van een voetbalwedstrijd kunnen bijvoorbeeld de oorzaak zijn van het ontstaan van een file.

De laatste jaren zijn door de overheid maatregelen genomen om het aantal files en de lengte ervan terug te brengen.

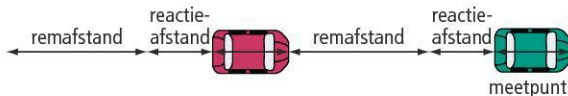
De automobilist die in een file terecht komt, wil er zo snel mogelijk weer uit komen.

Ook de verkeerspolitie wil dat een file zo snel mogelijk weer oplost. Zij wil dat bereiken door de maximumsnelheid aan te passen, zodat een vlotte doorstroming op gang wordt gehouden. De maximumsnelheid wordt aangegeven met borden boven de weg en hangt af van het aantal auto's dat per minuut een meetpunt passeert.



Om een model te maken met formules voor de doorstroming gebruik je de volgende aannames:

- Alle auto's rijden met dezelfde snelheid V in km per uur.
- De onderlinge afstand A in meters tussen alle auto's is gelijk aan de stopafstand S in meters.
- Alle auto's zijn gemiddeld 4 meter lang.
- De remafstand W in meters is $0,0075V^2$.
- De reactietijd is 0,3 seconde.
- De reactieafstand in meters is de afstand afgelegd tijdens de reactietijd.



Opdracht

De doorstroming D is het aantal auto's dat per minuut een meetpunt passeert. De genoemde aannames leiden tot twee formules.

- a Laat zien dat formule 1 volgt uit de aannames.
- b Laat zien dat je formule 1 kunt herleiden tot formule 2.
- c Bereken met differentiëren bij welke snelheid de doorstroming maximaal is.
- d Hoeveel auto's passeren in dat geval per minuut een meetpunt?
- e Is de gevonden oplossing realistisch? Zo niet, welke van de aannames is volgens jou het minst realistisch?
- f Neem aan dat de auto's gemiddeld niet 4 m maar 6 m lang zijn. Wordt de maximale doorstroming dan groter of kleiner?

$$D = \frac{\text{snelheid in meters per minuut}}{4 + \text{reactieafstand} + \text{remafstand}} \quad 1$$

$$D = \frac{1000V}{240 + 5V + 0,4V^2} \quad 2$$

Vaardigheden 10

SE

CE

K

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Rijen
- Formules herleiden
- Sinusoiden
- Systematisch tellen



Rijen

- 1** In januari 2021 krijgt Petra € 50,- kleedgeld per maand en elke volgende maand krijgt ze er € 1,50 bij. Het bedrag aan kleedgeld dat ze ontvangt kun je met een rij $u(n)$ beschrijven, waarbij $u(0) = 50$ het kleedgeld is dat ze in januari krijgt en n het aantal maanden na januari 2021.
- Stel een recursieve formule en een directe formule op voor de rij $u(n)$.
 - De rij $u(n)$ is een rekenkundige rij. Waarom?
 - Bereken het totale bedrag aan kleedgeld dat zij in het eerste halfjaar van 2021 ontvangt.
 - Gerdine krijgt in januari 2021 ook € 50,- kleedgeld en zij krijgt elke volgende maand 2% er bij. Het bedrag aan kleedgeld dat zij krijgt, kun je beschrijven met de meetkundige rij met recursieve formule $v(n+1) = v(n) \cdot 1,02$ waarbij $v(0) = 50$. Stel een directe formule op voor deze rij.

Theorie

Bij een rekenkundige rij geldt voor de som van de termen $u(p)$ tot en met $u(q)$:

$$\sum_{k=p}^q u(k) = \frac{1}{2} \cdot \text{aantal termen} \cdot (\text{eerste term} + \text{laatste term})$$

Bij een meetkundige rij met reden r geldt voor de som van de termen $u(p)$ tot en met $u(q)$:

$$\sum_{k=p}^q u(k) = \frac{\text{eerstvolgende term} - \text{eerste term}}{r - 1}$$

Voorbeeld 1

Gegeven is de rekenkundige rij u : 16; 14,5; 13 ..., met $u(1) = 16$.
Bereken de som van de 7e tot en met de 21e term.

Oplossing

Het verschil is $-1,5$, dus $u(0) = 17,5$.
Een directe formule voor de rij is $u(n) = 17,5 - 1,5 \cdot n$.
 $u(7) = 7$ en $u(21) = -14$.
De 7e tot en met de 21e term zijn 15 termen.
De gevraagde som is

$$\sum_{k=7}^{21} v(k) = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot (7 + -14) = -52,5.$$

Voorbeeld 2

Gegeven is de rij $v(n) = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Bereken $\sum_{k=3}^9 v(k)$.

Oplossing

v is een meetkundige rij met reden $\frac{1}{2}$.
De gevraagde som is

$$\sum_{k=3}^9 u(k) = \frac{v(10) - v(3)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1 - 128}{-\frac{1}{2}} = 254.$$

- 2** Bereken met behulp van de formules voor zowel Petra als Gerdine uit opdracht 1, het totale bedrag zij in 2021 aan kleedgeld zullen ontvangen.

- 3** Van een rekenkundige rij is gegeven $u_2 = -269$ en $u_{120} = 85$.
- Bereken u_1 en u_{100} .
 - Stel een recursieve formule en een directe formule op voor de rij u_n .
 - Bereken $\sum_{k=1}^{20} u_k$.
- 4** Van een meetkundige rij is gegeven $u_2 = 135$ en $u_5 = 3645$.
- Bereken u_1 en u_{10} .
 - Stel een recursieve formule en een directe formule op voor de rij u_n .
 - Bereken $\sum_{k=2}^9 u_k$.
- 5** Nico zet 1500 euro op een bankrekening bij een rente van 2% per jaar. Hij gaat ervan uit dat het rentepercentage in de komende 20 jaar niet wijzigt.
- Noem v_n de rente die wordt bijgeschreven na n jaar. Bereken v_1 , v_2 en v_3 .
 - Toon aan dat v een meetkundige rij is. Stel een directe formule op voor v_n .
 - Om te berekenen hoeveel rente Nico na twintig jaar in totaal heeft ontvangen, tel je de rentes die hij elk jaar ontvangt bij elkaar op. Hoeveel rente heeft Nico na 20 jaar in totaal ontvangen?
 - Een andere manier om de hoeveelheid rente te berekenen over 20 jaar, is $1500 \cdot 1,02^{20} - 1500$. Leg dit uit.

Formules herleiden

- 6** Druk K uit in t .
- $t = \frac{1}{2}(6K - 5)$
 - $3(K - 5) + 2t = 6 - 4(t - 3)$
 - $(t + 5)(2K - 3) = 8$
 - $t(2K - 1) = 3t + 6$
 - $2t - 7 = (K - 3)^3$
 - $t = \sqrt{3K + 1}$
- 7** Gegeven zijn de formules $Y = 5K^{0,7}L^{0,6}$ en $L = K^{0,5}$.
- Druk Y uit in K .
 - Druk K uit in L en druk Y uit in L .
- 8** Druk y uit in x en vereenvoudig het resultaat.
- $y = 4 - 3t^2$ en $t = x - 2$
 - $y = t^2 - 4$ en $t = \sqrt{x + 1}$
 - $y = t^2 - 2t - 7$ en $t = 3x$
 - $\frac{2y}{2t + 6} = 4$ en $3x + t = 2$

- 9 Op het blaadje is de formule $y = \frac{3}{x} - \frac{5}{x+2} + 2$ herleid tot een vorm met één breuk.

- a Leg uit waarom in stap 1 zowel de teller als de noemer van de eerste breuk met $x+2$ zijn vermenigvuldigd.
b Met welke factor zijn teller en noemer van de tweede breuk vermenigvuldigd? En hoe zit dat in de derde breuk?
c Leg uit wat er in de stappen 2 en 3 is gebeurd.

$y = \frac{3}{x} - \frac{5}{x+2} + \frac{2}{1}$	
$y = \frac{3 \cdot (x+2)}{x \cdot (x+2)} - \frac{5 \cdot x}{x \cdot (x+2)} + \frac{2 \cdot x \cdot (x+2)}{x \cdot (x+2)}$	1
$y = \frac{3x+6-5x+2x^2+4x}{x(x+2)}$	2
$y = \frac{2x^2+2x+6}{x(x+2)}$	3

- 10 Herleid de formules tot een vorm met één breuk.

a $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x}$

d $y = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2}$

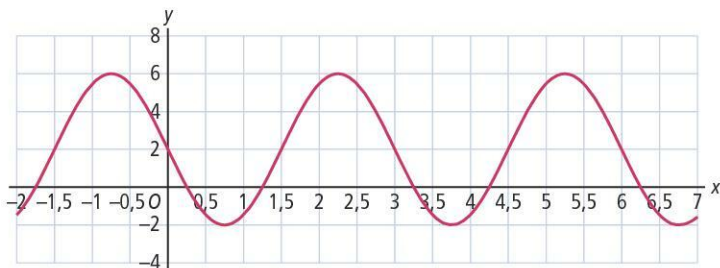
b $y = 3 - \frac{2}{x}$

e $y = 2\sqrt{x-1} + \frac{5}{\sqrt{x-1}}$

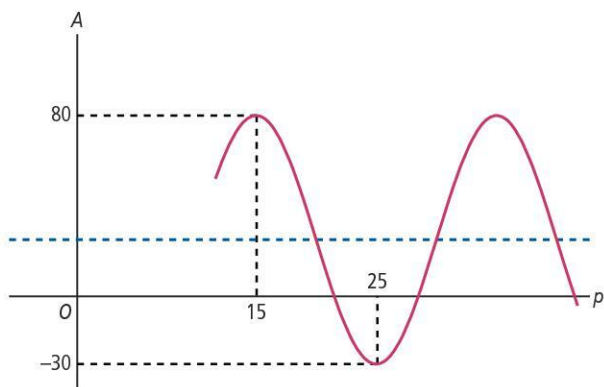
c $y = \frac{1}{x} - \frac{3}{4} + \frac{2}{x-1}$

f $y = 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3}$

Sinusoïden

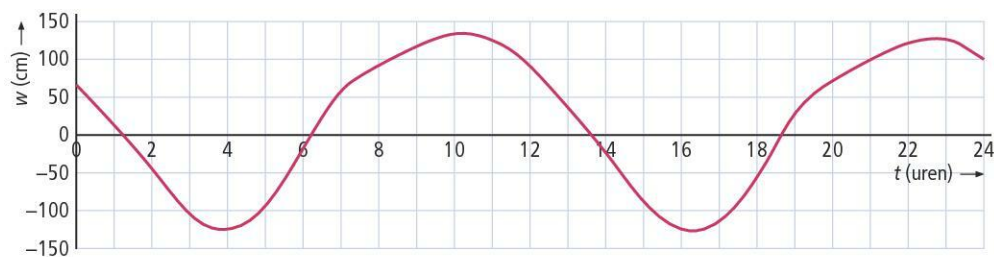


- 11 De grafiek is een sinusoïde. Gebruik deze grafiek bij de beantwoording van de volgende vragen.
- Hoe groot is de evenwichtsstand?
 - Hoe groot is de amplitude?
 - Hoe groot is de periode?
 - Geef de coördinaten van een punt waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.
- 12
- Stel een formule op voor de sinusoïde uit opdracht 11.
 - Leg uit dat de grafiek in opdracht 11 ook kan worden beschreven door $y = 2 - 4 \sin\left(\frac{2}{3}\pi x\right)$.
 - Bereken wat de coördinaten zijn van de toppen op het interval $[10, 16]$.



- 13** De gegeven sinusöide geeft het verband tussen de variabelen A en p .
- Stel een formule op voor de sinusöide.
 - Bereken met behulp van symmetrie en periodiciteit de coördinaten van de eerste top waarvoor geldt $p > 100$.

- 14** Rijkswaterstaat publiceert voor een aantal plaatsen langs de Nederlandse kust de verwachte waterstanden. Deze worden met behulp van een wiskundig model berekend op basis van meetgegevens over een lange periode daarvoor. De grafiek geeft de verwachte waterstand op 14 november 2012 voor Schiermonnikoog.



Met de formule $w = 4 + 128 \sin(0,51(t + 5,4))$ kunnen de waarden in de grafiek worden benaderd.

Hierin is w de waterstand in cm en t de tijd in uren met $t = 0$ om 0:00 uur.

Het tijdstip van de maximale waterstand 's avonds verschilt volgens de formule met dat in de grafiek.

Bereken hoeveel minuten dat verschil is.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2014, tijdvak 1)

Systematisch tellen

- 15** Vijf vriendinnen, Petra, Ineke, Hanneke, Gerlinde en Ans willen een feest geven. Uit hun midden kiezen ze een drietal dat samen het feest gaat organiseren. Ans vraagt zich af hoeveel verschillende dretallen er geselecteerd kunnen worden. Ze probeert het antwoord te vinden met een systematische aanpak.

P	I	H	G	A
w	w	w	n	n
w	w	n	w	n
...	...	...	...	...

Op een stukje papier schrijft ze de namen en daaronder het rijtje w w n n. Dat betekent in dit geval dat ze als eerste drietal Petra, Ineke en Hanneke heeft geselecteerd. De w staat voor 'wel kiezen' en de n voor 'niet kiezen'.

- Welk drietal heeft ze in de volgende rij geselecteerd?
- Onderzoek hoeveel verschillende dretallen in totaal geselecteerd kunnen worden.

Theorie

Een combinatie van 3 uit 7 is een keuze van een drietal uit een zevental: drie wel kiezen en vier niet kiezen.

Een rooster is een geschikt telmodel om het aantal mogelijke dretallen te berekenen, want drie kiezen uit zeven komt overeen met het aantal manieren om in een rooster drie stappen naar rechts en vier stappen omhoog te doen.

Een route in een rooster vanuit (0, 0) naar (3, 4) bestaat uit zeven stappen waarvan drie naar rechts en vier omhoog.

Het totaal aantal mogelijke routes noteer je als $\binom{7}{3}$.

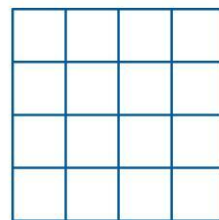
Dit getal kun je met je rekenmachine berekenen.



1	5	15	35	70
1	4	10	20	35
1	3	6	10	15
1	2	3	4	5
1	1	1	1	1

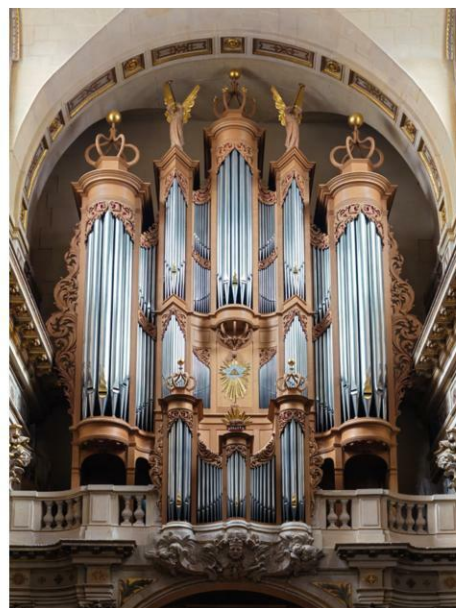
- 16**
- In een vaas zitten 12 witte en 3 rode ballen. Je pakt de ballen er een voor een uit en legt ze naast elkaar neer. Een mogelijk rijtje dat zo ontstaat is
w w w w w r r w w w w w w r.
Hoeveel verschillende rijtjes kunnen zo ontstaan?
 - Je gooit 10 keer met een muntstuk.
Hoeveel verschillende uitkomsten zijn er met vijf keer kop en vijf keer munt?
 - Op hoeveel manieren kun je een groep van zeven personen in een groep van drie en een groep van vier verdelen?
- 17** In een kamer zijn acht lampen die onafhankelijk van elkaar aan gedaan kunnen worden.
Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er
- om precies vijf lampen aan te doen?
 - om minstens vijf lampen aan te doen?

- 18** Bereken het aantal mogelijkheden om dit 4×4 -bord te verven.
- Als elk veld naar vrije keus zwart of wit geverfd wordt.
 - Als 8 velden zwart en 8 velden wit geverfd worden.
 - Als 2 velden wit, 4 zwart en 10 rood geverfd worden.
 - Als elk veld met een andere kleur geverfd wordt, waarbij uit 20 kleuren gekozen mag worden.



- 19** Negen toeristen moeten over een gele, een rode en een blauwe boot worden verdeeld.
- Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er, als
- in elke boot drie personen komen.
 - in elke boot minstens 2 en hoogstens 4 personen komen.
 - geen enkele boot leeg is.

- 20** Een groot kerkorgel telt soms wel enkele duizenden orgelpijpen. De pijpen zijn gegroepeerd in registers. Zo'n register is een rij van ruim 50 pijpen van verschillende lengte. Een aantal registers is hiernaast afgebeeld. Elk register onderscheidt zich van andere registers door vorm en materiaal van de pijpen. Elk register klinkt daardoor anders.
- Hilde gaat naar de muziekschool voor orgelles. Daar speelt ze op een orgel dat één toetsenbord heeft en 16 registers. Als alle registers op 'aan' staan, komt er bij het indrukken van een toets geluid uit 16 orgelpijpen. Voordat Hilde gaat spelen, moet ze eerst kiezen welk(e) register(s) ze 'aan' wil hebben. Zo'n keuze heet een registratie. Zet ze bijvoorbeeld alleen de registers 3, 7 en 13 op 'aan' dan zal bij het indrukken van een toets maar uit drie pijpen geluid komen. In de les mag ze een, twee of drie registers aanzetten. Anders hebben anderen last van het geluid.



- Bereken uit hoeveel verschillende registraties ze in de les kan kiezen.
- Haar leraar is organist in een kerk met een groot orgel. Dat orgel heeft 45 registers en drie toetsenborden, aangeduid met I, II en III. In de tabel hiernaast lees je af aan welke toetsenborden de verschillende registers gekoppeld zijn. Hilde mag voor één keer op dit kerkorgel spelen. Omdat ze nog niet op meer dan één toetsenbord tegelijk kan spelen, moet ze eerst het toetsenbord kiezen waarop ze zal gaan spelen. Daarna nog de registratie bij het gekozen toetsenbord. Van haar leraar mag ze helemaal vrij kiezen, geluidsoverlast is nu geen probleem.

Bereken uit hoeveel registraties ze kan kiezen.
(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 1995, tijdvak 2)

<i>pijpen van</i>	<i>gekoppeld aan toetsenbord</i>
registers 1 t/m 16	I
registers 17 t/m 31	II
registers 32 t/m 45	III



SE

CE

K

In dit hoofdstuk

Je hebt in eerdere hoofdstukken geleerd wat exponentiële en logaritmische functies zijn.

In dit hoofdstuk herhaal je hoe je een exponentiële formule herleidt tot een logaritmische formule en leer je hoe je een logaritmische formule herleidt tot een exponentiële formule.

Ook leer je hoe je exponentiële en logaritmische functies differentieert. Daarbij wordt een nieuw getal geïntroduceerd: het getal van Euler. Als laatste herhaal je wat een logaritmische schaalverdeling is en hoe je hiermee werkt.

Na dit hoofdstuk weet je alles wat je over exponentiële en logaritmische functies moet weten voor het centraal examen.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

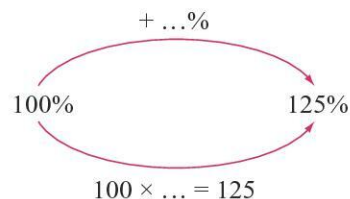
- | | |
|--|-------------|
| • Logisch redeneren en bewijzen | opdracht 17 |
| • Formules manipuleren | opdracht 36 |
| • Probleem oplossen en analytisch denken | opdracht 38 |



- V1** In de tabel staat voor een aantal jaren hoeveel konijnen er op 1 januari in een duingebied waren.
- Laat zien dat het aantal konijnen bij benadering exponentieel toeneemt.
 - Geef de groeifactor per jaar in twee decimalen nauwkeurig.
 - Met hoeveel procent neemt het aantal konijnen per jaar toe?
 - Bij de tabel hoort een formule van de vorm $N = b \cdot g^t$. Hierbij is N het aantal konijnen en t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2017. Geef de waarden van b en g .
 - Neem aan dat de toename op dezelfde manier doorgaat. Hoeveel konijnen zullen er dan zijn op 1 januari 2030?

jaar	aantal konijnen
2017	164
2018	184
2019	206
2020	230
2021	258

- V2**
- Vul in de figuur op de puntjes de juiste getallen in.
 - Welke procentuele afname hoort er bij de groeifactor 0,91?
 - Welke groeifactor hoort er bij een toename van 40,5%?
 - Welke groeifactor hoort er bij een afname van 1,7%?



Theorie

Bij een **exponentieel groeiproces** $N = b \cdot g^t$ wordt de hoeveelheid N per tijdseenheid steeds met dezelfde factor vermenigvuldigd. Deze factor heet de **groeifactor** g . De hoeveelheid op tijdstip $t = 0$ is de **beginhoeveelheid** b .

Als g de groeifactor per tijdseenheid is, dan is de groeifactor per n tijdseenheden g^n . De groeifactor voor een n -de deel van de tijdseenheid is $g^{\frac{1}{n}}$.

Voorbeeld

De groeifactor per week is 0,75. Bereken de groeifactor per vier weken en per dag.

Oplossing

De groeifactor per vier weken is $0,75^4 \approx 0,3164$.

De groeifactor per dag is $0,75^{\frac{1}{7}} \approx 0,9597$.

- V3** Een hoeveelheid neemt elk kwartaal toe met 14%.
- Hoe groot is de groeifactor per kwartaal?
 - Bereken de groeifactor per jaar, per halfjaar en per maand.
 - Geef ook de bijbehorende groeipercents.
- V4** Een patiënt krijgt 100 mg geneesmiddel toegediend door inspuiting in het bloed. Het lichaam breekt het geneesmiddel af. De nog aanwezige hoeveelheid neemt exponentieel af. Na vier dagen is er nog 37 mg aanwezig.
- Bereken de groeifactor per dag in twee decimalen nauwkeurig.
 - Stel een formule op voor het verband tussen de aanwezige hoeveelheid geneesmiddel N in mg en de tijd t in dagen.
 - Bereken na hoeveel dagen er nog 10 mg van het geneesmiddel in het lichaam aanwezig is.

- V5**
- a** Vul in: ${}^2\log(8) = 3$, want $8 = 2^{\dots}$.
 - b** Vul in: ${}^2\log(16) = \dots$, want $\dots = \dots^{\dots}$.
 - c** Leg uit waarom het getal ${}^2\log(10)$ geen geheel getal is.
 - d** Bereken ${}^2\log(10)$ met je rekenmachine en rond het antwoord af op twee decimalen.

Theorie

De **logaritme** van a met grondtal g noteer je als ${}^g\log(a)$.

De basisregel voor logaritmen luidt als volgt:

Uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$ en omgekeerd uit $t = {}^g\log(a)$ volgt $g^t = a$.

Hierbij is $a > 0$, $g > 0$ en $g \neq 1$.

Bij het rekenen met logaritmen geldt:

$$^g\log(a) + ^g\log(b) = ^g\log(a \cdot b)$$

$$g\log(a) - g\log(b) = g\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$$

$$g \log(a) = \frac{n \log(a)}{n \log(g)}$$

Hierbij is $a > 0$, $b > 0$, $g > 0$, $g \neq 1$, $n > 0$ en $n \neq 1$.

Voorbeeld

Schrijf als één logaritme

$$3 \cdot {}^5\log(2) + {}^5\log(4) - {}^5\log(16).$$

Oplossing

$$3 \cdot {}^5\log(2) + {}^5\log(4) - {}^5\log(16) =$$

$${}^5\log(2^3) + {}^5\log(4) - {}^5\log(16) =$$

$${}^5\log(8) + {}^5\log(4) - {}^5\log(16) =$$

$$5\log(8 \times 4) - 5\log(16) =$$

$${}^5\log(32) - {}^5\log(16) =$$

$$5\log\left(\frac{32}{16}\right) = 5\log(2)$$

- V6** Schrijf als één logaritme.
- a ${}^3\log(10) + {}^3\log(7)$ d ${}^5\log(b) + 3 \cdot {}^5\log(2)$
b $4 \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log(2)$ e ${}^3\log(15) - \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(25)$
c $2 \cdot {}^7\log(a) - {}^7\log(5)$ f $3 \cdot \log(x) + \log(5x)$
- V7** a Bereken ${}^2\log(2^1)$, ${}^2\log(2^2)$, ${}^2\log(2^3)$ en ${}^2\log(2^{10})$.
b Vul in: ${}^g\log(g^a) = \dots$
c Ab schrijft $3 + {}^5\log(2)$ op het blaadje als één logaritme. In de stap 1 gebruikt hij de eigenschap van opdracht b om het getal 3 als logaritme met grondtal 5 te schrijven. Waarom kiest hij voor grondtal 5?
d Maak de berekening op het blaadje af.
e Schrijf als één logaritme.
- A $2 + {}^3\log(8)$
B $5 + 4 \cdot {}^2\log(x)$

3 + $^5\log(2) =$	
$^5\log(5^3) + ^5\log(2) =$	1
$^5\log(\dots) + ^5\log(2) =$	2
...	3

21.1 Formules herleiden

Je leert

- hoe je een exponentiële formule herleidt tot een logaritmische formule
- hoe je een logaritmische formule herleidt tot een exponentiële formule

Leerroutes

- ondersteunend: 1–2–03–4–5–06–7–8–9
- doorlopend: 1–2–3–4–5–6–7–8–9
- uitdagend: 1–2–3–5–6–7–8–9–U1

In een stad is sprake van een griepepidemie. Het aantal dagen voordat N inwoners besmet zijn, kun je berekenen met de formule $t = {}^{1,13}\log(0,017N)$.

Hierbij is t de tijd in dagen met $t = 0$ op het moment dat de epidemie uitbreekt.

- Voor welke vragen is deze formule goed te gebruiken?



- 1 a De oplossing van de vergelijking $2^t = 5$ is $t = {}^2\log(5)$. Bereken ${}^2\log(5)$ in twee decimalen nauwkeurig.
- b Los de volgende vergelijkingen op. Schrijf de oplossing met een logaritme en rond daarna af op twee decimalen.

A $4^t = 12$

C $0,65^{2t} = 3$

B $3 \cdot 1,2^t = 21$

D $3,8 \cdot 2,5^t - 1 = 18$

- 2 Op het blaadje wordt de formule $y = 2^x + 6$ herschreven zodat x wordt uitgedrukt in y .

- a Wat is er in stap 1 en stap 2 gebeurd?
- b Maak de berekening op het blaadje af.
- c Herleid $A = 0,5 \cdot 3^q$ zodat q wordt uitgedrukt in A .

●	$y = 2^x + 6$					
●	$2^x + 6 = y$					1
●	$2^x = y - 6$					2
●	$x = \dots \log(\dots)$					3

Theorie

Een exponentiële formule kun je herleiden tot een logaritmische formule.

Je gebruikt de regel: Uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $N = 3 + 0,8^t$.
Druk t uit in N .

Oplossing

$$3 + 0,8^t = N$$

links en rechts verwisseld

$$0,8^t = N - 3$$

links en rechts $- 3$

$$t = {}^{0,8}\log(N - 3)$$

$g^t = a$ geeft $t = {}^g\log(a)$

Ondersteunende route → maak opdracht 03

3 Druk t uit in N .

- H**
- | | |
|-----------------------------------|---|
| a $N = 2 \cdot 3^t$ | d $N = 2 \cdot 3^{0,5t} - 12$ |
| b $N = 0,1 \cdot 5^{t-6}$ | e $N = 10^{1,25t+4}$ |
| c $N = 4 \cdot 0,72^t + 1$ | f $6N - 1 = \frac{1}{3} \cdot 7^t$ |

4 Bij een weerballon neemt de hoeveelheid draaggas af volgens de formule $A = 1000 \cdot 0,995^{2t}$. Hierin is A de hoeveelheid draaggas in m^3 en t de tijd in dagen.

- Bereken de hoeveelheid draaggas na vijf dagen.
- Bereken na hoeveel dagen de hoeveelheid draaggas is gehalveerd.
- Druk t uit in A en controleer met de herleide formule je antwoord van opdracht b.

5 Op het blaadje wordt de formule $y = {}^5\log(x) - 1$ herschreven zodat x wordt uitgedrukt in y .

- Wat is er in stap 1 en 2 gebeurd?
- Welke regel wordt er in stap 3 gebruikt?

	$y = {}^5\log(x) - 1$			
	${}^5\log(x) - 1 = y$			1
	${}^5\log(x) = y + 1$			2
	$x = 5^{y+1}$			3

Theorie

Een logaritmische formule kun je herleiden tot een exponentiële formule.

Je gebruikt de regel: Uit $t = {}^g\log(a)$ volgt $g^t = a$.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $y = 8 \cdot {}^{0,6}\log(x+1)$.
Druk x uit in y .

Oplossing

$8 \cdot {}^{0,6}\log(x+1) = y$	links en rechts verwisseld
${}^{0,6}\log(x+1) = \frac{y}{8}$	links en rechts : 8
$x+1 = 0,6^{\frac{y}{8}}$	$t = {}^g\log(a)$ geeft $g^t = a$
$x = 0,6^{\frac{y}{8}} - 1$	links en rechts - 1
ofwel $x = 0,6^{\frac{1}{8}y} - 1$	

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $p = 4 + {}^3\log(0,5q)$.
Druk q uit in p .

Oplossing

$4 + {}^3\log(0,5q) = p$	links en rechts verwisseld
${}^3\log(0,5q) = p - 4$	links en rechts - 4
$0,5q = 3^{p-4}$	$t = {}^g\log(a)$ geeft $g^t = a$
$q = 2 \cdot 3^{p-4}$	links en rechts $\times 2$

Ondersteunende route → maak opdracht O6

6 Druk q uit in p .

- H** **a** $p = {}^4\log(q)$ **d** $p = 4 - 2 \cdot {}^5\log\left(\frac{1}{2}q\right)$
b $p = {}^{0,8}\log(q) - 9$ **e** $p = \log(3q + 2)$
c $p = 5 \cdot {}^3\log(2q)$ **f** ${}^2\log(pq) = 1$

- 7** **a** Schrijf in de formule $y = 2 + {}^3\log(x + 5)$ het getal 2 als logaritme met grondtal 3 en herleid de formule vervolgens tot de vorm $y = {}^3\log(px + q)$.
b Herleid $y = -2 + {}^2\log(10 - x)$ tot de vorm $y = {}^2\log(px + q)$.

8 Bij een chemisch proces kun je de concentratie C van de stof die bij dit proces ontstaat, berekenen met de formule $C = 500 - 500 \cdot 0,96^t$. Hierbij is C de concentratie in mol per dm^3 en t de tijd in minuten met $t = 0$ het moment waarop het chemische proces begint. Een mol is een maat voor het aantal deeltjes.

- H** **a** Bereken met hoeveel mol per dm^3 de concentratie in de eerste tien minuten toeneemt.
b De concentratie nadert op den duur een grenswaarde. Beredeneer hoe groot de grenswaarde is.
c Druk t uit in C .
d Bereken na hoeveel minuten de concentratie 250 mol per dm^3 is.

- 9** De volumeknop van een versterker heeft 19 standen: stand 0 tot en met stand 18. In stand 0 geeft de versterker geen geluid. In stand 18 is het geluidsniveau maximaal. Er geldt de volgende formule: $P = a \cdot \log(x + 1)$. Hierin is x de stand van de volumeknop, P het percentage van het maximale geluidsniveau en a een constante.
a Uit de gegevens kun je afleiden dat $a \approx 78$. Bereken a in drie decimalen nauwkeurig.
b Je kunt $P = 78 \cdot \log(x + 1)$ herleiden tot $x = 10^{n \cdot P} - m$. Bereken n en m . Rond zo nodig af op drie decimalen.



Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

03

Gegeven is de formule $N = 3 \cdot 0,5^t + 2$.

Op het blaadje wordt deze formule herleid zodat t wordt uitgedrukt in N .

- a** In stap 1 zijn de linkerkant en de rechterkant verwisseld.
Leg uit wat er in stap 2 en 3 is gebeurd.
b Gebruik in stap 4 de regel 'uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$ ' om de berekening af te maken.

Druk t uit in N .

- c** $N = 6 \cdot 9^t$ **f** $N = 0,5 \cdot 5^{t-3}$
d $N = \frac{1}{4} \cdot 0,81^t$ **g** $N = 2 \cdot 10^{3t} - 4$
e $N = 7 + 9 \cdot 2^t$ **h** $8N = \frac{1}{3} \cdot 0,1^t$

	$N = 3 \cdot 0,5^t + 2$		
	$3 \cdot 0,5^t + 2 = N$	1	
	$3 \cdot 0,5^t = N - 2$	2	
	$0,5^t = \frac{N-2}{3}$	3	
	$t = \dots \log(\dots)$	4	

06

Gegeven is de formule $q = {}^4\log(10p) + 7$.

Op het blaadje wordt deze formule herleid zodat p wordt uitgedrukt in q .

- a** In stap 1 zijn de linkerkant en de rechterkant verwisseld.
Wat is er in stap 2 gebeurd?
b Gebruik in stap 3 de regel 'uit $t = {}^g\log(a)$ volgt $g^t = a$ ' om de ontbrekende getallen in te vullen.
c Maak de berekening op het blaadje af.

Druk q uit in p .

- d** $p = {}^2\log(q)$ **g** $p = 1 - {}^5\log(2q)$
e $p = {}^{0,2}\log(q) + 6$ **h** $p = \log\left(\frac{1}{5}q\right)$
f $p = 3 \cdot {}^8\log(4q)$ **i** ${}^2\log(p + q) = 1$

	$q = {}^4\log(10p) + 7$		
	${}^4\log(10p) + 7 = q$	1	
	${}^4\log(10p) = q - 7$	2	
	$10p = \dots$	3	
	$p = \dots$	4	

Uitdagende opdrachten

U1

Tussen de variabelen R en S bestaat het volgende verband:

$${}^2\log(R) = 4,45 - 2,31S.$$

Deze formule kun je herleiden tot de vorm $R = b \cdot g^S$.

Bereken de waarden van b en g in twee decimalen nauwkeurig.

21.2 Het getal e

Je leert

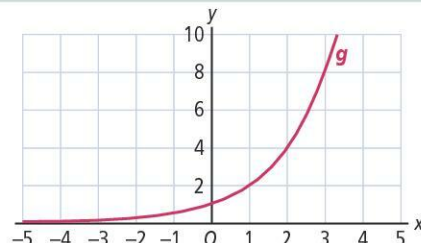
- wat het getal e is
- hoe je exponentiële functies met grondtal e differentieert

Leerroutes

- ondersteunend: 10–11–12–013–14–15–16
- doorlopend: 10–11–12–13–14–15–16
- uitdagend: 10–11–13–14–15–16–U2

Gegeven is de grafiek van $g(x) = 2^x$. Anne zegt: ‘De afgeleide van $g(x) = 2^x$ is $g'(x) = x \cdot 2^{x-1}$ ’.

- Hoe heeft Anne deze afgeleide berekend?
- Waarom kan deze afgeleide niet kloppen?



- 10** In de tabel zie je de waarde van $f(x) = 2^x$ voor een aantal waarden van x .

- De functiewaarden nemen exponentieel toe. Hoe groot is de groeifactor? En de beginwaarde?
- Maak op je rekenmachine een tabel van de hellingen van de grafiek van f . Gebruik deze om de tabel verder in te vullen.
- Ga na dat de waarden van $f'(x)$ ook exponentieel toenemen.
- Hoe groot is de groeifactor van f' ? En de beginwaarde? Rond af op twee decimalen.
- Geef een functievoorschrift van de afgeleide functie f' .
- Maak ook voor de functie $g(x) = 3^x$ een tabel van de hellingen en laat zien dat geldt $g'(x) \approx 1,10 \cdot 3^x$.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	1	...
1	2	...
2	4	...
3	8	...
4	16	...

- 11** a Gebruik je rekenmachine om de tabel in te vullen.

functie f	afgeleide f'
$f(x) = 2^x$	$f'(x) \approx 0,69 \cdot 2^x$
$f(x) = 2,5^x$	...
$f(x) = 3^x$	$f'(x) \approx 1,10 \cdot 3^x$
$f(x) = 4^x$	...

- Er is een getal a waarvoor geldt dat de afgeleide van $f(x) = a^x$ gelijk is aan $f'(x) = 1 \cdot a^x$. Leg uit dat uit de tabel volgt dat de waarde van a tussen 2,5 en 3 ligt.

Theorie

Als $f(x) = a^x$, dan is $f'(x) = \text{constante} \cdot a^x$

Er is één waarde van a waarvoor de constante gelijk is aan 1.

Deze waarde heet het **getal van Euler**. Je noteert dit getal als e .

Het getal e is bij benadering gelijk aan 2,72.

De afgeleide van $f(x) = e^x$ is dus $f'(x) = e^x$.

Op je rekenmachine zit een aparte toets voor e .

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $y = 2 \cdot e^x + 4$.

Bereken $\frac{dy}{dx}$

Oplossing

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot e^x + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot e^x$$

Voorbeeld 2

Differentieer $g(t) = e^{5t+6}$.

Oplossing

Met de kettingregel:

$$y = e^u \text{ en } u = 5t + 6$$

$$\frac{dy}{du} = e^u \text{ en } \frac{du}{dt} = 5$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = e^u \cdot 5 = 5 \cdot e^u$$

$$g'(t) = 5 \cdot e^{5t+6}$$

Voorbeeld 3

Bereken de afgeleide van

$$A(q) = q^2 \cdot e^q.$$

Oplossing

De functie A is het product van

$$g(q) = q^2 \text{ en } h(q) = e^q.$$

$$g'(q) = 2q \text{ en } h'(q) = e^q$$

Met de productregel:

$$A'(q) = g'(q) \cdot h(q) + g(q) \cdot h'(q)$$

$$A'(q) = 2q \cdot e^q + q^2 \cdot e^q$$

12 Differentieer.

a $f(x) = 4 \cdot e^x$

c $h(x) = 3 - e^x$

b $g(x) = 1\frac{1}{2} \cdot e^x - 12$

d $k(x) = 0,2 \cdot e^x + e$

Ondersteunende route → maak opdracht 013

13 Differentieer.

H

a $f(x) = e^{3x+5}$

d $l(d) = 15 \cdot e^{-2d} + 1$

b $g(t) = e^{-t}$

e $B(x) = \frac{1}{3}x^3 \cdot e^x$

c $p(q) = 2 \cdot e^{4q-7}$

f $W(p) = -7p \cdot e^{8p+1}$

14 Een satelliet gebruikt voor de energievoorziening onder andere een radioactieve brandstof. Het vermogen P van de brandstof neemt af volgens de formule $P = 40 \cdot e^{-0,006t}$. Hierbij is P in watt en t in dagen.

H

a Bereken de groeifactor per dag.

b Na hoeveel dagen is het vermogen gehalveerd?

c Stel een formule op van $\frac{dP}{dt}$

d Bereken de snelheid waarmee het vermogen na honderd dagen afneemt.

- 15** Als een geneesmiddel met een infuus wordt toegediend, dan neemt de concentratie van het middel in het bloed langzaam toe. Voor een bepaalde patiënt geldt voor de concentratie de formule $C = 2 - 2 \cdot e^{-0,1t}$. Hierbij is C de concentratie in mg per liter en t de tijd in uren met $t = 0$ op het moment dat het infuus wordt gestart.
- Bereken de concentratie twee uur nadat het infuus wordt gestart.
 - Bereken ook met welke snelheid de concentratie na twee uur toeneemt.
 - Laat zien dat je de formule kunt herleiden tot $t = -10 \cdot \log\left(1 - \frac{1}{2}C\right)$.
 - Het middel is pas werkzaam als de concentratie hoger dan 0,5 mg per liter is. Bereken hoelang het duurt voordat het middel werkzaam is. Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.
- 16** In een natuurgebied neemt het aantal bevers al jaren toe. Een bioloog heeft de volgende formule opgesteld voor het aantal bevers in het gebied: $B = \frac{1200}{1 + 0,5 \cdot e^{-0,04t}}$. Hierin is B het aantal bevers en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2017.
- Bereken met hoeveel procent het aantal bevers in het natuurgebied is toegenomen tussen 1 januari 2017 en 1 januari 2020.
 - Het aantal bevers nadert op den duur een grenswaarde. Leg uit dat de noemer $1 + 0,5 \cdot e^{-0,04t}$ voor grote waarden van t naar 1 nadert.
 - Beredeneer hoe groot de grenswaarde is.
 - Toon aan dat de afgeleide van B gelijk is aan $\frac{dB}{dt} = \frac{24 \cdot e^{-0,04t}}{(1 + 0,5 \cdot e^{-0,04t})^2}$.
 - Bereken hoe groot de groeisnelheid van het aantal bevers was op 1 juli 2020.
 - Beredeneer met behulp van de formule van de afgeleide dat de grafiek van B stijgt.



Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

013

Gegeven is de functie $f(x) = e^{4x+1}$.

a De functie f is een kettingfunctie.

Vul in: De schakels zijn $y = e^u$ en $u = \dots$.

b Op het blaadje is een begin gemaakt met het differentiëren van $f(x)$.

Maak de berekening op het blaadje af.

c De functie $k(x) = 3x \cdot e^x$ is het product van $g(x) = 3x$ en $h(x) = e^x$. Om deze functie te differentiëren, heb je de productregel nodig. Op het blaadje is hiermee een begin gemaakt.

Maak de berekening op het blaadje af.

Differentieer de volgende functies.

d $f(x) = e^{2x-1}$

g $s(d) = 10 \cdot e^{-7d+4}$

e $h(t) = 3 \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$

h $A(x) = x^4 \cdot e^x$

f $q(p) = 0,5 \cdot e^{p+10}$

i $W(q) = 6q \cdot e^{2+3q}$

Uitdagende opdrachten

U2

a Gegeven is de functie $f(x) = e^x + x^e + e + x$.

Laat met behulp van differentiëren zien dat de helling van de grafiek van f in het punt met $x = 0$ gelijk is aan 2.

b Voor de functie $g(x) = e^x$ geldt dat de afgeleide gelijk is aan de functie zelf.

Geef nog drie functies die deze eigenschap hebben.

21.3 Exponentiële functies differentiëren

Je leert

- wat de natuurlijke logaritme is
- hoe je exponentiële functies differentieert

Leerroutes

- ondersteunend: 17–18–019–19–20–21
- doorlopend: 17–18–19–20–21–22
- uitdagend: 17–18–19–21–22–U3

Een fietsband is een beetje poreus waardoor er langzaam lucht uit de band ontsnapt.

Het aantal liter lucht V in de band kun je

berekenen met de formule $V(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t$.

Freek beweert dat de afgeleide gelijk is aan

$$V'(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t.$$

- Waarom kan dit niet kloppen?



- 17** In opdracht 10 heb je met behulp van een tabel met hellingen laten zien dat de afgeleide van $f(x) = 2^x$ gelijk is aan $f'(x) \approx 0,69 \cdot 2^x$. In deze opdracht ga je dit nog eens aantonen, maar nu met behulp van rekenregels.

- Differentieer de functies $h(x) = e^{5x}$ en $k(x) = e^{\frac{1}{3}x}$.
- Leg uit dat de afgeleide van $f(x) = e^{ax}$ gelijk is aan $f'(x) = a \cdot e^{ax}$.
- Je kunt $f(x) = 2^x$ schrijven als $f(x) = e^{ax}$.
Op het blaadje zie je hoe je de waarde van a bepaalt.

☐	$e^{ax} = 2^x$								
☐	$(e^a)^x = 2^x$					1			
☐	$e^a = 2$					2			
☐	$a = \log(2)$					3			

Leg uit wat er in stap 1, 2 en 3 is gebeurd.

- Laat zien dat uit opdracht c volgt dat je $f(x) = 2^x$ kunt schrijven als $f(x) \approx e^{0,69 \cdot x}$.
- Hoe volgt uit opdracht b dat $f'(x) \approx 0,69 \cdot 2^x$?
- Bereken op dezelfde manier de afgeleide van $g(x) = 3^x$.

Theorie

Als $f(x) = a^x$ dan is $f'(x) = {}^e\log(a) \cdot a^x$.

Voor ${}^e\log(a)$ wordt meestal de notatie $\ln(a)$ gebruikt.

$\ln(a)$ heet de **natuurlijke logaritme** van a .

Voor de afgeleide van een exponentiële functie geldt dus:

Als $f(x) = a^x$ dan is $f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$.

Op je rekenmachine zit een aparte toets voor $\ln$.

Voorbeeld 1

Gegeven $y = 3 \cdot 8^x$.

Bereken $\frac{dy}{dx}$

Oplossing

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot \ln(8) \cdot 8^x$$

$$\text{ofwel } \frac{dy}{dx} \approx 6,24 \cdot 8^x$$

Voorbeeld 2

Differentieer $P(t) = 0,2^{7t-1}$.

Oplossing

Met de kettingregel:

$$y = 0,2^u \text{ en } u = 7t - 1$$

$$\frac{dy}{du} = \ln(0,2) \cdot 0,2^u \text{ en } \frac{du}{dt} = 7$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \ln(0,2) \cdot 0,2^u \cdot 7$$

$$P'(t) = 7 \cdot \ln(0,2) \cdot 0,2^{7t-1}$$

$$\text{ofwel } P'(t) \approx -11,3 \cdot 0,2^{7t-1}$$

18 Differentieer.

a $f(x) = 4^x$

c $h(x) = 25 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

b $g(x) = 300 \cdot 1,75^x$

d $k(x) = 10 + 6 \cdot 0,8^x$

Ondersteunende route → maak opdracht 019

19 Differentieer.

H a $r(s) = 10^{2s-2}$

d $W(n) = 5 - 1,3 \cdot 4^{n+1}$

b $h(t) = 9 \cdot 7^{\frac{1}{2}t}$

e $N(p) = 8 \cdot e^{-0,64p}$

c $k(b) = 45 \cdot 3^{4b+6}$

f $f(x) = x^5 - 5^x$

20 Het aantal inwoners van een stad groeit met 1,8% per jaar.

H Op 1 januari 2021 waren er 120 000 inwoners in de stad.

a Stel een formule op waarmee je het aantal inwoners in de stad N kunt berekenen. Neem t voor de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2021.

b Bereken wanneer het aantal inwoners gelijk zal zijn aan 150 000 en met hoeveel inwoners per jaar het inwoneraantal op dat moment zal veranderen.



- 21** Een geit heeft verontreinigd voer gegeten. De gifstoffen in het voer verlaten zijn lichaam via de melk. Een dierenarts meet dagelijks de concentratie gif in de melk. Voor de concentratie C in mg per liter geldt $C = 2t \cdot e^{-\frac{1}{3}t}$. Hierbij is t de tijd in dagen na het eten van het verontreinigde voer.

- Bereken de concentratie na een dag.
- Bereken met behulp van differentiëren wanneer de concentratie gif in de melk maximaal is.
- Hoe groot is de maximale concentratie gif?



- 22** De batterij van Anna's telefoon is bijna leeg. Ze legt de telefoon aan de oplader. Ieder kwartier kijkt ze hoeveel procent de batterij is opgeladen. Na anderhalf uur haalt ze de telefoon van de oplader. De batterij is dan voor 94% opgeladen, zie de tabel.

- In de derde kolom van de tabel staat het verschil van het percentage ten opzichte van 100%. Laat zien dat dit verschil bij benadering exponentieel afneemt.
- Hoe groot is de groeifactor per kwartier die bij deze exponentiële afname hoort? Rond af op twee decimalen.
- Bereken de groeifactor per minuut in drie decimalen nauwkeurig.
- Bij de tabel heeft Anna een formule opgesteld van de vorm $P = 100 - b \cdot g^t$. Hierin is t de tijd in minuten en P het percentage. Leg uit dat er moet gelden dat $b = 95$.
- Stel een formule voor P op.
- Bereken na hoeveel minuten de batterij voor de helft is opgeladen.
- Stel een formule op van $\frac{dP}{dt}$
- Hoe kun je aan de formule van de afgeleide zien dat het percentage steeds langzamer toeneemt?

<i>tijd t in minuten</i>	<i>percentage P</i>	<i>verschil</i>
0	5	95
15	39	61
30	61	39
45	75	25
60	84	...
75	90	...
90	94	...

Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

- 019** Je gaat de functie $f(x) = 4,5 \cdot 2^{3x+1}$ differentiëren.
- a** De functie f is een kettingfunctie.
Vul in: de schakels zijn $y = 4,5 \cdot 2^u$ en $u = \dots$
- b** Op het blaadje is een begin gemaakt met het differentiëren van $f(x)$.

$y = 4,5 \cdot 2^u$ en $u = \dots$

$\frac{dy}{du} = 4,5 \cdot \ln(2) \cdot 2^u$ en $\frac{du}{dx} = \dots$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4,5 \cdot \ln(2) \cdot 2^u \cdot \dots$

$f'(x) = \dots \cdot \ln(2) \cdot 2^{\dots}$

Maak de berekening op het blaadje af.

- c** Bereken $\ln(2)$ met je rekenmachine en ga na dat je de afgeleide kunt schrijven als $f'(x) \approx 9,36 \cdot 2^{3x+1}$.

Uitdagende opdrachten

- U3** In een experiment met fruitvliegjes kan het aantal vliegjes N in een afgesloten ruimte worden benaderd met de formule

$$N = \frac{1000}{1 + 9 \cdot 0,9^t}$$

In deze formule is t het aantal dagen vanaf het begin van het experiment.

Het aantal vliegjes nadert op den duur naar een grenswaarde.

Op het moment dat het aantal vliegjes gelijk is aan de helft van de grenswaarde, neemt het aantal vliegjes in de afgesloten ruimte het snelst toe.

Laat dit met een berekening zien.



21.4 Logaritmische functies differentiëren

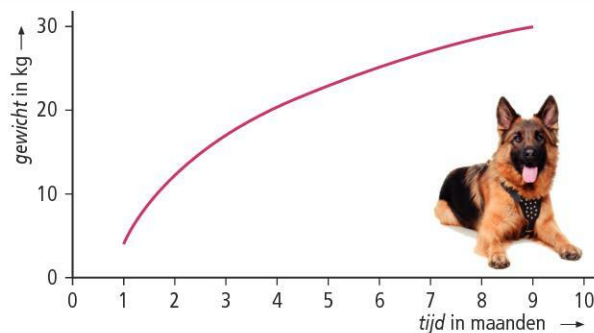
Je leert • hoe je logaritmische functies differentieert

Leerroutes • ondersteunend: 23—024—25—26—027—27—28
 • doorlopend: 23—24—25—26—27—28—29
 • uitdagend: 23—24—25—26—27—29—U4

Gegeven is een groeicurve van een Duitse herder van de eerste tot en met de negende maand na de geboorte. Bij de curve past de logaritmische formule $g = 27,6 \cdot \log(t) + 3,3$.

Hierbij is g het gewicht in kilogrammen en t de tijd in maanden na de geboorte.

• Hoe ziet de hellinggrafiek van deze groeicurve eruit?



23 Gegeven is de functie $f(x) = \ln(x)$.

a Plot en schets de grafiek van f .

b Maak op je rekenmachine een tabel van de hellingen van de grafiek van f . Gebruik deze om de tabel verder in te vullen.

c Laat zien dat de waarde van $x \cdot f'(x)$ voor iedere x hetzelfde is. Welke waarde is dat?

d Hoe volgt uit opdracht c dat $f'(x) = \frac{1}{x}$?

x	0,5	1	2	5	10
$f'(x)$	...	...	...	...	...

Theorie

De afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ is $f'(x) = \frac{1}{x}$

Voorbeeld 1

Differentieer $f(x) = \ln(3x + 1)$.

Oplossing

Met de kettingregel:

$$y = \ln(u) \text{ en } u = 3x + 1$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} \text{ en } \frac{du}{dx} = 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot 3 = \frac{3}{u}$$

$$f'(x) = \frac{3}{3x + 1}$$

Voorbeeld 2

Differentieer $g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

Oplossing

De functie g is het quotiënt van $t(x) = \ln(x)$ en $n(x) = x$.

$$t'(x) = \frac{1}{x} \text{ en } n'(x) = 1.$$

Met de quotiëntregel vind je:

$$g'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x)}{x^2} \text{ ofwel } g'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 024

24 Differentieer.

a $f(x) = 4 \cdot \ln(x) + 7$ c $h(x) = 5 \cdot \ln(3x)$

b $g(x) = \ln(2x + 5)$ d $k(x) = \ln(-x)$

25 Gegeven is de functie $g(x) = {}^2\log(x)$.

a Toon aan dat je ${}^2\log(x)$ kunt schrijven als $\frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln(x)$.

b Leg uit dat de afgeleide van g gelijk is aan $g'(x) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{x}$

c Bereken op dezelfde manier de afgeleide van $h(x) = {}^3\log(x)$.

$${}^p\log(q) = \frac{{}^q\log(q)}{{}^q\log(p)}$$

Theorie

Voor de afgeleide van een logaritmische functie geldt:

Als $f(x) = {}^g\log(x)$ dan is $f'(x) = \frac{1}{\ln(g) \cdot x}$

Voorbeeld 1

Differentieer $f(x) = {}^{0,6}\log(x)$.

Oplossing

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(0,6) \cdot x}$$

ofwel $f'(x) \approx -\frac{1}{0,51x}$

Voorbeeld 2

Bereken de afgeleide van $A = {}^8\log(4p^2 + 9p)$.

Oplossing

Met de kettingregel:

$A = {}^8\log(u)$ en $u = 4p^2 + 9p$

$$\frac{dA}{du} = \frac{1}{\ln(8) \cdot u} \text{ en } \frac{du}{dp} = 8p + 9$$

$$\frac{dA}{dp} = \frac{dA}{du} \cdot \frac{du}{dp} = \frac{1}{\ln(8) \cdot u} \cdot (8p + 9)$$

$$\frac{dA}{dp} = \frac{8p + 9}{\ln(8) \cdot (4p^2 + 9p)} \text{ ofwel}$$

$$\frac{dA}{dp} \approx \frac{8p + 9}{2,08 \cdot (4p^2 + 9p)}$$

26 Differentieer.

a $f(x) = {}^5\log(x)$ d $l(d) = {}^7\log(d + 1)$

b $g(t) = 9 \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(t) + 3$ e $A(r) = {}^2\log(3r - 7)$

c $p(q) = \log(q) + q$ f $B(s) = {}^{0,1}\log(2s)$

Ondersteunende route → maak opdracht 027

27

Bereken $\frac{dA}{dp}$

H

a $A = 5 + {}^{1,06}\log(2p - 6)$

d $A = {}^3\log(p - 4p^3)$

b $A = 4 \cdot \log\left(\frac{1}{2}p\right) + 3p$

e $A = p \cdot \ln(12p + 7)$

c $A = \frac{p + 2}{\ln(p)}$

f $A = \frac{5}{\ln(2p) + 3}$

28

H

Max laat een speelgoedautootje onafgebroken rijden. Het eerste uur rijdt het autootje met een constante snelheid van 6 kilometer per uur. Daarna neemt de snelheid af doordat de batterij leeg raakt. Het verband tussen de afgelegde afstand s in kilometers en de tijd t in uren wordt voor $t \geq 1$ gegeven door de formule $s = 6 + 13,8 \cdot \log(t)$.

- Bereken hoeveel kilometer het autootje aflegt tussen $t = 1$ en $t = 2$.
- Druk t uit in s .
- Bereken na hoeveel uur het autootje 12,5 kilometer heeft afgelegd.
- Welke snelheid heeft het autootje na vijf uur?
- Na hoeveel uur is de snelheid nog maar 1 kilometer per uur?

29

Bij het begin van een brand lopen de temperaturen in de brandhaard heel snel op. Die kun je bij een 'standaardbrand' berekenen met de formule $T = 150 \cdot \ln(8t + 1) + T_0$. Hierbij is T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$, t de tijd in minuten na het begin van de brand en T_0 de temperatuur op het tijdstip dat de brand uitbreekt.

- Laat met een berekening zien dat uit de formule volgt dat de temperatuur op tijdstip $t = 0$ gelijk is aan T_0 .
- Leg uit dat de temperatuurstijging gelijk is aan $T - T_0 = 150 \cdot \ln(8t + 1)$.
- Bereken na hoeveel minuten de temperatuurstijging 500 graden Celsius is.
- Bereken met welke snelheid de temperatuur op dat moment stijgt.
- Beredeneer met behulp van de formule van de afgeleide dat de temperatuur het snelst stijgt als de brand net is uitgebroken.



Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten

024 Gegeven zijn de functies $f(x) = 4 \cdot \ln(x) - 7$ en $g(x) = \ln(4x - 7)$.

- Waarom heb je geen kettingregel nodig om $f(x)$ te differentiëren en wel om $g(x)$ te differentiëren?
- Bereken $f'(x)$.
- Op het blaadje is een begin gemaakt met het differentiëren van $g(x)$ met behulp van de kettingregel.
Maak de berekening op het blaadje af.

Differentieer de volgende functies.

- $g(x) = 3 \cdot \ln(x) - 2$
- $h(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(2x)$
- $f(x) = \ln(6x + 1)$
- $k(x) = \ln(x + 1) - 8$

●	$y = \ln(u)$ en $u = \dots$				
●	$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}$ en $\frac{du}{dx} = \dots$				
●	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \dots = \dots$				
●	$g'(x) = \dots$				

027 Gegeven is de formule $A = \frac{\ln(p)}{2p - 1}$

Om de afgeleide van A te bepalen, heb je de quotiëntregel nodig.

- Van welke twee functies is A het quotiënt?
- Op het blaadje is een begin gemaakt met het berekenen van de afgeleide van A .
Wat komt er in stap 1 en 2 op de puntjes te staan?
- In stap 3 wordt de quotiëntregel gegeven.
Wat komt er op de puntjes te staan?
- De quotiëntregel wordt toegepast in stap 4.
Waarom zijn er in de teller haakjes geplaatst om $2p - 1$?
- Vul het blaadje verder in.

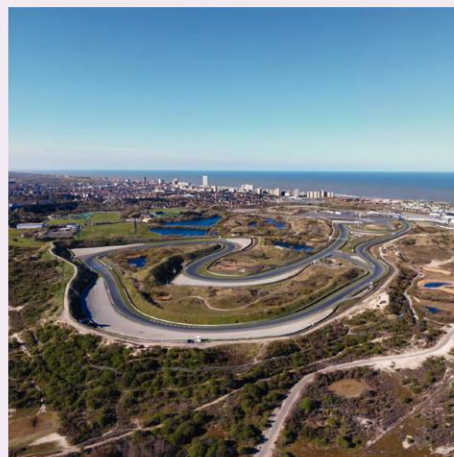
●	$t(p) = \ln(p)$ en $t'(p) = \dots$	1
●	$n(p) = 2p - 1$ en $n'(p) = \dots$	2
●	$\frac{dA}{dp} = \frac{t'(p) \cdot \dots - t(p) \cdot \dots}{(\dots)^2}$	3
●	$\frac{dA}{dp} = \frac{\dots \cdot (2p - 1) - \ln(p) \cdot \dots}{(2p - 1)^2}$	4

Uitdagende opdrachten

U4 Een autocoureur rijdt een aantal rondes op het circuit van Zandvoort. Voor de afstand s in meters die de coureur heeft afgelegd gedurende de eerste tien seconden van de eerste ronde geldt bij benadering de formule $s = 180 \cdot \log(0,02t^3 + 1)$.

Hierbij is t de tijd in seconden met $t = 0$ het moment is waarop de coureur vertrekt en $0 \leq t \leq 10$.

- Bereken de gemiddelde snelheid van de autocoureur gedurende de eerste tien seconden.
- Bereken de snelheid van de autocoureur op tijdstip $t = 2$.
- In de eerste tien seconden is er een tijdstip waarop de snelheid maximaal is.
Bereken de waarde van t waarop dit het geval is. Rond af op één decimaal.



21.5 Logaritmische schalen

Je leert

- hoe je een getal op een logaritmische schaalverdeling aangeeft
- hoe je een logaritmische schaalverdeling gebruikt

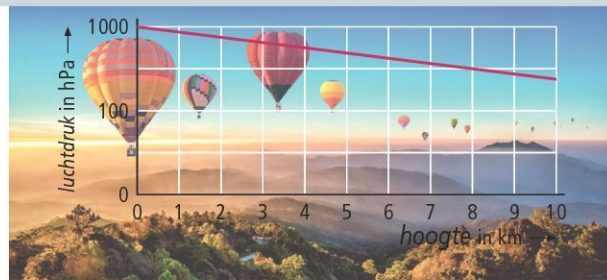
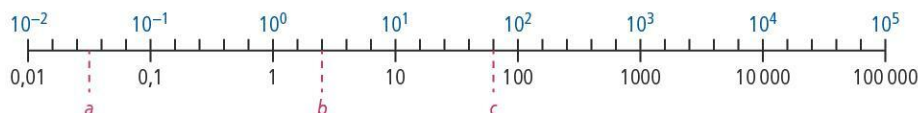
Leerroutes

- ondersteunend: 30—031—32—33—34
- doorlopend: 30—31—32—33—34
- uitdagend: 30—31—33—34—U5

De grafiek geeft het verband weer tussen de luchtdruk p in hectopascal (hPa) en de hoogte h in kilometers boven de zeespiegel.

Volgens Lisa neemt de luchtdruk lineair af.

- Ben jij het met Lisa eens?



30 Gegeven is de getallenlijn.

- Hoe kun je zien dat er een logaritmische schaalverdeling is gebruikt?
- Het getal a ligt precies in het midden tussen 10^{-2} en 10^{-1} , dus a is $10^{-1,5}$.
Bereken a in drie decimalen nauwkeurig.
- Vul in: $b = 10^{\dots}$ en laat zien dat b afgerond op één decimaal gelijk is aan 2,5.
- Bereken de waarde van c .
- Paul wil het getal 3200 op de getallenlijn plaatsen. Hiervoor moet hij het getal als macht van 10 schrijven, dus moet hij de vergelijking $10^t = 3200$ oplossen.
Vul in: $t = \dots \log(\dots) \approx \dots$, dus $3200 = 10^{\dots}$.
- Geef het getal 3200 op de getallenlijn aan.

Aanpak

Hoe geef je een getal a aan op een log-schaal?

- Schrijf de getallen op de log-schaal als machten van 10.
- Schrijf het getal a als macht van 10 door de vergelijking $10^t = a$ op te lossen.
- Geef het getal 10^t aan op de log-schaal.

Voorbeeld

Geef het getal 199 aan op een log-schaal.

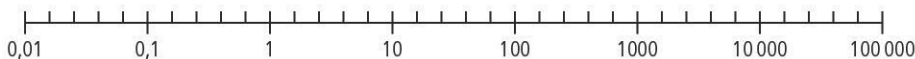
Oplossing

-
- $10^t = 199$ geeft $t = \log(199) \approx 2,3$.
- $10^{2,3}$ ligt tussen 10^2 en 10^3 .

Ondersteunende route → maak opdracht 031

- 31** Geef op de log-schaal de getallen 0,8; 7 en 3000 aan.

H

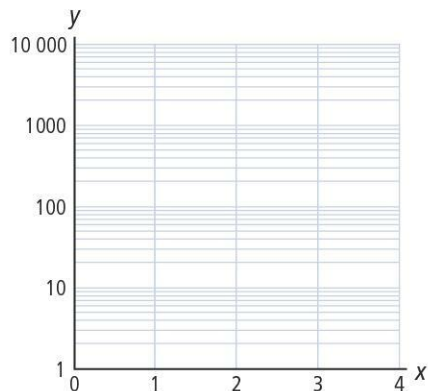


- 32** Gegeven is de exponentiële functie $f(x) = 3 \cdot 10^x$.

a Vul de tabel in.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	...	...	...	...	...

- b In het assenstelsel is op de verticale as een logaritmische schaalverdeling gebruikt. Teken de grafiek van f in het assenstelsel.
 c Welke vorm heeft de grafiek?
 d Leg uit dat je voor het tekenen van de grafiek van $g(x) = 2000 \cdot 0,5^x$ de coördinaten van slechts twee punten nodig hebt.
 e Teken de grafiek van g in het assenstelsel.
 f Teken ook de grafiek van $h(x) = e^x$ in het assenstelsel.

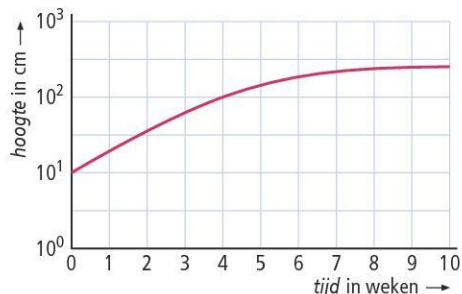


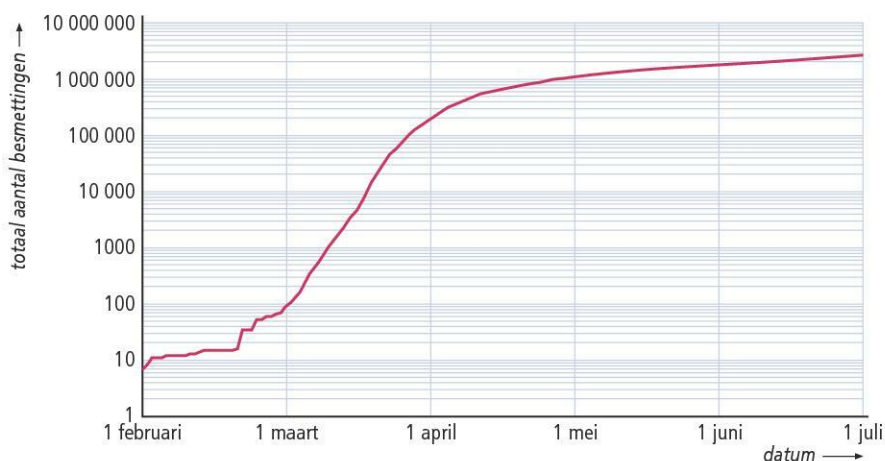
- 33** Gegeven is een grafiek van de gemiddelde hoogte van de zonnebloemen op een veld. Bij de grafiek past de formule

$$H = \frac{256}{1 + 25 \cdot 0,497^t}$$

Hierin is H de hoogte in cm en t de tijd in weken.

- a Leg uit hoe je kunt zien dat de gemiddelde hoogte van de zonnebloemen in de eerste vier weken bij benadering exponentieel is toegenomen.
 b Bereken met behulp van de formule dat de gemiddelde hoogte van de zonnebloemen maximaal 256 cm is.
 c Waar kun je dit getal in de figuur terugvinden?
 d Toon aan dat $\frac{dH}{dt} \approx \frac{4475 \cdot 0,497^t}{(1 + 25 \cdot 0,497^t)^2}$
 e Na hoeveel weken groeien de zonnebloemen het snelst?
 f Hoe groot is de maximale groeisnelheid?





- 34** In de figuur zie je hoe in de Verenigde Staten het totaal aantal besmettingen met het coronavirus is toegenomen tussen 1 februari 2020 en 1 juli 2020.
- Bram beweert dat de toename van het aantal besmettingen in maart groter was dan in april.
Waarom denkt Bram dit? Ben je het met hem eens?
 - Het aantal besmettingen van 1 maart tot en met 1 april is bij benadering exponentieel toegenomen.
Bereken de verdubbelingstijd van het aantal besmettingen in deze periode.
 - Het aantal besmettingen van 1 mei tot en met 1 juli is ook bij benadering exponentieel toegenomen. Op 1 mei waren er ongeveer 1 070 000 besmettingen en op 1 juli waren dat er 2 630 000.
Bij het totaal aantal besmettingen N in deze periode past een formule van de vorm $N = b \cdot e^{at}$. Hierin is t de tijd in dagen met $t = 0$ op 1 mei 2020.
Leg uit dat $b = 1\,070\,000$.
 - Bereken de waarde van a in vijf decimalen nauwkeurig.
 - Bereken met welke snelheid het aantal besmettingen op 1 mei 2020 toenam.

Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

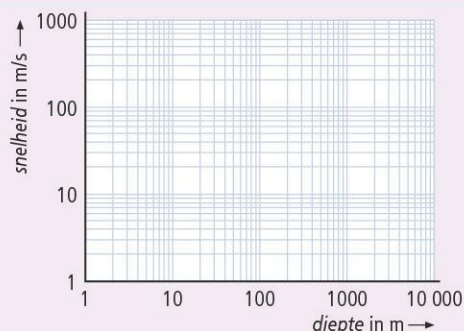


- 031** Op de getallenlijn is een logaritmische schaalverdeling gebruikt.
- Ga na dat $1 = 10^0$ en schrijf alle andere getallen langs de as als macht van 10.
 - Ga na dat $10^{2,5} \approx 316$.
 - Leg uit dat het getal $10^{2,5}$ op de log-schaal precies tussen 10^2 en 10^3 ligt.
 - Om het getal 500 op de log-schaal aan te geven, moet je 500 schrijven als macht van 10. Hiervoor moet je de vergelijking $10^t = 500$ oplossen.
Vul in: uit $10^t = 500$ volgt $t = \dots \log(\dots) \approx \dots$
 - Leg uit dat het getal 500 tussen 10^2 en 10^3 ligt.
 - Hoe kun je aan de exponent zien dat 500 dichterbij 10^3 dan bij 10^2 ligt?
 - Geef het getal 500 aan op de log-schaal.
 - Geef ook de getallen 0,3; 2 en 80 000 aan op de log-schaal.

Uitdagende opdrachten

- U5** De snelheid van een tsunami hangt af van de diepte van de oceaan. Voor de snelheid v in meters per seconde geldt bij benadering de formule $v = 3 \cdot d^{0,5}$. Hierin is d de diepte van de oceaan in meters.

- In het assenstelsel is op beide assen een logaritmische schaalverdeling gebruikt.
Teken de grafiek van v in het assenstelsel.
- Welke vorm heeft de grafiek?
- Je kunt de formule herleiden tot de vorm $\log(v) = a \cdot \log(d) + b$.
Bereken de waarden van a en b .



21.6 Gemengde opdrachten

35 Druk t uit in N .

a $N = 5 + \frac{1}{4} \cdot 8^{t+2}$

c $N = \ln(12 - t)$

b $N = 3 \cdot \log(2t)$

d $\frac{1}{3}N - 2 \cdot e^{0,1t} = 0$

36 Daglicht wordt door water geabsorbeerd, waardoor de lichtsterke onder water snel afneemt. In een meer met vrij helder water kun je het percentage daglicht berekenen met de formule $P = 100 \cdot 0,75^d$. Hierin is P het percentage daglicht en d de diepte in meters.

a Bereken op welke diepte de hoeveelheid daglicht is gehalveerd.

b Herleid de formule zodat d wordt uitgedrukt in P .

c Een bioloog heeft onderzocht hoeveel algen er in het meer voorkomen. Een formule die past bij het aantal algen A per cm^3 is $A = 60 + 2 \cdot 0,9^{\log(d)}$. Laat zien dat je deze formule kunt schrijven als $A = 0,9^{\log(0,0018d^2)}$.

d Bereken hoeveel algen per cm^3 er zijn als er nog maar 1% van de hoeveelheid daglicht aanwezig is.



37 Differentieer.

a $f(x) = 2x + 7 \cdot e^{2x+1}$

c $Q(p) = 3 - 6 \cdot \ln(p+1)$

b $k(t) = 5t^2 \cdot 5^{\log(3t)}$

d $W(a) = \frac{3}{7 + 4 \cdot 2^a}$

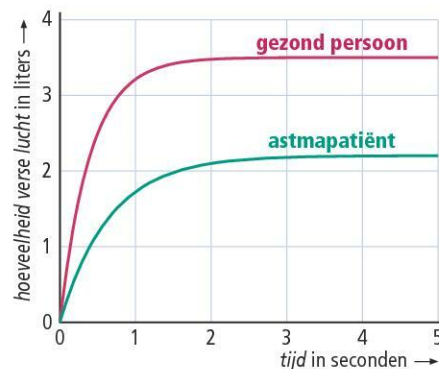
38 Tijdens het inademen neemt de hoeveelheid verse lucht in de longen toe. Voor gezonde mensen wordt bij één keer inademen het volgende model gebruikt: $L = 3,6 \cdot (1 - e^{-2,5t})$. Hierin is L de hoeveelheid verse lucht in liters na t seconden met $0 \leq t \leq 5$.

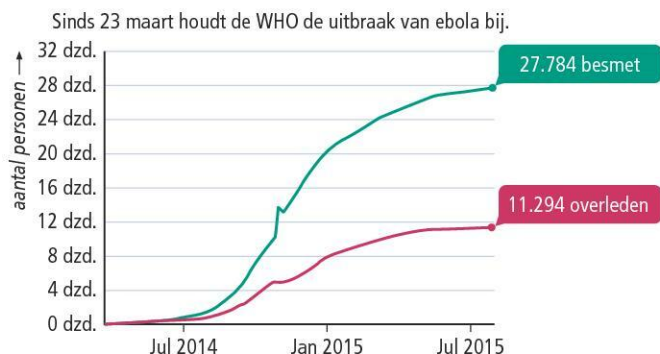
a De maximale hoeveelheid verse lucht in de longen van gezonde mensen is volgens dit model ongeveer 3,6 liter. Bereken na hoeveel seconden 90% van de maximale hoeveelheid verse lucht is ingeademd.

b Bereken met welke snelheid de hoeveelheid verse lucht toeneemt op tijdstip $t = 0$.

c Bij astmapatiënten is de maximale hoeveelheid verse lucht in de longen kleiner en duurt het langer voordat dit maximum wordt bereikt. Voor astmapatiënten wordt het volgende model gebruikt: $L = a \cdot 3,6(1 - e^{-2,5at})$. Hierbij is a een constante tussen 0 en 1 die afhangt van de zwaarte van de astma.

Bereken de waarde van a die hoort bij de grafiek van de astmapatiënt in de figuur.





- 39** In 2014 en 2015 was er een ebola-epidemie in West-Afrika. Deze epidemie heeft veel mensen het leven gekost. Gegeven is een grafiek die door de World Health Organisation is gemaakt. Bij de grafiek van het aantal besmettingen N past een formule van de vorm $N = \frac{a}{1 + c \cdot e^{-bt}}$ met $b > 0$. Hierbij is t het aantal dagen na 1 januari 2014.
- Leg uit dat $a = 28\,000$.
 - Op 1 januari 2014 waren er 5 besmettingen. Halverwege oktober van datzelfde jaar was het aantal besmettingen toegenomen tot 10 000.
Onderzoek welke waarden b en c hebben. Rond b af op drie decimalen.

- 40** De lawaaioverlast die je van een snelweg ondervindt, is afhankelijk van de afstand die je tot de snelweg hebt en ook van de snelheid van het verkeer.
- De formule die het gemiddelde lawaainiveau van de snelweg benadert is $L = 89,5 - 9,9 \cdot \log(a \cdot v) + 0,16v - 0,03a$. Hierin is a de afstand tot de snelweg in meters en v de gemiddelde snelheid van het verkeer op de snelweg in kilometer per uur.
- Neem $v = 80$ kilometer per uur
Laat met behulp van de afgeleide zien dat de lawaaioverlast afneemt als de afstand tot de snelweg groter wordt.
 - Een huis staat 100 meter van de snelweg.
Onderzoek bij welke gemiddelde snelheid van het verkeer het gemiddelde lawaainiveau bij deze woning minimaal is.
(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 1995, tijdvak 1)



Vaardigheid

Je kunt een exponentiële formule herleiden tot een logaritmische formule.

Om een exponentiële formule te herleiden tot een logaritmische formule gebruik je de regel:

Uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $q = 0,2 \cdot 4^{p-3}$.
Druk p uit in q .

Oplossing

$$0,2 \cdot 4^{p-3} = q$$

$$4^{p-3} = 5q$$

$$p-3 = {}^4\log(5q)$$

$$p = {}^4\log(5q) + 3$$

links en rechts verwisseld

links en rechts $\times 5$

$g^t = a$ geeft $t = {}^g\log(a)$

links en rechts $+ 3$

S1 Druk r uit in s .

a $s = 10^r$

c $s = 5 - 4 \cdot 0,81^r$

b $s = 3 \cdot 1,2^r$

d $s = 9 + e^{-0,25r}$

Vaardigheid

Je kunt een logaritmische formule herleiden tot een exponentiële formule.

Om een logaritmische formule te herleiden tot een exponentiële formule gebruik je de regel:

Uit $t = {}^g\log(a)$ volgt $g^t = a$.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $N = 1 + 5 \cdot {}^2\log(t)$.
Druk t uit in N .

Oplossing

$$1 + 5 \cdot {}^2\log(t) = N$$

$$5 \cdot {}^2\log(t) = N - 1$$

$${}^2\log(t) = \frac{N-1}{5}$$

$$t = 2^{\frac{N-1}{5}}$$

$$\text{ofwel } t = 2^{\frac{1}{5}N - \frac{1}{5}}$$

links en rechts verwisseld

links en rechts $- 1$

links en rechts $: 5$

$t = {}^g\log(a)$ geeft $g^t = a$

S2 Druk x uit in y .

a $y = {}^{0,65}\log(x)$

c $y = \log(21 + x)$

b $y = 7 + {}^8\log(0,1x)$

d $y = 2 + \frac{1}{2} \cdot \ln(x)$

Vaardigheid**Je kunt exponentiële functies met grondtal e differentiëren.**

De afgeleide van $f(x) = e^x$ is $f'(x) = e^x$.

Het getal e heet het getal van Euler en is bij benadering gelijk aan 2,72.

Op je rekenmachine zit een aparte toets voor e .

Voorbeeld

Differentieer $f(t) = 3 \cdot e^{2t+1}$.

Oplossing

Met de kettingregel:

$$y = 3 \cdot e^u \text{ en } u = 2t + 1$$

$$\frac{dy}{du} = 3 \cdot e^u \text{ en } \frac{du}{dt} = 2$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = 3 \cdot e^u \cdot 2 = 6 \cdot e^u$$

$$f'(t) = 6 \cdot e^{2t+1}$$

S3 Differentieer.

a $g(t) = 345 + 12 \cdot e^t$

b $A(x) = \frac{1}{4} \cdot e^{4x-1}$

Vaardigheid**Je kunt exponentiële functies differentiëren.**

De afgeleide van $g(x) = a^x$ is $g'(x) = \ln(a) \cdot a^x$.

$\ln(a)$ (spreek uit: de natuurlijke logaritme van a) is een andere notatie voor $^e\log(a)$.

Op je rekenmachine zit een aparte toets voor $\ln$.

Voorbeeld

Differentieer $g(x) = 8 + 2 \cdot 0,95^x$.

Oplossing

$$g'(x) = 0 + 2 \cdot \ln(0,95) \cdot 0,95^x$$

$$\text{ofwel } g'(x) \approx -0,10 \cdot 0,95^x$$

S4 Differentieer.

a $f(x) = 4 \cdot 1,6^x - 3$

b $B(t) = 10^{-t} + 10t$

S5 Bij een experiment kan het aantal bacteriën in een kweek worden berekend met de formule $N = 800 \cdot 3^t$. Hierin is t de tijd in uren met $t = 0$ het moment waarop het experiment begint.

a Bereken $\frac{dN}{dt}$

b Bereken met welke snelheid het aantal bacteriën toeneemt op tijdstip $t = 2$.



Vaardigheid

Je kunt logaritmische functies differentiëren.

De afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ is $f'(x) = \frac{1}{x}$

De afgeleide van $f(x) = {}^s\log(x)$ is $f'(x) = \frac{1}{\ln(g) \cdot x}$

Voorbeeld 1

Bereken de afgeleide van $P = {}^3\log(5q - 1)$.

Oplossing

Met de kettingregel:

$$P = {}^3\log(u) \text{ en } u = 5q - 1$$

$$\frac{dP}{du} = \frac{1}{\ln(3) \cdot u} \text{ en } \frac{du}{dq} = 5$$

$$\frac{dP}{dq} = \frac{dP}{du} \cdot \frac{du}{dq} = \frac{1}{\ln(3) \cdot u} \cdot 5 = \frac{5}{\ln(3) \cdot u}$$

$$\frac{dP}{dq} = \frac{5}{\ln(3) \cdot (5q - 1)} \text{ ofwel } \frac{dP}{dq} \approx \frac{5}{1,10 \cdot (5q - 1)}$$

Voorbeeld 2

Differentieer $s(t) = t^2 \cdot \ln(t)$.

Oplossing

De functie s is het product van $g(t) = t^2$ en $h(t) = \ln(t)$.

$$g'(t) = 2t \text{ en } h'(t) = \frac{1}{t}$$

Met de productregel:

$$s'(t) = g'(t) \cdot h(t) + g(t) \cdot h'(t)$$

$$s'(t) = 2t \cdot \ln(t) + t^2 \cdot \frac{1}{t}$$

$$\text{ofwel } s'(t) = 2t \cdot \ln(t) + t$$

S6 Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = 2 + 7 \cdot \ln(x)$

c $W(n) = -\frac{1}{2} \cdot \log(1 - 2n)$

b $h(t) = 5t \cdot {}^{0,65}\log(t)$

d $T(q) = \frac{q}{\ln(q)}$

Vaardigheid

Je kunt een getal op een log-schaal aangeven.

1 Schrijf de getallen op de log-schaal als machten van 10.

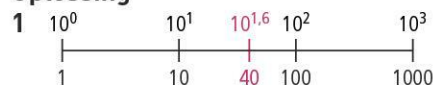
2 Schrijf het getal a als macht van 10 door de vergelijking $10^t = a$ op te lossen.

3 Geef het getal 10^t aan op de log-schaal.

Voorbeeld

Geef het getal 40 aan op een log-schaal.

Oplossing



2 $10^t = 40$ geeft $t = \log(40) \approx 1,6$.

3 $10^{1,6}$ ligt tussen 10^1 en 10^2 .

S7 Geef op de log-schaal de getallen 5 en 2000 aan.



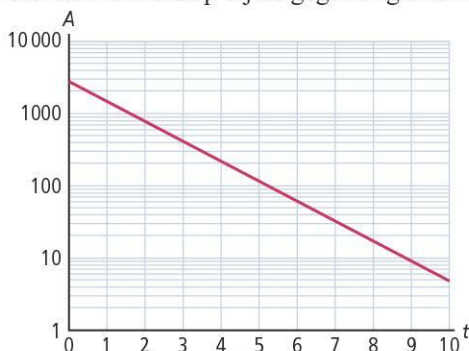
Vaardigheid

Je kunt een logaritmische schaalverdeling gebruiken.

In een assenstelsel met op de verticale as een logaritmische schaalverdeling is de grafiek bij een exponentieel verband een rechte lijn.

Voorbeeld

Stel een formule op bij de gegeven grafiek.



Oplossing

De grafiek is een rechte lijn en op de verticale as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt. De grafiek hoort dus bij een exponentieel verband.

Een formule is van de vorm $A = b \cdot g^t$.

De grafiek gaat door de punten (0, 3000) en (10, 5).

De beginwaarde is $b = 3000$.

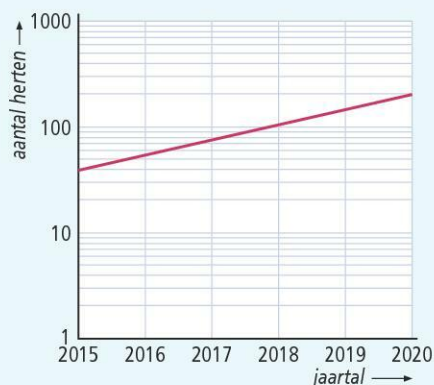
De groeifactor is $g = \left(\frac{5}{3000}\right)^{\frac{1}{10}} \approx 0,527$.

Een formule is $A = 3000 \cdot 0,527^t$.

S8 In de grafiek zie je hoe het aantal herten in een natuurgebied in de periode 2015-2020 is toegenomen.

- Hoe kun je zien dat op de verticale as een logaritmische schaalverdeling is gebruikt?
- Bij de grafiek past een formule van de vorm $N = b \cdot g^t$, waarbij t de tijd in jaren is met $t = 0$ op 1 januari 2015. Leg uit dat $b = 40$.
- Bereken de waarde van g in drie decimalen nauwkeurig.
- Bereken het aantal herten in het natuurgebied op 1 januari 2025 als het aantal herten na 1 januari 2020 op dezelfde manier blijft toenemen.
- Het aantal hazen in het natuurgebied kan berekend worden met de formule $N = 800 \cdot 0,91^t$ met t de tijd in jaren en $t = 0$ op 1 januari 2015.

Teken in het assenstelsel de grafiek die bij het aantal hazen hoort.



T1 Druk t uit in A .

- a** $A = 6 - 2 \cdot 0,75^t$ **c** $A = 5 \cdot 4 \log(t) + 1$
b $A = e^{0,5-3t}$ **d** $\frac{1}{2}A = \ln(t-1) - 8$

T2 Een tank van 200 liter is gevuld met een chemische vloeistof. Deze vloeistof wordt verwijderd door te spoelen met water. Voor het aantal liter chemische vloeistof in de tank V na t minuten spoelen geldt $V = 200 \cdot 0,30^t$.

- a** Met hoeveel procent neemt het aantal liter chemische vloeistof in de tank per minuut af?
b Druk t uit in V .
c Bereken na hoeveel seconden de helft van de hoeveelheid chemische vloeistof is verwijderd.
d Bereken $\frac{dV}{dt}$
e Met welke snelheid neemt de aanwezige hoeveelheid chemische vloeistof af na precies één minuut?
f Bereken wanneer de afnamesnelheid van de hoeveelheid chemische vloeistof één liter per minuut is. Geef je antwoord in seconden nauwkeurig.



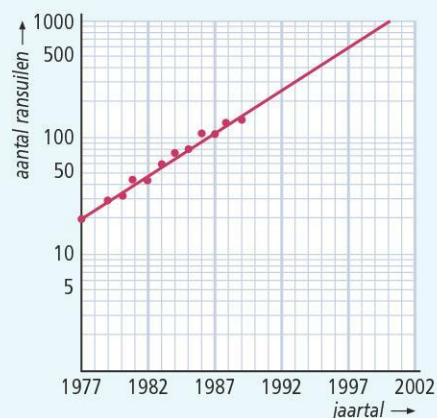
T3 Differentieer.

- a** $f(x) = 10 - 8 \cdot 0,91^x$ **d** $r(s) = 4 \cdot 2 \log\left(\frac{1}{4}s\right)$
b $g(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{5x-1}$ **e** $U(z) = z^3 \cdot 0,8 \log(z)$
c $h(t) = \frac{300}{1 + 12 \cdot e^{-0,28t}}$ **f** $B(x) = \frac{\ln(x)}{x+2}$

T4 Bij de fabricage van een product is de gemiddelde opbrengst per product $GO = 17,5 \cdot \log(2q + 1)$ en zijn de gemiddelde kosten per product $GK = 2\sqrt{q}$. In deze formules is q het aantal producten dat in een bepaalde tijd wordt geproduceerd en zijn GO en GK in euro's.

- a** Stel een formule op voor de gemiddelde winst GW .
b Bereken met behulp van differentiëren bij welk aantal producten de gemiddelde winst maximaal is.
c Hoe groot is de maximale gemiddelde winst?

T5 Aan het begin van 1977 is in een dorpje in Limburg een kleine groep ransuilen aangetroffen. In de jaren daarna is de groep nauwgezet gevolgd. Uit tellingen bleek dat de populatie in omvang toenam. De tellingen zijn uitgezet in een assenstelsel met op de verticale as een logaritmische schaalverdeling. Door de meetpunten is een zo goed mogelijk passende rechte lijn getekend.



- Stel een formule op waarmee je het aantal ransuilen R kunt berekenen t jaar na het begin van 1977.
- Hoeveel ransuilen waren er volgens de formule aan het begin van 1990?
- Aan het begin van de jaren 90 vlakke de groei van het aantal ransuilen iets af, omdat de door de uilen gebruikte broedplaatsen slechts in beperkte mate aanwezig waren. Een model voor het aantal ransuilen vanaf 1990 is $R = 225 - 43 \cdot 0,6^t$. Hierin is R het aantal ransuilen en t het aantal jaren na het begin van 1990. Met hoeveel procent nam het aantal ransuilen volgens het model toe tussen het begin van 1990 en het begin van 1995?
- Bereken met welke snelheid het aantal ransuilen toenam aan het begin van 1995.
- Volgens het model bereikt het aantal ransuilen op den duur een grenswaarde. Beredeneer hoe groot deze grenswaarde is.

T6 In 2019 hebben wetenschappers van de Universiteit van Californië onderzocht hoe je de leeftijd van een hond naar mensenjaren kunt omrekenen. Dit onderzoek heeft de formule $M = 16 \cdot \ln(H) + 31$ opgeleverd. Hierin is M de leeftijd van de hond in mensenjaren en H de echte leeftijd van de hond in jaren.

- Hoe oud is een hond van 10 jaar in mensenjaren volgens de formule?
- De grafiek van M is afnemend stijgend. Toon dit aan met behulp van de afgeleide van M .
- Wat betekent het in de praktijk dat de grafiek afnemend stijgend is?
- Je kunt de formule herleiden tot de vorm $H = a \cdot e^{b \cdot M}$. Bereken de waarden van a en b . Rond zo nodig af op vier decimalen.
- Bereken de echte leeftijd van een hond als deze 75 mensenjaren oud is. Geef je antwoord in maanden nauwkeurig.



Je kunt een exponentiële formule herleiden tot een logaritmische formule.

E1 Druk x uit in y .

a $y = 8^{x-3}$

c $y = 3 + \frac{1}{2} \cdot 10^x$

b $y = 12 - 4 \cdot 0,72^x$

d $y = 50 \cdot e^{-0,001x}$

Je kunt een logaritmische formule herleiden tot een exponentiële formule.

E2 Druk r uit in s .

a $s = \log(r)$

c $^{0,8}\log(r - s) = 1$

b $s = \frac{2}{3} \cdot ^7\log(r) - 3$

d $s = 2 \cdot \ln(0,5r - 3)$

Je kunt exponentiële functies met grondtal e differentiëren.

E3 Differentieer.

a $f(x) = 5 + e^x$

c $h(x) = e^{3x+8}$

b $g(x) = \frac{e^x - x}{2}$

d $k(x) = 4x \cdot e^{1-x}$

Je kunt exponentiële functies differentiëren.

E4 Differentieer.

a $f(x) = 7 \cdot 0,8^x$

c $h(x) = 10^{4x+9}$

b $g(x) = 21 - 5 \cdot 0,91^x$

d $k(x) = \frac{3^x}{x^3}$

Je kunt logaritmische functies differentiëren.

E5 Differentieer.

a $f(x) = \ln\left(\frac{1}{2}x - 5\right)$

c $h(x) = 6x^2 \cdot ^5\log(x)$

b $g(x) = \ln(3x) - \ln(2x)$

d $k(x) = \log(x^2 + x + 1)$

Je kunt een getal op een log-schaal aangeven.

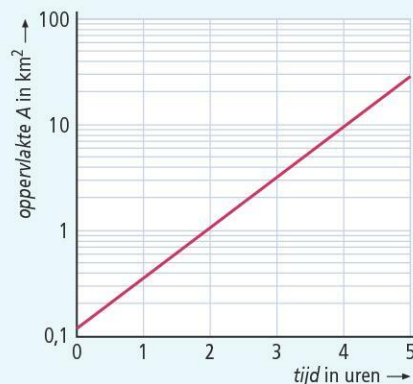
E6 Geef op de log-schaal de getallen 0,5; 20 en 800 aan.



Je kunt een logaritmische schaalverdeling gebruiken.

E7 Bij een aanvaring is een olietanker een groot deel van de lading verloren. Om 10 uur 's morgens ($t = 0$) had de uitgestroomde olie een oppervlakte van $0,12 \text{ km}^2$. In de grafiek zie je hoe de oppervlakte in de uren daarna toenam.

- Bij de grafiek past een formule van de vorm $A = 0,12 \cdot g^t$. Hierbij is A de oppervlakte van de uitgestroomde olie in km^2 en t de tijd in uren.
Bereken de waarde van g . Rond af op één decimaal.
- Bereken op welk tijdstip de oppervlakte 100 km^2 was.
- Met welke snelheid nam de oppervlakte op dat moment toe?



E8 Bij een praktische opdracht doen leerlingen een proef met fruitvliegjes. Het aantal fruitvliegjes neemt in de eerste weken exponentieel toe. Na twee weken zijn er 140 fruitvliegjes en na vijf weken 1065 fruitvliegjes.

- Bij deze gegevens kun je een exponentiële formule opstellen voor het aantal fruitvliegjes F na t weken. Stel deze formule op.
- In een kweekruimte kan het aantal fruitvliegjes niet onbeperkt toenemen. Een ander experiment wordt in een kleinere kweekruimte uitgevoerd. Bij dit experiment geldt

$$\text{bij benadering: } F = \frac{340}{1 + 54 \cdot e^{-0,24t}}$$

Hierin is F het aantal fruitvliegjes en t het aantal dagen na de start van het experiment.

Leg uit welke aantallen fruitvliegjes volgens de formule in de kweekruimte mogelijk zijn.

- Laat zien dat $\frac{dF}{dt} = \frac{4406,4 \cdot e^{-0,24t}}{(1 + 54 \cdot e^{-0,24t})^2}$
- Op de dag dat het aantal fruitvliegjes het snelst toeneemt, wil Gijs ze verdoven om ze te kunnen tellen. Bereken met behulp van de afgeleide hoeveel dagen na de start van het experiment dat het geval is.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2012, tijdvak 2)





Afsluiting formules en verbanden 22

SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In de afgelopen jaren heb je kennis gemaakt met verschillende soorten functies en formules.

Je hebt geleerd hoe je een functie kunt differentiëren. Met de afgeleide kun je bijvoorbeeld berekenen met welke snelheid iets toeneemt en hoe groeiprocessen verlopen.

In dit hoofdstuk komen de verschillende vaardigheden die je geleerd hebt samen.

Je zult in dit hoofdstuk geen leerroutes vinden, dus ook geen ondersteunende of uitdagende opdrachten. In plaats daarvan bevat elke paragraaf een bladzijde met opdrachten op examenniveau.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- Modelleren en algebraïseren
- Probleem oplossen en analytisch denken
- Logisch redeneren en bewijzen

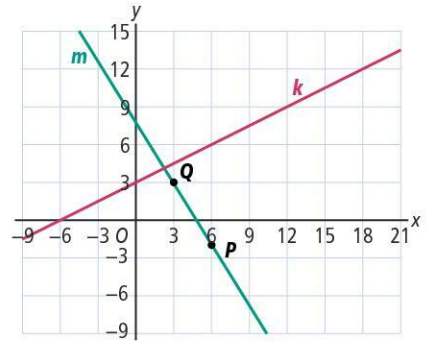
opdracht 19

opdracht 20

opdracht 25

V1 Gegeven is een lijn k met formule $y = \frac{1}{2}x + 3$.

- Hoe zie je de getallen $\frac{1}{2}$ en 3 terug in de grafiek?
- Verder is gegeven een lijn m die door de punten $P(6, -2)$ en $Q(3, 3)$ gaat. De formule die bij lijn m hoort is ook van de vorm $y = a \cdot x + b$.
Laat met een berekening zien dat $a = -\frac{5}{3}$.
- Gebruik de coördinaten van P of Q om aan te tonen dat $b = 8$.



Aanpak

Hoe stel je een formule op voor een lijn door twee gegeven punten?

- Bereken de richtingscoëfficiënt:
$$\text{richtingscoëfficiënt} = \frac{\text{toename tweede coördinaat}}{\text{toename eerste coördinaat}}$$
- Vul in de algemene formule de richtingscoëfficiënt in.
- Vul in die formule de coördinaten van een van de gegeven punten in en bereken het startgetal.
- Schrijf de formule van de lijn op.

Voorbeeld

Stel een formule op voor de lijn door de punten $A(12, 4)$ en $B(3, 2)$.

Oplossing

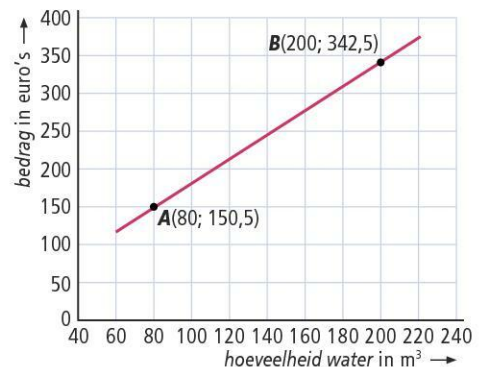
- De richtingscoëfficiënt is $\frac{4 - 2}{12 - 3} = \frac{2}{9}$
- $y = \frac{2}{9}x + b$
- De coördinaten van A invullen geeft:
 $4 = \frac{2}{9} \cdot 12 + b$
 $4 = 2\frac{2}{3} + b$, dus $b = 1\frac{1}{3}$.
- Een formule is $y = \frac{2}{9}x + 1\frac{1}{3}$.

V2 Stel voor elke lijn een formule op.

- Lijn p gaat door $A(8, 1)$ en $B(-2, 6)$.
- Lijn q gaat door $C(-28, 10)$ en $D(20, 46)$.
- Lijn r gaat door $E(\frac{1}{2}, -2\frac{1}{4})$ en $F(\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2})$.

V3 In de grafiek zie je het verband tussen de hoeveelheid water in m^3 die een huishouden verbruikt en de jaarlijkse kosten hiervan in euro's.

- Waarom is hier sprake van een lineair verband?
- Stel een formule op voor het verband tussen het waterverbruik w in m^3 en het te betalen bedrag b in euro's.
- Bij een ander waterbedrijf betaalt gezin Alders voor $129 m^3$ een bedrag van €192,25, terwijl gezin Boelens bij dit bedrijf €211,85 betaalt voor $143 m^3$. Ook bij dit bedrijf is het verband tussen het bedrag en de hoeveelheid water lineair.
Stel een formule op waarmee je bij dit waterbedrijf de kosten van het jaarverbruik kunt berekenen.



Theorie

Om erachter te komen of een formule bij een lineair verband hoort, kijk je of je de formule kunt herleiden tot de vorm $y = a \cdot x + b$.

Voorbeeld

Herleid de formule $y = 3(2 - \frac{1}{2}x) + \frac{2x+3}{4}$ tot de vorm $y = a \cdot x + b$.

Oplossing

$$y = 6 - 1\frac{1}{2}x + \frac{2x}{4} + \frac{3}{4} \quad \text{haakjes weggewerkt en breuk gesplitst}$$

$$y = 6 - 1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \quad \text{vereenvoudigd}$$

$$y = -x + 6\frac{3}{4} \quad \text{gelijksoortige termen samengenomen}$$

V4 Herleid de formules tot de vorm $y = a \cdot x + b$.

a $y = 5(3x - 1) - 3(x + 2)$ **c** $y = x^2 - (x + 3)(x + 7)$

b $y = \frac{5x-7}{30} - \frac{x}{3} - 3x$ **d** $y = (x-8)(2x-3) - \frac{6x^2+4}{3}$

Theorie

Bij het herleiden van machtsformules en exponentiële formules gebruik je vaak de rekenregels voor machten.

$$g^a \cdot g^b = g^{a+b} \quad (g^a)^b = g^{a \cdot b}$$

$$\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b} \quad g^{-a} = \frac{1}{g^a}$$

$$g^0 = 1 \quad g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$$

Voorbeeld

Herleid de formule $y = \frac{5x^{4,2}}{4(x^{1,3})^2}$ tot de vorm $y = c \cdot x^n$.

Oplossing

$$y = \frac{5x^{4,2}}{4(x^{1,3})^2} = \frac{5x^{4,2}}{4x^{2,6}} = 1,25x^{1,6}$$

V5 Gebruik de rekenregels voor machten om de formules te herleiden tot de vorm $y = c \cdot x^n$.

a $y = 5x^3 \cdot -2x^{1,3}$ **c** $y = 6\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x}$

b $y = \frac{4,8x^{3,7}}{3x^{-1,4}}$ **d** $y = x^{1,5} \cdot (2x^{4,2} \cdot x^{-1,8})^2$

V6 Gebruik de rekenregels voor machten om de formules te herleiden tot de vorm $y = b \cdot g^x$.

a $y = 7 \cdot 5^{x+1}$ **c** $y = 7 \cdot 2^{-2} \cdot 8^x \cdot 32^{0,2}$

b $y = \frac{5 \cdot 2^x}{8 \cdot 0,5^x}$ **d** $y = 6 \cdot 3^x \cdot \frac{1}{3} \cdot 9^x$

Rekenregels:

$$(p \cdot q)^a = p^a \cdot q^a$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^a = \frac{p^a}{q^a}$$

22.1 Lineaire verbanden

- Je herhaalt**
- wat een lineair verband is
 - hoe je lineair interpoleert en lineair extrapoleert

Een tuincentrum bestelt nieuwe potgrond. In de grafiek kun je zien wat het verband is tussen het aantal m^3 potgrond en het te betalen bedrag in euro's.

- Welke conclusies kun je trekken uit deze grafiek?



x	1	2	3	5	8
y	2	5	8	11	14

A

x	4	5	6	7	10
y	9,5	11	12,5	14	18,5

B

x	1	3	4	6	18
y	36	12	9	6	2

C

- 1** Geef bij elke tabel aan of er sprake kan zijn van een lineair verband tussen de variabelen x en y . Leg uit waarom wel of waarom niet.

Theorie

Bij een **lineair verband** tussen twee variabelen is sprake van een constante toename of constante afname. Een lineair verband kun je op verschillende manieren herkennen.

- De grafiek is een rechte lijn.
- In een tabel is er bij gelijke stappen altijd dezelfde toename.
- Uit de tekst kun je opmaken dat de toename bij gelijke stappen altijd dezelfde is.

Bestaat tussen de variabelen x en y een lineair verband, dan kun je de bijbehorende formule schrijven in de vorm $y = a \cdot x + b$.

Je zegt ook wel dat dit de **vergelijking** is van de bijbehorende rechte lijn.

Hierbij is a de richtingscoëfficiënt en is b het startgetal.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $6p + 4q = 17$.
Leg uit waarom het verband tussen p en q lineair is.

Oplossing

Schrijf de gegeven formule in de vorm $q = a \cdot p + b$.

$$4q = -6p + 17 \quad \text{links en rechts } -6p$$

$$q = -1,5p + 4,25 \quad \text{links en rechts : 4}$$

Dus is het verband lineair.

Als p met 1 toeneemt, neemt q met 1,5 af.

- 2** Herleid de formules tot de vorm $q = a \cdot p + b$.

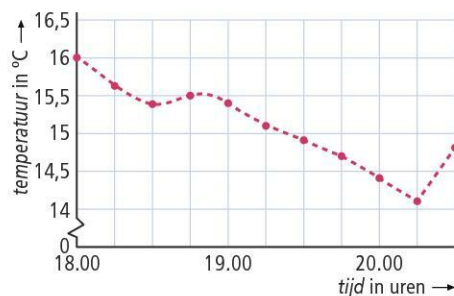
a $0,1q - p = 13$

b $p = 1\frac{1}{2}q - 16$

c $18 - 3p + 24q = 0$

- 3** Het verband tussen x en y is gegeven door de vergelijking $2x + 8 = 5y - x + 7$.
- Toon aan dat er een lineair verband is tussen x en y .
 - Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken bij de vergelijkingen $2x + 8 = 5y - x + 7$ en $y = -\frac{1}{2}x + 14\frac{1}{2}$.
 - Toon aan dat de grafieken bij de vergelijkingen $2x + 8 = 5y - x + 7$ en $10y - 6x = 1$ geen snijpunt hebben.

- 4** Elk kwartier is de temperatuur in een schuur gemeten. Het resultaat is verwerkt in een grafiek. Je gaat met de grafiek de temperatuur in de schuur om 19.55 uur schatten.
- Geef de temperatuur om 19.45 uur en om 20.00 uur.
 - Neem aan dat de temperatuur tussen 19.45 en 20.00 uur lineair afnam. Bereken de afname van de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ per minuut.
 - Schat met je antwoord op opdracht c de temperatuur in de schuur om 19.55 uur.
 - Waarom kun je de temperatuur om 18.00 uur en 18.45 uur niet gebruiken om de temperatuur om 18.35 te schatten?



Theorie

Het vinden van een tussenliggende waarde in een grafiek of in een tabel heet **interpoleren**. Het vinden van een verder gelegen waarde in een tabel of in een grafiek heet **extrapoleren**. Je bepaalt de tussenliggende of verder gelegen waarde door het verloop van de grafiek of de tabel zo goed mogelijk te volgen. Als een grafiek bij een tabel op een bepaald gedeelte vrijwel een rechte lijn is, dan kun je een tussenliggende waarde schatten met **lineair interpoleren** en een verder gelegen waarde met **lineair extrapoleren**.

Voorbeeld

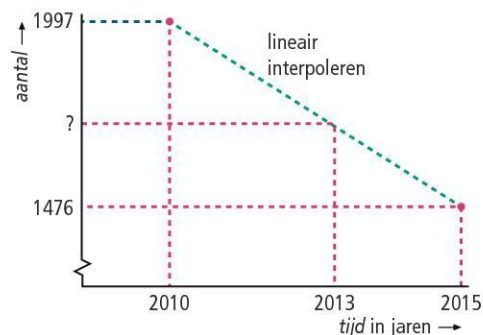
In de grafiek kun je de aantallen aflezen bij de jaren 2010 en 2015.
Bereken met lineair interpoleren het aantal in 2013.
Bereken met lineair extrapoleren het aantal in 2025.

Oplossing

De afname per jaar is gelijk aan $\frac{1997 - 1476}{5} = 104,2$.

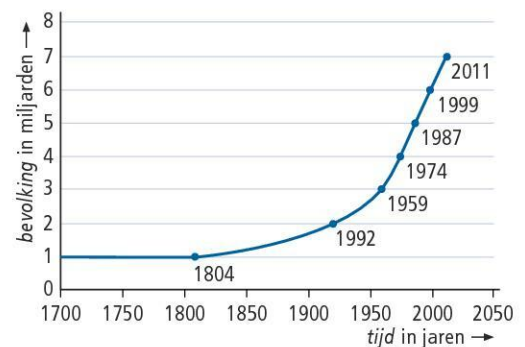
In 2013 is het aantal dus $1997 - 3 \times 104,2 \approx 1684$.

In 2025 zal dit aantal gelijk zijn aan $1476 - 10 \times 104,2 = 434$.



- 5** Het aantal eenoudergezinnen is de laatste jaren gestaag toegenomen. In het jaar 2000 waren er ongeveer 385 000 eenoudergezinnen, in het jaar 2020 was dat aantal opgelopen tot circa 590 000.
- Bereken met lineair interpoleren het aantal eenoudergezinnen in 2015.
 - Bereken met lineair extrapoleren het aantal eenoudergezinnen in 2030.
- 6** Volgens het rapport *Smakelijk weten* van het CBS is het gemiddelde gewicht van een volwassen Nederlandse vrouw in de periode 1981-2011 gestegen van 65 naar 70 kilo. Als je aanneemt dat deze toename gelijkmatig is geweest, dan is er sprake van een lineair verband tussen de variabelen t en G met t de tijd in jaren na 1981 en G het gemiddelde gewicht in kg.
- Stel een formule op voor het verband tussen G en t .
 - Bereken in welk jaar het gemiddelde gewicht volgens de formule 66,5 kg was.

- 7** In de grafiek zie je hoe de omvang van de wereldbevolking gegroeid is vanaf 1700.
- Tussen welke jaren was er sprake van een lineaire groei van de wereldbevolking?
 - In welk jaar waren er voor het eerst meer dan 5,5 miljard mensen?
 - Hoeveel mensen waren er in 1980?
 - Stel dat de wereldbevolking op dezelfde manier blijft doorgroeien als tussen 1974 en 2011. Hoeveel mensen zullen er dan zijn in 2030?
 - In 2020 waren er ongeveer 7,8 miljard mensen. Is de bevolking in de periode na 2011 sneller of minder snel gegroeid dan in de periode voor 2011?

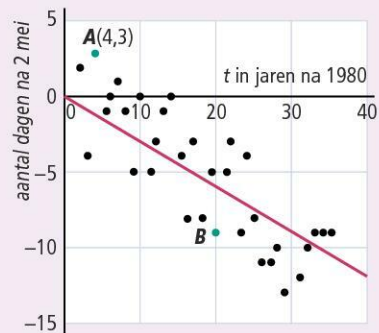


- 8** Waarom kun je bij opdracht 7 met de gegevens van 1804 en 1959 niet de omvang van de wereldbevolking in 1900 schatten met behulp van lineair interpoleren?
- 9** De Vinexwijk Amersfoort-Vathorst heeft op 1 januari 2016 ongeveer 23 duizend bewoners. Met lineair extrapoleren komt de prognose voor het aantal bewoners op 1 januari 2025 op ongeveer 30 duizend. Bereken hoeveel inwoners er waren op 1 januari 2010.

X1 De gierzwaluw

Een gierzwaluw is een trekvogel. Dat betekent dat deze vogel op een andere plaats overwintert en na de winter terugkeert naar zijn broedgebied. Onderzoekers hebben sinds 1980 in Portland (UK) bijgehouden wat de terugkeerdatum van de gierzwaluw elk jaar was. In 1980 kwam de eerste gierzwaluw op 2 mei terug.

In de grafiek zijn deze gegevens uitgezet. Het punt $(0, 0)$ komt overeen met 2 mei 1980. Het punt $A(4, 3)$ betekent dat de gierzwaluw in 1984 drie dagen later terugkeerde dan in 1980, dus op 5 mei.



- Geef de coördinaten van punt B en de betekenis van deze coördinaten.
- Wat was de vroegste datum waarop een gierzwaluw terug kwam? In welk jaar was dat?
- De rode lijn is een lijn die zo goed mogelijk past bij de gegevens.
Stel een vergelijking op van deze lijn. Gebruik de variabelen t en n .
- Als de terugkomdata zich op dezelfde manier blijven voortzetten, kun je met behulp van de rode lijn een voorspelling doen op welke datum de gierzwaluw in 2030 zal terugkeren.
Bereken die terugkeerdatum.

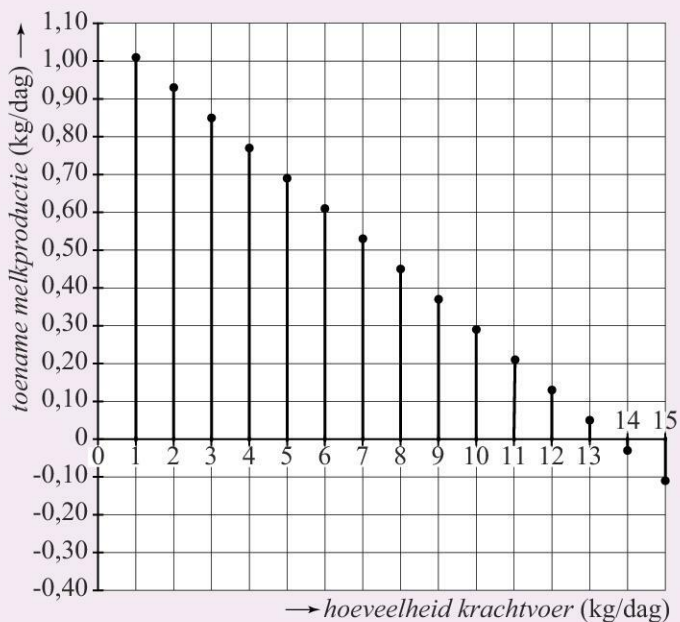
(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2012, tijdvak 1)

X2 Krachtvoer voor melkkoeien

In het toenamediagram kun je zien hoe de toename van de melkproductie van een koe afhangt van de toegediende hoeveelheid krachtvoer.

- Bij welke hoeveelheid krachtvoer is de melkproductie maximaal?
- Bereken met behulp van lineair extrapoleren met hoeveel de melkproductie afneemt ten opzichte van de maximale melkproductie als de hoeveelheid krachtvoer 18 kg per dag is.

(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2014, tijdvak 1)



22.2 Evenredig en omgekeerd evenredig

Je herhaalt • wat evenredige en omgekeerd evenredige verbanden zijn

De oppervlakte van de kippenhuur van boer Boris is 250 m^2 . De kippen krijgen 120 gram voer per kip per dag. Er is een verband tussen het aantal kippen en de oppervlakte per kip. Er is ook een verband tussen het aantal kippen en de totale hoeveelheid voer per dag.

- Omschrijf het verschil tussen deze twee verbanden.



- 10** Sander heeft een foto met een breedte van 9 cm en een hoogte van 13 cm . Hij maakt een vergroting met een breedte van 45 cm .
- Hoeveel cm is de hoogte van de vergroting?
 - Als je de breedte acht keer zo groot maakt, hoeveel keer zo groot wordt dan de hoogte?
 - Tussen de breedte b en de hoogte h bestaat een verband dat je kunt beschrijven met een formule van de vorm $h = \dots \cdot b$. Welk getal moet op de puntjes staan?
 - Teken een grafiek bij deze formule.

- 11** De tabel hoort bij rechthoeken met een oppervlakte van 24 cm^2 .

lengte in cm	0,1	0,5	1	...	96
breedte in cm	...	...	24	4	...

- Vul de tabel verder in.
- Wat gebeurt er met de lengte als je de breedte zes keer zo groot maakt?
- Tussen de breedte b en de lengte l bestaat een verband met een formule van de vorm $b \cdot l = \dots$ ofwel $b = \frac{\dots}{l}$. Welk getal moet op de puntjes staan?

Theorie

Twee variabelen heten **recht evenredig** als geldt: als de ene variabele k keer zo groot wordt, dan wordt de andere variabele ook k keer zo groot.

Zijn de variabelen x en y , dan heet y recht evenredig, of

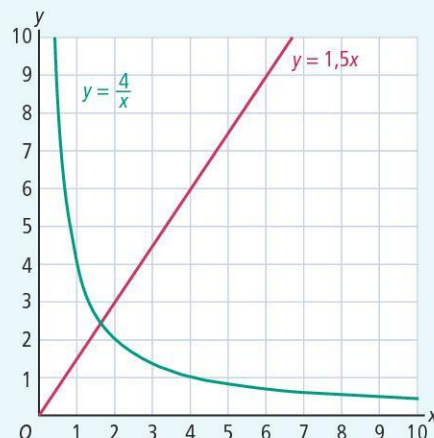
kortweg, **evenredig** met x . Er geldt $\frac{y}{x} = c$, maar ook $y = c \cdot x$.

Je herkent een evenredig verband in een tabel, als van de twee getallen in elke kolom de verhouding hetzelfde is. De grafiek bij een evenredig verband is een rechte lijn door de oorsprong.

Twee variabelen heten **omgekeerd evenredig** als geldt: als de ene variabele k keer zo groot wordt, dan wordt de andere variabele k keer zo klein. Zijn de variabelen x en y , dan geldt

$$x \cdot y = c \text{ ofwel } y = \frac{c}{x} \text{ ofwel } x = \frac{c}{y}$$

Je herkent een omgekeerd evenredig verband in een tabel als het product van de variabelen in elke kolom hetzelfde is.



Voorbeeld 1

k	1,4	2,2	4,8	6,4
M	2,1	3,3	7,2	9,6

Toon aan dat M en k recht evenredig zijn.

Oplossing

$2,1 : 1,4 = 1,5$; $3,3 : 2,2 = 1,5$; $7,2 : 4,8 = 1,5$ en $9,6 : 6,4 = 1,5$

M en k zijn recht evenredig want er geldt steeds

$$\frac{M}{k} = 1,5 \text{ ofwel } M = 1,5 \cdot k.$$

Voorbeeld 2

W	$\frac{1}{2}$	2	4	10
t	8	2	1	0,4

Toon aan dat W en t omgekeerd evenredig zijn.

Oplossing

$$\frac{1}{2} \times 8 = 4; 2 \times 2 = 4; 4 \times 1 = 4 \text{ en } 10 \times 0,4 = 4$$

W en t zijn omgekeerd evenredig want er geldt steeds

$$W \cdot t = 4 \text{ ofwel } t = \frac{4}{W}$$

- 12 a Geef bij elke tabel aan of er sprake is van een evenredig verband, een omgekeerd evenredig verband of geen van beide.

p	2	7	12	18
q	11	38,5	66	99

A

u	3	7	8	13
w	1	-11	-14	-29

B

x	5	8	12	24
y	13,2	8,25	5,5	2,75

C

- b Stel bij elke tabel een formule op.

- 13** Als een wandelaar met een constante snelheid loopt, dan is de staplengte steeds even groot. Uit onderzoek is gebleken dat tussen staplengte en stapfrequentie, het aantal stappen per tijdseenheid, een evenredigheid verband bestaat.

Voor mannen geldt bij benadering $\frac{n}{S} = 140$, waarbij n het aantal stappen per minuut is en S de staplengte in meters.

- Simon wandelt 150 meter in 100 seconden in 187 stappen. Laat met berekeningen zien dat de formule in dit geval klopt.
- Sietse heeft een staplengte van 85 cm. Bereken zijn snelheid in km per uur.
- Laat zien dat voor de snelheid v van een mannelijke wandelaar de volgende formule geldt: $v = 8,4 \cdot S^2$ waarbij v in km per uur is.

(Ontleend aan CE havo wiskunde A 1995, tijdvak 2)

Bij de formule $v = 8,4 \cdot S^2$ zeg je ook wel dat v evenredig is met het kwadraat van S . Ook kun je bij de formule $A = \frac{6,13}{p^3}$ zeggen dat A omgekeerd evenredig is met p^3 .

- 14** Bij een bepaalde boomsoort is de diameter d van de stam bij benadering omgekeerd evenredig met een macht van de hoogte h . De formule die hierbij hoort is $d = \frac{270}{h^{1,54}}$

Hierbij zijn d en h beide in meters.

- Bereken de hoogte als de diameter 90 cm is.
- Bereken zonder getallenvoorbeeld te gebruiken hoeveel keer zo groot d wordt als h twee keer zo groot wordt.

- 15** Bij een bepaald type windmolen is het geleverde vermogen P in kW evenredig met de derde macht van de windsnelheid v in m/s en eveneens evenredig met het kwadraat van de wielengte L in m.

Het verband tussen P , v en L wordt gegeven door de formule $P = 0,000197 \cdot v^3 \cdot L^2$.

Een windmolen van dit type levert een vermogen van 1400 kW. De benodigde windsnelheid is dan evenredig met een macht van L .

Druk v uit in L en geef de exponent van de macht van L .



X3 Vriespunt

Door zout toe te voegen aan water bevriest het water bij een lagere temperatuur dan bij 0 °C. Door zout te strooien, smelten sneeuw en ijs bij een temperatuur lager dan 0 °C.

De vriespundaling V is het aantal graden dat het vriespunt van water lager wordt dan 0 °C. Deze waarde van V kan worden

berekend met de formule $V = 3,72 \cdot \frac{D}{58,5 \cdot H}$

Hierin is D de dosering van het zout in grammen per m² en is H de hoeveelheid neerslag (water, sneeuw, hagel) in kg per m² die gevallen is.

- Bij 0,2 kg sneeuw per m² wordt zout gestrooid in een dosering van 15 gram/m².
Laat met behulp van de formule zien dat het vriespunt dan daalt tot beneden -2 °C.
- Bij elke waarde van H is V evenredig met D .
Toon dit aan.
- Men wil een vriespundaling van 4 graden Celsius bereiken.
Bereken hoeveel procent van de hoeveelheid neerslag de dosering moet zijn.

X4 Body Mass Index

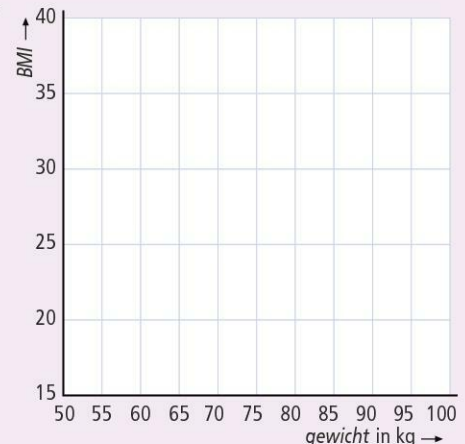
Een veel gebruikte methode voor het bepalen van je eventuele onder- of overgewicht maakt gebruik van de Body Mass Index (BMI). Dit is een maat die afhangt van je gewicht en je lengte.

Het berekenen van je BMI kan met de formule $BMI = \frac{g}{l^2}$

Hierin is g het gewicht in kg en l de lengte in meters.

- Marian is 163 cm lang en heeft een gezond gewicht.
Tussen welke twee waarden ligt het gewicht van Marian?
- Bij een gegeven lengte kun je de formule voor BMI schrijven als $BMI = c \cdot g$.
Bereken c bij $l = 1,7$; bij $l = 1,8$ en bij $l = 1,9$.
- Teken de grafieken bij de formules van opdracht c in één assenstelsel.
- Geef in de figuur van opdracht c bij deze lengten het gezonde gewicht aan.

	BMI
<i>ondergewicht</i>	≤ 20
<i>gezond gewicht</i>	$\langle 20, 25]$
<i>te hoog gewicht</i>	$\langle 25, 30]$
<i>overgewicht</i>	> 30



22.3 Formules opstellen

Je herhaalt • hoe je een formule opstelt bij meerdere meetresultaten

Als brood gaar is, wordt het uit de oven gehaald. De temperatuur van het brood is op dat moment 95°C . Daarna neemt de temperatuur af tot 20°C . De temperatuur van het brood kun je berekenen met de formule $T = a + b \cdot 0,9^t$. In deze formule is T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ en t de tijd in minuten nadat het brood uit de oven is gehaald.

- Welke waarden hebben a en b in deze formule?



- 16** Een bioloog heeft bij een aantal dieren het skeletgewicht S en het lichaamsgewicht M bepaald, beide in kg. De resultaten staan in de tabel. Hij vraagt zich af of er een verband bestaat tussen S en M en zo ja, of je dit met een formule kunt benaderen.

S	1,0	2,2	2,9	3,6	5,4
M	12,1	24,2	30,8	37,2	53,1

- Leg met behulp van de tabel uit dat tussen S en M geen lineair verband bestaat.
- Laat met berekeningen zien dat er ook geen exponentieel verband bestaat tussen S en M .
- Tussen S en M bestaat een machtsverband dat voldoet aan een formule van de vorm $M = p \cdot S^q$. In de tabel zie je dat bij $S = 1$ geldt $M = 12,1$.
Laat met behulp van deze waarden zien dat hieruit volgt dat $p = 12,1$.
- Waarom kun je met $S = 1$ en $M = 12,1$ wel de waarde van p berekenen en met bijvoorbeeld $S = 2,9$ en $M = 31,2$ niet?
- Vul $p = 12,1$ in de formule $M = p \cdot S^q$ in en bereken met behulp van de twee getallen in de laatste kolom van de tabel de waarde van q in drie decimalen.
- Geef een formule voor M uitgedrukt in S .
- Maak een tabel bij de formule van opdracht f en vergelijk deze met de gegeven tabel.
Kun je nu concluderen dat het verband tussen S en M inderdaad redelijk te benaderen is met een machtsverband?



Theorie

Bij een verband tussen twee grootheden kun je met behulp van meerdere meetresultaten de bijbehorende formule opstellen.

Voorbeeld 1

Bij de machtsformule $B = c \cdot A^n$ horen de waarden in de tabel.

A	1	3	7
B	4	20,8	74,1

Bereken de waarden van c en n .

Oplossing

Uit $A = 1$ en $B = 4$ volgt $4 = c \cdot 1^n$, dus $c = 4$.

Uit $A = 7$ en $B = 74,1$ volgt $74,1 = 4 \cdot 7^n$.

$$7^n = \frac{74,1}{4} \text{ dus } n = {}^7\log\left(\frac{74,1}{4}\right) \approx 1,50.$$

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $Q = c \cdot g^t$.

Gegeven: bij $t = 2$ is $Q = 70$ en

bij $t = 6$ is $Q = 245$.

Bereken de waarden van c en g .

Oplossing

Het verband tussen Q en t is exponentieel.

De groeifactor per vier tijdseenheden is $245 : 70 = 3,5$.

$$g = 3,5^{\frac{1}{4}} \approx 1,37$$

Uit $t = 2$ en $Q = 70$ volgt $70 = c \cdot (3,5^{\frac{1}{4}})^2$.

$$c = 70 : 3,5^{\frac{1}{2}} \approx 37,42$$

- 17 In de tabel is een aantal meetresultaten gegeven. De bijbehorende formule is van de vorm $y = c \cdot x^n$.
- Bereken de waarde van c .
 - Bereken de waarde van n in twee decimalen.
 - Hoeveel keer zo groot wordt y als x vijf keer zo groot wordt?

x	1	3	4	8
y	5	29	46	140

- 18 Als je een tabel hebt met slechts twee meetresultaten, dan zijn er heel veel verschillende bijpassende formules mogelijk.
- Stel een lineaire formule op bij de tabelwaarden.
 - Stel een exponentiële formule op bij de tabelwaarden.
 - Stel een machtsformule op bij de tabelwaarden.

K	D
1	4
6	17

- 19 Een onderzoeksteam heeft gedurende een aantal jaren het aantal roofvogels in een gebied geteld. Op grond van deze tellingen heeft men een formule van de vorm $R = a - b \cdot 0,6^t$ opgesteld. Hierbij is R het aantal roofvogels en t het aantal jaren na 2010.
- In 2010 telde met 348 roofvogels en in 2014 telde men 504 roofvogels.
- Bereken in twee decimalen de waarden van a en b .

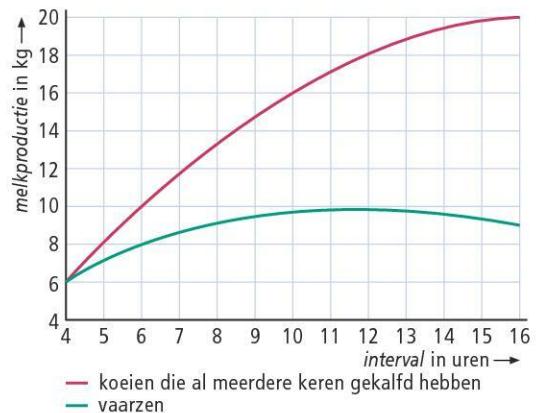
- 20** Een onderzoeker is op zoek naar een formule die het verband zou kunnen beschrijven tussen t en T . Een aantal gegevens staat in de tabel. Na veel proberen denkt hij dat het een formule van de vorm $T = \frac{a}{t+c} + b$ zou kunnen zijn.

t	T
0	18
5	12
10	10
15	9
20	8,4
200	6,3
2000	6,03
20000	6,003

- De tabel suggereert dat T grenswaarde 6 heeft. Waarom volgt hieruit dat $b = 6$?
- Vul $t = 0$ en $T = 18$ in de formule in. Laat zien dat hieruit volgt dat $a = 12c$.
- Vul $t = 20$ en $T = 8,4$ in de formule in. Welk verband krijg je nu tussen a en c ?
- Stel een vergelijking op met behulp van je formules van opdracht b en c en bereken de waarde van a .
- Maak een tabel bij de formule die je gevonden hebt en controleer of deze past bij de gegeven tabel.

- 21** De melkproductie van een koe hangt onder andere af van de lengte van het tijdsinterval tussen twee opeenvolgende tijdstippen waarop een koe wordt gemolken. In de twee grafieken in de figuur is te zien dat er een groot verschil is tussen jonge koeien die nog nooit gekalfd hebben (vaarzen) en koeien die al meerdere keren gekalfd hebben.

- Hoeveel kg melk geeft een koe die al meerdere keren gekalfd heeft en om de 10 uur gemolken wordt per dag meer dan een vaars die om de 10 uur gemolken wordt?



De grafiek bij de melkproductie van een vaars lijkt de vorm van een bergparabool te hebben.

Hier past dus een formule van de vorm

$M = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ bij. Hierin is M de melkproductie per melkbeurt in kg en t de lengte van het tijdsinterval tussen twee melkbeurten in uren.

- De grafiek heeft een top bij een tijdsinterval van 12 uur. Toon met behulp van de afgeleide M' aan dat $b = -24a$.
- Gebruik het gegeven dat de grafiek door het punt (4, 6) gaat en dat $b = -24a$ om aan te tonen dat $c = 80a + 6$.
- Gebruik de coördinaten van de top (12; 9,8) om de waarde van a te berekenen.
- Bereken ook de waarden van b en c en plot de grafiek van de gevonden formule en controleer of deze bij benadering overeen komt met de gegeven grafiek.

X5 Piramiden

Voor de inhoud van een piramide geldt de formule:

$$I = \frac{1}{3} \cdot \text{oppervlakte grondvlak} \cdot \text{hoogte}.$$

In deze opdracht gaat het over een piramide met een rechthoekig grondvlak met een breedte van 2 dm en een lengte van x dm. De hoogte van de piramide is gelijk is aan $h = 9 - a \cdot x$ waarbij a een constante is.

a Voor de inhoud I van deze piramide geldt $I = 6x - \frac{2}{3}ax^2$.

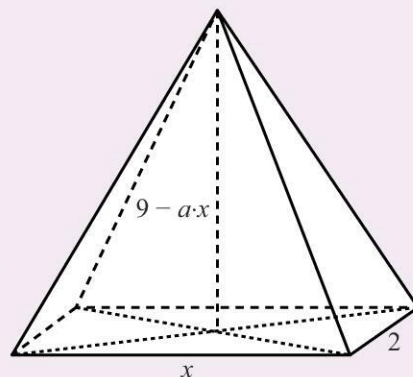
Toon dit aan door deze formule af te leiden uit de gegevens.

b Neem $a = 2$ en bereken met behulp van differentiëren voor welke waarde van x de piramide de grootste inhoud heeft.

c De waarde van x waarvoor de inhoud van de piramide maximaal is, noemen we x_{MAX} . Deze is niet steeds hetzelfde maar hangt af van de waarde van a .

Druk x_{MAX} uit in a .

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2015, tijdvak 1)

**X6 Algen**

Van een bepaald soort eencellige algen (*Gonyaulax polyedra*) is het dag-en-nachtritme onderzocht. De algen werden blootgesteld aan afwisselend 12 uur licht en 12 uur donker. Deze perioden noemen we respectievelijk dag en nacht. In de figuur zijn resultaten van dit onderzoek te zien.

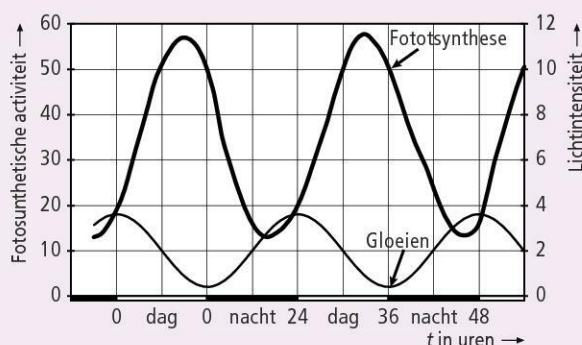
Een van de gemeten activiteiten is fotosynthese, het opslaan van energie met behulp van (zon)licht. De intensiteit van de fotosynthese is weergegeven op de linker verticale as.

De grafiek voor de fotosynthese F , kan benaderd worden door een formule van de vorm $F = a + b \sin(c(t - 3))$. Hierbij is t de tijd in uren met $t = 0$ bij het begin van een dag.

a Stel deze formule op. Licht je antwoord toe.

b Sommige algen lichten vanzelf op in het donker. Dit verschijnsel, gloeien genaamd, is in de figuur ook met een grafiek weergegeven. De lichtintensiteit G is gemeten in eenheden die langs de rechter verticale as zijn uitgezet. Stel een formule op voor G .

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2012, tijdvak 2)



22.4 Redeneren met formules

Je herhaalt • hoe je redeneert met formules en grafieken

Bij een telecombedrijf wordt de gemiddelde prijs per belminuut lager naarmate het aantal gebelde minuten groter is. Dit wordt beschreven door de

$$\text{formule } G = 0,015 + \frac{5}{a}$$

Hierin is G de gemiddelde prijs in euro's per belminuut en a het aantal belminuten per maand.

- Hoe kun je vaststellen dat de gemiddelde prijs per belminuut steeds langzamer daalt bij een toename van het aantal belminuten?



- 22** In een zomerperiode is vastgesteld dat het percentage P van een vijveroppervlak dat bedekt is met eendenkroos bij benadering voldoet aan de formule $P = \frac{100}{1 + 35 \cdot 0,756^t}$ waarin t

de tijd in dagen is.

- Beredeneer met behulp van de formule dat het percentage op den duur naar 100% zal naderen.
- Toon aan dat $\frac{dP}{dt} \approx \frac{979 \cdot 0,756^t}{(1 + 35 \cdot 0,756^t)^2}$
- Maak een schets van de grafiek van $\frac{dP}{dt}$
- Welke conclusie kun je trekken over de snelheid waarmee de oppervlakte van het eendenkroos toeneemt?

Theorie

Door na te gaan hoe een formule is opgebouwd, kun je beredeneren of de uitkomsten van de formule een grenswaarde naderen.

Om vast te stellen hoe de functiewaarden toe- of afnemen, kun je kijken naar de afgeleide.

Als de afgeleide positief is, dan stijgt de grafiek van de functie.

Als de afgeleide negatief is, dan daalt de grafiek van de functie.

Als afgeleide naar nul nadert, heb je te maken met een afnemende stijging of daling.

Als de afgeleide steeds verder weg van nul gaat, heb je te maken met een toenemende stijging of daling.

Voorbeeld 1

Voor $p \geq 0$ is gegeven $K = 18,5 + \frac{12}{p^2 + 10}$
Ga na of K nadert naar een grenswaarde.

Oplossing

Als p toeneemt, neemt $p^2 + 10$ toe.

12 wordt gedeeld door een steeds

groter getal dus $\frac{12}{p^2 + 10}$ neemt af

en nadert naar nul.

K nadert dus naar de grenswaarde 18,5.

Voorbeeld 2

Voor $p \geq 0$ is gegeven $K = 18,5 + \frac{12}{p^2 + 10}$

Ga met behulp van de grafiek van de afgeleide na op welke manier de waarde van K nadert naar de grenswaarde 18,5.

Oplossing

$$K = 18,5 + 12(p^2 + 10)^{-1} \text{ geeft } \frac{dK}{dp} = -12(p^2 + 10)^{-2} \cdot 2p$$

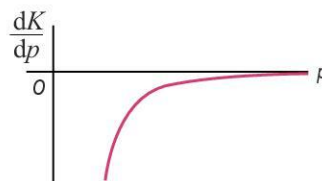
$$\text{ofwel } \frac{dK}{dp} = \frac{-24p}{(p^2 + 10)^2}$$

De afgeleide is negatief voor $p > 0$.

Er is dus sprake van een daling.

In de schets van $\frac{dK}{dp}$ zie je dat de afgeleide naar 0 nadert.

Er is dus sprake van een afnemende daling.



- 23** Voor $p > 0$ wordt het verband tussen A en x gegeven door de formule $A = \frac{2x - p}{p \cdot x}$

- a Bereken voor welke waarde van p de bijbehorende grafiek door het punt met $x = 1$ en $A = 4$ gaat.
- b Plot in één figuur de grafiek van A voor $p = 1$ en $p = 2$.
- c Onderzoek naar welke grenswaarden A nadert bij $p = 1$ en bij $p = 2$.
- d Laat zien dat je de formule $A = \frac{2x - p}{p \cdot x}$ kunt herleiden tot

$$A = \frac{2}{p} - \frac{1}{x} \text{ en beredeneer dat } A \text{ voor elke waarde van } p > 0 \text{ een grenswaarde heeft.}$$

- e Voor welke waarde van p is de grenswaarde van A gelijk aan $3\frac{1}{3}$?
- f Beredeneer met de formule dat de grafiek van A voor elke waarde van $p > 0$ stijgend is voor $x > 0$.
- g Toon aan dat $\frac{dA}{dx} = \frac{1}{x^2}$ voor elke waarde van $p > 0$.
- h Beredeneer met behulp van de formule van de afgeleide dat de grafiek van A voor $x > 0$ afnemend stijgend is.

- 24** Gegeven is de formule $K = 10 + 3 \cdot \ln(2x)$.
- Leg uit dat K geen grenswaarde heeft.
 - Bereken de afgeleide $\frac{dK}{dx}$.
 - Onderzoek met behulp van de grafiek van de afgeleide op welke manier de grafiek van K stijgt.

- 25** Een groeimodel dat de gewichtstoename van courgettes bij

$$\text{benadering weergeeft is } G = \frac{1900}{1,3 + 62 \cdot 0,68^t}$$

Hierin is G het gemiddelde gewicht van courgettes in grammen en t de tijd in weken, gerekend vanaf het moment dat de courgettes een gewicht van ongeveer 30 gram hebben.

- Beredeneer hoe uit de formule volgt dat het gewicht toeneemt.
- Beredeneer met behulp van de formule hoe groot de grenswaarde van het gewicht van courgettes ongeveer is.
- Toon aan dat $\frac{dG}{dt} = \frac{45431 \cdot 0,68^t}{(1,3 + 62 \cdot 0,68^t)^2}$.
- Beredeneer met de afgeleide dat de courgettes eerst steeds sneller en vervolgens steeds langzamer groeien.

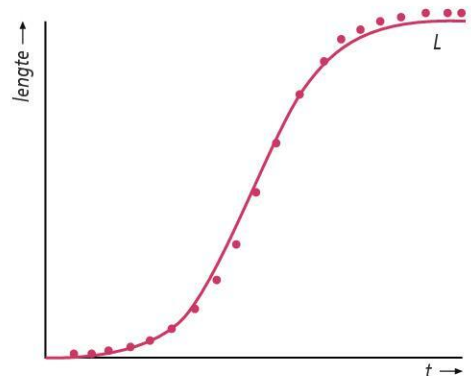


- 26** Bij veel vormen van groei in de economie en in de natuur heeft de bijbehorende grafiek de vorm van een zogeheten S-kromme. In de grafiek is de groei van een zonnebloem weergegeven. Gedurende twintig weken is elke week de lengte gemeten. Het resultaat van deze metingen is in de figuur met stippen weergegeven. In de figuur zie je de grafiek die de groei van deze zonnebloem goed benadert.

Bij die grafiek hoort de formule $L = \frac{400}{1 + 399 \cdot 0,55^t}$,

waarin L de lengte van de zonnebloem in centimeters is en t de tijd in weken vanaf het begin van de metingen.

- In de figuur kun je zien dat L nadert naar een grenswaarde. Beredeneer met behulp van de formule hoe groot deze grenswaarde is.
- Een ander groeiproces wordt beschreven door de formule $G = \frac{540}{4 + 86 \cdot e^{c \cdot t}}$. Beredeneer voor $c > 0$ hoe groot de grenswaarde van G is.
- Beredeneer ook voor $c < 0$ hoe groot de grenswaarde van G is.



X7 Allergie

Hooikoorts is een vervelende allergische aandoening waar veel mensen last van hebben. PharmaCie brengt een nieuw medicijn tegen hooikoorts op de markt. Het nieuwe medicijn van PharmaCie wordt in pilvorm verkocht. Als een patiënt klachten krijgt, neemt hij een pil. De werkzame stof komt dan via de maag en de darm in de bloedbaan terecht. De hoeveelheid werkzame stof in de bloedbaan stijgt eerst en neemt daarna af omdat het door het lichaam wordt afgebroken. De concentratie van de werkzame stof in de bloedbaan noemen we C .

In de figuur zie je een schets van de grafiek van C .

Een onderzoeker van PharmaCie stelt de volgende formule op

die dit verloop redelijk benadert: $C_1 = \frac{16t}{190t^2 + 160}$

Hierin is C_1 de concentratie werkzame stof in mg per cm^3 en t de tijd in uren na het innemen van de pil.

- a** Bereken met behulp van de afgeleide van C_1 na hoeveel minuten, gerekend vanaf het moment dat de pil is ingenomen, de concentratie werkzame stof maximaal is.

Een andere onderzoeker stelt een geheel andere formule op voor het verband tussen de tijd na het innemen van de pil en de concentratie werkzame stof: $C_2 = 0,13(e^{-0,65t} - e^{-3,9t})$.

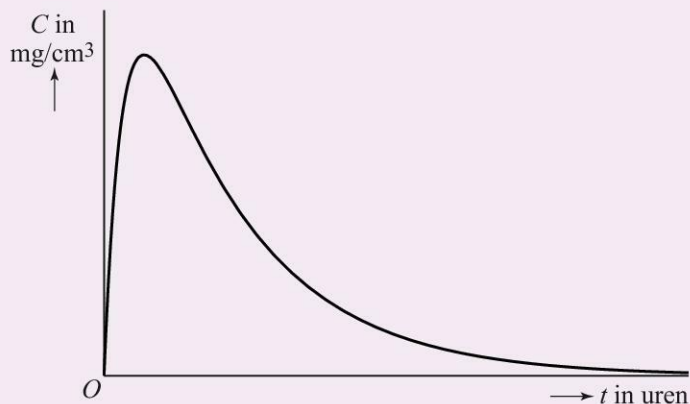
Hierin is C_2 de concentratie werkzame stof in mg per cm^3 en t weer de tijd in uren na het innemen van de pil.

- b** Laat met berekeningen zien dat bij beide formules op het moment van innemen van de pil de concentratie werkzame stof gelijk is aan nul.
- c** Naast $t = 0$ is er nog een waarde van t waarvoor de concentratie werkzame stof bij beide formules dezelfde is. Bereken deze waarde van t . Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

Aan de gegeven schets van de grafiek is te zien dat de werkzame stof na verloop van tijd nagenoeg uit het bloed verdwenen is. Met een redenering kun je aantonen dat elk van beide formules dit proces beschrijft.

- d** Beredeneer aan de hand van de formules van C_1 en C_2 dat de werkzame stof volgens beide formules na verloop van tijd nagenoeg uit het bloed is verdwenen.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2012, tijdvak 1)



- 27** Voor het verband tussen A en t geldt een formule van de vorm

$$A = \frac{c}{1 + k \cdot 1,2^t}$$

Hierin zijn c en k constanten.

- Gegeven is dat de grafiek van A door het punt $(0, 10)$ gaat. Laat zien dat hieruit volgt dat $c = 10(1 + k)$.
- Verder is gegeven dat bij $t = 2$ de waarde $A = 8$ hoort. Welk verband volgt hieruit voor c en k ?
- Bereken in twee decimalen de waarden van c en k .
- Leg met behulp van de formule uit dat de grafiek van A dalend is.
- Hoe groot is de grenswaarde van A ?

- 28** Tussen K en p bestaat een verband met de formule

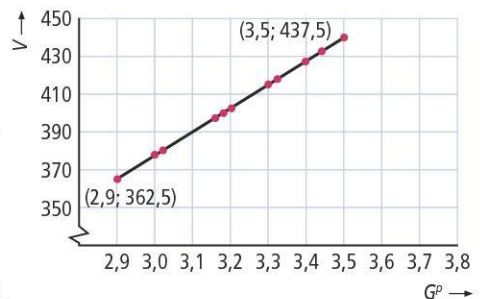
$$K = \frac{15,48p + 10,92}{2,4} - 0,25p + 3,11 - 0,12(2 - 3p).$$

- Toon aan dat het verband tussen K en p lineair is.
- Tussen G en p bestaat een lineair verband met de formule $3p = 5G - 6$. Bereken voor welke waarde van p de waarden van K en G gelijk zijn

- 29** Bij zoogdieren blijkt het hersenvolume V in cm^3 evenredig te zijn met een macht van het lichaamsgewicht G in kg, dus $V = a \cdot G^p$.

De getallen a en p hangen af van het soort zoogdier. In de grafiek is voor 12 volwassen chimpansees het hersenvolume V uitgezet tegen G^p .

- Hoe zie je uit de gegevens in de grafiek dat V recht evenredig is met G^p ?
- Uit de grafiek lees je af: als $G^p = 2,9$, dan is $V = 362,5$. Bereken daarmee de waarde van a in de formule $V = a \cdot G^p$.
- Gebruik de tabel onder de grafiek om de waarde van p te berekenen. Rond af op twee decimalen.
- Voor mensen in de prehistorie geldt $V = 180 \cdot G^{0,25}$. Prehistorische mensen wegen meer dan chimpansees. Er zijn fragmenten gevonden van een heel oude schedel. De schedel is van een volwassen mens of een volwassen chimpansee. Op grond van de fragmenten wordt het hersenvolume geschat op 450 cm^3 . Ga na of de schedel van menselijke herkomst is.



G	31,0	38,5	47,1	56,9
G^p	2,90	3,10	3,30	3,50



- 30** Aan de rand van het dorp Olst in Overijssel is in 2008 het kunstwerk Kantwerk geplaatst van de Belgische kunstenaar Marc de Roover. Het kunstwerk stelt de golvende rivier de IJssel voor. De voorkant van het kunstwerk kan door een sinusöide benaderd worden.

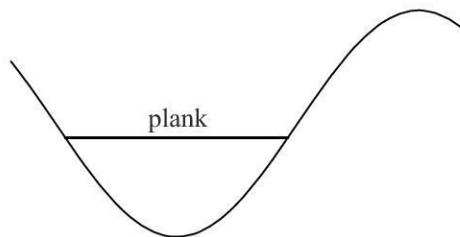
Op de website van de betreffende gemeente is te lezen dat er voor dit kunstwerk 3200 latten zijn gebruikt en dat het een lengte heeft van 100 meter. Telwerk leverde op dat iedere hele periode is opgebouwd uit 60 latten. De uiteindes van de laagste en de hoogste latten liggen respectievelijk 17 cm en 70 cm boven het gras.

Annemarie en Floortje willen een paar mooie foto's voor hun profielwerkstuk maken. Hiervoor willen ze een soort bankje creëren door een plank horizontaal in de golf neer te leggen. Zie de schets in de figuur.

Annemarie neemt hiervoor een plank met een lengte van één meter mee.

Floortje neemt een plank mee met een andere lengte. De zithoogte van het bankje van Floortje komt uit op 50 cm boven het gras.

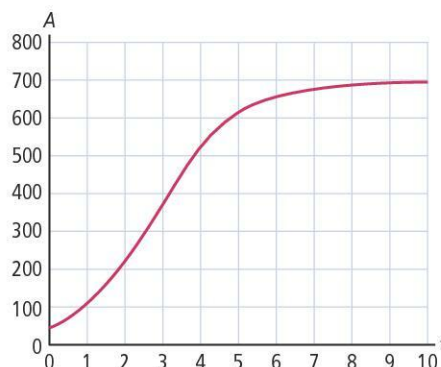
Onderzoek of Annemarie hoger of lager dan Floortje zit.
(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2019, tijdvak 2)



- 31** Veel groeiprocessen verlopen volgens een zogenaamde S-kromme. De grafiek hoort bij een formule van de vorm

$$A = \frac{c}{1 + d \cdot 0,4^t}$$

Onderzoek welke waarden c en d hebben.



Theorie

Lineair verband en lineaire formules

Bij een lineair verband tussen twee variabelen is sprake van een constante toename of constante afname. Een lineair verband kun je op verschillende manieren herkennen.

- De grafiek is een rechte lijn.
- In een tabel is er bij gelijke stappen altijd dezelfde toename.
- Uit de tekst kun je opmaken dat de toename bij gelijke stappen altijd hetzelfde is.

Bestaat tussen de variabelen x en y een lineair verband, dan kun je de bijbehorende formule schrijven als $y = a \cdot x + b$.

Je zegt ook wel dat dit de vergelijking is van de bijbehorende rechte lijn.

Hierbij is a de richtingscoëfficiënt en is b het startgetal.

Voorbeeld

Bij een verband tussen K en t hoort de formule $5K = 1\frac{1}{2} - \frac{7t}{2}$

Toon aan dat het verband lineair is.

Oplossing

Schrijf de gegeven formule in de vorm $K = a \cdot t + b$.

$$5K = 1\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}t$$

$$K = -0,7t + 0,3$$

Dus het verband is lineair.

S1 Herleid de formules tot de vorm $y = a \cdot x + b$.

a $0,2x + 5y = 3(y - 4)$

c $8 - 3x - \frac{1}{4}y = 0$

b $\frac{x}{2y} + 3 = 10$

d $2(4x - 3 + y) = 5 + 3(x - 2)$

S2 Het verband tussen het aantal geproduceerde kopjes q en de fabricagekosten K is lineair. Het produceren van 50 kopjes kost €189,-. Het produceren van 100 kopjes kost €213,-. Hoeveel kost het produceren van 300 kopjes?

Theorie

Recht evenredige en omgekeerd evenredige verbanden

Twee variabelen heten recht evenredig als geldt:

als de ene variabele k keer zo groot wordt, dan wordt de andere variabele ook k keer zo groot.

Zijn de variabelen x en y , dan heet y recht evenredig, of

kortweg evenredig met x . Er geldt $\frac{y}{x} = c$, maar ook $y = c \cdot x$.

Twee variabelen heten omgekeerd evenredig als geldt: als de ene variabele k keer zo groot wordt, dan wordt de andere variabele

k keer zo klein. Zijn de variabelen x en y , dan geldt $x \cdot y = c$

ofwel $y = \frac{c}{x}$ ofwel $x = \frac{c}{y}$

Voorbeeld 1

G	2	5	10	40
W	3	7,5	15	60

G en W zijn recht evenredig want er geldt steeds $W = 1,5 \cdot G$.

De bijbehorende grafiek is een rechte lijn door $(0, 0)$ met richtingscoëfficiënt 1,5.

Voorbeeld 2

a	0,5	1	2	10
k	6	3	1,5	0,3

a en k zijn omgekeerd evenredig want er geldt steeds $a \cdot k = 3$.

Ook geldt $a = \frac{3}{k}$ of $k = \frac{3}{a}$

S3 In de tabellen zijn de variabelen recht evenredig of omgekeerd evenredig.

Vul de open plaatsen in en stel bij iedere tabel een formule op.

x	1,2	...	3	6	54
y	90	72	36	...	...

A

n	1	2	6	30	80
k	...	60	...	4	...

B

p	3	6	8	12
q	27	...	72	...

C

Vaardigheid**Je kunt lineair interpoleren en extrapoleren.**

Interpoleren is een tussengelegen waarde bepalen. Soms kun je een dergelijke waarde uit een gegeven grafiek aflezen. Je kunt zo'n tussengelegen waarde ook berekenen door uit te gaan van een constante toe- of afname. Dit heet lineair interpoleren.

Het vinden van een verder gelegen waarde in een tabel of in een grafiek heet extrapoleren. Je kunt de waarde berekenen door uit te gaan van een verdere constante toe- of afname. Dit heet lineair extrapoleren.

Voorbeeld

In 1990 had de gemeente Almere ongeveer 71 duizend inwoners. In het jaar 2005 was dat aantal toegenomen tot ongeveer 175 duizend inwoners. Schat met lineair interpoleren het aantal inwoners in 1993.

Oplossing

De toename per jaar tussen 1990 en 2005 is $(175 - 71) : 15 = 6,933...$ duizend.

$71 + 3 \times 6,933... = 91,8$

In 1993 had Almere ongeveer 92 duizend inwoners.

S4 In het voorbeeld zie je dat Almere 175 000 inwoners had in 2005. In 2020 had Almere 210 000 inwoners.

- Schat met lineair interpoleren het aantal inwoners van Almere in 2010.
- Schat met lineair extrapoleren het aantal inwoners van Almere in 2026.

Vaardigheid

Je kunt een formule opstellen bij meerdere meetresultaten.

Bij een verband tussen twee grootheden kun je met behulp van meerdere meetresultaten de bijbehorende formule opstellen.

Voorbeeld 1

Stel een exponentiële formule op bij de tabel.

t	2	5	8	11
F	10,0	17,9	32,1	57,5

Oplossing

De groeifactor is $\left(\frac{57,5}{10,0}\right)^{\frac{1}{9}} \approx 1,21$.

Hieruit volgt dat de beginwaarde gelijk is aan

$$10 : 1,21^2 \approx 6,8.$$

Een formule bij de tabel is dus $F = 6,8 \cdot 1,21^t$.

Voorbeeld 2

Bij de tabel past bij benadering een machtsverband met een formule van de vorm $M = c \cdot k^a$.

Bereken c en a .

k	1	4	9	15
M	24	56	92	125

Oplossing

Invullen van $k = 1$ en $M = 24$ geeft $24 = c \cdot 1^a$.

Hieruit volgt $c = 24$ zodat $M = 24 \cdot k^a$.

$k = 15$ en $M = 125$ invullen in $M = 24 \cdot k^a$ geeft

$$125 = 24 \cdot 15^a.$$

$$15^a = \frac{125}{24} \approx 5,2083$$

$$a = {}^{15}\log(5,2083) \approx 0,61$$

Dus $a \approx 0,61$ en $c = 24$.

- S5** In de tabel staat voor enkele planeten de afstand tot de zon A in miljoenen kilometers en de omwentelingstijd rond de zon T in dagen.

Het verband tussen T en A voldoet aan een formule van de vorm $T = 0,2 \cdot A^p$.

planeet	A	T
Jupiter	778	4 329
Saturnus	1427	10 753
Uranus	2870	30 660
Neptunus	4497	60 150
Pluto	5907	90 670

- Bereken de waarde van p in één decimaal.
- Bereken met de formule de afstand van de aarde tot de zon.
- Hoeveel keer zo groot wordt T als A twee keer zo groot wordt?



Vaardigheid

Je kunt redeneren met formules en grafieken.

Door na te gaan hoe een formule is opgebouwd, kun je beredeneren of de uitkomsten van de formule een grenswaarde naderen.

Om vast te stellen hoe de functiewaarden toe- of afnemen kun je kijken naar de afgeleide.

Als de afgeleide positief is, dan stijgt de grafiek van de functie.

Als de afgeleide negatief is, dan daalt de grafiek van de functie.

Als afgeleide naar nul nadert, heb je te maken met een afnemende stijging of daling.

Als de afgeleide steeds verder weg van nul gaat, heb je te maken met een toenemende stijging of daling.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $K = 2 + {}^3\log(A + 4)$ voor $A \geq 0$.

Beredeneer of K naar een grenswaarde nadert en op welke manier de grafiek stijgt of daalt.

Oplossing

Als A groter wordt, dan wordt ${}^3\log(A + 4)$ ook groter. De uitkomsten van de formule blijven ook stijgen en dus heeft K geen grenswaarde.

De afgeleide is $\frac{dK}{dA} = \frac{1}{\ln(3)} \cdot \frac{1}{A + 4} = \frac{1}{\ln(3) \cdot (A + 4)}$ ofwel $\frac{dK}{dA} \approx \frac{1}{1,1 \cdot (A + 4)}$

Voor $A \geq 0$ is $1,1(A + 4) > 0$. De teller en de noemer zijn positief, dus de breuk is ook positief.

Als A toeneemt, dan neemt $1,1(A + 4)$ ook toe. De breuk neemt dan af.

$\frac{dK}{dA} = \frac{1}{1,1 \cdot (A + 4)}$ is positief en neemt af, dus de grafiek van K is afnemend stijgend.

- S6** Beredeneer of de waarde van K toeneemt of afneemt en naar welke grenswaarde K nadert.

a $K = \frac{20}{2x + 1} - 3,2$ voor $x \geq 0$

b $K = \frac{9}{45 - 12 \cdot 0,85^t}$ voor $t \geq 0$

- S7** Gegeven is de formule $A = \frac{3}{(2k + 1)^2}$ voor $k \geq 0$.

a Beredeneer naar welke grenswaarde A nadert.

b Toon aan dat $\frac{dA}{dk} = \frac{-12}{(2k + 1)^3}$

c Gebruik de afgeleide om te beredeneren op welke manier de grafiek van A stijgt of daalt.

T1



De grafiek hoort bij het verband tussen het gemiddelde gewicht en de leeftijd van kinderen tot vijf jaar. Vanaf een leeftijd van twee jaar is het verband bij benadering lineair. Bereken met lineair extrapoleren het gemiddelde gewicht van een kind van 6 jaar.

T2

De overlevingskans van personen die te water raken, is onder andere afhankelijk van de watertemperatuur. In de tabel staan watertemperaturen met de bijbehorende overlevingstijden.

watertemperatuur T in $^{\circ}\text{C}$	5	10	15	20
overlevingstijd Z in uren	0,5	1,0	2,0	4,0

- Waarom kun je de overlevingstijd bij 17°C niet berekenen met lineair interpoleren?
- Ga voor $5,0 \leq T \leq 20$ uit van een exponentieel verband tussen T en Z .
Bereken de overlevingstijd van iemand in water van 17°C .
Geef je antwoord in uren op één decimaal nauwkeurig.

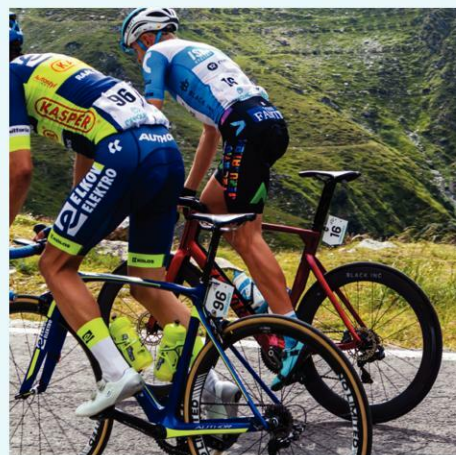
T3

Er wordt een tijdrit van 36 km gehouden voor amateur wielrenners.

- Maarten wint deze tijdrit met een gemiddelde snelheid van 45 km per uur.
Hoelang doet hij over de tijdrit?
- De gemiddelde snelheid in km per uur over deze tijdrit is v en t is de tijd in uren die de wielrenner nodig had.
Leg uit dat tussen v en t een omgekeerd evenredig verband bestaat en stel een bijbehorende formule op.
- Nico fietst met een gemiddelde snelheid die $\frac{2}{3}$ keer zo groot is als die van Maarten.
Hoeveel keer zo veel tijd als Maarten heeft Nico nodig?

T4 Om na te gaan of een wielrenner een bepaalde snelheid kan halen, kijkt men naar het vermogen van de wielrenner. Het vermogen is de energie die de wielrenner per seconde levert. Men gebruikt vaak de formule $P = (k \cdot v^2 + 4) \cdot v$. Hierin is v de snelheid in meters per seconde, is P het vermogen in watt en is k een getal dat per wielrenner kan verschillen.

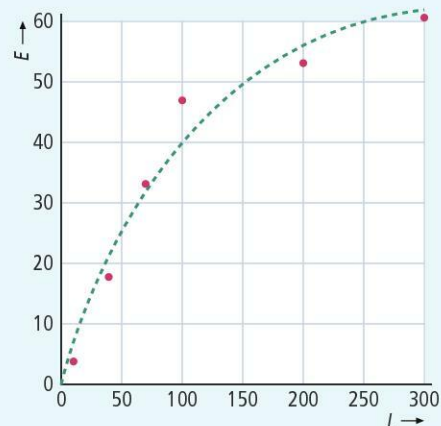
- Daan is wielrenner en hij weet dat hij een vermogen kan leveren van 190 watt en daarmee op zijn huidige fiets een snelheid van 9,2 meter per seconde kan halen. Leid uit de gegevens af dat bij hem geldt dat $k \approx 0,2$.
- Leg met behulp van de formule uit wat het effect van een kleinere k -waarde is op het te leveren vermogen om een bepaalde snelheid te halen.
- Met behulp van training kan Daan zijn vermogen verhogen tot 250 watt. Daarbij blijft $k \approx 0,2$. Bereken welke snelheid in km per uur hij kan halen.
- Met behulp van een nieuwe fiets en nieuwe fietskleding kan Daan zijn k -waarde met 25% verlagen. Onderzoek met hoeveel procent zijn maximaal haalbare snelheid toeneemt bij een vermogen van 250 watt.



T5 Larven die grote schade toebrengen aan gewassen kunnen milieuvriendelijk bestreden worden met sluipwespen. Een sluipwesp legt een eitje in de larve waardoor de larve uiteindelijk dood gaat. Een onderzoeker wilde weten hoeveel larven één sluipwesp maximaal per dag kan bestrijden. Om dit te onderzoeken werd één sluipwesp in een grote afgesloten ruimte met larven gezet. Na een dag werd geteld hoeveel larven er in totaal in de ruimte waren. Dit aantal noem je L . Ook werd geteld hoeveel larven een eitje bevatten. Dit aantal noem je E . Het experiment werd zes maal uitgevoerd. De resultaten (stippen) zie je in de figuur. Bij 100 larven blijken er 46 te zijn met een eitje.

- Hoe kun je in de figuur zien dat het verband tussen E en L voor de waarden van L van 0 tot 100 recht evenredig is?
- Geef een formule voor het verband tussen E en L voor de waarden van L van 0 tot 100.
- Het verband tussen E en L wordt voor grotere waarden van L beter benaderd door de formule $E = 64 \cdot (1 - 0,6^{0,02L})$. Hoeveel procent wijkt het aantal volgens deze formule bij $L = 100$ af van het werkelijke aantal?
- Beredeneer met behulp van de formule hoe groot de grenswaarde van het aantal larven met een eitje is.

(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2009, tijdvak 2)



Hoe oud zijn historische vondsten?

In 1940 werd in een grot bij de plaats Lascaux in het Franse departement Dordogne een groot aantal rotswandschilderingen ontdekt, een ervan zie je hiernaast. Vlak na de vondst maakten archeologen een ruwe schatting dat de tekeningen 10000 tot 20000 jaar oud waren. Er ontstond behoefte aan een methode waarmee de ouderdom van opgegraven voorwerpen en beenderen nauwkeuriger kon worden bepaald. Dat werd de C14-dateringsmethode.

C14 is een radioactieve variant van koolstof dat ieder levend organisme bevat. Nadat het organisme is doodgegaan, daalt de hoeveelheid C14 langzaam door radioactief verval. Na ongeveer 5730 jaar is er nog 50% van de oorspronkelijke hoeveelheid C14 over.

Opdracht

Je mag aannemen dat radioactief verval exponentieel verloopt. Als de halveringstijd gelijk is aan 5730 jaar, dan geldt $g^{5730} = \frac{1}{2}$ met g de groeifactor per jaar.

Ga na dat $g \approx 0,99988$.

In 1950 is gemeten dat in een van de houtskoollijnen van de tekeningen nog 14,5% van de hoeveelheid C14 aanwezig was. Bereken hoe oud de tekening toen was.



Onbekende Da Vinci gevonden

In 2010 is in een Zwitserse bankkluis een schilderij (rechter afbeelding) opgedoken dat mogelijk door Leonardo da Vinci (1452 - 1519) is gemaakt.

Het is een portret van markiezin Isabella d'Este, die als begunstiger van de vrije kunsten een hoofdrolspeelster is in de Renaissance. In het Louvre hangt een tekening uit 1499 van deze dame (linker afbeelding) en er zijn brieven bekend waarin D'Este vraagt om een geschilderd portret.

De vraag is: Heeft Da Vinci het portret geschilderd? De argumenten hiervoor zijn: het gebruikte pigment is hetzelfde als dat in ander werk van Leonardo, precies volgens recept dat Leonardo in zijn Traktaat van de schilderkunst voorschrijft. Toch is er twijfel. Het belangrijkste argument tegen: het is op doek, terwijl alle nog bekende werken van Leonardo geschilderd zijn op hout.



Opdracht

Er is gemeten dat de aanwezige hoeveelheid C14 ligt tussen 93,56% en 95,73%.

- Bereken hoe oud het schilderij is.
- Kan het schilderij toegeschreven worden aan Leonardo da Vinci?

Vaardigheden 11

SE

CE

K

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Logaritmische en exponentiële formules
- Differentiëren
- Rijen
- Systematisch tellen



Logaritmische en exponentiële formules

1 Schrijf als één logaritme.

- a $3 + {}^2\log(5)$
- b $2 \cdot {}^3\log(x) + {}^3\log(x-1)$
- c $2 \cdot {}^6\log(2x) - {}^6\log(4x) + 1$
- d $\log(100x + 200) - \log(x + 2)$

$${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$$

$${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$${}^g\log(a^p) = p \cdot {}^g\log(a)$$

Uit ${}^g\log(a) = b$ volgt $a = g^b$
en omgekeerd.

- 2 a Laat zien dat de formule $u = 0,5 \cdot 3^p$ te herleiden is tot $p = {}^3\log(2u)$.
- b Laat zien dat de formule $p = {}^{0,65}\log\left(\frac{1-u}{2}\right)$ te herleiden is tot $u = 1 - 2 \cdot 0,65^p$.
- c Gegeven is de formule $p = {}^{1,2}\log(10u - 250)$.
Druk u uit in p .

3 Druk t uit in N .

- a $N = \frac{3}{1 + 2^t}$
- b $N = \frac{24}{2 + 0,5 \cdot 3^t}$

4 Gegeven is de formule $P = 8K + {}^2\log(W) + 40$.

- a Neem $W = 1024$ en druk K uit in P .
- b Neem $K = 25$ en druk W uit in P .
- c Neem $P = 50$ en druk W uit in K .

5 Gegeven is de formule $L = \frac{300}{1 + 299 \cdot 0,65^t}$

- a Leg uit waarom $0,65^t$ naar 0 nadert als de waarde van t steeds groter wordt.
- b Ga na tot welke waarde $1 + 299 \cdot 0,65^t$ op den duur nadert.
- c Bereken hoe groot de grenswaarde van L is.

6 Bereken hoe groot de grenswaarde is.

- a $U = 3 + 21 \cdot 0,43^p$
- b $G = \frac{14}{2 + 3 \cdot {}^{0,5}\log(x)}$
- c $H = 13,2(3 + 0,81^{2p})$
- d $F = 2 + 0,6^{\frac{1}{L}}$

- 7** Vliegtuigen veroorzaken in de buurt van vliegvelden veel geluidsoverlast. De geluidsbelasting B (de hoeveelheid geluid) op een plaats in de buurt van een vliegveld hangt af van het aantal vliegtuigen N dat per jaar passeert en van het gemiddelde geluidsniveau per vliegtuig L . Voor het verband tussen L , N en B geldt de formule $B = 20 \cdot \log(N) + \frac{4}{3}L - 157$.
- In een bepaald jaar is het gemiddelde geluidsniveau per vliegtuig gelijk aan 76 en de geluidsbelasting op een plek in de buurt van een vliegveld 53,3.
Bereken het aantal vliegtuigen dat in dat jaar deze plek passeert.
 - Stel dat het aantal vliegtuigen dat passeert, verdubbelt en dat het gemiddelde geluidsniveau per vliegtuig gelijk blijft.
Met hoeveel neemt B toe als N verdubbelt?
 - Voor $B = 53,3$ is het verband tussen B en L gegeven door de formule $53,3 = 20 \cdot \log(N) + \frac{4}{3}L - 157$.
Druk L uit in N .
 - Vanwege een milieuwetgeving is de maximale geluidsbelasting gelijk aan 45.
Het maximaal toegestane aantal vliegtuigen bij deze geluidsbelasting is afhankelijk van het gemiddelde geluidsniveau per vliegtuig.
Laat zien dat voor het verband tussen N en L de formule $N = 1,259 \cdot 10^{10} \cdot 0,858^L$ geldt.
 - Door technologische ontwikkelingen neemt het gemiddelde geluidsniveau per vliegtuig in 20 jaar tijd af van 76 naar 70.
Bereken hoeveel vliegtuigen er méér mogen vliegen bij een gelijkblijvende geluidsbelasting van $B = 45$.
- (Ontleend aan CE vwo wiskunde A12 2003, tijdvak 2)

Differentiëren

Theorie

Dit overzicht van de formules die je kunt gebruiken bij het differentiëren, staat ook op een pagina Formules van het Centraal Examen.

naam van de regel	functie	afgeleide
somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
quotiëntregel	$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ of $\frac{dk}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$

- 8** Gegeven is de functie $f(x) = 4\sqrt{x} - \frac{1}{2}x$.
- Bereken de gemiddelde toename van f als x toeneemt van $x = 1$ tot $x = 4$.
 - Bereken het differentiequotient $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ over het interval $[0, 1]$.
 - Bepaal het functievoorschrift van $f'(x)$.
 - Beredeneer met behulp van de afgeleide dat de grafiek van f dalend is voor $x > 16$.

- 9** Differentieer en vereenvoudig je antwoord.

- | | |
|---|---|
| a $f(x) = 0,64x^{2,75} - 3,75x^{0,12}$ | e $h(x) = (2x^2 + 7x - 4)(5 - 3x)$ |
| b $g(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2}$ | f $l(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{3x + 7}$ |
| c $k(x) = (3x^2 - 5)^4$ | g $j(x) = (x^2 - 3x) \cdot \sqrt{x}$ |
| d $q(x) = 8 + 3 \cdot e^{4x}$ | h $w(x) = 10^{-x} + 10^{2x}$ |

- 10** **a** Differentieer de functie $g(x) = (2x - 1) \ln(x)$.

- b** Gegeven is de formule $y = \log(x) + 3$.

Stel een formule op voor $\frac{dy}{dx}$

- c** Gegeven is de formule $P = \frac{15,6}{G} - 22,8$.

Stel een formule op voor $\frac{dP}{dG}$

- 11** De directie van een vervoersmaatschappij heeft onderzoek laten doen naar het verband tussen de jaarlijkse winst en het aantal passagiers. Voor de gemiddelde winst GW in euro's per passagier kan het volgende model worden gebruikt:

$GW = -0,125q + 10 - \frac{150}{q}$. Hierin is q het aantal passagiers in miljoenen per jaar. De formule geldt voor $10 \leq q \leq 50$.

- In 2015 werden 25 miljoen passagiers vervoerd. Bereken de gemiddelde winst per passagier in 2015.
- Bereken ook de totale winst in 2015.
- Toon aan dat je met de formule $TW = -0,125q^2 + 10q - 150$ de totale winst in miljoenen euro's in een jaar kunt berekenen.
- Bereken bij welk aantal passagiers de maximale totale winst wordt bereikt. Hoe groot is die maximale winst?

Rijen

- 12** Op de foto zie je een amfitheater. Het theater heeft 58 oplopende rijen voor toeschouwers. De bovenste rij heeft plaats voor 456 toeschouwers. Op elke volgende rij is het aantal zitplaatsen telkens 6 minder.
- Bereken het aantal zitplaatsen op de onderste rij.
 - Ga met een berekening na of er in dit theater plaats is voor 16000 mensen.



- 13** Abe is een fanatieke hardloper. Voor de sponsorloop die zijn school organiseert om geld in te zamelen voor een goed doel, heeft hij een schema gemaakt. Hij gaat ervan uit dat hij rustig begint en elke ronde steeds 2 seconden sneller loopt dan de voorgaande ronde. De eerste ronde loopt hij in 150 seconden, over de tweede ronde doet hij dus 148 seconden, enzovoort. De rondetijden voldoen aan de formule $t(n) = 152 - 2n$. Hierin is $t(n)$ de tijd in seconden voor ronde n . De totale tijd $T(n)$ die Abe over n ronden doet, voldoet aan de formule $T(n) = 151n - n^2$.
- Toon aan dat de formule voor $T(n)$ juist is.
 - De sponsorloop duurt 30 minuten.
Bereken hoeveel volledige ronden Abe in die tijd kan afleggen.
 - Abe wordt gesponsord door zijn ouders. Voor zijn eerste ronde geven zij slechts 0,01 euro, maar elke volgende ronde geven zij twee keer zo veel als voor de voorgaande ronde. Het bedrag in euro's dat hij krijgt in de n -de ronde, kun je berekenen met de formule $b_n = 0,005 \cdot 2^n$.
Toon aan dat de formule voor b_n juist is.
 - Hoeveel euro betalen zijn ouders als Abe na 10 ronden stopt?
- 14** Aan het einde van elke maand moet een drogisterijketen tandpasta inkopen bij de groothandel. Om een schatting te maken van het aantal in te kopen tubes wordt het volgende model gebruikt: neem het gemiddelde van de verkoop in de twee voorgaande maanden.
- In januari zijn 5200 tubes verkocht en in februari 4000 tubes.
Bereken hoeveel tubes tandpasta in maart worden ingekocht.
 - Als je aanneemt dat de schatting steeds de werkelijke verkoop in die maand is, kun je met dit model ook de verkoop van de volgende maanden uitrekenen. In een formule: $V(n+2) = \frac{1}{2} V(n+1) + \frac{1}{2} V(n)$ met $V(0) = 5200$ en $V(1) = 4000$. Hierin is $V(n)$ het aantal verkochte tubes tandpasta n maanden na januari.
Bereken hoeveel tubes tandpasta volgens dit model in juli worden verkocht.
 - Als je met dit model een groot aantal maanden doorrekent, verandert het aantal tubes tandpasta niet meer.
Bereken na hoeveel maanden dit voor het eerst het geval is.

Systematisch tellen

- 15** In Nederland zijn ongeveer 24,7 miljoen bankpassen in omloop. Elke bankpas is beveiligd met een pincode bestaande uit vier cijfers, elk te kiezen uit 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9. Daarbij mag een cijfer vaker voorkomen.

- Hoeveel verschillende pincodes bestaan er?
- Ga ervan uit dat alle pincodes even vaak voorkomen. Hoeveel bankpassen hebben naar verwachting dezelfde pincode als jouw bankpas?
- Tom is zijn pincode vergeten. Hij weet nog wel dat er één 4 en het cijfer 6 in voorkomen. Bij de bank heeft hij drie pogingen om zijn pincode in te toetsen. Indien de code de derde keer weer fout is, wordt zijn pas geblokkeerd. Heeft Tom genoeg mogelijkheden om er zeker van te zijn dat zijn pas niet geblokkeerd wordt?
- Hoeveel pincodes kun je maken met de cijfers 2 en 5 als die er allebei in moeten voorkomen?



Theorie

Je kunt op verschillende manieren een telprobleem oplossen.

- door alle mogelijkheden systematisch uit te schrijven of
- door gebruik te maken van een (deel van) een boomdiagram, een rooster, een wegendiagram, schema of tabel.

Soms moet je deelresultaten combineren.

- 16** Een gezelschap van vier mannen en vier vrouwen heeft zojuist met elkaar gedineerd. Nu moeten drie personen aangewezen worden die de afwas zullen doen.

Bereken het aantal mogelijke drietallen met twee mannen en één vrouw.

- 17** Je gooit met een viervlaksdobbelsteen (1 tot en met 4) en een zesvlaksdobbelsteen (1 tot en met 6). Je noteert de som van de aantallen ogen.

- Op hoeveel manieren kun je het resultaat 8 krijgen?
- Om de uitkomsten te noteren kun je gebruikmaken van een schema. Het schema is al voor een deel ingevuld. Hoeveel uitkomsten hebben als resultaat 5 of groter?
- Stel je berekent het verschil tussen de aantallen ogen die je gegooit hebt. Daarbij trek je het kleinste aantal van het grootste aantal af. Bij een gelijk aantal ogen is het verschil 0. Welk verschil komt het meest voor? En welk verschil het minst?

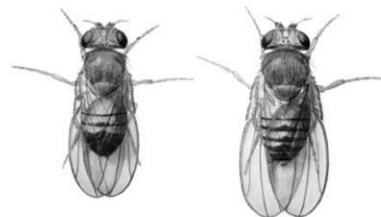
	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	..	..	..
4	..	..	..	..
5	..	..	..	..
6	..	..	..	..

- 18** Je gooit met een rode, een gele en een zwarte (gewone) dobbelsteen en telt de aantallen ogen bij elkaar op. Beredeneer op hoeveel verschillende manieren je het resultaat 15 kunt krijgen.

- 19** Een pas onafhankelijk geworden land moet een vlag kiezen. De vlag bestaat uit drie horizontale banen, die elk een kleur krijgen. Daarbij kan gekozen worden uit de kleuren geel, blauw en zwart. Twee banen met dezelfde kleur mogen niet aan elkaar grenzen.
Bereken hoeveel verschillende vlaggen mogelijk zijn.



- 20** Bij praktische opdrachten voor het vak biologie over kruisingen wordt vaak gebruik gemaakt van fruitvliegjes (*Drosophila melanogaster*). Deze fruitvliegjes zijn namelijk makkelijk te kweken en de ontwikkeling van ei tot fruitvliegje duurt maar negen dagen. Men kan dus in zeer korte tijd veel generaties kweken. Bovendien is een aantal eigenschappen van fruitvliegjes goed zichtbaar: oogkleur (rood/zwart), vleugelvorm (kort/lang) en huidskleur (donker/geel). Een fruitvliegje met zwarte oogkleur, korte vleugels en een gele huidskleur wordt getypeerd als: z-k-g.



- Leg uit dat er op basis van deze eigenschappen acht typen mannetjes en acht typen vrouwtjes zijn.
- Voor een kruisingsexperiment moeten vier fruitvliegjes, twee mannelijke en twee vrouwelijke, in een kweekruimte worden geplaatst. Hierbij gelden twee eisen:
 - De twee mannelijke fruitvliegjes mogen niet van hetzelfde type zijn.
 - De twee vrouwelijke fruitvliegjes mogen niet van hetzelfde type zijn.

Bereken hoeveel verschillende samenstellingen in de kweekruimte mogelijk zijn.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2012, tijdvak 2)

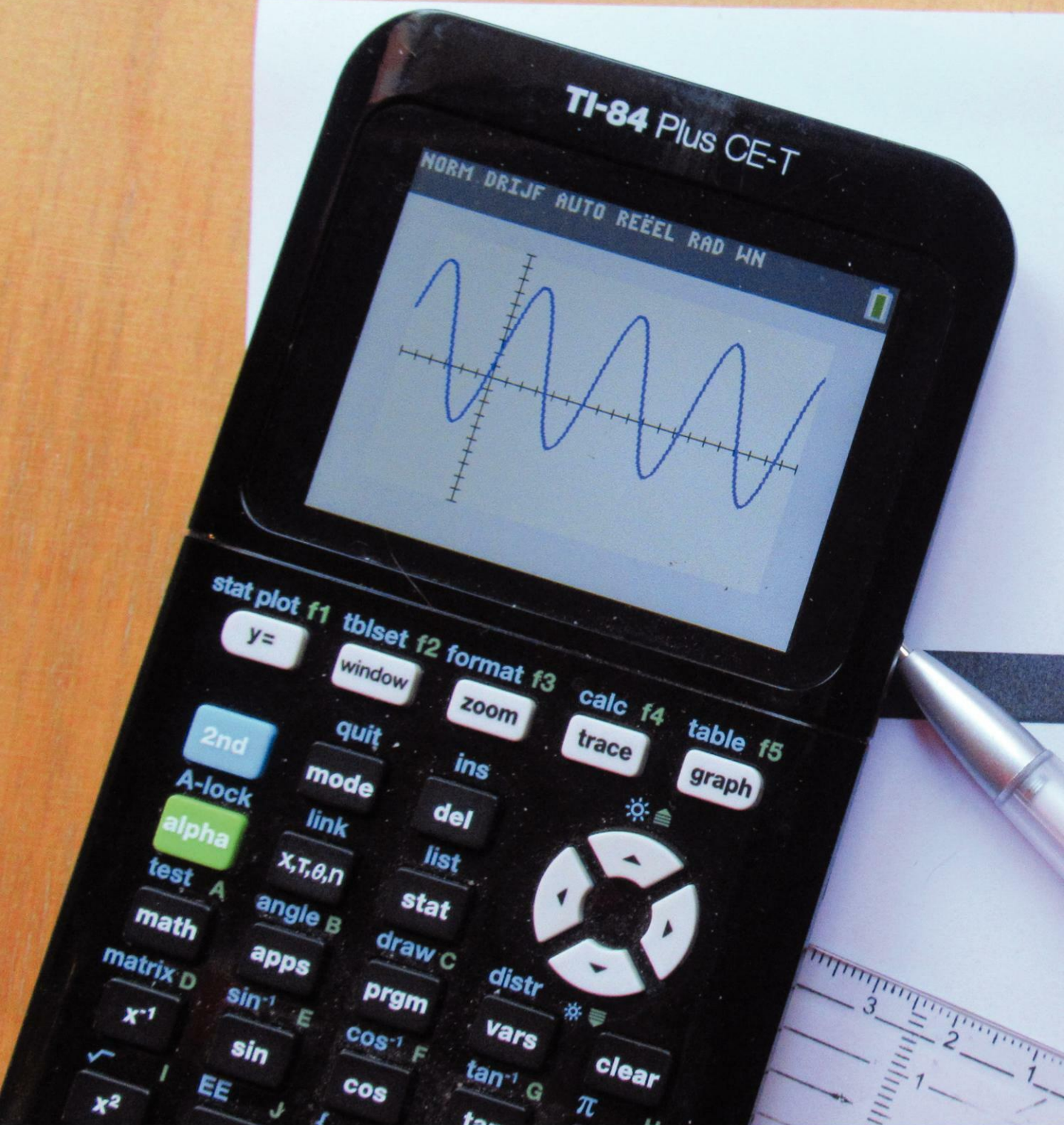
- 21** Een planoloog wil graag weten op grond van welke eigenschappen de bewoners de straten van hun wijk beoordelen. Als onderdeel van zijn onderzoek legt hij een aantal proefpersonen groepjes van drie straten voor. Hij vraagt hen bij elk groepje aan te wijzen welke twee van de drie straten het meest op elkaar lijken. Het onderzoek heeft betrekking op 10 straten, voor het gemak A, B, C, D, E, F, G, H, K, L genoemd. Hieruit worden alle mogelijke groepjes van drie gevormd en elk groepje wordt in alfabetische volgorde op een kaartje geschreven. Hiernaast zie je drie voorbeelden.

D	D	A
F	H	C
G	K	D

- Bereken hoeveel kaartjes er nodig zijn.
- Op hoeveel kaartjes komt straat A voor?
- Op hoeveel kaartjes komen de straten A en B samen voor?
- Een proefpersoon is bereid om bij alle kaartjes zijn keuze van twee straten te maken.

Onderzoek of het mogelijk is dat hij 7 keer voor de straten AB, 7 keer voor de straten AC en 7 keer voor de straten AD kiest.

(Ontleend aan CE havo wiskunde A 1990, tijdvak 1)



Examenvorbereiding

SE

CE

K

In dit hoofdstuk vind je een overzicht van de stof voor het examen wiskunde A. In elke paragraaf komt een aantal onderwerpen aan bod, telkens gevolgd door een of meerdere korte oefeningen. Elke paragraaf sluit af met examenopdrachten die aansluiten op de stof in de paragraaf. Vaak betreft het een deel van een opdracht uit een examen. Op het examen gaat een opdracht meestal over meerdere onderwerpen.

Bij elke examenopdracht staat de verwijzing naar een hint. De lijst met hints staat aan het eind van dit blok examenvorbereiding. Gebruik een hint alleen als je niet weet hoe je de opdracht moet beginnen.

- Hoe goed ben jij voorbereid op het examen?

2019

tijdvak 1
maandag 20 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A

WISKUNDE

Breuken

Je kunt breuken optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en vereenvoudigen. Ook kun je een deel van een hoeveelheid uitrekenen en een hoeveelheid in een verhouding verdelen.

1 Bereken en vereenvoudig.

a $\frac{7}{9b} \times \frac{3a}{5}$

c $\frac{13}{28} + \frac{6}{7}$

b $\frac{2a}{9} - \frac{8a}{27}$

d $\frac{18 - 12a}{6}$

2 Bereken.

a $\frac{6}{25}$ deel van 650

c $\frac{13}{125}$ deel van 50 000

b $\frac{4}{9}$ deel van 81 000

d $\frac{2}{17}$ deel van 8585

Voorbeeld

$$\frac{4}{7} + \frac{1}{2} = \frac{8}{14} + \frac{7}{14} = \frac{15}{14} = 1\frac{1}{14}$$

$$\frac{3}{8} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$$

$$\frac{2p}{5} - \frac{3p}{10} = \frac{4p}{10} - \frac{3p}{10} = \frac{p}{10}$$

$$\frac{24a + 14}{6} = \frac{24a}{6} + \frac{14}{6} = 4a + 2\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{7} \text{ deel van } 924 \text{ is } 924 : 7 = 132$$

$$\frac{6}{7} \text{ deel van } 924 \text{ is } 6 \times 132 = 792$$

Procenten en verhoudingen

Bij het rekenen met verhoudingen kun je een verhoudingstabel gebruiken. Verhoudingen kom je onder andere tegen bij relatieve aantallen, procenten en schaal.

Voorbeeld 1

Op een school zijn 42 docenten ouder dan 55 jaar, dat is 35% van alle docenten op die school. Hoeveel docenten werken er op die school?

Oplossing

aantal docenten	42	?
percentage	35	100

$$42 \times 100 = 35 \times ?$$

$$? = 42 \times 100 : 35 = 120$$

Er werken 120 docenten op die school.

Voorbeeld 2

Het aantal leden van een sportclub is met 28 afgenomen tot 724. Hoeveel procent is het ledenaantal afgenomen?

Oplossing

Voor de afname had de club $724 + 28 = 752$ leden.

aantal leden	752	28
percentage	100	?

$$28 \times 100 = 752 \times ?$$

$$? = 28 \times 100 : 752 \approx 3,7$$

Het ledenaantal is met 3,7 % afgenomen.

- 3
- a Van een bevolking is 24% jonger dan 25 jaar, dat zijn 1,35 miljoen mensen. Bereken hoe groot de totale bevolking is.
 - b De waarde van een aandeel is in een dag gestegen met 5% tot € 10,07. Bereken de waarde van het aandeel een dag eerder.
 - c Verdeel € 350,- in een verhouding 3 : 4.
 - d De verhouding jongens: meisjes in een klas met 27 leerlingen is 5 : 4. Bereken het aantal meisjes.

Bij een verhouding 3 : 4 neem je $\frac{3}{7}$ deel en $\frac{4}{7}$ deel

Tijden

Voor het weergeven van tijden gebruik je een aparte notatie. Zo betekent 3.14,6 minuten 3 minuten en 14,6 seconden. Je noteert dit ook wel als 3:14,6 minuten. 3.14.25 uur betekent 3 uur, 14 minuten en 25 seconden. Voor het berekenen van een gemiddelde snelheid reken je de totale tijd eerst om naar uren, minuten of seconden. Vervolgens gebruik je een verhoudingstabel.

Voorbeeld

Merlijn fietst 45 km in 2:15:24 uur.
Bereken zijn gemiddelde snelheid in meters per seconde.

Oplossing

2:15:24 uur is $2 \times 3600 + 15 \times 60 + 24 = 8124$ seconden.

<i>afstand</i> in meters	45 000	?
<i>tijd</i> in seconden	8124	1

$45000 \times 1 : 8124 = 5,53\dots$

Zijn gemiddelde snelheid is ongeveer 5,5 meter per seconde.

- 4 a Karl loopt een marathon in 2.45.21 uur. Een marathon is 42 km en 195 m.
Bereken zijn gemiddelde snelheid in meters per seconde.
- b Geef de snelheid van Karl ook in km per uur.
- c José rijdt elke dag 43,6 km naar haar werk. Zonder files rijdt ze die afstand met een gemiddelde snelheid van 82,5 km per uur.
Hoeveel minuten is ze onderweg?

Eenheden

Bij het maken van opdrachten moet je goed op de eenheden letten. Bij een formule moet worden aangegeven voor welke eenheden die formule geldt. Soms moet je bij opdrachten de gegevens eerst omrekenen naar andere eenheden.

- 5 Om het water in een vijver mooi helder te krijgen kun je een middel tegen algen gebruiken. Op de verpakking hiervan staat: 'Een week lang dagelijks 5 mL per m³ aan het water toevoegen'. Het gewicht van 1 mL is 1 gram. Een vijver is 5 meter lang, 3 meter breed en 50 cm diep.
- a Hoeveel liter is de inhoud van de vijver?
- b Hoeveel kg van het middel tegen de algen heb je nodig?
- c Het middel tegen algen wordt verkocht in flessen met een inhoud van een halve liter.
Hoeveel flessen heb je nodig?

$$\begin{aligned}1 \text{ m} &= 10 \text{ dm} = 100 \text{ cm} = 1000 \text{ mm} \\1 \text{ m}^2 &= 100 \text{ dm}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2 \\1 \text{ m}^3 &= 1000 \text{ dm}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3 \\1 \text{ dm}^3 &= 1 \text{ liter} = 100 \text{ cL} = 1000 \text{ mL} \\1 \text{ kg} &= 1000 \text{ gram} = 1\,000\,000 \text{ mg}\end{aligned}$$

Examenopdrachten

6 Zonnepanelen

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A pilot 2017, tijdvak 1)

Veel mensen denken erover om zonnepanelen aan te schaffen.

Bedrijven spelen daarop in en geven daar allerlei informatie over op hun websites.

In deze opdracht gaan we uit van een vaste elektriciteitsprijs van €0,225 per kWh.

In de tabel zie je een overzicht van de prijs en opbrengst van verschillende zonnepaneelsystemen van een bedrijf.

<i>aantal panelen</i>	8	12	18
<i>aanschafprijs van het systeem</i>	€ 4.699,-	€ 6.299,-	€ 8.599,-
<i>verwachte elektriciteitsopbrengst (kWh per jaar)</i>	1667	2500	3750

In 2013 kon men bij de aanschaf van zonnepanelen een overheidssubsidie krijgen. Deze overheidssubsidie bedroeg 15% van de aanschafprijs en bedroeg maximaal €650,-. Deze subsidie is nog niet verwerkt in de prijzen van de tabel.

De terugverdientijd is de periode die het duurt tot het aankoopbedrag van het systeem is terugverdiend via besparing op de elektriciteitskosten. In het begin van 2013 schafte iemand het systeem van 12 zonnepanelen aan met overheidssubsidie.

Bereken, uitgaande van de verwachte elektriciteitsopbrengst, in welk jaar het aankoopbedrag volledig is terugverdiend.

Hint 1

7 Continu Vakantie Onderzoek

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2019, tijdvak 2)

Het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) doet sinds 1990 jaarlijks onderzoek naar het vakantiegedrag van Nederlanders. Dit onderzoek wordt het Continu Vakantie Onderzoek (CVO) genoemd. Bij dit onderzoek gaat het CBS niet uit van alle Nederlanders. Mensen die niet op vakantie kunnen doordat ze bijvoorbeeld in een instelling zitten, doen niet mee in het onderzoek. De onderzochte populatie wordt de CVO-populatie genoemd.

Deze is dus kleiner dan de hele Nederlandse populatie.

Uit het CVO blijkt dat 80,7% van de CVO-populatie in 2016 ten minste één keer op vakantie is geweest. Deze 80,7% ging maar liefst 35,5 miljoen keer op vakantie: een gemiddelde van 2,78 vakanties per persoon. Met behulp van deze gegevens is de omvang van de CVO-populatie in 2016 te berekenen.

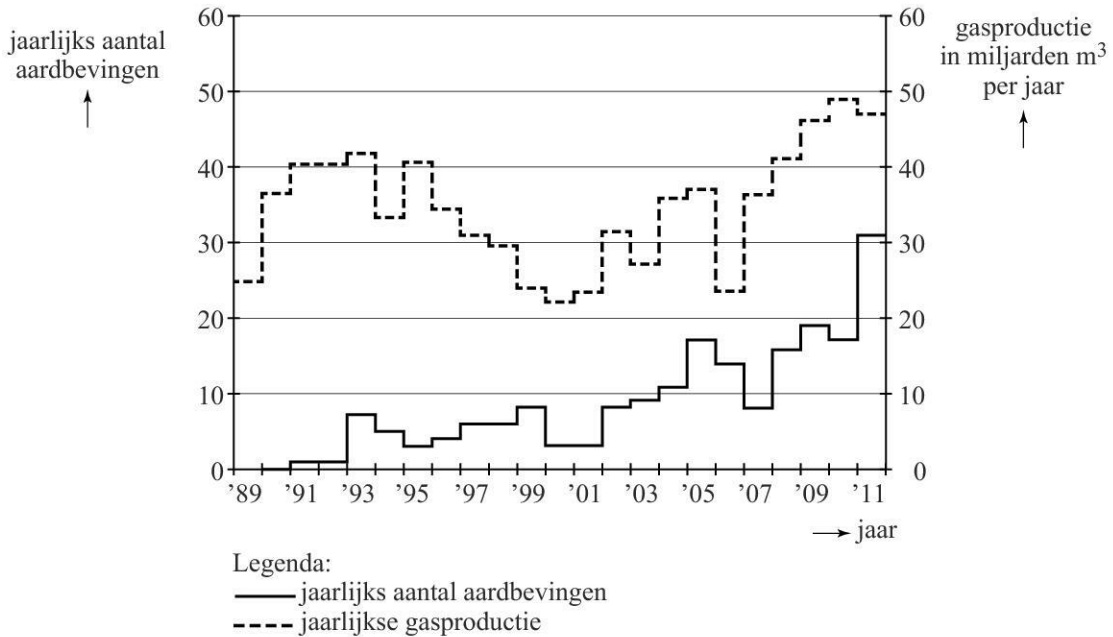
Bereken de omvang van de CVO-populatie in 2016. Geef je antwoord in gehele duizendtallen.

Hint 2

8 Groningse aardbevingen

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2019, tijdvak 1)

In de provincie Groningen vinden, als gevolg van gasproductie, regelmatig aardbevingen plaats. In 2013 is daar grootschalig onderzoek naar gedaan. Zo werd er gekeken naar het verband tussen de gasproductie en aardbevingen. Enkele resultaten daarvan staan in de figuur. Hier zie je bijvoorbeeld dat er in 1993 zeven aardbevingen zijn geweest en er in datzelfde jaar 42 miljard kubieke meter gas is geproduceerd.



We bekijken de volgende drie beweringen:

- 1 De gasproductie en het aantal aardbevingen zijn over de gehele periode 2000-2011 procentueel evenveel gestegen.
 - 2 Als na 2000 de gasproductie daalt, dan heeft dat altijd een jaar later ook een daling van het aantal aardbevingen tot gevolg.
 - 3 In de periode 2005-2011 is de gemiddelde stijging per jaar van het aantal aardbevingen groter dan in de periode 1998-2004.
- Geef van elke bewering aan of deze waar is of niet.

Hint 3

9 Marathonloopsters

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2010, tijdvak 1)

De Olympische hardloophwedstrijd met de grootste lengte is de marathon: ruim 42 kilometer, om precies te zijn 42 195 meter. De prestatie van een loopster geeft men meestal weer door de tijd waarin de marathon is afgelegd, maar een even duidelijke maat is de gemiddelde snelheid over het gehele parcours. Deze snelheid drukken we uit in m/s (meters per seconde). Een marathonloopster legt de marathon af in 2 uur, 43 minuten en 32 seconden.

Bereken haar gemiddelde snelheid in meter per seconde.

Hint 4

10 Sprinttrein

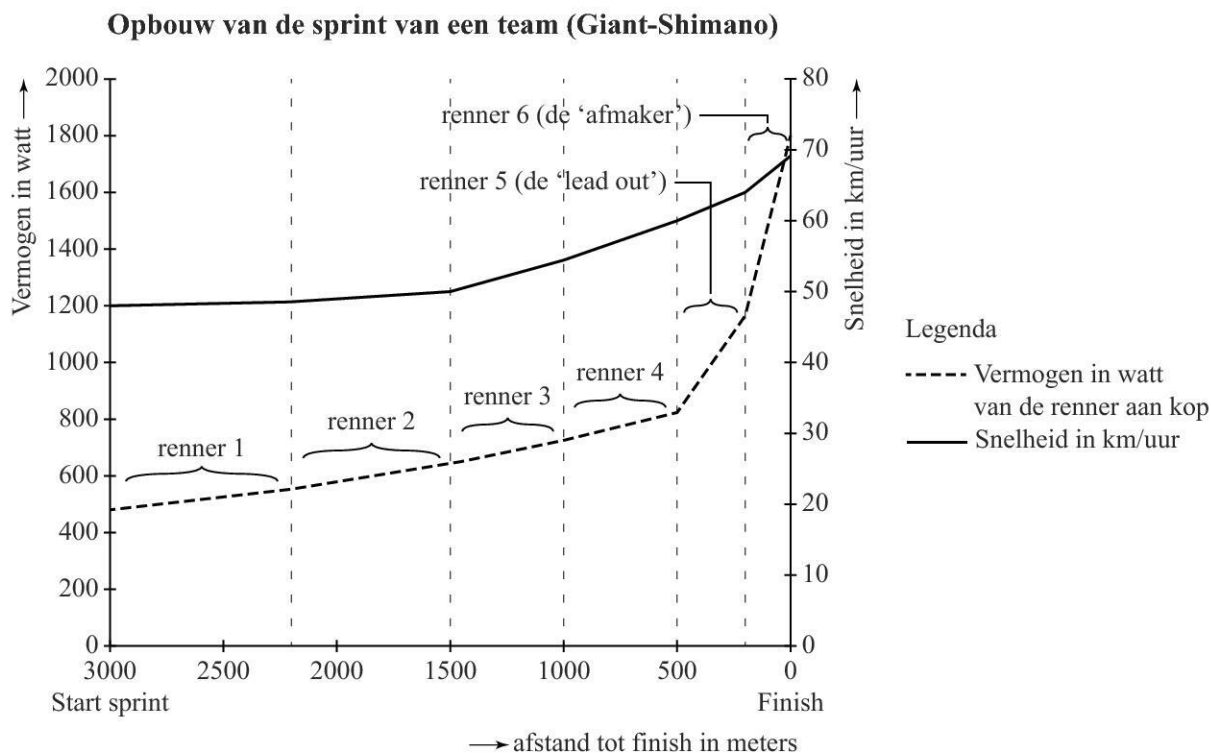
(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2018 tijdvak 1)

Veel wielervedstrijden worden beslist in een massasprint. Er zijn ploegen die zich hierin hebben gespecialiseerd. Zij stellen een zogenaamde sprinttrein van zes wielrenners samen, die ervoor moet zorgen dat hun ploeg de wedstrijd wint.

De ploeg Giant-Shimano, met de Duitse sprinter Marcel Kittel, heeft op deze wijze een aantal etappes gewonnen in de Tour de France van 2014.

Een sprinttrein werkt als volgt: vanaf drie kilometer voor de finish gaan zes renners van de ploeg om beurten aan kop rijden. Daarbij voeren ze geleidelijk de snelheid op, waarna de zesde renner de taak heeft de massasprint te winnen.

In een krant stond de volgende figuur. Hierin is weergegeven welk vermogen en welke snelheid de renners bereiken wanneer zij aan kop rijden.



Met de gegevens uit de figuur is voor iedere renner de geleverde arbeid te berekenen. De arbeid van een renner is gelijk aan het vermogen vermenigvuldigd met de tijdsduur in seconden.

Een wielervliefhebber wil onderzoeken of een renner aan kop aan het eind van de sprint meer, dezelfde of minder arbeid levert dan een renner aan kop aan het begin van de sprint.

Voer dit onderzoek uit door vermogens en snelheden te kiezen bij de door jou gekozen renners.

Hint 5

Grafieken aflezen, interpoleren en extrapoleren

Bij het aflezen uit grafieken houd je rekening met de eenheden die bij de getallen op de assen horen.

Het vinden van een tussenliggende waarde in een tabel of een grafiek heet interpoleren.

Het vinden van een verder gelegen waarde in een tabel of een grafiek heet extrapoleren.

Als een grafiek bij een tabel op een bepaald gedeelte vrijwel een rechte lijn is, dan kun je een tussenliggende waarde schatten met lineair interpoleren en een verder gelegen waarde met lineair extrapoleren.

- 11** De ontwikkeling van een vrucht wordt onderzocht. Daarvoor is de vrucht een aantal keer gewogen. In de tabel staan de resultaten.

<i>tijd</i> in weken	8	13	17	21
<i>gewicht</i> in grammen	38	68	88	104

- Neem aan dat het gewicht lineair toeneemt en schat met behulp van lineair interpoleren het gewicht na 11 weken.
- Hoe groot is het gewicht na 26 weken?

De rekenmachine

Bij berekeningen kun je in veel gevallen je rekenmachine gebruiken. Je krijgt dan in het algemeen geen exacte antwoorden maar benaderingen.

Je kunt met je rekenmachine:

- Grafieken plotten en tabellen maken.
- De toppen van een grafiek vinden.
- De snijpunten van grafieken vinden.
- Vergelijkingen oplossen.

Je geeft aan hoe je de rekenmachine hebt gebruikt. Daarbij neem je de volgende onderdelen op: Invoer, Vensterinstelling en de gebruikte Opties.

Voorbeeld

Los op: $12 + 0,1x > 35 + 0,06x$.

Oplossing

Invoer: $y_1 = 12 + 0,1x$ en $y_2 = 35 + 0,06x$

Venster: $0 \leq x \leq 1000$, $0 \leq y \leq 100$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (575; 69,5).

De oplossing van de ongelijkheid is $x > 575$.

Voorbeeld

<i>tijd</i> in jaren	2004	2007	2011
<i>aantal mannen</i>	1523	1796	2160

Schat met lineair interpoleren het aantal mannen in 2010.

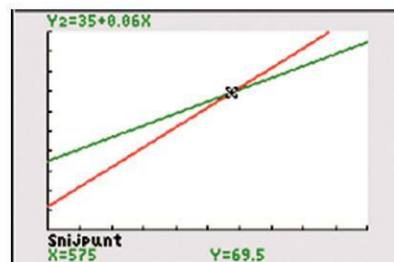
Oplossing

Tussen 2007 en 2011 nam het aantal mannen gemiddeld met

$(2160 - 1796) : 4 = 91$ per jaar toe.

In 2010 waren er naar schatting

$1796 + 3 \times 91 = 2069$ mannen.



- 12** Gegeven is de formule $y = 4x^{0,7} + 25x$.
- Maak op je rekenmachine een tabel bij de formule. Neem x van 0 tot en met 40 met stapgrootte 1.
Bij welke waarde van x is de uitkomst gelijk aan 637?
 - Verklein de stapgrootte naar 0,1.
Bij welke x -waarde is de uitkomst afgerond gelijk aan 102,5?
- 13**
- Los met behulp van je rekenmachine de vergelijking $120 - 84 \cdot 0,95^x = 100 - 0,5x$ op.
Rond je antwoord af op twee decimalen.
 - Bereken het maximum van de formule $y = -x^2 + 6x - 10$.

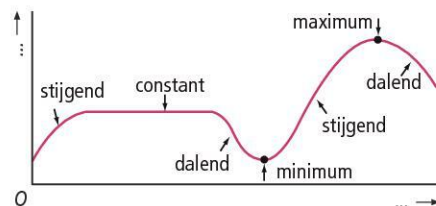
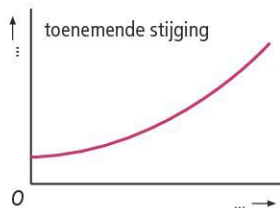
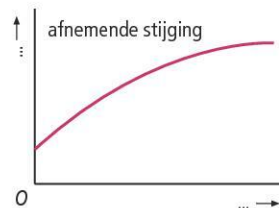
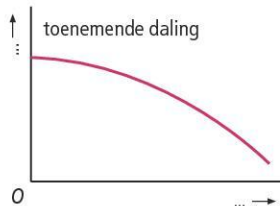
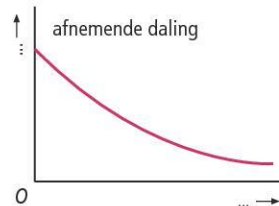
Stijgen en dalen, maximum en minimum

Een grafiek kan een stijgend, een dalend of een constant verloop hebben.

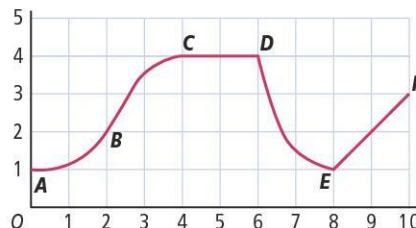
Als een grafiek overgaat van stijgen naar dalen, dan heeft de functie daar een maximum.

Als een grafiek overgaat van dalen naar stijgen, dan heeft de functie daar een minimum.

Een grafiek kan op verschillende manieren stijgen of dalen.



- 14** Je ziet een grafiek bestaande uit een aantal delen.
Geef bij elk van de delen van de grafiek aan van welk soort stijgen of dalen er sprake is.



- 15** Gegeven is de formule $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 10$.
- Ga met je rekenmachine na bij welke waarden van x de formule een maximum of een minimum heeft. Geef ook de grootte van het maximum of het minimum.
 - Bij welke waarden van x is de grafiek bij de formule toenemend stijgend?

Grenswaarde

Voor het bepalen van een grenswaarde van een functie kijk je hoe de functiewaarde verandert als je steeds grotere waarden bij de functie invult. Bij een grenswaarde verandert de functiewaarde dan nauwelijks meer.

- 16** De formules horen bij enkele groeiprocessen. Onderzoek bij elk groeiproces of er sprake is van een grenswaarde en, zo ja, hoe groot de grenswaarde is.

$$\begin{array}{ll} \text{a} & P = 145(5 - 10 \cdot 0,25^t) \\ \text{b} & k = 585 - \frac{300}{a^2} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{c} & A = 50x^2 \\ \text{d} & u = \frac{-3t + 12}{2t - 10} \end{array}$$

- 17** In een koele kamer wordt om 7.00 uur de verwarming aangezet. De temperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ in de kamer voldoet vanaf dat moment aan de formule $T = 21 - 6 \cdot 0,9^t$ met t de tijd in minuten en $t = 0$ om 7.00 uur.
- Geef de temperatuur om 7.00 uur.
 - Bereken hoe groot de grenswaarde is.
 - Geef de praktische betekenis van deze grenswaarde.
 - Bereken na hoeveel minuten de temperatuur 20°C is.
 - Vanaf welk tijdstip ligt de temperatuur boven de 18°C ?

Redeneren met formules

Door na te gaan hoe een formule is opgebouwd kun je eigenschappen van formules beredeneren. Zo kun je beredeneren of de waarden van een formule toenemen of afnemen en hoe groot een eventuele grenswaarde is.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $N = \frac{20}{10 + 0,8^k}$.
Beredeneer of de waarde van N toeneemt of afneemt als k steeds groter wordt.
Beredeneer ook of er sprake is van een grenswaarde en zo ja, hoe groot die grenswaarde is.

Oplossing

Bij $k = 0$ is $N = \frac{20}{10 + 0,8^0} \approx 1,82$.

Als k groter wordt, dan neemt $0,8^k$ af, want $0,8 < 1$.
 $10 + 0,8^k$ neemt dan af en nadert naar 10.

De waarde van N neemt toe, want 20 wordt door een steeds kleiner getal gedeeld. De grenswaarde is $\frac{20}{10} = 2$.

Voorbeeld

Onderzoek of de formule $y = 120 - 14 \cdot 0,95^x$ een grenswaarde heeft.

Oplossing

x	10	100	1000	10 000
y	111,62	119,92	120,00	120,00

De grenswaarde is 120.

- 18** Beredeneer of de waarde van Q voor $a > 0$ toeneemt of afneemt als a steeds groter wordt. Beredeneer ook of er sprake is van een grenswaarde en zo ja, hoe groot die grenswaarde is.

a $Q = \frac{20}{8 \cdot 1,6^a - 10}$

c $Q = 7 + \frac{2}{2 - 0,8^a}$

b $Q = 5 \cdot 1,38^a - 4$

d $Q = 5(4 - 0,75^a)$

Formules met meerdere variabelen

Veel formules hebben meer dan twee variabelen. Bij een formule met meer dan twee variabelen kun je de waarde van een variabele pas uitrekenen als je de waarde van alle andere variabelen kent.

Voorbeeld

De prijs van een rit met een taxi P in euro's hangt af van het aantal gereden kilometers d en het aantal minuten t dat de rit heeft geduurd. Een taxibedrijf gebruikt hiervoor de formule $P = 1,75d + 0,5t$.

Voor een rit van 12 kilometer betaalt Koos € 32,-.
Hoeveel minuten duurde deze rit?

Oplossing

Er geldt $P = 32$ en $d = 12$.

$$32 = 1,75 \times 12 + 0,5t$$

$$32 = 21 + 0,5t$$

$$11 = 0,5t \text{ dus } t = 22$$

De rit duurde 22 minuten.

- 19** Gegeven is de formule $T = 0,15P + 6,2U - 10$.

a Bereken P als $T = 18,1$ en $U = 4$.

b Bereken U als $T = 24,71$ en $P = 8,2$.

- 20** Gegeven is de formule $X = \frac{4Y - 3Z + 4}{2P}$

a Bereken X als $Y = 3$, $Z = 2$ en $P = 5$.

b Bereken Y als $X = 16$, $Z = -2$ en $P = 0,5$.

c Bereken Z als $X = 4$, $Y = 10$ en $P = 2,5$.

d Bereken P als $X = 12$, $Y = 3,5$ en $Z = 4$.

Uitdrukken in

Bij de formule $q = -3p + 22$ is q uitgedrukt in p . Een dergelijke formule is handig om bij waarden van p de bijbehorende waarden van q te berekenen.

Door p uit te drukken in q krijg je een formule waarmee je bij waarden van q de bijbehorende waarden van p kunt berekenen.

- 21 Druk p uit in q .

a $q = 4p - 10$

c $2q + 5p = 10$

b $q = \frac{1}{2}p + 8$

d $10q - 4p = 40$

- 22 Gegeven is de formule $N = -2,5Q + 1,5R + 6P$.

a Neem $N = 10$ en $Q = 2$ en druk P uit in R .

b Neem $N = 0$ en $R = 10$ en druk Q uit in P .

c Neem $P = Q$ en $R = 6$ en druk N uit in Q .

- 23 Herleid de formules tot de vorm $Q = a \cdot p + b$.

a $Q = \frac{(0,8x + 4)(-2x + 6p)}{x - 4}$ met $x = 5$

b $Q = \frac{3(4A - 2) + 6p(2C - A)}{A + C}$ met $A = 2$ en $C = 4$

Substitueren

In formules met meerdere variabelen moet je soms getallen of andere formules substitueren. De ontstane formule is dan vaak te vereenvoudigen.

- 24 Gegeven is de formule $p = 4r + \frac{3r \cdot q + 2t}{q}$

Verder is gegeven $q = 5$ en $t = 7$.

Schrijf de formule in de vorm $p = a \cdot r + b$.

- 25 Gegeven is de formule $N = 4,5P + 8P \cdot Q - 12,5P \cdot R$.

Verder is gegeven $P = 8$ en $Q = 6 - 0,5R$.

Schrijf de formule in de vorm $N = a \cdot R + b$.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $q = -3p + 22$.
Druk p uit in q .

Oplossing

$$-3p + 22 = q$$

$$-3p = q - 22$$

$$p = -\frac{1}{3}q + 7\frac{1}{3}$$

Voorbeeld

Gegeven is de formule

$$T = 2,5A - 14B + 6B \cdot C$$

Verder is gegeven $B = 0,5$ en

$$C = 2A + 1.$$

Schrijf de formule in de vorm

$$T = p \cdot A + q.$$

Oplossing

$$T = 2,5A - 14 \cdot 0,5 + 6 \cdot 0,5 \cdot (2A + 1)$$

$$T = 2,5A - 7 + 3(2A + 1)$$

$$T = 2,5A - 7 + 6A + 3$$

$$T = 8,5A - 4$$

Functievoorschriften optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen

Je kunt een nieuw functievoorschrift opstellen door twee functies op te tellen ($f(x) + g(x)$), van elkaar af te trekken ($f(x) - g(x)$), te vermenigvuldigen ($f(x) \cdot g(x)$),

te delen ($\frac{f(x)}{g(x)}$) of samen te stellen ($g(f(x))$).

26 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2x - 5$ en $g(x) = -3x + 4$.

a Geef de functievoorschriften van $S(x) = f(x) + g(x)$,

$$V(x) = f(x) - g(x), P(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ en } Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Vereenvoudig de functievoorschriften.

b Bij welke van de nieuwe functies is de grafiek constant stijgend?

c Voor welke waarde van x geeft de functie Q geen functiewaarde?

d Heeft de functie Q ook een grenswaarde? Zo ja, welke?

e Gegeven is $R(x) = f(g(x))$.

Laat zien dat je $R(x)$ kunt schrijven als $R(x) = -6x + 3$.

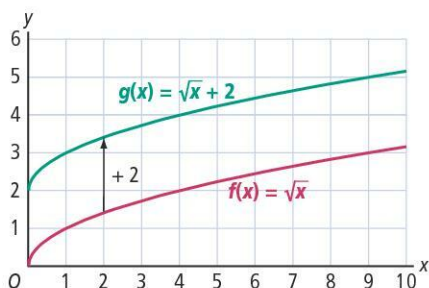
f Onderzoek door te herleiden of $R(x) = f(g(x))$ dezelfde functie is als $T(x) = g(f(x))$.

Verschuiven

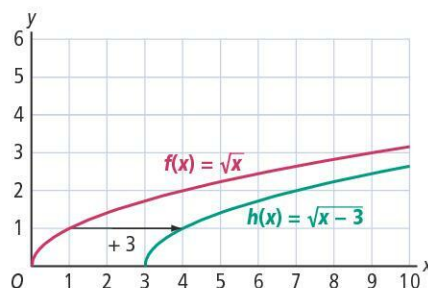
Je kunt een grafiek verschuiven. De grafiek die hierdoor ontstaat heet de beeldgrafiek. Als je de grafiek van f met a eenheden omhoog schuift, geldt voor de functie g van de beeldgrafiek: $g(x) = f(x) + a$.

Als je de grafiek van f met a eenheden naar rechts schuift, geldt voor de functie h van de beeldgrafiek: $h(x) = f(x - a)$.

Een verschuiving heet ook wel een translatie.



Verschuiving 2 omhoog.



Verschuiving 3 naar rechts.

Herschalen

Herschalen betekent dat je de eenheid van een of meer variabelen in een formule verandert. Je moet de formule aanpassen op de veranderde eenheid van de variabele.

Voorbeeld 1

De grafiek van de functie $f(x) = 5 + 7\sqrt{x}$ wordt 6 naar links en 12 omhoog verschoven. Stel het functievoorschrift $g(x)$ op van de beeldgrafiek.

Oplossing

Om de grafiek 6 naar links te verschuiven, vervang je x door $x + 6$. Om de grafiek 12 omhoog te verschuiven, tel je 12 bij de functiewaarden op.

Je krijgt dan $g(x) = 5 + 7\sqrt{x+6} + 12$
ofwel $g(x) = 17 + 7\sqrt{x+6}$.

Voorbeeld 2

Het gewicht van een kubus van berkenhout kun je berekenen met de formule $g = 0,66 \cdot z^3$. In deze formule is g het gewicht in grammen en z de lengte van de zijden in cm.

Stel een formule op waarbij het gewicht G in kg wordt uitgedrukt in de lengte van de zijden Z in mm.

Oplossing

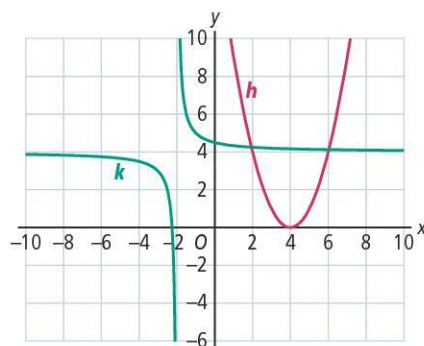
Omdat 1 kg gelijk is aan 1000 gram, is $g = 1000G$, ofwel $G = 0,001g$.

Omdat 1 cm gelijk is aan 10 mm, is $Z = 10z$, ofwel $z = 0,1Z$.

Dit geeft $G = 0,001(0,66 \cdot (0,1Z)^3)$.

Deze formule herleiden geeft $G = 0,000\,000\,66 \cdot Z^3$.

- 27 Gegeven zijn de grafieken van de functies h en k .
- a De grafiek van h is ontstaan door de grafiek van $f(x) = x^2$ horizontaal te verschuiven. Stel een passend functievoorschrift op bij de grafiek van h .
- b De grafiek van k is ontstaan door de grafiek van $g(x) = \frac{1}{x}$ zowel horizontaal als verticaal te verschuiven. Stel een passend functievoorschrift op bij de grafiek van k .



- 28 De gemiddelde snelheid over een schaatswedstrijd van 10 km kun je berekenen met de formule $G = \frac{10\,000}{s}$. Hierin is G de gemiddelde snelheid in meters per seconde en s de tijd in seconden. Stel een formule op waarbij de gemiddelde snelheid g in km per uur wordt uitgedrukt in de tijd m in minuten.

Examenopdrachten

29 Bitcoins

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2018, tijdvak 1)

De bitcoin is een digitale munteenheid die alleen online bestaat. Hij bestaat sinds 1 januari 2009 en kan worden gebruikt om te betalen in webwinkels of voor andere online diensten.

Het totale aantal bitcoins dat in omloop gebracht kan worden, is begrensd. Het totale aantal bitcoins dat in omloop is, kan worden benaderd met de formule: $C = 21 - 21 \cdot 0,5^{0,25 \cdot t}$

Hierin is C het totale aantal bitcoins in miljoenen en t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2009

Bepaal met behulp van een redenering aan de hand van de formule de grenswaarde van het totale aantal bitcoins dat in omloop is.

Hint 6

30 BMR

(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2018, tijdvak 1)

Mensen krijgen energie binnen via voedsel. De hoeveelheid energie in voedsel wordt uitgedrukt in kilocalorieën (kcal). De minimale hoeveelheid energie die iemand per dag nodig heeft om op gewicht te blijven, wordt aangeduid met de Engelse afkorting BMR (Basal Metabolic Rate). Diëtisten maken gebruik van formules om deze hoeveelheid te berekenen. Een formule van de BMR voor mannen luidt:

$BMR = 10 \cdot G - 5 \cdot J + 6,25 \cdot L + 5$. Hierin is G het gewicht in kg, J de leeftijd in jaren, L de lengte in cm en BMR in kcal.

Voor 30-jarige mannen met een BMR van 2000 kcal kun je het gewicht G uitdrukken in de lengte L .

Er geldt dan $G = a \cdot L + b$.

- a** Bereken de waarden van a en b in één decimaal nauwkeurig.

Hint 7

In de Verenigde Staten hanteert men soortgelijke formules maar met andere variabelen. Men gebruikt voor het gewicht de variabele W (weight) in pounds, voor de lengte de variabele H (height) in feet en voor de leeftijd in jaren de variabele Y (years). Hierbij is 1 kg gelijk aan 2,2 pounds en 1 foot gelijk aan 30,48 cm.

- b** Stel een formule op waarin de BMR uitgedrukt wordt in de variabelen W , H en Y .

Hint 8

31 Schildpadden

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2018, tijdvak 2)

Sommige mensen hebben een schildpad als huisdier. Bepaalde soorten houden onder natuurlijke omstandigheden een winterslaap. De eigenaar kan ervoor kiezen om zijn schildpad ook in winterslaap te laten gaan, omdat hij anders de hele winter extra licht en warmte moet geven aan zijn huisdier. Een schildpad moet een gezond gewicht hebben bij het begin van zijn winterslaap, anders is er een kans dat hij het niet overleeft. Om vast te stellen of de schildpad een gezond gewicht heeft, wordt vaak de Jackson Ratio gebruikt.

De Jackson Ratio R wordt berekend met de formule $R = \frac{G}{L^3}$

Hierin is G het gewicht van de schildpad in gram en L de lengte van het schild van de schildpad in cm.

Voor de Griekse landschildpad geldt de volgende vuistregel: een schildpad kan veilig aan een winterslaap beginnen als zijn Jackson Ratio tussen 0,18 en 0,22 ligt.

Jesse heeft een Griekse landschildpad met een schildlengte van 15 cm en wil hem een winterslaap laten houden.

- a Bereken in hele grammen nauwkeurig tussen welke waarden zijn gewicht dan mag liggen volgens de vuistregel.

Hint 9

De lengte van het schild moet recht gemeten worden, bijvoorbeeld door de schildpad met ingetrokken kop tussen een schuifmaat te zetten (zie foto 1). Veronderstel dat iemand toch de lengte over het schild heen meet (zie foto 2).

- b Beredeneer of een schildpad door op die manier te meten een grotere of een kleinere Jackson Ratio krijgt dan hij in werkelijkheid heeft.

Hint 10

Op een Engelse website staat het volgende: als je het gewicht meet in Engelse ponden (lbs) en de schildlengte in inches, kun je de Jackson Ratio berekenen met de formule $R = c \cdot \frac{W}{l^3}$

Hierin is W het gewicht in Engelse ponden en l de schildlengte in inches. 1 Engels pond (lb) $\approx$ 454 gram en 1 inch = 2,54 cm.

De Jackson Ratio moet dan ook weer dezelfde waarde opleveren.

- c Bereken de waarde van c in deze formule. Rond je antwoord af op één decimaal.

Hint 11

foto 1

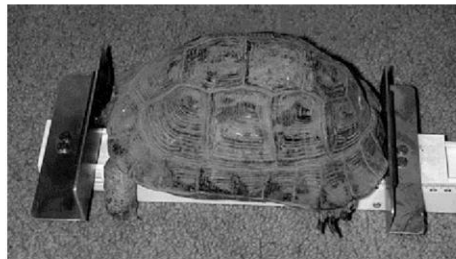


foto 2

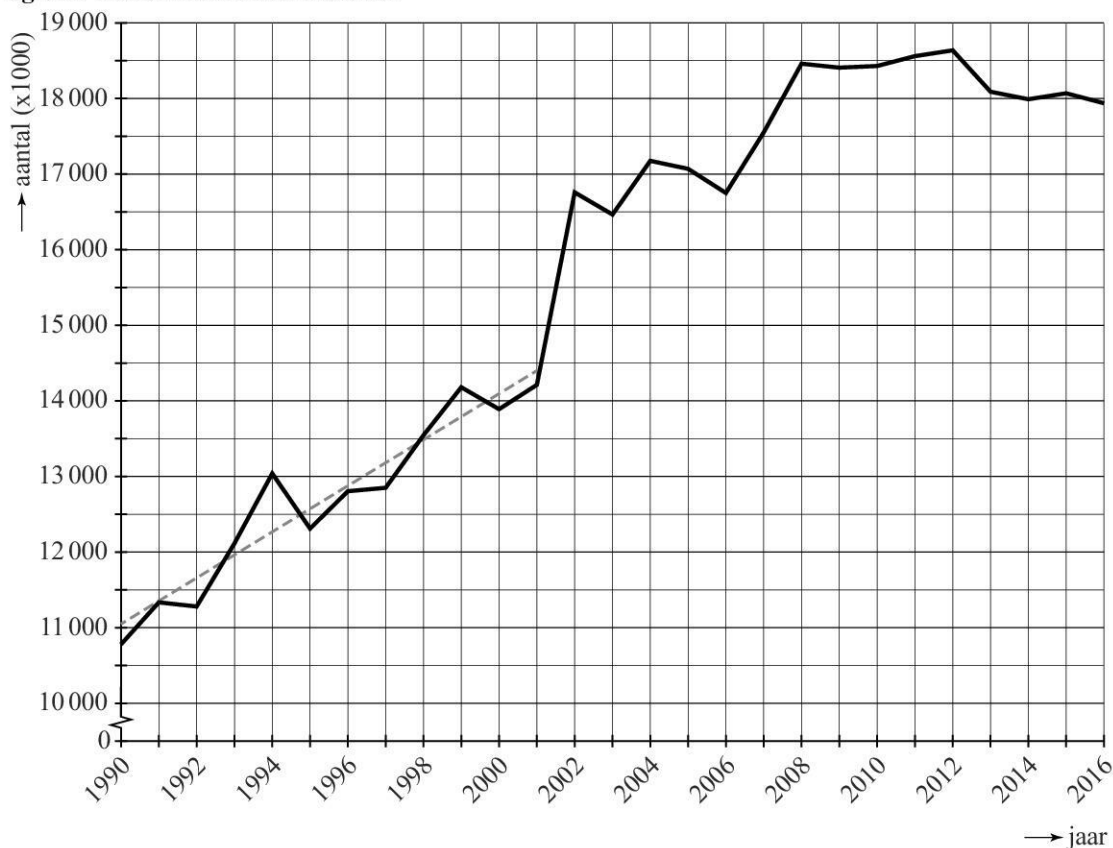


32 Continu Vakantie Onderzoek

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2019, tijdvak 2)

Uit het Continu Vakantie Onderzoek (CVO) blijkt dat het aantal vakanties naar het buitenland in de loop van de jaren behoorlijk veranderd is. In de figuur is het verloop van het aantal buitenlandse vakanties weergegeven.

figuur 1 aantal buitenlandse vakanties



In figuur 1 is bovendien de trendlijn voor het verloop van het aantal buitenlandse vakanties met een stippellijn in de periode tot en met 2001 weergegeven.

Hoewel het CVO pas sinds 1990 plaatsvindt, is er, gebruikmakend van de trendlijn tot en met 2001, toch een uitspraak te doen over het aantal buitenlandse vakanties in de periode voorafgaand aan 1990.

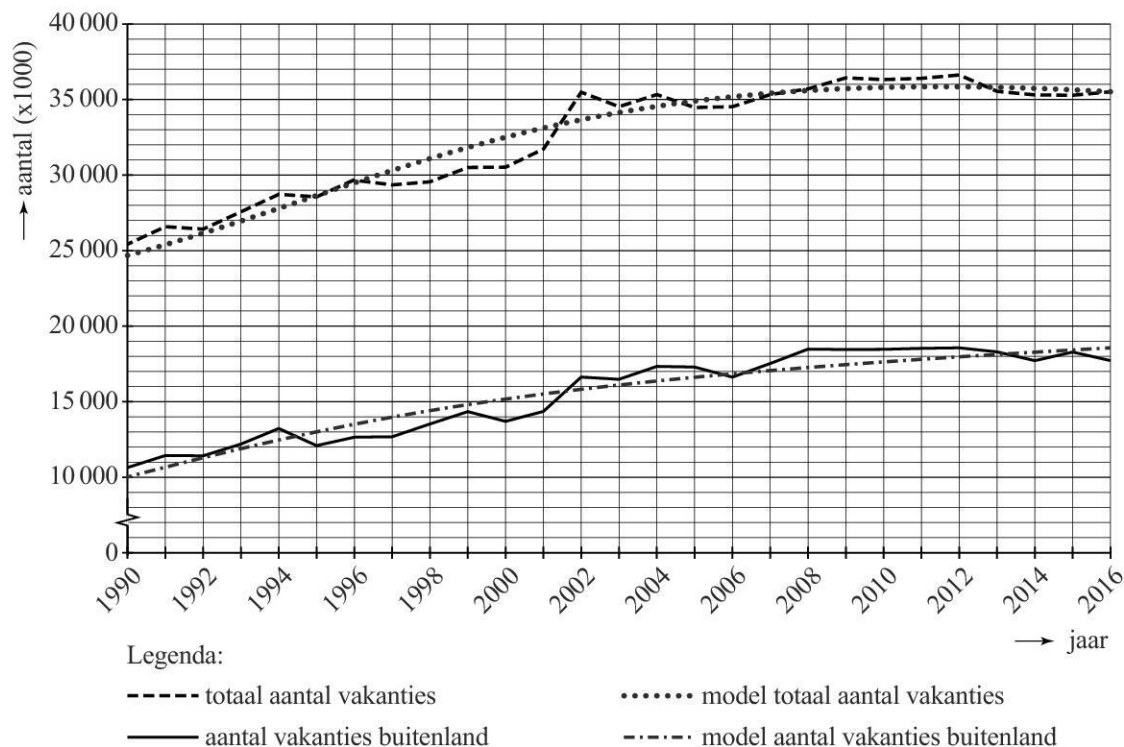
- a** Bereken met behulp van lineair extrapoleren het aantal buitenlandse vakanties in 1985.

Hint 12

In figuur 1 is te zien dat de lineaire trend die er tot en met 2001 was, eindigt. In 2002 is er een forse toename. Die is te verklaren doordat het CBS sinds 2002 een of meer overnachtingen bij familie in het buitenland ook als een vakantie telt, terwijl dat in de jaren ervoor niet het geval was.

In figuur 2 is nogmaals het aantal buitenlandse vakanties weergegeven. Verder is ook het verloop van het totaal aantal vakanties (in binnen- en buitenland samen) weergegeven.

figuur 2 aantal vakanties in binnen- en buitenland



Bij de modellen in figuur 2 horen de volgende formules:

$$B = -10,1t^2 + 587t + 10\,200 \text{ en } T = -20,3t^2 + 951t + 24\,800$$

In dit model is B het aantal buitenlandse vakanties per jaar, T het totaal aantal vakanties per jaar en t de tijd in jaren met $t = 0$ in het jaar 1990. B en T zijn beide in duizenden.

Volgens bovenstaand model had het aantal binnenlandse vakanties ook een maximum.

b Bereken in welk jaar dat was.

Hint 13

Het CBS onderzoekt ook hoelang mensen op vakantie gaan. Hoewel Nederlanders steeds vaker op vakantie gaan, worden deze vakanties steeds korter.

Een model dat het aantal vakanties per jaar en de lengte van deze vakanties beschrijft, is:

$$A = 0,0136t + 2,43 \text{ en } L = -0,024t + 9,3$$

In dit model is A het gemiddelde aantal vakanties per jaar per Nederlander, L de gemiddelde lengte van een vakantie in dagen, en t is weer de tijd in jaren met $t = 0$ in het jaar 1990.

Volgens dit laatste model blijft het aantal dagen per jaar dat een Nederlander gemiddeld op vakantie gaat, de rest van deze eeuw stijgen.

c Bereken vanaf welk jaar een Nederlander gemiddeld minstens 25 dagen op vakantie gaat per jaar.

Hint 14

Lineair verband

Bij een lineair verband tussen twee variabelen is er sprake van een constante toename of constante afname. Je herkent een lineair verband aan:

- De grafiek is een rechte lijn.
- In een tabel en in een grafiek is er bij gelijke stappen altijd dezelfde toename.
- Uit de tekst kun je opmaken dat de toename bij gelijke stappen altijd hetzelfde is.

Bij een lineair verband hoort een lineaire formule van de vorm $y = ax + b$. Hierin is a het hellingsgetal of de richtingscoëfficiënt van de bijbehorende grafiek en is b het startgetal. Een functie van de vorm $f(x) = ax + b$ heet een eerstegraads functie

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $k = 0,23t + 5,65$ met k de kosten in euro's en t de tijd in minuten. Met hoeveel euro nemen de kosten per minuut toe? En hoeveel bedragen de vaste kosten?

Oplossing

De kosten nemen toe met € 0,23 per minuut.
De vaste kosten bedragen € 5,65.

Voorbeeld 2

t	4	5	6	10	13
K	17	19,5	22	32	39,5

Ga na of de tabel bij een lineair verband kan horen.

Oplossing

De toename per stap is steeds 2,5, want $(32 - 22) : 4 = 2,5$ en $(39,5 - 32) : 3 = 2,5$.
De tabel kan bij een lineair verband horen.

- 33** a Gegeven is de formule $N = 1350 - 125t$ met N het aantal vissen in miljoenen en t de tijd in jaren na 1950. Hoeveel vissen waren er in 1950 en met hoeveel vissen nam dat aantal per jaar af?
- b Ga na of er een lineair verband tussen p en A bestaat.
- | | | | | | |
|-----|----|----|-----|-----|-----|
| p | 10 | 50 | 75 | 90 | 100 |
| A | 10 | 90 | 140 | 170 | 190 |
- c Bij een lineair verband tussen de variabelen P en Q geldt, bij $P = 18$ hoort $Q = 670$ en bij $P = 23$ hoort $Q = 520$. Bereken de waarde van Q bij $P = 44$.

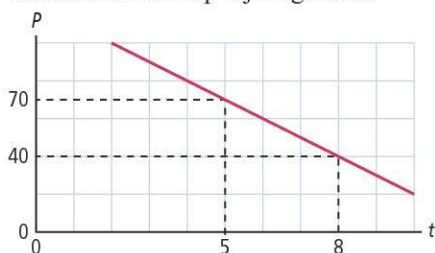
Lineaire formules opstellen

Je kunt in de volgende gevallen een lineaire formule opstellen:

- Bij de beschrijving van een lineair verband.
- Bij een gegeven tabel.
- Bij een gegeven lineaire grafiek.
- Bij twee gegeven punten van de grafiek.

Voorbeeld

Stel een formule op bij de grafiek.

**Oplossing**

De richtingscoëfficiënt is $\frac{40 - 70}{8 - 5} = -10$.

$$P = -10t + b$$

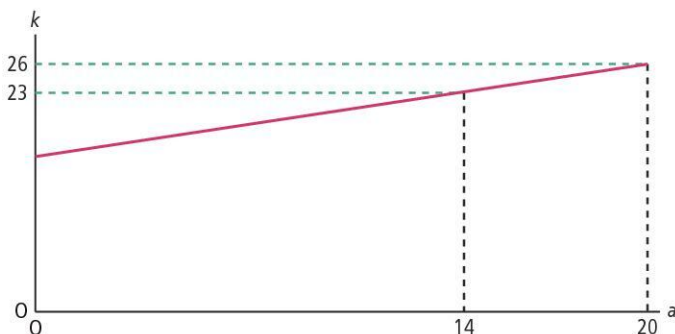
Invullen $P = 70$ en $t = 5$.

$$70 = -10 \cdot 5 + b$$

$$b = 120$$

Een formule bij de grafiek is $P = -10t + 120$.

- 34** Stel een formule op bij de grafiek hieronder.



- 35** De grafiek die het verband tussen x en y weergeeft is een rechte lijn door de punten $(150, 18)$ en $(200, 13)$. Geef een lineaire formule voor het verband tussen x en y .

- 36** Stel een lineaire formule op voor het verband tussen x en y bij de lijn door de twee gegeven punten.

- a $(0, 6)$ en $(8, 0)$
- b $(5, 12)$ en $(11, 33)$
- c $(0, 7; 1, 3)$ en $(3, 5; -5, 7)$

- 37** Een crèche berekent een maandelijkse ouderbijdrage. Deze hangt af van het maandinkomen van de ouders. Het verband tussen de bijdrage en het inkomen is lineair. Bij een maandinkomen van € 1.800,- bedraagt de bijdrage € 430,- en bij een maandinkomen van € 4.000,- is dat € 650,-.

- a Bereken de maandelijkse bijdrage bij een maandinkomen van € 2.700,-.
- b Stel een formule op voor het verband tussen de bijdrage B in euro's en het inkomen I in euro's.

Lineaire vergelijkingen oplossen

Lineaire vergelijkingen kun je oplossen door links en rechts van het gelijkteken dezelfde bewerking te doen. Daarmee vereenvoudig je de vergelijking zo ver dat de onbekende nog maar aan een kant van het gelijkteken staat.

- 38** Los de vergelijkingen op.
- a $-3x + 12 = 5x + 28$
 - b $\frac{3}{5}x + \frac{1}{2} = 2 - \frac{9}{10}x$
 - c $225t = -25t + 10(13t + 18)$
 - d $0,7p - 6p + 1,3 = 1,2(4 - 5p)$
- 39** Herleid de vergelijkingen waarbij je p uitdrukt in q .
- a $q = -0,2p + 1,3$
 - b $3p + 12q = 16 - p$
 - c $13p - 4(q + 2) = q$
 - d $0,3q + 1,2p - 4,8 = 0$

Recht evenredig verband

Twee variabelen heten recht evenredig als geldt:

als de ene variabele k keer zo groot wordt, dan wordt de andere variabele ook k keer zo groot.

Zijn de variabelen x en y , dan heet y recht evenredig, of

kortweg evenredig, met x . Er geldt $\frac{y}{x} = c$, dus ook $y = c \cdot x$.

Je herkent een recht evenredig verband in een tabel, als van de twee getallen in elke kolom de verhouding dezelfde is. De grafiek bij een recht evenredig verband is een rechte lijn door de oorsprong.

- 40** Ga voor de tabellen na of er een recht evenredig verband bestaat tussen de variabelen. Stel bij elk recht evenredig verband een bijbehorende formule op.

A

x	4,5	12,5	16	50
y	3,6	10	12,8	40

C

W	80	40	10	5
R	12	24	96	190

B

p	4,5	5	12	16
q	16	14,4	6	4,5

D

x	16	20	36	40
y	40	50	90	100

Let op!

Lineaire vergelijkingen moet je bij het Centraal Examen zonder rekenmachine op kunnen lossen. Bij alle andere vergelijkingen mag je altijd de rekenmachine gebruiken.

Voorbeeld

t	0,3	2,4	3,8	5,4
s	1,8	14,4	22,8	32,4

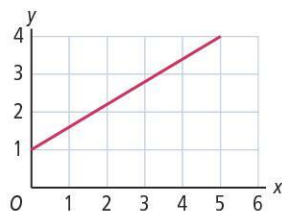
Laat zien dat s recht evenredig is met t en stel een bijbehorende formule op.

Oplossing

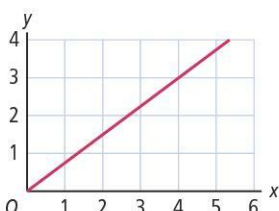
$$\frac{s}{t} = \frac{1,8}{0,3} = \frac{14,4}{2,4} = \frac{22,8}{3,8} = \frac{32,4}{5,4} = 6$$

Een formule is $s = 6 \cdot t$.

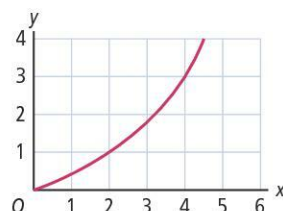
41 Bij welke grafiek(en) is y recht evenredig met x ?



A



B



C

Omgekeerd evenredig

Twee variabelen heten omgekeerd evenredig als geldt: als de ene variabele k keer zo groot wordt, wordt de andere variabele k keer zo klein. Zijn de variabelen x en y , dan geldt

$$x \cdot y = c. \text{ Je kunt ook schrijven } y = \frac{c}{x} \text{ of } x = \frac{c}{y}$$

Bij een omgekeerd evenredig verband is het product van de variabelen in elke kolom van de bijbehorende tabel steeds hetzelfde.

42 De variabelen x en y in de twee tabellen zijn omgekeerd evenredig.

Vul de tabellen verder in. Stel bij beide tabellen een formule op.

x	0,8	...	2	6	80
y	60	32	24	...	...

A

x	1	...	5	15	60
y	...	45	...	6	...

B

43 Ga na of de variabelen in de formules recht of omgekeerd evenredig zijn. Schrijf de omgekeerd evenredige verbanden op twee andere manieren.

a $p \cdot q = 7$

d $l = \frac{200}{b}$

b $\frac{s}{t} = 50$

e $y = 5x$

c $A = 10B - 5$

f $\frac{x}{y} = 36$

Voorbeeld

v	6	9	18
t	1,5	1	0,5

Laat zien dat v en t omgekeerd evenredig zijn en stel de bijbehorende formules op.

Oplossing

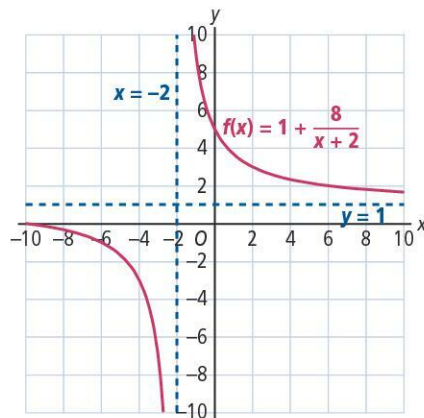
$$v \cdot t = 6 \times 1,5 = 9 \times 1 = 18 \times 0,5 = 9.$$

De formules zijn $v \cdot t = 9$ of $t = \frac{9}{v}$ of $v = \frac{9}{t}$

Gebroken functies

Een functie heet een gebroken functie als er in het functievoorschrift een variabele in een noemer voorkomt.

De grafiek van de gebroken functie $f(x) = 1 + \frac{8}{x+2}$ bestaat uit twee takken. Bij $x = -2$ heeft de functie f geen functiewaarde, hier heeft de grafiek een verticale asymptoot. De grafiek heeft $y = 1$ als horizontale asymptoot, de grenswaarde is dus gelijk aan 1.



- 44** Onderzoek of de functies een grenswaarde hebben en zo ja, hoe groot die grenswaarde is.

a $f(x) = \frac{5x - 8}{2x + 6}$

c $h(x) = \frac{3x - 9}{x^2 + 8}$

b $g(x) = 4 + \frac{x}{x - 3}$

d $l(x) = 5 + \frac{4}{x^2 - 9}$

Formules met breuken herleiden

Formules en vergelijkingen met breuken kun je herleiden en soms vereenvoudigen. Daarbij kun je gebruikmaken van:

$$\frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C} \text{ en } A \cdot \frac{B}{C} = \frac{A \cdot B}{C}$$

Uit $\frac{A}{B} = C$ volgt $A = B \cdot C$ en dus ook $B = \frac{A}{C}$

Uit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ volgt $A \cdot D = B \cdot C$

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $N = \frac{2}{b} + \frac{3}{b+1}$.
Herleid de formule tot één breuk.

Oplossing

$$N = \frac{2(b+1)}{b(b+1)} + \frac{3b}{b(b+1)} \quad \text{gelijke noemers gemaakt}$$

$$N = \frac{2(b+1) + 3b}{b(b+1)} \quad \frac{A}{C} + \frac{A}{C} = \frac{A+B}{C}$$

$$N = \frac{5b+2}{b(b+1)} \quad \text{teller herleid}$$

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $p = \frac{2}{1+q} + 5$.
Herleid de formule waarbij je q uitdrukt in p .

Oplossing

$$p - 5 = \frac{2}{1+q} \quad \text{links en rechts } - 5$$

$$(p - 5)(1 + q) = 2 \quad \text{links en rechts } \times (1 + q)$$

$$1 + q = \frac{2}{p - 5} \quad \text{links en rechts } : (p - 5)$$

$$q = \frac{2}{p - 5} - 1 \quad \text{links en rechts } - 1$$

45 Herleid de formules waarbij je b uitdrukt in a .

a $3a = \frac{6}{2b+4}$

c $\frac{5}{a+4} = \frac{2}{b-4}$

b $\frac{b+5}{a-5} = a-1$

d $\frac{7a-3b}{b+8} = \frac{4}{3}$

46 Herleid de formules tot één breuk.

a $K = \frac{3}{p} + \frac{p+1}{p}$

c $d = \frac{3}{N+1} - \frac{1}{N}$

b $Q = \frac{t+1}{2t} + \frac{1}{4t}$

d $k = \frac{q+2}{q} - \frac{1}{q-5}$

Examenopdrachten

47 Windenergie

(Ontleend aan CE vwo A 2018, tijdvak 1)

In een krant stond eind 2013 bij een artikel over de toekomst van windenergie deze figuur. In de figuur wordt de kostprijs voor het produceren van windenergie vergeleken met de kosten voor het produceren van energie in een traditionele kolencentrale (de marktprijs).

De formule voor de marktprijs k_m luidt:

$$k_m = 0,28 \cdot t + 4,3.$$

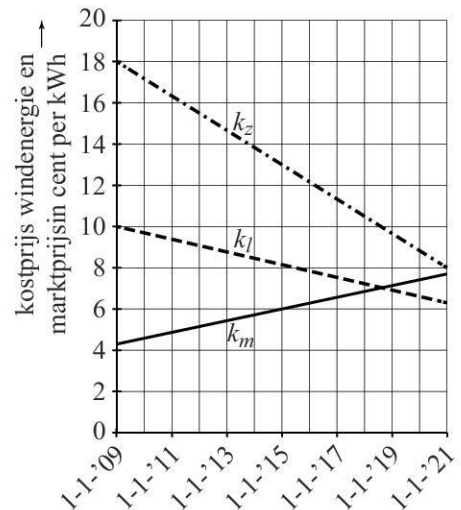
De formule voor de kostprijs van windenergie k_l van windmolens op land luidt: $k_l = -0,31t + 10,0$.

Voor beide formules geldt: k is de prijs in cent per kWh (kilowattuur) en t is de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2009.

We nemen in deze opgave aan dat de prijzen zich ook na 2020 volgens deze lineaire verbanden blijven ontwikkelen.

Door de duurdere windmolens op zee is de kostprijs van windenergie van die windmolens op dit moment nog steeds hoger dan die van windmolens op land. Maar door de voortdurende innovaties gaat dat veranderen.

- a** Stel met behulp van de figuur een formule op voor de kostprijs k_z van windenergie van windmolens op zee en bereken daarmee in welk jaar de windenergie van land en die van zee evenveel kosten.



Legenda:
 wind op zee
 wind op land
 ————— marktprijs

Hint 15

Rond 2011 was de kostprijs van windenergie van windmolens op land nog tweemaal zo hoog als de marktprijs.

- b** Bereken in welk jaar de marktprijs tweemaal zo hoog zal zijn als de kostprijs van windenergie van windmolens op land.

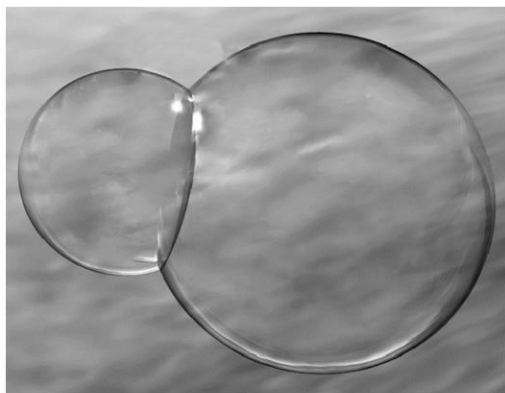
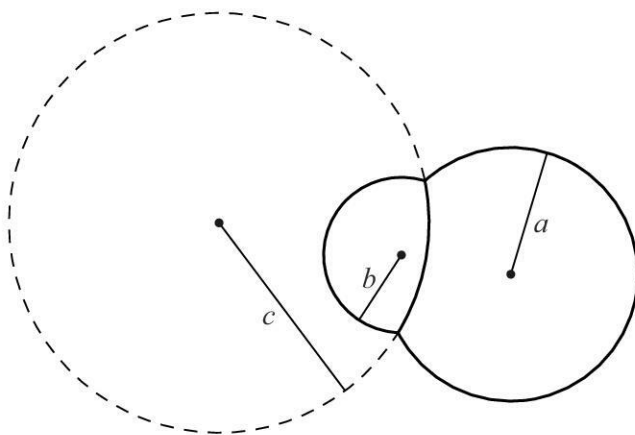
Hint 16

48 Zeepbellen*(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2018, tijdvak 2)*

Op de foto zie je een dubbele zeepbel: twee bolvormige zeepbellen die aan elkaar vastzitten. Beide zeepbellen zijn een deel van een bol. Het scheidingsvlies tussen deze zeepbellen is ook een deel van een bol. Men heeft ontdekt dat voor elke

dubbele zeepbel de volgende formule geldt: $\frac{1}{c} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$

In deze formule is a de straal van de grootste zeepbel, b de straal van de kleinste zeepbel en c de straal van het bolvormige scheidingsvlies. In de figuur is dit schematisch weergegeven.



De dubbele zeepbel op de foto bestaat uit een zeepbel met een straal van 2,5 cm en een zeepbel met een straal van 4 cm

- a** Bereken met behulp van bovenstaande formule de straal van het scheidingsvlies. Rond je antwoord af op hele millimeters.

Hint 17

Neem nu aan dat de grootste zeepbel een vaste straal heeft van 3 cm (dus $a = 3$). We vragen ons af wat er gebeurt als de straal van de kleinste zeepbel steeds kleiner wordt: wordt het scheidingsvlies dan steeds platter of steeds boller? Met andere woorden: neemt c toe of af?

- b** Beredeneer aan de hand van bovenstaande formule of c toeneemt of afneemt als de straal van de kleinste zeepbel steeds kleiner wordt.

Hint 18

Als de stralen a en b bekend zijn, kun je c snel en rechtstreeks

berekenen door de formule $\frac{1}{c} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ te herleiden tot $c = \frac{ab}{a - b}$

- c** Geef deze herleiding.

Hint 19

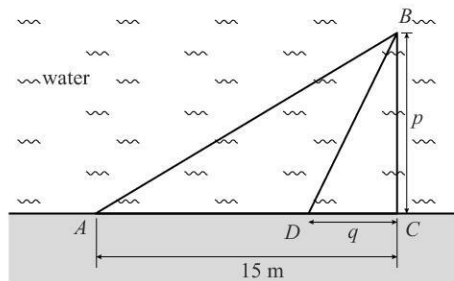
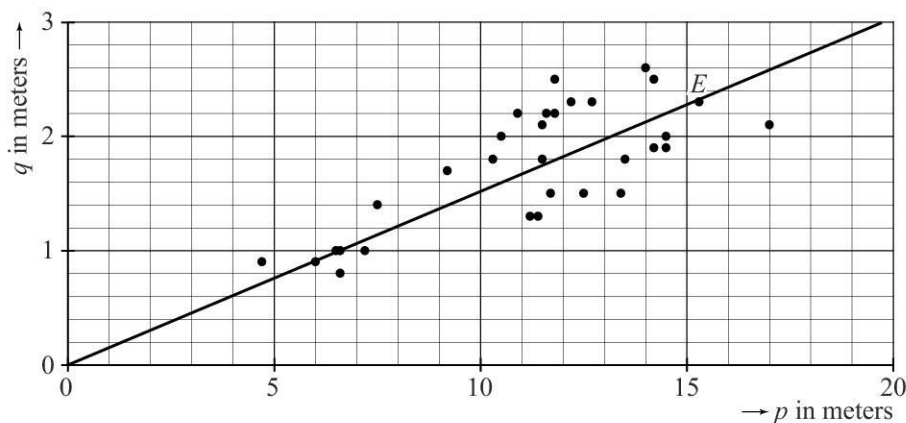
49 Elvis

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2016, tijdvak 1)

De Amerikaan T.J. Pennings heeft onderzocht hoe snel zijn hond Elvis een weggegooid bal bereikt. In de figuur staat een schets van het bovenaanzicht van de situatie. Pennings en Elvis staan bij het vaste punt A . Het vaste punt C bevindt zich 15 meter verderop langs de waterkant. Pennings gooit een bal in het water, zodanig dat deze ergens op de denkbeeldige lijn door C loodrecht op de waterkant terechtkomt; het punt waar de bal terechtkomt, noemen we B . De afstand BC , uitgedrukt in meters, noemen we p .

Elvis bepaalt zelf het punt vanaf waar hij gaat zwemmen. Dat punt noemen we D . Dus Elvis rent van A naar D langs de waterkant en zwemt vervolgens van D naar B .

Pennings doet dit experiment een aantal keer, waarbij hij de afstand p steeds varieert. Bij elke worp noteert hij p en de afstand CD . Deze afstand CD , uitgedrukt in meters, noemen we q . De waarden van p en q heeft Pennings uitgezet in een assenstelsel.



Zo lees je af dat bij een van de worpen geldt: $p = 15,3$ en $q = 2,3$ (zie punt E). De punten liggen bij benadering op een rechte lijn door $(0, 0)$. Dat betekent dat q recht evenredig is met p . Op basis van deze recht evenredigheid kan men de volgende conclusies trekken:

- 1 Hoe verder van punt C de bal in het water komt, hoe eerder Elvis het water in springt.
- 2 Als de afstand CB twee keer zo klein wordt, wordt de afstand AD ook twee keer zo klein.
- a Geef van elk van de beide bovenstaande conclusies aan of deze volgt uit het recht evenredige verband. Licht je antwoord toe.

Hint 20

De vergelijking van de rechte lijn is bij benadering $q = 0,2p$. Hierin is de richtingscoëfficiënt 0,2 een grove benadering.

- b Bereken de waarde van de richtingscoëfficiënt van deze lijn in twee decimalen nauwkeurig.

Hint 21

Machtsfuncties

Functies van de vorm $f(x) = x^n$ heten machtsfuncties.

Machtsfuncties van de vorm $f(x) = x^{-n}$ kun je schrijven

$$\text{als } f(x) = \frac{1}{x^n}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \text{ een wortelfunctie want } x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}.$$

Machtsfuncties van de vorm $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ zijn te schrijven

$$\text{als } f(x) = \sqrt[n]{x}.$$

Functies van de vorm $f(x) = x^{3,5}$ en $g(x) = x^{0,8}$ onderzoek je met je rekenmachine.

50 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^8$, $g(x) = x^{-3}$, $h(x) = x^7$ en $k(x) = x^{\frac{1}{4}}$.

- a Bij welke van deze functies heeft de grafiek een symmetrieas? Controleer je antwoord eventueel met een plot van de grafiek.
- b Welke van de grafieken gaan door het punt (1, 1)? En welke door (-1, -1)?
- c Hoeveel snijpunten heeft elk van de grafieken met de lijn $y = 4$? En hoeveel snijpunten heeft elk van de grafieken met de lijn $y = -2$?
- d Onderzoek met je rekenmachine hoeveel snijpunten de grafiek van $m(x) = x^{1,75}$ heeft met de lijn $y = 18$.

Kwadratische functies

Functies van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ heten kwadratische functies of tweedegraadsfuncties.

De bijbehorende grafiek is een parabool. Voor $a > 0$ is de grafiek een dalparabool, voor $a < 0$ een bergparabool.

51 Hieronder staan drie functievoorschriften. Onderzoek door te herleiden of de bijbehorende grafiek een parabool is en zo ja, of het een dalparabool of een bergparabool betreft.

- a $f(x) = 3x(1 - x) + 2x^2$
- b $g(x) = (4x + 3)(2x - 1) + (7 - 3x)(x + 1)$
- c $i(x) = 8x^2 + 4x(x - 1)^2$

- 52** Gegeven is de functie $f(x) = 0,5x^2 + 3,2x - 7$
- Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van f .
 - Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as en de y -as.
 - De grafiek van f wordt 3 omhoog en 2 naar rechts verschoven.
Geef de coördinaten van de top van de beeldgrafiek.

Wortelfuncties

Een functie waar een variabele onder het wortelteken voorkomt, heet een wortelfunctie. Een wortelvergelijking herleid je door links en rechts van het gelijktteken dezelfde bewerking uit te voeren.

Je gebruikt de regel:

Uit $\sqrt{A} = B$ volgt $A = B^2$ (voor $B \geq 0$).

Voor het rekenen met wortels kun je de volgende rekenregels gebruiken:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad \text{met } a \geq 0 \text{ en } b \geq 0.$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \text{met } a \geq 0 \text{ en } b \geq 0.$$

Voorbeeld 1

Vereenvoudig de functie $y = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{\frac{x^2 + 1}{4}}$

Oplossing

$$y = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{4}} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$y = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$$

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $2 \cdot \sqrt{a} + 1 = b$.
Druk a uit in b .

Oplossing

$$2 \cdot \sqrt{a} + 1 = b - 1 \quad \text{links en rechts } -1$$

$$\sqrt{a} = \frac{b-1}{2} \quad \text{links en rechts : 2}$$

$$a = \frac{(b-1)^2}{2^2} \quad \text{uit } \sqrt{A} = B \text{ volgt } A = B^2$$

$$\text{ofwel } a = \frac{1}{4}(b-1)^2$$

- 53** Gegeven zijn twee rijtjes formules. Elke formule uit het linker rijtje is te herleiden tot een van de formules uit het rechter rijtje.

Toon dat aan en geef aan welke formules bij elkaar passen.

$$\text{A } y = \sqrt{16x + 48} \quad 1 \quad y = 8 + \sqrt{1\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x}$$

$$\text{B } y = 8 + 6\sqrt{\frac{1}{4}x^2 + x - 9} \quad 2 \quad y = 4\sqrt{x + 3}$$

$$\text{C } y = \frac{24 + \sqrt{12 - 6x}}{3} \quad 3 \quad y = 8 + 3\sqrt{x^2 + 4x - 36}$$

54 Herleid de formules zodat je b uitdrukt in a .

a $a = 0,5\sqrt[3]{b}$

d $3\sqrt{a} = 4\sqrt{a} - 2b$

b $2 \cdot \sqrt[5]{b+2} = 4a$

e $\sqrt{2b+3} = 4a$

c $a + 4 = 0,4\sqrt{b}$

f $a = \sqrt{b-4} + 9$

Herleiden met machten

Bij het herleiden van formules van de vorm $y = c \cdot x^a$ gebruik je de rekenregels voor machten.

In de formule $N = 3 \cdot t^{8,9}$ is N uitgedrukt in t .

Met behulp van de regel $x^a = c$ geeft $x = c^{\frac{1}{a}}$ kun je de formule herleiden naar een formule waarmee je t uitdrukt in N .

$$g^p \cdot g^q = g^{p+q} \quad g^{-n} = \frac{1}{g^n}$$

$$\frac{g^p}{g^q} = g^{p-q} \quad g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$$

$$(g^p)^q = g^{p \cdot q} \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Voorbeeld 1

Schrijf $R = \frac{(a^3 \cdot a^{0,5})^4}{a^2}$ in de vorm $R = c \cdot a^n$.

Oplossing

$$R = \frac{(a^{3,5})^4}{a^2}$$

$$g^p \cdot g^q = g^{p+q}$$

$$R = \frac{a^{14}}{a^2}$$

$$(g^p)^q = g^{p \cdot q}$$

$$R = a^{12}$$

$$\frac{g^p}{g^q} = g^{p-q}$$

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $p = 5 \cdot k^{0,25} + 8$.
Druk k uit in p .

Oplossing

$$5 \cdot k^{0,25} + 8 = p$$

links en rechts verwisseld

$$5 \cdot k^{0,25} = p - 8$$

links en rechts $- 8$

$$k^{0,25} = \frac{p-8}{5}$$

links en rechts : 5

$$k = \left(\frac{p-8}{5} \right)^{\frac{1}{0,25}}$$

$x^a = c$ geeft $x = c^{\frac{1}{a}}$

$$\text{ofwel } k = \left(\frac{1}{5}p - 1\frac{3}{5} \right)^4$$

55 Vereenvoudig zo ver mogelijk.

a $Q = \sqrt{25p^2}$

d $t = 3\sqrt{2k} \cdot \sqrt{18k}$

b $R = (2 \cdot q)^3$

e $b = \left(\frac{1}{2} \cdot a \right)^4 \cdot \sqrt{16a^2}$

c $y = \frac{(0,5x)^2}{x}$

f $g = \sqrt{\frac{d^2}{9}} \cdot (3d)^2$

56 Herleid de vergelijkingen zodat je p uitdrukt in K .

a $0,2 \cdot p^5 + 8 = K$

d $15 + p^{-\frac{1}{2}} = K$

b $K - 6 \cdot p^4 = 27$

e $2 \cdot \sqrt[3]{p} - 4K = 10$

c $13p^{0,7} - 65K = 0$

f $K = \sqrt[4]{2p+1}$

Examenopdrachten

57 Lichaamsoppervlak

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2013, tijdvak 1)

De buitenkant van je lichaam is je lichaamsoppervlak.

leeftijd	Lichaamsoppervlakte in % van de totale oppervlakte			
	hoofd	romp	armen en handen	benen en voeten
1,5 jaar	16,2	34,0	18,15	31,65
17,5 jaar	8,1	32,1	21,0	38,8

Bij jonge kinderen is het hoofd ten opzichte van de rest van het lichaam relatief groot. Als kinderen ouder worden, groeien de armen en handen en de benen en voeten sneller dan de rest van het lichaam. Het aandeel van armen en handen in de lichaamsoppervlakte is voor kinderen in de periode van 1,5 jaar tot 17,5 jaar gestegen van 18,15 % naar 21,0 %. Ook het aandeel van de benen en voeten is in die 16 jaar groter geworden.

- a** Onderzoek of de relatieve toename van het aandeel van armen en handen groter is dan de relatieve toename van het aandeel van benen en voeten.

Hint 22

Er zijn formules waarmee we de lichaamsoppervlakte kunnen berekenen. Voor volwassen vrouwen is de volgende formule de meest gebruikte formule:

$$S_{\text{Dubois}} = 0,007184 \cdot L^{0,725} \cdot M^{0,425} \text{ (formule van Dubois)}$$

In deze formule is S_{Dubois} de lichaamsoppervlakte in m^2 , L de lichaamslengte in cm en M het lichaamsgewicht in kg.

Als een lichaam groter wordt, dan zal de lichaamsoppervlakte ook groter worden. Kunnen we dit ook zien aan de formule van Dubois? Hoe zit het bijvoorbeeld als alle lengtematen (lengte, breedte, hoogte) van een lichaam 2 keer zo groot worden? Bij een kubus wordt in dat geval de oppervlakte 4 keer en het volume 8 keer zo groot. Wordt de uitkomst van de formule van Dubois dan ook 4 keer zo groot? Hiertoe vergelijken we

$$S_{\text{Dubois}} = 0,007184 \cdot (2L)^{0,725} \cdot (8M)^{0,425} \text{ met } S_{\text{Dubois}} = 0,007184 \cdot L^{0,725} \cdot M^{0,425}$$

We gaan er van uit dat het lichaamsgewicht (M) evenredig is met het volume.

- b** Toon met behulp van deze formules (zonder getallenvoorbeelden) aan dat de formule van Dubois inderdaad bij verdubbeling van lengtematen een verviervoudiging van de lichaamsoppervlakte S_{Dubois} oplevert.

Hint 23

Voor het berekenen van de lichaamsoppervlakte bij kinderen worden vooral de volgende twee formules gebruikt:

$$S_{\text{Mosteller}} = \sqrt{\frac{1}{3600}} \cdot L \cdot M \text{ (formule van Mosteller)}$$

$$S_{\text{Haycock}} = 0,024265 \cdot L^{0,3964} \cdot M^{0,5378} \text{ (formule van Haycock)}$$

In deze formules is S de lichaamsoppervlakte in m^2 , L de lichaamslengte in cm en M het lichaamsgewicht in kg.

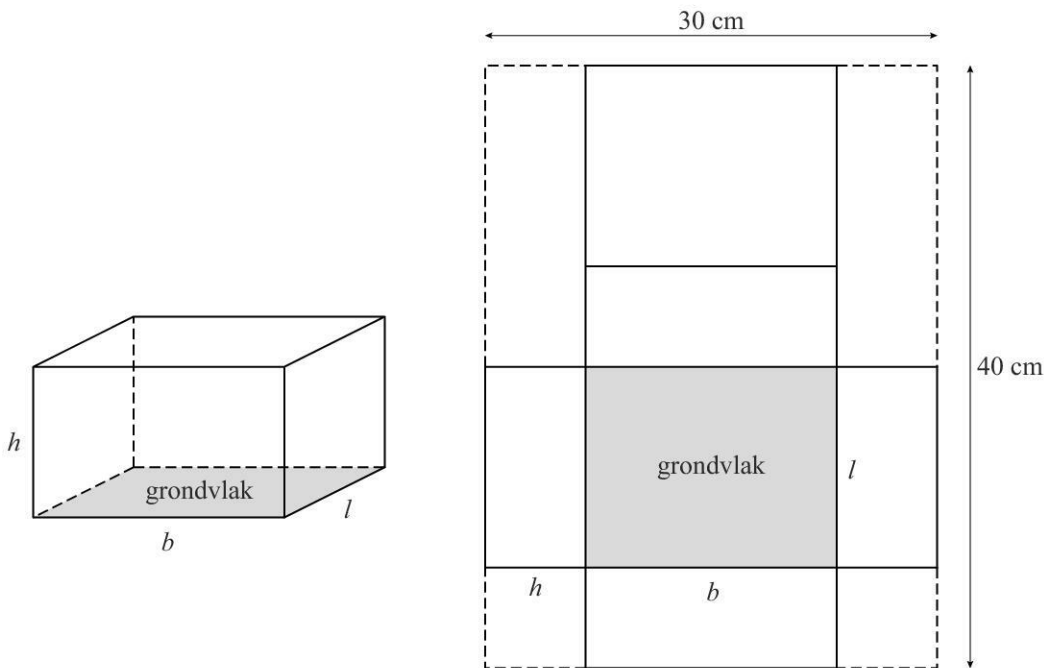
- c** Schrijf de formule van Mosteller in de vorm $S = c \cdot L^a \cdot M^b$ en licht toe hoe je je antwoord gevonden hebt.

Hint 24

58 Verpakkingen

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2019, tijdvak 1)

Om een verpakking in de vorm van een balk te maken, wordt een karton van 30×40 cm gebruikt. In de afbeeldingen hieronder zie je links een verpakking en rechts hoe de uitslag daarvan uit het karton geknipt wordt. Hierbij is h de hoogte, b de breedte en l de lengte van de verpakking in cm. De uitslag eindigt precies bij de randen van het karton. Zie de figuur.



Van een bepaalde verpakking is de hoogte gelijk aan 3 cm.

- a** Bepaal de lengte en breedte van deze verpakking en bereken daarmee vervolgens de inhoud van deze verpakking.

Hint 25

De formule voor de inhoud V in cm^3 van de verpakking uitgedrukt in de hoogte h in cm is: $V = 2h^3 - 70h^2 + 600h$.

- b** Toon, zonder getallenvoorbeelden, aan dat deze formule juist is.

Hint 26

Bedrijven willen zo efficiënt mogelijk omgaan met verpakkingsmateriaal. Meestal is er een vaststaande inhoud en wil men dat de oppervlakte van de verpakking zo klein mogelijk wordt, maar je kunt het ook andersom bekijken: bij een bepaalde oppervlakte wil je een verpakking met zo groot mogelijke inhoud. De maximale inhoud krijg je als je een bol neemt, maar een bol als verpakkingsmateriaal is vaak niet handig.

Om de efficiëntie E van een verpakking met een inhoud V en een oppervlakte A te weten te komen, vergelijk je de inhoud V van die verpakking met de inhoud van een bol met diezelfde oppervlakte A .

Er geldt:

$$\text{formule 1: } E = \frac{\text{inhoud } V \text{ van verpakking met oppervlakte } A}{\text{inhoud van bol met oppervlakte } A}$$

Voor een bol geldt het volgende:

$$\text{formule 2: Oppervlakte bol} = 12,57r^2$$

$$\text{formule 3: Inhoud bol} = 4,19r^3$$

In deze formules is r de straal van de bol. Uitgaande van de formules 1, 2 en 3 geldt voor de efficiëntie van een verpakking de volgende formule:

$$E = \frac{V}{4,19(\sqrt{0,08A})^3}$$

c Toon met de formules 1, 2 en 3 aan dat deze laatste formule juist is.

Hint 27

59 Windenergie

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2018, tijdvak 1)

In 2009 werd er in totaal 23,4 miljoen MWh energie door kolencentrales geproduceerd (1 MWh is 1 megawattuur, dat is 1000 kWh). De overheid heeft als doelstelling dat op den duur alle energie duurzaam moet worden geproduceerd. Energie die in kolencentrales wordt geproduceerd valt niet onder duurzaam geproduceerde energie.

We willen nu een model maken voor de totale kosten TK van de door kolencentrales geproduceerde energie in de jaren 2009-2050. Daarvoor doen we twee aannames:

- 1 De totale hoeveelheid energie TE die per jaar door kolencentrales geproduceerd wordt, neemt lineair af van 23,4 miljoen MWh in 2009 tot

$$0 \text{ MWh in 2050. Er geldt dan: } TE = 23,4 - \frac{23,4}{41} \cdot j$$

In deze formule is TE in miljoenen MWh en j in jaren met $j = 0$ het jaar 2009. Bovendien is j een geheel getal.

- 2 Om de totale kosten TK van energie te berekenen in een bepaald jaar, gebruiken we de gemiddelde marktprijs g_m in euro per MWh in dat jaar. Er geldt: $g_m = 2,8 \cdot j + 44,4$.

In deze formule is g_m in euro per MWh en j in jaren met $j = 0$ het jaar 2009. Ook nu is j een geheel getal.

De totale kosten TK in een bepaald jaar zijn te berekenen door de door kolencentrales geproduceerde energie te vermenigvuldigen met de gemiddelde marktprijs in dat jaar. De formule voor TK is te schrijven als $TK = a \cdot j^2 + b \cdot j + c$. In deze formule is TK in miljoenen euro's en j in jaren met $j = 0$ het jaar 2009 en is j een geheel getal.

Bereken de waarden van a , b en c in deze formule. Rond je antwoorden af op één decimaal.

Hint 28

Exponentieel verband, exponentiële formule

Bij een exponentieel verband tussen twee variabelen wordt er per tijdseenheid met hetzelfde getal vermenigvuldigd.

Een exponentieel verband herken je aan:

- In een tabel wordt er bij gelijke stappen met hetzelfde getal vermenigvuldigd.
- Uit de tekst kun je opmaken dat er bij gelijke stappen een vast percentage bij komt of van af gaat.
- Uit de tekst kun je opmaken dat er bij gelijke stappen met hetzelfde getal vermenigvuldigd wordt.

Bij een exponentieel verband tussen de variabelen x en y hoort de exponentiële formule $y = b \cdot g^x$. Hierbij is b de beginwaarde, dat is de waarde van y voor $x = 0$ en is g de groeifactor, de factor waarmee je de waarde van y moet vermenigvuldigen als x met 1 toeneemt.

Voorbeeld 1

Bij een groeiproces hoort de formule $N = 350 \cdot 0,89^t$ met N het aantal in miljoenen en t de tijd in jaren.

Met hoeveel procent neemt het aantal jaarlijks toe of af?

Oplossing

De groeifactor is 0,89.

De groeifactor is kleiner dan 1, dus er is sprake van een afname.

Bij een groeifactor van 0,89 per jaar hoort een afname van 11% per jaar.

Voorbeeld 2

t	0	1	4	6
N	100	150	506	1139

Ga na of de tabel bij een exponentieel verband kan horen.

Oplossing

$\frac{150}{100} = 1,5$, als de tabel bij een exponentieel verband hoort, dan is de groeifactor gelijk aan 1,5. De bijbehorende formule is dan $N = 100 \cdot 1,5^t$. Hiermee controleer je de andere waarden in de tabel.

$N = 100 \cdot 1,5^4 \approx 506$ en $N = 100 \cdot 1,5^6 \approx 1139$

De waarden komen overeen met de tabel. De tabel kan bij een exponentieel verband horen.

- 60** Het aantal werklozen in een land voldoet aan de formule $P = 275 \cdot 1,075^t$. Hierin is P het aantal werklozen in duizenden en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2010.

- Hoeveel werklozen waren er op 1 januari 2010?
- Neemt het aantal werklozen toe of af?
- Met hoeveel procent neemt het aantal werklozen toe of af per maand?
- Hoeveel werklozen waren er op 1 mei 2010?
- En op 1 december 2009?

- 61** Ga na of bij de tabel sprake kan zijn van een exponentieel verband tussen p en q .

p	0	1	5	6	10
q	288	216	68,3	51,3	16,2

Rekenen met groeifactoren

Als g de groeifactor per tijdseenheid is, dan is g^n de groeifactor per n tijdseenheden. Evenzo is $g^{\frac{1}{n}}$ de groeifactor voor een n -de deel van die tijdseenheid.

Voorbeeld 1

De groeifactor per week is 1,35.
Bereken de groeifactor per dag en per 18 weken.

Oplossing

Een dag is $\frac{1}{7}$ week.
De groeifactor per dag is $1,35^{\frac{1}{7}} \approx 1,044$.
De groeifactor per 18 weken is $1,35^{18} \approx 221,824$.

Voorbeeld 2

Een populatie neemt jaarlijks met 15% in aantal af.
Bereken met hoeveel procent de populatie per 20 jaar afneemt.

Oplossing

De groeifactor per jaar is 0,85.
De groeifactor per 20 jaar is $0,85^{20} \approx 0,039$.
Na 20 jaar is er nog steeds $0,039 \times 100\% = 3,9\%$ over.
Per 20 jaar neemt de populatie met 96,1% af.

- 62 Bij een groeiproses is de groeifactor per uur gelijk aan 1,28.
Geef je antwoord steeds in vier decimalen nauwkeurig.
- a Hoe groot is de groeifactor per dag?
 - b Hoe groot is de groeifactor per kwartier?
 - c Hoe groot is de groeifactor per vijf minuten?
 - d Hoe groot is de groeifactor per 13 minuten?
- 63 Een populatie neemt al geruime tijd met 2,5% per 10 jaar toe.
Rond je antwoord steeds af op twee decimalen.
- a Bereken de procentuele toename per 5 jaar.
 - b Bereken de procentuele toename per jaar.
 - c Bereken de procentuele toename per 25 jaar.
 - d Bereken de procentuele toename per eeuw.

Exponentiële formules opstellen

Voor het opstellen van een exponentiële formule $y = b \cdot g^x$ heb je de beginwaarde b nodig, dat is de waarde bij $x = 0$, en de groeifactor g . De waarde van de groeifactor is afhankelijk van de gekozen tijdseenheid.

Voorbeeld

Het aantal auto's in een land neemt per drie jaar met 18% toe. Op 1 januari 2019 waren er 6,8 miljoen auto's in dat land.
Stel een formule op voor het aantal auto's N in miljoenen.
Neem voor de tijd in jaren t met $t = 0$ op 1 januari 2019.

Oplossing

De groeifactor per 3 jaar is 1,18.
De groeifactor per jaar is $1,18^{\frac{1}{3}} \approx 1,057$.
Een formule is $N = 6,8 \cdot 1,057^t$.

- 64** Stel in de volgende gevallen een formule op voor het verband tussen het aantal N en de tijd t in jaren met $t = 0$ het jaar 2020.
- In 2020 woonden er in een stad 180 000 mensen en dat aantal neemt jaarlijks met 2,6% af.
 - In 2020 produceerde een land 12 miljoen vaten olie. De productie neemt elk half jaar met 10% toe.
 - Het aantal gebruikers van een tablet verdubbelt elke vier jaar. In 2020 waren er vijf miljoen gebruikers.

Verdubbelingstijd en halveringstijd

Bij een exponentieel groeiproces is de verdubbelingstijd de tijdsduur waarin de hoeveelheid wordt verdubbeld. De tijd die nodig is voor een halvering heet de halveringstijd. Deze tijden hangen af van de groeifactor en niet van de beginhoeveelheid.

Voorbeeld

Het aantal konijnen in een gebied neemt jaarlijks met 4% af. In 2000 waren er ongeveer 15 000 konijnen. Na hoeveel jaar is het aantal konijnen gehalveerd?

Oplossing

De groeifactor per jaar is 0,96.

Bij halveren moet gelden $0,96^t = 0,5$.

Invoer: $y_1 = 0,96^x$ en $y_2 = 0,5$

Venster: $0 \leq x \leq 20, 0 \leq y \leq 1$

Optie: snijpunt

Na ongeveer 17 jaar is het aantal konijnen gehalveerd.

- 65** Het aantal abonnees A van een tijdschrift voldoet aan de formule $A = 135\,600 \cdot 0,94^t$. Hierin is t het aantal jaren na 1 januari 2020.
- Hoeveel abonnees zijn er op 1 januari 2023?
 - Met hoeveel procent neemt het aantal abonnees per jaar af?
 - En met hoeveel procent neemt dat aantal per vier jaar af?
 - Neem aan dat het aantal abonnees nog een aantal jaren met dezelfde snelheid afneemt. Bereken na hoeveel jaar het aantal abonnees gehalveerd is.
- 66** Het gewicht van een courgette neemt tijdens de groei dagelijks met 15% toe. Bereken na hoeveel dagen het gewicht van de courgette verdubbeld is.

Logaritmen

De exacte oplossing van de vergelijking $g^t = a$ heet de logaritme van a met grondtal g . Je noteert deze oplossing als $t = {}^g\log(a)$. Je spreekt ${}^g\log(a)$ uit als 'g log a'.

Uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$ en omgekeerd

uit $t = {}^g\log(a)$ volgt $g^t = a$.

Hierbij is $a > 0$, $g > 0$ en $g \neq 1$.

- 67** Los de vergelijkingen op. Schrijf het antwoord met een logaritme en geef een benadering in twee decimalen.

a $2^x = 5$

d $2 + 5 \cdot 7^{4x} = 17$

b $12 \cdot 6^x = 48$

e ${}^2\log(x + 1) = 5$

c $3^{2x+1} = 7$

f $3 \cdot {}^4\log(x - 4) = 6$

Rekenen met logaritmen

Je kunt met behulp van de regel ${}^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$ met je rekenmachine elke logaritme berekenen.

Voor het rekenen met logaritmen gelden de volgende rekenregels.

$${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b) \quad \text{met } g > 0, g \neq 1, a > 0 \text{ en } b > 0.$$

$${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right) \quad \text{met } g > 0, g \neq 1, a > 0 \text{ en } b > 0.$$

$$p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p) \quad \text{met } g > 0, g \neq 1 \text{ en } a > 0.$$

$${}^g\log(a) = \frac{p \log(a)}{p \log(g)} \quad \text{met } g > 0, g \neq 1, a > 0, p > 0 \text{ en } p \neq 1$$

Deze rekenregels zijn bij het centraal examen gegeven op een pagina Formules van het opgavenblad.

Voorbeeld 1

Schrijf als één logaritme:

$$3 \cdot {}^5\log(2) + \frac{1}{2} \cdot {}^5\log(9) + 3$$

Oplossing

$$3 \cdot {}^5\log(2) + \frac{1}{2} \cdot {}^5\log(9) + {}^5\log(5^3) =$$

$${}^5\log(2^3) + {}^5\log(9^{\frac{1}{2}}) + {}^5\log(125) =$$

$${}^5\log(8) + {}^5\log(3) + {}^5\log(125) =$$

$${}^5\log(3000)$$

Voorbeeld 2

Schrijf als één logaritme:

$${}^4\log(3 + p) + 2 \cdot {}^4\log(5p) \text{ met } p > 0$$

Oplossing

$${}^4\log(3 + p) + 2 \cdot {}^4\log(5p) =$$

$${}^4\log(3 + p) + {}^4\log(25p^2) =$$

$${}^4\log(25p^2(3 + p)) =$$

$${}^4\log(75p^2 + 25p^3)$$

68 Schrijf als één logaritme

- a** ${}^5\log(4) + {}^5\log(8)$ **e** $-2 \cdot {}^3\log(0,1) + {}^3\log(a)$ met $a > 0$
b ${}^2\log(36) - {}^2\log(9)$ **f** $-3 + 2 \cdot {}^4\log(9p)$ met $p > 0$
c $\frac{1}{2} \cdot {}^5\log(49) + 2 \cdot {}^5\log(3)$ **g** ${}^8\log(2a) + {}^8\log(a+3)$ met $a > 0$
d $2 + {}^6\log(x)$ met $x > 0$ **h** $4 \cdot {}^{0,1}\log(x) - {}^{0,1}\log(x^2)$ met $x > 0$

Rekenregels gebruiken

Je kent de rekenregels voor het rekenen met machten. Deze rekenregels zijn nodig bij het herleiden van exponentiële en logaritmische formules.

Voorbeeld 1

Gegeven
 ${}^3\log(p-2) + 2 = q + 5$.
 Druk p uit in q .

Oplossing

$$\begin{aligned}
 {}^3\log(p-2) &= q + 3 \\
 p-2 &= 3^{q+3} \\
 p &= 3^{q+3} + 2
 \end{aligned}$$

Voorbeeld 2

Gegeven $2^a \cdot 2^b = 5$
 Druk b uit in a .

Oplossing

$$\begin{aligned}
 2^{a+b} &= 5 \\
 a+b &= {}^2\log(5) \\
 b &= -a + {}^2\log(5)
 \end{aligned}$$

69 Druk b uit in a .

- a** ${}^4\log(b+5) = a$ **d** $2 \cdot 5^b = 100a + 30$
b $a + \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(b) = 5$ **e** $3^{a+4b} = 243$
c ${}^2\log(a) + {}^2\log(b) = 3$ **f** $3^a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^b = 9$

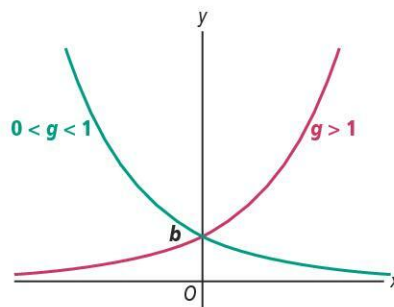
70 Herleid tot de vorm $b = p \cdot a + q$.

- a** $2^{2a-b} = 8$ **c** $2^a \cdot 8 = \left(\frac{1}{2}\right)^b \cdot 4^a$
b $5^{a+3} \cdot 5^b = 1$ **d** $9^a \cdot (\sqrt{3})^b = \frac{1}{3}$

Grafieken van exponentiële en logaritmische functies

De grafiek van de exponentiële functie $f(x) = b \cdot g^x$ ($b > 0$) is stijgend als $g > 1$ en dalend als $0 < g < 1$. Omdat $g^0 = 1$ voor elke waarde van g , en dus $f(0) = b$, gaat de grafiek van f door het punt met coördinaten $(0, b)$ op de verticale as.

De grafiek die hoort bij de functie f heeft de x -as als horizontale asymptoot.



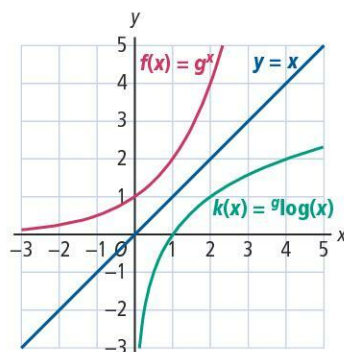
De grafieken van $f(x) = g^x$ en $k(x) = {}^g\log(x)$ zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

De functie $k(x) = {}^g\log(x)$ heeft alleen functiewaarden als $x > 0$ en het grondtal g is net als bij exponentiële functies altijd positief, maar niet gelijk aan 1.

Voor $0 < g < 1$ is de grafiek dalend en voor $g > 1$ stijgend.

Verder heeft de grafiek van $k(x) = {}^g\log(x)$ de lijn $x = 0$, oftewel de y -as, als verticale asymptoot.

Het snijpunt met de x -as is $(1, 0)$, want ${}^g\log(1) = 0$ voor elke waarde van g .



- 71**
- Bereken of de grafiek van $m(x) = -20 + 150 \cdot 0,63^x$ stijgend of dalend is voor $x > 0$.
 - De grafiek van $f(x) = {}^2\log(x)$ is stijgend voor $x > 0$.
Leg uit dat de grafiek van $g(x) = {}^2\log(x + 10)$ stijgend is voor $x > -10$.
 - Bereken of de grafiek van $h(x) = 120 - {}^2\log(x + 10)$ stijgend of dalend is voor $x > -10$.

Machten van e en natuurlijke logaritmen

Een bijzonder grondtal is het getal van Euler: $e \approx 2,718281828\dots$

Voor de functie $f(x) = e^x$ geldt $f'(x) = e^x$.

De logaritme met grondtal e wordt genoteerd als $\ln(x)$.

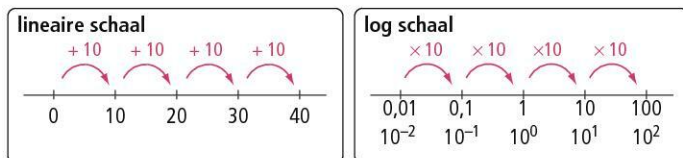
Uit $N = e^t$ volgt $t = \ln(N)$.

- 72**
- Schrijf de functie $y = 3 \cdot 2^x$ in de vorm $y = b \cdot e^{ax}$. Rond indien nodig de waarden van a en b af op drie decimalen.
 - Herleid tot de vorm $N = b \cdot e^{at}$.
A $N = 3 \cdot e^{2t+2}$
B $N = \frac{1}{e} \cdot e^{5t+2}$
C $N = e^t \cdot e^{t+1}$
 - Toon aan dat je de formule $N = 0,2 \cdot e^{t+1}$ kunt herleiden tot $t = \ln(5N) - 1$.

- 73** Gegeven is de formule $M = 4 - 3 \cdot \ln\left(2 - \frac{1}{2}t\right)$.
- Bereken bij welke waarde van t geldt dat $M = 0$.
 - Druk t uit in M .

Werken met logaritmische schalen

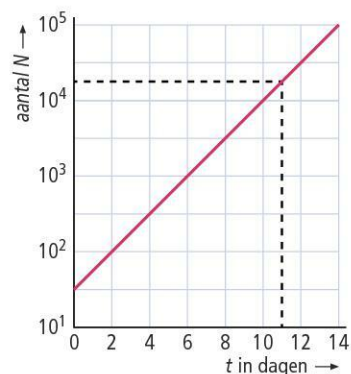
Bij lineaire schaalverdelingen wordt bij gelijke afstanden een vast getal opgeteld. Een schaalverdeling waar bij gelijke afstanden met een vast getal wordt vermenigvuldigd, heet een logaritmische schaal of logschaal. Dat vaste getal is meestal 10.



Je gebruikt een logschaal als je zowel erg grote als erg kleine waarden in één grafiek moet verwerken. Als een grafiek bij een logaritmische schaalverdeling op de verticale as een rechte lijn is, is het verband exponentieel.

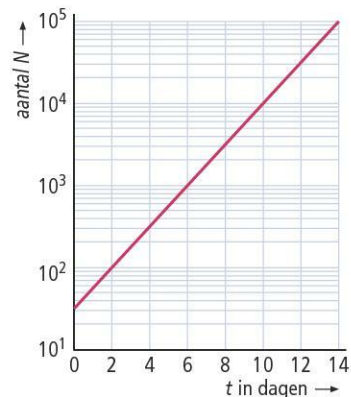
74 De grafiek gaat over het verband tussen een aantal N en de tijd t in dagen.

- In de grafiek zie je dat als $t = 11$ dat $N = 10^{4,25}$. Hoe groot is N ? Rond je antwoord af op tientallen.
- Hoe groot is N als $t = 2$?
- Hoe groot is N als $t = 8$?
- Hoe groot is N als $t = 18$?
- Bij de grafiek hoort de formule $N = b \cdot g^t$, waarbij N het aantal is en t de tijd in dagen. Bereken b en g .
- Bereken N als $t = 5$.
- Bereken t als $N = 2000$.



75 Hiernaast staat de grafiek van opdracht 74 nogmaals. Op de verticale as kun je nu direct de waarde van N aflezen.

- Hoe groot is N als $t = 0$?
- Hoe groot is N als $t = 6$?
- Lees af bij welke waarde van t er geldt dat $N = 3000$.
- En bij welke waarde van t is N gelijk aan 30 000?



Examenopdrachten

76 Kaarten schudden

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2018, tijdvak 2)

In 1992 publiceerden de Amerikaanse wiskundigen Bayer en Diaconis een artikel over het schudden van kaarten. Voor dit artikel hadden zij de meest gebruikte manier van schudden onderzocht, de zogeheten Riffle Shuffle (zie de foto). Zij kwamen tot de conclusie dat het met deze schudtechniek niet mogelijk is een stapel kaarten écht willekeurig te maken, zoals bijvoorbeeld een computer dat wel kan. Voor het spelen van een kaartspel is het goed genoeg als de kaarten ‘voldoende willekeurig’ geschud zijn.



Bayer en Diaconis ontdekten tijdens hun onderzoek dat het aantal keren dat een stapel kaarten minstens geschud moet worden om als ‘voldoende willekeurig’ bestempeld te worden, kan worden benaderd met de formule: $A = 1,5 \cdot {}^2\log(n)$.

In deze formule is A het aantal keren dat een stapel van n kaarten minstens geschud moet worden om als ‘voldoende willekeurig’ bestempeld te worden. A wordt naar boven afgerond op een geheel getal.

Het kaartspel jokeren wordt gespeeld met twee sets van 52 speelkaarten, aangevuld met in totaal 4 zogeheten jokers.

- a** Bereken hoe vaak de kaarten bij jokeren minstens geschud moeten worden volgens de formule van Bayer en Diaconis.

Hint 29

In de meeste casino's kun je het spel blackjack spelen. Dat wordt over het algemeen gespeeld met vier spellen kaarten (totaal 208 kaarten). Het aantal keer dat zo'n groot aantal kaarten minstens geschud moet worden is helemaal niet zo groot: volgens de formule van Bayer en Diaconis slechts 12 keer. Dat is maar drie keer schudden meer dan bij één spel kaarten.

Volgens de formule van Bayer en Diaconis geldt in het algemeen: als het aantal kaarten vier keer zo groot wordt, hoeft er maar drie keer extra geschud te worden.

- b** Toon dit aan met behulp van de formule voor A en de rekenregels voor logaritmen zonder gebruik te maken van getallenvoorbeelden.

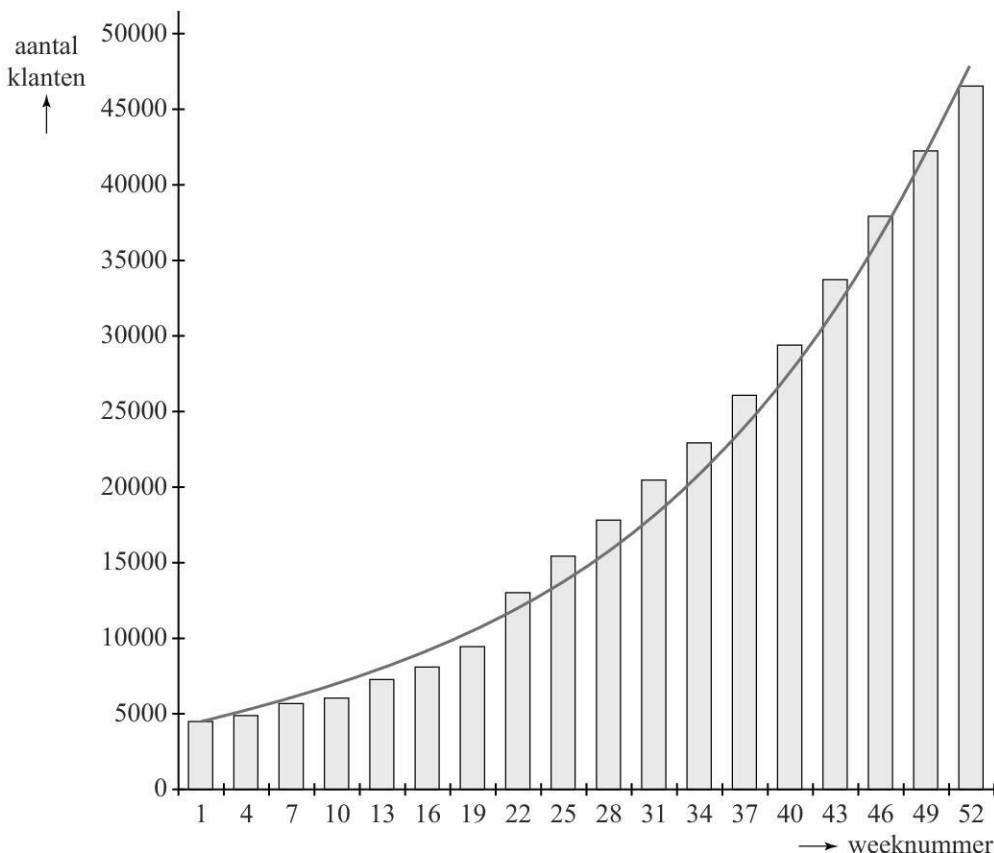
Hint 30

77 Knab

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2018, tijdvak 2)

Knab is een tamelijk nieuwe bank, gestart in 2012 als onderdeel van Aegon. In het begin groeide Knab maar langzaam: eind 2013 had de bank nog maar 4500 klanten.

Daarom besloot de bank in 2014 de zaken anders aan te pakken. Dit leverde direct resultaat op, want het aantal klanten is in 2014 tien keer zo groot geworden. Zie de figuur.



In de figuur zijn door middel van staven de aantallen klanten om de drie weken weergegeven. Bovendien is de grafiek getekend van een exponentieel model dat de werkelijke aantallen goed benadert. Het exponentiële model wordt gegeven door de formule: $N = 4500 \cdot e^{0,0463 \cdot t}$.

Hierin is t de tijd in weken sinds het begin van 2014 met $t = 0$ in week 1 en N het aantal klanten.

In week 43 lijkt het verschil tussen het aantal klanten volgens het model en het werkelijke aantal klanten het grootst.

- a** Bereken dit verschil in week 43. Rond je antwoord af op honderdtallen.

Hint 31

Zoals gezegd is het aantal klanten in het jaar 2014 vertienvoudigd. Dat lijkt inderdaad precies een jaar geduurd te hebben.

- b** Bereken met behulp van de formule het gehele aantal weken dat in het model nodig is voor een vertienvoudiging.

Hint 32

Je kunt de formule $N = 4500 \cdot e^{0,0463 \cdot t}$ zó herschrijven, dat bij een gegeven aantal klanten berekend wordt in welke week dat aantal bereikt wordt. Dat verband is van de vorm: $t = a \cdot \ln(b \cdot N)$

- c** Bereken a en b . Rond de waarde van a af op twee decimalen en de waarde van b op vijf decimalen..

Hint 33

78 Shannon-index

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2018, tijdvak 1)

De Shannon-index H is een maat voor de diversiteit (verscheidenheid) van een dieren- of plantenpopulatie in een gebied. Hoe hoger de Shannon-index, hoe groter de diversiteit. We kijken naar een gebied met twee soorten bomen. De formule voor de Shannon-index is dan:

$$H = -(p_1 \ln(p_1) + p_2 \ln(p_2))$$

waarin p_1 en p_2 de aandelen van elke soort binnen het gebied zijn. Er geldt bijvoorbeeld dat $p_1 = 0,37$ als 37% van de bomen uit soort 1 bestaat.

Bos A bestaat voor 70% uit eiken en voor 30% uit beuken en bos B bestaat voor 90% uit eiken en voor 10% uit beuken.

- a** Onderzoek met de formule voor H van welk van beide bossen de Shannon-index het grootst is.

Hint 34

In een bos met twee soorten bomen, eiken en beuken, geldt: als p het aandeel eiken is, is het aandeel beuken gelijk aan $1 - p$. De formule voor de Shannon-index kan dan geschreven worden als:

$$H = -(p \ln(p) + (1 - p) \ln(1 - p))$$

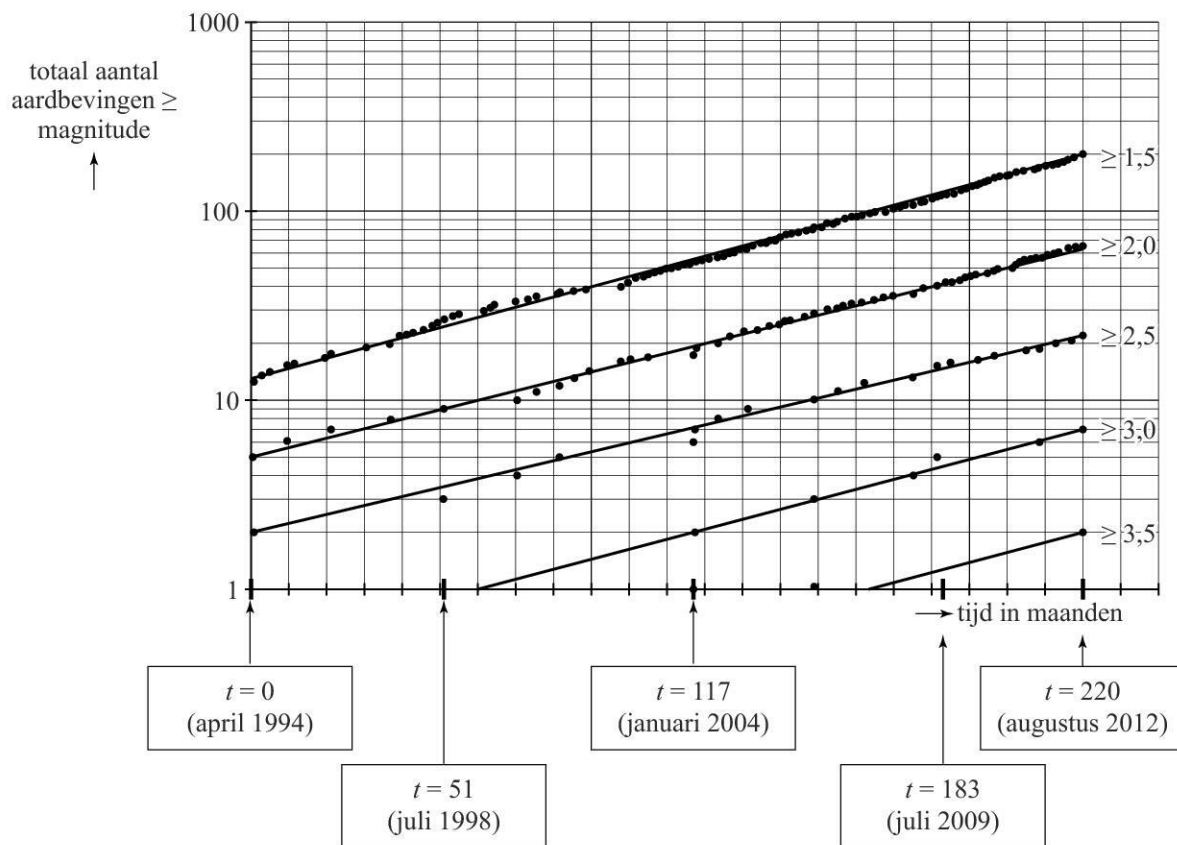
- b** Onderzoek met de grafische rekenmachine tot welke waarde de Shannonindex nadert als het aandeel eiken in het bos steeds kleiner wordt.

Hint 35

79 Groningse aardbevingen

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2019, tijdvak 1)

In de provincie Groningen vinden, als gevolg van gasproductie, regelmatig aardbevingen plaats. In 2013 is daar grootschalig onderzoek naar gedaan. Zo werd er gekeken naar het verband tussen de gasproductie en aardbevingen. De magnitude, de kracht van een aardbeving, wordt uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter. In de figuur zijn de Groningse aardbevingen vanaf 1994 verzameld en ingedeeld naar sterkte. Dat geeft bij een logaritmische schaalverdeling langs de verticale as een opvallend patroon: alle grafieken zijn bij benadering evenwijdige rechte lijnen. Elke stip in deze figuur stelt een aardbeving van een zekere magnitude voor: zo kun je zien dat er vlak voor juli 2009 een aardbeving van magnitude $\geq 3,0$ heeft plaatsgevonden: die aardbeving zie je dus ook terug bij de aardbevingen van de klassen $\geq 2,5$; $\geq 2,0$ en $\geq 1,5$.



In het onderzoek werden alleen aardbevingen bekeken die schade zouden kunnen veroorzaken. Omdat aardbevingen met een magnitude van minder dan 1,5 geen schade aanrichten, zijn deze niet in figuur 2 opgenomen.

- a Bereken voor augustus 2012 hoeveel procent van het aantal aardbevingen van magnitude $\geq 2,0$ een magnitude van 2,5 of hoger heeft. Geef je antwoord in gehele procenten.

Hint 36

Het feit dat de grafieken in figuur 2 evenwijdige rechte lijnen zijn, betekent dat het aantal aardbevingen van elke klasse exponentieel toeneemt met dezelfde groeifactor. Het totaal aantal aardbevingen A voor magnitudes $\geq 1,5$ is te beschrijven met de formule: $A = 12 \cdot e^{0,013t}$ met $t = 0$ voor april 1994 en t in maanden.

De formules van de overige lijnen in figuur 2 kunnen worden afgeleid van die voor de magnitudes $\geq 1,5$. Bekijk de grafiek voor de magnitudes $\geq 2,0$. Deze grafiek is 85 maanden later op dezelfde hoogte als de grafiek voor magnitudes $\geq 1,5$. Hieronder staan vier formules. Een van de vier is juist voor de magnitudes $\geq 2,0$:

A $A_{2,0} = 12 \cdot e^{0,013(t+85)}$ met $t = 0$ voor april 1994

B $A_{2,0} = 12 \cdot e^{0,013(t-85)}$ met $t = 0$ voor april 1994

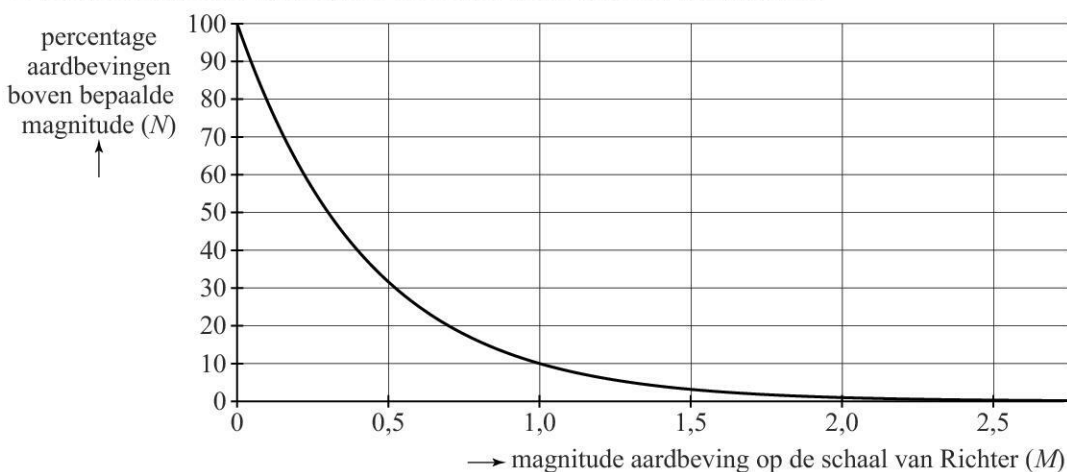
C $A_{2,0} = 12 \cdot e^{0,013t+85}$ met $t = 0$ voor april 1994

D $A_{2,0} = 12 \cdot e^{0,013t-85}$ met $t = 0$ voor april 1994

b Beredeneer welke van de vier formules juist is.

Hint 37

In een rapport van het Staatstoezicht op de Mijnen wordt geconstateerd dat er een duidelijk verband is tussen de magnitude en het percentage aardbevingen boven die magnitude. In de figuur hieronder is dat verband weergegeven.



Zo is bijvoorbeeld af te lezen dat 10% van de aardbevingen een magnitude boven de 1,0 heeft. Bij deze grafiek hoort de formule: $N = 10^{a-M}$. Hierbij is M de magnitude en N het percentage van de aardbevingen boven magnitude M .

c Laat met een berekening zien dat geldt: $a = 2$.

Hint 38

Omgekeerd kun je je ook afvragen welke magnitude de (bijvoorbeeld) 20% zwaarste aardbevingen minstens hadden. Om vragen als deze te beantwoorden, is het handig de formule te herschrijven.

De formule $N = 10^{a-M}$ is te herleiden tot $M = p + q \cdot \log(N)$.

d Bereken p en q .

Hint 39

Sinusoïden

Periodieke grafieken met een formule van de vorm $y = d + a \sin(b(x - c))$ noem je sinusoïden.

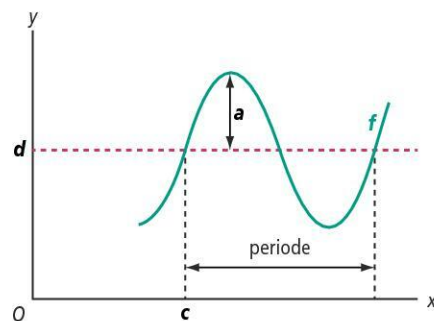
De betekenis van de getallen a , b , c en d voor de grafiek is:

- De amplitude is a als $a > 0$ en de amplitude is $-a$ als $a < 0$.
- De evenwichtsstand is d .
- Met b bereken je de periode.

Voor het verband tussen b (met $b > 0$) en de periode geldt:

$$b = \frac{2\pi}{\text{periode}} \text{ of } \text{periode} = \frac{2\pi}{b}$$

- Een punt waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat, noem je een beginpunt. Een beginpunt is bijvoorbeeld het punt (c, d) (als $a > 0$).



80 Geef de amplitude, de evenwichtsstand, de periode en de coördinaten van een beginpunt.

- $f(x) = 3 \sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$
- $h(x) = -10 + 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$
- $k(x) = -3 - 2 \sin(\pi(x - 1))$

Voorbeeld

Gegeven is $y = 4 + 3 \sin(6(x - 8))$.
 $a = 3$, de amplitude is 3.

$b = 6$, de periode is $\frac{2\pi}{6} = \frac{1}{3}\pi$.

$d = 4$, de evenwichtsstand is 4.

$c = 8$, een beginpunt is $(8, 4)$.

Symmetrie gebruiken

Bij het bepalen van bijzondere punten van een sinusoïde kun je gebruikmaken van de symmetrie en de periode.

Voorbeeld

Bereken de coördinaten van twee opeenvolgende toppen van de sinusoïde bij de formule $y = -1 + 8 \sin\left(\frac{1}{6}\pi(x - 9)\right)$.

Oplossing

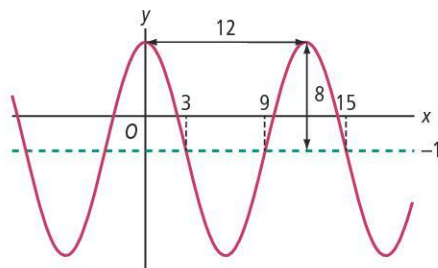
De evenwichtsstand is -1 en de amplitude is 8, dus het maximum is gelijk aan $-1 + 8 = 7$.

Het minimum is gelijk aan $-1 - 8 = -9$.

De periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{6}\pi} = 12$, een beginpunt is $(9, -1)$.

De grafiek snijdt de lijn $y = -1$ bij $x = 3$, $x = 9$ en $x = 15$.

De toppen zitten halverwege deze drie punten en zijn $(6, -9)$ en $(12, 7)$.



- 81** Gegeven is de functie $f(x) = 1,5 + 3 \sin(2x)$.
Bereken met behulp van het functievoorschrift het maximum en het minimum en voor welke waarden van x deze bereikt worden op het interval $[0, 2\pi]$.
- 82** Bereken de coördinaten van twee opeenvolgende toppen rechts van de verticale as van de volgende sinusoiden.
- a** $y = 5 + 2 \sin(x)$ **c** $y = \sin(2\pi(x - 6)) - 3$
b $y = -4 + 8 \sin(3\pi x)$ **d** $y = 6 - 1,5 \sin(8x)$
- 83** De getijdebeweging (eb en vloed) op een dag is te benaderen met de formule $H = -10 + 70 \cdot \sin(0,5t)$. Hierbij is H de waterhoogte in cm boven NAP en t de tijd in uren met $t = 0$ om 00.00 uur.
- a** Bereken de periode in minuten nauwkeurig.
b Leg uit dat de waterhoogte volgens de formule om 3.08 uur maximaal is.
c Op welk tijdstip is die dag de waterhoogte weer maximaal?
d Hoe laat zal de volgende dag de waterhoogte weer maximaal zijn?
e Geef twee tijdstippen waarop de waterhoogte het snelst toeneemt.

Formule bij een sinusoidale opstellen

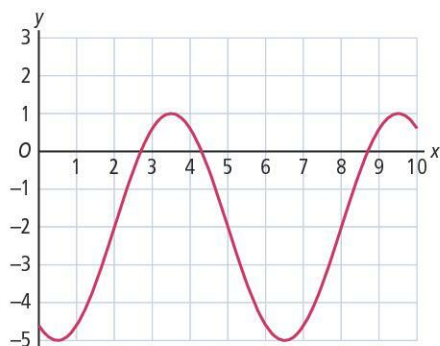
- 1 Lees het maximum en het minimum af.
- 2 Bereken de evenwichtsstand d en de amplitude a .
- 3 Lees de periode af en bereken b met $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$
- 4 Lees een beginpunt van de sinusoidale af, de x -coördinaat hiervan is gelijk aan c .
- 5 Schrijf de formule op.

Voorbeeld

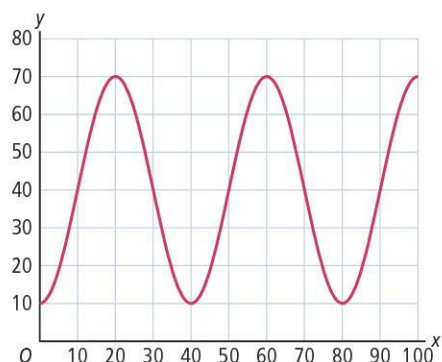
Stel een formule op bij de sinusoidale.

Oplossing

- 1 Het maximum is 1 en het minimum is -5.
- 2 De evenwichtsstand is $d = (1 + (-5)) : 2 = -2$.
De amplitude a is het verschil tussen het maximum en de waarde van d , dus $a = 1 - (-2) = 3$.
- 3 De grafiek gaat bij $x = 2$ en $x = 8$ stijgend door de evenwichtsstand. De periode is 6 dus $b = \frac{2\pi}{6} = \frac{1}{3}\pi$.
- 4 Een beginpunt is $(2, -2)$. Dus $c = 2$.
- 5 Een formule is $y = -2 + 3\sin(\frac{1}{3}\pi(x - 2))$.



- 84**
- Stel bij de grafiek een passend functievoorschrift op.
 - Geef de coördinaten van twee punten waar de grafiek overgaat van toenemend stijgen naar afnemend stijgen.
 - Geef op het interval $[150, 250]$ twee waarden van x waar de functie een maximum heeft.



Examenopdrachten

85 Jaarringen

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2018, tijdvak 1)

Op de foto zie je een doorgezaagde boomstam. Hierin zijn zogenaamde jaarringen te zien. Deze ontstaan doordat de boom in de zomer snel groeit: dan wordt er licht gekleurd hout gevormd. In de winter groeit de boom langzaam en wordt er donker gekleurd hout gevormd. Zo komt er elk jaar een ring bij, die uit een licht en een donker gedeelte bestaat: een jaarring.

In deze opgave kijken we eerst naar de groeisnelheid van de diameter (G) van een grove den. Omdat een boom afwisselend snel en langzaam groeit, kun je deze groeisnelheid modelleren met behulp van sinusoiden.

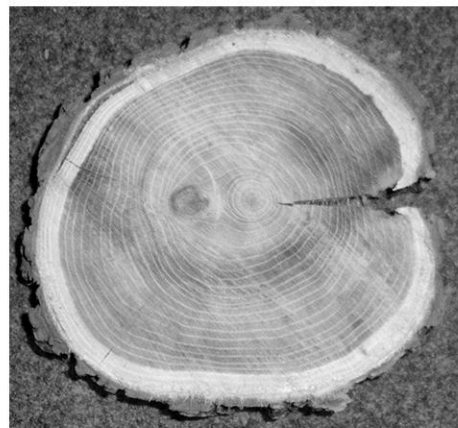
Voor de groeisnelheid van de diameter van een grove den gelden de volgende eigenschappen:

- de groeisnelheid is drie maanden na het ontkiemen van het zaadje maximaal;
- de groeisnelheid is negen maanden na het ontkiemen minimaal;
- dit patroon herhaalt zich elk jaar;
- de maximale groeisnelheid is 2,1 cm per jaar;
- de minimale groeisnelheid is 0,3 cm per jaar.

Voor de groeisnelheid van de grove den kun je op basis van deze eigenschappen een formule opstellen van de vorm $G = a + b \sin(c(t - d))$.

Hierin is G de groeisnelheid in cm per jaar en t de tijd in jaren na het ontkiemen.

- Bereken de waarden van a , b , c en d in deze formule.
Licht je antwoord toe.



Hint 40

Nu bekijken we de diameter van de stam van deze grove den. Daarbij kan de volgende formule worden opgesteld:

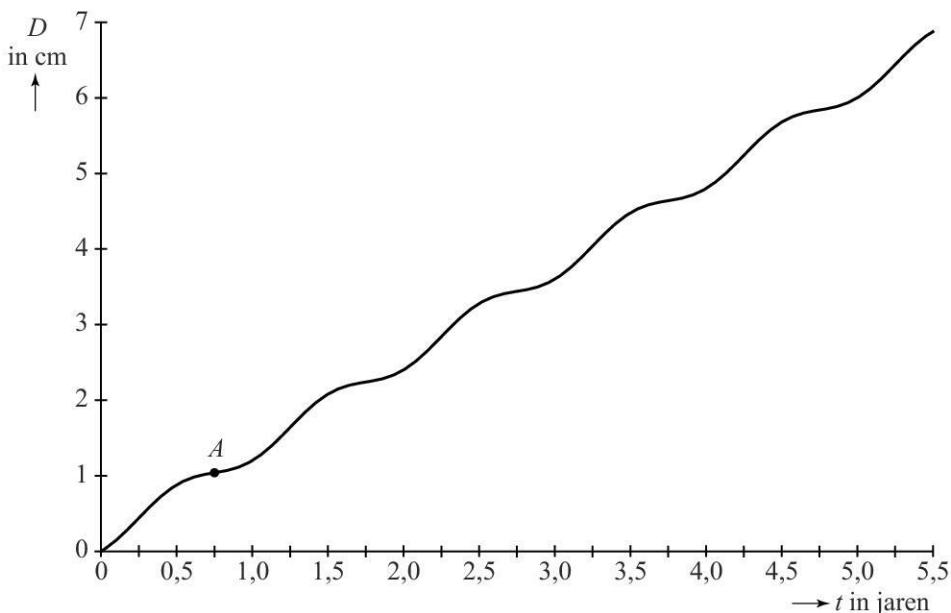
$$D = 1,2t + 0,14 + 0,14 \sin(2\pi(t - 0,25))$$

Hierin is D de diameter van de stam in cm en t de tijd in jaren na het ontkiemen met $t = 0$ op het moment van ontkiemen.

- Bereken met behulp van de formule op welk tijdstip de diameter een dikte van 5 cm bereikt. Rond je antwoord af op hele maanden.

Hint 41

De grafiek van D is in de figuur getekend.



In de grafiek is te zien dat de diameter schommelt rondom een lijn. De formule van deze lijn is $T = 1,2t + 0,14$. In plaats van de diameter te berekenen met de formule voor D is deze ook te benaderen met behulp van de formule van de lijn. Deze benadering zal in de meeste gevallen iets afwijken van de diameter volgens de formule van D .

c Onderzoek hoe groot deze afwijking maximaal kan zijn.

Hint 42

De diameter van de grove den groeit in de eerste zes maanden na het ontkiemen meer dan in de tweede zes maanden na het ontkiemen. Dat wisselen van groeisnelheid herhaalt zich zo in de jaren daarna.

d Bereken met behulp van de formule van D hoeveel procent van de jaarlijkse groei in de eerste helft van het jaar plaatsvindt. Rond je antwoord af op gehele procenten.

Hint 43

In het begin van deze opgave staat vermeld dat de groeisnelheid van de diameter G na negen maanden ($t = 0,75$) minimaal is, namelijk 0,3 cm per jaar. De minimale groeisnelheid bij $t = 0,75$ die met de formule van D berekend wordt (zie punt A in de grafiek), is niet precies gelijk aan 0,3 cm per jaar.

e Geef in de grafiek van D nog een ander punt dan punt A aan waar de groeisnelheid volgens de formule van D minimaal is en bereken de minimale groeisnelheid in cm/jaar met de grafische rekenmachine. Rond je antwoord af op twee decimalen.

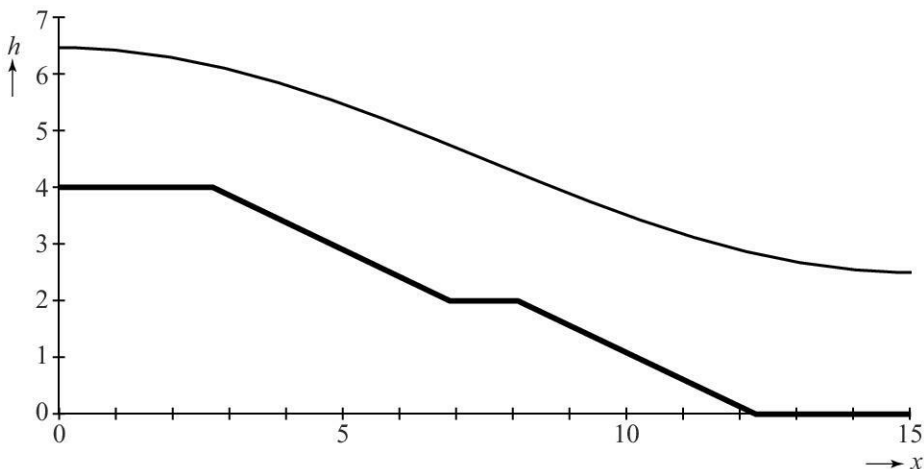
Hint 44

86 Station Amersfoort

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2015, tijdvak 1)

Op het station van Amersfoort is een trap naar het perron voorzien van een overkapping. De onderkant van de overkapping (op de foto met een donkere lijn aangegeven) heeft de vorm van (een deel van) een sinusoïde.

In de figuur hieronder zie je een model van het zijaanzicht van de overkapping en van de trap naar het perron. Hierin is h de hoogte ten opzichte van het perron en x de horizontale afstand tot het hoogste punt van de overkapping, beide in meters.



In de figuur is het hoogste punt van de sinusode $(0; 6,46)$ en het laagste punt $(15; 2,48)$. We kunnen voor deze sinusode een formule opstellen van de vorm: $h = a + b \cdot \sin(c(x + 7,5))$. Hierbij geldt: $a \approx 4,5$, $b \approx 2,0$ en $c \approx 0,2$.

- a** Bereken met behulp van het hoogste en het laagste punt van de sinusode de waarden van de constanten a , b en c in twee decimalen nauwkeurig.

Hint 45

In de figuur is de trap weergegeven met lijnstukken: van $(0; 4)$ via $(2,7; 4)$, $(6,9; 2)$, $(8,1; 2)$ en $(12,3; 0)$ naar $(15; 0)$. We houden dus geen rekening met het feit dat de trap gedeeltelijk uit traptreden bestaat.

Door de gemiddelde hoogte van zowel de trap als van de overkapping te bepalen, kunnen we het verschil hiertussen berekenen.

- b** Bereken dit verschil.

Hint 46

In de figuur lijkt het dat de afdalende delen van de trap steiler zijn dan de maximale daling van de overkapping.

Met behulp van de formule $h = 4,5 + 2,0 \cdot \sin(0,2(x + 7,5))$ en de beschrijving van de trap kan voor iedere waarde van x het hoogteverschil tussen de overkapping en de trap berekend worden.

- c** Onderzoek of er een waarde van x is, waar het hoogteverschil kleiner is dan 2,35 meter.

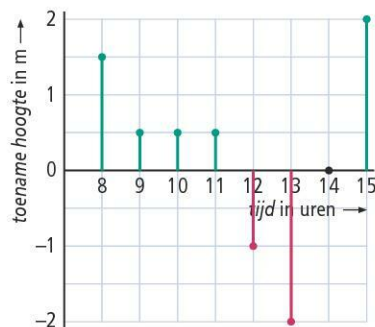
Hint 47

Toenamediagrammen

In een toenamediagram kun je toe- en afnamen zichtbaar maken. Bij toenames worden de staafjes omhoog getekend, bij afnamen omlaag. De grafiek hiernaast is een toenamediagram.

- 87 In het toenamediagram zie je dat de waterhoogte tussen 7 uur en 8 uur gestegen is met 1,5 m.

- Lees af op ongeveer welk tijdstip de waterhoogte een maximum bereikt?
- Gedurende welke periode stijgt de waterhoogte lineair?
- Om 07.00 uur is de waterhoogte 3 m.
Hoe hoog staat het water om 13.00 uur? Leg je antwoord uit.

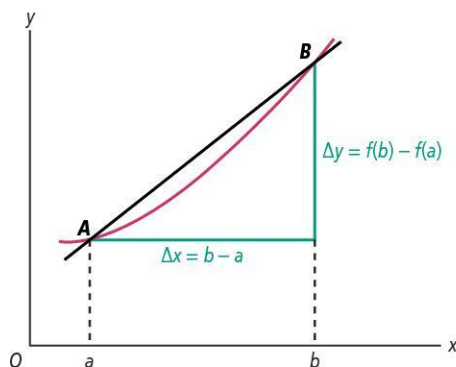


Differentiequotient

De gemiddelde verandering of het differentiequotient van een functie f over het interval $[a, b]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Het differentiequotient van de functie over een interval is de richtingscoëfficiënt van de lijn door het beginpunt en het eindpunt van de grafiek op dat interval.

- 88 De afstand die een bepaald voertuig aflegt, voldoet aan de functie $s(t) = 40 \cdot 1,3^t$ met t in minuten en s in meters. Bereken de gemiddelde snelheid in meters per seconde van dit voertuig tussen $t = 3$ en $t = 6$.



Helling van een grafiek in een punt

De helling van een grafiek in een punt P is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de lijn die de grafiek raakt in punt P . Deze lijn heet de raaklijn.

De helling in een punt kun je benaderen door de gemiddelde verandering over een klein interval te berekenen. Hoe kleiner het interval, hoe beter die benadering is.

In een tijd-afstand situatie is de helling gelijk aan de snelheid.

Voorbeeld

Benader de helling van de grafiek van de functie $f(x) = 2^x$ in het punt $(3, 8)$.

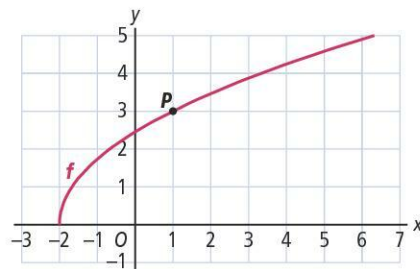
Oplossing

Kies het interval $[3; 3,001]$.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(3,001) - f(3)}{3,001 - 3} = \frac{8,005\,547\,1 - 8}{0,001} \approx 5,547$$

De helling van de grafiek in het punt $(3, 8)$ is ongeveer 5,547.

- 89**
- Teken de raaklijn aan grafiek van f in het punt P en gebruik deze raaklijn om een schatting te maken van de helling van de grafiek in het punt P .
 - Bij de grafiek hoort het functievoorschrift $f(x) = \sqrt{3x + 6}$. Bereken de gemiddelde verandering op het interval $[1, 5]$.
 - Benader met behulp van een klein interval de helling van de grafiek van f in het punt P .



Afgeleide functies en differentiëren

Bij een functie f hoort vaak een tweede functie waarmee je de helling in een punt van de grafiek van f kunt berekenen. Die functie heet de afgeleide functie van f . De notatie voor de afgeleide functie is f' (spreek uit als f -accent).

Het bepalen van de afgeleide functie heet differentiëren.

De afgeleiden van de standaardfuncties zijn:

- $f(x) = x^a$ $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$
- $f(x) = c$ (een constante) $f'(x) = 0$
- $f(x) = e^x$ $f'(x) = e^x$
- $f(x) = a^x$ $f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$
- $f(x) = {}^a\log(x)$ $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
- $g(x) = f(x) + c$ $g'(x) = f'(x)$
- $g(x) = c \cdot f(x)$ $g'(x) = c \cdot f'(x)$

Bij het differentiëren van functies gebruik je de volgende regels.

- somregel: $s(x) = f(x) + g(x)$ $s'(x) = f'(x) + g'(x)$
- kettingregel: $k(x) = f(g(x))$ $k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ of $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$
- productregel: $p(x) = g(x) \cdot h(x)$ $p'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
- quotiëntregel: $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ $f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$

De somregel, kettingregel, productregel en quotiëntregel zijn bij het centraal examen gegeven op een pagina Formules van het opgavenblad.

90 Differentieer.

- $g(x) = 8x(x - 7)$
- $h(x) = \sqrt{16 - 0,5x}$
- $k(x) = 5x^{7,2} + \frac{3}{x^2}$
- $j(x) = (7x^2 + 1) \cdot \sqrt{x - 9}$
- $m(x) = (5x^{2,4} + 4)^3$
- $z(x) = \frac{7x - 4}{2x^2 + 3}$

91 Differentieer.

a $p(x) = 3 \cdot e^x$

d $q(x) = 7 \cdot e^{5x-3}$

b $d(x) = x^2 \cdot 2^x$

e $a(x) = 2,4 \cdot {}^2\log(5x-2)$

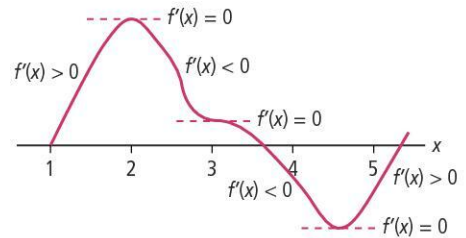
c $k(x) = \frac{1}{2 \cdot \log(x)}$

f $g(x) = \frac{2x+1}{3+6 \cdot 1,2^x}$

Redeneren met de afgeleide

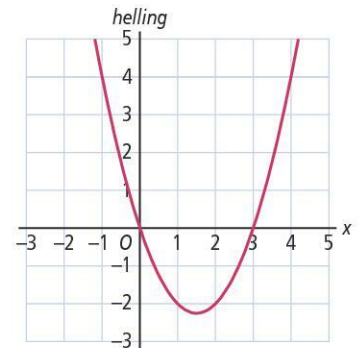
Met behulp van de afgeleide van een functie kun je beredeneren hoe het verloop van de grafiek van de functie is. Daarbij moet je beredeneren of de afgeleide positief, negatief of nul is en of de afgeleide toeneemt of afneemt.

- Als f een extreme waarde heeft, dan is $f'(x) = 0$.
- Als de grafiek van f toenemend stijgend is, dan is $f'(x) > 0$ en neemt $f'(x)$ toe.
- Als de grafiek van f afnemend stijgend is, dan is $f'(x) > 0$ en neemt $f'(x)$ af.
- Als de grafiek van f afnemend dalend is, dan is $f'(x) < 0$ en neemt $f'(x)$ toe.
- Als de grafiek van f toenemend dalend is, dan is $f'(x) < 0$ en neemt $f'(x)$ af.



92 Gegeven is de grafiek van de afgeleide $f'(x)$.

- Bij welke waarden van x heeft de grafiek van f een top?
- Geef van deze toppen aan of de functie daar een maximum of een minimum heeft.
- Op welk interval is de grafiek van f afnemend stijgend?
- Geef voor het interval $[0, 1\frac{1}{2}]$ aan van welk soort stijgen of dalen er sprake is.



93 Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 + 3x)^2$.

- Bereken met behulp van de afgeleide de coördinaten van de toppen van de grafiek van f .
- Bereken de helling van de grafiek van f in het punt $(1, 16)$.

- 94** Beredeneer met behulp van de afgeleide dat de volgende beweringen kloppen.
- a** De grafiek van $T = 2p^3 + 3p^2 - 5$ heeft een top bij $p = 0$ en een bij $p = -1$.
 - b** De grafiek van $N(t) = 15 + 32\sqrt{5t - 10}$ is afnemend stijgend voor $t > 2$.
 - c** De grafiek van $p(x) = \frac{12x - 13}{4x - 5}$ is afnemend dalend voor $x > 1\frac{1}{4}$.
- 95** Beredeneer met behulp van een plot van de afgeleide of de volgende beweringen kunnen kloppen.
- a** De grafiek van $A = 5 + {}^{1,7}\log(3,5t + 1)$ is afnemend stijgend.
 - b** De grafiek van $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ gaat bij $x = 2$ over van toenemend dalend in afnemend dalend.

Examenopdrachten

96 Shannon-index

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2018, tijdvak 1)

De Shannon-index H is een maat voor de diversiteit

(verscheidenheid) van een dieren- of plantenpopulatie in een gebied. Hoe hoger de Shannon-index, hoe groter de diversiteit.

In een bos met twee soorten bomen, eiken en beuken, geldt: als p het aandeel eiken is, is het aandeel beuken gelijk aan $1 - p$.

Er geldt bijvoorbeeld dat $p = 0,37$ als 37% van de bomen een eik is.

De formule voor de Shannon-index is:

$$H = -(p \ln(p) + (1 - p) \ln(1 - p))$$

Met behulp van de afgeleide van H kunnen we onderzoeken bij welke verhouding eiken en beuken de Shannon-index

maximaal is. Er geldt:

$$\frac{dH}{dp} = -\ln(p) + \ln(1 - p)$$

Bereken met behulp van $\frac{dH}{dp}$ voor welke percentages eiken en beuken de Shannon-index H van het bos maximaal is.

Hint 48

97 Bitcoins

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2018, tijdvak 1)

De bitcoin is een digitale munteenheid die alleen online bestaat. Hij bestaat sinds 1 januari 2009 en kan worden gebruikt om te betalen in webwinkels of voor andere online diensten.

Bitcoins worden niet, zoals normaal geld, door een centrale bank in omloop gebracht. In plaats daarvan zijn alle bitcoins die in omloop zijn, gecreëerd door computers mee te laten werken aan oplossingen van geselecteerde wiskundige problemen.

De moeilijkheidsgraad van deze problemen stijgt exponentieel volgens de formule $D = 3,65 \cdot e^{0,533 \cdot t}$.

Hierin is D een maat voor de moeilijkheidsgraad en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2013.

Stel de formule van de afgeleide van D op en beredeneer hoe je aan deze formule kunt zien dat de grafiek van D toenemend stijgend is.

Hint 49

98 Zeepbellen

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2018, tijdvak 2)

Op de foto zie je een dubbele zeepbel: twee bolvormige zeepbellen die aan elkaar vastzitten. Beide zeepbellen zijn een deel van een bol. Het scheidingsvlies tussen deze zeepbellen is ook een deel van een bol. Men heeft ontdekt dat voor elke

dubbele zeepbel de volgende formule geldt: $c = \frac{ab}{a-b}$

In deze formule is a de straal van de grootste zeepbel, b de straal van de kleinste zeepbel en c de straal van het bolvormige scheidingsvlies. In de figuur is dit schematisch weergegeven.

Neem aan dat de grootste zeepbel een vaste straal heeft van

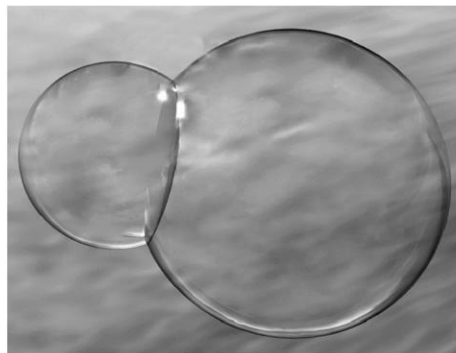
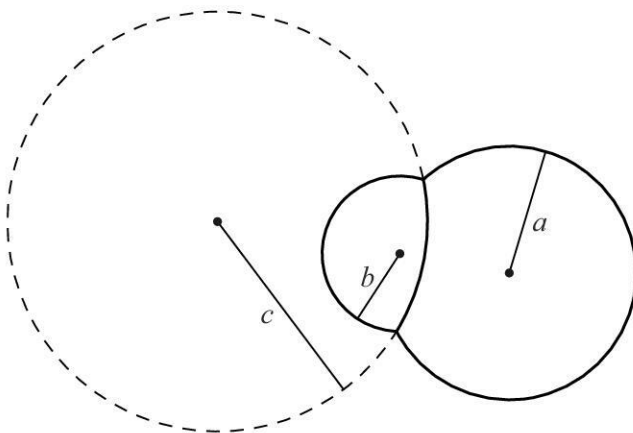
3 cm (dus $a = 3$). De formule $c = \frac{ab}{a-b}$ wordt dan $c = \frac{3b}{3-b}$

met $0 < b < 3$.

We vragen ons af wat er gebeurt als de straal van de kleinste zeepbel steeds kleiner wordt: wordt het scheidingsvlies dan steeds platter of steeds boller? Het antwoord op deze vraag kunnen we vinden met behulp van de afgeleide van c .

Stel de afgeleide $\frac{dc}{db}$ van $c = \frac{3b}{3-b}$ op en

beredeneer aan de hand van de formule van deze afgeleide of c toeneemt of afneemt als de straal van de kleinste zeepbel kleiner wordt.



Hint 50

99 Kaarten schudden

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2018, tijdvak 2)

In 1992 publiceerden de Amerikaanse wiskundigen Bayer en Diaconis een artikel over het schudden van kaarten. Voor dit artikel hadden zij de meest gebruikte manier van schudden onderzocht, de zogeheten Riffle Shuffle (zie de foto). Zij kwamen tot de conclusie dat het met deze schudtechniek niet mogelijk is een stapel kaarten écht willekeurig te maken, zoals bijvoorbeeld een computer dat wel kan. Voor het spelen van een kaartspel is het goed genoeg als de kaarten ‘voldoende willekeurig’ geschud zijn.

Bayer en Diaconis ontdekten tijdens hun onderzoek dat het aantal keren dat een stapel kaarten minstens geschud moet worden om als ‘voldoende willekeurig’ bestempeld te worden, kan worden benaderd met de formule:

$$A = 1,5 \cdot 2^{\log(n)}.$$

In deze formule is A het aantal keren dat een stapel van n kaarten minstens geschud moet worden om als ‘voldoende willekeurig’ bestempeld te worden. A wordt naar boven afgerond op een geheel getal.

Als het aantal te schudden kaarten toeneemt, neemt ook het aantal keren dat er minstens geschud moet worden toe. Dit aantal neemt echter steeds

langzamer toe. Je kunt dit zien aan de afgeleide $\frac{dA}{dn}$

Stel de formule op van de afgeleide $\frac{dA}{dn}$ en beredeneer aan de hand van deze formule, dus zonder getallen in te vullen of een schets te maken, dat A afnemend stijgend is.

Hint 51

100 Verpakkingen

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2019, tijdvak 1)

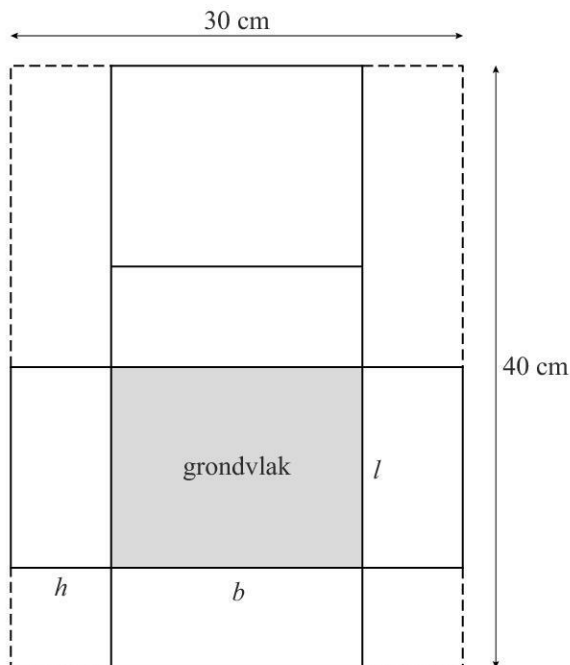
Om een verpakking in de vorm van een balk te maken, wordt een karton van 30×40 cm gebruikt.

In de figuur zie je hoe de uitslag daarvan uit het karton geknipt wordt. Hierbij is h de hoogte, b de breedte en l de lengte van de verpakking in cm. De uitslag eindigt precies bij de randen van het karton. Zie de figuur.

De formule voor de inhoud V in cm^3 van de verpakking uitgedrukt in de hoogte h in cm is:
 $V = 2h^3 - 70h^2 + 600h$.

Met behulp van deze formule is vast te stellen voor welke hoogte h (met $h \leq 15$) de inhoud maximaal is. Bereken met behulp van differentiëren bij welke hoogte de inhoud maximaal is. Geef je antwoord in één decimaal.

Hint 52



101 Goudplevieren

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2019, tijdvak 1)

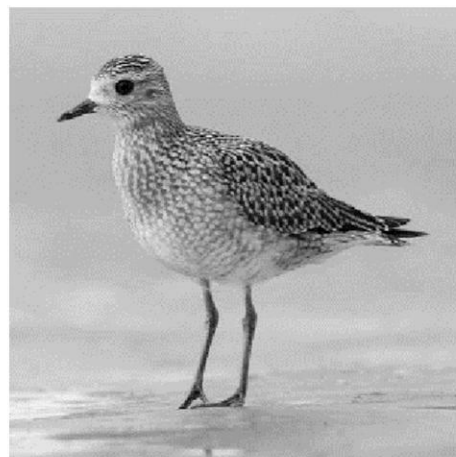
Een goudplevier is een vogel die niet in Nederland broedt, maar tijdens zijn trektochten wel in Nederland te vinden is. Tijdens hun verblijf in Nederland bouwen de goudplevieren een reserve op voor de komende trektochten. Hierdoor nemen ze toe in gewicht. Het vetpercentage van een vogel is de hoeveelheid lichaamsvet als percentage van het totale gewicht van de vogel.

Voor het vetpercentage in het najaar gaan we uit van de volgende formule:

$$P_{\text{najaar}} = \frac{2300 + 60t}{207 + 0,6t}$$

Hierin is P_{najaar} het vetpercentage van de vogel in het najaar en t de tijd in dagen na het begin van de gewichtstoename. Met behulp van de afgeleide van P_{najaar} kan men onderzoeken of het vetpercentage P_{najaar} afnemend stijgend is. Stel de formule van de afgeleide van P_{najaar} op en onderzoek daarmee of P_{najaar} afnemend stijgend is.

Hint 53



102 Groningse aardbevingen

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2019, tijdvak 1)

In de provincie Groningen vinden, als gevolg van gasproductie, regelmatig aardbevingen plaats. In 2013 is daar grootschalig onderzoek naar gedaan. Zo werd er gekeken naar het verband tussen de gasproductie en aardbevingen.

De magnitude, de kracht van een aardbeving, wordt uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter.

Het aantal aardbevingen A nam exponentieel toe. Het totaal aantal aardbevingen A voor magnitudes $\geq 1,5$ is te beschrijven met de volgende formule: $A = 12 \cdot e^{0,013t}$ met $t = 0$ voor april 1994 en t in maanden.

Bereken door middel van differentiëren de waarde van de afgeleide van A voor $t = 117$. Geef je antwoord in één decimaal en leg uit wat de betekenis van deze waarde is in deze situatie.

Hint 54

Recursieve formule

Een opeenvolging van getallen heet een rij en de getallen in de rij heten de termen. Bij veel getallenrijen kun je de volgende term berekenen uit de voorafgaande term(en) met een formule. Dit heet recursie en de bijbehorende formule heet een recursieve formule.

De termen van een rij noteer je met de indexnotatie zoals u_0 , u_1 en u_n , of met de functienotatie $u(0)$, $u(1)$ en $u(n)$.

De getallen $0, 1, 2, 3, \dots, n-1, n, n+1$ zijn de rangnummers van de rij.

De eerste term van een rij heet de beginterm, dit kan $u(0)$ of $u(1)$ zijn. Om een rij vast te leggen, heb je één term nodig.

Meestal kies je daarvoor de beginterm.

- 103**
- a Gegeven is de rij 34, 29, 24, 19.
Bereken de volgende vier termen van deze rij en stel een recursieve formule op.
 - b Geef de termen u_1 tot en met u_5 bij de rij $u_{n+1} = 3 \cdot u_n - 4$ met $u_0 = 3$.
 - c Gegeven is de rij 400, -200, 100, -50.
Bereken de volgende vier termen van deze rij en stel een recursieve formule op.

- 104**
- Gegeven is de recursieve formule $u(n+1) = 12 + 0,6 \cdot u(n)$ met $u(0) = 50$.
- a Maak een tabel en een grafiek bij deze formule.
 - b Naar welke grenswaarde naderen de termen van de rij?

Directe formule, rekenkundige en meetkundige rijen

Een rij waarvan je een term vindt door bij de voorafgaande term een constante a op te tellen of af te trekken, heet een rekenkundige rij. De constante a heet het verschil van de rekenkundige rij. De bijbehorende recursieve formule is $u(n+1) = u(n) + a$ met beginterm $u(0) = b$.

Bij een rekenkundige rij kun je de waarde van $u(n)$ direct berekenen met de directe formule $u(n) = a \cdot n + b$.

Een rij waarvan je een term vindt door de voorafgaande term met een constante r te vermenigvuldigen, heet een meetkundige rij. Factor r heet de reden van de meetkundige rij.

De recursieve formule is $u(n+1) = r \cdot u(n)$ met beginterm $u(0) = b$. Bij een meetkundige rij kun je de waarde van $u(n)$ direct berekenen met de directe formule $u(n) = b \cdot r^n$.

Voorbeeld

Gegeven is de rij 90, 86, 82, 78, 74, ...
De beginterm is $u(0) = 90$.

Bereken de volgende twee termen van deze rij en stel een recursieve formule op voor deze rij u .

Oplossing

Je ziet dat je de volgende term kunt berekenen door van de voorafgaande term 4 af te trekken.

n	0	1	2	3	4	5	6
$u(n)$	90	86	82	78	74	...	...

$$u(5) = 74 - 4 = 70 \text{ en } u(6) = 70 - 4 = 66$$

Een recursieve formule is

$$u(n) = u(n-1) - 4 \text{ met } u(0) = 90.$$

Je kunt een recursieve formule invullen op je rekenmachine door de instelling van je rekenmachine op rij of recursie te zetten.

Voorbeeld 1

De rij 150, 155, 160, 165, ... heeft beginterm $u_0 = 150$.

Stel een recursieve en een directe formule op bij deze rij.

Oplossing

n	0	1	2	3
u_n	150	155	160	165

u is een rekenkundige rij.

Het verschil is 5 en de beginterm is 150.

Een recursieve formule is $u_n = u_{n-1} + 5$ met $u_0 = 150$.

Een directe formule is $u_n = 5n + 150$.

Voorbeeld 2

Stel een recursieve en een directe formule op bij de rij $v(1) = 1000$, $v(2) = 500$, $v(3) = 250$, $v(4) = 125$, ...

Oplossing

n	1	2	3	4
$v(n)$	1000	500	250	125

v is een meetkundige rij met reden $\frac{1}{2}$.

Een recursieve formule is $v(n+1) = \frac{1}{2} \cdot v(n)$ met $v(1) = 1000$.

$v(0) = 2000$. Een directe formule is $v(n) = 2000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

105 Gegeven zijn de rijen:

A: 14, 9, 4, -1, ... C: 3, 7, 15, 31, ...,

B: $\frac{1}{2}$, 2, 8, 32, ... D: 10; 12; 14,4; 17,28; ...

- Welke rijen zijn rekenkundig? En welke rijen zijn meetkundig?
- Stel de recursieve formules op bij de gegeven rijen.
- Stel bij de rekenkundige en de meetkundige rijen de directe formules op.

Som van een rekenkundige rij

Bij een rekenkundige rij u is de som van een aantal termen $u(p)$ tot en met $u(q)$ gelijk aan:

$$\sum_{k=p}^q u(k) = \frac{1}{2} \cdot \text{aantal termen} \cdot (\text{eerste term} + \text{laatste term}).$$

Bij een rij $u(n)$ vormen de uitkomsten $s(0) = \sum_{k=0}^0 u(k)$,

$$s(1) = \sum_{k=0}^1 u(k), s(2) = \sum_{k=0}^2 u(k) \dots, s(n) = \sum_{k=0}^n u(k) \text{ ook weer}$$

een rij.

Deze rij getallen noem je de somrij, vastgesteld door

$$s(n) = \sum_{k=p}^n u(k) \text{ waarbij } u(p) \text{ de eerste term van de rij is.}$$

Voorbeeld

Gegeven is de rij $u(n) = 200 - 3n$.

Bereken $\sum_{k=0}^{15} u(k)$.

Oplossing

De rij u is een rekenkundige rij.

Het aantal op te tellen termen is 16.

De eerste term is

$$u(0) = 200 - 3 \cdot 0 = 200.$$

De laatste term is

$$u(15) = 200 - 3 \cdot 15 = 155.$$

$$\text{De som is } \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot (200 + 155) = 2840.$$

106 a Bereken $\sum_{n=3}^{15} (2n + 5)$.

b Gegeven $u(n) = u(n-1) - 10$ met $u(0) = 48$.
Bereken $s(10)$.

c Bereken de som $12 + 15 + 18 + \dots + 102$.

107 Gegeven is de rij $u_n = -2n + 15$. De rij s is $s_n = \sum_{k=0}^n u(k)$.

a Bereken s_0 , s_1 , s_2 en s_{20} .

b Laat zien dat $s_n = \sum_{k=0}^n u(k) = \frac{1}{2}(n+1)(-2n+30)$.

Som van een meetkundige rij

Bij een meetkundige rij u met $u(n) = b \cdot r^n$ geldt voor de som van de termen $u(p)$ tot en met $u(q)$:

$$\text{som} = \frac{\text{eerstvolgende term} - \text{eerste term}}{\text{reden} - 1}$$

Je kunt dit ook schrijven als $\sum_{k=p}^q u(k) = \frac{b \cdot r^{q+1} - b \cdot r^p}{r - 1}$

108 Bereken en rond je antwoord zo nodig af op drie decimalen.

a $\sum_{k=2}^{12} 18 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$

b $\sum_{k=0}^{15} (1,3)^k$

c $0,1 + 0,5 + 2,5 + 12,5 + \dots + 39062,5$

Examenopdrachten

109 Muziek op cd's

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2014, tijdvak 2)

De verkoop van cd's is de laatste jaren sterk aan het dalen. Een belangrijke reden van deze terugloop is de mogelijkheid om muziek te downloaden van het internet.

We zoeken een model waarmee we de toekomstige downloadverkoop kunnen beschrijven. Een model dat redelijk past bij de gegevens tot nu toe wordt

gegeven door de formule: $D(n) = \frac{19,0}{1 + 26,14 \cdot 0,73^n}$

Hierin is $D(n)$ het aantal downloadverkoppen in miljoenen in jaar n , met $n = 0$ is het jaar 2008.

Een model dat de toekomstige cd-verkoop beschrijft is het volgende:

$C(n) = 0,91 \cdot C(n-1)$ met $C(0) = 18,0$.

Hierbij is $C(n)$ het aantal verkochte cd's in miljoenen in jaar n , met $n = 1$ is het jaar 2009. Dus er zijn 18 miljoen cd's verkocht in 2008.

Bepaal in welk jaar het aantal verkochte cd's voor het eerst kleiner is dan het aantal downloadverkoppen.

Voorbeeld

Gegeven is de meetkundige rij
16, 48, 144, 432,

Bereken de som van de eerste tien termen.

Oplossing

De reden is $r = 3$ en $u(0) = 16$.

Een directe formule is $u(n) = 16 \cdot 3^n$.

De som is

$$\sum_{k=0}^9 u(k) = \frac{u(10) - u(0)}{3 - 1} = \frac{944784 - 16}{3 - 1} = 472384.$$

Hint 55

110 Een tegen honderd

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2015, tijdvak 2)

Eén tegen honderd is een populair televisiespelletje. Eén kandidaat speelt tegen 100 tegenspelers. Er wordt een vraag gesteld die eerst alle tegenspelers via een kastje beantwoorden. Daarna beantwoordt de kandidaat de vraag. Is zijn antwoord goed dan krijgt hij een bedrag voor elke tegenspeler die de vraag fout beantwoordde. Deze tegenspelers doen daarna niet meer mee. Zij zijn 'weggespeeld'.

Het spel gaat verder met de overige spelers met de volgende ronde: er wordt weer een vraag gesteld. Dit gaat door tot de kandidaat een fout antwoord geeft of er geen tegenspelers meer over zijn. Bij iedere vraag geldt het volgende: het bedrag dat per weggespeelde speler door de kandidaat tijdens de betreffende ronde gewonnen wordt, is gelijk aan € 50 000 gedeeld door het aantal nog meespelende tegenspelers. Dus als er nog 50 tegenspelers over zijn, is elke tegenspeler € 1000 waard. Zijn er dan 6 die het antwoord fout hebben, dan voegt de kandidaat € 6000 toe aan zijn totaalbedrag en speelt hij verder tegen de overige 44 spelers. Alle berekende bedragen worden voortdurend op gehele euro's afgerond. We gaan er in deze opgave van uit dat de kandidaat op alle vragen het goede antwoord weet en we zien af van andere regels van het spel.

- a** Bereken hoeveel een kandidaat in totaal wint als hij in vijf rondes elke keer 20 tegenspelers wegspeelt.

Hint 56

Het lukt de kandidaten niet vaak alle tegenstanders weg te spelen. Maar als ze winnen, blijken ze altijd minstens € 50 000 te winnen.

- b** Leg uit waarom een winnaar altijd minstens € 50 000 wint.

Hint 57

Door per ronde steeds één speler weg te spelen, wint de kandidaat het maximale bedrag. In de tabel zie je hoe het totaalbedrag bij dit spelverloop oploopt. Ook hierbij zijn alle bedragen steeds tussentijds op hele euro's afgerond.

ronde n	1	2	3	4	5	6
aantal spelers bij begin van ronde	100	99	98	...	...	...
waarde van de in deze ronde weggespeelde speler	500	505	510	...	...	...
totaalbedrag B_n na ronde n	500	1005	1515	...	...	...

- c** Bereken het totaalbedrag na ronde 6.

Hint 58

B_n is het totaalbedrag na ronde n als de kandidaat in elke ronde één speler heeft weggespeeld.

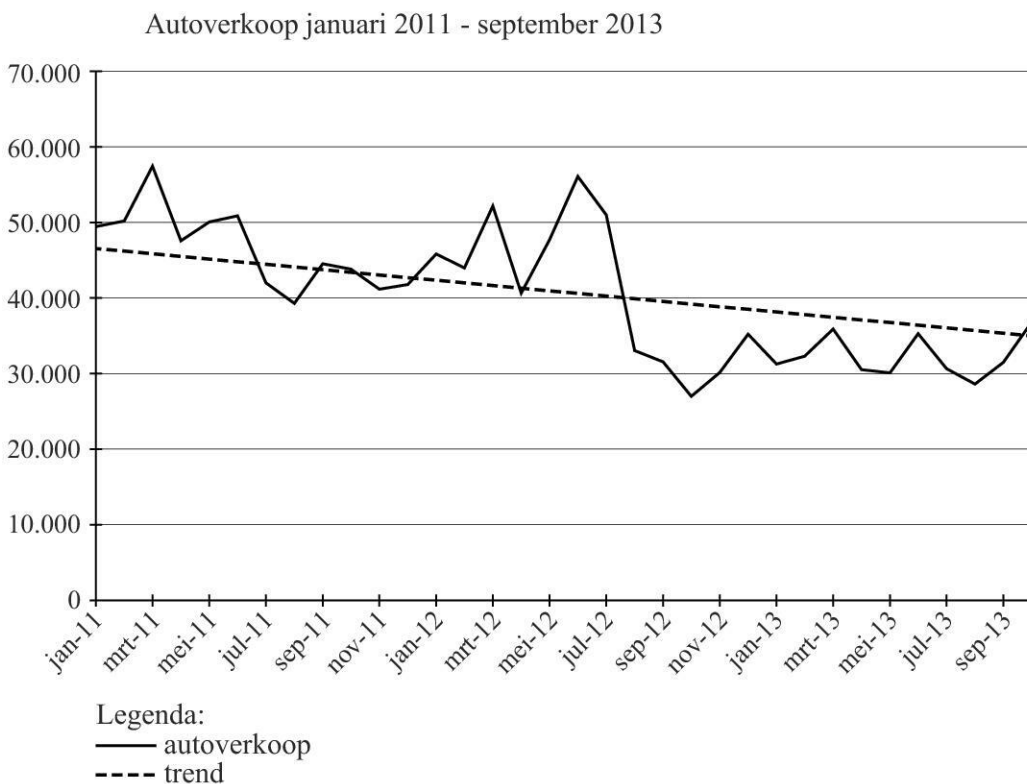
- d** Stel een recursieve formule op voor het totaalbedrag B_n na ronde n en bereken daarmee het maximale bedrag dat de kandidaat kan winnen. Aan het afronden hoeft in de formule geen aandacht te worden besteed.

Hint 59

111 Kentekens

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2019, tijdvak 1)

Een verslaggever heeft in oktober 2013 onderstaande grafiek gemaakt.



In de grafiek is het aantal verkochte auto's in de periode januari 2011 tot september 2013 af te lezen. Ook maakt hij als bijpassend model een trendlijn met een afname van de verkoop van 375 nieuwe auto's per maand.

De formule die bij dit model hoort, is:

$$A_n = -375n + 37250$$

Hierbij is A_n het aantal verkochte nieuwe auto's in maand n met $n = 0$ voor maart 2013. Het model geeft voor mei 2013 een hoger aantal verkochte nieuwe auto's dan er volgens de grafiek werden verkocht.

- a** Bereken hoeveel procent hoger de uitkomst van het model is. Geef je antwoord in gehele procenten.

Hint 60

Er is ook een recursieve formule op te stellen bij dit model.

- b** Stel deze recursieve formule op.

Hint 61

Boomdiagrammen

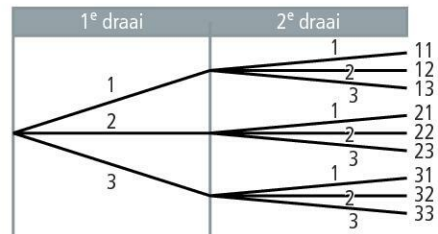
Bij het oplossen van een telprobleem is een boomdiagram vaak een handig hulpmiddel. In een boomdiagram geef je overzichtelijk weer welke mogelijkheden er zijn.

Voorbeeld

Een kanstol is verdeeld in drie gelijke gebieden met de cijfers 1, 2 en 3.

Maak een boomdiagram met alle mogelijkheden bij twee keer draaien.

Oplossing



- 112** De schaker Kasparov speelt een wedstrijd tegen een computer. Bij deze wedstrijd worden drie schaakpartijen gespeeld. In geval van winst krijgt de winnaar één punt. Bij een remise krijgen beiden een halve punt.
- Onderzoek met behulp van een boomdiagram op hoeveel manieren de wedstrijd kan verlopen.
 - Stel dat de wedstrijd eindigt in de stand 2-1 voor Kasparov. Op hoeveel manieren kan deze uitslag tot stand zijn komen?
- 113** Je hebt de letters S, P, E, L en D.
- Hoeveel (onzin)woorden van vijf letters kun je maken als je elke letter maar één keer mag gebruiken?
 - En hoeveel (onzin)woorden van vijf letters kun je maken als je elke letter meerdere keren mag gebruiken?
- 114** In een vaas zitten twee rode, twee groene en twee witte knikkers.
- Mieke pakt zonder terugleggen knikkers uit de vaas. Ze stopt met pakken zodra ze twee knikkers van dezelfde kleur heeft. Hoeveel verschillende trekkingen zijn er om twee knikkers met dezelfde kleur te pakken?

Roosters

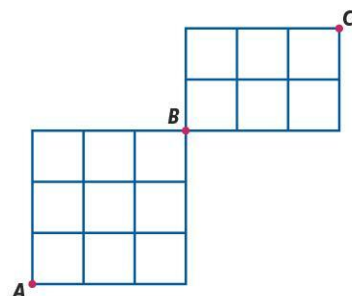
Een rooster is een handig model voor telproblemen waarbij je steeds uit twee mogelijkheden (voor of tegen, winst of verlies) moet kiezen.

Het aantal verschillende routes naar een punt kun je vinden met behulp van het aantal routes naar de voorafgaande punten.

Het aantal verschillende kortste routes van punt O naar punt P in het rooster hiernaast is 35. Elk van deze routes bestaat uit zeven stappen, vier naar rechts en drie naar boven.



- 115** Gegeven twee roosters met de punten A , B en C .
- Hoeveel kortste routes zijn er van punt A naar punt B ?
 - En hoeveel kortste routes zijn er van punt A , via punt B , naar punt C ?
- 116**
- Hoeveel verschillende scoreverlopen zijn mogelijk bij een voetbalwedstrijd die eindigt in 5-3?
 - Bij een gezinssamenstelling kun je letten op de volgorde waarop jongens en meisjes geboren worden. Hoeveel verschillende gezinssamenstellingen zijn er mogelijk bij gezinnen met drie meisjes en drie jongens?



Permutaties en combinaties

Een ander woord voor een volgorde of rangschikking is permutatie. Een permutatie van 3 uit 10 is een rangschikking van een rijtje van drie dat je kiest uit tien verschillende dingen: een eerste, een tweede en een derde.

Het aantal permutaties van 3 uit 10 is $10 \times 9 \times 8 = 720$.

Een combinatie van 3 uit 10 is een selectie van drie uit tien: drie wel en zeven niet. Het aantal combinaties van 3 uit 10 is $\binom{10}{3}$; dit spreek je uit als '10 boven 3'. $\binom{10}{3} = 120$.

Je kunt $\binom{10}{3}$ met een rooster berekenen, je gaat dan drie stappen naar rechts en zeven omhoog. Je kunt $\binom{10}{3}$ ook met je rekenmachine uitrekenen.

Voorbeeld

Je hebt acht films in huis en met een groep van vrienden wil je twee films bekijken. Met elkaar kies je er twee uit. Hoeveel tweetallen zijn er mogelijk?

Oplossing

Het gaat om de keuze van twee van de acht films. De volgorde van kiezen is niet van belang, want het gaat erom welk tweetal bekeken gaat worden.

Daarom zijn er $\binom{8}{2} = 28$ tweetallen mogelijk.

- 117** Joyce heeft op haar verjaardag tien puzzels gekregen.
- a Bereken het aantal mogelijke volgordes waarop zij deze puzzels kan maken.
 - b Hoeveel mogelijkheden zijn er om een top drie samen te stellen uit deze tien puzzels?
 - c Joyce heeft in een lade nog plaats voor vier puzzels. Hoeveel mogelijkheden zijn er om vier puzzels te selecteren?
- 118**
- a Boer Gerrit heeft 26 schapen. Hij wil tien schapen in de stal brengen.
Op hoeveel manieren kan hij een groep van tien schapen samenstellen?
 - b Boer Gerrit heeft 14 witte en 12 zwarte schapen. Hij besluit vijf witte schapen en vijf zwarte schapen in de stal te brengen.
Op hoeveel verschillende manieren kan hij een groep met vijf witte en vijf zwarte schapen samenstellen voor de stal?
- 119**
- a Bij een sportdag zijn er voor 12 jongens, vier rode, vier blauwe en vier groene shirtjes.
Bereken het aantal mogelijkheden waarop je de shirtjes kunt verdelen.
 - b Voor de zwemestafette is uit de groep van 12 jongens één jongen nodig voor de vrije slag, één voor de vlinderslag, één voor de rugslag en één voor de schoolslag.
Hoeveel mogelijkheden zijn er om het estafetteteam samen te stellen?

Examenopdrachten

- 120** **Tricoda**
(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2013, tijdvak 2)
- Het familiespel Tricoda is uitgeroepen tot Speelgoed van het jaar 2010. Het spel Tricoda bestaat uit 28 stenen. Het cijfer 1 komt één keer voor, het cijfer 2 twee keer, het cijfer 3 drie keer en zo verder tot en met het cijfer 7, dat zeven keer voorkomt. Elke speler krijgt 3 stenen, die op een standaard worden geplaatst, waarbij de volgorde niet van belang is. De 3 stenen vormen zo een cijfertrio. De stenen staan zo op de standaards, dat elke speler wel de cijfertrio's van de andere spelers ziet, maar zijn eigen cijfertrio niet, zie de foto.
- Om het spel te winnen moet je, met behulp van vragenkaartjes, beredeneren welke drie getallen op je eigen standaard staan. Bereken het aantal mogelijke verschillende cijfertrio's dat een speler bij de start van het spel kan krijgen.



Hint 62

121 Kentekens

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2019, tijdvak 1)

Tussen mei 2008 en februari 2013 werd voor personenauto's de kentekenserie gebruikt die door de Rijksdienst voor het Wegverkeer sidecode 7 genoemd wordt. Op de foto staat een van de eerste kentekens uit deze serie. De kentekens bestaan uit twee cijfers, gevolgd door drie letters en ten slotte nog één cijfer. Als we ervan uitgaan dat er geen beperkingen zijn aan de te gebruiken cijfers en letters, dan zijn er bijna 18 miljoen verschillende kentekens te maken met sidecode 7.

- a** Bereken het aantal verschillende kentekens met sidecode 7.
Geef je antwoord in gehele honderdduizendtallen.

Hint 63

In deze opgave gaan we echter van de volgende beperkingen uit:

- Een kenteken mag niet met 00 beginnen
- De eerste letter is G, H, J, K, L, N, P, R, S, T, X of Z
- Klinkers (A, E, I, O, U, Y) worden niet gebruikt
- De letters C en Q worden niet gebruikt
- Bepaalde drielettercombinaties (zoals NSB) kunnen als aanstootgevend worden gezien en als gevolg daarvan zijn 82 drielettercombinaties uitgesloten.

Een verslaggever van een autotijdschrift schrijft in een artikel dat door al deze beperkingen minder dan 20% van alle mogelijke kentekens uiteindelijk op een personenauto terecht zal komen

- b** Ga met een berekening na of de verslaggever gelijk heeft.

Hint 64

122 Geniussen van achthoeken

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A12 2008, tijdvak 2)

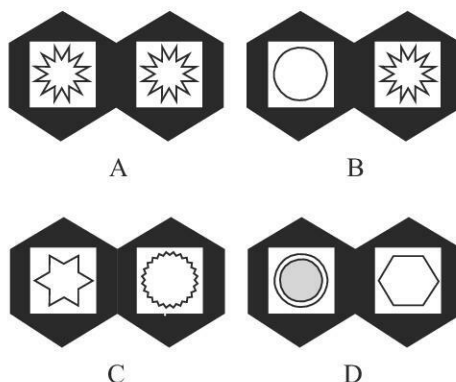
Genius is een bordspel voor 1 tot en met 4 spelers. Tijdens het spel moeten de spelers tegels op het speelveld plaatsen. Een tegel heeft de vorm van twee zeshoeken die met een zijde aan elkaar vast zitten. Deze tegels zitten in een zak. Op elke tegel staan twee symbolen. Dat kunnen twee dezelfde symbolen of twee verschillende symbolen zijn. Er zijn zes verschillende symbolen: 12-puntige ster, cirkel, 6-puntige ster, zon, gevulde cirkel en zeshoek. Er zijn vier tegels afgebeeld.

Elke mogelijke tegel met twee dezelfde symbolen komt 5 keer voor. Tegel A in de figuur komt dus 5 keer voor.

Elke mogelijke tegel met twee verschillende symbolen komt 6 keer voor. Dus bijvoorbeeld de tegel met een cirkel en een 12-puntige ster (tegel B) komt 6 keer voor.

Bereken het totale aantal tegels dat bij Genius wordt gebruikt.

Hint 65



123 Pythagorian

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2017, tijdvak 2)

Een reisorganisatie biedt vakanties aan naar Samos. Voor een bepaalde periode hebben ze nog 28 vliegtuigstoelen over. Door deze als last minute aan te bieden vindt de reisorganisatie daarvoor 14 keer twee gegadigden. De reisorganisatie kan ook nog 14 tweepersoons hotelkamers boeken: twee bij Nikos Place, vijf bij Hydrele Beach en zeven bij Kouros Bay.

- a** Bereken op hoeveel verschillen manieren de reisorganisatie de 14 stellen kan verdelen over de drie hotels.

Hint 66

Een van de stellen is gekomen om te fietsen en te wandelen. Ze hebben een boekje met vijf fietstochten voor een hele dag en vijf wandeltochten voor een hele dag. Ze maken het volgende programma: eerst vijf dagen fietsen en daarna drie dagen wandelen. Ze maken elke dag een andere tocht uit het boekje.

- b** Bereken hoeveel verschillende programma's dit stel voor deze acht dagen kan maken.

Hint 67

124 Muziek op cd's

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2014, tijdvak 2)

Om muziek digitaal op een cd op te kunnen slaan worden geluidstrillingen omgezet in getallen. Elk getal wordt vervolgens weergegeven als een rijtje nullen en enen.

Een rijtje van acht bits, dus acht keer een 0 of een 1, heet een byte.

Het getal 18 bijvoorbeeld wordt daarbij weergegeven als 00010010.

- a** Bereken hoeveel verschillende rijtjes van 8 bits er mogelijk zijn.

Hint 68

Voor veel muziek is het gebruikelijk om een seconde muziek vast te leggen in 44 100 rijtjes van 16 bits (van 2 bytes dus). Voor stereomuziek wordt het aantal rijtjes nog verdubbeld omdat er zowel voor de linker- als voor de rechterluidspreker een rijtje wordt vastgelegd.

De opslagcapaciteit van een cd is 783 megabyte (MB), waarbij we ervan uitgaan dat 1 megabyte 1 000 000 bytes is.

- b** Bereken hoeveel minuten stereomuziek in theorie op een cd kan worden opgeslagen.

Hint 69

Om rijtjes van 8 bits op een cd te zetten, vormt men elk rijtje van 8 bits om tot een code van 14 bits. Dit vermindert de foutgevoeligheid. Een voorbeeld van zo'n code van 14 bits is 10010010000000.

Aan deze codes wordt de eis gesteld dat tussen twee enen minstens twee nullen staan. Een code als 00101000000100 kan dus niet als code voorkomen omdat er tussen de eerste twee enen slechts één nul staat. Door deze eis kan een code maximaal vijf enen bevatten.

- c** Leg uit waarom een code niet zes enen kan bevatten.

Hint 70

Hints bij de examenopdrachten

- 1 Bereken welk bedrag deze persoon per jaar kwijt zou zijn aan elektriciteit als hij geen zonnepanelen zou hebben.
- 2 Bereken hoeveel personen uit de CVO-populatie op vakantie gingen in 2016.
- 3 Kijk voor bewering 2 of je een jaar kunt vinden waarbij het aantal aardbevingen steeg terwijl het jaar ervoor de gasproductie afnam.
- 4 Reken 2 uur, 43 minuten en 32 seconden eerst om naar seconden.
- 5 Kies twee wielrenners: een renner aan kop aan het eind van de sprint en een renner aan kop aan het begin van de sprint. Bereken voor beide renners de geleverde arbeid.
- 6 Waarom neemt $0,5^{0,25 \cdot t}$ af als t toeneemt?
- 7 Substitueer $BMR = 2000$ in de formule en herleid de ontstane vergelijking.
- 8 Druk G uit in W , druk J uit in Y en druk L uit in H .
- 9 Stel een vergelijking op waarmee je kunt berekenen voor welk gewicht de Jackson ratio gelijk is aan 0,18.
- 10 Bedenk of L groter of kleiner is als iemand over het schild meet.
- 11 Druk G uit in W en druk L uit in I .
- 12 Bereken hoeveel buitenlandse vakanties er volgens de trendlijn per jaar bij komen.
- 13 Het aantal binnenlandse vakanties is gelijk aan het totaal aantal vakanties min de buitenlandse vakanties.
- 14 Welk verband bestaat er tussen de totale aantal dagen per jaar vakantie en de variabelen A en L ?
- 15 Met hoeveel cent per kWh neemt de kostprijs k_z per jaar af?
- 16 Welk verband bestaat er tussen k_m en k_l als de marktprijs tweemaal zo hoog is als de kostprijs van windenergie van windmolens op land?
- 17 Substitueer $a = 4$ en $b = 2,5$ in de formule en bereken c .
- 18 Als de straal van de kleinste zeepbel afneemt, dan neemt b af dus $\frac{1}{b}$ neemt toe.
- 19 Herleid eerst $\frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ tot één breuk.

- 20** Ga voor bewering 2 na of er een evenredig verband bestaat tussen CB en AD .
- 21** Lees de coördinaten af van een punt op de lijn.
- 22** Bereken de relatieve toename als het aandeel armen en handen stijgt van 18,15 % naar 21,0 %.
- 23** Maak gebruik van de rekenregel $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- 24** Gebruik $S_{Mosteller} = \sqrt{\frac{1}{3600} \cdot L \cdot M} = \sqrt{\frac{1}{3600}} \cdot \sqrt{L} \cdot \sqrt{M}$.
- 25** Bereken b en l als $h = 3$.
- 26** Druk b en l uit in h .
- 27** Gebruik de formule Oppervlakte bol $= 12,57r^2$ om r uit te drukken in A .
- 28** Gebruik dat $TK = TE \cdot g_m$.
- 29** De waarde van n is gelijk aan 56.
Het totaal aantal kaarten is $52 + 4$.
- 30** Als het aantal kaarten vier keer zo groot wordt, dan verandert n in $4n$.
- 31** Welke waarde voor t moet je in de formule gebruiken?
- 32** Welke vergelijking hoort bij de vertienvoudiging?
- 33** Deel het linker- en rechterlid door 4500 en neem vervolgens de natuurlijke logaritme van het linker- en rechterlid.
- 34** Bos A bestaat voor 70% uit eiken, hiervoor geldt $p_1 = 0,70$.
- 35** Als het aandeel eiken steeds kleiner wordt, dan wordt p steeds kleiner.
- 36** Lees af hoeveel aardbevingen een magnitude van $\geq 2,0$ hadden en hoeveel een magnitude van 2,5 of hoger hadden.
- 37** Je kunt aflezen dat de grafiek die hoort bij magnitudes van $\geq 2,0$ ontstaat door de grafiek die hoort bij magnitudes van $\geq 1,5$ 85 eenheden naar rechts te schuiven.
- 38** Lees de coördinaten af van één punt dat op de grafiek ligt en substitueer de coördinaten in de formule.
- 39** Uit $N = 10^{a-M}$ volgt $a - M = {}^{10}\log(N)$.

- 40** De evenwichtsstand a ligt even ver van de maximale groeisnelheid als van de minimale groeisnelheid.
- 41** Bereken voor welke waarde van t er geldt dat $D = 5$.
- 42** Om het verschil tussen de twee formules te onderzoeken, kijk je naar $T - D$.
- 43** Na een halfjaar geldt $t = 0,5$.
- 44** De periode van de grafiek is 1 jaar. De snelheid is minimaal voor $t = 0,75$. Voor welke waarde van t is de snelheid dan weer minimaal?
- 45** Hoe bereken je de evenwichtsstand en de amplitude met behulp van het minimum en het maximum? En welk deel van de periode ligt tussen de punten waar het minimum en het maximum wordt bereikt?
- 46** Welke waarde van de formule h geeft de gemiddelde waarde van de overkapping?
- 47** Welke punten komen in aanmerking om te berekenen waar dit verschil het kleinst is?
- 48** Wat weet je van de afgeleide $\frac{dH}{dp}$ als H een maximum heeft?
- 49** Om de afgeleide van $D = 3,65 \cdot e^{0,533 \cdot t}$ te berekenen, gebruik je de kettingregel en de regel dat de afgeleide van e^u gelijk is aan e^u .
- 50** De afgeleide van $c = \frac{3b}{3-b}$ bereken je met de quotiëntregel.
- 51** Gebruik dat de afgeleide van $f(x) = {}^a\log(x)$ gelijk is aan $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$ om de afgeleide van $A = 1,5 \cdot {}^2\log(n)$ te berekenen.
- 52** Wat weet je van de afgeleide $\frac{dV}{dh}$ als V maximaal is?.
- 53** Je berekent de afgeleide van $P_{\text{najaar}} = \frac{2300 + 60t}{207 + 0,6t}$ met de quotiëntregel.
- 54** Om de afgeleide van $A = 12 \cdot e^{0,013t}$ te berekenen gebruik je de kettingregel en de regel dat de afgeleide van e^u gelijk is aan e^u .
- 55** De recursieve formule C kun je ook schrijven als een directe formule.

- 56** Hoeveel leveren de eerste 20 spelers op? En de volgende 20?
- 57** Hoeveel levert de laatst weggespeelde speler op?
- 58** Bereken per speler de opbrengst.
- 59** Hoeveel levert een weggespeelde speler op nadat er n spelers zijn weggespeeld?
- 60** Bereken met de formule een schatting voor het aantal verkochte auto's in mei 2013.
- 61** De recursieve formule is van de vorm $A_n = A_{n-1} - \dots$
- 62** Maak onderscheid tussen cijfertrio's met drie verschillende cijfers, met twee dezelfde cijfers en één ander cijfer en ten slotte met drie verschillende cijfers.
- 63** Voor het eerste cijfer zijn 10 mogelijkheden. Bedenk ook hoeveel mogelijkheden er zijn voor de andere cijfers en voor de letters.
- 64** Ga voor elk cijfer en elke letter na hoeveel mogelijkheden er zijn.
- 65** Hoeveel tegels met twee dezelfde symbolen zijn er? En hoeveel met twee verschillende symbolen?
- 66** Bereken bijvoorbeeld eerst op hoeveel manieren je twee stellen van de 14 stellen kunt selecteren voor Nikos Place.
- 67** Hoeveel keuze mogelijkheden zijn er voor de eerste dag? En hoeveel voor de tweede dag?
- 68** Hoeveel mogelijkheden heb je per bit?
- 69** Hoeveel bytes zijn nodig voor één seconde stereomuziek?
- 70** Hoeveel nullen zijn nodig als je met een 1 begint?

Differentiëren

naam van de regel	functie	afgeleide
somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
verschilregel	$v(x) = f(x) - g(x)$	$v'(x) = f'(x) - g'(x)$
productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
quotiëntregel	$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \frac{p'(x) = f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ of $\frac{dk}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$

Logaritmen

regel	voorwaarde
${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$	$g > 0, g \neq 1, a > 0$ en $b > 0$
${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$	$g > 0, g \neq 1, a > 0$ en $b > 0$
${}^g\log(a^p) = p \cdot {}^g\log(a)$	$g > 0, g \neq 1$ en $a > 0$
${}^g\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, p > 0$ en $p \neq 1$

Als in een examen een van de woorden uit onderstaande lijst wordt gebruikt, dan geldt de betekenis die hieraan in deze lijst is gegeven.

aantonen dat, laten zien dat	Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.
afleiden van bijvoorbeeld een formule of een eenheid	Het geven van een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van de formule of eenheid volgt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. Tenzij anders aangegeven, geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.
bepalen	Het gevraagde vaststellen en/of uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
beredeneren, uitleggen	Het geven van een uitwerking waarin de denkstappen staan, waaruit het gestelde/gevraagde blijkt.
berekenen	Het gevraagde uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
herleiden (van een formule)	Een formule stap voor stap herschrijven tot deze in de gevraagde vorm staat, zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine.
noemen, (aan)geven wat, welke, wanneer, hoeveel	Een eindantwoord geven. Een toelichting is niet vereist tenzij anders is aangegeven.
onderzoeken of	Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de (on)juistheid van het gestelde blijkt. Het antwoord moet worden afgesloten met een conclusie. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt.
oplossen	Het bepalen van de waarden van een of meer onbekenden die voldoen aan de gegeven vergelijking of ongelijkheid. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
schetsen	Het geven van een grafische voorstelling die de voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen bevat.
tekenen	Het geven van een grafische voorstelling die de voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen bevat en voldoende nauwkeurig is. In het geval van een grafiek moet een assenstelsel met schaalverdeling zijn weergegeven.



Meer oefenen 264

In de hoofdstukken 18, 19, 20 en 21 wordt bij enkele opdrachten extra oefening aangeboden. In de extra oefeningen wordt in het algemeen hetzelfde type opdracht gegeven maar met andere getallen.

Oefenproefwerken 272

Bij ieder hoofdstuk vind je hier een oefenproefwerk. Dit oefenproefwerk kun je gebruiken om je voor te bereiden op het echte proefwerk. De oefenproefwerken zijn in het algemeen wat langer dan een proefwerk dat je in een les van 45 of 50 minuten moet maken.

In een proefwerk komen verschillende soorten opdrachten voor:

- opdrachten voor waarmee getoetst wordt of je de vaardigheden van het hoofdstuk beheerst;
- opdrachten waarmee getoetst wordt of je de vaardigheden kunt toepassen binnen een grotere wiskundige opdracht of binnen een context of binnen een situatie die meer denkstappen vraagt en dus meer inzicht.



- 5** Leg met behulp van de eigenschappen van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ uit of de volgende punten wel of niet op deze grafiek liggen.

- | | |
|---------------------------------|-----------------------------------|
| a $(11\pi, -1)$ | d $(-4\frac{1}{2}\pi, -1)$ |
| b $(-80\pi, 0)$ | e $(198\frac{1}{2}\pi, 1)$ |
| c $(7\frac{1}{2}\pi, 1)$ | f $(-30,5\pi; -1)$ |

- 10** Geef de amplitude van de grafieken van de functies $f(x) = -6\sin(x)$ en $g(x) = 1,4\sin(x)$.

- 14** Bereken van de grafieken van de functies de amplitude en de periode.

- | | |
|---|--|
| a $f(x) = 21\sin(6x)$ | c $h(x) = \frac{1}{8}\pi\sin(0,1\pi x)$ |
| b $g(x) = -1\frac{5}{6}\sin(0,6x)$ | d $j(x) = -0,45\sin(6\pi x)$ |

- 16** De getijbeweging in Vlissingen kan gedurende een aantal dagen benaderd worden met de formule $A = 2\sin(\frac{1}{2}t)$. Hierbij is A de waterhoogte in meters boven NAP en t de tijd in uren, gerekend vanaf 0.00 op een bepaalde dag.

- Welke periode heeft het getij in deze periode? Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.
- Plot en schets de grafiek van h .
- Gedurende hoeveel tijd per periode is de waterstand hoger dan 1,50 meter boven NAP?
- Op een andere plaats is het verschil tussen hoogwater en laagwater gelijk aan 5,1 meter .
Stel een formule op die hierbij past.

- 24** Geef bij de functies de evenwichtsstand en de coördinaten van een drietal punten waarin de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.

- | | |
|---|--|
| a $g(x) = -3 + \sin(x - \frac{4}{3}\pi)$ | c $g(x) = 1 + \sin(x - 1\frac{1}{2})$ |
| b $g(x) = 6 + \sin(x + 4)$ | d $g(x) = -0,3 - 2\sin(x + \frac{3}{4}\pi)$ |

- 28** Bepaal van de sinusoiden van de formules de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt.

- | | |
|---|--|
| a $y = 1 + 2\sin(3(x - \frac{2}{3}\pi))$ | c $y = -\frac{5}{12} + \frac{1}{3}\sin(\frac{1}{4}\pi(x + \frac{1}{6}\pi))$ |
| b $y = -5 + 6\sin(1\frac{1}{3}(x + 2))$ | d $y = 85 + 63\sin(0,3\pi x)$ |

- 31** Bereken de coördinaten van twee opeenvolgende toppen van de volgende sinusoiden.

a $y = 7 \sin\left(\frac{1}{3}x\right) - 5$

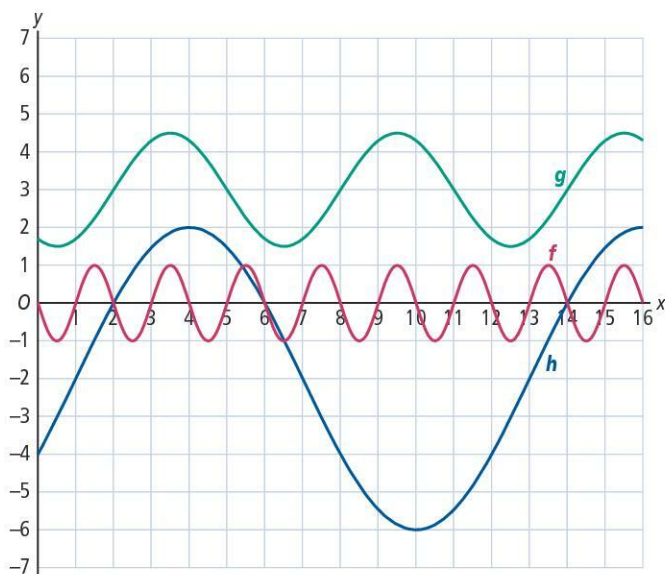
c $y = 27 + 35 \sin(3\pi(x - 4))$

b $y = -11 + 9 \sin(5\pi x)$

d $y = -5,1 - 1,5 \sin(0,2\pi x + \pi)$

- 32** De bloeddruk verandert periodiek onder invloed van de hartslag. Bij een patiënt kon de bloeddruk worden benaderd met de formule $B = 110 + 20 \sin(3\pi(t - 0,5))$. Hierin is t het aantal seconden na het starten van de metingen en B de bloeddruk in mm kwik.

- a** Bereken de maximale en minimale bloeddruk en de momenten waarop deze plaatsvinden.
b Bereken de bloeddruk bij het begin van de metingen.
c Bereken hoeveel seconden per minuut de bloeddruk lager dan 105 mm kwik is.

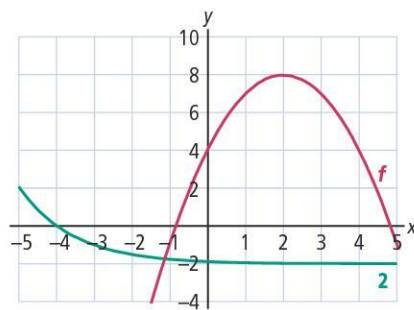


- 35** Gegeven zijn de sinusoiden van de functies f , g en h . Stel functievoorschriften op voor f , g en h .

- 36** Stel een formule op bij de volgende sinusoiden.

- a** De periode is 12, een beginpunt is $(2, 18)$ en het minimum is 16.
b Een beginpunt is $(-\frac{1}{4}\pi, -4)$ en het hier dichtstbijzijnde hoogste punt is het punt $(0, 5)$.
c Twee opeenvolgende toppen zijn $(-3, 177)$ en $(27, -111)$.

- 3**
- Door welke translaties is grafiek 1 uit de grafiek van $f(x) = -x^2$ ontstaan?
 - Stel een functievoorschrift op bij grafiek 1.
 - Grafiek 2 is ontstaan door een horizontale en een verticale translatie toe te passen op de grafiek van $g(x) = 0,5^x$. Welke twee translaties zijn dat?
 - Stel een functievoorschrift op bij grafiek 2.



- 4**
- Gegeven is de functie $k(x) = -18 + \sqrt{x - 11}$. Door welke twee translaties is de grafiek van k ontstaan uit de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{x}$?
 - Gegeven is de functie $m(x) = 7 + {}^{0,5}\log(x + 10)$. Door welke twee translaties is de grafiek van m ontstaan uit de grafiek van de functie $f(x) = {}^{0,5}\log(x)$?

- 5** Op een sinusoïde met formule $y = -1\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{3}{4}\right)$ wordt een translatie van $\frac{1}{3}$ omhoog en een translatie van $\frac{1}{2}$ naar rechts toegepast. Stel een formule op bij de beeldgrafiek.

- 11**
- Gegeven is de formule $I = 2\sqrt{5a + 10}$. De variabele I stelt de inhoud in cm^3 voor. Stel een formule op waarbij de inhoud A wordt uitgedrukt in m^3 .
 - Gegeven is de formule $H = 8 - 2\sin\left(\frac{1}{2}\pi(w + 3)\right)$. Hierin is H in meters en w de tijd in weken. Ga ervan uit dat in een maand precies vier weken zitten. Stel een formule op waarbij H wordt uitgedrukt in de tijd q in maanden.
 - Gegeven is de formule $K = 9c^2 + 1,5 - c$. Hierin is K het gewicht in kg en c de lengte in cm. Stel een formule op die het gewicht O in ons (1 ons = 100 gram), uitdrukt in de lengte d in dm.

- 12** Tussen L en a , met $a > 0$, bestaat een verband dat beschreven kan worden met de formule $L = 7,73 - \frac{6,44}{1,17 + 2a}$. Hierin is L in grammen en a in mm.
- Bereken de waarde van a als $L = 6$.
 - Stel een formule op die het gewicht G in ons (1 ons = 100 gram) uitdrukt en de afstand c in cm.

- 15** Stel de somformule $s = k + h$ en de verschilformule $v = k - h$ op. Vereenvoudig je antwoord.
- a** $h = -t^2 + 6t - 7$ en $k = 11 - 5t$
- b** $h = t^3 - \sqrt{t}$ en $k = -5\sqrt{t} - 2,3t^3$
- 16** Bij de verkoop van een bepaald product geldt voor de totale opbrengst TO de formule $TO = -\frac{1}{4}q^2 + 24q$, waarbij q het aantal verkochte producten is. De totale kosten zijn $TK = 38 + \frac{1}{2}q^2$. Voor de totale winst TW geldt $TW = TO - TK$. TW , TO en TK zijn in euro's.
- a** Stel de formule op van de totale winst, uitgedrukt in q .
- b** Er wordt alleen winst gemaakt als $TW > 0$. Bereken bij welke waarden van q dit het geval is.
- c** Bereken de maximale winst. Bij hoeveel verkochte producten wordt deze bereikt?
- 21** Bereken de waarden van x waarvoor $f(x) = 0$.
- a** $f(x) = (3x - 7) \cdot (13 + 6\frac{1}{2}x)$ **c** $f(x) = (4x + 2) \cdot (3^x - 27)$
- b** $f(x) = (x^3 - 8)(x^4 - 1)$ **d** $f(x) = (\frac{1}{2}x^2 - 2) \cdot (5x - 4)$
- 24** Onderzoek hoe groot de grenswaarde is en bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de horizontale as.
- a** $M = \frac{6t}{t + 20}$ **c** $M = \frac{85k - 15}{-5k + 13}$
- b** $M = \frac{6p - 30}{4p}$ **d** $M = \frac{9d - 153}{0,2d^2 + 7}$
- 27** Beredeneer of de waarde van P toeneemt of afneemt als t steeds groter wordt en naar welke grenswaarde P nadert.
- a** $P = -3 + 0,4^t$ **c** $P = 2 + 50 \cdot 0,1^t$
- b** $P = \frac{6}{8 + 3t^2} - 5$ **d** $P = -\frac{3}{t^3 + 2}$
- 30** Met de formule $P = \frac{2000}{1 + 19 \cdot 0,9^t}$ kun je het aantal personen in een dorp berekenen dat na t maanden een abonnement op een streamingdienst heeft.
- a** Na hoeveel maanden zijn er voor het eerst meer dan 300 personen met een abonnement?
- b** Bereken de grenswaarde van P en geef aan wat dit voor het aantal personen met een abonnement betekent.

3 Bereken met de productregel de afgeleide functie.

- a** $g(x) = 5x^2(3x^4 + 7)$ **c** $l(v) = -(2v - 7)(5 - 18v^3)$
b $z(x) = (2x^4 + 5)(10 - 3x)$ **d** $q(r) = (9 - r)(10r + 5)$

6 Differentieer.

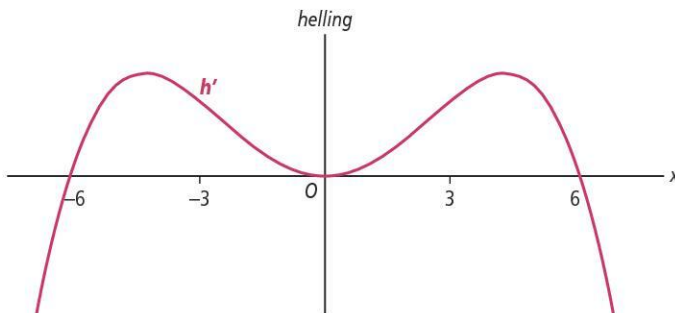
- a** $t(s) = 2s^2(4s + 7)^4$ **d** $l(b) = (9 - 5b)^2(b - 6)$
b $A(g) = -4g(6g - 8)^5$ **e** $k(b) = \left(\frac{3}{4}b - 8\right)^3 \cdot 92b^2$
c $B(t) = 2t^9\sqrt{t + 8}$ **f** $r(x) = 9(x + 15)\sqrt{41 - x}$

11 Differentieer de functie $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 3}$ en toon aan dat
 $f'(x) = \frac{x^2 + 6x + 4}{(x + 3)^2}$

12 Differentieer.

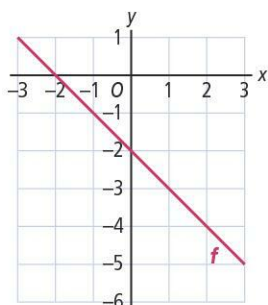
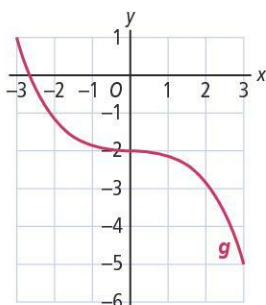
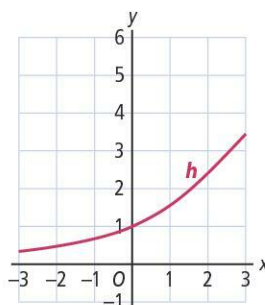
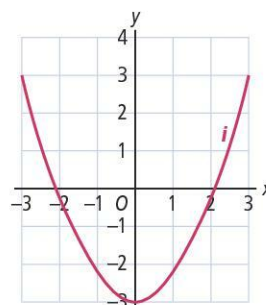
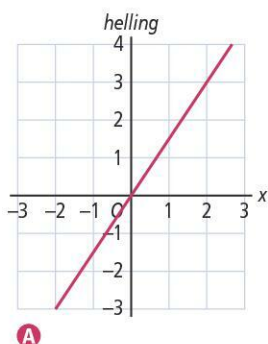
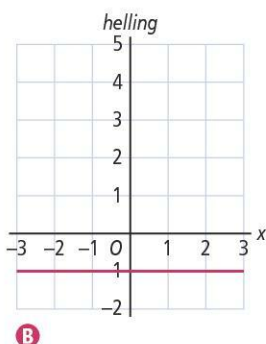
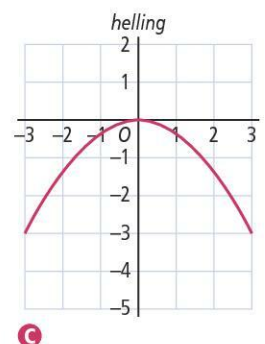
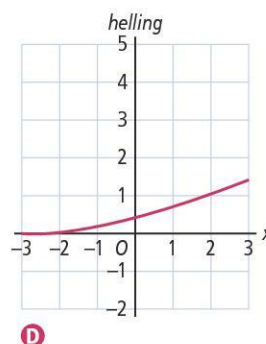
- a** $B = \frac{8 - r}{r^3 + 5}$ **c** $B = \frac{(6r - 10)^4}{3r}$
b $B = \frac{4}{9r + 6}$ **d** $B = \frac{-8r}{\sqrt{r - 3}}$

17 Je ziet een schets van de grafiek van h' .



- a** Leg uit dat de grafiek van h voor $x < -6$ afnemend dalend is.
b Hoe kun je aan de grafiek van h' zien dat de grafiek van h een horizontale raaklijn heeft voor $x = -6$?
c Heeft h een minimum, een maximum of geen van beide voor $x = -6$?
d Leg uit dat de grafiek van h bij $x = 0$ wel een horizontale raaklijn heeft maar geen top heeft.
e Schets de grafiek van h .

- 18** Je ziet de grafieken van de functies f , g , h en i en vier hellinggrafieken. Elk van de hellinggrafieken hoort bij een van de grafieken.
Bereken welke hellinggrafiek bij welke functie hoort.



- 21** Gegeven is voor $x > 0$ de formule $V = 12 + \frac{x + 18}{0,1x + 4}$

- Stel een formule op voor $\frac{dV}{dx}$
- Leg uit dat de grafiek van $\frac{dV}{dx}$ altijd boven de x -as ligt en steeds dichterbij de x -as komt als x toeneemt.
- Hoe volgt uit opdracht b dat de grafiek van V afnemend stijgend is voor $x > 0$?

- 22**
- Voor $x > 0$ is gegeven de functie $f(x) = -240x^{-0,3}$.
Bereken met behulp van de afgeleide dat de grafiek van f afnemend stijgend is.
 - Voor $x > 0$ is gegeven de functie $g(x) = -\frac{15}{x^{15,96}}$.
Bereken met behulp van de afgeleide op welke manier de grafiek van g stijgt of daalt.

3 Druk t uit in N .

a $N = 2^t - 3$

d $N = \frac{1}{2} \cdot 10^{2t}$

b $N = 0,2 \cdot 7^{t-5}$

e $N = 3^{1-0,025t}$

c $N = 4 \cdot 5^t + 1$

f $2N - \frac{3}{4} \cdot 8^t = 0$

6 Druk q uit in p .

a $p = {}^5\log(q)$

d $p = 5 \cdot {}^{0,2}\log\left(\frac{1}{2}q\right)$

b $p = 3 - {}^3\log(q)$

e $p = {}^5\log(4q - 4)$

c $p = \log(2q)$

f ${}^2\log(p - q) = 1$

8 Een softwarebedrijf heeft een app ontwikkeld. Voor het aantal gebruikers van de app geldt bij benadering de formule $A = 20\,000 - 19\,800 \cdot 0,9^t$. Hierbij is A de hoeveelheid gebruikers en t de tijd in maanden met $t = 0$ op het moment dat de app wordt geïntroduceerd.

- a** Bereken met hoeveel procent het aantal gebruikers in de eerste twee maanden toeneemt.
- b** Het aantal gebruikers nadert op den duur een grenswaarde. Bereken hoe groot de grenswaarde is.
- c** Druk t uit in A .
- d** Bereken na hoeveel maanden er 17 500 gebruikers zijn.

13 Differentieer.

a $r(s) = e^{\frac{1}{2}s}$

d $W(n) = 5 \cdot e^{5n} + e$

b $h(t) = 3 \cdot e^{2t}$

e $N(p) = \sqrt{p} \cdot e^p$

c $k(b) = e^{4b+1} - 7$

f $f(x) = \frac{e^{5-3x}}{2x}$

14 Onder bepaalde omstandigheden kan de luchtdruk p worden benaderd door de formule $p = 1000 \cdot e^{-0,14h}$ met p in hectopascal (hPa) en h de hoogte in kilometer boven de zeespiegel.

Een ballon bevindt zich op 1200 meter hoogte en stijgt met een snelheid van 1 meter per seconde.

- a** Bereken de luchtdruk op de ballon na één minuut.
- b** Leg uit dat de luchtdruk op de ballon na t seconden gelijk is aan $p = 1000 \cdot e^{-0,14 \cdot \left(1,2 + \frac{t}{1000}\right)}$.
- c** Bereken $\frac{dp}{dt}$
- d** Bereken de snelheid in hPa per seconde waarmee de druk op de ballon na vijf minuten afneemt.

19 Differentieer.

a $f(x) = 100 \cdot 1,2^x$

d $l(d) = 21 - 5 \cdot 0,81^d$

b $g(t) = 3^{4t} + 5$

e $W(p) = 4 \cdot e^{2p+1}$

c $p(q) = \frac{1}{3} \cdot 10^{3q-1}$

f $B(x) = 5^x - x^5$

20 Op 1 januari 2021 lag er 15 gram van de radioactieve stof Strontium-90 in een laboratorium. Ieder jaar verdwijnt er 2,4% van de hoeveelheid Strontium-90.

a Stel een formule op waarmee je de hoeveelheid Strontium-90 N in grammen kunt berekenen. Neem t voor de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2021.

b Bereken de halveringstijd.

c Bereken met welke snelheid de hoeveelheid Strontium-90 op 1 januari 2030 afneemt.

27 Stel de formule op van $\frac{dA}{dp}$

a $A = 3 \cdot 1,5^{\log(p)} - 7$

d $A = (p + 1) \cdot \ln(p)$

b $A = \log(8 - p)$

e $A = 0,25^{\log(5p^4 - p)}$

c $A = \frac{1}{2} \cdot \ln(p^2)$

f $A = \frac{\ln(p)}{p - 10}$

28 Bij een bepaalde boomsoort wordt het verband tussen de hoogte en de diameter bij benadering gegeven door de formule $H = 1,5^{\log(100D)}$. Hierbij zijn H en D beide in meters. De diameter is gemeten op een meter boven de grond.

a Met hoeveel centimeter neemt de hoogte van de boom toe als de diameter toeneemt van 20 cm tot 25 cm?

b Druk D uit in H .

c Bereken de diameter van een boom van 9 meter hoog.

d Geef de afgeleide van H .

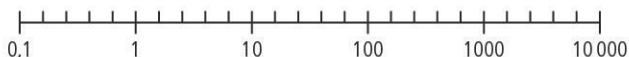
e Beredeneer met behulp van de formule van de afgeleide dat de grafiek van H afnemend stijgend is.

31 Gegeven is een getallenlijn met een logaritmische schaalverdeling.

a Bereken t als $10^t = 35$.

b Plaats het getal 35 op de schaalverdeling.

c Plaats ook de getallen 0,4 en 700 op de schaalverdeling.



- 1 a** Leg met behulp van de eigenschappen van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ uit of de volgende punten wel of niet op deze grafiek liggen.

1 $(-7\frac{1}{2}\pi, 1)$ 3 $(-113\frac{1}{2}\pi, -1)$

2 $(83\pi, -1)$ 4 $(21\frac{1}{2}\pi, 0)$

- b** Geef op het interval $[39\pi, 43\pi]$ de x -coördinaten van de punten op de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ waarvan de y -coördinaat gelijk is aan -1 .

- 2** Gegeven is de functie $f(x) = 4\sin(\frac{1}{3}\pi x)$.

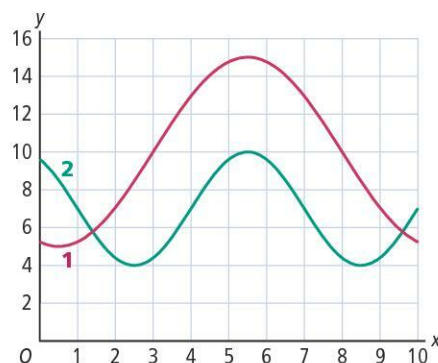
- a** Geef de amplitude en periode van de grafiek van f .
b Schets de grafiek van f op het interval $[0, 12]$.
c De grafiek van f wordt vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as met factor 1,5. Je krijgt dan de grafiek van functie g .
 Geef het functievoorschrift van g .
d De grafiek van f wordt vermenigvuldigd ten opzichte van de y -as. De periode wordt daardoor twee keer zo groot. Je krijgt dan de grafiek van functie h .
 Stel het functievoorschrift van h op.

- 3** In de figuur zijn twee sinusoiden getekend.

- a** Stel bij sinusoïde 1 een formule op van de vorm $y = d + a\sin(b(x - c))$.
b Stel bij sinusoïde 2 een formule op van de vorm $y = d + a\sin(b(x - c))$.

- c** Het punt $(3\frac{5}{6}, 12\frac{1}{2})$ ligt op sinusoïde 1.

Geef de x -coördinaten van de punten van sinusoïde 1 op het interval $[5, 15]$, die eveneens y -coördinaat $12\frac{1}{2}$ hebben.

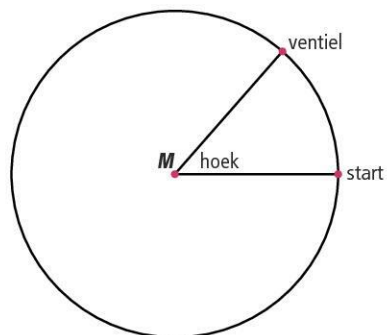


- 4 a** Gegeven is de sinusoid met formule $y = 4,5\sin(\frac{1}{3}\pi(x + \frac{1}{3})) + 3,2$.
 Bereken de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van een beginpunt van deze sinusoid.
b Een sinusoid met een formule van de vorm $y = p + \sin(\pi(x - q))$ gaat in het punt $(3, -11)$ dalend door de evenwichtsstand.
 Bepaal de waarden van p en q . Licht je antwoord toe.

- 5** De hoeveelheid lucht in de longen is bij regelmatige ademhaling een periodiek verschijnsel. Een model hiervoor is $H = 1,2 + 0,7 \sin(1,25t)$ met t in seconden en H in liters.
- Hoe groot is de periode? Geef je antwoord in hele seconden.
 - Hoeveel lucht blijft er bij het uitademen in de longen minimaal achter?
 - Na het leveren van een inspanning is de ademfrequentie 1,5 keer zo snel en de maximale longinhoud is 2,4 liter geworden. De minimale longinhoud is gelijk gebleven. Stel een functievoorschrift op dat hierbij past.

- 6** Een fiets staat op zijn kop om een lekke band te repareren. Het wiel draait langzaam rond.

- Schets de grafiek van de hoogte van het ventiel met de volgende gegevens.
 - Het wiel draait in 7 seconden twee keer volledig rond.
 - Op tijdstip $t = 0$ staat het ventiel precies op 'start'.
 - De diameter van het wiel is 60 cm.
 - Het wiel draait tegen de wijzers van de klok in.
 - Punt M zit 75 cm boven de grond.
 Zet op de horizontale as de tijd in seconden en op de verticale as de hoogte van het ventiel ten opzichte van de grond in cm. Breng op beide assen een geschikte schaalindeling aan.



- Stel een formule op die past bij de getekende grafiek.

- 7** De lichaamstemperatuur bij een mens schommelt, waarbij deze in de ochtend meestal wat lager ligt dan in de avond. De formule $LT = 0,95 \sin(0,2618(t + 11)) + 36,55$ benadert dit verschijnsel bij een bepaalde persoon redelijk. In deze formule is LT de lichaamstemperatuur in $^{\circ}\text{C}$ en t de tijd in uren waarbij $t = 0$ overeenkomt met 00.00 uur.

- Tussen welke waarden schommelt de lichaamstemperatuur van deze persoon? Licht je antwoord toe.
- Bereken de lichaamstemperatuur om vier uur 's middags. Rond je antwoord af op één decimaal.
- Laat met een berekening zien dat de periode volgens de formule ongeveer overeenkomt met een dag.
- Op welke tijdstippen is de lichaamstemperatuur volgens de formule op zijn laagst en op zijn hoogst? Licht je antwoord toe.
- Bereken hoelang gedurende een etmaal de temperatuur boven de 37°C ligt. Rond je antwoord af op hele minuten.

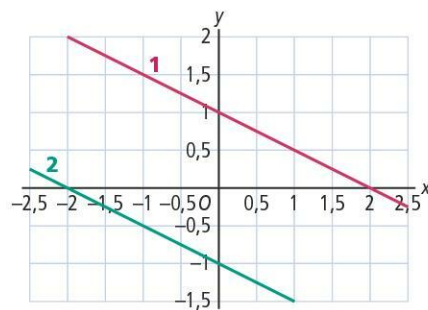


- 1** In een assenstelsel zijn twee lijnen getekend:

lijn 1 met vergelijking $y = -\frac{1}{2}x + 1$ en lijn 2 die door de punten $(-2, 0)$ en $(0, -1)$ gaat.

Geef in de volgende gevallen steeds aan hoe lijn 2 na de verschuiving(en) uit lijn 1 kan zijn ontstaan.

- Een horizontale verschuiving.
- Een verticale verschuiving.
- Een horizontale verschuiving van 14 naar links gevolgd door een verticale verschuiving.



- 2** Bij de productie van een bepaald artikel zijn de totale kosten TK in euro gegeven door de formule $TK = 1250 + 1,34q$ en de totale opbrengst TO in euro door de formule $TO = 0,03q^3 + 0,11q$. Hierin is q het aantal artikelen dat geproduceerd wordt in honderdtallen. De winst W wordt gegeven door de verschilformule $W = TO - TK$.

- Geef de formule van W uitgedrukt in q .
- Bereken vanaf welk aantal geproduceerde artikelen winst wordt gemaakt.
- Stel een formule GK voor de gemiddelde kosten en een formule GW bij de gemiddelde winst op.
- Beredeneer met behulp van de formules GK en GW dat bij een toenemende productie de gemiddelde kosten wel een grenswaarde hebben maar de gemiddelde winst niet.

- 3** Het aantal inwoners van een gemeente verloopt een aantal jaren volgens de formule $A = 10000 + \frac{5000}{t+1}$ waarbij A het aantal inwoners van de gemeente is en t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2016.

- Leg met behulp van de formule uit dat het inwoneraantal afneemt.
- Bereken met hoeveel procent het aantal inwoners is afgenomen tussen 1 januari 2016 en 1 januari 2021.
- Bereken in welk jaar het aantal inwoners gelijk is aan 10400.
- Beredeneer wat de grenswaarde is als het aantal inwoners zich voor een langere tijd laat beschrijven volgens de gegeven formule.

- 4** Gegeven zijn de functies $g(a) = a(a^2 + 1)(6a - 1)$ en $P(t) = \frac{4t - \frac{1}{2}(5 - 3t)}{16 - 2t}$

- Bereken algebraïsch voor welke waarden van a geldt dat $g(a) = 0$.
- Bereken algebraïsch voor welke waarde van t geldt dat $P(t) = 0$.

- 5** Na het inschenken van een kop thee koelt deze weer af.

Een formule voor de temperatuur van de afkoelende thee is

$$C = \frac{4,5t + 32}{0,25t + 0,4}, \text{ waarbij } C \text{ de temperatuur van de thee in}$$

graden Celsius is en t de tijd in minuten na het inschenken.

- Bereken in één decimaal nauwkeurig na hoeveel minuten de thee is afgekoeld tot 40 graden Celsius.
- Onderzoek hoe groot de grenswaarde van de temperatuur C is.
- Geef de formule van de temperatuur van de thee als de tijd T in seconden wordt gegeven.

- 6** Van precies 3 m^2 blik wordt een cilindervormig vat gemaakt met hoogte h en straal r , beide in meters. De hoogte van het vat is in deze situatie te berekenen met de formule

$$h = \frac{3}{2\pi r} - r \text{ en de inhoud } I \text{ met de formule } I = \pi \cdot r^2 \cdot h.$$

Met behulp van deze twee formules is de formule van I te

herleiden tot $I = \frac{3}{2}r - \pi r^3$, waarbij I in m^3 is.

- Geef deze herleiding.
- Bereken voor welke waarden van r de formule van I betekenis heeft.
- Bereken de afmetingen van het vat als de inhoud gelijk is aan $0,3 \text{ m}^3$. Rond af op hele centimeters.
- Stel de formule op voor de inhoud V in liter waarbij de straal s in cm wordt gegeven.



- 7** Nout heeft op 1 januari 2016 een bedrag van € 5.000,- op een spaarrekening gestort. Hij krijgt daar 1,5% rente per jaar. De rente wordt steeds aan het eind van het jaar bijgeschreven.

Nout kan het tegoed op deze spaarrekening na t jaar berekenen met de formule $A = 5000 \cdot 1,015^t$ met $t = 0$ op 1 januari 2016.

Twee jaar later (dus op 1 januari 2018) opent Nout een rekening bij een andere bank. Hij stort daar ook een bedrag van € 5.000,-. De rente bij deze bank bedraagt 1,75% per jaar en B is het tegoed op deze spaarrekening.

- Stel de formule op waarmee Nout het tegoed B kan berekenen na t jaar, waarbij je ook nu $t = 0$ op 1 januari 2016 neemt, zodat deze formule dus geldt voor $t \geq 2$.
- Bereken in welke maand van welk jaar het bedrag dat Nout op 1 januari 2018 heeft gestort, meer is geworden, dan het bedrag dat Nout op 1 januari 2016 heeft gestort.

1 Differentieer de volgende functies.

a $p(a) = (2 + 5\sqrt{a})^4$

b $q(b) = \frac{10}{7b^3 + 5}$

c $r(c) = (c^3 + 2c - 10)(c + 1)$

2 De inhoud V in cm^3 van een sinaasappel kun je berekenen met de formule $V = \frac{1}{6}\pi d^3$. Hierin is d de diameter in cm. Voor een bepaalde boom geldt dat de diameter van een sinaasappel in een bepaalde periode groeit volgens de formule $d = 1,10t$ met d in cm en t in maanden, met $0 \leq t \leq 9$.

- a** Bereken de inhoud van een sinaasappel van 5 maanden.
- b** Bereken met behulp van differentiëren met hoeveel cm^3 per maand de inhoud van een sinaasappel groeit op $t = 4$.
- c** De lengte l in cm van een blad van die sinaasappelboom hangt af van de leeftijd t in maanden van het blad en kun je bij benadering berekenen met de formule $l = 2\sqrt[3]{t^2}$ met $0 \leq t \leq 9$.
Bereken met behulp van differentiëren de snelheid waarmee de bladlengte l toeneemt op $t = 5$.



3 Voor $t > 0$ is gegeven de functie $g(t) = t\sqrt{8+t}$.

a Differentieer de functie g en toon aan dat deze gelijk is

$$\text{aan dat } g'(t) = \frac{8 + 1\frac{1}{2}t}{\sqrt{8+t}}$$

b De functie $g(t) = t\sqrt{8+t}$ kun je herleiden tot $g(t) = \sqrt{8t^2 + t^3}$. Stel met behulp van de kettingregel het functievoorschrift op van de afgeleide van $g(t) = \sqrt{8t^2 + t^3}$ en toon aan dat je dezelfde uitkomst krijgt als in opdracht a.

4 Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = (3x + 4)^2(8 - x)^6$

b $g(a) = \frac{(3a - 7)^3}{2 - a^2}$

c $h(t) = \frac{-5}{(2t^2 + 1)^3}$

- 5** Na de winter wordt een zwembad met water vol gepompt. De waterhoogte van het zwembad kun je berekenen met de formule $h = \sqrt{1200t + 900}$. In deze formule is h de waterhoogte in cm en t de tijd in uren met $t = 0$ op 23 maart om 12.00 uur. Als de water hoogte 190 cm is, wordt de pomp weer uit gezet.

- Op welk tijdstip van welke dag wordt de pomp uitgezet?
- Gebruik de afgeleide $\frac{dh}{dt}$ om aan te tonen dat de waterhoogte steeds langzamer toeneemt.
- Bereken de snelheid in cm per minuut waarmee de waterhoogte toeneemt op 23 maart om 14.30 uur. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

- 6** Grond voor stadsuitbreiding wordt door de gemeente aangekocht en bouwrijp gemaakt. De kosten voor het bouwrijp maken van een hectare grond worden berekend met de formule $B = 0,4 \cdot x^{1,8}$ waarin x het aantal woningen per hectare is en B is in duizenden euro's.

- Een ambtenaar van de gemeente Haarlem gaat uit van gemiddeld 250 vierkante meter per woning. Bereken de kosten voor het bouwrijp maken.
- De grond moet 180 000 euro per hectare opleveren. De gemiddelde kosten per woning voor het bouwrijp maken en de aankoop van de grond is te berekenen met de

formule $K = 0,4x^{0,8} + \frac{180}{x}$ met K in duizenden euro's.

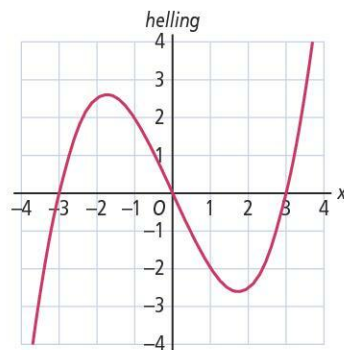
Toon met differentiëren aan dat geldt $\frac{dK}{dx} = \frac{0,32x^{1,8} - 180}{x^2}$

- Los $\frac{dK}{dx} = 0$ op en geef de betekenis van de uitkomst.

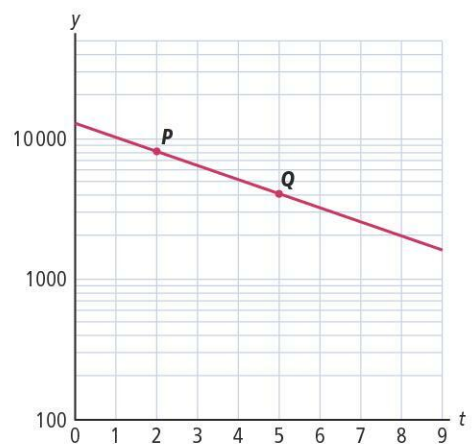
- 7** Je ziet de hellinggrafiek van de functie f . De toppen liggen bij $x = -1,7$ en $x = 1,7$. Beantwoord de volgende vragen en licht je antwoorden toe.

- Voor welke waarde van x heeft f een maximum?
- Op welk interval is de grafiek van f afnemend stijgend?

Een hectare is
10 000 m².



- 1 Druk q uit in n .
 - a $n = {}^5\log(2q + 1)$
 - b $n = {}^{1,8}\log(q) - 17$
 - c $n = \frac{1}{2} \cdot \log(3q - 5)$
- 2 Bij een exponentieel groeiproces hoort de formule $N = 24,3 \cdot 0,81^{\frac{1}{2}t-1}$ met t de tijd in dagen.
 - a Herleid de formule tot $N = 30 \cdot 0,9^t$.
 - b Geef de groeifactor en het groeipcentage per dag.
 - c Met hoeveel procent neemt N per uur af?
 - d Herleid de formule uit opdracht a zodat je t uitdrukt in N .
- 3 In het assenstelsel is een grafiek getekend van een functie f .
 - a Hoe kun je aan de grafiek zien dat f een exponentiële functie is?
 - b Stel een functievoorschrift van de vorm $f(t) = b \cdot g^t$ op bij deze grafiek. Geef g in vier decimalen nauwkeurig en b in honderdtallen nauwkeurig.
 - c De grafiek van de functie g gaat door het punt $(8, 10000)$ en is evenwijdig aan de gegeven grafiek door de punten P en Q .
Stel een functievoorschrift op bij deze grafiek.
 - d Teken in hetzelfde assenstelsel de grafiek van de functie $h(t) = 200 \cdot 1,7^t$



- 4 Differentieer de volgende functies.
 - a $f(x) = e^{2x}$
 - b $k(x) = 7 \cdot \log\left(\frac{1}{2}x\right)$
 - c $g(x) = 20 \cdot 4^x + x \cdot {}^4\log(x)$
 - d $h(x) = (1 - x) \cdot e^{1-x}$
 - e $l(x) = x^2 \cdot \ln(x^2 + 1)$

- 5 Gegeven is de functie $f(x) = 6x - e^{0,5x}$.
- Stel een functievoorschrift op voor de afgeleide van f .
 - Laat met behulp van de afgeleide zien dat $f(x)$ maximaal is voor $x = \ln(144)$.

- 6 Richard kweekt in zijn volkstuin courgettes. Van een courgette die hij lang heeft laten groeien, heeft hij op een aantal momenten het gewicht bepaald. In de grafiek zie je de resultaten.

- a Neem de tabel hieronder over en vul de ontbrekende getallen in.

groeitijd t in weken	0	5	10	15	20	25
gewicht G in grammen	32					

- b Een groeimodel dat de groei van de courgette bij

$$\text{benadering weergeeft is } G = \frac{1900}{1 + K \cdot e^{-pt}}$$

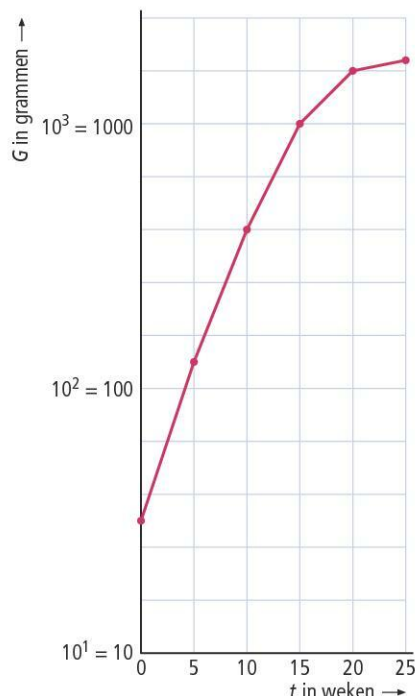
Hierin is t de tijd in weken en G het gewicht in grammen. Gebruik het gewicht op het tijdstip $t = 0$ om aan te tonen dat de waarde van K gelijk is aan 58,375.

- Benader de waarde van p in twee decimalen nauwkeurig.
- Gebruik de afgeleide van G om vast te stellen in welke week het gewicht van de courgette het meest toenam volgens dit groeimodel.

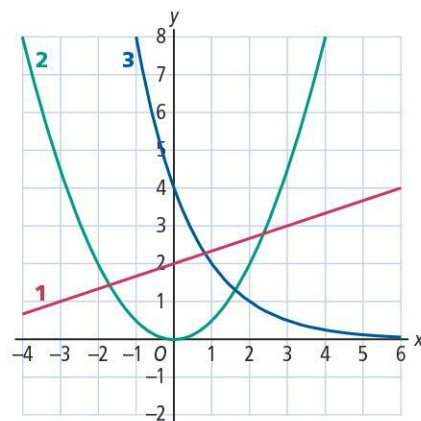
- 7 Voor de geluidssterkte D op een afstand r in meters van een

$$\text{geluidsbron geldt } D = 10 \cdot \log\left(\frac{4,9 \cdot 10^5}{r^2}\right).$$

- Beredeneer met behulp van de formule dat de geluidssterkte afneemt als de afstand tot de geluidsbron toeneemt.
- De formule is te herschrijven tot de vorm $D = A + B \cdot \log r$ waarbij A en B constanten zijn. Bereken de waarden van A en B .
- Druk r uit in D .



- 1** Gegeven zijn drie grafieken.
- Grafiek 1 hoort bij een lineair verband.
Stel een formule op die hoort bij grafiek 1.
 - Grafiek 2 hoort bij een machtsverband van de vorm $y = p \cdot x^2$.
Stel een formule op die past bij grafiek 2.
 - Grafiek 3 hoort bij een exponentieel verband.
Stel ook een formule op die past bij grafiek 3.
 - Gegeven is dat de grafiek van een recht evenredig verband gaat door het punt (12, 30).
Stel de formule op bij deze grafiek.
 - Een grafiek bij een omgekeerd evenredig verband gaat door het punt (-2, 7).
Stel een formule op bij deze grafiek.



- 2** Herleid de volgende lineaire formules zodat k wordt uitgedrukt in t .

- $2k + 0,05t = -0,01t + 4k + 3$
- $2t - 0,1(2 - k) = 10 + 1,2t$

- 3** Hieronder staan tabellen die horen bij een lineair, exponentieel of machtsverband.

- a** Vul de tabellen verder in.

x	4	5	6	7
y	362	381	...	419

x	2	3	4	5
y	2	...	8	16

x	1	2	3	4
y	2	...	54	128

x	1	4	9	...
y	1	4	9	16

- b** Stel bij iedere tabel een passende formule op.

- 4** Op 21 maart 2016 bereikte Nederland een aantal van 17 miljoen inwoners. Het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) voorziet dat dit aantal in 2034 de grens van 18 miljoen inwoners zal passeren.

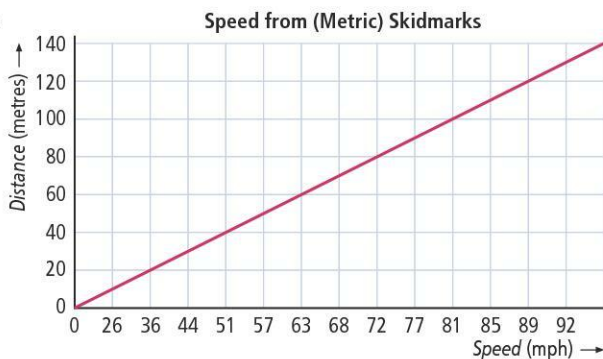
Lees het deel van een krantenartikel hiernaast en onderzoek of het CBS gebruik kan hebben gemaakt van lineair extrapoleren om met de gegevens in de tweede alinea uit te komen bij de conclusie in de eerste alinea.

- 5** In 1987 bereikte de wereldbevolking een omvang van 5 miljard. In 2020 was die opgelopen tot 7,7 miljard. Schat met behulp van lineair interpoleren de grootte van de wereldbevolking in het jaar 2005.

Het statistiekbureau voorziet dat Nederland over achttien jaar, ergens in 2034, de grens van achttien miljoen inwoners passeert. Daarmee groeit de bevolking iets minder hard vergeleken met de afgelopen vijftien jaar. Gemiddeld worden er per dag ongeveer 465 kinderen geboren. Daar staat tegenover dat er op jaarbasis elke dag 405 mensen overlijden. Verder vestigen zich gemiddeld 540 immigranten per dag in Nederland, terwijl er 405 emigranten vertrekken.

- 6 De uitwijking van een trillende veer kan worden benaderd door de formule $U = 12,3 \cdot \sin(400\pi t)$, waarbij t de tijd in seconden is en U de uitwijking in mm. De frequentie van de trilling, ofwel het aantal trillingen per seconde, is omgekeerd evenredig met de tijd die een trilling duurt. Bereken de frequentie van deze trilling.

- 7 In een oud instructieboekje van de verkeerspolitie van Londen staat een grafiek over het verband tussen de lengte r van een remweg in meters en de snelheid v in mijl per uur (mph). Op de grafiek liggen onder andere de punten (44, 30) en (89, 123).



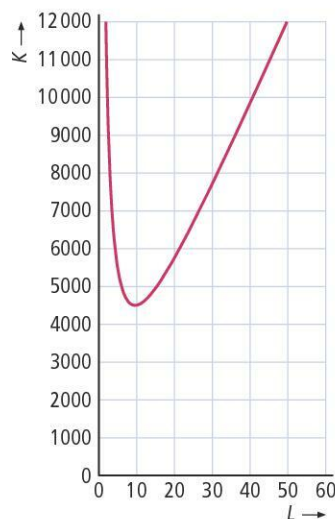
- Hoewel de grafiek een rechte lijn is, is er toch geen recht evenredig verband is tussen v en r . Toon dat aan.
- r is recht evenredig met een macht van v . Stel een formule van de vorm $r = c \cdot v^p$ op.
- Een mijl komt overeen met 1607 meter. Stel een formule op voor het verband tussen v en r , als v in km per uur wordt gegeven.

- 8 In polders wordt overtollig water afgevoerd via sloten. In een nieuwe polder moeten de sloten nog worden gegraven. Er wordt een rechthoekig patroon van recht op elkaar staande sloten aangehouden. Een rechthoekig, door sloten omgeven, stuk polder wordt een kavel genoemd. De kosten K voor het graven hangen onder andere af van de lengte L van de kavels.

Voor kavels met een grootte van 30 hectare (1 hectare = 10 000 m²) heeft men berekend dat de volgende formule geldt: $K = \frac{21\,270}{L} + 233L$. Hierin zijn K de kosten

in euro's en de L lengte in hm (1 hm = 100 m).

Gegeven is de grafiek van K .



- Bereken de kosten als de kavellengte 20 hectometer is.
- Bereken met behulp van differentiëren de helling van de grafiek in het punt met $L = 15$ en geef de praktische betekenis van dit getal.
- Uit de grafiek blijkt dat voor grote waarden van L de kosten vrijwel lineair toenemen. Onderzoek met behulp van de afgeleide met hoeveel euro per hectometer de kosten dan toenemen.

- A** Afgeleide functie 240
Amplitude 8
- B** Beeldgrafiek 53
Beginhoeveelheid 122
Beginpunt 19
Boomdiagram 251
Breuken 192
- C** Combinatie 252
- D** Dalen 198
Differentiequotient 239
Differentiëren 84, 240
Directe formule 246
- E** Eenheden 193
Evenredig 163
Evenwichtsstand 8
Exponentieel groeiproces 122
Exponentieel verband 222
Exponentiele formules herleiden 124, 157
Exponentiele formules opstellen 223
Exponentiele functies differentiëren 132
Extrapoleren 159, 197
- F** Formules met breuken herleiden 212
Formules met meerdere variabelen 200
Formules opstellen 166
- G** Gebroken functies 212
Getal e 129, 227
Getal van Euler 129
Grafieken aflezen 197
Grenswaarde 199
Groeifactor 122, 223
- H** Halveringstijd 224
Helling van een grafiek 239
Hellinggrafiek 95
Herschalen 56, 203
Horizontale verschuiving 19
- I** Interpoleren 159, 197
- K** Kettingfunctie 85
Kettingregel 85
Kwadratische functies 216
- L** Lineair extrapoleren 159, 197
Lineair interpoleren 159, 197
Lineair verband 158, 208
Lineaire vergelijking 210
Logaritme 123, 225
Logaritmische formules herleiden 125
Logaritmische functies differentiëren 136
Logaritmische schalen 140, 228
- M** Machtsformules herleiden 218
Machtsfuncties 216
Maximum 198
Meetkundige rij 246
Minimum 198
- N** Natuurlijke logaritme 133, 227
- O** Omgekeerd evenredig 163, 211
- P** Periode 8
Periodieke functies 234
Periodieke grafieken 8
Permutatie 252
Procenten 192
Productfunctie 64, 87, 202
Productregel 87
- Q** Quotientfunctie 65, 91, 202
Quotientregel 91
- R** Raaklijn 84
Recht evenredig 163, 210
Recuratieve formule 246
Redeneren met de afgeleide 98, 241
Redeneren met formules 68, 170, 199
Rekenen 192
Rekenen met logaritmen 225
Rekenkundige rij 246
Rekenmachine 197
Rooster 252
- S** Sinusfunctie 11
Sinusoïden 22, 234
Som van een meetkundige rij 248
Som van een rekenkundige rij 247
Somfunctie 60, 202
Somgrafiek 60
Stijgen 198
Substitueren 201

- T** Tijden 193
Toenamedigrammen 239
Translatie 53
- U** Uitdrukken in 201
- V** Verdubbelingstijd 224
Vergelijking van een rechte lijn 158
Verhoudingen 192
Vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as 14
Vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as 15
Verschilfunctie 60, 202
Verschilgrafiek 60
Verschuiven 202
Verticale verschuiving 18
- W** Wortelfuncties 217

Ontwerp omslag G2K, Groningen/Amsterdam
Fotografie omslag Moment/ Getty Images, Amsterdam
Ontwerp binnenwerk Ebel Kuipers, Sappemeer
Illustraties Peter Fitzverploegh, Utrecht
Technisch tekenwerk Integra Software Services, India
Beeldresearch Daliz, Den Haag

Fotoverantwoording

Koen Suyk/ ANP, Den Haag: p. 6- 7
Shutterstock, New York: p. 10, 14, 16, 22, 23, 26, 40b, 56b, 57, 58, 61, 68, 70, 72, 73, 79, 81, 88, 92, 98, 99, 100, 102, 103, 107, 109, 112, 124, 126, 130, 132, 133, 134, 135, 136, 138, 139, 140, 144, 145, 147, 150, 151, 153, 162, 164, 166o, 170, 172, 178, 187, 273
Geertrui Schaberg, Mildam: p. 18, 190- 191
iStockphoto/ Getty Images, Amsterdam: p. 28, 40- 41, 40o, 64, 112- 113, 119, 154- 155, 158, 182- 183, 262- 263, 276
Spain by Andy Newman/ Alamy Stock Photo/ Image Select, Wassenaar: p. 29
Centraal Instituut voor Toetsontwikkeling, Arnhem: p. 31, 175, 205, 214, 229, 236, 238, 243, 245, 253, 254
Westphalia/ Getty Images, Amsterdam: p. 48- 49
Ortodox/ Shutterstock.com: p. 56o
Soenar Chamid/ ANP, Den Haag: p. 66
E+/ Getty Images; Amsterdam: p. 82- 83
Nasa/ Washington: 120- 121
TT News Agency/ Alamy Stock Photo/ Image Select, Wassenaar: p. 166b
Solar Studio/ Shutterstock.com: p. 181
Dominic Robinson/ Alamy Stock Photo/ Image Select, Wassenaar: p. 182b
Alamy Stock Photo/ Image Select, Wassenaar: p. 182o
Lex van Lieshout/ ANP, Den Haag: p. 188

Met FLEX heb je:

Boeken die je mag houden

- elk schooljaar krijg je een nieuw boek
- dit boek mag je houden om in te markeren en te werken
- zo wordt je boek een effectief leermiddel

Een persoonlijke digitale leeromgeving

- waarin je wordt uitgedaagd om het beste uit jezelf te halen
- met oefentoetsen, interactieve opdrachten en feedback
- en met inzicht in je resultaten



Altijd actueel lesmateriaal

- actuele inhoud met opdrachten en toetsen
- zowel in je boek als digitaal
- aangevuld met nieuw lesmateriaal op basis van het nieuws en actualiteiten



Noordhoff



www.modernewiskunde.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-89199-2



9 789001 891992