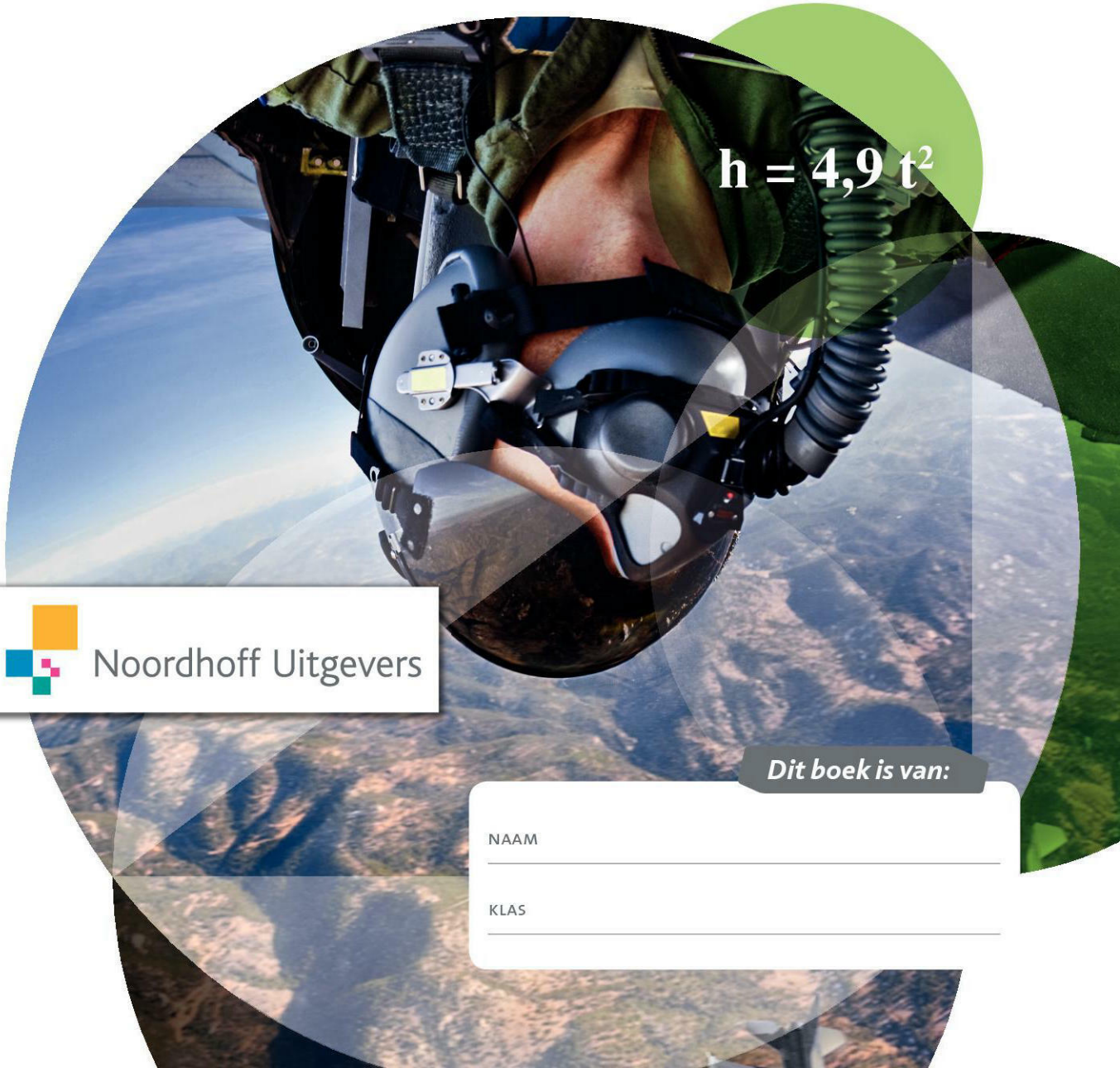
LEERBOEK | WISKUNDE B | VWO DEEL 1

MODERNE WISKUNDE B



Noordhoff Uitgevers

Dit boek is van:

NAAM _____

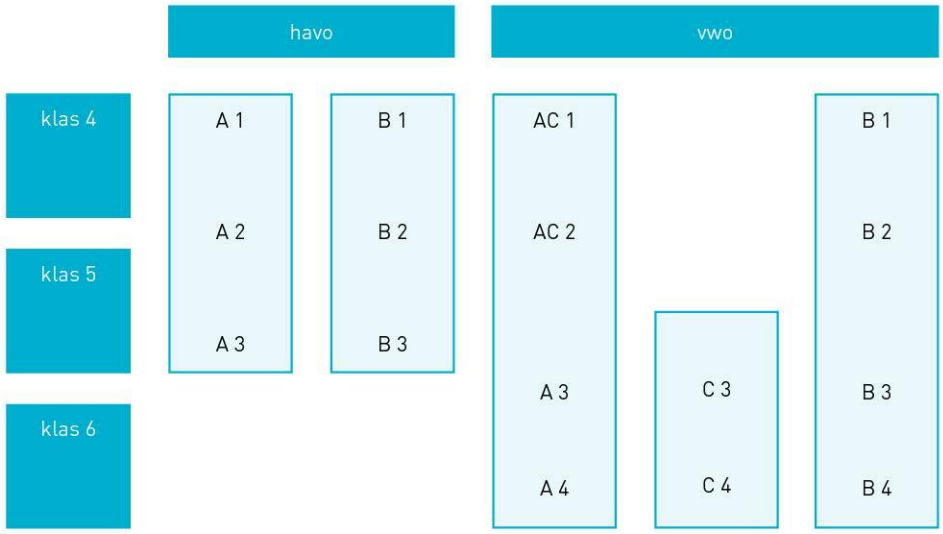
KLAS _____

12e editie

Moderne Wiskunde

vwo B deel 1

Serieoverzicht Tweede Fase



Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontlenen.

MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189

0 / 19

© 2019 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsenauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-57539-7

© Noordhoff Uitgevers bv

12e editie

Moderne Wiskunde

vwo B deel 1

Harm Bakker
Bert Boon
Dick Bos
Wim Doekes
Boris Nolte
Gerard van Proosdij
Rindert Reijenga
Geertrui Schaberg
Ron Sinkeldam
Carolijn Tacken

Noordhoff Uitgevers

Inhoud

1 Vergelijkingen 10

Voorkennis 12
1.1 Lineaire vergelijkingen 14
1.2 Kwadratische vergelijkingen 18
1.3 Wortelvergelijkingen 22
1.4 Gebroken vergelijkingen 26
1.5 Herleiden 30
1.6 Parameters 34
1.7 Gemengde opdrachten 38
Onderzoeksopdrachten 39
Samenvatting 40
Test jezelf 44
Extra oefening 46

2 Machtsfuncties 48

Voorkennis 50
2.1 Negatieve exponenten 52
2.2 Gebroken exponenten 56
2.3 Machtsfuncties 60
2.4 Vergelijkingen oplossen 64
2.5 Herleiden 68
2.6 Gemengde opdrachten 72
Onderzoeksopdrachten 73
Samenvatting 74
Test jezelf 78
Extra oefening 80

Vaardigheden 1 82
Lineaire vergelijkingen opstellen 84
Rekenen met wortels 85
Rekenen met breuken 86

De grafische rekenmachine 88

3 Functies en grafieken 94

Voorkennis 96
3.1 Domein en bereik 98
3.2 Gebroken functies 102
3.3 Soorten functies 106
3.4 Grafieken verschuiven en vermenigvuldigen 110
3.5 Vergelijkingen oplossen 114
3.6 Gemengde opdrachten 118
Onderzoeksopdrachten 119
Samenvatting 120
Test jezelf 124
Extra oefening 126

4 Lijnen 128

Voorkennis 130
4.1 Vergelijking van een lijn 132
4.2 Elimineren 136
4.3 De hoek tussen twee lijnen 140
4.4 Loodrecht 144
4.5 Afstanden 148
4.6 Gemengde opdrachten 152
Onderzoeksopdrachten 153
Samenvatting 154
Test jezelf 158
Extra oefening 160

Vaardigheden 2 162
Rekenen met breuken 164
Haakjes wegwerken en bijzondere producten 165
Vergelijkingen oplossen 166
Ongelijkheden oplossen 167

© Noordhoff Uitgevers bv

5 Afgeleide functies 168

Voorkennis 170
5.1 Gemiddelde toename en helling 172
5.2 Helling van een grafiek 176
5.3 De afgeleide functie 180
5.4 Regels voor differentiëren 184
5.5 Maxima en minima 188
5.6 Raaklijnen en hellinggrafieken 192
5.7 Gemengde opdrachten 196
Onderzoeksopdrachten 197
Samenvatting 198
Test jezelf 202
Extra oefening 204

6 Periodieke functies 206

Voorkennis 208
6.1 Radialen 210
6.2 Sinusfunctie 214
6.3 Cosinusfunctie 218
6.4 Transformaties 222
6.5 Algemene vorm van een sinusoïde 226
6.6 Vergelijkingen oplossen 230
6.7 Gemengde opdrachten 234
Onderzoeksopdrachten 235
Samenvatting 236
Test jezelf 240
Extra oefening 242

Vaardigheden 3 244
Breuken en wortels herleiden 246
Lijnen 247
Exponentiële formules 248
Rekenen met machten 248
Substitutie 249

Keuzeonderwerpen 250

Praktische opdracht – Muziek 252

Praktische opdracht – Vlakvullingen 256

Extra 260

Meer Oefenen 262

Oefenproefwerken 274

Trefwoorden 286

Moderne Wiskunde

vwo B deel 1

© Noordhoff Uitgevers bv

Aan het begin van de paragraaf staan de **Leerdoelen**. Deze geven richting aan je werk. Met de **Samenvatting** kun je de onderwerpen van het hoofdstuk nog eens goed doornemen en kijken of je de leerdoelen hebt gehaald.

Er zijn drie **leerroutes**. Voel je je niet zo vertrouwd met het onderwerp van de paragraaf kies je de **Ondersteunende route**. Voor wat extra moeilijke opgaven kies je de **Uitdagende route**.

Een **W** verwijst naar de werkbladen achterin het boek.

1.4 Routes in een rooster

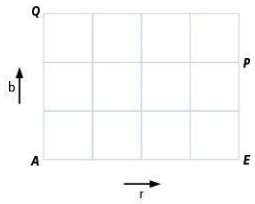
Je leert · hoe je een rooster kunt gebruiken om telproblemen op te lossen

Leerroutes
- ondersteunend: 23—24—025—26—27—28—029—30
- doorlopend: 23—24—25—26—27—28—29—30
- uitdagend: 23—24—25—26—27—29—30—U6

Hiernaast zie je een stukje van de plattegrond van New York.
Donald staat op de kruising van 10th Ave en 80th Street (links). Hij moet naar de kruising van 12th Ave en 76th Street (rechts). Met de lijn is een mogelijke route weergegeven.
· Op hoeveel manieren kan Donald zonder omweg naar de kruising van de 10th Ave en 76th Street lopen?

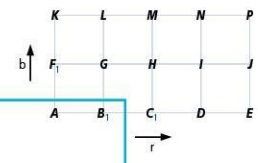
23 In de tekening hiernaast ga je het aantal mogelijke kortste routes tellen van het punt A naar het punt P via de roosterlijnen. Op ieder kruispunt van roosterlijnen heb je de keus uit rechtsaf (r) of naar boven (b). De route die via punt E loopt kun je beschrijven met rrrbb.

a Neem de tekening over en teken daarin de route rbrrbr.
b Schrijf nog enkele routes van punt A naar punt P op.
c Hoe kun je zonder te tekenen zien dat de route brrbrb niet uitkomt in punt P?
d Leg uit waarom geen van de gevraagde routes via punt Q gaat.



24 W Het aantal kortste routes van A naar P kun je berekenen door bij elk kruispunt het aantal kortste routes van A naar dat kruispunt te noteren.

a Leg uit dat je de punten B, G en E maar op één manier kunt bereiken.
b Welke andere punten kun je maar op één manier bereiken? Noteer bij al deze punten het getal 1.
c Leg uit dat je het punt G op twee manieren kunt bereiken en noteer het getal 2 bij het punt G.
d Het punt H kun je bereiken via punt C (op één manier) of via punt G (op twee manieren). Op hoeveel manieren kun je dus in punt H komen? Noteer dit aantal bij punt H.
e Welk getal noteer je bij punt L?
f M bereik je vanuit H of L.
Hoe bereken je uit de getallen bij H en L het aantal mogelijke kortste routes naar M?
g Noteer bij alle punten het aantal kortste routes vanuit A.
h Hoeveel kortste routes zijn er van A naar P?



© Noordhoff Uitgevers bv

Voor vwo B 4, 5 en 6 zijn er **vier delen** met in totaal **23 hoofdstukken**. Na elke twee hoofdstukken volgt een blok met **Vaardigheden**.
In deel 4 staat ook de **Examenvoorbereiding**.

Elk hoofdstuk begint met een paragraaf **Voorkennis**. Met deze paragraaf haal je de benodigde voorkennis op.

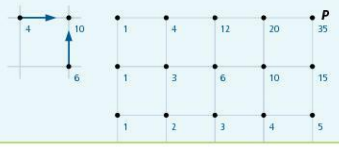
Dit boek is van jou en blijft van jou! Je mag belangrijke teksten arceren, je mag aantekeningen maken en je mag tekeningen maken.

© Noordhoff Uitgevers bv

Aanpak

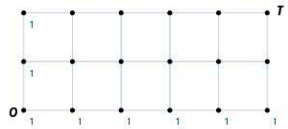
Hoe bereken je het aantal kortste routes in een rooster?

1 Noteer bij elk punt dat maar op één manier is te bereiken het getal 1.
2 Stel voor elk ander punt vast wat de voorgaande punten zijn en tel de bijbehorende aantallen bij elkaar op.

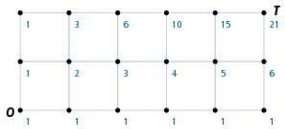


Voorbeeld

Bereken het aantal kortste routes van $O(0, 0)$ naar $T(5, 2)$.



Oplossing

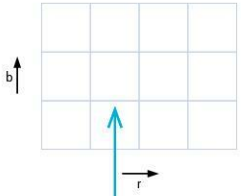


Het aantal kortste routes van O naar T is 21

Ondersteunende route → maak opdracht 025

25
a Bereken het aantal kortste routes van $O(0, 0)$ naar $P(5, 3)$.
b Bereken het aantal kortste routes van $O(0, 0)$ naar $Q(2, 4)$.
c Om het aantal kortste routes te berekenen van $R(3, 1)$ naar $S(6, 6)$, begint je rooster met getallen in punt R.
Bereken het aantal kortste routes van $R(3, 1)$ naar $S(6, 6)$.
d Bereken het aantal kortste routes van $U(1, 4)$ naar $V(7, 0)$.

26 H
De voetbalwedstrijd tussen de amateurclubs Rapido en Broekster Boys eindigde in 4 – 3 voor Rapido. In deze opdracht bereken je met een rooster het aantal mogelijke scoreverlopen die tot deze eindstand leiden.
a Het scoreverloop waarbij Rapido eerst twee keer scoort, daarna Broekster Boys drie keer en Rapido tot slot twee keer, geef je aan met rrbbbrr.
Teken een rooster met daarin dit scoreverloop.
b Geef in het rooster de route aan die overeenkomt met het scoreverloop waarbij de clubs om en om een doelpunt scoren.
c Bereken het aantal mogelijke scoreverlopen die leiden tot de eindstand 4 – 3.



© Noordhoff Uitgevers bv

In een Paragraaf staan **theorie**- en **aanpakvlakken** met uitgewerkte voorbeelden.

Een bij de opdracht geeft aan dat je deze opdracht op de computer moet maken.

Een H geeft aan dat er bij die opdracht meer oefenstof is. Je vindt die oefenstof op de bladzijden **Meer oefenen** achterin het boek.
Achterin het boek vind je ook een **Oefenproefwerk** bij elk hoofdstuk.

De **Test jezelf** bestaat uit opdrachten waarmee je je kennis en vaardigheden met betrekking tot de onderwerpen van het hoofdstuk kunt testen.

De **Extra oefening** bevat opdrachten die gekoppeld zijn aan de vaardigheden van het hoofdstuk en daarnaast een aantal gemengde opdrachten.

Moderne Wiskunde online bevat alle opdrachten en aanvullende opdrachten. De verwijzing naar **Ondersteunende** en **Uitdagende opdachten** gaat automatisch. Bij de **theorie** is vaak een video of animatie.

© Noordhoff Uitgevers bv

Wat zijn Wiskundige Denk Activiteiten?

Bij het vak Wiskunde leer je veel verschillende methoden om een opdracht aan te pakken. Na de noodzakelijke oefening wordt elke methode een routine, je weet precies welke stappen je moet zetten. Er zijn echter ook veel situaties waarbij het helemaal niet meteen duidelijk is, welke aanpak je moet gebruiken. Daarvoor is de naam Wiskundige Denk Activiteiten bedacht, verder afgekort als WDA. Je kunt niet spreken van één soort WDA, er wordt een onderscheid gemaakt tussen een aantal verschillende aspecten.

– *Probleem oplossen en analytisch denken*
Hiermee wordt bedoeld dat je gaat uitzoeken hoe een probleem in elkaar zit en welke stappen er nodig zijn om het probleem op te lossen.
In de boeken vind je dit onder andere terug in de onderzoeksopdrachten.

Voorbeeld

Een cilindervormig literblik heeft een inhoud van 1L of 1000 cm^3.
Bij welke keuze van de straal en de hoogte is er het minste materiaal nodig om het blik te maken?

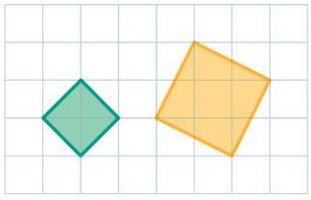
– *Modelleren en algebraïseren*
Soms wordt een probleem in woorden omschreven. Door te modelleren en algebraïseren ga je het probleem in wiskunde vertalen. Daarbij moet je geschikte variabelen kiezen en verbanden tussen die variabelen in de vorm van vergelijkingen kunnen opstellen.
Ook dit aspect speelt met name een rol in de onderzoeksopdrachten.

Voorbeeld

Eric en Mariëlle zijn de ouders van Kevin en Pascal. Eric is twee jaar ouder dan Mariëlle en Kevin is twee jaar ouder dan Pascal. Kevin is geboren toen Mariëlle 28 jaar oud was. Het totaal van hun leeftijden is precies 100 jaar.
Hoe oud zijn Eric, Mariëlle, Kevin en Pascal?

– *Ordenen en structureren*
Hiermee wordt bedoeld dat je inzicht krijg in overeenkomsten tussen figuren, verschillende soorten vergelijkingen en dergelijke.
In de boeken vind je dit aspect terug in veel intro-opdrachten.

Voorbeeld



De hoekpunten van deze vierkantjes zijn roosterpunten en de oppervlakten zijn 2 en 5.
Ga van alle getallen 1 tot en met 50 na of je vierkanten kunt tekenen met die oppervlakte en roosterpunten als hoekpunten.
Zijn er ook getallen waarbij het op meer dan één manier mogelijk is?

© Noordhoff Uitgevers bv

– *Formules manipuleren*
Met het herschrijven van formules, het uitdrukken van een variabele in andere variabelen of het invullen van een formule in een andere formule heb je al vaker ervaring opgedaan. Belangrijk is daarbij, dat je begrijpt hoe een formule is opgebouwd.
Aan dit aspect wordt aandacht besteed in tal van opdrachten.

Voorbeeld

Laat zien dat je het functievoorschrift $f(x) = x(x - 1)(x + 2) - x^3 + 1$ kunt herleiden tot $f(x) = (x - 1)^2$.

– *Abstraheren*
Iets abstract maken is een belangrijk onderdeel van de wiskunde, maar lastig te omschrijven. Je abstraheert zodra je een praktisch probleem vertaalt in wiskundige formules of vergelijkingen. Dit aspect vind je vooral terug in praktische toepassingen. Ook bij het aanleren van nieuwe wiskundige begrippen speelt dit een rol.

Voorbeeld

Bij veel bijeenkomsten begroeten alle aanwezigen elkaar met een handdruk. Bij twee aanwezigen is er één handdruk, bij drie aanwezigen drie en bij vier aanwezigen zes.
Kun je dit lijstje uitbreiden en vervolgens een formule opstellen voor het aantal handdrukken h als er n aanwezigen zijn?

– *Logisch redeneren en bewijzen*
Dit aspect komt naar voren bij vragen naar een verklaring of bewijs. Je leert bij veel onderdelen van de wiskunde iets aan te tonen met behulp van een redenering met logische stappen. Je vindt dit in de boeken terug bij allerlei vragen met de formulering 'leg uit', 'toon aan' of 'bewijs dat'.

Voorbeeld

Een getal is deelbaar door 9, als de som van de cijfers van dat getal deelbaar is door 9.
Bewijs deze regel.

© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

Vergelijkingen 1

SE CE K

In dit hoofdstuk

In de voorafgaande jaren heb je al geleerd verschillende soorten vergelijkingen op te lossen.

In dit hoofdstuk ga je uitgebreid met vergelijkingen aan de slag. Het gaat om lineaire vergelijkingen, kwadratische vergelijkingen, wortelvergelijkingen, gebroken vergelijkingen en soms om combinaties hiervan.
Ook leer je formules in een andere vorm schrijven.
Door een functievoorschrift te voorzien van een extra variabele krijg je een familie van functies. Je gaat zulke families van functies onderzoeken op eigenschappen.

Vergelijkingen oplossen, functies anders schrijven en werken met families van functies spelen in veel hoofdstukken van dit jaar en de volgende jaren opnieuw een belangrijke rol.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

• *Probleem oplossen en analytisch denken*	intro van paragraaf 1.4
• *Formules manipuleren*	opdracht 31
• *Abstraheren*	opdracht 38

© Noordhoff Uitgevers bv

V1 Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk.

a $y = (x + 6)(x - 2)$

b $y = -3x(2 - \frac{3}{4}x)$

c $y = 6x^2 - (3x - 2x^2)$

d $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x(x - 3)$

V2 Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk.

a $y = 3x(2x - 9) + 4x$

b $y = x(2 - x) + x \cdot \frac{1}{3}x$

c $y = (3x + 6)(x - 2)$

d $y = \frac{1}{2}x\left(-\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\right) + x$

e $y = (x^2 - 3x)^2 - x^2$

f $y = (1 - 2x)^2(x + 3)$

g $y = 3 - x(x - 6)^2$

h $y = 2x + 3 - (x - 4)^2$

Theorie

De rechterkant van een formule kun je vaak schrijven als product van twee of meer factoren. Het schrijven als product van factoren heet ontbinden. Daarbij zoek je naar de grootste gemeenschappelijke factor. Bij een kwadratische drieterm probeer je de som-productmethode.

Voorbeeld 1

Ontbind $h = 4t^3 - 12t^2$ in factoren.

Oplossing

De grootste gemeenschappelijk factor is $4t^2$ immers $4t^3 = 4t^2 \cdot t$ en $-12t^2 = 4t^2 \cdot -3$, dus $h = 4t^2\,(t - 3)$.

Voorbeeld 2

Ontbind $y = x^2 - 7x + 12$ in factoren.

Oplossing

product	*getallen*	*som*
+12	−1 en −12	−13
+12	−2 en −6	−8
+12	−3 en −4	−7

$y = (x - 3)(x - 4)$

V3 Ontbind in factoren.

a $q = 15p^3 + 20p^2$

b $p = -3q^2 - 27q$

c $q = p^2 - 25p - 150$

d $h = 0{,}2t^2 - 0{,}6t^3$

e $b = -6a^6 + 21a^4$

f $h = t^2 - 100t + 900$

g $h = p^2 + 6p + 9$

h $q = p^2 - 4$

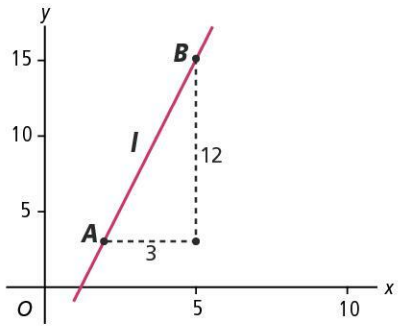
© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Functies van de vorm $f(x) = ax + b$ zijn lineaire functies. Grafieken van lineaire functies zijn rechte lijnen, waarbij a het hellingsgetal is en b het startgetal. Een ander woord voor hellingsgetal is richtingscoëfficiënt.
De lineaire formule $y = ax + b$ die bij een rechte lijn hoort, heet ook wel een vergelijking van de lijn.

Voorbeeld

Lijn l gaat door de punten $A(2, 3)$ en $B(5, 15)$.
Bereken de richtingscoëfficient van l, stel een vergelijking op van l en geef het bijbehorende functievoorschrift.



Oplossing

De richtingscoëfficient $a = \frac{\text{verticale toename}}{\text{horizontale toename}} = \frac{12}{3} = 4$.

De vergelijking wordt dus $y = 4x + b$.
Punt $A(2, 3)$ ligt op l dus $3 = 4 \cdot 2 + b$, waaruit volgt $b = -5$.
Een bij l horende vergelijking is $y = 4x - 5$.
Het bijbehorende functievoorschrift is $f(x) = 4x - 5$.

V4 Stel een vergelijking op van lijn l.

a l gaat door $(2, -3)$ en heeft richtingscoëfficiënt 5.
b l gaat door $(-7, -2)$ en $(1, 6)$.
c l is evenwijdig aan lijn m: $y = -0{,}25x + 3$ en gaat door $(3, 5)$.

V5 Los op.

a $2x - 3 = -3x + 7$
b $\frac{1}{2}x - 2 = 7 - \frac{1}{4}x$
c $6x + 1\frac{1}{5}x = 1\frac{1}{2}x + 9$
d $-2x + 23 = 45 - 22x$

Theorie

Voor het oplossen van vergelijkingen kun je soms gebruik maken van de bordjesmethode. Je kijkt dan waar je een bordje op kunt leggen en bedenkt wat op het bordje moet staan. Vervolgens bereken je de oplossing.

Voorbeeld

Los op $(x + 7)^2 = 16$.

Oplossing

Leg een bordje op $x + 7$.
Omdat $4^2 = 16$ en $(-4)^2 = 16$ moet gelden: $x + 7 = 4$ of $x + 7 = -4$.
Dit geeft $x = -3$ of $x = -11$.

V6 Los op met de bordjesmethode.

a $(x + 3)^2 = 81$
b $\frac{1}{x + 2} = 4$
c $\sqrt{x + 3} = 5$
d $\frac{28}{x - 2} = 7$

© Noordhoff Uitgevers bv

1.1 Lineaire vergelijkingen

Je leert
- hoe je een lineaire of eerstegraads vergelijking oplost
- hoe je een ongelijkheid oplost

Leerroutes
- ondersteunend: 1—02—3—4—05—5—6
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7
- uitdagend: 1—2—3—4—6—U1—U2

Van een brandende kaars voldoet de hoogte H in cm aan de formule $H = 12 - 0{,}2t$ met t in uren.
- Op welk moment is de kaars voor de helft opgebrand?

1 Op het blaadje is een begin gemaakt met het oplossen van de vergelijking $3x + 5(6 - 2x) = 14 - 4(\frac{1}{2}x + 1)$.

a Leg uit hoe vergelijking **2** uit vergelijking **1** ontstaat.

b Leg uit hoe vergelijking **4** uit vergelijking **3** ontstaat.

c Trek in vergelijking **4** links en rechts van het =-teken 30 af en los de vergelijking verder op.

d Controleer je oplossing door de gevonden waarde van x in de vergelijking $3x + 5(6 - 2x) = 14 - 4(\frac{1}{2}x + 1)$ in te vullen.

●	$3x + 5(6 - 2x) = 14 - 4(\frac{1}{2}x + 1)$	1
●	$3x + 30 - 10x = 14 - 2x - 4$	2
●	$-7x + 30 = 10 - 2x$	3
●	$-5x + 30 = 10$	4

Theorie

Een lineaire vergelijking of eerstegraads vergelijking los je op door links en rechts van het =-teken dezelfde bewerkingen uit te voeren.
Daarmee vereenvoudig je de vergelijking zo dat de variabele nog maar aan één kant van het =-teken staat. Soms moet je eerst breuken of haakjes wegwerken.
Het rekenen met letters heet algebra.

Voorbeeld

Los op $2x + \frac{2}{5} = \frac{1}{2}x + 3$.

Oplossing

$2x + \frac{2}{5} = \frac{1}{2}x + 3$
$20x + 4 = 5x + 30$ (links en rechts × 10)
$15x + 4 = 30$ (links en rechts – $5x$)
$15x = 26$ (links en rechts – 4)

$x = \frac{26}{15} = 1\frac{11}{15}$ (links en rechts : 15)

De oplossing is $x = 1\frac{11}{15}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O2

2 Los op. Geef exacte antwoorden.

H

a $8x - 4 = 3x + 7$

b $-12x + 6 = 3 - 5x$

c $\frac{1}{2}x - 5 = \frac{2}{3}x + 1$

d $1\frac{3}{7}x + 1 = 2x - 3$

e $15 - (2x - 6) = 7x + 4$

f $9x = 6x - 5(2 - 3x)$

g $10 - (3 + 4x) = -7x + 1$

h $\frac{3}{5}x + 1\frac{7}{10} = 1\frac{1}{5}x - \frac{3}{10}$

Je komt in deze paragraaf twee verschillende betekenissen van het woord vergelijking tegen. Een lineaire vergelijking zoals $4x + 7 = -2x + 1$ heeft één variabele en kun je oplossen. Een vergelijking zoals $y = 2x - 6$ geeft een lineair verband weer tussen de variabelen x en y.

3 Lijn l is de grafiek bij de vergelijking $y = 4 - \frac{1}{2}x$.

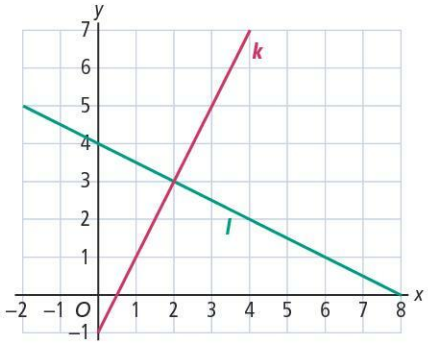
a Hoe groot is het hellingsgetal van lijn l?

b Leg uit hoe je het hellingsgetal van l uit de grafiek kunt aflezen.

c Geef de richtingscoëfficiënt van lijn k.

d Stel een vergelijking op van lijn k.

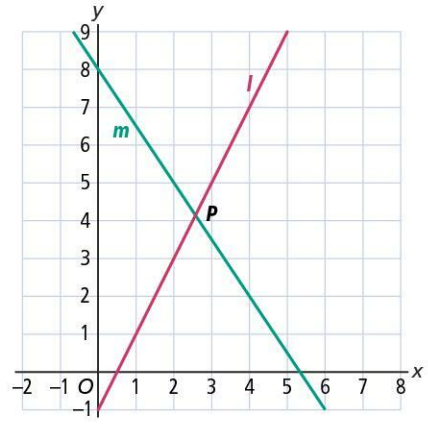
e Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen l en k.



4 Gegeven zijn lijn l: $y = 2x - 1$ en lijn m: $y = 8 - 1\frac{1}{2}x$.
De lijnen snijden elkaar in punt P.

a Bereken de x-coördinaat van P door de vergelijking $2x - 1 = 8 - 1\frac{1}{2}x$ op te lossen. Geef een exact antwoord.

b Lees uit de grafieken af voor welke waarden van x de formule $y = 2x - 1$ een grotere uitkomst geeft dan de formule $y = 8 - 1\frac{1}{2}x$.



© Noordhoff Uitgevers bv

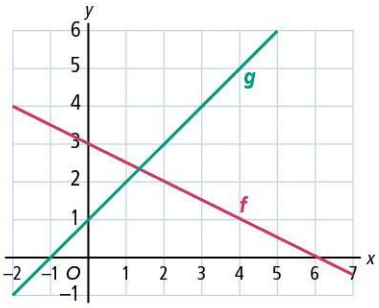
Aanpak

Hoe los je een ongelijkheid op?

1. Los de bijbehorende vergelijking op.
2. Lees met behulp van de grafieken de oplossing van de ongelijkheid af.
3. Noteer de oplossing van de ongelijkheid.

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies $f(x) = -0{,}5x + 3$ en $g(x) = x + 1$.
Los de ongelijkheid $f(x) < g(x)$ op.



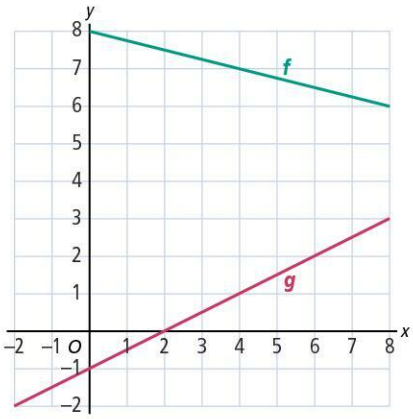
Oplossing

1. $-0{,}5x + 3 = x + 1$
   $-1{,}5x + 3 = 1$
   $-1{,}5x = -2$ dus $x = 1\frac{1}{3}$
2. Als $x > 1\frac{1}{3}$ dan ligt de grafiek van f lager dan de grafiek van g.
3. De oplossing is $x > 1\frac{1}{3}$.

Ondersteunende route → maak opdracht O5

5 De grafieken horen bij de functies $f(x) = -\frac{1}{4}x + 8$ en $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

Los op $g(x) > f(x)$.



6 Gegeven zijn lijn l: $y = \frac{1}{4}x - 2$ en lijn m: $y = \frac{1}{2}x + 1$.

H

a Teken de lijnen l en m in een assenstelsel. Neem voor x de waarden -16 tot 8 en voor y de waarden -8 tot 6.

b Los op $\frac{1}{4}x - 2 < \frac{1}{2}x + 1$.

7 **a** Teken de grafieken van $f(x) = 6x - 14$ en $g(x) = -\frac{2}{3}x + 6$.

b Los op $f(x) \geq g(x)$.

Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O2 Op het blaadje is een begin gemaakt met het oplossen van $4x - 3(2 - x) = 15$.

a Leg uit wat er in stap 1 is gebeurd.

b Vul de stappen 2 en 3 aan.

$4x - 3(2 - x) = 15$	
$4x - 6 + 3x = 15$	1
$\ldots x = \ldots$	2
$x = \ldots$	3

Los op. Geef exacte antwoorden.

c $9 - (x - 7) = 5x + 2$

d $-11x - 4 = 9 + 2x$

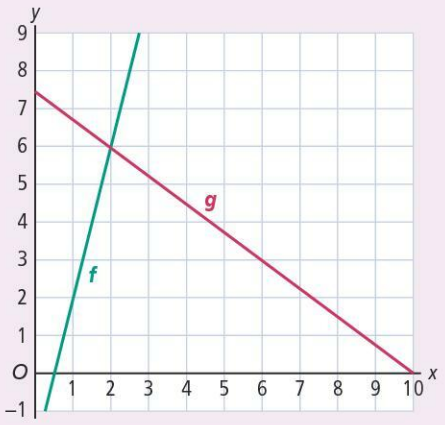
e $2(3x - 4) = 5(4 - 3x)$

f $-3x - 2(2x - 8) = 5x - 6$

g $0{,}2x - (4 - x) = 20$

h $1\frac{1}{7}x - \frac{5}{14} = \frac{2}{7}x + 1\frac{3}{14}$

O5 Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x) = 4x - 2$ en $g(x) = -\frac{3}{4}x + 7\frac{1}{2}$.



a Los op $f(x) = g(x)$.

b Voor de oplossing van de ongelijkheid $g(x) \leq f(x)$ kijk je waar de grafiek van g lager ligt dan de grafiek van f. Vanaf welke waarde van x is dat het geval?

c Los op $g(x) \leq f(x)$.

Uitdagende opdrachten

U1 **a** Bereken de coördinaten van de snijpunten van de lijn met vergelijking $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$ met de assen.

b Van lijn l zijn de snijpunten met de assen de punten $(5, 0)$ en $(0, -2)$.
Stel de vergelijking op van lijn l in de vorm $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

U2 Gegeven zijn de lijnen k: $ay + 2x = 7$ en m: $6x - 5y = bx$.

a De lijnen k en m snijden elkaar in het punt $S(3, 5)$.
Bereken de waarde van a en van b.

b Neem $b = 14$ en bereken de waarde van a waarvoor de lijnen k en m elkaar niet snijden.

c Lijn k snijdt het lijnstuk AB tussen de punten $A(4, 1)$ en $B(12, 3)$.
Bereken voor welke waarden van a dit het geval is.

© Noordhoff Uitgevers bv

1.2 Kwadratische vergelijkingen

Je leert · hoe je een kwadratische of tweedegraads vergelijking oplost

Leerroutes
· ondersteunend: 8—9—10—O11—11—12—O13—14
· doorlopend: 8—9—10—11—12—13—14—15
· uitdagend: 8—9—11—13—14—15—U3—U4

Een tennisbal wordt opgeslagen. De hoogte h in meters van de bal voldoet aan de formule $h = -5t^2 + 5t + 3$ met t de tijd in seconden.
· Na hoeveel seconden komt de bal op de grond?

8 **a** De vergelijking $(x - 3)(2x - 10) = 0$ heeft twee oplossingen.
Bereken deze oplossingen.

b De vergelijking $p^2 - 7p - 30 = 0$ is te ontbinden in $(p - 10)(p + 3) = 0$.
Bereken hiermee de oplossingen van de vergelijking.

c Waarom kun je $x^2 + 7x - 13 = 0$ niet op deze manier oplossen?

d Op het blaadje is een begin gemaakt met het oplossen van $4a^2 + 24a = 0$.
Maak de berekening af.

$4a^2 + 24a = 0$
$4a(a + 6) = 0$
.....

Theorie

Bij het oplossen van **kwadratische vergelijkingen** of **tweedegraads vergelijkingen** kun je gebruik maken van:
- **ontbinden in factoren**. Je gebruikt dan de regel:
  Uit $A \cdot B = 0$ volgt $A = 0$ of $B = 0$.
- de ***abc*-formule**. De oplossingen van $ax^2 + bx + c = 0$ zijn:
  $x = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ of $x = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ met $D = b^2 - 4ac$.
  D heet de **discriminant** van de vergelijking.
  Als $D > 0$, dan zijn er twee oplossingen.
  Als $D > 0$, dan is er één oplossing.
  Als $D < 0$, dan zijn er geen oplossingen.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld 1

Los op $3x^2 + 12x = 15$.

Oplossing

$3x^2 + 12x - 15 = 0$ (op nul herleid)
$x^2 + 4x - 5 = 0$ (links en rechts : 3)
$(x + 5)(x - 1) = 0$ (ontbonden)
$x + 5 = 0$ of $x - 1 = 0$
$x = -5$ of $x = 1$

Voorbeeld 2

Los op $2x(x - 1) = 3x - 2$.

Oplossing

$2x^2 - 2x = 3x - 2$ (haakjes weggewerkt)
$2x^2 - 5x + 2 = 0$ (op nul herleid)
$a = 2$, $b = -5$ en $c = 2$ (*abc*-formule)
$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$

$$x = \frac{5 + \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = 2 \text{ of } x = \frac{5 - \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

9 Los op.

H

a $x^2 - x - 16 = -4$

b $x(x - 1) = 4x$

c $q^2 - 50q = 5000$

d $8a^2 + 15 = 47$

e $2t^2 - 10t + 12 = 0$

f $(a + 7)(a - 1) = 20$

g $5x^2 - x = 4$

h $(4x + 2)^2 = (5 - 2x)^2$

10 **a** Als je $(3x + 4)^2 = 25$ wilt oplossen, kun je dat doen door de haakjes weg te werken, op nul te herleiden en de *abc*-formule toe te passen. Dat is hier niet nodig. Los de vergelijking op met de bordjesmethode.

b De vergelijking $(x + 5)^2 = 9x^2$ is van de vorm $A^2 = B^2$. Een eerste oplossing vind je door $x + 5 = 3x$ op te lossen. Welke vergelijking moet je oplossen om de tweede oplossing te vinden?

Theorie

Vergelijkingen als $(2x + 3)^2 = 25$ en $(3x + 4)^2 = (2x - 1)^2$ hebben de vorm $A^2 = B^2$. Voor het oplossen van dergelijke vergelijkingen kun je gebruik maken van de regel:
Uit $A^2 = B^2$ volgt $A = B$ of $A = -B$.

Voorbeeld

Los op $(3x + 4)^2 = (2x - 1)^2$.

Oplossing

$3x + 4 = 2x - 1$ of $3x + 4 = -(2x - 1)$
$x + 4 = -1$ of $3x + 4 = -2x + 1$
$x = -5$ of $5x = -3$
$x = -5$ of $x = -\frac{3}{5}$

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O11

11 Los op.

H

a $(x-8)^2=9$

b $(7a+8)^2=(a+8)^2$

c $(4-p)^2=(5p+16)^2$

d $(5x+6)^2=x^2$

e $9p^2=(12-p)^2$

f $(x^2-5x)^2=36$

12 In deze opdracht ga je de vergelijking $4x(x-7)=5(x-7)$ oplossen.

a Waarom is $x=7$ een oplossing?

b Als de factor $4x$ aan de linkerkant gelijk is aan de factor 5 aan de rechterkant staat ook links en rechts hetzelfde. Bereken de tweede oplossing.

Theorie

Vergelijkingen als $(x+4)(2x-5)=7(x+4)$ hebben de vorm $A \cdot B = A \cdot C$. Voor het oplossen van deze vergelijkingen kun je gebruik maken van de regel:
Uit $A \cdot B = A \cdot C$ volgt $A=0$ of $B=C$.

Voorbeeld

Los op $2x(x+7)=(x+7)(x+3)$.

Oplossing

De gemeenschappelijke factor is $x+7$.
Dus geldt $x+7=0$ of $2x=x+3$.
Dit geeft $x=-7$ of $x=3$.

Ondersteunende route → maak opdracht O13

13 Los de vergelijkingen op met de regel hierboven.
Geef exacte antwoorden.

H

a $(2x-5)(x+4)=7(x+4)$

b $(5t+3)(t^2-4)=5(5t+3)$

c $x(2x-9)=7x^2$

d $(2x+7)(x-5)=(x-5)^2$

14 Los op. Bedenk eerst welke methode je gaat gebruiken.

a $(x-4)^2=(5x+6)^2$

b $(t+3)(t-1)=32$

c $(t+3)(t-4)=2t(t+3)$

d $8x^2-2x=1$

e $(x-6)^2+6=22$

f $x^2=7x$

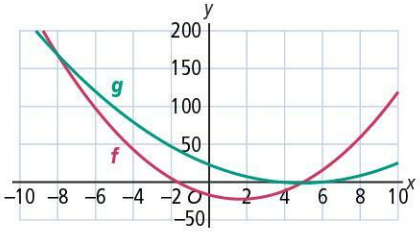
15 Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x)=(x-5)(2x+3)$ en $g(x)=(x-5)^2$.
Los op.

a $f(x) \geq 0$

b $g(x)<49$

c $g(x) \geq f(x)$

d $f(x)=3 \cdot g(x)$



Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O11 Op het blaadje is een begin gemaakt met het oplossen van $49q^2 = (3 - q)^2$.

a Los de vergelijking verder op.

Los op.

b $(6a - 3)^2 = (a + 3)^2$

c $(x - 4)^2 = 5^2$

d $(2b - 3)^2 = b^2$

e $(x - 6)^2 = 49$

f $(2 - 3p)^2 = (4p - 12)^2$

g $16(x - 2)^2 = (2x - 1)^2$

De vergelijking $49q^2 = (3 - q)^2$ schrijf je als $(7q)^2 = (3 - q)^2$.
De vergelijking heeft de vorm $A^2 = B^2$.

$A = B$	of $A = -B$
$7q = 3 - q$	of $7q = -(3 - q)$
$7q = 3 - q$	of $7q = -3 + q$
$\ldots q = \ldots$	of $\ldots q = \ldots$
$q = \ldots$	of $q = \ldots$

O13 Er is een begin gemaakt met het oplossen van $(2t - 7)(t^2 - 2) = 7(2t - 7)$.

a Los de vergelijking verder op.

Los op.

b $(x + 3)(x - 4) = 2x(x + 3)$

c $x(5x - 16) = 4x^2$

d $(2x - 4)(x + 5) = 8(x + 5)$

e $(3x + 5)(x + 3) = (x + 3)^2$

De vergelijking $(2t - 7)(t^2 - 2) = 7(2t - 7)$ heeft de vorm $A \cdot B = C \cdot A$.
De gemeenschappelijke factor is $2t - 7$, dus
$A = 2t - 7$, $B = t^2 - 2$ en $C = 7$.
Uit $A = 0$ volgt $2t - 7 = 0$ en uit $B = C$ volgt $t^2 - 2 = 7$.

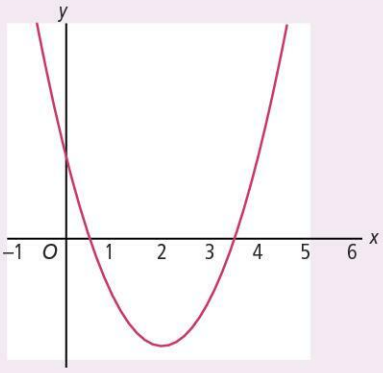
Uitdagende opdrachten

U3 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 - 4x + c$.
Onderzoek voor welke waarden van c de grafiek van f ten minste één snijpunt met de horizontale as heeft op het interval $\langle 1, 6 \rangle$.

U4

a Bereken voor welke waarden van a de vergelijking $x^2 + 3ax + 2a + 5 = 0$ precies één oplossing heeft.

b Gegeven is de vergelijking $x^2 - 4ax + 4a^2 - 4 = 0$.
Er zijn twee waarden van a waarvoor $x = 5$ een oplossing is van deze vergelijking.
Bereken die waarden van a en de bijbehorende andere oplossing voor x.



© Noordhoff Uitgevers bv

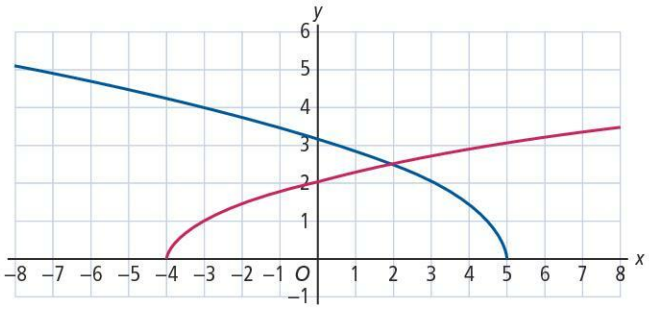
1.3 Wortelvergelijkingen

Je leert
- wat een wortelvergelijking is
- hoe je een wortelvergelijking oplost

Leerroutes
- ondersteunend: 16—017—18—19—020—21—22
- doorlopend: 16—17—18—19—20—21—22
- uitdagend: 16—17—18—19—20—22—U5

Getekend zijn de grafieken van $f(x) = \sqrt{x+4}$ en $g(x) = \sqrt{10-2x}$.

- Voor welke waarden van x geldt $f(x) < g(x)$?



16 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{2x-5}$.

a Leg uit waarom er alleen uitkomsten zijn als geldt $2x - 5 \geq 0$.

b Voor welke waarden van x geldt $2x - 5 \geq 0$?

c Daan wil de vergelijking $\sqrt{2x-5} = 2$ oplossen.
Daan legt een bordje op $2x - 5$ en bedenkt dat $2x - 5$ gelijk moet zijn aan $2^2 = 4$.
Los de vergelijking $2x - 5 = 4$ op.

d Waarom heeft de vergelijking $\sqrt{2x-5} = -2$ geen oplossingen?

e Los de vergelijking $\sqrt{6 - \frac{1}{2}x} = 3\frac{1}{2}$ op.

Theorie

Een vergelijking van de vorm $-7 + \sqrt{x} = 2$ heet een **wortelvergelijking** omdat de variabele onder het wortelteken voorkomt.
Een wortelvergelijking vereenvoudig je tot de vorm $\sqrt{A} = B$ door links en rechts dezelfde bewerking uit te voeren.
Vervolgens gebruik je de regel:
Uit $\sqrt{A} = B$ volgt $A = B^2$ mits $B \geq 0$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O17

17 Los op.

H

a $\sqrt{x} - 5 = 7$

b $2 + \sqrt{3p} - 5 = 11$

c $\sqrt{6 - \frac{1}{2}x^2} = \sqrt{3}$

d $5 - \sqrt{6 - 3x} = 2\frac{1}{2}$

e $\sqrt{\frac{1}{3}p - 5} = \sqrt{11}$

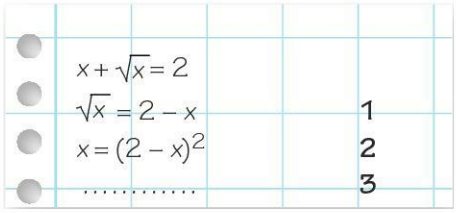
f $\sqrt{x^2 - 2x + 6} = 3$

18 In de vergelijking $x + \sqrt{x} = 2$ komt de variabele op meerdere plaatsen voor. Er is een andere aanpak nodig.

a Wat is er gebeurd in stap 1? En in stap 2?

b Maak de berekening af en controleer de gevonden waarden door invullen in de vergelijking $x + \sqrt{x} = 2$.

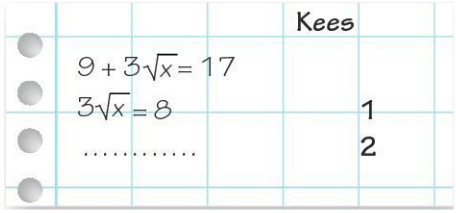
c Welke van de gevonden waarden is ook werkelijk een oplossing van de vergelijking?



19 Kees heeft een begin gemaakt met het oplossen van de vergelijking $9 + 3\sqrt{x} = 17$.

a Hij deelt in stap 2 links en rechts door 3. Los de vergelijking verder op.

b Bart gaat de vergelijking ook oplossen. Hij krijgt bij stap 2 de vergelijking $9x = 64$. Leg uit hoe Bart aan deze vergelijking komt en los deze vergelijking verder op.



Aanpak

Hoe los je een wortelvergelijking op?

1. Isoleer de wortel in de vergelijking.
2. Kwadrateer beide kanten van de vergelijking.
3. Los de verkregen vergelijking op.
4. Controleer of de oplossingen voldoen door deze in te vullen in de oorspronkelijke vergelijking.

Isoleer
Kwadrateer
Los op
Controleer

Voorbeeld

Los op $9 + \sqrt{x + 3} = x$.

Oplossing

1	$\sqrt{x + 3} = x - 9$	(wortel geïsoleerd)
2	$x + 3 = (x - 9)^2$	(gekwadrateerd)
3	$x + 3 = x^2 - 18x + 81$	
	$x^2 - 19x + 78 = 0$	(op nul herleid)
	$(x - 6)(x - 13) = 0$	(ontbonden)
	$x = 6$ of $x = 13$	
4	$x = 6$ geeft $9 + \sqrt{6 + 3} = 6$	klopt niet
	$x = 13$ geeft $9 + \sqrt{13 + 3} = 13$	klopt
	De oplossing is $x = 13$.	

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O20

20 Los op.

H

a $2 + \sqrt{x + 10} = x$

b $x + \sqrt{2x + 4} = 10$

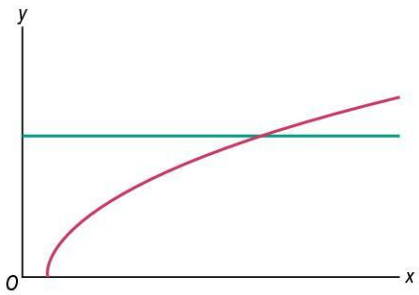
c $2\sqrt{1 - x} = x + 2$

d $\sqrt{x} \cdot \sqrt{8 - \frac{1}{2}x} = 2x$

e $\sqrt{2x^2 - x} + 2 - 3x = 0$

f $\sqrt{3x - 1} \cdot \sqrt{6x + 1} = 0$

21 Gegeven is een schets van de grafiek van $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x - 1}$ en de lijn $y = 3$.



a Bij welke waarden van x bestaan er functiewaarden?

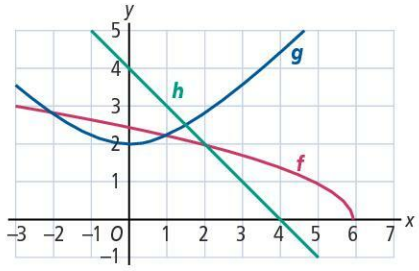
b Laat zien dat uit $\sqrt{\frac{1}{2}x - 1} = 3$ volgt $x = 20$.

c Arie lost de ongelijkheid $\sqrt{\frac{1}{2}x - 1} < 3$ op met behulp van de grafiek. Hij geeft als oplossing $x < 20$.
Waarom is $x = 0$ geen oplossing van de ongelijkheid?

d Yuri geeft $2 \leq x < 20$ als oplossing van de ongelijkheid van opdracht c.
Waarom gebruikt hij het getal 2 in zijn oplossing?

> Bij een wortelfunctie kun je meestal niet elke waarde voor x invullen. In de oplossing van een wortelongelijkheid kunnen alleen getallen voorkomen waarvoor de wortelfunctie uitkomsten heeft.

22 Gegeven zijn de grafieken van $f(x) = \sqrt{6 - x}$, $g(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ en $h(x) = -x + 4$.
Los op.



a $f(x) \leq g(x)$

b $f(x) < h(x)$

c $h(x) \geq g(x)$

Uitdagende route → maak opdracht U5

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O17 Er is een begin gemaakt met het oplossen van $3\frac{1}{2} - \sqrt{2-p} = 1\frac{1}{2}$.

a Leg uit wat er gebeurd is in stap 1.
b Wat gebeurt er in stap 2?
c Los de vergelijking verder op.

$3\frac{1}{2} - \sqrt{2-p} = 1\frac{1}{2}$
$\sqrt{2-p} = 2$ 1
$2 - p = \ldots$ 2
$p = \ldots$ 3

Los op.

d $\sqrt{x-17} = 5$
e $1 + \sqrt{5q-4} = 7$
f $\sqrt{7-\frac{1}{4}x^2} = \sqrt{5}$
g $\sqrt{\frac{1}{7}q-4} = \sqrt{8}$
h $\sqrt{a} - 3 = 2$
i $1 + \sqrt{2x-3} = 8$

O20 Er is een begin gemaakt met het oplossen van $x + \sqrt{2x+3} = 6$.

a Waarom staan er haakjes in de derde regel?
b Los de vergelijking verder op.

$x + \sqrt{2x+3} = 6$
$\sqrt{2x+3} = 6 - x$ (Isoleer)
$(\sqrt{2x+3})^2 = (6-x)^2$ (Kwadrateer)
$2x + 3 = 36 - \ldots$ (Los op)
$\ldots$ of $\ldots$
$\ldots\ldots$ (Controleer)

Los op.

c $\sqrt{4x^2-3} + 2x = 3$
d $\sqrt{x(2-\frac{1}{3}x)} = x$
e $3\sqrt{1-x} = 1\frac{1}{2}x + 3$
f $3 + \sqrt{x+17} = x$
g $\sqrt{6x+2} \cdot \sqrt{3x-2} = 0$

Uitdagende opdrachten

U5 Los op. Geef exacte antwoorden.

a $\sqrt{10 - 2\sqrt{x}} = 2$
b $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 2$
c $\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = 3$
d $\frac{6}{\sqrt{x+4}} = \sqrt{9-x}$
e $\sqrt{x} + 2\sqrt{x-4} = \sqrt{9x}$

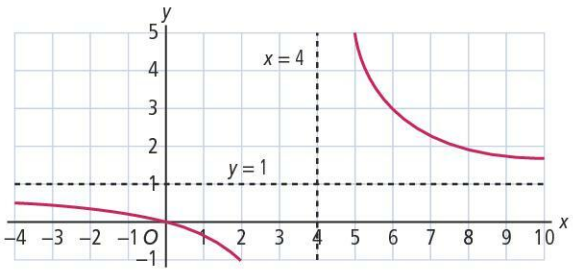
© Noordhoff Uitgevers bv

1.4 Gebroken vergelijkingen

Je leert
- wat een gebroken vergelijking is
- hoe je een gebroken vergelijking oplost

Leerroutes
- ondersteunend: 23—O24—25—26—O27—28
- doorlopend: 23—24—25—26—27—28
- uitdagend: 24—25—26—27—U6—U7

Gegeven zijn de grafiek van $f(x) = \frac{x}{x-4}$ en de lijnen $x = 4$ en $y = 1$.
- Waarom heeft $f(x) = 1$ geen oplossing?
- Waarom is de lijn $x = 4$ getekend?



23 Gegeven is de functie $g(x) = \frac{120}{3x - 15}$

a Bij welke waarde van x kun je geen functiewaarde berekenen?

b Achmed wil de vergelijking $\frac{120}{3x - 15} = 10$ oplossen.

Hij legt een bordje op $3x - 15$ en bedenkt dat hij de vergelijking $3x - 15 = 12$ moet oplossen.

Welke waarde voor x vindt hij?

c Los de vergelijkingen $\frac{120}{3x - 15} = 6$ en $\frac{120}{3x - 15} = 15$ op.

Ondersteunende route → maak opdracht O24

24 Los op. Geef exacte antwoorden.

H

a $\frac{18}{7x + 2} = 3$

b $\frac{-35}{10 - 3m} = 5$

c $\frac{56}{x^2 + 3} = 7$

d $\frac{125}{6p - 3} = -25$

e $\frac{30}{16 - 2q^2} - 2\frac{1}{2} = 5$

f $\frac{-45}{5t + 3} + 1 = 10$

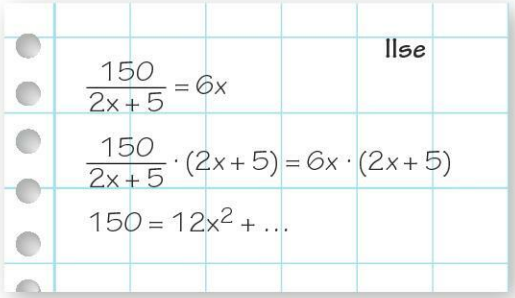
© Noordhoff Uitgevers bv

25 Gegeven is de functie $g(x) = \dfrac{150}{2x + 5}$

a Bij welke waarde van x kun je geen functiewaarde berekenen?

b Om de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de lijn $y = 6x$ te berekenen, gaat Ilse de vergelijking $\dfrac{150}{2x + 5} = 6x$ oplossen. Om de breuk in de vergelijking weg te werken vermenigvuldigt ze links en rechts met $2x + 5$. Dat kan alleen als $2x + 5$ niet gelijk is aan nul.
Voor welke waarde van x is de berekening van Ilse onjuist?

c Maak de berekening af.



26 Gegeven is de vergelijking $\dfrac{3}{x - 2} = \dfrac{x}{x + 2}$

a Vermenigvuldig links en rechts met $x - 2$ én met $x + 2$ en laat zien dat de vergelijking te herleiden is tot $3x + 6 = x^2 - 2x$.

b Waarom geldt de herleiding niet voor $x = 2$ en voor $x = -2$?

c Los de vergelijking op.

Theorie

Een vergelijking van de vorm $\dfrac{3p}{p^2 - 8} + 6 = 10$ of $\dfrac{12}{5x + 9} = 6x - 1$ heet een **gebroken vergelijking**, omdat de variabele in de noemer van de breuk voorkomt.
Een gebroken vergelijking vereenvoudig je tot een vorm waarbij je de volgende regels kunt gebruiken:

Uit $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$ volgt $A \cdot D = B \cdot C$ mits $B \neq 0$ en $D \neq 0$.

Uit $\dfrac{A}{B} = C$ volgt $A = B \cdot C$ mits $B \neq 0$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld 1

Los op $\frac{-10x}{2x-3} + 4 = x + 3$.

Oplossing

$\frac{-10x}{2x-3} = x - 1$	(links en rechts − 4)
$-10x = (2x-3)(x-1)$	mits $x \neq 1\frac{1}{2}$
$-10x = 2x^2 - 5x + 3$	(haakjes weggewerkt)
$2x^2 + 5x + 3 = 0$	(op nul herleid)

abc-formule geeft $x = -1$ of $x = -1\frac{1}{2}$

Voorbeeld 2

Los op $\frac{x-5}{x-9} = \frac{2x}{x+3}$

Oplossing

$(x-5)(x+3) = 2x(x-9)$	mits $x \neq 9$ en $x \neq -3$
$x^2 - 2x - 15 = 2x^2 - 18x$	(haakjes weggewerkt)
$x^2 - 16x + 15 = 0$	(op nul herleid)
$(x-1)(x-15) = 0$	(ontbonden in factoren)
$x - 1 = 0$ of $x - 15 = 0$	
$x = 1$ of $x = 15$	

Ondersteunende route → maak opdracht O27

27 Los op.

H

a $\frac{2}{3x-1} = \frac{x}{3x-2}$

b $\frac{18x}{3x-1} = x$

c $\frac{2x}{x-4} + 6 = 2x$

d $x + 10 = \frac{75}{x-8} + 2$

e $\frac{x-4}{x+6} = \frac{x+3}{x-1}$

f $\frac{1}{x} = \frac{4}{x^2}$

28 Gegeven zijn de grafiek van de functie $f(x) = 2 + \frac{1}{x-3}$ en de lijnen l: $y = 2\frac{2}{3}$ en m: $y = x - 2\frac{1}{2}$.

De lijnen snijden de grafiek van f in de punten P, Q en R.

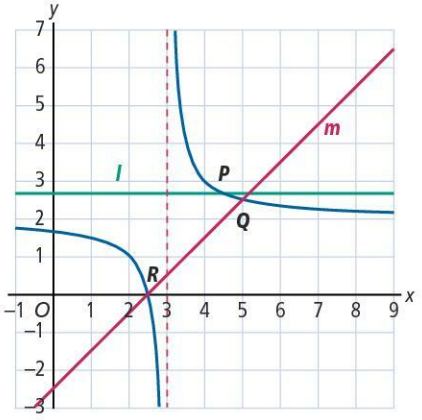
a Waarom is ook de stippellijn $x = 3$ getekend?

b Bereken de coördinaten van punt P.

c Los op $f(x) < 2\frac{2}{3}$.

d Bereken de coördinaten van de punten Q en R.

e Los op $2 + \frac{1}{x-3} \geq x - 2\frac{1}{2}$.



Uitdagende route→ maak opdracht U6 en U7

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O24 Er is een begin gemaakt met het oplossen van $\frac{15}{8-m^2} - 2 = 1$.

a Wat is er gebeurd in stap 1? En in stap 2?

b Maak de berekening verder af.

$\frac{15}{8-m^2} - 2 = 1$

$\frac{15}{8-m^2} = 3$ 1

$8 - m^2 = \ldots$ 2

$m^2 = \ldots$ 3

$m = \ldots$ of $m = \ldots$ 4

Los op. Geef exacte antwoorden.

c $\frac{24}{2-x} = 8$

d $\frac{-33}{10-2a} = 11$

e $\frac{28}{3-2x} + 3 = 7$

f $\frac{63}{p^2+3} = 9$

g $\frac{15}{5x-3} = 3$

h $\frac{36}{(x-2)^2} - 3 = 1$

O27 Er is een begin gemaakt met het oplossen van $\frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{3}$

a Welke regel is er toegepast bij de eerste stap van de oplossing?

b Los de vergelijking verder op.

$\frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{3}$ heeft de vorm $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$

$3(x+1) = 2(x-1)$ want ... 1

$\ldots = \ldots$

Los op.

c $\frac{6x}{2x-3} = x$

d $\frac{3-x}{x-3} = 2x - 5$

e $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1}{x+1}$

f $\frac{x-2}{x+3} = \frac{x+6}{x-2}$

g $\frac{x^2}{x-1} = 3x$

h $\frac{\frac{1}{3}x+3}{x} = \frac{3-x}{6x}$

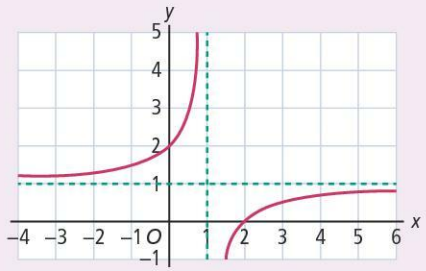
Uitdagende opdrachten

U6 Getekend is de grafiek van $f(x) = 2 - \frac{x}{x-1}$

a Los op $0 \leq f(x) \leq 4$.

b Los op $f(x) < 2 - x$.

c Onderzoek voor welke waarden van a de lijn $y = ax - 2$ precies één gemeenschappelijk punt heeft met de grafiek van f.



U7 Los op.

a $\frac{x}{x-\sqrt{x}} = 2 + \sqrt{x}$

b $\frac{4-\sqrt{x}}{4+\sqrt{x}} = \frac{5-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

1.5 Herleiden

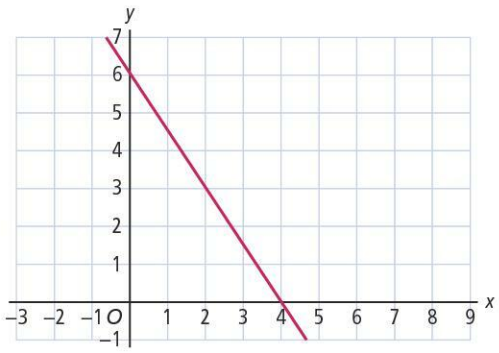
Je leert
- hoe je een variabele uitdrukt in andere variabelen
- hoe je een vergelijking oplost met behulp van een substitutie

Leerroutes
- ondersteunend: 29–30–031–32–33–34–35–036
- doorlopend: 29–30–31–32–33–34–35–36
- uitdagend: 29–30–32–33–35–36–U8–U9

Jeroen heeft de lijn met vergelijking $y = 6 - 1\frac{1}{2}x$ getekend.
Qing tekent de lijn met vergelijking $6x + 4y = 24$ en Coen tekent de lijn met vergelijking $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$.

Ze krijgen precies dezelfde lijn!

- Geef hiervoor een verklaring.



29

a Herleid $8x - 2y = 15$ tot de vorm $y = \ldots x + \ldots$.

b Herleid $8x - 2y = 15$ tot de vorm $x = \ldots y + \ldots$.

c Schrijf $3m + 4n = 12$ in de vorm $m = \ldots n + \ldots$.

Theorie

De vergelijking $5w + 3v = 45$ is te herleiden tot $w = -\frac{3}{5}v + 9$
of tot $v = -\frac{5}{3}w + 15$.

In de formule $w = -\frac{3}{5}v + 9$ is w uitgedrukt in v.
Bij het herleiden pas je, net als bij het oplossen van vergelijkingen, links en rechts steeds dezelfde bewerking toe.

Voorbeeld 1

Herleid de vergelijking $3p + 2q = 10$
waarbij je q in p uitdrukt.

Oplossing

$3p + 2q = 10$
$2q = -3p + 10$ (links en rechts $- 3p$)
$q = -1\frac{1}{2}p + 5$ (links en rechts : 2)

Voorbeeld 2

Herleid de vergelijking $\frac{5}{b} - 3a = 1$
waarbij je b uitdrukt in a.

Oplossing

$\frac{5}{b} - 3a = 1$
$\frac{5}{b} = 1 + 3a$ (links en rechts $+ 3a$)
$5 = (1 + 3a) \cdot b$ (links en rechts $\times b$)
$b = \frac{5}{1 + 3a}$ (links en rechts : $(1 + 3a)$)

© Noordhoff Uitgevers bv

30 Druk q uit in p.

H

a $8p - 4q = 9$

b $p + q = 0$

c $15p = 3q + 27$

d $18q - 12 = 3p + 2(q - 1)$

e $3(q + 1) = 6p + 5$

f $10p - 4q = 6p + 12$

Ondersteunende route → maak opdracht 031

31 Druk b uit in a.

H

a $\frac{3}{b} = 7a + 5$

b $8 + \frac{6}{b} = 7a - 6$

c $a = \sqrt{b + 1}$

d $2a = \frac{8}{b + 4}$

e $a - 9 = \frac{16}{b - 4}$

f $a + 3 = \sqrt{b - 2}$

32 In de formule $y = 3p + 5$ is y uitgedrukt in p.
In de formule $p = 7x - 2$ is p uitgedrukt in x.
Om vervolgens y uit te drukken in x moet je p in de formule $y = 3p + 5$ vervangen door $7x - 2$. Je ziet daarvan een begin.

a Maak de berekening af.

b Gegeven zijn de formules $b = 8m - 10$ en $m = 2a + 6$.
Druk b uit in a.

$y = 3p + 5$ met $p = 7x - 2$
$y = 3(\ldots) + 5$
$7x - 2$
$y = 3(7x - 2) + 5$
Haakjes wegwerken:
$y = 21x - \ldots$

Theorie

In een formule kun je een variabele vervangen door een uitdrukking. Dit heet **substitueren**.
Na het substitueren vereenvoudig je de ontstane formule zoveel mogelijk.

Voorbeeld

Gegeven is $y = 4t + 8$ en $t = -2x + 1$.
Druk y uit in x.

Oplossing
$y = 4(-2x + 1) + 8$
$y = -8x + 4 + 8$
$y = -8x + 12$

33 Gebruik een substitutie om y in x uit te drukken.
Vereenvoudig het resultaat.

H

a $y = -5t + 89$ en $t = 19x + 18$

b $y = 8p + 10$ en $p = 5 - 2x$

c $y = 6 - 3a$ en $a = x^2 + 4$

d $y = p^2 + 9$ en $p = 3x + 1$

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Sommige vergelijkingen zijn eenvoudiger op te lossen door gebruik te maken van een substitutie.

Voorbeeld

Los op $(x + 2)^2 - 3(x + 2) + 2 = 0$.

Oplossing

$t^2 - 3t + 2 = 0$ (substitutie $x + 2 = t$)
$(t - 2)(t - 1) = 0$ (ontbonden in factoren)
$t = 2$ of $t = 1$
Omdat $x + 2 = t$ is $x + 2 = 2$ of $x + 2 = 1$.
Oplossing $x = 0$ of $x = -1$.

34 De vergelijking $(3x - 7)^2 + 5(3x - 7) + 6 = 0$ kun je oplossen zonder eerst de haakjes weg te werken.

a Welke vergelijking krijg je door de substitutie $p = 3x - 7$?
b Los de vergelijking op die je bij opdracht a hebt gekregen.
c Gebruik $3x - 7 = p$ om de waarden van x te berekenen.

35 Gegeven is de vergelijking $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.
Omdat $x^4 = (x^2)^2$ kun je de substitutie $p = x^2$ gebruiken.
De vergelijking wordt $p^2 - 13p + 36 = 0$.

a Los de vergelijking $p^2 - 13p + 36 = 0$ op.
b De gevonden waarden van p zijn de uitkomsten van x^2. Bereken de vier oplossingen van $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Ondersteunende route → maak opdracht O36

36 Los op.

H

a $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$
b $(x^2 - 3)^2 - 5(x^2 - 3) = 6$
c $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$
d $3x^4 - 8x^2 + 5 = 0$
e $(2x + 5)^2 + 3(2x + 5) = 18$
f $(1 - 2x)^4 - 2(1 - 2x)^2 = 8$

Uitdagende route → maak opdracht U8 en U9

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O31 Gegeven zijn de formules $\sqrt{b-a} = 5 + a$ en $\frac{12}{1-b} = 2a + 3$.

Er is een begin gemaakt met een herleiding zodat b wordt uitgedrukt in a.

a Omschrijf wat er bij de eerste formule in de stappen 1 en 2 gebeurt.
b Wat gebeurt er in stap 1 bij de tweede formule?
c Maak de herleidingen af.

Druk b uit in a.

d $a = \sqrt{b+3}$

e $\frac{2}{b} = 3a + 7$

f $2 + \frac{3}{b} = 4a - 8$

g $a - 5 = \sqrt{4b+3}$

h $ab = 4$

i $\frac{a}{2b} = 4 + a$

$\sqrt{b-a} = 5 + a$
$b - a = (5+a)^2$ 1
$b = \ldots$ 2
$\frac{12}{1-b} = 2a + 3$
$12 = (2a+3)(1-b)$ 1
$1 - b = \frac{12}{\ldots}$ 2
$\ldots = \ldots$

O36 Er is een begin gemaakt met het oplossen van $(2x+1)^2 - (2x+1) - 2 = 0$.

a Welke substitutie pas je hier toe?
b Los de vergelijking $t^2 - t - 2 = 0$ op.
c Welke waarden voor x vind je hieruit? Gebruik daarbij dat $2x + 1 = t$.

Los op.

d $x^4 - 8x^2 = 128$

e $(x^2-2)^2 - 7(x^2-2) + 12 = 0$

f $(3x+4)^4 - 2(3x+4)^2 = 15$

g $5(3+x) = 1 - 14(3+x)^2$

$(2x+1)^2 - (2x+1) - 2 = 0$
Gebruik de substitutie $t = \ldots$
De vergelijking wordt
$t^2 - t - 2 = 0$.
Oplossen geeft $t = \ldots$ of $t = \ldots$

Uitdagende opdrachten

U8 Druk b uit in a en herleid.

a $\frac{3}{ab} = 7a + 5$

b $8 + \frac{6}{b+1} = 7a - 6$

c $\sqrt{a+b+1} = 3 - a$

d $2a = \frac{5}{b+4a}$

e $a - 9 = \frac{16}{b-4a}$

f $a + 3 = \sqrt{b-2a}$

U9 Druk y uit in x en herleid.
Geef ook aan voor welke waarden van x de herleiding geldt.

a $y = t^2 - t + 4$ en $t = 2x - 3$

b $y = \frac{t^2+6t}{t-2}$ en $t = x^2 + 2$

c $y = \frac{2t-4}{t+3}$ en $t = \frac{1}{x}$

d $y = \frac{1}{t^2+4t}$ en $xt = 2$

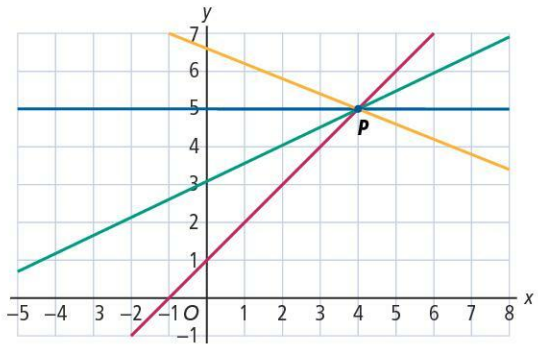
© Noordhoff Uitgevers bv

1.6 Parameters

Je leert
- wat een familie van functies en een parameter is
- hoe je de waarde van een parameter berekent

Leerroutes
- ondersteunend: 37—038—39—040—40
- doorlopend: 37—38—39-40—41
- uitdagend: 37—38—40—U10—U11

De lijnen in de grafiek gaan alle door $P(4, 5)$.
Deze lijnen voldoen aan de vergelijking $y = a(x - 4) + 5$.
- Hoe verandert de grafiek als je de waarde van a verdubbelt?
- Voldoet elke lijn door $P(4, 5)$ aan een vergelijking van de vorm $y = a(x - 4) + 5$?



37 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2x + 3$ en $g(x) = -4x + 3$.

a Teken in één figuur de grafieken van f en g.

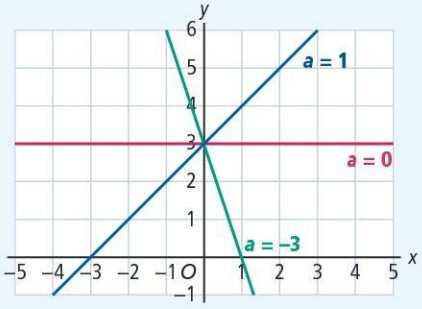
b Ook is gegeven $h(x) = ax + 3$.
Bereken de waarde van a waarvoor de grafiek van h door het punt $(5, 18)$ gaat.

c Waarom gaat de grafiek van h voor geen enkele waarde van a door het punt $(0, 5)$?

d Voor welke waarde van a is de grafiek van h evenwijdig aan lijn m met vergelijking $3x + 2y = 3$?

Theorie

Het functievoorschrift $f_a(x) = ax + 3$ hoort bij een familie van functies.
Bij elke waarde van a krijg je een functie en een grafiek.
Getekend zijn de grafieken van f_0, f_1 en f_{-3}. In het functievoorschrift is x de variabele; het getal a heet een parameter.
Als van een functie gegevens bekend zijn, bijvoorbeeld een punt waar de grafiek doorheen gaat, is de waarde van de parameter soms te berekenen.



© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = ax^2 - 3x + 1$.
De grafiek van f_a gaat door het punt $(2, -4)$.
Bereken a.

Oplossing

Omdat $f_a(2) = -4$ geldt $a \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -4$
ofwel $4a - 5 = -4$. Uit $4a = 1$ volgt $a = \frac{1}{4}$.

Ondersteunende route → maak opdracht 038

38 H

a Gegeven is de familie van functies $g_a(x) = ax^2 + 4x - 7$.
De grafiek van g_a gaat door het punt $(2, 5)$.
Bereken de waarde van de parameter a.

b Gegeven is de familie van functies $k_a(x) = 3x^2 + ax - 6$.
De grafiek van k_a snijdt de x-as in $(2, 0)$.
Bereken de waarde van a.

c Gegeven is de vergelijking $x^2 + ax - 2 = x - a$.
Bereken de waarde van a als gegeven is dat $x = 4$ een oplossing is.

39 Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = x(8 - x)$. Door $P(2, 12)$ is een lijn getekend die de grafiek van f lijkt te raken.

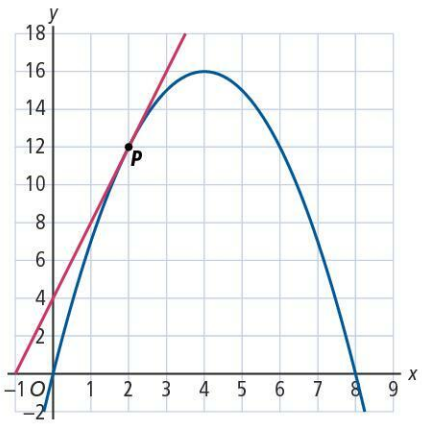
a Ga na dat P inderdaad op de grafiek van f ligt.

b Waarom voldoet de getekende lijn door P aan een vergelijking van de vorm $y_a = a(x - 2) + 12$?

c Als de getekende lijn inderdaad raakt aan de grafiek van f dan moet gelden dat $x(8 - x) = a(x - 2) + 12$ precies één oplossing heeft.
Herleid deze vergelijking tot de vorm $\ldots x^2 + \ldots x + \ldots = 0$.

d Hoe kun je de discriminant gebruiken om te zorgen dat deze vergelijking één oplossing heeft?

e Bereken de waarde van a en geef een vergelijking van de raaklijn.



© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Met de uitkomst van $D = b^2 - 4ac$, de discriminant, kun je het aantal oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ nagaan.
Hiermee kun je in een aantal gevallen de waarde van een parameter berekenen.

Voorbeeld

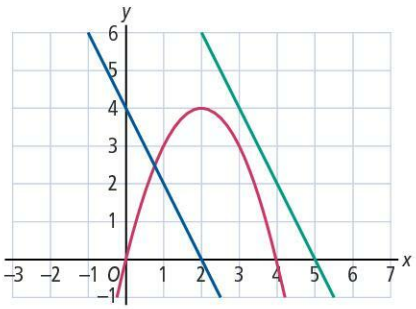
Gegeven is de vergelijking $x^2 + ax - 1 = x - a$.
Bereken voor welke waarden van de parameter a de vergelijking precies één oplossing heeft.

Oplossing

$x^2 + ax - x - 1 + a = 0$
$x^2 + (a - 1)x + a - 1 = 0$
Er is één oplossing als $D = 0$, dus als $(a - 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a - 1) = 0$.
$a^2 - 2a + 1 - 4a + 4 = 0$
$a^2 - 6a + 5 = 0$ geeft $(a - 1)(a - 5) = 0$.
Dus $a = 1$ of $a = 5$.

Ondersteunende route → maak opdracht O40

40 Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 4x$ en de familie van functies $g_a(x) = a - 2x$. Geschetst zijn de grafiek van f en voor twee waarden van a ook de grafiek van g_a.



a Bereken voor welke waarde van a het punt $(8, -32)$ een snijpunt is van de grafieken van f en g_a.

b De waarde van a kan zo gekozen worden dat de grafiek van g_a de grafiek van f raakt, dus één gemeenschappelijk punt met de grafiek van f heeft.
Bereken deze waarde van a.

c Voor welke waarden van a snijdt de grafiek van g_a de grafiek van f niet?

41 De grafieken van de familie van functies $f_a(x) = a(x - 2)^2 + 4$ gaan allemaal door hetzelfde punt P.
Geef de coördinaten van P.

Uitdagende route → maak opdracht U10 en U11

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O38

a De grafiek van $y = a\sqrt{x+5}$ gaat door het punt (4, 6). Maak de berekening op het blaadje af.

b Gegeven is de familie van functies $k_m(x) = 2x^2 + mx - 3$.
De grafiek van k_m snijdt de x-as in (3, 0).
Gebruik dat $k_m(3) = 0$ en bereken m.

c De grafiek van $g_a(x) = ax^2 + 2x - 5$ gaat door (3, 7).
Bereken a.

d De vergelijking $x^2 + px - 5 = x - p$ heeft oplossing $x = 2$.
Bereken p.

De grafiek gaat door (4, 6), dus je kunt invullen $x = 4$ en $y = 6$.
Je krijgt $6 = a\sqrt{4+5}$
$\ldots = a \cdot \ldots$
$a = \ldots$

O40

Gegeven is de functie $h(x) = x^2 + 3x - 4$ en de lijnen $y = p$.

a Met de vergelijking $x^2 + 3x - 4 = p$ ofwel $x^2 + 3x - 4 - p = 0$ bereken je voor welke x de grafieken elkaar snijden. Druk de discriminant D uit in p.

b Bereken met behulp van $D = 0$ voor welke waarde van p er maar één oplossing en er dus één snijpunt is.

c Voor welke waarden van p zijn er twee snijpunten?

$x^2 + 3x - 4 = p$ dus
$x^2 + 3x - 4 - p = 0$
$a = 1$, $b = 3$ en $c = -4 - p$
Eén oplossing dus
$D = 3^2 - 4(\ldots) = 0$

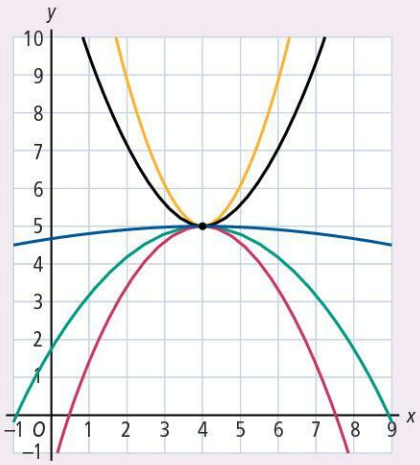
Uitdagende opdrachten

U10

Van een familie van functies f_a zijn de grafieken parabolen met top (4, 5). Enkele grafieken zijn getekend.

a Geef het functievoorschrift $f_a(x)$ van deze familie.

b Bereken de waarde van de parameter als de parabool door (0, 0) gaat.



U11

Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = \dfrac{4}{px - 5}$

a Bereken voor welke waarde van p de grafiek door het punt (1, 3) gaat.

b Bereken voor welke waarde van p de functiewaarde $f_p(-10)$ niet bestaat.

c De lijn $y = x$ snijdt, afhankelijk van de waarde van p, de grafiek van f_p soms in twee punten en soms helemaal niet. Er is een waarde van p waarvoor er precies één snijpunt is. Bereken deze waarde van p.

© Noordhoff Uitgevers bv

42 Los op.

a $3(x-2)+2x=3+3(5-x)$

b $\dfrac{18}{x-4}=-6x$

c $2\sqrt{x-1}+3=7$

d $(3x-1)(x+5)=-5$

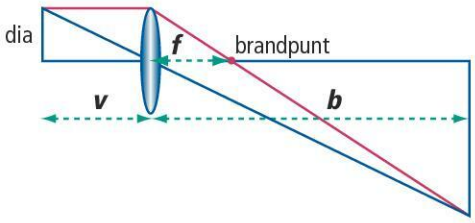
e $4x(7-2x)=(x-3)(7-2x)$

f $\dfrac{x+4}{2x+1}=\dfrac{2x}{13-x}$

g $(2x+1)^2=(x-5)^2$

h $(x-4)^2\sqrt{x^2-9}=25\sqrt{x^2-9}$

43 De sterkte van een lens wordt bepaald door de brandpuntsafstand f van de lens. De beeldafstand b is de afstand van de lens tot de afbeelding en de voorwerpsafstand v is de afstand van het te vergroten voorwerp tot de lens.
f, b en v zijn in cm.
Voor het verband tussen de brandpuntsafstand f, de beeldafstand b en de voorwerpsafstand v geldt de formule:
$\dfrac{1}{f}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{v}$



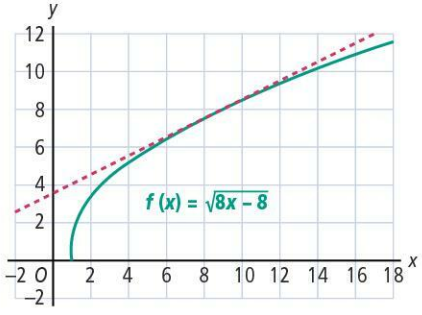
a De brandpuntsafstand f van een bepaalde lens is 8 cm. Een dia staat 10 cm vóór de lens, dus $v = 10$ cm. Bereken de beeldafstand b.

b Als je bij een lens met een brandpuntsafstand van 8 cm voor een aantal voorwerpsafstanden de beeldafstand moet berekenen, kun je de lenzenformule herschrijven.
Laat zien dat de formule dan $b=\dfrac{8v}{v-8}$ wordt.

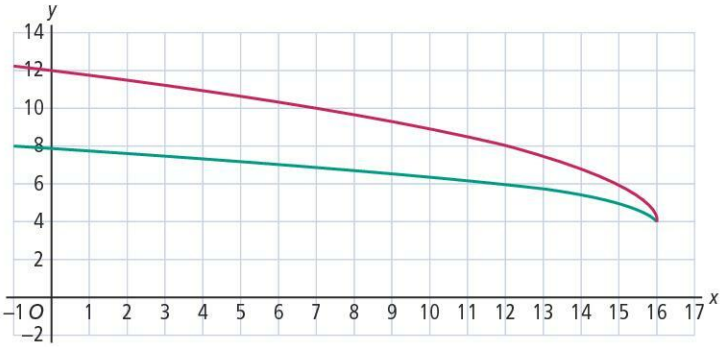
44 Door het punt $\left(0,\ 3\frac{1}{2}\right)$ is de lijn getekend die de grafiek van $f(x)=\sqrt{8x-8}$ in precies één punt P raakt.

a Stel een vergelijking op van de getekende lijn.

b Bereken de coördinaten van het punt P.



© Noordhoff Uitgevers bv



45 Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = 4 - p\sqrt{16 - x}$.
Voor twee waarden van p is de grafiek getekend.

a Een van de grafieken van f_p gaat door $(-9, 14)$.
Bereken welke waarde van p hierbij hoort.

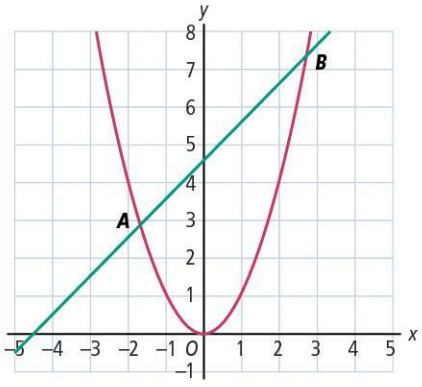
b De grafiek van $f_{-1}(x) = 4 + \sqrt{16 - x}$ gaat door het punt $R(0, 8)$. Een lijn door dit punt voldoet aan de vergelijking $y_a = ax + 8$ en snijdt de grafiek van f_{-1} alleen in R.
Onderzoek voor welke waarden van a dit het geval is.

46 Gegeven is de parabool met vergelijking $y = x^2$.
Ook is gegeven de familie van lijnen met vergelijking $y_p = x + p$.

a Eén lijn uit de familie van lijnen snijdt de parabool in de punten A en B met $AB = 6\sqrt{2}$.
Onderzoek welke waarde p heeft.

b Niet elke lijn uit de familie van lijnen $y_p = x + p$ snijdt de parabool $y = x^2$.
Zoek uit voor welke waarden van p de lijn geen gemeenschappelijke punten met de parabool heeft.

c Neem aan dat een lijn uit de familie van lijnen de parabool in twee punten M en N snijdt.
Druk de afstand MN uit in p.



© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Lineaire vergelijking of eerstegraadsvergelijking, wortelvergelijking, gebroken vergelijking

Een lineaire vergelijking $y = ax + b$ geeft een lineair verband tussen de variabelen x en y. Een lineaire vergelijking zoals $3x - 8 = 5x + 1$ heeft één variabele en kun je oplossen.
Een vergelijking zoals $3 + \sqrt{3x + 1} = x$ noem je een wortelvergelijking omdat de variabele onder het wortelteken voorkomt. Een vergelijking zoals $6 + \frac{2}{x - 1} = 8$ noem je een gebroken vergelijking omdat de variabele in de noemer van een breuk voorkomt.

S1 Schrijf in de vorm $y = ax + b$.

a $2x + y = 3$ **b** $3x - 2y = 4$

Theorie

Kwadratische vergelijking of tweedegraads vergelijking

De algemene vorm van een kwadratische vergelijking is $ax^2 + bx + c = 0$.
De oplossingen zijn $x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ of $x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ met $D = b^2 - 4ac$.
D heet de discriminant van de vergelijking.
Als $D > 0$, dan zijn er twee oplossingen.
Als $D = 0$, dan is er één oplossing.
Als $D < 0$, dan zijn er geen oplossingen.

S2 Bereken het aantal oplossingen van deze vergelijkingen.

a $x^2 + 6x - 9 = 0$ **b** $x^2 + 4x + 8 = 0$

Vaardigheid

Je kunt een lineaire of eerstegraads vergelijking oplossen.

Een lineaire vergelijking of een eerstegraads vergelijking los je op door links en rechts van het =-teken dezelfde bewerkingen uit te voeren.

Voorbeeld

Los op $6 - x = 2 - 3(x - 2)$.

Oplossing

$6 - x = 2 - 3x + 6$
$-x = 2 - 3x$
$2x = 2$
$x = 1$

S3 Los op.

a $3(5 - x) = 5(3 - 2x) + 21$

b $-4(x - 5) - 2(7 - 3x) = 4x$

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheid

Je kunt een kwadratische of tweedegraads vergelijking oplossen.

Je kunt daarbij gebruik maken van:

- Ontbinden in factoren, uit $A \cdot B = 0$ volgt $A = 0$ of $B = 0$.
- Uit $A^2 = B^2$ volgt $A = B$ of $A = -B$.
- Uit $A \cdot B = A \cdot C$ volgt $A = 0$ of $B = C$.
- De *abc*-formule.

Voorbeeld 1

Los op $(2x - 3)^2 = (x + 4)^2$.

Oplossing

$2x - 3 = x + 4$ of $2x - 3 = -(x + 4)$
$x = 7$ of $2x - 3 = -x - 4$
$x = 7$ of $3x = -1$
$x = 7$ of $x = -\frac{1}{3}$

Voorbeeld 2

Los op $(4x - 1)(5x + 2) = 10x + 4$.

Oplossing

$(4x - 1)(5x + 2) = 2(5x + 2)$
$4x - 1 = 2$ of $5x + 2 = 0$
$4x = 3$ of $5x = -2$
$x = \frac{3}{4}$ of $x = -\frac{2}{5}$

S4 Los op.

a $(x + 1)^2 = 4(x + 1)$

b $4x^2 - 9x + 6 = 0$

c $(3x - 12)^2 = (6 - 2x)^2$

d $(2x - 3)(2x + 1) = 4(2x + 1)$

Vaardigheid

Je kunt een wortelvergelijking oplossen.

1 Isoleer de wortel in de vergelijking.
2 Kwadrateer beide kanten van de vergelijking.
3 Los de verkregen vergelijking op.
4 Controleer of de oplossingen voldoen door ze in te vullen bij de oorspronkelijke vergelijking.

Voorbeeld

Los op $-1 + \sqrt{4x + 1} = x$.

Oplossing

1 $\sqrt{4x + 1} = x + 1$
2 $4x + 1 = (x + 1)^2$
3 $4x + 1 = x^2 + 2x + 1$
$0 = x^2 - 2x$
$x(x - 2) = 0$
$x = 0$ of $x = 2$
4 Beide oplossingen voldoen.

S5 Los op.

a $2\sqrt{x - 4} = 8 - \frac{1}{2}x$

b $\frac{1}{2}x + \sqrt{-1 - x} = -2$

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheid

Je kunt een gebroken vergelijking oplossen.

- In enkele gevallen kun je de bordjesmethode gebruiken.
- In de andere gevallen herleid je de vergelijking door gebruik te maken van de volgende regels:

  Uit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ volgt $A \cdot D = B \cdot C$ mits $B \neq 0$ en $D \neq 0$.

  Uit $\frac{A}{B} = C$ volgt $A = B \cdot C$ mits $B \neq 0$.

Voorbeeld

Los op $\frac{x+2}{x} = \frac{x}{x-4}$

Oplossing

$(x+2)(x-4) = x^2$
$x^2 - 2x - 8 = x^2$
$-2x = 8$
$x = -4$

S6 Los op.

a $\frac{2}{3x-9} = \frac{1}{\frac{1}{2}x+4}$

b $\frac{x+1}{4x-3} = x$

Vaardigheid

Je kunt een vergelijking met behulp van een substitutie oplossen.

Bij een substitutie vervang je een deel van de vergelijking door een andere variabele.

Voorbeeld

Los op $(5x-4)^2 - 12(5x-4) + 11 = 0$.

Oplossing

$t^2 - 12t + 11 = 0$ (substitutie $5x - 4 = t$)
$(t-11)(t-1) = 0$
$t = 11$ of $t = 1$
Dan is $5x - 4 = 11$ of $5x - 4 = 1$.
$5x = 15$ of $5x = 5$
$x = 3$ of $x = 1$

S7 Los op.

a $(1-2x)^2 + (1-2x) - 12 = 0$

b $(x+2)^3 = 4(x+2)^2$

Vaardigheid

Je kunt de waarde van een parameter berekenen.

Als je te maken hebt met een familie van functies en er is een extra gegeven, dan kun je de waarde van de parameter soms berekenen.

S8 Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = 2 - \sqrt{ax+7}$.

a De grafiek van f_a gaat door het punt $(6, -5)$.
Bereken a.

b De grafieken van f_a gaan allemaal door een punt P.
Geef de coördinaten van P.

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheid

Je kunt een variabele uitdrukken in andere variabelen.

Bij het herleiden pas je, net als bij het oplossen van vergelijkingen, steeds links en rechts dezelfde bewerkingen toe.

Voorbeeld

Druk p uit in q als $\frac{4}{p} - 3q = 2$.

Oplossing

$\frac{4}{p} = 2 + 3q$ (links en rechts + $3q$)

$4 = (2 + 3q) \cdot p$ (links en rechts × p)

$p = \frac{4}{2 + 3q}$ (links en rechts: $(2 + 3q)$)

S9 Druk p uit in q.

a $\frac{p + 2q}{2p + q} = 3$

b $q - \sqrt{p - 2q} = 3$

Vaardigheid

Je kunt een ongelijkheid oplossen.

1 Los de bijbehorende vergelijking op.
2 Lees met behulp van de grafieken de oplossing van de ongelijkheid af.
3 Noteer de oplossing van de ongelijkheid.

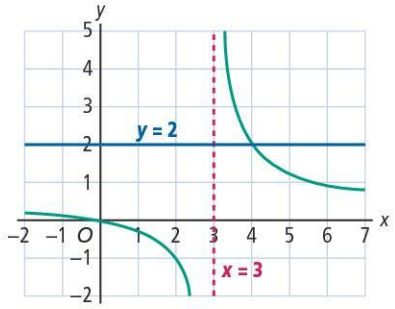
Voorbeeld

Los op $\frac{x}{2x - 6} \leq 2$.

Oplossing

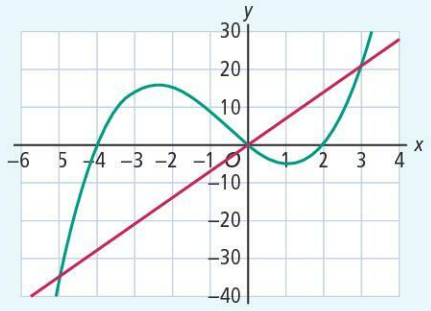
1 Uit $\frac{x}{2x - 6} = 2$ volgt $4x - 12 = x$ ofwel $x = 4$.

2



3 De oplossing van de ongelijkheid is $x < 3$ of $x \geq 4$.

S10 De grafieken van $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$ en $g(x) = 7x$ zijn getekend.
Los op.



a $f(x) > 0$

b $f(x) \leq g(x)$

© Noordhoff Uitgevers bv

T1 Los op. Geef exacte antwoorden.

a $13 + 2x = 3(x - 5) + 7x$

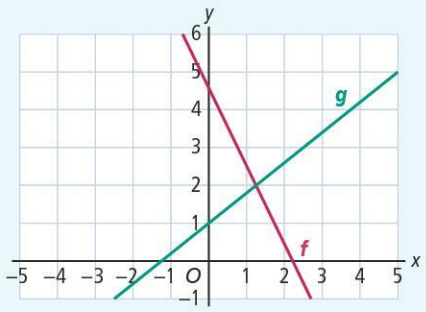
b $\frac{1}{5}p + 3 = \frac{3}{10}p - 8$

c $3\frac{2}{3}x - 3 = 2\left(\frac{1}{6}x + 1\right)$

T2 **a** Gegeven zijn de functies $f(x) = 4\frac{1}{2} - 2x$ en $g(x) = \frac{4}{5}x + 1$. Los op $g(x) < f(x)$.

b Teken de lijnen l: $y = -1{,}5x + 7$ en m: $y = 2x + 6$ in één assenstelsel.

c Los op $-1{,}5x + 7 \geq 2x + 6$.



T3 Los op. Geef exacte antwoorden.

a $a^2 = 9a + 22$

b $\sqrt{x^2 + 4} - 1 = x$

c $(2x - 3)^2 = (1 - 8x)^2$

d $\frac{-3x}{x + 1} = x - 4$

e $\frac{x + 4}{x - 2} = \frac{x + 2}{x}$

f $x^2 - 2 = \frac{1}{x^2 - 2}$

g $(x^2 - 8)^2 = x^2 - 8$

h $\sqrt{2x - 1} \cdot \sqrt{3 - 5x} = 0$

T4 Druk p uit in q.

a $2(q + 1) = 4p - 5$

b $4 + \frac{3}{p} = q + 5$

c $q + 8 - \frac{1}{p + 6} = 0$

d $7 - 2\sqrt{p + 6} = q$

T5 Los op met een substitutie.

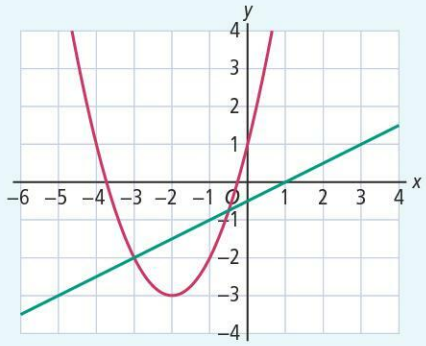
a $(3x - 1)^2 - 5(3x - 1) = 6$

b $x^4 = 13x^2 - 36$

c $\frac{4}{(x + 1)^2} - \frac{2}{x + 1} = 12$

© Noordhoff Uitgevers bv

T6 Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = (x + p)^2 - 3$.
Getekend is de grafiek van f_2 en de lijn m: $x - 2y = 1$.



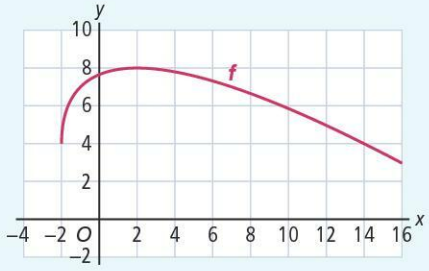
a Los de vergelijking $f_2(x) = 2$ op.

b Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f_2 met lijn m.

c Bereken voor welke waarden van p de grafiek van f_p de y-as snijdt in het punt $(0, 5)$.

d Bereken voor welke waarde van p de grafiek van f_p en de lijn m één punt gemeenschappelijk hebben.

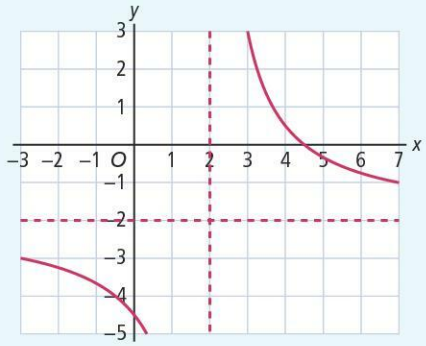
T7 Gegeven is de functie $f(x) = 2 - x + 4\sqrt{x + 2}$.



a Los op $f(x) < 7$.

b Voor welke waarden van p heeft een lijn met vergelijking $y = -x + p$ geen snijpunten met de grafiek van f?

T8 Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = \dfrac{a}{x - 2} - 2$.
Getekend is de grafiek van f_5.



a Lijn k heeft vergelijking $y = x - 8$.
Bereken de coördinaten van de snijpunten van k met de grafiek van f_5.

b De grafiek van f_5 snijdt de x-as in A en de y-as in B.
Laat met een berekening zien dat deze punten op dezelfde afstand van $O(0, 0)$ liggen.

c Gegeven de functie $g(x) = \dfrac{1}{(x - 2)^2}$
Los met een substitutie op $f_{4\frac{1}{2}}(x) = g(x)$.

d Voor $a \neq 0$ snijdt de grafiek van f_a de x-as en y-as altijd in punten die even ver van $O(0, 0)$ liggen.
Toon dit aan.

© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt een lineaire of eerstegraads vergelijking oplossen.

E1 Los op.

a $4(2x - 5) + 4 = 1 - 3(8 - x)$

b $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x - 6\right) = -2x + \frac{1}{3}(x + 12)$

Je kunt een kwadratische of tweedegraads vergelijking oplossen.

E2 Los op.

a $8 = 3x - \frac{1}{4}x^2$

b $(4k - 3)^2 = 100k^2$

c $7x - 15x^2 = 19x - 7x^2$

d $6x^2(x - 2) = 30(x - 2)$

Je kunt een wortelvergelijking oplossen.

E3 Los op.

a $2\sqrt{6 - 2x} = 18$

b $\sqrt{4 + x} - 2 = 5x$

c $(3x - 12)\sqrt{5x + 30} = 0$

d $2x + \sqrt{x - 7} = 20$

Je kunt een gebroken vergelijking oplossen.

E4 Los op.

a $\frac{112}{2x + 3} = -4$

b $\frac{1 - 6x}{2x} = 2$

c $\frac{3x - 5}{5 - x} = \frac{4}{3x}$

d $\frac{x^2}{x + 4} = \frac{1}{2}x$

Je kunt een vergelijking met behulp van een substitutie oplossen.

E5 Los op.

a $(1 - 3x)^2 = 24 - 5(1 - 3x)$

b $2x^4 + 3 = 5x^2$

Je kunt de waarde van een parameter berekenen.

E6 Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = (x - 3)^2 + 2p - 9$.

a Bereken voor welke p de grafiek van f_p door $(1, 5)$ gaat.

b Bereken voor welke p de grafiek van f_p de x-as *niet* snijdt.

Je kunt een variabele uitdrukken in andere variabelen.

E7

a Herleid $\frac{3}{m} = \sqrt{2 + k} - 6$ zodat k wordt uitgedrukt in m.

b Substitueer $t = 3k - 5$ in $y = (2t + 7)^2 - 3t$ en vereenvoudig het resultaat.

© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt een ongelijkheid oplossen.

E8 Gegeven zijn de lijnen l: $y = -\frac{2}{5}x + 10$ en m: $y = \frac{1}{3}x - 2$.

a Teken de lijnen l en m.

b Los de ongelijkheid $-\frac{2}{5}x + 10 > \frac{1}{3}x - 2$ op.

E9 Gegeven zijn de lijnen k: $ay + 2x = 7$ en m: $6x - 5y = bx$.

a Bereken voor welke waarden van a en b het punt $S(3, 5)$ het snijpunt van deze lijnen is.

b Neem $b = 14$ en bereken de waarde van a waarvoor de lijnen elkaar *niet* snijden.

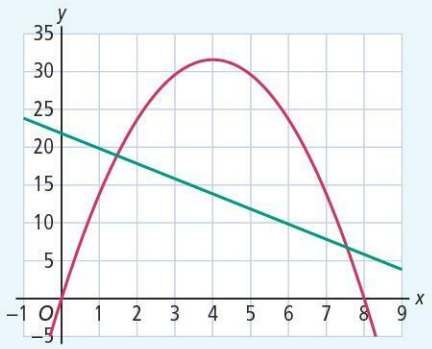
c Gegeven zijn de lijn l: $y + x = b$ en de functie $f(x) = x^2 + 3x + 2$. Bereken de waarde van b als de lijn en de grafiek van f één punt gemeenschappelijk hebben.

E10 Gegeven zijn de grafiek van de functie $f(x) = -2x(x - 8)$ en de lijn l: $4x + 2y = 45$.

a Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f en lijn l.
Een verticale lijn met vergelijking $x = p$ snijdt de parabool in punt A en lijn l in punt B, waarbij punt A boven punt B ligt.

b Bereken AB in het geval $p = 6$.

c Bereken de waarden van p in het geval $AB = 6\frac{1}{2}$.



E11 Getekend zijn de grafieken van $f(x) = x + 5$, $g(x) = -4x$ en $h(x) = 2x - 6$. De grafieken hebben onderling drie snijpunten.

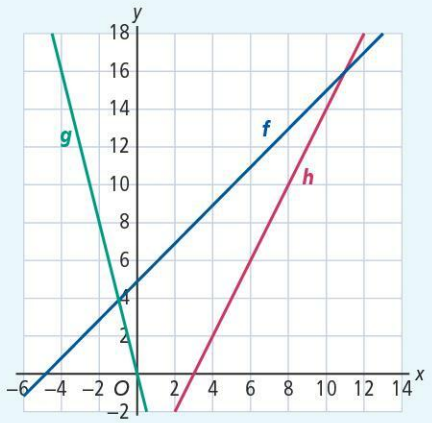
a Bereken de x-coördinaten van deze drie snijpunten.

b Los op $f(x) > g(x)$.

c Los op $0 \leq h(x) < f(x)$.

d Los op $(f(x))^2 = (h(x))^2$.

e Los op $f(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot h(x)$.



E12 Gegeven is de functie $f(x) = 2x - \sqrt{x + 8}$.

a Punt A met x-coördinaat -8 en punt B met x-coördinaat 17 liggen op de grafiek van f.
Stel een vergelijking op van de lijn door A en B.

b Los op $f(x) = 12$.

© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

Machtsfuncties 2

SE CE K

In dit hoofdstuk

In de onderbouw heb je gewerkt met machten waarvan de exponent een positief geheel getal is, zoals x^3 en x^6.
Ook heb je geleerd wat de wortel van een getal is en wat hogere machtswortels zijn, zoals $\sqrt[3]{8}$ en $\sqrt[4]{81}$.

In dit hoofdstuk leer je wat de betekenis is van een macht waarvan de exponent een negatief getal of een gebroken getal is, zoals x^{-1}, x^{-3} of $x^{\frac{1}{2}}$.
Bij het oplossen van vergelijkingen met machten ga je gebruik maken van hogere machtswortels.

Het werken met machten en het oplossen van vergelijkingen met machten is een regelmatig terugkerende vaardigheid in hoofdstukken waarin gewerkt wordt met functies, zoals hoofdstuk 5 en hoofdstuk 8.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Probleemoplossen en analytisch denken* opdracht 51
- *Formules manipuleren* opdracht 44
- *Logisch redeneren en bewijzen* opdracht 14

© Noordhoff Uitgevers bv

V1 **a** Er geldt $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ en $2^2 = 2 \cdot 2$.

Leg hiermee uit dat $2^3 \cdot 2^2 = 2^5$.

b Leg uit dat $a^4 \cdot a^3 = a^7$.

c Vul in wat op de puntjes moet staan: $x^3 \cdot \ldots = x^9$.

d Leg uit dat $(2^3)^4 = 2^{12}$.

e Vul in wat op de puntjes moet staan: $(x^3)^{\cdots} = x^9$.

f Er geldt $(2x^3)^4 = 2x^3 \cdot 2x^3 \cdot 2x^3 \cdot 2x^3$.

Leg hiermee uit dat $(2x^3)^4 = 16x^{12}$.

g Vul in wat op de puntjes moet staan: $(3x^4)^5 = \ldots x^{\cdots}$.

Theorie

Bij het rekenen met machten gelden de volgende rekenregels.

- $g^1 = g$
- $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$
- $\dfrac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$
- $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$
- $(p \cdot q)^a = p^a \cdot q^a$
- $\left(\dfrac{p}{q}\right)^a = \dfrac{p^a}{q^a}$

Voorbeeld

Vereenvoudig	**Oplossing**
a^1	$a^1 = a$
$a^7 \cdot a^3$	$a^7 \cdot a^3 = a^{7+3} = a^{10}$
$\dfrac{10x^8}{5x^4}$	$\dfrac{10x^8}{5x^4} = 2x^{8-4} = 2x^4$
$(p^3)^6 \cdot p^2$	$(p^3)^6 \cdot p^2 = p^{3 \cdot 6} \cdot p^2 = p^{18} \cdot p^2 = p^{20}$
$(3 \cdot b^4)^2$	$(3 \cdot b^4)^2 = 3^2 \cdot (b^4)^2 = 9b^8$
$\left(\dfrac{b}{2}\right)^3$	$\left(\dfrac{b}{2}\right)^3 = \dfrac{b^3}{2^3} = \dfrac{1}{8}b^3$

V2 Schrijf als één macht.

a $3^2 \cdot 3^4$

b $7^2 \cdot 7^7 \cdot 7^3$

c $\dfrac{2^7}{2^2}$

d $(5^3)^2 \cdot 5^6$

e $11 \cdot 11^3 \cdot 11^4 \cdot 11^2$

f $\dfrac{6 \cdot (6^2)^4}{6^3 \cdot 6^3}$

V3 Schrijf de rechterkant van de formules als één macht.

a $K = p^3 \cdot p^4$

b $b = (a^4)^2$

c $N = g^4 \cdot g^2 \cdot (g^3)^5$

d $P = (q^2)^5 \cdot q^2$

e $r = a \cdot (a^2)^4$

f $h = q^3 \cdot q^2 \cdot q \cdot q^2$

© Noordhoff Uitgevers bv

V4 Schrijf zonder haakjes en zo eenvoudig mogelijk.

a $f(x) = (3x^3)^4$

b $g(p) = (5p^2)^2$

c $h(u) = \left(\frac{6}{2u^2}\right)^3$

d $i(p) = \left(\frac{3}{p^4}\right)^2$

e $j(a) = (4a^4)^4 \cdot 2a^3$

f $k(x) = (-2x^3)^3 \cdot (5x)^2$

g $l(t) = \frac{18t^2 \cdot t^3}{(3t^2)^2 \cdot t}$

h $m(x) = \left(\frac{4}{3x^2}\right)^3 \cdot 9x^5$

V5 Vereenvoudig de functievoorschriften.

a $f(x) = x^2(x^5 - 2x^2)$

b $g(p) = (p^2)^5 - 3 \cdot p^7 \cdot p^3$

c $A(k) = k^2 \cdot k + 5k^3(1 - 2k^2)$

d $R(t) = t^3(t + t^2) + 3t^4$

e $P(n) = n(n^2 + 3n) - n^2(3n - 8)$

f $h(x) = 5x^3(x - 3) + (x^2 - 5)(x^2 + 5)$

V6 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^3$ en $g(x) = x^4$.

a Schets de grafieken van f en g.

b Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^4 = 81$?
Verklaar je antwoord.

c Los de vergelijkingen $x^3 = 125$ en $x^4 = 81$ op.

Theorie

$\sqrt{c}$ heet de wortel van c. Er geldt $(\sqrt{c})^2 = c$.

$\sqrt[3]{c}$ heet de derdemachtswortel van c. Er geldt $(\sqrt[3]{c})^3 = c$.

$\sqrt[4]{c}$ heet de vierdemachtswortel van c. Er geldt $(\sqrt[4]{c})^4 = c$.

Voorbeeld

$\sqrt{121} = 11$ want $11^2 = 121$.

$\sqrt[3]{1000} = 10$ want $10^3 = 1000$.

$\sqrt[4]{256} = 4$ want $4^4 = 256$.

$\sqrt[4]{-81}$ bestaat niet, want een vierde macht kan niet negatief zijn.

$\sqrt[5]{-32} = -2$ want $(-2)^5 = -32$.

V7 Bereken indien mogelijk. Gebruik geen rekenmachine.

a $\sqrt{169}$

b $\sqrt[4]{10\,000}$

c $\sqrt[3]{125}$

d $\sqrt[3]{-8}$

e $\sqrt[5]{-243}$

f $\sqrt[4]{-1}$

g $\sqrt[10]{1}$

h $\sqrt[3]{512}$

© Noordhoff Uitgevers bv

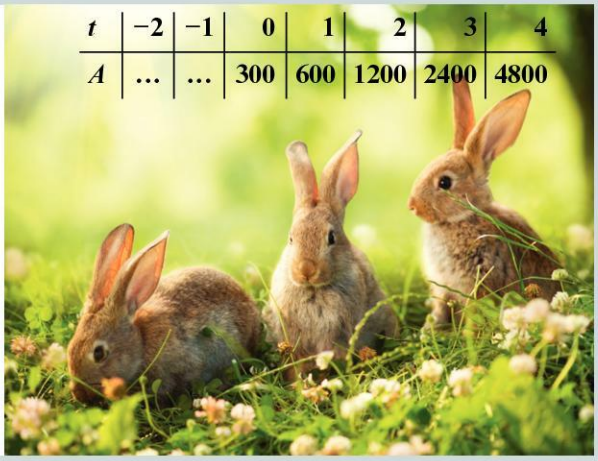
2.1 Negatieve exponenten

Je leert
- de betekenis van een macht met een negatieve exponent
- hoe je rekent met machten met een negatieve exponent

Leerroutes
- ondersteunend: 1—2—03—3—4—05—6—7—8
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7—8—9
- uitdagend: 1—2—4—5—7—8—9—U1—U2

Een eiland kampt met een konijnenplaag. In 2012 zijn er 300 konijnen op het eiland geteld. Sindsdien verdubbelt het aantal elk jaar. Ga ervan uit dat in de jaren voor 2012 het aantal konijnen ook al elk jaar verdubbelde. Het aantal konijnen voldoet aan de formule $A = 300 \cdot 2^t$ met $t = 0$ in 2012.
- Hoeveel konijnen waren er in 2010? Klopt dat met de formule?

t	-2	-1	0	1	2	3	4
A	…	…	300	600	1200	2400	4800



1 **a** Vul de tabel hiernaast in.

b Gebruik de regelmaat die met de pijltjes onder de tabel is aangegeven om de tabel uit te breiden. Vul waar nodig breuken in.

3^5	3^4	3^3	3^2	3^1	3^0	3^{-1}	3^{-2}
…	…	…	…	…	…	…	…

: 3 : 3 : 3 : 3 : 3 : 3 : 3

3^5	3^4	3^3	3^2	3^1
…	…	…	…	…

: 3 : 3 : 3 : 3

c Schrijf 3^{-3} en 3^{-4} als breuken.

d In het rijtje met machten van a zit ook een regelmaat. Geef op basis van die regelmaat de waarde van a^0 en schrijf a^{-1} en a^{-2} als breuken.

a^3 a^2 a^1 a^0 a^{-1} a^{-2}

: a : a : a : a : a

2 **a** Schrijf de uitkomsten op van 5^0, 4^0, 3^0, 2^0 en 1^0. Wat zou volgens dit rijtje de uitkomst kunnen zijn van 0^0?

b Schrijf de uitkomsten op van 0^5, 0^4, 0^3, 0^2 en 0^1. Wat zou volgens dit rijtje de uitkomst kunnen zijn van 0^0?

c Leg met behulp van je antwoorden van de opdrachten a en b uit dat k^0 niet bestaat in het geval $k = 0$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Voor een macht met een negatieve exponent geldt: $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$
Verder is $g^0 = 1$ voor elk getal $g \neq 0$.
Alle regels voor het rekenen met machten gelden ook voor machten met een negatief grondtal.

Voorbeeld

$7^0 = 1$ $\quad a^0 = 1$ (voor $a \neq 0$)

$3^{-2} = \frac{1}{3^2}$ $(= \frac{1}{9})$ $\quad a^{-4} = \frac{1}{a^4}$

Ondersteunende route → maak opdracht 03

3 H Vereenvoudig en schrijf zonder negatieve exponent en zonder exponent nul.

a t^{-3}

b $a^2 \cdot a^{-6}$

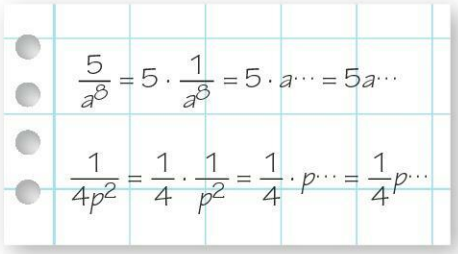
c $\frac{5p \cdot p^0}{(p^2)^3}$

d $2a^{-8}$

e $7a^4 \cdot 3a^2 \cdot a^{-8}$

f $\frac{8x^4}{2x \cdot x^3}$

4 Op het blaadje is een begin gemaakt met de herleiding van $\frac{5}{a^8}$ en $\frac{1}{4p^2}$ tot een vorm zonder variabele in de noemer.



a Maak de herleidingen af.

b Herleid op dezelfde manier.

A $\frac{3}{p^3}$

B $\frac{2}{9a^8}$

C $\frac{1}{6x^4}$

D $\frac{1}{2u^5}$

Ondersteunende route → maak opdracht 05

5 Herleid tot de vorm $a \cdot x^b$.

a $\frac{6x^2}{8x^9}$

b $\frac{1}{(x^2)^3}$

c $\frac{x^0}{x^7}$

d $\frac{18x^4}{3x^2 \cdot 2x^3}$

e $\frac{6x}{3x^9}$

f $\frac{6x^2 \cdot (x^3)^2}{3x}$

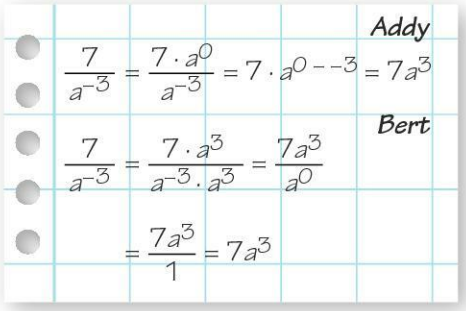
© Noordhoff Uitgevers bv

6 Op het blaadje zie je hoe Addy en Bert de breuk $\frac{7}{a^{-3}}$ herschrijven.

a Leg uit waarom Addy de breuk $\frac{7}{a^{-3}}$ als $\frac{7 \cdot a^0}{a^{-3}}$ mag schrijven. Waarom is het handig dat te doen?

b Leg uit hoe Bert tot zijn antwoord komt.

c Welke methode heeft je voorkeur?



7 Schrijf zonder negatieve exponent.

a $\frac{8}{a^{-9}}$

b $\frac{-12}{d^{-7}}$

c $\frac{4}{2x^{-3}}$

d $\frac{5}{7x^{-2}}$

e $\frac{-1}{2p^{-3}}$

f $\frac{25}{4a^{-4}}$

8 Vereenvoudig en schrijf het antwoord zonder negatieve exponent.

a $\frac{r^4 \cdot r^6}{(r^3)^3}$

b $\frac{(b^2)^4}{(b^3)^2}$

c $\frac{18p^3}{24p^{-2}}$

d $\frac{d^7 \cdot d^{-1}}{d^8}$

e $\frac{(q^5)^{-2}}{q^4}$

f $\frac{4x^5 \cdot x^{-3}}{10x^{-7}}$

9 Herleid tot de vorm $a \cdot x^b$.

H

a $(3x^2)^5$

b $x^2 \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)^4$

c $\left(\frac{5}{2^2 \cdot x^3}\right)^3$

d $(-4x)^6$

e $3^5 \cdot \left(-\frac{2}{3}x^2\right)^5$

f $\frac{6x^2 \cdot (-2x)^5}{-4(x^2)^{-3}}$

Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O3 Geef van elke uitdrukking uit het linker rijtje aan welke van de uitdrukking uit het rechter rijtje erbij hoort. Geef ook aan welke rekenregel(s) je daarbij gebruikt.

A a^{-4}

B $a^3 \cdot a^2$

C $(a^2)^3$

D a^0

E $\dfrac{(a^4)^2}{a \cdot a^3}$

F $\dfrac{1}{a^4}$

G a^4

H 1

I a^6

J a^5

$g^a \cdot g^b = g^{a+b}$	1
$\dfrac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$	2
$(g^a)^b = g^{a \cdot b}$	3
$g^{-n} = \dfrac{1}{g^n}$	4
$g^0 = 1$	5

O5 Op het blaadje zie je hoe Ruby de breuk $\dfrac{16x^2 \cdot x^3}{8 \cdot (x^4)^2 \cdot x^0}$ herleid heeft tot de vorm $a \cdot x^b$.

a Leg uit welke rekenregels ze bij stap 1 gebruikt heeft.
b Welke rekenregel gebruikt ze bij stap 2?
c En welke bij stap 3?

Herleid tot de vorm $a \cdot x^b$. Gebruik de rekenregels.

d $\dfrac{24x \cdot x^2}{6x^9}$

e $\dfrac{5x^6}{(x^3)^3}$

f $\dfrac{x^3 \cdot x^0}{x^4}$

g $\dfrac{32(x^4)^2}{8x^2 \cdot 2x^4}$

h $\dfrac{15x^5}{3x^2}$

i $\dfrac{45(x^2)^3 \cdot (x^3)^4}{9x^2 \cdot x^0}$

Ruby

$\dfrac{16x^2 \cdot x^3}{8 \cdot (x^4)^2 \cdot x^0} =$

$\dfrac{16x^5}{8 \cdot (x^4)^2} =$ 1

$\dfrac{2x^5}{x^8} =$ 2

$2x^{-3}$ 3

Uitdagende opdrachten

U1 Gegeven is dat $x^a = p$ en $x^b = q$.
Druk uit in p en/of q.

a x^{a+b}

b x^{3b}

c $(x^5)^a$

d x^{a-b}

e x^{2a+b}

f $(x^3)^{-2a+5b}$

U2 Je kunt de uitdrukking $\dfrac{(x^q)^2 \cdot px^{13} \cdot x^{-2}}{4 \cdot (x^{-3})^q \cdot x \cdot 3x^2}$ herleiden tot de vorm $a \cdot x^b$.
Bereken de waarde van p en van q in het geval de breuk na herleiding voor elke waarde van x gelijk is aan 1.

© Noordhoff Uitgevers bv

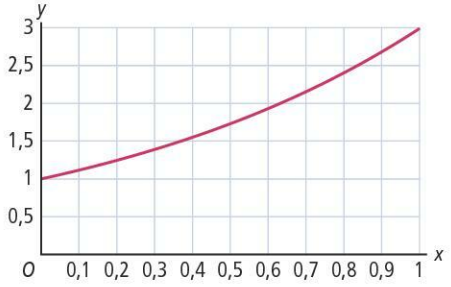
2.2 Gebroken exponenten

Je leert
- de betekenis van een macht met een gebroken exponent
- hoe je rekent met machten met een gebroken exponent

Leerroutes
- ondersteunend: 10—11—12—13—14—O15—16—17—18—O19—19
- doorlopend: 10—11—12—13—14—15—16—17—18—19—20
- uitdagend: 10—11—13—14—15—17—18—19—20—U3—U4

In een petrischaaltje wordt een schimmel onderzocht. De door de schimmel bedekte oppervlakte neemt in het begin exponentieel toe. Om 12.00 uur was die oppervlakte 100 mm^2 en een uur later 600 mm^2. Om 12.30 uur is de oppervlakte ook gemeten.
- Kun je met behulp van de groeifactor van de oppervlakte per half uur een uitspraak doen over de waarde van $6^{\frac{1}{2}}$?

10 De grafiek hoort bij de formule $y = 3^x$.



a Lees uit de grafiek een benadering af van $3^{\frac{1}{2}}$.

b Leg met de rekenregel $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$ uit dat $(3^{\frac{1}{2}})^2 = 3$.

c Waarom volgt hieruit dat $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$?

d Leg op de manier van opdracht b en c uit dat $4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$.

Theorie

Er geldt $g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$ met n een positief geheel getal.
Bij het herleiden van $5\sqrt{5}$ en $p^2\sqrt[3]{p}$:
- schrijf je eerst de wortel als een macht,
- vervolgens pas je de regel voor het vermenigvuldigen van machten toe.

Omgekeerd kun je een uitdrukking als $x^{1\frac{1}{4}}$ schrijven als $x^1 \cdot x^{\frac{1}{4}} = x\sqrt[4]{x}$.

Voorbeeld

$11^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{11}$

$5\sqrt{5} = 5^1 \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5^{1\frac{1}{2}}$

$a^5\sqrt[4]{a} = a^5 \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^{5\frac{1}{4}}$

$x^2 3^{\frac{1}{3}} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^2\sqrt[3]{x}$

11 Schrijf als één macht.

a $\sqrt[5]{6}$

b $\sqrt[10]{11}$

c $\sqrt[7]{a}$

d $\sqrt{k}$

e $k\sqrt{k}$

f $p^3\sqrt[4]{p}$

12 Herleid tot een vorm zonder gebroken exponent.

H

a $4^{\frac{1}{6}}$

b $7^{1\frac{1}{5}}$

c $a^{2\frac{1}{7}}$

d $(6^2)^{\frac{1}{8}}$

e $3^{\frac{1}{8}} \cdot 3$

f $5 \cdot (5^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

13 **a** Er geldt $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$.

Vul in: $5^{\frac{2}{3}} = (5^2)^{\cdots}$.

b Leg uit dat uit het voorgaande volgt $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$.

14 Als van een macht het grondtal negatief is en de exponent een breuk, kan er een tegenspraak optreden.

Op het blaadje staan twee berekeningen van de macht $(-8)^{\frac{1}{3}}$.

a Ga van beide berekeningen na dat ze kunnen kloppen.

b Leg uit dat je op basis van deze berekeningen geen waarde aan $(-8)^{\frac{1}{3}}$ kunt toekennen.

$(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$

$(-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2}$

$= \sqrt[6]{64} = 2$

Theorie

Machten waarvan de exponent geen geheel getal is, bestaan alleen als het grondtal niet negatief is.
Voor een macht met een gebroken exponent geldt:

$g^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{g^m}$, met $g \geq 0$ en n en m positieve gehele getallen.

Alle regels voor het rekenen met machten gelden ook voor machten waarvan de exponent geen geheel getal is.

Voorbeeld

$3^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{3^4}$

$7^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}} = 7^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{7^7}$

$5^{3\frac{1}{6}} = 5^3 \cdot 5^{\frac{1}{6}} = 125\sqrt[6]{5}$

$a^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$

$p^{-1\frac{1}{2}} = \frac{1}{p^{1\frac{1}{2}}} = \frac{1}{p^1 \cdot p^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{p\sqrt{p}}$

Ondersteunende route → maak opdracht O15

15 Herleid tot een vorm zonder negatieve en gebroken exponent ($a > 0$).

a $7^{\frac{2}{5}}$

b $5^{\frac{5}{6}}$

c $8^{2\frac{3}{7}}$

d $(a^2)^{\frac{3}{8}}$

e $6^{1\frac{2}{3}} \cdot 6^{\frac{1}{6}}$

f $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^2$

g $4^{-\frac{1}{2}}$

h $a^{-\frac{2}{7}}$

16 Schrijf als macht met negatieve of gebroken exponent ($a > 0$).

H

a $\sqrt[5]{3}$

b $\sqrt[4]{7^3}$

c $\frac{1}{\sqrt[5]{6}}$

d $\sqrt[8]{a^3}$

e $\sqrt[10]{a^6}$

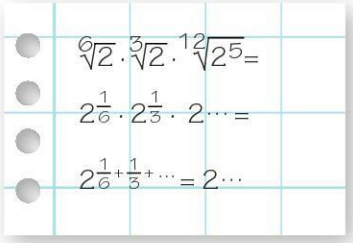
f $\frac{1}{\sqrt[5]{a^3}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

17 Op het blaadje wordt de uitdrukking $\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[12]{2^5}$ tot één macht van 2 herleid.

a Maak de herleiding verder af.

b Herleid net zo $\dfrac{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[10]{7^5}}$ tot een macht van 7.



18 Schrijf de uitdrukkingen zonder wortels en als één macht ($p > 0$).

a $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{3}$

b $\dfrac{1}{6\sqrt{6}}$

c $\dfrac{1}{p\sqrt[5]{p^3}}$

d $\sqrt[3]{7^2} \cdot \sqrt[6]{7}$

e $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}}$

f $\dfrac{\sqrt[8]{p^5}}{p\sqrt[4]{p}}$

Ondersteunende route → maak opdracht O19

19 H Schrijf zo eenvoudig mogelijk en zonder negatieve en gebroken exponent ($a > 0$).

a $a^2 \cdot a^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{a}$

b $(a^{-\frac{1}{3}})^5 \cdot a$

c $\dfrac{(2a)^2}{3\sqrt{a}}$

d $(a^{-3})^{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[5]{a^2}$

e $a^{-2} \cdot (\sqrt{a})^3 \cdot a^{\frac{2}{5}}$

f $a\sqrt[5]{a^2} \cdot a^3 \cdot \dfrac{1}{a\sqrt{a}}$

20 Bij zoogdieren geldt voor het verband tussen de huidoppervlakte en hun gewicht bij benadering de formule van Meeh: $H = \sqrt[3]{c \cdot G^2}$. In deze formule is H de huidoppervlakte in dm^2, G is het gewicht in kg en c is een constante die afhangt van het soort dier. In de tabel zie je voor enkele zoogdieren de bijbehorende waarde van c.

dier	*c*
egel	421,9
muis	729,0
mens	1404,9
vleermuis	190 109,4

a Bereken de huidoppervlakte van een muis van 40 gram. Rond je antwoord af op een geheel aantal cm^2.

b De formule bij de mens is te herleiden tot de vorm $H = a \cdot G^b$. Bereken de waarden van a en b. Rond de waarde van a af op één decimaal.

c Maak opdracht b ook voor de formule bij de egel.

Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O15

a Vul in: $5^{\frac{3}{8}}$ is gelijk aan $(5^3)^{\frac{1}{8}}$ en dus gelijk aan $\sqrt[\cdots]{5^{\cdots}}$.

b Vul in: $7^{3\frac{2}{5}}$ is gelijk aan $7^{\cdots} \cdot 7^{\frac{2}{5}}$ en dus gelijk aan $\ldots \sqrt[\cdots]{7^2}$.

c Vul in: $a^{-\frac{1}{3}}$ is gelijk aan $\frac{1}{a^{\cdots}}$ en dus gelijk aan $\frac{1}{\sqrt[\cdots]{\ldots}}$

Herleid tot een vorm zonder negatieve en gebroken exponent ($a > 0$).

d $10^{\frac{3}{7}}$

e $8^{\frac{3}{4}}$

f $6^{2\frac{1}{5}}$

g $(a^{\frac{2}{7}})^2$

h $5^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{3}}$

i $4^{\frac{2}{3}} \cdot 4^3$

j $9^{-\frac{1}{2}}$

k $a^{-\frac{5}{6}}$

O19

Je gaat in deze opdracht de vorm $\frac{x^{-\frac{1}{3}} \cdot x}{x^2 \cdot \sqrt[4]{x}}$ vereenvoudigen.

a Schrijf de teller als $x^{-\frac{1}{3}} \cdot x^1$ en vervolgens als één macht van x door de rekenregel $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$ te gebruiken.

b Schrijf de noemer als $x^2 \cdot x^{\frac{1}{4}}$ en vervolgens als één macht van x door de rekenregel $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$ te gebruiken.

c De breuk heeft nu de vorm $\frac{x^{\cdots}}{x^{\cdots}}$

Laat zien dat de breuk te schrijven is als $x^{-1\frac{7}{12}}$ door de rekenregel $\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$ te gebruiken.

d Vul in: $x^{-1\frac{7}{12}} = \frac{1}{x^{1\frac{7}{12}}} = \frac{1}{x^1 \cdot x^{\frac{7}{12}}} = \frac{1}{x \cdot \sqrt[\cdots]{x^{\cdots}}}$

Uitdagende opdrachten

U3

Gegeven is dat $x^a = p$ en $x^b = q$.
Druk uit in p en/of q.

a $x^{\frac{1}{2}a}$

b $x^{\frac{2}{3}b}$

c $\sqrt[3]{x^{2a}}$

d $x^{\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b}$

e $x^{2a - \frac{2}{5}b}$

f $(\sqrt[4]{x})^{a-2b}$

U4

Geef een formule voor het verband tussen a en b in het geval $\sqrt[b]{2^a} = 2\sqrt{2}$.

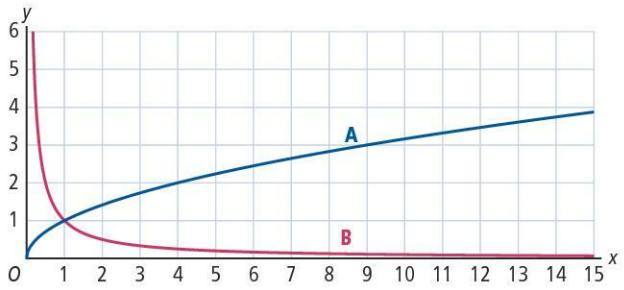
© Noordhoff Uitgevers bv

2.3 Machtsfuncties

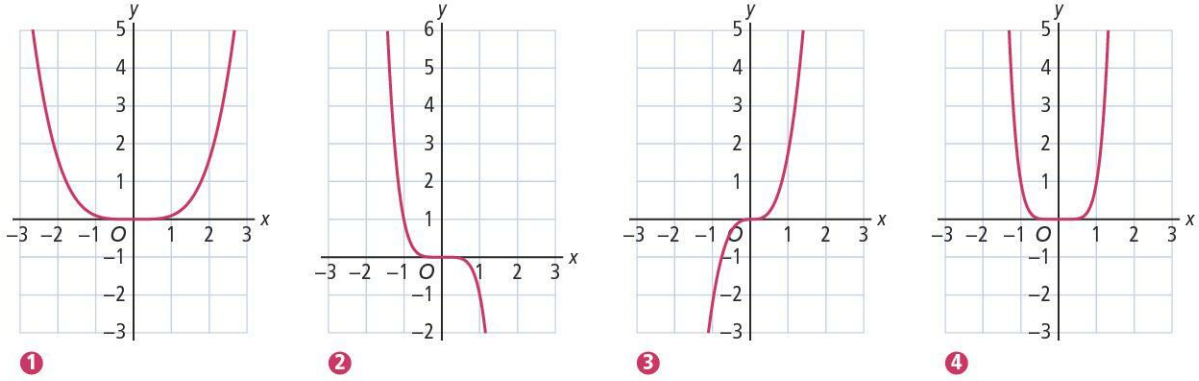
Je leert
- wat een machtsfunctie is en hoe de grafiek van een machtsfunctie eruitziet

Leerroutes
- ondersteunend: 21—22—23—24—25—026—27—28
- doorlopend: 21—22—23—24—25—26—27—28
- uitdagend: 22—24—25—26—27—28—U5—U6

Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x) = x^{-1}$ en $g(x) = x^{\frac{1}{2}}$.
- Onderzoek welke grafiek bij welke functie hoort.

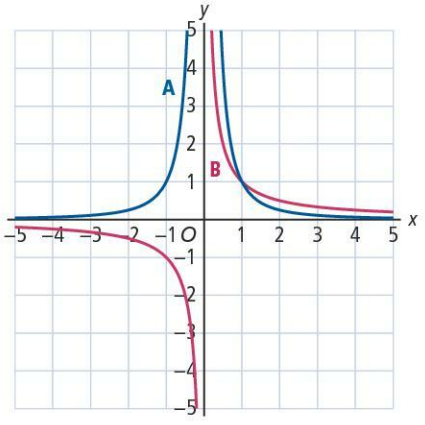


21 Gegeven zijn de grafieken van $f(x) = 2x^3$, $g(x) = 0{,}1x^4$, $h(x) = -x^5$ en $i(x) = x^6$.



a Geef bij elke grafiek het juiste functievoorschrift.
b Welke van de grafieken zijn lijnsymmetrisch?
c Welke van de grafieken zijn puntsymmetrisch?

22 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^{-1}$ en $g(x) = x^{-2}$.
a Schrijf de functievoorschriften van f en g zonder negatieve exponent.
b Welke grafiek hoort bij f? En welke bij g? Waarom?
c Beide grafieken hebben zowel een verticale als een horizontale asymptoot.
Geef van beide asymptoten een vergelijking.
d Van welke functie is de grafiek lijnsymmetrisch?
e Van welke functie is de grafiek puntsymmetrisch?



© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Functies van de vorm $f(x) = x^a$ heten **machtsfuncties**.
Machtsfuncties van de vorm $f(x) = x^{-n}$ met n een positief geheel getal kun je schrijven als $f(x) = \frac{1}{x^n}$

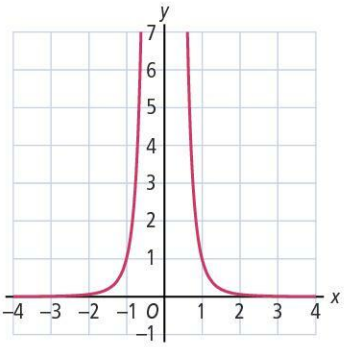
Deze machtsfuncties zijn voorbeelden van **gebroken functies**.
De grafiek van de functie $f(x) = x^{-n}$ heeft de x-as als horizontale asymptoot en de y-as als verticale asymptoot.

Voorbeeld

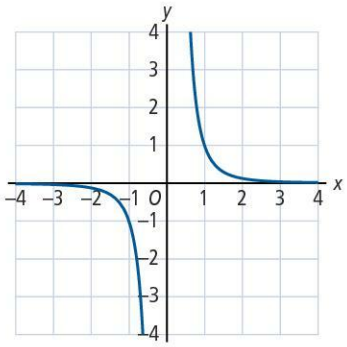
$f(x) = x^{-3}$ kun je schrijven als $f(x) = \frac{1}{x^3}$

$g(x) = x^{-4}$ kun je schrijven als $g(x) = \frac{1}{x^4}$

23 Gegeven zijn de grafieken van $f(x) = x^{-3}$ en $g(x) = x^{-4}$.



A

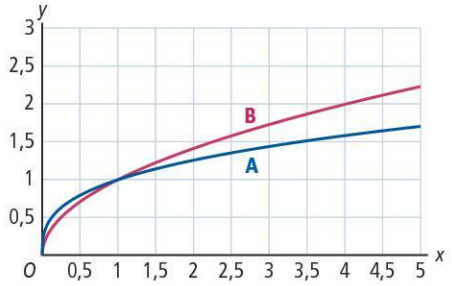


B

a Onderzoek welke grafiek bij welke functie hoort.
b Van welke functie is de grafiek lijnsymmetrisch?
c Van welke functie is de grafiek puntsymmetrisch?
d Gegeven is verder de functie $h(x) = x^{-12}$.
Is de grafiek van deze functie lijn- of puntsymmetrisch?
Verklaar je antwoord.

24 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ en $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

a Schrijf de functievoorschriften van f en g zonder gebroken exponent.
b Welke grafiek hoort bij f? En welke bij g? Verklaar je antwoord.



Theorie

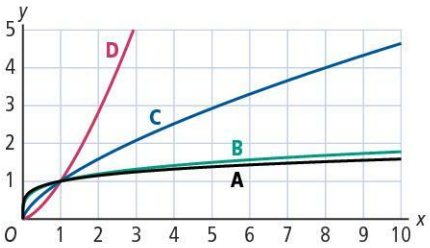
Machtsfuncties van de vorm $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ $(x \geq 0)$ met n een positief geheel getal zijn te schrijven als $f(x) = \sqrt[n]{x}$ en heten daarom ook wel **wortelfuncties**.

Voorbeeld

Voor $x \geq 0$ kun je
$f(x) = x^{\frac{1}{4}}$ schrijven als $f(x) = \sqrt[4]{x}$ en
$g(x) = x^{\frac{2}{3}}$ schrijven als $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

25 Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$, $h(x) = x^{\frac{1}{4}}$ en $k(x) = x^{\frac{1}{5}}$.



a Bereken in twee decimalen $f(4)$, $g(4)$, $h(4)$ en $k(4)$.

b Onderzoek welke grafiek bij welke functie hoort.

c De vier grafieken hebben twee punten gemeenschappelijk.
Welke twee punten zijn dat?

d Gegeven is verder de functie $l(x) = x^{\frac{3}{4}}$.
Liggen de twee punten uit opdracht c ook op de grafiek van l?

Ondersteunende route → maak opdracht O26

26 H Het functievoorschrift van de functie $f(x) = x^{1\frac{1}{2}}$ kun je schrijven als $f(x) = x\sqrt{x}$. In deze opdracht geldt $x \geq 0$.
Schrijf in de vorm $g(x) = x^a \cdot \sqrt[n]{x^m}$.

a $g(x) = x^{2\frac{1}{2}}$

b $g(x) = x^{4\frac{1}{3}}$

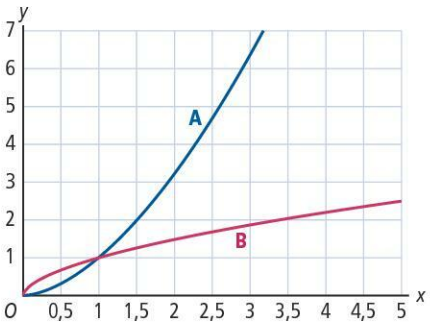
c $g(x) = x^{3\frac{1}{5}}$

d $g(x) = x^{3\frac{2}{5}}$

e $g(x) = x^{1\frac{2}{3}}$

f $g(x) = x^{2\frac{4}{7}}$

27 De exponent van een macht kan ook een decimaal getal zijn.
Zo is $3^{0,57} = 3^{\frac{57}{100}} = \sqrt[100]{3^{57}}$.
Gegeven zijn de grafieken van $f(x) = x^{0,57}$ en $g(x) = x^{1,68}$.



a Bereken in twee decimalen $f(3)$ en $g(3)$.

b Onderzoek welke grafiek bij welke functie hoort.

c De grafiek van de functie $h(x) = x^a$ ligt bij elke waarde van $x > 1$ hoger dan grafiek A.
Geef een mogelijke waarde van a.

28 Er bestaat een verband tussen de diameter d van de stam van een boom en de hoogte h, beide in meters. Bij benadering geldt de formule $h = c \cdot d^{0,65}$. De waarde van de constante c hangt af van de soort boom.

a Voor een grove den geldt $c = 44$.
Bereken de hoogte van een grove den in meters als de diameter 36 cm is. Rond af op één decimaal.

b Voor een boomsoort geldt dat bij een hoogte van 18 meter de diameter gelijk is aan 20 cm.
Bereken de waarde van c. Rond je antwoord af op een geheel getal.

Uitdagende route → maak opdracht U5 en U6

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O26 Op het eerste blaadje zie je hoe je de functie $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[5]{x^3}$ als machtsfunctie kunt schrijven.

a Welke rekenregel voor machten is er bij de laatste stap gebruikt?

b Op het tweede blaadje is een begin gemaakt met het schrijven van het functievoorschrift $g(x) = x^{4\frac{2}{3}}$ in de vorm $g(x) = x^a \cdot \sqrt[\cdots]{x^{\cdots}}$.

Bij stap 2 gebruik je de rekenregel $g^{a+b} = g^a \cdot g^b$.
Welk getal komt daar op de puntjes te staan?

c Vul ook stap 3 in.

$f(x) = x^2 \cdot \sqrt[5]{x^3}$

$f(x) = x^2 \cdot x^{\frac{3}{5}}$

$f(x) = x^{2\frac{3}{5}}$

$g(x) = x^{4\frac{2}{3}}$

$g(x) = x^{4+\frac{2}{3}}$ 1

$g(x) = x^4 \cdot x^{\cdots}$ 2

$g(x) = x^{\cdots} \cdot \sqrt[\cdots]{x^{\cdots}}$ 3

Schrijf voor $x \geq 0$ in de vorm $g(x) = x^a \cdot \sqrt[n]{x^m}$.

d $g(x) = x^{1\frac{1}{5}}$

e $g(x) = x^{2\frac{1}{2}}$

f $g(x) = x^{1\frac{2}{3}}$

g $g(x) = x^{7\frac{3}{7}}$

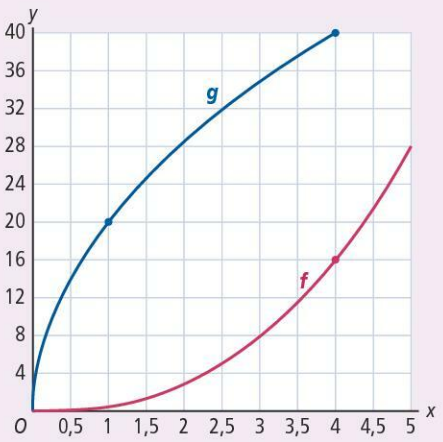
h $g(x) = x^{4\frac{4}{5}}$

i $g(x) = x^{3\frac{5}{9}}$

Uitdagende opdrachten

U5 Gegeven is de functie $h(x) = c \cdot x^a$. De grafiek van h gaat door de punten (1, 6) en (4, 48).
Bereken a en c.

U6 Bij de grafieken horen de functies $f(x) = 0{,}5 \cdot x^a$ en $g(x) = c \cdot x^b$.
De grafieken snijden elkaar rechts van de lijn $x = 5$.
Onderzoek of het snijpunt links of rechts van de lijn $x = 8$ ligt.



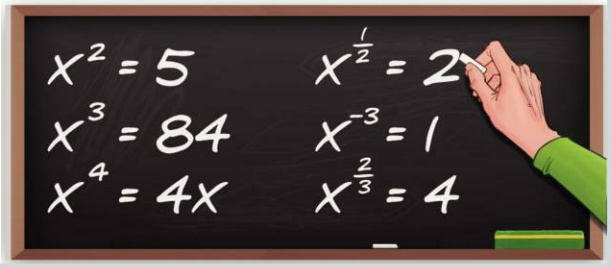
© Noordhoff Uitgevers bv

2.4 Vergelijkingen oplossen

Je leert · hoe je een vergelijking met machten oplost

Leerroutes
· ondersteunend: 29—30—31—O32—33—34—35—36—37—O38—38
· doorlopend: 29—30—31—32—33—34—35—36—37—38—39
· uitdagend: 29—31—32—33—34—35—36—37—39—U7—U8

Een docent schrijft een aantal vergelijkingen met machtsfuncties op.
· Onderzoek of $x = 0$, $x = 4$, $x = 1$, $x = \sqrt{5}$, $x = \sqrt[3]{5}$, $x = -\sqrt{5}$ en $x = 8$ oplossingen zijn van één of meer vergelijkingen.



29
a Schets de grafiek van $f(x) = x^4$.
b Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^4 = 16$?
c Ga na dat $x = 2$ en $x = -2$ oplossingen zijn van $x^4 = 16$.
d Ga na dat $x = -2$ de enige oplossing is van $x^5 = -32$.
e De vergelijking $x^3 = -1000$ heeft als enige oplossing $x = \sqrt[3]{-1000}$.
Ga na dat $\sqrt[3]{-1000} = -\sqrt[3]{1000}$.

Theorie

De oplossing van de vergelijking $x^n = c$ met n positief en geheel is:
- $x = \sqrt[n]{c}$ als n oneven is;
- $x = \sqrt[n]{c}$ of $x = -\sqrt[n]{c}$ als n even is en $c \geq 0$.
- geen oplossing als n even is en $c < 0$.

Voorbeeld

Los op $2x^3 = 54$.

Oplossing
$2x^3 = 54$
$x^3 = 27$
n is oneven, dus één oplossing.
$x = \sqrt[3]{27}$ dus $x = 3$

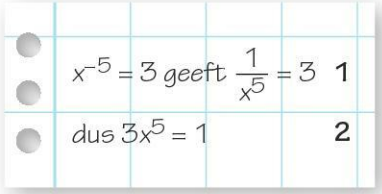
Los op $p^6 + 5 = 12$.

Oplossing
$p^6 + 5 = 12$
$p^6 = 7$
n is even, dus twee oplossingen ($7 > 0$).
$p = \sqrt[6]{7}$ of $p = -\sqrt[6]{7}$

30 Los op.

H
a $x^5 = 32$
b $p^4 = 20$
c $y^3 = -12$
d $q^4 - 47 = 34$
e $7 + 2k^8 = 4$
f $0{,}2x^3 = -12$

31 Op het blaadje is een begin gemaakt met het oplossen van de vergelijking $x^{-5} = 3$.
a Leg uit wat er bij de stappen 1 en 2 gebeurt.
b Los de vergelijking verder op.
c Laat zien dat je de vergelijking ook kunt oplossen door links en rechts te vermenigvuldigen met x^5.



© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht 032

32 Los op.

a $x^{-5} = 8$

b $x^{-4} = 3$

c $x^{-6} = \frac{1}{4}$

d $6x^{-3} = 4$

e $8x^{-1} + 9 = 10$

f $100 - 5x^{-2} = 80$

33 Op het blaadje is de vergelijking $x^{\frac{2}{3}} = 5$ opgelost.

a In stap 1 is links en rechts tot de macht $\frac{3}{2}$ verheven.
Waarom is het handig om $x^{\frac{2}{3}}$ tot de macht $\frac{3}{2}$ te verheffen?

b Uit welke rekenregel volgt dat $(x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ gelijk is aan x?

c De oplossing $\sqrt{125}$ kun je nog vereenvoudigen tot $p\sqrt{5}$.
Bereken p.

$x^{\frac{2}{3}} = 5$

$\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{3}{2}}$ 1

$x^1 = 5^{\frac{3}{2}}$ 2

$x = \sqrt{5^3} = \sqrt{125}$ 3

34 Los op voor $x \geq 0$.

H

a $x^{\frac{3}{7}} = 8$

b $x^{\frac{5}{9}} = 6$

c $x^{1\frac{1}{2}} = 4$

d $5x^{\frac{4}{5}} = 10$

e $4x^{-\frac{3}{4}} = 8$

f $3x^{-2\frac{1}{2}} + 8 = 14$

35 Ook een machtsvergelijking met een decimaal getal als exponent kun je op de manier van opdracht 33 oplossen. Op het blaadje is een begin gemaakt met het oplossen van $x^{1{,}35} = 15$.

a Waarom is het handig om links en rechts tot de macht $\frac{1}{1{,}35}$ te verheffen?

b Geef de oplossing van $x^{1{,}35} = 15$ in twee decimalen.

$x^{1{,}35} = 15$

$\left(x^{1{,}35}\right)^{\frac{1}{1{,}35}} = 15^{\frac{1}{1{,}35}}$

$x \approx \ldots$

Theorie

Vergelijkingen van de vorm $x^a = p$ waarin a een gebroken getal is, los je op met de regel:

Uit $x^a = c$ volgt $x = c^{\frac{1}{a}}$, met $c > 0$.

Voorbeeld

Lop op $x^{1{,}7} = 10$.
Rond af op twee decimalen.

Oplossing

Verhef links en rechts tot de macht $\frac{1}{1{,}7}$.
Dit geeft $x = 10^{\frac{1}{1{,}7}} \approx 3{,}87$.

36 Los op. Rond af op twee decimalen.

a $x^{3{,}26} = 42$

b $x^{1{,}987} = 6{,}23$

c $x^{-0{,}35} = 0{,}975$

d $5x^{1{,}8} = 100$

e $6x^{-2{,}3} + 7 = 25$

f $45 - 8x^{0{,}3498} = 0$

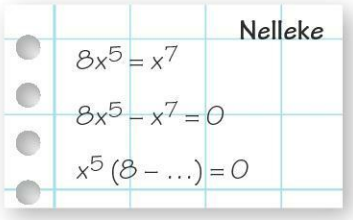
© Noordhoff Uitgevers bv

37 Nelleke gaat de vergelijking $8x^5 = x^7$ oplossen. Op het blaadje zie je hoe ze begint.

a Maak de berekening af. Schrijf de exacte oplossingen op.

b Linda lost de vergelijking op $8x^5 = x^7$ door links en rechts door x^5 te delen. Welke vergelijking houdt ze dan over?

c Linda doet het fout. Welke oplossing vindt zij namelijk niet?



Theorie

Een vergelijking met twee machtsfuncties kun je oplossen door gebruik te maken van:

- Uit $A \cdot B = 0$ volgt $A = 0$ of $B = 0$. Daartoe herleid je de vergelijking eerst op nul en haal je een zo groot mogelijke macht van x buiten haakjes.
- Uit $A \cdot B = A \cdot C$ volgt $A = 0$ of $B = C$.

Voorbeeld 1

Los op $x^5 = -4x^2$.

Oplossing

$x^5 + 4x^2 = 0$
$x^2(x^3 + 4) = 0$
$x^2 = 0$ of $x^3 + 4 = 0$
$x = 0$ of $x^3 = -4$
$x = 0$ of $x = \sqrt[3]{-4}$ $(= -\sqrt[3]{4})$

Voorbeeld 2

Los op $x^6 = 2x^2$.

Oplossing

$x^4 \cdot x^2 = 2 \cdot x^2$
$x^2 = 0$ of $x^4 = 2$
$x = 0$ of $x = \sqrt[4]{2}$ of $x = -\sqrt[4]{2}$

Ondersteunende route → maak opdracht O38

38 Los op.

H

a $x^6 = 4x^4$

b $-3x^{13} = 9x^8$

c $5x^3 = 80x^7$

d $\frac{1}{2}x^9 + 5x^5 = 0$

e $3x^2 = 12x\sqrt{x}$

f $x^2 = 2\sqrt[3]{x}$

39 Los op. Geef indien mogelijk een exact antwoord.

a $5x^{-3} = 80x^7$

b $3x^{-2} = 12$

c $2x^{3,67} - 5x^{2,44} = 0$

d $4x^{3\frac{1}{4}} = 5x^3$

e $3x^{2,45} + 5 = 80$

f $3x^{2,45} = x$

Uitdagende route → maak opdracht U7 en U8

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O32 Je gaat in deze opdracht de vergelijking $2x^{-4} - 7 = 5$ oplossen.

a Laat zien dat de vergelijking te herleiden is tot $x^{-4} = 6$.

b Schrijf x^{-4} zonder negatieve exponent.

c Vul in: uit $x^{-4} = 6$ volgt $\frac{1}{x^4} = 6$ en dus $6x^4 = \ldots$

d Schrijf de vergelijking in de vorm $x^4 = c$. Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking?

e Vul in: de oplossing is $x = \sqrt[4]{\ldots}$ of $x = -\sqrt[4]{\ldots}$

Los op.

f $x^{-3} = 8$

g $x^{-5} = 24$

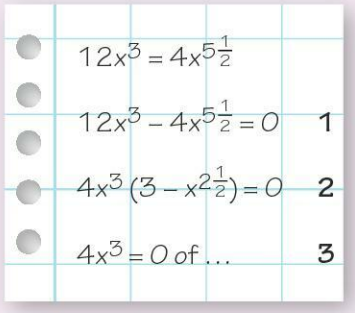
h $x^{-2} = \frac{1}{4}$

i $8x^{-5} = 1$

j $3x^{-1} - 2 = 7$

k $79 - 4x^{-4} = 15$

O38 Op het blaadje is een begin gemaakt met het oplossen van de vergelijking $12x^3 = 4x^{5\frac{1}{2}}$. Bij stap 1 is de vergelijking op nul herleid, bij stap 2 is de tweeterm ontbonden in factoren.



a Omdat de vergelijking op nul herleid is en ontbonden in factoren, kun je de regel 'Uit $A \cdot B = 0$ volgt $A = 0$ of $B = 0$' toepassen. Vul in wat op de puntjes moet staan.

b De eerste vergelijking $4x^3 = 0$ heeft $x = 0$ als oplossing.

De tweede vergelijking is te herleiden tot $x^{\frac{5}{2}} = 3$.

Vul in: $(x^{\frac{5}{2}})^{\cdots} = 3^{\cdots}$ dus $x^1 = 3^{\cdots}$.

c Vul in: de oplossing is $x = 0$ of $x = \sqrt[\cdots]{\ldots}$

Uitdagende opdrachten

U7 **a** Gegeven zijn $f(x) = 5x^3$ en $g(x) = x^5$. Behalve in $(0, 0)$ snijden de grafieken van f en g elkaar in de punten A en B. Bereken de afstand AB.

b $x = 1$ en $x = \sqrt[4]{5}$ zijn oplossingen van de vergelijking $ax^8 - bx^4 = 10$.
Bereken de waarde van a en van b en ga na of de vergelijking nog meer oplossingen heeft.

U8 Los de vergelijkingen op.

a $x^3 + 2x^2 + x = 0$

b $x^{3,45} + 2x^{2,45} + x^{1,45} = 0$

c $x^{-3} - 32x^2 = 0$

d $(x^{7,1} + 1)(x - 3) = (x^{4,7} + 1)(x - 3)$

e $(x^5 + 1)^2 = (2x^5 - 1)^2$

f $\frac{8x^3 + x^2}{x - 1} = x + 1$

© Noordhoff Uitgevers bv

2.5 Herleiden

Je leert
- hoe je het functievoorschrift van een machtsfunctie vereenvoudigt
- hoe je een machtsformule herleidt waarbij je de ene variabele uitdrukt in de andere

Leerroutes
- ondersteunend: 40—041—41—42—043—45
- doorlopend: 40—41—42—43—44—45
- uitdagend: 40—41—43—45—U9—U10

De huidoppervlakte van een mens is onder andere afhankelijk van het gewicht en de lengte. Een formule voor het verband tussen de huidoppervlakte H in m^2 en de lengte L in cm voor een man van 80 kg is $H = 0{,}0463 \cdot L^{0{,}725}$. De formule wordt ook wel geschreven als $L = 69{,}3636 \cdot H^{1{,}379}$.

- Ga na of beide formules voor een man van 1.90 m dezelfde huidoppervlakte opleveren.

40 **a** Gegeven is de functie $f(x) = x \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}$.
Laat zien dat je het functievoorschrift van f kunt herleiden tot $f(x) = x^{1\frac{5}{6}}$.

b Gegeven is de functie $g(x) = \frac{3}{x\sqrt{x}} \cdot (x^2)^4 \cdot 5x^{-3}$.
Laat zien dat je het functievoorschrift van g voor $x > 0$ kunt herleiden tot $g(x) = 15x^{3\frac{1}{2}}$.

c Waarom geldt de herleiding van functie g niet voor $x = 0$?

Theorie

Functievoorschriften waarin machten van de variabele voorkomen, kun je met behulp van de rekenregels voor machten herleiden tot eenvoudigere vormen.

Voorbeeld

Herleid $f(x) = \frac{(4x^2)^3 \cdot \sqrt[9]{x^6}}{8x^3 \cdot \sqrt{x}}$ voor $x > 0$ tot de vorm $f(x) = b \cdot x^a$.

Oplossing

$f(x) = \frac{(4x^2)^3 \cdot \sqrt[9]{x^6}}{8x^3 \cdot \sqrt{x}}$ geeft $f(x) = \frac{64x^6 \cdot x^{\frac{6}{9}}}{8x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}}}$

en dus $f(x) = \frac{64x^{6\frac{2}{3}}}{8x^{3\frac{1}{2}}}$ ofwel $f(x) = 8x^{3\frac{1}{6}}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht 041

41 H

Herleid voor $x > 0$ de functievoorschriften tot de vorm $f(x) = b \cdot x^a$.

a $f(x) = 2x^3 \cdot \sqrt{x}$

b $f(x) = \dfrac{(2x)^3}{16x^{-\frac{1}{2}}}$

c $f(x) = x^{-2} \cdot \sqrt{4x}$

d $f(x) = \dfrac{8x^2 \cdot \sqrt[7]{x^3}}{x^3 \cdot \sqrt{x}}$

42

In de formule $p = 10 \cdot q^{1,25}$ is de variabele p uitgedrukt in de variabele q. In deze opdracht ga je de formule herleiden tot een vorm waarin q is uitgedrukt in p.

a Je ziet op het blaadje dat in stap 1 de linkerkant en de rechterkant verwisseld zijn.
Leg uit wat er in stap 2 is gebeurd.

b In stap 3 is de regel toegepast:

Uit $x^a = c$ volgt $x = c^{\frac{1}{a}}$.
Welke rekenregel is in stap 4 toegepast?

c Maak de herleiding af. Rond zo nodig af op twee decimalen.

$p = 10 \cdot q^{1,25}$	
$10 \cdot q^{1,25} = p$	1
$q^{1,25} = \frac{1}{10} p$	2
$q = \left(\frac{1}{10} p\right)^{\frac{1}{1,25}}$	3
$q = \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{1,25}} \cdot p^{\frac{1}{1,25}}$	4
$q \approx \ldots \cdot p^{\ldots}$	5

Theorie

Bij het herleiden van machtsformules waarbij je de ene variabele uit wilt drukken in de andere, gebruik je dezelfde regel als bij het oplossen van vergelijkingen:

$x^a = c$ geeft $(x^a)^{\frac{1}{a}} = c^{\frac{1}{a}}$ en hieruit volgt $x = c^{\frac{1}{a}}$.

Voorbeeld

Herleid $P = 0{,}7 \cdot Q^{2,5}$ tot de vorm $Q = a \cdot P^b$. Rond de waarden van a en b zo nodig af op twee decimalen.

Oplossing

$0{,}7Q^{2,5} = P$ geeft $Q^{2,5} = \frac{1}{0,7}P$ (ofwel $Q^{2,5} = 1{,}428\ldots P$)

$Q = \left(\frac{1}{0,7}P\right)^{\frac{1}{2,5}}$ ofwel $Q = \left(\frac{1}{0,7}P\right)^{0,4}$

$Q = \left(\frac{1}{0,7}\right)^{0,4} \cdot P^{0,4}$ en dus $Q \approx 1{,}15 \cdot P^{0,4}$

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O43

43 H

Herleid de formules tot de vorm $Q = a \cdot P^b$.
Rond de waarden van a en b zo nodig af op twee decimalen.

a $P = Q^{\frac{1}{4}}$

b $P = 25 \cdot Q^{3,5}$

c $P = 0{,}01 \cdot Q^{0{,}375}$

d $P = 0{,}75 \cdot Q^{1\frac{2}{7}}$

e $P = 1{,}46 \cdot Q^{-0{,}76}$

f $P = 1000 \cdot Q^{-3}$

44

Bij volwassen zoogdieren blijkt een verband te bestaan tussen het gemiddelde lichaamsgewicht L van een zoogdiersoort en het gemiddelde hersengewicht H van die soort, beide in kg. Dit verband kan bij benadering worden weergegeven met de formule $H = 0{,}012 \cdot L^{0{,}67}$.

a Giraffes hebben een gemiddeld hersengewicht van 750 gram.
Bereken het gemiddelde lichaamsgewicht van een giraffe.

b Beredeneer wat er gebeurt met H als het lichaamsgewicht verdubbelt.

c Herleid de gegeven formule tot de vorm $L = p \cdot H^q$. Rond de waarden van p en q af op twee decimalen.

45

Het draagvermogen van een vliegtuig is het maximale gewicht van het vliegtuig, inclusief personen en vracht, waarmee gevlogen mag worden. Dit draagvermogen hangt onder meer af van de oppervlakte van de vleugels.
Er geldt $Q = 0{,}1 \cdot G^{0{,}67}$, waarbij Q de oppervlakte van de vleugels in m^2 is en G het draagvermogen in kg.

a Bereken het vleugeloppervlak van een Boeing 747, waarvan het draagvermogen 360 000 kg bedraagt.

b De formule $Q = 0{,}1 \cdot G^{0{,}67}$ is ook te schrijven als $G = a \cdot Q^b$.
Bereken de waarden van a en b in twee decimalen.

c Een vliegtuig weegt 150 000 kg en heeft een vleugeloppervlak van 350 m^2.
Bereken hoeveel kg personen en vracht dit vliegtuig maximaal mag meenemen.

Uitdagende route → maak opdracht U9 en U10

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O41 Je gaat in deze opdracht het functievoorschrift $f(x) = \dfrac{8x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}{(2x^3)^2}$ herleiden tot de vorm $f(x) = b \cdot x^a$.

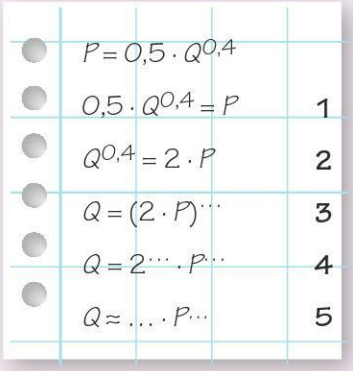
a Schrijf $\sqrt[3]{x}$ als macht van x.

b Neem in de teller de machten van x samen door de exponenten op te tellen.

c Vul in: de noemer $(2x^3)^2$ is gelijk aan $2^2 \cdot (x^3)^2$ en dus gelijk aan $\ldots x^{\cdots}$

d Controleer dat je het functievoorschrift nu geschreven hebt als $f(x) = \dfrac{8x^{2\frac{1}{3}}}{4x^6}$ en gebruik de rekenregel $\dfrac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$ om het functievoorschrift van f te herleiden tot de vorm $f(x) = b \cdot x^a$.

O43 Op het blaadje is een begin gemaakt met de herleiding van de formule $P = 0{,}5 \cdot Q^{0{,}4}$ tot de vorm $Q = a \cdot P^b$.



a In stap 1 zijn de linkerkant en de rechterkant verwisseld. Leg uit wat er in stap 2 gebeurd is.

b Gebruik in stap 3 de regel: 'Uit $x^a = c$ volgt $x = c^{\frac{1}{a}}$' om het juiste getal op de puntjes in te vullen.

c In stap 4 wordt de rekenregel $(p \cdot q)^c = p^c \cdot q^c$ gebruikt. Maak de herleiding tot de vorm $Q = a \cdot P^b$ verder af. Geef a in twee decimalen.

Herleid de formules tot de vorm $Q = a \cdot P^b$.
Rond de waarden van a en b zo nodig af op twee decimalen.

d $P = Q^{\frac{1}{3}}$

e $P = 10 \cdot Q^{2\frac{1}{2}}$

f $P = 0{,}25 \cdot Q^{0{,}125}$

g $P = \frac{2}{3} \cdot Q^{1\frac{3}{5}}$

h $P = 0{,}72 \cdot Q^{-1{,}4}$

i $P = 100 \cdot Q^{-5}$

Uitdagende opdrachten

U9 Los de stelsels vergelijkingen op.

a $\begin{cases} x^{1\frac{1}{2}} + y^2 = 12 \\ x^3 = y^4 \end{cases}$

b $\begin{cases} 2x^{\frac{4}{7}} - y^{\frac{1}{4}} = 0 \\ \sqrt{y} = x^{1\frac{3}{7}} \end{cases}$

U10 De formule $P = m \cdot Q^{1\frac{1}{3}}$ is te herleiden tot de vorm $Q = \frac{1}{8} \cdot P^b$.
Bereken de waarde van m en van b.

© Noordhoff Uitgevers bv

46 Schrijf zo eenvoudig mogelijk, zonder negatieve en gebroken exponent, met $p > 0$.

a $\dfrac{(2p)^5}{3p^3 \cdot p^4}$

b $\dfrac{8p^{-4}}{(4p)^2}$

c $\dfrac{p^{-5} \cdot p^0}{p^{0{,}25}}$

d $\dfrac{p^{\frac{4}{9}}}{p^{1\frac{1}{6}}}$

47 Schrijf zonder wortel en als één macht.

a $3\sqrt[3]{3}$

b $\dfrac{7}{\sqrt[9]{7^5}}$

c $\sqrt[5]{a^2} \cdot a\sqrt[3]{a^7}$

d $\dfrac{p\sqrt{p}}{\sqrt[9]{p^5}}$

48 Los de vergelijkingen op. Geef exacte antwoorden.

a $2x^{13} = 5$

b $4p^{\frac{2}{7}} = 5$

c $x^6 - 5x^{-3} = 0$

d $100 - 5k^4 = 60$

e $y\sqrt[3]{y} = 12$

f $x^5 = 5x^2\sqrt{x}$

49 Gegeven is de functie $f(x) = 4x^{-3} - ax^{-5}$.

a Laat zien dat je het functievoorschrift ook kunt schrijven als $f(x) = \dfrac{4x^2 - a}{x^5}$

b Bereken voor welke waarden van a de grafiek van f geen snijpunten met de x-as heeft.

50 In de tabel staat voor een aantal planeten in ons zonnestelsel de gemiddelde afstand R tot de zon en de omlooptijd T.
R is in miljoenen kilometers en T is in dagen.
Het verband tussen de afstand tot de zon R en de omlooptijd T wordt gegeven door de formule $T = c \cdot R^{1{,}5}$.

planeet	R	T
Jupiter	778	4329
Saturnus	1427	10753
Uranus	2870	30660
Neptunus	4497	60150

a Laat met een berekening zien dat je met de gegevens voor Jupiter uit de tabel hiernaast kunt afleiden dat $c \approx 0{,}2$.

b Met een berekening kun je nagaan dat je met de gegevens van de andere planeten ook de waarde $c \approx 0{,}2$ krijgt.
De omlooptijd van Mercurius is 88 dagen.
Bereken hoe ver Mercurius verwijderd is van de zon.

c Bereken de afstand van de aarde tot de zon.

d Herleid de gegeven formule tot de vorm $R = p \cdot T^q$. Geef de waarde van p en van q in twee decimalen.

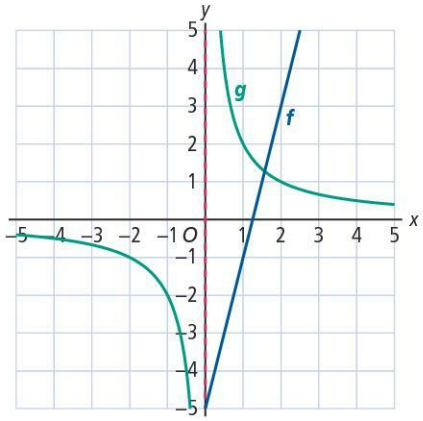
© Noordhoff Uitgevers bv

51 Mosselen bestaan voor een deel uit schelp en voor een deel uit vlees. Elk jaar wordt onderzoek gedaan naar het verband tussen de schelplengte L in mm en het gewicht van het vlees W in grammen. In de tabel zie je de resultaten voor het jaar 2006.

L in mm	30	40	50	60	70
W in grammen	0,12	0,28	0,55	0,95	1,51

Voor het verband tussen L en W geldt een formule van de vorm $W = a \cdot L^b$.
Zoek uit hoe groot de waarden van a en b zijn.
(*Ontleend aan het pilotexamen havo wiskunde B 2011 2e tijdvak*)

52 Gegeven zijn de grafieken van de functies
$f(x) = 4x - 5$ en $g(x) = \frac{2}{x}$



a Beredeneer dat de functie $P(x) = f(x) \cdot g(x)$ voor $x > 0$ alleen waarden kan aannemen die kleiner zijn dan 8.

b Als je in opdracht a de voorwaarde $x > 0$ weglaat, is dan de bewering ook nog waar? Licht je antwoord toe.

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Machten met een negatieve of gebroken exponent

Voor machten met een negatieve of gebroken exponent geldt:

$g^{-n} = \frac{1}{g^n}$

$g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$, met $g \geq 0$ en n een positief geheel getal

$g^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{g^m}$, met $g \geq 0$ en n en m positieve gehele getallen

Voorbeeld

$7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

$32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2$

$3^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{3^5} = \sqrt[6]{243}$

S1 Schrijf zonder negatieve en gebroken exponent en zonder exponent nul.

a $p^{-2} \cdot p^5 \cdot p^{-8}$

b $7x^{-3}$

c $4x^{\frac{4}{5}}$

d $4a^{-\frac{2}{3}}$

Theorie

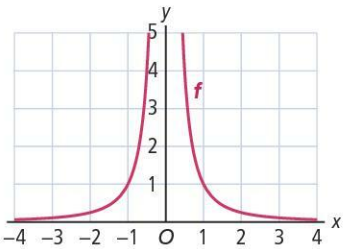
Machtsfuncties, gebroken functies en wortelfuncties

Functies van de vorm $f(x) = x^a$ heten machtsfuncties.
Machtsfuncties van de vorm $f(x) = x^{-n}$ met n een positief geheel getal kun je schrijven als $f(x) = \frac{1}{x^n}$

Deze machtsfuncties zijn voorbeelden van gebroken functies.

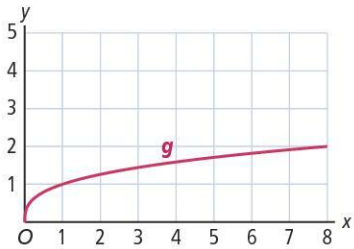
Machtsfuncties van de vorm $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ $(x \geq 0)$ met n een positief geheel getal zijn te schrijven als $f(x) = \sqrt[n]{x}$ en heten daarom ook wel wortelfuncties.

Voorbeeld



$f(x) = x^{-2}$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$



$g(x) = x^{\frac{1}{3}}$

$g(x) = \sqrt[3]{x}$

© Noordhoff Uitgevers bv

S2 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2x^3$, $g(x) = 4x^{\frac{1}{3}}$ en $h(x) = 5x^{-2}$.

a Welke van de drie functies bestaat alleen voor $x \geq 0$?

b Schrijf de functievoorschriften $g(x)$ en $h(x)$ zonder negatieve en gebroken exponent.

c De grafiek van h heeft twee asymptoten. Geef van elke asymptoot een vergelijking.

Vaardigheid

Je kunt rekenen met machten met een negatieve exponent.

Bij het rekenen met machten met een negatieve exponent kun je gebruik maken van de regel $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$

Voorbeeld

Herleid $\frac{12x^6 \cdot 9x^3}{(2x^3)^2 \cdot 6x^5}$ tot de vorm $a \cdot x^b$.

Oplossing

$$\frac{12x^6 \cdot 9x^3}{(2x^3)^2 \cdot 6x^5} = \frac{108x^9}{4x^6 \cdot 6x^5} = \frac{108x^9}{24x^{11}} = \frac{9x^{-2}}{2} = 4\tfrac{1}{2}x^{-2}$$

S3 Herleid tot de vorm $a \cdot x^b$.

a $\frac{18}{9x^5}$

b $\frac{6}{(x^4)^2}$

c $\frac{24x^3}{9x \cdot 4x^6}$

d $\frac{13}{x^{-9}}$

Vaardigheid

Je kunt rekenen met machten met een gebroken exponent.

Bij het rekenen met machten met een gebroken exponent kun je gebruik maken van de regel

$g^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{g^m}$, met $g \geq 0$ en n en m positieve gehele getallen

Voorbeeld

Herleid $a^{\frac{3}{4}} \cdot 4a^{\frac{1}{6}}$ tot een vorm zonder gebroken exponenten ($a > 0$).

Oplossing

$a^{\frac{3}{4}} \cdot 4a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{9}{12}} \cdot 4 \cdot a^{\frac{2}{12}} = 4 \cdot a^{\frac{9}{12}+\frac{2}{12}} = 4 \cdot a^{\frac{11}{12}} = 4 \cdot \sqrt[12]{a^{11}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

S4 Herleid tot een vorm zonder gebroken exponent ($a > 0$).

a $3^{\frac{4}{7}}$

b $a^{\frac{3}{4}}$

c $5^{1\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{2}{3}}$

d $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{2\frac{2}{5}}$

Vaardigheid

Je kunt een vergelijking met machten oplossen.

De vergelijking $x^n = c$ met n positief en geheel heeft:

- de oplossing $x = \sqrt[n]{c}$ als n oneven is,
- de oplossing $x = \sqrt[n]{c}$ of $x = -\sqrt[n]{c}$ als n even is en $c \geq 0$,
- geen oplossing als n even is en $c < 0$.

In de overige gevallen los je de vergelijking op met de regel:

$x^a = c$ geeft $(x^a)^{\frac{1}{a}} = c^{\frac{1}{a}}$ en hieruit volgt $x = c^{\frac{1}{a}}$.

Een vergelijking met twee machtsfuncties kun je oplossen door gebruik te maken van:

- Uit $A \cdot B = A \cdot C$ volgt $A = 0$ of $B = C$.
- Uit $A \cdot B = 0$ volgt $A = 0$ of $B = 0$. Daartoe herleid je de vergelijking eerst op nul en haal je een zo groot mogelijke macht van x buiten haakjes.

Voorbeeld 1

Los op $5x^{-4} = 30$.

Oplossing

$x^{-4} = 6$

$\frac{1}{x^4} = 6$

$x^4 = \frac{1}{6}$

$x = -\sqrt[4]{\frac{1}{6}}$ of $x = \sqrt[4]{\frac{1}{6}}$

Voorbeeld 2

Los op $x^{\frac{5}{7}} + 1 = 3$ (met $x \geq 0$).

Oplossing

$x^{\frac{5}{7}} = 2$

$\left(x^{\frac{5}{7}}\right)^{\frac{7}{5}} = 2^{\frac{7}{5}}$

$x = 2^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{2^7}$

$x = \sqrt[5]{128}$

Voorbeeld 3

Los op $4x^5 - x^2 = 0$.

Oplossing

$x^2(4x^3 - 1) = 0$

$x^2 = 0$ of $4x^3 - 1 = 0$
$x = 0$ of $4x^3 = 1$

$x = 0$ of $x^3 = \frac{1}{4}$

$x = 0$ of $x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

S5 Los op. Geef indien mogelijk een exact antwoord.

a $3x^4 + 1 = 19$

b $2x^{-3} = \frac{1}{32}$

c $x^{\frac{2}{5}} = 3$

d $18 + 5x^{1{,}37} = 63$

e $8x^2 - x^4 = 0$

f $9x\sqrt{x} = 3x^2$

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheid

Je kunt het functievoorschrift van een machtsfunctie vereenvoudigen.

Gebruik de rekenregels om het functievoorschrift te vereenvoudigen.

Voorbeeld

Herleid $f(x) = \dfrac{(2x^3)^4 \cdot \sqrt{x}}{32x^4 \cdot \sqrt[4]{x}}$ voor $x > 0$ tot de vorm $f(x) = b \cdot x^a$.

Oplossing

$f(x) = \dfrac{(2x^3)^4 \cdot \sqrt{x}}{32x^4 \cdot \sqrt[4]{x}}$ geeft $f(x) = \dfrac{16x^{12} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{32x^4 \cdot x^{\frac{1}{4}}}$

en dus $f(x) = \dfrac{16x^{12\frac{1}{2}}}{32x^{4\frac{1}{4}}}$ ofwel $f(x) = \frac{1}{2}x^{8\frac{1}{4}}$

S6 Herleid voor $x > 0$ tot de vorm $f(x) = b \cdot x^a$.

a $f(x) = 10x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[5]{x^2}$

b $f(x) = 4x^{-3} \cdot \sqrt{9x}$

Vaardigheid

Je kunt een machtsformule herleiden waarbij je de ene variabele uitdrukt in de andere.

Gebruik de regel:

$x^a = c$ geeft $(x^a)^{\frac{1}{a}} = c^{\frac{1}{a}}$ en hieruit volgt $x = c^{\frac{1}{a}}$.

Voorbeeld

Herleid $s = 1{,}25 \cdot r^{0{,}25}$ tot de vorm $r = a \cdot s^b$. Rond de waarden van a en b zo nodig af op twee decimalen.

Oplossing

$1{,}25 \cdot r^{0{,}25} = s$ geeft $r^{0{,}25} = \dfrac{1}{1{,}25}s$

$r = \left(\dfrac{1}{1{,}25}s\right)^{\frac{1}{0{,}25}}$ ofwel $r = \left(\dfrac{1}{1{,}25}s\right)^4$

$r = \left(\dfrac{1}{1{,}25}\right)^4 \cdot s^4$ en dus $r \approx 0{,}41 \cdot s^4$

S7 Herleid tot de vorm $r = a \cdot s^b$. Rond de waarden van a en b zo nodig af op twee decimalen.

a $s = 0{,}1 \cdot r^{0{,}125}$

b $s = 400 \cdot r^{-1\frac{1}{2}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

T1 Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk.

a $\dfrac{(2x)^3}{4x}$

b $\left(\dfrac{4x^3}{x^2}\right)^2$

c $\dfrac{6x^7}{3x^2}$

d $\dfrac{18x^2 \cdot x^6}{(3x^2)^3}$

T2 Herleid tot de vorm $B = p \cdot A^q$.

a $A = B^6$

b $A = 4 \cdot B^{-3}$

c $A = -7 \cdot B^{\frac{3}{5}}$

d $A = 5 \cdot B^{0{,}81}$

e $A = \sqrt[1{,}1]{B^2}$

f $A = 8\sqrt[7]{B^5}$

T3 Los op.

a $x^5 = -8$

b $3x^2 + 2x^5 = 0$

c $p^{\frac{1}{4}} = 10$

d $x^{-4} = -3$

e $3z^{\frac{2}{3}} = 12$

f $x^3 = 2x^4$

g $13 - 6 \cdot p^{1{,}25} = 1$

h $x^5 = 2x^2\sqrt{x}$

T4 Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x) = 3 \cdot x^{\frac{1}{5}}$ en $g(x) = -2 \cdot \sqrt[6]{x}$.

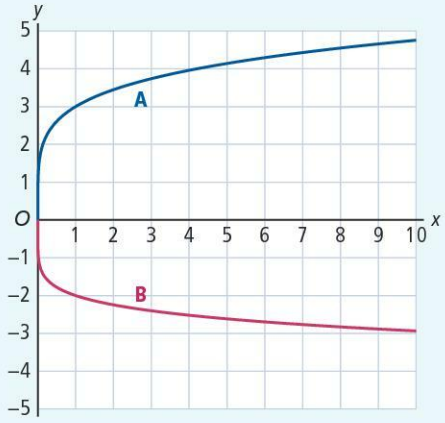
a Zoek uit welke grafiek bij f hoort en welke bij g.

b Hoeveel snijpunten heeft de lijn $y = x$ met grafiek A? En hoeveel met grafiek B?

c Bereken de coördinaten van de snijpunten van grafiek A met de lijn $y = x$.

d Gegeven is de functie $p(x) = f(x) \cdot g(x)$. Herleid het functievoorschrift van p tot $p(x) = a \cdot x^b$.

e Gegeven is verder de functie $h(x) = x^2 \cdot \sqrt[8]{x^7}$. Schrijf het functievoorschrift van $q(x) = g(x) \cdot h(x)$ in de vorm $q(x) = a \cdot x^b \cdot \sqrt[n]{x^m}$.



T5 Vereenvoudig tot één macht.

a $\dfrac{c^5 \cdot c^2}{c^4}$

b $\dfrac{(d^2)^6}{d^7}$

c $\dfrac{4w^5}{2w^3}$

d $\dfrac{2k \cdot k^{11}}{3k^7}$

© Noordhoff Uitgevers bv

T6 Vereenvoudig de uitdrukkingen (met $x > 0$) en schrijf ze zonder negatieve of gebroken exponent.

a $2x^{2\frac{1}{2}} \cdot 7x^{-4}$

b $x^{\frac{1}{5}}$

c $3x^{\frac{3}{4}}$

d $\dfrac{3x^{-1} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{x}}$

e $x^{-2\frac{1}{2}}$

f $2x^{\frac{2}{5}} \cdot x^{-1}$

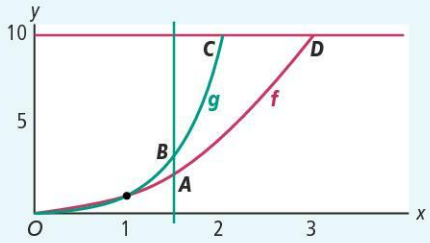
g $(3x^{\frac{1}{3}})^2$

h $\dfrac{6x^3 \cdot x^{-1\frac{1}{2}}}{2\sqrt{x}}$

T7 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = x^3$.
Bekijk deze functies op het interval $[0, \rightarrow\rangle$.

a De lijn $x = 1\frac{1}{2}$ snijdt de grafiek van f in punt A en de grafiek van g in punt B.
Bereken AB.

b De lijn $y = 10$ snijdt de grafiek van f in punt D en de grafiek van g in punt C.
Bereken CD. Geef je antwoord in twee decimalen.



T8 De hoeveelheid vloeistof die per seconde door een buis stroomt, hangt af van de straal van de buis. Maar ook het drukverschil en de vloeistofdikte hebben invloed. Bij een vast drukverschil geldt de formule $V = p \cdot R^4$.
In deze formule is V de hoeveelheid vloeistof in liters per seconde die door de buis stroomt en is R de straal van de buis in cm. In de formule is p een constante die afhangt van het drukverschil en de vloeistofdikte.
Bereken met welk percentage de hoeveelheid vloeistof toeneemt als de straal van de buis 20% groter wordt genomen.

T9 De loopsnelheid van allerlei dieren blijkt bij benadering te voldoen aan de formule $v = 0{,}78 \cdot s^{1{,}67} \cdot h^{-1{,}16}$.
In deze formule is s de stapgrootte in meters, is h de heuphoogte in meters en is v de snelheid in m/s.

a Bij mensen is de heuphoogte ongeveer 80 cm en bij rustig lopen is de stapgrootte ongeveer 90 cm.
Bereken de snelheid.

b Een trotse vader wandelt op een zondagmiddag met zijn dochter.
De heuphoogte van de vader is het dubbele van die van zijn dochter. De vader maakt stappen van 85 cm.
Hoe groot moeten de stappen zijn van de dochter om haar vader te kunnen bijhouden?

© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt rekenen met machten met een negatieve exponent.

E1 Vereenvoudig en schrijf het antwoord zonder negatieve exponent.

a a^{-4}

b $\frac{1}{b^3} \cdot b^{-4}$

c $\frac{12c^2}{18c^5}$

d $\frac{d^4 \cdot d^{-10}}{d^{-3}}$

e $\frac{e \cdot (e^2)^{-2}}{e^0}$

f $\frac{3x^4 \cdot 2x^{-4}}{10x^{-5}}$

Je kunt rekenen met machten met een gebroken exponent.

E2 Vereenvoudig en schrijf het antwoord zonder negatieve en gebroken exponent.

a $p^{\frac{4}{11}}$

b $\frac{4x^{-2} \cdot x^{\frac{2}{3}}}{8x^2}$

c $m^{-6\frac{1}{2}}$

d $\frac{(5a^{-3})^2}{3a^2\sqrt{a}}$

Je kunt een vergelijking met machten oplossen.

E3 Los op. Geef indien mogelijk een exact antwoord.

a $2p^4 = 11$

b $3t^{-2} + 4 = 9$

c $25\sqrt{r} = 50r^2$

d $x^{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$

e $7q^{0,4} = 4$

f $x^{-0,2} = \frac{1}{5}$

g $18x^5 = 6x^3$

h $3x^{\frac{2}{7}} - 4\frac{1}{2}x = 0$

Je kunt het functievoorschrift van een machtsfunctie vereenvoudigen.

E4 Herleid voor $x > 0$ de functievoorschriften tot de vorm $f(x) = b \cdot x^a$.

a $f(x) = \frac{16x^8 \cdot \sqrt[4]{x}}{(2x)^2}$

b $f(x) = x^{-3} \cdot (x^5)^2$

c $f(x) = \frac{\sqrt{x} \cdot x^{-2}}{x^{-\frac{2}{3}}}$

d $f(x) = 2x^4 \cdot 3x \cdot \sqrt[3]{x^2}$

Je kunt een machtsformule herleiden waarbij je de ene variabele uitdrukt in de andere.

E5 Herleid tot de vorm $K = a \cdot N^b$. Geef de waarden van a en b zo nodig in twee decimalen.

a $N = 0{,}25 \cdot K^5$

b $N = \frac{1}{2} \cdot K^{\frac{1}{3}}$

c $N = 8 \cdot K^{2,5}$

d $N = 1{,}2 \cdot K^{-0,3}$

e $N = 2{,}8 \cdot K^{1,67}$

f $N = 0{,}01 \cdot K^{-1\frac{1}{2}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

E6 Gegeven zijn de grafieken van $f(x) = 6x^{-3}$ en $g(x) = 4x^{-2}$.

a Welke lijnen zijn asymptoten van de grafiek van f?

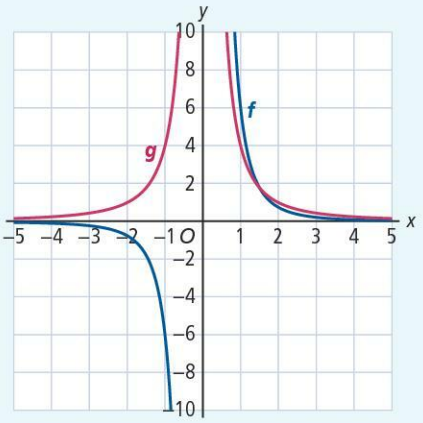
b Is de grafiek van f lijnsymmetrisch of puntsymmetrisch?

c Is de grafiek van g lijnsymmetrisch of puntsymmetrisch?

d Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijn $y = -18$ met de grafiek van f.

e Bereken de coördinaten van de snijpunten van de lijn $y = \frac{1}{9}$ met de grafiek van g.

f Los op $f(x) = g(x)$.

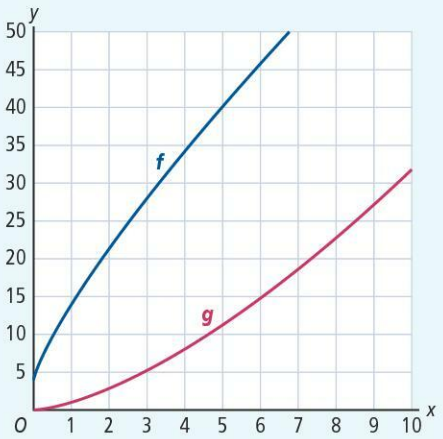


E7 Het materiaal waar zwemkleding van is gemaakt heeft invloed op de weerstand ten opzichte van het water. Voor de zwempakken A en B gelden de formules $I_A = 23{,}47 \cdot v^{2{,}28}$ en $I_B = 21{,}83 \cdot v^{2{,}21}$. Hierin is I de inspanning in Newton en v de snelheid in meter per seconde.

a Pieter haalt met zwempak A een snelheid van 1,65 m/s. Bereken welke snelheid hij met dezelfde inspanning kan halen als hij zwempak B draagt.

b De verhouding $K = \frac{I_B}{I_A}$ geeft aan hoeveel keer zo groot de vereiste inspanning is wanneer je in zwempak B zwemt ten opzichte van zwempak A. Deze formule is te herleiden tot de vorm $K = p \cdot v^q$.
Geef deze herleiding en bereken p en q in twee decimalen.

E8 Gegeven zijn grafieken van de functies $f(x) = 10x^{0{,}8} + 4$ en $g(x) = x\sqrt{x}$.
Buiten de tekening snijden de grafieken elkaar in een punt S.
Onderzoek of punt S boven of onder de lijn $y = 100$ ligt.



© Noordhoff Uitgevers bv

Rekenen met Diophantus

Voor de Griekse wiskundigen zoals Euclides (ca 400 v. Chr.) was de wiskunde voornamelijk meetkundig georiënteerd: getallen waren lengten van lijnstukken, tweede machten oppervlakten van vierkanten – vandaar de naam kwadraat (= vierkant) en derde machten inhouden van kubussen. Negatieve getallen waren onbekend en de ons vertrouwde symbolen zoals +, – en = werden pas in de 16e eeuw algemeen gebruikt. Vóór die tijd werden er gewoon (Latijnse) woorden gebruikt, zoals *plus* en *minus* en *est*.
Diophantus van Alexandrië (ca 250 na Chr.) is de eerste Griekse wiskundige die zich bezig hield met vergelijkingen zonder daarbij aan meetkunde te denken. In zijn werk *Arithmetica* voert hij als eerste symbolen in voor een variabele en de machten van een variabele.

DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO
MEZIRIACO SEBVSIANO, V. C.
LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus HIERONYMI DROVART, via Iacobæa, sub Scuto Solari.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Hoe loste Diophantus een vergelijking op?

Diophantus geeft geen algemene bewijzen. Hij formuleert een vraagstuk en geeft dan een voorbeeld van een aanpak. Eén van de beroemdste vraagstukken uit de Arithmetica luidt:
Verdeel een kwadraat in twee kwadraten.
(Wij zouden zeggen: Vind voor gegeven z de oplossing van $x^2 + y^2 = z^2$.)
Diophantus lost het vraagstuk alleen op voor $z = 4$:
Op onze manier geschreven gaat dat zo:
$x^2 + y^2 = 16$

- Eén van de gezochte kwadraten is: x^2.
- $y^2 = 16 - x^2$ is ook een kwadraat.
- Neem een kwadraat van de vorm $(mx - 4)^2$, bijvoorbeeld $y^2 = (2x - 4)^2$.
- $(2x - 4)^2 = 16 - x^2$ geeft $4x^2 - 16x = -x^2$ ofwel $x(5x - 16) = 0$.
- $x = \frac{16}{5}$ en $y = 2x - 4 = \frac{12}{5}$

Over Diophantus zelf is weinig bekend. In een puzzelboek uit de 5e eeuw staat dit raadsel, waaruit je kunt opmaken hoe oud hij werd.

Een zesde deel van zijn leven was hij een jongen. Na nog een twaalfde deel kreeg hij een baard. Na weer een zevende deel trouwde hij en in het vijfde jaar kreeg hij een zoon. Helaas stierf het kind toen hij half zo oud was als zijn vader werd. Na vier jaar van verdriet bereikte hij zelf het eind van zijn leven.

Opdracht

Hoe oud werd Diophantus?

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheden 1

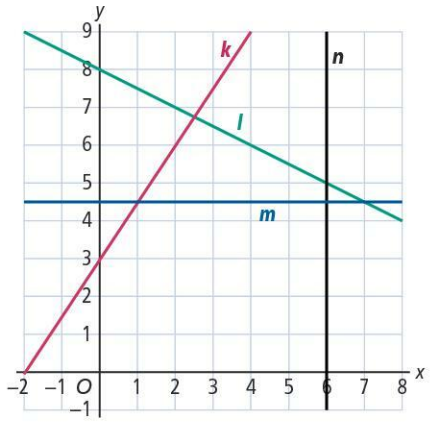
In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Lineaire vergelijkingen opstellen
- Rekenen met wortels
- Rekenen met breuken

Lineaire vergelijkingen opstellen

1 Stel een vergelijking op van de lijn in de volgende gevallen.
- **a** Lijn l gaat door $(0, 8)$ en heeft richtingscoëfficiënt -2.
- **b** Lijn m gaat door $(0, 3)$ en $(1, 5)$.
- **c** Lijn n gaat door de oorsprong en $(8, 96)$.

2 In een assenstelsel zijn de vier lijnen k, l, m en n getekend.
- **a** Geef de richtingscoëfficiënt van m en stel een vergelijking van m op.
- **b** Stel een vergelijking van n op.
- **c** Stel een vergelijking van de lijnen k en l op.



Theorie

Bij de lineaire formule $y = ax + b$ is de bijbehorende grafiek een rechte lijn. Bij een horizontale lijn is $a = 0$ en is de vergelijking $y = b$. Bij een verticale lijn is de vergelijking $x = c$.

3 Lijn k gaat door de punten $A(13, 14)$ en $B(19, 41)$.
- **a** Leg uit dat de richtingscoëfficiënt van k gelijk is aan $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
- **b** Bereken de richtingscoëfficiënt van k.
- **c** Bereken de richtingscoëfficiënt van de lijn m door de punten $(-2, 12)$ en $(14, 36)$.

4 Bereken de richtingscoëfficiënt van de lijn door de twee gegeven punten.
- **a** $(1{,}13\,;\,17)$ en $(1{,}13\,;\,119)$
- **b** $\left(57\frac{2}{373}, 9\right)$ en $\left(7\frac{3}{25}, 9\right)$
- **c** $(0, 0)$ en $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$
- **d** $\left(2\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right)$ en $(0, 1)$

5 Lijn k met richtingscoëfficiënt $4\frac{1}{2}$ gaat door het punt $R(19, 41)$. Op het blaadje zie je hoe het startgetal van k berekend wordt.
Maak de berekening af en stel een vergelijking van k op.

De vergelijking is
$y = 4\frac{1}{2}x + b$
met b als startgetal.
Lijn k gaat door $(19, 41)$,
dus als je $x = 19$ invult,
moet er $y = 41$ uitkomen.
$41 = 4\frac{1}{2} \cdot 19 + b$
$41 = \ldots + b$
$b = \ldots$

6 Stel een vergelijking op van de lijn door de twee punten.
- **a** $(3, 10)$ en $(17, 52)$
- **b** $(-2, 8)$ en $(2, 10)$
- **c** $(25, 89)$ en $(21, 29)$
- **d** $(10, 4)$ en $(10, -1)$
- **e** $(3, 3)$ en $(8, 3)$
- **f** $(0, 7)$ en $(-2, 35)$

© Noordhoff Uitgevers bv

Rekenen met wortels

7 Bereken zonder rekenmachine.

a $\sqrt{121}$ **d** $\sqrt{225}$

b $\sqrt{\frac{1}{4}}$ **e** $\sqrt{169}$

c $\sqrt{0{,}36}$ **f** $\sqrt{\frac{1}{100}}$

Theorie

Voor het rekenen met wortels kun je gebruik maken van de volgende rekenregels:

- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (a \geq 0, b \geq 0)$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geq 0, b > 0)$

Voorbeeld 1

Bereken.

$(2\sqrt{3})^2 = 4 \cdot 3 = 12$

$5\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{7} = 30\sqrt{14}$

Voorbeeld 2

Schrijf als één wortel.

$3\sqrt{5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{45}$

$\frac{1}{2}\sqrt{76} = \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{76} = \sqrt{19}$

8 Bereken.

a $(6\sqrt{2})^2$ **c** $5\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{12}$

b $4\sqrt{7} \cdot 8\sqrt{3}$ **d** $(7\sqrt{3})^2$

9 Schrijf als één wortel.

a $7\sqrt{2} = \sqrt{\ldots} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{\ldots}$ **c** $2\frac{1}{2}\sqrt{8} = \sqrt{\ldots}$

b $9\sqrt{5} = \sqrt{\ldots}$ **d** $\frac{1}{2}\sqrt{32} = \sqrt{\ldots}$

10 Met behulp van de rekenregels kun je ook wortels vereenvoudigen. Zo is $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.
Vereenvoudig op dezelfde manier.

a $\sqrt{72} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = \ldots$ **f** $\sqrt{125}$

b $\sqrt{54} = \sqrt{\ldots} \cdot \sqrt{\ldots} = \ldots$ **g** $3\sqrt{24}$

c $\sqrt{200}$ **h** $2\sqrt{45}$

d $\sqrt{75}$ **i** $8\sqrt{63}$

e $\sqrt{98}$ **j** $80\sqrt{80}$

Hiernaast zie je het begin van de lijst kwadraten.

Bij het vereenvoudigen van wortels maak je vaak gebruik van deze lijst.

$1^2 = 1$
$2^2 = 4$
$3^2 = 9$
$4^2 = 16$
$5^2 = 25$
$6^2 = 36$
$7^2 = 49$
$8^2 = 64$

Theorie

Optellen en aftrekken van wortels kan alleen maar als de wortels gelijksoortig zijn. Soms zie je na het vereenvoudigen van wortels dat ze gelijksoortig zijn.

Voorbeeld

Schrijf korter $\sqrt{48} - \sqrt{27}$.

Oplossing

$\sqrt{48} - \sqrt{27} = 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$

© Noordhoff Uitgevers bv

11 Schrijf korter.

a $\sqrt{32} - \sqrt{2}$

b $4\sqrt{3} + \sqrt{27}$

c $\sqrt{45} + \sqrt{20}$

d $\sqrt{180} - 2\sqrt{80}$

e $8\sqrt{6} + \sqrt{54}$

f $18\sqrt{2} - 2\sqrt{18}$

12 **a** Herleid de formule $y = \sqrt{4x} + \sqrt{9x}$ tot $y = 5\sqrt{x}$.

b Herleid op dezelfde manier.

A $y = \sqrt{16x} + \sqrt{169x}$

B $y = \sqrt{18x} + \sqrt{50x}$

C $y = \sqrt{100x} - \sqrt{16x}$

D $y = \sqrt{\frac{1}{4}x} + \sqrt{25x}$

13 Bekijk het voorbeeld. De eerste opdracht is om $\sqrt{\frac{3}{5}}$ te herleiden tot een wortelvorm waar onder het wortelteken een geheel getal staat.
Waarom is het dan handig om de teller en de noemer van de breuk onder het wortelteken beide te vermenigvuldigen met 5?

Voorbeeld

1 Laat zien dat $\sqrt{\frac{3}{5}}$ gelijk is aan $\frac{1}{5}\sqrt{15}$.

Oplossing

$\sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{5}} = \sqrt{\frac{15}{25}} =$

$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{15}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{15}$

2 Laat zien dat $\frac{30}{\sqrt{5}}$ gelijk is aan $6\sqrt{5}$.

Oplossing

$\frac{30}{\sqrt{5}} = \frac{30}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{30\sqrt{5}}{5} = 6\sqrt{5}$

14 Herleid. Laat geen breuk onder het wortelteken staan en ook geen wortelvormen in de noemer.

a $\sqrt{\frac{5}{7}} = \sqrt{\frac{5}{7} \cdot \frac{\dots}{\dots}} =$

b $\sqrt{\frac{3}{8}}$

c $\frac{18}{\sqrt{3}} = \frac{18}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} =$

d $\frac{10}{\sqrt{6}}$

e $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$

f $\frac{24}{3\sqrt{2}}$

Rekenen met breuken

15 Bereken en schrijf het antwoord als één breuk.

a $\frac{3}{4} + \frac{7}{8}$

b $\frac{5}{9} - \frac{2}{4}$

c $\frac{11}{9} - \frac{1}{3}$

d $3 - 1\frac{6}{7}$

e $2\frac{3}{7} + 1\frac{1}{2}$

f $-1\frac{5}{8} + 2\frac{3}{4}$

Breuken optellen:

$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \dots$

$\frac{1}{7} + \frac{3}{5} = \frac{5}{35} + \frac{21}{35} = \dots$ want

$\frac{1}{7} = \frac{1 \times 5}{7 \times 5}$ en $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 7}{5 \times 7}$

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Breuken kun je bij elkaar optellen en van elkaar aftrekken als ze gelijknamig zijn. Bij ongelijknamige breuken maak je eerst de noemers gelijk.
Breuken kun je met elkaar vermenigvuldigen door de tellers met elkaar te vermenigvuldigen en de noemers met elkaar te vermenigvuldigen.
Bij het vereenvoudigen van breuken kun je de teller en de noemer met hetzelfde getal vermenigvuldigen of door hetzelfde getal delen.

Voorbeeld

Optellen

$\frac{3}{9}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$

$\frac{2}{p}+\frac{3}{p}=\frac{5}{p}$

Vermenigvuldigen

$-\frac{3}{8}\times\frac{9}{2}=-\frac{3\times 9}{8\times 2}=-\frac{27}{16}$

$\frac{2}{p}\times\frac{3}{p}=\frac{2\times 3}{p\times p}=\frac{6}{p^2}$

Vereenvoudigen

$\frac{45}{72}=\frac{5\times 9}{8\times 9}=\frac{5}{8}$

$\frac{3pq}{p^2}=\frac{3\times p\times q}{p\times p}=\frac{3q}{p}$

16 Bereken en schrijf het antwoord als één breuk. Vereenvoudig indien mogelijk het antwoord.

a $\frac{3}{8}+\frac{5}{9}$

b $\frac{7}{9}-\frac{2}{5}$

c $\frac{8}{x}+\frac{4}{x}$

d $\frac{6}{17}\times\frac{-3}{4}$

e $\frac{2}{p}\times\frac{5}{p}$

f $\frac{a}{6}\times\frac{5}{a}$

g $\frac{3p}{13}\times\frac{2p}{-3}$

h $\frac{3a}{2b}\times\frac{4b}{7a}$

17 Peter gaat de breuken $\frac{5}{24}$ en $\frac{7}{36}$ bij elkaar optellen. Hij maakt de breuken gelijknamig door de noemers te vermenigvuldigen. Hiernaast zie je zijn berekening. Na het optellen moet de breuk nog vereenvoudigd worden.
Hoe kun je de breuken $\frac{5}{24}$ en $\frac{7}{36}$ gelijknamig maken waarbij je niet de noemers 24 en 36 met elkaar vermenigvuldigt?

Peter

$\frac{5}{24}+\frac{7}{36}=\frac{180}{864}+\frac{168}{864}=$

$\frac{348}{864}=\frac{174}{432}=\frac{87}{216}=\frac{29}{72}$

18 In het voorbeeld zie je hoe je twee breuken met variabelen er in gelijknamig maakt om ze te kunnen optellen.
Bereken op dezelfde manier.

a $\frac{8}{q}+\frac{4}{5q}$

b $\frac{12}{8a}-\frac{1}{2a}$

c $\frac{6}{4a}+\frac{5}{7a}$

d $\frac{3}{7p}+\frac{q}{p}$

e $\frac{8}{a}-\frac{7}{a^2}$

f $\frac{2}{3a^2}+\frac{4}{7a}$

Voorbeeld

$\frac{5}{3a}+\frac{7}{2a}=\frac{5\times 2}{3a\times 2}+\frac{7\times 3}{2a\times 3}=$

$\frac{10}{6a}+\frac{21}{6a}=\frac{31}{6a}$

© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

De grafische rekenmachine

SE CE K

In dit hoofdstuk

In de bovenbouw werk je bij het vak wiskunde met een grafische rekenmachine. In dit hoofdstukje vind je een algemene introductie voor het werken met een grafische rekenmachine. De informatie voor het werken met een grafische rekenmachine van een specifiek merk vind je online.

Rond alle antwoorden van de opdrachten in dit hoofdstukje af op twee decimalen.

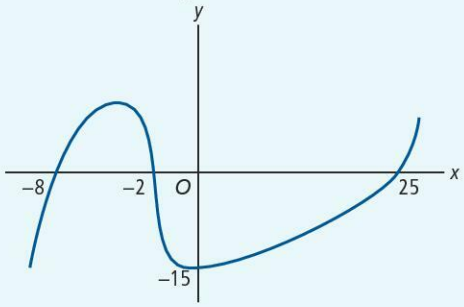
Grafieken op de rekenmachine

1 Voer de formule $y = x^2 - 4x$ in op je rekenmachine.
Laat de grafiek op je scherm verschijnen. Maak een schets.

Theorie

Je kunt een grafische rekenmachine of een computerprogramma een grafiek laten tekenen. Dat heet plotten.
Schetsen houdt in dat je het verloop van de grafiek en de snijpunten met de assen aangeeft in je tekening.
Tekenen houdt in dat je nauwkeurig werkt. Het is dan nodig om méér punten van de grafiek te bepalen, bijvoorbeeld met een tabel. Je moet alle berekende punten van de grafiek nauwkeurig in het assenstelsel aangeven.

Schets van een grafiek

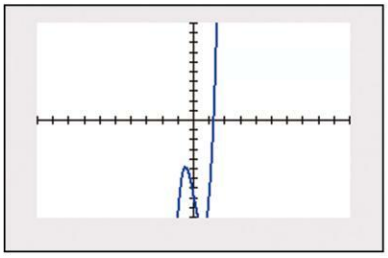


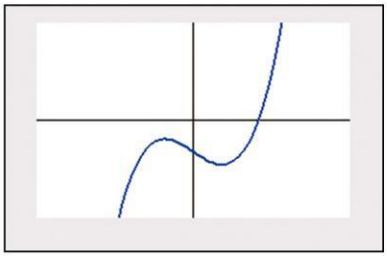
2 Gegeven is de formule $y = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$.
Plot de grafiek bij deze formule. Neem de horizontale as van -4 tot 5 en de verticale as van -20 tot 15. Schets de grafiek.

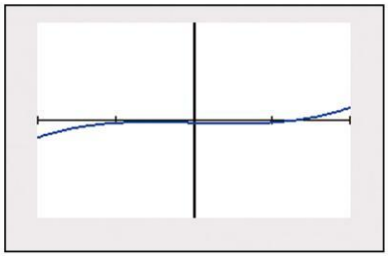
3 De grafiek bij de formule $y = 10x^3 - 9x - 8$ is drie keer geplot.

a In welke plot is de grafiek volgens jou het beste in beeld?

b In de tweede plot is de bovenste helft van het venster vrijwel leeg. Om dat te voorkomen, kun je de maximale y-waarde veranderen.
Moet deze waarde hoger of lager worden?







© Noordhoff Uitgevers bv

Vensterinstelling en tabellen maken

4 Gegeven is de formule $y = -\frac{1}{2}x^2 + 40x$.

a Geert maakt een tabel bij deze formule die begint bij $x = 0$ met stapgrootte 1.
Waarom is dit geen verstandige keuze?

b Geef een betere keuze voor de startwaarde en de stapgrootte.

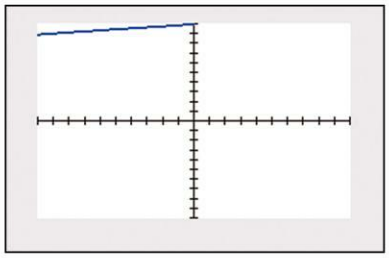
c Teken een assenstelsel en gebruik de gegevens van de tabel om de grafiek bij de formule te tekenen.

Door het veranderen van de vensterinstelling kun je de grafiek beter in beeld krijgen. Daarbij is het vaak handig eerst met je rekenmachine een tabel te maken.

5 De grafiek bij de formule $y = \sqrt{2x + 100}$ is geplot.

a Wat is de kleinste waarde van x die je bij deze formule kunt invullen?

b Welke instelling van het venster kies je om de grafiek bij de formule goed in beeld te krijgen?



6 De hoogte van een afgeschoten projectiel kun je berekenen met de formule $h = 15t - 4{,}9t^2$. Hierbij is h de hoogte in meters en is t de tijd in seconden.

a Waarom hoef je in dit geval voor de instelling van je venster alleen maar waarden groter dan of gelijk aan 0 te kiezen?

b Welke waarden kunnen h en t ongeveer aannemen?
Maak zo nodig eerst een tabel.

c Plot en schets een grafiek bij de hoogte van het projectiel.

Theorie

Je moet de **vensterinstelling** van je rekenmachine zo kiezen, dat je een goed beeld krijgt van de grafiek. Je let daarbij op de volgende punten:

- Van enkele formules ken je de vorm van de bijbehorende grafiek. Kies waarden van x en y waarvoor je die vorm goed in beeld krijgt.
- Bij veel formules is het maken van een tabel een goed hulpmiddel om te ontdekken welke uitkomsten kunnen voorkomen.
- Als de variabelen een praktische betekenis hebben, zoals tijd of hoogte, neem je alleen waarden waarvoor de variabelen zinvol zijn.

De standaard vensterinstelling is:
Xmin = −10
Xmax = 10
Ymin = −10
Ymax = 10

© Noordhoff Uitgevers bv

7 Geef bij deze formules een vensterinstelling waarbij de plot een goed beeld van de grafiek geeft.

a $y = (x + 12)(x - 10)$

b $y = 100 + \frac{3}{x}$

c $y = 20 \cdot 1{,}05^x$

d $y = \frac{5}{x + 2}$

Toppen en snijpunten

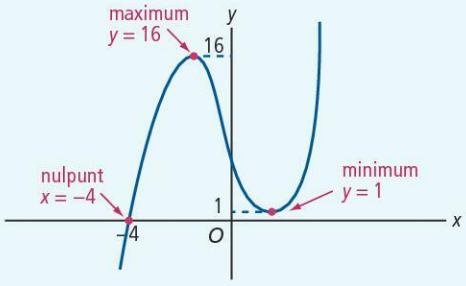
8 Gegeven is de formule $y = x^3 - 6x^2 - x - 5$.

a Plot de grafiek. Neem de verticale as en de horizontale as van -10 tot 10. Pas je instellingen daarna aan totdat je een goed beeld van de grafiek krijgt.
Bij welke instellingen is dat het geval?

b Zoek uit hoe je op jouw rekenmachine de coördinaten van de toppen en de snijpunten met beide assen kunt vinden en geef de coördinaten van deze punten.

Theorie

Een **nulpunt** van een formule is de waarde van x waarbij de uitkomst van de formule gelijk is aan 0. Bij een nulpunt snijdt de grafiek bij de formule de x-as.
De formule waarvan hiernaast de grafiek staat heeft één nulpunt. De grafiek heeft twee toppen. De y-coördinaat van de top is een maximum of een minimum van de formule.
Maximum en minimum heten ook wel **extreme waarden**.



9 Gegeven is de formule $y = -\frac{1}{2}x^4 + 5x - 1$.

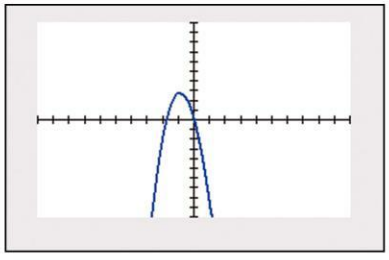
a Bereken de nulpunten van deze formule.

b Bereken de coördinaten van de top van de grafiek.

10 Susan heeft de grafiek bij de formule $y = 0{,}2x^3 - 3x^2 - 6x$ geplot en denkt dat er twee nulpunten zijn. Carl beweert dat er drie nulpunten zijn.

a Welke aanwijzing zal Carl aan Susan geven zodat zij ook het derde nulpunt kan vinden?

b Bereken met je rekenmachine de drie nulpunten. Schrijf op hoe je de rekenmachine hebt gebruikt om de drie nulpunten te vinden.



© Noordhoff Uitgevers bv

Vergelijkingen oplossen

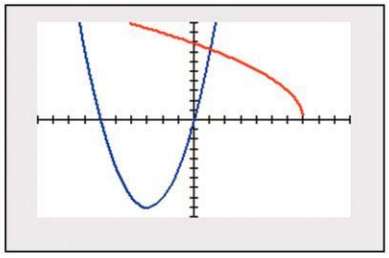
De vergelijking $x^2 + 6x = 3\sqrt{-x + 7}$ kun je niet oplossen met algebra.
Je kunt de oplossingen wel vinden door met je rekenmachine de coördinaten te berekenen van de snijpunten van de grafieken van de formules $y = x^2 + 6x$ en $y = 3\sqrt{-x + 7}$.
De x-coördinaten van de snijpunten zijn de oplossingen van de vergelijking.

11 De grafieken van $y = x^2 + 6x$ en $y = 3\sqrt{-x + 7}$ zijn geplot.

a Bij de standaardinstelling van je venster krijg je niet alle snijpunten van de grafieken in beeld.
Geef een vensterinstelling waarbij dat wel het geval is.

b Los de vergelijking $x^2 + 6x = 3\sqrt{-x + 7}$ met je rekenmachine op.

c Los ook op: $x^2 + 6x < 3\sqrt{-x + 7}$.



Theorie

Als je de rekenmachine gebruikt om bijvoorbeeld nulpunten te bepalen of om vergelijkingen op te lossen, doe je verslag van de manier waarop je de rekenmachine hebt gebruikt.
Daarbij moet je de volgende onderdelen opnemen: Invoer, Vensterinstelling en de gebruikte Opties.

Voorbeeld 1

Bereken de coördinaten van de toppen van de grafiek van $y = x^4 - 5x^2 - 3x + 2$.

Oplossing
Invoer: $y_1 = x^4 - 5x^2 - 3x + 2$
Venster: $-10 \le x \le 10$, $-10 \le y \le 10$
Opties: minimum en maximum
De toppen zijn $(-1{,}40;\ 0{,}24)$, $(1{,}71;\ -9{,}20)$ en $(-0{,}31;\ 2{,}46)$.

Voorbeeld 2

Lop op $x^2 + 12x = 2\sqrt{x + 27}$.

Oplossing
Invoer: $y_1 = x^2 + 12x$ en $y_2 = 2\sqrt{x + 27}$
Venster: $-30 \le x \le 10$, $-40 \le y \le 20$
Optie: snijpunten
De oplossingen zijn $x = -12{,}60$ en $x = 0{,}82$.

12 Bereken met de rekenmachine voor elke formule de nulpunten en de coördinaten van de toppen van de grafiek. Doe verslag van de manier waarop je de rekenmachine hebt gebruikt.

a $y = x^2 + 4x - 7$

b $y = 200x^3 - 50x$

c $y = 1000 - 11 \cdot 1{,}43^x$

d $y = 19 - 3\sqrt{x}$

© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

Functies en grafieken 3

SE CE K

In dit hoofdstuk

In klas 3 heb je kennis gemaakt met verschillende soorten functies, zoals lineaire functies, kwadratische functies en wortelfuncties. Daarbij heb je gezien welke waarden je bij een functie kunt invullen en welke uitkomsten er mogelijk zijn.

In dit hoofdstuk leer je nog meer soorten functies kennen en ga je ontdekken hoe het functievoorschrift verandert als je een grafiek verschuift. Ook wordt er aandacht besteed aan het oplossen van vergelijkingen. Dat mag in sommige gevallen met de rekenmachine, in andere situaties moet je een exacte oplossing geven met behulp van algebra.

De kennis van dit hoofdstuk heb je nodig bij vrijwel alle hoofdstukken over functies, vergelijkingen en grafieken.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

• *Probleemoplossen en analytisch denken*	opdracht 46
• *Modelleren en algebraïseren*	intro paragraaf 3.5
• *Ordenen en structureren*	opdracht 9
• *Logisch redeneren en bewijzen*	opdracht 17

© Noordhoff Uitgevers bv

V1 Gegeven zijn de functies $f(x) = 4 - 3x$ en $g(x) = 3x$.

a Geef voor beide functies het startgetal en de richtingscoëfficiënt.

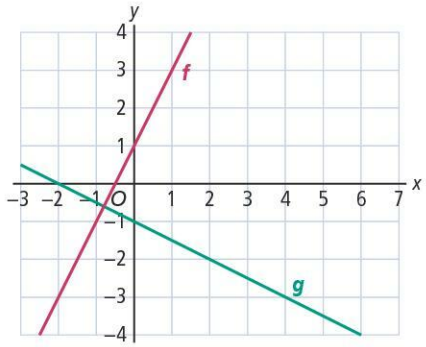
b Van één van de twee functies is de bijbehorende tabel een verhoudingstabel.
Bij welke functie is dat het geval?

c Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van de functies f en g.

V2 De grafieken van twee lineaire functies f en g zijn getekend.

a Stel een functievoorschrift op voor f.

b Stel een functievoorschrift op voor g.



V3 Gegeven is de functie $g(x) = 0{,}5(x - 4)(x + 2)$.

a In welke punten snijdt de grafiek van g de x-as?

b Hoe noem je de grafiek van g?

c Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van g.

V4 Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 3x + 10$.

a Los op $f(x) = 0$.

b Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van f.

c Bereken ook de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f en de lijn met vergelijking $y = 6$.

V5 Gegeven is de functie $h(x) = \frac{5}{x} + 1$.

a Plot en schets de grafiek van h voor $-20 \leq x \leq 20$.

b Vul de tabel in.

x	-10	-5	-1	0	1	5	10
$h(x)$	…	…	…	…	…	…	…

c Bereken $h(-0{,}0001)$ en $h(0{,}0001)$.

d Hoe ziet de grafiek er uit in de buurt van $x = 0$?

e En hoe ziet de grafiek er uit als x steeds verder van 0 wordt gekozen?

© Noordhoff Uitgevers bv

V6 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{9 - x}$.

a Bij welke waarden van x bestaat $f(x)$?

b Bereken de coördinaten van het randpunt van de grafiek van f.

c Welke getallen zijn er als functiewaarde mogelijk?

V7 Gegeven is de functie $f(x) = 1 + \sqrt{3x - 1}$.

a Laat zien dat $f(0{,}3)$ niet bestaat.

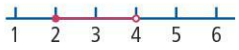
b Onderzoek of $f(0{,}33)$ bestaat.

c Bereken de coördinaten van het randpunt van de grafiek van f door de vergelijking $3x - 1 = 0$ op te lossen. Geef de exacte coördinaten.

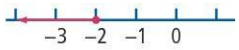
Theorie

Op de getallenlijn in het voorbeeld zijn de getallen vanaf 2 tot 4 aangegeven. Zo'n stuk van de getallenlijn heet een interval.
Het getal 2 hoort er wel bij (dicht rondje), het getal 4 niet (open rondje). Dit noteer je kortweg als $[2, 4\rangle$.
De notatie $[2, 4\rangle$ heet de intervalnotatie.
De *rechte* haak betekent dat de grenswaarde meedoet, een *puntige* haak wil zeggen dat de grenswaarde niet meedoet.
Als er aan één zijde geen grens is, geef je dit aan met een pijl en een puntige haak.

Voorbeeld 1

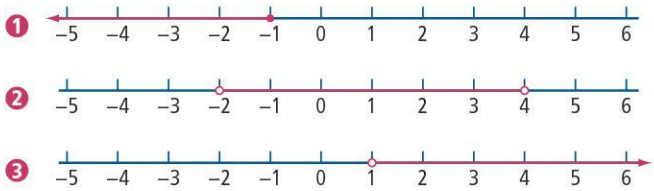
ongelijkheid	$2 \leq x < 4$
interval	
intervalnotatie	$[2, 4\rangle$

Voorbeeld 2

ongelijkheid	$x \leq -2$
interval	
intervalnotatie	$\langle \leftarrow, -2]$

V8 **a** Op de getallenlijnen zijn drie intervallen aangegeven.
Bij welke van onderstaande ongelijkheden horen ze?

A $x \geq -1$ D $-2 \leq x \leq 4$
B $x \leq -1$ E $x \geq 1$
C $x > 1$ F $-2 < x < 4$



b Noteer de intervallen die op de getallenlijnen zijn aangegeven in de intervalnotatie.

V9 Vul de tabel in.

ongelijkheid	$-2 \leq x < 6$			
interval				
intervalnotatie			$\langle \leftarrow, 0\rangle$	

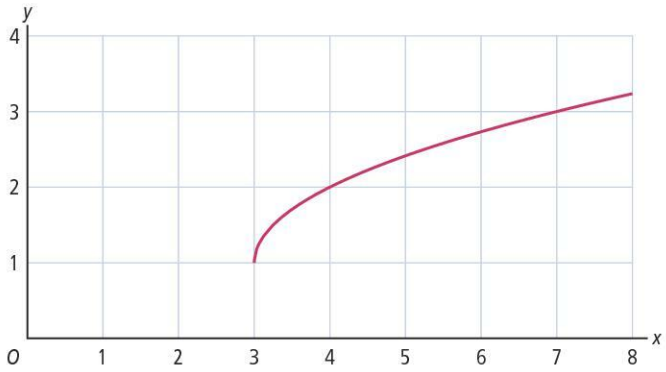
3.1 Domein en bereik

Je leert
- wat bedoeld wordt met domein en bereik van een functie
- hoe je het domein en bereik van een functie vaststelt

Leerroutes
- ondersteunend: 1—O2—3—4—5—O6—6—7—8
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7—8—9
- uitdagend: 1—2—3—5—6—8—9—U1—U2

De grafiek hoort bij een functie met het functievoorschrift $f(x) = \ldots + \sqrt{x - \ldots}$

- Welke getallen moeten er op de puntjes staan?



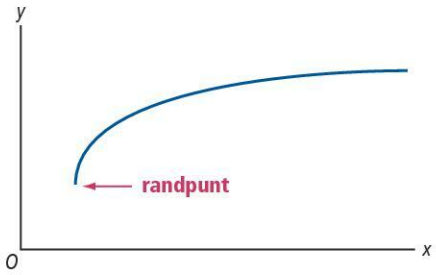
1 Gegeven is een schets van de grafiek van de functie $f(x) = 2 + \sqrt{x - 4}$.

a Leg uit waarom $f(1)$ niet bestaat.

b Van welke waarden van x bestaat er een functiewaarde?

c Welke functiewaarden zijn bij deze functie mogelijk?

d Welke coördinaten heeft het randpunt?



Ondersteunende route → maak opdracht O2

2 Gegeven is de functie $g(x) = 5 + \frac{4}{x}$

a Plot en schets de grafiek van g.

b Welke waarde kun je niet voor x invullen?

c Leg uit waarom de functiewaarde $g(x) = 5$ voor geen enkele waarde van x voorkomt.

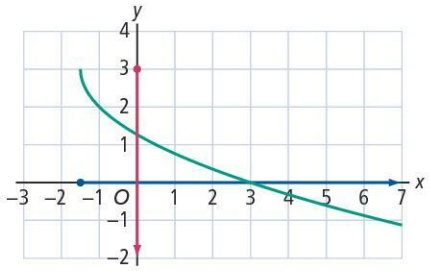
© Noordhoff Uitgevers bv

3 Gegeven is de grafiek van de functie $h(x) = 3 - \sqrt{2x + 3}$.

a Welke coördinaten heeft het randpunt?

b De blauwe pijl op de x-as geeft de waarden van x aan waarvoor een functiewaarde $h(x)$ bestaat.
Geef deze waarden in de intervalnotatie.

c Alle functiewaarden van h zijn met de rode pijl op de y-as aangegeven.
Welke waarden kan $h(x)$ hebben?



Theorie

Alle waarden van x waarvoor een functiewaarde $f(x)$ bestaat, vormen samen het **domein** van f. Alle functiewaarden die kunnen voorkomen, vormen het **bereik** van de functie.
Soms zijn er voor het domein of het bereik geen beperkingen: alle getallen kunnen worden ingevuld of zijn als uitkomst mogelijk. Domein of bereik noteer je dan als $\mathbb{R}$, het symbool voor de reële getallen. $\mathbb{R}$ bevat alle getallen op de getallenlijn.

Voorbeeld 1

Geef het domein en het bereik van de functie $f(x) = 2 + \sqrt{3 - x}$.

Oplossing

Voor het domein moet gelden: $3 - x \geq 0$, dus $x \leq 3$. Het domein is $\langle \leftarrow, 3]$.

$\sqrt{3 - x}$ kan geen negatieve uitkomst hebben, dus $f(x) \geq 2$. Het bereik is $[2, \rightarrow\rangle$.

Voorbeeld 2

Geef het domein en het bereik van de functie $f(x) = -0{,}4x^2 + 4x - 1$.

Oplossing

Je kunt voor x elk getal invullen, dus het domein is $\mathbb{R}$. De grafiek is een bergparabool. Met de rekenmachine vind je de top $(5, 9)$.
Het bereik is $\langle \leftarrow, 9]$.

4 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ en $g(x) = x^2 - 2x - 8$.

a Leg uit dat voor beide functies geldt: het domein is $\mathbb{R}$.

b Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x-as.

c Geef de coördinaten van de top van de grafiek van g.

d Geef het bereik van de functie f.

e Geef het bereik van de functie g.

5 Geef van elk van de functies het domein en het bereik.

H

a $f(x) = -2 + \sqrt{x}$

b $g(x) = 6 + \sqrt{x + 12}$

c $h(x) = 10 - 3x^4$

d $i(x) = 2\sqrt{x - 7} + 10$

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O6

6 H Geef het domein en het bereik van deze functies in de intervalnotatie.

a $f(x) = x^2 + 9$

b $g(x) = \frac{1}{x^2}$

c $h(x) = 16 - \sqrt{x}$

d $l(x) = 21 - \sqrt{6 - 2x}$

e $m(x) = \frac{6}{x^2 + 1}$

f $n(x) = x^4 + 3$

7 Gegeven is de functie $f(x) = 3 \cdot 1{,}1^x$.

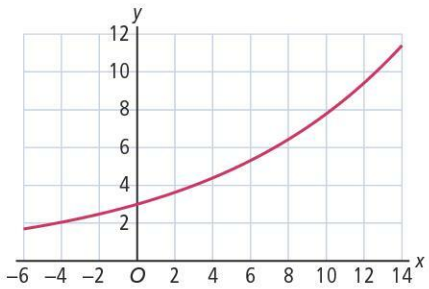
a Bereken $f(-3)$ en $f(3)$.

b Geef het domein van f.

c Wat gebeurt er met de functiewaarden als je voor x negatieve waarden invult die steeds verder van 0 liggen?

d Geef het bereik van f.

e Blijven de antwoorden op de opdrachten b en d hetzelfde als je een andere beginwaarde of een andere groeifactor kiest? Verklaar je antwoord.



8 Gegeven zijn de functies

$f(x) = 7 - x^4$,

$g(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$ en

$h(x) = 2(x + 1)^6 - 7$.

a Plot en schets de grafieken van deze drie functies.

b Geef het domein van elke functie.

c Geef het bereik van elke functie.

9 Geef een voorbeeld van een functie waarbij

a het domein $\mathbb{R}$ is en het bereik $\mathbb{R}$ is.

b het domein $\mathbb{R}$ is en het bereik niet $\mathbb{R}$ is.

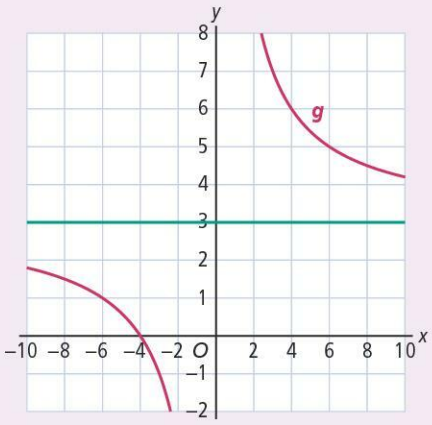
c het domein en het bereik beide niet $\mathbb{R}$ zijn.

Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O2 Gegeven is de functie $g(x) = 3 + \frac{12}{x}$



a Leg uit waarom je voor x niet de waarde 0 kunt invullen.

b Bereken $g(10)$, $g(100)$, $g(1000)$ en $g(1\,000\,000)$.

c De uitkomsten bij opdracht b komen steeds dichter bij een bepaalde waarde.
Welke waarde is dat?

d Laat zien dat de uitkomsten tot hetzelfde getal naderen, als je voor x de waarden -10, -100 en -1000 invult.

e Welke getal kan niet als functiewaarde van g voorkomen?

O6 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 - (3x - 1)^2$ en $g(x) = -6 + \sqrt{20 - 4x}$.

a Kun je bij de functie f voor x elk getal invullen?
Wat is het domein?

b Om het bereik van f te bepalen, bekijk je eerst een deel van het functievoorschrift.
Welke uitkomsten kan de formule $y = (3x - 1)^2$ hebben?
Wat volgt daaruit voor het bereik van f?

c De functie g heeft alleen uitkomsten als $20 - 4x$ niet negatief is.
Wat volgt hieruit voor het domein van g?

d Welke uitkomsten kan de formule $y = \sqrt{20 - 4x}$ hebben?

e Geef het bereik van g.

Uitdagende opdrachten

U1 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ en $g(x) = \sqrt{(2 - x)(x - 10)}$.

a Leg uit waarom $[-4, 4]$ het domein van f is.

b Geef het bereik van f.

c Geef het domein en het bereik van g.

U2 Gegeven is de familie van functies $f(x) = 2b - 3 + \sqrt{ax + 4}$.

a Voor welke waarde van a is het domein van f gelijk aan $\langle \leftarrow, 12]$?

b Voor welke waarde van b is het bereik van f gelijk aan $[-7, \rightarrow\rangle$?

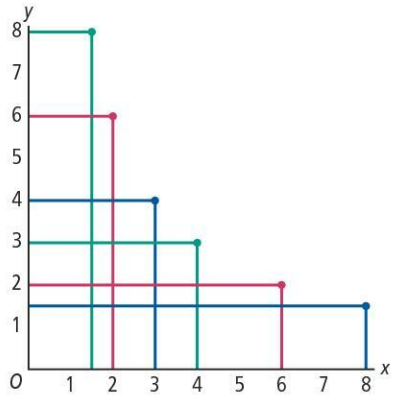
© Noordhoff Uitgevers bv

3.2 Gebroken functies

Je leert
- wat een gebroken functie is
- hoe je vergelijkingen van de asymptoten van een grafiek vindt

Leerroutes
- ondersteunend: 10—11—12—O13—13—14—O15—16
- doorlopend: 10—11—12—13—14—15—16—17
- uitdagend: 10—12—13—14—15—17—U3—U4

In het assenstelsel zijn rechthoeken getekend met oppervlakte 12. Van elke rechthoek ligt één zijde op de x-as en één zijde op de y-as.
De hoekpunten die met een stip zijn aangegeven liggen op de grafiek van een functie.
- Welk functievoorschrift kan deze functie hebben?



10 Gegeven is de functie $k(x) = \frac{6}{x-3} + 2$.

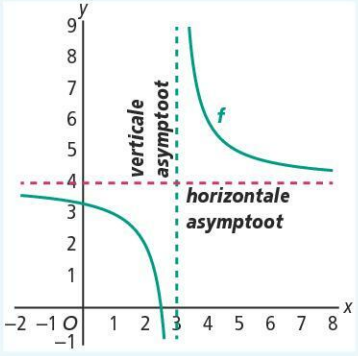
x	−5	−1	0	1	2	2,9	3	3,1	10	100
$k(x)$	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

a Vul de tabel in en teken de grafiek.
b Waarom is er geen functiewaarde bij $x = 3$?
c Leg uit wat er met de functiewaarde gebeurt als je voor x een waarde dicht bij 3 kiest.
d Bereken de functiewaarde bij $x = -10$ en bij $x = -100$.
e Wat gebeurt er met de functiewaarden als je voor x een waarde kiest die ver van 0 ligt?

11 **a** Plot en schets de grafiek van de functie $f(x) = \frac{15}{x^2 - 4}$
b Welke waarden kun je niet voor x invullen?

Theorie

Bij **gebroken functies** komt de variabele in de noemer voor.
Bij de grafieken van gebroken functies zijn er vaak lijnen waar de grafiek op den duur willekeurig dicht naar nadert.
Zulke lijnen heten **asymptoten**.
Ook de grafieken van andere soorten functies kunnen asymptoten hebben.



© Noordhoff Uitgevers bv

12 Gegeven is de functie $g(x) = 1 + \frac{1}{7 - 2x}$

a Maak een tabel bij de functie. Neem voor x de waarden $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ en 5.
b Geef het domein van g.
c Teken de grafiek van g. Stippel de asymptoten.
d Geef van elke asymptoot een vergelijking.
e Geef het bereik van g.

Theorie

- Voor het bepalen van het domein van een gebroken functie gebruik je dat de noemer ongelijk aan nul moet zijn. Als het domein uit meer dan één interval bestaat, wordt het symbool $\cup$ (vereniging) gebruikt.
- Voor het vinden van een verticale asymptoot van de grafiek van een gebroken functie kijk je waar de noemer van de breuk gelijk is aan nul.
- Door waarden van x die ver van 0 liggen in te vullen, kun je onderzoeken of er een horizontale asymptoot is.

Voorbeeld 1

Geef het domein van $f(x) = 3 - \frac{1}{8 + 4x}$

Oplossing

$f(x) = 3 - \frac{1}{8 + 4x}$ heeft uitkomsten als $8 + 4x \neq 0$ dus als $x \neq -2$.
Het domein is $\langle \leftarrow, -2\rangle \cup \langle -2, \rightarrow\rangle$.

Voorbeeld 2

Bepaal vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek van $f(x) = 1 + \frac{8}{x + 2}$

Oplossing

$x + 2 = 0$ als $x = -2$, dus de verticale asymptoot is $x = -2$.
Als voor x waarden worden ingevuld die ver van 0 liggen, wordt de waarde van $\frac{8}{x + 2}$ heel klein, dus $f(x)$ komt dicht bij 1. De horizontale asymptoot is $y = 1$.

Ondersteunende route → maak opdracht O13

13 H Geef het domein en het bereik van elke functie.
Maak zo nodig een plot.

a $f(x) = 2 + \frac{5}{x - 9}$

b $g(x) = \frac{10}{x^2 - 16}$

c $h(x) = 18 - \frac{15}{x^2 + 3}$

d $k(x) = 3 + \frac{21}{\sqrt{x - 4}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

14 Gegeven is de functie $p(x) = -1 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

a Vul de tabel in.

x	0	1	2	3	4	10	100
$p(x)$	…	…	…	…	…	…	…

b Leg uit dat de lijn $y = -1$ een horizontale asymptoot is van de grafiek van p.

c Heeft de grafiek een verticale asymptoot?

d Geef het domein en het bereik van p.

Ondersteunende route → maak opdracht O15

15 H De grafieken van de functies hebben één of meerdere asymptoten.
Geef van elke asymptoot een vergelijking.

a $f(x) = 4 + \frac{5}{x-2}$

b $g(x) = 18 - \frac{6}{7x+14}$

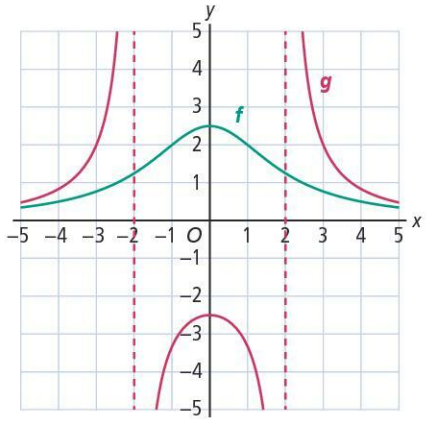
c $h(x) = \frac{12}{x^2+9}$

d $k(x) = 200 - 8 \cdot 0{,}7^x$

16 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{10}{x^2+4}$ en $g(x) = \frac{10}{x^2-4}$

a Leg uit waarom de grafiek van functie f geen verticale asymptoot heeft en de grafiek van functie g wel.

b Onderzoek of er bij deze grafieken horizontale asymptoten voorkomen.



17 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{10}{5 + 2^x}$

a Leg uit waarom de grafiek van deze functie geen verticale asymptoot heeft.

b De grafiek van deze functie heeft links en rechts verschillende horizontale asymptoten.
Geef van elke asymptoot een vergelijking.

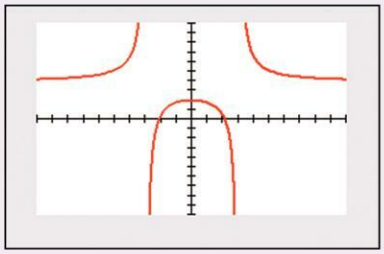
Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O13 Gegeven is de functie $g(x) = 4 + \dfrac{18}{x^2 - 9}$

a Waarom behoort $x = 3$ niet tot het domein van g?
b Welke waarde van x behoort ook niet tot het domein van g?
c Vul in: het domein van g is $\langle \leftarrow, \ldots \rangle \cup \langle \ldots, \ldots \rangle \cup \langle \ldots, \rightarrow \rangle$.
d Bereken $g(10)$, $g(100)$, $g(1000)$, $g(-10)$, $g(-100)$ en $g(-1000)$.
e Tot welke waarde nadert $g(x)$, als je voor x waarden invult die steeds verder van 0 liggen?
f In de plot zie je dat de grafiek een top heeft bij $x = 0$. Bereken de y-coördinaat van de top.
g Vul in: het bereik van g is $\langle \leftarrow, \ldots] \cup \langle \ldots, \rightarrow \rangle$.



O15 Gegeven is de functie $f(x) = 5 + \dfrac{24}{x^2 - 1}$

a Voor welke waarden van x is de noemer gelijk aan 0?
b Welke verticale asymptoten heeft de grafiek van f?
c Bereken $f(-1000)$, $f(-100)$, $f(100)$ en $f(1000)$.
d Welke lijn is de horizontale asymptoot van de grafiek?

De grafieken van de functies hebben één of meerdere asymptoten. Geef van elke asymptoot een vergelijking.

e $g(x) = \dfrac{1 - x}{2x - 7}$

f $h(x) = 14 - 12 \cdot 0{,}83^x$

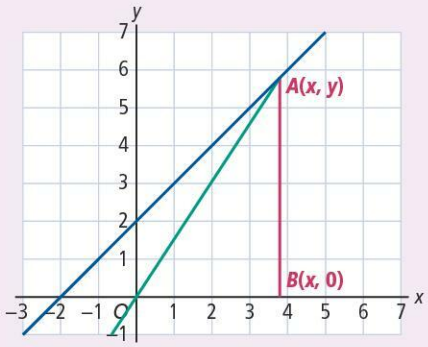
g $k(x) = \dfrac{40}{5 + x^2}$

h $l(x) = \dfrac{30}{x^2 - 2x - 15}$

Uitdagende opdrachten

U3 Punt A ligt op de lijn $y = x + 2$. Punt B ligt op de x-as en $\angle OBA = 90°$. De richtingscoëfficiënt van lijn OA kun je schrijven als een functie $r(x)$.

a Geef een functievoorschrift van r.
b Tot welke waarde nadert $r(x)$ als x steeds groter wordt?
c Tot welke grootte nadert $\angle AOB$ dan?



U4 Gegeven is de familie van functies $h(x) = \dfrac{2}{x^2 + c}$

a Onderzoek voor welke waarden van c de grafiek van h twee verticale asymptoten heeft.
b Onderzoek voor welke waarde van c het bereik van h gelijk is aan $\langle 0, 4]$.

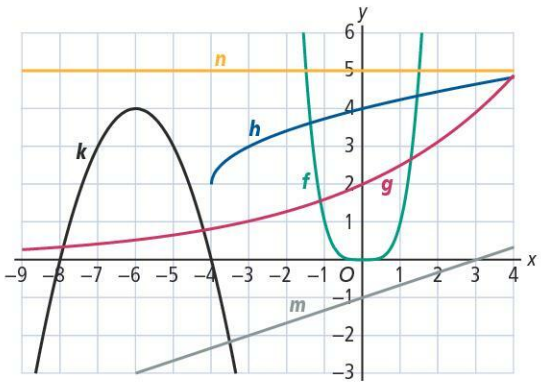
© Noordhoff Uitgevers bv

3.3 Soorten functies

Je leert
- de namen van een aantal soorten functies
- wat veeltermfuncties zijn en wat de graad van een veeltermfunctie is

Leerroutes
- ondersteunend: 18—19—020—20—21—22
- doorlopend: 18—19—20—21—22—23
- uitdagend: 18—20—21—23—U5—U6

- Van welke soorten functies herken je de grafiek?



18 Gegeven zijn de volgende functies.

$f(x) = 3 - x + 2x^2$ $\quad$ $g(x) = 4 - \sqrt{12 - x}$

$h(x) = x^4$ $\quad$ $k(x) = 13 - 1\frac{1}{2}x$

$m(x) = 12 + 3\sqrt{3x - 4}$ $\quad$ $n(x) = x^3 - 7x + 2$

$p(x) = -0{,}2x + 5{,}5$ $\quad$ $q(x) = 12$

$r(x) = 150 \cdot 0{,}8^x$ $\quad$ $s(x) = x(x - 2)$

a Welke van deze functies zijn lineaire functies?

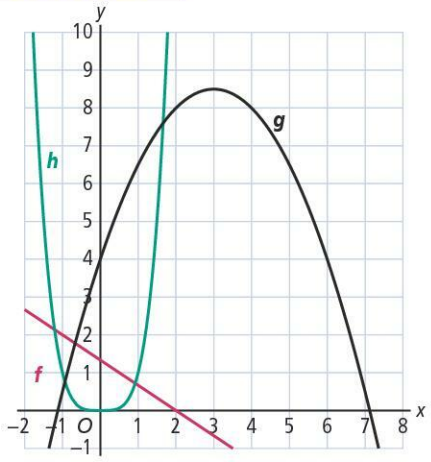
b Welke andere soorten functies komen er in deze opdracht voor?

Theorie

Tot dusver heb je kennis gemaakt met de volgende soorten functies.
- constante functies: $f(x) = a$. De grafiek is een horizontale lijn.
- lineaire functies: $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$. Hierin is a het hellingsgetal of de richtingscoëfficiënt en is b is het startgetal. De grafiek is een rechte lijn.
- kwadratische functies: $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. De grafiek is een parabool.
- machtsfuncties: $f(x) = x^m$.
- exponentiële functies: $f(x) = b \cdot g^x$, hierin is b de beginhoeveelheid en is g de groeifactor.
- wortelfuncties: de variabele komt onder het wortelteken voor, bijvoorbeeld $f(x) = a + \sqrt{bx + c}$.
- gebroken functies: de variabele komt in de noemer voor, bijvoorbeeld $f(x) = \frac{a}{bx + c}$. De grafiek is een hyperbool.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld 1

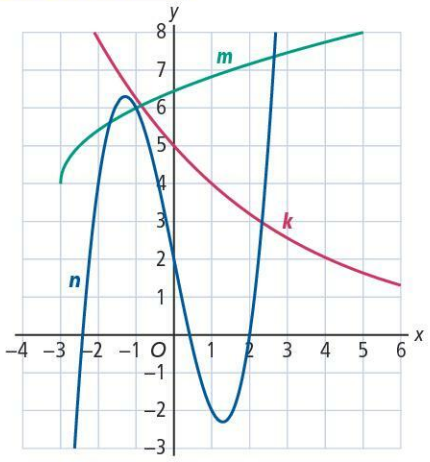


$f(x) = -\frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$ lineaire functie

$g(x) = -0{,}5x^2 + 3x + 4$ kwadratische functie

$h(x) = x^4$ machtsfunctie

Voorbeeld 2



$k(x) = 5 \cdot 0{,}8^x$ exponentiële functie

$m(x) = 4 + \sqrt{2x + 6}$ wortelfunctie

$n(x) = x^3 - 5x + 2$ derdegraadsfunctie

19 Gegeven zijn de functies

$f(x) = (x - 3)(x + 5)$,

$g(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 3)$ en

$h(x) = 2x^2(3 - x) + 6\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1\right)$.

Schrijf de functievoorschriften van f, g en h zonder haakjes en zo kort mogelijk.

Theorie

Lineaire functies $f(x) = ax + b$ met $a \neq 0$ heten ook wel **eerstegraadsfuncties**.
Een andere naam voor kwadratische functies is **tweedegraadsfuncties**.
Als x^3 de hoogste macht in een functie is, spreek je van een derdegraadsfunctie, enzovoort.
Veeltermfuncties zijn functies met de vorm $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$. Hierbij zijn n en alle andere exponenten gehele getallen. De hoogste macht in een veeltermfunctie is de **graad** van die functie.
Een **constante functie** $f(x) = k$ heeft graad 0.

Voorbeeld

Eerstegraadsfunctie:
$f(x) = 1\frac{1}{2}x - 12$

Tweedegraadsfunctie:
$g(x) = 3x^2 - 5x + 8$

Zevendegraadsfunctie:
$h(x) = -3x^7 + 2x^3 + 4x^2$

Constante functie:
$k(x) = 13$

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O20

20 H Gegeven zijn de functies

$f(x) = x^2 + \frac{1}{3}x^3 - 2x$,

$g(x) = -x^4 + 3x^2 + 4$,

$h(x) = x(x - 5)(2x + 3)$ en

$k(x) = (x^2 - 4)(x^3 - 1)$.

a Laat zien dat de functies h en k veeltermfuncties zijn.
b Geef de graad van de functies f, g, h en k.

21 Het functievoorschrift van tweedegraadsfuncties kun je in verschillende vormen tegenkomen:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x) = a(x - m)(x - n)$

$f(x) = a(x - p)^2 + q$

a Bij welke van deze vormen is de top van de grafiek eenvoudig af te lezen?
b Bij welke vorm van het functievoorschrift weet je zeker dat de grafiek de x-as snijdt?
c Wat weet je over de getallen a, p en q in de laatste formule als gegeven is dat de grafiek de x-as niet snijdt?

22 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^3$ en $g(x) = 3^x$.
a Van welke soort zijn deze functies?
b Geef het domein en bereik van beide functies.
c Plot en schets de grafieken van f en g in één figuur.
d Onderzoek hoeveel keer de grafieken elkaar snijden en bereken de coördinaten van de snijpunten.

23 In deze paragraaf heb je kennis gemaakt met een aantal soorten functies:
lineaire functies, kwadratische functies, veeltermfuncties, wortelfuncties, machtsfuncties en gebroken functies.
Bij welke van deze soorten functies hoeft het domein niet $\mathbb{R}$ te zijn?
Licht je antwoord toe.

Uitdagende route → maak opdracht U5 en U6

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O20 Gegeven zijn de functies

$f(x) = -x^2 + 3x^3 - 2x$,

$g(x) = 1 - 2x - 3x^2$,

$h(x) = (x^3 - 1)(x^3 - 8)$ en

$k(x) = 3x(x - 2)(2x + 7)$.

a Welke graad hebben de functies f en g?
b Schrijf het functievoorschrift van h zonder haakjes.
c Welke graad heeft de functie h?
d Laat zien dat het functievoorschrift van k geschreven kan worden als $k(x) = 3x(2x^2 + 3x - 14)$.
e Schrijf het functievoorschrift van k zonder haakjes.
f Welke graad heeft de functie k?

Uitdagende opdrachten

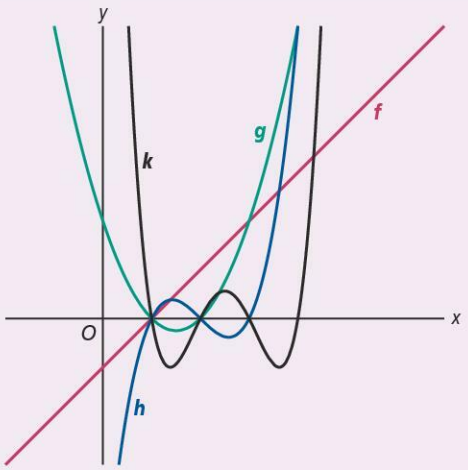
U5 De grafieken van de functies

$f(x) = x - 1$,

$g(x) = (x - 1)(x - 2)$,

$h(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ en

$k(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$ zijn getekend.



a Er is één punt dat op de grafieken van alle vier functies ligt.
Verklaar dit met behulp van de functievoorschriften.
b Er zijn nog twee punten die op de grafieken van twee of drie van deze functies liggen.
Welke punten zijn dat?
c Geef de graad van elke functie.

U6 De grafiek van een derdegraadsfunctie f gaat door de punten (0, 0), (1, 0) en (2, 0).
Stel een functievoorschrift van f op.

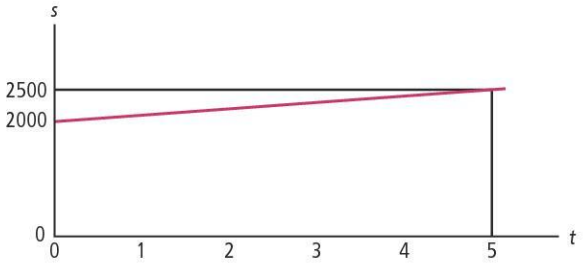
© Noordhoff Uitgevers bv

3.4 Grafieken verschuiven en vermenigvuldigen

Je leert
- hoe je het functievoorschrift opstelt als je de grafiek verschuift of vermenigvuldigt ten opzichte van de x-as

Leerroutes
- ondersteunend: 24—25—26—27—028—29—30—031—31
- doorlopend: 24—25—26—27—28—29—30—31—32
- uitdagend: 24—25—26—28—30—31—32—U7—U8

In de grafiek staat het gemiddelde salaris s in euro's per maand na t jaar voor de werknemers in een bedrijf.
De werknemers willen een loonsverhoging en discussiëren over twee mogelijkheden:
A: iedereen krijgt € 50 meer per maand.
B: iedereen krijgt een loonsverhoging van 2%.
- Hoe verandert de grafiek bij voorstel A?
- Hoe verandert de grafiek bij voorstel B?



24 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x+5}$ en $h(x) = 3 + \sqrt{x}$.
- **a** Geef de coördinaten van het randpunt van elk van de grafieken van deze functies.
- **b** Hoe ontstaat de grafiek van g uit die van f?
- **c** Hoe ontstaat de grafiek van h uit die van f?

25 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{x}$ en $g(x) = \frac{1}{x-5}$
- **a** Plot en schets de grafieken van f en g.
- **b** Hoe ontstaat de grafiek van g uit die van f?

Theorie

Als de grafiek van een functie f de afstand d omhoog wordt verschoven, worden alle functiewaarden d groter.
Het functievoorschrift van de beeldgrafiek is $g(x) = f(x) + d$.
Als de grafiek van een functie f de afstand van c naar rechts wordt verschoven, dan is $g(x) = f(x - c)$ het functievoorschrift van de beeldgrafiek.
Een verschuiving heet ook wel een translatie.

Voorbeeld

De grafiek van $f(x) = x^2$ wordt 4 eenheden omlaag verschoven.
Het functievoorschrift van de beeldgrafiek is $g(x) = x^2 - 4$.
De grafiek van $f(x) = x^2$ wordt 4 eenheden naar links verschoven.
Het functievoorschrift van de beeldgrafiek is $h(x) = (x + 4)^2$.

26 H Gegeven zijn de functies $f(x) = 3x^2 - 2x$ en $g(x) = -2x + \sqrt{x+1}$.
Stel de functievoorschriften op van de beeldgrafieken bij beide functies na
- **a** verschuiven over de afstand 1 naar links.
- **b** verschuiven over de afstand 6 omlaag.

© Noordhoff Uitgevers bv

27 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ en $g(x) = 2\sqrt{x}$.

a Hoe ontstaat de grafiek van f uit de grafiek van $h(x) = x^2$?

b Hoe ontstaat de grafiek van g uit de grafiek van $k(x) = \sqrt{x}$?

Theorie

Bij een vermenigvuldiging van de grafiek van een functie f ten opzichte van de x-as met de factor a worden alle functiewaarden met de factor a vermenigvuldigd.
Het functievoorschrift van de beeldgrafiek is $g(x) = a \cdot f(x)$.
Verschuivingen en vermenigvuldigingen zijn voorbeelden van transformaties.

Voorbeeld

De grafiek van g ontstaat door de grafiek van $f(x) = x^2 - 3x$ te vermenigvuldigen met $1\frac{1}{2}$ ten opzichte van de x-as.

Het functievoorschrift van de beeldgrafiek is $g(x) = 1\frac{1}{2}(x^2 - 3x)$ of $g(x) = 1\frac{1}{2}x^2 - 4\frac{1}{2}x$.

Ondersteunende route → maak opdracht 028

28 H Gegeven zijn de functies $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ en $g(x) = 3x + \sqrt{\frac{1}{2}x + 5}$.

Geef het functievoorschrift van de beeldgrafieken van f en van g in de volgende gevallen:

a De grafiek wordt vermenigvuldigd met 3 ten opzichte van de x-as en daarna 4 omlaag verschoven.

b De grafiek wordt 5 omhoog verschoven en daarna vermenigvuldigd met -2 ten opzichte van de x-as.

29 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x$ en $g(x) = 1 - 3 \cdot 2^x$.

a Janet zegt dat je de grafiek van g uit die van f krijgt, door eerst een verschuiving met 1 omhoog toe te passen en daarna een vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met -3.
Teken de grafiek van f en voer de transformaties van Janet in die volgorde uit op de grafiek van f.

b Leg uit dat Janet het niet goed doet en geef het functievoorschrift van haar beeldgrafiek.

c Geef aan hoe de grafiek van g uit die van f ontstaat.

© Noordhoff Uitgevers bv

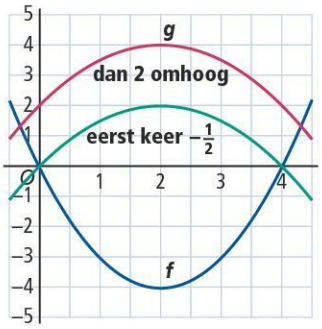
Theorie

Bij transformaties is de volgorde van transformaties van belang. Als je de volgorde verandert, krijg je vaak een ander resultaat.
Randpunten, toppen en asymptoten zijn geschikte punten om op te letten bij het onderzoek naar transformaties.
Punten op de x-as blijven bij vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as op hun plaats.

Voorbeeld

De grafiek van $f(x) = x^2 - 4x$ wordt eerst ten opzichte van de x-as vermenigvuldigd met $-\frac{1}{2}$.

Het resultaat is de groene grafiek.
Deze grafiek wordt vervolgens 2 omhoog verschoven.
Het functievoorschrift van de beeldgrafiek is
$g(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x) + 2$ ofwel $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$.



30 Neem de functie f uit het voorbeeld.
Geef het functievoorschrift $h(x)$ van de beeldgrafiek als de transformaties in omgekeerde volgorde worden toegepast.

Ondersteunende route → maak opdracht O31

31 Gegeven is de functie $f(x) = 2x - 1$.

H
- **a** Geef transformaties die je op de grafiek van f kunt toepassen om de grafiek van $h(x) = 4x - 6$ te krijgen. Vermeld de volgorde die je hebt gebruikt.
- **b** Geef een andere combinatie die hetzelfde resultaat geeft.

32 Gegeven is de functie $f(x) = 2x^2 - 16x + 23$.
- **a** Toon aan dat het functievoorschrift van f kan worden geschreven als $f(x) = 2(x - 4)^2 - 9$.
- **b** Door welke transformaties en in welke volgorde kan de grafiek van f ontstaan uit de grafiek van $g(x) = x^2$?
- **c** Door welke transformaties en in welke volgorde kan de grafiek van $h(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}x}$ ontstaan uit die van $k(x) = \sqrt{x}$?

Uitdagende route → maak opdracht U7 en U8

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O28 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x - 7$.

a De grafiek van f wordt vermenigvuldigd met 6 ten opzichte van de x-as. Op het blaadje zie je wat er dan met het functievoorschrift van f gebeurt.
Geef het functievoorschrift $g(x)$ van de beeldgrafiek.

b De grafiek van de functie g die bij opdracht a ontstaat wordt 10 omhoog verschoven.
Geef het functievoorschrift $h(x)$ van de beeldgrafiek.

c De grafiek van $k(x) = 1 - \sqrt{2x - 5}$ wordt 3 omhoog verschoven en daarna vermenigvuldigd met -3 ten opzichte van de x-as.
Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek.

d De grafiek van $m(x) = 8 - 6x^2$ wordt vermenigvuldigd met 5 ten opzichte van de x-as en daarna 8 omlaag verschoven.
Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek.

$f(x) = \frac{1}{3}x - 7$

$g(x) = 6 \cdot f(x)$ dus

$g(x) = 6 \cdot (\frac{1}{3}x - 7)$

$g(x) = \ldots$

O31 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$, $g(x) = 2x + 1$ en $h(x) = -x - 9$.

a Vermenigvuldig de grafiek van f met 4 ten opzichte van de x-as.
Welk functievoorschrift hoort er bij de beeldgrafiek?

b Welke verschuiving moet je op het resultaat van opdracht a toepassen om de grafiek van g te krijgen?

c De grafiek van h ontstaat uit die van f door een vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as, gevolgd door een translatie. Je kunt aan het getal voor x zien met welke factor er wordt vermenigvuldigd.
Welke factor is dat?

d Welke translatie wordt bedoeld in opdracht c?

Uitdagende opdrachten

U7 Gegeven zijn $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ en $h(x) = -x^2 + 8x + 2$.

a De grafiek van f kan uit de grafiek van g ontstaan door een vermenigvuldiging en een verschuiving toe te passen.
Laat zien op welke twee manieren dit mogelijk is.

b Geef twee manieren waarmee de grafiek van h uit die van g kan ontstaan.

U8 De grafiek van $g(x) = \dfrac{30}{2x^2 + 8x + 20}$ is door een verschuiving ontstaan uit de grafiek van $k(x) = \dfrac{a}{x^2 + b}$

Bereken a en b en geef aan welke verschuiving moet worden toegepast.

© Noordhoff Uitgevers bv

3.5 Vergelijkingen oplossen

Je leert
- hoe je uit de vraagstelling opmaakt of je een vergelijking met je rekenmachine mag oplossen

Leerroutes
- ondersteunend: 33—034—34—35—37—038—39—40—41
- doorlopend: 33—34—35—36—37—38—39—40—41
- uitdagend: 33—34—36—37—38—40—41—U9—U10

Opa Joost heeft drie kleinkinderen, Eric, Bo en Kevin.
Eric is 4 jaar ouder dan Bo en Bo is vier jaar ouder dan Kevin. De leeftijd van opa Joost is het kwadraat van de leeftijd van Kevin.
Opa Joost, Eric, Bo en Kevin zijn samen precies 100 jaar oud.
- Hoe oud zijn opa Joost, Eric, Bo en Kevin?

33 Annet en Yvonne lossen de vergelijking $18x^2 - 17x = 15$ op.

Annet gebruikt de *abc*-formule en vindt $x = -\frac{5}{9}$ en $x = 1\frac{1}{2}$.

Yvonne gebruikt haar rekenmachine. Zij vindt $x = -0{,}56$ en $x = 1{,}5$.

Welke oplossingen zijn juist? Of zijn alle oplossingen juist?

Theorie

Je kunt vergelijkingen oplossen met de rekenmachine.
Soms krijg je daarbij exacte antwoorden, maar in de meeste gevallen krijg je benaderingen.
Als in de opdracht staat: Bereken …… of: Los op ……, dan heb je de keuze tussen algebraïsch oplossen en oplossen met de rekenmachine.
Als er staat: Bereken exact ….. of: Los algebraïsch op ……, dan moet je het probleem met algebra oplossen. Bij 'bereken exact' moet je bovendien een exact antwoord geven.

Voorbeeld 1

Los algebraïsch op en rond je antwoord af op één decimaal $x^4 - 10x^2 = 11$.

Oplossing

Stel $x^2 = a$ dan wordt de vergelijking
$a^2 - 10a - 11 = 0$
$(a + 1)(a - 11) = 0$
$a = -1$ of $a = 11$
$x^2 = -1$ of $x^2 = 11$
Alleen $x^2 = 11$ heeft oplossingen:
$x = -\sqrt{11} \approx -3{,}3$ of $x = \sqrt{11} \approx 3{,}3$

Voorbeeld 2

Los exact op $2x - 1 = \sqrt{x + 2\frac{1}{2}}$.

Oplossing

$(2x - 1)^2 = x + 2\frac{1}{2}$ (gekwadrateerd)

$4x^2 - 4x + 1 = x + 2\frac{1}{2}$

$4x^2 - 5x - 1\frac{1}{2} = 0$

Discriminant $D = 25 - 4 \cdot 4 \cdot -1\frac{1}{2} = 49$

$x = \frac{5+7}{8} = 1\frac{1}{2}$ of $x = \frac{5-7}{8} = -\frac{1}{4}$

Alleen de eerste oplossing voldoet.

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht 034

34 Los exact op.

H

a $\frac{-3}{x} + 4 = x$

b $2x(x^2 - 3x) = 2x^3 - 4x$

c $x - 1 = \sqrt{x - 1}$

d $\frac{2}{x^2} - 1 = x^2$

35 Bereken exact de nulpunten.

a $f(x) = 3 - \sqrt{5 + 2x^2}$

b $g(x) = \sqrt{x^2 + x - 1}$

c $h(x) = 1 - \frac{4}{2x^2 + x + 3}$

d $k(x) = x^4 - 7x^2 + 12$

36 **a** Bereken exact de omtrek en oppervlakte van een cirkel met straal $1\frac{1}{2}$.

b De diameter van de aarde bedraagt ongeveer 12 732 km. Bereken de lengte van de evenaar in hele kilometers.

c Waarom is het niet zinvol om naar de exacte omtrek van de aarde te vragen?

De omtrek van een cirkel met straal r is $2\pi r$.
De oppervlakte van een cirkel met straal r is πr^2.

37 Los de vergelijking $x^3 + 6x^2 = 4(x + 6)$ op twee manieren op.

a Met de rekenmachine door de grafieken van $f(x) = x^3 + 6x^2$ en $g(x) = 4(x + 6)$ te plotten en de snijpunten te bepalen.

b Exact door de vergelijking te schrijven in de vorm $A \cdot B = A \cdot C$.

Bij het oplossen van vergelijkingen kun je soms kiezen tussen het oplossen met algebra of het oplossen met je rekenmachine. Soms is het oplossen met algebra veel sneller dan het oplossen met je rekenmachine. Daarbij kan het handig zijn om de vergelijking eerst te herleiden of te vereenvoudigen.
Veel vergelijkingen kun je alleen maar met je rekenmachine oplossen.

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O38

38 Gegeven zijn de vergelijkingen

A $x^3 + 2x^2 = 15$

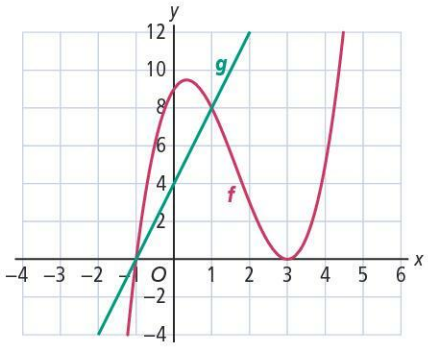
B $2x^4 - 5x^3 + 2x^2 = 0$

C $50 \cdot 0{,}8^x = 17$

D $2x + 1 = \sqrt{4x + 10}$

a Welke van deze vergelijkingen kunnen exact worden opgelost? Los deze vergelijkingen op.
b Los de andere vergelijkingen op.

39 In het assenstelsel staan de grafieken van de functies $f(x) = (x + 1)(x - 3)^2$ en $g(x) = 4(x + 1)$.
a Lees twee oplossingen van de vergelijking $f(x) = g(x)$ af en controleer de oplossingen door invullen.
b Onderzoek of er een derde oplossing is.



40 H Los exact op. Schrijf de vergelijkingen eerst in de vorm $A \cdot B = A \cdot C$.

a $(x - 2)^2(2x + 1) = (x - 2)^2(x + 2)$

b $(x - 2)^2(2x + 1) = (x - 2)^3$

c $(x - 3) \cdot 2^x = 2x - 6$

d $\dfrac{4x + 1}{x^2} = 16x + 4$

41 Gegeven zijn $f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x + 6}$ en $g(x) = \sqrt{x + 2}$.
a Geef het domein van f.
b Los exact op $f(x) < g(x)$.

Uitdagende route → maak opdracht U9 en U10

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O34 Op het blaadje staan drie vergelijkingen.

a Vermenigvuldig beide kanten van vergelijking A met x en los de vergelijking die je dan krijgt exact op.

b Schrijf vergelijking B zonder haakjes en los de vergelijking exact op.

c Kwadrateer beide kanten van vergelijking C en los de vergelijking exact op.

d Je vindt bij opdracht c twee uitkomsten. Waarom voldoet één van de uitkomsten niet als oplossing?

A $\frac{5}{x} = 2x + 3$

B $x^2(x - 1) = 2x$

C $x = \sqrt{4x + 12}$

O38 Op het blaadje staan zes vergelijkingen.

a Waarom weet je zeker dat je de vergelijkingen A en B exact kunt oplossen?

b Los vergelijkingen A en B exact op.

c Los de andere vier vergelijkingen op met je rekenmachine.

d Als je in vergelijking F de haakjes wegwerkt, blijkt dat je deze vergelijking ook exact kunt oplossen. Laat dit zien dat dit juist is en los de vergelijking exact op.

A $0{,}2x + 7 = 0{,}3x - 1$

B $2x^2 - 5x = 7$

C $x^3 + x^2 = 43$

D $5 + 6 \cdot 2^x = 95$

E $\frac{10}{x^2 + 1} = x^3$

F $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = -6$

Uitdagende opdrachten

U9 Gegeven is de functie $f(x) = 3 + x + \frac{1}{2^x}$

a Bereken het minimum van f en geef het bereik van f.

Rond af op twee decimalen.

b Los exact op $3 + x + \frac{1}{2^x} = x + 3\frac{1}{4}$.

c Los op $3 + x + \frac{1}{2^x} = 2x$.

U10 Gegeven zijn de functie $f(x) = x - 4\sqrt{x}$ en de familie van functies $g_p(x) = \frac{1}{2}x + p$.

a Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en van $g_{-3\frac{1}{2}}$.

b Voor welke waarde van p heeft de vergelijking $f(x) = g_p(x)$ precies één oplossing?

© Noordhoff Uitgevers bv

42 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{8 - 2^x}{1 + 2^x}$

a Waarom heeft de grafiek van deze functie geen verticale asymptoot?
b Plot en schets de grafiek van f.
c Welke horizontale asymptoten heeft de grafiek van f?
d Geef het bereik van deze functie.

43 Gegeven is de functie $f(x) = 2 - \dfrac{3}{x + 1}$

a Plot en schets de grafiek van f.
b Geef het domein en het bereik van f.
c Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de lijn $y = -3x - 1$.
d Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f en de parabool $y = x^2 + x - 12$.
e De grafiek van f wordt ten opzichte van de x-as met -3 vermenigvuldigd en daarna 12 omlaag verschoven.
Geef het functievoorschrift $g(x)$ dat bij de beeldgrafiek hoort.

44 In het assenstelsel staan de grafieken van de functies

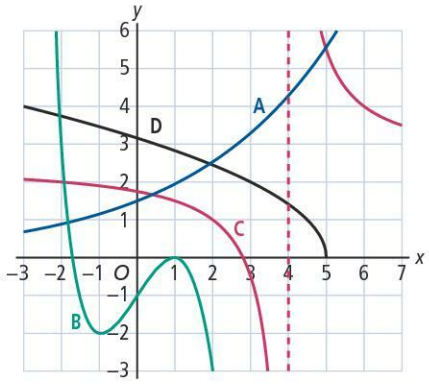
$f(x) = -x^3 + 2x - 1$

$g(x) = \dfrac{5x - 14}{2x - 8}$

$h(x) = \sqrt{10 - 2x}$

$m(x) = 1{,}5 \cdot 1{,}3^x$

a Welke grafiek hoort bij welke functie?
b Geef van elk van de functies het domein en het bereik.



45 Los exact op.

a $\dfrac{9}{-x + 4} = 6 + x$

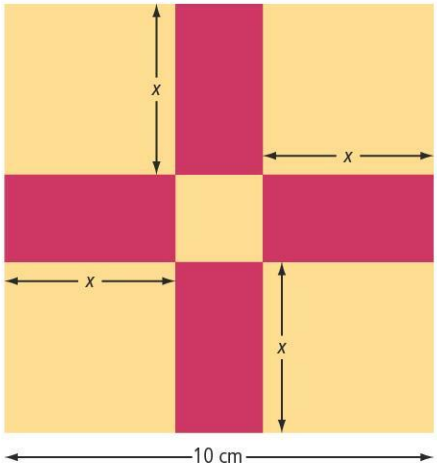
b $x^6 = 3x^3 + 4$

c $\sqrt{3x + 16} = 2x - 1$

d $x^2 - \dfrac{6}{x^2} = 5$

© Noordhoff Uitgevers bv

46 In een vierkant van 10 bij 10 cm wordt een gekleurd kruis getekend. Iedere arm van dit kruis is x cm lang.
De totale oppervlakte van de rode delen hangt af van de waarde van x. Dit geldt ook voor de totale oppervlakte van de gele delen.
Onderzoek algebraïsch of er een waarde van x bestaat waarvoor de totale oppervlakte van de rode delen gelijk is aan de totale oppervlakte van de gele delen.

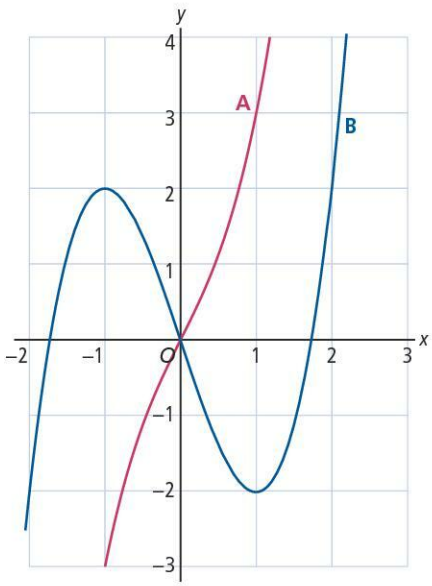


47 Deze opdracht gaat over derdegraadsfuncties van de vorm $f(x) = x^3 + ax + b$.

a Wat weet je van de waarden van a en b als gegeven is dat de grafiek van f door de oorsprong gaat?

b Wat weet je van de waarden van a en b als gegeven is dat de grafiek zowel door de oorsprong als door het punt $(1, 3)$ gaat?

c Wat weet je van de waarden van a en b als gegeven is dat de grafiek van f door de oorsprong gaat en twee toppen heeft, zoals grafiek B?



© Noordhoff Uitgevers bv

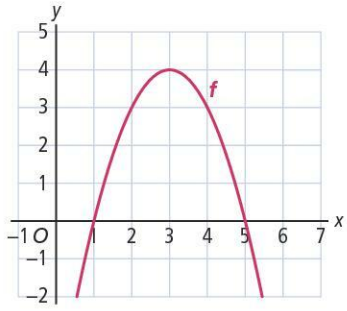
Theorie

Domein en bereik, het symbool $\mathbb{R}$

Alle waarden van x waarvoor een functiewaarde $f(x)$ bestaat, vormen samen het domein van die functie. Alle uitkomsten vormen het bereik.
Als er voor het domein of bereik geen beperkingen zijn, dan noteer je dit als $\mathbb{R}$, dat is de verzameling van alle (reële) getallen.

Voorbeeld

$f(x) = -x^2 + 6x - 5$



De top van de grafiek is (3, 4).
Het domein is $\mathbb{R}$, het bereik is $\langle \leftarrow, 4]$.

S1 Bij welke van de functies is het domein $\mathbb{R}$?

$f(x) = 2\sqrt{x+1}$ en $g(x) = \dfrac{6}{x^2+3}$

Theorie

Soorten functies

- constante functies: $f(x) = a$
- lineaire of eerstegraadsfuncties: $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$
- kwadratische of tweedegraadsfuncties: $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$
- machtsfuncties: $f(x) = x^m$
- veeltermfuncties: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$
  De hoogste macht in een veeltermfunctie is de graad van die functie.
- exponentiële functies: $f(x) = b \cdot g^x$
- wortelfuncties: de variabele komt voor onder het wortelteken.
- gebroken functies: de variabele komt in de noemer voor.

S2 Geef van elke functie aan van welke soort de functie is.

a $f(x) = (2x - 1)(x + 5)$

b $g(x) = \sqrt{7}$

c $h(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 12}$

d $k(x) = 14 \cdot 1{,}2^x$

e $m(x) = x^{11}$

f $m(x) = 2 + 3x - x^3 + x^4$

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Transformaties, verschuiven en vermenigvuldigen

Op de grafiek van een functie f kun je een transformatie toepassen. Voorbeelden van transformaties zijn:

- vermenigvuldigen met a ten opzichte van de x-as; het functievoorschrift van de beeldgrafiek is $g(x) = a \cdot f(x)$
- verticaal verschuiven over de afstand d; het functievoorschrift van de beeldgrafiek is $g(x) = f(x) + d$
- horizontaal verschuiven over de afstand c naar rechts; het functievoorschrift van de beeldgrafiek is $g(x) = f(x - c)$

S3 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{x-3}$, $g(x) = \frac{12}{x}$, $h(x) = \frac{12}{x-3}$ en $k(x) = \frac{1}{x}$

Door welke transformaties zijn de grafieken van f, g en h ontstaan uit de grafiek van k?

Vaardigheid

Je kunt het domein en het bereik van een functie vaststellen.

Kijk goed naar de kenmerken van de verschillende soorten functies en maak zo nodig een plot of schets van de grafiek.

Voorbeeld 1

Bepaal het domein en het bereik van $f(x) = 4 + \sqrt{10 - 2x}$.

Oplossing

f heeft alleen functiewaarden als $10 - 2x \geq 0$, dus als $x \leq 5$. Het domein is $\langle \leftarrow, 5]$.

$\sqrt{10 - 2x}$ kan geen negatieve waarden aannemen.

Het bereik is $[4, \rightarrow\rangle$.

Voorbeeld 2

Bepaal het domein en het bereik van $g(x) = 8 + \frac{3}{1-x}$

Oplossing

$g(1)$ bestaat niet. Het domein is $\langle \leftarrow, 1\rangle \cup \langle 1, \rightarrow\rangle$.

De tweede term van $g(x)$ kan alle waarden aannemen behalve 0.

Het bereik van g is $\langle \leftarrow, 8\rangle \cup \langle 8, \rightarrow\rangle$.

S4 Geef het domein en het bereik.

a $f(x) = -1 + 2\sqrt{x + 6}$

b $g(x) = 5 - 10 \cdot 1{,}3^x$

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheid

Je kunt vergelijkingen van de asymptoten van een grafiek vinden.

Bij gebroken functies heeft de grafiek een verticale asymptoot bij de waarde van x waarvoor de noemer gelijk is aan 0.

De grafiek van een functie heeft een horizontale asymptoot als de functiewaarden voor waarden van x die steeds verder van 0 liggen, tot een bepaalde waarde naderen.

Voorbeeld 1

Welke asymptoten heeft de grafiek van $f(x) = -6 + \frac{25}{3x - 15}$?

Oplossing

De noemer van $f(x)$ is gelijk aan 0 als $3x = 15$.
De verticale asymptoot is $x = 5$.
Voor waarden van x die steeds verder van 0 liggen, komt de functiewaarde steeds dichter bij -6.
De horizontale asymptoot is $y = -6$.

Voorbeeld 2

Welke asymptoten heeft de grafiek van $g(x) = 30 - 20 \cdot 0{,}9^x$?

Oplossing

De grafiek van g heeft alleen een horizontale asymptoot. Voor toenemende waarden van x nadert de uitkomst van de tweede term naar 0, dus de functiewaarde komt steeds dichter bij 30.
De horizontale asymptoot is $y = 30$.

S5 Geef de vergelijkingen van de asymptoten van de grafieken van deze functies.

a $h(x) = 3 - \frac{15}{2x - 9}$

b $q(x) = -4 + 20 \cdot 0{,}75^x$

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheid

Je kunt het functievoorschrift opstellen als je de grafiek verschuift of vermenigvuldigt ten opzichte van de *x*-as.
Let bij een combinatie van twee transformaties goed op de volgorde waarin de twee transformaties worden toegepast.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 2 + 3 \cdot x^4$. Vermenigvuldig de grafiek ten opzichte van de x-as met 2 en verschuif de grafiek daarna 5 naar omhoog.
Welk functievoorschrift $h(x)$ hoort bij de beeldgrafiek?

Oplossing

Het resultaat na vermenigvuldigen is $g(x) = 2(2 + 3 \cdot x^4)$ ofwel $g(x) = 4 + 6 \cdot x^4$.
Verschuiven van de grafiek van g geeft de grafiek van $h(x) = 9 + 6 \cdot x^4$.

S6 Op de grafiek van de functie f uit het voorbeeld worden dezelfde transformaties toegepast, echter in omgekeerde volgorde.
Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek.

Vaardigheid

Je kunt uit de vraagstelling opmaken of je een vergelijking met je rekenmachine mag oplossen.
Als in de opdracht staat: Bereken exact …… of: Los algebraïsch op ……, dan moet je het probleem met algebra oplossen. Bij 'bereken exact' moet je bovendien een exact antwoord geven.
In alle andere gevallen mag je ervoor kiezen een vergelijking op te lossen met de rekenmachine.

Voorbeeld

Los exact op $2x - 1 = \sqrt{7x + 4}$.

Oplossing

$(2x - 1)^2 = 7x + 4$

$4x^2 - 4x + 1 = 7x + 4$

$4x^2 - 11x - 3 = 0$

Discriminant:
$D = 121 - 4 \cdot 4 \cdot -3 = 169$

$x = \frac{11 + \sqrt{169}}{8} = 3$ of

$x = \frac{11 - \sqrt{169}}{8} = -\frac{1}{4}$

Alleen de oplossing $x = 3$ voldoet.

S7 **a** Los exact op $4 + \frac{10}{3x - 1} = 3x$.

b Los op $4 + \frac{10}{3x - 1} = -x + 9$. Rond af op twee decimalen.

© Noordhoff Uitgevers bv

T1 Geef het domein en het bereik. Schrijf je antwoord in intervalnotatie.

a $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$

b $g(x) = 2 + \dfrac{5}{x}$

c $h(x) = \dfrac{35}{2x-8} - 19$

d $k(x) = 2 + \dfrac{5}{\sqrt{5x+20}}$

T2 De grafieken van de functies $g(x) = -2 + \dfrac{5}{6-2x}$ en $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}$ hebben één of meer asymptoten.
Geef van elke asymptoot een vergelijking.

T3
a Welke van de vergelijkingen hieronder zijn exact op te lossen?
b Los deze vergelijkingen exact op.
c Los de andere vergelijkingen met je rekenmachine op.

A $3\sqrt{4x-1} = 5$

B $8(x+2)^2 = x^3 + 1$

C $6 \cdot 0{,}8^x - 3 = 0$

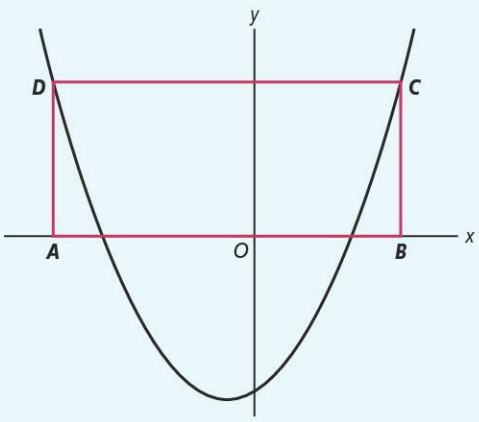
D $16x^2 + 9 = 24x$

E $8 + \sqrt{4-x} = 10$

F $\dfrac{x-4}{x-3} = x$

T4 Gegeven is de functie $f(x) = 2 - 4x^3$.
a Vermenigvuldig de grafiek van f ten opzichte van de x-as met $\frac{1}{2}$ en verschuif de verkregen grafiek 3 naar beneden. Geef het functievoorschrift dat bij de beeldgrafiek hoort.
b Welke twee transformaties en in welke volgorde moet je op de grafiek van f toepassen om de grafiek van $h(x) = 2x^3$ te krijgen?

T5 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 10$.
Van een rechthoek $ABCD$ liggen de hoekpunten A en B op de x-as, de hoekpunten C en D liggen op de grafiek van f.
Bereken de hoogte van de rechthoek in het geval $AB = 14$.

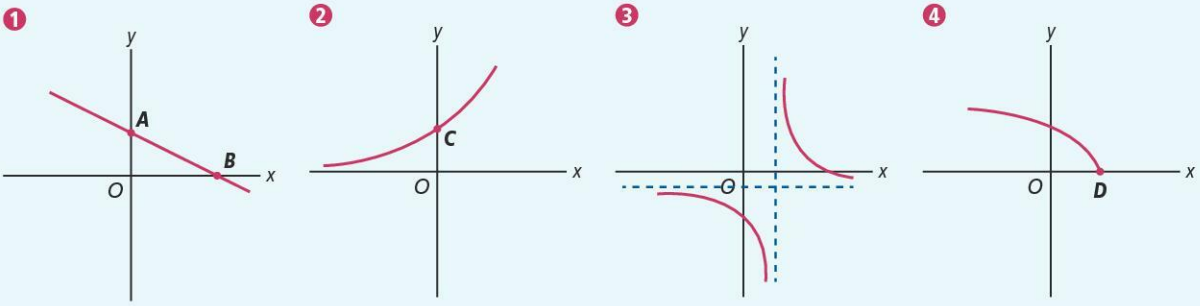


© Noordhoff Uitgevers bv

T6 De grafieken horen bij de functievoorschriften:

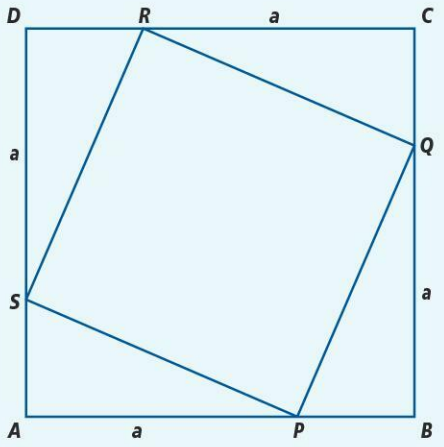
$f(x) = 3 \cdot 1{,}5^x$ $\quad$ $g(x) = \sqrt{9 - 2x}$

$h(x) = -1 + \dfrac{1}{x - 2}$ $\quad$ $k(x) = 3 - \frac{1}{2}x$



a Welke grafiek hoort bij welk functievoorschrift?
b Bereken exact de coördinaten van de punten die met de letters A, B, C of D zijn aangegeven.
c Twee grafieken hebben een horizontale asymptoot. Geef een vergelijking van die asymptoten.
d Geef het domein en het bereik van elk van de vier functies.
e Los de ongelijkheid $f(x) < 10$ op.

T7 In de tekening is vierhoek $ABCD$ een vierkant met $AB = 6$ en $AP = BQ = CR = DS = a$.



a Leg uit waarom $PQRS$ ook een vierkant is.
b Druk AS en de oppervlakte van $\triangle APS$ uit in a.
c De oppervlakte O van vierkant $PQRS$ is een functie van a. Het functievoorschrift is $O(a) = 2a^2 - 12a + 36$. Toon dat aan.
d Bereken de minimale oppervlakte van $PQRS$ en de waarde van a waarvoor dit minimum wordt bereikt.
e Geef het domein en het bereik van O.
f Bereken voor welke waarden van a de oppervlakte van vierkant $PQRS$ groter is dan 30.

© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt het domein en het bereik van een functie vaststellen.

E1 Geef van elke functie het domein en het bereik.
Geef je antwoorden in de intervalnotatie.

a $f(x) = x^2 - 8x$

b $g(x) = \dfrac{45}{x^2 + 9}$

c $h(x) = -2 + \sqrt{4x - 30}$

d $k(x) = 20 - 5 \cdot 0{,}8^x$

Je kunt de vergelijkingen van de asymptoten van een grafiek vinden.

E2 De grafieken van de volgende functies hebben één of meerdere asymptoten.
Geef van elke asymptoot een vergelijking.

a $f(x) = 4 + \dfrac{5}{x - 2}$

b $g(x) = 18 - \dfrac{6}{7x + 14}$

c $h(x) = \dfrac{12}{x^2 + 9}$

d $k(x) = 200 - 8 \cdot 0{,}7^x$

Je kunt het functievoorschrift opstellen als je de grafiek verschuift of vermenigvuldigt ten opzichte van de *x*-as.

E3 Gegeven is de functie $f(x) = -1\frac{1}{2}x + 5$.

a De grafiek van f wordt 6 omlaag verschoven.
Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek.

b De grafiek van f wordt 4 naar links verschoven.
Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek.

c De grafiek van f wordt met -2 vermenigvuldigd ten opzichte van de x-as en daarna 6 omlaag verschoven.
Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek.

d De grafiek van f wordt 7 naar rechts verschoven en daarna met 4 vermenigvuldigd ten opzichte van de x-as.
Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek.

Je kunt uit de vraagstelling opmaken of je een vergelijking met je rekenmachine mag oplossen.

E4 **a** Los exact op.

A $-\dfrac{2}{x} + x = 1$

B $x = 2 + \sqrt{x - 1}$

C $2x^3 - 5x^2 + 3x = 0$

b Los op.

D $\dfrac{x}{x + 4} = \dfrac{5}{x - 3}$

E $(2x - 3)^4 = \sqrt{x + 20}$

F $0{,}3x^3 - 8x^2 + x = 10$

© Noordhoff Uitgevers bv

E5 In de figuur ligt punt K op de lijn met vergelijking $y = -\frac{1}{2}x + 5$. Punt K is een hoekpunt van rechthoek $OAKB$ waarbij A op de positieve x-as en B op de positieve y-as ligt.

a Neem $A(3, 0)$
Bereken de exacte coördinaten van B en K en de oppervlakte van rechthoek $OAKB$.

b Neem $A(\sqrt{2}, 0)$ en bereken de exacte oppervlakte van rechthoek $OAKB$.

c Kies $A(x, 0)$.
Geef het functievoorschrift van de functie O die bij de oppervlakte van rechthoek $OAKB$ hoort.

d Geef het domein van de functie O.

e Bereken exact bij welke waarde van x de oppervlakte maximaal is. Hoe groot is de maximale oppervlakte?

E6 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3x}$

Vermenigvuldig de grafiek van f ten opzichte van de x-as met 3 en verschuif de verkregen grafiek 4 omlaag.

a Van welke functie heb je nu de grafiek gekregen?

b Welke functie krijg je als je de transformaties in omgekeerde volgorde toepast?

c Welke transformaties en in welke volgorde moet je op de grafiek van f toepassen om de grafiek van $g(x) = \frac{1}{x}$ te krijgen?

E7 De grafiek van functie g is ontstaan door een verschuiving en een vermenigvuldiging op de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$ toe te passen.
g heeft domein $[1, \rightarrow\rangle$ en bereik $\langle\leftarrow, 3]$ en de grafiek gaat door het punt $(2, 1)$.

a Waarom is $(1, 3)$ het randpunt van de grafiek van g?

b Het functievoorschrift van g heeft de vorm $g(x) = a\sqrt{x - b} + c$.
Welke waarde heeft b? En welke waarde heeft c?

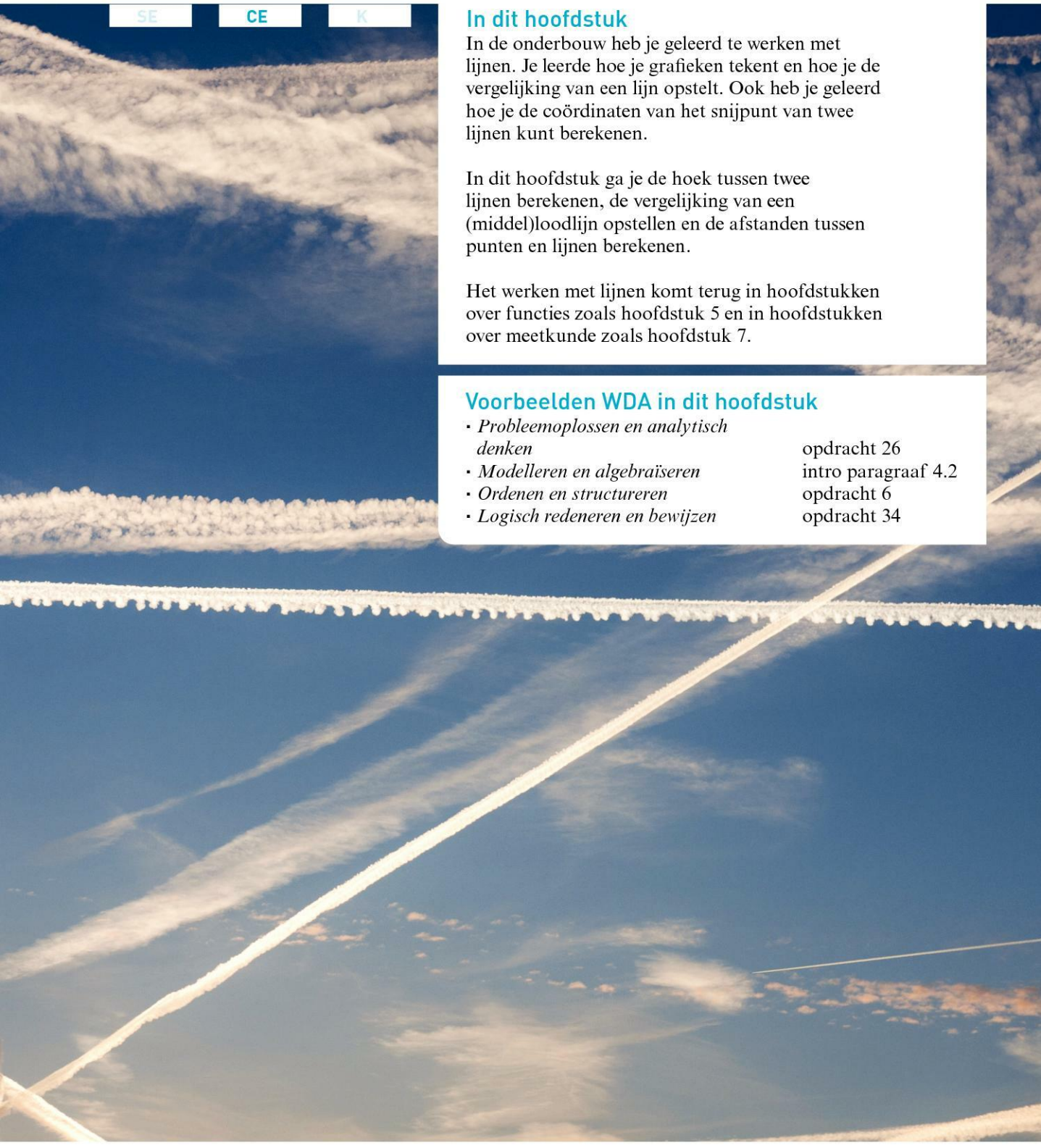
c Geef het functievoorschrift van g.

© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

Lijnen 4

SE CE K



In dit hoofdstuk

In de onderbouw heb je geleerd te werken met lijnen. Je leerde hoe je grafieken tekent en hoe je de vergelijking van een lijn opstelt. Ook heb je geleerd hoe je de coördinaten van het snijpunt van twee lijnen kunt berekenen.

In dit hoofdstuk ga je de hoek tussen twee lijnen berekenen, de vergelijking van een (middel)loodlijn opstellen en de afstanden tussen punten en lijnen berekenen.

Het werken met lijnen komt terug in hoofdstukken over functies zoals hoofdstuk 5 en in hoofdstukken over meetkunde zoals hoofdstuk 7.

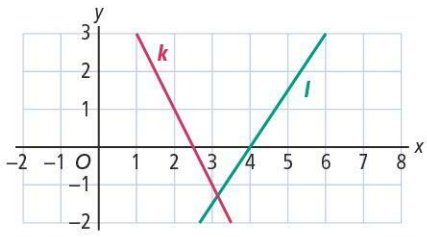
Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

• *Probleemoplossen en analytisch denken*	opdracht 26
• *Modelleren en algebraïseren*	intro paragraaf 4.2
• *Ordenen en structureren*	opdracht 6
• *Logisch redeneren en bewijzen*	opdracht 34

© Noordhoff Uitgevers bv

V1

a Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van lijn l?
b Bereken het startgetal van l en geef een formule van l.
c Stel een formule op van lijn k.
d Lijn m is evenwijdig met k en gaat door punt $(-3, -4)$.
Stel een formule van m op.
e Lijn n gaat door de punten $(-2, 0)$ en $(6, 4)$.
Stel een formule van n op.

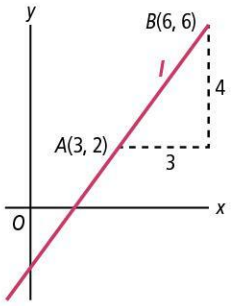


Theorie

Formules van de vorm $y = mx + n$ zijn lineaire formules.
De grafiek is een rechte lijn met richtingscoëfficiënt m.
De lijn snijdt de y-as in het punt $(0, n)$.
$y = mx + n$ heet ook wel de vergelijking van de lijn.

Voorbeeld

Lijn l gaat door de punten $A(3, 2)$ en $B(6, 6)$.
Stel een vergelijking van l op.



Oplossing

Tussen A en B neemt de x-coördinaat met 3 toe en de y-coördinaat met 4.
Als x met 1 toeneemt, dan is de toename van y gelijk aan $\frac{4}{3}$.

Een vergelijking van l is van de vorm $y = \frac{4}{3}x + b$.

Invullen van de coördinaten van $A(3, 2)$ in $y = \frac{4}{3}x + b$ geeft

$2 = \frac{4}{3} \cdot 3 + b$ ofwel $2 = 4 + b$ dus $b = -2$.

Een vergelijking van l is $y = \frac{4}{3}x - 2$.

V2 Stel een vergelijking op van lijn l.

a l gaat door $(0, 7)$ en heeft richtingscoëfficiënt -3.

b l gaat door $(0, 13\frac{1}{2})$ en $(1, -5)$.

c l gaat door $(-2, 1)$ en $(4, -4)$.

d l gaat door $(4, 1)$ en $(-1, -1)$.

V3 Gegeven is de vergelijking $2x - 3y = 12$.
Laat zien dat dit de vergelijking van een lijn is door de vergelijking te herleiden tot $y = \frac{2}{3}x - 4$.

V4 Gegeven zijn lijn l met vergelijking $y = 2x + 1$ en lijn m met vergelijking $y = 8 - 1\frac{1}{2}x$. Door het stelsel $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 8 - 1\frac{1}{2}x \end{cases}$ op te lossen krijg je de coördinaten van het snijpunt P van l en m.

a Bereken de x-coördinaat van P door de vergelijking $2x + 1 = 8 - 1\frac{1}{2}x$ op te lossen.
b Bereken de y-coördinaat van P.

© Noordhoff Uitgevers bv

V5 Gegeven is het stelsel $\begin{cases} 4x + y = 9 \\ 6x - 2y = 3 \end{cases}$

a Herschrijf de eerste vergelijking in de vorm $y = mx + n$.

b Substitueer het resultaat van opdracht a in $6x - 2y = 3$.

c Los de vergelijking van opdracht b op.

d Bereken de y-waarde van de oplossing.

Aanpak

Hoe bereken je de oplossing van een stelsel vergelijkingen?

1 Schrijf beide vergelijkingen in de vorm $y = mx + n$ en stel deze aan elkaar gelijk.
Je kunt ook één van de vergelijkingen in de vorm $y = mx + n$ schrijven en substitueren in de andere vergelijking.

2 Los de x-waarde uit de gevonden vergelijking op.

3 Vul de gevonden x-waarde in één van de vergelijkingen in en bereken de y-waarde.

Voorbeeld

Bereken de oplossing van het stelsel $\begin{cases} 4x - 2y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$

Oplossing 1

1 Uit $4x - 2y = 1$ volgt $y = 2x - \frac{1}{2}$.

Uit $x + y = 4$ volgt $y = 4 - x$.

Gelijkstellen geeft $2x - \frac{1}{2} = 4 - x$.

2 $3x = 4\frac{1}{2}$ dus $x = 1\frac{1}{2}$

3 $y = 4 - 1\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$

Dus is de oplossing $x = 1\frac{1}{2}$ en $y = 2\frac{1}{2}$.

Oplossing 2

1 Uit $x + y = 4$ volgt $y = 4 - x$. Dit substitueren in $4x - 2y = 1$ geeft $4x - 2(4 - x) = 1$.

2 Dus $6x = 9$ ofwel $x = 1\frac{1}{2}$.

3 $y = 4 - 1\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$

Dus is de oplossing $x = 1\frac{1}{2}$ en $y = 2\frac{1}{2}$.

V6 Los exact op.

a $\begin{cases} y = -0{,}5x + 4 \\ y = 1{,}5x \end{cases}$

b $\begin{cases} y = 2x - 8 \\ x + y = 7 \end{cases}$

c $\begin{cases} x - 3y = 8 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

d $\begin{cases} y = 4x - 6 \\ 2x - 5y = 12 \end{cases}$

© Noordhoff Uitgevers bv

4.1 Vergelijking van een lijn

Je leert
- welke vormen er zijn voor de vergelijking van een lijn
- hoe je de vergelijking van een lijn herleid tot een andere vorm

Leerroutes
- ondersteunend: 1—2—3—04—4—5—7—08—8—9
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7—8—9—10
- uitdagend: 1—3—5—6—7—8—9—10—U1—U2

De tijd die nodig is voor een bergwandeling is te berekenen met de regel van Naismith:
neem de tijd die voor dezelfde afstand op een vlakke weg nodig is en tel er 20 minuten per 100 meter stijging bij op.
Freek en Yael maken een wandeling van 4 uur. Op vlak terrein is hun wandeltempo 5 km per uur.
- Leg uit dat het verband tussen de afstand a in km en het aantal gestegen meters h wordt gegeven door de formule $4 = \frac{1}{5}a + \frac{1}{300}h$.

1 Bij lijn l hoort de vergelijking $y = -2\frac{1}{2}x + 5$.

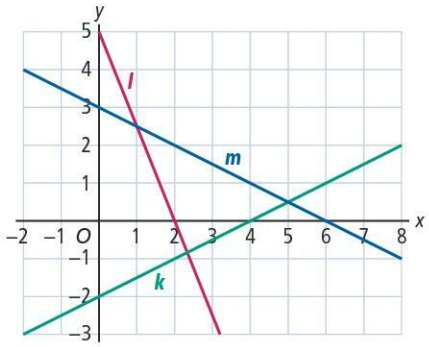
a Controleer met een berekening dat l de x-as snijdt in (2, 0) en de y-as in (0, 5).

b Stel een vergelijking op lijn m.

c Stel een vergelijking op van lijn k.

d Laat zien dat je de vergelijking van l kunt schrijven als $5x + 2y = 10$.

e Geef vergelijkingen van m en k in de vorm $ax + by = c$ met a, b en c gehele getallen.



2 Deze opdracht gaat over de lijnen k, l en m uit opdracht 1.

Door de vergelijking $5x + 2y = 10$ links en rechts door 10 te delen ontstaat de vergelijking $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$.

a Omschrijf hoe je in de laatste vergelijking de coördinaten van de snijpunten van l met de beide assen kunt herkennen.

b Schrijf de vergelijkingen van m en k in de vorm $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

c In welke punten snijdt lijn n: $\frac{x}{-6} + \frac{y}{3} = 1$ de assen?

d Lijn j snijdt de assen in de punten (9, 0) en (0, −4).
Geef een vergelijking van j in de vorm $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ en in de vorm $ax + by = c$ met a, b en c gehele getallen.

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Een vergelijking van een lijn kun je op verschillende manieren weergeven.

- Een vergelijking van een lijn kun je schrijven als $ax + by = c$.
- Als de lijn niet evenwijdig is aan de verticale as, kun je de vergelijking ook schrijven als $y = mx + n$.
- Als een lijn de assen snijdt in $(p, 0)$ en $(0, q)$ met $p \neq 0$ én $q \neq 0$, dan kun je de vergelijking schrijven als $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

Voorbeeld

Lijn l snijdt de assen in $(-4, 0)$ en $(0, 8)$.

Geef een vergelijking van l in de vorm $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ en in de vorm $y = mx + n$.

Oplossing

Er geldt l: $\frac{x}{-4} + \frac{y}{8} = 1$.

Links en rechts vermenigvuldigen met 8 geeft $-2x + y = 8$, dus $y = 2x + 8$.

3 H

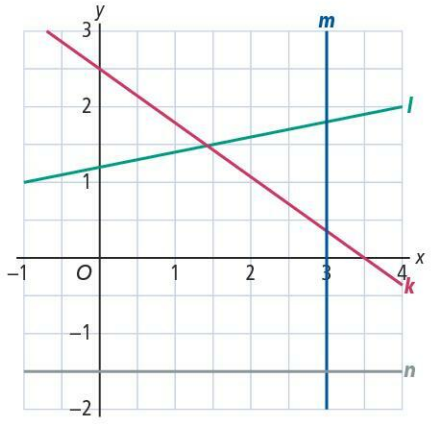
a Schrijf $y = -\frac{2}{3}x + 7$ in de vorm $ax + by = c$, met a, b en c gehele getallen.

b Schrijf $y = -2x + 3$ in de vorm $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

c Schrijf $\frac{x}{2\frac{1}{2}} + \frac{y}{-1} = 1$ in de vorm $y = mx + n$.

Ondersteunende route → maak opdracht 04

4 Geef bij elk van de lijnen in het assenstelsel een vergelijking.



5 H

Geef drie vormen van de vergelijking van de lijn door de twee punten.

a $(6, 0)$ en $(0, 18)$

b $(0, 4)$ en $(1, 3)$

c $(-4, 0)$ en $(0, 20)$

d $(-5, 0)$ en $(0, -7\frac{1}{2})$

e $(-4, 2)$ en $(2, -7)$

f $(9, -1)$ en $(-1, 4)$

© Noordhoff Uitgevers bv

6 Bij een lijn hoort een vergelijking van de vorm $ax + by = c$.

a Wat kun je over de ligging van de lijn in het assenstelsel concluderen als a gelijk is aan nul en b en c niet?

b Wat kun je over de ligging van de lijn in het assenstelsel concluderen als b gelijk is aan nul en a en c niet?

c Van wat voor soort verband is er sprake als c gelijk is aan nul en a en b niet?

d Onderzoek wat er aan de hand is als van a, b en c in de vergelijking $ax + by = c$ er twee gelijk zijn aan nul en één niet.

7 Bij lijn l hoort de vergelijking $3x - 4y = -18$.

a Bereken de coördinaten van de snijpunten van l met de assen.

b Teken l in een assenstelsel.

c Bij lijn m hoort de vergelijking $7y - 5x = 19$.
Bereken de coördinaten van de snijpunten van m met de assen.

d Teken m in het assenstelsel van opdracht b.

e Bereken de coördinaten van het snijpunt van l en m.

Ondersteunende route → maak opdracht O8

8 Gegeven zijn de lijnen l: $y = 4x - 5$ en m: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.
Onderzoek wat het verband is tussen p en q in het geval de lijnen evenwijdig zijn.

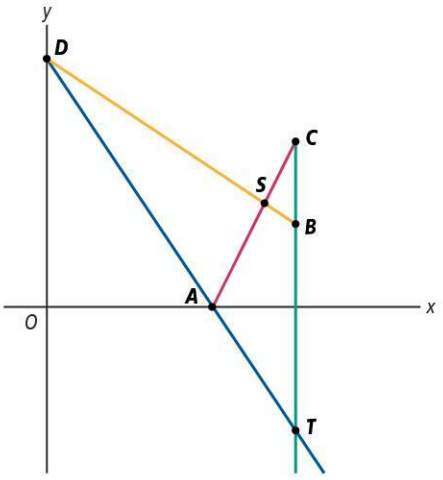
9 Gegeven zijn de punten $A(8, 0)$, $B(12, 4)$, $C(12, 8)$ en $D(0, 12)$.

a Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen AC en BD.

b De lijnen AD en BC snijden elkaar in het punt T.
Bereken de coördinaten van T.

10 Gegeven zijn voor elke waarde van c de lijnen $y - x = c$ en de lijn $2x - y = 4$.
Druk de coördinaten van het snijpunt uit in c.

Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2



© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O4

a Lijn k gaat door $(-2, 3)$ en heeft richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{2}$.
Waarom is het handig om voor een vergelijking van k de vorm $y = ax + b$ te gebruiken?

b Stel een vergelijking op van k.

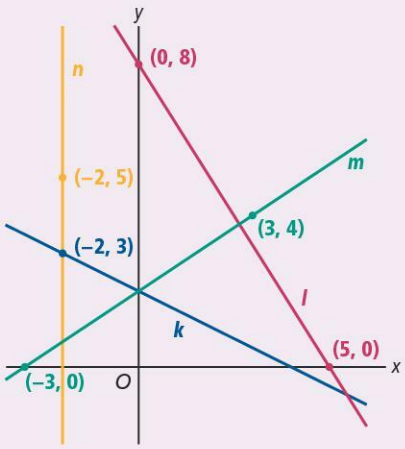
c Lijn l snijdt de x-as in $(5, 0)$ en de y-as in $(0, 8)$.
Waarom is de vorm $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ handig voor lijn l?

d Stel een vergelijking op van l.

e Lijn m snijdt de x-as in $(-3, 0)$ en gaat door $(3, 4)$.
Kies een handige vorm en stel een vergelijking van m op.

f Lijn n gaat door de punten $(-2, 3)$ en $(-2, 5)$.
Leg uit dat bij n een vergelijking van de vorm $x = c$ hoort.

g Geef een vergelijking van n.



O8 Gegeven zijn de lijnen k: $3x + 2y = 7$ en l: $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$.

a Bereken van beide lijnen de richtingscoëfficiënt.

b Wat weet je nu van deze twee lijnen?

Uitdagende opdrachten

U1

a Gegeven is de familie van lijnen $p(x - 3) + q(y - 4) = 0$ waarbij p en q willekeurige getallen zijn.
Waarom ligt het punt $(3, 4)$ op elk van de lijnen?

b Gegeven is de familie van lijnen $p(x + y - 7) + q(2x + y + 2) = 0$ waarbij p en q willekeurige getallen zijn.
Toon aan dat alle lijnen van deze familie door één punt gaan.

U2 Gegeven is $\triangle ABC$ met $A(-3, 4)$ en $B(5, 14)$.
Lijn k gaat door het midden van lijnstuk AB en snijdt lijn BC in $(10, 4)$. Lijn AC is evenwijdig met k.
Bereken exact de coördinaten van punt C.

© Noordhoff Uitgevers bv

4.2 Elimineren

Je leert
- hoe je een stelsel vergelijkingen met elimineren oplost
- wat een afhankelijk en een strijdig stelsel is

Leerroutes
- ondersteunend: 11—12—O13—13—14—15—O16—18
- doorlopend: 11—12—13—14—15—16—17—18
- uitdagend: 11—13—15—16—17—18—U3—U4

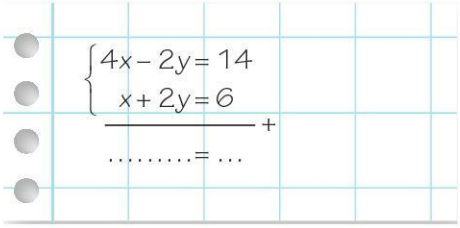
Vier volwassenen en drie kinderen gaan naar de film. Ze betalen 51 euro. Twee volwassenen en twee kinderen betalen 28 euro.
- Hoe duur zijn de kaartjes?

11 Wesley koopt 3 flessen sinas en 4 zakken chips voor 8,60 euro. Jeran betaalt voor 2 flessen sinas en 3 zakken chips 6,10 euro. Als s de prijs in euro's is van één fles sinas en c de prijs is van één zak chips dan kun je dit schrijven als $\begin{cases} 3s + 4c = 8{,}6 \\ 2s + 3c = 6{,}1 \end{cases}$

a Hoeveel moet je betalen voor 5 flessen sinas en 7 zakken chips?
b En hoeveel voor één fles sinas en één zak chips?
c Waarom geldt $6s + 8c = 17{,}2$?
d En waarom geldt $6s + 9c = 18{,}3$?
e Bereken met behulp van de vergelijkingen uit de opdrachten c en d de prijs van één zak chips.
f Bereken de prijs van één fles sinas.

12 Gegeven is het stelsel $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

Op het blaadje zijn de beide kanten van de eerste vergelijking met 2 vermenigvuldigd en worden de vergelijkingen opgeteld.



a Geef het resultaat van de optelling en los het stelsel op.
b Waarom is het handig om de eerste vergelijking met 2 te vermenigvuldigen?
c Los op deze manier het stelsel $\begin{cases} 2x - 5y = 12 \\ 6x + y = 4 \end{cases}$ op door de eerste vergelijking met 3 te vermenigvuldigen.
d Los het stelsel uit opdracht c nog eens op door de tweede vergelijking met 5 te vermenigvuldigen.

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Naast het oplossen van een stelsel door gelijkstellen of door substitutie is er nog een andere aanpak mogelijk.
Door de vergelijkingen van het stelsel handig te combineren kun je een vergelijking krijgen met één variabele. Soms moet je daartoe één of beide vergelijkingen met een getal vermenigvuldigen. Met deze aanpak elimineer je, net als bij substitutie, een variabele.

Voorbeeld

Los exact op $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 5x + 3y = -1 \end{cases}$

Oplossing

$\begin{cases} 15x - 10y = 35 \quad \text{(keer 5)} \\ 15x + 9y = -3 \quad \text{(keer 3)} \end{cases}$ –

$-19y = 38$

$y = -2$

$y = -2$ invullen in bijvoorbeeld $3x - 2y = 7$ geeft $3x - 2 \cdot -2 = 7$ en hieruit volgt $x = 1$.

De oplossing is $x = 1$ en $y = -2$.

Je kunt de oplossing controleren door deze in te vullen bij $5x + 3y = -1$.

$5 \cdot 1 + 3 \cdot -2 = 5 + -6 = -1$, klopt.

Ondersteunende route → maak opdracht O13

13 Los exact op.

H

a $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 2x + 5y = 22 \end{cases}$

b $\begin{cases} 3x + 2y = 40 \\ 2x - 3y = 44 \end{cases}$

c $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + 5y = 20 \end{cases}$

d $\begin{cases} -x + 2y - 15 = 0 \\ 2x + y - 10 = 0 \end{cases}$

e $\begin{cases} 5x - 2y = 34 \\ 2x - 5y = 1 \end{cases}$

f $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x + 5y = 9 \end{cases}$

14 Gegeven zijn de stelsels:

A $\begin{cases} x + y = -2 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$

B $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ y = \frac{1}{2}x - 2 \end{cases}$

C $\begin{cases} 7x - 4y + 2 = 0 \\ 2x + 5y + 19 = 0 \end{cases}$

D $\begin{cases} 2x - 4y - 3 = 0 \\ 9x + 2y = -6\frac{1}{2} \end{cases}$

a Bij welk stelsel is substitutie de handigste methode?
b Kies een geschikte aanpak en los de stelsels exact op.

© Noordhoff Uitgevers bv

15 Op het blaadje wordt het stelsel $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 4 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ opgelost.

a Is de bewering $0 \cdot x = 0$ waar voor $x = 3$?
Welke oplossing van het stelsel hoort hierbij?
b En welke oplossing hoort bij $x = -4$?
c Voor welke waarden van x is de bewering $0 \cdot x = 0$ waar?
d Wat volgt hieruit voor de lijnen die bij het stelsel horen?
e Laat zien dat het stelsel $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 4 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$ geen oplossingen heeft.
f Wat volgt hieruit voor de lijnen die bij het stelsel horen?

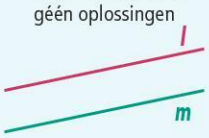
Substitutie van $y = -\frac{1}{2}x + 4$
in $x + 2y = 8$ geeft
$x + 2(-\frac{1}{2}x + 4) = 8$
ofwel $x - x + 8 = 8$ dus
$0 \cdot x = 0$.

Theorie

Je kunt bij het oplossen van een stelsel vergelijkingen uitkomen op een vergelijking van de vorm $0 \cdot x = a$ (of $0 \cdot y = a$).
Als $a = 0$, dan heeft het stelsel oneindig veel oplossingen en vallen de bijbehorende lijnen samen. Het stelsel heet dan **afhankelijk**.
Als $a \neq 0$ dan heeft het stelsel géén oplossing en zijn de bijbehorende lijnen evenwijdig. Het stelsel heet dan **strijdig**.

$0 \cdot x = 0$
oneindig veel
oplossingen

$0 \cdot x = a$ met $a \neq 0$
géén oplossingen



Ondersteunende route → maak opdracht O16

16 H
a Onderzoek voor elk stelsel het aantal oplossingen.

A $\begin{cases} 3x - 2y = 1\frac{1}{2} \\ y = 1\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \end{cases}$ B $\begin{cases} 8(x - y) = 4x - 3 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$

b Wat weet je nu van de lijnen die bij de stelsels horen?

17 H
Onderzoek voor welke waarde van p of q het stelsel strijdig of afhankelijk is.

a $\begin{cases} qx - y = -4 \\ 2y = 4x + 8 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} x + py = 3 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$

18 Een parabool met vergelijking $y = x^2 + bx + c$ gaat door de punten $(-2, -11)$ en $(3, 4)$.
Bereken exact b en c en geef de vergelijking van de parabool.

Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O13 Gegeven is het stelsel $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ -2x + 5y = -16 \end{cases}$

a Waarom is het handig om de vergelijkingen met 2 en 3 te vermenigvuldigen?
b Voer de vermenigvuldiging uit en tel de vergelijkingen bij elkaar op.
c Bereken y.
d Vul y in één van de twee vergelijkingen in om x te berekenen.

$\begin{cases} 3x + 2y = 5 & \text{(keer 2)} \\ -2x + 5y = -16 & \text{(keer 3)} \end{cases}$

$\begin{cases} 6x + 4y = \ldots \\ \ldots x + \ldots y = \ldots \end{cases}$ +

$\ldots y = \ldots$

O16 Gegeven is het stelsel $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ y = -\frac{2}{3}x + 2 \end{cases}$

a Los het stelsel op door de tweede vergelijking te substitueren in de eerste. Hoeveel oplossingen zijn er?
b Wat volgt hier uit voor de lijnen die bij het stelsel horen?
c Herleid de eerste vergelijking tot de vorm $y = ax + b$. Wat valt je op?
d Laat zien dat het stelsel $\begin{cases} 4x + 6y = 9 \\ 1{,}2x + 1{,}8y = 4{,}7 \end{cases}$ geen oplossingen heeft.
e Herleid de tweede vergelijking tot de vorm $4x + \ldots y = \ldots$.
f Wat weet je nu van de lijnen die bij het stelsel horen?

Uitdagende opdrachten

U3 Los exact op.

a $\begin{cases} 2x + 3y = 3\sqrt{2} \\ x \cdot \sqrt{2} - 2y = 3 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} x \cdot \sqrt{2} - 2y = 6 \\ x + y \cdot \sqrt{2} = 4 \end{cases}$

U4 Gegeven is het stelsel $\begin{cases} px - 4y = 8 \\ x - 2py = -17 \end{cases}$

De bijbehorende lijnen snijden elkaar in een punt dat op de lijn $y = x$ ligt.
Bereken exact de waarde van p.

© Noordhoff Uitgevers bv

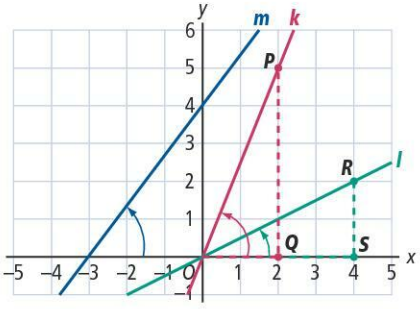
4.3 De hoek tussen twee lijnen

Je leert · hoe je de hoek tussen twee lijnen berekent

Leerroutes
· ondersteunend: 19—20—021—22—23—024—24—25
· doorlopend: 19—20—21—22—23—24—25—26
· uitdagend: 19—21—22—24—25—26—U5—U6

De helling van een weg kan op verschillende manieren worden weergegeven. Op verkeersborden zie je meestal een percentage of een verhouding.
· Welke helling is het steilst? Kies uit een helling van 20%, een helling van 1 : 5 of een helling van 20°.

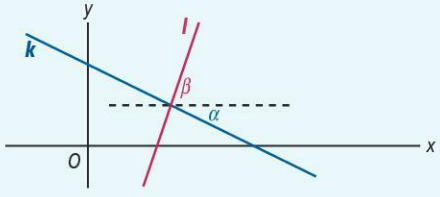
19 In het assenstelsel zijn de lijnen k, l en m getekend.
a Geef de richtingscoëfficiënt van k.
b Bereken $\tan(\angle POQ)$ in $\triangle OPQ$. Wat valt je op?
c Bereken de scherpe hoek die k met de x-as maakt. Rond af op hele graden.
d Bereken de scherpe hoek die l met de x-as maakt.
e Bereken de scherpe hoek die m met de x-as maakt.



20 **a** Schets in een assenstelsel de lijn n: $y = -\frac{1}{3}x$.
b Bereken in hele graden de scherpe hoek die n met de x-as maakt.

Theorie

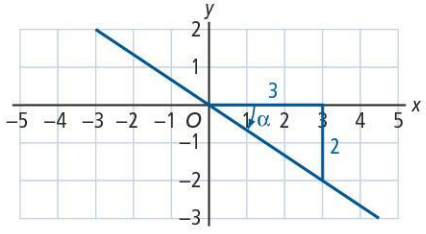
De hoek tussen twee lijnen is de scherpe of rechte hoek tussen die lijnen.
De hoek tussen de lijnen k en l noteer je met $\angle(k,l)$.
De hoek α tussen een lijn en een horizontale lijn kun je berekenen met behulp van de richtingscoëfficiënt van de lijn.



Voorbeeld

Bereken de hoek die lijn l: $2x + 3y = 0$ maakt met de x-as.

Oplossing
$2x + 3y = 0$ kun je herleiden tot $y = -\frac{2}{3}x$.
De richtingscoëfficiënt van l is dus $-\frac{2}{3}$.
Uit $\tan(\alpha) = \frac{2}{3}$ volgt $\alpha \approx 34°$.



© Noordhoff Uitgevers bv

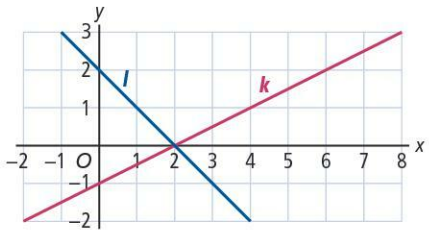
Ondersteunende route → maak opdracht O21

21 H Gegeven zijn de lijnen k: $4x + 5y = 0$, m: $4x = y + 2$ en n: $\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y = 1$.

Bereken in hele graden de hoeken die k, m en n maken met de x-as.

22
a Er zijn twee lijnen door (0, 0) die een hoek van 45° maken met de x-as. Geef van beide lijnen een vergelijking.
b Doe dit ook bij een hoek van 30°.
c Geef een vergelijking van de lijn door (0, 0) die een hoek van 0° maakt met de x-as.

23 De lijnen k: $y = \frac{1}{2}x - 1$ en l: $x + y = 2$ snijden elkaar in (2, 0).
a Bereken $\angle(k, x\text{-as})$.
b Bereken $\angle(l, x\text{-as})$.
c Bereken $\angle(k, l)$ in hele graden.

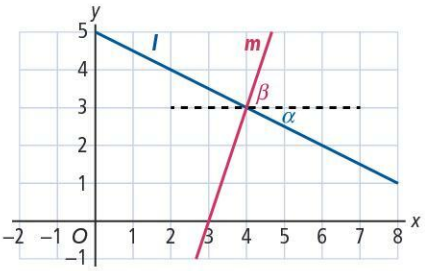


Aanpak

Hoe bereken je de hoek tussen twee lijnen?
1 Maak een schets met de beide lijnen.
2 Bereken van elke lijn de richtingscoëfficiënt.
3 Bereken met behulp van de richtingscoëfficiënt voor elke lijn de hoek met een horizontale lijn.
4 Gebruik de schets en bereken de scherpe of de rechte hoek die de lijnen met elkaar maken.

Voorbeeld

Bereken in hele graden de hoek tussen de lijnen l: $y = -\frac{1}{2}x + 5$ en m: $y = 3x - 9$.



Oplossing
1 Zie hiernaast.
2 De richtingscoëfficiënt van l is $-\frac{1}{2}$, die van m is 3.
3 Uit $\tan(\alpha) = \frac{1}{2}$ volgt $\alpha = 26{,}56\ldots°$.
Uit $\tan(\beta) = 3$ volgt $\beta = 71{,}56\ldots°$.
Rond tussendoor niet af.
4 $\alpha + \beta = 71{,}56\ldots° + 26{,}56\ldots° \approx 98{,}2°$ dus $\angle(l, m) \approx 180° - 98° = 82°$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O24

24 Bereken in hele graden de hoek tussen de lijnen.

H

a $3x - \frac{1}{2}y = 4$ en $2y + 3x = 6$

b $y = \frac{2}{5}x + 4$ en $2y + 5x = 1$

c $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$ en $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$

d $2y = x\sqrt{3} + 4$ en $y = -\frac{1}{2}x\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

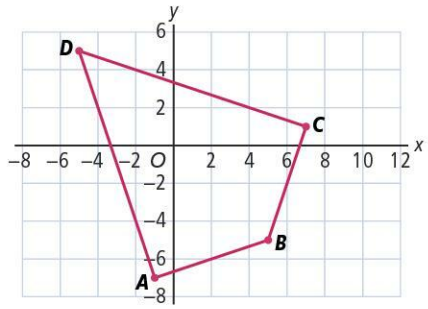
De grootte van hoeken moet je vaak afronden op hele graden. Een andere formulering die daarvoor gebruikt wordt is: 'Bereken in graden nauwkeurig'.

25 Van vierhoek $ABCD$ zijn de hoekpunten $A(-1, -7)$, $B(5, -5)$, $C(7, 1)$ en $D(-5, 5)$.

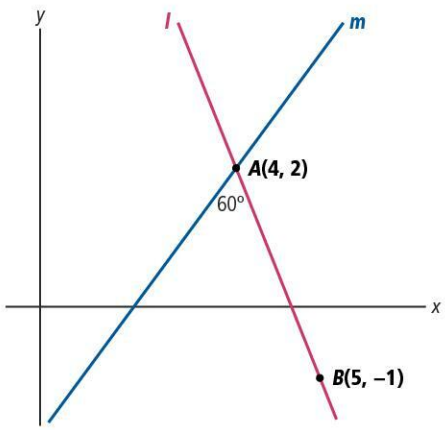
a Bereken $\angle A$.

b Bereken $\angle D$ in graden nauwkeurig.

c Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen AC en DC.



26 Lijn l is de lijn door de punten $A(4, 2)$ en $B(5, -1)$. De hoek tussen l en m is 60°.
Bereken de richtingscoëfficiënt van m in twee decimalen.
(*Ontleend aan CE havo wiskunde B pilot 2015 1e tijdvak*)



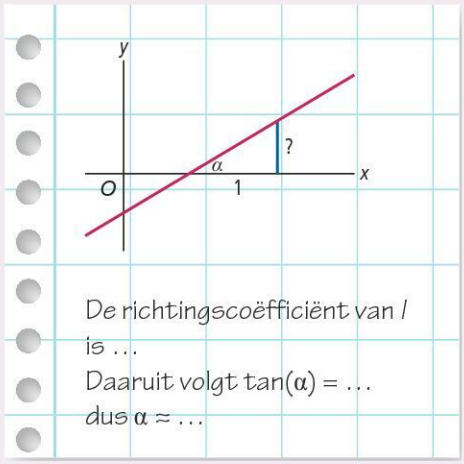
Uitdagende route → maak opdracht U5 en U6

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O21 Gegeven zijn de lijnen l: $3x - 5y = 5$, m: $2y = -5x + 4$ en n: $\frac{1}{4}x - \frac{1}{6}y = 1$.

- **a** Bereken de richtingscoëfficiënt van l.
- **b** Op het blaadje is l getekend. De horizontale rechthoekszijde van de getekende driehoek is 1. Hoe lang is de verticale rechthoekszijde?
- **c** De hoek die l maakt met de x-as is aangegeven met α. Geef $\tan(\alpha)$.
- **d** Bereken α. Rond af op hele graden.
- **e** Bereken op dezelfde manier de hoeken van m en n met de x-as.



O24 Gegeven zijn de lijnen l: $y = -3x + 5$ en m: $2x + 3y = 8$.

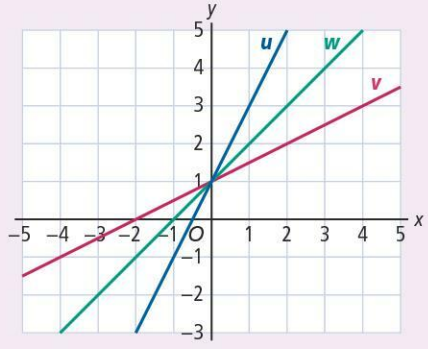
- **a** Herleid m tot de vorm $y = ax + b$.
- **b** Schets beide lijnen in een assenstelsel. Teken een horizontale lijn n door het snijpunt van l en m.
- **c** Geef de richtingscoëfficiënt van l.
- **d** Bereken $\angle(l, n)$.
- **e** Geef de richtingscoëfficiënt van m.
- **f** Bereken $\angle(m, n)$.
- **g** Gebruik je schets om de hoek tussen l en m te berekenen.

Uitdagende opdrachten

U5 Een lijn l snijdt lijn m: $2x - 3y = 9$ in het punt $S(6, 1)$.
l en m maken een hoek van 15° met elkaar.

- **a** Waarom zijn er twee lijnen l mogelijk?
- **b** Geef een vergelijking van elk van deze twee lijnen. Rond de getallen in je antwoorden af op twee decimalen.

U6 Gegeven zijn de lijnen u: $y = 2x + 1$, v: $y = \frac{1}{2}x + 1$ en w: $y = x + 1$.
Toon aan dat lijn w de deellijn is van de hoek tussen de lijnen u en v.



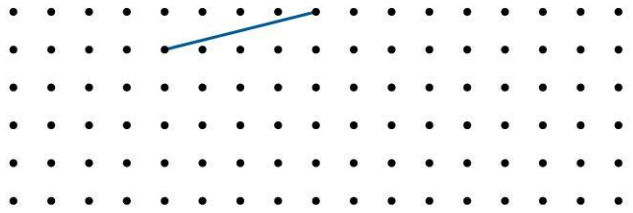
© Noordhoff Uitgevers bv

4.4 Loodrecht

Je leert
- wat het verband is tussen de richtingscoëfficiënten van twee elkaar loodrecht snijdende lijnen
- hoe je bij een lijn een vergelijking van de loodlijn door een gegeven punt opstelt

Leerroutes
- ondersteunend: 27—28—29—30—031—31—32—33
- doorlopend: 27—28—29—30—31—32—33—34
- uitdagend: 28—29—31—32—33—34—U7—U8

Het lijnstuk in het rooster is de zijde van een vierkant.
- Hoe gebruik je het rooster om de andere zijden van het vierkant te vinden?

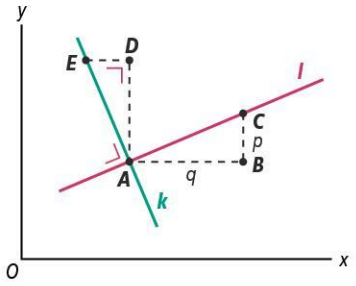


27 De lijnen k en l snijden elkaar loodrecht.
m_1 en m_2 zijn de richtingscoëfficiënten van k en l.
De lengte van lijnstuk BC is p en de lengte van lijnstuk AB is q.

a $\triangle ADE$ ontstaat uit $\triangle ABC$ door een draaiing van 90° om punt A.
Druk ED en AD uit in p en q.

b Druk m_1 en m_2 uit in p en q.

c Bereken $m_1 \cdot m_2$.

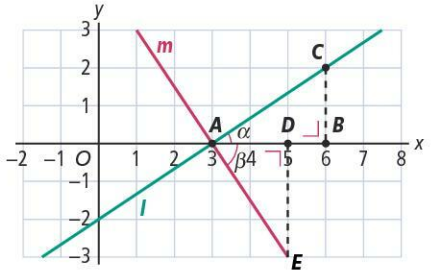


28 In opdracht 27 heb je aangetoond dat het product van de richtingscoëfficiënten gelijk is aan -1 als twee lijnen loodrecht op elkaar staan. In deze opdracht ga je het omgekeerde zien.
Gegeven zijn lijn l: $3y - 2x + 6 = 0$ en lijn m: $2y + 3x - 9 = 0$.
In de figuur zijn $\triangle ABC$ en $\triangle ADE$ getekend met daarin de hoeken α en β.

a Bereken het product van de richtingscoëfficiënten van l en m.

b Beredeneer dat in $\triangle ABC$ geldt dat $\angle ACB = \beta$.

c Beredeneer dat l en m elkaar loodrecht snijden.



Theorie

Als voor twee lijnen k en l met richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 geldt $m_1 \cdot m_2 = -1$, dan staan k en l **loodrecht** op elkaar.
Notatie: $k \perp l$
Het omgekeerde is ook waar:
Als twee lijnen k en l met richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 loodrecht op elkaar staan, dan geldt $m_1 \cdot m_2 = -1$.

© Noordhoff Uitgevers bv

29 Onderzoek welke lijnen loodrecht op elkaar staan.

H

k: $y = -2x + 7$ $\quad$ n: $x - 2y = 5$

l: $\frac{x}{3} + \frac{y}{9} = 1$ $\quad$ p: $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$

m: $x = \frac{1}{2}y - 4$ $\quad$ q: $-3x + y = -5$

30 Gegeven zijn lijn l: $2y - x = 1$ en punt $P(5, -4)$.

a Toon aan dat de lijn met vergelijking $y = -2x + b$ voor elke waarde van b loodrecht op l staat.

b Vul de coördinaten van P in en bereken b.

c Geef een vergelijking van de loodlijn door P op l.

Aanpak

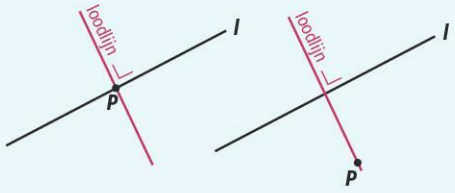
Hoe stel je een vergelijking op van de loodlijn door punt P op lijn l?

1 Bereken de richtingscoëfficiënt m_1 van lijn l.

2 Bereken de richtingscoëfficiënt m_2 van de loodlijn met behulp van de regel $m_1 \cdot m_2 = -1$.

3 Een vergelijking van de loodlijn is $y = m_2 \cdot x + b$.

4 Bereken b door de coördinaten van P in te vullen.



Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de loodlijn door $P(1, 2)$ op lijn l: $x + 3y = 7$.

Oplossing

1 $x + 3y = 7$, dus $3y = -x + 7$ ofwel $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$.

De richtingscoëfficiënt van l is $-\frac{1}{3}$.

2 Als m de richtingscoëfficiënt van de loodlijn is, dan is $-\frac{1}{3} \cdot m = -1$, dus $m = 3$.

3 Loodlijn $y = 3x + b$

4 Coördinaten van P invullen geeft $2 = 3 \cdot 1 + b$, dus $b = -1$.

Een vergelijking van de loodlijn is $y = 3x - 1$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O31

31 H

a Gegeven zijn lijn k: $2x - 3y = 5$ en punt $P(-2, -1)$.
Stel een vergelijking op van de loodlijn l door P op k.

b Gegeven zijn lijn m: $6x - 5y = 15$ en punt $Q(-1, 3)$.
Stel een vergelijking op van de loodlijn n door Q op m.

32 Gegeven zijn de lijnen l: $3x + 4y = 2$ en m: $px + qy = 3$.
Lijn m gaat door $(4, 1)$ en $m \perp l$.
Je gaat de waarden van p en q berekenen.

a Bereken de richtingscoëfficiënt van l.

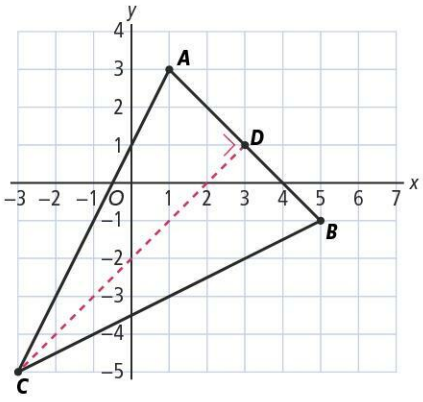
b Druk de richtingscoëfficiënt van m uit in p en q.

c m staat loodrecht op l.
Toon aan dat daaruit volgt dat $3p + 4q = 0$.

d m gaat door $(4, 1)$.
Welk verband tussen p en q volgt hieruit?

e Bereken exact p en q en geef de vergelijking van m.

33 De coördinaten van de hoekpunten van driehoek $\triangle ABC$ zijn $A(1, 3)$, $B(5, -1)$ en $C(-3, -5)$.
Lijn CD gaat door C en staat loodrecht op zijde AB. Een dergelijke lijn in een driehoek heet een hoogtelijn.
In een driehoek kun je drie verschillende hoogtelijnen tekenen.



a Geef een vergelijking van de lijn door A en B.

b Geef een vergelijking van lijn CD.

c Geef een vergelijking van de hoogtelijn uit A.

d Bereken exact de coördinaten van het snijpunt H van de hoogtelijnen uit A en C.

e Laat met een berekening zien dat de hoogtelijn uit B ook door H gaat.

34 Gegeven zijn de lijnen k: $3x - y = 1$ en l: $2x - 5y - 5 = 0$.

a Lijn m staat loodrecht op k en gaat door punt $P(2, 4)$.
Stel een vergelijking van m op.

b Lijn n is de loodlijn op l die door het punt $Q(0, 5)$ gaat.
Stel een vergelijking op van n.

c Teken k, l, m en n in een assenstelsel.

d Beredeneer dat de hoek tussen m en n gelijk is aan de hoek tussen k en l.

Uitdagende route → maak opdracht U7 en U8

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O31 Gegeven zijn lijn l: $2x + 3y = 8$ en punt $P(6, 4)$. In deze opdracht ga je de vergelijking van de loodlijn m door P op l opstellen.

a Op het blaadje is een begin gemaakt met de berekening van de richtingscoëfficiënt van l. Maak de berekening verder af.

b Bereken de richtingscoëfficiënt van m.

c Een vergelijking van m is $y = ax + b$.
Vul hierin de richtingscoëfficiënt in die je bij opdracht b hebt berekend.

d Vul de coördinaten van P in om b te berekenen.

e Geef een vergelijking van de loodlijn m.

$2x + 3y = 8$, dus $3y = \ldots$

ofwel $y = \ldots$

Daaruit volgt $rc_l = \ldots$

$l \perp m$ dus $rc_l \cdot rc_m = -1$

dus $rc_m = \ldots$

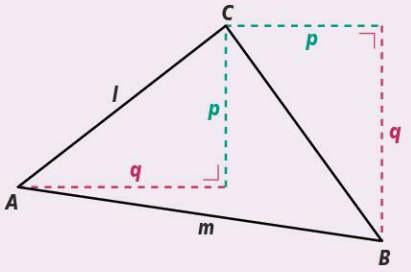
Uitdagende opdrachten

U7 Als de richtingscoëfficiënt van een lijn l gelijk is aan $\frac{p}{q}$ en de richtingscoëfficiënt van lijn m is gelijk aan $\frac{p-q}{p+q}$, dan is de hoek tussen l en m gelijk aan 45°.

a Ga na dat deze bewering klopt voor $p = 4$ en $q = 5$.

b Bekijk de figuur.
Druk de richtingscoëfficiënten van de lijnen AC, BC en AB uit in p en q.

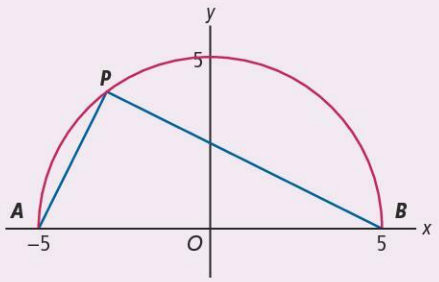
c Gebruik de antwoorden van opdracht b om de bewering aan het begin van de opdracht aan te tonen.



U8 De halve cirkel heeft vergelijking $y = \sqrt{25 - x^2}$.
De punten A en B liggen op de x-as, lijnstuk AB is de middellijn. Op de halve cirkel ligt het punt $P(-3, 4)$.

a Laat zien dat $AP \perp BP$.

b Stel het punt $X(p, q)$ ligt op de halve cirkel.
Laat zien dat $AX \perp BX$ voor elk punt $X(p, q)$.



© Noordhoff Uitgevers bv

4.5 Afstanden

Je leert
- hoe je de afstand tussen twee punten berekent
- hoe je de afstand van een punt tot een lijn berekent

Leerroutes
- ondersteunend: 35—36—37—038—39—40—041—41—42
- doorlopend: 35—36—37—38—39—40—41—42—43
- uitdagend: 35—37—38—40—41—42—43—U8—U9

Er wordt een nieuwe mast voor mobiele telefonie geplaatst op gelijke afstand van de drie dorpen Rottum, Kantens en Eppenhuizen.
- Waar zou jij de mast neerzetten?

35 **a** Teken in een assenstelsel de punten $A(1, 1)$, $B(6, 3)$, $P(-2, 3)$ en $Q(3, -1)$.
b Bereken exact AB en PQ.

Theorie

De afstand tussen twee punten $P(x_P, y_P)$ en $Q(x_Q, y_Q)$ bereken je met de stelling van Pythagoras.

De afstand is $PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$.

De afstand tussen P en Q noteer je ook wel met $d(P, Q)$ waarbij d komt van distance.

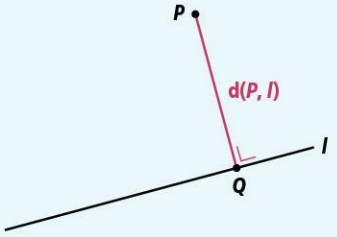
36 Bereken exact de afstand tussen de punten $S(-5, -6)$ en $T(7, -11)$.

37 **a** Teken in een assenstelsel de punten $A(1, 0)$, $B(5, 2)$ en $C(3, -1\frac{1}{2})$.
b Stel een vergelijking op van lijn l door A en B.
c Stel een vergelijking op van lijn m door C loodrecht op l.
d Bereken de coördinaten van het snijpunt Q van l en m.
e Bereken exact CQ, de afstand van C tot l.

Aanpak

Hoe bereken je $d(P, l)$, de afstand van een punt P tot een lijn l?

1 Stel een vergelijking op van de loodlijn m door P op l.
2 Bereken de coördinaten van het snijpunt Q van m en l.
3 Bereken PQ.
Deze afstand is de gevraagde afstand $d(P, l)$.



© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Bereken exact de afstand van punt $P(3, -2)$ tot lijn l: $y = 2x - 3$.

Oplossing

1 De loodlijn door P op l heeft vergelijking $y = -\frac{1}{2}x + b$. Invullen van de coördinaten van P hierin geeft $-2 = -\frac{1}{2} \cdot 3 + b$ dus $b = -\frac{1}{2}$. Een vergelijking van de loodlijn is $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

2 Snijpunt van l en m: $2x - 3 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ geeft $2\frac{1}{2}x = 2\frac{1}{2}$ ofwel $x = 1$.

Hieruit volgt $y = 2 \cdot 1 - 3 = -1$, dus het snijpunt is $Q(1, -1)$.

3 De gevraagde afstand is $\text{d}(P, l) = PQ = \sqrt{(1-3)^2 + (-1--2)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.

Ondersteunende route → maak opdracht 038

38 H

a Gegeven zijn punt $P(1, -2\frac{1}{2})$ en lijn l: $\frac{1}{4}x - \frac{1}{3}y = -1$.
Bereken exact $\text{d}(P, l)$.

b Gegeven zijn punt $Q(-2, 2)$ en lijn m: $2x - 3y = 3$.
Bereken exact $\text{d}(Q, m)$.

39

Gegeven zijn de evenwijdige lijnen l: $y = 2x - 7$ en m: $2x - y = -3$.

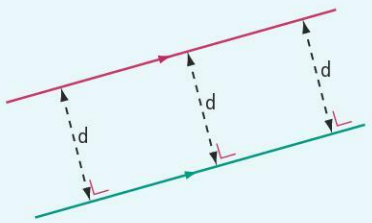
a Toon aan dat punt $P(3, -1)$ op l ligt.

b Bereken exact $\text{d}(P, m)$.

c Als je een ander punt P op l gekozen had, had je dan een andere afstand gevonden? Waarom?

Theorie

De afstand tussen twee evenwijdige lijnen is de afstand van een willekeurig punt op de ene lijn tot de andere lijn.



40 H

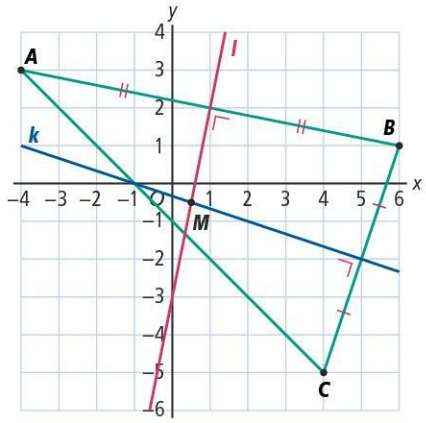
Gegeven zijn de lijnen l: $2x - 8y = -21$ en m: $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.
Bereken exact $\text{d}(l, m)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O41

41 In het assenstelsel is $\triangle ABC$ getekend met $A(-4, 3)$, $B(6, 1)$ en $C(4, -5)$. Ook zijn de middelloodlijnen k en l van respectievelijk de zijden BC en AB getekend.

a Stel een vergelijking op van k.
b Stel een vergelijking op van l.
c Bereken exact de coördinaten van het snijpunt M van k en l.
d Toon aan dat de middelloodlijn van lijnstuk AC ook door punt M gaat.
e Bereken exact AM, BM en CM.
f Door de hoekpunten van $\triangle ABC$ kun je een cirkel tekenen. Leg uit waarom M het middelpunt is van die cirkel.



42 Gegeven is lijn l: $x + 2y = 6$. Op l ligt een punt P dat even ver van $A(3, 8)$ als $B(9, 6)$ ligt. In deze opdracht ga je de coördinaten van P berekenen.

a Neem $P(x, \ldots)$ op l. Druk de y-coördinaat van P uit in x.
b Druk AP en BP uit in x.
c Welke vergelijking moet je oplossen om de x-coördinaat van P te berekenen?
d Los de vergelijking exact op.
e Geef de coördinaten van P.

43 Gegeven is lijn l: $y = \frac{1}{3}x + 4$ en het punt $P(6, 1)$.

a Teken l en P in een assenstelsel.
b Punt V is het snijpunt van de lijn $x = 6$ met l.
Punt H is het snijpunt van de lijn $y = 1$ met l.
Teken V en H.
c Bereken exact de coördinaten van V en H.
d Bereken exact HV.
e Bereken exact de oppervlakte van $\triangle HPV$.
f Gebruik de oppervlakte van $\triangle HPV$ om de afstand van P tot l exact te berekenen.

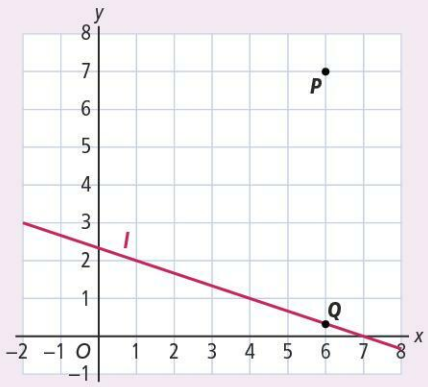
Uitdagende route → maak opdracht U9 en U10

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opgaven

O38 Gegeven zijn lijn l: $y = -\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$ en de punten P en Q.

a Bereken PQ.
b Waarom is de afstand van P tot l niet gelijk aan PQ?
c Met welk lijnstuk bereken je wel de juiste afstand?
d Stel een vergelijking op van de loodlijn door P op l.
e Bereken exact de coördinaten van het snijpunt S van deze loodlijn met l.
f Bereken exact PS.
g Hoe groot is de afstand van P tot l?
h Bereken op dezelfde manier de afstand van punt $R(6, -3)$ tot de lijn m: $x - 4y = -16$.



O41 Gegeven zijn de punten $A(2, -5)$ en $B(-4, 7)$.

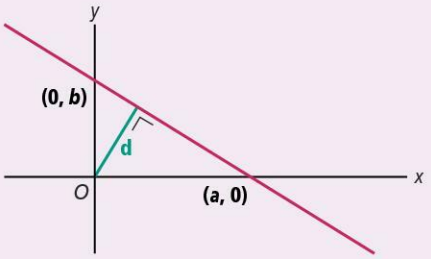
a Stel een vergelijking op van de lijn AB.
b Punt M is het midden van lijnstuk AB.
Bereken de coördinaten van M.
c Stel een vergelijking op van de lijn k door M, die loodrecht staat op lijn AB.
d Kies een willekeurig punt P op k en laat met een berekening zien dat P even ver van punt A als van punt B ligt.

Uitdagende opdrachten

U9 Gegeven is lijn l: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ met $a > 0$ en $b > 0$.

Laat zien dat voor de afstand d van $O(0, 0)$ tot lijn l geldt

$$d = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



U10 Gegeven is lijn k: $4x + 3y = 33$. Lijn l staat loodrecht op k en snijdt k op de y-as. Op l liggen twee punten A en B die op afstand $7\frac{1}{2}$ van k liggen.
Bereken exact de coördinaten van A en B.

© Noordhoff Uitgevers bv

44 Gegeven is de familie van lijnen l_m: $y = m(x - 4) + 3$.

a Waarom gaan al deze lijnen door het punt (4, 3)?

b Bereken exact voor welke waarden van m de lijn l_m de y-as snijdt tussen de punten (0, 1) en (0, 8).

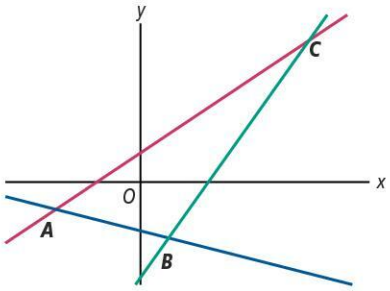
c Bereken exact voor welke waarden van m de lijn l_m de x-as snijdt tussen de punten (1, 0) en (8, 0).

45 Gegeven zijn de punten $A(-3,-1)$, en $C(6,8)$.

a Bereken exact de lengte van de zijden van $\triangle ABC$.

b Bereken in graden nauwkeurig de hoeken van $\triangle ABC$.

c Bereken exact de afstand van punt B tot de lijn AC.

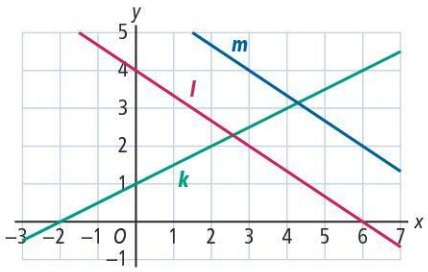


46 In een assenstelsel zijn de lijnen k, l en m getekend.
De lijnen l en m zijn evenwijdig.

a Stel een vergelijking op van elk van de lijnen k, l en m.

b Bereken $\angle(k, l)$ in graden nauwkeurig.

c Bereken algebraïsch $d(l, m)$.
Rond je antwoord af op één decimaal.



47 Gegeven zijn de lijnen l_p: $5x - 2y = p$ en m_q: $y = qx - 6$.

a Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van l_3 en m_1.

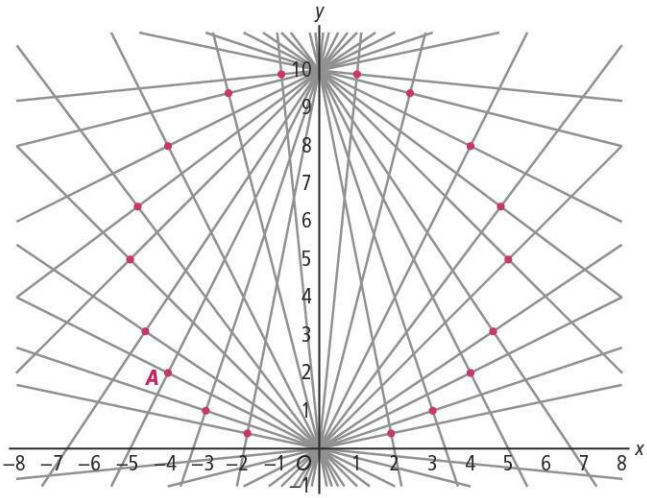
b Toon aan dat uit $\begin{cases} 5x - 2y = p \\ y = qx - 6 \end{cases}$ volgt $(5 - 2q)x = p - 12$.

c Gebruik opdracht b om te onderzoeken voor welke waarden van p en q het stelsel afhankelijk is.

d Bereken voor welke waarden van p en q het stelsel $\begin{cases} 5x - 2y = p \\ y = qx - 6 \end{cases}$ strijdig is.

e Voor welke waarden van p en q heeft het stelsel precies één oplossing?

© Noordhoff Uitgevers bv



48 Gegeven zijn voor elke $m \neq 0$ de lijnen $k_m : y = mx + 10$ en $l_m : y = -\frac{x}{m}$. Voor elke waarde van m is er één snijpunt.

Voor een aantal waarden van m zijn k_m en l_m met het bijbehorende snijpunt getekend. Het lijkt erop dat de snijpunten van k_m en l_m op een cirkel liggen. In deze opdracht ga je bewijzen dat dat het geval is.

a Geef het middelpunt en de straal van de mogelijke cirkel.

b Als je direct een bewijs ziet dat alle snijpunten op deze cirkel liggen, geef het dan.

c Als je niet direct een bewijs ziet, bekijk dan eerst een getallenvoorbeeld.
Neem $m = 2$. Punt A is het snijpunt van k_2 en l_2.
Bereken exact de coördinaten van A en laat zien dat A op de cirkel ligt.

d Wat je voor punt A gedaan hebt kun je ook in één keer voor alle snijpunten doen.
Druk de coördinaten van het snijpunt van k_m en l_m uit in m en laat zien dat het snijpunt op de cirkel ligt.

49 Gegeven zijn de lijn m: $y = x + 1$ en het punt $D(0, 7)$.
Van een rechthoek $ABCD$ is gegeven dat de diagonaal AC op lijn m ligt.
Door het kiezen van punt A op m is de rechthoek $ABCD$ vastgelegd.

a Leg uit hoe je na het kiezen van A de punten B en C kunt vinden.

b Er is één punt op m dat je niet als punt A kunt kiezen.
Leg dat uit en bereken de coördinaten van dat punt.

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Afhankelijk en strijdig stelsel

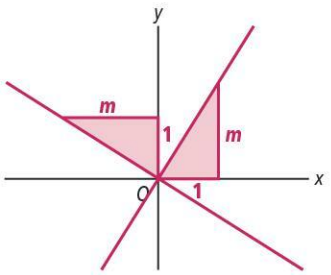
Een stelsel vergelijkingen dat oneindig veel oplossingen heeft, heet afhankelijk.
Een stelsel vergelijkingen dat geen oplossing heeft, heet strijdig.

S1 Wat zegt het aantal oplossingen van een stelsel lineaire vergelijkingen over de bijbehorende lijnen?

Theorie

Loodrecht

Twee lijnen $y = m_1x + n_1$ en $y = m_2x + n_2$ staan loodrecht op elkaar als $m_1 \cdot m_2 = -1$.
Het omgekeerde is ook waar:
Als twee lijnen k en l met richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 loodrecht op elkaar staan, dan geldt $m_1 \cdot m_2 = -1$.



S2 Lijn l heeft richtingscoëfficiënt $\frac{5}{7}$. Lijn m staat loodrecht op l.
Bereken de richtingscoëfficiënt van m.

Vaardigheid

Je kunt de vergelijking van een lijn herleiden tot een andere vorm.

De vergelijking van een lijn kun je in verschillende vormen geven.

- De vergelijking van een lijn kun je schrijven als $ax + by = c$.
- Als de lijn niet evenwijdig is aan de verticale as, kun je de vergelijking ook schrijven als $y = mx + n$.
- Als de lijn de assen snijdt in $(p, 0)$ en $(0, q)$ met $p \neq 0$ én $q \neq 0$, dan kun je de vergelijking schrijven als $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

S3 Stel van elke lijn een vergelijking op. Geef zo mogelijk drie verschillende vormen.

a Lijn k door de punten $(3, -2)$ en $(-1, 8)$.
b Lijn l door de punten $(0, -5)$ en $(7, 0)$.
c Lijn m door de punten $(3, 5)$ en $(3, 8)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheid

Je kunt een stelsel vergelijkingen met elimineren oplossen.

Je kunt een variabele elimineren door beide vergelijkingen met een geschikt getal te vermenigvuldigen en de resultaten bij elkaar op te tellen of van elkaar af te trekken.

Voorbeeld

Gegeven is het stelsel $\begin{cases} px + 2y = 4 \\ x - 5y = 7 \end{cases}$

a Los voor $p = 3$ het stelsel op.

b Onderzoek voor welke waarden van p het stelsel strijdig of afhankelijk is.

Oplossing

a
$$\begin{cases} 15x + 10y = 20 & \text{(keer 5)} \\ 2x - 10y = 14 & \text{(keer 2)} \end{cases} +$$
$$17x = 34 \quad \text{dus } x = 2$$

Dit invullen in bijvoorbeeld $x - 5y = 7$ geeft $2 - 5y = 7$ ofwel $-5y = 5$, dus $y = -1$.

b
$$\begin{cases} px + 2y = 4 \\ px - 5py = 7p & \text{(keer } p\text{)} \end{cases} -$$
$$(2 + 5p)y = 4 - 7p$$

Het stelsel is strijdig als $2 + 5p = 0$ dus als $p = -\frac{2}{5}$.

S4 Gegeven is het stelsel $\begin{cases} 3x - py = 7 \\ -x + 4y = q \end{cases}$

a Los het stelsel exact op voor $p = 2$ en $q = 1$.

b Voor welke waarden van p en q heeft het stelsel geen oplossingen?

c Voor welke waarden van p en q zijn er oneindig veel oplossingen?

Vaardigheid

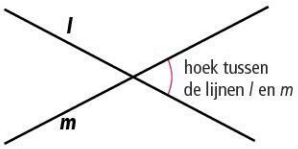
Je kunt de hoek tussen twee lijnen berekenen.

1 Maak een schets met de beide lijnen.

2 Bereken van elke lijn de richtingscoëfficiënt.

3 Bereken met behulp van de richtingscoëfficiënt voor elke lijn de hoek met een horizontale lijn.

4 Gebruik de schets en bereken in hele graden de scherpe of de rechte hoek die de lijnen met elkaar maken.



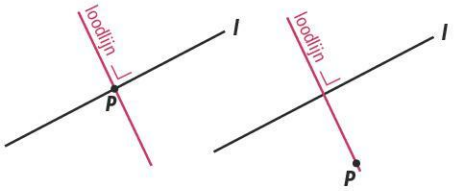
S5 Gegeven zijn de lijnen k: $y = 3x - 2$, l: $2x + 3y = 4$ en m: $x - 2y = 17$.
Bereken in graden nauwkeurig $\angle(k, l)$ en $\angle(k, m)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheid

Je kunt bij een lijn l een vergelijking van de loodlijn door een punt P opstellen.

1 Bereken de richtingscoëfficiënt m_1 van lijn l.
2 Bereken de richtingscoëfficiënt m_2 van de loodlijn met behulp van de regel $m_1 \cdot m_2 = -1$.
3 Een vergelijking van de loodlijn is $y = m_2 \cdot x + b$.
4 Bereken b door de coördinaten van punt P in te vullen.



Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de loodlijn k door $P(-4, 1)$ op lijn l: $4x + 3y = 12$.

Oplossing

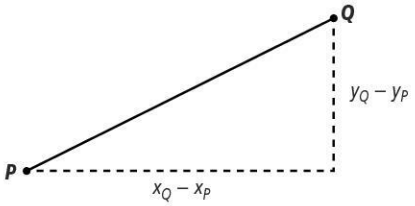
1 $m_1 = -\frac{4}{3}$
2 $k \perp l$ dus $m_2 = \frac{3}{4}$.
3 Een vergelijking van k is $y = \frac{3}{4}x + b$.
4 Uit $1 = \frac{3}{4} \cdot -4 + b$ volgt $b = 4$ en dus is k: $y = \frac{3}{4}x + 4$.

S6 Stel een vergelijking op van de loodlijn door punt $P(1, 3)$ op lijn m: $2x - 3y = 7$.

Vaardigheid

Je kunt de afstand tussen twee punten berekenen.

De afstand tussen twee punten $P(x_P, y_P)$ en $Q(x_Q, y_Q)$ is gelijk aan $PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$.



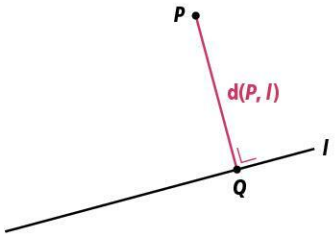
S7 Bereken exact de afstand tussen $P(-5, 1)$ en $Q(2, 5)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheid

Je kunt d(*P*, *l*), de afstand van een punt *P* tot een lijn *l* berekenen.

1 Stel een vergelijking op van de loodlijn m door P op l.
2 Bereken de coördinaten van het snijpunt Q van m en l.
3 Bereken PQ.
Deze afstand is de gevraagde afstand d(P, l).



Voorbeeld

Bereken exact de afstand van punt $P(7, 5)$ tot lijn l: $3x + y = 6$.

Oplossing

1 De richtingscoëfficiënt van l is -3 dus de richtingscoëfficiënt van loodlijn m is $\frac{1}{3}$.

m heeft als vergelijking $y = \frac{1}{3}x + b$. De coördinaten van P invullen geeft $5 = \frac{7}{3} + b$, dus $b = 2\frac{2}{3}$.

Een vergelijking van m is $y = \frac{1}{3}x + 2\frac{2}{3}$.

2 Substitutie van $y = \frac{1}{3}x + 2\frac{2}{3}$ in $3x + y = 6$ geeft $3x + \frac{1}{3}x + 2\frac{2}{3} = 6$ ofwel $x = 1$. Hieruit volgt $y = \frac{1}{3} \cdot 1 + 2\frac{2}{3} = 3$, dus het snijpunt van l en m is $Q(1, 3)$.

3 De afstand is
$\text{d}(P, l) = PQ = \sqrt{(7-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

S8 Gegeven zijn punt $P(1, 5)$ en de lijnen l: $x + 2y = -4$ en m: $y = -\frac{1}{2}x + 8$.

a Bereken exact d(P, l).
b Bereken exact d(l, m).

© Noordhoff Uitgevers bv

T1 Gegeven zijn de lijnen k: $\frac{x}{2\frac{1}{2}} + \frac{y}{4} = 1$ en l: $2x - 3y = 6$.

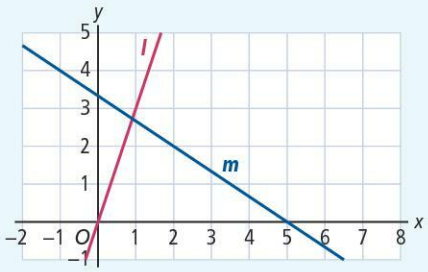
- **a** Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van k en l met de beide assen.
- **b** Schrijf de vergelijking van k in de vorm $ax + by = c$ en in de vorm $y = mx + n$.
- **c** Schrijf de vergelijking van l in de vorm $y = mx + n$ en in de vorm $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.
- **d** Lijn n is evenwijdig aan k en gaat door het punt $(5, 12)$. Geef een vergelijking van n.
- **e** Lijn r staat loodrecht op l en gaat door het punt $(3, -2)$. Geef een vergelijking van r.

T2 Los exact op.

- **a** $\begin{cases} y - 2x = -1 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$
- **b** $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ \frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$
- **c** $\begin{cases} 3x + 2(y + \frac{1}{2}) = 2 \\ -2x + 5y = -7 \end{cases}$
- **d** $\begin{cases} \frac{x}{-1} + \frac{y}{2} = 1 \\ 3y = x + 3 \end{cases}$

T3
- **a** Onderzoek of het stelsel $\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ y = -0{,}75x + 4 \end{cases}$ strijdig of afhankelijk is.
- **b** Bij het stelsel horen twee lijnen met vergelijkingen $3x + 4y = 12$ en $y = -0{,}75x + 4$. Wat kun je naar aanleiding van het antwoord bij opdracht a zeggen over de onderlinge ligging van de twee lijnen?

T4 De lijnen l en m vormen samen met de x-as een driehoek. Bereken de grootte van de hoeken van deze driehoek in graden nauwkeurig.



T5 Gegeven zijn lijn l: $4x - 10y = 158$ en punt $P(1, 2)$.
- **a** Stel een vergelijking op van loodlijn m door P op l.
- **b** Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van l en m.

© Noordhoff Uitgevers bv

T6 Gegeven zijn de lijn l: $2x + 3y = 8\frac{1}{2}$ en de punten $P(1, 0)$ en $Q(9, -5)$.

a Bereken $d(P, l)$ in één decimaal.

b Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van het lijnstuk PQ.

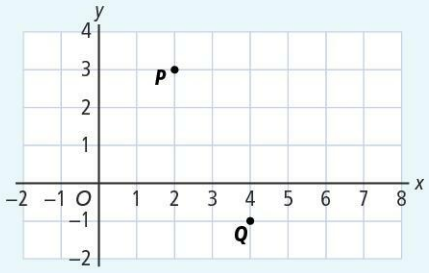
T7 Gegeven zijn de punten $P(2, 3)$ en $Q(4, -1)$.

a Bereken exact PQ.

b Stel een vergelijking op van de lijn l door P en Q.

c Bereken de afstand van de oorsprong tot l in één decimaal.

d Op l liggen twee punten die op afstand 10 van $R(-1, -1)$ liggen.
Bereken exact de coördinaten van deze punten.



T8 Gegeven is het stelsel vergelijkingen $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

a Los het stelsel exact op.

b Bij het stelsel kun je in een assenstelsel twee lijnen tekenen. Bereken de hoek die deze twee lijnen met elkaar maken in graden nauwkeurig.

T9 **a** Bereken exact de coördinaten van de punten op de lijn met vergelijking $y = 3x - 7$ die op afstand 4 van de x-as liggen.

b Bereken exact de coördinaten van de punten op de lijn met vergelijking $x + 2y = 8$ die even ver van beide assen liggen.

T10 De lijnen l, m en n sluiten de driehoek ABC in.

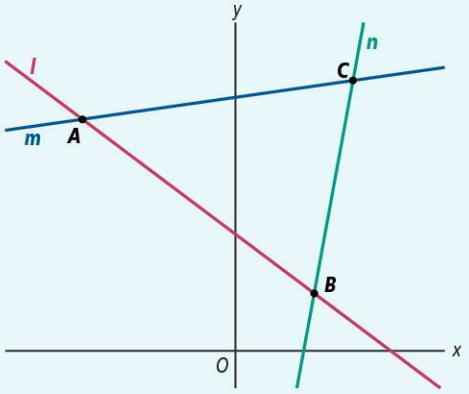
De vergelijking van l is $y = -\frac{3}{4}x + 3$.

m gaat door de punten $A(-4, 6)$ en $C(3, 7)$.

n gaat door de punten B en C.

De oppervlakte van $\triangle ABC$ is $18\frac{3}{4}$.

Stel een vergelijking op van n.



© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt een vergelijking van een lijn herleiden tot een andere vorm.

E1 Gegeven zijn vergelijkingen van drie verschillende lijnen.
Zoek de vergelijkingen die bij dezelfde lijn horen bij elkaar.

A $y = \frac{1}{2}x + 7$

B $7x - 2y = 14$

C $2x + 7y = 14$

D $\frac{x}{7} + \frac{y}{2} = 1$

E $x = \frac{2}{7}y + 2$

F $y = 3\frac{1}{2}x - 7$

G $x - 2y = -14$

H $y = -\frac{2}{7}x + 2$

Je kunt een stelsel vergelijkingen met elimineren oplossen.

E2 Los exact op.

a $\begin{cases} 2y = 3x - 8 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$

b $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$

c $\begin{cases} 2x - 3y = 17 \\ x - 6y - 7 = 0 \end{cases}$

d $\begin{cases} 2x + 5y = 25 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$

Je kunt de hoek tussen twee lijnen berekenen.

E3 Gegeven lijn l: $x + 3y = 6$ en lijn m: $y = \frac{2}{3}x + 1$.

a Bereken de hoek die l maakt met de x-as.

b Bereken de hoek die m maakt met de x-as.

c Bereken de hoek die l en m met elkaar maken.

Je kunt bij een lijn l een vergelijking van de loodlijn door een punt P opstellen.

E4 **a** Gegeven zijn de lijnen l: $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3\frac{1}{2}} = 1$ en m: $4x + 7y = 14$.

Toon aan dat l en m loodrecht op elkaar staan.

b Gegeven zijn lijn n: $2x - 5y = 3$ en punt $P(2, 3)$.
Geef een vergelijking van de loodlijn door P op n.

Je kunt de afstand tussen twee punten berekenen.

E5 Bereken exact de afstand tussen de punten $A(3, 7)$ en $B(-2, 14)$.

Je kunt d(P, l), de afstand van een punt P tot een lijn l berekenen.

E6 **a** Bereken exact de afstand van punt $P(-3, 7)$ tot lijn l: $3x + 2y = 44$.

b Lijn m is de lijn door de punten $(3, 2)$ en $(-6, 14)$.
Verder is gegeven punt $Q(10, 1)$.
Bereken exact d(Q, m).

© Noordhoff Uitgevers bv

E7 Lijn l gaat door de punten $(4, 10)$ en $(7, 9)$. Lijn m gaat door de punten $(-10, 12)$ en $(-3, a)$.
Bereken a in het geval $l \perp m$.

E8 De punten $A(-1, -1)$, $B(2, 5)$ en $C(5, -3)$ zijn de hoekpunten van $\triangle ABC$.
Bereken exact de lengte van de hoogtelijn uit B in deze driehoek.

E9 De lijnen l: $2x - y = 1$, m: $x + 2y = 10$ en n: $y = -3x - 5$ sluiten een driehoek in.

a Bewijs dat de driehoek rechthoekig is.

b Bewijs dat de driehoek gelijkbenig is.

E10 Gegeven is lijn l: $x - 3y = 7$.

a $P(4, -1)$ is een punt op l.
Stel een vergelijking op van de loodlijn m uit P op l.

b Op m liggen twee punten die op afstand $3\sqrt{10}$ van l liggen.
Bereken exact de coördinaten van deze punten.

c Stel een vergelijking op van elk van de lijnen die op afstand $3\sqrt{10}$ van l liggen.

E11 De lijnen k : $3x - y = 4$ en l : $3x - y = 24$ sluiten samen met de lijnen m en n een vierkant in dat geheel boven de x-as ligt.
Een van de hoekpunten is $A(3, 5)$.
Bepaal vergelijkingen van m en n.

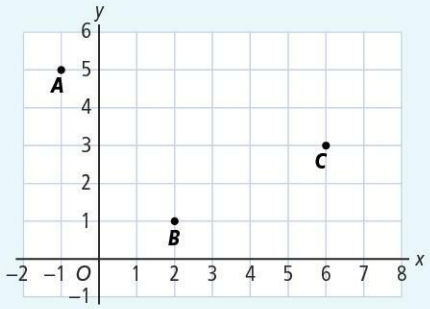
E12 Getekend zijn de punten $A(-1, 5)$, $B(2, 1)$ en $C(6, 3)$.
Lijn l gaat door A en B en lijn m door B en C.

a Stel vergelijkingen op van l en m.

b Bereken $\angle(l, m)$ in graden nauwkeurig.

c Stel vergelijkingen op van de middelloodlijnen van de lijnstukken AB en BC.

d Bereken de hoek tussen beide middelloodlijnen.
Wat valt je op?



© Noordhoff Uitgevers bv

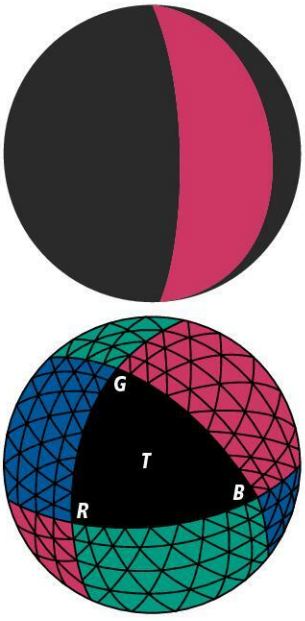
Lijnen op een bol

Euclides leefde ongeveer 300 jaar voor Christus en wordt vaak 'de vader van de meetkunde' genoemd. Hij was een Hellenistische wiskundige die werkte in de bibliotheek van Alexandrië. Zijn belangrijkste werk heet 'De Elementen'. Dit geeft in 13 boeken de oudste systematische verhandeling over de meetkunde.
Uitspraken zoals: 'er gaat precies één lijn door twee verschillende punten' en 'door een punt buiten een lijn gaat precies één lijn evenwijdig aan de gegeven lijn' zul je wel logisch vinden. Al deze uitspraken gelden in een plat vlak. Echter de aarde waarop wij leven is niet plat, maar bolvormig.

Gelden de uitspraken van Euclides ook voor punten en lijnen op een bol?

In een vlak is de kortste verbinding tussen twee punten een (rechte) lijn. Op een bol wordt daarom een lijn gedefinieerd als de kortste verbinding over de oppervlakte van de bol tussen twee punten A en B. Dat is een deel van een zogenaamde grootcirkel. Deze cirkel ligt op de bol en heeft hetzelfde straal en middelpunt als de bol.

Lijnen op een bol zijn dus grootcirkels. Alle meridianen zijn halve grootcirkels en alle parallellen, op de evenaar na, zijn dus geen lijnen. Deze keuze heeft echter wel gevolgen.
In de gewone (Euclidische) meetkunde is de veelhoek met het minste aantal hoekpunten een driehoek. Op een bol kun je echter al van een tweehoek spreken, want twee lijnen sluiten daar zelfs al een figuur in. Deze tweehoek heet een ***lune*** (maan). Als je goed kijkt, dan zie dat twee lijnen op een bol zelfs vier lunes insluiten.
Bij drie lijnen wordt het beeld complexer.
In de Euclidische meetkunde vormen drie elkaar snijdende lijnen, die niet door één punt gaan, precies één driehoek. Op de bol echter niet. In de figuur ligt het voor de hand om op de bol daarvoor de zwarte driehoek BGR te kiezen. Er zijn echter veel meer driehoeken die door deze drie lijnen worden gevormd.



Opdracht

a Is het groene deel één driehoek?
b Hoeveel driehoeken worden er door de drie lijnen gevormd?
c Gaat er door twee verschillende punten op een bol precies één lijn?
d Bestaan er evenwijdige lijnen op de bol? Leg uit.

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheden 2

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Rekenen met breuken
- Haakjes wegwerken en bijzondere producten
- Vergelijkingen oplossen
- Ongelijkheden oplossen

Rekenen met breuken

1 Bereken en schrijf het antwoord in een breuk. Vereenvoudig, indien mogelijk, het antwoord.

a $\frac{3}{6}-\frac{2}{5}$

b $\frac{7}{x}+\frac{2}{3x}$

c $\frac{3}{13}\times\frac{-2}{5}$

d $\frac{3}{p}\times\frac{4}{p}$

e $\frac{3p}{4}\times\frac{2p}{-5}$

f $\frac{2a}{5b}\times\frac{3b}{4a}$

2 **a** Leg uit hoe je het getal $3\frac{5}{7}$ kunt herleiden tot de breuk $\frac{26}{7}$.

b Maak verder af: $\frac{3}{x}+2=\frac{3}{x}+\frac{2}{1}=\frac{3}{x}+\frac{\ldots}{x}=\frac{3+\ldots}{x}$

c Herleid tot één breuk:

A $5\frac{3}{8}$

B $\frac{5}{p}+4$

C $7-\frac{4}{x}$

D $8+\frac{2}{3x}$

Theorie

Breuken kun je vereenvoudigen door de teller en de noemer met hetzelfde getal te vermenigvuldigen of door hetzelfde getal te delen.

Voorbeeld 1

Vereenvoudig $\frac{40}{56}$

Oplossing

$\frac{40}{56}=\frac{5\times 8}{7\times 8}=\frac{5}{7}$

Voorbeeld 2

Vereenvoudig $\frac{4}{\frac{1}{3}}$

Oplossing

$\frac{4}{\frac{1}{3}}=\frac{4\times 3}{\frac{1}{3}\times 3}=\frac{12}{1}=12$

Voorbeeld 3

Vereenvoudig $\frac{\frac{3}{5}}{7}$

Oplossing

$\frac{\frac{3}{5}}{7}=\frac{\frac{3}{5}\times 5}{7\times 5}=\frac{3}{35}$

3 Vereenvoudig. Neem aan dat $p\neq 0$.

a $\frac{5p}{3p}$

b $\frac{36}{\frac{3}{7}}$

c $\frac{8p}{12p}$

d $\frac{2p}{\frac{1}{p}}$

e $\frac{\frac{3}{p}}{\frac{1}{3}}$

f $\frac{p}{\frac{1}{2}}$

g $\frac{\frac{8}{9}}{4}$

h $\frac{4p^2}{\frac{2}{p}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

Haakjes wegwerken en bijzondere producten

4 Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk.

a $-(a+5)-3$

b $(-2v+3)(3v+8)$

c $(p^3+2)(p-3)$

d $(3h-2)(2h^2-4)$

e $\left(\frac{1}{2}n+4\right)\left(\frac{1}{2}n-8\right)$

f $-17(3u+5)+6u$

g $(2p+4)(8-3p^2)$

h $-5{,}7(3{,}5x+6{,}2)$

5 Schrijf de producten zonder haakjes en zo kort mogelijk.

a $(2h+1)(2h+1)$

b $(w-9)(w-9)$

c $(p+4)^2$

d $(r-4)^2$

e $(5+p)(5-p)$

f $(2e-3)(2e+3)$

g $(5-q)^2$

h $(v-\frac{1}{3})(v-\frac{1}{3})$

Theorie

Voor het product van tweetermen geldt

$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$.

Bijzondere gevallen zijn:

1 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

2 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

3 $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

Voorbeeld 1

Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk: $(x+3)(x^2-4)$

Oplossing

Geen bijzonder geval

$(x+3)(x^2-4)=$

$x^3+3x^2-4x-12$

Voorbeeld 2

Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk: $(x-3)^2$

Oplossing

Bijzonder geval 2

$(x-3)^2=$

$x^2-2\cdot 3x+3^2=$

x^2-6x+9

Voorbeeld 3

Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk: $(x+3)(x-3)$

Oplossing

Bijzonder geval 3

$(x+3)(x-3)=$

$x^2-3^2=$

x^2-9

6 Schrijf zonder haakjes.

a $(p+5)^2$

b $(2v-4)^2$

c $(b+5)(b-5)$

d $(3x-6)(3x+6)$

e $(2l+3)(l^2-7)$

f $(3u-0{,}5)^2$

g $\left(\frac{1}{2}r+2\right)^2$

h $(p^2-5)(p^2+5)$

i $x(x+1)^2$

j $(x-y^2)(x+y^2)$

© Noordhoff Uitgevers bv

Vergelijkingen oplossen

7 **a** Op het blaadje is een begin gemaakt met het oplossen van de vergelijking $(x + 3)^2 = 4(x + 2) + 1$.
Los deze vergelijking verder op.
b Los ook de vergelijking $(x + 4)(x - 4) = x(x + 8)$ op.

- $(x+3)^2 = 4(x+2) + 1$
- $x^2 + 6x + 9 = 4x + 8 + 1$
- $x^2 + 2x = 0$
- $x(\ldots + \ldots) = 0$

8 Los exact op.
a $3k = 2(k + 5)$
b $(c + 2)(c - 2) = 5$
c $2(t + 5)^2 = 14 + 2t$
d $(b - 10)(b + 1) = 12$

Theorie

Bij het oplossen van vergelijkingen moet je soms eerst de haakjes wegwerken. In een aantal gevallen is het handiger om juist niet de haakjes weg te werken.

9 Hiernaast staat een aantal vergelijkingen.
a Welke vergelijkingen kun je exact oplossen zonder eerst de haakjes weg te werken? Los deze vergelijkingen op.
b Los de overige vergelijkingen ook exact op. Soms moet je daarbij de *abc*-formule gebruiken.

A $(x + 2)(0{,}2x - 8) = 0$
B $(2x - 5)(2x + 5) = 24$
C $(2x + 3)^2 + 2x = 3$
D $(x + 7)^2 - 11 = 25$
E $(-4x + 1)(4x + 1) = 17$
F $6x(x - 1) = 1 - 5x$

10 Je gaat in deze opdracht de vergelijking $(3x + 6)(x - 4) = 15(x - 4)$ oplossen.
a De oplossing van $3x + 6 = 15$ is een oplossing van $(3x + 6)(x - 4) = 15(x - 4)$. Leg uit waarom.
b De oplossing van $x - 4 = 0$ is ook een oplossing van $(3x + 6)(x - 4) = 15(x - 4)$. Leg uit waarom.
c Los de vergelijking $(3x + 6)(x - 4) = 15(x - 4)$ op zonder eerst de haakjes weg te werken.

Theorie

Bij het oplossen van vergelijkingen moet je eerst goed naar de vergelijking kijken. Vaak is het nodig dat je de vergelijking eerst op nul herleid. Soms is er een handigere manier.
Je mag gebruik maken van de regels hiernaast.

$A \cdot B = 0$ dus $A = 0$ of $B = 0$
$A \cdot B = A \cdot C$ dus $A = 0$ of $B = C$
$A^2 = B^2$ dus $A = B$ of $A = -B$

Voorbeeld 1

Los op
$(2x + 3)(x - 4) = 0$
$2x + 3 = 0$ of $x - 4 = 0$
$2x = -3$ of $x = 4$
$x = -1\frac{1}{2}$ of $x = 4$

Voorbeeld 2

Los op
$(2x + 3)(x - 4) = 6(2x + 3)$
$2x + 3 = 0$ of $x - 4 = 6$
$2x = -3$ of $x = 10$
$x = -1\frac{1}{2}$ of $x = 10$

Voorbeeld 3

Los op
$(2x + 3)^2 = 16$
$2x + 3 = 4$ of $2x + 3 = -4$
$2x = 1$ of $2x = -7$
$x = \frac{1}{2}$ of $x = -3\frac{1}{2}$

© Noordhoff Uitgevers bv

11 Los op de manier van voorbeeld 2 de vergelijkingen op.

a $(2x + 5)(x - 1) = 3(x - 1)$ **c** $(3x - 4)(2x - 3) = (x + 1)(2x - 3)$

b $x^2(2x - 9) = 7x^2$ **d** $(5x + 3)(x^2 - 9) = 7(5x + 3)$

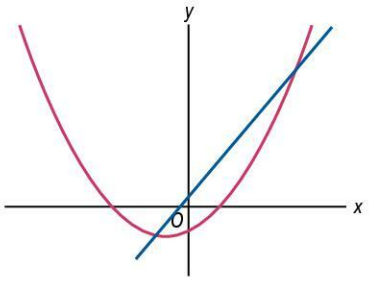
12 Los exact op.

a $2 - (x - 4)^2 = 1$ **c** $(x + 2)^2 - (3 - 2x)^2 = 0$

b $(5x - 125)(x^2 - 81) = 0$ **d** $(0{,}5x + 2)^2 - 2x = 20$

Ongelijkheden oplossen

13 De grafieken van de functies $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ en $g(x) = 7x + 1$ zijn geschetst.



a Los exact op $f(x) = g(x)$.

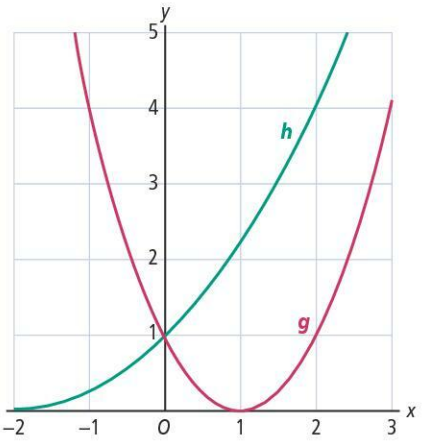
b Bij welke waarden van x ligt de grafiek van f boven de grafiek van g? Geef je antwoord in de intervalnotatie.

c Welke van de ongelijkheden hoort bij opdracht b: $f(x) < g(x)$ of $f(x) > g(x)$?

Theorie

Bij het oplossen van een ongelijkheid stel je eerst de bijbehorende functies aan elkaar gelijk en los je de verkregen vergelijking (eventueel exact) op. Vervolgens lees je uit de grafieken van de functies of uit een plot de oplossing van de ongelijkheid af.

14 Gegeven zijn de functies $g(x) = (1 - x)^2$ en $h(x) = (\frac{1}{2}x + 1)^2$.



a Voor welke waarden van x geldt $g(x) < 5$?

b Controleer met een berekening dat het punt (0, 1) een snijpunt is van de grafieken van g en h.

c Beredeneer dat de grafieken nóg een snijpunt hebben.

d Waarom weet je zeker dat er niet nog een derde snijpunt is?

e Voor welke waarden van x geldt $h(x) > g(x)$?

15 Gegeven zijn de functies $h(x) = 4x + 3$ en $k(x) = \sqrt{4 - 2x}$.

a Geef het domein en bereik van k.

b Plot en schets de grafieken van h en k.

c Los op $h(x) \geq k(x)$.

16 Gegeven zijn de functies $f(x) = -\dfrac{12}{2x + 5}$ en $g(x) = 3$.

a Plot en schets de grafieken van f en g.

b Los op $f(x) < g(x)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

Afgeleide functies 5

In dit hoofdstuk

In de vorige klas heb je geleerd hoe je de coördinaten van de top van de grafiek van een kwadratische functie kunt berekenen.

In dit hoofdstuk leer je een methode om ook van grafieken van andere dan kwadratische functies de coördinaten van de toppen te berekenen. Deze methode, bekend onder de naam *differentiaalrekening*, is - onafhankelijk van elkaar - ontwikkeld door de Engelse wiskundige Sir Isaac Newton (1643 – 1727) en Duitse wiskundige Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716).

In de klassen 5 en 6 zul je nog veel meer leren over dit onderwerp, dat ook bij de natuurkunde een belangrijke rol speelt.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

• *Probleemoplossen en analytisch denken*	opdracht 50
• *Modelleren en algebraïseren*	opdracht 16
• *Abstraheren*	opdracht 21

© Noordhoff Uitgevers bv

V1 Er zijn verschillende wiskundige modellen die een groeiproces beschrijven. Voorbeelden hiervan zijn de formules: $A = 3{,}5t + 9$, $B = 0{,}23t^2 + 8$ en $C = 16 \cdot 0{,}972^t$, waarin de variabele t de tijd voorstelt.

a Formule A beschrijft een lineair verband. Welke soort verbanden worden door de andere twee formules beschreven?

b Vul bij de tabel de ontbrekende getallen in.

c Omschrijf in woorden hoe voor $t > 0$ de groeiprocessen bij de formules A, B en C verlopen.

t	A	B	C
0			
10			
20			
30			

V2 Een groeiproces wordt beschreven door de formule $A = 42t + 54$.

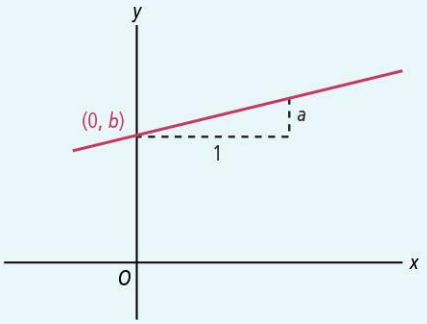
a Teken de grafiek bij deze formule voor $0 \le t \le 20$.

b Met hoeveel neemt A toe als t met 1 toeneemt?

c Van twee punten op de grafiek is het verschil tussen de A-waarden 210. Bereken het verschil tussen de waarden van t.

Theorie

Formules van de vorm $y = ax + b$ beschrijven een **lineair groeiproces**. a is de richtingscoëfficiënt en b het startgetal.
De grafiek snijdt de y-as in het punt $(0, b)$.
De richtingscoëfficiënt of het hellingsgetal is de toename van de y-coördinaat als de toename van de x-coördinaat 1 is.
De toename van de y-coördinaat kan negatief zijn.
Evenwijdige lijnen hebben dezelfde richtingscoëfficiënt.



Voorbeeld

Geef de richtingscoëfficiënt van de lijn door de punten (2, 83) en (7, 18).

Oplossing

De toename van de y-coördinaat is $18 - 83 = -65$. De toename van de x-coördinaat is $7 - 2 = 5$.

De richtingscoëfficiënt $a = \dfrac{\text{verticale toename}}{\text{horizontale toename}} = \dfrac{-65}{5} = -13$.

V3 De lijn l gaat door de punten $A(4, 9)$ en $B(8, 12)$.

a Teken de lijn l.

b Stel een vergelijking van l op.

c Lijn m is evenwijdig met l en gaat door $(0, 2)$. Stel een vergelijking van m op

© Noordhoff Uitgevers bv

V4 **a** Lijn l gaat door $(0, 12)$ en is evenwijdig aan de lijn met vergelijking $y = 2(0{,}6x - 3)$.
Geef een vergelijking van l.

b Lijn m gaat door het punt $(22, 14)$ en heeft richtingscoëfficiënt $-0{,}4$.
Stel een vergelijking van m op.

V5 Stel bij elke lijn een vergelijking op.

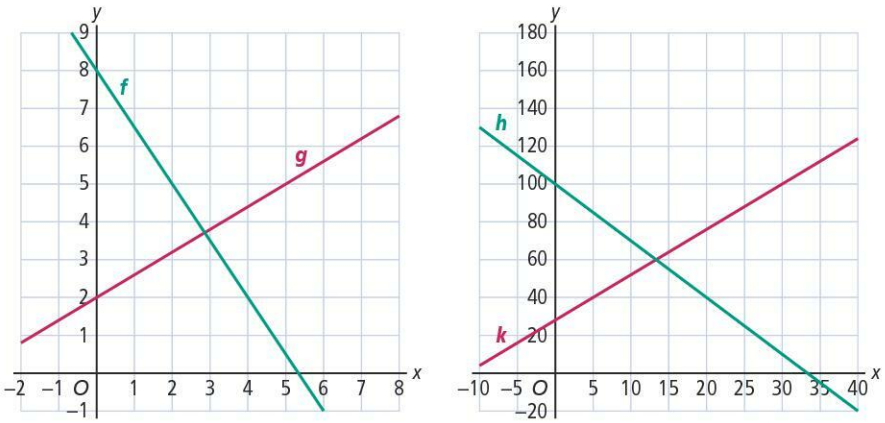
a Lijn l door het punt $(1, 4)$ met richtingscoëfficiënt 4.

b Lijn m door het punt $(6, -7)$ evenwijdig aan de lijn met vergelijking $y = -\frac{2}{3}x + 2$.

c Lijn n door de punten $(2, 5)$ en $(5, -4)$.

d Lijn k door de punten $(3, 3)$ en $(-12, 0)$.

V6 In de assenstelsels staan grafieken van de functies f, g, h en k.



Stel een functievoorschrift op bij elk van deze grafieken.

V7 Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk.

a $y = (x^2 - 2)(x^3 + 3)$

b $y = (x^5 - 5)^2$

c $y = (x^3 + 2x^2)(x^3 - 2x^2)$

d $y = (3x^6 - 4)(6x^3 + 4)$

e $y = x(x^2 + 1)^2$

f $y = (x + 1)(x + 2)(x - 2)$

© Noordhoff Uitgevers bv

5.1 Gemiddelde toename en helling

Je leert
- wat een differentiequotiënt is
- hoe je de helling van een grafiek in een punt benadert

Leerroutes
- ondersteunend: 1—2—3—O4—4—5—6—O7
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7—8
- uitdagend: 1—2—4—5—6—7—U1—U2

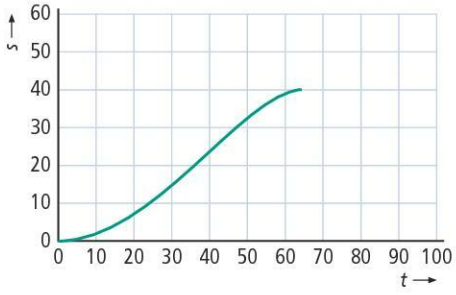
Op de A13 controleert de politie op snelheid met de trajectcontrole. Alle auto's worden aan het begin en het eind van een traject gefotografeerd en via nummerherkenning gaat de politie na wie er te hard heeft gereden.
Stel dat er op zo'n traject van 2 km een maximum snelheid van 120 km/h geldt.
- Een automobilist rijdt dit traject in 55 seconden
  Heeft deze automobilist te hard gereden?
  En iemand die er 65 seconden over doet?

1 Jurjen fietst 40 kilometer. De afgelegde weg na t minuten wordt beschreven met de formule $s = -0{,}000\,002t^4 + 0{,}018t^2$ met s de afgelegde weg in kilometers.

a Ga met de grafiek na wanneer de gemiddelde snelheid groter is: tussen $t = 5$ en $t = 20$ of tussen $t = 30$ en $t = 40$.

b Hoe zou de grafiek eruit zien als Jurjen met constante snelheid had gereden?

c Laat met een berekening zien dat de gemiddelde snelheid van Jurjen tussen $t = 15$ en $t = 30$ ongeveer 42,5 km per uur is.

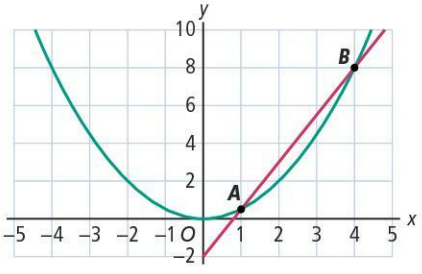


2 Gegeven is de parabool met de formule $y = \frac{1}{2}x^2$.

a Bereken de toename van y als x toeneemt van 1 tot 4.

b Bereken de gemiddelde toename van y over het interval $[1, 4]$ en vergelijk de uitkomst met de helling van de lijn door de punten $A(1, \frac{1}{2})$ en $B(4, 8)$.

c Bereken de gemiddelde toename van y over het interval $[-2, 2]$.

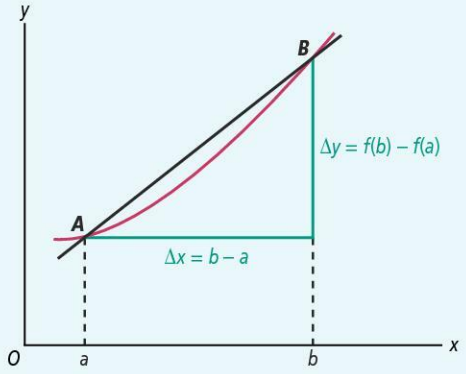


© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Toenames van x en y geef je aan met Δx (delta x) en Δy.
Een toename is het verschil tussen een eindwaarde en een beginwaarde. Daarom spreek je ook wel van een differentie (verschil) in plaats van een toename.
De gemiddelde toename van $f(x)$ over een interval $[a, b]$ is het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Dat differentiequotiënt is gelijk aan de richtingscoëfficiënt of het hellingsgetal van de lijn door de punten $A(a, f(a))$ en $B(b, f(b))$.



Voorbeeld 1

Bereken de gemiddelde toename van $f(x) = x^2 - 3x$ over het interval $[-2, 2]$.

Oplossing

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{(-2) - 10}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

De gemiddelde toename is -3.

Voorbeeld 2

Bereken het differentiequotiënt van $f(x) = -1 + \sqrt{2x + 10}$ over het interval $[-5, 3]$.

Oplossing

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(-5)}{3 - (-5)} = \frac{3 - (-1)}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Het differentiequotiënt is gelijk aan $\frac{1}{2}$.

3 **a** Bereken het differentiequotiënt van s uit opdracht 1 over het interval $[30, 45]$.
b Bereken de gemiddelde snelheid van Jurjen uit opdracht 1 in de tiende minuut (dus van $t = 9$ tot $t = 10$) in km per minuut.

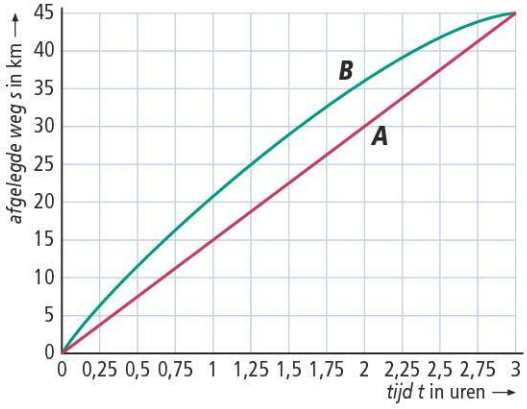
Ondersteunende route → maak opdracht 04

4 H Gegeven is de functie $f(x) = \left(3 - \frac{1}{2}x\right)^2$.
a Bereken de gemiddelde toename van $f(x)$ over het interval $[1, 4]$.
b Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ over het interval $[2, 10]$.
c Plot de grafiek van f en noem twee intervallen waarover de gemiddelde toename gelijk is aan 0.

5 Gegeven is de functie $f(x) = 4x - 5$.
a Bereken het differentiequotiënt over het interval $[1, 5]$.
b Bereken de gemiddelde toename van $f(x)$ over het interval $[-3; 1{,}5]$.
c Leg uit waarom de antwoorden bij opdracht a en b gelijk zijn.

© Noordhoff Uitgevers bv

6 Twee fietsers hebben hetzelfde traject van 45 km afgelegd. In de grafiek kun je zien dat ze dat niet op dezelfde manier gedaan hebben.



a Leg uit dat beide fietsers het traject hebben afgelegd met dezelfde gemiddelde snelheid.

b Bij de grafieken passen de formules $s = 15t$ en $s = -3t^2 + 24t$ met t in uren en s in km. Bereken met deze formules voor beide fietsers de gemiddelde snelheid over de intervallen [1, 2], [1; 1,5], [1; 1,1] en [1; 1,01].

c Waarom had je de antwoorden voor fietser A kunnen voorspellen?

d Welke van de antwoorden bij opdracht b geeft voor fietser B de beste benadering van de snelheid op het tijdstip $t = 1$?

e Hoe groot, denk je, is deze snelheid precies?

Theorie

Als je voor een tijd-afstandsformule het differentiequotiënt over een klein interval $[a, a + 0{,}001]$ berekent, benader je de snelheid op het tijdstip $t = a$.
Voor een functie f is dit een *benadering* van de **helling van de grafiek** van f in punt A.
De benadering wordt beter als je het interval kleiner neemt.
In de praktijk geeft $\Delta x = 0{,}001$ meestal een goede benadering.

Voorbeeld

Benader de helling van de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{x}$ in het punt (4, 2).

Oplossing

Bereken het differentiequotiënt over bijvoorbeeld [4; 4,001].

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4{,}001) - f(4)}{0{,}001} \approx$$

$$\frac{2{,}000\,25 - 2}{0{,}001} \approx 0{,}25$$

De helling in (4, 2) is ongeveer 0,25.

Ondersteunende route → maak opdracht O7

7 H Gegeven is de functie $f(x) = 3\sqrt{x + 2}$.

a Benader de helling van de grafiek van f in het punt (2, 6).

b Benader de helling van de grafiek van f in het punt (−1, 3).

c Benader de helling van de grafiek van f in het punt (7, 9).

8 Kijk nog eens naar de grafiek van fietser B uit opdracht 6.

a Benader de snelheid van fietser B op tijdstip $t = 2$.

b Benader de snelheid van fietser B op tijdstip $t = 3$.

Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O4

a Plot en schets de grafiek bij de formule $y = \sqrt{x}$.
b Bereken de y-waarde voor $x = 1$ en $x = 9$.
c Bereken de toename van y als x toeneemt van 1 tot 9.
d Vul in het schema op de puntjes de ontbrekende getallen in.
e De gemiddelde toename van y is gelijk aan de toename van y gedeeld door de toename van x.
Bereken de gemiddelde toename van y over het interval $[1, 9]$ en vergelijk de uitkomst met de helling van de lijn door de punten $A(1, 1)$ en $B(9, 3)$.
f Bereken de gemiddelde toename van y over het interval $[1, 4]$.

	$\Delta x = \ldots$	
x	1	9
y	…	…
	$\Delta y = \ldots$	

O7

Gegeven is de functie $f(x) = x^2$. Je gaat de helling van de grafiek van f in het punt $(2, 4)$ benaderen.
a Bereken de toename van $f(x)$ op het interval $[2; 2{,}001]$.
b Bereken de gemiddelde toename van $f(x)$ over het interval $[2; 2{,}001]$.
c Benader de helling van de grafiek van f in het punt $(2, 4)$.
d Bereken de toename van $f(x)$ over het interval $[-2; -1{,}999]$.
e Benader de helling van de grafiek van f in het punt $(-2, 4)$.
f Benader de helling van de grafiek van f in het punt $(3, 9)$.

	$\Delta x = \ldots$	
x	2	2,001
y	…	…
	$\Delta y = \ldots$	

Uitdagende opdrachten

U1

Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.
Over het interval $[4, p]$ is het differentiequotiënt van $f(x)$ twee keer zo groot als het differentiequotiënt van $f(x)$ over het interval $[1, 4]$.
Bereken p.

U2

Gegeven is de functie $f(x) = 2^x$.
a Laat zien dat het differentiequotiënt van $f(x)$ over het interval $[3, 4]$ exact twee keer zo groot is als het differentiequotiënt van $f(x)$ over het interval $[2, 3]$.
b De eigenschap die je bij opdracht a hebt gevonden geldt ook voor andere intervallen.
Laat zien dat het differentiequotiënt van $f(x)$ over het interval $[p + 1, p + 2]$ exact twee keer zo groot is als het differentiequotiënt van $f(x)$ over het interval $[p, p + 1]$.

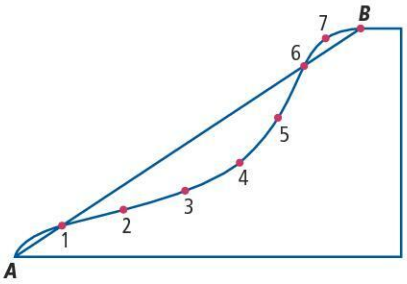
© Noordhoff Uitgevers bv

5.2 Helling van een grafiek

Je leert
- wat een differentiaalquotiënt is
- hoe je de helling in een punt van een grafiek exact berekent

Leerroutes
- ondersteunend: 9—O10—11—12—13—14—O15
- doorlopend: 9—10—11—12—13—14—15
- uitdagend: 9—11—12—13—14—15—U3

Langs de glijbaan staan genummerde merktekens.
- Bij welke nummers is de glijbaan steiler dan de helling van lijn AB?
- Waar is de helling van de glijbaan ongeveer gelijk aan de helling van lijn AB?



Tot nu toe benaderde je de helling van een grafiek in een punt met behulp van een differentiequotiënt op een klein interval met $\Delta x = 0{,}001$.
Als je Δx eerst variabel laat, kun je daarna de helling exact berekenen.

9 Je gaat de helling van de grafiek van $f(x) = x^2$ in het punt $(3, 9)$ exact berekenen.

a Op het blaadje is een begin gemaakt met het berekenen van $f(3 + \Delta x)$. Maak de berekening af..

b Bereken Δy op het interval $[3, 3 + \Delta x]$.

c Laat zien dat $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 6 + \Delta x$.

d Wat gebeurt er met dit differentiequotiënt als Δx steeds kleiner genomen wordt?

$f(3 + \Delta x) = (3 + \Delta x)^2 =$

$(3 + \Delta x)(3 + \Delta x) =$

$\ldots^2 + 2 \cdot \ldots \cdot \Delta x + (\ldots)^2 =$

$\ldots + \ldots \cdot \Delta x + (\ldots)^2$

Theorie

Als de waarde van Δx nadert naar 0, notatie $\Delta x \to 0$, gaat het differentiequotiënt $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ over in het **differentiaalquotiënt** $\dfrac{dy}{dx}$ (spreek uit: d-ij-d-x).
Het differentiaalquotiënt is de exacte waarde van de **helling** van de grafiek in een punt.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Bereken van de functie $f(x) = 2x^2$ het differentiaalquotiënt $\frac{dy}{dx}$ voor $x = 4$.

Oplossing

$f(4 + \Delta x) = 2(16 + 8\Delta x + (\Delta x)^2) = 32 + 16\Delta x + 2(\Delta x)^2$ en $f(4) = 32$.

$\Delta y = f(4 + \Delta x) - f(4) = 16\Delta x + 2(\Delta x)^2$ en $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{16\Delta x + 2(\Delta x)^2}{\Delta x} = 16 + 2\Delta x$.

Als $\Delta x \to 0$ dan nadert $16 + 2\Delta x$ naar 16, dus voor $x = 4$ geldt $\frac{dy}{dx} = 16$.

Ondersteunende route → maak opdracht O10

10 H Gegeven is de functie $f(x) = 3x^2$.
Bereken op de manier van het voorbeeld met een differentiaalquotiënt de helling van de grafiek van f in het punt (4, 48).

11 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 7$.

a Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ over het interval $[3, 3 + \Delta x]$.

b Wat is de exacte waarde van de helling in het punt van de grafiek met $x = 3$?

De exacte waarde van de helling in een punt van de grafiek kun je berekenen zoals in opdracht 10 en 11. Je kunt die helling ook berekenen of benaderen met je rekenmachine.

→ Instructie rekenmachine | hellingen

12 Maak op je rekenmachine een tabel met hellingen van de grafiek van de functie $f(x) = 3\sqrt{x + 2}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

13 Gegeven is de functie $g(x) = x^3 - 3x^2$.

a Bereken de helling van de grafiek van g in het punt $(1, -2)$ met je rekenmachine.

b Maak een tabel van de hellingen en onderzoek in welke punten van de grafiek de helling gelijk is aan 72.

c Geef de coördinaten van de punten waarin de helling gelijk is aan 0.

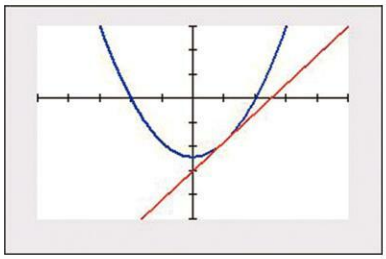
d Leg uit hoe je je antwoord van opdracht c kunt controleren in de grafiek van g.

14 Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = 3x^2 - 12$ en de lijn l: $y = 6x - 15$. De lijn lijkt met de grafiek van f slechts het punt $P(1, -9)$ gemeenschappelijk te hebben.

a Ga met een berekening na dat P op de grafiek van f en op l ligt.

b Controleer of de helling van de grafiek in P overeenkomt met de richtingscoëfficiënt van l.

c Stel een vergelijking op van de lijn door het punt $(-1, -9)$ die in dat punt dezelfde helling heeft als de grafiek van f.



Theorie

De raaklijn aan de grafiek van een functie f in een punt A is de lijn die

- door A gaat,
- een richtingscoëfficiënt heeft die gelijk is aan de helling van de grafiek van f in A.

Je zegt ook wel dat deze lijn de grafiek van f in A raakt.

Voorbeeld

Laat met een berekening zien dat de lijn l: $y = 10x - 25$ de grafiek van de functie $f(x) = x^2$ in het punt $P(5, 25)$ raakt.

Oplossing

$f(5) = 25$ en $y = 10 \cdot 5 - 25 = 25$, dus de grafiek van f en l gaan beide door P.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5 + \Delta x) - f(5)}{\Delta x} =$$

$$\frac{10 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 10 + \Delta x, \text{ dus } \frac{dy}{dx} = 10.$$

De helling van de grafiek in P is dus gelijk aan de richtingscoëfficiënt van l. l raakt de grafiek van f in P.

Ondersteunende route → maak opdracht O15

15 H Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 6x$.

a Laat met een berekening zien dat de lijn met vergelijking $y = -8x - 1$ de grafiek van f raakt in het punt $(-1, 7)$.

b Bereken de helling van de grafiek van f in het punt $(3, -9)$.

c Waarom raakt de lijn $y = -9$ de grafiek van f?

Uitdagende route → maak opdracht U3

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O10 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.
Je gaat de helling van de grafiek in het punt (6, 18) berekenen.

a Bereken $f(6)$.

b Maak de berekening op het blaadje af.

c Bereken $\Delta y = f(6 + \Delta x) - f(6)$ en $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

d Laat $\Delta x \to 0$ om $\frac{dy}{dx}$ voor $x = 6$ te berekenen.

e Hoe groot is de helling van de grafiek van f in het punt (6, 18)?

$f(6 + \Delta x) = \frac{1}{2}(6 + \Delta x)^2 =$

$\frac{1}{2}(6 + \Delta x)(6 + \Delta x) =$

$\frac{1}{2}(36 + 2 \cdot 6 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2) =$

$\frac{1}{2}(36 + \ldots \Delta x + (\Delta x)^2) =$

$\ldots + \ldots \Delta x + \ldots (\Delta x)^2$

O15 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 2x$ met daarop het punt $P(1, 3)$ en de lijn l: $y = 4x - 1$. Om aan te tonen dat l de grafiek van f in P raakt, moet je laten zien, dat

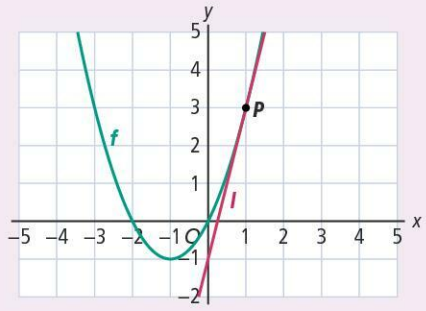
- P zowel op de grafiek van f als op l ligt.
- de helling van de grafiek in P gelijk is aan de helling van l.

a Controleer dat P zowel op de grafiek van f als op l ligt.

b Hoe groot is de helling van l?

c Bereken het differentiaalquotiënt $\frac{dy}{dx}$ voor $x = 1$.

d Raakt l de grafiek van f in P?



Uitdagende opdrachten

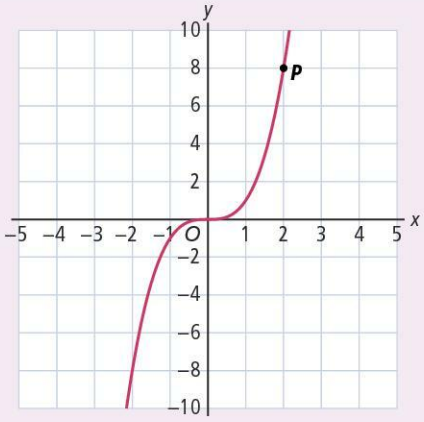
U3 Gegeven is de functie $f(x) = x^3$.
Om de helling van de grafiek in het punt $P(2, 8)$ exact te berekenen, moet je $f(2 + \Delta x) = (2 + \Delta x)^3$ zonder haakjes kunnen schrijven.

a Schrijf $(2 + \Delta x)^2$ zonder haakjes.

b $(2 + \Delta x)^3 = (2 + \Delta x)(2 + \Delta x)^2$
Schrijf $(2 + \Delta x)^3$ zonder haakjes.

c Bereken exact de helling van de grafiek van f in P.

d In welk punt van de grafiek weet je de helling nu ook?



© Noordhoff Uitgevers bv

5.3 De afgeleide functie

Je leert
- wat een afgeleide functie is
- hoe je de afgeleide functie van een machtsfunctie bepaalt

Leerroutes
- ondersteunend: 16—17—18—O19—20—21—O22—22
- doorlopend: 16—17—18—19—20—21—22—23
- uitdagend: 16—17—18—19—20—22—U4—U5

Met behulp van de rekenmachine zijn voor de punten met x-coördinaat 1, 2, 3 en 4 in de kolommen Y3 en Y4 de hellingen van de grafieken van de functies $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ en $g(x) = \frac{1}{4}x^4$ berekend.

X	Y1	Y2	Y3	Y4
1	.33333	.25	1	1
2	2.6667	4	4	8
3	9	20.25	9	27
4	21.333	64	16	64

- Welke helling, denk jij, hebben de grafieken in het punt met x-coördinaat 5?

16 Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.

a Vul de tabel in met behulp van je rekenmachine.

b Bekijk de kolom met de hellingen geef op grond hiervan een formule waarmee je deze hellingen kunt berekenen.

x	$f(x)$	*helling*
0		
1		
2		
3		

In opdracht 16 krijg je het vermoeden dat je de helling van de grafiek van $f(x) = x^2$ in een punt kunt berekenen met de regel 'twee keer de waarde van de x-coördinaat'.
Dit vermoeden ga je in de volgende opdracht bewijzen.

17 Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.
Op de grafiek van f ligt een punt A met x-coördinaat a.

a Laat met een berekening zien dat $f(a + \Delta x) = a^2 + 2a \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$.

b Druk het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ uit in a en Δx.

c Laat zien dat het antwoord van opdracht b te herleiden is tot $2a + \Delta x$.

d Vul in: als $\Delta x \to 0$, dan nadert het differentiequotiënt naar … dus de helling van de grafiek van f in het punt $A(a, a^2)$ is gelijk aan … .

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Bij een functie f hoort een andere functie waarmee je de helling in een punt van de grafiek van f exact kunt berekenen. Die functie heet de hellingfunctie of afgeleide functie van f of kortweg afgeleide van f. De notatie voor de afgeleide functie is f' (spreek uit als f-accent) of $\frac{dy}{dx}$.
Zo is de afgeleide van $f(x) = x^2$ de functie $f'(x) = 2x$.
De helling in een punt noem je ook wel de afgeleide waarde.

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.
Bereken exact de helling van de grafiek van f in het punt P $(-1{,}7;\ 2{,}89)$.

Oplossing

De afgeleide functie $f'(x) = 2x$.
De helling in P is $f'(-1{,}7) = -3{,}4$.

Voorbeeld 2

Gegeven is $s = 5t + 3$.
Bereken $\frac{ds}{dt}$ voor $t = 7$.

Oplossing

De grafiek is een rechte lijn met hellingsgetal 5.
Voor elke waarde van t, dus ook voor $t = 7$, geldt $\frac{ds}{dt} = 5$.

18 H Bereken exact de helling van de grafiek van $f(x) = x^2$ in de punten $(\sqrt{3},\ 3)$ en $(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4})$.

Ondersteunende route → maak opdracht 019

19 **a** Geef de formule van $\frac{dy}{dx}$ voor $y = 4 - \frac{1}{2}x$.

b Geef het functievoorschrift van g' voor de functie $g(x) = -2$.

20 In opdracht 17c heb je laten zien dat $\frac{(a + \Delta x)^2 - a^2}{\Delta x}$ voor $\Delta x \to 0$ nadert naar $2a$. Op een soortgelijke manier kun je de afgeleide functie g' van $g(x) = x^3$ te vinden. Het differentiequotiënt van $g(x)$ op het interval $[a,\ a + \Delta x]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(a + \Delta x)^3 - a^3}{\Delta x}$

a Gebruik $(a + \Delta x)^3 = a(a + \Delta x)^2 + \Delta x(a + \Delta x)^2$ om aan te tonen dat $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \cdot \frac{(a + \Delta x)^2 - a^2}{\Delta x} + (a + \Delta x)^2$.

b Laat $\Delta x \to 0$ en geef het functievoorschrift van g'.

© Noordhoff Uitgevers bv

21 **a** Laat op de manier van de vorige opdracht zien dat $f'(x) = 4x^3$ de afgeleide functie van $f(x) = x^4$ is.
b Doe een voorspelling voor $g'(x)$ als $g(x) = x^{10}$.

Theorie

Voor elke machtsfunctie $f(x) = x^n$, n geheel en positief, geldt $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ ofwel $\frac{dy}{dx} = n \cdot x^{n-1}$.
Voor een lineaire functie $f(x) = ax + b$ geldt $f'(x) = a$.
Voor een constante functie $f(x) = c$ geldt $f'(x) = 0$.

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie $f(x) = x^7$.
Bereken exact de helling van de grafiek van f in het punt $(-2, -128)$.

Oplossing
De afgeleide functie is $f'(x) = 7x^6$.
De helling in $(-2, -128)$ is dus $f'(-2) = 7 \cdot (-2)^6 = 448$.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie $g(x) = x^8$.
In welk punt is de helling gelijk aan 1024?

Oplossing
De afgeleide functie is $g'(x) = 8x^7$.
De helling is gelijk aan 1024 als $g'(x) = 1024$.
$8x^7 = 1024$ geeft $x^7 = 128$ dus $x = 2$.
$g(2) = 2^8 = 256$ dus het gevraagde punt is $(2, 256)$.

Ondersteunende route → maak opdracht O22

22 H Gegeven zijn de functies $f(x) = x^5$ en $g(x) = x^6$.
a Geef de functievoorschriften $f'(x)$ en $g'(x)$.
b Bereken exact de hellingen van de grafieken van f en g in het punt $(1, 1)$.
c In welk(e) punt(en) van de grafiek van f is de helling gelijk aan 80?

23 Gegeven is de functie $f(x) = x^7$.
Bereken voor welke waarden van x de helling van de grafiek van f tussen 0 en 2 ligt. Rond je antwoorden af op twee decimalen.

Uitdagende route → maak opdracht U4 en U5

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O19

a Teken in een assenstelsel de grafiek van $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$.
b Hoe groot is de helling van de grafiek in het punt $(0, 2)$?
c Hoe groot is de helling van de grafiek in het punt $(2, 3)$?
d Wat kun je zeggen over de helling van de grafiek in een willekeurig punt van de grafiek?
e Geef het functievoorschrift van de hellingfunctie van f.
f Beantwoord de opdrachten a, c, d en e ook voor de functie $g(x) = 3$.

O22

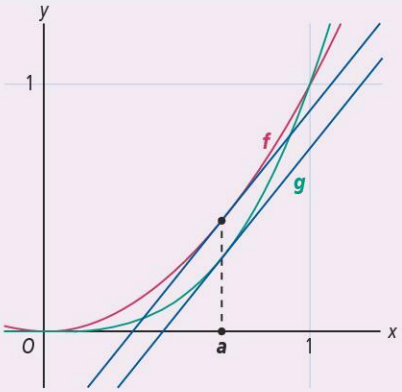
Gegeven is de functie $g(x) = x^4$. Op de grafiek van g ligt het punt A met x-coördinaat 2.
a Geef het functievoorschrift van g'.
b Bereken exact de y-coördinaat van A.
c De helling van de grafiek in A is $g'(2)$. Bereken deze helling exact.

functie	$f(x) = x^n$
afgeleide	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
Voor $f(x) = x^4$ neem je $n = 4$.	

Uitdagende opdrachten

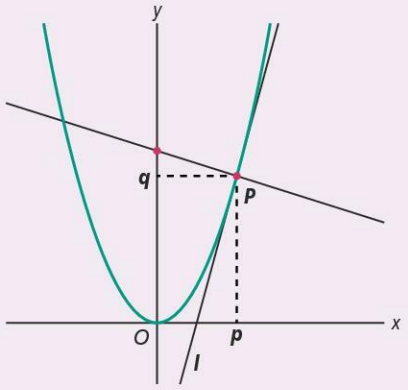
U4

De grafieken van $f(x) = x^2$ en $g(x) = x^3$ snijden elkaar in de punten $(0, 0)$ en $(1, 1)$. Voor een waarde $x = a$ met $0 < a < 1$ hebben de grafieken van f en g precies dezelfde helling. Bereken exact hoe groot die helling is.



U5

Op de grafiek van de functie $f(x) = x^2$ ligt het punt $P(p, p^2)$. Lijn l raakt de grafiek van f in P.
a Neem $p = 2$ en toon met behulp van de richtingscoëfficiënt van l aan dat l de y-as snijdt in het punt $(0, -4)$.
b Toon aan dat l voor elke waarde van p de y-as snijdt in het punt $(0, -p^2)$.
c Toon aan dat de loodlijn in P op l de y-as snijdt in het punt met y-coördinaat $p^2 + \frac{1}{2}$.



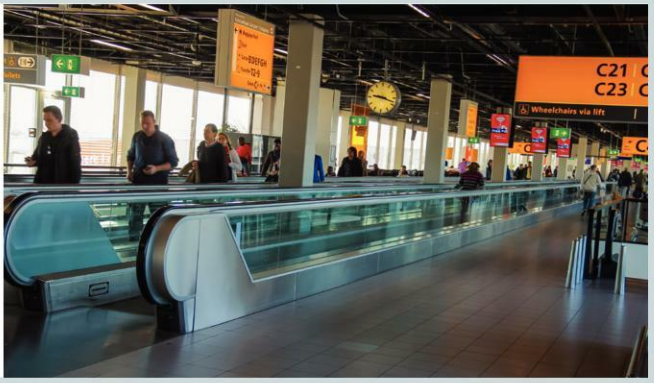
© Noordhoff Uitgevers bv

5.4 Regels voor differentiëren

Je leert
- de regels voor het differentiëren
- hoe je de afgeleide van een veeltermfunctie bepaalt

Leerroutes
- ondersteunend: 24—25—26—27—28—O29—O30—30—31
- doorlopend: 24—25—26—27—28—29—30—31—32
- uitdagend: 24—25—26—27—29—31—32—U6—U7

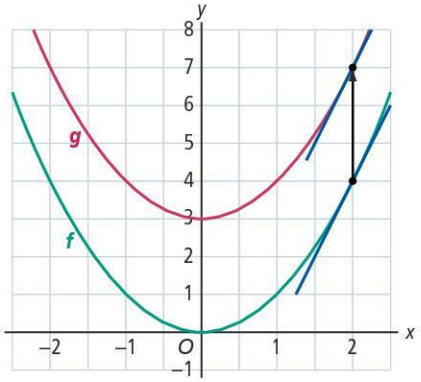
Op Schiphol moet je vaak grote afstanden afleggen om van je vliegtuig naar de aankomsthal te komen. Op veel stukken kun je dat doen via een lopende band. Die band beweegt met een snelheid van 1 m/s.
- Als je zelf op die band gaat lopen met een snelheid van 1,5 m/s, met welke snelheid beweeg je je dan door de gang?
- Met welke snelheid beweeg je je door de gang als je op die band met 1,5 m/s de verkeerde kant oploopt (streng verboden!)?



24 Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.
Door de grafiek van f drie eenheden omhoog te schuiven ontstaat de grafiek van de functie $g(x) = x^2 + 3$.

a Wat weet je van de hellingen van de grafieken van f en g voor $x = 2$?

b Leg uit dat voor elke waarde van x geldt $f'(x) = g'(x)$.

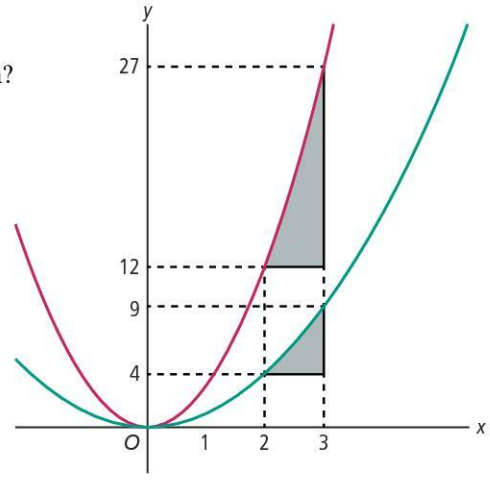


25 **a** Leg uit hoe je de grafiek van de functie $h(x) = 3x^2$ kunt krijgen uit de grafiek van $f(x) = x^2$.

b Wat betekent dit voor de hellingen van de beide grafieken?

c Welk verband is er tussen $f'(x)$ en $h'(x)$?

d Geef het functievoorschrift van h'.



© Noordhoff Uitgevers bv

26 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ en de somfunctie $s(x) = f(x) + g(x) = x^2 + x^3$.

a Bereken de gemiddelde toename van $f(x)$, $g(x)$ en $s(x)$ op het interval $[1, 3]$.

b Welk verband is er tussen deze gemiddelde toenames?

c Bereken exact $f'(1)$ en $g'(1)$.

d Bereken met je rekenmachine $s'(1)$.

e Welk verband bestaat er tussen $f'(1)$, $g'(1)$ en $s'(1)$?

Theorie

Het bepalen van een afgeleide functie heet differentiëren.

Regels voor het differentiëren

functie	afgeleide functie
$g(x) = f(x) + c$	$g'(x) = f'(x)$
$g(x) = c \cdot f(x)$	$g'(x) = c \cdot f'(x)$
$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$ (somregel)
$s(x) = f(x) - g(x)$	$s'(x) = f'(x) - g'(x)$

Met deze regels kun je elke veeltermfunctie differentiëren.

Voorbeeld 1

Differentieer de functies $f(x) = -2x^4$ en $g(x) = 3x^7$.

Oplossing

$f'(x) = -2 \cdot 4x^3 = -8x^3$

$g'(x) = 3 \cdot 7x^6 = 21x^6$

Voorbeeld 2

Differentieer de functie $f(x) = -2x^4 + 3x^7 + 12$.

Oplossing

$f'(x) = -8x^3 + 21x^6 + 0$, dus

$f'(x) = -8x^3 + 21x^6$

27 H Differentieer de veeltermfuncties. Werk zo nodig eerst de haakjes weg.

a $g(x) = 20 + x^3 + 2\frac{1}{2}x$

b $k(p) = 10 - 2{,}5p^4 + 2p^3$

c $m(t) = (t + 5)(t - 5)$

d $s(t) = (10t)^4$

e $f(x) = \frac{5}{3}x^3 + 8\frac{1}{5}$

f $g(x) = -16$

g $h(x) = x^2\sqrt{2} + \sqrt{5}$

h $m(x) = -7x - (8 - 3x)$

28 Yoran differentieert de functie $k(x) = x^5(x^2 - 4x)$.

Hij vindt als afgeleide $k'(x) = 5x^4(2x - 4)$.

a Hoe komt Yoran aan de factoren $5x^4$ en $2x - 4$?

b Werk in het functievoorschrift van k de haakjes weg en differentieer daarna de functie k.

c Klopt het antwoord van Yoran? Wat is je conclusie?

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O29

29 Bereken exact de helling van de grafiek in het punt met x-coördinaat 1.

a $f(x) = -6x^2 + 5x - 1$

b $g(x) = -3x^5 - 8x^2$

c $h(x) = (2x - 6)(5x + 1)$

d $k(x) = x^2(5 - x^3)$

e $l(x) = (7x - 2)^2$

f $m(x) = (x^2 + 1)(5x - 8)$

Ondersteunende route → maak opdracht O30

30 H Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = x^2 + 6x + 5$.

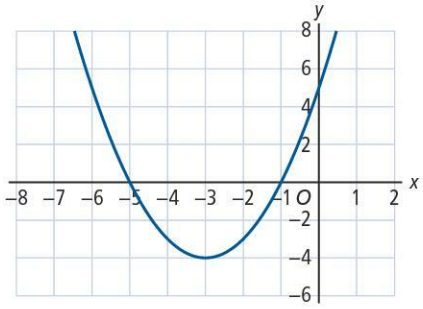
a Bereken exact de helling van de grafiek van f in het snijpunt met de y-as.

b Doe hetzelfde voor de snijpunten van de grafiek van f met de x-as.

c Bereken exact de coördinaten van het punt op de grafiek van f waarin de helling gelijk is aan 10.

d Hoe groot is de helling in de top van de grafiek van f?

e Bereken met behulp van $f'(x)$ de coördinaten van de top.



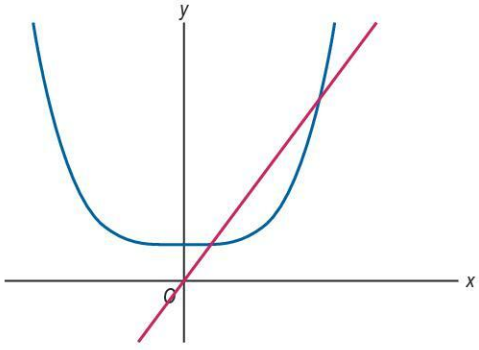
In een top van de grafiek van een functie f is de raaklijn evenwijdig aan de x-as. De helling van de grafiek is daar 0. Een top van de grafiek van f kun je dus vinden door de vergelijking $f'(x) = 0$ op te lossen.

31 Bereken met behulp van differentiëren de coördinaten van de top van de grafiek van $f(x) = -3x^2 + 18x - 20$.

32 Gegeven zijn de functies $f(x) = 0{,}5x^4 + 3$ en $g(x) = 6{,}75x$.

a Punt P is het punt op de grafiek van f waarin de raaklijn evenwijdig is aan de grafiek van g.
Bereken exact de coördinaten van P.

b Voor welke waarde van p is de lijn met vergelijking $y = -16x + p$ een raaklijn aan de grafiek van f?



Uitdagende route → maak opdracht U6 en U7

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O29 Gegeven is de functie $f(x) = 3x^3 - 8x$.
Je gaat de helling van de grafiek van f berekenen in het punt met x-coördinaat -1.

a Differentieer f.

b Bereken de helling met $f'(-1)$.

Bereken exact de helling van de grafiek in het punt met de gegeven x-coördinaat. Werk zo nodig eerst de haakjes weg.

c $g(x) = x^3 + 3$ met $x = 3$

d $h(x) = 10 - x^5 + 3x^4$ met $x = 2$

e $k(x) = x^3(5x - x^2)$ met $x = 1$

f $l(x) = (3x - 5)^2$ met $x = -2$

O30 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 5$.

a Bereken $f'(x)$.

b Laat met een berekening zien dat $f'(x) = 0$ als $x = -3$ of $x = 2$.

c Wat weet je van de helling in de punten van de grafiek van f waarvoor geldt $f'(x) = 0$?

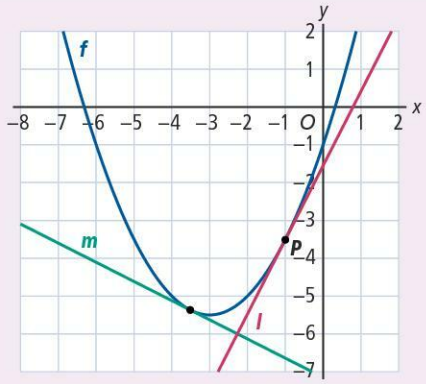
d De grafiek van f heeft twee toppen.
Bereken de coördinaten van deze toppen.

Uitdagende opdrachten

U6 De parabool is de grafiek van de functie

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 1$.

Lijn l raakt de parabool in het punt $P(-1, -3\frac{1}{2})$.
Lijn m raakt ook de parabool en staat loodrecht op l.
Stel een vergelijking op van m.



U7 Van een functie f is de afgeleide functie $f'(x) = x^2 + 2x$.
De grafiek van f gaat door het punt $(3, 7)$.
Geef een functievoorschrift van f.

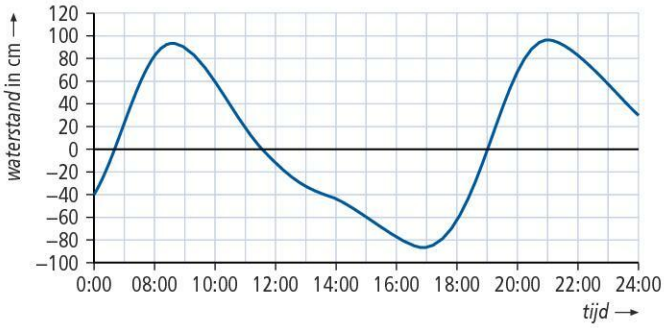
© Noordhoff Uitgevers bv

5.5 Maxima en minima

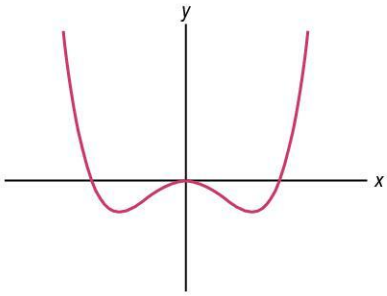
Je leert
- wanneer een functie stijgt of daalt en wat extreme waarden zijn
- hoe je exact de extreme waarden van een functie berekent

Leerroutes
- ondersteunend: 33—34—35—036—36—037
- doorlopend: 33—34—35—36—37—38
- uitdagend: 33—34—36—37—38—U8

Boten die de haven van Harlingen willen binnen varen, moeten rekening houden met eb en vloed. In de grafiek zie je de waterhoogten in Harlingen op 7 februari 2018.
- Op welke tijdstippen bereikte het water de hoogste stand?
  Hoe hoog stond het water op die tijdstippen?
- Op welk tijdstip ging de waterhoogte over van dalend naar stijgend?
  Hoe hoog stond het water toen ongeveer?



33 Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = x^4 - 2x^2$.



a Los exact op $f'(x) = 0$.

b Hoe loopt de raaklijn aan de grafiek van f in de punten waarvoor geldt $f'(x) = 0$?

c Bereken $f'\left(\frac{1}{2}\right)$. Heeft de grafiek in het punt waarvoor $x = \frac{1}{2}$ een positieve of negatieve helling?

d Los exact op $f'(x) < 0$. Wat weet je van de helling van de grafiek in de punten waarvoor $f'(x) < 0$?

e Op welke intervallen is de helling van de grafiek positief?

Theorie

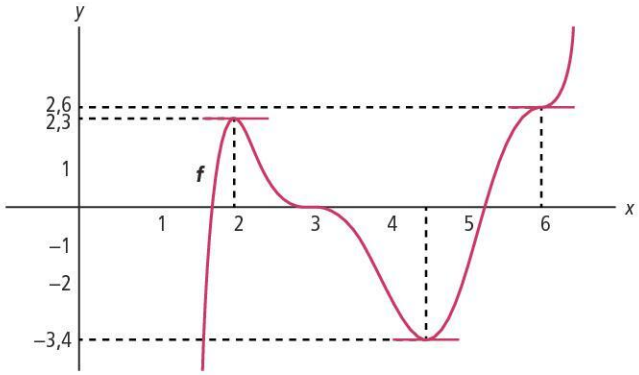
Als op een interval $[a, b]$ geldt:
- als x toeneemt, dan neemt $f(x)$ toe, dan zeg je dat f **stijgt** op dat interval. Dan is $f'(x) \geq 0$ op $[a, b]$.
- als x toeneemt, dan neemt $f(x)$ af, dan zeg je dat f **daalt** op dat interval. Dan is $f'(x) \leq 0$ op $[a, b]$.

Is het punt $T(a, b)$ een top van de grafiek van f en gaat f bij $x = a$ over van stijgen in dalen, dan heeft f een **maximum** $f(a) = b$. Gaat f bij $x = a$ over van dalen in stijgen dan heeft f een **minimum** $f(a) = b$.
Maximale en minimale functiewaarden heten **extreme waarden**.
Extreme waarden zijn de y-coördinaten van de toppen van de grafiek van f.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Gegeven is de grafiek van een functie f.
Voor welke waarde van x geldt $f'(x) = 0$?
Op welk interval daalt f?
Wat zijn de extreme waarden van f?



Oplossing

$f'(x) = 0$ als de raaklijn aan de grafiek evenwijdig is aan de x-as.

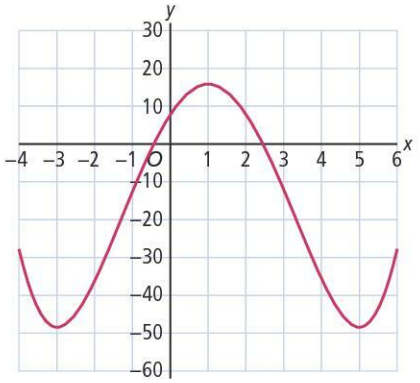
Dat is bij $x = 2$, $x = 3$, $x = 4{,}5$ en $x = 6$.

f daalt op het interval $[2; 4{,}5]$.

f heeft een maximum $f(2) = 2{,}3$ en een minimum $f(4{,}5) = -3{,}4$.

34 Gegeven is de grafiek van de functie

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 6\frac{1}{2}x^2 + 15x + 8$.



a Lees uit de grafiek af bij welke waarden van x de grafiek een horizontale raaklijn heeft.

b Geef het functievoorschrift $f'(x)$ en controleer de antwoorden bij opdracht a.

c Op welke intervallen stijgt f?

35 Gegeven is de functie $g(x) = 16x^3 - 2{,}4x^5$.

a Los exact op $g'(x) = 0$.

b Plot de grafiek van g en ga na bij welke waarden van x de grafiek van g een top heeft.

c Bereken de y-waarde van de toppen.

© Noordhoff Uitgevers bv

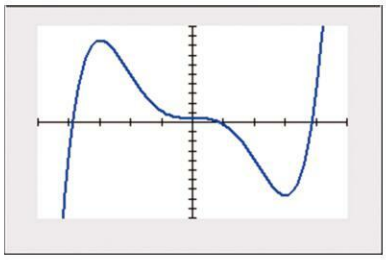
Aanpak

Hoe bereken je exact de extreme waarden van een functie f?

1. Differentieer f.
2. Los exact op $f'(x) = 0$.
3. Plot de grafiek en kijk of er sprake is van een minimum of een maximum.
4. Bereken de extreme waarden door de gevonden x-waarden in te vullen in $f(x)$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = x^5 - 15x^3 + 10$.
Bereken exact de extreme waarden van f.



Oplossing

1. $f'(x) = 5x^4 - 45x^2$
2. $5x^4 - 45x^2 = 0$ ofwel $5x^2(x^2 - 9) = 0$.
   $x = 0$ of $x = -3$ of $x = 3$.
3. In de plot zie je dat de grafiek geen top heeft bij $x = 0$.
4. f heeft een maximum $f(-3) = 172$ en een minimum $f(3) = -152$.

Ondersteunende route → maak opdracht O36

36 Bereken exact de extreme waarden.

H

a $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 16x$ **c** $h(x) = 2x^4 - 8x$

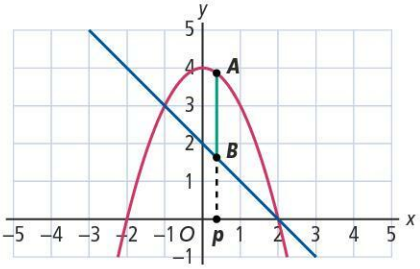
b $g(x) = 6x - 7$ **d** $k(x) = 2x^4 - 8x^2$

Ondersteunende route → maak opdracht O37

37 Gegeven zijn de functies $f(x) = 4 - x^2$ en $g(x) = 2 - x$.
Een lijn $x = p$, met $-2 < p < 2$, snijdt de grafiek van f in A en de grafiek van g in B.
De lengte L van lijnstuk AB is een functie van p.

a Geef een functievoorschrift van L.

b Bereken exact het maximum van L.



38 Ruben beweert: 'Als de afgeleide ergens nul is, dan heeft de functie daar een extreme waarde.'
Maaike beweert: 'Als de functie op een interval daalt, is er in dat interval geen waarde waar de afgeleide gelijk is aan 0.'
Geef bij beide uitspraken een tegenvoorbeeld met behulp van een schets van een grafiek.

Uitdagende route → maak opdracht U8

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

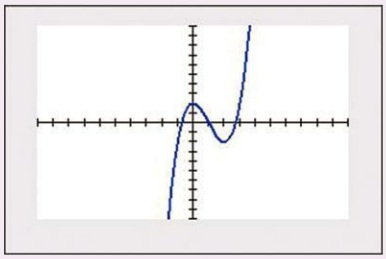
O36 Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

a Differentieer f.

b Los exact op $f'(x) = 0$.

c Ga met de plot na of de grafiek van f een top heeft.

d Vul in: f heeft een maximum $f(\ldots) = \ldots$
f heeft een minimum $f(\ldots) = \ldots$.



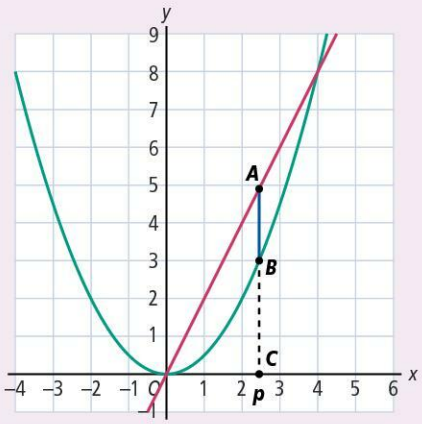
O37 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2x$ en $g(x) = \frac{1}{2}x^2$.
Een lijn $x = p$, met $0 < p < 4$, snijdt de grafiek van f in A, de grafiek van g in B en de x-as in C. Als p verandert, verandert ook de lengte van lijnstuk AB.

a Vul in.
De lengte van lijnstuk AC is gelijk aan $f(p) = \ldots$
De lengte van lijnstuk BC is gelijk aan $g(p) = \ldots$

b De lengte L van lijnstuk AB is een functie van p, $L = AC - BC$.
Druk L uit in p.

c Bereken exact voor welke waarde van p de lengte van AB maximaal is. Gebruik daarbij $L'(p)$.

d Bereken exact het maximum van L.



Uitdagende opdrachten

U8 Gegeven is een derdegraadsfunctie f.
De grafiek van f heeft toppen bij $x = -4$ en $x = 2$.
De grafiek gaat bovendien door de punten $(0, 0)$ en $(3, -3)$.
Stel het functievoorschrift van f op.

© Noordhoff Uitgevers bv

5.6 Raaklijnen en hellinggrafieken

Je leert
- hoe je een vergelijking van een raaklijn aan een grafiek opstelt
- hoe je met de hellinggrafiek eigenschappen van een functie vindt

Leerroutes
- ondersteunend: 39—040—40—41—42—43—44
- doorlopend: 39—40—41—42—43—44—45
- uitdagend: 39—40—41—42—43—45—U9

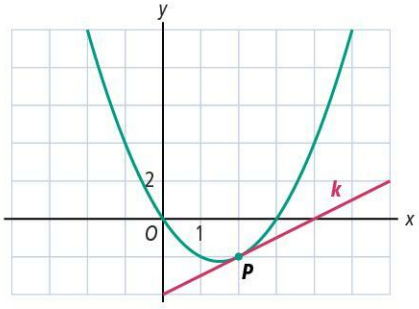
In de Tour de France fietst een peloton over een traject van 10 km met een constante snelheid van 50 km/h.
- Teken een grafiek van de snelheid v in km/h als functie van de tijd t in minuten.
- s is de afgelegde weg na t minuten. Wat is het verband tussen de helling van de grafiek van s en de snelheid?

39 Op de grafiek van de functie $f(x) = x^2 - 3x$ ligt het punt $P(2, -2)$. De lijn k: $y = ax + b$ raakt de grafiek in P.

a Bereken met behulp van $f'(x)$ de richtingscoëfficiënt a van k.

b Gebruik de coördinaten van P om de waarde van b te berekenen.

c Geef een vergelijking van k.



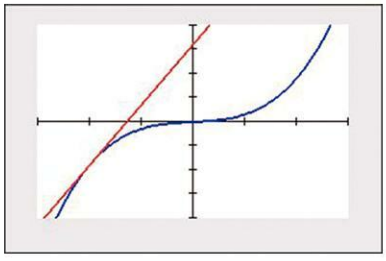
Aanpak

Hoe stel je een vergelijking op van de raaklijn in een punt P van een grafiek?

1. Bereken de helling a in P met behulp van $f'(x)$.
2. Vul a in bij de vergelijking $y = ax + b$.
3. Bereken b door de coördinaten van P in te vullen.
4. Schrijf een vergelijking van de raaklijn op.

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de raaklijn in het punt $P(-2, -9)$ aan de grafiek van $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x$.



Oplossing

1. $f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}$, dus $a = f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + \frac{1}{2} = 12\frac{1}{2}$.
2. De vergelijking wordt $y = 12\frac{1}{2}x + b$.
3. Vul de coördinaten van P in: $-9 = 12\frac{1}{2} \cdot -2 + b$; dus $b = 16$.
4. Een vergelijking van de raaklijn is $y = 12\frac{1}{2}x + 16$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht 040

40 Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}5x^4 - 3$.

H

a Stel een vergelijking op van de raaklijn in het punt $P(1; -2{,}5)$.

b Herhaal opdracht a voor het punt Q met x-coördinaat -1.

c Stel een vergelijking op van de raaklijnen aan de grafiek van f in de punten met y-coördinaat 5.

41 Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x$.

a Plot en schets de grafiek van f.

b Bereken exact de waarden van x waarvoor de grafiek van f een top heeft.

c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $P(-1, 8)$.

d Bereken exact de coördinaten van de punten van de grafiek van f waarin de raaklijn evenwijdig is aan de lijn $y = -15x + 1$.

42 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 6x$.

a Plot en teken de grafieken van f en f' in twee aparte figuren.

b Ga na op welk interval f stijgt en op welk interval f daalt.

c Ga na op welk interval de grafiek van de afgeleide functie boven de x-as ligt en op welk interval onder de x-as.

d Vergelijk je antwoorden bij opdracht c met opdracht b. Welke conclusies kun je trekken?

e Hoe kun je uit de grafiek van de afgeleide functie aflezen waar de top van de grafiek van f ligt?

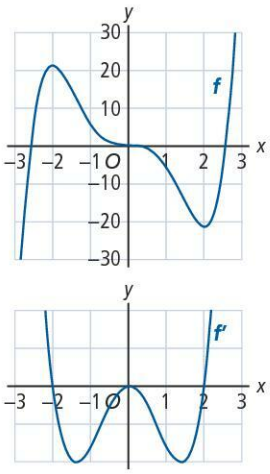
© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

De grafiek van f' heet de **hellinggrafiek** van f. Uit deze hellinggrafiek kun je eigenschappen van de grafiek van f afleiden en omgekeerd.
Waar de hellinggrafiek de x-as snijdt, is $f'(x) = 0$ en heeft de grafiek van f een horizontale raaklijn.
Waar de hellinggrafiek boven de x-as ligt, is $f'(x) > 0$ en stijgt f.
Waar de hellinggrafiek onder de x-as ligt, is $f'(x) < 0$ en daalt f.

Voorbeeld

Gegeven is de grafiek van functie f.
Schets de hellinggrafiek.



Oplossing

Als $x = -2$, $x = 0$ en $x = 2$ is de helling 0, dus voor deze waarden snijdt de hellinggrafiek de x-as.

Op de intervallen $\langle \leftarrow, -2\rangle$ en $\langle 2, \rightarrow\rangle$ stijgt f dus voor $x < -2$ en $x > 2$ ligt de hellinggrafiek boven de x-as.

Op de intervallen $\langle -2, 0\rangle$ en $\langle 0, 2\rangle$ daalt f dus voor $-2 < x < 0$ en $0 < x < 2$ ligt de hellinggrafiek onder de x-as.

43 H

Plot van elke functie de grafiek en schets de bijbehorende hellinggrafiek.

a $h(x) = x^3 - 9x$

b $k(x) = 4\sqrt{x+6}$

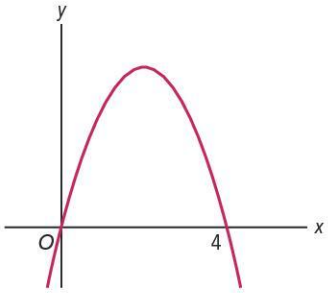
c $l(x) = 7x - x^2$

d $m(x) = 2^x - 6$

44

De parabool is de grafiek van de hellingfunctie van een functie f.

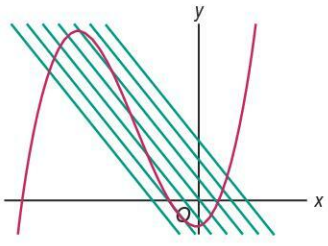
a Op welk(e) interval(len) stijgt f?
b Op welk(e) interval(len) daalt f?
c Bij welke waarde van x heeft f een minimum?
d Bij welke waarde van x heeft f een maximum?
e De grafiek van f gaat door het punt $(0, 5)$.
Schets een mogelijke grafiek van f.



45

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + x - 4$ en de lijnen met vergelijking $y = -4x + c$.

a Bereken exact voor welke waarden van c een lijn uit deze bundel een raaklijn is aan de grafiek van f.
b Bereken exact bij welke waarde van x de functie f het snelst daalt.



Uitdagende route → maak opdracht U9

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O40 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2$.

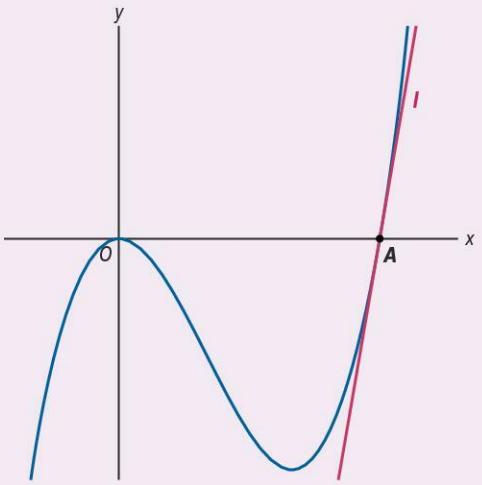
a Controleer dat de grafiek van f de x-as snijdt in $O(0, 0)$ en $A(6, 0)$.

b Differentieer f.

c Toon aan dat de helling van de grafiek in A gelijk is aan 6.

d De lijn l: $y = ax + b$ raakt de grafiek in A.
Hoe groot is a?

e Bereken b door de coördinaten van A in te vullen in de vergelijking van l.



Op de grafiek van f ligt een punt P waarin de helling gelijk is aan de helling in A.

f Los de vergelijking $f'(x) = 6$ op.

g Bereken exact de coördinaten van P.

h Stel een vergelijking op van de raaklijn in P.

Uitdagende opdrachten

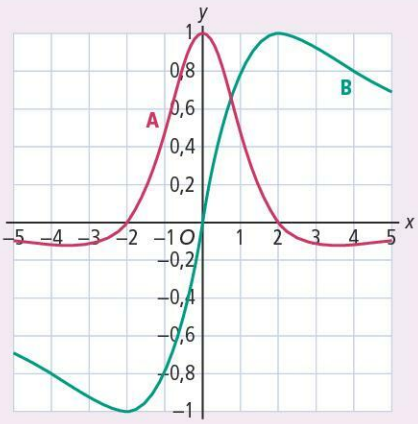
U9 In de figuur zijn twee grafieken getekend. De ene is de grafiek van een functie f. De andere is de grafiek van de afgeleide f'.

a Welke grafiek is symmetrisch in de verticale as?
Welke symmetrie heeft de andere grafiek?

b Welke grafiek is van de afgeleide f'?
Geef argumenten voor je keuze.

c Hoe zie je in de grafiek van f' de plaats van het maximum van f?

d Hoe groot is de helling van de grafiek van f bij $x = 0$?



© Noordhoff Uitgevers bv

46 Gegeven is de functie $f(x) = -2x^4 + 8x - 7$.

a Plot en schets de grafiek van f.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek in het snijpunt van de grafiek met de y-as.

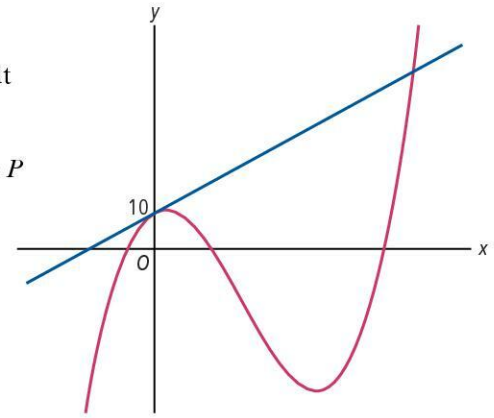
c Bereken exact de extreme waarde van f.

47 Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 8x^2 + 5x + 10$.

a Bereken exact de extreme waarden van f.

b De raaklijn l in het punt $(0, 10)$ aan de grafiek van f snijdt de grafiek ook nog in een punt P.
Bereken exact de coördinaten van P.

c Bereken in graden nauwkeurig de hoek die de raaklijn in P aan de grafiek van f met l maakt.



48 Hout krimpt in de eerste maanden nadat het is gezaagd. Door de structuur van het hout krimpt het in de lengte anders dan in de breedte. Jan heeft een pas gezaagde plaat hout met een lengte van 55 cm en een breedte van 80 cm.
Na t maanden gelden voor de lengte L en de breedte B, beide in cm, de formules: $L = -0{,}0135t^2 + 55$ en $B = 80 - 0{,}05t$.

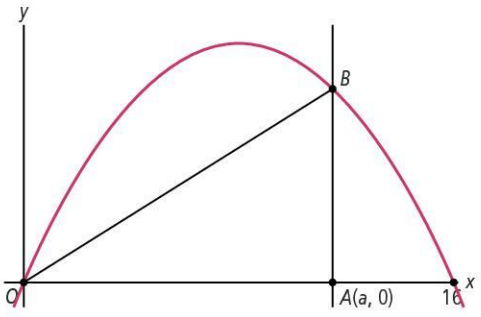
a Toon met een berekening aan dat na precies één maand de plaat hout in de breedte sneller krimpt dan in de lengte.

b Bereken na hoeveel maanden de lengte en de breedte met dezelfde snelheid krimpen. Rond je antwoord af op twee decimalen.

49 Gegeven is de grafiek van $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 2x$.
Op de x-as ligt punt $A(a, 0)$ met $0 < a < 16$.
De lijn door punt A loodrecht op de x-as snijdt de parabool in punt B.
De oppervlakte O van driehoek OAB is een functie van a.

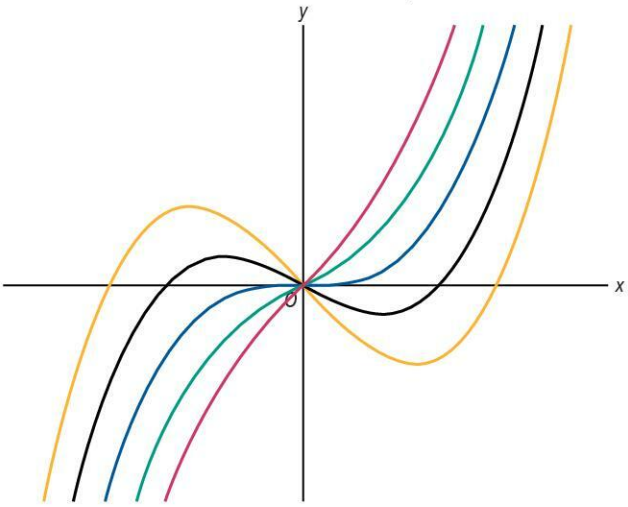
a Toon aan dat geldt: $O(a) = a^2 - \frac{1}{16}a^3$.

b Onderzoek bij welke waarde van a de oppervlakte van driehoek OAB maximaal is.



© Noordhoff Uitgevers bv

50 Gegeven is de familie van functies $f_c(x) = x^3 + cx$.

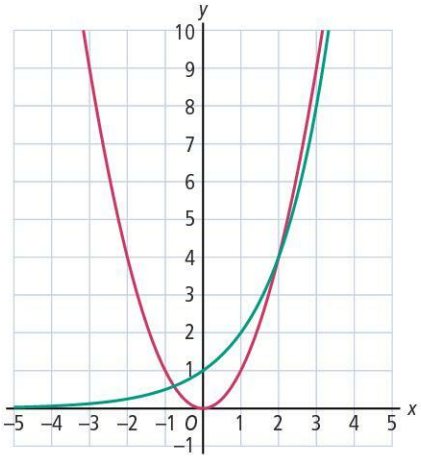


Onderzoek voor welke waarde(n) van c de functie

a geen extreme waarden heeft.
b twee extreme waarden heeft.
c precies één extreme waarde heeft.

51 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = 2^x$.
Een lijn $x = p$ snijdt de grafiek van f in een punt P en de grafiek van g in een punt Q.

a Onderzoek of er waarden van p zijn waarvoor de helling van de grafiek van f in P gelijk is aan de helling van de grafiek van g in Q.
b Geef de mogelijke coördinaten van P en Q in twee decimalen.



© Noordhoff Uitgevers bv

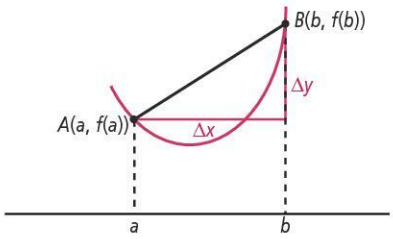
Theorie

Differenties en differentiequotiënt, differentiaalquotiënt en helling

Toenames van x en y geef je aan met Δx en Δy.
Δx en Δy worden ook differenties genoemd.

De gemiddelde toename van $f(x)$ over het interval $[a,b]$ bereken je met het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Dit differentiequotiënt is gelijk aan de richtingscoëfficiënt of helling van de lijn door de punten $A(a, f(a))$ en $B(b, f(b))$.
Als $\Delta x \to 0$, dan gaat het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ over in het differentiaalquotiënt $\frac{dy}{dx}$
Het differentiaalquotiënt is de exacte waarde van de helling in een punt van de grafiek.



Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 3x^2$.

Bereken $\frac{dy}{dx}$ voor $x = -2$.

Oplossing

$f(-2) = 12$ en

$f(-2 + \Delta x) = 3(4 - 4\Delta x + (\Delta x)^2) = 12 - 12\Delta x + 3(\Delta x)^2$

$\Delta y = f(-2 + \Delta x) - f(-2) = -12\Delta x + 3(\Delta x)^2$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-12\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} = -12 + 3\Delta x$

Als $\Delta x \to 0$ vind je voor $x = -2$: $\frac{dy}{dx} = -12$.

S1 Gegeven is de functie $f(x) = 5x^2 - 6$.

- **a** Bereken de gemiddelde toename van $f(x)$ over het interval $[3, 10]$.
- **b** Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ over de intervallen $[2; 2{,}1]$, $[2; 2{,}01]$ en $[2, 2{,}001]$.
- **c** Wat is op grond van je antwoorden bij opdracht c vermoedelijk de waarde van het differentiaalquotiënt voor $x = 2$?

Vaardigheid

Je kunt de helling van een grafiek in een punt benaderen.

De helling benader je met behulp van een differentiequotiënt over een klein interval of met je rekenmachine.

Voorbeeld

Benader de helling van de grafiek van de functie $f(x) = 7^x$ voor $x = 0$.

Oplossing

$f(0{,}001) - f(0) = 7^{0{,}001} - 1 \approx 0{,}0019$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{0{,}0019}{0{,}001} = 1{,}9$

De helling is 1,9.

S2

- **a** Benader de helling van de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{x}$ voor $x = 4$ met behulp van een differentiequotiënt over een klein interval.
- **b** Benader de helling van de grafiek van f voor $x = 9$ met je rekenmachine.

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheid

Je kunt de helling in een punt van een grafiek exact berekenen.

Je vindt de helling van de grafiek van een functie f in een punt $P(p, f(p))$ door het differentiaalquotiënt van f voor $x = p$ te berekenen.

Voorbeeld

Bereken exact de helling van de grafiek van $f(x) = \frac{2}{3}x^2$ in het punt $P(3, 6)$.

Oplossing

Over het interval $[3, 3 + \Delta x]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{2}{3}(3 + \Delta x)^2 - 6}{\Delta x} = \frac{\frac{2}{3}(9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2) - 6}{\Delta x} = \frac{4\Delta x + \frac{2}{3}(\Delta x)^2}{\Delta x} = 4 + \frac{2}{3}\Delta x.$

Als $\Delta x \to 0$, dan $\frac{dy}{dx} = 4$, dus de helling in P is 4.

S3 Bereken exact de helling van de grafiek van de functie $f(x) = 4x^2 - 7$ in het punt $P(2, 9)$.

Vaardigheid

Je kunt de afgeleide van een machtsfunctie bepalen.

De regel voor het differentiëren $f(x) = x^n$ met n een positief geheel getal is $f'(x) = nx^{n-1}$.
Voor een lineaire functie $f(x) = ax + b$ geldt $f'(x) = a$.
Voor een constante functie $f(x) = c$ geldt $f'(x) = 0$.

Voorbeeld

functie	*afgeleide*
$f(x) = x^{10}$	$f'(x) = 10x^9$
$g(x) = -7x + 24$	$g'(x) = -7$
$h(x) = 24$	$h'(x) = 0$

S4 Differentieer.

a $f(x) = x^{111}$

b $g(x) = 78 - 45x$

c $h(x) = -2000$

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheid

Je kunt de afgeleide van een veeltermfunctie bepalen.

Je gebruikt daarbij de differentieerregels:

als $g(x) = c \cdot f(x)$ dan is $g'(x) = c \cdot f'(x)$;

als $g(x) = f(x) + c$ dan is $g'(x) = f'(x)$;

als $s(x) = f(x) + g(x)$ dan is $s'(x) = f'(x) + g'(x)$;

als $s(x) = f(x) - g(x)$ dan is $s'(x) = f'(x) - g'(x)$.

Voorbeeld

functie	*afgeleide*
$g(x) = 3x^{10}$	$g'(x) = 30x^9$
$h(x) = x^{10} + 3$	$h'(x) = 10x^9$
$s(x) = x^{10} + x^2$	$s'(x) = 10x^9 + 2x$
$v(x) = 3x^{10} - 5x^2$	$v'(x) = 30x^9 - 10x$

S5 Differentieer.

a $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 2x^3 + 3x - 7$

b $g(x) = 5x^4 - 10x^2$

Vaardigheid

Je kunt exact de extreme waarden van een functie berekenen.

Minima en maxima zijn extreme waarden van een functie.

De extreme waarden van een functie f bereken je als volgt:

1 Differentieer f.

2 Los exact op $f'(x) = 0$.

3 Plot de grafiek en kijk of er sprake is van een minimum of een maximum.

4 Bereken de extreme waarden door de gevonden x-waarden in te vullen in $f(x)$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 4x$.
Bereken de extreme waarde van f.

Oplossing

1 $f'(x) = -2x + 4$

2 $-2x + 4 = 0$, dus $x = 2$.

3 Uit een plot blijkt dat er bij $x = 2$ een maximum is.

4 $f(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 = 4$

f heeft een maximum $f(2) = 4$.

S6 Gegeven zijn de functies $f(x) = 9x - x^3$ en $g(x) = x^5 - 5x^4$.

a Bereken exact de extreme waarden van f.

b Bereken exact de extreme waarden van g.

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheid

Je kunt een vergelijking van een raaklijn in een punt P van een grafiek opstellen.

1. Bereken de helling a in P met behulp van $f'(x)$.
2. Vul a in bij de vergelijking $y = ax + b$.
3. Bereken b door de coördinaten van P in te vullen.
4. Schrijf de vergelijking van de raaklijn op.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 4x$.
Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $P(3, 3)$.

Oplossing

1. $f'(x) = -2x + 4$, dus $f'(3) = -2$.
2. De vergelijking wordt $y = -2x + b$.
3. $x = 3$ en $y = 3$ invullen geeft $-2 \cdot 3 + b = 3$, dus $b = 9$.
4. Een vergelijking van de raaklijn is $y = -2x + 9$.

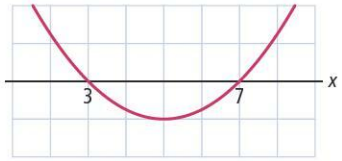
S7 Gegeven is de functie $f(x) = 9x - x^3$.
Stel een vergelijking op van de raaklijn in het punt $(2, 10)$.

Vaardigheid

Je kunt met de hellinggrafiek eigenschappen van een functie vinden.

De grafiek van de afgeleide van f is de hellinggrafiek van f.
Waar de hellinggrafiek de x-as snijdt, heeft de grafiek van f een horizontale raaklijn.
Waar de hellinggrafiek boven de x-as ligt, stijgt f.
Waar de hellinggrafiek onder de x-as ligt, daalt f.

Voorbeeld



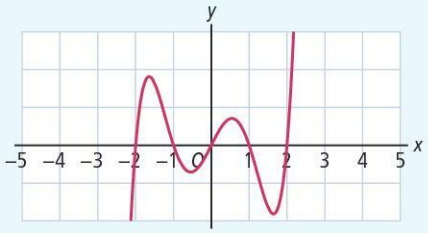
Gegeven is de hellinggrafiek van een functie f. Voor welke waarde van x heeft f een maximum?

Oplossing

Bij $x = 3$ is de helling 0 en gaat $f'(x)$ over van positief naar negatief, dus f gaat over van stijgen naar dalen.
f heeft een maximum voor $x = 3$.

S8 Gegeven is de hellinggrafiek van een functie f.

a Op welke intervallen daalt f?
b Op welke intervallen stijgt f?
c Bij welke waarde(n) van x heeft f een maximum?
d Bij welke waarde(n) van x heeft f een minimum?



© Noordhoff Uitgevers bv

T1 Gegeven is de functie $f(x) = 2x\sqrt{x}$.

a Bereken de differentiequotiënten van f over de intervallen [1; 1,1], [1, 1,01], [1; 1,001] en [1; 1,0001]. Rond af op drie decimalen.

b Naar welke waarde nadert het differentiequotiënt van f vermoedelijk?

c Benader met je rekenmachine de helling van de grafiek in het punt met x-coördinaat 1.

d Maak met je rekenmachine een tabel met de hellingen van de grafiek van f voor $x = 1$ tot en met $x = 9$.

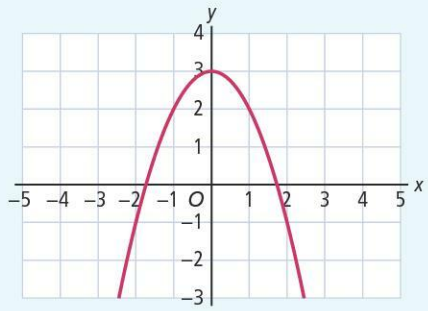
e Bekijk de hellingen voor $x = 1$, $x = 4$ en $x = 9$. Wat zal, op grond van de gevonden hellingen, het functievoorschrift van f' waarschijnlijk zijn?

T2 Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 3$.

a Bereken met behulp van $f'(x)$ de helling van de grafiek in het punt met x-coördinaat -1.

b Bereken exact de coördinaten van het punt van de grafiek waarin de helling gelijk is aan 6.

c Ga met een berekening na of de lijn $y = -8x + 19$ de grafiek raakt.



T3 Differentieer.

a $p(x) = -\frac{1}{2}x^8 + 8\frac{1}{2}$

b $d(p) = (3p)^5$

c $f(x) = 0{,}2x - 0{,}1 - 0{,}1x^{20}$

d $s(t) = (4t + 4)^2 - 4$

e $h(t) = (2-\frac{1}{3}t)^2+\frac{2}{7}t$

f $N(t) = (3t - 5)(3t + 5)$

g $A(u) = 999 - u$

h $h(r) = \pi r^3 - \pi\, ^3r$

T4 Gegeven is de functie $f(x) = 5x - x^5$.

a Plot en schets de grafiek van f.

b Schets met behulp van je antwoord bij opdracht a de hellinggrafiek van f.

c Geef het functievoorschrift van f'.

d Plot de grafiek van f' en ga na dat je schets van opdracht b hiermee overeenkomt.

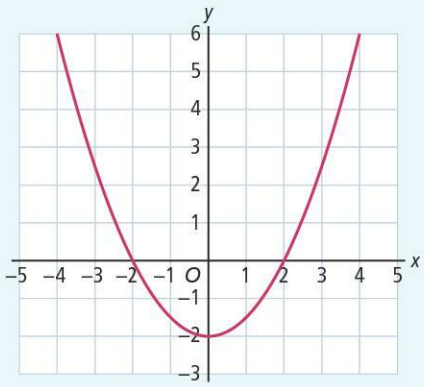
e Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt met x-coördinaat 2.

© Noordhoff Uitgevers bv

T5 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$.
De grafiek van f is de hellinggrafiek van een functie g.

a Voor welke waarden van x heeft g een minimum?
En voor welke waarde van x een maximum?

b Schets een mogelijke grafiek van g.



T6 Een steen valt van 45 meter hoogte. Tijdens de val is de hoogte h in meters na t seconden te berekenen met de formule $h = 45 - 4{,}9t^2$.

a Bereken algebraïsch de gemiddelde valsnelheid van de steen. Rond af op één decimaal.

b Bereken algebraïsch de snelheid waarmee de steen de grond raakt. Rond af op één decimaal.

c Bereken algebraïsch het tijdstip waarop de snelheid van de steen gelijk is aan de gemiddelde snelheid. Rond af op één decimaal.

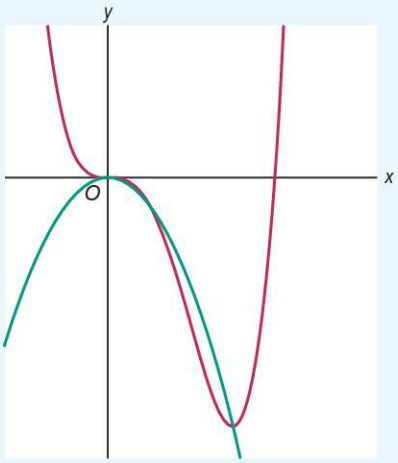
T7 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - 2x^3$ en $g(x) = -x^2$.

a Bereken exact de coördinaten van de punten op de grafiek van f waarin de raaklijn evenwijdig is aan de x-as.

b Bereken exact de extreme waarde(n) van f.

c Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g.

d Bereken algebraïsch voor elk snijpunt in graden nauwkeurig de hoek die de raaklijnen aan de grafieken van f en g in dat punt met elkaar maken.



T8 Gegeven is dat de grafieken van de functies g en h elkaar raken in het punt $P(a, b)$.
Wat kun je nu zeggen over $g(a)$, $g'(a)$, $h(a)$ en $h'(a)$?

© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt de helling van een grafiek in een punt benaderen.

E1 Gegeven is de functie $f(x) = 2^x - 4x$.

a Benader de helling van de grafiek van f in het punt $(-1, 4\frac{1}{2})$ met een differentiequotiënt over een klein interval. Rond je antwoord af op twee decimalen.

b Benader de helling in het punt $(4, 0)$ met je rekenmachine.

Je kunt de helling van een grafiek in een punt exact berekenen.

E2 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4\frac{1}{2}$.

a Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ over het interval $[1, 1 + \Delta x]$.

b Bereken exact de helling van de grafiek in het punt $(1, 5)$.

Je kunt de afgeleide van een machtsfunctie bepalen.

E3 Differentieer.

a $f(x) = x^{17}$

b $f(x) = 5 - 3x$

c $f(x) = 78$

d $f(x) = x^{2020}$

Je kunt de afgeleide van een veeltermfunctie bepalen.

E4 Differentieer.

a $f(x) = 4 - 7x$

b $h(x) = -3x^2 + 1\frac{1}{4}x^4 - 600x^5$

c $f(t) = (4t - 3)(2t + 6)$

d $g(t) = (5t - 9)^2$

Je kunt exact de extreme waarden van een functie berekenen.

E5 Bereken voor elke functie exact de extreme waarden.

a $f(x) = x^3 - 3x^2$

b $k(x) = 2x^3 + \frac{3}{10}x^5$

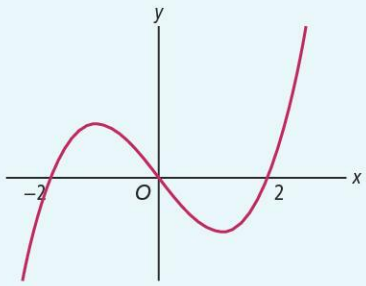
Je kunt een vergelijking van een raaklijn in een punt P van een grafiek opstellen.

E6 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 8x$.
Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt met x-coördinaat 1.

© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt met de hellinggrafiek eigenschappen van een functie vinden.

E7 Van een functie f is de grafiek van de hellingfunctie getekend.



a Op welke intervallen stijgt f?

b Schets een mogelijke grafiek van f.

E8 Jos rijdt weg op de fiets. De afgelegde afstand s in meters na t seconden wordt beschreven door de formule $s = \dfrac{20t^2}{3t + 20}$

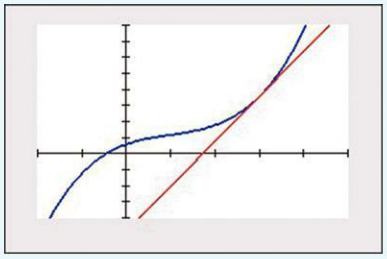
a Bereken exact de gemiddelde snelheid van Jos in de eerste minuut.

b Bereken het differentiequotiënt over het interval [10; 10,01] en geef de praktische betekenis van dit getal.

c Bereken de snelheid in km/h van Jos na één minuut.

E9 Bereken exact de coördinaten van de punten op de grafiek van $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x$ waarin de helling gelijk is aan 12.

E10 Gegeven is een plot van de grafiek van de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 3$ en de lijn l: $y = 14x - 24$.

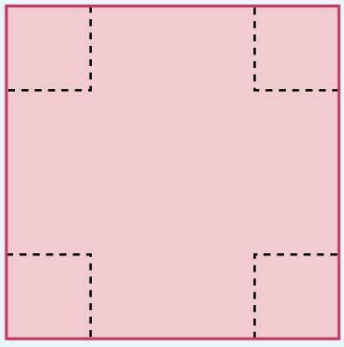


a De lijn l lijkt de grafiek van f te raken.
Ga met een berekening na of l een raaklijn aan de grafiek van f is.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn in het snijpunt van de grafiek van f met de y-as.

c Bereken exact met behulp van de afgeleide in welk punt de grafiek de kleinste helling heeft.

E11 Kirsten wil uit een stuk karton van 60 cm bij 60 cm een doosje zonder deksel vouwen met een zo groot mogelijke inhoud.
Ze knipt vierkantjes weg bij de hoeken van het karton en vraagt zich af hoe groot die vierkantjes moeten zijn.
Noem de zijde van het af te knippen vierkantje x.



a Bereken de oppervlakte en inhoud van het doosje in het geval dat $x = 5$.

b Druk de oppervlakte A van de bodem uit in x.

c Leg uit dat de inhoud I te berekenen is met de formule $I = x(60 - 2x)^2$.

d Bereken exact de maximale inhoud van het doosje.

© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

Periodieke functies 6

SE CE K

In dit hoofdstuk

In klas 3 heb je kennis gemaakt met periodieke grafieken en je hebt geleerd wat de betekenis is van de amplitude, de periode en de evenwichtsstand.
Ook heb je geleerd te werken met de sinus en de cosinus van een hoek.

In dit hoofdstuk worden de sinus en cosinus op een andere manier geïntroduceerd. De sinus- en cosinusfunctie worden gebruikt om periodieke verschijnselen te beschrijven.
Daarbij wordt ook een nieuwe maat voor hoeken ingevoerd, de radiaal.
Je leert ook hoe het functievoorschrift verandert als de grafiek van de functie wordt verschoven of vermenigvuldigd.
Ten slotte leer je vergelijkingen met sinus of cosinus op te lossen.

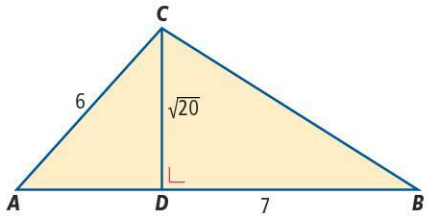
In klas 5 en klas 6 zal je kennis van sinus- en cosinusfuncties verder worden uitgebreid.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

• *Probleemoplossen en analytisch denken*	intro van paragraaf 6.1
• *Modelleren en algebraïseren*	opdracht 45
• *Ordenen en structureren*	opdracht 40

© Noordhoff Uitgevers bv

V1 In $\triangle ABC$ is de hoogtelijn CD getekend.
$AC = 6$, $CD = \sqrt{20}$ en $BD = 7$.
Bereken met behulp van de stelling van Pythagoras exact AD en BC.



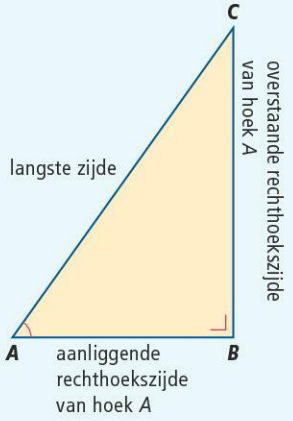
Theorie

Bij het berekenen van een onbekende zijde in een rechthoekige driehoek kun je gebruik maken van de stelling van Pythagoras.
Bij berekeningen waarbij hoeken een rol spelen gebruik je vaak sinus, cosinus of tangens.
In een rechthoekige driehoek ABC geldt:

$$\sin(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van hoek } A}{\text{langste zijde}}$$

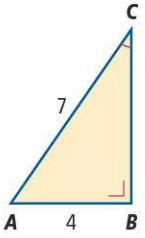
$$\cos(\angle A) = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde van hoek } A}{\text{langste zijde}}$$

$$\tan(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van hoek } A}{\text{aanliggende rechthoekszijde van hoek } A}$$



Voorbeeld 1

Bereken $\angle C$.



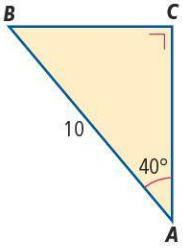
Oplossing
Vanuit hoek C gezien zijn de overstaande rechthoekszijde en de langste zijde gegeven, dus gebruik je:

$\sin(\angle C) = \frac{AB}{AC}$ dus $\sin(\angle C) = \frac{4}{7}$

$\angle C \approx 35^\circ$

Voorbeeld 2

Bereken AC.



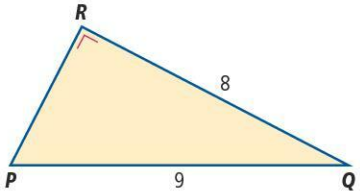
Oplossing
Vanuit $\angle A$ wordt de aanliggende rechthoekszijde gevraagd, terwijl de langste zijde gegeven is.
Dus gebruik je:

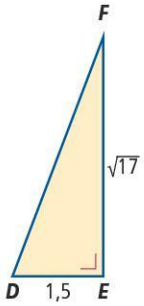
$\cos(40^\circ) = \frac{AC}{10}$

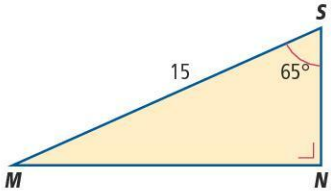
$AC = 10 \cdot \cos(40^\circ)$

$AC \approx 10 \cdot 0{,}766 = 7{,}66$

V2 Bereken in deze driehoeken $\angle Q$, PR, $\angle D$, $\angle M$, MN en SN.







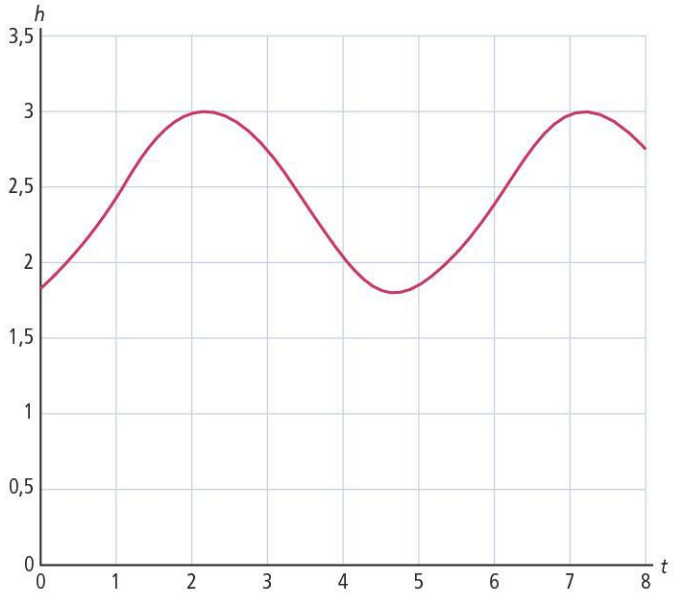
© Noordhoff Uitgevers bv

V3 Het water in een golfslagbad wordt met een machine in beweging gebracht. De hoogte h van het water op een punt in het bad is in de grafiek weergegeven. De tijd t is in seconden. De maximale hoogte is 3,00 meter en de minimale hoogte is 1,80 meter.

a Hoeveel tijd zit er tussen twee opeenvolgende tijdstippen dat de maximale hoogte wordt bereikt?

b Wat is de gemiddelde waterhoogte en op welke tijdstippen wordt deze hoogte bereikt?

c Wat is het grootste verschil tussen de waterhoogte en de gemiddelde waterhoogte?

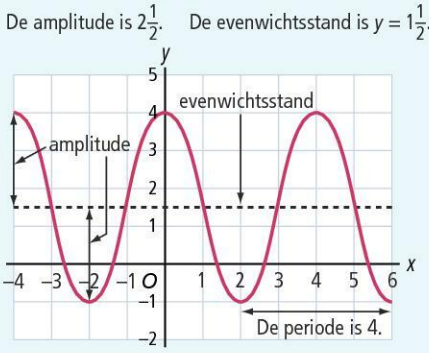


Theorie

Verschijnselen die zichzelf steeds herhalen heten **periodieke** verschijnselen en de bijbehorende grafieken zijn **periodieke grafieken**. De **periode** is de kleinste afstand waarover je een grafiek horizontaal kunt verschuiven zodat deze weer samenvalt met zichzelf.

De **evenwichtsstand** is de horizontale lijn die het gemiddelde niveau aangeeft, dus $y = \dfrac{maximum + minimum}{2}$

De **amplitude** is grootste afwijking ten opzichte van de evenwichtsstand, dus $amplitude = \dfrac{maximum - minimum}{2}$

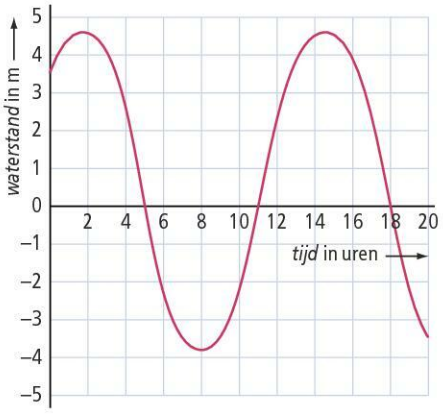


V4 De grafiek geeft de waterstanden weer aan de Franse kust op 12 augustus 2016.

a Geef van deze grafiek de evenwichtsstand, de amplitude en de periode.

b De volgende dagen was er een zeer sterke wind. Hierdoor daalde de waterstand op alle tijdstippen met 75 cm. Welke invloed heeft dit op de evenwichtsstand, op de amplitude en op de periode?

c Bij springtij is de hoogste waterstand 20% hoger dan op een normale dag. Met welke factor moet je de hoogste stand op een normale dag vermenigvuldigen om die bij springtij te krijgen?



© Noordhoff Uitgevers bv

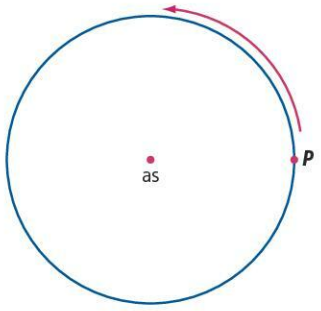
6.1 Radialen

Je leert
- wat radialen zijn en hoe je graden omrekent naar radialen en omgekeerd
- wat de sinusfunctie is en hoe de bijbehorende grafiek eruit ziet

Leerroutes
- ondersteunend: 1—2—3—04—5—6—07
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7
- uitdagend: 1—2—3—4—5—7—U1

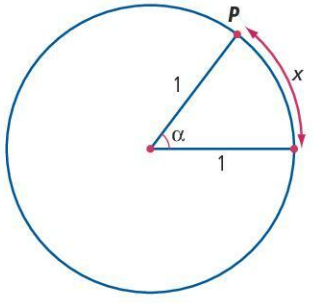
De London Eye is een reuzenrad naast de rivier de Thames in Londen, gebouwd in 1999. Lange tijd was dit het grootste reuzenrad ter wereld, het is 135 meter hoog en één rondgang duurt 30 minuten. Kies hoogte 0 voor het instappunt.
- Over hoeveel graden draait dit reuzenrad per minuut?
- Je hebt een goed uitzicht gedurende één derde deel van een omwenteling. Op welk hoogte bevind je je dan minimaal?

1 Een wiel met een straal van 1 meter draait met constante snelheid rond. Op de rand van het wiel bevindt zich een stip P. Op $t = 0$ bevindt P zich op gelijke hoogte met de as van het wiel.
De stip draait rond met een snelheid van 1 meter per seconde.



a De omtrek van een cirkel met straal r is $2\pi r$.
Bereken de omtrek van het wiel. Rond af op twee decimalen.
b Hoeveel seconden doet de stip over één omwenteling?
c Waar bevindt de stip zich na π ($\approx 3{,}14$) seconden?
d Na hoeveel seconden bevindt de stip zich op het hoogste punt? Rond af op twee decimalen.

2 Het wiel uit opdracht 1 is op te vatten als een cirkel met straal 1.
In de cirkel is de afstand die punt P over de cirkel heeft afgelegd aangegeven met x.



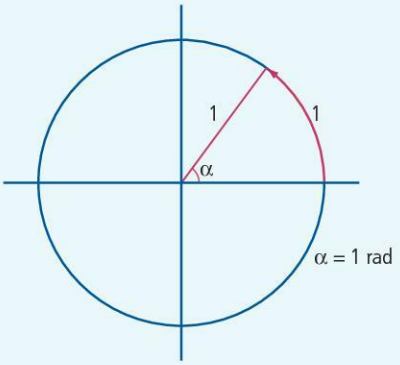
a Hoe groot is α als $x = \pi$? En als $x = 2\pi$?
b Neem $x = \frac{1}{4}\pi$.
Leg uit dat in dat geval $\alpha = 45°$.
c Bereken α in het geval dat $x = \frac{5}{12}\pi$.
d Hoe groot is α als $x = 1$? Geef zowel een exact antwoord als een benadering in twee decimalen.

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Een cirkel met straal 1 heet een **eenheidscirkel**. Bij een draaiing over 180° hoort een **booglengte** π. Daaruit volgt dat een booglengte 1 hoort bij een draaiing over $\frac{180}{\pi} \approx 57{,}3°$.

Deze hoek wordt in de wiskunde vaak gebruikt als hoekmaat en heet **radiaal**, dus 1 rad $\approx$ 57,3°. Stel vanaf nu in dit hoofdstuk je rekenmachine in op radialen (RAD).



Voorbeeld 1

Hoeveel radialen komen overeen met 225°?

Oplossing

Gebruik een verhoudingstabel.

aantal graden	180	1	225
aantal radialen	π	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{180} \cdot 225 = 1\frac{1}{4}\pi$

Voorbeeld 2

Hoeveel graden komen overeen met 1,3 radialen?

Oplossing

Gebruik een verhoudingstabel.

aantal graden	180	$\frac{180}{\pi}$	$\frac{180}{\pi} \cdot 1{,}3 \approx 74{,}5°$
aantal radialen	π	1	1,3

→ **Instructie rekenmachine | Graden en radialen**

3 H Bereken de ontbrekende getallen in de tabel. Geef exacte getallen.

aantal graden	0	30	…	60	90	180
aantal radialen	…	…	$\frac{1}{4}\pi$	…	…	π

Ondersteunende route → maak opdracht 04

4 H Vul de tabel verder in. Rond graden af op een geheel getal en radialen op twee decimalen.

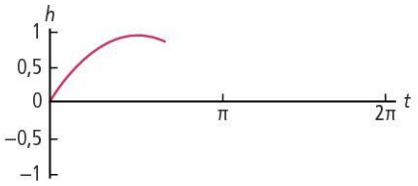
aantal graden	…	15	…	60	…	107	…
aantal radialen	0,1	…	1	…	2	…	3

5 Bekijk nogmaals het wiel uit opdracht 1. Op $t = 0$ bevindt P zich op gelijke hoogte met de as van het wiel.

a Wat is het eerste tijdstip na $t = 0$ waarop stip P zich weer op gelijke hoogte met de as bevindt? En het tweede tijdstip?

b Op welk tijdstip bevindt P zich op het laagste punt?

c Van de hoogte van de stip ten opzichte van de as van het wiel wordt een grafiek gemaakt. Hiernaast zie je een begin. Maak de grafiek af voor één omwenteling van het wiel. Hoe groot is de periode van de grafiek?



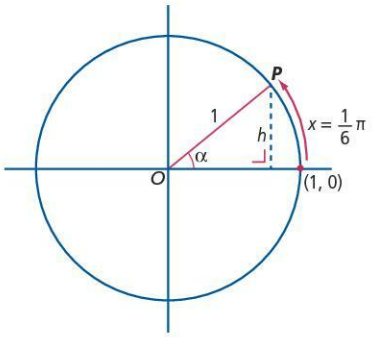
© Noordhoff Uitgevers bv

6 In de tekening is $x = \frac{1}{6}\pi$.

a Hoe groot is α uitgedrukt in radialen? En in graden?

b Door in de tekening de hoogte van P aan te geven, ontstaat er een rechthoekige driehoek waarvan de langste zijde lengte 1 heeft. De hoogte is dus de y-coördinaat van P.
Bereken met behulp van $\sin(\alpha)$ de y-coördinaat van P.

c Bereken ook y-coördinaat van P als $x = \frac{1}{3}\pi$.
Rond je antwoord af op twee decimalen.

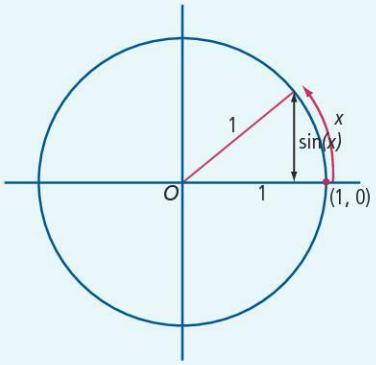


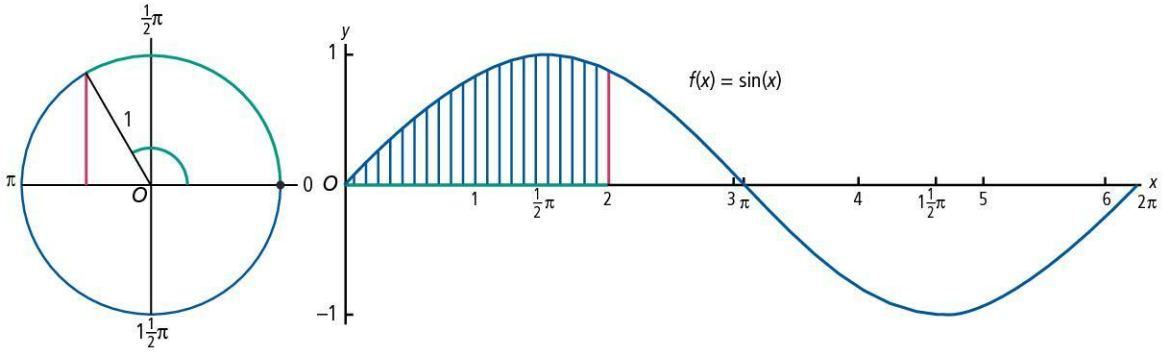
Theorie

Een punt P beweegt over een eenheidscirkel vanaf het punt $(1, 0)$ in een positieve draairichting, dat is linksom. Bij een afgelegde afstand x over de cirkel kun je de y-coördinaat van het punt berekenen met de **sinusfunctie** $f(x) = \sin(x)$.

Als $0 \le \alpha \le \frac{1}{2}\pi$ geldt $\sin(\alpha) = \frac{y_P}{1}$ en $\cos(\alpha) = \frac{x_P}{1}$ dus $y_P = \sin(\alpha)$ en $x_P = \cos(\alpha)$.

Ook voor hoeken in de andere kwadranten wordt gedefinieerd $\sin(\alpha) = y_P$ en $\cos(\alpha) = x_P$.





Ondersteunende route → maak opdracht O7

7 Bij een negatieve draairichting loopt het punt vanaf het beginpunt $(1, 0)$ rechtsom over de cirkel. Omdat de y-coördinaat bij $x = \frac{1}{6}\pi$ gelijk is aan $\frac{1}{2}$, is de y-coördinaat bij $x = -\frac{1}{6}\pi$ gelijk aan $-\frac{1}{2}$.

a Plot en schets de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ op het interval $[-2\pi, 2\pi]$.

b Wat zijn de exacte waarden van $\sin(-1\frac{1}{6}\pi)$ en $\sin(-\frac{5}{6}\pi)$?

c Waarom is $\sin(\frac{2}{3}\pi)$ gelijk aan $\sin(-1\frac{1}{3}\pi)$?

Uitdagende route → maak opdracht U1

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O4

a Vul in: een volledige rondgang over een cirkel betekent een draaiing over … graden oftewel … radialen.

b Vul in: in een verhoudingstabel met graden en radialen komt 180° overeen met … radialen.

c Welke getallen moeten er bij de pijltjes staan?

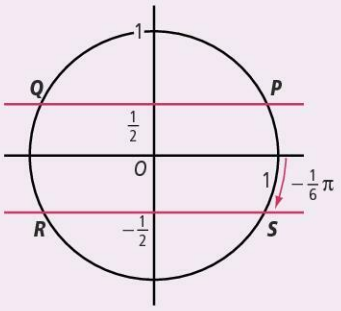
d Vul de verhoudingstabellen in.
Rond het aantal graden af op een geheel getal en het aantal radialen op twee decimalen.

hoek in graden	180	10	75
hoek in radialen	…	…	…

hoek in graden	180	…	…
hoek in radialen	…	0,5	4

O7

Bij een negatieve draairichting beweegt het punt P vanuit het punt $(1, 0)$ rechtsom over de cirkel. In de eenheidscirkel zijn de lijnen $y = \frac{1}{2}$ en $y = -\frac{1}{2}$ getekend. Omdat de y-coördinaat van het punt bij een draaiing over $\frac{1}{6}\pi$ gelijk is aan $\frac{1}{2}$, is de y-coördinaat bij een draaiing over $-\frac{1}{6}\pi$ gelijk aan $-\frac{1}{2}$.



a Welke negatieve draaihoek hoort bij het punt R?

b En welke negatieve draaihoeken horen bij Q en P?

c Leg uit dat een draaihoek van $-3\frac{1}{6}\pi$ ook bij punt Q hoort.

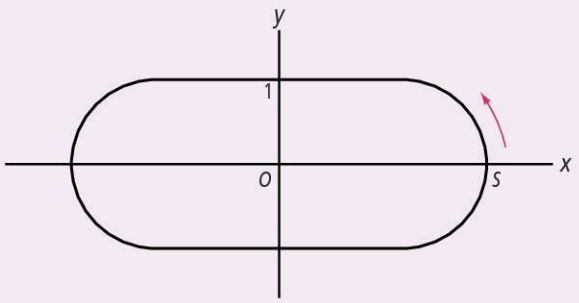
d Hoe groot is $\sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right)$? En $\sin\left(-1\frac{5}{6}\pi\right)$?

e Waarom is $\sin\left(1\frac{2}{3}\pi\right)$ gelijk aan $\sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right)$?

Uitdagende opdrachten

U1

In deze tekening staat een vereenvoudigd model van een atletiekbaan, geplaatst in een assenstelsel. De baan bestaat uit twee halve cirkels met straal 1 meter en twee rechte stukken met lengte π meter.
Een punt beweegt met een constante snelheid van 1 m/s over de baan. Op $t = 0$ bevindt het punt zich in S.
De y-coördinaat van het punt is een functie van de tijd t, noem deze functie h.



a Wat zijn de coördinaten van punt S?

b Hoeveel keer doorloopt het punt deze baan in één uur?

c Teken de grafiek van h voor één omloop.

© Noordhoff Uitgevers bv

6.2 Sinusfunctie

Je leert
- wat de eigenschappen zijn van de sinusfunctie
- welke exacte waarden van sin(x) je moet kennen

Leerroutes
- ondersteunend: 8—9—O10—11—12—O13
- doorlopend: 8—9—10—11—12—13
- uitdagend: 9—10—11—13—U2—U3

De afstand van het middelpunt van deze torenklok tot de punt van de grote wijzer is precies 1 meter.
Stel je voor dat er een horizontale lijn loopt door het midden van de klok.
- Hoeveel cm bevindt de punt van de grote wijzer zich boven deze horizontale lijn om tien over vijf?
- Geef ook een schatting voor deze afstand om vijf voor zes.

8 Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$.

a Plot en schets de grafiek van f op het interval $[0, 2\pi]$.

b In de tabel staan functiewaarden van $f(x) = \sin(x)$.
De toppen van de grafiek vind je niet in de tabel.
Wat zijn de exacte coördinaten van de toppen?

c De bij opdracht a geplotte grafiek is puntsymmetrisch.
Geef de coördinaten van het punt van symmetrie.

d Plot de grafiek van f op het interval $[0, 3\pi]$. De grafiek is symmetrisch in een lijn.
Geef een vergelijking van deze lijn.

e Wat is de periode van de grafiek van f?

f Waarom is de grafiek van f ook symmetrisch in de lijnen $x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = 2\frac{1}{2}\pi$?

X	Y1
0	0
.3	.29552
.6	.56464
.9	.78333
1.2	.93204
1.5	.99749
1.8	.97385
2.1	.86321
2.4	.67546
2.7	.42738
3	.14112

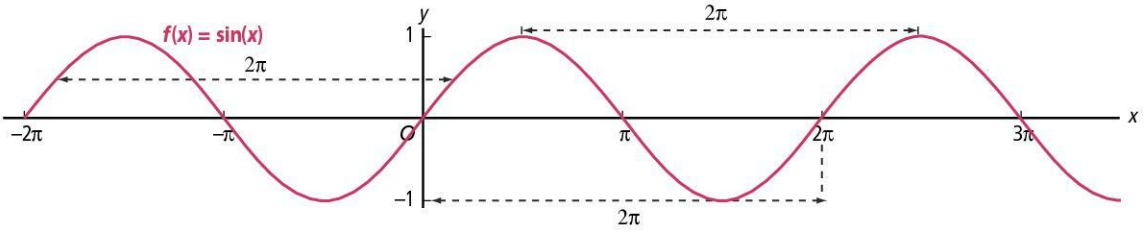
X=0

Theorie

De grafiek van de **sinusfunctie f(x) = sin(x)** heeft de volgende eigenschappen.
- De **evenwichtsstand** is de lijn $y = 0$.
- De **amplitude** is 1.
- De **periode** is 2π.
- In het punt $(0, 0)$ gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand.

De verticale lijnen door de toppen zijn assen van symmetrie van de grafiek.
De snijpunten van de grafiek met de x-as zijn punten van symmetrie.

© Noordhoff Uitgevers bv



9 De grafiek van $f(x) = \sin(x)$ is getekend op het interval $[-2\pi\,, 3\pi]$.

a Geef het domein en het bereik van $f(x) = \sin(x)$.

b Welke van de volgende lijnen zijn symmetrieassen van de grafiek van f?
$x = 2\frac{1}{2}\pi$, $x = 4\pi$, $x = 22\pi$ en $x = 101\frac{1}{2}\pi$

c Welke van deze punten zijn punten van symmetrie van de grafiek?
$(3\pi, 0)$, $(3\frac{1}{2}\pi, 0)$, $(34\pi, 0)$ en $(-53\pi, 0)$

d Hoeveel perioden van de grafiek passen er in het interval $[0, 1000\pi]$? En in het interval $[0, 1000]$?

e Bereken, zonder de rekenmachine te gebruiken:

$f\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = \ldots$ $\quad f(5\pi) = \ldots$

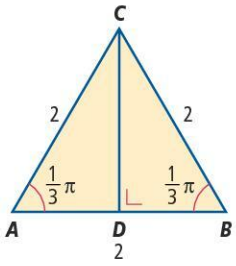
$f(-2\pi) = \ldots$ $\quad f\left(8\frac{1}{2}\pi\right) = \ldots$

$f(-6\frac{1}{2}\pi) = \ldots$ $\quad f(18\pi) = \ldots$

De waarden die je in opdracht 9e hebt gevonden zijn exact. In de volgende opdrachten vind je andere waarden van x waarvoor je de waarde van $\sin(x)$ ook exact kunt berekenen.

Ondersteunende route → maak opdracht O10

10 Gegeven is een gelijkzijdige driehoek ABC met zijde 2. Ook is de hoogtelijn CD getekend.



a Bereken exact de lengte van lijnstuk CD.

b Laat zien dat $\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

c Welke exacte waarde heeft $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)$?

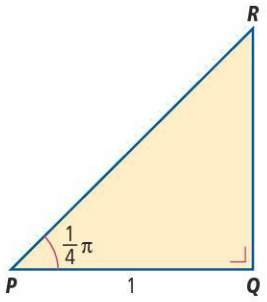
© Noordhoff Uitgevers bv

11 In $\triangle PQR$ is $\angle P = \frac{1}{4}\pi$, $\angle Q = \frac{1}{2}\pi$ en $PQ = 1$.

a Leg uit waarom $QR = 1$ en bereken PR exact.

b Leg uit dat $\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

c Laat zien dat je dit kunt herleiden tot $\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.



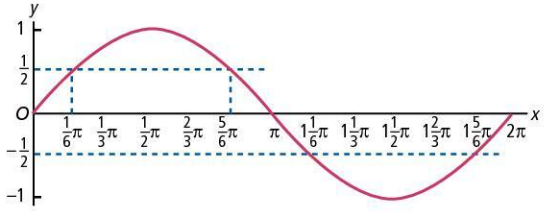
Theorie

Voor enkele waarden van x moet je de exacte waarde van $\sin(x)$ kennen. Met behulp van de opdrachten 10 en 11 zijn de waarden in de tabel berekend. Andere exacte waarden van $\sin(x)$ bereken je door gebruik te maken van de tabel en de symmetrie-eigenschappen van de sinusgrafiek.

radialen	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Voorbeeld

Bereken de exacte waarde van $\sin(\frac{5}{6}\pi)$, $\sin(1\frac{1}{6}\pi)$ en $\sin(1\frac{5}{6}\pi)$.



Oplossing

Volgens de tabel is $\sin(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$.

Vanwege de symmetrie in de lijn $x = \frac{1}{2}\pi$ is $\sin(\frac{5}{6}\pi) = \frac{1}{2}$.

Vanwege de symmetrie in het punt $(\pi, 0)$ is

$\sin(1\frac{1}{6}\pi) = -\frac{1}{2}$ en is $\sin(1\frac{5}{6}\pi) = -\frac{1}{2}$.

12 **a** Gebruik de periodiciteit van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ om de exacte waarde van $\sin\left(2\frac{1}{6}\pi\right)$ te geven.

b Wat is de exacte waarde van $\sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right)$? En van $\sin\left(7\frac{5}{6}\pi\right)$?

Ondersteunende route → maak opdracht O13

13 H Vul in. Maak daarbij gebruik van de grafiek op de vorige bladzijde en van bovenstaande tabel. Geef alleen exacte antwoorden.

a $\sin\left(-1\frac{5}{6}\pi\right) = \ldots$

b $\sin\left(1\frac{1}{4}\pi\right) = \ldots$

c $\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \ldots$

d $\sin\left(2\frac{1}{3}\pi\right) = \ldots$

e $\sin(-3\pi) = \ldots$

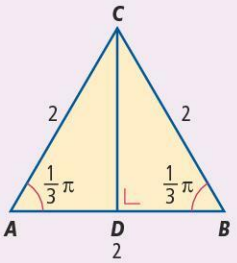
f $\sin\left(2\frac{3}{4}\pi\right) = \ldots$

Uitdagende route → maak opdracht U2 en U3

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O10 $\triangle ABC$ is een gelijkzijdige driehoek met zijde 2 en hoogtelijn CD.



a Hoeveel graden zijn de hoeken van deze driehoek?

b Leg uit dat geldt $CD^2 = 3$ en bereken exact CD.

c Leg uit dat geldt $\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, dus $\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

d Welke hoeken in de figuur zijn gelijk aan $\frac{1}{6}\pi$ rad?

e Welke exacte waarde heeft $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)$?

O13

a Plot en schets de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ op het interval $[-2\pi, 4\pi]$ en teken hierin de assen van symmetrie van de grafiek.

b Geef ook de punten van symmetrie aan in de grafiek.

c Zet een stip in het punt $\left(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, dat op de grafiek ligt.

d Geef de coördinaten van alle punten met y-coördinaat $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ die binnen het gegeven interval op de grafiek van f liggen. Vul in. Gebruik de grafiek en de tabel op de vorige bladzijde.

e $\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = \ldots$

f $\sin\left(3\frac{1}{4}\pi\right) = \ldots$

g $\sin\left(-1\frac{1}{3}\pi\right) = \ldots$

h $\sin\left(3\frac{1}{2}\pi\right) = \ldots$

Uitdagende opdrachten

U2 Als $x = 1{,}12$ dan is afgerond op vier decimalen $\sin(x) = 0{,}9001$.

a Er zijn meer waarden van x waarvoor $\sin(x)$ afgerond op vier decimalen ook weer gelijk is aan 0,9001.
Beredeneer voor welke van deze waarden dit geldt:

$x = 1,12 + \frac{1}{2}\pi$ $\quad$ $x = -1,12 + \frac{1}{2}\pi$

$x = 1,12 + \pi$ $\quad$ $x = -1,12 + \pi$

b Schrijf alle oplossingen van $\sin(x) = 0{,}9001$ op het interval $\left[10\frac{1}{2}\pi, 12\frac{1}{2}\pi\right]$ in de vorm $x = a + k \cdot \pi$ met k een geheel getal.

U3 Je hebt in deze paragraaf voor een aantal waarden van x de exacte waarde van $\sin(x)$ gevonden. Er zijn ook andere waarden van x waarvoor de exacte waarde van $\sin(x)$ bekend is, bijvoorbeeld $\sin\left(\frac{5}{12}\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6}$.
Vul in.

a $\sin\left(4\frac{7}{12}\pi\right) = \ldots$

b $\sin\left(-\frac{5}{12}\pi\right) = \ldots$

c $\sin\left(1\frac{5}{12}\pi\right) = \ldots$

d $\sin\left(-3\frac{7}{12}\pi\right) = \ldots$

© Noordhoff Uitgevers bv

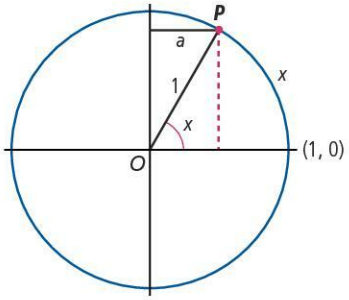
6.3 Cosinusfunctie

Je leert
- wat de eigenschappen zijn van de cosinusfunctie
- welke exacte waarden van cos(x) je moet kennen

Leerroutes
- ondersteunend: 14—15—16—17—018—19
- doorlopend: 14—15—16—17—18—19
- uitdagend: 14—15—16—19—U4—U5

De uitwijking van de slinger van een klok ten opzichte van de evenwichtsstand is een periodiek verschijnsel. Een slinger heeft een periode van twee seconden en een maximale uitwijking van 5 cm. Op $t = 0$ is de uitwijking 5 cm naar rechts. Een uitwijking naar links wordt met een negatief getal aangegeven.
- Schets een grafiek van de uitwijking in cm als functie van de tijd in seconden.

14 In de eenheidscirkel is de lengte van de boog tussen (1, 0) en P gelijk aan $\frac{1}{3}\pi$, dus geldt $x = \frac{1}{3}\pi$.



a De x-coördinaat van punt P kun je berekenen met behulp van $\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)$.
Welke waarde heeft $\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)$?

b Als P links van de verticale as is, dan is de x-coördinaat negatief.
Welke waarde heeft $\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)$?

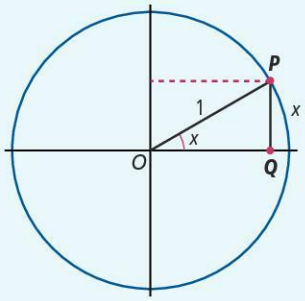
c Welke coördinaten heeft punt P als $x = \frac{2}{3}\pi$?

Theorie

Met de sinusfunctie bereken je y-coördinaat van een punt op de eenheidscirkel. Met de **cosinusfunctie** bereken je de x-coördinaat van dat punt.
De grafiek van de cosinusfunctie $g(x) = \cos(x)$ heeft de volgende eigenschappen:
- De evenwichtsstand van de grafiek van g is de lijn $y = 0$.
- De amplitude is 1.
- De periode is 2π.
- Het punt (0, 1) is een hoogste punt van de grafiek.

De verticale lijnen door de toppen zijn assen van symmetrie van de grafiek. De snijpunten van de grafiek met de x-as zijn punten van symmetrie.

De cosinusgrafiek en de sinusgrafiek zijn ten opzichte van elkaar horizontaal over een kwart periode verschoven.

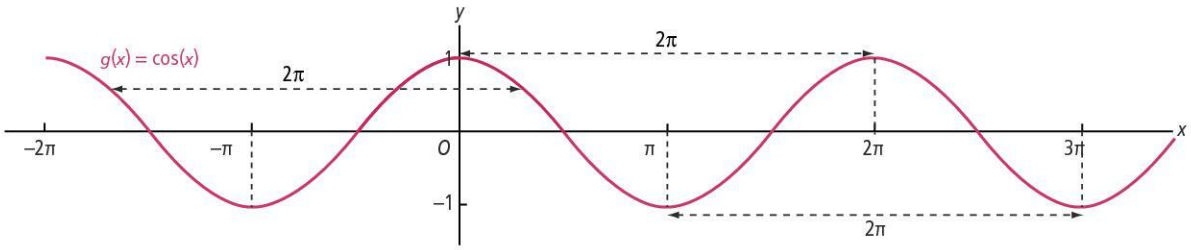


$\sin(x) = \frac{PQ}{1}$ dus $PQ = \sin(x)$

$\cos(x) = \frac{OQ}{1}$ dus $OQ = \cos(x)$

$P(\cos(x), \sin(x))$

© Noordhoff Uitgevers bv

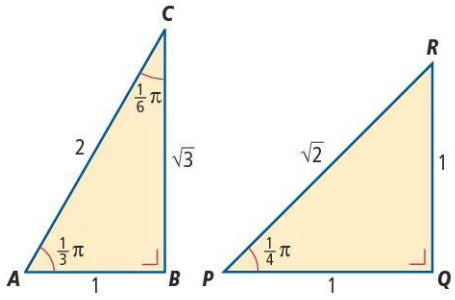


15 **a** Bart beweert: 'Als je de sinusgrafiek $\frac{1}{2}\pi$ naar links verschuift, dan krijg je de cosinusgrafiek'.
Heeft Bart gelijk?

b Noem een afstand waarover je de sinusgrafiek naar rechts kunt verschuiven om de cosinusgrafiek te krijgen.

c Noem drie verschillende afstanden waarover je de cosinusgrafiek naar links of rechts kunt verschuiven, zodat je de sinusgrafiek krijgt.

16 Met behulp van de driehoeken kun je de exacte waarden van $\cos(x)$ voor enkele waarden van x berekenen.



a Bereken $\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)$ met behulp van de linker driehoek.

b Geef de exacte waarde van $\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)$.

c Laat met behulp van de rechter driehoek zien dat $\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

d Leg met behulp van de linker driehoek uit dat $\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)$ en dat $\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)$.

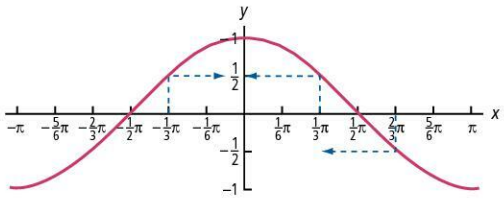
Theorie

In de tabel staan voor enkele waarden van x de **exacte waarden van** $\sin(x)$ **en** $\cos(x)$.
Voor het berekenen van de exacte waarde van de sinus en de cosinus van veel andere hoeken kun je gebruik maken van de waarden in deze tabel en van de symmetrie en de periodiciteit van de bijbehorende grafieken.

radialen	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

© Noordhoff Uitgevers bv

17 Gegeven is de grafiek van $f(x) = \cos(x)$ op het interval $[-\pi, \pi]$. In de tabel staat $\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$.



a Uit welke soort symmetrie volgt dat ook geldt $\cos\left(-\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$?

b In de tabel staat $\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
Geef de exacte waarde van $\cos\left(-\frac{1}{6}\pi\right)$.

c Uit welke soort symmetrie kun je de exacte waarde van $\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)$ afleiden uit die van $\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)$?

d Geef de exacte waarde van $\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)$.

Ondersteunende route → maak opdracht O18

18 **a** Met welke eigenschap kun je de exacte waarde van $\cos\left(2\frac{1}{3}\pi\right)$ afleiden uit die van $\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)$?
Geef de exacte waarde van $\cos\left(2\frac{1}{3}\pi\right)$.

b Geef de exacte waarde van $\cos\left(8\frac{1}{4}\pi\right)$.

c Geef de exacte waarde van $\cos\left(5\frac{1}{6}\pi\right)$.
Gebruik de tabel en ook de grafiek op de vorige bladzijde.

19 Vul exacte waarden in.

H

a $\cos\left(-1\frac{5}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \ldots$

b $\cos\left(1\frac{1}{4}\pi\right) = \ldots$

c $\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \ldots$

d $\cos\left(3\frac{1}{2}\pi\right) = \ldots$

e $\cos\left(-2\frac{1}{3}\pi\right) = \ldots$

f $\sin\left(3\frac{2}{3}\pi\right) = \ldots$

g $\cos\left(-1\frac{3}{4}\pi\right) = \ldots$

h $\sin\left(2\frac{3}{4}\pi\right) = \ldots$

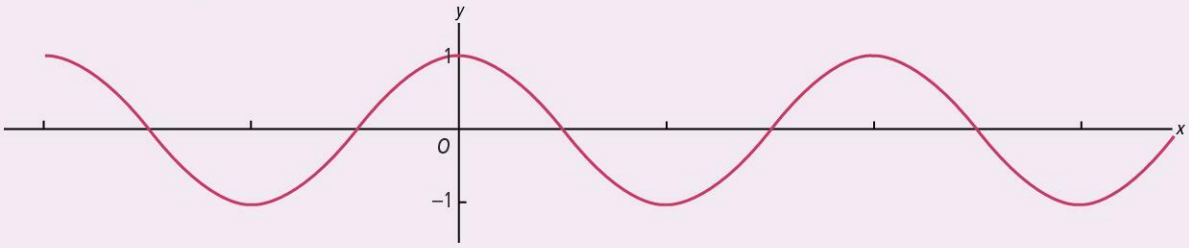
i $\cos\left(4\frac{1}{6}\pi\right) = \ldots$

j $\sin\left(-5\frac{1}{6}\pi\right) = \ldots$

Uitdagende route → maak opdracht U4 en U5

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten



O18 De grafiek van de functie $g(x) = \cos(x)$ is getekend op het interval $\left[-2\pi, 3\frac{1}{2}\pi\right]$.

- **a** Een van de assen van symmetrie van de grafiek is al in de grafiek getekend.
  Teken ook de andere assen van symmetrie op dit interval.
- **b** Het punt $\left(\frac{1}{2}\pi, 0\right)$ is een punt van symmetrie van de grafiek.
  Geef ook de andere punten van symmetrie aan in de grafiek.
- **c** Zet een stip in het punt $\left(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\right)$, dat op de grafiek ligt.
- **d** Geef de coördinaten van alle punten met y-coördinaat $\frac{1}{2}$ die binnen het gegeven interval op de grafiek van g liggen.
- **e** Geef de coördinaten van alle punten met y-coördinaat $-\frac{1}{2}$ die binnen het gegeven interval op de grafiek van g liggen.
- **f** Geef de exacte waarde van $\cos\left(2\frac{1}{3}\pi\right)$ en van $\cos\left(-1\frac{2}{3}\pi\right)$.
- **g** Geef de exacte waarde van $\cos\left(6\frac{1}{4}\pi\right)$.

Uitdagende opdrachten

U4

- **a** Leg met behulp van de eenheidscirkel uit dat
  $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$ voor elke waarde van x.
- **b** Voor een waarde van a is gegeven: $\sin(a) = \frac{5}{13}$
  Bereken exact de waarde(n) van $\cos(a)$.

U5 Er bestaan formules waarmee je voor andere waarden van x de sinus of cosinus kunt berekenen. Een van die formules is $\cos(2x) = 1 - 2(\sin(x))^2$.

- **a** Welke waarden op het interval $[0, 2\pi]$ kan x hebben als $\cos(2x) = -\frac{1}{2}$?
- **b** Laat met een berekening zien dat de formule klopt voor de waarden die je in opdracht a hebt gevonden.
- **c** Bereken exact $\sin\left(\frac{1}{12}\pi\right)$.

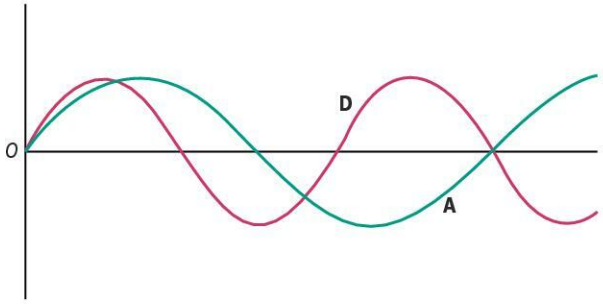
© Noordhoff Uitgevers bv

6.4 Transformaties

Je leert
- hoe het functievoorschrift verandert als de grafiek wordt verschoven of vermenigvuldigd
- hoe je de kenmerken van een sinusgrafiek uit het functievoorschrift afleidt

Leerroutes
- ondersteunend: 20—021—21—23—24—25—026—27
- doorlopend: 20—21—22—23—24—25—26—27
- uitdagend: 21—23—24—25—26—27—U6—U7

Met een toongenerator kunnen tonen worden gemaakt. Toonhoogte A heeft een frequentie van 440 Hz (trillingen per seconde) en de frequentie van de toonhoogte D is 660 Hz.
- Welk verband is er tussen de grafieken voor de trillingen bij toonhoogte A en bij toonhoogte D?



20
a Plot en schets de grafieken van $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = 2 + \sin(x)$ en $h(x) = -3 + \sin(x)$.
b Beschrijf het verband tussen de grafieken van g en h en de grafiek van $f(x) = \sin(x)$.
c Welk kenmerk van de sinusgrafiek verandert er in opdracht b?
d Plot voor $a = 3$, $a = 5$ en $a = 0{,}5$ de grafiek van $g(x) = a \cdot \sin(x)$.
Welk kenmerk van de grafiek verandert als je het getal a verschillende waarden geeft?

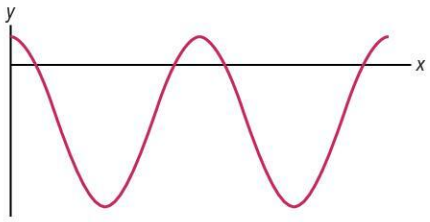
Theorie

Door op de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ transformaties toe te passen, veranderen de kenmerken van de grafiek.
- De grafiek van de functie $g(x) = d + \sin(x)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een verticale verschuiving d. De evenwichtsstand is in dat geval de lijn $y = d$.
- De grafiek van de functie $h(x) = a \cdot \sin(x)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met factor a.
  De amplitude wordt groter als $a > 1$ en kleiner als $0 < a < 1$.
  Als het getal a negatief is, dan wordt de grafiek bovendien in de x-as gespiegeld.

Hetzelfde geldt voor $g(x) = d + \cos(x)$ en $h(x) = a \cdot \cos(x)$.

Voorbeeld

Hieronder staat de grafiek van $f(x) = -2 + 3\cos(x)$.
Geef de amplitude en de evenwichtsstand van de grafiek.



Oplossing

$d = -2$, dus de evenwichtsstand is $y = -2$.
$a = 3$, dus de amplitude is 3.

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O21

21 H Geef het bereik van deze functies en de evenwichtsstand en de amplitude van de grafiek.

a $f(x) = 2 + 3\sin(x)$

b $f(x) = -3 + 8\cos(x)$

c $f(x) = 10 - 3\sin(x)$

d $f(x) = -17 - 20\cos(x)$

e $f(x) = 0{,}3 + 0{,}7\cos(x)$

f $f(x) = 24 + \cos(x)$

22 **a** Geef drie verschillende functievoorschriften van een grafiek met evenwichtsstand 5 en amplitude 6.

b De grafiek van de functie $f(x) = \sin(x)$ wordt gespiegeld in de x-as en vervolgens drie eenheden omlaag verschoven.
Geef een functievoorschrift van de beeldgrafiek.

23 **a** De grafiek van $g(x) = \sin(x - 2)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een horizontale verschuiving.
Over hoeveel eenheden is er verschoven en welke kant op?

b De grafiek van $f(x) = \sin(x)$ gaat in (0, 0) stijgend door de evenwichtsstand.
Welke coördinaten heeft het overeenkomstige punt op de grafiek van $g(x) = \sin(x + 1)$?

c De grafiek van $h(x) = \cos(x)$heeft een top (0, 1).
Welke coördinaten heeft het overeenkomstige punt op de grafiek van $k(x) = \cos\left(x + \frac{1}{6}\pi\right)$?

24 **a** Plot voor $b = 2$, $b = 3$ en $b = 0{,}5$ de grafiek van $g(x) = \sin(bx)$.
Welk kenmerk van de sinusgrafiek verandert als je het getal b verschillende waarden geeft?

b Welk verschil zie je tussen $0 < b < 1$en $b > 1$?

c Vul de tabel in.

b	0,5	1	π	2π
periode	…	…	…	…

d Welk verband bestaat er tussen b en de periode van $g(x) = \sin(bx)$?

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

- De grafiek van de functie $g(x) = \sin(x - c)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door een horizontale verschuiving c.
- De grafiek van de functie $h(x) = \sin(bx)$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ door de vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met factor $\frac{1}{b}$. De sinusgrafiek wordt in horizontale richting uitgerekt als $0 < b < 1$ en in elkaar gedrukt als $b > 1$. Als het getal b negatief is, dan wordt de grafiek bovendien gespiegeld in de y-as. Het verband tussen b en de periode is: $b = \frac{2\pi}{periode}$ of $periode = \frac{2\pi}{b}$ $(b > 0)$.

Hetzelfde geldt voor $g(x) = \cos(x - c)$ en $h(x) = \cos(bx)$.

Voorbeeld 1

Door welke transformatie ontstaat de grafiek van $g(x) = \cos(5x)$ uit de grafiek van $f(x) = \cos(x)$? Bereken ook de periode van g.

Oplossing

De grafiek van g ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de y-as te vermenigvuldigen met $\frac{1}{5}$.

De periode van g is $\frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$.

Voorbeeld 2

Door welke transformaties ontstaat de grafiek van $g(x) = -2\sin(x + \frac{1}{4}\pi)$ uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$?

Oplossing

De grafiek van $h(x) = \sin(x + \frac{1}{4}\pi)$ ontstaat uit die van f door een verschuiving over $\frac{1}{4}\pi$ naar links. Vervolgens is de grafiek van h vermenigvuldigd met -2 ten opzichte van de x-as.

25 H

Bereken de periode van elk van deze functies.

a $g(x) = \cos(3x)$

b $g(x) = 3\cos(\frac{1}{4}x)$

c $g(x) = \sin(-\pi x)$

d $g(x) = -4\sin(0,1\pi x)$

Ondersteunende route → maak opdracht O26

26 H

Door welke transformaties ontstaat de grafiek van deze functies uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ of $h(x) = \cos(x)$?
Geef ook de coördinaten van de toppen op het interval $[0, 2\pi]$.

a $g(x) = \cos(x + 3) + 2$

b $g(x) = 2\sin(x - \frac{1}{2}\pi)$

c $g(x) = -\cos(x + 5\pi)$

d $g(x) = 5\sin(2x)$

27

Een functie $f(x) = \sin(bx)$ heeft periode 5.
Bereken b.

Uitdagende route → maak opdracht U6 en U7

© Noordhoff Uitgevers bv

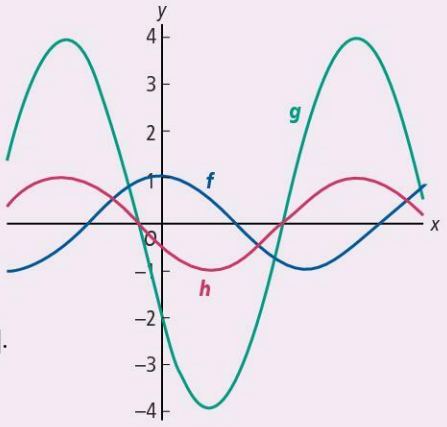
Ondersteunende opdrachten

O21 Gegeven is de functie $f(x) = -1\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2}\cos(x)$.

- **a** Welke waarden kan $\cos(x)$ aannemen?
  En wat zijn dus de waarden die $4\frac{1}{2}\cos(x)$ kan aannemen?
- **b** Wat zijn de maximale en de minimale waarde van $f(x)$?
- **c** Geef het bereik van f in intervalnotatie.
- **d** Geef de evenwichtsstand.

O26 Gegeven is de functie $g(x) = 4\cos\left(x + \frac{2}{3}\pi\right)$.

- **a** De grafiek van $f(x) = \cos(x)$ heeft een top $(0, 1)$.
  Welk getal kun je in $h(x) = \cos\left(x + \frac{2}{3}\pi\right)$ invullen om de uitkomst 1 te krijgen?
- **b** Welke verschuiving moet je op de grafiek van f toepassen om de grafiek van h te krijgen?
- **c** Hoe ontstaat de grafiek van g uit die van h?



Door welke transformaties ontstaan de grafieken van deze functies uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ of $h(x) = \cos(x)$?
Geef ook de coördinaten van de toppen op het interval $[0, 2\pi]$.

- **d** $g(x) = \cos(x - 1) - 2$
- **e** $g(x) = 2\sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$
- **f** $g(x) = -4\cos(x + 3\pi)$
- **g** $g(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$

Uitdagende opdrachten

U6 De grafiek van $f(x) = \cos(x)$ op het interval $[-\frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi]$ wordt ten opzichte van de x-as met -2 vermenigvuldigd en vervolgens 3 omhoog verschoven.

- **a** Geef de coördinaten van de toppen van de beeldgrafiek.
- **b** Beantwoord opdracht a ook voor het geval dezelfde twee transformaties in omgekeerde volgorde worden toegepast.

U7 Trillingen waarvan de grafiek de vorm van een sinusgrafiek heeft worden harmonische trillingen genoemd en beschreven met de formule $u = A \cdot \sin(2\pi ft)$. Hierin is A de maximale uitwijking en f is de frequentie in Hertz (Hz), dus het aantal trillingen per seconde.

- **a** Bereken de frequentie en de periode van een trilling van een gitaarsnaar met de formule $u = 0{,}15 \cdot \sin(1750t)$.
- **b** De gitaarsnaar van opdracht a wordt in het midden vastgedrukt en de halve snaar wordt in trilling gebracht. De toon is nu een octaaf hoger, wat betekent dat de frequentie is verdubbeld.
  Stel de bijbehorende formule op.

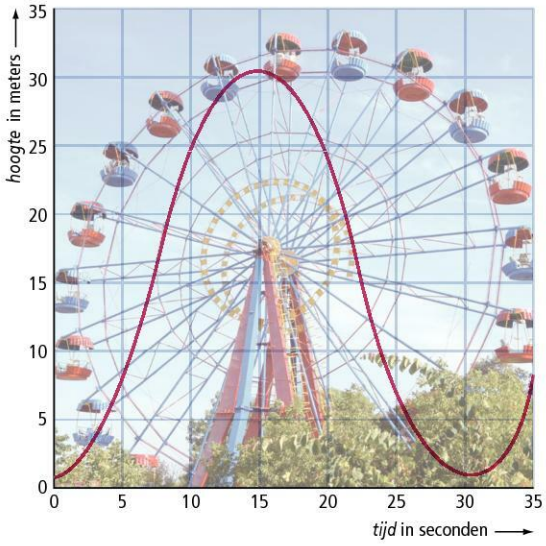
© Noordhoff Uitgevers bv

6.5 Algemene vorm van een sinusoïde

Je leert
- wat een sinusoïde is en welke kenmerken je kunt aflezen uit een sinusoïde
- hoe je een functievoorschrift opstelt bij een gegeven sinusoïde

Leerroutes
- ondersteunend: 28—029—29—30—32—033
- doorlopend: 28—29—30—31—32—33
- uitdagend: 28—29—32—33—U8—U9

Dit is de tijd-hoogte grafiek van een stoeltje in een reuzenrad.
- Wat kun je met behulp van de grafiek over het reuzenrad te weten komen?



28 **a** Plot de grafiek van $g(x) = 3\sin(x - 2) + 4$.
Geef de amplitude, de evenwichtsstand en de periode.

b Doe hetzelfde voor de grafieken van

A $h(x) = -1 + 1{,}5\cos(3x)$

B $k(x) = 100 - 55\sin(x - 20)$

C $m(x) = 0{,}25 + 0{,}75\cos(0{,}2\pi x)$

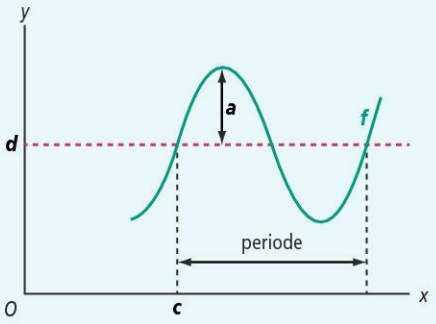
D $n(x) = 900 - 45\cos(x + 100)$

Theorie

Sinusoïden zijn grafieken van functies met functievoorschrift $f(x) = d + a\sin(b(x - c))$ of $g(x) = d + a\cos(b(x - c))$.
Hierbij geldt:
- De amplitude is a als $a > 0$ en de amplitude is $-a$ als $a < 0$.
- Voor het verband tussen b (met $b > 0$) en de periode geldt:

$$b = \frac{2\pi}{periode} \text{ of } periode = \frac{2\pi}{b}$$

- De grafiek is over een afstand c naar rechts verschoven.
- De evenwichtsstand is de lijn $y = d$.



© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Gegeven is de functie $g(x) = -8 - 6\sin(\frac{1}{2}(x + 4))$.
Geef de amplitude, de periode en de evenwichtsstand van de grafiek van g.
Beschrijf hoe de grafiek ontstaan is uit de grafiek van $f(x) = -8 - 6\sin(\frac{1}{2}x)$.

Oplossing

$a = -6$, dus de amplitude is 6.

$b = \frac{1}{2}$, dus de periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

$d = -8$, de evenwichtsstand is de lijn $y = -8$.

$c = -4$, dus de grafiek van g is ontstaan uit die van $f(x) = -8 - 6\sin(\frac{1}{2}x)$ door de verschuiving 4 naar links.

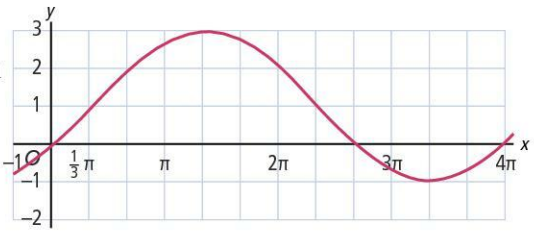
Ondersteunende route → maak opdracht 029

29 H

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 + 4\cos\left(1\frac{1}{2}\pi(x - 3)\right)$, $g(x) = 3\sin(2x) + 1$ en $h(x) = -8\cos(\pi x) + 6$.
Bepaal van de grafiek van elk deze functies de amplitude, de periode en de evenwichtsstand.

30

Deze sinusoïde is de grafiek van een functie $f(x) = d + a\sin(b(x - c))$.



a Lees uit deze grafiek het maximum en minimum af en leg uit dat $d = 1$ en $a = 2$.

b Lees uit de grafiek de periode af en laat zien dat $b = 0{,}5$.

c Welke coördinaten heeft het punt waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat?

d Geef het functievoorschrift van f.

Aanpak

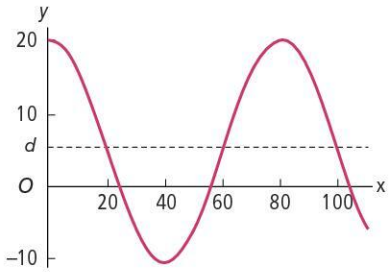
Hoe stel je het functievoorschrift $f(x) = d + a\sin(b(x - c))$ op bij een gegeven sinusoïde?

1. Lees uit de grafiek het maximum en minimum af.
2. Bereken hiermee de evenwichtsstand d en amplitude a.
3. Lees uit de grafiek de periode af en bereken de waarde van b met $b = \frac{2\pi}{periode}$
4. Lees uit de grafiek de horizontale verschuiving af en bereken hiermee de waarde van c.
5. Schrijf een functievoorschrift op.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Stel een functievoorschrift $f(x) = d + a\sin(b(x - c))$ op bij deze sinusoïde.

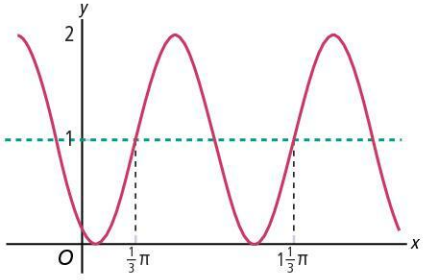


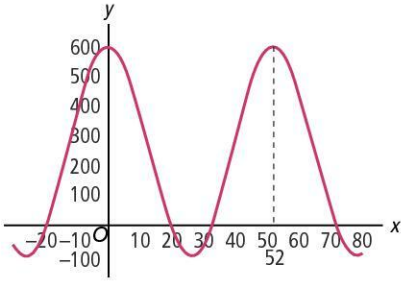
Oplossing

1. Het maximum is gelijk aan 20 en het minimum is gelijk aan −10.
2. $d = \frac{20 + (-10)}{2} = 5$ en $a = 20 - 5 = 15$.
3. De periode is 80 dus $b = \frac{2\pi}{80} = \frac{1}{40}\pi$.
4. De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $x = 60$, dus $c = 60$.
5. $f(x) = 5 + 15\sin(\frac{1}{40}\pi(x - 60))$

31 Bij de sinusoïde uit het voorbeeld past ook een functievoorschrift van de vorm $f(x) = d + a\cos(b(x - c))$. Bereken de waarden van a, b, c en d.

32 H Stel passende functievoorschriften op bij de sinusoïden. Maak bij beide sinusoïden zowel een functievoorschrift met een sinus als een functievoorschrift met een cosinus.





Ondersteunende route → maak opdracht O33

33 Een sinusoïde heeft als twee opeenvolgende toppen de punten (2, 18) en (10, 2).

a Geef een functievoorschrift dat hierbij past.

b Een sinusoïde heeft onder andere als toppen de punten $(-3\pi, -11)$ en $(5\pi, -2)$.
Geef twee verschillende functievoorschriften die hierbij passen.

Uitdagende route → maak opdracht U8 en U9

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O29 Gegeven is de functie $h(x) = -1 - 3\sin\left(\frac{2}{3}(x-5)\right)$.

a Het functievoorschrift heeft de vorm $h(x) = d + a\sin(b(x-c))$.
Welke waarden hebben a, b, c en d bij de functie h?

b Plot de grafieken van h en van $g(x) = -1 - 3\sin\left(\frac{2}{3}x\right)$ in één figuur. Gebruik de plot om het blaadje in te vullen.

c Welke van de parameters a, b, c en d bepalen de amplitude en de evenwichtsstand?

d Geef de amplitude en de evenwichtsstand van h.

$h(x) = -1-3\sin(\frac{2}{3}(x-5))$

De periode is $\frac{2\pi}{\ldots} = \ldots$

De grafiek van h ontstaat uit de grafiek van $g(x) = -1-3\sin(\frac{2}{3}x)$ door een verschuiving van ... naar ...

O33 Een sinusoïde heeft als twee opeenvolgende toppen de punten $(-1, 10)$ en $(7, 2)$.

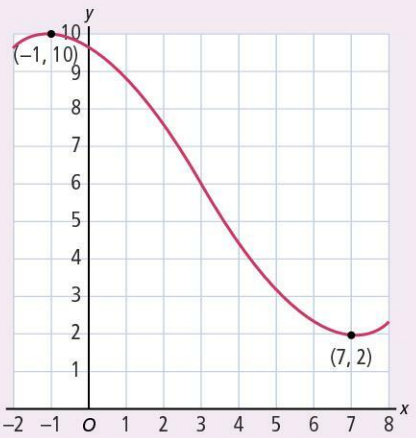
a Leg uit waarom de periode gelijk is aan 16 en bereken de waarde van b.

b Geef de amplitude en de evenwichtsstand.

c Waarom is het handig om een cosinusfunctie te kiezen bij deze grafiek?

d Stel het functievoorschrift op.

e Een andere sinusoïde heeft onder andere als toppen de punten $(-\pi, -11)$ en $(11\pi, 3)$.
Geef twee verschillende functievoorschriften die hierbij passen.



Uitdagende opdrachten

U8 De Singapore Flyer is het grootste reuzenrad ter wereld. Het is 165 meter hoog en het rad heeft een diameter van 150 meter.
Het rad draait in 32 minuten één keer rond.
Iemand stapt op tijdstip $t = 0$ op het laagste punt in een cabine van het reuzenrad. De tijd t is gegeven in minuten.

a Op welke hoogte bevind deze persoon zich op de tijdstippen $t = 0$, $t = 8$, $t = 16$ en $t = 24$?

b De hoogte h in meters waarop deze persoon zich bevindt is een functie van de tijd t in minuten.
Geef een mogelijk voorschrift van deze functie.

U9 Gegeven is de functie $f(x) = 4 - 8(\sin(x))^2$.

a Plot en schets de grafiek van f op het interval $[-\pi, \pi]$.

b De grafiek van f is een sinusoïde. Je kunt het functievoorschrift schrijven in de vorm $f(x) = a\cos(bx)$.
Welke waarden moet je voor a en b nemen?

© Noordhoff Uitgevers bv

6.6 Vergelijkingen oplossen

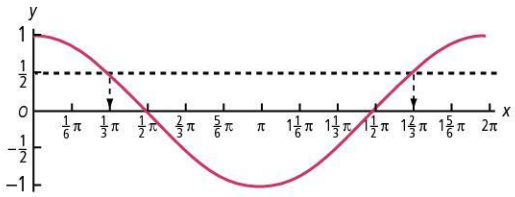
Je leert
- hoe je vergelijkingen van de vorm $\sin(bx) = p$ of $\cos(bx) = p$ exact oplost

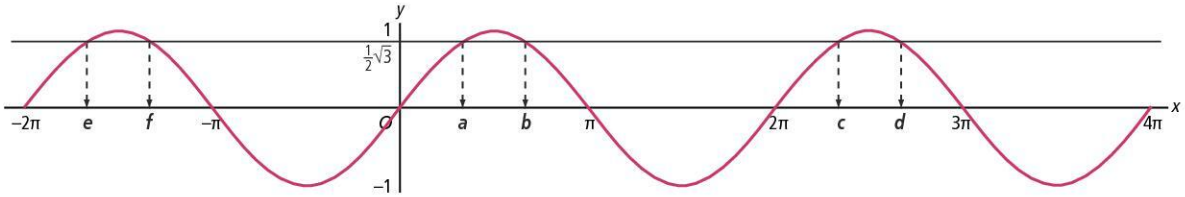
Leerroutes
- ondersteunend: 34—35—36—037—37—38—39
- doorlopend: 34—35—36—37—38—39—40
- uitdagend: 34—36—37—39—40—U10—U11

Bij deze windturbines ligt de as van de rotor op een hoogte van 90 m. De drie wieken hebben een lengte van 40 m.
Punt P is de tip van één van de rotorbladen.
Bij stevige wind maakt de turbine 12 omwentelingen per minuut.
- Hoeveel keer per minuut bevindt punt P zich op een hoogte van 100 meter?

34 De vergelijking $\cos(x) = \frac{1}{2}$ heeft op het interval $[0, 2\pi]$ twee exacte oplossingen, namelijk $x = \frac{1}{3}\pi$ en $x = 1\frac{2}{3}\pi$.
Los de vergelijkingen exact op het interval $[0, 2\pi]$ op.

a $\cos(x) = -\frac{1}{2}$
b $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
c $\cos(x) = 1$
d $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
e $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
f $\cos(x) = 0$





35 Op het interval $[-2\pi, 4\pi]$ zijn de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ en de lijn $y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ getekend. De x-coördinaten van de snijpunten zijn met letters aangegeven.

a Hoeveel oplossingen heeft $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ op het interval $[-2\pi, 4\pi]$?
b Welke waarde heeft a?
c Door gebruik te maken van symmetrie kun je de waarde van b vinden. Van welke symmetrie maak je dan gebruik?
d Welk verband is er tussen de oplossingen $x = a$ en $x = c$?
e Geef alle oplossingen van $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ op het gegeven interval.

© Noordhoff Uitgevers bv

36 In deze opdracht ga je de vergelijking $\sin(3x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ exact oplossen.

a Daan heeft eerst alle positieve oplossingen van de vergelijking $\sin(a) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ opgeschreven.
Leg uit welke oplossingen op de puntjes kunnen staan.

b Geef ook twee negatieve oplossingen van deze vergelijking.

c Daan vindt de oplossingen van $\sin(3x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ door de oplossingen van $\sin(a) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ door 3 te delen.
Welke waarden kan k aannemen?

d Welke exacte oplossingen van $\sin(3x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ liggen in het interval $[0, 2\pi]$?

Daan

$\sin(a) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Oplossingen:

$a = \frac{1}{3}\pi$ of $2\frac{1}{3}\pi$ of $4\frac{1}{3}\pi$ of ...

$a = \frac{2}{3}\pi$ of $2\frac{2}{3}\pi$ of $4\frac{2}{3}\pi$ of ...

Daan

$3x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

dus $x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $x = \frac{2}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

Aanpak

Hoe los je de vergelijking $\sin(bx) = p$ op een gegeven interval exact op?

1. Schrijf met behulp van de tabel met exacte waarden één exacte oplossing van $\sin(a) = p$ op.
2. Gebruik de periode en de symmetrie van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ om alle exacte oplossingen van $\sin(a) = p$ op te schrijven.
3. Deel de gevonden waarden door b.
4. Stel vast welke van de gevonden oplossingen binnen het gegeven interval liggen.

De vergelijking $\cos(bx) = p$ los je op een soortgelijke manier op.

Om de reeks van oplossingen $x = \frac{1}{6}\pi$, $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = \frac{5}{6}\pi$, ... aan te geven, gebruik je de notatie $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$.
Daarin is k een geheel getal.

Voorbeeld

Los de vergelijking $\cos(3x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ op het interval $[0, \pi]$ exact op.

Oplossing

1. Een oplossing van $\cos(a) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ is $a = \frac{3}{4}\pi$, want $\cos(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.
2. Alle oplossingen van $\cos(a) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ zijn $a = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ en $a = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$.
3. De oplossingen van $\cos(3x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ zijn $3x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ en $3x = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
   dus $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ en $x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
4. De oplossingen op het interval $[0, \pi]$ zijn $x = \frac{1}{4}\pi$, $x = \frac{5}{12}\pi$ en $x = \frac{11}{12}\pi$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O37

37 Los de vergelijkingen op het gegeven interval exact op.

H

a $\sin(2x) = \frac{1}{2}$ op $[0, 2\pi]$

b $\cos(4x) = 1$ op $[0, \pi]$

c $2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = -1$ op $[0, 5\pi]$

d $4\cos(5x) = -2\sqrt{3}$ op $\left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$

38 In het voorbeeld op de vorige bladzijde zijn de oplossingen van $\cos(3x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ bepaald op het interval $[0, \pi]$.

Geef de oplossingen van $\cos(3x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ op het interval $[-2\pi, -\pi]$.

Vergelijkingen als $\sin(x) = 0{,}75$ kun je niet exact oplossen, omdat de waarde 0,75 niet in de tabel met exacte waarden voorkomt. Een dergelijke vergelijking los je op met je rekenmachine. Rond daarbij verstandig af.

39 Los de vergelijkingen op het gegeven interval op.

H

a $\sin(2x) = 0{,}9$ op $[0, 2\pi]$

b $3 + 5\cos(0{,}7x) = 6$ op $[-2, 14]$

c $\sin(x) + 1{,}2 = 0{,}85$ op $[10, 17]$

d $4 - 3\cos(2x) = 5$ op $[-4, 4]$

40 Een vergelijking van de vorm $\sin(b(x - c)) = p$ heeft meestal twee reeksen oplossingen.

a Wat kun je zeggen over de waarden van b, c of p als de vergelijking geen oplossingen heeft?

b En als de vergelijking één reeks oplossingen heeft?

c Een vergelijking van de vorm $\sin(bx) = 1$ heeft precies vier oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$.
Bereken alle mogelijke waarden van b.

Uitdagende route → maak opdracht U10 en U11

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

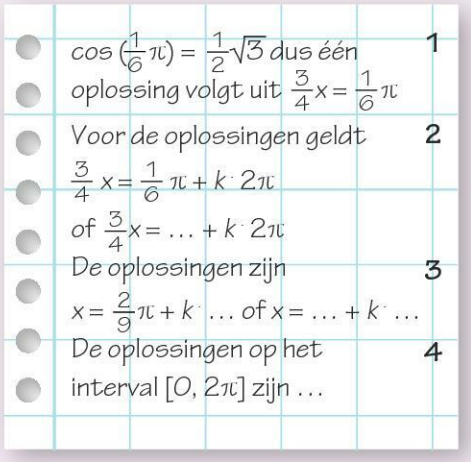
O37 Je gaat de vergelijking $6\cos\left(\frac{3}{4}x\right) = 3\sqrt{3}$ exact oplossen op het interval $[0, 2\pi]$. Op het blaadje zie je de stappen van de oplossing.

a Verklaar het getal $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ in stap 1.

b Vul in stap 2 het juiste getal in op de puntjes.

c Verklaar het getal $\frac{2}{9}$ in stap 3.

d Maak de berekening af.



Uitdagende opdrachten

U10 Je gaat de vergelijking $4\cos(2\pi(x - 3)) + 5 = 3$ op het interval $[0, 2]$ exact oplossen.

a Je kunt de vergelijking $4\cos(2\pi(x - 3)) + 5 = 3$ in de vorm $\cos(p) = -\frac{1}{2}$ schrijven.
Welk verband tussen p en x volgt hieruit?

b Los de vergelijking $\cos(p) = -\frac{1}{2}$ exact op.

c Welke oplossingen van $4\cos(2\pi(x - 3)) + 5 = 3$ volgen hieruit op het interval $[0, 2]$?

U11 De tijd tussen zonsopgang en zonsondergang wordt ook wel de daglengte genoemd. Op het noordelijk halfrond tussen de evenaar en de poolcirkel varieert de daglengte in de loop van het jaar. De daglengte D in uren is te benaderen met de formule $D = a \cdot \sin(0{,}12(t - 11{,}43)) + 12{,}18$. Hierbij is t de tijd in weken die sinds het begin van het jaar verlopen is en a een constante die afhankelijk is van de breedtegraad. Op 21 juni is op het noordelijk halfrond de daglengte het grootst.
De grootste daglengte G in uren op breedtegraad b is te benaderen met de formule

$$G = \begin{cases} 24 - 3{,}26 \cdot (66{,}5 - b)^{0{,}31} & \text{als } 0 \le b < 66{,}5 \\ 24 & \text{als } 66{,}5 \le b \le 90 \end{cases}$$

a Stel een formule op waarmee de daglengte D in uren, t weken na het begin van het jaar, op breedtegraad b te berekenen is.

b Bereken met behulp van deze formule hoeveel dagen per jaar in een plaats in Nederland op de 51e breedtegraad de daglengte langer dan 15 uur is.

© Noordhoff Uitgevers bv

41 De grafieken van enkele functies met het functievoorschrift $f(x) = a \cdot \sin(bx)$ gaan door het punt $(3\pi, 5)$.

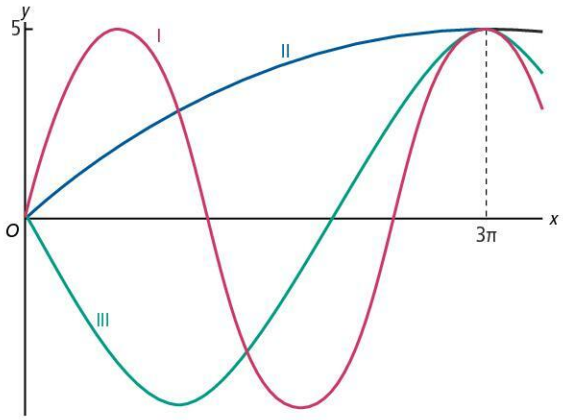
a Bereken a en b voor grafiek I.

b Bereken a en b voor grafiek II.

c Bereken a en b voor grafiek III.

d Kies $a = -2$ en $b = 5$.
Bereken de periode en de amplitude.

e Kies $a = 2$ en $b = \frac{1}{3}\pi$.
Los exact op $f(x) < 1$ op het interval $[0, 8]$.



42 Los de vergelijkingen op het gegeven interval exact op.

a $1 + 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 2$ op $[0, 6\pi]$

b $\sin(\pi x) + 1 = 0$ op $[-2, 2]$

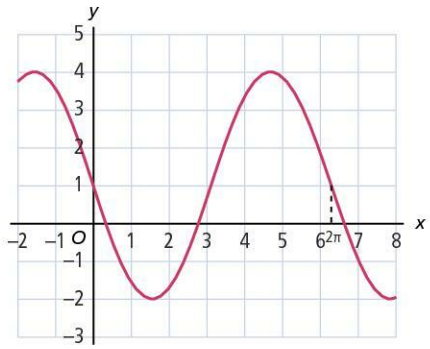
43 In een assenstelsel is een sinusoïde getekend.

a Stel een functievoorschrift op van een sinusfunctie die bij deze grafiek hoort.

b Stel een functievoorschrift op van een cosinusfunctie die bij deze grafiek hoort.

c Verschuif de grafiek zo, dat $(0, 3)$ een top van de grafiek wordt.
Welk functievoorschrift kan bij de beeldgrafiek horen?

d De gegeven grafiek wordt ten opzichte van de x-as met 2 vermenigvuldigd en daarna $\frac{1}{6}\pi$ naar links verschoven.
Geef een functievoorschrift van de beeldgrafiek.

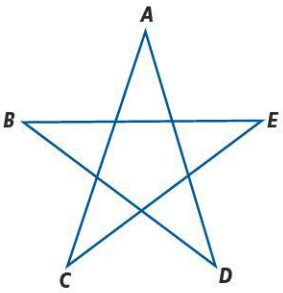


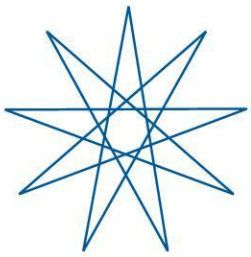
44 Gegeven is de functie $f(x) = \cos(x) \cdot \sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$ op het interval $[0, 2\pi]$.

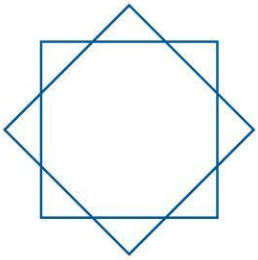
a Plot de grafiek van f en geef de coördinaten van de toppen in twee decimalen.

b De grafiek blijkt een sinusoïde te zijn.
Schrijf het functievoorschrift van f in de vorm $f(x) = d + a\sin(b(x - c))$.

© Noordhoff Uitgevers bv







45 De hoekpunten van de regelmatige sterren die hier zijn afgebeeld liggen op een eenheidscirkel.

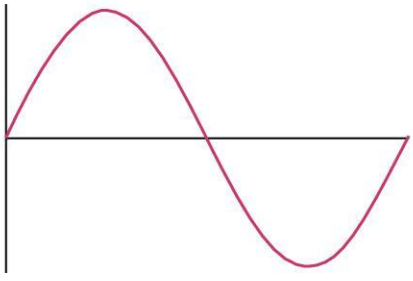
a Voor punt A geldt: $x = \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0$ en $y = \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1$.

Leg uit dat de coördinaten van C gelijk zijn aan $\cos\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{4}{5}\pi\right)$ en $\sin\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{4}{5}\pi\right)$ en geef een benadering van deze coördinaten.

b Bereken op dezelfde manier de coördinaten van E, B en D.

c Je kunt op dezelfde manier ook een zevenpuntige ster maken. Bereken de coördinaten van de hoekpunten van een zevenpuntige ster en teken deze ster.

46 Op een oscilloscoop kunnen trillingen zichtbaar worden gemaakt, met de tijd op de horizontale as en de uitwijking op de verticale as. Het scherm heeft een breedte van 10 cm en een hoogte van 8 cm, met een raster van 1 cm.
Een trilling heeft een amplitude van 2 mm en een frequentie van 50 Hz.
Hoe moet je de eenheden op de beide assen kiezen om te zorgen dat op het scherm precies één periode van de trilling past?



Theorie

Eenheidscirkel, radialen

In een eenheidscirkel, dat is een cirkel met straal 1, komt een draaihoek van 180° overeen met een cirkelboog met lengte π. Daaruit volgt dat een cirkelboog met lengte 1 hoort bij een hoek van $\frac{180}{\pi} \approx 57°$. De grootte van deze hoek wordt gebruikt als hoekmaat en heet radiaal. In de eenheidscirkel is een hoek van één radiaal de draaihoek die hoort bij een booglengte 1.

S1

a Hoeveel radialen zijn de hoeken van een gelijkzijdige driehoek?

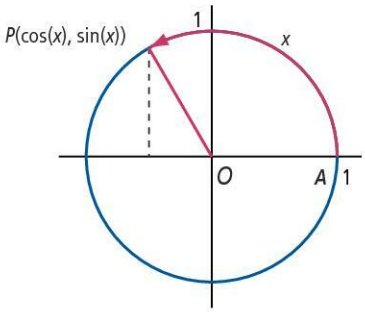
b Hoeveel radialen zijn de hoeken van een gelijkbenige rechthoekige driehoek?

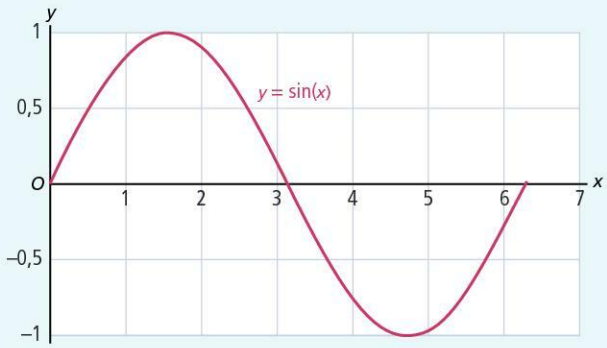
Theorie

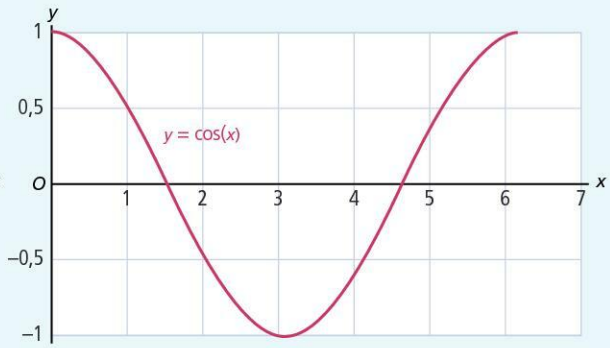
Sinus en cosinus, sinusoïden

Voor een punt dat vanuit het punt (1, 0) over de eenheidscirkel beweegt is bij een afgelegde afstand x de hoogte, dus de y-coördinaat, te berekenen met $\sin(x)$.
De x-coördinaat van het punt is $\cos(x)$.
De grafieken van $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ zijn voorbeelden van sinusoïden.
Deze grafieken hebben de volgende kenmerken:

- De periode is 2π.
- De evenwichtsstand is de x-as, dus $y = 0$.
- De amplitude, dat is de grootste afwijking ten opzichte van de evenwichtsstand, is 1.
- De verticale lijnen door de toppen zijn symmetrieassen van de grafieken, de snijpunten met de evenwichtsstand zijn punten van symmetrie.







© Noordhoff Uitgevers bv

S2 **a** Noem drie punten van symmetrie op de grafiek van $f(x) = \sin(x)$.

b Noem drie assen van symmetrie van de grafiek van $g(x) = \cos(x)$.

Theorie

Exacte waarden van sinus en cosinus

Voor enkele waarden van x moet je de exacte waarden van $\sin(x)$ en $\cos(x)$ kennen. Deze waarden staan in de tabel. Je maakt gebruik van de symmetrie en de periode om $\sin(x)$ en $\cos(x)$ om andere waarden van x hieruit af te leiden.

radialen	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

S3 Bereken de exacte waarde van:

a $\sin\left(1\frac{3}{4}\pi\right)$ **b** $\cos\left(-1\frac{5}{6}\pi\right)$

Vaardigheid

Je kunt graden omrekenen naar radialen en omgekeerd.

Gebruik dat 180 graden overeenkomt met π radialen en maak zo nodig een verhoudingstabel.

S4 Vul de tabel in.

aantal graden	140	…	1,3	…
aantal radialen	…	$1\frac{2}{3}\pi$	…	2,5

Vaardigheid

Je kunt de kenmerken van een sinusoïde uit het functievoorschrift afleiden.

De algemene vorm voor het functievoorschrift bij een sinusoïde is $f(x) = d + a\sin(b(x - c))$ of $g(x) = d + a\cos(b(x - c))$. Daarbij geldt:

- De amplitude is a als $a > 0$ en de amplitude is $-a$ als $a < 0$.
- Voor het verband tussen b (met $b > 0$) en de periode geldt:

$$b = \frac{2\pi}{periode} \text{ of } periode = \frac{2\pi}{b}$$

- De evenwichtsstand is de lijn $y = d$.
- Er is een horizontale verschuiving c naar rechts.

Voorbeeld

Geef de kenmerken van de grafiek van de functie $f(x) = 3\sin(\frac{1}{2}\pi(x - 2)) + 8$.

Oplossing

De amplitude is 3.

De evenwichtsstand is $y = 8$.

De periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 4$.

De grafiek is 2 naar rechts verschoven.

© Noordhoff Uitgevers bv

S5 Geef de amplitude, de evenwichtsstand en de periode van de functies $f(x) = 3 + 5\cos\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)\right)$ en $g(x) = -3\sin(5x - 8) + 10$.

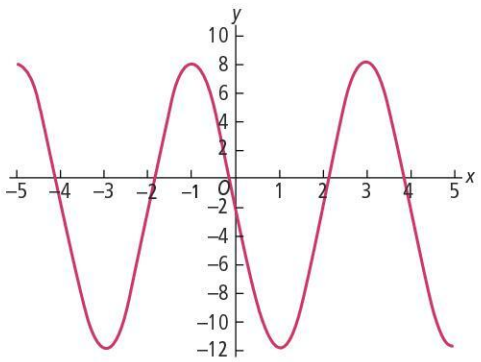
Vaardigheid

Je kunt een functievoorschrift $f(x) = d + a\sin(b(x - c))$ opstellen bij een gegeven sinusoïde.

1. Lees uit de grafiek het maximum en minimum af.
2. Bereken hiermee de evenwichtsstand d en amplitude a.
3. Lees uit de grafiek de periode af en bereken de waarde van b met $b = \frac{2\pi}{periode}$
4. Lees uit de grafiek de horizontale verschuiving af en bereken hiermee de waarde van c.
5. Schrijf een functievoorschrift op.

Voorbeeld

Stel een functievoorschrift op voor de gegeven sinusoïde.



Oplossing

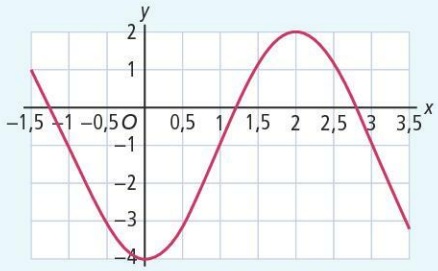
Het functievoorschrift wordt $f(x) = d + a\sin(b(x - c))$.

1. Het maximum is 8 en het minimum is −12.
2. De evenwichtsstand is $d = -2$ en de amplitude $a = 8 - (-2) = 10$.
3. De periode is 4, dus $b = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$.
4. De grafiek gaat bij $x = -2$ stijgend door de evenwichtsstand, dus $c = -2$.
5. Een functievoorschrift is $f(x) = -2 + 10\sin\left(\frac{1}{2}\pi(x + 2)\right)$.

S6 Stel een passend functievoorschrift op:

a van de gegeven sinusoïde.

b van een sinusoïde met periode 12, evenwichtsstand $y = -2$ en een top (5, 4).



© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheid

Je kunt vergelijkingen van de vorm $\sin(bx) = p$ of $\cos(bx) = p$ exact oplossen.

1 Schrijf met behulp van de tabel met exacte waarden één exacte oplossing van $\sin(a) = p$ op.
2 Gebruik de periode en de symmetrie van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ om alle exacte oplossingen van $\sin(a) = p$ op te schrijven.
3 Deel de gevonden waarden door b.
4 Stel vast welke van de gevonden oplossingen binnen het gegeven interval liggen.

De vergelijking $\cos(bx) = p$ los je op een soortgelijke manier op.

Voorbeeld

Los de vergelijking $\sin(\frac{1}{3}x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ exact op voor $0 \leq x \leq 10\pi$.

Oplossing

1 Een oplossing van $\sin(a) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ is $a = \frac{1}{3}\pi$, want $\sin(\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

2 Alle oplossingen van $\sin(a) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ zijn $a = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ en $a = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$.

3 De oplossingen van $\sin(\frac{1}{3}x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ zijn $\frac{1}{3}x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ en $\frac{1}{3}x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

dus $x = \pi + k \cdot 6\pi$ en $x = 2\pi + k \cdot 6\pi$

4 De oplossingen op het interval $[0, 10\pi]$ zijn $x = \pi$, $x = 2\pi$, $x = 7\pi$ en $x = 8\pi$.

S7 Los exact op voor $-2\pi \leq x \leq 4\pi$.

a $\sin(1\frac{1}{3}x) = -1$

b $2\cos(1\frac{1}{2}x) = \sqrt{3}$

© Noordhoff Uitgevers bv

T1 Vul de tabel in. Rond indien nodig af op twee decimalen.

α in graden	45	125	…	…	600	…
α in radialen	…	…	0,52	4	…	1,75

T2 Vul in. Geef exacte waarden.

a $\sin\left(3\frac{1}{3}\pi\right) = \ldots$

b $\sin\left(-2\frac{1}{2}\pi\right) = \ldots$

c $\cos\left(4\frac{5}{6}\pi\right) = \ldots$

d $\sin(8\pi) = \ldots$

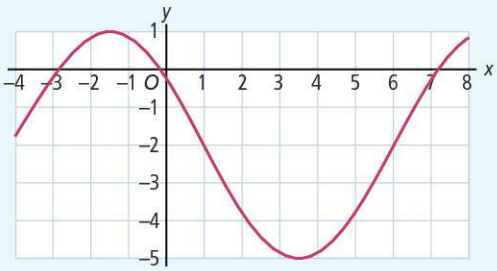
e $\cos\left(2\frac{3}{4}\pi\right) = \ldots$

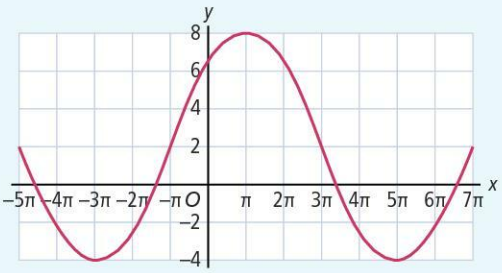
f $\cos\left(-1\frac{2}{3}\pi\right) = \ldots$

g $\sin(-3\pi) = \ldots$

h $\sin\left(-3\frac{5}{6}\pi\right) = \ldots$

T3 Stel een functievoorschrift op bij deze grafieken.





T4 Los de vergelijkingen op het gegeven interval exact op.

a $\cos(2x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ op $[0, 2\pi]$

b $1\frac{1}{2} + 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = 2\frac{1}{2}$ op $[0, 6\pi]$

c $2\cos(3x) = \sqrt{2}$ op $[0, \pi]$

d $4\sin(\pi x) = 2\sqrt{3}$ op $[0, 5]$

T5 Bij een trilling is de uitwijking u ten opzichte van de ruststand een sinusfunctie. Per seconde zijn er 20 trillingen en de maximale uitwijking is 5 mm.

a Geef de periode en de amplitude van deze trilling.

b Geef een functievoorschrift voor u als functie van de tijd t in seconden.

c Gedurende hoeveel tijd in één periode is de uitwijking groter dan 4 mm?

© Noordhoff Uitgevers bv

T6 **a** De grafiek van $g(x) = \cos(bx)$ heeft periode 5π.
Bereken b.

b Geef een functievoorschrift van een sinusfunctie waarvan de grafiek periode 5π en amplitude 2 heeft en die in het punt $(3, -4)$ stijgend door de evenwichtsstand gaat.

T7 Gegeven zijn de functies $g(x) = 2\cos\left(\frac{2}{3}x\right)$ en $h(x) = 1 + 2\sin\left(\frac{2}{3}x\right)$.

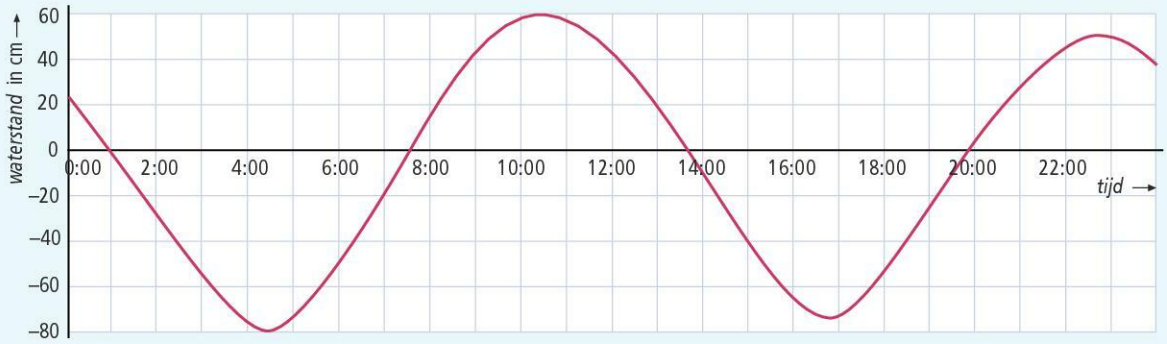
a Door welke transformaties ontstaat de grafiek van h uit de grafiek van de functie $f(x) = \sin(x)$?

b Door welke transformaties ontstaat de grafiek van h uit de grafiek van g?

T8 **a** Bereken a als de grafiek van $f(x) = a\sin(x)$ door het punt $\left(\frac{2}{3}\pi, 1\right)$ gaat.

b Bereken b als de grafiek van $g(x) = \cos(bx)$ periode $\frac{2}{3}\pi$ heeft.

c Geef een functievoorschrift bij een sinusoïde met periode π, waarbij $\left[-1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right]$ het bereik van de functie is.



T9 De grafiek is de getijdekromme van 5 mei 2003 van het K13A Platform dat voor de Nederlandse kust is gelegen. Hiernaast staan belangrijke gegevens in een tabel.
Geef een functievoorschrift waarvan de grafiek de kromme redelijk goed benadert. Neem $t = 0$ op tijdstip 0:00.

hoog en laagwater		
04:10	LW	−78 cm
10:14	HW	58 cm
16:30	LW	−76 cm
22:45	HW	45 cm
tijden in zomertijd		

© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt graden omrekenen naar radialen en omgekeerd.

E1 Vul de tabel in. Rond indien nodig af op twee decimalen.

α in graden	…	30	77	135	…	…
α in radialen	0,35	…	…	…	$1\frac{1}{6}\pi$	23

Je kunt de kenmerken van een sinusoïde uit het functievoorschrift afleiden.

E2 Gegeven zijn de functies $f(x) = 5\cos(x) + 3$ en $g(x) = -2\sin\left(\frac{1}{3}(x-4)\right)$.

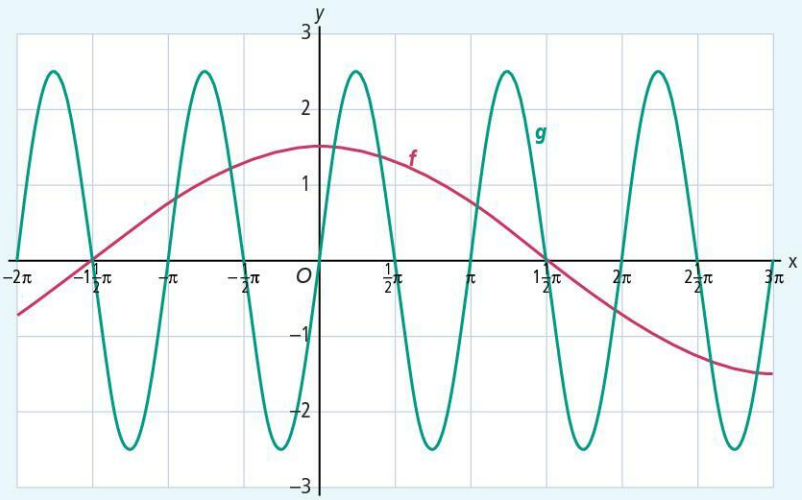
a Geef de amplitude en de evenwichtsstand van de grafiek van f.

b Geef de periode en de amplitude van de grafiek van g.

c Door welke transformaties is de grafiek van f ontstaan uit de grafiek van $h(x) = \cos(x)$?

d Door welke transformaties is de grafiek van g ontstaan uit de grafiek van $k(x) = \sin(x)$?

Je kunt een functievoorschrift $f(x) = d + a\sin(b(x-c))$ opstellen bij een gegeven sinusoïde.



E3 De grafieken van de functies f en g zijn getekend.

a Geef van beide functies de periode en de amplitude van de grafiek.

b Stel voor elk van de functies een functievoorschrift op.

© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt vergelijkingen van de vorm $\sin(bx) = p$ of $\cos(bx) = p$ exact oplossen.

E4 Los op het interval $[0, 2\pi]$ exact op.

a $2\sin\left(\frac{2}{3}x\right) = \sqrt{2}$

b $1 + 2\cos\left(1\frac{1}{2}x\right) = 2$

c $6 - \sin\left(\frac{1}{2}x\right) = 5\frac{1}{2}$

d $2\sin(3x) = -\sqrt{3}$

E5 **a** Vul de tabel in.

x	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$1\frac{1}{4}\pi$	$1\frac{1}{2}\pi$	$1\frac{2}{3}\pi$
$\sin(x)$	…	…	…	…	…
$\cos(x)$	…	…	…	…	…

b Bereken, zonder je rekenmachine te gebruiken, de exacte waarden van $\sin\left(17\frac{1}{2}\pi\right)$, $\sin\left(-1\frac{5}{6}\pi\right)$, $\sin\left(1\frac{3}{4}\pi\right)$ en $\sin\left(-1\frac{1}{3}\pi\right)$.

E6 De functie $f(x) = -3\cos(bx)$ heeft periode 24.

a Bereken de exacte waarde van b.

b Hoe groot is de amplitude van de grafiek van f?

c Hoeveel keer snijdt de grafiek van f de x-as op het interval $[0, 6000]$?

d Geef de exacte coördinaten van alle toppen op het interval $[-5, 30]$.

E7 Gegeven zijn de functies $f(x) = 3\sin(x)$ en $g(x) = 4\cos(x)$. Verder is $s(x) = f(x) + g(x)$.

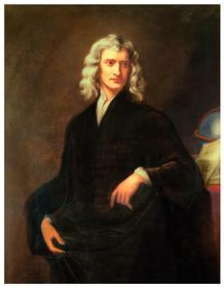
a Plot en schets de grafiek van s op het interval $[0, 2\pi]$.

b De grafiek van s blijkt een sinusoïde te zijn, dus $s(x) = d + a\sin(b(x - c))$.
Bereken de waarden van a, b, c en d. Rond indien nodig af op twee decimalen.

© Noordhoff Uitgevers bv

Oneindig klein

Hoewel veel wiskundigen over de hele wereld aan de ontwikkeling van de differentiaalrekening hebben bijgedragen worden Isaac Newton (1642-1727) en Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) beschouwd als de grondleggers van de differentiaalrekening. Over wie de eerste was, zijn de meningen verdeeld. Leibniz publiceerde zijn theorie in 1684, hetgeen veel protesten van Engelse wiskundigen opleverde. Zij beschuldigden hem ervan dat hij de ideeën van Newton had gestolen. Newton publiceerde zijn bevindingen pas in 1687, terwijl hij de 'theory of fluxions' vermoedelijk al in 1665 en 1666 ontwikkelde. Een overdreven vrees voor kritiek had Newton ervan weerhouden om zijn bevindingen al eerder te publiceren.



Newton

Leibniz

Een differentiaalquotiënt wordt meestal uitgerekend voor een bepaalde waarde van x en daarbij laat je Δx naar 0 naderen. Het bezwaar dat critici uit de tijd van Newton en Leibniz hadden, was het benoemen van Δx. De Engelse filosoof bisschop Berkeley schreef in 1734 hierover: 'Het zijn noch eindige hoeveelheden, noch oneindig kleine hoeveelheden, noch iets anders. Zouden we ze niet beter spookverschijningen kunnen noemen van verdwenen hoeveelheden?'

Het werken met steeds kleinere hoeveelheden leverde ook in de oudheid al problemen op. De filosoof Zeno van Elea (490-425 v. Chr) gebruikte het in zijn beroemde paradox (schijnbare tegenstrijdigheid) van Achilles en de schildpad:
Achilles en de schildpad deden een hardloopwedstrijd. Achilles liep 10 keer zo snel als de schildpad. De schildpad kreeg een voorsprong van 100 meter. Als Achilles het startpunt van de schildpad bereikt heeft, dan heeft de schildpad ondertussen 10 meter afgelegd en is dan 110 meter van het beginpunt van Achilles verwijderd. En als Achilles dit punt heeft bereikt, dan is de schildpad hem nog 1 meter voor. Bereikt Achilles dat punt, dan is de schildpad al weer verder. Volgens Zeno zou Achilles de schildpad dus nooit inhalen.

Opdracht

Natuurlijk wist Zeno ook wel dat Achilles de schildpad inhaalt. Wat is er dan mis aan zijn redenering?

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheden 3

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Breuken en wortels herleiden
- Lijnen
- Exponentiële formules
- Rekenen met machten
- Substitutie

© Noordhoff Uitgevers bv

Breuken en wortels herleiden

1 Bereken en schrijf het antwoord als één breuk. Vereenvoudig indien mogelijk het antwoord.

a $\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{9} - \frac{1}{3}$

b $\frac{2}{-11} \cdot \frac{-3}{7} + \frac{2}{7}$

c $\frac{2}{3p} \cdot \frac{3}{p} + \frac{1}{2p}$

d $\frac{2a}{3} \cdot \frac{6}{4a} - \frac{1}{2}$

e $\frac{3p}{7\frac{1}{2}} \cdot \frac{2p}{-3}$

f $\frac{5}{4b^2} \cdot \frac{2b}{5a}$

2 Vereenvoudig de breuken.

a $\frac{9a}{27a}$

b $\frac{9q}{7\frac{1}{2}q}$

c $\frac{12}{\frac{p}{3}}$

d $\frac{2p}{\frac{4}{3p}}$

e $\frac{\frac{9}{11}}{3}$

f $\frac{\frac{3}{p}}{8p}$

3 Schrijf als één breuk. Vereenvoudig indien mogelijk.

a $\frac{2}{a} - \frac{a}{2}$

b $\frac{a}{b} + \frac{b}{2a}$

c $(2x + x^2) \cdot \frac{1}{x^3}$

d $\frac{3}{x} \cdot \frac{x+1}{3x}$

e $\frac{4(x+1)}{x} - \frac{1}{4}x$

f $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}$

g $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$

h $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-1}$

4 **a** Laat zien dat de formule $y = \sqrt{16x} + \sqrt{25x}$ te herleiden is tot $y = 9\sqrt{x}$.

b Herleid de formules zoals in opdracht a.

A $y = \sqrt{25x} + \sqrt{144x}$

B $y = \sqrt{27x} + \sqrt{75x}$

C $y = \sqrt{121x} - \sqrt{64x}$

D $y = \sqrt{\frac{1}{9}x} + \sqrt{\frac{4}{25}x}$

5 Bereken exact en schrijf het resultaat zo eenvoudig mogelijk.

a $\left(\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\right)^2$

b $\left(\sqrt{5} + \sqrt{45}\right)^2$

c $\left(\sqrt{6} + 4\sqrt{24}\right)^2$

d $\left(7\sqrt{2} - 2\sqrt{32}\right)^2$

© Noordhoff Uitgevers bv

6 Schrijf in de vorm $a\sqrt{b}$ met b een geheel getal.

a $\dfrac{12}{\sqrt{7}}$

b $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

c $\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$

d $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{1{,}25}}$

Voorbeeld

Schrijf $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$ in de vorm $a\sqrt{b}$.

Oplossing

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{14}}{7} = \frac{1}{7}\sqrt{14}$

Lijnen

Theorie

Vergelijkingen van lijnen kun je in verschillende vormen geven. Veel gebruikte vormen zijn

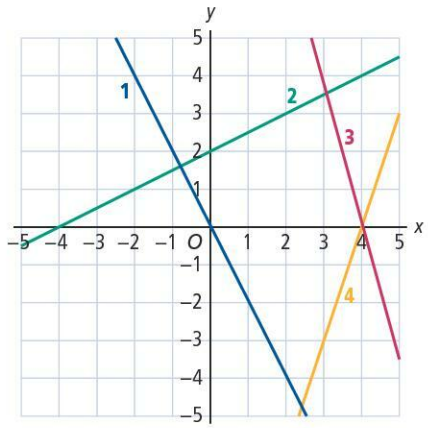
$y = mx + n$, $ax + by = c$ en $\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = 1$.

Kies steeds die vorm die het beste bij de gegevens past.

7 **a** In het assenstelsel staan vier rechte lijnen. Stel een vergelijking op van elk van de lijnen.

b Stel een vergelijking op van de lijn door (1, 3) evenwijdig aan de x-as.

c Stel een vergelijking op van de lijn door (1, 3) evenwijdig aan de y-as.



8 Stel een vergelijking op van de lijn in de volgende gevallen.

a Lijn l gaat door (3, 7) en heeft richtingscoëfficiënt -3.

b Lijn m gaat door $(-2, 1)$ en (0, 16).

c Lijn n is evenwijdig aan lijn k: $y = -0{,}25x + 6$ en gaat door $(16, -12)$.

d Lijn q snijdt de lijn $y = 4x + 12$ in $(-2, 4)$ loodrecht.

9 Bereken exact de coördinaten van de snijpunten.

a $y = 3x - 7$ en $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

b $2x - 3y = 5$ en $x + 2y = 13$

c $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{6} = 1$ en $3x - y + 4 = 0$

10 Bereken in hele graden de hoeken die de lijnen met elkaar maken.

a $y = 3x + 7$ en $y = -x + 4$

b $2x - 3y = 18$ en $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 1$

© Noordhoff Uitgevers bv

Exponentiële formules

11 De tabellen horen bij een exponentieel verband.
Stel bij beide tabellen een passende formule op.

A

t	0	1	2	3	4
N	500	400	320	256	204,8

B

t	2	3	4	5	6
N	4500	5400	6480	7776	9331,2

12 De tabel hoort bij een exponentieel groeiproces.
Hierin is t de tijd in jaren en A het aantal.

t in jaren	2	6
A	36	2916

a Bereken de groeifactor per vier jaar.
b Bereken de groeifactor per jaar.
c Hoe groot is het groeipercentage per jaar?
d Stel een formule op met t in jaren.
e Stel ook een formule op met t in maanden. Rond daarbij de groeifactor af op drie decimalen.

Rekenen met machten

13 Voor het rekenen met machten maak je gebruik van de rekenregels. Bedenk bij elke rekenstap van welke rekenregel je gebruik maakt.
Schrijf als een macht van 2.

a $128 = 2^{\cdots}$
b $\sqrt{2}$
c $\frac{1}{16}\sqrt{2}$
d $\frac{1}{4}\sqrt{32}$
e $16\sqrt[3]{2}$
f $\frac{1}{8}\sqrt{8}$

$g^a \cdot g^b = g^{a+b}$ $\quad g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$

$\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$ $\quad g^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{g^m}$

$(g^a)^b = g^{a \cdot b}$ $\quad (p \cdot q)^a = p^a \cdot q^a$

$g^{-n} = \frac{1}{g^n}$ $\quad \left(\frac{p}{q}\right)^a = \frac{p^a}{q^a}$

$g^0 = 1$

14 Schrijf de producten als één macht van x.

a $x^3 \cdot x^2$
b $x \cdot (x^4)^3$
c $(x^{-3} \cdot x^3)^2$
d $x^3 \cdot (x^{2a})^3$
e $x^{3a} \cdot (x^{a+1})^2$
f $(x^a \cdot x^{2a} \cdot x^{3a})^3$

15 Schrijf in de vorm $b \cdot a^p$.

a $(a^2 \cdot 2a^3)^4$
b $\frac{(4a^3)^3}{(2a)^2}$
c $\frac{6a}{2\sqrt{a}}$
d $a \cdot \sqrt[3]{125a^2} \cdot \sqrt{25a}$
e $\frac{\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[3]{8a}}{\sqrt{a}}$
f $\frac{3}{a^2} \cdot \frac{a^5}{a\sqrt[4]{a^3}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

Substitutie

16 Als je in de formule $y = 4x^2 - 2x + 8$ de formule $x = \frac{1}{2}t - 1$ substitueert, dan druk je y uit in t en krijg je $y = 4\left(\frac{1}{2}t - 1\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}t - 1\right) + 8$.

a Vereenvoudig de formule die je door de substitutie krijgt.

b Substitueer $x = \frac{1}{2}t^2 + 4$ in $y = 4x^2 - 6x - 40$ en vereenvoudig het resultaat.

17 Druk y uit in t en vereenvoudig het resultaat.

a $y = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3$ en $x = 2t^5$

b $y = \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 4x + 4}$ en $x = t + 2$

c $y = 2x^{-2} - 3x^{-1} + 4$ en $x = t^{-1}$

d $y = \dfrac{1}{x - 2} + 5$ en $x = \dfrac{1}{t} + 2$

18 Gegeven zijn $x = \dfrac{1}{t}$ en $y = \dfrac{1}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{x^2 + 1}$

Toon aan dat geldt: $y = \dfrac{2t^4}{1 - t^4}$

Theorie

Je kunt soms een substitutie gebruiken bij het oplossen van vergelijkingen. In het voorbeeld zie je hoe je de vergelijking $x + 3\sqrt{x} - 10 = 0$ oplost met behulp van de substitutie $\sqrt{x} = t$.

De wortelvergelijking gaat hierdoor over in een tweedegraadsvergelijking.

Voorbeeld

Los exact op $x + 3\sqrt{x} - 10 = 0$.

Oplossing

Neem $\sqrt{x} = t$ dus $x = t^2$.
$t^2 + 3t - 10 = 0$ (substitutie)
$(t + 5)(t - 2) = 0$ (ontbonden)
$t = -5$ of $t = 2$
Dus is $\sqrt{x} = -5$ of $\sqrt{x} = 2$.
$\sqrt{x} = -5$ heeft geen oplossingen.
$\sqrt{x} = 2$ geeft $x = 4$.
De oplossing is $x = 4$.

19 **a** Los $x - 7\sqrt{x} + 12 = 0$ op met de substitutie $\sqrt{x} = t$.

b Los $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$ op met de substitutie $x^3 = t$.

c Los $4(2x - 1)^2 + 8(2x - 1) - 5 = 0$ op met de substitutie $2x - 1 = t$.

d Los $3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$ op met de substitutie $3^x = t$.

20 Los exact op. Kies steeds een geschikte substitutie.

a $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$

b $4^{2x} - 4^x - 12 = 0$

c $(4^x - 1)(4^x + 1) = 3$

d $x - 2\sqrt{x} = 0$

e $8(x - 2)^2 = 2(x - 2)$

f $4x^4 + 7x^2 = 2$

g $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

h $5^{2x} - 125 \cdot 5^x = 0$

© Noordhoff Uitgevers bv

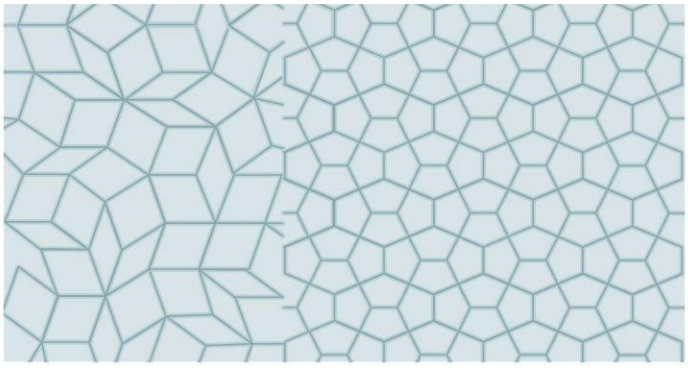
© Noordhoff Uitgevers bv

Keuzeonderwerpen

SE CE K

Praktische opdracht | Muziek

Praktische opdracht | Vlakvullingen



© Noordhoff Uitgevers bv

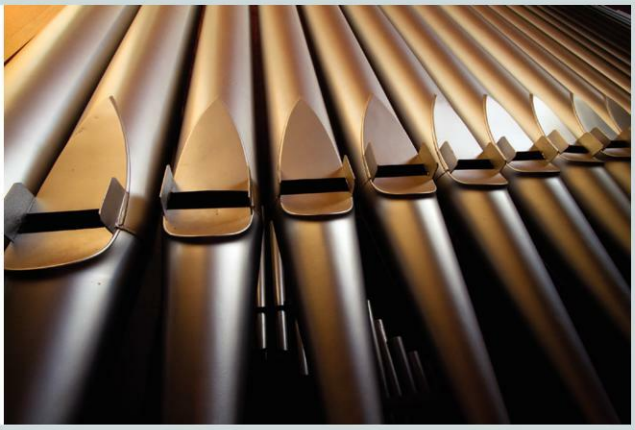
Benodigdheden
- Acht lege glazen (melk)flessen
- Een gitaar

Opbouw
1 Probleemstelling
2 Probleem verkennen
3 Plan maken
4 Plan uitvoeren
5 Conclusie

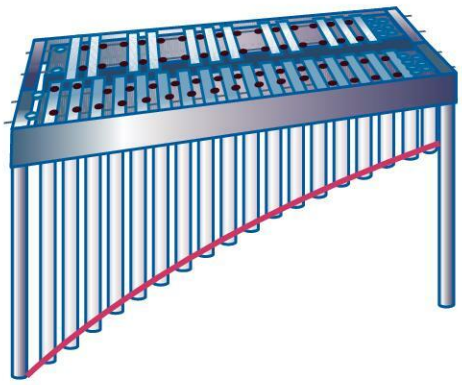
Probleemstelling

Een flessenorgel bestaat uit een aantal flessen die voor een deel met water gevuld zijn. Door de hoeveelheid water per fles te variëren, kun je elke fles een andere toon laten voortbrengen en op het flessenorgel een melodie spelen. Om op een flessenorgel een melodie te kunnen spelen, moeten die tonen een toonladder vormen.

- Wat is een toonladder? En hoe zorg je ervoor dat een flessenorgel de tonen van zo'n toonladder voortbrengt?



1 In het plaatje van de xylofoon is een grafiek getekend. De vorm van de grafiek lijkt op de grafiek van een exponentiële functie. Ook bij het pijporgel op de foto hierboven zie je het exponentiële verband in de vorm van het instrument terug. Verzamel afbeeldingen van een aantal muziekinstrumenten. Geef aan hoe je in de vorm van het instrument het exponentiële verband ziet.



Probleem verkennen

Om een flessenorgel te maken, moet je iets afweten van geluidsgolven en muziek. Je zult ontdekken dat muziek alles te maken heeft met exponentiële verbanden.

© Noordhoff Uitgevers bv

2 Als je een snaar laat trillen, dan produceert deze een toon. De hoogte van die toon hangt af van de lengte van de snaar. Op de gitaar zijn de zogeheten fretjes aangegeven. De plaats waar de snaren vast zitten aan de klankkast heet de kam. Een gitarist drukt bij het spelen de snaren bij de fretjes in. Hierdoor verandert hij de snaarlengte en daarmee de hoogte van de toon.

a Meet bij een gitaar van elk fretje de afstand d tot de kam. Neem d in millimeters nauwkeurig.

b Voer de gevonden resultaten in op je rekenmachine of in een grafiekenprogramma. Zet het fretnummer n langs de horizontale en de gemeten afstand d langs de verticale as. Teken een grafiek.

c De getekende grafiek is de grafiek van een exponentieel verband.
Bereken de groeifactor.

d Geef een formule waarbij je d uitdrukt in n.

Bij instrumenten als een piano of een gitaar laat je snaren trillen. Deze trillende snaren brengen de lucht in trilling. Deze trillingen ervaar je als geluidstonen. De hoogte van een geluidstoon hangt af van de frequentie, het aantal trillingen van de lucht per seconde. De eenheid hiervoor is Hertz (Hz). Hoe groter de frequentie is, des te hoger is de toon.

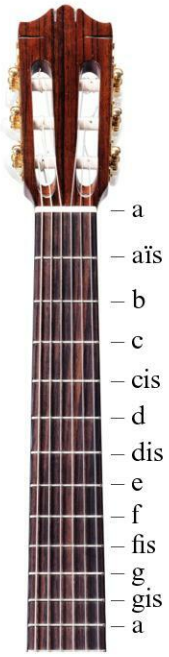
3 De frequentie van de trilling van een snaar is omgekeerd evenredig met de lengte van de snaar. De frequentie verdubbelt als de snaarlengte wordt gehalveerd.
Bij welk fretje moet je een gitaarsnaar indrukken om de lengte te halveren?

© Noordhoff Uitgevers bv

4 Als je bij een gitaar de tweede snaar aanslaat, hoor je de toon die a genoemd wordt. De frequentie van deze toon is 440 Hz. Als je de snaar bij het eerste fretje indrukt, dan krijg je een aïs. Hiernaast kun je voor deze snaar zien welke toon bij elk fretje hoort.

a Welke toon hoort bij een frequentie van 880 Hz?

b Als je de *a*-snaar bij het derde fretje indrukt, krijg je een *c*. Bij welk fretje moet je deze snaar indrukken zodat je weer een *c* krijgt?



5 **a** Neem aan dat de verhouding tussen de frequenties van twee opeenvolgende toonhoogten constant is.

Dus: $\frac{\text{frequentie } ais}{\text{frequentie } a} = \frac{\text{frequentie } b}{\text{frequentie } ais} \approx g$

Leg uit dat $g = 2^{\frac{1}{12}}$.

b Welk verband is er tussen g en de groeifactor uit opdracht 2c?

c De frequentie van een *a* is 440 Hz.
Bereken drie frequenties van drie tonen *c*.

6 Een toonladder bestaat uit een serie van acht tonen. In de toonladder die begint met een c zitten de volgende acht tonen: c d e f g a b en daarna weer een c. Het verschil tussen de eerste en de laatste toon van een toonladder noem je een octaaf.
Het verschil tussen twee opeenvolgende tonen is een hele of een halve toonafstand. Op het klavier kun je zien dat er tussen bijvoorbeeld e en f, f en fis en b en c een halve toonafstand zit. Tussen c en d zit een hele toonafstand.

a Geef van elk tweetal opeenvolgende tonen van deze toonladder aan of het verschil een hele of een halve toonafstand is.

b Het patroon dat je bij opdracht a hebt gezien, vind je bij elke toonladder. Schrijf de acht noten op die horen bij de toonladder die met een *g* begint.

Plan maken en plan uitvoeren

Als je een fles voor een deel met water vult en er tegen tikt, gaat de lucht boven het water trillen en hoor je een geluidstoon. De hoogte van die toon hangt af van de hoeveelheid water in de fles.
Een flessenorgel moet een toonladder voortbrengen, dus moeten de verhoudingen tussen de acht verschillende luchthoogten kloppen.
Met acht flessen kun je een redelijk klinkende melodie spelen. Door de flessen op te hangen, klinken ze mooier.
Je kunt ook tonen voortbrengen door te blazen op de flessen.

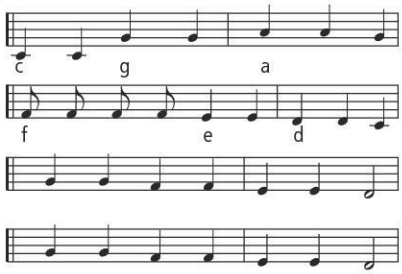
© Noordhoff Uitgevers bv

7 **a** De afbeelding toont een zogenaamd flessenorgel.
Neem twee lege flessen en vul ze met water. Zorg ervoor dat in de ene fles de hoogte van de luchtkolom twee keer zo groot is als in de andere. Door op de flessen te tikken of op de fles te blazen kun je tonen laten klinken, die precies een octaaf verschillen.

b Het verband tussen de toonhoogte en de hoogte van de luchtkolom is ook exponentieel met als groeifactor $2^{\frac{1}{12}}$.
Ga uit van de twee tonen die de flessen van opdracht a voortbrengen. Die tonen kun je opvatten als de eerste en de laatste toon van een toonladder.
Bereken de waterhoogtes die horen bij de overige tonen van deze toonladder.

c Neem nog zes flessen en vul die tot de hoogtes die je bij b hebt berekend. Je hebt nu een flessenorgel waarop je de noten van een toonladder kunt spelen. Doordat de flessen iets van vorm kunnen verschillen, kan het zijn dat de toonladder niet helemaal zuiver klinkt. Je kunt de toon bijstellen door de waterhoogtes iets te veranderen.

8 Een melodie is weergegeven in het schrift. De toonladder die bij deze melodie hoort begint met een c.
Dan komt de vijfde toon, de g, dan de zesde toon enzovoort.
Nummer de flessen van opdracht 7c van 1 tot en met 8.
Speel de melodie op je flessenorgel.



Suggesties voor vervolg

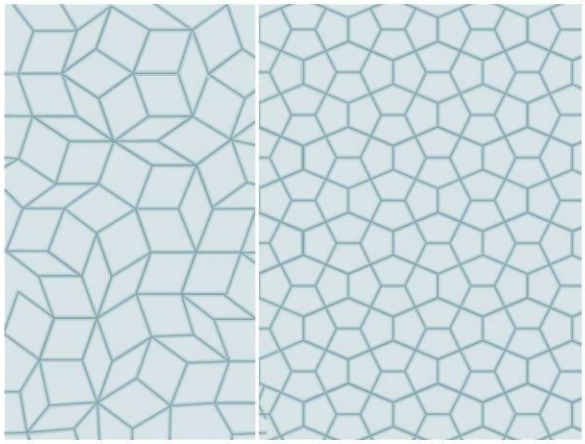
Je kunt het flessenorgel compleet maken door nog vijf flessen te gebruiken om de ontbrekende halve tonen te laten klinken. Je kunt ze, ter onderscheid, iets hoger hangen. Ook kun je eventueel naar links en naar rechts uitbreiden. Het te spelen repertoire zal hierdoor toenemen.
Je kunt ook onderzoeken wat het effect is als je de flessen afsluit.

© Noordhoff Uitgevers bv

Benodigdheden Geen bijzondere
Opbouw
1 Probleemstelling
2 Probleem verkennen
3 Plan maken
4 Plan uitvoeren
5 Conclusie

Probleemstelling

Je kunt een vloer met rechthoekige tegels betegelen zonder dat er tussenruimtes overblijven. Met ronde tegels lukt dat niet.
Een betegeling van een vlak zonder tussen ruimtes heet een *vlakvulling*.
In het zogenaamde tegelpatroon van Cairo, zie rechts, vormen de vijfhoekige tegels tegelijkertijd een patroon van staande en liggende zeshoeken. Er zijn ook vlakvullingen die bestaan uit herhalingen van twee verschillende basisfiguren. Vrijwel altijd zijn deze basisfiguren regelmatig. Een uitzondering vormt het patroon van Penrose (zie links), dat in 1996 de kranten gehaald heeft. Je kunt je afvragen aan welke eigenschappen een basisfiguur moet voldoen om er een vlakvulling mee te kunnen maken. Dat is de onderzoeksvraag.



Probleem verkennen

De vorm van de basisfiguur speelt natuurlijk een rol. Maar welke aspecten zijn belangrijk?
De zijden moeten 'passen'.
De hoeken moeten 'passen'.
Wat betekent dat in een concreet geval?
Zoek het eerst uit voor regelmatige basisfiguren.

Wiskundige woest over wc-papier

Sir Roger Penrose, een van de grondleggers van de theorie over zwarte gaten, hoogleraar in de wiskunde te Oxford en auteur van spraakmakende boeken over het menselijk bewustzijn, is boos op Kleenex. De fabrikant van tissues en andere huishoudelijke papierwaren bedrukt een merk toiletpapier met een patroon waarop de wiskundige de rechten meent te hebben. Mevrouw Penrose ontdekte de misstand in haar plaatselijke supermarkt.

Bron: de Volkskrant 14/12/96

© Noordhoff Uitgevers bv

1 **a** Teken op ruitjespapier minimaal vijf verschillende patronen voor vlakvullingen die je met rechthoekige tegels van 3 bij 6 hokjes kunt maken.
b Waarom zijn er met tegels van 3 bij 5 hokjes minder patronen mogelijk?

2 Je kunt vlakvullingen maken met gelijkzijdige driehoeken en met vierkanten: in elk hoekpunt passen precies zes driehoeken of vier vierkanten bij elkaar. Met andere regelmatige veelhoeken lukt dat niet altijd.
a Onderzoek met welke andere regelmatige veelhoeken een vlakvulling wel mogelijk is.
b De basisfiguur van het patroon van Cairo rechtsboven op de vorige bladzijde is geen regelmatige vijfhoek, want twee van de hoeken zijn 90°.
Hoe groot zijn de andere drie hoeken?

Een regelmatige veelhoek heeft gelijke hoeken en gelijke zijden.

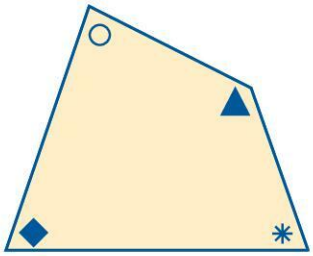
Plan maken

Of een regelmatige veelhoek geschikt is als basisfiguur voor een vlakvulling, hangt af van de hoeken van de veelhoek. Bij onregelmatige veelhoeken moet je niet alleen op de grootte van de hoeken letten, maar ook op de lengte van de zijden.
Let bij het maken van een plan op de volgende zaken:
- Ga je uit van regelmatige of onregelmatige basisfiguren?
- Wat voor aanpak kies je? Een 'theoretische' redenering of een praktische aanpak?
- Heb je extra materialen nodig?

Plan uitvoeren

Maak de nodige berekeningen en/of tekeningen.

3 **a** Onderzoek of je met een willekeurige driehoek als basisfiguur een vlak kunt vullen.
b Onderzoek of de vierhoek hiernaast geschikt is als basisfiguur voor een vlakvulling.
c Is *elke* vierhoek geschikt als basisfiguur voor een vlakvulling? Geef óf een 'waterdichte' redenering óf een tegenvoorbeeld.



Conclusie

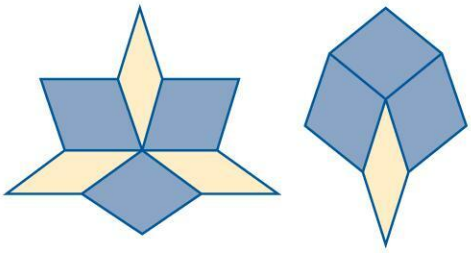
4 **a** Van welke figuren weet je nu dat ze als basisfiguur voor een vlakvulling gebruikt kunnen worden?
b Op welke aspecten moet je letten als je wilt beoordelen of een figuur kan dienen als basisfiguur voor een vlakvulling?

© Noordhoff Uitgevers bv

Suggesties voor vervolg

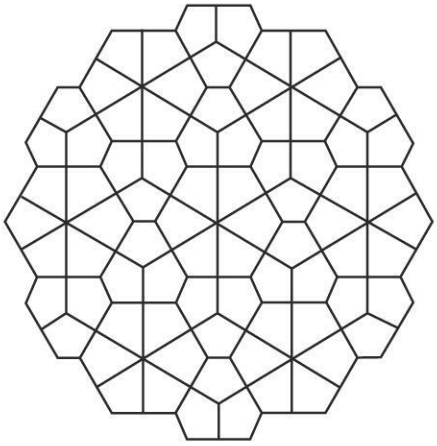
Hieronder en op de volgende bladzijde staan enkele onderzoeksopdrachten over vlakvullingen en ruimtevullingen. Bij deze opdrachten over vlakvullingen kun je met redeneren en berekenen een heel eind komen.

5 Bij de twee figuren zijn dezelfde basisfiguren gebruikt, een smalle en een brede ruit.
Alle zijden van deze ruiten zijn even lang.



- **a** Bereken van elke ruit hoe groot de hoeken zijn.
- **b** Zoek uit of het mogelijk is een vlakvulling te maken
  - met alleen de smalle ruiten.
  - met alleen de brede ruiten.
  - met als basisfiguur een ster die opgebouwd is uit smalle en brede ruiten.
- **c** Zoek uit welke samenhang bestaat tussen deze ruiten en het patroon van Penrose op bladzijde 256.

6 Deze opdracht gaat over vlakvullingen waarbij meerdere basisfiguren gebruikt worden. Deze basisfiguren kunnen verschillen in vorm of in grootte.



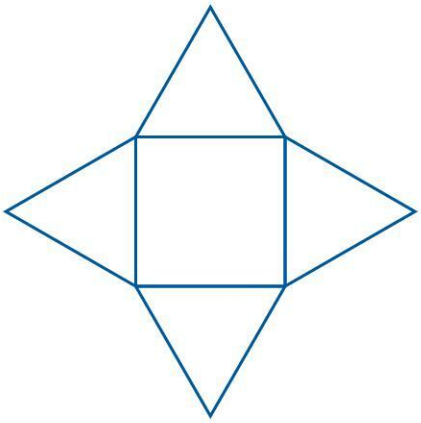
- **a** Je kunt zo'n vlakvulling maken met gelijkzijdige driehoeken en vierkanten. Geef hiervoor een duidelijke redenering en teken een gedeelte van zo'n patroon. Er zijn meer mogelijkheden!
- **b** Is het mogelijk met regelmatige driehoeken, vierhoeken en zeshoeken een vlakvulling te maken? Teken een gedeelte van het patroon of geef een redenering dat het niet kan.
- **c** In de islamitische kunst worden vaak patronen gebruikt die je ook kunt opvatten als vlakverdelingen. Vaak kun je zo'n patroon op verschillende manieren interpreteren. Het patroon hiernaast heeft als basisfiguren een vlieger en een vijfhoek.
  De vijfhoek is dezelfde als bij het patroon van Cairo op bladzijde 256 rechtsboven.
  Je kunt echter ook ruiten en zeshoeken herkennen.
  Breid de figuur uit met een extra strook.
- **d** Bedenk zelf enkele patronen voor vlakvullingen. De basisfiguren hoeven geen regelmatige veelhoeken te zijn.

© Noordhoff Uitgevers bv

Onderzoeken over ruimtevullingen

Bij de volgende onderzoeken gaat het steeds om de vraag of de ruimte met een bepaalde basisvorm gevuld kan worden. Je kunt het antwoord met behulp van een redenering vinden. Je kunt ook bouwplaten van de basisvorm maken en door echt stapelen een antwoord vinden.

7 Dit is de uitslag van een regelmatige piramide. Het grondvlak is een vierkant met zijde 4, de driehoekige zijvlakken hebben hoogte $\sqrt{8}$.



a Bereken de hoogte en de inhoud van deze piramide.

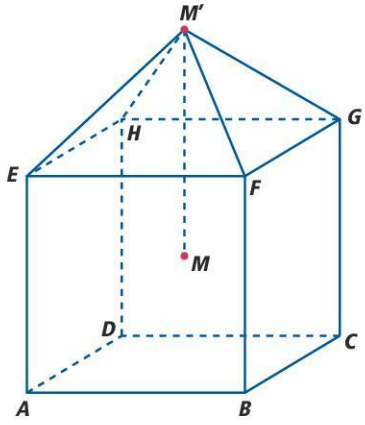
b Is het mogelijk met zulke piramiden een ruimtevulling te maken?
Je kunt een antwoord op deze vraag vinden door:
- van de uitslag bouwplaten te maken en te gaan stapelen, of
- een redenering te bedenken (hint: met kubussen is een ruimtevulling zeker mogelijk).

8 Door de middens van de zijvlakken van een kubus met elkaar te verbinden, krijg je een regelmatig achtvlak. Als je met de kubussen een ruimtevulling maakt, dan zit er tussen deze 'ingebouwde' achtvlakken nog veel ruimte.

a Welk deel van de ruimte wordt door de 'ingebouwde' achtvlakken gevuld?

b Laat nu de kubussen weg. Kun je de achtvlakken zo tegen elkaar aan plaatsen dat de ruimte volledig gevuld wordt?

9 Een ruitentwaalfvlak kun je op de volgende manier maken. Spiegel het middelpunt van een kubus in elk van de zes grensvlakken. Verbind elk beeldpunt met de hoekpunten van het desbetreffende grensvlak.
In de figuur is dat voor één beeldpunt al gedaan.



a Teken uitgaande van een kubus een ruitentwaalfvlak.

b Je zou kunnen denken dat deze vorm $6 \cdot 4 = 24$ driehoekige zijvlakken heeft.
Bewijs dat steeds twee van deze driehoeken een ruit vormen.

c Teken een uitslag van een ruitentwaalfvlak.

d Onderzoek of met ruitentwaalfvlakken de ruimte volledig gevuld kan worden.

© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

Extra

SE CE K

Meer oefenen 262

In ieder hoofdstuk wordt bij enkele opdrachten extra oefening aangeboden. In de extra oefeningen wordt in het algemeen hetzelfde type opdracht gegeven maar met andere getallen.

Oefenproefwerken 274

Bij ieder hoofdstuk vind je hier een voorbeeldproefwerk. Dit voorbeeldproefwerk kun je gebruiken om je voor te bereiden op het echte proefwerk. De voorbeeldproefwerken zijn in het algemeen wat langer dan een proefwerk dat je in een les van 45 of 50 minuten moet maken.

In een proefwerk komen verschillende soorten opdrachten voor:

- opdrachten voor waarmee getoetst wordt of je de vaardigheden van het hoofdstuk beheerst;
- opdrachten waarmee getoetst wordt of je de vaardigheden kunt toepassen binnen een grotere wiskundige opdracht of binnen een context of binnen een situatie die meer denkstappen vraagt en dus meer inzicht.

© Noordhoff Uitgevers bv

2 Los op. Geef exacte antwoorden.

a $9 - 2(x - 7) = 4x + 2$

b $-11x + 4 = 9 - 2x$

c $5(x - 2) = 2x + 4$

d $11x = 7x - 3(1 - 5x)$

e $\frac{2}{3}(1 - 5x) = 3x + 2$

f $6 - 1\frac{1}{2}x = 4 + x$

g $7 - 2(3 - x) = 4 - 5x$

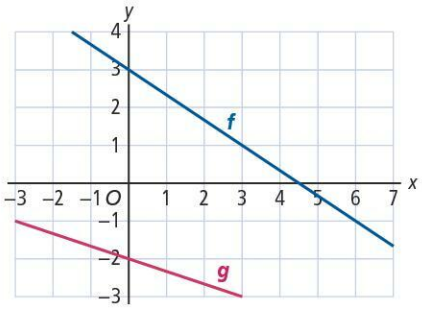
h $7\left(2 - \frac{1}{2}x\right) = 2\frac{1}{2}x$

6 **a** Gegeven zijn de grafieken van $f(x) = -\frac{2}{3}x + 3$ en $g(x) = -\frac{1}{3}x - 2$.

Los de ongelijkheid $g(x) > f(x)$ op.

b Teken de grafieken van $h(x) = -\frac{1}{5}x + 5$ en $k(x) = 2x - \frac{1}{2}$.

c Los op $k(x) \leq h(x)$.



9 Los op.

a $(a + 6)(a - 2) = 20$

b $x(x + 2) = 5x$

c $3t^2 + 9t + 6 = 0$

d $4a^2 + 13 = 29$

11 Los op.

a $(6a + 3)^2 = (2a - 3)^2$

b $(2x - 6)^2 = 5^2$

c $(x^2 - 6x)^2 = 49$

d $(2 - 3p)^2 = (4p + 12)^2$

13 Los op.

a $x(5x - 11) = 4x^2$

b $(2t + 7)(t^2 - 2) = 7(2t + 7)$

c $(3x - 4)(x + 5) = 8(x + 5)$

d $(3x + 5)(x - 3) = (x - 3)^2$

17 Los op.

a $\sqrt{x^2 - x - 17} = 5$

b $1 + \sqrt{7 + q} - 3 = 7$

c $3 - \sqrt{2 - p} = 1\frac{1}{2}$

d $\sqrt{\frac{1}{7}q - 4} = \sqrt{8}$

20 Los op.

a $2x + \sqrt{2x + 2} = 10$

b $\sqrt{4x^2 - 12x} - 3 + x = 0$

c $\sqrt{2 - x} \cdot \sqrt{4x + 2} = 0$

d $3 + \sqrt{x + 17} = x$

24 Los op.

a $\frac{15}{5x - 3} = 3$

b $\frac{-33}{10 - 2a} = 11$

c $\frac{81}{p^2 - 3} = 9$

d $\frac{30}{8 - m^2} - 2\frac{3}{4} = 1$

© Noordhoff Uitgevers bv

27 Los op.

a $\frac{4}{6x-2} = \frac{2x}{6x-4}$

b $\frac{3-x}{x-3} + 5 = 2x$

c $\frac{3x}{7x-3} = x$

d $\frac{x-3}{x+3} = \frac{x+4}{x-3}$

30 Druk b uit in a.

a $2(b-1) = 3a - 4$

b $\frac{2}{7}a - \frac{1}{2}b = 0$

c $13b - 16 = 2a + 3(b-7)$

d $4a + 7b = 14$

31 Druk b uit in a.

a $a = \sqrt{2b+3}$

b $\frac{2}{b} = 3a + 7$

c $2 + \frac{3}{b} = 4a - 8$

d $a - 5 = \sqrt{b+3}$

33 Druk y uit in x en vereenvoudig het resultaat.

a $y = -2t + 71$ als $t = 13x + 9$

b $y = 9 - 6q$ als $q = x^2 + 2$

c $y = p^2 + 16$ als $p = 3 - 2x$

36 Los op met behulp van substitutie.

a $x^4 - 30x^2 - 31 = 0$

b $(3x+4)^2 - 5(3x+4) + 6 = 0$

c $(5x-3)^2 = 20x - 12$

d $5x^4 + 11x^2 + 2 = 0$

38

a Gegeven is de familie van functies $k_m(x) = 2x^2 + mx - 3$.
De grafiek van k_m snijdt de x-as in $(3, 0)$.
Bereken m.

b Gegeven is de familie van functies $g_a(x) = ax^2 + 2x - 5$.
De grafiek van g_a gaat door het punt $(3, 7)$.
Bereken a.

c Gegeven is de vergelijking $x^2 + px - 5 = x - p$.
Een oplossing is $x = 2$.
Bereken p.

© Noordhoff Uitgevers bv

3 Vereenvoudig en schrijf zonder negatieve exponent en zonder exponent nul.

a a^{-5}

b $2b^2 \cdot 3b^{-3}$

c $\dfrac{8a \cdot a^0}{2a^6}$

d $\frac{1}{2}p^{-3}$

e $2d^3 \cdot 6d \cdot \frac{1}{2}d^{-8}$

f $\dfrac{(3x)^2}{3x \cdot x^{-1}}$

9 Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk.

a $a \cdot (-2a^3)^2$

b $6x^4 \cdot (2x)^3$

c $\left(\dfrac{2x^0}{x^2 \cdot x^3}\right)^4$

d $(-5p)^3$

e $(2u)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}u^2\right)^4$

f $\dfrac{-7q^3 \cdot -2q^5}{4(q^{-2})^{-1}}$

12 Herleid tot een vorm zonder gebroken exponent.

a $12^{\frac{1}{3}}$

b $3^{2\frac{1}{4}}$

c $x^{3\frac{1}{2}}$

d $(a^3)^{\frac{1}{4}}$

e $5^{\frac{1}{4}} \cdot 5^3$

f $8 \cdot \left(8^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}$

16 Schrijf als macht met negatieve of gebroken exponent ($a > 0$).

a $\sqrt[7]{3^2}$

b $\sqrt[9]{5^7}$

c $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

d $\sqrt[4]{a^3}$

e $\sqrt[7]{a^3}$

f $\dfrac{1}{\sqrt[7]{a^4}}$

19 Schrijf zo eenvoudig mogelijk, zonder negatieve en gebroken exponent ($a > 0$).

a $(a^2)^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[4]{a}$

b $a^2 \cdot (a^{-2})^{-1} \cdot a^{\frac{1}{2}}$

c $\dfrac{a^3 \cdot 6a^2}{3\sqrt{a}}$

d $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[5]{a^2}$

e $a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a} \cdot a^{-\frac{2}{3}}$

f $\dfrac{1}{a^2 \cdot \sqrt{a}} \cdot 4\sqrt[3]{a^2} \cdot a^{-2}$

26 Schrijf in de vorm $g(x) = x^a \cdot \sqrt[n]{x^m}$.

a $g(x) = x^{1\frac{1}{4}}$

b $g(x) = x^{3\frac{2}{5}}$

c $g(x) = x^{7\frac{3}{5}}$

d $g(x) = x^{1\frac{1}{6}}$

e $g(x) = x^{5\frac{3}{10}}$

f $g(x) = x^{\frac{8}{3}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

30 Los op.

a $x^6 = 64$

b $x^3 = 12$

c $x^5 = -12$

d $x^4 + 18 = 29$

e $4x^3 - 14 = 50$

f $7x^2 + 15 = 50$

g $0{,}2x^4 + 3 = 16$

h $100 - \frac{1}{4}x^9 = 0$

34 Los op voor $x \geq 0$.

a $6x^{\frac{2}{9}} = 12$

b $x^{\frac{1}{5}} + 1 = 4$

c $x^{2\frac{1}{2}} = 9$

d $5x^{\frac{3}{5}} + 25 = 100$

e $4 - x^{-\frac{1}{4}} = 1$

f $18 - 2x^{-3\frac{1}{2}} = 14$

38 Los op.

a $3x^4 - x^3 = 0$

b $12x^{12} - 3x^8 = 0$

c $3x^5 = 24x^2$

d $32x = -x^6$

e $x^7 + \frac{1}{8}x^4 = 0$

f $5x^3 - 20x^2\sqrt{x} = 0$

g $x^3\sqrt[4]{x} - 2x\sqrt[4]{x} = 0$

h $5x^{3\frac{1}{2}} = 10x$

41 Herleid voor $x > 0$ de functievoorschriften tot de vorm $f(x) = b \cdot x^a$.

a $f(x) = 4x^2 \cdot 5x\sqrt{x}$

b $f(x) = \dfrac{4x \cdot (3x)^2}{9x^{-1\frac{1}{3}}}$

c $f(x) = 6x^{-1\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{9x}$

d $f(x) = \dfrac{6x \cdot \sqrt[5]{x^4}}{12x^3}$

43 Herleid tot de vorm $Q = a \cdot P^b$.
Rond de waarden van a en b zo nodig af op twee decimalen.

a $P = \frac{1}{4} \cdot Q^3$

b $P = 10 \cdot Q^{-2{,}5}$

c $P = \frac{1}{3} \cdot Q^{1{,}25}$

d $P = \frac{3}{7} \cdot Q^{1\frac{3}{5}}$

e $P = 2{,}6 \cdot Q^{-0{,}45}$

f $P = 0{,}0001 \cdot Q^4$

© Noordhoff Uitgevers bv

5 Geef van elke functie het domein en het bereik.

a $f(x) = \frac{-3}{x^2}$

b $g(x) = \frac{1}{\sqrt{5-x}}$

c $h(x) = 6x - x^2$

d $k(x) = \frac{50}{10 + x^2}$

6 Geef het domein en het bereik van deze functies in intervalnotatie.

a $f(x) = 1 - 0{,}5x^4$

b $g(x) = 1 + (2x + 3)^3$

c $h(x) = \sqrt{64 - x^2}$

d $k(x) = \frac{10}{x^2 + 2x + 5}$

13 Geef het domein en het bereik van elke functie.
Maak zo nodig een plot.

a $f(x) = \frac{1}{5 - x}$

b $g(x) = 5 + 3x^2$

c $h(x) = 4 + \frac{18}{2x^2 + 3}$

d $k(x) = 14 + 10 \cdot 0{,}91^x$

15 De grafieken van de functies hebben één of meer asymptoten.
Geef van elke asymptoot een vergelijking.

a $f(x) = -4 \cdot 1{,}2^x$

b $g(x) = \frac{20}{16 - x^2}$

c $h(x) = \frac{100}{18 - 2x^2}$

d $k(x) = 2 + \frac{6}{1 - 2x}$

20 Gegeven zijn de functies

$f(x) = (2x - 1)(x + 1)$ $\quad g(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$

$h(x) = x(x + 1)(3x - 4)$ $\quad k(x) = 3 - x^2 + 3x + x^4$

$m(x) = (x - 2)^2 - (x + 2)^2$ $\quad n(x) = x^3 + 2x + 7 - \frac{1}{2}x(4 + 2x^2)$

Schrijf elk van deze functies als een veeltermfunctie en noteer de graad van elke functie.

© Noordhoff Uitgevers bv

26 Gegeven zijn de functies $f(x) = 3x^2 - 2x$ en $g(x) = \dfrac{10}{2x + 3}$

Stel de functievoorschriften op van de beeldgrafieken van f en van g na de transformaties

a verschuiven over de afstand 2 omhoog.

b verschuiven over de afstand 6 naar rechts.

28 Gegeven zijn de functies $f(x) = \dfrac{15}{x^2 - x + 4}$ en $g(x) = 3x - 2x^2 + 5$.

Geef het functievoorschrift bij de beeldgrafieken van f en van g in de volgende gevallen:

a De grafiek wordt vermenigvuldigd met -4 ten opzichte van de x-as en daarna 6 omhoog verschoven.

b De grafiek wordt 5 naar rechts verschoven en daarna vermenigvuldigd met 3 ten opzichte van de x-as.

31 Gegeven is de functie $f(x) = 2x^2 - 3x$.

a Je past op de grafiek van f eerst een vermenigvuldiging en daarna een translatie toe om de grafiek van $g(x) = 6x^2 - 9x + 13$ te krijgen.
Welke vermenigvuldiging en welke translatie zijn er nodig?

b Beantwoord opdracht a opnieuw, maar pas nu eerst een translatie en daarna een vermenigvuldiging toe.

34 Los exact op.

a $2x - 4 = \sqrt{x^2 - 5}$

b $\dfrac{20}{x - 1} = 3x + 4$

c $\frac{1}{2}x(2x - 5) = x^2 - 3x - 11$

d $x - \sqrt{x + 5} = 1$

40 Los exact op .

a $x^3 - 2x^2 - 15x = 0$

b $(3x - 2)\sqrt{x + 1} = 15x - 10$

c $\dfrac{2x - 5}{x} = 4x - 10$

d $(x - 1)^2 = (2x + 3)(x - 1)$

© Noordhoff Uitgevers bv

3 **a** Schrijf $y = -4x + 8$ in de vorm $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

b Schrijf $\frac{x}{3\frac{1}{3}} + \frac{y}{1\frac{1}{2}} = 1$ in de vorm $y = mx + n$.

c Schrijf $y = 1\frac{2}{3}x - 5$ in de vorm $ax + by = c$.

5 Geef de drie vormen van een vergelijking van de lijn door de twee punten.

a $(3, 0)$ en $(0, 8)$

b $(-1, 3)$ en $(-5, 11)$

c $(0, 6)$ en $(2, 2)$

d $(20, 51)$ en $(65, -129)$

13 Los exact op.

a $\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ 2x + 5y = 22 \end{cases}$

b $\begin{cases} 3x - 2y = 62 \\ 2x + 3y = 50 \end{cases}$

c $\begin{cases} x - 2y + 11 = 0 \\ 5x + 3y + 3 = 0 \end{cases}$

d $\begin{cases} 5x - 3y = 9 \\ 2x + 5y = 16 \end{cases}$

16 Onderzoek voor elk stelstel het aantal oplossingen.

a $\begin{cases} 6x - 4y = 3 \\ y = 1\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \end{cases}$

b $\begin{cases} 6(x - y) = 3(x + 1) \\ x + 2y = 2 \end{cases}$

17 Onderzoek voor welke waarden van p en q het stelsel strijdig of afhankelijk is.

a $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - py = 7 \end{cases}$

b $\begin{cases} x + y = p \\ y = 4qx + 8 \end{cases}$

21 Gegeven zijn de lijnen k: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 1$, m: $4x + 6y = 1$ en n: $1\frac{1}{2}x = y + 2$.
Bereken van elk van de drie lijnen de hoek met de x-as in graden nauwkeurig.

© Noordhoff Uitgevers bv

24 Bereken in hele graden de hoek tussen de lijnen.

a $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1$ en $\frac{x}{3}+\frac{y}{1\frac{1}{2}}=1$

b $3x-1\frac{1}{2}y=4$ en $2y-3x=5$

c $y=-\frac{1}{5}x+4$ en $2y-5x=3$

d $2y=-x\sqrt{2}+4$ en $y=-2x\sqrt{3}+2\sqrt{5}$

29 Onderzoek welke lijnen loodrecht op elkaar staan.

k: $y=\frac{1}{3}x-5$ m: $3x-y=5$

l: $\frac{x}{1}+\frac{y}{3}=1$ p: $5x-3y=1$

m: $y=\frac{5}{3}x+1$ q: $x=3y+5$

31 **a** Gegeven zijn lijn l: $5y=7-2x$ en punt $P(2, -5)$.
Stel een vergelijking op van de loodlijn op l door P.

b Gegeven zijn lijn m: $8x+9y=12$ en punt $Q(1, 12)$.
Stel een vergelijking op van de loodlijn op m door Q.

38 **a** Gegeven zijn punt $Q(-1, -5)$ en lijn m: $3x+y=2$.
Bereken exact $d(Q, m)$.

b Gegeven zijn punt $P(4, 6)$ en lijn l: $\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}y=1$.
Bereken exact $d(P, l)$.

40 Bereken exact de afstand tussen de lijnen.

a $5x-2y=-1$ en $y=2\frac{1}{2}x+15$

b $y=-\frac{1}{2}x+3$ en $y=-\frac{1}{2}x+8$

c $2x+8y=15$ en $x+4y=-18$

d $y=\frac{1}{2}x-3$ en $y=\frac{1}{2}x+4\frac{1}{2}$

e $5x+3y=-19$ en $y=-1\frac{2}{3}x+5$

© Noordhoff Uitgevers bv

4 Gegeven is de functie $f(x) = (4 - x)\left(3 + \frac{1}{2}x\right)$.
- **a** Bereken de gemiddelde toename van f over het interval $[1, 4]$.
- **b** Bereken het differentiequotiënt van f over het interval $[-5, 2]$.
- **c** Plot de grafiek van f en noem twee intervallen waarop de gemiddelde toename gelijk is aan 0.

7 Gegeven is de functie $f(x) = -2\sqrt{x + 4}$.
- **a** Benader de helling van de grafiek van f in het punt $(0, -4)$.
- **b** Benader de helling van de grafiek van f in het punt $(-3, -2)$.
- **c** Benader de helling van de grafiek van f in het punt $(12, -8)$.

10 Gegeven is de functie $f(x) = -5x^2$.
Bereken met een differentiaalquotiënt de helling van de grafiek van f in het punt $(5, -125)$. Maak daarbij gebruik van het volgende begin: het differentiequotiënt over $[5, 5 + \Delta x]$ is

$$\frac{f(5 + \Delta x) - f(5)}{\Delta x} = \ldots$$

15 Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$.
- **a** Laat met een berekening zien dat de lijn met vergelijking $y = 2x + 2$ de grafiek van f raakt in het punt $(2, 6)$.
- **b** Bereken de helling van de grafiek van f in het punt $(-4, -24)$.
- **c** Geef een vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(4, 8)$.

18 Gegeven is de formule $y = x^2$.
- **a** Bereken exact $\frac{dy}{dx}$ voor $x = -4$.
- **b** Bereken exact de helling van de grafiek van $y = x^2$ in het punt $(8, 64)$.

22 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^9$ en $g(x) = x^{10}$.
- **a** Geef de functievoorschriften $f'(x)$ en $g'(x)$.
- **b** Bereken exact de helling van de grafieken van f en g in het punt $(1, 1)$.
- **c** In welk(e) punt(en) van de grafiek van f is de helling gelijk aan 2304?

© Noordhoff Uitgevers bv

27 Differentieer. Werk zo nodig eerst de haakjes weg.

a $f(x) = 9\frac{2}{5} - \frac{7}{4}x$

b $l(d) = 20 - 1{,}4d^5$

c $A(t) = -7\frac{1}{2}$

d $m(x) = -(4x - 9) - 5x^2$

e $g(x) = 9 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2$

f $q(t) = (2t + 7)(3 - t)$

g $h(p) = p\sqrt{3} - \sqrt{8}$

h $s(r) = (3r)^6$

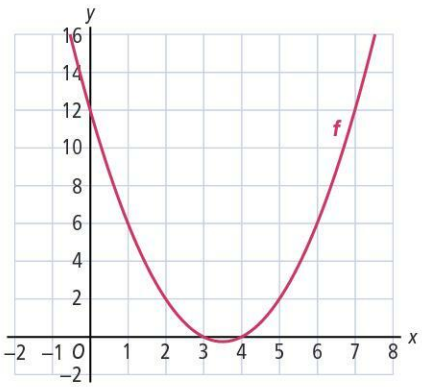
30 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 7x + 12$.

a Bereken exact de helling van de grafiek van f in het snijpunt met de y-as.

b Doe hetzelfde voor de snijpunten van de grafiek van f met de x-as.

c Bereken exact de coördinaten van het punt op de grafiek van f waar de helling gelijk is aan 10.

d Bereken met behulp van $f'(x)$ de coördinaten van de top.



36 Bereken exact de extreme waarden.

a $j(x) = 18x^2 - 3x^4$

b $g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

c $f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 36x$

d $h(x) = 3x^4 + 12x$

40 Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 5$.

a Stel een vergelijking op van de raaklijn in het punt $P(2, 1)$.

b Er zijn twee punten op de grafiek met y-coördinaat -59. Stel in elk van deze punten een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f.

43 Plot van elke functie de grafiek en schets de bijbehorende hellinggrafiek.

a $m(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 7$

b $k(x) = -3\sqrt{x + 5}$

c $h(x) = -0{,}5x^3 + 6x$

d $l(x) = x^2 + 8x$

© Noordhoff Uitgevers bv

3 Vul de ontbrekende getallen in.

aantal graden	0	45	…	120	…	180
aantal radialen exact	…	…	$\frac{1}{3}\pi$	…	$\frac{3}{4}\pi$	π

4 Vul de ontbrekende getallen in.

aantal graden	…	25	…	70	…	160	…
aantal radialen	0,2	…	1	…	2,5	…	2,9

Rond de graden af op een geheel getal en de radialen op twee decimalen.

13 Vul exacte waarden in.

a $\sin\left(1\frac{3}{4}\pi\right) = \ldots$

b $\sin\left(-2\frac{1}{4}\pi\right) = \ldots$

c $\sin\left(3\frac{1}{3}\pi\right) = \ldots$

d $\sin\left(-1\frac{1}{6}\pi\right) = \ldots$

e $\sin\left(3\frac{1}{2}\pi\right) = \ldots$

f $\sin\left(5\pi\right) = \ldots$

g $\sin\left(-4\frac{2}{3}\pi\right) = \ldots$

h $\sin\left(8\frac{5}{6}\pi\right) = \ldots$

i $\sin\left(9\frac{1}{6}\pi\right) = \ldots$

j $\sin\left(-5\frac{3}{4}\pi\right) = \ldots$

19 Vul exacte waarden in.

a $\cos\left(1\frac{1}{6}\pi\right) = \ldots$

b $\cos\left(-4\frac{2}{3}\pi\right) = \ldots$

c $\cos\left(1\frac{3}{4}\pi\right) = \ldots$

d $\cos\left(-1\frac{1}{2}\pi\right) = \ldots$

e $\cos\left(6\frac{3}{4}\pi\right) = \ldots$

f $\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = \ldots$

g $\sin\left(7\frac{1}{4}\pi\right) = \ldots$

h $\cos\left(-5\frac{2}{3}\pi\right) = \ldots$

i $\sin\left(-7\pi\right) = \ldots$

j $\sin\left(-7\frac{1}{2}\pi\right) = \ldots$

21 Geef van deze functies de evenwichtsstand, de amplitude en het bereik.

a $f(x) = -3 + 4\sin(x)$

b $f(x) = 5 - 3{,}5\cos(x)$

c $f(x) = 5{,}5 - 0{,}5\cos(x)$

d $f(x) = 7 - 20\sin(x)$

e $f(x) = 12 - \cos(x)$

f $f(x) = 2{,}7 + \sin(x)$

25 Bereken de periode van deze functies.

a $g(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

b $g(x) = \cos(6x)$

c $g(x) = \cos(2\pi x)$

d $g(x) = \sin\left(\frac{2}{5}x\right)$

© Noordhoff Uitgevers bv

26 Door welke transformaties ontstaan de grafieken van deze functies uit de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ of $h(x) = \cos(x)$?
Geef ook de coördinaten van de toppen op het interval $[0, 2\pi]$.

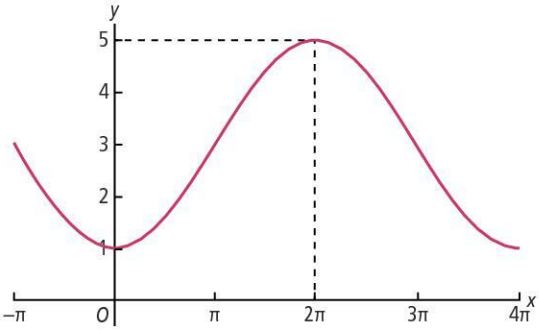
a $g(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$ **c** $g(x) = -\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$

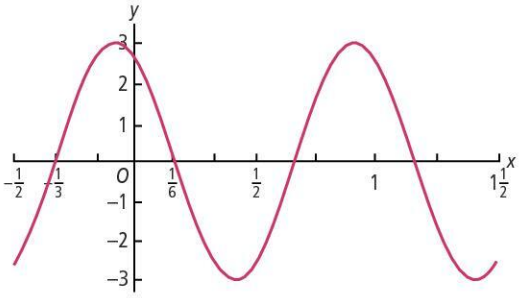
b $g(x) = -\cos(x + 3) + 2$ **d** $g(x) = \cos(x - 0{,}1\pi) - 1$

29 Gegeven zijn de functies $f(x) = 3 + 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$,
$g(x) = 4\cos(6\pi x) + 7$, $h(x) = -3 + 2\sin\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{6}\pi\right)\right)$ en
$k(x) = -3 - 5\cos(2x - 3)$.

Bepaal de amplitude, de periode en de evenwichtsstand van de grafieken van deze vier functies.

32 Stel passende functievoorschriften op bij deze sinusoïden.





37 Los de vergelijkingen op het gegeven interval exact op.

a $\cos(2x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ op $[0, 2\pi]$ **c** $2\sin(3x) + 1 = 1$ op $[0, \pi]$

b $3\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$ op $[0, 6\pi]$ **d** $\sin(2\frac{1}{2}x) + 3 = 2\frac{1}{2}$ op $[0, \pi]$

39 Los de vergelijkingen op het gegeven interval op.

a $\cos(x) = 0{,}65$ op $[0, 2\pi]$ **d** $\cos(x) - 0{,}2 = 0{,}65$ op $[5, 10]$

b $\sin(x) = -0{,}85$ op $[0, 2\pi]$ **e** $9 - 2\sin(2, 3x) = 8$ op $[-2, 3]$

c $\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = 0{,}4$ op $[0, 2\pi]$ **f** $3 + 0{,}5\sin(2x) = 8$ op $[-2, 6]$

© Noordhoff Uitgevers bv

1 Los op.

a $x(3 - 2x) = 6x$

b $(x^2 + 5x)^2 = 9x^2$

2 Los op.

a $-3\sqrt{x + 4} = -13$

b $\dfrac{x + 2}{2x - 4} = x - 5$

c $6x = \dfrac{2x^2}{x - 4}$

d $3x - 2(x + 3) = 4x$

e $(3x - 2)^2 = (6 - x)^2$

f $\dfrac{x - 2}{5 - x} = \dfrac{3x}{x + 1}$

3 Los op met een substitutie.

a $(x - 3)^4 - 14(x - 3)^2 - 15 = 0$

b $\left(\dfrac{x}{x - 1}\right)^2 - 3\left(\dfrac{x}{x - 1}\right) - 4 = 0$

c $-\sqrt{x} + x - 90 = 0$

4 Herleid zodat q wordt uitgedrukt in p.

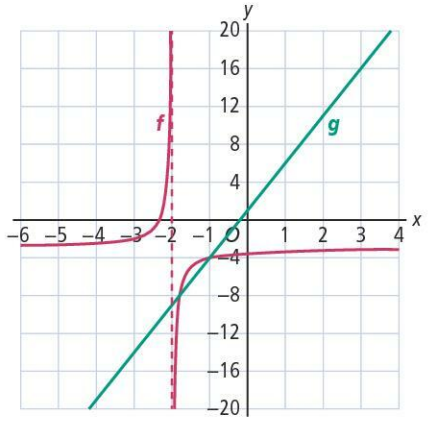
a $3 + p = 2\sqrt{q} - 3p$

b $\dfrac{2}{3q} = p + 2$

5 Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x) = -3 - \dfrac{1}{x + 2}$ en $g(x) = 5x + 1$.

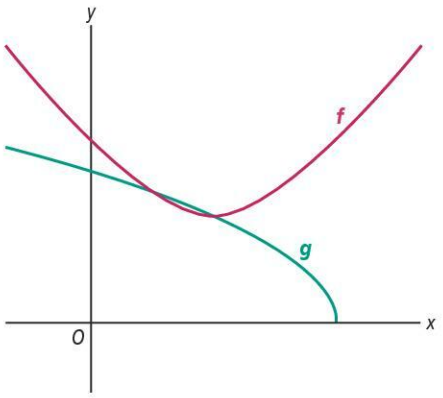
a Bereken de coördinaten van de snijpunten van deze twee grafieken.

b Los op $f(x) \geq g(x)$.



© Noordhoff Uitgevers bv

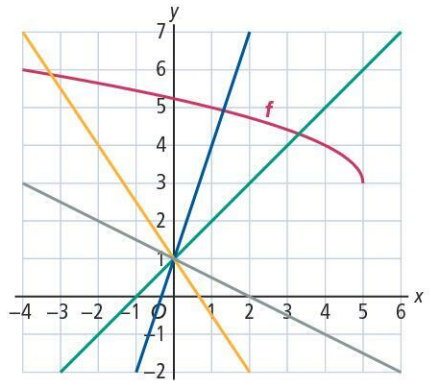
6 Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x) = \sqrt{(x-2)^2 + 2}$ en $g(x) = \sqrt{-x+4}$.



a Los de ongelijkheid $f(x) > g(x)$ op.

b Toon aan dat de lijn $y = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot x$ één punt gemeenschappelijk heeft met de grafiek van f.

7 Gegeven is de functie $f(x) = 3 + \sqrt{5-x}$ en de familie van lijnen met de vergelijking $y = px + 1$.
Bij de grafiek van f zijn voor drie waarden van p de bijbehorende lijnen getekend.



a Eén van de lijnen gaat door het punt (3, 6).
Bereken welke waarde van p daarbij hoort.

b Eén van de lijnen snijdt de grafiek van f in een punt met x-coördinaat -4.
Bereken de waarde van p die bij deze lijn hoort.

c Voor welke waarden van p heeft de grafiek van f één snijpunt met de lijn?

8 De leerlingenraad van een school verkoopt soep voor een goed doel. Het aantal koppen soep dat ze verkopen hangt af van de prijs. Uit ervaring weten ze dat het aantal koppen soep q voldoet aan de formule $q = 180 - 0{,}5p$. Hierin is q het aantal verkochte koppen soep en is p de prijs van één kop soep in centen.

a Herleid de formule $q = 180 - 0{,}5p$ waarbij je p uitdrukt in q.

b Laat zien dat de totale opbrengst kan worden berekend met de formule $O = 180p - 0{,}5p^2$.

c Bepaal de twee prijzen waarvoor de totale opbrengst nul is.

De leerlingenraad heeft ook kosten gemaakt die van de opbrengst afgetrokken moeten worden. De totale kosten worden gegeven door de formule $TK = 20q + 1000$ met TK de totale kosten in centen.

d Laat zien dat de totale winst in euro's kan worden berekend met de formule $TW = 190p - 0{,}5p^2 - 4600$.

e Bij welke prijs wordt er geen winst meer gemaakt?

f Bij welke prijs is de winst maximaal?

© Noordhoff Uitgevers bv

1 Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk.

a $(2p^2)^4 \cdot 3p^4$

b $2\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^{-6} + \left(2 \cdot \sqrt[4]{a^3}\right)^4$

c $2x^2(3x - 2x^3)$

d $\dfrac{2b^2}{4b^8} + \left(\dfrac{2b^2}{b^4}\right)^3$

2 Los op. Geef exacte antwoorden.

a $3y^6 = 729$

b $3a^{-\frac{1}{5}} = 4$

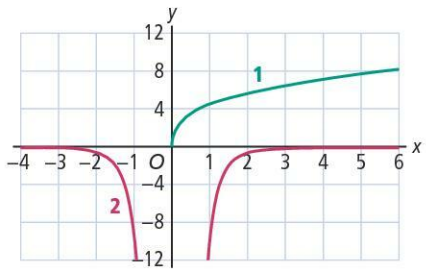
c $5p^{2\frac{1}{2}} - 10 = 5$

d $2 - 0{,}2x^{-\frac{1}{4}} = 1{,}6$

e $\frac{1}{2}x^8 = -4x^3$

f $4x^4 = 20\sqrt{x}$

3 Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x) = -10x^{-4}$ en $g(x) = 4{,}5x^{\frac{1}{3}}$.



a Welke grafiek hoort bij f?

b Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van g met de lijn $y = 9$.

c De lijn l met vergelijking $y = -160$ snijdt de grafiek van f in de punten P en Q.
Bereken de lengte van lijnstuk PQ.

d De lijn met vergelijking $y = p$ snijdt de grafiek van f in de punten A en B. De lengte van lijnstuk AB is 4.
Bereken p.

e De lijn met vergelijking $x = 2$ snijdt de grafiek van f in punt C en de grafiek van g in punt D.
Bereken de lengte van lijnstuk CD.

4 Herleid voor $p > 0$ tot de vorm $p = a \cdot q^b$. Geef de waarden van a en b zo nodig in twee decimalen.

a $q = 0{,}125 \cdot p^4$

b $q = 10 \cdot p^{\frac{1}{3}}$

c $q = 3{,}5 \cdot p^{-1{,}3}$

d $q = \frac{2}{3} \cdot p^{0{,}65}$

© Noordhoff Uitgevers bv

5 Schrijf zonder negatieve en gebroken exponent.

a $f(x) = (x^{-\frac{2}{5}})^{\frac{5}{4}}$

b $f(x) = \dfrac{3x^{3\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}}{(3\sqrt[3]{x^2})^3}$

c $f(x) = x^{3\frac{1}{2}} \cdot (x^{-\frac{2}{3}})^5$

d $f(x) = \dfrac{3\sqrt[3]{x^2} \cdot 4\sqrt{x}}{18\sqrt[6]{x^5}}$

6 Gegeven is de grafiek van de functie $g(x) = \frac{1}{4}x^5 - 2x^3$.

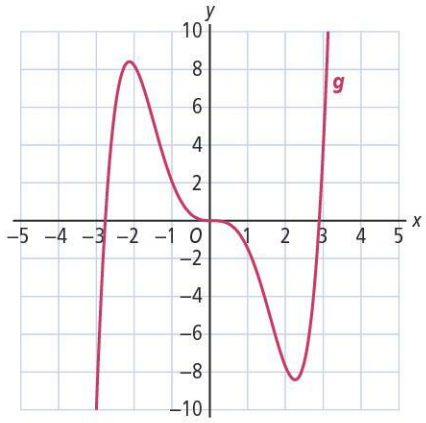
a Los op $g(x) < 0$.

b Het aantal oplossingen van de vergelijking $g(x) = c$ hangt af van de waarde van c.
Geef het aantal oplossingen voor $c = 8$ en voor $c = 9$.

c Verder is gegeven de familie van functies $f_a(x) = ax$.
Kies achtereenvolgens $a = -3$ en $a = -4$ en schets in de figuur de twee grafieken van f_a bij $a = -3$ en $a = -4$.

d Los $f_a(x) = g(x)$ op voor achtereenvolgens $a = -3$ en $a = -4$.

e Wat kun je zeggen van het aantal oplossingen van $f_a(x) = g(x)$ als $a < -4$?



7 Een zonnecel zet licht om in elektriciteit.
Bij experimenten is gevonden, dat het verband tussen de verlichtingssterkte L in lux en de het spanningsverschil V in volt wordt beschreven door de formule $V = b \cdot L^a$.
Bij een zonnecel van het type Solarrent hoort de formule $V = 0{,}015 \cdot L^{0{,}45}$.

a Bereken de verlichtingssterkte van het zonlicht dat op een zonnecel van het type Solarrent valt als dit een spanningsverschil van 0,45 volt levert.

b Als gevolg van een gedeeltelijke zonsverduistering is de verlichtingssterkte van de zon tijdelijk met 50% afgenomen. Bereken met hoeveel % het geleverde spanningsverschil bij de zonnecel van het type Solarrent daardoor afneemt.

c De formule $V = 0{,}015 \cdot L^{0{,}45}$ is te schrijven in de vorm $L = p \cdot V^q$.
Bereken p en q. Rond p af op een geheel getal en q op twee decimalen.

d Door bundeling van het zonlicht dat op een zonnecel valt kan het spanningsverschil worden vergroot.
Bereken met welke factor de verlichtingssterkte door het bundelen vergroot moet worden om een verdubbeling van het spanningsverschil te krijgen.

© Noordhoff Uitgevers bv

1 Geef het domein en het bereik van deze functies.

a $f(x) = -2 \cdot \sqrt{4 - x^2}$

b $g(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

c $h(x) = x^2 + 6x + 8$

d $i(x) = 2 + \dfrac{5}{9 - 2x}$

e $j(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

2 Bereken met je rekenmachine de nulpunten en de coördinaten van de toppen van de grafiek van de functies. Doe verslag van de manier waarop je de rekenmachine hebt gebruikt.
Rond je antwoorden indien nodig af op twee decimalen.

a $f(x) = x^3 - 2x^2 + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$

b $g(x) = x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^x - 6$

c $h(x) = 0{,}08x^3 - x^2 - 10x + 60$

d $i(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 5$

3 Welke van de vergelijkingen hieronder zijn exact op te lossen?
Los deze vergelijkingen exact op.
Los de andere vergelijkingen op met je rekenmachine.

a $3 - x = \dfrac{-2}{x}$

b $100 \cdot 1{,}04^x = 200$

c $\dfrac{1}{x} = x^2 + \sqrt{x + 2}$

d $(x + 1)^2(x + 2) = (x + 1)(x + 10)$

4 Gegeven zijn de functies $f(x) = \dfrac{7 - 3x}{5x + 2}$ en $g(x) = \dfrac{1}{2 - \sqrt{x}}$

a Bepaal vergelijkingen van de asymptoten van de grafieken van f en g.

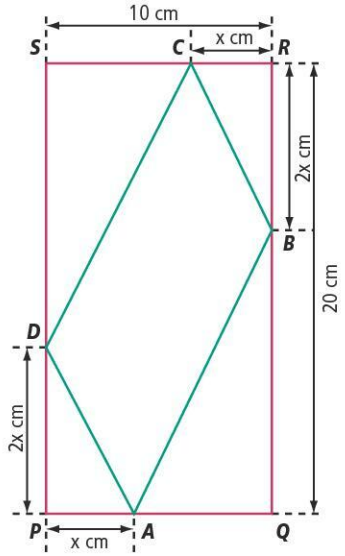
b Los op $f(x) \geq 4$.

c Verder is gegeven de functie $h(x) = 2x - 6$.
Los op $f(x) < h(x)$.

d De grafiek van h wordt ten opzichte van de x-as vermenigvuldigd met 2 en deze beeldgrafiek wordt vervolgens 4 omlaag verschoven. Het resultaat is de grafiek van een functie k.
Geef het functievoorschrift $k(x)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

5 Van een rechthoek $PQRS$ van 10 cm bij 20 cm worden vier driehoeken afgeknipt zodat er een parallellogram $ABCD$ overblijft.
Twee driehoeken hebben rechthoekszijden van x cm en $2x$ cm.
$T(x)$is de oppervlakte van de vier driehoeken samen.
$V(x)$ is de oppervlakte van parallellogram $ABCD$.

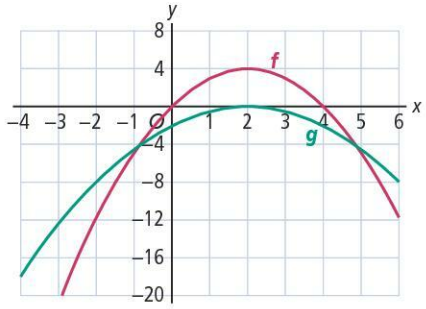


a Toon aan dat $T(x) = 4x^2 - 40x + 200$.
b Toon aan dat $V(x) = 40x - 4x^2$.
c Bereken exact de waarde van x waarvoor $T(x) = V(x)$.
d Bereken in twee decimalen voor welke waarden van x de totale oppervlakte van de vier driehoeken samen twee keer zo groot is als de oppervlakte van parallellogram $ABCD$.

6 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{1-x^2} + 2$ en $g(x) = -5 + \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$

a Stel vergelijkingen op van de asymptoten van de grafiek van f.
b Stel vergelijkingen op van de asymptoten van de grafiek van g.
c Geef het domein en het bereik van f in de intervalnotatie.
d Geef het domein en het bereik van g in de intervalnotatie.

7 Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x) = -x^2 + 4x$ en $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$.



a De grafiek van g kan uit de grafiek van f ontstaan door deze eerst te vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as en daarna te verschuiven.
Met welke vermenigvuldiging en welke verschuiving kan dat?
b De grafiek van g ontstaat ook uit de grafiek van f door eerst te verschuiven en daarna ten opzichte van de x-as te vermenigvuldigen.
Met welke verschuiving en met welke vermenigvuldiging kan dat?

8 Gegeven is de familie van functies $f(x) = a + 2\sqrt{b - 2x}$.
a Het randpunt van één van de grafieken van f is $(2, 6)$.
Bereken de waarden van a en b voor deze functie.
b Een andere functie van deze familie van functies heeft als domein $\langle \leftarrow, -4]$ en als bereik $[12, \rightarrow\rangle$.
Bereken a en b.

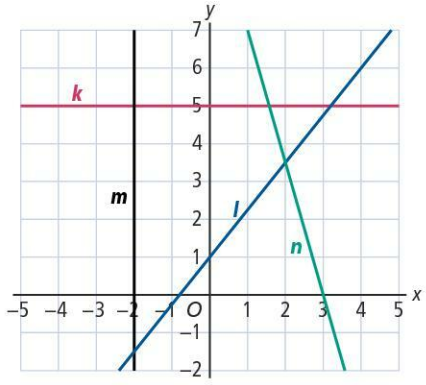
© Noordhoff Uitgevers bv

1 **a** Schrijf de vergelijking $y = 1\frac{1}{3}x - 3$ in de vorm $ax + by = c$.

b Schrijf de vergelijking $y = 5 - \frac{1}{2}x$ in de vorm $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

c Schrijf de vergelijking $\frac{x}{6} + \frac{y}{-1\frac{1}{2}} = 1$ in de vorm $y = mx + n$.

2 In de figuur zie je de lijnen k, l, m en n getekend.
Stel van elk van deze lijnen een vergelijking op.



3 Gegeven zijn de punten $A(0, 7)$, $B(2, -2)$ en $C(5, 1)$.

a Schrijf de drie vormen op van een vergelijking van lijn BC.

b Schrijf de drie vormen op van een vergelijking van lijn AB.

c Bereken de hoek die de lijn AB maakt met de x-as.

4 Los op met elimineren.

a $\begin{cases} 5x + 3y = 9 \\ \frac{1}{2}x + y = 3 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}3y - 1 = 0 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$

5 Gegeven is het stelsel $\begin{cases} y = px + 3 \\ 8x - 2y = 7 \end{cases}$

a Bereken de waarde van p zodat het stelsel strijdig is.

b Druk voor de waarden van p waarvoor het stelsel niet strijdig is, de oplossing van het stelsel uit in p.

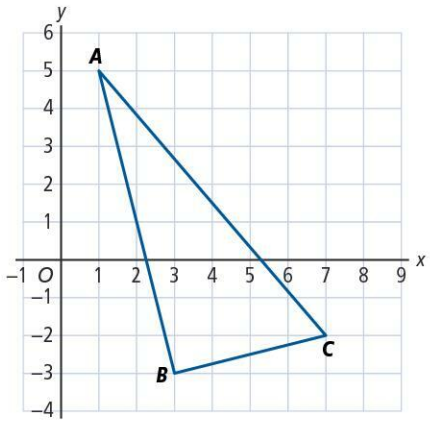
© Noordhoff Uitgevers bv

6 De hoekpunten van $\triangle ABC$ zijn $A(1, 5)$, $B(3, -3)$ en $C(7, -2)$.

a Toon aan dat lijn AB loodrecht op lijn BC staat.

b Bereken $\angle A$.

c De middelloodlijn van zijde AC snijdt de y-as in punt P.
Bereken de coördinaten van P.



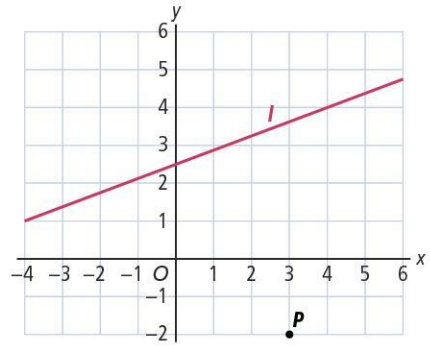
7 In de figuur is lijn l met vergelijking $3y = x + 7$ getekend en het punt $P(3, -2)$.
Lijn m is de lijn door P en de oorsprong $O(0, 0)$.

a Bereken de hoek tussen de lijnen l en m in hele graden.

b Stel een vergelijking op van de lijn door punt P loodrecht op l.

c Punt S is het snijpunt van m en l.
Bereken exact de coördinaten van S.

d Bereken in graden nauwkeurig de hoek die l met de y-as maakt.



8 Gegeven zijn de lijnen p: $y = -4x + 3$ en q: $\frac{x}{2} + \frac{y}{8} = 1$.

a Leg uit dat p en q evenwijdige lijnen zijn.

b Bereken exact de afstand tussen de lijnen p en q.

9 Gegeven zijn de punten $A(p, 0)$, $B(2, 6)$ en $C(4, -4)$.

a Bereken de waarde van p als driehoek ABC een gelijkbenige driehoek is met $AB = AC$.

b Bereken de waarden van p als $\angle BAC = 90°$.

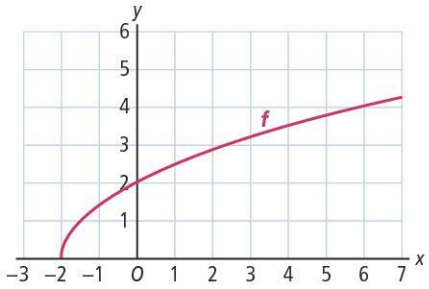
10 Gegeven is lijn l: $y = 8 - \frac{1}{2}x$.

a Bereken $d(O, l)$.

b Punt $M(10, 3)$ ligt op l. Op l liggen twee punten P en Q waarvoor geldt $PM = QM = 10$.
Bereken exact de coördinaten van P en Q.

© Noordhoff Uitgevers bv

1 Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{2x + 4}$.



a Bereken de gemiddelde toenamen over de intervallen [0, 3] en [4, 5] in twee decimalen.

b Toon aan dat $\dfrac{\sqrt{2a + 4} - \sqrt{2a}}{2}$ de gemiddelde toename van f over een interval $[a - 2, a]$ is.

c De gemiddelde verandering van f over het interval $[-2, b]$ is gelijk aan $\frac{1}{4}$.
Bereken b.

2 Gegeven is de functie $h(t) = 50t - 10t^2$.

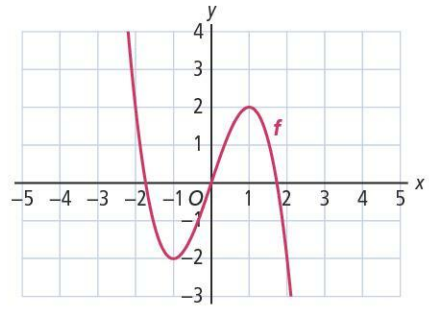
a Bereken de gemiddelde toename van de grafiek van h over het interval [0, 4].

b Bereken het differentiequotiënt over het interval [0; 0,002].

c Bereken het differentiaalquotiënt voor $t = 1$.

d Wat betekent het antwoord van opdracht c voor de grafiek van h?

3 Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = 3x - x^3$.



a Schets de hellinggrafiek van f.

b Laat met een berekening zien dat de lijn $y = -9x + 16$ de grafiek van f in het punt $(2, -2)$ raakt.

4 Differentieer deze functies.

a $f(x) = 3x^7 - 4x^2 + 2x\sqrt{2}$

b $g(x) = x(x^2 - 4) + 2x^2(4 - x)$

c $h(x) = (0{,}4x^2)^2 + 1{,}5x^2$

d $m(x) = (x^2 + 4)(x^3 - 2x)$

© Noordhoff Uitgevers bv

5 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 11x + 7$.

a Geef het functievoorschrift $f'(x)$.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het snijpunt van de grafiek van f met de y-as.

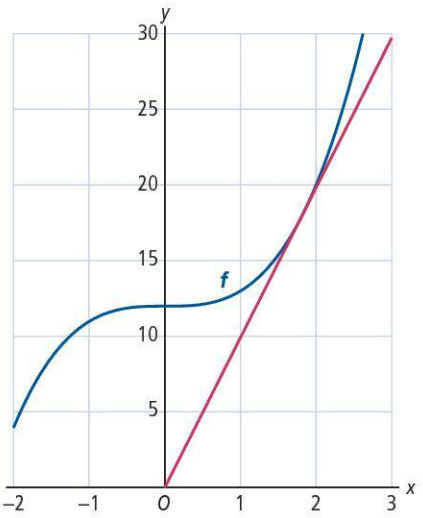
c De grafiek van f heeft twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt 1.
Bereken exact de coördinaten van de raakpunten.

6 Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2$.

a Plot en schets de grafiek van f.

b Bereken exact de extreme waarden van f.

7 Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x) = x^3 + 12$ en $g(x) = ax$. Voor een bepaalde waarde van a raakt de grafiek van g aan die van f.
Bereken exact de coördinaten van het raakpunt.

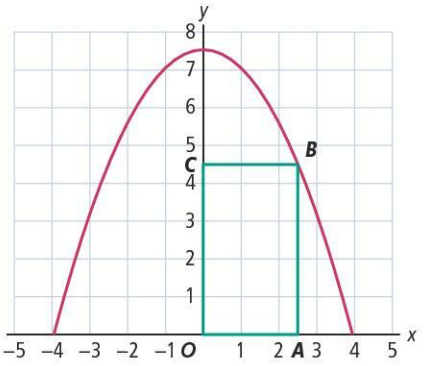


8 Gegeven is de grafiek van $f(x) = 7{,}5 - 0{,}5x^2$. Verder is een rechthoek $OABC$ gegeven waarvan A en C op de assen liggen en punt B op de grafiek van f ligt.
Neem $A(p, 0)$ waarbij p een waarde heeft tussen 0 en het positieve nulpunt van f.

a Druk de coördinaten van B uit in p.

b Laat zien dat voor de oppervlakte O van rechthoek $OABC$ geldt $O = 7{,}5p - 0{,}5p^3$ met $0 < p < \sqrt{15}$.

c Bereken de maximale oppervlakte van de rechthoek $OABC$.



© Noordhoff Uitgevers bv

1 Vul de tabel verder in met exacte waarden.

hoek in *graden*	20	…	75	…	210	…
hoek in *radialen*	…	$1\frac{1}{4}\pi$	…	$1\frac{2}{3}\pi$	…	$3\frac{1}{6}\pi$

2 Bereken. Geef exacte antwoorden.

a $\sin\left(3\frac{1}{4}\pi\right)$

b $\cos\left(1\frac{1}{3}\pi\right)$

c $\sin\left(11\frac{1}{2}\pi\right)$

d $\cos\left(-7\frac{1}{6}\pi\right)$

e $\sin\left(-5\frac{1}{3}\pi\right)$

f $\cos\left(15\frac{3}{4}\pi\right)$

3 Gegeven zijn de functies $f(x) = 3 + 1\frac{1}{2}\sin\left(2\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)\right)$ en $g(x) = -4 + 6\cos\left(\frac{1}{3}\pi\left(x + 2\right)\right)$.

a Geef van de grafiek van f de amplitude, de periode, de evenwichtsstand en een punt waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.

b Geef van de grafiek van g de amplitude, de periode, de evenwichtsstand en een hoogste punt van de grafiek.

c Bereken met behulp van de antwoorden van opdracht a de extreme waarden van f op het interval $[0, 3\pi]$. Geef ook aan voor welke waarden van x deze bereikt worden.

d Doe opdracht c ook voor de functie g op het interval $[0, 10]$.

4 De sinusoïde is de grafiek van de functie $f(x) = d + a\sin(b(x - c))$.

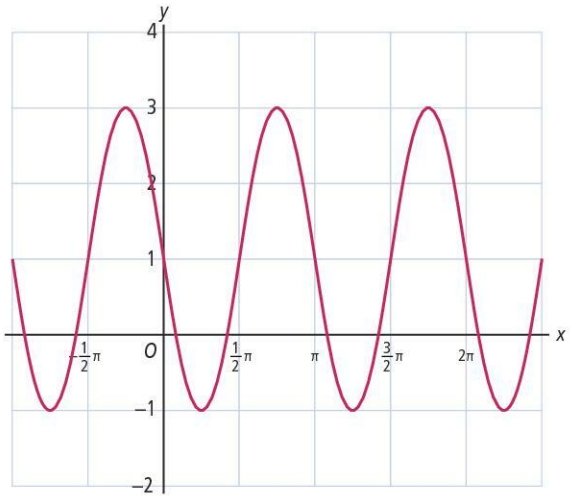
a Bereken mogelijke waarden van a, b, c en d.

b De functie f is ook te schrijven in de vorm $f(x) = s + p\cos(q(x - r))$.
Bereken mogelijke waarden van p, q, r en s.

c Geef de coördinaten van twee punten waarin de grafiek van f symmetrisch is.

d Geef vergelijkingen van twee symmetrieassen.

e Door de grafiek van f te vermenigvuldigen met factor 3 ten opzichte van de y-as ontstaat de grafiek van functie g.
Geef het functievoorschrift van g.



© Noordhoff Uitgevers bv

5 Los de vergelijkingen op het gegeven interval exact op.

a $\sin(3x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ op $[0, \pi]$

b $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ op $[-\pi, \pi]$

c $2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = \sqrt{3}$ op $[0, 6\pi]$

d $3 - 4\sin(\frac{1}{2}\pi\, x) = 1$ op $[0, 3]$

6 Los met de rekenmachine de vergelijkingen op het gegeven interval op. Geef de antwoorden in twee decimalen.

a $\sin(2x) = -0{,}3$ op $[0, 2\pi]$

b $\cos(0{,}6x) = 0{,}75$ op $[0, 10]$

c $4\sin(3x) = 3$ op $[0, \pi]$

d $2 + 3\cos(x - 5) = 1{,}5$ op $[0, 3\pi]$

7 Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$.
Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek van f na:

a de horizontale verschuiving over $\frac{1}{2}\pi$ eenheden naar links.

b de verschuiving over 2 eenheden naar rechts en de verschuiving over 4 eenheden omlaag.

c de vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met factor $-\frac{1}{2}$.

8 Bart bevindt zich in één van de 20 cabines van een reuzenrad. Zijn hoogte ten opzichte van de grond wordt gegeven door de formule $h = 35 + 30\sin\left(\frac{\pi}{300}(t - 150)\right)$.

Hierbij is h de hoogte in meters en t de tijd in seconden.
Bart is op $t = 0$ ingestapt.

a Op welke hoogte is Bart ingestapt?

b Op welke hoogte bevindt zich de as van het reuzenrad?

c Bereken hoeveel minuten het duurt voordat Bart precies één keer rond is geweest.

d Kees bevindt zich in de 5e cabine voor Bart.
Leg uit dat de formule $h = 35 + 30\sin(\frac{\pi}{300}t)$ past bij de hoogte van Kees.

e Bereken hoeveel minuten na het tijdstip $t = 0$ Bart en Kees zich voor het eerst op gelijke hoogte bevinden.

f Bereken hoeveel minuten na het tijdstip $t = 0$ Bart en Kees zich voor de tweede keer zich op gelijke hoogte bevinden.

© Noordhoff Uitgevers bv

A
abc-formule 18
afgeleide 181
afgeleide functie 181
afgeleide waarde 181
afhankelijk 138
afstand tussen twee punten 148
afstand van een punt tot een lijn 148
algebra 14
algebraïsch oplossen 114
amplitude 209
asymptoten 102

B
beeldgrafiek 110
bereik 99
booglengte 211
bordjesmethode 13

C
constante functie 107
cosinusfunctie 218

D
dalen 188
derdemachtswortel 51
differentiaalquotiënt 176
differentie 173
differentiequotiënt 173
differentiëren 185
discriminant 18
domein 99

E
eenheidscirkel 211
eerstegraads functie 107
eerstegraads vergelijking 14
elimineren 137
evenwichtsstand 209
exponentiële functies 106
exacte waarden sinus en cosinus 219
exact oplossen 114
extreme waarden 188

F
familie van functies 34

G
gebroken exponent 57
gebroken functies 61
gebroken vergelijking 27
gemiddelde toename 173
graad van een functie 107

H
hellingfunctie 181
hellinggrafiek 194
helling van de grafiek 176
hoek tussen twee lijnen 140

I
interval 97
intervalnotatie 97

K
kwadratische functie 107
kwadratische vergelijking 18

L
lineaire formules 130
lineaire vergelijking 14
loodlijn 145
loodrecht 144

M
machtsfuncties 61
maximum 188
minimum 188

N
negatieve exponent 52
nulpunt 92

O
ontbinden 12

P
parameter 34
periode 209
periodieke grafiek 209
plotten 90

R
raaklijn 178
radiaal 211
rekenregels voor machten 50
richtingscoëfficiënt 13

S
schetsen 90
sinusfunctie 212
sinusoïde 226
somregel 185
stelsel vergelijkingen 131
stijgen 188
strijdig 138
substitueren 31

© Noordhoff Uitgevers bv

T tekenen 90
transformatie 111
translatie 110
tweedegraads functie 107
tweedegraads vergelijking 18

U uitgedrukt in 30

V veeltermfuncties 107
vensterinstelling 91
vergelijking van een lijn 133
vierdemachtswortel 51

W wortelfuncties 61
wortelvergelijking 22

© Noordhoff Uitgevers bv

Ontwerp omslag G2K, Groningen/Amsterdam
Fotografie omslag Getty Images
Ontwerp binnenwerk Ebel Kuipers, Sappemeer
Illustraties Peter Fitzverploegh, Utrecht
Technisch tekenwerk Integra Software Services, India
Beeldresearch Daliz, Den Haag

Fotoverantwoording
Alamy/Image Select, Wassenaar: p. 10-11, 68, 82-83, 114, 1
62, 162-163, 244l
Shutterstock, New York: p. 14, 18, 48- 49, 52, 56, 62, 70, 72,
73, 81, 94-95, 128-129, 132, 136, 140, 168-169, 184, 196,
206-207, 210, 214, 226, 244-245, 253, 254b, 275
Daliz, Den Haag: p. 88-89
Dijkstra B.V./ANP Photo, Den Haag: p. 172
Hanna Hakvoort/Museum Joure, Joure: p. 218
iStockphoto/Getty Images, Londen: p. 229, 230, 235, 251l, 252
Universal Images Group Editorial/Getty Images, Londen: p. 144r
Cultura/Getty Images, Londen: p. 250-251
Pim Rusch Fotografie, Leiden: p. 254o
Depositophotos, San Francisco: p. 283

© Noordhoff Uitgevers bv

LEERBOEK | WISKUNDE B | VWO DEEL 1

Makkelijk

Je mag in dit boek schrijven, aantekeningen maken, markeren, onderstrepen, wat je maar wilt.

Compleet

Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving. Met bijvoorbeeld opdrachten, oefentoetsen, uitlegfilmpjes.

Flex

Direct feedback

Maak je de opdrachten online, dan zie je wat er al goed gaat. Of je verbetert je antwoord met de tip.

Op je eigen niveau

Online krijg je, op basis van je resultaten, opdrachten op jouw niveau: met extra hulp of uitdaging.

Noordhoff Uitgevers

MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189

www.modernewiskunde.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-57539-7
9 789001 575397