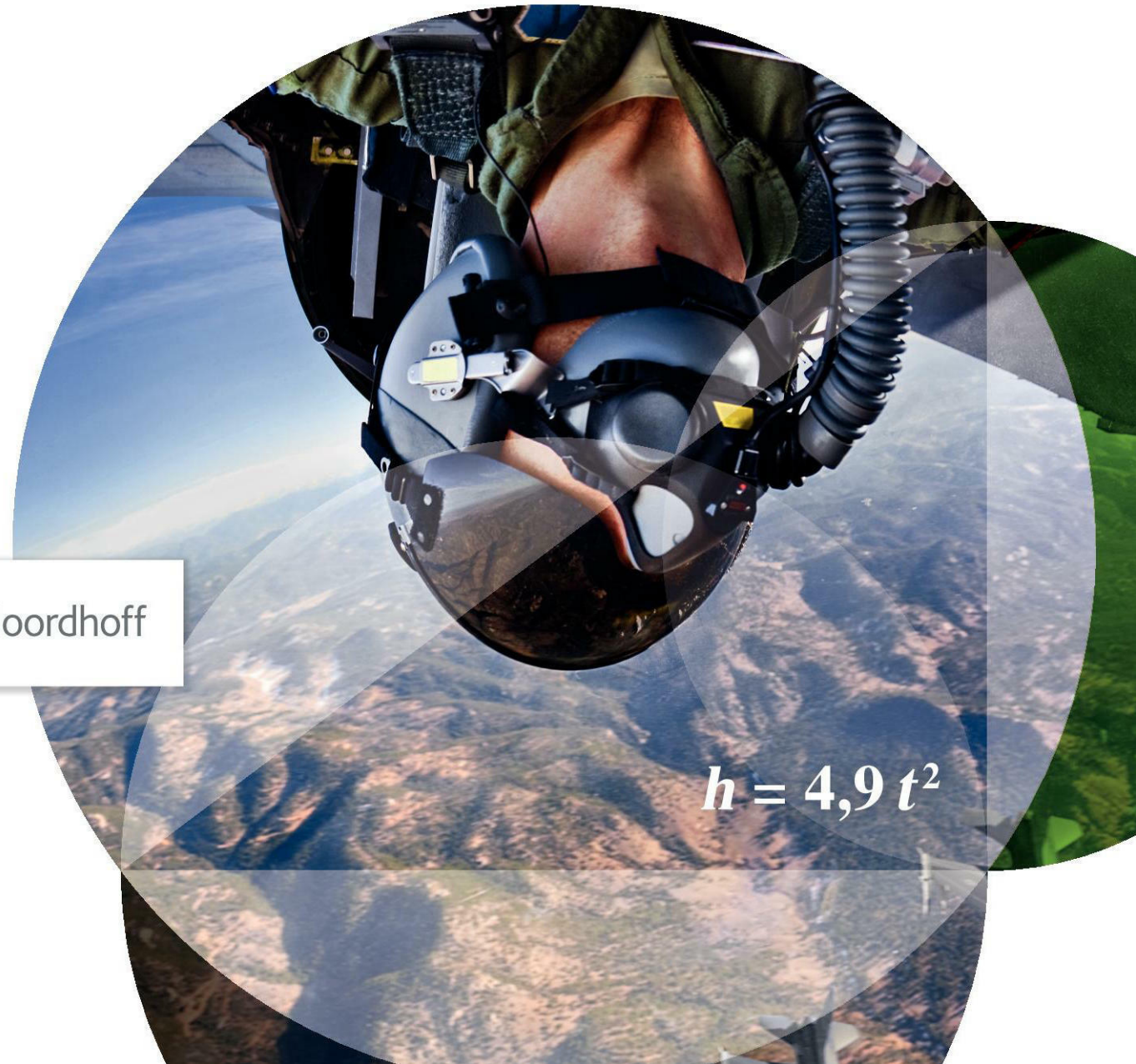
UITWERKINGEN | WISKUNDE | 12E EDITIE | VWO DEEL 1

MODERNE WISKUNDE B



Noordhoff

12e editie

Moderne Wiskunde

Uitwerkingen bij vwo B deel 1

Ontwerp omslag G2K Designers, Groningen/Amsterdam
Ontwerp binnenwerk Ebel Kuipers, Sappemeer
Technisch tekenwerk Integra Software services Pvt. Ltd., India

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontlenen.

Klimaatneutraal
Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.

MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189

0 / 20

© 2020 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsenauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-89256-2

12e editie

Moderne Wiskunde

Uitwerkingen bij vwo B deel 1

Bert Boon
Wim Doekes
Emile van der Eijk
Arjan Eikelboom
Jan Elemans
Ron Sinkeldam
Carolijn Tacken

Noordhoff

Inhoud

H1 Vergelijkingen 6
H2 Machtsfuncties 45

Vaardigheden 1 70

De grafische rekenmachine 73

H3 Functies en grafieken 76
H4 Lijnen 101

Vaardigheden 2 130

H5 Afgeleide functies 135
H6 Periodieke functies 165

Vaardigheden 3 186

Meer oefenen 193
Oefenproefwerken 217

© Noordhoff Uitgevers bv

1 Vergelijkingen

Voorkennis

V1 **a** $y = (x + 6)(x - 2)$
$y = x^2 - 2x + 6x - 12$
$y = x^2 + 4x - 12$

b $y = -3x\left(2 - \frac{3}{4}x\right)$
$y = -6x + \frac{9}{4}x^2$
$y = 2\frac{1}{4}x^2 - 6x$

c $y = 6x^2 - (3x - 2x^2)$
$y = 6x^2 - 3x + 2x^2$
$y = 8x^2 - 3x$

d $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x(x - 3)$
$y = \frac{1}{2}x^2 + 2x^2 - 6x$
$y = 2\frac{1}{2}x^2 - 6x$

V2 **a** $y = 3x(2x - 9) + 4x$
$y = 6x^2 - 27x + 4x$
$y = 6x^2 - 23x$

b $y = x(2 - x) + x \cdot \frac{1}{3}x$
$y = 2x - x^2 + \frac{1}{3}x^2$
$y = -\frac{2}{3}x^2 + 2x$

c $y = (3x + 6)(x - 2)$
$y = 3x^2 - 6x + 6x - 12$
$y = 3x^2 - 12$

d $y = \frac{1}{2}x\left(-\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\right) + x$
$y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{12}x + x$
$y = -\frac{1}{6}x^2 + 1\frac{1}{12}x$

e $y = (x^2 - 3x)^2 - x^2$
$y = x^4 - 3x^3 - 3x^3 + 9x^2 - x^2$
$y = x^4 - 6x^3 + 8x^2$

f $y = (1 - 2x)^2(x + 3)$
$y = (1 - 4x + 4x^2)(x + 3)$
$y = x + 3 - 4x^2 - 12x + 4x^3 + 12x^2$
$y = 4x^3 + 8x^2 - 11x + 3$

g $y = 3 - x(x - 6)^2$
$y = 3 - x(x^2 - 12x + 36)$
$y = 3 - x^3 + 12x^2 - 36x$
$y = -x^3 + 12x^2 - 36x + 3$

h $y = 2x + 3 - (x - 4)^2$
$y = 2x + 3 - (x^2 - 8x + 16)$
$y = 2x + 3 - x^2 + 8x - 16$
$y = -x^2 + 10x - 13$

V3 **a** $q = 15p^3 + 20p^2$
$q = 5p^2(3p + 4)$

b $p = -3q^2 - 27q$
$p = -3q(q + 9)$

c $q = p^2 - 25p - 150$
$q = (p - 30)(p + 5)$

d $h = 0{,}2t^2 - 0{,}6t^3$
$h = 0{,}2t^2(1 - 3t)$

e $b = -6a^6 + 21a^4$
$b = -3a^4(2a^2 - 7)$

f $h = t^2 - 100t + 900$
$h = (t - 90)(t - 10)$

g $h = p^2 + 6p + 9$
$h = (p + 3)(p + 3) = (p + 3)^2$

h $q = p^2 - 4$
$q = (p - 2)(p + 2)$

V4 **a** De richtingscoëfficiënt van lijn l is 5, dus de vergelijking wordt $y = 5x + b$.
De coördinaten van punt $(2, -3)$ invullen geeft $-3 = 5 \cdot 2 + b$ dus
$b = -3 - 10 = -13$.
Een vergelijking van lijn l is $y = 5x - 13$.

b De richtingscoëfficiënt $= \dfrac{\text{verticale toename}}{\text{horizontale toename}} = \dfrac{6 - -2}{1 - -7} = \dfrac{8}{8} = 1$.
De vergelijking wordt $y = x + b$.
De coördinaten van punt $(1, 6)$ invullen geeft $6 = 1 + b$ dus $b = 5$.
Een vergelijking van lijn l is $y = x + 5$.

c Lijn l en lijn m zijn evenwijdig dus de richtingscoëfficiënten zijn gelijk.
De coördinaten van punt $(3, 5)$ invullen in $y = -0{,}25x + b$ geeft
$5 = -0{,}25 \cdot 3 + b$, dus $b = 5 + 0{,}75 = 5{,}75$.
Een vergelijking van lijn l is $y = -0{,}25x + 5{,}75$.

© Noordhoff Uitgevers bv

V5 **a** $2x - 3 = -3x + 7$
$5x = 10$
$x = 2$

b $\frac{1}{2}x - 2 = 7 - \frac{1}{4}x$
$2x - 8 = 28 - x$
$3x = 36$
$x = 12$

c $6x + 1\frac{1}{5}x = 1\frac{1}{2}x + 9$
$60x + 12x = 15x + 90$
$57x = 90$
$x = \frac{90}{57} = 1\frac{33}{57} = 1\frac{11}{19}$

d $-2x + 23 = 45 - 22x$
$20x = 22$
$x = \frac{22}{20} = 1\frac{1}{10}$

V6 **a** $(x + 3)^2 = 81$
$x + 3 = 9$ of $x + 3 = -9$
$x = 6$ of $x = -12$

b $\frac{1}{x + 2} = 4$
$x + 2 = \frac{1}{4}$
$x = -1\frac{3}{4}$

c $\sqrt{x + 3} = 5$
$x + 3 = 25$
$x = 22$

d $\frac{28}{x - 2} = 7$
$x - 2 = 4$
$x = 6$

1.1 Lineaire vergelijkingen

intro De kaars is opgebrand als $12 - 0{,}2t = 0$ ofwel $60 - t = 0$, dus na 60 minuten.
De kaars is voor de helft opgebrand na 30 minuten.

1 **a** De haakjes zijn weggewerkt.
b Links en rechts van het = −teken wordt $2x$ opgeteld.
c $-5x + 30 = 10$
$-5x = -20$
$x = \frac{-20}{-5} = 4$
d $3 \times 4 + 5(6 - 2 \times 4) = 14 - 4\left(\frac{1}{2} \times 4 + 1\right)$
$12 + 5 \times -2 = 14 - 4 \times 3$
$12 - 10 = 14 - 12$
$2 = 2$, klopt.

2 **a** $8x - 4 = 3x + 7$
$5x - 4 = 7$
$5x = 11$
$x = \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}$

b $-12x + 6 = 3 - 5x$
$-7x + 6 = 3$
$-7x = -3$
$x = \frac{-3}{-7} = \frac{3}{7}$

c $\frac{1}{2}x - 5 = \frac{2}{3}x + 1$
$3x - 30 = 4x + 6$
$-x - 30 = 6$
$-x = 36$
$x = -36$

d $1\frac{3}{7}x + 1 = 2x - 3$
$10x + 7 = 14x - 21$
$-4x = -28$
$x = 7$

e $15 - (2x - 6) = 7x + 4$
$15 - 2x + 6 = 7x + 4$
$-2x + 21 = 7x + 4$
$-9x = -17$
$x = \frac{-17}{-9} = 1\frac{8}{9}$

f $9x = 6x - 5(2 - 3x)$
$9x = 6x - 10 + 15x$
$9x = 21x - 10$
$-12x = -10$
$x = \frac{-10}{-12} = \frac{5}{6}$

© Noordhoff Uitgevers bv

g $10 - (3 + 4x) = -7x + 1$
$10 - 3 - 4x = -7x + 1$
$7 - 4x = -7x + 1$
$3x = -6$
$x = -2$

h $\frac{3}{5}x + 1\frac{7}{10} = 1\frac{1}{5}x - \frac{3}{10}$
$6x + 17 = 12x - 3$
$-6x = -20$
$x = \frac{-20}{-6} = 3\frac{1}{3}$

3 **a** Het hellingsgetal is het getal dat voor de x staat, dus $-\frac{1}{2}$.

b Van (0, 4) naar (8, 0) is 8 naar rechts en 4 naar beneden oftewel 1 naar rechts en $\frac{1}{2}$ naar beneden.

c Van (0, −1) naar (4, 7) is 4 naar rechts en 8 naar boven oftewel 1 naar rechts en 2 naar boven. De richtingscoëfficiënt van lijn k is dus 2.

d Lijn k snijdt de y-as in het punt (0, −1), dus het startgetal van lijn k is −1. De richtingscoëfficiënt van lijn k is 2, dus $k : y = 2x - 1$.

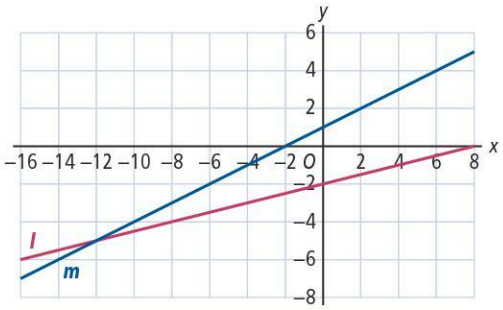
e $4 - \frac{1}{2}x = 2x - 1$
$8 - x = 4x - 2$
$-5x = -10$
$x = 2$ en $y = 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 4 - 1 = 3$
Het snijpunt van de lijnen l en k is (2, 3).

4 **a** $2x - 1 = 8 - 1\frac{1}{2}x$
$3\frac{1}{2}x = 9$
$7x = 18$
$x = \frac{18}{7} = 2\frac{4}{7}$

b Rechts van $x = 2\frac{4}{7}$ ligt lijn l hoger dan lijn m, dus voor $x > 2\frac{4}{7}$ geeft de formule van $y = 2x - 1$ een grotere uitkomst dan de formule $y = 8 - 1\frac{1}{2}x$.

5 $-\frac{1}{4}x + 8 = \frac{1}{2}x - 1$
$-x + 32 = 2x - 4$
$-3x = -36$
$x = 12$
Uit de grafieken blijkt dat $g(x) > f(x)$ voor $x > 12$.

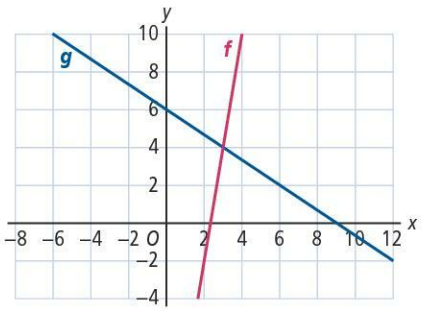
6 **a**



b $\frac{1}{4}x - 2 = \frac{1}{2}x + 1$
$x - 8 = 2x + 4$
$-x = 12$
$x = -12$
Uit de grafieken blijkt dat $\frac{1}{4}x - 2 < \frac{1}{2}x + 1$ als $x > -12$.

© Noordhoff Uitgevers bv

7 **a**



b $6x - 14 = -\frac{2}{3}x + 6$
$18x - 42 = -2x + 18$
$20x = 60$
$x = 3$
Uit de grafieken blijkt dat $f(x) \geq g(x)$ als $x \geq 3$.

O2 **a** De haakjes zijn weggewerkt.

b $7x = 21$
$x = 3$

c $9 - (x - 7) = 5x + 2$
$9 - x + 7 = 5x + 2$
$16 - x = 5x + 2$
$16 - 6x = 2$
$-6x = -14$
$x = \frac{-14}{-6} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$

d $-11x - 4 = 9 + 2x$
$-13x - 4 = 9$
$-13x = 13$
$x = -1$

e $2(3x - 4) = 5(4 - 3x)$
$6x - 8 = 20 - 15x$
$21x - 8 = 20$
$21x = 28$
$x = \frac{28}{21} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

f $-3x - 2(2x - 8) = 5x - 6$
$-3x - 4x + 16 = 5x - 6$
$-7x + 16 = 5x - 6$
$-12x + 16 = -6$
$-12x = -22$
$x = \frac{-22}{-12} = \frac{11}{6} = 1\frac{5}{6}$

g $0{,}2x - (4 - x) = 20$
$0{,}2x - 4 + x = 20$
$1{,}2x - 4 = 20$
$12x - 40 = 200$
$12x = 240$
$x = 20$

h $1\frac{1}{7}x - \frac{5}{14} = \frac{2}{7}x + 1\frac{3}{14}$
$\frac{8}{7}x - \frac{5}{14} = \frac{2}{7}x + \frac{17}{14}$
$16x - 5 = 4x + 17$
$12x - 5 = 17$
$12x = 22$
$x = \frac{22}{12} = \frac{11}{6} = 1\frac{5}{6}$

O5 **a** $4x - 2 = -\frac{3}{4}x + 7\frac{1}{2}$
$16x - 8 = -3x + 30$
$19x = 38$
$x = 2$

b Vanaf $x = 2$ ligt de grafiek van g lager dan de grafiek van f.

c $x \geq 2$

U1 **a** $y = 0$ invullen geeft $\frac{x}{3} + \frac{0}{5} = 1$, dus $\frac{x}{3} = 1$ ofwel $x = 3$.
Het snijpunt met de x-as is $(3, 0)$.
$x = 0$ invullen geeft $\frac{0}{3} + \frac{y}{5} = 1$, dus $\frac{y}{5} = 1$ ofwel $y = 5$.
Het snijpunt met de y-as is $(0, 5)$.

b $\frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = 1$

© Noordhoff Uitgevers bv

U2 **a** Vul de coördinaten van punt $S(3, 5)$ in beide vergelijkingen in.
Invullen in k geeft $a \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 7$ ofwel $5a + 6 = 7$.
Dit geeft $5a = 1$ dus $a = \frac{1}{5}$
Invullen in m geeft $6 \cdot 3 - 5 \cdot 5 = b \cdot 3$ ofwel $18 - 25 = 3b$.
Dit geeft $-7 = 3b$ dus $b = -\frac{7}{3} = -2\frac{1}{3}$

b $b = 14$ invullen geeft m: $6x - 5y = 14x$ ofwel $-5y = 8x$ dus $y = -\frac{8}{5}x$.
De vergelijking van k kun je herleiden tot $ay = -2x + 7$ ofwel $y = \frac{-2}{a}x + \frac{7}{a}$.
De lijnen snijden elkaar niet, dus k is evenwijdig met m en de richtingscoëfficiënten zijn daardoor gelijk: $-\frac{8}{5} = -\frac{2}{a}$
Links en recht vermenigvuldigen met $-5a$ geeft $8a = 10$, dus $a = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

c Als k lijnstuk AB in $A(4, 1)$ snijdt, geldt $a + 8 = 7$, dus $a = -1$.
Als k lijnstuk AB in $B(12, 3)$ snijdt, geldt $3a + 24 = 7$ ofwel $3a = -17$ en $a = -\frac{17}{3} = -5\frac{2}{3}$.
k zal lijnstuk AB tussen A en B snijden voor $-5\frac{2}{3} < a < -1$.

1.2 Kwadratische vergelijkingen

intro Op de grond geldt $h = 0$, dus $-5t^2 + 5t + 3 = 0$.
Oplossen met de abc-formule geeft $D = 5^2 - 4 \cdot -5 \cdot 3 = 85$.
$x = \frac{-5 - \sqrt{85}}{2 \cdot -5} \approx 1{,}42$ of $x = \frac{-5 + \sqrt{85}}{2 \cdot -5} \approx -0{,}42$ (hier geen betekenis).
De bal komt op de grond na ongeveer 1,42 seconden.

8 **a** $(x - 3)(2x - 10) = 0$
$x - 3 = 0$ of $2x - 10 = 0$
$x = 3$ of $2x = 10$
$x = 3$ of $x = 5$

b $(p - 10)(p + 3) = 0$
$p - 10 = 0$ of $p + 3 = 0$
$p = 10$ of $p = -3$

c Deze vergelijking is niet te ontbinden in factoren, omdat er niet twee gehele getallen zijn te vinden met product -13 en som 7.

d $4a^2 + 24a = 0$
$4a(a + 6) = 0$
$4a = 0$ of $a + 6 = 0$
$a = 0$ of $a = -6$

9 **a** $x^2 - x - 16 = -4$
$x^2 - x - 12 = 0$
$(x - 4)(x + 3) = 0$
$x - 4 = 0$ of $x + 3 = 0$
$x = 4$ of $x = -3$

b $x(x - 1) = 4x$
$x^2 - x = 4x$
$x^2 - 5x = 0$
$x(x - 5) = 0$
$x = 0$ of $x - 5 = 0$
$x = 0$ of $x = 5$

© Noordhoff Uitgevers bv

c $q^2 - 50q = 5000$
$q^2 - 50q - 5000 = 0$
$(q - 100)(q + 50) = 0$
$q - 100 = 0$ of $q + 50 = 0$
$q = 100$ of $q = -50$

d $8a^2 + 15 = 47$
$8a^2 = 32$
$a^2 = 4$
$a = -2$ of $a = 2$

e $2t^2 - 10t + 12 = 0$
$t^2 - 5t + 6 = 0$
$(t - 2)(t - 3) = 0$
$t - 2 = 0$ of $t - 3 = 0$
$t = 2$ of $t = 3$

f $(a + 7)(a - 1) = 20$
$a^2 - a + 7a - 7 = 20$
$a^2 + 6a - 27 = 0$
$(a + 9)(a - 3) = 0$
$a + 9 = 0$ of $a - 3 = 0$
$a = -9$ of $a = 3$

g $5x^2 - x = 4$
$5x^2 - x - 4 = 0$
$D = (-1)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -4 = 1 + 80 = 81$
$x = \frac{1 + \sqrt{81}}{10} = 1$ of
$x = \frac{1 - \sqrt{81}}{10} = -\frac{4}{5}$

h $(4x + 2)^2 = (5 - 2x)^2$
$16x^2 + 16x + 4 = 25 - 20x + 4x^2$
$12x^2 + 36x - 21 = 0$
$4x^2 + 12x - 7 = 0$
$D = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot -7 = 256$
$x = \frac{-12 - \sqrt{256}}{2 \cdot 4} = -3\frac{1}{2}$ of
$x = \frac{-12 + \sqrt{256}}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}$

10 **a** $(3x + 4)^2 = 25$
$3x + 4 = 5$ of $3x + 4 = -5$
$3x = 1$ of $3x = -9$
$x = \frac{1}{3}$ of $x = -3$

b $x + 5 = -3x$

11 **a** $(x - 8)^2 = 9$
$x - 8 = 3$ of $x - 8 = -3$
$x = 11$ of $x = 5$

b $(7a + 8)^2 = (a + 8)^2$
$7a + 8 = a + 8$ of $7a + 8 = -(a + 8)$
$6a = 0$ of $7a + 8 = -a - 8$
$a = 0$ of $8a = -16$
$a = 0$ of $a = -2$

c $(4 - p)^2 = (5p + 16)^2$
$4 - p = 5p + 16$ of
$4 - p = -(5p + 16)$
$-6p = 12$ of $4 - p = -5p - 16$
$p = -2$ of $4p = -20$
$p = -2$ of $p = -5$

d $(5x + 6)^2 = x^2$
$5x + 6 = x$ of $5x + 6 = -x$
$4x = -6$ of $6x = -6$
$x = -1\frac{1}{2}$ of $x = -1$

e $9p^2 = (12 - p)^2$
$(3p)^2 = (12 - p)^2$
$3p = 12 - p$ of $3p = -(12 - p)$
$4p = 12$ of $3p = -12 + p$
$p = 3$ of $2p = -12$
$p = 3$ of $p = -6$

f $(x^2 - 5x)^2 = 36$
$x^2 - 5x = 6$ of $x^2 - 5x = -6$
$x^2 - 5x - 6 = 0$ of $x^2 - 5x + 6 = 0$
$(x + 1)(x - 6) = 0$ of
$(x - 2)(x - 3) = 0$
$x = -1$ of $x = 6$ of $x = 2$ of $x = 3$

12 **a** $x = 7$ is een oplossing, want als je $x = 7$ invult, krijg je
$4 \cdot 7(7 - 7) = 5(7 - 7)$
$28 \cdot 0 = 5 \cdot 0$
$0 = 0$ en dat klopt.

b $4x = 5$ ofwel $x = 1\frac{1}{4}$

© Noordhoff Uitgevers bv

13 **a** $(2x - 5)(x + 4) = 7(x + 4)$
$x + 4 = 0$ of $2x - 5 = 7$
$x = -4$ of $2x = 12$
$x = -4$ of $x = 6$

b $(5t + 3)(t^2 - 4) = 5(5t + 3)$
$5t + 3 = 0$ of $t^2 - 4 = 5$
$5t = -3$ of $t^2 = 9$
$t = -\frac{3}{5}$ of $t = -3$ of $t = 3$

c $x(2x - 9) = 7x^2$
$x(2x - 9) = 7x \cdot x$
$x = 0$ of $2x - 9 = 7x$
$x = 0$ of $-5x = 9$
$x = 0$ of $x = -1\frac{4}{5}$

d $(2x + 7)(x - 5) = (x - 5)^2$
$x - 5 = 0$ of $2x + 7 = x - 5$
$x = 5$ of $x = -12$

14 **a** $(x - 4)^2 = (5x + 6)^2$
$x - 4 = 5x + 6$ of $x - 4 = -(5x + 6)$
$-4x = 10$ of $x - 4 = -5x - 6$
$x = -2\frac{1}{2}$ of $6x = -2$
$x = -2\frac{1}{2}$ of $x = -\frac{1}{3}$

b $(t + 3)(t - 1) = 32$
$t^2 - t + 3t - 3 = 32$
$t^2 + 2t - 35 = 0$
$(t + 7)(t - 5) = 0$
$t = -7$ of $t = 5$

c $(t + 3)(t - 4) = 2t(t + 3)$
$t + 3 = 0$ of $t - 4 = 2t$
$t = -3$ of $t = -4$

d $8x^2 - 2x = 1$
$8x^2 - 2x - 1 = 0$
$D = (-2)^2 - 4 \cdot 8 \cdot -1 = 4 + 32 = 36$
$x = \frac{2 + 6}{16} = \frac{1}{2}$ of $x = \frac{2 - 6}{16} = -\frac{1}{4}$

e $(x - 6)^2 + 6 = 22$
$(x - 6)^2 = 16$
$x - 6 = 4$ of $x - 6 = -4$
$x = 10$ of $x = 2$

f $x^2 = 7x$
$x^2 - 7x = 0$
$x(x - 7) = 0$
$x = 0$ of $x = 7$

15 **a** $f(x) = 0$ geeft $(x - 5)(2x + 3) = 0$.
$x - 5 = 0$ of $2x + 3 = 0$
$x = 5$ of $x = -1\frac{1}{2}$
Uit de grafiek blijkt dat $f(x) \geq 0$ als $x \leq -1\frac{1}{2}$ of $x \geq 5$.

b $g(x) = 49$ geeft $(x - 5)^2 = 49$.
$x - 5 = 7$ of $x - 5 = -7$
$x = 12$ of $x = -2$
Uit de grafiek blijkt dat $g(x) < 49$ als $-2 < x < 12$.

c $g(x) = f(x)$ geeft $(x - 5)^2 = (x - 5)(2x + 3)$.
$x - 5 = 0$ of $2x + 3 = x - 5$
$x = 5$ of $x = -8$
Uit de grafieken blijkt dat $g(x) \geq f(x)$ als $-8 \leq x \leq 5$.

d $f(x) = 3 \cdot g(x)$ geeft $(x - 5)(2x + 3) = 3(x - 5)^2$.
$x - 5 = 0$ of $2x + 3 = 3(x - 5)$
$x = 5$ of $2x + 3 = 3x - 15$
$x = 5$ of $-x = -18$
$x = 5$ of $x = 18$

O11 **a** $8q = 3$ of $6q = -3$
$q = \frac{3}{8}$ of $q = -\frac{1}{2}$

b $(6a - 3)^2 = (a + 3)^2$
$6a - 3 = a + 3$ of
$6a - 3 = -a - 3$
$5a = 6$ of $7a = 0$
$a = 1\frac{1}{5}$ of $a = 0$

c $(x - 4)^2 = 5^2$
$x - 4 = 5$ of $x - 4 = -5$
$x = 9$ of $x = -1$

d $(2b - 3)^2 = b^2$
$2b - 3 = b$ of $2b - 3 = -b$
$b = 3$ of $3b = 3$
$b = 3$ of $b = 1$

© Noordhoff Uitgevers bv

e $(x-6)^2 = 49$
$x - 6 = 7$ of $x - 6 = -7$
$x = 13$ of $x = -1$

f $(2-3p)^2 = (4p-12)^2$
$2 - 3p = 4p - 12$ of
$2 - 3p = -4p + 12$
$-7p = -14$ of $p = 10$
$p = 2$ of $p = 10$

g $16(x-2)^2 = (2x-1)^2$
$4(x-2) = 2x - 1$ of
$4(x-2) = -2x + 1$
$4x - 8 = 2x - 1$ of
$4x - 8 = -2x + 1$
$2x = 7$ of $6x = 9$
$x = 3\frac{1}{2}$ of $x = 1\frac{1}{2}$

O13 **a** $2t - 7 = 0$ of $t^2 - 2 = 7$
$t = 3\frac{1}{2}$ of $t^2 = 9$
$t = 3\frac{1}{2}$ of $t = -3$ of $t = 3$

b $(x+3)(x-4) = 2x(x+3)$
$x + 3 = 0$ of $x - 4 = 2x$
$x = -3$ of $-x = 4$
$x = -3$ of $x = -4$

c $x(5x-16) = 4x^2$
$x = 0$ of $5x - 16 = 4x$
$x = 0$ of $x = 16$

d $(2x-4)(x+5) = 8(x+5)$
$x + 5 = 0$ of $2x - 4 = 8$
$x = -5$ of $2x = 12$
$x = -5$ of $x = 6$

e $(3x+5)(x+3) = (x+3)^2$
$x + 3 = 0$ of $3x + 5 = x + 3$
$x = -3$ of $2x = -2$
$x = -3$ of $x = -1$

U3 De coördinaten van de snijpunten met de horizontale as bereken je door $f(x) = 0$ te stellen, dus $x^2 - 4x + c = 0$.
$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 16 - 4c$
Minstens één snijpunt betekent $D \geq 0$, dus $16 - 4c \geq 0$ ofwel $c \leq 4$.
Voor $c = 4$ krijg je $f(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$.
De grafiek hiervan is een parabool met één snijpunt met de x-as, $(2, 0)$.
Als c kleiner wordt verschuift de parabool verticaal naar beneden. De lijn $x = 2$ blijft de symmetrie-as.
Het linker snijpunt met de x-as zal dan eerder links van $x = 1$ komen te liggen dan het rechter snijpunt met de x-as rechts van $x = 6$ komt te liggen.
Als het rechter snijpunt $(6, 0)$ is, dan is het linker snijpunt $(-2, 0)$.
$f(6) = 0$ geeft $6^2 - 4 \cdot 6 + c = 0$ ofwel $36 - 24 + c = 0$, dus $c = -12$.
Conclusie: $-12 < c \leq 4$.

U4 **a** Er is één oplossing als $D = 0$, dus $(3a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2a + 5) = 0$.
$9a^2 - 8a - 20 = 0$.
De discriminant van deze vergelijking is $(-8)^2 - 4 \cdot 9 \cdot -20 = 784$.

$$a = \frac{8 - \sqrt{784}}{2 \cdot 9} = -1\tfrac{1}{9} \text{ of } a = \frac{8 + \sqrt{784}}{2 \cdot 9} = 2.$$

© Noordhoff Uitgevers bv

b $x = 5$ is een oplossing, dus $5^2 - 4 \cdot a \cdot 5 + 4a^2 - 4 = 0$.
$25 - 20a + 4a^2 - 4 = 0$
$4a^2 - 20a + 21 = 0$
$D = (-20)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 21 = 64$
$a = \frac{20 - \sqrt{64}}{2 \cdot 4} = 1\frac{1}{2}$ of $a = \frac{20 + \sqrt{64}}{2 \cdot 4} = 3\frac{1}{2}$
$a = 3\frac{1}{2}$ geeft $x^2 - 14x + 45 = 0$ ofwel $(x - 5)(x - 9) = 0$, dus $x = 5$ of $x = 9$.
$a = 1\frac{1}{2}$ geeft $x^2 - 6x + 5 = 0$ ofwel $(x - 5)(x - 1) = 0$, dus $x = 5$ of $x = 1$.

1.3 Wortelvergelijkingen

intro De grafieken lijken elkaar te snijden bij $x = 2$.
Controle: $f(2) = \sqrt{2 + 4} = \sqrt{6}$ en $g(2) = \sqrt{10 - 2 \cdot 2} = \sqrt{6}$, klopt.
Het randpunt van de grafiek van f is $(-4, 0)$.
$f(x) < g(x)$ als $-4 \leq x < 2$.

16 **a** De wortel van een negatief getal bestaat niet.
b $2x - 5 \geq 0$, $2x \geq 5$ dus $x \geq 2\frac{1}{2}$
c $2x - 5 = 4$
$2x = 9$
$x = 4\frac{1}{2}$
d De wortel uit een getal is nooit negatief.
e $\sqrt{6 - \frac{1}{2}x} = 3\frac{1}{2}$
$6 - \frac{1}{2}x = \left(3\frac{1}{2}\right)^2$
$6 - \frac{1}{2}x = 12\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{2}x = 6\frac{1}{4}$
$x = -12\frac{1}{2}$

17 **a** $\sqrt{x} - 5 = 7$
$\sqrt{x} = 12$
$x = 144$

b $2 + \sqrt{3p} - 5 = 11$
$\sqrt{3p} = 14$
$3p = 196$
$p = 65\frac{1}{3}$

c $\sqrt{6 - \frac{1}{2}x^2} = \sqrt{3}$
$6 - \frac{1}{2}x^2 = 3$
$-\frac{1}{2}x^2 = -3$
$x^2 = 6$
$x = \sqrt{6}$ of $x = -\sqrt{6}$

d $5 - \sqrt{6 - 3x} = 2\frac{1}{2}$
$\sqrt{6 - 3x} = 2\frac{1}{2}$
$6 - 3x = 6\frac{1}{4}$
$-3x = \frac{1}{4}$
$x = -\frac{1}{12}$

e $\sqrt{\frac{1}{3}p - 5} = \sqrt{11}$
$\frac{1}{3}p - 5 = 11$
$\frac{1}{3}p = 16$
$p = 48$

f $\sqrt{x^2 - 2x + 6} = 3$
$x^2 - 2x + 6 = 9$
$x^2 - 2x - 3 = 0$
$(x - 3)(x + 1) = 0$
$x - 3 = 0$ of $x + 1 = 0$
$x = 3$ of $x = -1$

© Noordhoff Uitgevers bv

18 **a** In stap 1 is links en rechts x afgetrokken.
In stap 2 is links en rechts gekwadrateerd.

b $x = (2 - x)^2$
$x = 4 - 4x + x^2$
$x^2 - 5x + 4 = 0$
$(x - 4)(x - 1) = 0$
$x = 4$ of $x = 1$
Controle: $x = 4$ invullen geeft $4 + \sqrt{4} = 2$, dit klopt niet.
$x = 1$ invullen geeft $1 + \sqrt{1} = 2$, dit klopt wel.

c De oplossing is $x = 1$.

19 **a** $9 + 3\sqrt{x} = 17$
$3\sqrt{x} = 8$
$\sqrt{x} = \frac{8}{3}$
$x = \left(\frac{8}{3}\right)^2$
$x = \frac{64}{9} = 7\frac{1}{9}$

b Bart heeft niet door 3 gedeeld, maar links en rechts gekwadrateerd.
$9x = 64$, $x = \frac{64}{9} = 7\frac{1}{9}$

20 **a** $2 + \sqrt{x + 10} = x$
$\sqrt{x + 10} = x - 2$
$x + 10 = (x - 2)^2$
$x + 10 = x^2 - 4x + 4$
$x^2 - 5x - 6 = 0$
$(x - 6)(x + 1) = 0$
$x = 6$ of $x = -1$
$x = 6$ invullen geeft $2 + \sqrt{6 + 10} = 6$ ofwel $2 + \sqrt{16} = 6$, klopt.
$x = -1$ invullen geeft $2 + \sqrt{-1 + 10} = -1$ ofwel $2 + \sqrt{9} = -1$, klopt niet.
De oplossing is $x = 6$.

b $x + \sqrt{2x + 4} = 10$
$\sqrt{2x + 4} = 10 - x$
$2x + 4 = (10 - x)^2$
$2x + 4 = 100 - 20x + x^2$
$x^2 - 22x + 96 = 0$
$(x - 16)(x - 6) = 0$
$x - 16 = 0$ of $x - 6 = 0$
$x = 16$ of $x = 6$
$x = 16$ invullen geeft $16 + \sqrt{2 \cdot 16 + 4} = 10$ ofwel $16 + \sqrt{36} = 10$, klopt niet.
$x = 6$ invullen geeft $6 + \sqrt{2 \cdot 6 + 4} = 10$ ofwel $6 + \sqrt{16} = 10$, klopt.
De oplossing is $x = 6$.

c $2\sqrt{1 - x} = x + 2$
$4(1 - x) = (x + 2)^2$
$4 - 4x = x^2 + 4x + 4$
$x^2 + 8x = 0$
$x(x + 8) = 0$
$x = 0$ of $x = -8$
$x = 0$ invullen geeft $2\sqrt{1 - 0} = 0 + 2$ ofwel $2\sqrt{1} = 2$, klopt.
$x = -8$ invullen geeft $2\sqrt{1 - -8} = -8 + 2$ ofwel $2\sqrt{9} = -6$, klopt niet.
De oplossing is $x = 0$.

© Noordhoff Uitgevers bv

d $\sqrt{x} \cdot \sqrt{8 - \frac{1}{2}x} = 2x$

$\sqrt{x\left(8 - \frac{1}{2}x\right)} = 2x$

$x \cdot (8 - \frac{1}{2}x) = 4x^2$

$8x - \frac{1}{2}x^2 = 4x^2$

$4\frac{1}{2}x^2 - 8x = 0$

$x\left(4\frac{1}{2}x - 8\right) = 0$

$x = 0$ of $4\frac{1}{2}x - 8 = 0$

$x = 0$ of $x = \dfrac{8}{4\frac{1}{2}} = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}$

$x = 0$ invullen geeft $\sqrt{0} \cdot \sqrt{8 - \frac{1}{2} \cdot 0} = 2 \cdot 0$ ofwel $\sqrt{0} \cdot \sqrt{8} = 0$, klopt.

$x = 1\frac{7}{9}$ invullen geeft $\sqrt{\frac{16}{9}} \cdot \sqrt{8 - \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{9}} = 2 \cdot \frac{16}{9}$ ofwel $\frac{4}{3} \cdot \sqrt{8 - \frac{8}{9}} = \frac{32}{9}$

ofwel $\frac{4}{3} \cdot \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{32}{9}$ en $\frac{4}{3} \cdot \frac{8}{3} = \frac{32}{9}$, klopt.

De oplossing is $x = 0$ of $x = 1\frac{7}{9}$

e $\sqrt{2x^2 - x} + 2 - 3x = 0$

$\sqrt{2x^2 - x} = 3x - 2$

$2x^2 - x = (3x - 2)^2$

$2x^2 - x = 9x^2 - 12x + 4$

$7x^2 - 11x + 4 = 0$

$D = (-11)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 4 = 121 - 112 = 9$

$x = \dfrac{11 + \sqrt{9}}{2 \cdot 7} = 1$ of $x = \dfrac{11 - \sqrt{9}}{2 \cdot 7} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$

$x = 1$ invullen geeft $\sqrt{2 \cdot 1^2 - 1} + 2 - 3 \cdot 1 = 0$ ofwel $\sqrt{1} + 2 - 3 = 0$, klopt.

$x = \frac{4}{7}$ invullen geeft $\sqrt{2 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^2 - \frac{4}{7}} + 2 - 3 \cdot \frac{4}{7} = 0$ ofwel $\sqrt{2 \cdot \frac{16}{49} - \frac{4}{7}} + 2 - \frac{12}{7} = 0$

ofwel $\sqrt{\frac{4}{49}} + 2 - \frac{12}{7} = 0$ en $\frac{2}{7} + 2 - 1\frac{5}{7} = 0$, klopt niet.

De oplossing is $x = 1$.

f $\sqrt{1 - 3x} \cdot \sqrt{6x + 1} = 0$

$\sqrt{1 - 3x} = 0$ of $\sqrt{6x + 1} = 0$

$1 - 3x = 0$ of $6x + 1 = 0$

$-3x = -1$ of $6x = -1$

$x = \frac{1}{3}$ of $x = -\frac{1}{6}$

$x = \frac{1}{3}$ invullen geeft $\sqrt{1 - 3 \cdot \frac{1}{3}} \cdot \sqrt{6 \cdot \frac{1}{3} + 1} = 0$ ofwel $\sqrt{1 - 1} \cdot \sqrt{2 + 1} = 0$, klopt.

$x = -\frac{1}{6}$ invullen geeft $\sqrt{1 - 3 \cdot -\frac{1}{6}} \cdot \sqrt{6 \cdot -\frac{1}{6} + 1} = 0$ ofwel $\sqrt{1 + \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{-1 + 1} = 0$, klopt.

De oplossing is $x = \frac{1}{3}$ of $x = -\frac{1}{6}$

21 **a** Uit $\frac{1}{2}x - 1 \geq 0$ volgt $x \geq 2$.

b $\sqrt{\frac{1}{2}x - 1} = 3$

$\frac{1}{2}x - 1 = 9$

$\frac{1}{2}x = 10$

$x = 20$

c $x = 0$ is geen oplossing, want $\sqrt{\frac{1}{2} \cdot 0 - 1} = \sqrt{-1}$ en die bestaat niet.

d Hij gebruikt het getal 2, omdat $\sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2 - 1} = \sqrt{0} = 0$ en dit is kleiner dan 3, dus $x = 2$ is een oplossing van de ongelijkheid $\sqrt{\frac{1}{2}x - 1} < 3$.

© Noordhoff Uitgevers bv

22 **a** f heeft alleen functiewaarden voor $x \le 6$.

Eerst de vergelijking oplossen.

$\sqrt{6-x} = \sqrt{x^2+4}$

$6 - x = x^2 + 4$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x+2)(x-1) = 0$

$x + 2 = 0$ of $x - 1 = 0$

$x = -2$ of $x = 1$

$x = -2$ invullen geeft $\sqrt{6--2} = \sqrt{(-2)^2+4}$, klopt.

$x = 1$ invullen geeft $\sqrt{6-1} = \sqrt{1^2+4}$, klopt.

De oplossing is $x = -2$ of $x = 1$.

Uit de grafieken blijkt dat $f(x) \le g(x)$ als $x \le -2$ of $1 \le x \le 6$.

b Eerst de vergelijking oplossen.

$\sqrt{6-x} = -x + 4$

$6 - x = (-x+4)^2$

$6 - x = x^2 - 8x + 16$

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$(x-2)(x-5) = 0$

$x = 2$ of $x = 5$

$x = 2$ invullen geeft $\sqrt{6-2} = -2 + 4$, klopt.

$x = 5$ invullen geeft $\sqrt{6-5} = -5 + 4$, klopt niet.

Uit de grafieken blijkt dat $f(x) < h(x)$ als $x < 2$.

c Eerst de vergelijking oplossen.

$2x - \frac{1}{2} = \sqrt{x^2+4}$

$4x^2 - 2x + \frac{1}{4} = x^2 + 4$

$3x^2 - 2x - 3\frac{3}{4} = 0$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -3\frac{3}{4} = 4 + 45 = 49$

$x = \frac{2+\sqrt{49}}{2 \cdot 3} = \frac{9}{6} = 1\frac{1}{2}$ of $x = \frac{2-\sqrt{49}}{2 \cdot 3} = \frac{-5}{6} = -\frac{5}{6}$

$x = 1\frac{1}{2}$ invullen geeft $2 \cdot 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \sqrt{\left(1\frac{1}{2}\right)^2+4}$ ofwel $2\frac{1}{2} = \sqrt{6\frac{1}{4}}$, klopt.

$x = -\frac{5}{6}$ invullen geeft $2 \cdot -\frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2+4}$ ofwel $-2\frac{1}{6} = \sqrt{4\frac{25}{36}}$, klopt niet.

De oplossing is $x = 1\frac{1}{2}$

Uit de grafieken blijkt dat $h(x) \ge g(x)$ als $x \ge 1\frac{1}{2}$

017 **a** Er is een bordje gelegd op $\sqrt{2-p}$.

b Er is aan beide kanten gekwadrateerd.

c $2 - p = 4$

$p = -2$

d $\sqrt{x-17} = 5$

$x - 17 = 25$

$x = 42$

e $1 + \sqrt{5q-4} = 7$

$\sqrt{5q-4} = 6$

$5q - 4 = 36$

$5q = 40$

$q = 8$

f $\sqrt{7 - \frac{1}{4}x^2} = \sqrt{5}$

$7 - \frac{1}{4}x^2 = 5$

$\frac{1}{4}x^2 = 2$

$x^2 = 8$

$x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ of $x = -2\sqrt{2}$

© Noordhoff Uitgevers bv

g $\sqrt{\frac{1}{7}q - 4} = \sqrt{8}$

$\frac{1}{7}q - 4 = 8$

$\frac{1}{7}q = 12$

$q = 84$

h $\sqrt{a} - 3 = 2$

$\sqrt{a} = 5$

$a = 25$

i $1 + \sqrt{2x - 3} = 8$

$\sqrt{2x - 3} = 7$

$2x - 3 = 49$

$2x = 52$

$x = 26$

O20 **a** Er staan haakjes, omdat je de hele vorm moet kwadrateren.

b $2x + 3 = 36 - 12x + x^2$

$x^2 - 14x + 33 = 0$

$(x - 3)(x - 11) = 0$

$x = 3$ of $x = 11$

$x = 3$ invullen geeft $3 + \sqrt{2 \cdot 3 + 3} = 6$ ofwel $3 + \sqrt{9} = 6$, klopt.

$x = 11$ invullen geeft $11 + \sqrt{2 \cdot 11 + 3} = 6$ ofwel $11 + \sqrt{25} = 6$, klopt niet.

De oplossing is $x = 3$.

c $\sqrt{4x^2 - 3} + 2x = 3$

$\sqrt{4x^2 - 3} = 3 - 2x$

$4x^2 - 3 = (3 - 2x)^2$

$4x^2 - 3 = 9 - 12x + 4x^2$

$12x = 12$

$x = 1$

$x = 1$ invullen geeft $\sqrt{4 \cdot 1^2 - 3} + 2 \cdot 1 = 3$ ofwel $\sqrt{1} + 2 = 3$, klopt.

De oplossing is $x = 1$.

d $\sqrt{x\left(2 - \frac{1}{3}x\right)} = x$

$x\left(2 - \frac{1}{3}x\right) = x^2$

$2x - \frac{1}{3}x^2 = x^2$

$6x - x^2 = 3x^2$

$4x^2 - 6x = 0$

$4x\left(x - 1\frac{1}{2}\right) = 0$

$x = 0$ of $x = 1\frac{1}{2}$

$x = 0$ invullen geeft $\sqrt{0 \cdot \left(2 - \frac{1}{3} \cdot 0\right)} = 0$ ofwel $\sqrt{0} = 0$, klopt.

$x = 1\frac{1}{2}$ invullen geeft $\sqrt{1\frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{2}\right)} = 1\frac{1}{2}$ ofwel $\sqrt{1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2}$, klopt.

De oplossing is $x = 0$ of $x = 1\frac{1}{2}$

e $3\sqrt{1 - x} = 1\frac{1}{2}x + 3$

$\sqrt{1 - x} = \frac{1}{2}x + 1$

$1 - x = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$

$\frac{1}{4}x^2 + 2x = 0$

$\frac{1}{4}x(x + 8) = 0$

$x = 0$ of $x = -8$

$x = 0$ invullen geeft $3\sqrt{1 - 0} = 1\frac{1}{2} \cdot 0 + 3$ ofwel $3\sqrt{1} = 3$, klopt.

$x = -8$ invullen geeft $3\sqrt{1 - -8} = 1\frac{1}{2} \cdot -8 + 3$ ofwel $3\sqrt{9} = -12 + 3$, klopt niet.

De oplossing is $x = 0$.

© Noordhoff Uitgevers bv

f $3 + \sqrt{x+17} = x$
$\sqrt{x+17} = x - 3$
$x + 17 = (x-3)^2$
$x + 17 = x^2 - 6x + 9$
$x^2 - 7x - 8 = 0$
$(x+1)(x-8) = 0$
$x = -1$ of $x = 8$
$x = -1$ invullen geeft $3 + \sqrt{-1+17} = -1$ ofwel $3 + \sqrt{16} = -1$, klopt niet.
$x = 8$ invullen geeft $3 + \sqrt{8+17} = 8$ ofwel $3 + \sqrt{25} = 8$, klopt.
De oplossing is $x = 8$.

g $\sqrt{6x+2} \cdot \sqrt{3x-2} = 0$
$6x + 2 = 0$ of $3x - 2 = 0$
$6x = -2$ of $3x = 2$
$x = -\frac{1}{3}$ of $x = \frac{2}{3}$
$x = -\frac{1}{3}$ invullen geeft $\sqrt{6 \cdot -\frac{1}{3} + 2} \cdot \sqrt{3 \cdot -\frac{1}{3} - 2} = 0$ ofwel $\sqrt{0} \cdot \sqrt{-3} = 0$, klopt niet.
$x = \frac{2}{3}$ invullen geeft $\sqrt{6 \cdot \frac{2}{3} + 2} \cdot \sqrt{3 \cdot \frac{2}{3} - 2} = 0$ ofwel $\sqrt{6} \cdot \sqrt{0} = 0$, klopt.
De oplossing is $x = \frac{2}{3}$

U5 **a** $\sqrt{10 - 2\sqrt{x}} = 2$
$10 - 2\sqrt{x} = 4$
$\sqrt{x} = 3$
$x = 9$

b $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 2$
$\sqrt{x+1} = 2 - \sqrt{x}$
$x + 1 = 4 - 4\sqrt{x} + x$
$4\sqrt{x} = 3$
$\sqrt{x} = \frac{3}{4}$
$x = \frac{9}{16}$

c $\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = 3$
$x + 2 = 3\sqrt{x}$
$(x+2)^2 = 9x$
$x^2 + 4x + 4 = 9x$
$x^2 - 5x + 4 = 0$
$(x-1)(x-4) = 0$
$x = 1$ of $x = 4$, beide oplossingen voldoen.

d $\frac{6}{\sqrt{x+4}} = \sqrt{9-x}$
$\frac{36}{x+4} = 9 - x$
$36 = (x+4)(9-x)$
$36 = -x^2 + 5x + 36$
$x^2 - 5x = 0$
$x(x-5) = 0$
$x = 0$ of $x = 5$, beide oplossingen voldoen.

© Noordhoff Uitgevers bv

e $\sqrt{x} + 2\sqrt{x-4} = \sqrt{9x}$
$\sqrt{x} + 2\sqrt{x-4} = 3\sqrt{x}$
$2\sqrt{x-4} = 2\sqrt{x}$
$4(x-4) = 4x$
$4x - 16 = 4x$
$-16 = 0$, dit is niet waar dus deze vergelijking heeft geen oplossing.

1.4 Gebroken vergelijkingen

intro $f(x) = 1$ heeft geen oplossing, omdat de teller x altijd groter is dan de noemer $x - 4$.
Voor $x = 4$ bestaat de functie niet.

23 **a** Als $x = 5$, want dan is de noemer nul en delen door nul is onmogelijk.

b $3x - 15 = 12$
$3x = 27$
$x = 9$

c $\frac{120}{3x-15} = 6$
$3x - 15 = 20$
$3x = 35$
$x = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}$

$\frac{120}{3x-15} = 15$
$3x - 15 = 8$
$3x = 23$
$x = \frac{23}{3} = 7\frac{2}{3}$

24 **a** $\frac{18}{7x+2} = 3$
$7x + 2 = 6$
$7x = 4$
$x = \frac{4}{7}$

b $\frac{-35}{10-3m} = 5$
$10 - 3m = -7$
$-3m = -17$
$m = \frac{-17}{-3} = 5\frac{2}{3}$

c $\frac{56}{x^2+3} = 7$
$x^2 + 3 = 8$
$x^2 = 5$
$x = -\sqrt{5}$ of $x = \sqrt{5}$

d $\frac{125}{6p-3} = -25$
$6p - 3 = -5$
$6p = -2$
$p = -\frac{1}{3}$

e $\frac{30}{16-2q^2} - 2\frac{1}{2} = 5$
$\frac{30}{16-2q^2} = 7\frac{1}{2}$
$16 - 2q^2 = 4$
$2q^2 = 12$
$q^2 = 6$
$q = -\sqrt{6}$ of $q = \sqrt{6}$

f $\frac{-45}{5t+3} + 1 = 10$
$\frac{-45}{5t+3} = 9$
$5t + 3 = -5$
$5t = -8$
$t = \frac{-8}{5} = -1\frac{3}{5}$

25 **a** Bij $x = -2\frac{1}{2}$ is de noemer nul en delen door nul is niet mogelijk.

b De berekening van Ilse is onjuist voor $x = -2\frac{1}{2}$, want dan vermenigvuldigt ze links en rechts met 0.

© Noordhoff Uitgevers bv

c $150 = 12x^2 + 30x$

$12x^2 + 30x - 150 = 0$

$D = 30^2 - 4 \cdot 12 \cdot -150 = 8100$

$x = \dfrac{-30 + \sqrt{8100}}{2 \cdot 12} = \dfrac{-30 + 90}{24} = 2\frac{1}{2}$ of $x = -\dfrac{-30 - \sqrt{8100}}{2 \cdot 12} = \dfrac{-30 - 90}{24} = -5$

26 **a** $\dfrac{3}{x-2} = \dfrac{x}{x+2}$

$\dfrac{3}{x-2} \cdot (x-2) \cdot (x+2) = \dfrac{x}{x+2} \cdot (x-2) \cdot (x+2)$

$3(x+2) = x(x-2)$

$3x + 6 = x^2 - 2x$

b Voor $x = 2$ en $x = -2$ vermenigvuldig je met 0 en dat mag niet.

c $3x + 6 = x^2 - 2x$

$x^2 - 5x - 6 = 0$

$(x-6)(x+1) = 0$

$x - 6 = 0$ of $x + 1 = 0$

$x = 6$ of $x = -1$

27 **a** $\dfrac{2}{3x-1} = \dfrac{x}{3x-2}$

$2(3x-2) = x(3x-1)$

mits $x \neq \frac{1}{3}$ en $x \neq \frac{2}{3}$

$6x - 4 = 3x^2 - x$

$3x^2 - 7x + 4 = 0$

$D = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 49 - 48 = 1$

$x = \dfrac{7+1}{6}$ of $x = \dfrac{7-1}{6}$

$x = 1\frac{1}{3}$ of $x = 1$

b $\dfrac{18}{3x-1} = x$

$18x = x(3x-1)$ mits $x \neq \frac{1}{3}$

$18x = 3x^2 - x$

$3x^2 - 19x = 0$

$x(3x-19) = 0$

$x = 0$ of $3x - 19 = 0$

$x = 0$ of $x = \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}$

c $\dfrac{2x}{x-4} + 6 = 2x$

$\dfrac{2x}{x-4} = 2x - 6$

$2x = (2x-6)(x-4)$ mits $x \neq 4$

$2x = 2x^2 - 8x - 6x + 24$

$2x^2 - 16x + 24 = 0$

$x^2 - 8x + 12 = 0$

$(x-6)(x-2) = 0$

$x - 6 = 0$ of $x - 2 = 0$

$x = 6$ of $x = 2$

d $x + 10 = \dfrac{75}{x-8} + 2$

$x + 8 = \dfrac{75}{x-8}$

$(x+8)(x-8) = 75$ mits $x \neq 8$

$x^2 - 64 = 75$

$x^2 = 139$

$x = \sqrt{139}$ of $x = -\sqrt{139}$

e $\dfrac{x-4}{x+6} = \dfrac{x+3}{x-1}$

$(x-4)(x-1) = (x+3)(x+6)$

mits $x \neq -6$ en $x \neq 1$

$x^2 - 5x + 4 = x^2 + 9x + 18$

$-14x = 14$

$x = -1$

f $\dfrac{1}{x} = \dfrac{4}{x^2}$

$x^2 = 4x$ mits $x \neq 0$

$x^2 - 4x = 0$

$x(x-4) = 0$

$x = 0$ of $x = 4$

aangezien $x \neq 0$ is de enige oplossing $x = 4$.

© Noordhoff Uitgevers bv

28 **a** Voor $x = 3$ bestaat f niet, omdat dan de noemer nul is.

b P is het snijpunt van de grafiek van f en lijn l.

$2 + \frac{1}{x-3} = 2\frac{2}{3}$

$\frac{1}{x-3} = \frac{2}{3}$

$2x - 6 = 3$

$2x = 9$

$x = 4\frac{1}{2}$ dus $P\left(4\frac{1}{2}, 2\frac{2}{3}\right)$.

c De grafiek van f ligt lager dan de lijn l: $y = 2\frac{2}{3}$ voor $x < 3$ of $x > 4\frac{1}{2}$

d Q en R zijn de snijpunten van de grafiek van f met de lijn m.

$2 + \frac{1}{x-3} = x - 2\frac{1}{2}$

$\frac{1}{x-3} = x - 4\frac{1}{2}$

$\left(x - 4\frac{1}{2}\right)(x-3) = 1$ mits $x \neq 3$

$x^2 - 7\frac{1}{2}x + 13\frac{1}{2} = 1$

$x^2 - 7\frac{1}{2}x + 12\frac{1}{2} = 0$

$(x-5)\left(x - 2\frac{1}{2}\right) = 0$

$x - 5 = 0$ of $x - 2\frac{1}{2} = 0$

$x = 5$ of $x = 2\frac{1}{2}$

$x = 5$ geeft $y = 5 - 2\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$ en $x = 2\frac{1}{2}$ geeft $y = 2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 0$

Dus $Q\left(5, 2\frac{1}{2}\right)$ en $R\left(2\frac{1}{2}, 0\right)$.

e $2 + \frac{1}{x-3} \geq x - 2\frac{1}{2}$

Uit de grafieken en opdracht c blijkt $x \leq 2\frac{1}{2}$ of $3 < x \leq 5$.

024 **a** Stap 1: links en rechts is 2 opgeteld.

Stap 2: er is een bordje op $8 - m^2$ gelegd.

b $\frac{15}{8-m^2} = 3$

$8 - m^2 = 5$

$m^2 = 3$

$m = -\sqrt{3}$ of $m = \sqrt{3}$

c $\frac{24}{2-x} = 8$

$2 - x = 3$

$x = -1$

d $\frac{-33}{10-2a} = 11$

$10 - 2a = -3$

$2a = 13$

$a = 6\frac{1}{2}$

e $\frac{28}{3-2x} + 3 = 7$

$\frac{28}{3-2x} = 4$

$3 - 2x = 7$

$x = -2$

f $\frac{63}{p^2+3} = 9$

$p^2 + 3 = 7$

$p^2 = 4$

$p = -2$ of $p = 2$

© Noordhoff Uitgevers bv

g $\dfrac{15}{5x-3}=3$

$5x-3=5$

$5x=8$

$x=1\frac{3}{5}$

h $\dfrac{36}{(x-2)^2}-3=1$

$\dfrac{36}{(x-2)^2}=4$

$(x-2)^2=9$

$x-2=-3$ of $x-2=3$

$x=-1$ of $x=5$

027 **a** De regel: uit $\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}$ volgt $A\cdot D=B\cdot C$ mits $B\neq 0$ en $D\neq 0$.

b $3(x+1)=2(x-1)$ mits $x\neq 1$

$3x+3=2x-2$

$x=-5$

c $\dfrac{6x}{2x-3}=x$

$6x=x(2x-3)$ mits $x\neq 1\frac{1}{2}$

$6x=2x^2-3x$

$2x^2-9x=0$

$2x(x-4\frac{1}{2})=0$

$x=0$ of $x=4\frac{1}{2}$

d $\dfrac{3-x}{x-3}=2x-5$

$3-x=(x-3)(2x-5)$ mits $x\neq 3$

$3-x=2x^2-11x+15$

$2x^2-10x+12=0$

$x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0$

$x=2$ of $x=3$ (voldoet niet)

e $\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{x-1}{x+1}$

$(x+1)^2=(x-1)^2$

mits $x\neq 1$ en $x\neq -1$

$x+1=x-1$ of $x+1=-x+1$

$x+1=x-1$ heeft geen oplossing

$x+1=-x+1$ geeft $x=0$

f $\dfrac{x-2}{x+3}=\dfrac{x+6}{x-2}$

$(x-2)^2=(x+3)(x+6)$

mits $x\neq -3$ en $x\neq 2$

$x^2-4x+4=x^2+9x+18$

$-13x=14$

$x=-\frac{14}{13}=-1\frac{1}{13}$

g $\dfrac{x^2}{x-1}=3x$

$x^2=3x(x-1)$ mits $x\neq 1$

$x^2=3x^2-3x$

$2x^2-3x=0$

$x(2x-3)=0$

$x=0$ of $2x=3$

$x=0$ of $x=1\frac{1}{2}$

h $\dfrac{\frac{1}{3}x+3}{x}=\dfrac{3-x}{6x}$

$6x\left(\frac{1}{3}x+3\right)=x(3-x)$ mits $x\neq 0$

$2x^2+18x=3x-x^2$

$3x^2+15x=0$

$3x(x+5)=0$

$x=0$ (voldoet niet) of $x=-5$

U6 **a** $2-\dfrac{x}{x-1}=0$

$\dfrac{x}{x-1}=2$

$x=2x-2$

$x=2$

$2-\dfrac{x}{x-1}=4$

$\dfrac{x}{x-1}=-2$

$x=-2x+2$

$3x=2$

$x=\frac{2}{3}$

Uit de grafiek blijkt: $0\leq f(x)\leq 4$ voor $x\leq\frac{2}{3}$ of $x\geq 2$.

b De lijn $y=2-x$ gaat door de punten $(0, 2)$ en $(2, 0)$.

In de grafiek is te zien dat $f(x)<2-x$ voor $x<0$ of $1<x<2$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c $2 - \frac{x}{x-1} = ax - 2$

$-\frac{x}{x-1} = ax - 4$

$-x = (x-1)(ax-4)$ mits $x \neq 1$

$-x = ax^2 - ax - 4x + 4$

$ax^2 - ax - 3x + 4 = 0$

$ax^2 + (-a-3)x + 4 = 0$

Deze vergelijking heeft precies één oplossing als $D = 0$.

$(-a-3)^2 - 4 \cdot a \cdot 4 = a^2 + 6a + 9 - 16a = a^2 - 10a + 9 = 0$

$a^2 + 6a + 9 - 16a = a^2 - 10a + 9 = 0$

$a^2 - 10a + 9 = 0$

$(a-1)(a-9) = 0$

dus voor $a = 1$ of $a = 9$ heeft de lijn $y = ax - 2$ precies één snijpunt met de grafiek van f.

U7 **a** $\frac{x}{x-\sqrt{x}} = 2 + \sqrt{x}$

$x = (2+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})$ mits $x \neq 1$ en $x > 0$

$x = 2x - 2\sqrt{x} + x\sqrt{x} - x$

$x = x - 2\sqrt{x} + x\sqrt{x}$

$0 = -2\sqrt{x} + x\sqrt{x}$

$0 = \sqrt{x}(-2 + x)$

$x = 0$ (voldoet niet) of $x = 2$

b $\frac{4-\sqrt{x}}{4+\sqrt{x}} = \frac{5-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

$(4-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}) = (5-\sqrt{x})(4+\sqrt{x})$ mits $x \geq 0$

$4 + 3\sqrt{x} - x = 20 + \sqrt{x} - x$

$2\sqrt{x} = 16$

$\sqrt{x} = 8$, dus $x = 64$

1.5 Herleiden

intro Vermenigvuldig je $y = 6 - 1\frac{1}{2}x$ links en rechts met 4, dan krijg je de vergelijking $4y = 24 - 6x$ ofwel $6x + 4y = 24$.
Deel je bij de vergelijking $6x + 4y = 24$ links en rechts door 24, dan krijg je de vergelijking $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$. De drie vergelijkingen zijn dus gelijkwaardig en daarom krijgen ze alle drie dezelfde lijn.

29 **a** $8x - 2y = 15$

$-2y = -8x + 15$

$y = 4x - 7\frac{1}{2}$

b $8x - 2y = 15$

$8x = 2y + 15$

$x = \frac{1}{4}y + 1\frac{7}{8}$

c $3m + 4n = 12$

$3m = -4n + 12$

$m = -1\frac{1}{3}n + 4$

© Noordhoff Uitgevers bv

30 **a** $8p - 4q = 9$
$-4q = -8p + 9$
$q = 2p - 2\frac{1}{4}$

b $p + q = 0$
$q = -p$

c $15p = 3q + 27$
$3q = 15p - 27$
$q = 5p - 9$

d $18q - 12 = 3p + 2(q - 1)$
$18q - 12 = 3p + 2q - 2$
$16q = 3p + 10$
$q = \frac{3}{16}p + \frac{5}{8}$

e $3(q + 1) = 6p + 5$
$3q + 3 = 6p + 5$
$3q = 6p + 2$
$q = 2p + \frac{2}{3}$

f $10p - 4q = 6p + 12$
$-4q = -4p + 12$
$q = p - 3$

31 **a** $\frac{3}{b} = 7a + 5$
$3 = b \cdot (7a + 5)$
$b = \frac{3}{7a + 5}$

b $8 + \frac{6}{b} = 7a - 6$
$\frac{6}{b} = 7a - 14$
$6 = b \cdot (7a - 14)$
$b = \frac{6}{7a - 14}$

c $a = \sqrt{b + 1}$
$a^2 = b + 1$
$b = a^2 - 1$

d $2a = \frac{8}{b + 4}$
$2a \cdot (b + 4) = 8$
$b + 4 = \frac{8}{2a}$
$b = \frac{8}{2a} - 4 = \frac{4}{a} - 4$

e $a - 9 = \frac{16}{b - 4}$
$(a - 9)(b - 4) = 16$
$b - 4 = \frac{16}{a - 9}$
$b = \frac{16}{a - 9} + 4$

f $a + 3 = \sqrt{b - 2}$
$(a + 3)^2 = b - 2$
$b = (a + 3)^2 + 2$

32 **a** $y = 3(7x - 2) + 5$
$y = 21x - 6 + 5$
$y = 21x - 1$

b $b = 8(2a + 6) - 10$
$b = 16a + 48 - 10$
$b = 16a + 38$

33 **a** $y = -5(19x + 18) + 89$
$y = -95x - 90 + 89$
$y = -95x - 1$

b $y = 8(5 - 2x) + 10$
$y = 40 - 16x + 10$
$y = -16x + 50$

c $y = 6 - 3(x^2 + 4)$
$y = 6 - 3x^2 - 12$
$y = -3x^2 - 6$

d $y = (3x + 1)^2 + 9$
$y = 9x^2 + 6x + 1 + 9$
$y = 9x^2 + 6x + 10$

34 **a** $p^2 + 5p + 6 = 0$

b $(p + 2)(p + 3) = 0$
$p + 2 = 0$ of $p + 3 = 0$
$p = -2$ of $p = -3$

c $3x - 7 = -2$ of $3x - 7 = -3$
$3x = 5$ of $3x = 4$
$x = 1\frac{2}{3}$ of $x = 1\frac{1}{3}$

© Noordhoff Uitgevers bv

35 **a** $p^2 - 13p + 36 = 0$
$(p - 4)(p - 9) = 0$
$p = 4$ of $p = 9$

b $x^2 = 4$ of $x^2 = 9$
$x = 2$ of $x = -2$ of $x = 3$ of $x = -3$

36 **a** $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$
substitutie $x^2 = p$
$p^2 - 17p + 16 = 0$
$(p - 1)(p - 16) = 0$
$p = 1$ of $p = 16$
omdat $p = x^2$ geldt
$x^2 = 1$ of $x^2 = 16$
$x = -1$ of $x = 1$ of
$x = -4$ of $x = 4$

b $(x^2 - 3)^2 - 5(x^2 - 3) = 6$
substitutie $x^2 - 3 = p$
$p^2 - 5p - 6 = 0$
$(p + 1)(p - 6) = 0$
$p = -1$ of $p = 6$
omdat $p = x^2 - 3$ geldt
$x^2 - 3 = -1$ of $x^2 - 3 = 6$
$x^2 = 2$ of $x^2 = 9$
$x = -\sqrt{2}$ of $x = \sqrt{2}$ of
$x = -3$ of $x = 3$

c $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$
substitutie $x^2 = p$
$p^2 - 24p - 25 = 0$
$(p - 25)(p + 1) = 0$
$p = 25$ of $p = -1$
omdat $p = x^2$ geldt
$x^2 = 25$ of $x^2 = -1$
$x = -5$ of $x = 5$

d $3x^4 - 8x^2 + 5 = 0$
substitutie $x^2 = p$
$3p^2 - 8p + 5 = 0$
$D = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 64 - 60 = 4$
$p = \dfrac{8 + \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = 1\frac{2}{3}$ of $p = \dfrac{8 - 2}{2 \cdot 3} = 1$
omdat $p = x^2$ geldt
$x^2 = 1\frac{2}{3}$ of $x^2 = 1$
$x = \sqrt{1\frac{2}{3}}$ of $x = -\sqrt{1\frac{2}{3}}$ of
$x = 1$ of $x = -1$

e $(2x + 5)^2 + 3(2x + 5) = 18$
substitutie $2x + 5 = p$
$p^2 + 3p - 18 = 0$
$(p + 6)(p - 3) = 0$
$p = -6$ of $p = 3$
omdat $p = 2x + 5$ geldt
$2x + 5 = -6$ of $2x + 5 = 3$
$2x = -11$ of $2x = -2$
$x = -5\frac{1}{2}$ of $x = -1$

f $(1 - 2x)^4 - 2(1 - 2x)^2 = 8$
substitutie $(1 - 2x)^2 = p$
$p^2 - 2p - 8 = 0$
$(p + 2)(p - 4) = 0$
$p = -2$ of $p = 4$
omdat $p = (1 - 2x)^2$ geldt
$(1 - 2x)^2 = -2$ of $(1 - 2x)^2 = 4$
$1 - 2x = 2$ of $1 - 2x = -2$
$-2x = 1$ of $-2x = -3$
$x = -\frac{1}{2}$ of $x = 1\frac{1}{2}$

031 **a** In stap 1 wordt links en rechts gekwadrateerd.
In stap 2 wordt links en rechts a opgeteld.

b In stap 1 wordt links en rechts vermenigvuldigd met $1 - b$.

c De eerste formule: $b = (5 + a)^2 + a$ ofwel $b = a^2 + 9a + 25$.
De tweede formule:
$12 = (2a + 3)(1 - b)$
$1 - b = \dfrac{12}{2a + 3}$
$-b = \dfrac{12}{2a + 3} - 1$
$b = 1 - \dfrac{12}{2a + 3}$

© Noordhoff Uitgevers bv

d $a = \sqrt{b+3}$
$a^2 = b + 3$
$b = a^2 - 3$

e $\frac{2}{b} = 3a + 7$
$2 = b(3a + 7)$
$b = \frac{2}{3a+7}$

f $2 + \frac{3}{b} = 4a - 8$
$\frac{3}{b} = 4a - 10$
$b(4a - 10) = 3$
$b = \frac{3}{4a-10}$

g $a - 5 = \sqrt{4b+3}$
$(a - 5)^2 = 4b + 3$
$4b = (a - 5)^2 - 3$
$b = \frac{1}{4}(a - 5)^2 - \frac{3}{4}$

h $ab = 4$
$b = \frac{4}{a}$

i $\frac{a}{2b} = 4 + a$
$a = 2b(4 + a)$
$a = b(8 + 2a)$
$b = \frac{a}{8+2a}$

036 **a** $t = 2x + 1$

b $t^2 - t - 2 = 0$
$(t + 1)(t - 2) = 0$
$t = -1$ of $t = 2$

c $2x + 1 = -1$ of $2x + 1 = 2$
$x = -1$ of $x = \frac{1}{2}$

d $x^4 - 8x^2 = 128$
substitutie $x^2 = t$
$t^2 - 8t - 128 = 0$
$(t + 8)(t - 16) = 0$
$t = -8$ of $t = 16$
omdat $t = x^2$ geldt
$x^2 = -8$ heeft geen oplossing
$x^2 = 16$ geeft $x = -4$ of $x = 4$

e $(x^2 - 2)^2 - 7(x^2 - 2) + 12 = 0$
substitutie $x^2 - 2 = t$
$t^2 - 7t + 12 = 0$
$(t - 3)(t - 4) = 0$
$t = 3$ of $t = 4$
omdat $t = x^2 - 2$ geldt
$x^2 - 2 = 3$ of $x^2 - 2 = 4$
$x^2 = 5$ of $x^2 = 6$
$x = -\sqrt{5}$ of $x = \sqrt{5}$ of
$x = -\sqrt{6}$ of $x = \sqrt{6}$

f $(3x + 4)^4 - 2(3x + 4)^2 = 15$
substitutie $(3x + 4)^2 = t$
$t^2 - 2t - 15 = 0$
$(t + 3)(t - 5) = 0$
$t = -3$ of $t = 5$
omdat $t = (3x + 4)^2$ geldt
$(3x + 4)^2 = -3$ of $(3x + 4)^2 = 5$
$3x + 4 = -\sqrt{5}$ of $3x + 4 = \sqrt{5}$
$3x = -4 - \sqrt{5}$ of $3x = -4 + \sqrt{5}$
$x = -1\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{5}$ of $x = -1\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{5}$

g $5(3 + x) = 1 - 14(3 + x)^2$
substitutie $3 + x = t$
$5t = 1 - 14t^2$
$14t^2 + 5t - 1 = 0$
$D = 25 + 56 = 81$
$t = \frac{-5-9}{2 \cdot 14} = -\frac{1}{2}$ of $t = \frac{-5+9}{2 \cdot 14} = \frac{1}{7}$
omdat $t = 3 + x$ geldt
$3 + x = -\frac{1}{2}$ of $3 + x = \frac{1}{7}$
$x = -3\frac{1}{2}$ of $x = -2\frac{6}{7}$

© Noordhoff Uitgevers bv

U8 **a** $\frac{3}{ab} = 7a + 5$

$\frac{3}{7a+5} = ab$

$b = \frac{3}{7a^2 + 5a}$

b $8 + \frac{6}{b+1} = 7a - 6$

$\frac{6}{b+1} = 7a - 14$

$b + 1 = \frac{6}{7a - 14}$

$b = \frac{6}{7a - 14} - 1$

$b = \frac{6 - (7a - 14)}{7a - 14} = \frac{20 - 7a}{7a - 14}$

c $\sqrt{a + b + 1} = 3 - a$

$a + b + 1 = (3 - a)^2$

$b = (3 - a)^2 - a - 1$

$b = 9 - 6a + a^2 - a - 1$

$b = a^2 - 7a + 8$

d $2a = \frac{5}{b + 4a}$

$b + 4a = \frac{5}{2a}$

$b = \frac{5}{2a} - 4a$

$b = \frac{5 - 8a^2}{2a}$

e $a - 9 = \frac{16}{b - 4a}$

$b - 4a = \frac{16}{a - 9}$

$b = \frac{16}{a - 9} + 4a$

$b = \frac{16 + 4a(a - 9)}{a - 9}$

$b = \frac{4a^2 - 36a + 16}{a - 9}$

f $a + 3 = \sqrt{b - 2a}$

$(a + 3)^2 = b - 2a$

$b = (a + 3)^2 + 2a$

$b = a^2 + 6a + 9 + 2a$

$b = a^2 + 8a + 9$

U9 **a** $y = (2x - 3)^2 - (2x - 3) + 4$

$y = 4x^2 - 12x + 9 - 2x + 3 + 4$

$y = 4x^2 - 14x + 16$

geldt voor alle x.

b $y = \frac{(x^2 + 2)^2 + 6(x^2 + 2)}{(x^2 + 2) - 2}$

$y = \frac{x^4 + 4x^2 + 4 + 6x^2 + 12}{x^2}$

$y = \frac{x^4 + 10x^2 + 16}{x^2}$

geldt voor $x \neq 0$.

c $y = \frac{2 \cdot \frac{1}{x} - 4}{\frac{1}{x} + 3}$

$y = \frac{2 - 4x}{1 + 3x}$

geldt voor $x \neq 0$ en $x \neq -\frac{1}{3}$.

d $y = \frac{1}{t^2 + 4t}$ met $t = \frac{2}{x}$

$y = \frac{1}{\frac{4}{x^2} + 4 \cdot \frac{2}{x}}$

$y = \frac{1}{\frac{4}{x^2} + \frac{8}{x}}$

$y = \frac{1}{\frac{4 + 8x}{x^2}}$

$y = \frac{x^2}{4 + 8x}$

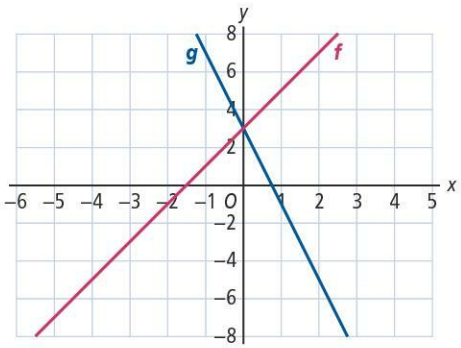
geldt voor $x \neq 0$ en $x \neq -\frac{1}{2}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

1.6 Parameters

intro De lijn is dan twee keer zo steil.
Nee, de lijn door (4, 5) evenwijdig aan de y-as heeft als vergelijking $x = 4$.

37 **a**



b $y = ax + 3$. De coördinaten van punt (5, 18) invullen geeft
$18 = a \cdot 5 + 3$
$5a = 15$
$a = 3$

c $h(0) = a \cdot 0 + 3 = 3$ voor elke waarde van a.

d $3x + 2y = 3$
$2y = -3x + 3$
$y = -1\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$

Voor $a = -1\frac{1}{2}$ is de grafiek van h evenwijdig aan lijn m, want dan hebben beide lijnen dezelfde richtingscoëfficiënt.

38 **a** $g_a(x) = ax^2 + 4x - 7$, de grafiek gaat door (2, 5) dus
$a \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 7 = 5$
$4a + 1 = 5$
$4a = 4$
$a = 1$

b $k_a(x) = 3x^2 + ax - 6$, de grafiek gaat door (2, 0) dus
$3 \cdot 2^2 + a \cdot 2 - 6 = 0$
$12 + 2a - 6 = 0$
$2a = -6$
$a = -3$

c $x^2 + ax - 2 = x - a$
$x = 4$ is een oplossing, dus
$4^2 + 4a - 2 = 4 - a$
$16 + 4a - 2 = 4 - a$
$5a = -10$
$a = -2$

39 **a** $f(2) = 2 \cdot (8 - 2) = 2 \cdot 6 = 12$, dus $P(2, 12)$ ligt op de grafiek van f.

b Elke lijn van die vorm gaat door het punt $P(2, 12)$ want $12 = a \cdot (2 - 2) + 12$.

c $x(8 - x) = a(x - 2) + 12$
$8x - x^2 = ax - 2a + 12$
$x^2 + ax - 8x - 2a + 12 = 0$
$x^2 + (a - 8)x - 2a + 12 = 0$

d De vergelijking heeft één oplossing als $D = 0$.

© Noordhoff Uitgevers bv

e $(a-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2a+12) = 0$
$a^2 - 16a + 64 + 8a - 48 = 0$
$a^2 - 8a + 16 = 0$
$(a-4)^2 = 0$
$a = 4$
Een vergelijking van de raaklijn is $y = 4(x-2) + 12$ ofwel $y = 4x + 4$.

40 **a** $f(8) = -64 + 32 = -32$ en $g_a(8) = a - 2 \cdot 8 = -32$
$a - 16 = -32$
$a = -16$

b $-x^2 + 4x = a - 2x$
$-x^2 + 6x - a = 0$ moet één oplossing hebben, dus $D = 0$.
$a = -1$, $b = 6$, $c = -a$
$D = 6^2 - 4 \cdot -1 \cdot -a = 0$
$36 - 4a = 0$
$4a = 36$
$a = 9$

c De grafiek van g_a snijdt de grafiek van f niet als $D < 0$.
$36 - 4a < 0$
$-4a < -36$
$a > 9$

41 P is het punt $(2, 4)$, want $f_a(2) = a \cdot (2-2)^2 + 4$ ofwel $f_a(2) = a \cdot 0 + 4 = 4$ voor elke waarde van a.

O38 **a** $6 = a\sqrt{4+5}$
$6 = a \cdot 3$
$a = 2$

b $k_m(3) = 18 + 3m - 3$
$15 + 3m = 0$
$m = -5$

c $g_a(3) = 9a + 6 - 5$
$9a + 1 = 7$
$9a = 6$
$a = \frac{2}{3}$

d $2^2 + 2p - 5 = 2 - p$
$3p = 3$
$p = 1$

O40 **a** $h(x) = x^2 + 3x - 4$
$x^2 + 3x - 4 - p = 0$
$D = 3^2 - 4(-4-p) = 9 + 16 + 4p = 25 + 4p$

b $25 + 4p = 0$
$4p = -25$
$p = -6\frac{1}{4}$

c De grafiek bij de functie h is een dalparabool. Er zijn twee snijpunten als de lijn $y = p$ hoger ligt, dus als $p > -6\frac{1}{4}$
Of ook: er zijn twee snijpunten als $D > 0$ ofwel $25 + 4p > 0$, dus $p > -6\frac{1}{4}$

U10 **a** $f_a(x) = a(x-4)^2 + 5$

b $f_a(0) = a(0-4)^2 + 5 = 16a + 5$
$16a + 5 = 0$
$a = -\frac{5}{16}$

© Noordhoff Uitgevers bv

U11 **a** $f_p(1) = \dfrac{4}{p-5}$

$\dfrac{4}{p-5} = 3$

$3(p-5) = 4$ mits $p \neq 5$

$p - 5 = 1\frac{1}{3}$

$p = 6\frac{1}{3}$

b $f_p(-10) = \dfrac{4}{-10p-5}$

bestaat niet als $-10p - 5 = 0$

$-10p = 5$

$p = -\frac{1}{2}$

c $\dfrac{4}{px-5} = x$

$x(px - 5) = 4$

$px^2 - 5x = 4$

$px^2 - 5x - 4 = 0$

Er is één oplossing als $D = 0$.

$D = (-5)^2 - 4 \cdot p \cdot -4 = 0$

$25 + 16p = 0$

$16p = -25$

$p = -1\frac{9}{16}$

1.7 Gemengde opdrachten

42 **a** $3(x-2) + 2x = 3 + 3(5-x)$

$3x - 6 + 2x = 3 + 15 - 3x$

$8x = 24$

$x = 3$

b $\dfrac{18}{x-4} = -6x$

$18 = -6x(x-4)$ mits $x \neq 4$

$18 = -6x^2 + 24x$

$6x^2 - 24x + 18 = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x-3)(x-1) = 0$

$x - 3 = 0$ of $x - 1 = 0$

$x = 3$ of $x = 1$

c $2\sqrt{x-1} + 3 = 7$

$2\sqrt{x-1} = 4$

$\sqrt{x-1} = 2$

$x - 1 = 4$

$x = 5$

d $(3x-1)(x+5) = -5$

$3x^2 + 15x - x - 5 = -5$

$3x^2 + 14x = 0$

$x(3x + 14) = 0$

$x = 0$ of $3x + 14 = 0$

$x = 0$ of $x = -\frac{14}{3} = -4\frac{2}{3}$

e $4x(7-2x) = (x-3)(7-2x)$

$7 - 2x = 0$ of $4x = x - 3$

$-2x = -7$ of $3x = -3$

$x = 3\frac{1}{2}$ of $x = -1$

f $\dfrac{x+4}{2x+1} = \dfrac{2x}{13-x}$

$(x+4)(13-x) = 2x(2x+1)$

mits $x \neq -\frac{1}{2}$ en $x \neq 13$

$13x - x^2 + 52 - 4x = 4x^2 + 2x$

$5x^2 - 7x - 52 = 0$

$D = (-7)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -52 = 1089$

$x = \dfrac{7 + \sqrt{1089}}{2 \cdot 5} = 4$ of

$x = \dfrac{7 - \sqrt{1089}}{2 \cdot 5} = -2\frac{3}{5}$

g $(2x+1)^2 = (x-5)^2$

$2x + 1 = x - 5$ of $2x + 1 = -x + 5$

$x = -6$ of $3x = 4$

$x = -6$ of $x = 1\frac{1}{3}$

h $(x-4)^2\sqrt{x^2-9} = 25\sqrt{x^2-9}$

$\sqrt{x^2-9} = 0$ of $(x-4)^2 = 25$

$x^2 = 9$ of $x - 4 = 5$ of $x - 4 = -5$

$x = 3$ of $x = -3$ of $x = 9$

($x = -1$ voldoet niet)

© Noordhoff Uitgevers bv

43 **a** $\frac{1}{f}=\frac{1}{b}+\frac{1}{v}$

$\frac{1}{8}=\frac{1}{b}+\frac{1}{10}$

$\frac{1}{b}=\frac{1}{8}-\frac{1}{10}$

$\frac{1}{b}=\frac{5}{40}-\frac{4}{40}$

$\frac{1}{b}=\frac{1}{40}$

$b=40$

De beeldafstand is 40 cm.

b $\frac{1}{f}=\frac{1}{b}+\frac{1}{v}$

$\frac{1}{8}=\frac{1}{b}+\frac{1}{v}$

$\frac{1}{b}=\frac{1}{8}+\frac{1}{v}$

$\frac{1}{b}=\frac{v}{8v}-\frac{8}{8v}$

$\frac{1}{b}=\frac{v-8}{8v}$

$b=\frac{8v}{v-8}$

44 **a** Een vergelijking van de lijn is $y=mx+3\frac{1}{2}$

Snijden met de grafiek van f geeft $\sqrt{8x-8}=mx+3\frac{1}{2}$

$8x-8=\left(mx+3\frac{1}{2}\right)^2$

$8x-8=m^2x^2+7mx+12\frac{1}{4}$

$m^2x^2+7mx-8x+20\frac{1}{4}=0$

$m^2x^2+(7m-8)x+20\frac{1}{4}=0$

Voor een raakpunt moet gelden $D=0$, dus

$(7m-8)^2-4\cdot m^2\cdot 20\frac{1}{4}=0$

$(7m-8)^2-81m^2=0$

$(7m-8)^2=81m^2$

$7m-8=9m$ of $7m-8=-9m$

$2m=-8$ of $16m=8$

$m=-4$ (voldoet niet, zie grafiek) of $m=\frac{1}{2}$

Een vergelijking van de getekende lijn is $y=\frac{1}{2}x+3\frac{1}{2}$

b $m=\frac{1}{2}$ invullen in $m^2x^2+(7m-8)x+20\frac{1}{4}=0$ geeft

$\frac{1}{4}x^2-4\frac{1}{2}x+20\frac{1}{4}=0$ ofwel $x^2-18x+81=0$

$(x-9)^2=0$, dus $x=9$ en $y=\frac{1}{2}\cdot 9+3\frac{1}{2}=8$

De coördinaten van het punt zijn $P(9, 8)$.

Onderzoeksopdrachten

45 **a** $f_p(x)=4-p\sqrt{16-x}$

De grafiek gaat door $(-9, 14)$, dus $f_p(-9)=14$.

$4-p\sqrt{16--9}=14$

$4-p\cdot 5=14$

$-5p=10$

$p=-2$

© Noordhoff Uitgevers bv

b Het randpunt van de grafiek bij de formule $f_{-1}(x) = 4 + \sqrt{16 - x}$ is (16, 4).
Een lijn die door $R(0, 8)$ en (16, 4) gaat heeft twee snijpunten met f_{-1}
De richtingscoëfficiënt van deze lijn is $\frac{4-8}{16-0} = -\frac{1}{4}$
Als $a < -\frac{1}{4}$ dan snijdt de grafiek van $y_a = ax + 8$ de grafiek van f_{-1} alleen in $R(0, 8)$, zie grafiek.
Het kan ook zo zijn dat de lijn $y_a = ax + 8$ de grafiek van f_{-1} raakt in (0, 8).
Om deze waarde van a te berekenen moet de vergelijking
$4 + \sqrt{16 - x} = ax + 8$ maar één oplossing hebben.
$\sqrt{16 - x} = ax + 4$
$16 - x = (ax + 4)^2$
$16 - x = a^2x^2 + 8ax + 16$
$a^2x^2 + 8ax + x = 0$
$a^2x^2 + (8a + 1)x = 0$
Eén oplossing als $D = 0$, dus als $(8a + 1)^2 - 4 \cdot a^2 \cdot 0 = 0$ ofwel $(8a + 1)^2 = 0$.
$8a + 1 = 0$, dus als $a = -\frac{1}{8}$
Conclusie: voor $a < -\frac{1}{4}$ of $a > -\frac{1}{8}$ snijdt de lijn $y_a = ax + 8$ de grafiek van f_{-1} alleen in $R(0, 8)$.

46 a Lijnstuk AB is de lange zijde van een gelijkbenige rechthoekige driehoek met hoekpunten A, B en $C(x_B, y_A)$. Als $AB = 6\sqrt{2}$, is $AC = x_B - x_A = 6$.
x_A en x_B volgen uit $x^2 = x + p$ ofwel $x^2 - x - p = 0$.
$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -p = 1 + 4p$ dus

$x_A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4p}$ en $x_B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4p}$

$x_B - x_A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4p} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4p}) = \sqrt{1 + 4p}$

$\sqrt{1 + 4p} = 6$ geeft $1 + 4p = 36$ ofwel $4p = 35$, dus $p = 8\frac{3}{4}$

b $x^2 - x - p = 0$ heeft geen oplossingen als $D = 1 + 4p < 0$.

$4p < -1$, dus $p < -\frac{1}{4}$

c $MN = (x_N - x_M) \cdot \sqrt{2}$ (zie ook 46a)

$= \sqrt{1 + 4p} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2 + 8p}$

Samenvatting

S1 a $y = -2x + 3$
b $-2y = -3x + 4$, dus $y = 1\frac{1}{2}x - 2$

S2 a $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot -9 = 72$ en $D > 0$, dus twee oplossingen.
b $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -16$ en $D < 0$, dus geen oplossingen.

S3 a $3(5 - x) = 5(3 - 2x) + 21$
$15 - 3x = 15 - 10x + 21$
$7x = 21$
$x = 3$

b $-4(x - 5) - 2(7 - 3x) = 4x$
$-4x + 20 - 14 + 6x = 4x$
$-2x = -6$
$x = 3$

© Noordhoff Uitgevers bv

S4 **a** $(x+1)^2 = 4(x+1)$
$x+1=0$ of $x+1=4$
$x=-1$ of $x=3$

b $4x^2 - 9x + 6 = 0$
$D = (-9)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 6 = -15$
geen oplossingen

c $(3x-12)^2 = (6-2x)^2$
$3x-12 = 6-2x$ of
$3x-12 = -6+2x$
$5x = 18$ of $x = 6$
$x = 3\frac{3}{5}$ of $x = 6$

d $(2x-3)(2x+1) = 4(2x+1)$
$2x+1=0$ of $2x-3=4$
$2x=-1$ of $2x=7$
$x=-\frac{1}{2}$ of $x=3\frac{1}{2}$

S5 **a** $2\sqrt{x-4} = 8 - \frac{1}{2}x$

$4(x-4) = \left(8-\frac{1}{2}x\right)^2$

$4x-16 = 64 - 8x + \frac{1}{4}x^2$

$\frac{1}{4}x^2 - 12x + 80 = 0$

$x^2 - 48x + 320 = 0$
$(x-8)(x-40) = 0$
$x=8$ of $x=40$
$x=8$ invullen geeft $2\sqrt{8-4} = 8 - \frac{1}{2}\cdot 8$ ofwel $2\cdot 2 = 8-4$, klopt.

$x=40$ invullen geeft $2\sqrt{40-4} = 8 - \frac{1}{2}\cdot 40$ ofwel $2\cdot 6 = 8-20$, klopt niet.

De oplossing is $x=8$.

b $\frac{1}{2}x + \sqrt{-1-x} = -2$

$\sqrt{-1-x} = -2 - \frac{1}{2}x$

$-1-x = \left(-2-\frac{1}{2}x\right)^2$

$-1-x = 4 + 2x + \frac{1}{4}x^2$

$\frac{1}{4}x^2 + 3x + 5 = 0$

$x^2 + 12x + 20 = 0$
$(x+2)(x+10) = 0$
$x=-2$ of $x=-10$
$x=-2$ invullen geeft $\frac{1}{2}\cdot -2 + \sqrt{-1--2} = -2$ ofwel $-1+\sqrt{1} = -2$, klopt niet.

$x=-10$ invullen geeft $\frac{1}{2}\cdot -10 + \sqrt{-1--10} = -2$ ofwel $-5+3=-2$, klopt.

De oplossing is $x=-10$.

S6 **a** $\frac{2}{3x-9} = \frac{1}{\frac{1}{2}x+4}$

$2\left(\frac{1}{2}x+4\right) = 3x-9$ mits $x \neq 3$ en $x \neq -8$

$x+8 = 3x-9$
$-2x = -17$
$x = 8\frac{1}{2}$

© Noordhoff Uitgevers bv

b $\dfrac{x+1}{4x-3} = x$

$x + 1 = x(4x - 3) = 4x^2 - 3x$ mits $x \neq \frac{3}{4}$

$x + 1 = x(4x - 3) = 4x^2 - 3x$

$4x^2 - 4x - 1 = 0$

$D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot -1 = 32$

$x = \dfrac{4 - \sqrt{32}}{2 \cdot 4}$ of $x = \dfrac{4 + \sqrt{32}}{2 \cdot 4}$

$x = \dfrac{4 - 4\sqrt{2}}{8} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ of $x = \dfrac{4 + 4\sqrt{2}}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$

S7 **a** $(1 - 2x)^2 + (1 - 2x) - 12 = 0$

substitutie $1 - 2x = p$

$p^2 + p - 12 = 0$

$(p + 4)(p - 3) = 0$

$p = -4$ of $p = 3$

omdat $p = 1 - 2x$ geldt

$1 - 2x = -4$ of $1 - 2x = 3$

$-2x = -5$ of $-2x = 2$

$x = 2\frac{1}{2}$ of $x = -1$

b $(x + 2)^3 = 4(x + 2)^2$

substitutie $x + 2 = p$

$p^3 = 4p^2$

$p \cdot p^2 = 4p^2$

$p = 4$ of $p^2 = 0$

$p = 4$ of $p = 0$

omdat $p = x + 2$ geldt

$x + 2 = 4$ of $x + 2 = 0$

$x = 2$ of $x = -2$

S8 **a** $f_a(6) = -5$

$2 - \sqrt{6a + 7} = -5$

$\sqrt{6a + 7} = 7$

$6a + 7 = 49$

$6a = 42$

$a = 7$

b Alle grafieken gaan door het punt $P(0, 2 - \sqrt{7})$.

S9 **a** $\dfrac{p + 2q}{2p + q} = 3$

$p + 2q = 3(2p + q)$

$p + 2q = 6p + 3q$

$-5p = q$, dus $p = -\frac{1}{5}q$

b $q - \sqrt{p - 2q} = 3$

$q - 3 = \sqrt{p - 2q}$

$(q - 3)^2 = p - 2q$

$p = (q - 3)^2 + 2q = q^2 - 4q + 9$

S10 **a** Eerst de vergelijking oplossen.

$x^3 + 2x^2 - 8x = 0$

$x(x^2 + 2x - 8) = 0$

$x(x + 4)(x - 2) = 0$

$x = 0$ of $x = -4$ of $x = 2$

Uit de grafiek blijkt dat $f(x) > 0$ voor $-4 < x < 0$ of $x > 2$.

b Eerst de vergelijking oplossen.

$x^3 + 2x^2 - 8x = 7x$

$x^3 + 2x^2 - 15x = 0$

$x(x^2 + 2x - 15) = 0$

$x(x + 5)(x - 3) = 0$

$x = 0$ of $x = -5$ of $x = 3$

Uit de grafiek blijkt dat $f(x) \leq g(x)$ voor $x \leq -5$ of $0 \leq x \leq 3$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Test jezelf

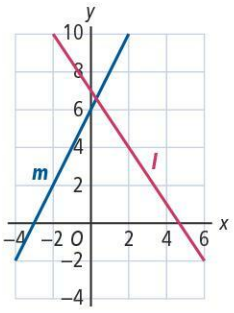
T1 **a** $13 + 2x = 3(x - 5) + 7x$
$13 + 2x = 3x - 15 + 7x$
$13 + 2x = 10x - 15$
$28 = 8x$
$x = \frac{28}{8} = 3\frac{1}{2}$

b $\frac{1}{5}p + 3 = \frac{3}{10}p - 8$
$2p + 30 = 3p - 80$
$110 = p$
$p = 110$

c $3\frac{2}{3}x - 3 = 2\left(\frac{1}{6}x + 1\right)$
$3\frac{2}{3}x - 3 = \frac{1}{3}x + 2$
$3\frac{1}{3}x = 5$
$x = \frac{5}{3\frac{1}{3}} = \frac{15}{10} = 1\frac{1}{2}$

T2 **a** Eerst de vergelijking oplossen.
$4\frac{1}{2} - 2x = \frac{4}{5}x + 1$
$45 - 20x = 8x + 10$
$-28x = -35$
$x = \frac{35}{28} = 1\frac{1}{4}$
Uit de grafieken blijkt dat $g(x) < f(x)$ voor $x < 1\frac{1}{4}$.

b Zie hiernaast.



c Eerst de vergelijking oplossen.
$-1{,}5x + 7 = 2x + 6$
$-3x + 14 = 4x + 12$
$-7x = -2$
$x = \frac{2}{7}$
Uit de grafieken van opdracht b blijkt dat $-1{,}5x + 7 \geq 2x + 6$ voor $x \leq \frac{2}{7}$

T3 **a** $a^2 = 9a + 22$
$a^2 - 9a - 22 = 0$
$(a - 11)(a + 2) = 0$
$a - 11 = 0$ of $a + 2 = 0$
$a = 11$ of $a = -2$

b $\sqrt{x^2 + 4} - 1 = x$
$\sqrt{x^2 + 4} = x + 1$
$x^2 + 4 = (x + 1)^2$
$x^2 + 4 = x^2 + 2x + 1$
$4 = 2x + 1$
$2x = 3$
$x = 1\frac{1}{2}$ (voldoet)

c $(2x - 3)^2 = (1 - 8x)^2$
$2x - 3 = 1 - 8x$ of
$2x - 3 = -1 + 8x$
$10x = 4$ of $-6x = 2$
$x = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ of $x = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

d $\frac{-3x}{x + 1} = x - 4$
$-3x = (x - 4)(x + 1)$
$-3x = x^2 - 3x - 4$
$x^2 = 4$
$x = -2$ of $x = 2$

e $\frac{x + 4}{x - 2} = \frac{x + 2}{x}$
$(x + 4)x = x^2 - 4$
mits $x \neq 2$ en $x \neq 0$
$x^2 + 4x = x^2 - 4$
$4x = -4$
$x = -1$

f $x^2 - 2 = \frac{1}{x^2 - 2}$
$(x^2 - 2)^2 = 1$
mits $x \neq \sqrt{2}$ en $x \neq -\sqrt{2}$
$x^2 - 2 = 1$ of $x^2 - 2 = -1$
$x^2 = 3$ of $x^2 = 1$
$x = -\sqrt{3}$ of $x = \sqrt{3}$ of
$x = -1$ of $x = 1$

© Noordhoff Uitgevers bv

g $(x^2 - 8)^2 = x^2 - 8$
substitutie $x^2 - 8 = p$
$p^2 = p$ ofwel $p \cdot p = p \cdot 1$
$p = 0$ of $p = 1$
omdat $p = x^2 - 8$ geldt
$x^2 - 8 = 0$ of $x^2 - 8 = 1$
$x^2 = 8$ of $x^2 = 9$
$x = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$ of $x = 2\sqrt{2}$ of
$x = -3$ of $x = 3$

h $\sqrt{2x - 1} \cdot \sqrt{3 - 5x} = 0$
$2x - 1 = 0$ of $3 - 5x = 0$
$x = \frac{1}{2}$ of $x = \frac{3}{5}$
$x = \frac{1}{2}$ invullen geeft
$\sqrt{1 - 1} \cdot \sqrt{3 - 2\frac{1}{2}} = 0$, klopt.
$x = \frac{3}{5}$ invullen geeft
$\sqrt{1\frac{1}{5} - 1} \cdot \sqrt{3 - 3} = 0$, klopt.
De oplossing is $x = \frac{1}{2}$ of $x = \frac{3}{5}$

T4 **a** $2(q + 1) = 4p - 5$
$2q + 2 = 4p - 5$
$4p = 2q + 7$
$p = \frac{1}{2}q + 1\frac{3}{4}$

b $4 + \frac{3}{p} = q + 5$
$\frac{3}{p} = q + 1$
$p = \frac{3}{q + 1}$

c $q + 8 - \frac{1}{p + 6} = 0$
$\frac{1}{p + 6} = q + 8$
$p + 6 = \frac{1}{q + 8}$
$p = \frac{1}{q + 8} - 6$

d $7 - 2\sqrt{p + 6} = q$
$-2\sqrt{p + 6} = q - 7$
$\sqrt{p + 6} = -\frac{1}{2}q + 3\frac{1}{2}$
$p + 6 = \left(-\frac{1}{2}q + 3\frac{1}{2}\right)^2$
$p = \left(-\frac{1}{2}q + 3\frac{1}{2}\right)^2 - 6$

T5 **a** $(3x - 1)^2 - 5(3x - 1) = 6$
substitutie $3x - 1 = p$ geeft $p^2 - 5p = 6$ ofwel
$p^2 - 5p - 6 = 0$
$(p + 1)(p - 6) = 0$
$p = -1$ of $p = 6$
omdat $p = 3x - 1$ geldt $3x - 1 = -1$ of $3x - 1 = 6$
$3x = 0$ of $3x = 7$
$x = 0$ of $x = 2\frac{1}{3}$

b $x^4 = 13x^2 - 36$
substitutie $x^2 = p$ geeft $p^2 = 13p - 36$ ofwel
$p^2 - 13p + 36 = 0$
$(p - 4)(p - 9) = 0$
$p = 4$ of $p = 9$
omdat $p = x^2$ geldt $x^2 = 4$ of $x^2 = 9$
$x = -2$ of $x = 2$ of $x = -3$ of $x = 3$

© Noordhoff Uitgevers bv

c $\dfrac{4}{(x+1)^2} - \dfrac{2}{x+1} = 12$

substitutie $x+1 = p$ geeft $\dfrac{4}{p^2} - \dfrac{2}{p} = 12$ ofwel $\dfrac{4-2p}{p^2} = 12$.

$4 - 2p = 12p^2$

$12p^2 + 2p - 4 = 0$

$6p^2 + p - 2 = 0$

$D = 1^2 - 4 \cdot 6 \cdot -2 = 1 + 48 = 49$

$p = \dfrac{-1-\sqrt{49}}{2 \cdot 6} = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3}$ of $p = \dfrac{-1+\sqrt{49}}{2 \cdot 6} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

omdat $p = x + 1$ geldt $x + 1 = -\frac{2}{3}$ of $x + 1 = \frac{1}{2}$

$x = -1\frac{2}{3}$ of $x = -\frac{1}{2}$

T6 **a** $(x+2)^2 - 3 = 2$

$(x+2)^2 = 5$

$x + 2 = \sqrt{5}$ of $x + 2 = -\sqrt{5}$

$x = -2 + \sqrt{5}$ of $x = -2 - \sqrt{5}$

b $m : x - 2y = 1$ ofwel $m : 2y = x - 1$ ofwel $m : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

grafiek van f_2 snijden met lijn m geeft

$(x+2)^2 - 3 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$x^2 + 4x + 4 - 3 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$x^2 + 3\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2} = 0$

$2x^2 + 7x + 3 = 0$

$D = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49 - 24 = 25$

$x = \dfrac{-7+\sqrt{25}}{2 \cdot 2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ of $x = \dfrac{-7-\sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{-12}{4} = -3$

$x = -\frac{1}{2}$ geeft $y = \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$

$x = -3$ geeft $y = \frac{1}{2} \cdot -3 - \frac{1}{2} = -2$

De snijpunten zijn $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ en $(-3, -2)$.

c $f_p(0) = 5$ geeft $(0+p)^2 - 3 = 5$ ofwel

$p^2 - 3 = 5$

$p^2 = 8$

$p = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ of $p = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$

d $(x+p)^2 - 3 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ heeft één oplossing.

$x^2 + 2px + p^2 - 3 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$x^2 + 2px - \frac{1}{2}x + p^2 - 2\frac{1}{2} = 0$

$x^2 + \left(2p - \frac{1}{2}\right)x + p^2 - 2\frac{1}{2} = 0$

$D = \left(2p - \frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(p^2 - 2\frac{1}{2}\right) = 0$

$4p^2 - 2p + \frac{1}{4} - 4p^2 + 10 = 0$

$-2p = -10\frac{1}{4}$

$p = 5\frac{1}{8}$

© Noordhoff Uitgevers bv

T7 **a** Het domein van de functie f is $x \geq -2$.
Eerst de vergelijking $f(x) = 7$ oplossen.

$2 - x + 4\sqrt{x+2} = 7$
$4\sqrt{x+2} = x + 5$
$16(x+2) = (x+5)^2$
$16x + 32 = x^2 + 10x + 25$
$x^2 - 6x - 7 = 0$
$(x+1)(x-7) = 0$
$x = -1$ of $x = 7$
Uit de grafiek blijkt dat $f(x) < 7$ voor $-2 \leq x < -1$ of $x > 7$.

b De lijn $y = -x + p$ is een dalende lijn die de grafiek van f nog net snijdt als de lijn door het randpunt $(-2, 4)$ gaat.
Invullen in $y = -x + p$ geeft $4 = 2 + p$ ofwel $p = 2$. Voor $p = 2$ heeft de lijn $y = -x + p$ dus één punt gemeenschappelijk met de grafiek van f.
Voor $p < 2$ heeft de lijn $y = -x + p$ geen snijpunten met de grafiek van f.
Of: het snijpunt bereken je met de vergelijking $2 - x + 4\sqrt{x+2} = -x + p$.
$4\sqrt{x+2} = p - 2$
$\sqrt{x+2} = \frac{1}{4}p - \frac{1}{2}$
De wortel uit een negatief getal bestaat niet, dus zijn er geen snijpunten als $\frac{1}{4}p - \frac{1}{2} < 0$ ofwel $\frac{1}{4}p < \frac{1}{2}$ ofwel $p < 2$.

T8 **a** Voor het snijpunt van $f_5(x)$ met de lijn $k : y = x - 8$ moet je de vergelijking $\frac{5}{x-2} - 2 = x - 8$ oplossen.

$\frac{5}{x-2} = x - 6$
$5 = (x-6)(x-2)$ mits $x \neq 2$
$5 = x^2 - 8x + 12$
$x^2 - 8x + 7 = 0$
$(x-1)(x-7) = 0$
$x = 1$ of $x = 7$
$y = 1 - 8 = -7$ of $y = 7 - 8 = -1$
De coördinaten van de snijpunten zijn $(1, -7)$ en $(7, -1)$.

b Snijpunt met de y-as dan $x = 0$ invullen $f_5(0) = \frac{5}{0-2} - 2 = -4\frac{1}{2}$.
Snijpunt met de x-as dan $f_5(x) = 0$ ofwel $\frac{5}{x-2} - 2 = 0$
$\frac{5}{x-2} = 2$ ofwel $x - 2 = 2\frac{1}{2}$ dus $x = 4\frac{1}{2}$.
$\left(0, -4\frac{1}{2}\right)$ en $\left(4\frac{1}{2}, 0\right)$ liggen even ver van O, namelijk $4\frac{1}{2}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c $\dfrac{1}{(x-2)^2} = \dfrac{4\frac{1}{2}}{x-2} - 2$ substitutie $x-2=p$

$\dfrac{1}{p^2} = \dfrac{4\frac{1}{2}}{p} - 2$ links en recht maal p^2 geeft

$1 = 4\frac{1}{2}p - 2p^2$

$2p^2 - 4\frac{1}{2}p + 1 = 0$

$4p^2 - 9p + 2 = 0$

$D = (-9)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 49$

$p = \dfrac{9-\sqrt{49}}{2 \cdot 4} = \dfrac{9-7}{8} = \frac{1}{4}$ of $p = \dfrac{9+\sqrt{49}}{2 \cdot 4} = \dfrac{9+7}{8} = 2$

omdat $p = x-2$ geldt

$x-2 = \frac{1}{4}$ of $x-2=2$

$x = 2\frac{1}{4}$ of $x=4$

d Snijpunt met de y-as ($x=0$) geeft $f_a(0) = \dfrac{a}{-2} - 2 = -\frac{1}{2}a - 2$.

Snijpunt met de x-as ($f_a(x)=0$) geeft $\dfrac{a}{x-2} = 2$ ofwel $a = 2x-4$ ofwel

$2x = a+4$ dus $x = \frac{1}{2}a + 2$.

De punten $\left(0, -\left(\frac{1}{2}a+2\right)\right)$ en $\left(\frac{1}{2}a+2, 0\right)$ liggen even ver van O, namelijk $\frac{1}{2}a+2$.

Extra oefening

E1 **a** $4(2x-5)+4 = 1-3(8-x)$

$8x-20+4 = 1-24+3x$

$8x-16 = -23+3x$

$5x-16 = -23$

$5x = -7$

$x = -\frac{7}{5} = -1\frac{2}{5}$

b $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x-6\right) = -2x + \frac{1}{3}(x+12)$

$\frac{1}{3}x - 4 = -2x + \frac{1}{3}x + 4$

$\frac{1}{3}x - 4 = -1\frac{2}{3}x + 4$

$2x - 4 = 4$

$2x = 8$ dus $x=4$

E2 **a** $8 = 3x - \frac{1}{4}x^2$

$\frac{1}{4}x^2 - 3x + 8 = 0$

$x^2 - 12x + 32 = 0$

$(x-4)(x-8) = 0$

$x=4$ of $x=8$

b $(4k-3)^2 = 100k^2$

$(4k-3)^2 = (10k)^2$

$4k-3 = 10k$ of $4k-3 = -10k$

$-6k = 3$ of $14k = 3$

$k = -\frac{1}{2}$ of $k = \frac{3}{14}$

c $7x - 15x^2 = 19x - 7x^2$

$-12x - 8x^2 = 0$

$-4x(3+2x) = 0$

$-4x = 0$ of $3+2x = 0$

$x = 0$ of $2x = -3$

$x = 0$ of $x = -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$

d $6x^2(x-2) = 30(x-2)$

$6x^2 = 30$ of $x-2 = 0$

$x^2 = 5$ of $x=2$

$x = \sqrt{5}$ of $x = -\sqrt{5}$ of $x=2$

© Noordhoff Uitgevers bv

E3 **a** $2\sqrt{6-2x} = 18$

$\sqrt{6-2x} = 9$

$6 - 2x = 81$

$-2x = 75$

$x = -37\frac{1}{2}$

b $\sqrt{4+x} - 2 = 5x$

$\sqrt{4+x} = 5x + 2$

$4 + x = (5x + 2)^2$

$4 + x = 25x^2 + 20x + 4$

$25x^2 + 19x = 0$

$x(25x + 19) = 0$

$x = 0$ of $25x + 19 = 0$

$x = 0$ of $x = -\frac{19}{25}$

$x = 0$ invullen geeft

$\sqrt{4+0} - 2 = 5 \cdot 0$, klopt.

$x = -\frac{19}{25}$ invullen geeft

$\sqrt{4+-\frac{19}{25}} - 2 = 5 \cdot -\frac{19}{25}$, klopt niet.

De oplossing is $x = 0$.

c $(3x - 12)\sqrt{5x + 30} = 0$

$3x - 12 = 0$ of $5x + 30 = 0$

$x = 4$ of $x = -6$ (beide voldoen)

d $2x + \sqrt{x - 7} = 20$

$\sqrt{x - 7} = 20 - 2x$

$x - 7 = (20 - 2x)^2$

$x - 7 = 400 - 80x + 4x^2$

$4x^2 - 81x + 407 = 0$

$D = (-81)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 407 = 49$

$x = \frac{81 - 7}{2 \cdot 4} = 9\frac{1}{4}$ of $x = \frac{81 + 7}{2 \cdot 4} = 11$

$x = 9\frac{1}{4}$ invullen geeft

$2 \times 9\frac{1}{4} + \sqrt{9\frac{1}{4} - 7} = 20$, klopt.

$x = 11$ invullen geeft

$2 \times 11 + \sqrt{11 - 7} = 20$, klopt niet.

De oplossing is $x = 9\frac{1}{4}$.

E4 **a** $\frac{112}{2x + 3} = -4$

$-4(2x + 3) = 112$ mits $x \neq -1\frac{1}{2}$

$2x + 3 = -28$

$2x = -31$

$x = -\frac{31}{2} = -15\frac{1}{2}$

b $\frac{1 - 6x}{2x} = 2$

$1 - 6x = 2 \times 2x$ mits $x \neq 0$

$1 - 6x = 4x$

$1 = 10x$

$x = \frac{1}{10}$

c $\frac{3x - 5}{5 - x} = \frac{4}{3x}$

$3x(3x - 5) = 4(5 - x)$

mits $x \neq 5$ en $x \neq 0$

$9x^2 - 15x = 20 - 4x$

$9x^2 - 11x - 20 = 0$

$D = (-11)^2 - 4 \cdot 9 \cdot -20 = 841$

$x = \frac{11 - \sqrt{841}}{2 \cdot 9} = -1$ of $x = \frac{11 + \sqrt{841}}{2 \cdot 9} = 2\frac{2}{9}$

d $\frac{x^2}{x + 4} = \frac{1}{2}x$

$x^2 = \frac{1}{2}x(x + 4)$ mits $x \neq -4$

$x^2 = \frac{1}{2}x^2 + 2x$

$\frac{1}{2}x^2 - 2x = 0$

$\frac{1}{2}x(x - 4) = 0$

$\frac{1}{2}x = 0$ of $x - 4 = 0$

$x = 0$ of $x = 4$

© Noordhoff Uitgevers bv

E5 **a** $(1-3x)^2 = 24 - 5(1-3x)$
substitutie $1-3x = p$
$p^2 = 24 - 5p$
$p^2 + 5p - 24 = 0$
$(p+8)(p-3) = 0$
$p = -8$ of $p = 3$
omdat $p = 1 - 3x$ geldt
$1 - 3x = -8$ of $1 - 3x = 3$
$3x = 9$ of $3x = -2$
$x = 3$ of $x = -\frac{2}{3}$

b $2x^4 + 3 = 5x^2$
substitutie $x^2 = p$
$2p^2 + 3 = 5p$
$2p^2 - 5p + 3 = 0$
$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$
$p = \frac{5-\sqrt{1}}{2 \cdot 2} = 1$ of $p = \frac{5+\sqrt{1}}{2 \cdot 2} = 1\frac{1}{2}$
omdat $p = x^2$ geldt
$x^2 = 1$ of $x^2 = 1\frac{1}{2}$
$x = -1$ of $x = 1$ of $x = -\sqrt{1\frac{1}{2}}$ of $x = \sqrt{1\frac{1}{2}}$

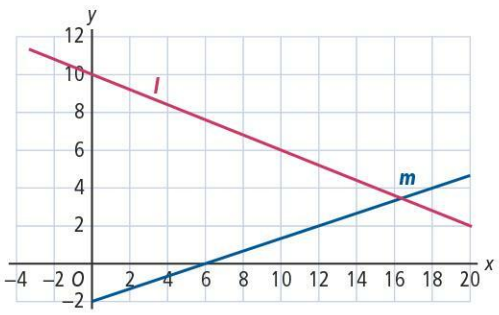
E6 **a** Er moet gelden $f_p(1) = 5$.
$(1-3)^2 + 2p - 9 = 5$
$(-2)^2 + 2p - 9 = 5$
$4 + 2p - 9 = 5$
$2p = 10$
$p = 5$

b Voor het snijpunt met de x-as geldt $(x-3)^2 + 2p - 9 = 0$.
$x^2 - 6x + 9 + 2p - 9 = 0$
$x^2 - 6x + 2p = 0$
Als er geen snijpunt met de x-as is, is de discriminant kleiner dan 0.
$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2p < 0$
$36 - 8p < 0$
$8p > 36$
$p > 4\frac{1}{2}$

E7 **a** $\frac{3}{m} = \sqrt{2+k} - 6$
$\frac{3}{m} + 6 = \sqrt{2+k}$
$\left(\frac{3}{m} + 6\right)^2 = 2 + k$
$k = \left(\frac{3}{m} + 6\right)^2 - 2$

b $y = (2t+7)^2 - 3t$ en $t = 3k - 5$
$y = (2(3k-5) + 7)^2 - 3(3k-5)$
$y = (6k - 10 + 7)^2 - 9k + 15$
$y = (6k-3)^2 - 9k + 15$
$y = 36k^2 - 36k + 9 - 9k + 15$
$y = 36k^2 - 45k + 24$

E8 **a**



b Eerst de vergelijking $-\frac{2}{5}x + 10 = \frac{1}{3}x - 2$ oplossen.
$-6x + 150 = 5x - 30$
$-11x = -180$
$x = \frac{-180}{-11} = 16\frac{4}{11}$
Uit de grafieken blijkt, dat $-\frac{2}{5}x + 10 > \frac{1}{3}x - 2$ voor $x < 16\frac{4}{11}$

© Noordhoff Uitgevers bv

E9 **a** $S(3, 5)$ ligt op lijn k , dus $a \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 7$ ofwel $5a = 1$, dus $a = \frac{1}{5}$

S ligt ook op lijn m, dus $6 \cdot 3 - 5 \cdot 5 = b \cdot 3$ ofwel $3b = -7$, dus $b = -\frac{7}{3} = -2\frac{1}{3}$

b $m : 6x - 5y = 14x$ ofwel $-5y = 8x$, dus $y = -1\frac{3}{5}x$.

$k : ay + 2x = 7$ ofwel $ay = -2x + 7$, dus $y = -\frac{2}{a}x + \frac{7}{a}$

De lijnen snijden elkaar niet als ze evenwijdig zijn, dus als de richtingscoëfficiënten gelijk zijn.

$-\frac{2}{a} = -1\frac{3}{5}$

$-2 = -1\frac{3}{5}a$

$8a = 10$ dus $a = 1\frac{1}{4}$

c De grafiek van f en de lijn l hebben één gemeenschappelijk punt, dus de vergelijking $x^2 + 3x + 2 = -x + b$ heeft één oplossing (discriminant 0).

$x^2 + 4x + 2 - b = 0$

$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2 - b) = 0$

$16 - 8 + 4b = 0$

$4b = -8$

$b = -2$

E10 **a** l: $4x + 2y = 45$ ofwel $2y = -4x + 45$, dus $y = -2x + 22\frac{1}{2}$

$-2x(x - 8) = -2x + 22\frac{1}{2}$

$-2x^2 + 16x = -2x + 22\frac{1}{2}$

$-2x^2 + 18x - 22\frac{1}{2} = 0$

$D = 18^2 - 4 \cdot -2 \cdot -22\frac{1}{2} = 144$

$x = \frac{-18 - \sqrt{144}}{2 \cdot -2} = 7\frac{1}{2}$ of $x = \frac{-18 + \sqrt{144}}{2 \cdot -2} = 1\frac{1}{2}$

Invullen in de vergelijking van de lijn geeft

$y = -2 \cdot 7\frac{1}{2} + 22\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$ of $y = -2 \cdot 1\frac{1}{2} + 22\frac{1}{2} = 19\frac{1}{2}$

De snijpunten zijn $\left(7\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}\right)$ en $\left(1\frac{1}{2}, 19\frac{1}{2}\right)$.

b $f(6) = -12(6 - 8) = 24$ en $l : y = -2 \cdot 6 + 22\frac{1}{2} = 10\frac{1}{2}$

$AB = 24 - 10\frac{1}{2} = 13\frac{1}{2}$

c De y-coördinaten van punt A en punt B krijg je door $x = p$ in te vullen.
De y-coördinaten van punt A is dan $-2p(p - 8)$ en de y-coördinaat van punt B is $-2p + 22\frac{1}{2}$.

A ligt boven B dus de afstand $AB = -2p(p - 8) - \left(-2p + 22\frac{1}{2}\right) = 6\frac{1}{2}$.

$-2p^2 + 16p + 2p - 22\frac{1}{2} = 6\frac{1}{2}$

$2p^2 - 18p + 29 = 0$

$D = (-18)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 29 = 92$

$p = \frac{18 - \sqrt{92}}{2 \cdot 2} = 4\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{23}$ of $p = \frac{18 + \sqrt{92}}{2 \cdot 2} = 4\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{23}$

© Noordhoff Uitgevers bv

E11 **a** voor het linker snijpunt geldt
$f(x) = g(x)$
$x + 5 = -4x$
$5x = -5$
$x = -1$
voor het middelste snijpunt geldt
$g(x) = h(x)$
$-4x = 2x - 6$
$-6x = -6$
$x = 1$
voor het rechter snijpunt geldt
$f(x) = h(x)$
$x + 5 = 2x - 6$
$-x = -11$
$x = 11$

b uit de figuur blijkt $f(x) > g(x)$ voor $x > -1$.

c eerst $h(x) = 0$ oplossen.
$2x - 6 = 0$
$2x = 6$
$x = 3$
uit de figuur blijkt
$0 \le h(x) < f(x)$ voor $3 \le x < 11$

d $(f(x))^2 = (h(x))^2$
$(x + 5)^2 = (2x - 6)^2$
$x + 5 = 2x - 6$ of $x + 5 = -2x + 6$
$-x = -11$ of $3x = 1$
$x = 11$ of $x = \frac{1}{3}$

e $f(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot h(x)$
$(x + 5) \cdot -4x = (x + 5) \cdot (2x - 6)$
$x + 5 = 0$ of $-4x = 2x - 6$
$x = -5$ of $x = 1$

E12 **a** $f(-8) = 2 \cdot -8 - \sqrt{-8 + 8} = -16$ en $f(17) = 2 \cdot 17 - \sqrt{17 + 8} = 34 - 5 = 29$
De lijn gaat dus door de punten $A(-8, -16)$ en $B(17, 29)$.
De richtingscoëfficiënt is $\frac{29 - -16}{17 - -8} = \frac{45}{25} = \frac{9}{5}$
De vergelijking is van de vorm $y = \frac{9}{5}x + b$.
Invullen van $x = 17$ en $y = 29$ geeft $29 = \frac{9}{5} \cdot 17 + b$, dus $b = 29 - \frac{153}{5} = -1\frac{3}{5}$
De vergelijking is $y = 1\frac{4}{5}x - 1\frac{3}{5}$

b $2x - \sqrt{x + 8} = 12$
$2x - 12 = \sqrt{x + 8}$
$(2x - 12)^2 = x + 8$
$4x^2 - 48x + 144 = x + 8$
$4x^2 - 49x + 136 = 0$
$D = (-49)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 136 = 225$
$x = \frac{49 - \sqrt{225}}{2 \cdot 4} = 4\frac{1}{4}$ of $x = \frac{49 + \sqrt{225}}{2 \cdot 4} = 8$
$x = 4\frac{1}{4}$ invullen geeft $2 \cdot 4\frac{1}{4} - \sqrt{4\frac{1}{4} + 8} = 8\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2} \neq 12$ dus klopt niet.
$x = 8$ invullen geeft $2 \cdot 8 - \sqrt{8 + 8} = 16 - 4 = 12$, klopt.
De oplossing is $x = 8$.

© Noordhoff Uitgevers bv

2 Machtsfuncties

Voorkennis

V1

a $2^3 \cdot 2^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$

b $a^4 \cdot a^3 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^7$

c $x^3 \cdot x^6 = x^9$

d $(2^3)^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2^{12}$

e $(x^3)^3 = x^9$

f $(2x^3)^4 = 2x^3 \cdot 2x^3 \cdot 2x^3 \cdot 2x^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 = 16x^{12}$

g $(3x^4)^5 = 243x^{20}$

V2

a $3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$

b $7^2 \cdot 7^7 \cdot 7^3 = 7^{2+7+3} = 7^{12}$

c $\frac{2^7}{2^2} = 2^{7-2} = 2^5$

d $(5^3)^2 \cdot 5^6 = 5^6 \cdot 5^6 = 5^{6+6} = 5^{12}$

e $11 \cdot 11^3 \cdot 11^4 \cdot 11^2 = 11^{1+3+4+2} = 11^{10}$

f $\frac{6 \cdot (6^2)^4}{6^3 \cdot 6^3} = \frac{6 \cdot 6^{2 \cdot 4}}{6^{3+3}} = \frac{6 \cdot 6^8}{6^6} = \frac{6^{1+8}}{6^6} = \frac{6^9}{6^6} = 6^{9-6} = 6^3$

V3

a $K = p^3 \cdot p^4$
$K = p^7$

b $b = (a^4)^2$
$b = a^8$

c $N = g^4 \cdot g^2 \cdot (g^3)^5$
$N = g^4 \cdot g^2 \cdot g^{15}$
$N = g^{21}$

d $P = (q^2)^5 \cdot q^2$
$P = q^{10} \cdot q^2$
$P = q^{12}$

e $r = a \cdot (a^2)^4$
$r = a \cdot a^8$
$r = a^9$

f $h = q^3 \cdot q^2 \cdot q \cdot q^2$
$h = q^8$

V4

a $f(x) = (3x^3)^4$
$f(x) = 3^4 \cdot (x^3)^4$
$f(x) = 81x^{12}$

b $g(p) = (5p^2)^2$
$g(p) = 5^2 \cdot (p^2)^2$
$g(p) = 25p^4$

c $h(u) = \left(\frac{6}{2u^2}\right)^3$
$h(u) = \frac{6^3}{(2u^2)^3}$
$h(u) = \frac{216}{8u^6}$
$h(u) = \frac{27}{u^6}$

d $i(p) = \left(\frac{3}{p^4}\right)^2$
$i(p) = \frac{3^2}{(p^4)^2}$
$i(p) = \frac{9}{p^8}$

e $j(a) = (4a^4)^4 \cdot 2a^3$
$j(a) = 256a^{16} \cdot 2a^3$
$j(a) = 512a^{19}$

f $k(x) = (-2x^3)^3 \cdot (5x)^2$
$k(x) = -8x^9 \cdot 25x^2$
$k(x) = -200x^{11}$

g $l(t) = \frac{18t^2 \cdot t^3}{(3t^2)^2 \cdot t}$
$l(t) = \frac{18t^5}{9t^4 \cdot t}$
$l(t) = \frac{18t^5}{9t^5}$
$l(t) = 2$

h $m(x) = \left(\frac{4}{3x^2}\right)^3 \cdot 9x^5$
$m(x) = \frac{4^3}{(3x^2)^3} \cdot 9x^5$
$m(x) = \frac{64}{27x^6} \cdot 9x^5$
$m(x) = \frac{64}{3x}$

© Noordhoff Uitgevers bv

V5 **a** $f(x) = x^2(x^5 - 2x^2)$
$f(x) = x^7 - 2x^4$

b $g(p) = (p^2)^5 - 3p^7 \cdot p^3$
$g(p) = p^{10} - 3p^{10}$
$g(p) = -2p^{10}$

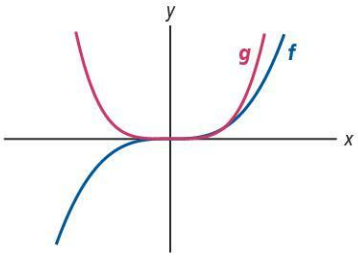
c $A(k) = k^2 \cdot k + 5k^3(1 - 2k^2)$
$A(k) = k^3 + 5k^3 - 10k^5$
$A(k) = 6k^3 - 10k^5$

d $R(t) = t^3(t + t^2) + 3t^4$
$R(t) = t^4 + t^5 + 3t^4$
$R(t) = 4t^4 + t^5$

e $P(n) = n(n^2 + 3n) - n^2(3n - 8)$
$P(n) = n^3 + 3n^2 - 3n^3 + 8n^2$
$P(n) = -2n^3 + 11n^2$

f $h(x) = 5x^3(x - 3) + (x^2 - 5)(x^2 + 5)$
$h(x) = 5x^4 - 15x^3 + x^4 - 25$
$h(x) = 6x^4 - 15x^3 - 25$

V6 **a**



b De vergelijking $x^4 = 81$ heeft twee oplossingen, want in de geschetste grafiek zie je dat er een positieve oplossing en een negatieve oplossing is.

c $x^3 = 125$
$x = 5$

$x^4 = 81$
$x = 3$ of $x = -3$

V7 **a** $\sqrt{169} = 13$, want $13^2 = 169$

b $\sqrt[4]{10\,000} = 10$, want $10^4 = 10\,000$

c $\sqrt[3]{125} = 5$, want $5^3 = 125$

d $\sqrt[3]{-8} = -2$, want $(-2)^3 = -8$

e $\sqrt[5]{-243} = -3$, want $(-3)^5 = -243$

f $\sqrt[4]{-1}$ bestaat niet, want $-1 < 0$

g $\sqrt[10]{1} = 1$, want $1^{10} = 1$

h $\sqrt[3]{512} = 8$, want $8^3 = 512$

2.1 Negatieve exponenten

intro In 2012 waren er 300 konijnen, dus in 2011 waren er 300 : 2 = 150 konijnen en in 2010 waren er 150 : 2 = 75 konijnen.
Ja, dat klopt met de formule, want invullen van $t = -2$ geeft $A = 300 \times 2^{-2} = 75$.

1 **a** **b**

3^5	3^4	3^3	3^2	3^1	3^0	3^{-1}	3^{-2}
243	81	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
	:3	:3	:3	:3	:3	:3	:3

c $3^{-3} = \frac{1}{27}$ en $3^{-4} = \frac{1}{81}$

d $a^0 = 1$ en $a^{-1} = \frac{1}{a}$ en $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

© Noordhoff Uitgevers bv

2 **a** $5^0 = 1$, $4^0 = 1$, $3^0 = 1$, $2^0 = 1$ en $1^0 = 1$
Volgens dit rijtje zou de uitkomst $0^0 = 1$ kunnen zijn.

b $0^5 = 0$, $0^4 = 0$, $0^3 = 0$, $0^2 = 0$ en $0^1 = 0$
Volgens dit rijtje zou de uitkomst $0^0 = 0$ kunnen zijn.

c Op grond van opdracht a zou $k^0 = 1$ kunnen zijn, maar op grond van opdracht b zou $k^0 = 0$ kunnen zijn. In het geval dat $k = 0$ krijgt je twee verschillende mogelijke uitkomsten, dus bestaat k^0 dan niet.

3 **a** $t^{-3} = \frac{1}{t^3}$

b $a^2 \cdot a^{-6} = a^{-4} = \frac{1}{a^4}$

c $\frac{5p \cdot p^0}{(p^2)^3} = \frac{5p}{p^6} = \frac{5}{p^5}$

d $2a^{-8} = \frac{2}{a^8}$

e $7a^4 \cdot 3a^2 \cdot a^{-8} = 21a^{-2} = \frac{21}{a^2}$

f $\frac{8x^4}{2x \cdot x^3} = \frac{8x^4}{2x^4} = 4x^0 = 4$

4 **a** $\frac{5}{a^8} = 5 \cdot \frac{1}{a^8} = 5 \cdot a^{-8} = 5a^{-8}$

$\frac{1}{4p^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{4} \cdot p^{-2} = \frac{1}{4}p^{-2}$

b A $\frac{3}{p^3} = 3 \cdot \frac{1}{p^3} = 3p^{-3}$

B $\frac{2}{9a^8} = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{a^8} = \frac{2}{9}a^{-8}$

C $\frac{1}{6x^4} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x^4} = \frac{1}{6}x^{-4}$

D $\frac{1}{2u^5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u^5} = \frac{1}{2}u^{-5}$

5 **a** $\frac{6x^2}{8x^9} = \frac{6}{8} \cdot x^{-7} = \frac{3}{4}x^{-7}$

b $\frac{1}{(x^2)^3} = \frac{1}{x^6} = x^{-6}$

c $\frac{x^0}{x^7} = \frac{1}{x^7} = x^{-7}$

d $\frac{18x^4}{3x^2 \cdot 2x^3} = \frac{18x^4}{6x^5} = \frac{18}{6} \cdot \frac{x^4}{x^5} = 3x^{-1}$

e $\frac{6x}{3x^9} = \frac{6}{3} \cdot \frac{x}{x^9} = 2 \cdot x^{-8} = 2x^{-8}$

f $\frac{6x^2 \cdot (x^3)^2}{3x} = \frac{6x^2 \cdot x^6}{3x} = \frac{6x^8}{3x} = 2x^7$

6 **a** Er geldt $\frac{7}{a^{-3}} = \frac{7 \cdot 1}{a^{-3}}$ en $1 = a^0$. Invullen daarvan geeft $\frac{7}{a^{-3}} = \frac{7 \cdot 1}{a^{-3}} = \frac{7 \cdot a^0}{a^{-3}}$
Dat is handig, omdat er dan zowel in de teller als in de noemer een macht van a komt te staan.

b Bert komt aan zijn antwoord door de teller en de noemer met a^3 te vermenigvuldigen.

c -

7 **a** $\frac{8}{a^{-9}} = \frac{8 \cdot a^0}{a^{-9}} = 8 \cdot a^{0--9} = 8a^9$ of $\frac{8}{a^{-9}} = \frac{8 \cdot a^9}{a^{-9} \cdot a^9} = \frac{8a^9}{a^0} = \frac{8a^9}{1} = 8a^9$

b $\frac{-12}{d^{-7}} = \frac{-12 \cdot d^0}{d^{-7}} = -12 \cdot d^{0--7} = -12d^7$ of

$\frac{-12}{d^{-7}} = \frac{-12 \cdot d^7}{d^{-7} \cdot d^7} = \frac{-12d^7}{d^0} = \frac{-12d^7}{1} = = -12d^7$

c $\frac{4}{2x^{-3}} = \frac{4}{2} \cdot \frac{x^0}{x^{-3}} = 2 \cdot x^{0--3} = 2x^3$ of $\frac{4}{2x^{-3}} = \frac{4 \cdot x^3}{2x^{-3} \cdot x^3} = \frac{4x^3}{2x^0} = \frac{4x^3}{2 \cdot 1} = 2x^3$

d $\frac{5}{7x^{-2}} = \frac{5}{7} \cdot \frac{x^0}{x^{-2}} = \frac{5}{7} \cdot x^{0--2} = \frac{5}{7}x^2$ of $\frac{5}{7x^{-2}} = \frac{5 \cdot x^2}{7x^{-2} \cdot x^2} = \frac{5x^2}{7x^0} = \frac{5x^2}{7 \cdot 1} = \frac{5}{7}x^2$

© Noordhoff Uitgevers bv

e $\frac{-1}{2p^{-3}} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{p^0}{p^{-3}} = -\frac{1}{2} \cdot p^{0--3} = -\frac{1}{2}p^3$ of

$\frac{-1}{2p^{-3}} = \frac{-1 \cdot p^3}{2p^{-3} \cdot p^3} = \frac{-1 \cdot p^3}{2p^0} = \frac{-1 \cdot p^3}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}p^3$

f $\frac{25}{4a^{-4}} = \frac{25}{4} \cdot \frac{a^0}{a^{-4}} = 6\frac{1}{4} \cdot a^{0--4} = 6\frac{1}{4}a^4$ of

$\frac{25}{4a^{-4}} = \frac{25a^4}{4a^{-4} \cdot a^4} = \frac{25a^4}{4a^0} = \frac{25a^4}{4 \cdot 1} = 6\frac{1}{4}a^4$

8 **a** $\frac{r^4 \cdot r^6}{(r^3)^3} = \frac{r^{10}}{r^9} = r$

b $\frac{(b^2)^4}{(b^3)^2} = \frac{b^8}{b^6} = b^2$

c $\frac{18p^3}{24p^{-2}} = \frac{18}{24} \cdot \frac{p^3}{p^{-2}} = \frac{3}{4}p^5$

d $\frac{d^7 \cdot d^{-1}}{d^8} = \frac{d^6}{d^8} = d^{-2} = \frac{1}{d^2}$

e $\frac{(q^5)^{-2}}{q^4} = \frac{q^{-10}}{q^4} = q^{-14} = \frac{1}{q^{14}}$

f $\frac{4x^5 \cdot x^{-3}}{10x^{-7}} = \frac{4}{10} \cdot \frac{x^2}{x^{-7}} = \frac{2}{5}x^9$

9 **a** $(3x^2)^5 = 3^5 \cdot (x^2)^5 = 243x^{10}$

b $x^2 \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)^4 = x^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot x^4 = \frac{1}{16}x^6$

c $\left(\frac{5}{2^2 \cdot x^3}\right)^3 = \frac{5^3}{(2^2)^3 \cdot (x^3)^3} = \frac{125}{2^6x^9} = \frac{125}{64x^9} = 1\frac{61}{64}x^{-9}$

d $(-4x)^6 = (-4)^6 \cdot x^6 = 4096x^6$

e $3^5 \cdot \left(-\frac{2}{3}x^2\right)^5 = 3^5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^5 \cdot (x^2)^5 = 243 \cdot -\frac{32}{243} \cdot x^{10} = -32x^{10}$

f $\frac{6x^2 \cdot (-2x)^5}{-4(x^2)^{-3}} = \frac{6x^2 \cdot (-2)^5 \cdot x^5}{-4x^{-6}} = \frac{6x^2 \cdot -32x^5}{-4x^{-6}} = \frac{-192}{-4} \cdot \frac{x^7}{x^{-6}} = 48x^{13}$

O3 A = F, rekenregel 4
B = J, rekenregel 1
C = I, rekenregel 3
D = H, rekenregel 5
E = G, rekenregels 3, 1 en 2

O5 **a** Bij stap 1 heeft ze de rekenregels $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$ en $g^0 = 1$ gebruikt.

b Bij stap 2 heeft ze de rekenregel $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$ gebruikt.

c En bij stap 3 heeft ze de rekenregel $\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$ gebruikt.

d $\frac{24x \cdot x^2}{6x^9} = \frac{24}{6} \cdot \frac{x^3}{x^9} = 4x^{-6}$

e $\frac{5x^6}{(x^3)^3} = \frac{5}{1} \cdot \frac{x^6}{x^9} = 5x^{-3}$

f $\frac{x^3 \cdot x^0}{x^4} = \frac{x^3 \cdot 1}{x^4} = \frac{x^3}{x^4} = x^{-1}$

g $\frac{32(x^4)^2}{8x^2 \cdot 2x^4} = \frac{32x^8}{16x^6} = \frac{32}{16} \cdot \frac{x^8}{x^6} = 2x^2$

h $\frac{15x^5}{3x^2} = \frac{15}{3} \cdot \frac{x^5}{x^2} = 5x^3$

i $\frac{45(x^2)^3 \cdot (x^3)^4}{9x^2 \cdot x^0} = \frac{45x^6 \cdot x^{12}}{9x^2 \cdot 1} = \frac{45}{9} \cdot \frac{x^{18}}{x^2} = 5x^{16}$

U1 **a** $x^{a+b} = x^a \cdot x^b = p \cdot q$

b $x^{3b} = (x^b)^3 = q^3$

c $(x^5)^a = x^{5a} = (x^a)^5 = p^5$

d $x^{a-b} = \frac{x^a}{x^b} = \frac{p}{q}$

e $x^{2a+b} = x^{2a} \cdot x^b = (x^a)^2 \cdot x^b = p^2 \cdot q$

f $(x^3)^{-2a+5b} = x^{-6a+15b} = x^{-6a} \cdot x^{15b} = (x^a)^{-6} \cdot (x^b)^{15} = p^{-6} \cdot q^{15}$

© Noordhoff Uitgevers bv

U2 $\dfrac{(x^q)^2 \cdot px^{13} \cdot x^{-2}}{4(x^{-3})^q \cdot x \cdot 3x^2} = \dfrac{x^{2q} \cdot px^{13} \cdot x^{-2}}{4x^{-3q} \cdot x \cdot 3x^2} = \dfrac{px^{2q+11}}{12x^{-3q+3}} = \dfrac{p}{12} \cdot \dfrac{x^{2q+11}}{x^{-3q+3}} =$

$\frac{p}{12}x^{2q+11-(-3q+3)} = \frac{p}{12}x^{2q+11+3q-3} = \frac{p}{12}x^{5q+8}$

Als dit voor elke waarde van x gelijk moet zijn aan 1, dan moet $\frac{p}{12} = 1$ ofwel $p = 12$ zijn. Ook moet dan $5q + 8 = 0$ ofwel $q = \frac{-8}{5} = -1\frac{3}{5}$ zijn.

2.2 Gebroken exponenten

intro De groeifactor per uur is 600 : 100 = 6. Dat zou betekenen dat de groeifactor per half uur maal de groeifactor per half uur 6 zou moeten zijn.
Je weet dat $\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} = 6$, dus de waarde van $6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$.

10 **a** $3^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}7$

b $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3^{\frac{1}{2} \cdot 2} = 3^1 = 3$

c Er geldt ook dat $(\sqrt{3})^2 = 3$. Zowel $3^{\frac{1}{2}}$ als $\sqrt{3}$ zijn positief en daaruit volgt dat $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

d Er geldt dat $\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 4^{\frac{1}{3} \cdot 3} = 4^1 = 4$ en $(\sqrt[3]{4})^3 = 4$. Daaruit volgt dat $4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$.

11 **a** $\sqrt[5]{6} = 6^{\frac{1}{5}}$

b $\sqrt[10]{11} = 11^{\frac{1}{10}}$

c $\sqrt[7]{a} = a^{\frac{1}{7}}$

d $\sqrt{k} = k^{\frac{1}{2}}$

e $k\sqrt{k} = k^1 \cdot k^{\frac{1}{2}} = k^{1\frac{1}{2}}$

f $p^3\sqrt[4]{p} = p^3 \cdot p^{\frac{1}{4}} = p^{3\frac{1}{4}}$

12 **a** $4^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{4}$

b $7^{1\frac{1}{5}} = 7^1 \cdot 7^{\frac{1}{5}} = 7\sqrt[5]{7}$

c $a^{2\frac{1}{7}} = a^2 \cdot a^{\frac{1}{7}} = a^2\sqrt[7]{a}$

d $\left(6^2\right)^{\frac{1}{8}} = 6^{\frac{2}{8}} = 6^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{6}$

e $3^{\frac{1}{8}} \cdot 3 = 3\sqrt[8]{3}$

f $5 \cdot \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 5 \cdot 5^{\frac{1}{6}} = 5\sqrt[6]{5}$

13 **a** $5^{\frac{2}{3}} = (5^2)^{\frac{1}{3}}$

b Er geldt dat $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ en als $a = 5^2$, dan krijg je $5^{\frac{2}{3}} = (5^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$.

14 **a** Ja, beide berekeningen kunnen kloppen.

b Op grond van deze berekeningen kan $(-8)^{\frac{1}{3}}$ zowel 2 als −2 zijn.
Dat kan niet, dus kun je geen waarde aan $(-8)^{\frac{1}{3}}$ toekennen.

15 **a** $7^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{7^2} = \sqrt[5]{49}$

b $5^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{5^5} = \sqrt[6]{3125}$

c $8^{2\frac{3}{7}} = 8^2\sqrt[7]{8^3} = 64\sqrt[7]{512}$

d $(a^2)^{\frac{3}{8}} = a^{\frac{6}{8}} = a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$

e $6^{1\frac{2}{3}} \cdot 6^{\frac{1}{6}} = 6^{1\frac{5}{6}} = 6\sqrt[6]{6^5} = 6\sqrt[6]{7776}$

f $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^2 = 3^2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

g $4^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}$

h $a^{-\frac{2}{7}} = \dfrac{1}{a^{\frac{2}{7}}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{a^2}}$

16 **a** $\sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}$

b $\sqrt[4]{7^3} = 7^{\frac{3}{4}}$

c $\dfrac{1}{\sqrt[5]{6}} = \dfrac{1}{6^{\frac{1}{5}}} = 6^{-\frac{1}{5}}$

d $\sqrt[8]{a^3} = a^{\frac{3}{8}}$

e $\sqrt[10]{a^6} = a^{\frac{6}{10}} = a^{\frac{3}{5}}$

f $\dfrac{1}{\sqrt[5]{a^3}} = \dfrac{1}{a^{\frac{3}{5}}} = a^{-\frac{3}{5}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

17 **a** $\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[12]{2^5} = 2^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{5}{12}} = 2^{\frac{2}{12}+\frac{4}{12}+\frac{5}{12}} = 2^{\frac{11}{12}}$

b $\dfrac{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[10]{7^5}} = \dfrac{7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{3}{5}}}{7^{\frac{5}{10}}} = \dfrac{7^{\frac{5}{15}+\frac{9}{15}}}{7^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{7^{\frac{14}{15}}}{7^{\frac{1}{2}}} = 7^{\frac{14}{15}-\frac{1}{2}} = 7^{\frac{28}{30}-\frac{15}{30}} = 7^{\frac{13}{30}}$

18 **a** $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{4}+\frac{2}{4}} = 3^{\frac{3}{4}}$

b $\dfrac{1}{6\sqrt{6}} = \dfrac{1}{6^1 \cdot 6^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{6^{1\frac{1}{2}}} = 6^{-1\frac{1}{2}}$

c $\dfrac{1}{p\sqrt[5]{p^3}} = \dfrac{1}{p^1 \cdot p^{\frac{3}{5}}} = \dfrac{1}{p^{1\frac{3}{5}}} = p^{-1\frac{3}{5}}$

d $\sqrt[3]{7^2} \cdot \sqrt[6]{7} = 7^{\frac{2}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{6}} = 7^{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}} = 7^{\frac{4}{6}+\frac{1}{6}} = 7^{\frac{5}{6}}$

e $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}} = \dfrac{3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{3}}} = 3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}} = 3^{\frac{1}{6}}$

f $\dfrac{\sqrt[8]{p^5}}{p\sqrt[4]{p}} = \dfrac{p^{\frac{5}{8}}}{p^1 \cdot p^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{p^{\frac{5}{8}}}{p^{1\frac{1}{4}}} = p^{\frac{5}{8}-1\frac{1}{4}} = p^{-\frac{5}{8}}$

19 **a** $a^2 \cdot a^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{a} = a^2 \cdot a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{2-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = a^{2-\frac{3}{6}+\frac{2}{6}} = a^{1\frac{5}{6}} = a^1 \cdot a^{\frac{5}{6}} = a\sqrt[6]{a^5}$

b $\left(a^{-\frac{1}{3}}\right)^5 \cdot a = a^{-\frac{5}{3}} \cdot a^1 = a^{-1\frac{2}{3}+1} = a^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$

c $\dfrac{(2a)^2}{3\sqrt{a}} = \dfrac{4a^2}{3a^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{a^2}{a^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{4}{3}a^{1\frac{1}{2}} = 1\tfrac{1}{3}a^1 \cdot a^{\frac{1}{2}} = 1\tfrac{1}{3}a\sqrt{a}$

d $(a^{-3})^{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[5]{a^2} = a^{-\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{2}{5}} = a^{-\frac{1}{5}} = \dfrac{1}{a^{\frac{1}{5}}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{a}}$

e $a^{-2} \cdot (\sqrt{a})^3 \cdot a^{\frac{2}{5}} = a^{-2} \cdot \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3 \cdot a^{\frac{2}{5}} = a^{-2} \cdot a^{1\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{5}} = a^{-2+1\frac{5}{10}+\frac{4}{10}} = a^{-\frac{1}{10}} = \dfrac{1}{a^{\frac{1}{10}}} = \dfrac{1}{\sqrt[10]{a}}$

f $a\sqrt[5]{a^2} \cdot a^3 \cdot \dfrac{1}{a\sqrt{a}} = a^1 \cdot a^{\frac{2}{5}} \cdot a^3 \cdot \dfrac{1}{a^1 \cdot a^{\frac{1}{2}}} = a^{4\frac{2}{5}} \cdot \dfrac{1}{a^{1\frac{1}{2}}} = a^{4\frac{2}{5}-1\frac{1}{2}} = a^{4\frac{4}{10}-1\frac{5}{10}} = a^{2\frac{9}{10}} = a^2 \cdot a^{\frac{9}{10}} = a^2\sqrt[10]{a^9}$

20 **a** Bij een gewicht van 40 gram oftewel 0,04 kg is de huidoppervlakte $\sqrt[3]{729{,}0 \cdot 0{,}04^2} = \sqrt[3]{1{,}1664} = 1{,}0526\ldots$ dm^2 en dat is ongeveer 105 cm^2.

b Bij de mens is $H = \sqrt[3]{1404{,}9 \cdot G^2} = \sqrt[3]{1404{,}9} \cdot \sqrt[3]{G^2} \approx 11{,}1999G^{\frac{2}{3}}$, dus $a \approx 11{,}2$ en $b = \frac{2}{3}$

c Bij de egel is $H = \sqrt[3]{421{,}9 \cdot G^2} = \sqrt[3]{421{,}9} \cdot \sqrt[3]{G^2} \approx 7{,}5001G^{\frac{2}{3}}$, dus $a \approx 7{,}5$ en $b = \frac{2}{3}$

O15 **a** $5^{\frac{3}{8}}$ is gelijk aan $(5^3)^{\frac{1}{8}}$ en dus gelijk aan $\sqrt[8]{5^3}$

b $7^{3\frac{2}{5}}$ is gelijk aan $7^3 \cdot 7^{\frac{2}{5}}$ en dus gelijk aan $7^3\sqrt[5]{7^2}$

c $a^{-\frac{1}{3}}$ is gelijk aan $\dfrac{1}{a^{\frac{1}{3}}}$ en dus gelijk aan $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}$

d $10^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{10^3} = \sqrt[7]{1000}$

e $8^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{8^3} = \sqrt[4]{512}$

f $6^{2\frac{1}{5}} = 6^2\sqrt[5]{6} = 36\sqrt[5]{6}$

g $\left(a^{\frac{2}{7}}\right)^2 = a^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{a^4}$

h $5^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{9}{12}+\frac{4}{12}} = 5^{1\frac{1}{12}} = 5^{12}\sqrt{5}$

i $4^{\frac{2}{3}} \cdot 4^3 = 4^3\sqrt[3]{4^2} = 64\sqrt[3]{16}$

j $9^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{9}} = \dfrac{1}{3}$

k $a^{-\frac{5}{6}} = \dfrac{1}{a^{\frac{5}{6}}} = \dfrac{1}{\sqrt[6]{a^5}}$

O19 **a** $x^{-\frac{1}{3}} \cdot x = x^{-\frac{1}{3}} \cdot x^1 = x^{-\frac{1}{3}+1} = x^{\frac{2}{3}}$

b $x^2 \cdot \sqrt[4]{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^{2+\frac{1}{4}} = x^{2\frac{1}{4}}$

c De breuk heeft nu de vorm $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{2\frac{1}{4}}}$. Dat is te schijven als $x^{\frac{2}{3}-2\frac{1}{4}} = x^{\frac{8}{12}-2\frac{3}{12}} = x^{-1\frac{7}{12}}$.

d $x^{-1\frac{7}{12}} = \dfrac{1}{x^{1\frac{7}{12}}} = \dfrac{1}{x^1 \cdot x^{\frac{7}{12}}} = \dfrac{1}{x \cdot \sqrt{x^7}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

U3 **a** $x^{\frac{1}{2}a} = (x^a)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^a} = \sqrt{p}$

b $x^{\frac{2}{3}b} = (x^b)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(x^b)^2} = \sqrt[3]{q^2}$

c $\sqrt[3]{x^{2a}} = \sqrt[3]{(x^a)^2} = \sqrt[3]{p^2}$ of $\sqrt[3]{x^{2a}} = x^{\frac{2a}{3}} = (x^a)^{\frac{2}{3}} = p^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{p^2}$

d $x^{\frac{1}{3}a+\frac{1}{4}b} = x^{\frac{1}{3}a} \cdot x^{\frac{1}{4}b} = (x^a)^{\frac{1}{3}} \cdot (x^b)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{x^a} \cdot \sqrt[4]{x^b} = \sqrt[3]{p} \cdot \sqrt[4]{q}$

e $x^{2a-\frac{2}{5}b} = \dfrac{x^{2a}}{x^{\frac{2}{5}b}} = \dfrac{(x^a)^2}{(x^b)^{\frac{2}{5}}} = \dfrac{(x^a)^2}{\sqrt[5]{(x^b)^2}} = \dfrac{p^2}{\sqrt[5]{q^2}}$

f $(\sqrt[4]{x})^{a-2b} = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^{a-2b} = x^{\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b} = \dfrac{x^{\frac{1}{4}a}}{x^{\frac{1}{2}b}} = \dfrac{(x^a)^{\frac{1}{4}}}{(x^b)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\sqrt[4]{x^a}}{\sqrt{x^b}} = \dfrac{\sqrt[4]{p}}{\sqrt{q}}$

U4 Er geldt dat $\sqrt[b]{2^a} = 2^{\frac{a}{b}}$ en $2\sqrt{2} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1\frac{1}{2}}$. De grondtallen zijn gelijk, dus de exponenten moeten dan ook gelijk zijn en dat geeft $\frac{a}{b} = 1\frac{1}{2}$.
Een formule voor het verband tussen a en b is $\frac{a}{b} = 1\frac{1}{2}$ ofwel $a = 1\frac{1}{2}b$.

2.3 Machtsfuncties

intro Invullen van bijvoorbeeld $x = 0$ geeft $f(0) = 0^{-1} = \frac{1}{0}$ en dat kan niet, dus grafiek B hoort bij de functie f.
Invullen van bijvoorbeeld $x = 0$ geeft $g(0) = 0^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0} = 0$, dus grafiek A hoort bij de functie g.

21 **a** Bij grafiek 1 hoort de functie g, bij grafiek 2 hoort de functie h, bij grafiek 3 hoort de functie f en bij grafiek 4 hoort de functie i.

b De grafieken 1 en 4 zijn lijnsymmetrisch.

c De grafieken 2 en 3 zijn puntsymmetrisch.

22 **a** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

b Grafiek B hoort bij f, want bijvoorbeeld $x = -1$ invullen geeft $f(-1) = \frac{1}{-1} = -1$.

Grafiek A hoort bij g, want bijvoorbeeld $x = -1$ invullen geeft $g(-1) = \frac{1}{(-1)^2} = \frac{1}{1} = 1$.

c Van beide grafieken is de verticale asymptoot de lijn $x = 0$ en de horizontale asymptoot de lijn $y = 0$.

d Van functie g is de grafiek lijnsymmetrisch.

e Van functie f is de grafiek puntsymmetrisch.

23 **a** Grafiek A hoort bij g, want bijvoorbeeld $x = -1$ invullen geeft $g(-1) = (-1)^{-4} = \frac{1}{(-1)^4} = \frac{1}{1} = 1$. Grafiek B hoort bij f, want bijvoorbeeld $x = -1$ invullen geeft $f(-1) = (-1)^{-3} = \frac{1}{(-1)^3} = \frac{1}{-1} = -1$.

b Van de functie g is de grafiek lijnsymmetrisch.

c Van de functie f is de grafiek puntsymmetrisch.

d De grafiek van deze functie is lijnsymmetrisch. Je kunt $h(x) = x^{-12}$ schrijven als $h(x) = \dfrac{1}{x^{12}}$ en dan zie je dat de uitkomst bij $x = a$ altijd gelijk is aan de uitkomst bij $x = -a$, want $\dfrac{1}{(-a)^{12}} = \dfrac{1}{(-1)^{12} \cdot a^{12}} = \dfrac{1}{1 \cdot a^{12}} = \dfrac{1}{a^{12}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

24 **a** $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ en $g(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$

b Grafiek B hoort bij f, want bijvoorbeeld $x = 4$ invullen geeft $f(4) = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$. En grafiek A hoort bij g, want bijvoorbeeld $x = 4$ invullen geeft $g(4) = 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}6$.

25 **a** $f(4) = 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8{,}00$, $g(4) = 4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16} \approx 2{,}52$
$h(4) = 4^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{4} \approx 1{,}41$ en $k(4) = 4^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{4} \approx 1{,}32$.

b Grafiek A hoort bij de functie k, grafiek B hoort bij de functie h, grafiek C hoort bij de functie g en grafiek D hoort bij de functie f.

c De vier grafieken hebben de punten $(0, 0)$ en $(1, 1)$ gemeenschappelijk.

d Ja, de twee punten uit opdracht c liggen ook op de grafiek van l, want $l(0) = 0^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{0^3} = \sqrt[4]{0} = 0$ en $l(1) = 1^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{1^3} = \sqrt[4]{1} = 1$.

26 **a** $g(x) = x^{2\frac{1}{2}}$
$g(x) = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}$
$g(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$

b $g(x) = x^{4\frac{1}{3}}$
$g(x) = x^4 \cdot x^{\frac{1}{3}}$
$g(x) = x^4 \cdot \sqrt[3]{x}$

c $g(x) = x^{3\frac{1}{5}}$
$g(x) = x^3 \cdot x^{\frac{1}{5}}$
$g(x) = x^3 \cdot \sqrt[5]{x}$

d $g(x) = x^{3\frac{2}{5}}$
$g(x) = x^3 \cdot x^{\frac{2}{5}}$
$g(x) = x^3 \cdot \sqrt[5]{x^2}$

e $g(x) = x^{1\frac{2}{3}}$
$g(x) = x^1 \cdot x^{\frac{2}{3}}$
$g(x) = x \cdot \sqrt[3]{x^2}$

f $g(x) = x^{2\frac{4}{7}}$
$g(x) = x^2 \cdot x^{\frac{4}{7}}$
$g(x) = x^2 \cdot \sqrt[7]{x^4}$

27 **a** $f(3) = 3^{0{,}57} \approx 1{,}87$ en $g(3) = 3^{1{,}68} \approx 6{,}33$.

b Grafiek A hoort bij de functie g en grafiek B hoort bij de functie f.

c Voor iedere waarde $a > 1{,}68$ geldt dat de grafiek van de functie $h(x) = x^a$ bij elke waarde van $x > 1$ hoger ligt dan grafiek A.

28 **a** Invullen van $c = 44$ en $d = 0{,}36$ in de formule geeft dat hoogte van de boom $h = 44 \times 0{,}36^{0{,}65} \approx 22{,}6$ meter is.

b Invullen van $h = 18$ en $d = 0{,}20$ in de formule geeft $c \cdot 0{,}20^{0{,}65} = 18$
dus $c = \dfrac{18}{0{,}20^{0{,}65}} \approx 51$.

O**26** **a** Bij de laatste stap is de rekenregel $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$ gebruikt.

b Op de puntjes komt het getal $\frac{2}{3}$ te staan.

c $g(x) = x^4 \cdot \sqrt[3]{x^2}$

d $g(x) = x^{1\frac{1}{5}}$
$g(x) = x^1 \cdot x^{\frac{1}{5}}$
$g(x) = x \cdot \sqrt[5]{x}$

e $g(x) = x^{2\frac{1}{2}}$
$g(x) = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}$
$g(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$

f $g(x) = x^{1\frac{2}{3}}$
$g(x) = x^1 \cdot x^{\frac{2}{3}}$
$g(x) = x \cdot \sqrt[3]{x^2}$

g $g(x) = x^{7\frac{3}{7}}$
$g(x) = x^7 \cdot x^{\frac{3}{7}}$
$g(x) = x^7 \cdot \sqrt[7]{x^3}$

h $g(x) = x^{4\frac{4}{5}}$
$g(x) = x^4 \cdot x^{\frac{4}{5}}$
$g(x) = x^4 \cdot \sqrt[5]{x^4}$

i $g(x) = x^{3\frac{5}{9}}$
$g(x) = x^3 \cdot x^{\frac{5}{9}}$
$g(x) = x^3 \cdot \sqrt[9]{x^5}$

U**5** Invullen van $x = 1$ en $y = 6$ geeft $c \cdot 1^a = 6$, dus $c = 6$.
Invullen van $c = 6$, $x = 4$ en $y = 48$ geeft $6 \cdot 4^a = 48$, ofwel $4^a = 8$.
Dat is te schrijven als $(2^2)^a = 2^3$, ofwel $2^{2a} = 2^3$, dus $2a = 3$ en $a = 1\frac{1}{2}$.

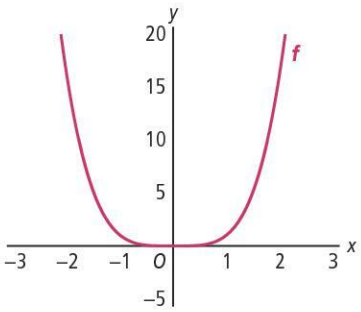
© Noordhoff Uitgevers bv

U6 De grafiek van f gaat door het punt (4, 16). Invullen van $x = 4$ en $y = 16$ in de functie f geeft $0{,}5 \cdot 4^a = 16$, ofwel $4^a = 32$. Dat is te schrijven als $(2^2)^a = 2^5$, ofwel $2^{2a} = 2^5$, dus $2a = 5$ en $a = 2{,}5$.
De grafiek van g gaat door het punt (1, 20)
Invullen van $x = 1$ en $y = 20$ in de functie g geeft $c \cdot 1^b = 20$, dus $c = 20$.
De grafiek van g gaat ook door het punt (4, 40).
Invullen van $c = 20$, $x = 4$ en $y = 40$ geeft $20 \cdot 4^b = 40$, ofwel $4^b = 2$.
Dat is te schrijven als $(2^2)^b = 2^1$, ofwel $2^{2b} = 2^1$, dus $2b = 1$ en $b = 0{,}5$.
Invullen van $x = 8$ geeft $f(8) = 0{,}5 \cdot 8^{2{,}5} \approx 90{,}5$ en $g(8) = 20 \cdot 8^{0{,}5} \approx 56{,}6$.
Bij $x = 4$ ligt de grafiek van f onder de grafiek van g en bij $x = 8$ ligt de grafiek van f boven de grafiek van g, dus het snijpunt ligt links van de lijn $x = 8$.

2.4 Vergelijkingen oplossen

intro $x = 0$ is een oplossing van de vergelijking $x^4 = 4x$.
$x = 4$ is een oplossing van de vergelijking $x^{\frac{1}{2}} = 2$.
$x = 1$ is een oplossing van de vergelijking $x^{-3} = 1$.
$x = \sqrt{5}$ is een oplossing van de vergelijking $x^2 = 5$.
$x = \sqrt[3]{5}$ is geen oplossing van een van de vergelijkingen.
$x = -\sqrt{5}$ is een oplossing van de vergelijking $x^2 = 5$.
$x = 8$ is een oplossing van de vergelijking $x^{\frac{2}{3}} = 4$.

29 a



b De vergelijking $x^4 = 16$ heeft twee oplossingen.
c Invullen van $x = 2$ geeft $2^4 = 16$ en dat klopt en invullen van $x = -2$ geeft $(-2)^4 = 16$ en dat klopt ook.
d Invullen van $x = -2$ geeft $(-2)^5 = -32$ en dat klopt.
Het is de enige oplossing, want een positief getal tot de macht 5 heeft een positief getal als uitkomst.
e $\sqrt[3]{-1000} = \sqrt[3]{-1 \cdot 1000} = \sqrt[3]{-1} \times \sqrt[3]{1000} = -1 \times \sqrt[3]{1000} = -\sqrt[3]{1000}$.

30 a $x^5 = 32$
$x = \sqrt[5]{32} = 2$

b $p^4 = 20$
$p = \sqrt[4]{20}$ of $p = -\sqrt[4]{20}$

c $y^3 = -12$
$y = \sqrt[3]{-12}$

d $q^4 - 47 = 34$
$q^4 = 81$
$q = \sqrt[4]{81} = 3$ of $q = -\sqrt[4]{81} = -3$

e $7 + 2k^8 = 4$
$2k^8 = -3$
$k^8 = -1{,}5$
geen oplossing

f $0{,}2x^3 = -12$
$x^3 = -60$
$x = \sqrt[3]{-60}$

© Noordhoff Uitgevers bv

31 **a** Bij stap 1 is de rekenregel $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$ gebruikt en bij stap 2 dat uit $\frac{A}{B} = C$ volgt dat $B \cdot C = A$.

b $3x^5 = 1$
$x^5 = \frac{1}{3}$
$x = \sqrt[5]{\frac{1}{3}}$

c $x^{-5} = 3$
$x^{-5} \cdot x^5 = 3 \cdot x^5$
$1 = 3x^5$
$x^5 = \frac{1}{3}$
$x = \sqrt[5]{\frac{1}{3}}$

32 **a** $x^{-5} = 8$
$\frac{1}{x^5} = 8$
$8x^5 = 1$
$x^5 = \frac{1}{8}$
$x = \sqrt[5]{\frac{1}{8}}$

b $x^{-4} = 3$
$\frac{1}{x^4} = 3$
$3x^4 = 1$
$x^4 = \frac{1}{3}$
$x = \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ of $x = -\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$

c $x^{-6} = \frac{1}{4}$
$\frac{1}{x^6} = \frac{1}{4}$
$x^6 = 4$
$x = \sqrt[6]{4}$ of $x = -\sqrt[6]{4}$

d $6x^{-3} = 4$
$\frac{6}{x^3} = 4$
$4x^3 = 6$
$x^3 = 1\frac{1}{2}$
$x = \sqrt[3]{1\frac{1}{2}}$

e $8x^{-1} + 9 = 10$
$\frac{8}{x} + 9 = 10$
$\frac{8}{x} = 1$
$x = 8$

f $100 - 5x^{-2} = 80$
$100 - \frac{5}{x^2} = 80$
$\frac{5}{x^2} = 20$
$20x^2 = 5$
$x^2 = \frac{1}{4}$
$x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ of $x = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$

33 **a** Het is handig om $x^{\frac{2}{3}}$ tot de macht $\frac{3}{2}$ te verheffen, omdat je dan als macht $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$ krijgt.

b Dat volgt uit de rekenregel $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$.

c Er geldt $\sqrt{125} = \sqrt{25 \cdot 5} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$, dus $p = 5$.

34 **a** $x^{\frac{3}{7}} = 8$
$\left(x^{\frac{3}{7}}\right)^{\frac{7}{3}} = 8^{\frac{7}{3}}$
$x^1 = 8^{\frac{7}{3}}$
$x = \sqrt[3]{8^7} = 128$

b $x^{\frac{5}{9}} = 6$
$\left(x^{\frac{5}{9}}\right)^{\frac{9}{5}} = 6^{\frac{9}{5}}$
$x^1 = 6^{\frac{9}{5}}$
$x = \sqrt[5]{6^9}$

© Noordhoff Uitgevers bv

c $x^{1\frac{1}{2}} = 4$

$\left(x^{1\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$

$x^1 = 4^{\frac{2}{3}}$

$x = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16}$

d $5x^{\frac{4}{5}} = 10$

$x^{\frac{4}{5}} = 2$

$\left(x^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{5}{4}} = 2^{\frac{5}{4}}$

$x^1 = 2^{\frac{5}{4}}$

$x = \sqrt[4]{2^5} = \sqrt[4]{32}$

e $4x^{-\frac{3}{4}} = 8$

$x^{-\frac{3}{4}} = 2$

$\left(x^{-\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{4}{3}} = 2^{-\frac{4}{3}}$

$x^1 = \frac{1}{2^{\frac{4}{3}}}$

$x = \frac{1}{\sqrt[3]{2^4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{16}}$

f $3x^{-2\frac{1}{2}} + 8 = 14$

$3x^{-2\frac{1}{2}} = 6$

$x^{-2\frac{1}{2}} = 2$

$\left(x^{-2\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{5}} = 2^{-\frac{2}{5}}$

$x^1 = \frac{1}{2^{\frac{2}{5}}}$

$x = \frac{1}{\sqrt[5]{2^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{4}}$

35 **a** Het is handig om links en rechts tot de macht $\frac{1}{1{,}35}$ te verheffen, omdat je dan als macht $1{,}35 \times \frac{1}{1{,}35} = 1$ krijgt.

b $x \approx 7{,}43$

36 **a** $x^{3{,}26} = 42$

$x = 42^{\frac{1}{3{,}26}} \approx 3{,}15$

b $x^{1{,}987} = 6{,}23$

$x = 6{,}23^{\frac{1}{1{,}987}} \approx 2{,}51$

c $x^{-0{,}35} = 0{,}975$

$x = 0{,}975^{-\frac{1}{0{,}35}} \approx 1{,}08$

d $5x^{1{,}8} = 100$

$x^{1{,}8} = 20$

$x = 20^{\frac{1}{1{,}8}} \approx 5{,}28$

e $6x^{-2{,}3} + 7 = 25$

$6x^{-2{,}3} = 18$

$x^{-2{,}3} = 3$

$x = 3^{-\frac{1}{2{,}3}} \approx 0{,}62$

f $45 - 8x^{0{,}3498} = 0$

$8x^{0{,}3498} = 45$

$x^{0{,}3498} = 5{,}625$

$x = 5{,}625^{\frac{1}{0{,}3498}} \approx 139{,}45$

37 **a** $8x^5 = x^7$

$8x^5 - x^7 = 0$

$x^5(8 - x^2) = 0$

$x^5 = 0$ of $8 - x^2 = 0$

$x = 0$ of $x^2 = 8$

$x = 0$ of $x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ of $x = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$

b Linda houdt dan de vergelijking $8 = x^2$ over.

c Linda vindt de oplossing $x = 0$ niet.

© Noordhoff Uitgevers bv

38 **a** $x^6 = 4x^4$

$x^6 - 4x^4 = 0$

$x^4(x^2 - 4) = 0$

$x^4 = 0$ of $x^2 - 4 = 0$

$x = 0$ of $x^2 = 4$

$x = 0$ of $x = 2$ of $x = -2$

b $-3x^{13} = 9x^8$

$-3x^{13} - 9x^8 = 0$

$-3x^8(x^5 + 3) = 0$

$-3x^8 = 0$ of $x^5 + 3 = 0$

$x = 0$ of $x^5 = -3$

$x = 0$ of $x = \sqrt[5]{-3}$

c $5x^3 = 80x^7$

$5x^3 - 80x^7 = 0$

$5x^3(1 - 16x^4) = 0$

$5x^3 = 0$ of $1 - 16x^4 = 0$

$x = 0$ of $16x^4 = 1$

$x = 0$ of $x^4 = \frac{1}{16}$

$x = 0$ of $x = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$ of $x = -\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = -\frac{1}{2}$

d $\frac{1}{2}x^9 + 5x^5 = 0$

$\frac{1}{2}x^5(x^4 + 10) = 0$

$\frac{1}{2}x^5 = 0$ of $x^4 + 10 = 0$

$x = 0$ of $x^4 = -10$

$x = 0$

e $3x^2 = 12x\sqrt{x}$

$3x^2 - 12x\sqrt{x} = 0$

$3x\sqrt{x}(\sqrt{x} - 4) = 0$

$3x\sqrt{x} = 0$ of $\sqrt{x} - 4 = 0$

$x = 0$ of $\sqrt{x} = 4$

$x = 0$ of $x = 16$

f $x^2 = 2\sqrt[3]{x}$

$x^2 - 2\sqrt[3]{x} = 0$

$\sqrt[3]{x}(x\sqrt[3]{x^2} - 2) = 0$

$\sqrt[3]{x} = 0$ of $x\sqrt[3]{x^2} - 2 = 0$

$x = 0$ of $x^{1\frac{2}{3}} = 2$

$x = 0$ of $x = 2^{\frac{3}{5}}$

$x = 0$ of $x = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8}$

39 **a** $5x^{-3} = 80x^7$

$5 = 80x^{10}$

$x^{10} = \frac{5}{80} = \frac{1}{16}$

$x = \sqrt[10]{\frac{1}{16}}$ of $x = -\sqrt[10]{\frac{1}{16}}$

b $3x^{-2} = 12$

$3 = 12x^2$

$x^2 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

$x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ of $x = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$

c $2x^{3,67} - 5x^{2,44} = 0$

$x^{2,44}(2x^{1,23} - 5) = 0$

$x^{2,44} = 0$ of $2x^{1,23} - 5 = 0$

$x = 0$ of $2x^{1,23} = 5$

$x = 0$ of $x^{1,23} = 2{,}5$

$x = 0$ of $x = 2{,}5^{\frac{1}{1,23}} \approx 2{,}11$

d $4x^3 \cdot x^{\frac{1}{4}} = 5x^3$

$x^3 \cdot x^{\frac{1}{4}} = \frac{5}{4}x^3$

$x^3 = 0$ of $x^{\frac{1}{4}} = \frac{5}{4}$

$x = 0$ of $x = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{256}$

e $3x^{2,45} + 5 = 80$

$3x^{2,45} = 75$

$x^{2,45} = 25$

$x = 25^{\frac{1}{2,45}} \approx 3{,}72$

f $3x^{2,45} = x$

$3x \cdot x^{1,45} = x$

$x \cdot x^{1,45} = \frac{1}{3}x$

$x = 0$ of $x^{1,45} = \frac{1}{3}$

$x = 0$ of $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{1,45}} \approx 0{,}47$

032 **a** $2x^{-4} - 7 = 5$

$2x^{-4} = 12$

$x^{-4} = 6$

b $x^{-4} = \dfrac{1}{x^4}$

c Uit $x^{-4} = 6$ volgt $\dfrac{1}{x^4} = 6$ en dus $6x^4 = 1$.

d $x^4 = \frac{1}{6}$. De vergelijking heeft twee oplossingen.

© Noordhoff Uitgevers bv

e De oplossing is $x = \sqrt[4]{\frac{1}{6}}$ of $x = -\sqrt[4]{\frac{1}{6}}$.

f $x^{-3} = 8$

$\frac{1}{x^3} = 8$

$8x^3 = 1$

$x^3 = \frac{1}{8}$

$x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

g $x^{-5} = 24$

$\frac{1}{x^5} = 24$

$24x^5 = 1$

$x^5 = \frac{1}{24}$

$x = \sqrt[5]{\frac{1}{24}}$

h $x^{-2} = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$

$x^2 = 4$

$x = 2$ of $x = -2$

i $8x^{-5} = 1$

$\frac{8}{x^5} = 1$

$x^5 = 8$

$x = \sqrt[5]{8}$

j $3x^{-1} - 2 = 7$

$\frac{3}{x} - 2 = 7$

$\frac{3}{x} = 9$

$9x = 3$

$x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

k $79 - 4x^{-4} = 15$

$79 - \frac{4}{x^4} = 15$

$\frac{4}{x^4} = 64$

$64x^4 = 4$

$x^4 = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$

$x = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$ of $x = -\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = -\frac{1}{2}$

O38 **a** Op de puntjes moet $3 - x^{2\frac{1}{2}} = 0$ staan.

b $\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{2}{5}} = 3^{\frac{2}{5}}$, dus $x^1 = 3^{\frac{2}{5}}$

c De oplossing is $x = 0$ of $x = \sqrt[5]{3^2} = \sqrt[5]{9}$.

U7 **a** $5x^3 = x^5$

$5x^3 = x^2 \cdot x^3$

$x^3 = 0$ of $5 = x^2$

$x = 0$ of $x = \sqrt{5}$ of $x = -\sqrt{5}$

De coördinaten van A en B zijn $(-\sqrt{5}, -25\sqrt{5})$ en $(\sqrt{5}, 25\sqrt{5})$.

$AB = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + (50\sqrt{5})^2} = \sqrt{12520}$

b Invullen van $x = 1$ geeft $a \times 1^8 - b \times 1^4 = 10$, ofwel $a - b = 10$.

Invullen van $x = \sqrt[4]{5}$ geeft $a \times \sqrt[4]{5^8} - b \times \sqrt[4]{5^4} = 10$, ofwel $25a - 5b = 10$, dus $5a - b = 2$.

Uit $a - b = 10$ volgt $a = b + 10$. Dat invullen in $5a - b = 2$ geeft $5(b + 10) - b = 2$, oftewel $5b + 50 - b = 2$, dus $4b = -48$ en $b = -12$.

Invullen van $b = -12$ in $a = b + 10$ geeft $a = -12 + 10 = -2$.

Invullen van $a = -2$ en $b = -12$ geeft de vergelijking $-2x^8 + 12x^4 = 10$.

$-2x^8 + 12x^4 - 10 = 0$

$x^8 - 6x^4 + 5 = 0$.

$(x^4 - 1)(x^4 - 5) = 0$

$x^4 - 1 = 0$ of $x^4 - 5 = 0$

$x^4 = 1$ of $x^4 = 5$

$x = \sqrt[4]{1} = 1$ of $x = -\sqrt[4]{1} = -1$ of $x = \sqrt[4]{5}$ of $x = -\sqrt[4]{5}$

Ja, de vergelijking heeft nog meer oplossingen, namelijk $x = -1$ en $x = -\sqrt[4]{5}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

U8 **a** $x^3 + 2x^2 + x = 0$
$x(x^2 + 2x + 1) = 0$
$x(x + 1)(x + 1) = 0$
$x = 0$ of $x + 1 = 0$ of $x + 1 = 0$
$x = 0$ of $x = -1$

b $x^{3,45} + 2x^{2,45} + x^{1,45} = 0$
$x^{1,45}(x^2 + 2x + 1) = 0$
$x^{1,45}(x + 1)(x + 1) = 0$
$x^{1,45} = 0$ of $x + 1 = 0$ of $x + 1 = 0$
$x = 0$ of $x = -1$

c $x^{-3} - 32x^2 = 0$
$1 - 32x^5 = 0$
$32x^5 = 1$
$x^5 = \frac{1}{32}$
$x = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$

d $(x^{7,1} + 1)(x - 3) = (x^{4,7} + 1)(x - 3)$
$x^{7,1} + 1 = x^{4,7} + 1$ of $x - 3 = 0$
$x^{7,1} = x^{4,7}$ of $x = 3$
$x^{4,7} \cdot x^{2,4} = x^{4,7}$ of $x = 3$
$x^{4,7} = 0$ of $x^{2,4} = 1$ of $x = 3$
$x = 0$ of $x = 1$ of $x = 3$

e $(x^5 + 1)^2 = (2x^5 - 1)^2$
$x^5 + 1 = 2x^5 - 1$ of $x^5 + 1 = -(2x^5 - 1)$
$1 = x^5 - 1$ of $x^5 + 1 = -2x^5 + 1$
$x^5 = 2$ of $3x^5 = 0$
$x = \sqrt[5]{2}$ of $x^5 = 0$
$x = \sqrt[5]{2}$ of $x = 0$

f $\frac{8x^3 + x^2}{x - 1} = x + 1$
$8x^3 + x^2 = (x + 1)(x - 1)$
$8x^3 + x^2 = x^2 - 1$
$8x^3 = -1$
$x^3 = -\frac{1}{8}$
$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}$

2.5 Herleiden

intro Invullen van $L = 190$ geeft $H = 0{,}0463 \cdot 190^{0{,}725} \approx 2{,}078$ en
$190 = 69{,}3636 \cdot H^{1{,}379}$, oftewel $H^{1{,}379} = \frac{190}{69{,}3636}$, dus $H = \left(\frac{190}{69{,}3636}\right)^{\frac{1}{1{,}379}} \approx 2{,}077$.
Ja, beide formules leveren (ongeveer) dezelfde huidoppervlakte op.

40 **a** $f(x) = x \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}$
$f(x) = x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}}$
$f(x) = x^{1 + \frac{3}{6} + \frac{2}{6}}$
$f(x) = x^{1\frac{5}{6}}$

b $g(x) = \frac{3}{x\sqrt{x}} \cdot (x^2)^4 \cdot 5x^{-3}$
$g(x) = \frac{3}{x^{1\frac{1}{2}}} \cdot x^8 \cdot 5x^{-3}$
$g(x) = 3x^{-1\frac{1}{2}} \cdot x^8 \cdot 5x^{-3}$
$g(x) = 15x^{-1\frac{1}{2} + 8 - 3}$
$g(x) = 15x^{3\frac{1}{2}}$

c De herleiding geldt niet voor $x = 0$, omdat er dan 0 in de noemer van de breuk komt en delen door 0 kan niet.

41 **a** $f(x) = 2x^3 \cdot \sqrt{x}$
$f(x) = 2x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}}$
$f(x) = 2x^{3\frac{1}{2}}$

b $f(x) = \frac{(2x)^3}{16x^{-\frac{1}{2}}}$
$f(x) = \frac{8x^3}{16x^{-\frac{1}{2}}}$
$f(x) = \frac{1}{2}x^{3\frac{1}{2}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

c $f(x) = x^{-2} \cdot \sqrt{4x}$

$f(x) = x^{-2} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{x}$

$f(x) = x^{-2} \cdot 2 \cdot x^{\frac{1}{2}}$

$f(x) = 2x^{-1\frac{1}{2}}$

d $f(x) = \dfrac{8x^2 \cdot \sqrt[7]{x^3}}{x^3 \cdot \sqrt{x}}$

$f(x) = \dfrac{8x^2 \cdot x^{\frac{3}{7}}}{x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}}}$

$f(x) = \dfrac{8x^{2\frac{3}{7}}}{x^{3\frac{1}{2}}}$

$f(x) = 8x^{2\frac{3}{7}-3\frac{1}{2}}$

$f(x) = 8x^{-1\frac{1}{14}}$

42 **a** In stap 2 is rechts en links door 10 gedeeld.

b In stap 4 is de rekenregel $(p \cdot q)^a = p^a \cdot q^a$ toegepast.

c $q \approx 0{,}16 \cdot p^{0{,}8}$

43 **a** $P = Q^{\frac{1}{4}}$

$Q^{\frac{1}{4}} = P$

$Q = P^4$

b $P = 25 \cdot Q^{3{,}5}$

$25 \cdot Q^{3{,}5} = P$

$Q^{3{,}5} = \frac{1}{25} \cdot P$

$Q = \left(\frac{1}{25} \cdot P\right)^{\frac{1}{3{,}5}}$

$Q = \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3{,}5}} \cdot P^{\frac{1}{3{,}5}}$

$Q \approx 0{,}40 \cdot P^{0{,}29}$

c $P = 0{,}01 \cdot Q^{0{,}375}$

$0{,}01 \cdot Q^{0{,}375} = P$

$Q^{0{,}375} = 100 \cdot P$

$Q = (100 \cdot P)^{\frac{1}{0{,}375}}$

$Q = 100^{\frac{1}{0{,}375}} \cdot P^{\frac{1}{0{,}375}}$

$Q \approx 215443{,}47 \cdot P^{2{,}67}$

d $P = 0{,}75 \cdot Q^{1\frac{2}{7}}$

$0{,}75 \cdot Q^{1\frac{2}{7}} = P$

$Q^{1\frac{2}{7}} = \frac{1}{0{,}75} P$

$Q = \left(\frac{1}{0{,}75} \cdot P\right)^{\frac{7}{9}}$

$Q = \left(\frac{1}{0{,}75}\right)^{\frac{7}{9}} \cdot P^{\frac{7}{9}}$

$Q \approx 1{,}25 \cdot P^{0{,}78}$

e $P = 1{,}46 \cdot Q^{-0{,}76}$

$1{,}46 \cdot Q^{-0{,}76} = P$

$Q^{-0{,}76} = \frac{1}{1{,}46} \cdot P$

$Q = \left(\frac{1}{1{,}46} \cdot P\right)^{-\frac{1}{0{,}76}}$

$Q = \left(\frac{1}{1{,}46}\right)^{-\frac{1}{0{,}76}} \cdot P^{-\frac{1}{0{,}76}}$

$Q \approx 1{,}65 \cdot P^{-1{,}32}$

f $P = 1000 \cdot Q^{-3}$

$1000 \cdot Q^{-3} = P$

$Q^{-3} = \frac{1}{1000} \cdot P$

$Q = \left(\frac{1}{1000} \cdot P\right)^{-\frac{1}{3}}$

$Q = \left(\frac{1}{1000}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot P^{-\frac{1}{3}}$

$Q \approx 10 \cdot P^{-0{,}33}$

44 **a** Invullen van $H = 0{,}750$ geeft $0{,}012 \cdot L^{0{,}67} = 0{,}750$, oftewel $L^{0{,}67} = 62{,}5$, dus

$L = 62{,}5^{\frac{1}{0{,}67}} = 479{,}0909\ldots$

Het gemiddelde lichaamsgewicht van een giraffe is ongeveer 479 kg.

b In de formule L door $2L$ vervangen geeft $H = 0{,}012 \cdot (2L)^{0{,}67}$, ofwel $H = 0{,}012 \cdot 2^{0{,}67} \cdot L^{0{,}67}$.

Als het lichaamsgewicht verdubbelt, dan wordt H met $2^{0{,}67} \approx 1{,}59$ vermenigvuldigd. Dat is een toename van H met ongeveer 59%.

c $0{,}012 \cdot L^{0{,}67} = H$

$L^{0{,}67} = \frac{1}{0{,}012} \cdot H$

$L = \left(\frac{1}{0{,}012} \cdot H\right)^{\frac{1}{0{,}67}}$

$L = \left(\frac{1}{0{,}012}\right)^{\frac{1}{0{,}67}} \cdot H^{\frac{1}{0{,}67}}$

$L \approx 736{,}03 \cdot H^{1{,}49}$

© Noordhoff Uitgevers bv

45 **a** Invullen van $G = 360\,000$ geeft dat het vleugeloppervlak $0{,}1 \times 360\,000^{0{,}67} \approx 528$ m^2 is.

b $Q = 0{,}1 \cdot G^{0{,}67}$

$0{,}1 \cdot G^{0{,}67} = Q$

$G^{0{,}67} = 10 \cdot Q$

$G = (10 \cdot Q)^{\frac{1}{0{,}67}}$

$G = 10^{\frac{1}{0{,}67}} \cdot Q^{\frac{1}{0{,}67}}$

$G \approx 31{,}08 \cdot Q^{1{,}49}$

Dus $a \approx 31{,}08$ en $b \approx 1{,}49$.

c Invullen van $Q = 350$ geeft $G = 10^{\frac{1}{0{,}67}} \times 350^{\frac{1}{0{,}67}} = 194\,829{,}08\ldots$.
Dit vliegtuig mag maximaal ongeveer $194\,830 - 150\,000 = 44\,830$ kg personen en vracht meenemen.

041 **a** $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

b $8x^2 \cdot \sqrt[3]{x} = 8x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = 8x^{2\frac{1}{3}}$

c De noemer $(2x^3)^2$ is gelijk aan $2^2 \cdot (x^3)^2$ en dus gelijk aan $4x^6$.

d $f(x) = \dfrac{8x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}{(2x^3)^2}$

$f(x) = \dfrac{8x^{2\frac{1}{3}}}{4x^6}$

$f(x) = 2 \cdot x^{2\frac{1}{3}-6}$

$f(x) = 2 \cdot x^{-3\frac{2}{3}}$

043 **a** In stap 2 is links en rechts door 0,5 gedeeld of met 2 vermenigvuldigd.

b $Q = (2 \cdot P)^{\frac{1}{0{,}4}}$

$Q = (2 \cdot P)^{2{,}5}$

c $Q = 2^{2{,}5} \cdot P^{2{,}5}$

$Q \approx 5{,}66 \cdot P^{2{,}5}$

d $P = Q^{\frac{1}{3}}$

$Q^{\frac{1}{3}} = P$

$Q = P^3$

e $P = 10 \cdot Q^{2{,}5}$

$10 \cdot Q^{2{,}5} = P$

$Q^{2{,}5} = \frac{1}{10} \cdot P$

$Q = \left(\frac{1}{10} \cdot P\right)^{\frac{1}{2{,}5}}$

$Q = \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{2{,}5}} \cdot P^{\frac{1}{2{,}5}}$

$Q \approx 0{,}40 \cdot P^{0{,}4}$

f $P = 0{,}25 \cdot Q^{0{,}125}$

$0{,}25 \cdot Q^{0{,}125} = P$

$Q^{0{,}125} = 4 \cdot P$

$Q = (4 \cdot P)^{\frac{1}{0{,}125}}$

$Q = 4^{\frac{1}{0{,}125}} \cdot P^{\frac{1}{0{,}125}}$

$Q = 65\,536 \cdot P^8$

g $P = \frac{2}{3} \cdot Q^{1\frac{3}{5}}$

$\frac{2}{3} \cdot Q^{1\frac{3}{5}} = P$

$Q^{1\frac{3}{5}} = \frac{3}{2} \cdot P$

$Q = \left(\frac{3}{2} \cdot P\right)^{\frac{5}{8}}$

$Q = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{5}{8}} \cdot P^{\frac{5}{8}}$

$Q \approx 1{,}29 \cdot P^{0{,}63}$

© Noordhoff Uitgevers bv

h $P = 0{,}72 \cdot Q^{-1{,}4}$

$0{,}72 \cdot Q^{-1{,}4} = P$

$Q^{-1{,}4} = \frac{1}{0{,}72} \cdot P$

$Q = \left(\frac{1}{0{,}72} \cdot P\right)^{-\frac{1}{1{,}4}}$

$Q = \left(\frac{1}{0{,}72}\right)^{-\frac{1}{1{,}4}} \cdot P^{-\frac{1}{1{,}4}}$

$Q \approx 0{,}79 \cdot P^{-0{,}71}$

i $P = 100 \cdot Q^{-5}$

$100 \cdot Q^{-5} = P$

$Q^{-5} = \frac{1}{100} \cdot P$

$Q = \left(\frac{1}{100} \cdot P\right)^{-\frac{1}{5}}$

$Q = \left(\frac{1}{100}\right)^{-\frac{1}{5}} \cdot P^{-\frac{1}{5}}$

$Q \approx 2{,}51 \cdot P^{-0{,}2}$

U9 **a** Je kunt de vergelijking $x^3 = y^4$ schrijven als $x = y^{\frac{4}{3}}$.
Invullen in de andere vergelijking geeft $\left(y^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + y^2 = 12$, ofwel $y^2 + y^2 = 12$, dus $2y^2 = 12$ of $y^2 = 6$. Dit geeft $y = \sqrt{6}$ of $y = -\sqrt{6}$.
Invullen van $y = \sqrt{6}$ in de vergelijking $x^3 = y^4$ geeft $x^3 = \sqrt{6}^4$, ofwel $x^3 = 36$, dus $x = \sqrt[3]{36}$.
Invullen van $y = -\sqrt{6}$ in de vergelijking $x^3 = y^4$ geeft $x^3 = (-\sqrt{6})^4$, ofwel $x^3 = 36$, dus $x = \sqrt[3]{36}$.
De oplossing is $x = \sqrt[3]{36}$ en $y = \sqrt{6}$, of $x = \sqrt[3]{36}$ en $y = -\sqrt{6}$.

b Je kunt de vergelijking $\sqrt{y} = x^{1\frac{3}{7}}$ schrijven als $y = x^{2\frac{6}{7}}$.
Invullen in de andere vergelijking geeft $2x^{\frac{4}{7}} - \left(x^{2\frac{6}{7}}\right)^{\frac{1}{4}} = 0$, ofwel $2x^{\frac{4}{7}} - x^{\frac{5}{7}} = 0$, dus $x^{\frac{4}{7}}\left(2 - x^{\frac{1}{7}}\right) = 0$. Dit geeft $x^{\frac{4}{7}} = 0$ of $x^{\frac{1}{7}} = 2$, dus $x = 0$ of $x = 128$.
Invullen van $x = 0$ in de vergelijking $\sqrt{y} = x^{1\frac{3}{7}}$ geeft $\sqrt{y} = 0^{1\frac{3}{7}}$, dus $y = 0$.
Invullen van $x = 128$ in de vergelijking $\sqrt{y} = x^{1\frac{3}{7}}$ geeft $\sqrt{y} = 128^{1\frac{3}{7}}$, ofwel $\sqrt{y} = 1024$, dus $y = 1\,048\,576$.
De oplossing is $x = 0$ en $y = 0$, of $x = 128$ en $y = 1\,048\,576$.

U10 $P = m \cdot Q^{1\frac{1}{3}}$

$m \cdot Q^{1\frac{1}{3}} = P$

$Q^{1\frac{1}{3}} = \frac{1}{m} \cdot P$

$Q = \left(\frac{1}{m} \cdot P\right)^{\frac{3}{4}}$

$Q = \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot P^{\frac{3}{4}}$

Er moet gelden dat $\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{8}$, ofwel $\left(m^{-1}\right)^{\frac{3}{4}} = 8^{-1}$ of $m^{-\frac{3}{4}} = 8^{-1}$.

Dit geeft $m = (8^{-1})^{-\frac{4}{3}}$, oftewel $m = 8^{\frac{4}{3}} = 8^{1\frac{1}{3}} = 8^1 \cdot 8^{\frac{1}{3}} = 8 \cdot \sqrt[3]{8} = 8 \cdot 2 = 16$.
Verder geldt dat $b = \frac{3}{4}$.

2.6 Gemengde opdrachten

46 **a** $\frac{(2p)^5}{3p^3 \cdot p^4} = \frac{32p^5}{3p^7} = \frac{32}{3p^2}$

b $\frac{8p^{-4}}{(4p)^2} = \frac{8p^{-4}}{16p^2} = \frac{1}{2p^6}$

c $\frac{p^{-5} \cdot p^0}{p^{0{,}25}} = \frac{1}{p^5 \cdot p^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{p^5 \cdot \sqrt[4]{p}}$

d $\frac{p^{\frac{4}{9}}}{p^{1\frac{1}{6}}} = \frac{p^{\frac{8}{18}}}{p^{1\frac{3}{18}}} = \frac{1}{p^{\frac{13}{18}}} = \frac{1}{\sqrt[18]{p^{13}}}$

47 **a** $3\sqrt[3]{3} = 3^1 \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3^{1\frac{1}{3}}$

b $\frac{7}{\sqrt[9]{7^5}} = \frac{7^1}{7^{\frac{5}{9}}} = 7^{\frac{4}{9}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

c $\sqrt[5]{a^2} \cdot a\sqrt[3]{a^7} = a^{\frac{2}{5}} \cdot a^1 \cdot a^{2\frac{1}{3}} = a^{\frac{6}{15}+1+2\frac{5}{15}} = a^{3\frac{11}{15}}$

d $\dfrac{p\sqrt{p}}{\sqrt[6]{p^5}} = \dfrac{p^{1\frac{1}{2}}}{p^{\frac{5}{6}}} = p^{1\frac{1}{2}-\frac{5}{6}} = p^{1\frac{3}{6}-\frac{5}{6}} = p^{\frac{4}{6}} = p^{\frac{2}{3}}$

48 **a** $2x^{13} = 5$

$x^{13} = 2\frac{1}{2}$

$x = \left(2\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{13}}$

$x = \sqrt[13]{2\frac{1}{2}}$

b $4p^{\frac{2}{7}} = 5$

$p^{\frac{2}{7}} = 1\frac{1}{4}$

$p = \left(1\frac{1}{4}\right)^{\frac{7}{2}}$

$p = \sqrt{\left(1\frac{1}{4}\right)^7}$

c $x^6 - 5x^{-3} = 0$

$x^9 - 5 = 0$

$x^9 = 5$

$x = \sqrt[9]{5}$

d $100 - 5k^4 = 60$

$5k^4 = 40$

$k^4 = 8$

$k = \sqrt[4]{8}$ of $k = -\sqrt[4]{8}$

e $y\sqrt[3]{y} = 12$

$y^1 \cdot y^{\frac{1}{3}} = 12$

$y^{\frac{4}{3}} = 12$

$y = 12^{\frac{3}{4}}$

$y = \sqrt[4]{12^3}$

f $x^5 = 5x^2\sqrt{x}$

$x^{2\frac{1}{2}} \cdot x^{2\frac{1}{2}} = 5x^{2\frac{1}{2}}$

$x^{2\frac{1}{2}} = 0$ of $x^{2\frac{1}{2}} = 5$

$x = 0$ of $x = 5^{\frac{2}{5}}$

$x = 0$ of $x = \sqrt[5]{5^2} = \sqrt[5]{25}$

49 **a** $f(x) = 4x^{-3} - ax^{-5}$

$f(x) = \dfrac{4}{x^3} - \dfrac{a}{x^5}$

$f(x) = \dfrac{4x^2}{x^5} - \dfrac{a}{x^5}$

$f(x) = \dfrac{4x^2 - a}{x^5}$

b De grafiek van f heeft snijpunten met de x-as als $\dfrac{4x^2 - a}{x^5} = 0$ en dat is zo als $4x^2 - a = 0$ en $x \neq 0$.
De vergelijking $4x^2 - a = 0$, ofwel $4x^2 = a$ heeft geen oplossingen als $a < 0$.
De grafiek van f heeft geen snijpunten met de x-as als $a < 0$.

50 **a** Invullen van $R = 778$ en $T = 4329$ geeft $4329 = c \cdot 778^{1,5}$, dus
$c = \dfrac{4329}{778^{1,5}} = 0{,}199\ldots \approx 0{,}2$.

b Invullen van $c = 0{,}2$ en $T = 88$ geeft $88 = 0{,}2 \cdot R^{1,5}$, oftewel $R^{1,5} = 440$, dus
$R = 440^{\frac{1}{1,5}} = 57{,}849\ldots$
Mercurius is gemiddeld ongeveer 58 miljoen km van de zon verwijderd.

c Invullen van $c = 0{,}2$ en $T = 365{,}25$ geeft $365{,}25 = 0{,}2 \cdot R^{1,5}$, oftewel
$R^{1,5} = 1826{,}25$, dus $R = 1826{,}25^{\frac{1}{1,5}} = 149{,}407\ldots$
De afstand van de aarde tot de zon is gemiddeld ongeveer 149 miljoen km.

d $T = 0{,}2 \cdot R^{1,5}$
$0{,}2 \cdot R^{1,5} = T$
$R^{1,5} = 5 \cdot T$
$R = (5 \cdot T)^{\frac{1}{1,5}}$
$R = 5^{\frac{1}{1,5}} \cdot T^{\frac{1}{1,5}}$
$R \approx 2{,}92 \cdot T^{0,67}$

© Noordhoff Uitgevers bv

Onderzoeksopdrachten

51 Invullen van $L = 30$ en $W = 0{,}12$ geeft $0{,}12 = a \cdot 30^b$, ofwel $a = \dfrac{0{,}12}{30^b}$

Invullen van $L = 70$ en $W = 1{,}51$ geeft $1{,}51 = a \cdot 70^b$, ofwel $a = \dfrac{1{,}51}{70^b}$

Er moet gelden dat $\dfrac{0{,}12}{30^b} = \dfrac{1{,}51}{70^b}$, ofwel $\dfrac{0{,}12}{1{,}51} = \dfrac{30^b}{70^b}$, dus $\dfrac{0{,}12}{1{,}51} = \left(\dfrac{30}{70}\right)^b$

$0{,}0794\ldots = \left(\frac{3}{7}\right)^b$. Proberen van enkele waarden van b geeft

$\left(\frac{3}{7}\right)^2 = 0{,}183\ldots$, $\left(\frac{3}{7}\right)^3 = 0{,}078\ldots$, dat is het al bijna. $\left(\frac{3}{7}\right)^{2{,}99} \approx 0{,}0794$.

Dus $b \approx 2{,}99$ en $a = \dfrac{0{,}12}{30^b} = \dfrac{0{,}12}{30^{2{,}99}} \approx 4{,}62 \cdot 10^{-6}$.

52 **a** $P(x) = (4x - 5) \cdot \dfrac{2}{x}$

$P(x) = 4x \cdot \dfrac{2}{x} - 5 \cdot \dfrac{2}{x}$

$P(x) = 8 - \dfrac{10}{x}$

Voor $x > 0$ is $\dfrac{10}{x} > 0$ en $8 - \dfrac{10}{x} < 8$, dus dan kan de functie P alleen waarden aannemen die kleiner zijn dan 8.

b Nee, als je de voorwaarde $x > 0$ weglaat, dan is de bewering niet meer waar, want bijvoorbeeld voor $x = -10$ is $P(-10) = 8 - \dfrac{10}{-10} = 8 + 1 = 9$.

Samenvatting

S1 **a** $p^{-2} \cdot p^5 \cdot p^{-8} = p^{-2+5-8} = p^{-5} = \dfrac{1}{p^5}$

b $7x^{-3} = \dfrac{7}{x^3}$

c $4x^{\frac{4}{5}} = 4\sqrt[5]{x^4}$

d $4a^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{4}{a^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{4}{\sqrt[3]{a^2}}$

S2 **a** De functie h bestaat alleen voor $x \geq 0$.

b $g(x) = 4x^{\frac{1}{3}}$ $\quad h(x) = 5x^{-2}$

$g(x) = 4\sqrt[3]{x}$ $\quad h(x) = \dfrac{5}{x^2}$

c De twee asymptoten zijn de lijnen $x = 0$ en $y = 0$.

S3 **a** $\dfrac{18}{9x^5} = 2x^{-5}$

b $\dfrac{6}{(x^4)^2} = \dfrac{6}{x^8} = 6x^{-8}$

c $\dfrac{24x^3}{9x \cdot 4x^6} = \dfrac{24x^3}{36x^7} = \dfrac{2}{3x^4} = \frac{2}{3}x^{-4}$

d $\dfrac{13}{x^{-9}} = 13x^{--9} = 13x^9$

© Noordhoff Uitgevers bv

S4 **a** $3^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{3^4} = \sqrt[7]{81}$

b $a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$

c $5^{1\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 5^{1\frac{3}{6}+\frac{4}{6}} = 5^{2\frac{1}{6}} = 5^2 \cdot 5^{\frac{1}{6}} = 25\sqrt[6]{5}$

d $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{2\frac{2}{5}} = a^{\frac{5}{15}+2\frac{6}{15}} = a^{2\frac{11}{15}} = a^2 \cdot a^{\frac{11}{15}} = a^2\sqrt[15]{a^{11}}$

S5 **a** $3x^4 + 1 = 19$
$3x^4 = 18$
$x^4 = 6$
$x = \sqrt[4]{6}$ of $x = -\sqrt[4]{6}$

b $2x^{-3} = \frac{1}{32}$
$\frac{2}{x^3} = \frac{1}{32}$
$x^3 = 64$
$x = \sqrt[3]{64} = 4$

c $x^{\frac{2}{5}} = 3$
$\left(x^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{5}{2}} = 3^{\frac{5}{2}}$
$x = \sqrt{3^5} = \sqrt{243}$

d $18 + 5x^{1,37} = 63$
$5x^{1,37} = 45$
$x^{1,37} = 9$
$(x^{1,37})^{\frac{1}{1,37}} = 9^{\frac{1}{1,37}}$
$x = 9^{\frac{1}{1,37}} \approx 4{,}97$

e $8x^2 - x^4 = 0$
$x^2(8 - x^2) = 0$
$x^2 = 0$ of $8 - x^2 = 0$
$x = 0$ of $x^2 = 8$
$x = 0$ of $x = 2\sqrt{2}$ of $x = -2\sqrt{2}$

f $9x\sqrt{x} = 3x^2$
$9x^{1\frac{1}{2}} = 3x^2$
$x^{1\frac{1}{2}} = 0$ of $9 = 3x^{\frac{1}{2}}$
$x = 0$ of $\sqrt{x} = 3$
$x = 0$ of $x = 9$

S6 **a** $f(x) = 10x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[5]{x^2}$
$f(x) = 10x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{5}}$
$f(x) = 10x^{2+\frac{5}{10}+\frac{4}{10}} = 10x^{2\frac{9}{10}}$

b $f(x) = 4x^{-3} \cdot \sqrt{9x}$
$f(x) = 4x^{-3} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{x}$
$f(x) = 4x^{-3} \cdot 3x^{\frac{1}{2}}$
$f(x) = 12x^{-2\frac{1}{2}}$

S7 **a** $s = 0{,}1 \cdot r^{0{,}125}$
$0{,}1 \cdot r^{0{,}125} = s$
$r^{0{,}125} = 10 \cdot s$
$r = (10 \cdot s)^{\frac{1}{0{,}125}}$
$r = 10^{\frac{1}{0{,}125}} \cdot s^{\frac{1}{0{,}125}}$
$r = 100\,000\,000 \cdot s^8$

b $s = 400 \cdot r^{-1\frac{1}{2}}$
$400 \cdot r^{-1\frac{1}{2}} = s$
$r^{-1\frac{1}{2}} = \frac{1}{400} \cdot s$
$r = \left(\frac{1}{400} \cdot s\right)^{-\frac{2}{3}}$
$r = \left(\frac{1}{400}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot s^{-\frac{2}{3}}$
$r \approx 54{,}29 \cdot s^{-0{,}67}$

© Noordhoff Uitgevers bv

Test jezelf

T1 **a** $\frac{(2x)^3}{4x} = \frac{8x^3}{4x} = 2x^2$

b $\left(\frac{4x^3}{x^2}\right)^2 = \frac{16x^6}{x^4} = 16x^2$

c $\frac{6x^7}{3x^2} = 2x^5$

d $\frac{18x^2 \cdot x^6}{(3x^2)^3} = \frac{18x^8}{27x^6} = \frac{2}{3}x^2$

T2 **a** $A = B^6$

$B^6 = A$

$B = A^{\frac{1}{6}}$

b $A = 4 \cdot B^{-3}$

$4 \cdot B^{-3} = A$

$B^{-3} = \frac{1}{4} \cdot A$

$B = \left(\frac{1}{4} \cdot A\right)^{-\frac{1}{3}}$

$B = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot A^{-\frac{1}{3}}$

c $A = -7 \cdot B^{\frac{3}{5}}$

$-7 \cdot B^{\frac{3}{5}} = A$

$B^{\frac{3}{5}} = -\frac{1}{7} \cdot A$

$B = \left(-\frac{1}{7}\right)^{\frac{5}{3}} \cdot A^{\frac{5}{3}}$

d $A = 5 \cdot B^{0,81}$

$5 \cdot B^{0,81} = A$

$B^{0,81} = \frac{1}{5} \cdot A$

$B = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{0,81}} \cdot A^{\frac{1}{0,81}}$

e $A = \sqrt[11]{B^2}$

$\sqrt[11]{B^2} = A$

$B^{\frac{2}{11}} = A$

$B = A^{\frac{11}{2}}$

$B = A^{5\frac{1}{2}}$

f $A = 8\sqrt[7]{B^5}$

$8\sqrt[7]{B^5} = A$

$B^{\frac{5}{7}} = \frac{1}{8} \cdot A$

$B = \left(\frac{1}{8}\right)^{1\frac{2}{5}} \cdot A^{1\frac{2}{5}}$

T3 **a** $x^5 = -8$

$x = (-8)^{\frac{1}{5}}$

$x = \sqrt[5]{-8} \approx -1{,}52$

b $3x^2 + 2x^5 = 0$

$x^2(3 + 2x^3) = 0$

$x^2 = 0$ of $3 + 2x^3 = 0$

$x = 0$ of $2x^3 = -3$

$x = 0$ of $x^3 = -1\frac{1}{2}$

$x = 0$ of $x = \sqrt[3]{-1\frac{1}{2}} \approx -1{,}14$

c $p^{\frac{1}{4}} = 10$

$p = 10^4 = 10\,000$

d $x^{-4} = -3$

$\frac{1}{x^4} = -3$

geen oplossing

e $3z^{\frac{2}{3}} = 12$

$z^{\frac{2}{3}} = 4$

$z = 4^{\frac{3}{2}}$

$z = \sqrt{4^3} = 8$

f $x^3 = 2x^4$

$x^3 = 2x \cdot x^3$

$x^3 = 0$ of $1 = 2x$

$x = 0$ of $x = \frac{1}{2}$

g $13 - 6 \cdot p^{1,25} = 1$

$6 \cdot p^{1,25} = 12$

$p^{1,25} = 2$

$p = 2^{\frac{4}{5}}$

$p = \sqrt[5]{2^4} = \sqrt[5]{16} \approx 1{,}74$

© Noordhoff Uitgevers bv

h $x^5 = 2x^2\sqrt{x}$

$x^5 - 2x^{2\frac{1}{2}} = 0$

$x^{2\frac{1}{2}}\left(x^{2\frac{1}{2}} - 2\right) = 0$

$x^{2\frac{1}{2}} = 0$ of $x^{2\frac{1}{2}} - 2 = 0$

$x = 0$ of $x^{2\frac{1}{2}} = 2$

$x = 0$ of $x = 2^{\frac{2}{5}}$

$x = 0$ of $x = \sqrt[5]{2^2} = \sqrt[5]{4} \approx 1{,}32$

T4 **a** Invullen van $x = 1$ geeft $f(1) = 3 \cdot 1^{\frac{1}{5}} = 3 \cdot 1 = 3$ en $g(1) = -2 \cdot \sqrt[6]{1} = -2 \cdot 1 = -2$.
Bij f hoort grafiek A en bij g hoort grafiek B.

b De lijn $y = x$ heeft twee snijpunten met grafiek A en één snijpunt met grafiek B.

c $3 \cdot x^{\frac{1}{5}} = x$

$3 \cdot x^{\frac{1}{5}} = x^{\frac{1}{5}} \cdot x^{\frac{4}{5}}$

$x^{\frac{1}{5}} = 0$ of $3 = x^{\frac{4}{5}}$

$x = 0$ of $x = 3^{\frac{5}{4}}$

$x = 0$ of $x = \sqrt[4]{3^5} = \sqrt[4]{243}$

Invullen van $x = 0$ geeft $y = 0$ en invullen van $x = \sqrt[4]{3^5}$ geeft $y = \sqrt[4]{3^5}$.

De coördinaten van de snijpunten zijn (0, 0) en $(\sqrt[4]{3^5}, \sqrt[4]{3^5})$ ofwel $(3\sqrt[4]{3}, 3\sqrt[4]{3})$.

d $p(x) = 3 \cdot x^{\frac{1}{5}} \cdot -2 \cdot \sqrt[6]{x}$

$p(x) = 3 \cdot x^{\frac{1}{5}} \cdot -2 \cdot x^{\frac{1}{6}}$

$p(x) = -6 \cdot x^{\frac{6}{30}+\frac{5}{30}}$

$p(x) = -6 \cdot x^{\frac{11}{30}}$

e $q(x) = -2 \cdot \sqrt[6]{x} \cdot x^2 \cdot \sqrt[8]{x^7}$

$q(x) = -2 \cdot x^{\frac{1}{6}} \cdot x^2 \cdot x^{\frac{7}{8}}$

$q(x) = -2 \cdot x^{\frac{4}{24}+2+\frac{21}{24}}$

$q(x) = -2 \cdot x^{3\frac{1}{24}}$

$q(x) = -2 \cdot x^3 \cdot x^{\frac{1}{24}}$

$q(x) = -2 \cdot x^3 \cdot \sqrt[24]{x}$

T5 **a** $\dfrac{c^5 \cdot c^2}{c^4} = \dfrac{c^7}{c^4} = c^3$

b $\dfrac{(d^2)^6}{d^7} = \dfrac{d^{12}}{d^7} = d^5$

c $\dfrac{4w^5}{2w^3} = 2w^2$

d $\dfrac{2k \cdot k^{11}}{3k^7} = \dfrac{2k^{12}}{3k^7} = \frac{2}{3}k^5$

T6 **a** $2x^{2\frac{1}{2}} \cdot 7x^{-4} = 14x^{-1\frac{1}{2}} = \dfrac{14}{x^{1\frac{1}{2}}} = \dfrac{14}{x\sqrt{x}}$

b $x^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x}$

c $3x^{\frac{3}{4}} = 3\sqrt[4]{x^3}$

d $\dfrac{3x^{-1} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{3x^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} = 3x^{-\frac{5}{6}} = \dfrac{3}{\sqrt[6]{x^5}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

e $x^{-2\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{2\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$

f $2x^{\frac{2}{5}} \cdot x^{-1} = 2x^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{x^{\frac{3}{5}}} = \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}$

g $\left(3x^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 9x^{\frac{2}{3}} = 9\sqrt[3]{x^2}$

h $\frac{6x^3 \cdot x^{-1\frac{1}{2}}}{2\sqrt{x}} = \frac{6x^{1\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}} = 3x$

T7 **a** $f\left(1\frac{1}{2}\right) = \left(1\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$g\left(1\frac{1}{2}\right) = \left(1\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$

$AB = \frac{27}{8} - \frac{9}{4} = \frac{27}{8} - \frac{18}{8} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$

b $x^2 = 10$ $\quad x^3 = 10$

$x = \sqrt{10}$ $\quad x = \sqrt[3]{10}$

$CD = \sqrt{10} - \sqrt[3]{10} \approx 1{,}01$

T8 Als de straal R van de buis 20% groter wordt, dan wordt de straal $1{,}2R$.
Invullen in de formule geeft $V = p \cdot (1{,}2R)^4$, ofwel $V = p \cdot 1{,}2^4 \cdot R^4$, of $V = 2{,}0736 \cdot p \cdot R^4$.
De hoeveelheid vloeistof wordt dan 2,0736 keer zo groot.
De hoeveelheid vloeistof neemt met 107,36% toe.

T9 **a** Invullen van $h = 0{,}80$ en $s = 0{,}90$ geeft $v = 0{,}78 \cdot 0{,}90^{1{,}67} \cdot 0{,}80^{-1{,}16} \approx 0{,}85$.
De snelheid is ongeveer 0,85 m/s.

b Invullen van $s = 0{,}85$ geeft voor de vader $v = 0{,}78 \cdot 0{,}85^{1{,}67} \cdot h^{-1{,}16}$

Voor zijn dochter geldt dan $v = 0{,}78 \cdot s^{1{,}67} \cdot \left(\frac{1}{2}h\right)^{-1{,}16}$

$0{,}78 \cdot s^{1{,}67} \cdot \left(\frac{1}{2}h\right)^{-1{,}16} = 0{,}78 \cdot 0{,}85^{1{,}67} \cdot h^{-1{,}16}$

$0{,}78 \cdot s^{1{,}67} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1{,}16} h^{-1{,}16} = 0{,}78 \cdot 0{,}85^{1{,}67} \cdot h^{-1{,}16}$

$s^{1{,}67} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1{,}16} = 0{,}85^{1{,}67}$

$s^{1{,}67} = 0{,}85^{1{,}67} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1{,}16}$

$s = \left(0{,}85^{1{,}67} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1{,}16}\right)^{\frac{1}{1{,}67}} = 0{,}5251\ldots$

De stappen van de dochter moeten ongeveer 53 cm zijn om haar vader bij te kunnen houden.

Extra oefening

E1 **a** $a^{-4} = \frac{1}{a^4}$

b $\frac{1}{b^3} \cdot b^{-4} = \frac{1}{b^3} \cdot \frac{1}{b^4} = \frac{1}{b^7}$

c $\frac{12c^2}{18c^5} = \frac{2}{3c^3}$

d $\frac{d^4 \cdot d^{-10}}{d^{-3}} = \frac{d^{-6}}{d^{-3}} = \frac{1}{d^3}$

e $\frac{e \cdot (e^2)^{-2}}{e^0} = \frac{e \cdot e^{-4}}{1} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$

f $\frac{3x^4 \cdot 2x^{-4}}{10x^{-5}} = \frac{6x^0}{10x^{-5}} = \frac{3}{5x^{-5}} = \frac{3}{5}x^5$

E2 **a** $p^{\frac{4}{11}} = \sqrt[11]{p^4}$

b $\frac{4x^{-2} \cdot x^{\frac{2}{3}}}{8x^2} = \frac{x^{-1\frac{1}{3}}}{2x^2} = \frac{1}{2x^{3\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2x^3 \cdot \sqrt[3]{x}}$

c $m^{-6\frac{1}{2}} = \frac{1}{m^{6\frac{1}{2}}} = \frac{1}{m^6 \cdot \sqrt{m}}$

d $\frac{(5a^{-3})^2}{3a^2\sqrt{a}} = \frac{25a^{-6}}{3a^2\sqrt{a}} = \frac{25}{3a^8\sqrt{a}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

E3 **a** $2p^4 = 11$

$p^4 = 5\frac{1}{2}$

$p = \sqrt[4]{5\frac{1}{2}}$ of $p = -\sqrt[4]{5\frac{1}{2}}$

b $3t^{-2} + 4 = 9$

$\frac{3}{t^2} = 5$

$t^2 = \frac{3}{5}$

$t = \sqrt{\frac{3}{5}}$ of $t = -\sqrt{\frac{3}{5}}$

c $25\sqrt{r} = 50r^2$

$\sqrt{r} - 2r^2 = 0$

$\sqrt{r}(1 - 2r\sqrt{r}) = 0$

$\sqrt{r} = 0$ of $1 - 2r\sqrt{r} = 0$

$r = 0$ of $2r^{1\frac{1}{2}} = 1$

$r = 0$ of $r^{1\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

$r = 0$ of $r = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 0{,}63$

d $x^{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$

$x = \left(\frac{2}{3}\right)^4$

$x = \frac{16}{81}$

e $7q^{0{,}4} = 4$

$q^{\frac{2}{5}} = \frac{4}{7}$

$q = \left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{5}{2}} \approx 0{,}25$

f $x^{-0{,}2} = \frac{1}{5}$

$x^{0{,}2} = 5$

$x = 5^5 = 3125$

g $18x^5 = 6x^3$

$18x^2 \cdot x^3 = 6x^3$

$x^3 = 0$ of $18x^2 = 6$

$x = 0$ of $x^2 = \frac{1}{3}$

$x = 0$ of $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ of $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$

h $3x^{\frac{2}{7}} - 4\frac{1}{2}x = 0$

$1\frac{1}{2}x^{\frac{2}{7}}\left(2 - 3x^{\frac{5}{7}}\right) = 0$

$1\frac{1}{2}x^{\frac{2}{7}} = 0$ of $2 - 3x^{\frac{5}{7}} = 0$

$x^{\frac{2}{7}} = 0$ of $x^{\frac{5}{7}} = \frac{2}{3}$

$x = 0$ of $x = \sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^7} \approx 0{,}57$

E4 **a** $f(x) = \frac{16x^8 \cdot \sqrt[4]{x}}{(2x)^2}$

$f(x) = \frac{16x^8 \cdot x^{\frac{1}{4}}}{4x^2}$

$f(x) = 4x^{8\frac{1}{4}-2}$

$f(x) = 4 \cdot x^{6\frac{1}{4}}$

b $f(x) = x^{-3} \cdot (x^5)^2$

$f(x) = x^{-3} \cdot x^{10}$

$f(x) = x^7$

c $f(x) = \frac{\sqrt{x} \cdot x^{-2}}{x^{-\frac{2}{3}}}$

$f(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-2}}{x^{-\frac{2}{3}}}$

$f(x) = x^{-1\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$

$f(x) = x^{-1\frac{3}{6}+\frac{4}{6}}$

$f(x) = x^{-\frac{5}{6}}$

d $f(x) = 2x^4 \cdot 3x \cdot \sqrt[3]{x^2}$

$f(x) = 2 \cdot 3 \cdot x^4 \cdot x \cdot x^{\frac{2}{3}}$

$f(x) = 6 \cdot x^{5\frac{2}{3}}$

E5 **a** $N = 0{,}25 \cdot K^5$

$0{,}25 \cdot K^5 = N$

$K^5 = 4 \cdot N$

$K = 4^{\frac{1}{5}} \cdot N^{\frac{1}{5}}$

$K \approx 1{,}32 \cdot N^{0{,}20}$

b $N = \frac{1}{2} \cdot K^{\frac{1}{3}}$

$\frac{1}{2} \cdot K^{\frac{1}{3}} = N$

$K^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot N$

$K = 2^3 \cdot N^3$

$K = 8 \cdot N^3$

© Noordhoff Uitgevers bv

c $N = 8 \cdot K^{2,5}$

$8 \cdot K^{2,5} = N$

$K^{2,5} = \frac{1}{8} \cdot N$

$K = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2,5}} \cdot N^{\frac{1}{2,5}}$

$K \approx 0{,}44 \cdot N^{0,40}$

d $N = 1{,}2 \cdot K^{-0,3}$

$1{,}2 \cdot K^{-0,3} = N$

$K^{-0,3} = \frac{1}{1,2} \cdot N$

$K = \left(\frac{1}{1,2}\right)^{-\frac{1}{0,3}} \cdot N^{-\frac{1}{0,3}}$

$K \approx 1{,}84 \cdot N^{-3,33}$

e $N = 2{,}8 \cdot K^{1,67}$

$2{,}8 \cdot K^{1,67} = N$

$K^{1,67} = \frac{1}{2,8} \cdot N$

$K = \left(\frac{1}{2,8}\right)^{\frac{1}{1,67}} \cdot N^{\frac{1}{1,67}}$

$K \approx 0{,}54 \cdot N^{0,60}$

f $N = 0{,}01 \cdot K^{-1\frac{1}{2}}$

$0{,}01 \cdot K^{-1\frac{1}{2}} = N$

$K^{-1\frac{1}{2}} = 100 \cdot N$

$K = 100^{-\frac{2}{3}} \cdot N^{-\frac{2}{3}}$

$K \approx 0{,}05 \cdot N^{-0,67}$

E6 **a** De lijnen $x = 0$ en $y = 0$ zijn asymptoten van de grafiek van f.

b De grafiek van f is puntsymmetrisch.

c De grafiek van g is lijnsymmetrisch.

d $6x^{-3} = -18$

$\frac{6}{x^3} = -18$

$x^3 = -\frac{1}{3}$

$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{3}}$

De coördinaten van het snijpunt zijn $\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{3}}, -18\right)$.

e $4x^{-2} = \frac{1}{9}$

$\frac{4}{x^2} = \frac{1}{9}$

$x^2 = 36$

$x = \sqrt{36} = 6$ of $x = -\sqrt{36} = -6$

De coördinaten van de snijpunten zijn $\left(6, \frac{1}{9}\right)$ en $\left(-6, \frac{1}{9}\right)$.

f $6x^{-3} = 4x^{-2}$

$6 = 4x$

$x = 1\frac{1}{2}$

E7 **a** Invullen van $v = 1{,}65$ geeft $I_A = 23{,}47 \cdot 1{,}65^{2,28} = 73{,}515\ldots$

Als hij zwempak B draagt, dan geldt $73{,}515\ldots = 21{,}83 \cdot v^{2,21}$, ofwel

$v^{2,21} = \frac{73{,}515\ldots}{21{,}83}$, dus $v = \left(\frac{73{,}515\ldots}{21{,}83}\right)^{\frac{1}{2,21}} = 1{,}732\ldots$

Met dezelfde inspanning kan hij een snelheid van ongeveer 1,73 m/s halen.

b $K = \frac{21{,}83 \cdot v^{2,21}}{23{,}47 \cdot v^{2,28}}$

$K = \frac{21{,}83}{23{,}47} \cdot v^{-0,07}$

$K \approx 0{,}93 \cdot v^{-0,07}$

E8 $10x^{0,8} + 4 = 100$

$10x^{0,8} = 96$

$x^{0,8} = 9{,}6$

$x = 9{,}6^{\frac{1}{0,8}} \approx 16{,}9$

$x\sqrt{x} = 100$

$x^{1\frac{1}{2}} = 100$

$x = 100^{\frac{2}{3}} \approx 21{,}5$

De grafiek van f snijdt de lijn $y = 100$ bij $x \approx 16{,}9$ en de grafiek van g snijdt de lijn $y = 100$ bij $x \approx 21{,}5$, dus punt S ligt boven de lijn $y = 100$.

© Noordhoff Uitgevers bv

1 **a** De richtingscoëfficiënt is -2 en het startgetal is 8, dus $l: y = -2x + 8$.

b De richtingscoëfficiënt is $\frac{5-3}{1-0} = 2$ en het startgetal is 3, dus $m: y = 2x + 3$.

c n gaat door de oorsprong, dus het startgetal is nul. $n: y = ax$.

De richtingscoëfficiënt is $\frac{96}{8} = 12$, dus $n: y = 12x$.

2 **a** m is een horizontale lijn dus de richtingscoëfficiënt van m is 0.
m gaat door $\left(0, 4\frac{1}{2}\right)$ dus $m: y = 4\frac{1}{2}$.

b n is een verticale lijn door (6, 0), dus $n: x = 6$.

c k gaat door (0, 3) en (2, 6), dus de richtingscoëfficiënt is $\frac{6-3}{2-0} = 1\frac{1}{2}$

Het startgetal is 3, dus $k: y = 1\frac{1}{2}x + 3$.
l gaat door (0, 8) en (4, 6), dus de richtingscoëfficiënt is $\frac{6-8}{4-0} = -\frac{1}{2}$

Het startgetal is 8, dus $l: y = -\frac{1}{2}x + 8$.

3 **a** De richtingscoëfficiënt is $\frac{\textit{verticale toename}}{\textit{horizontale toename}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

b De richtingscoëfficiënt van k is $\frac{41-14}{19-13} = \frac{27}{6} = 4\frac{1}{2}$

c De richtingscoëfficiënt van m is $\frac{36-12}{14--2} = \frac{24}{16} = 1\frac{1}{2}$

4 **a** Dit is een verticale lijn, dus er is geen richtingscoëfficiënt.

b Dit is een horizontale lijn, de richtingscoëfficiënt is 0.

c De richtingscoëfficiënt is $\frac{\sqrt{2}-0}{\sqrt{2}-0} = 1$.

d De richtingscoëfficiënt is $\frac{1--\sqrt{3}}{0-2\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}} = -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \approx -0{,}789$.

5 $k: y = 4\frac{1}{2}x + b$

$41 = 4\frac{1}{2} \cdot 19 + b$ geeft $41 = 85\frac{1}{2} + b$, dus $b = -44\frac{1}{2}$

Een vergelijking van k is $y = 4\frac{1}{2}x - 44\frac{1}{2}$

6 **a** De richtingscoëfficiënt is $\frac{52-10}{17-3} = 3$.

$l: y = 3x + b$ door (3, 10) geeft $10 = 3 \cdot 3 + b$, dus $b = 1$.
$l: y = 3x + 1$.

b De richtingscoëfficiënt is $\frac{10-8}{2--2} = \frac{1}{2}$.

$l: y = \frac{1}{2}x + b$ door $(-2, 8)$ geeft $8 = \frac{1}{2} \cdot -2 + b$, dus $b = 9$.

$l: y = \frac{1}{2}x + 9$.

c De richtingscoëfficiënt is $\frac{29-89}{21-25} = 15$.

$l: y = 15x + b$ door (25, 89) geeft $89 = 15 \cdot 25 + b$, dus $b = -286$.
$l: y = 15x - 286$.

d Een richtingscoëfficiënt is er niet, want het is een verticale lijn. Dus $l: x = 10$.

e De richtingscoëfficiënt is 0, want het is een horizontale lijn. Dus $l: y = 3$.

f De richtingscoëfficiënt is $\frac{35-7}{-2-0} = -14$ en het startgetal is 7. Dus $l: y = -14x + 7$.

© Noordhoff Uitgevers bv

7 **a** $\sqrt{121} = 11$
b $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$
c $\sqrt{0{,}36} = 0{,}6$
d $\sqrt{225} = 15$
e $\sqrt{169} = 13$
f $\sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10}$

8 **a** $(6\sqrt{2})^2 = 36 \cdot 2 = 72$
b $4\sqrt{7} \cdot 8\sqrt{3} = 32\sqrt{21}$
c $5\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{12} = 10\sqrt{36} = 10 \cdot 6 = 60$
d $(7\sqrt{3})^2 = 49 \cdot 3 = 147$

9 **a** $7\sqrt{2} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{98}$
b $9\sqrt{5} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{405}$
c $2\frac{1}{2}\sqrt{8} = \sqrt{6\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{50}$
d $\frac{1}{2}\sqrt{32} = \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{32} = \sqrt{8}$

10 **a** $\sqrt{72} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
b $\sqrt{54} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$
c $\sqrt{200} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$
d $\sqrt{75} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$
e $\sqrt{98} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$
f $\sqrt{125} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$
g $3\sqrt{24} = 3 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{6} = 6\sqrt{6}$
h $2\sqrt{45} = 2 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$
i $8\sqrt{63} = 8 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{7} = 8 \cdot 3 \cdot \sqrt{7} = 24\sqrt{7}$
j $80\sqrt{80} = 80 \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} =$
$80 \cdot 4 \cdot \sqrt{5} = 320\sqrt{5}$

11 **a** $\sqrt{32} - \sqrt{2} =$
$4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
b $4\sqrt{3} + \sqrt{27} =$
$4\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$
c $\sqrt{45} + \sqrt{20} =$
$3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$
d $\sqrt{180} - 2\sqrt{80} =$
$6\sqrt{5} - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{5} =$
$6\sqrt{5} - 8\sqrt{5} = -2\sqrt{5}$
e $8\sqrt{6} + \sqrt{54} =$
$8\sqrt{6} + 3\sqrt{6} = 11\sqrt{6}$
f $18\sqrt{2} - 2\sqrt{18} =$
$18\sqrt{2} - 2 \cdot 3\sqrt{2} =$
$18\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

12 **a** $y = \sqrt{4x} + \sqrt{9x}$
$y = 2\sqrt{x} + 3\sqrt{x}$
$y = 5\sqrt{x}$
b A $y = \sqrt{16x} + \sqrt{169x}$
$y = 4\sqrt{x} + 13\sqrt{x}$
$y = 17\sqrt{x}$
B $y = \sqrt{18x} + \sqrt{50x}$
$y = 3\sqrt{2x} + 5\sqrt{2x}$
$y = 8\sqrt{2x}$
C $y = \sqrt{100x} - \sqrt{16x}$
$y = 10\sqrt{x} - 4\sqrt{x}$
$y = 6\sqrt{x}$
D $y = \sqrt{\frac{1}{4}x} + \sqrt{25x}$
$y = \frac{1}{2}\sqrt{x} + 5\sqrt{x}$
$y = 5\frac{1}{2}\sqrt{x}$

13 Dan komt er in de noemer een kwadraat te staan en kun je de breuk voor het wortelteken halen.

14 **a** $\sqrt{\frac{5}{7}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 7}{7 \cdot 7}} = \sqrt{\frac{35}{49}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{35}}{7} = \frac{1}{7}\sqrt{35}$
b $\sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8}{8 \cdot 8}} = \sqrt{\frac{24}{64}} = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{64}} = \frac{\sqrt{24}}{8} = \frac{1}{8}\sqrt{24} = \frac{1}{8} \cdot 2\sqrt{6} = \frac{1}{4}\sqrt{6}$
c $\frac{18}{\sqrt{3}} = \frac{18}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}$

© Noordhoff Uitgevers bv

d $\frac{10}{\sqrt{6}} = \frac{10}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{10\sqrt{6}}{6} = 1\frac{2}{3}\sqrt{6}$

e $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}} \cdot \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{33}}{11} = \frac{1}{11}\sqrt{33}$

f $\frac{24}{3\sqrt{2}} = \frac{24}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{24\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{24\sqrt{2}}{6} = 4\sqrt{2}$

15 **a** $\frac{3}{4} + \frac{7}{8} = \frac{6}{8} + \frac{7}{8} = \frac{13}{8} = 1\frac{5}{8}$

b $\frac{5}{9} - \frac{2}{4} = \frac{20}{36} - \frac{18}{36} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

c $\frac{11}{9} - \frac{1}{3} = \frac{11}{9} - \frac{3}{9} = \frac{8}{9}$

d $3 - 1\frac{6}{7} = \frac{3}{1} - \frac{13}{7} = \frac{21}{7} - \frac{13}{7} = \frac{8}{7} = 1\frac{1}{7}$

e $2\frac{3}{7} + 1\frac{1}{2} = \frac{17}{7} + \frac{3}{2} = \frac{34}{14} + \frac{21}{14} = \frac{55}{14} = 3\frac{13}{14}$

f $-1\frac{5}{8} + 2\frac{3}{4} = -\frac{13}{8} + \frac{11}{4} = \frac{-13}{8} + \frac{22}{8} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$

16 **a** $\frac{3}{8} + \frac{5}{9} = \frac{27}{72} + \frac{40}{72} = \frac{67}{72}$

b $\frac{7}{9} - \frac{2}{5} = \frac{35}{45} - \frac{18}{45} = \frac{17}{45}$

c $\frac{8}{x} + \frac{4}{x} = \frac{12}{x}$

d $\frac{6}{17} \times \frac{-3}{4} = -\frac{18}{68} = -\frac{9}{34}$

e $\frac{2}{p} \times \frac{5}{p} = \frac{10}{p^2}$

f $\frac{a}{6} \times \frac{5}{a} = \frac{5a}{6a} = \frac{5}{6}$

g $\frac{3p}{13} \times \frac{2p}{-3} = -\frac{6p^2}{39} = -\frac{2p^2}{13}$

h $\frac{3a}{2b} \times \frac{4b}{7a} = \frac{12ab}{14ab} = \frac{6}{7}$

17 Door 72 als gemeenschappelijke noemer te nemen.

18 **a** $\frac{8}{q} + \frac{4}{5q} = \frac{8 \times 5}{5q} + \frac{4}{5q} = \frac{40}{5q} + \frac{4}{5q} = \frac{44}{5q}$

b $\frac{12}{8a} - \frac{1}{2a} = \frac{12}{8a} - \frac{4}{8a} = \frac{8}{8a} = \frac{1}{a}$

c $\frac{6}{4a} + \frac{5}{7a} = \frac{6 \times 7}{4a \times 7} + \frac{5 \times 4}{7a \times 4} = \frac{42}{28a} + \frac{20}{28a} = \frac{62}{28a} = \frac{31}{14a}$

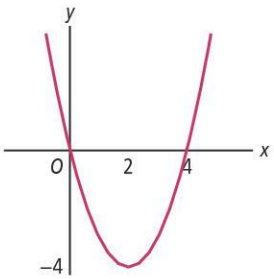
d $\frac{3}{7p} + \frac{q}{p} = \frac{3}{7p} + \frac{7q}{7p} = \frac{3 + 7q}{7p}$

e $\frac{8}{a} - \frac{7}{a^2} = \frac{8a}{a^2} - \frac{7}{a^2} = \frac{8a - 7}{a^2}$

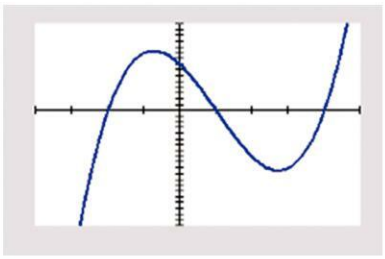
f $\frac{2}{3a^2} + \frac{4}{7a} = \frac{2 \times 7}{3a^2 \times 7} + \frac{4 \times 3a}{7a \times 3a} = \frac{14}{21a^2} + \frac{12a}{21a^2} = \frac{14 + 12a}{21a^2}$

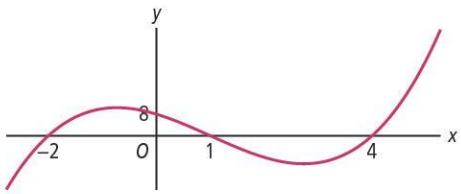
© Noordhoff Uitgevers bv

1



2





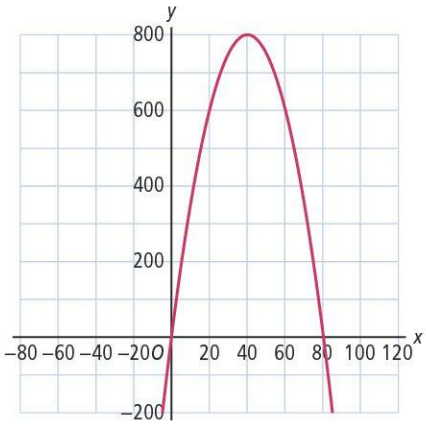
3 **a** Bij de derde plot is de grafiek het best in beeld.

b Deze waarde moet lager worden.

4 **a** De grafiek is een bergparabool. Als je bij $x = 0$ begint met stapgrootte 1 blijven de y-waarden heel lang oplopen. Je kunt beter een stapgrootte nemen die groter is en dan kijken waar de y-waarden gaan dalen. Zo kun je sneller de top vinden, want bij deze stapgrootte duurt dat erg lang.

b Bijvoorbeeld: startwaarde 0 en stapgrootte 10.

c



5 **a** Je vindt deze kleinste waarde van x door te berekenen voor welke waarde van x geldt: $2x + 100 = 0$.
Dat is het geval als $x = -50$.
Je kunt deze waarde ook vinden door een tabel te maken.

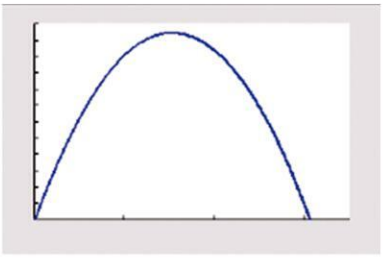
b Bijvoorbeeld: Xmin = −60, Xmax = 60, Ymin = −10, Ymax = 25.

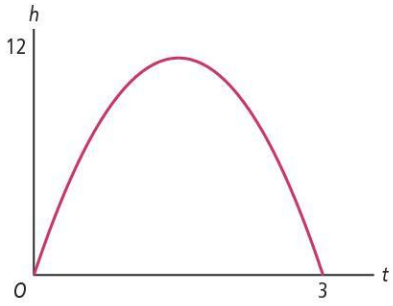
6 **a** Als het projectiel op tijdstip $t = 0$ wordt afgeschoten, hebben negatieve waarden van t geen betekenis.
Ook de hoogte h kan niet negatief zijn.

b Maak een tabel met startwaarde 0 en stapgrootte 0,5. Dan blijkt dat de waarde $h = 0$ wordt bereikt tussen $t = 3$ en $t = 3{,}5$.
De grootste waarde van h in deze tabel is 11,475.
De waarden van t liggen tussen 0 en 3,5; de waarden van h tussen 0 en 12.

© Noordhoff Uitgevers bv

c





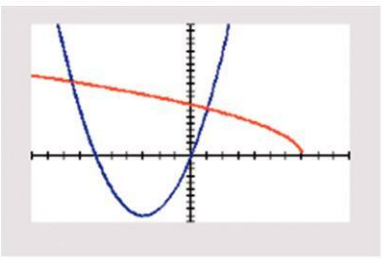
7 **a** bijvoorbeeld: Xmin = −15, Xmax = 15, Ymin = −130, Ymax = 50
b bijvoorbeeld: Xmin = −2, Xmax = 2, Ymin = −10, Ymax = 200
c bijvoorbeeld: Xmin = −15, Xmax = 15, Ymin = −10, Ymax = 50
d bijvoorbeeld: Xmin = −10, Xmax = 10, Ymin = −10, Ymax = 10

8 **a** bijvoorbeeld: Xmin = −5, Xmax = 10, Ymin = −50, Ymax = 10
b Met de optie: waarde. Het snijpunt met de y-as is $(0, -5)$.
Met de optie: nulpunt. Het snijpunt met de x-as is ongeveer $(6{,}29; 0)$.
Met de opties: minimum en maximum.
De toppen zijn ongeveer $(-0{,}08; 4{,}96)$ en $(4{,}08; -41{,}04)$.

9 **a** Met de optie: nulpunt vind je $x \approx 0{,}20$ en $x \approx 2{,}08$.
b Met de opties: minimum vind je de top $(1{,}36; 4{,}09)$.

10 **a** Om het derde nulpunt te vinden zal Carl de aanwijzing geven om de vensterinstelling te veranderen.
b Voer in: $y_1 = 0{,}2x^3 - 3x^2 - 6x$ met vensterinstelling bijvoorbeeld
Xmin = −10, Xmax = 25, Ymin = −200, Ymax = 105
Gebruik de optie: nulpunten.
De nulpunten zijn $x = -1{,}79$; $x = 0$ en $x = 16{,}79$.

11 **a** bijvoorbeeld: $-10 \leq x \leq 10$ en $-10 \leq y \leq 20$.
b Voer in $y_1 = x^2 + 6x$ en $y_2 = 3\sqrt{-x + 7}$.
Kies de optie: snijpunten.
De oplossingen zijn $x = -7{,}52$ en $x = 1{,}04$.
c



Uit de plot lees je de oplossing af: $-7{,}52 < x < 1{,}04$.

© Noordhoff Uitgevers bv

12 **a** Invoer: $y_1 = x^2 + 4x - 7$
Venster: $-10 \le x \le 10$ en $-10 \le y \le 20$
Optie: nulpunten
De nulpunten zijn $x = -5{,}32$ en $x = 1{,}32$.
Optie: minimum
De top is $(-2, -11)$.

b Invoer: $y_1 = 200x^3 - 50x$
Venster: $-2 \le x \le 2$ en $-10 \le y \le 10$
Optie: nulpunten
De nulpunten zijn $x = -0{,}5$ en $x = 0$ en $x = 0{,}5$.
Opties: minimum en maximum
De toppen zijn $(-0{,}29;\ 9{,}62)$ en $(0{,}29;\ -9{,}62)$.

c Invoer: $y_1 = 1000 - 11 \times 1{,}43^x$
Venster: $-10 \le x \le 20$ en $-1000 \le y \le 1500$
Optie: nulpunt
Het nulpunt is $x = 12{,}61$.
De grafiek heeft geen toppen.

d Invoer: $y_1 = 19 - 3\sqrt{x}$
Venster: $-10 \le x \le 60$ en $-10 \le y \le 20$
Optie: nulpunt
Het nulpunt is $x = 40{,}11$.
De grafiek begint in het randpunt $(0, 19)$, dit is het hoogste punt van de grafiek.

© Noordhoff Uitgevers bv

3 Functies en grafieken

Voorkennis

V1 **a** Van functie f is het startgetal 4 en de richtingscoëfficiënt -3.
Van functie g is het startgetal 0 en de richtingscoëfficiënt 3.

b Bij functie g is de tabel een verhoudingstabel.

c $4 - 3x = 3x$
$4 = 6x$
$x = \frac{6}{4} = \frac{2}{3}$
$g\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$
Het snijpunt is $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$.

V2 **a** Van f is de richtingscoëfficiënt 2 en het startgetal 1, dus $f(x) = 2x + 1$.

b Van g is de richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{2}$ en het startgetal -1, dus $g(x) = -\frac{1}{2}x - 1$.

V3 **a** $0{,}5(x - 4)(x + 2) = 0$
$x - 4 = 0$ of $x + 2 = 0$
$x = 4$ of $x = -2$
De snijpunten met de x-as zijn $(4, 0)$ en $(-2, 0)$.

b De grafiek van g is een dalparabool.

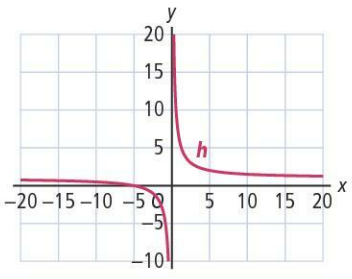
c De symmetrieas ligt precies tussen de snijpunten met de x-as, dus dat is bij $x = 1$. Invullen van $x = 1$ geeft $g(1) = 0{,}5(1 - 4)(1 + 2)$ ofwel
$g(1) = 0{,}5 \cdot -3 \cdot 3 = -4\frac{1}{2}$.
De top is $\left(1, -4\frac{1}{2}\right)$.

V4 **a** $-x^2 + 3x + 10 = 0$
$x^2 - 3x - 10 = 0$
$(x - 5)(x + 2) = 0$
$x = 5$ of $x = -2$

b De symmetrieas is $x = 1\frac{1}{2}$. Invullen van $x = 1\frac{1}{2}$ geeft
$f\left(1\frac{1}{2}\right) = -1\frac{1}{2}^2 + 3 \cdot 1\frac{1}{2} + 10 = 12\frac{1}{4}$, dus de top is $\left(1\frac{1}{2}, 12\frac{1}{4}\right)$.

c $-x^2 + 3x + 10 = 6$
$x^2 - 3x - 4 = 0$
$(x - 4)(x + 1) = 0$
$x = 4$ of $x = -1$
Dus de snijpunten met de lijn $y = 6$ zijn $(4, 6)$ en $(-1, 6)$.

V5 **a**



b

x	-10	-5	-1	0	1	5	10
$h(x)$	$\frac{1}{2}$	0	-4	k.n.	6	2	$1\frac{1}{2}$

© Noordhoff Uitgevers bv

c $h(-0{,}0001) = \dfrac{5}{-0{,}0001} + 1 = -50\,000 + 1 = -49\,999$

$h(0{,}0001) = \dfrac{5}{0{,}0001} + 1 = 50\,000 + 1 = 50\,001$

d In de buurt van $x = 0$ is de grafiek links van de y-as heel laag en rechts van de y-as heel hoog.

e Als x steeds verder van 0 wordt gekozen, nadert de grafiek zowel links als rechts de lijn $y = 1$.

V6 **a** De wortel uit een negatief getal bestaat niet, dus $9 - x \geq 0$ ofwel $x \leq 9$.

b $(9, 0)$

c Als functiewaarde zijn de getallen 0 en groter mogelijk.

V7 **a** $f(0{,}3) = 1 + \sqrt{3 \cdot 0{,}3 - 1} = 1 + \sqrt{-0{,}1}$ en $\sqrt{-0{,}1}$ bestaat niet.

b $f(0{,}33) = 1 + \sqrt{3 \cdot 0{,}33 - 1} = 1 + \sqrt{-0{,}01}$. Nee, $f(0{,}33)$ bestaat niet.

c $3x - 1 = 0$

$3x = 1$

$x = \frac{1}{3}$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + \sqrt{3 \cdot \frac{1}{3} - 1} = 1 + \sqrt{0} = 1$, dus het randpunt is $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

V8 **a** Bij getallenlijn 1 hoort ongelijkheid B, bij getallenlijn 2 hoort ongelijkheid F en bij getallenlijn 3 hoort ongelijkheid C.

b $\langle \leftarrow, -1]\ \langle -2, 4\rangle\ \langle 1, \rightarrow \rangle$

V9

ongelijkheid	$-2 \leq x < 6$	$x > -9$	$x < 0$	$-2 < x \leq 1$
interval	●——○ −2 6	○——→ −9	←——○ 0	○——● −2 1
intervalnotatie	$[-2,6\rangle$	$\langle -9,\rightarrow\rangle$	$\langle \leftarrow,0\rangle$	$\langle -2,1]$

3.1 Domein en bereik

intro $f(x) = 1 + \sqrt{x - 3}$, dus op de puntjes moeten 1 en 3 staan.

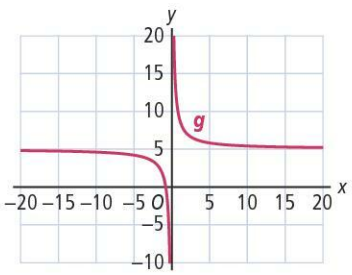
1 **a** $f(1) = 2 + \sqrt{1 - 4} = 2 + \sqrt{-3}$ en $\sqrt{-3}$ bestaat niet.

b Als $x - 4 \geq 0$, dus als $x \geq 4$.

c $\sqrt{x - 4} \geq 0$, dus $f(x) = 2 + \sqrt{x - 4} \geq 2$

d $(4, 2)$

2 **a**



© Noordhoff Uitgevers bv

b $x = 0$ kun je niet invullen, want dan deel je door nul.

c Wat je ook voor x invult, $\frac{4}{x}$ zal nooit gelijk zijn aan 0. Daaruit volgt dat $g(x) = 5 + \frac{4}{x} \neq 5$.

3 **a** $2x + 3 = 0$ geeft $x = -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$.

$h\left(-1\frac{1}{2}\right) = 3 - \sqrt{2 \cdot -1\frac{1}{2} + 3} = 3 - \sqrt{0} = 3$, dus het randpunt is $\left(-1\frac{1}{2}, 3\right)$.

b $\left[-1\frac{1}{2}, \rightarrow\right\rangle$

c $\langle \leftarrow, 3]$

4 **a** Bij beide functies kun je voor x alle getallen invullen.

b $x^2 - 2x - 8 = 0$
$(x - 4)(x + 2) = 0$
$x = 4$ of $x = -2$
De snijpunten met de x-as zijn $(4,0)$ en $(-2,0)$.

c De symmetrieas is $x = 1$, dus $x_{top} = 1$ en $y_{top} = g(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 8 = -9$.
De top is $(1, -9)$.

d Het bereik is $\mathbb{R}$.

e De grafiek van g is een dalparabool, dus het bereik is $[-9, \rightarrow\rangle$.

5 **a** Voor het domein geldt $x \geq 0$. Het domein is $[0, \rightarrow\rangle$.
$\sqrt{x}$ kan niet negatief zijn, dus $f(x) \geq -2$. Het bereik is $[-2, \rightarrow\rangle$.

b Voor het domein geldt $x + 12 \geq 0$, dus $x \geq -12$. Het domein is $[-12, \rightarrow\rangle$.
$\sqrt{x + 12} \geq 0$, dus $g(x) \geq 6$. Het bereik is $[6, \rightarrow\rangle$.

c Voor x kun je alle getallen invullen, dus het domein is $\mathbb{R}$.
$3x^4 \geq 0$, dus $h(x) \leq 10$. Het bereik is $\langle \leftarrow, 10]$.

d Voor het domein geldt $x - 7 \geq 0$, dus $x \geq 7$. Het domein is $[7, \rightarrow\rangle$.
$\sqrt{x - 7} \geq 0$, dus $i(x) \geq 10$. Het bereik is $[10, \rightarrow\rangle$.

6 **a** Voor x kun je alle getallen invullen, dus het domein is $\mathbb{R}$ ofwel $\langle \leftarrow, \rightarrow\rangle$.
$x^2 \geq 0$, dus $f(x) \geq 9$. Het bereik is $[9, \rightarrow\rangle$.

b x kan niet gelijk zijn aan 0, het domein is $\langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$.
$x^2 \geq 0$, dus $g(x) > 0$. Het bereik is $\langle 0, \rightarrow\rangle$.

c x kan niet negatief zijn, dus het domein is $[0, \rightarrow\rangle$.
$\sqrt{x} \geq 0$, dus $h(x) \leq 16$. Het bereik is $\langle \leftarrow, 16]$.

d $6 - 2x \geq 0$ als $x \leq 3$, dus het domein is $\langle \leftarrow, 3]$.
$\sqrt{6 - 2x} \geq 0$, dus $l(x) \leq 21$. Het bereik is $\langle \leftarrow, 21]$.

e Voor x kun je alle getallen invullen, dus het domein is $\mathbb{R}$ ofwel $\langle \leftarrow, \rightarrow\rangle$.
$x^2 + 1 \geq 1$ dus $m(x)$ is positief en maximaal gelijk aan 6. Het bereik is $\langle 0, 6]$.

f Voor x kun je alle getallen invullen, dus het domein is $\mathbb{R}$ ofwel $\langle \leftarrow, \rightarrow\rangle$.
$x^4 \geq 0$ dus $n(x) \geq 3$, Het bereik is $[3, \rightarrow\rangle$.

7 **a** $f(-3) = 3 \cdot 1{,}1^{-3} \approx 2{,}254$ en $f(3) = 3 \cdot 1{,}1^3 = 3{,}993$.

b Voor x kun je alle getallen invullen, dus het domein is $\mathbb{R}$.

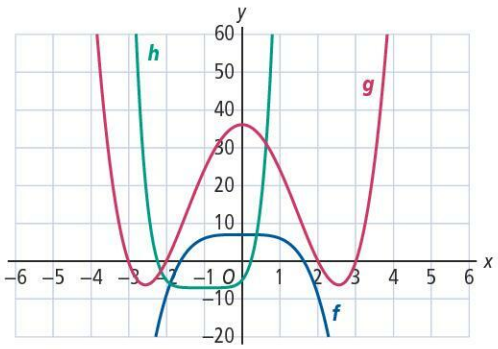
c Dan nadert $f(x)$ naar 0.

d Het bereik is $\langle 0, \rightarrow\rangle$.

e De groeifactor heeft geen invloed op het domein en het bereik.
Als de beginwaarde negatief is dan wordt het bereik $\langle \leftarrow, 0\rangle$.

© Noordhoff Uitgevers bv

8 **a**



b Het domein van f, g en h is $\mathbb{R}$.

c $x^4 \geq 0$, dus $f(x) \leq 7$. Het bereik van f is $\langle \leftarrow, 7]$.
Met de rekenmachine bepaal je het minimum van g, dat is $-6{,}25$.
Het bereik van g is $[-6{,}25; \rightarrow\rangle$.
$2(x + 1)^6 \geq 0$, dus $h(x) \geq -7$. Het bereik van h is $[-7, \rightarrow\rangle$.

9 **a** Bijvoorbeeld $f(x) = x$.

b Bijvoorbeeld $f(x) = x^2$.

c Bijvoorbeeld $f(x) = \sqrt{x}$.

O2 **a** Je kunt niet delen door 0.

b $g(10) = 3 + \frac{12}{10} = 3 + 1{,}2 = 4{,}2$

$g(100) = 3 + \frac{12}{100} = 3 + 0{,}12 = 3{,}12$

$g(1000) = 3 + \frac{12}{1000} = 3 + 0{,}012 = 3{,}012$

$g(1\,000\,000) = 3 + \frac{12}{1\,000\,000} = 3{,}000\,012$

c De uitkomsten komen steeds dichter bij 3.

d $g(-10) = 3 + \frac{12}{-10} = 3 - 1{,}2 = 1{,}8$

$g(-100) = 3 + \frac{12}{-100} = 3 - 0{,}12 = 2{,}88$

$g(-1000) = 3 + \frac{12}{-1000} = 3 - 0{,}012 = 2{,}988$

e Wat je ook voor x invult, $\frac{12}{x}$ zal nooit gelijk zijn aan 0. Daaruit volgt dat $g(x) = 3 + \frac{12}{x} \neq 3$. Dus 3 kan niet als functiewaarde voorkomen.

O6 **a** Ja, het domein is $\mathbb{R}$.

b De formule $y = (3x - 1)^2$ heeft uitkomsten die groter dan of gelijk aan nul zijn. Daaruit volgt $f(x) \leq 2$, dus het bereik van f is $\langle \leftarrow, 2]$.

c $20 - 4x \geq 0$ als $x \leq 5$, dus het domein van g is $\langle \leftarrow, 5]$.

d $\sqrt{20 - 4x} \geq 0$

e Het bereik van g is $[-6, \rightarrow\rangle$.

U1 **a** $16 - x^2 \geq 0$
$-x^2 \geq -16$
$x^2 \leq 16$
$-4 \leq x \leq 4$

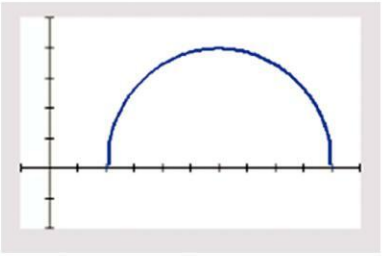
© Noordhoff Uitgevers bv

b Voor elke x geldt dat $x^2 \geq 0$. Hieruit volgt dat $16 - x^2 \leq 16$.

De grootste waarde van $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ is dus $f(0) = \sqrt{16} = 4$.

De kleinste waarde van $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ is $f(-4) = f(4) = \sqrt{0} = 0$.
Het bereik van f is $[0, 4]$.

c



$(2 - x)(x - 10) = 0$ als $x = 2$ of $x = 10$
Het domein van g is $[2, 10]$.
g is maximaal als $x = 6$, $g(6) = \sqrt{-4 \cdot -4} = \sqrt{16} = 4$.
$\sqrt{(2 - x)(10 - x)} \geq 0$, dus het bereik van g is $[0, 4]$.

U2 **a** $x = 12$ invullen geeft voor het randpunt $12a + 4 = 0$ ofwel $a = -\frac{1}{3}$

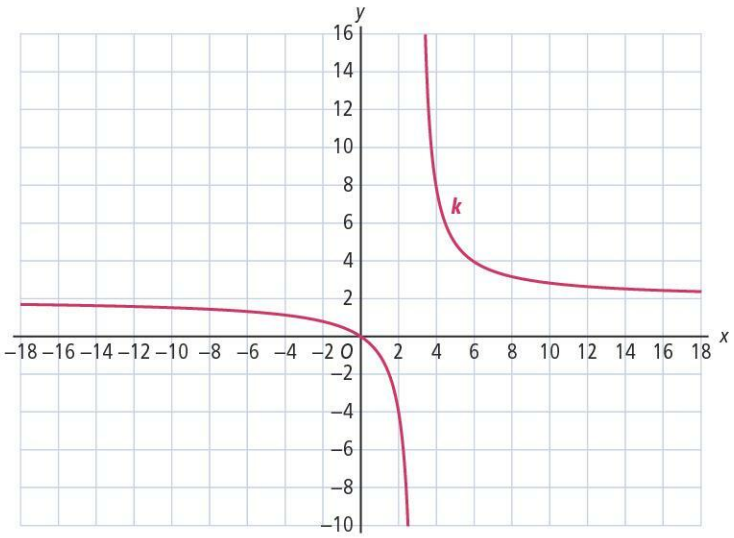
b $\sqrt{ax + 4} \geq 0$, dus dan moet gelden $2b - 3 = -7$.
Daaruit volgt $2b = -4$ ofwel $b = -2$.

3.2 Gebroken functies

intro De breedte van zo'n rechthoek is x, de hoogte is y. Dus $x \cdot y = 12$ ofwel $y = \frac{12}{x}$. Het functievoorschrift is dan $f(x) = \frac{12}{x}$.

10 a

x	-5	-1	0	1	2	$2{,}9$	3	$3{,}1$	10	100
$k(x)$	$1{,}25$	$0{,}5$	0	-1	-4	-58	k.n.	62	$2{,}86$	$2{,}06$



© Noordhoff Uitgevers bv

b Je kunt niet delen door 0.

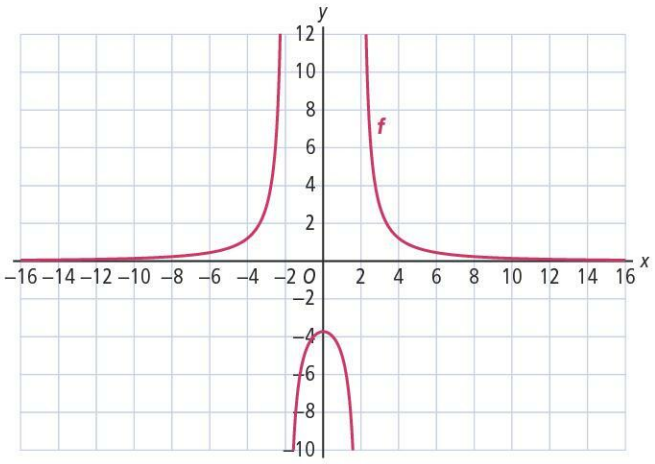
c Dan deel je 6 door een heel klein getal waardoor $k(x)$ ver van 0 komt.

d $k(-10) = \dfrac{6}{-10-3} + 2 = -\frac{6}{13} + 2 = 1\frac{7}{13}$

$k(-100) = \dfrac{6}{-100-3} + 2 = -\frac{6}{103} + 2 = 1\frac{97}{103}$

e De functiewaarden komen steeds dichter bij 2.

11 **a**



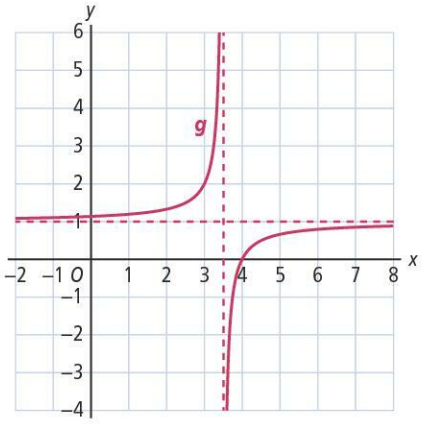
b $x = 2$ en $x = -2$, want dan wordt de noemer nul.

12 **a**

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	$1\frac{1}{9}$	$1\frac{1}{8}$	$1\frac{1}{7}$	$1\frac{1}{6}$	$1\frac{1}{5}$	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{2}$

b $7 - 2x = 0$ als $x = 3\frac{1}{2}$, dus het domein van g is $\langle \leftarrow, 3\frac{1}{2} \rangle \cup \langle 3\frac{1}{2}, \rightarrow \rangle$.

c



d De verticale asymptoot is $x = 3\frac{1}{2}$ en de horizontale asymptoot is $y = 1$.

e Het bereik is $\langle \leftarrow, 1 \rangle \cup \langle 1, \rightarrow \rangle$.

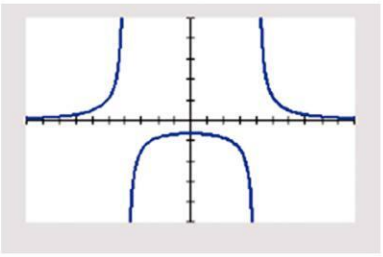
© Noordhoff Uitgevers bv

13 **a** $x - 9 \neq 0$ dus $x \neq 9$. Het domein van f is $\langle \leftarrow, 9\rangle \cup \langle 9, \rightarrow\rangle$.

$\frac{5}{x-9}$ kan alle waarden aannemen behalve 0 dus $f(x) \neq 2$.

Het bereik van f is $\langle \leftarrow, 2\rangle \cup \langle 2, \rightarrow\rangle$.

b

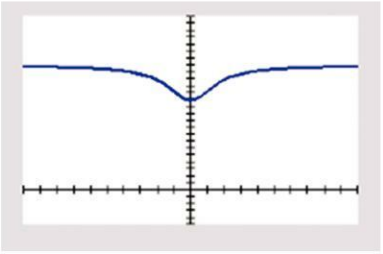


$x^2 - 16 \neq 0$ dus $x \neq 4$ en $x \neq -4$. Het domein is $\langle \leftarrow, -4\rangle \cup \langle -4, 4\rangle \cup \langle 4, \rightarrow\rangle$.

Voor waarden van x ver van 0 komt $g(x)$ dicht bij 0. Verder geldt

$g(0) = -\frac{10}{16} = -\frac{5}{8}$. Het bereik van g is $\left\langle \leftarrow, -\frac{5}{8}\right] \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$.

c

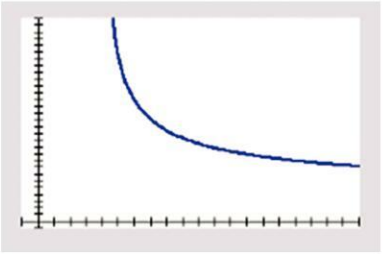


Voor x kun je alle waarden invullen, dus het domein van h is $\mathbb{R}$.

Voor waarden van x ver van 0 nadert $h(x)$ naar 18.

$h(0) = 18 - \frac{15}{0^2 + 3} = 18 - 5 = 13$, dus het bereik van h is $[13, 18\rangle$.

d



$x - 4 > 0$ als $x > 4$, dus het domein van k is $\langle 4, \rightarrow\rangle$.

Als x heel erg groot wordt nadert $k(x)$ naar 3, dus het bereik van k is $\langle 3, \rightarrow\rangle$.

14 **a**

x	0	1	2	3	4	10	100
$p(x)$	3	1	0	−0,5	−0,75	−0,996	≈ -1

b Als x heel groot wordt nadert $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ naar 0 en dat betekent dat $p(x)$ nadert naar -1. Dus $y = -1$ is de horizontale asymptoot van de grafiek van p.

c Nee, je kunt elke waarde voor x invullen.

d Het domein van p is $\mathbb{R}$ en het bereik is $\langle -1, \rightarrow\rangle$.

© Noordhoff Uitgevers bv

15 **a** De verticale asymptoot is $x = 2$, de horizontale asymptoot is $y = 4$.

b De verticale asymptoot is $x = -2$, de horizontale asymptoot is $y = 18$.

c $x^2 + 9$ is voor geen enkele x gelijk aan 0 dus er zijn geen verticale asymptoten. Voor waarden van x ver van 0 nadert $h(x)$ naar 0, dus de horizontale asymptoot is $y = 0$.

d Er is geen verticale asymptoot.
Voor hele grote waarden van x nadert $0{,}7^x$ naar 0, dus $k(x)$ nadert naar 200.
De horizontale asymptoot is $y = 200$.

16 **a** $x^2 + 4$ is voor geen enkele x gelijk aan 0, dus daarom heeft de grafiek van f geen verticale asymptoot.
$x^2 - 4 = 0$ als $x = 2$ of $x = -2$, dus de grafiek van g heeft twee verticale asymptoten, namelijk $x = -2$ en $x = 2$.

b Voor beide functies geldt dat voor waarden van x ver van 0 de functiewaarden naderen naar 0. Dus beide grafieken hebben een horizontale asymptoot $y = 0$.

17 **a** De noemer is voor geen enkele waarde van x gelijk aan 0.

b Als x heel erg groot wordt nadert $f(x)$ naar 0, dus $y = 0$ is een horizontale asymptoot van de grafiek van f.
Als x heel erg klein wordt (negatief en ver van 0) dan nadert 2^x naar 0, dus $f(x)$ nadert naar $\frac{10}{5} = 2$. Dus ook $y = 2$ is een horizontale asymptoot.

O13 **a** $g(3) = 4 + \dfrac{18}{3^2 - 9} = 4 + \dfrac{18}{0}$ Dit bestaat niet, omdat je niet kunt delen door 0.

b $x = -3$, omdat ook dan de noemer nul wordt.

c $\langle \leftarrow, -3\rangle \cup \langle -3, 3\rangle \cup \langle 3, \rightarrow\rangle$

d $g(10) \approx 4{,}198$
$g(100) \approx 4{,}0018$
$g(1000) \approx 4{,}000\,018$
$g(-10) \approx 4{,}198$
$g(-100) \approx 4{,}0018$
$g(-1000) \approx 4{,}000\,018$

e Voor waarden die steeds verder van 0 liggen nadert $g(x)$ naar 4.

f $y_{top} = g(0) = 4 + \dfrac{18}{0^2 - 9} = 4 + \dfrac{18}{-9} = 4 - 2 = 2$

g $\langle \leftarrow, 2] \cup \langle 4, \rightarrow\rangle$

O15 **a** $x = 1$ en $x = -1$

b De verticale asymptoten zijn $x = 1$ en $x = -1$.

c $f(-1000) \approx 5{,}000\,024$
$f(-100) \approx 5{,}0024$
$f(100) \approx 5{,}0024$
$f(1000) \approx 5{,}000\,024$

© Noordhoff Uitgevers bv

d De lijn $y = 5$ is de horizontale asymptoot van de grafiek.

e $2x - 7 = 0$ als $x = 3\frac{1}{2}$, dus de verticale asymptoot van g is $x = 3\frac{1}{2}$
$g(100) = -0{,}512\ldots$, $g(1000) \approx -0{,}501\ldots$
De horizontale asymptoot van g is $y = -\frac{1}{2}$

f Elke waarde van x kan ingevuld worden, dus er is geen verticale asymptoot.
$h(50) = 13{,}998\ldots$ en $h(100) = 13{,}999\ldots$
De horizontale asymptoot van h is $y = 14$.

g $x^2 \geq 0$ dus de noemer kan niet 0 worden. Elke waarde van x kan daarom ingevuld worden. Er is geen verticale asymptoot.
$k(100) = k(-100) = 0{,}003\,9\ldots$ en $k(1000) = k(-1000) = 0{,}000\,039\ldots$
De horizontale asymptoot van k is $y = 0$.

h $x^2 - 2x - 15 = 0$
$(x - 5)(x + 3) = 0$
$x = 5$ of $x = -3$
De verticale asymptoten zijn $x = 5$ en $x = -3$.
$l(100) = 0{,}003\ldots$, $l(1000) = 0{,}000\,030\ldots$, $l(-1000) = 0{,}000\,029\ldots$
De horizontale asymptoot van l is $y = 0$.

U3 **a** De richtingscoëfficiënt van lijn OA kun je schrijven als $r(x) = \frac{y}{x} = \frac{x+2}{x}$
ofwel $r(x) = 1 + \frac{2}{x}$

b $r(100) = 1 + \frac{2}{100} = 1{,}02$, $r(1000) = 1 + \frac{2}{1000} = 1{,}002$.
Als x steeds groter wordt, nadert $r(x)$ tot de waarde 1.

c Bij een richtingscoëfficiënt van 1 hoort een hellingshoek van 45°.

U4 **a** Er zijn twee verticale asymptoten als de vergelijking $x^2 + c = 0$ twee verschillende oplossingen heeft. Dat is zo als $c < 0$.

b Het bereik is één interval, namelijk $\langle 0, 4]$. Hieruit volgt dat de grafiek van h geen verticale asymptoten heeft. Dus $c > 0$.
Voor waarden van x ver van 0 nadert $h(x)$ naar 0, dus $y = 0$ is een horizontale asymptoot.
$h(x)$ is maximaal als $x^2 + c$ zo klein mogelijk is, dus als $x = 0$. Dan moet gelden dat $h(0) = 4$ ofwel $\frac{2}{0 + c} = 4$. Hieruit volgt dat $c = \frac{1}{2}$

3.3 Soorten functies

intro f is een machtsfunctie, g een exponentiële functie, h een wortelfunctie, k een kwadratische functie, m een lineaire functie en n is een constante functie.

18 **a** p, k en q

b kwadratische functie (f en s)
derdegraads functie (n)
machtsfunctie (h)
wortelfunctie (m en g)
exponentiële functie (r)

© Noordhoff Uitgevers bv

19 $f(x) = (x - 3)(x + 5) = x^2 + 2x - 15$
$g(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 3) = x^4 - 5x^2 + 6$
$h(x) = 2x^2(3 - x) + 6\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1\right) = 6x^2 - 2x^3 + 2x^3 - 6x^2 + 6 = 6$

20 **a** $h(x) = x(x - 5)(2x + 3) = x(2x^2 - 7x - 15) = 2x^3 - 7x^2 - 15x$
$k(x) = (x^2 - 4)(x^3 - 1) = x^5 - 4x^3 - x^2 + 4$

b De graad van functie f is 2, van functie g is de graad 4, van functie h is de graad 3 en van functie k is de graad 5.

21 **a** Bij de vorm $f(x) = a(x - p)^2 + q$ is de top eenvoudig af te lezen, dat is het punt (p, q).

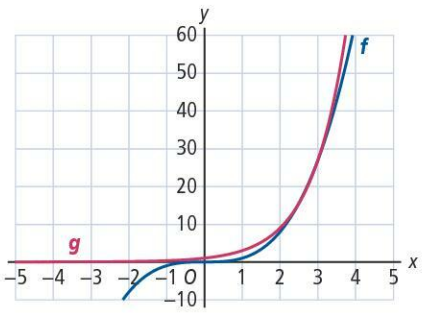
b Bij de vorm $f(x) = x(x - m)(x - n)$ weet je zeker dat de grafiek de x-as snijdt. De snijpunten zijn $(m, 0)$ en $(n, 0)$.

c Als de grafiek de x-as niet snijdt, kan het gaan om een dalparabool die in zijn geheel boven de x-as ligt. In dat geval zijn a en q beide positief.
Het kan ook gaan om een bergparabool die in zijn geheel onder de x-as ligt. In dat geval zijn a en q beide negatief. De waarde van p doet er niet toe.

22 **a** f is een machtsfunctie, g is een exponentiële functie.

b Van functie f is het domein $\mathbb{R}$ en het bereik $\mathbb{R}$.
Van functie g is het domein $\mathbb{R}$ en het bereik $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

c



d Er zijn twee snijpunten: optie snijpunten geeft (2,48; 15,22) en (3, 27).

23 Het domein hoeft niet $\mathbb{R}$ te zijn bij wortelfuncties (onder het wortelteken mag geen negatief getal staan), bij machtsfuncties (met gebroken exponenten) en bij gebroken functies (de noemer mag niet 0 zijn).

O20 **a** De functie f heeft graad 3 en functie g heeft graad 2.

b $h(x) = (x^3 - 1)(x^3 - 8) = x^6 - 9x^3 + 8$

c Omdat de hoogste macht zes is, heeft de functie h graad 6.

d $k(x) = 3x(x - 2)(2x + 7) = 3x(2x^2 + 7x - 4x - 14) = 3x(2x^2 + 3x - 14)$

e $k(x) = 6x^3 + 9x^2 - 42x$

f Omdat de hoogste macht drie is, heeft de functie k graad 3.

O5 **a** In alle functievoorschriften komt de factor $x - 1$ voor, dus 1 invullen geeft 0 als uitkomst. Alle grafieken gaan daarom door $(1, 0)$.

b Omdat de factor $x - 2$ en ook $x - 3$ bij meerdere functies voorkomt, liggen de punten $(2, 0)$ en $(3, 0)$ op meerdere grafieken.

c De graad van functie f is 1, die van g is 2, die van h is 3 en die van k is 4.

O6 De drie snijpunten met de x-as zijn bekend, dus $f(x) = x(x - 1)(x - 2)$.

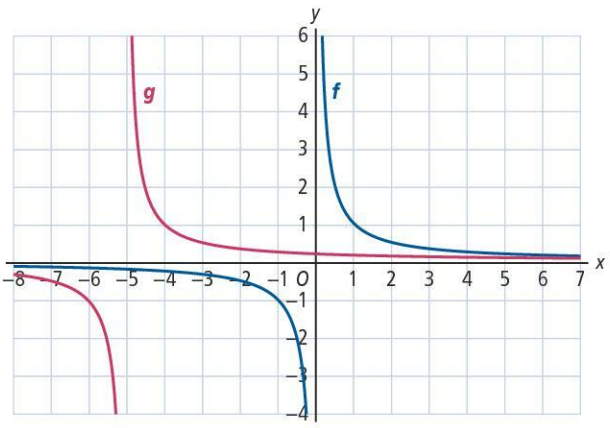
© Noordhoff Uitgevers bv

3.4 Grafieken verschuiven en vermenigvuldigen

intro A: de grafiek komt 50 hoger te liggen.
B: de grafiek loopt iets steiler en gaat bij 2040 door de s-as.

24 **a** Het randpunt van f is $(0,0)$, van g is het $(-5,0)$ en van h is het $(0,3)$.
b Door de grafiek van f vijf naar links te verschuiven ontstaat de grafiek van g.
c Door de grafiek van f drie omhoog te verschuiven ontstaat de grafiek van h.

25 **a**



b De grafiek van g ontstaat door de grafiek van f vijf naar rechts te verschuiven.

26 **a** De grafiek van f over een afstand van 1 naar links te verschuiven geeft
$h(x) = 3(x+1)^2 - 2(x+1) = 3(x^2+2x+1) - 2x - 2 = 3x^2 + 4x + 1$.
De grafiek van g over een afstand van 1 naar links te verschuiven geeft
$k(x) = -2(x+1) + \sqrt{x+1+1} = -2x - 2 + \sqrt{x+2}$.
b De grafiek van f over een afstand van 6 omlaag te verschuiven geeft
$h(x) = 3x^2 - 2x - 6$.
De grafiek van g over een afstand van 6 omlaag te verschuiven geeft
$k(x) = -2x + \sqrt{x+1} - 6$.

27 **a** Alle y-coördinaten worden $\frac{1}{3}$ keer zo groot, dus er wordt vermenigvuldigd met $\frac{1}{3}$ ten opzichte van de x-as.
b Alle y-coördinaten worden 2 keer zo groot, dus er wordt vermenigvuldigd met 2 ten opzichte van de x-as.

28 **a** $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$
Vermenigvuldigen met 3 ten opzichte van de x-as geeft $h(x) = 3(2x^2 - 5x + 1)$ ofwel $h(x) = 6x^2 - 15x + 3$.
Daarna 4 omlaag verschuiven geeft $j(x) = 6x^2 - 15x + 3 - 4$ ofwel $j(x) = 6x^2 - 15x - 1$.

$g(x) = 3x + \sqrt{\frac{1}{2}x + 5}$
Vermenigvuldigen met 3 ten opzichte van de x-as geeft

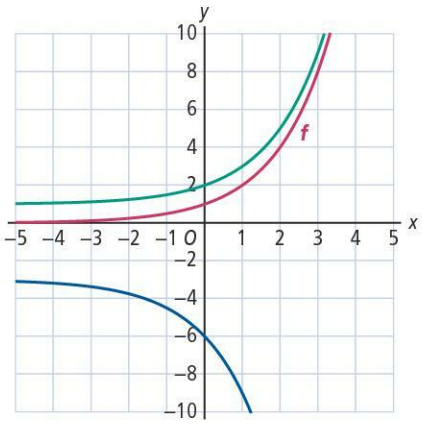
$k(x) = 3(3x + \sqrt{\frac{1}{2}x + 5})$ ofwel $k(x) = 9x + 3\sqrt{\frac{1}{2}x + 5}$

Daarna 4 omlaag verschuiven geeft $l(x) = 9x + \sqrt{\frac{1}{2}x + 5} - 4$
b $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$
5 omhoog verschuiven geeft $h(x) = 2x^2 - 5x + 1 + 5$ ofwel $h(x) = 2x^2 - 5x + 6$.
Daarna vermenigvuldigen met -2 ten opzichte van de x-as geeft
$j(x) = -2(2x^2 - 5x + 6)$ ofwel $j(x) = -4x^2 + 10x - 12$.

© Noordhoff Uitgevers bv

$g(x) = 3x + \sqrt{\frac{1}{2}x + 5}$
5 omhoog verschuiven geeft $k(x) = 3x + \sqrt{\frac{1}{2}x + 5} + 5$.
Daarna vermenigvuldigen met -2 ten opzichte van de x-as geeft
$l(x) = -2\left(3x + \sqrt{\frac{1}{2}x + 5} + 5\right)$ ofwel $l(x) = -6x - 2\sqrt{\frac{1}{2}x + 5} - 10$.

29 **a**



b Janet vergeet de 1 met -3 te vermenigvuldigen.
1 omhoog verschuiven geeft $h(x) = 1 + 2^x$.
Daarna met -3 vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as geeft
$j(x) = -3(1 + 2^x)$ ofwel $j(x) = -3 - 3 \cdot 2^x$.

c Eerst met -3 vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as, daarna 1 omhoog verschuiven.

30 $f(x) = x^2 - 4x$ eerst 2 omhoog verschuiven geeft $g(x) = x^2 - 4x + 2$.
Daarna vermenigvuldigen met $-\frac{1}{2}$ opzichte van de x-as geeft
$h(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$ ofwel $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$.

31 **a** Eerst vermenigvuldigen met 2 ten opzichte van de x-as, daarna 4 omlaag verschuiven.

b Eerst 2 omlaag verschuiven, daarna vermenigvuldigen met 2 ten opzichte van de x-as.

32 **a** Door bij de functie $f(x) = 2x^2 - 16x + 23 = 2(x^2 - 8x) + 23$ kwadraat af te splitsen krijg je $f(x) = 2((x - 4)^2 - 16) + 23$ ofwel $f(x) = 2(x - 4)^2 - 32 + 23$ dus $f(x) = 2(x - 4)^2 - 9$.

b Door $g(x) = x^2$ eerst 4 naar rechts te verschuiven, daarna te vermenigvuldigen met 2 ten opzichte van de x-as en tot slot 9 omlaag te verschuiven (of 4,5 omlaag, maal 2 t.o.v. de x-as en dan 4 naar rechts).

c $h(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x}$

Door $k(x) = \sqrt{x}$ eerst te vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de x-as en daarna $\frac{1}{2}$ omhoog te verschuiven ontstaat $h(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}x}$.

Een andere mogelijkheid is door $k(x) = \sqrt{x}$ eerst 1 omhoog te verschuiven, daardoor ontstaat $p(x) = 1 + \sqrt{x}$, en daarna te vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de x-as. Hierdoor ontstaat $h(x) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{x}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x}$ ofwel $h(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}x}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

O28 **a** $g(x) = 2x - 42$

b $h(x) = 2x - 42 + 10 = 2x - 32$

c Door $k(x) = 1 - 2\sqrt{2x - 5}$ eerst 3 omhoog te verschuiven krijg je $l(x) = 1 - \sqrt{2x - 5} + 3$ ofwel $l(x) = 4 - \sqrt{2x - 5}$.
Daarna vermenigvuldigen met -3 ten opzichte van de x-as geeft $n(x) = -3(4 - \sqrt{2x - 5})$ ofwel $n(x) = -12 + 3\sqrt{2x - 5}$.

d Door $m(x) = 8 - 6x^2$ eerst te vermenigvuldigen met 5 ten opzichte van de x-as krijg je $p(x) = 5(8 - 6x^2)$ ofwel $p(x) = 40 - 30x^2$. Daarna 8 omlaag verschuiven geeft $r(x) = 40 - 30x^2 - 8$ ofwel $r(x) = 32 - 30x^2$.

O31 **a** $k(x) = 4 \cdot f(x)$
$k(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}x + 3\right)$
$k(x) = 2x + 12$

b Om van de grafiek van $k(x) = 2x + 12$ de grafiek van $g(x) = 2x + 1$ te krijgen moet je de grafiek van k 11 omlaag verschuiven.

c Om van $\frac{1}{2}x$ naar $-x$ te komen moet je met -2 vermenigvuldigen.

d Door $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ te vermenigvuldigen met -2 krijg je $j(x) = -x - 6$.
Om daarna $h(x) = -x - 9$ te krijgen moet er een translatie 3 omlaag komen.

U7 **a** Door $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ eerst te vermenigvuldigen met 2 ten opzichte van de x-as ontstaat $j(x) = 2\left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right) = x^2 - 4$. Door vervolgens 4 omhoog te verschuiven ontstaat $f(x) = x^2 - 4 + 4 = x^2$.
Een tweede mogelijkheid is door $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ eerst 2 omhoog te verschuiven, dat geeft $k(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2 + 2 = \frac{1}{2}x^2$ en vervolgens te vermenigvuldigen met 2 ten opzichte van de x-as geeft $k(x) = 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 = x^2$.

b $h(x) = -x^2 + 8x + 2 = -(x - 4)^2 + 18$
De grafiek van h ontstaat uit die van $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ door eerst met -2 te vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as. Dat geeft $l(x) = -2\left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right) = -x^2 + 4$, daarna 4 naar rechts te verschuiven geeft $l(x) = -(x - 4)^2 + 4$ en tenslotte 14 omhoog te verschuiven geeft $h(x) = -(x - 4)^2 + 18$.
Een tweede mogelijkheid is door g eerst 4 naar rechts te verschuiven, dan 7 omlaag en tenslotte met -2 vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as.

U8 $g(x) = \dfrac{30}{2x^2 + 8x + 20} = \dfrac{15}{x^2 + 4x + 10} = \dfrac{15}{(x + 2)^2 + 6}$
Hieruit volgt $a = 15$ en $b = 6$ en de verschuiving is 2 naar links.

3.5 Vergelijkingen oplossen

intro De leeftijd van Opa Joost is een kwadraat, dus dat kan 64 of 81 zijn. Als Opa Joost 64 is, dan is Kevin 8, Bo 12 en Iris 16. Dat is samen precies 100.

33 Alleen de oplossingen van Annet zijn juist. Yvonne geeft een benadering van één van de oplossingen.

© Noordhoff Uitgevers bv

34 **a** $\frac{-3}{x} + 4 = x$

$-3 + 4x = x^2$ mits $x \neq 0$
$x^2 - 4x + 3 = 0$
$(x - 3)(x - 1) = 0$
$x = 3$ of $x = 1$

b $2x(x^2 - 3x) = 2x^3 - 4x$

$2x^3 - 6x^2 = 2x^3 - 4x$
$-6x^2 + 4x = 0$
$-2x(3x - 2) = 0$
$x = 0$ of $x = \frac{2}{3}$

c $x - 1 = \sqrt{x - 1}$

$x^2 - 2x + 1 = x - 1$
$x^2 - 3x + 2 = 0$
$(x - 2)(x - 1) = 0$
$x = 2$ of $x = 1$ beide voldoen

d $\frac{2}{x^2} - 1 = x^2$

$2 - x^2 = x^4$ mits $x \neq 0$
$x^4 + x^2 - 2 = 0$
stel $x^2 = p$
$p^2 + p - 2 = 0$
$(p + 2)(p - 1) = 0$
$p = -2$ of $p = 1$
$x^2 = -2$ of $x^2 = 1$
$x = 1$ of $x = -1$

35 **a** $3 - \sqrt{5 + 2x^2} = 0$

$\sqrt{5 + 2x^2} = 3$

$5 + 2x^2 = 9$
$2x^2 = 4$
$x^2 = 2$

$x = \sqrt{2}$ of $x = -\sqrt{2}$

$\left(\sqrt{2}, 0\right)$ en $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$

b $\sqrt{x^2 + x - 1} = 0$
$x^2 + x - 1 = 0$
$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 5$
$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ of $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$
$\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, 0\right)$ en $\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}, 0\right)$

c $1 - \frac{4}{2x^2 + x + 3} = 0$

$\frac{4}{2x^2 + x + 3} = 1$
$2x^2 + x + 3 = 4$
$2x^2 + x - 1 = 0$
$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot -1 = 9$
$x = \frac{-1 + 3}{4} = \frac{1}{2}$ of $x = \frac{-1 - 3}{4} = -1$

$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ en $(-1, 0)$

d $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$
stel $x^2 = p$
$p^2 - 7p + 12 = 0$

$(p - 3)(p - 4) = 0$

$p = 3$ of $p = 4$
$x^2 = 3$ of $x^2 = 4$
$x = \sqrt{3}$ of $x = -\sqrt{3}$ of $x = 2$ of $x = -2$
$(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$, $(2, 0)$ en $(-2, 0)$

36 **a** De omtrek is $2\pi \cdot 1\frac{1}{2} = 3\pi$ en de oppervlakte is $\pi \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{4}\pi$.
b De lengte van de evenaar is de omtrek van de aarde is $12732\pi \approx 39\,999$ km.
c De diameter is ook een benadering en niet exact.

37 **a** Invoer: $y_1 = x^3 + 6x^2$ en $y_2 = 4(x + 6)$
Venster: $-10 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 50$
Optie: snijpunten
De oplossingen zijn $x = -6$ of $x = 2$ of $x = -2$

b $x^3 + 6x^2 = 4(x + 6)$
$x^2(x + 6) = 4(x + 6)$
$x + 6 = 0$ of $x^2 = 4$
$x = -6$ of $x = 2$ of $x = -2$

© Noordhoff Uitgevers bv

38 **a** De vergelijkingen B en D zijn exact op te lossen.
vergelijking B
$2x^4 - 5x^3 + 2x^2 = 0$
$x^2(2x^2 - 5x + 2) = 0$
$x^2 = 0$ of $2x^2 - 5x + 2 = 0$
$x = 0$ of $x = \frac{5 + \sqrt{9}}{4} = 2$ of $x = \frac{5 - \sqrt{9}}{4} = \frac{1}{2}$
vergelijking D
$2x + 1 = \sqrt{4x + 10}$
$4x^2 + 4x + 1 = 4x + 10$
$4x^2 = 9$
$2x = 3$ of $2x = -3$
$x = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ of $x = -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$
$x = 1\frac{1}{2}$ invullen geeft $3 + 1 = \sqrt{6 + 10}$, klopt.
$x = -1\frac{1}{2}$ invullen geeft $-3 + 1 = \sqrt{-6 + 10}$, klopt niet.
De oplossing is $x = 1\frac{1}{2}$

b vergelijking A
Invoer: $y_1 = x^3 + 2x^2$ en $y_2 = 15$
Venster: $-5 \le x \le 5$, $-10 \le y \le 20$
Optie: snijpunt
$x \approx 1{,}95$
vergelijking C
Invoer: $y_1 = 50 \cdot 0{,}8^x$ en $y_2 = 17$
Venster: $-10 \le x \le 10$, $-10 \le y \le 50$
Optie: snijpunt
$x \approx 4{,}83$

39 **a** Aflezen: $x = -1$ en $x = 1$.
$f(-1) = (-1 + 1)(-1 - 3)^2 = 0 \cdot 16 = 0$ en $g(-1) = 4(-1 + 1) = 4 \cdot 0 = 0$
$f(1) = (1 + 1)(1 - 3)^2 = 2 \cdot (-2)^2 = 8$ en $g(1) = 4 \cdot (1 + 1) = 8$, klopt beiden.

b $(x + 1)(x - 3)^2 = 4(x + 1)$
$x + 1 = 0$ of $(x - 3)^2 = 4$
$x = -1$ of $x - 3 = 2$ of $x - 3 = -2$
$x = -1$ of $x = 5$ of $x = 1$
Ja, er is een derde oplossing, namelijk $x = 5$.

40 **a** $(x - 2)^2 (2x + 1) = (x - 2)^2 (x + 2)$
$(x - 2)^2 = 0$ of $2x + 1 = x + 2$
$x = 2$ of $x = 1$

b $(x - 2)^2 (2x + 1) = (x - 2)^3$
$(x - 2)^2 (2x + 1) = (x - 2)^2 (x - 2)$
$(x - 2)^2 = 0$ of $2x + 1 = x - 2$
$x = 2$ of $x = -3$

c $(x - 3) \cdot 2^x = 2x - 6$
$(x - 3) \cdot 2^x = (x - 3) \cdot 2$
$x - 3 = 0$ of $2^x = 2$
$x = 3$ of $x = 1$

© Noordhoff Uitgevers bv

d $\frac{4x+1}{x^2} = 16x + 4$

$\frac{1}{x^2} \cdot (4x + 1) = 4(4x + 1)$

$\frac{1}{x^2} = 4$ of $4x + 1 = 0$

$x^2 = \frac{1}{4}$ of $4x = -1$

$x = \frac{1}{2}$ of $x = -\frac{1}{2}$ of $x = -\frac{1}{4}$

41 **a** $-x^2 + 5x + 6 = 0$

$x^2 - 5x - 6 = 0$

$(x - 6)(x + 1) = 0$

$x = 6$ of $x = -1$

Omdat de grafiek van $y = -x^2 + 5x + 6$ een bergparabool is, is $-x^2 + 5x + 6 \geq 0$ als $-1 \leq x \leq 6$

Het domein van f is $[-1, 6]$.

b $f(x) = g(x)$

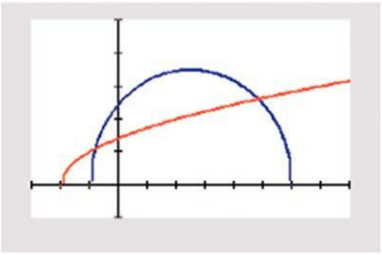
$\sqrt{-x^2 + 5x + 6} = \sqrt{x + 2}$

$-x^2 + 5x + 6 = x + 2$

$x^2 - 4x - 4 = 0$

$D = 16 - 4 \cdot 1 \cdot -4 = 32$, $\sqrt{D} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$x = \frac{4 + 4\sqrt{2}}{2} = 2 + 2\sqrt{2}$ of $x = \frac{4 - 4\sqrt{2}}{2} = 2 - 2\sqrt{2}$



$f(x) < g(x)$ als $-1 \leq x < 2 - 2\sqrt{2} \vee 2 + 2\sqrt{2} < x \leq 6$

034 **a** $\frac{5}{x} = 2x + 3$

$5 = 2x^2 + 3x$ mits $x \neq 0$

$2x^2 + 3x - 5 = 0$

$D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot -5 = 49$

$x = \frac{-3 + 7}{4} = 1$ of $x = \frac{-3 - 7}{4} = -2\frac{1}{2}$

b $x^2(x - 1) = 2x$

$x^3 - x^2 = 2x$

$x^3 - x^2 - 2x = 0$

$x(x^2 - x - 2) = 0$

$x(x - 2)(x + 1) = 0$

$x = 0$ of $x = 2$ of $x = -1$

c $x = \sqrt{4x + 12}$

$x^2 = 4x + 12$

$x^2 - 4x - 12 = 0$

$(x - 6)(x + 2) = 0$

$x = 6$ of $x = -2$ (voldoet niet)

d $x = -2$ voldoet niet omdat een wortel niet negatief kan zijn.

© Noordhoff Uitgevers bv

O38 **a** A is een lineaire vergelijking en B een kwadratische en deze kun je beiden exact oplossen.

b $0{,}2x + 7 = 0{,}3x - 1$
$-0{,}1x = -8$
$x = 80$

$2x^2 - 5x = 7$
$2x^2 - 5x - 7 = 0$
$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot -7 = 81$
$x = \frac{5+9}{4} = 3\frac{1}{2}$ of $x = \frac{5-9}{4} = -1$

c vergelijking C:
Invoer: $y_1 = x^3 + x^2$ en $y_2 = 43$
Venster: $-5 \le x \le 5$, $-10 \le y \le 60$
Optie: snijpunt
$x \approx 3{,}20$
vergelijking D:
Invoer: $y_1 = 5 + 6 \cdot 2^x$ en $y_2 = 95$
Venster: $-10 \le x \le 10$, $-10 \le y \le 150$
Optie: snijpunt
$x \approx 3{,}91$
vergelijking E:
Invoer: $y_1 = \frac{10}{x^2 + 1}$ en $y_2 = x^3$
Venster: $-5 \le x \le 5$, $-5 \le y \le 15$
Optie: snijpunt
$x \approx 1{,}47$
vergelijking F:
Invoer: $y_1 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ en $y_2 = -6$
Venster: $-5 \le x \le 5$, $-10 \le y \le 10$
Optie: snijpunt
$x = 0$

d $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = -6$
$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = -6$
$x(x^2 - 6x + 11) = 0$
$x = 0$ of $x^2 - 6x + 11 = 0$, van deze laatste vergelijking is $D < 0$, dus heeft geen oplossing.

U9 **a** Invoer: $y_1 = 3 + x + \frac{1}{2^x}$
Venster: $-10 \le x \le 10$, $-10 \le y \le 20$
Optie: minimum
$y \approx 3{,}91$, dus het bereik van f is $[3{,}91; \rightarrow\rangle$.

b $3 + x + \frac{1}{2^x} = x + 3\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2^x} = \frac{1}{4}$
$2^x = 4$
$x = 2$

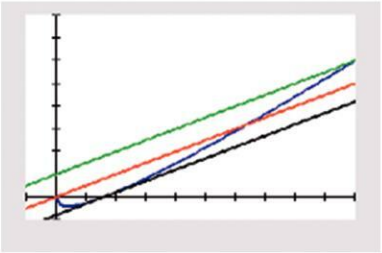
c Invoer: $y_1 = 3 + x + \frac{1}{2^x}$ en $y_2 = 2x$
Venster: $-10 \le x \le 10$, $-10 \le y \le 20$
Optie: snijpunt
$x \approx 3{,}12$

© Noordhoff Uitgevers bv

U10 **a** $x - 4\sqrt{x} = \frac{1}{2}x - 3\frac{1}{2}$

$-4\sqrt{x} = -\frac{1}{2}x - 3\frac{1}{2}$
$8\sqrt{x} = x + 7$
$64x = x^2 + 14x + 49$
$x^2 - 50x + 49 = 0$
$(x - 49)(x - 1) = 0$
$x = 49$ of $x = 1$
$x = 49$ invullen geeft $49 - 4\sqrt{49} = \frac{1}{2} \cdot 49 - 3\frac{1}{2}$, klopt.
$x = 1$ invullen geeft $1 - 4\sqrt{1} = \frac{1}{2} \cdot 1 - 3\frac{1}{2}$, klopt.
De snijpunten zijn $(49, 21)$ en $(1, -3)$.

b



In de plot is te zien dat er één snijpunt is als $p > 0$ en één snijpunt als de grafiek van g_p de grafiek van f raakt.

$x - 4\sqrt{x} = \frac{1}{2}x + p$

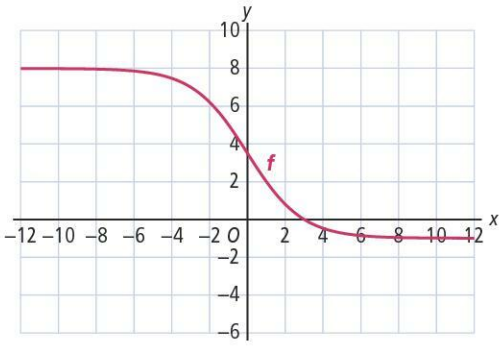
$-4\sqrt{x} = -\frac{1}{2}x + p$
$8\sqrt{x} = x - 2p$
$64x = x^2 - 4px + 4p^2$
$x^2 - 64x - 4px + 4p^2 = 0$
$x^2 + (-64 - 4p)x + 4p^2 = 0$
$D = (-64 - 4p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4p^2$
de vergelijking heeft één oplossing, dus $D = 0$.
$(-64 - 4p^2) - 16p^2 = 0$
$4096 + 512p + 16p^2 - 16p^2 = 0$
$512p = -4096$
$p = -8$. Er is één oplossing als $p > 0 \vee p = -8$

© Noordhoff Uitgevers bv

3.6 Gemengde opdrachten

42 **a** De grafiek heeft geen verticale asymptoot, omdat de noemer $1 + 2^x$ voor geen enkele waarde van x nul kan zijn.

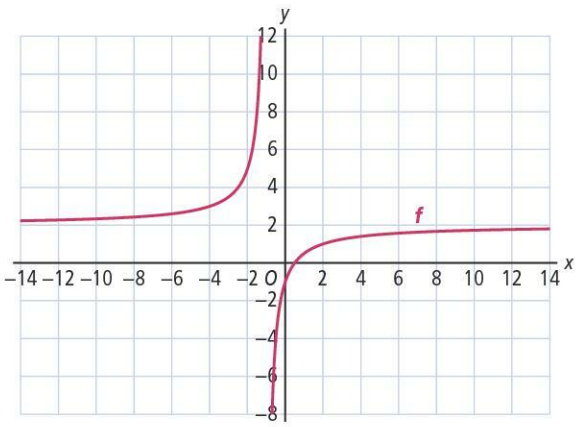
b



c Voor hele grote positieve x-waarden nadert $f(x)$ naar -1, voor negatieve x-waarden ver van 0 nadert $f(x)$ naar 8.
De horizontale asymptoten zijn $y = -1$ en $y = 8$.

d Het bereik is $\langle -1, 8 \rangle$.

43 **a**



b Het domein is $\langle \leftarrow, -1 \rangle \cup \langle -1, \rightarrow \rangle$ en het bereik is $\langle \leftarrow, 2 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$.

c $2 - \dfrac{3}{x+1} = -3x - 1$

$-\dfrac{3}{x+1} = -3x - 3$

$\dfrac{3}{x+1} = 3x + 3$

$3 = (3x + 3)(x + 1)$ mits $x \neq -1$

$3 = 3x^2 + 6x + 3$

$3x^2 + 6x = 0$

$3x(x + 2) = 0$

$x = 0$ of $x = -2$

De snijpunten zijn $(0, -1)$ en $(-2, 5)$.

d Invoer: $y_1 = 2 - \dfrac{3}{x+1}$ en $y_2 = x^2 + x - 12$

Venster: $-10 \leq x \leq 10$, $-20 \leq y \leq 10$

Optie: snijpunten

$(-4{,}39;\ 2{,}88)$, $(-0{,}79;\ -12{,}17)$ en $(3{,}18;\ 1{,}28)$.

e $g(x) = -3\left(2 - \dfrac{3}{x+1}\right) - 12 = -6 + \dfrac{9}{x+1} - 12 = \dfrac{9}{x+1} - 18$

© Noordhoff Uitgevers bv

44 **a** A hoort bij m, B bij f, C bij g en D bij h.

b Het domein van f is $\mathbb{R}$ en het bereik is $\mathbb{R}$.
Het domein van g is $\langle \leftarrow, 4\rangle \cup \langle 4, \rightarrow\rangle$ en het bereik $\left\langle \leftarrow, 2\frac{1}{2}\right\rangle \cup \left\langle 2\frac{1}{2}, \rightarrow\right\rangle$.
Het domein van h is $\langle \leftarrow, 5]$ en het bereik $[0, \rightarrow\rangle$.
Het domein van m is $\mathbb{R}$ en het bereik $\langle 0, \rightarrow\rangle$.

45 **a** $\dfrac{9}{-x+4} = 6 + x$

$(6 + x)(-x + 4) = 9$, mits $x \neq 4$

$-6x + 24 - x^2 + 4x = 9$

$x^2 + 2x - 15 = 0$

$(x + 5)(x - 3) = 0$

$x = -5$ of $x = 3$

b $x^6 = 3x^3 + 4$

stel $x^3 = a$

$a^2 = 3a + 4$

$a^2 - 3a - 4 = 0$

$(a + 1)(a - 4) = 0$

$a = -1$ of $a = 4$

$x^3 = -1$ of $x^3 = 4$

$x = -1$ of $x = \sqrt[3]{4}$

c $\sqrt{3x + 16} = 2x - 1$

$3x + 16 = 4x^2 - 4x + 1$

$4x^2 - 7x - 15 = 0$

$D = (-7)^2 - 4 \cdot 4 \cdot -15 = 289$

$x = \dfrac{7 - \sqrt{289}}{2 \cdot 4} = -1\frac{1}{4}$ of

$x = \dfrac{7 + \sqrt{289}}{2 \cdot 4} = 3$

d $x^2 - \dfrac{6}{x^2} = 5$

stel $x^2 = a$

$a - 5 = \dfrac{6}{a}$

$a^2 - 5a - 6 = 0$

$(a + 1)(a - 6)$

$a = -1$ of $a = 6$

$x^2 = -1$ of $x^2 = 6$

$x = -\sqrt{6}$ of $x = \sqrt{6}$

Onderzoeksopdrachten

46 Eén rode rechthoek is x cm breed en $10 - 2x$ cm lang, dus de oppervlakte van de vier rode rechthoeken samen is $4 \cdot x(10 - 2x) = 40x - 8x^2 \text{cm}^2$.
De totale oppervlakte is 100 cm^2. De oppervlakte van de rode delen is gelijk aan de oppervlakte van de gele delen, dus beide zijn dan 50 cm^2.
$40x - 8x^2 = 50$
$8x^2 - 40x + 50 = 0$
$D = 1600 - 4 \cdot 8 \cdot 50 = 0$
$x = \frac{40}{16} = 2\frac{1}{2}$, dus voor $x = 2\frac{1}{2}$ cm is de totale oppervlakte van de rode delen gelijk aan die van de gele delen.

47 **a** $f(0) = 0$ als $b = 0$, a kan een willekeurige waarde hebben.

b $f(0) = 0$, dus $b = 0$.
$f(1) = 3$ dus $1^3 + a \cdot 1 + 0 = 3$ ofwel $1 + a = 3$. Hieruit volgt dat $a = 2$.

c $f(0) = 0$, dus $b = 0$.
De grafiek heeft twee toppen als er 3 snijpunten met de x-as zijn.
$x^3 + ax = 0$
$x(x^2 + a) = 0$
$x = 0$ of $x^2 + a = 0$
Er zijn 3 oplossingen als $a < 0$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Samenvatting

S1 Functie g heeft domein $\mathbb{R}$, de noemer zal nooit nul worden.

S2
- **a** kwadratische functie
- **b** constante functie
- **c** gebroken functie
- **d** exponentiële functie
- **e** machtsfunctie
- **f** veeltermfunctie

S3 f: een verschuiving van 3 naar rechts.
g: een vermenigvuldiging met 12 ten opzichte van de x-as.
h: een verschuiving van 3 naar rechts gevolgd door een vermenigvuldiging met 12 ten opzichte van de x-as (of andersom).

S4
- **a** Het domein is $[-6, \rightarrow\rangle$ en het bereik is $[-1, \rightarrow\rangle$.
- **b** Het domein is $\mathbb{R}$ en het bereik is $\langle\leftarrow, 5\rangle$.

S5
- **a** De noemer van h is gelijk aan 0 als $2x - 9 = 0$ ofwel als $x = 4\frac{1}{2}$
De verticale asymptoot is $x = 4\frac{1}{2}$. Voor toenemende waarden van x komt de functiewaarde steeds dichter bij 3 te liggen. De horizontale asymptoot van h is $y = 3$.
- **b** Er is geen verticale asymptoot omdat je voor x elke waarde kan invullen.
Voor toenemende waarden van x nadert de term $20 \cdot 0{,}75^x$ naar nul.
De horizontale asymptoot van q is $y = -4$.

S6 $f(x) = 2 + 3 \cdot x^4$ eerst 5 omhoog schuiven geeft $g(x) = 7 + 3 \cdot x^4$.
Daarna $g(x) = 7 + 3 \cdot x^4$ vermenigvuldigen met 2 ten opzichte van de x-as geeft $k(x) = 2 \cdot (7 + 3x^4)$ ofwel $k(x) = 14 + 6x^4$.

S7
- **a** $4 + \dfrac{10}{3x - 1} = 3x$

$\dfrac{10}{3x - 1} = 3x - 4$

$(3x - 1)(3x - 4) = 10$

$9x^2 - 15x + 4 - 10 = 0$

$9x^2 - 15x - 6 = 0$

$3x^2 - 5x - 2 = 0$

$D = 25 - 4 \cdot 3 \cdot -2 = 49$

$x = \dfrac{5 + 7}{6} = 2$ of $x = \dfrac{5 - 7}{6} = -\frac{1}{3}$

- **b** $4 + \dfrac{10}{3x - 1} = -x + 9$

Invoer: $y_1 = 4 + \dfrac{10}{3x - 1}$

$y_2 = -x + 9$

Venster: $-10 \le x \le 10$

$-10 \le y \le 20$

Optie: snijpunten

$x \approx 1{,}21$ en $x \approx 4{,}12$.

Test jezelf

T1
- **a** Het domein is $\langle\leftarrow, 4\rangle \cup \langle 4, \rightarrow\rangle$ en het bereik is $\langle\leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$.
- **b** Het domein is $\langle\leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$ en het bereik is $\langle\leftarrow, 2\rangle \cup \langle 2, \rightarrow\rangle$.
- **c** Het domein is $\langle\leftarrow, 4\rangle \cup \langle 4, \rightarrow\rangle$ en het bereik is $\langle\leftarrow, -19\rangle \cup \langle -19, \rightarrow\rangle$.
- **d** Het domein is $\langle -4, \rightarrow\rangle$ en het bereik is $\langle 2, \rightarrow\rangle$.

© Noordhoff Uitgevers bv

T2 g: verticale asymptoot $x = 3$ en horizontale asymptoot $y = -2$.
h: geen verticale asymptoot en horizontale asymptoot $y = 0$.

T3 **a** A, D, E en F

b A $3\sqrt{4x-1} = 5$
$9(4x-1) = 25$
$36x - 9 = 25$
$36x = 34$
$x = \frac{34}{36} = \frac{17}{18}$

D $16x^2 + 9 = 24x$
$16x^2 - 24x + 9 = 0$
$D = 576 - 4 \cdot 16 \cdot 9 = 0$
$x = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$

E $8 + \sqrt{4-x} = 10$
$\sqrt{4-x} = 2$
$4 - x = 4$
$x = 0$

F $\frac{x-4}{x-3} = x$
$x(x-3) = x - 4$
$x^2 - 3x = x - 4$
$x^2 - 4x + 4 = 0$
$(x-2)(x-2) = 0$
$x = 2$

c B Invoer: $y_1 = 8(x+2)^2$ en $y_2 = x^3 + 1$
Venster: $-20 \le x \le 20$, $-100 \le y \le 2000$
Optie: snijpunt
$x \approx 11{,}13$

C Invoer: $y_1 = 6 \cdot 0{,}8^x - 3$
Venster: $-10 \le x \le 10$, $-10 \le y \le 10$
Optie: nulpunt
$x \approx 3{,}11$

T4 **a** $f(x) = 2 - 4x^3$ vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de x-as geeft $g(x) = \frac{1}{2}(2 - 4x^3) = 1 - 2x^3$. Hierna de grafiek 3 naar beneden verschuiven geeft $h(x) = 1 - 2x^3 - 3$ ofwel $h(x) = -2 - 2x^3$.

b 2 omlaag verschuiven en dan vermenigvuldigen met $-\frac{1}{2}$ ten opzichte van de x-as.

T5 $\frac{1}{2}x^2 + x - 10 = -10$
$\frac{1}{2}x^2 + x = 0$
$\frac{1}{2}x(x+2) = 0$
$x = 0$ of $x = -2$
De symmetrieas van de parabool is dus de lijn $x = -1$.
$AB = 14$, dus de x-coördinaat van punt B is $-1 + \frac{1}{2} \cdot 14 = 6$.
B is het punt $(6, 0)$ en A is het punt $(-8, 0)$.
$f(6) = \frac{1}{2} \cdot 36 + 6 - 10 = 14$, dus de hoogte van de rechthoek is 14.

T6 **a** Grafiek 1 hoort bij k, 2 hoort bij f, 3 hoort bij h en 4 hoort bij g.

b $k(0) = 3$, dus $A(0, 3)$.
$3 - \frac{1}{2}x = 0$ geeft $x = 6$, dus $B(6, 0)$.
$f(0) = 3 \cdot 1{,}5^0 = 3$, dus $C(0, 3)$.
$9 - 2x = 0$ als $x = 4\frac{1}{2}$, dus $D\left(4\frac{1}{2}\ , 0\right)$.

c Grafiek 2 heeft horizontale asymptoot $y = 0$ en grafiek 3 heeft horizontale asymptoot $y = -1$.

d Het domein van f is $\mathbb{R}$ en het bereik is $\langle 0\ , \rightarrow \rangle$.
Het domein van g is $\left\langle \leftarrow\ , 4\frac{1}{2} \right]$ en het bereik is $[0\ , \rightarrow\rangle$.
Het domein van h is $\langle \leftarrow\ , 2\rangle \cup \langle 2\ , \rightarrow\rangle$ en het bereik is $\langle \leftarrow\ , -1\rangle \cup \langle -1\ , \rightarrow\rangle$.
Het domein van k is $\mathbb{R}$ en het bereik is $\mathbb{R}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

e Invoer: $y_1 = 3 \cdot 1{,}5^x$ en $y_2 = 10$
Venster: $-10 \le x \le 10$, $-10 \le y \le 20$
Optie: snijpunt
$x \approx 2{,}97$
$f(x) < 10$ als $x < 2{,}97$

T7 **a** Een vierhoek met vier gelijke zijden en vier rechte hoeken is een vierkant.
De vier zijden van vierhoek $PQRS$ zijn alle vier de schuine zijde van een rechthoekige driehoek met zijden a en $6 - a$, dus zijn alle vier even lang.
Verder zijn in driehoek APS de hoeken P en S samen 90°. Omdat driehoek PBQ congruent is met driehoek APS, zijn de hoeken P van beide driehoeken samen 90°. Dus is ook hoek P van vierhoek $PQRS$ 90°. Dezelfde redenatie geldt ook voor de andere hoeken van $PQRS$.

b $AS = 6 - a$
De oppervlakte van $\triangle APS$ is $\frac{1}{2} \cdot AP \cdot AS = \frac{1}{2}a(6 - a) = 3a - \frac{1}{2}a^2$.

c $O(a) = 36 - 4 \cdot \left(3a - \frac{1}{2}a^2\right) = 36 - 12a + 2a^2$ ofwel $O(a) = 2a^2 - 12a + 36$.

d Invoer: $y_1 = 2x^2 - 12x + 36$
Venster: $0 \le x \le 6$, $0 \le y \le 50$
Optie: minimum
$x = 3$ en $y = 18$
De minimale oppervlakte is 18 voor $a = 3$.

e Het domein is $\langle 0, 6 \rangle$.
$O(0) = 36$ en $O(6) = 36$ dus het bereik is $[18, 36\rangle$.

f Invoer: $y_2 = 30$
Optie: snijpunten
$x \approx 0{,}55$ en $x \approx 5{,}45$
De oppervlakte van $PQRS$ is groter dan 30 als $0 < a < 0{,}55$ of $5{,}45 < a < 6$.

Extra oefening

E1 **a** Het domein is $\mathbb{R}$.
$x^2 - 8x = 0$ geeft $x = 0$ of $x = 8$, dus $x_{top} = 4$.
$f(4) = 16 - 32 = -16$, dus het bereik is $[-16, \rightarrow\rangle$.

b Het domein is $\mathbb{R}$.
De horizontale asymptoot is $y = 0$. Het maximum is $g(0) = \frac{45}{9} = 5$, dus het bereik is $\langle 0, 5]$.

c $4x - 30 \ge 0$ als $x \ge 7\frac{1}{2}$ dus het domein is $\left[7\frac{1}{2}, \rightarrow\right\rangle$.
Het bereik is $[-2, \rightarrow\rangle$.

d Het domein is $\mathbb{R}$.
Het bereik is $\langle \leftarrow, 20\rangle$.

E2 **a** De verticale asymptoot is $x = 2$, de horizontale asymptoot is $y = 4$.

b De verticale asymptoot is $x = -2$, de horizontale asymptoot is $y = 18$.

c $x^2 + 9 = 0$ heeft geen oplossingen, dus er is geen verticale asymptoot.
De horizontale asymptoot is $y = 0$.

d De horizontale asymptoot is $y = 200$.

© Noordhoff Uitgevers bv

E3 **a** $g(x) = -1\frac{1}{2}x + 5 - 6 = -1\frac{1}{2}x - 1$

b $g(x) = -1\frac{1}{2}(x + 4) + 5 = -1\frac{1}{2}x - 1$

c $g(x) = -2(-1\frac{1}{2}x + 5) - 6 = 3x - 16$

d $g(x) = 4\left(-1\frac{1}{2}(x - 7) + 5\right) = -6x + 42 + 20 = -6x + 62$

E4 **a** A $-\frac{2}{x} + x = 1$

$-2 + x^2 = x$ mits $x \neq 0$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x - 2)(x + 1) = 0$

$x = 2$ of $x = -1$

B $x = 2 + \sqrt{x - 1}$

$x - 2 = \sqrt{x - 1}$

$x^2 - 4x + 4 = x - 1$

$x^2 - 5x + 5 = 0$

$D = 25 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = 5$

$x = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$ of $x = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$

alleen $x = 2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ voldoet.

C $2x^3 - 5x^2 + 3x = 0$

$x(2x^2 - 5x + 3) = 0$

$x = 0$ of $2x^2 - 5x + 3 = 0$

$x = 0$ $D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$

$x = 0$ of $x = \frac{5 + 1}{4}$ of $x = \frac{5 - 1}{4}$

$x = 0$ of $x = 1\frac{1}{2}$ of $x = 1$

b D $\frac{x}{x + 4} = \frac{5}{x - 3}$

$x^2 - 3x = 5x + 20$

$x^2 - 8x - 20 = 0$

$(x - 10)(x + 2) = 0$

$x = 10$ of $x = -2$

beide oplossingen voldoen.

E $(2x - 3)^4 = \sqrt{x + 20}$

Invoer: $y_1 = (2x - 3)^4$ en

$y_2 = \sqrt{x + 20}$

Venster: $-2 \leq x \leq 5$, $-2 \leq y \leq 10$

Optie: snijpunt

$x \approx 0{,}77$ en $x \approx 2{,}24$

F $0{,}3x^3 - 8x^2 + x = 10$

Invoer: $y_1 = 0.3x^3 - 8x^2 + x$

$y_2 = 10$

Venster: $-10 \leq x \leq 30$,

$-10 \leq y \leq 30$

Optie: snijpunt

$x \approx 26{,}59$

E5 **a** $x = 3$ invullen geeft $y = -\frac{1}{2} \cdot 3 + 5 = 3\frac{1}{2}$, dus $B\left(0, 3\frac{1}{2}\right)$ en $K\left(3, 3\frac{1}{2}\right)$.

De oppervlakte van de rechthoek is $3 \cdot 3\frac{1}{2} = 10\frac{1}{2}$.

b $y\left(\sqrt{2}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + 5$, dus $B\left(0, -\frac{1}{2}\sqrt{2} + 5\right)$ en $K\left(3, -\frac{1}{2}\sqrt{2} + 5\right)$.

De oppervlakte is $\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + 5\right) = -1 + 5\sqrt{2}$.

c $O(x) = x \cdot \left(-\frac{1}{2}x + 5\right) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x$

d Het domein is $\langle 0, 10 \rangle$.

e De grafiek van O is een bergparabool.

$x_{top} = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{2 \cdot -\frac{1}{2}} = 5$ en $y_{top} = -\frac{1}{2} \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 = -12\frac{1}{2} + 25 = 12\frac{1}{2}$

De oppervlakte is voor $x = 5$ maximaal en is $12\frac{1}{2}$

© Noordhoff Uitgevers bv

E6 **a** $g(x) = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3x}\right) - 4 = -2\frac{1}{2} + \frac{2}{x}$

b $h(x) = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3x} - 4\right) = -10\frac{1}{2} + \frac{2}{x}$

c $\frac{1}{2}$ omlaag schuiven en dan vermenigvuldigen met $1\frac{1}{2}$ t.o.v. de x-as.

E7 **a** Vanwege het domein en bereik van g.

b Het domein van g is $[1, \rightarrow\rangle$, dus onder het wortelteken staat $x - 1$.
Daaruit volgt $b = 1$. Het bereik is $\langle\leftarrow, 3]$ dus $c = 3$.

c Invullen van $b = 1$, $c = 3$ en $g(2) = 1$ geeft $a\sqrt{2 - 1} + 3 = 1$

$a + 3 = 1$, dus $a = -2$ en het functievoorschrift van g is $g(x) = -2\sqrt{x - 1} + 3$.

© Noordhoff Uitgevers bv

4 Lijnen

Voorkennis

V1 **a** De richtingscoëfficiënt van l is $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

b Een formule van l is $y = 1\frac{1}{2}x + b$.
De lijn gaat door $(4, 0)$, dus $0 = 1\frac{1}{2} \cdot 4 + b$ en daaruit volgt $b = -6$.
Een formule van l is $y = 1\frac{1}{2}x - 6$.

c De richtingscoëfficiënt van k is $\frac{-2}{1} = -2$.

Een formule van k is $y = -2x + b$.
De lijn gaat door $(1, 3)$, dus $3 = -2 \cdot 1 + b$ en daaruit volgt $b = 5$.
Een formule van lijn k is $y = -2x + 5$.

d Lijn m heeft dezelfde richtingscoëfficiënt als k, dus een formule van m is $y = -2x + b$.
De lijn gaat door $(-3, -4)$, dus $-4 = -2 \cdot -3 + b$ en daaruit volgt $b = -10$.
De formule van m is $y = -2x - 10$.

e De richtingscoëfficiënt van lijn n is $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Een formule van lijn n is $y = \frac{1}{2}x + b$.

Lijn n gaat door $(-2, 0)$, dus $0 = \frac{1}{2} \cdot -2 + b$ en daaruit volgt $b = 1$.

De formule van n is $y = \frac{1}{2}x + 1$.

V2 **a** De richtingscoëfficiënt is -3 en het startgetal 7.
De vergelijking van l is $y = -3x + 7$.

b De richtingscoëfficiënt is $\frac{-18\frac{1}{2}}{1} = -18\frac{1}{2}$ en het startgetal $13\frac{1}{2}$

De vergelijking van l is $y = -18\frac{1}{2}x + 13\frac{1}{2}$.

c De richtingscoëfficiënt is $\frac{-5}{6} = -\frac{5}{6}$.

Een vergelijking van l is $y = -\frac{5}{6}x + b$.
Invullen van coördinaten $(-2, 1)$ geeft $1 = -\frac{5}{6} \cdot -2 + b$, dus $b = 1 - 2 \cdot \frac{5}{6} = -\frac{2}{3}$

De vergelijking van l is $y = -\frac{5}{6}x - \frac{2}{3}$

d De richtingscoëfficiënt van l is $\frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$

Een vergelijking van l is $y = \frac{2}{5}x + b$.
Invullen van coördinaten $(4, 1)$ geeft $1 = \frac{2}{5} \cdot 4 + b$, dus $b = 1 - \frac{2}{5} \cdot 4 = -\frac{3}{5}$

De vergelijking van l is $y = \frac{2}{5}x - \frac{3}{5}$

V3 $2x - 3y = 12$
$-3y = -2x + 12$
$y = \frac{2}{3}x - 4$

V4 **a** $2x + 1 = 8 - 1\frac{1}{2}x$

$3\frac{1}{2}x = 7$
$x = 2$

b $y = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

© Noordhoff Uitgevers bv

V5 **a** $4x + y = 9$
$y = -4x + 9$

b $6x - 2(-4x + 9) = 3$

c $6x + 8x - 18 = 3$
$14x = 21$
$x = 1\frac{1}{2}$

d $y = -4 \cdot 1\frac{1}{2} + 9 = 3$

V6 **a** $-0{,}5x + 4 = 1{,}5x$
$-2x = -4$
$x = 2$
$y = 1{,}5 \cdot 2 = 3$

b $y = 2x - 8$ substitueren in
$x + y = 7$
$x + 2x - 8 = 7$
$3x = 15$
$x = 5$
$y = 2 \cdot 5 - 8 = 2$

c $x - 3y = 8$ dus $x = 3y + 8$
substitueren in $2x + 3y = 1$
$2(3y + 8) + 3y = 1$
$6y + 16 + 3y = 1$
$9y = -15$
$y = -1\frac{2}{3}$
$x = 3 \cdot -1\frac{2}{3} + 8 = 3$

d $y = 4x - 6$ substitueren in
$2x - 5y = 12$
$2x - 5(4x - 6) = 12$
$2x - 20x + 30 = 12$
$-18x = -18$
$x = 1$
$y = 4 \cdot 1 - 6 = -2$

4.1 Vergelijking van een lijn

intro Op de vlakke weg lopen ze 5 km per uur, dus leggen ze a km af in $\frac{1}{5}a$ uur.
100 meter stijgen duurt 20 minuten oftewel $\frac{1}{3}$ uur.
1 meter stijgen duurt dus $\frac{1}{300}$ uur en h meter stijgen $\frac{1}{300}h$ uur.
Voor de wandeling van 4 uur geldt dus $4 = \frac{1}{5}a + \frac{1}{300}h$.

1 **a** $x = 2$ invullen geeft $y = -2\frac{1}{2} \cdot 2 + 5 = -5 + 5 = 0$, dus de lijn gaat door (2, 0).
$x = 0$ invullen geeft $y = -2\frac{1}{2} \cdot 0 + 5 = 5$, dus de lijn gaat door (0, 5).

b De richtingscoëfficiënt van m is $\frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$ en de lijn gaat door (0, 3).
Een vergelijking van lijn m is $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

c De richtingscoëfficiënt van lijn k is $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ en de lijn gaat door (0, −2).
Een vergelijking van lijn k is $y = \frac{1}{2}x - 2$.

d $y = -2\frac{1}{2}x + 5$
$2\frac{1}{2}x + y = 5$
$5x + 2y = 10$

e m: $y = -\frac{1}{2}x + 3$
$\frac{1}{2}x + y = 3$
$x + 2y = 6$

k: $y = \frac{1}{2}x - 2$
$-\frac{1}{2}x + y = -2$
$x - 2y = 4$

© Noordhoff Uitgevers bv

2 **a** De noemers van de twee breuken zijn de x-coördinaat van het snijpunt met de x-as en de y-coördinaat van het snijpunt met de y-as.

b m: $x + 2y = 6$

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$$

k: $x - 2y = 4$

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-2} = 1$$

c Lijn n snijdt de assen in $(-6, 0)$ en $(0, 3)$.

d j: $\frac{x}{9} + \frac{y}{-4} = 1$

Links en rechts vermenigvuldigen met 36 geeft $4x - 9y = 36$.

3 **a** $y = -\frac{2}{3}x + 7$

$\frac{2}{3}x + y = 7$

$2x + 3y = 21$

b $y = -2x + 3$

$2x + y = 3$

$$\frac{x}{1\frac{1}{2}} + \frac{y}{3} = 1$$

c $$\frac{x}{2\frac{1}{2}} + \frac{y}{-1} = 1$$

$2x - 5y = 5$

$-5y = -2x + 5$

$y = \frac{2}{5}x - 1$

4 Lijn k snijdt de assen in $\left(3\frac{1}{2}, 0\right)$ en $\left(0, 2\frac{1}{2}\right)$, dus een vergelijking is van lijn k is $\frac{x}{3\frac{1}{2}} + \frac{y}{2\frac{1}{2}} = 1$.

Lijn l heeft een richtingscoëfficiënt $\frac{1}{5}$ en gaat door $(-1, 1)$.
Een vergelijking is $y = \frac{1}{5}x + b$.
$(-1, 1)$ invullen geeft $1 = \frac{1}{5} \cdot -1 + b$ dus $b = 1\frac{1}{5}$
Een vergelijking van lijn l is $y = \frac{1}{5}x + 1\frac{1}{5}$
m is een verticale lijn met vergelijking $x = 3$.
n is een horizontale lijn met vergelijking $y = -1\frac{1}{2}$.

5 **a** De lijn snijdt de assen in $(6, 0)$ en $(0, 18)$, dus $\frac{x}{6} + \frac{y}{18} = 1$.

Door vermenigvuldigen met 18 krijg je $3x + y = 18$.
De derde vorm is $y = -3x + 18$.

b De richtingscoëfficiënt is $\frac{-1}{1} = -1$ en de lijn gaat door $(0, 4)$, dus $y = -x + 4$.

De andere vormen zijn $x + y = 4$ en $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$.

c De lijn snijdt de assen in $(-4, 0)$ en $(0, 20)$, dus $\frac{x}{-4} + \frac{y}{20} = 1$.

Door vermenigvuldigen met -20 krijg je $5x - y = -20$.
De derde vorm is $y = 5x + 20$.

d De lijn snijdt de assen in $(-5, 0)$ en $\left(0, -7\frac{1}{2}\right)$, dus $\frac{x}{-5} + \frac{y}{-7\frac{1}{2}} = 1$.

Door vermenigvuldigen met -15 krijg je $3x + 2y = -15$.
Uit $2y = -3x - 15$ volgt de derde vorm: $y = -1\frac{1}{2}x - 7\frac{1}{2}$

© Noordhoff Uitgevers bv

e De richtingscoëfficiënt is $\frac{-9}{6} = -1\frac{1}{2}$, dus een vergelijking is $y = -1\frac{1}{2}x + b$.

Invullen van $(-4, 2)$ geeft $2 = -1\frac{1}{2} \cdot -4 + b$, dus $b = -4$.
Een vergelijking is $y = -1\frac{1}{2}x - 4$.
$1\frac{1}{2}x + y = -4$ geeft $3x + 2y = -8$.

De derde vorm is $\frac{x}{-2\frac{2}{3}} + \frac{y}{-4} = 1$.

f De richtingscoëfficiënt is $\frac{5}{-10} = -\frac{1}{2}$ dus een vergelijking is $y = -\frac{1}{2}x + b$.

Invullen van $(-1, 4)$ geeft $4 = -\frac{1}{2} \cdot -1 + b$, dus $b = 3\frac{1}{2}$.

Een vergelijking is $y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}x + y = 3\frac{1}{2}$ geeft $x + 2y = 7$.

De derde vorm is $\frac{x}{7} + \frac{y}{3\frac{1}{2}} = 1$.

6 **a** Als $a = 0$ dan is de vergelijking te herleiden tot $by = c$ ofwel $y = \frac{c}{b}$
Dat is een horizontale lijn en het is niet de x-as.

b Als $b = 0$ dan is de vergelijking te herleiden tot $ax = c$ ofwel $x = \frac{c}{a}$
Dat is een verticale lijn en het is niet de y-as.

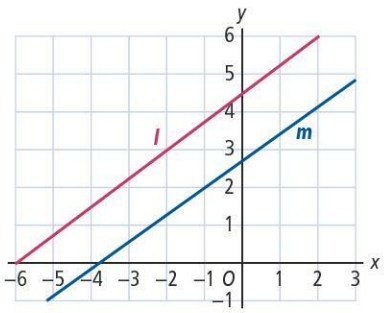
c Als $c = 0$ dan gaat de lijn door $(0, 0)$ en er is dan sprake van een recht evenredig verband.

d Als a en b beide nul zijn en c niet, krijg je $0 = c$ en dat kan niet als $c \neq 0$.
Als a en c beide nul zijn en b niet, krijg je $by = 0$ dus $y = 0$, dat is de x-as.
Als b en c beide nul zijn en a niet, krijg je $ax = 0$ dus $x = 0$, dat is de y-as.

7 **a** snijpunt met de x-as: $y = 0$ geeft $3x = -18$, dus $x = -6$. Snijpunt $(-6, 0)$.

snijpunt met de y-as: $x = 0$ geeft $-4y = -18$, dus $y = 4\frac{1}{2}$. Snijpunt $\left(0, 4\frac{1}{2}\right)$.

b



c snijpunt met de x-as: $y = 0$ geeft $-5x = 19$ dus $x = -3\frac{4}{5}$. Snijpunt $\left(-3\frac{4}{5}, 0\right)$.

snijpunt met de y-as: $x = 0$ geeft $7y = 19$ dus $y = 2\frac{5}{7}$. Snijpunt $\left(0, 2\frac{5}{7}\right)$.

d zie de tekening bij opdracht b.

e Herleiden van $3x - 4y = -18$ tot $-4y = -3x - 18$ en $y = \frac{3}{4}x + 4\frac{1}{2}$
Dit substitueren in $7y - 5x = 19$ geeft
$7\left(\frac{3}{4}x + 4\frac{1}{2}\right) - 5x = 19$

$5\frac{1}{4}x + 31\frac{1}{2} - 5x = 19$

$\frac{1}{4}x = -12\frac{1}{2}$
$x = -50$ en $y = \frac{3}{4} \cdot -50 + 4\frac{1}{2} = -37\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} = -33$
Het snijpunt is $(-50, -33)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

8 Herleiden van $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$ tot $\frac{y}{q}=-\frac{x}{p}+1$ geeft $y=-\frac{q}{p}x+q$.

Als de lijnen evenwijdig zijn, zijn de richtingscoëfficiënten gelijk, dus geldt $-\frac{q}{p}=4$ en daardoor $q=-4p$.

9 **a** De richtingscoëfficiënt van AC is $\frac{8}{4}=2$, dus een vergelijking is $y=2x+b$.

Substitueren van (8, 0) geeft $0=16+b$, dus $b=-16$.
Een vergelijking van lijn AC is $y=2x-16$.

De richtingscoëfficiënt van BD is $\frac{8}{-12}=-\frac{2}{3}$ en (0, 12) is het startgetal.

Een vergelijking van lijn BD is $y=-\frac{2}{3}x+12$.
Gelijkstellen: $2x-16=-\frac{2}{3}x+12$
$2\frac{2}{3}x=28$
$x=10\frac{1}{2}$. Dit substitueren in $y=-\frac{2}{3}x+12$ geeft $y=5$.
Het snijpunt is $S\left(10\frac{1}{2}, 5\right)$.

b De vergelijking van BC is $x=12$.

De richtingscoëfficiënt van AD is $\frac{-12}{8}=-1\frac{1}{2}$ en (0, 12) is een punt van de lijn, dus een vergelijking van AD is $y=-1\frac{1}{2}x+12$.

In het snijpunt geldt $x=12$, dus $y=-1\frac{1}{2}\cdot 12+12=-6$.
De coördinaten van T zijn $(12, -6)$.

10 Herleid $y-x=c$ tot $y=x+c$.
Herleid $2x-y=4$ tot $y=2x-4$.
Om het snijpunt te vinden stel je de vergelijkingen aan elkaar gelijk.
$x+c=2x-4$
$-x=-c-4$, dus $x=c+4$.
Dit invullen in $y=x+c$ geeft $y=c+4+c$ ofwel $y=2c+4$.
Het snijpunt is $(c+4, 2c+4)$.

04 **a** Omdat je de richtingscoëfficiënt al weet.

b De vergelijking heeft de vorm $y=-\frac{1}{2}x+b$.

Substitueren van $(-2, 3)$ geeft $3=-\frac{1}{2}\cdot -2+b$ ofwel $3=1+b$ dus $b=2$.
Een vergelijking van k is $y=-\frac{1}{2}x+2$.

c Omdat je de snijpunten met de x-as en de y-as al weet.

d $\frac{x}{5}+\frac{y}{8}=1$

e De richtingscoëfficiënt van m is $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ dus de vergelijking heeft de vorm $y=\frac{2}{3}x+b$.
Substitueren van $(-3, 0)$ geeft $0=\frac{2}{3}\cdot -3+b$ dus $b=2$.
Een vergelijking van m is $y=\frac{2}{3}x+2$.

f n is een verticale lijn, dus alle punten op n hebben dezelfde x-coördinaat.

g De vergelijking van n is $x=-2$.

08 **a** Herleid k: $3x+2y=7$ tot $2y=-3x+7$ en tot $y=-1\frac{1}{2}x+3\frac{1}{2}$

Herleid l: $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$ tot $1\frac{1}{2}x+y=6$ en tot $y=-1\frac{1}{2}x+6$.

De richtingscoëfficiënten van beide lijnen zijn $-1\frac{1}{2}$

b Deze twee lijnen zijn evenwijdig.

© Noordhoff Uitgevers bv

U1 **a** Als je $x = 3$ en $y = 4$ substitueert, krijg je $p(3 - 3) + q(4 - 4) = 0$
ofwel $p \cdot 0 + q \cdot 0 = 0$ en dat klopt voor alle waarden van p en q.

b Je vindt dat ene punt door $p \cdot 0 + q \cdot 0 = 0$ op te lossen.
Ofwel $x + y - 7 = 0$ en $2x + y + 2 = 0$.
Uit de eerste vergelijking volgt $y = -x + 7$.
Dit substitueren in de andere vergelijking geeft: $2x + -x + 7 + 2 = 0$.
Hieruit volgt $x = -9$. Door substitueren in $y = -x + 7$ vind je $y = 16$.
Alle lijnen van deze familie gaan door het punt $(-9, 16)$.

U2 Het midden van AB is $\left(\frac{-3 + 5}{2}, \frac{4 + 14}{2}\right)$ ofwel $(1, 9)$.

De richtingscoëfficiënt van k is $\frac{4 - 9}{10 - 1} = \frac{-5}{9} = -\frac{5}{9}$

AC is evenwijdig met k dus een vergelijking van AC is $y = -\frac{5}{9}x + b$.

Substitueren van $A(-3, 4)$ geeft $4 = -\frac{5}{9} \cdot -3 + b$, dus $b = 4 - \frac{5}{9} \cdot 3 = 2\frac{1}{3}$

Een vergelijking van AC is $y = -\frac{5}{9}x + 2\frac{1}{3}$
Punt C ligt op de lijn door $B(5, 14)$ en $(10, 4)$. De richtingscoëfficiënt van deze lijn is $\frac{4 - 14}{10 - 5} = \frac{-10}{5} = -2$, dus een vergelijking is $y = -2x + b$.
Invullen van $(10, 4)$ geeft $4 = -2 \cdot 10 + b$, dus $b = 24$.
Een vergelijking van deze lijn is $y = -2x + 24$.
Deze gelijkstellen aan de vergelijking van lijn AC zal het snijpunt C geven.

$-\frac{5}{9}x + 2\frac{1}{3} = -2x + 24$

$1\frac{4}{9}x = 21\frac{2}{3}$
$x = 15$ en $y = -2 \cdot 15 + 24 = -6$
De coördinaten van punt C zijn $(15, -6)$.

4.2 Elimineren

intro Twee volwassenen en twee kinderen betalen 28 euro, dus vier volwassenen en vier kinderen zouden 56 euro moeten betalen. Vier volwassenen en drie kinderen betalen 51 euro, dus één kind betaalt 5 euro.
Twee kinderen betalen 10 euro, dus twee volwassenen betalen 18 euro.
Een kaartje voor een volwassene kost dus 9 euro.

11 **a** € 8,60 + € 6,10 = € 14,70

b € 8,60 − € 6,10 = € 2,50

c Tweemaal 3 flessen sinas en 4 zakken chips kost 2 × 8,60 = € 17,20.

d Driemaal 2 flessen sinas en 3 zakken chips kost 3 × 6,10 = € 18,30.

e $(6s + 9c) - (6s + 8c) = 18{,}30 - 17{,}20 = 1{,}10$, dus één zak chips kost € 1,10.

f $3s + 4 \cdot 1{,}10 = 8{,}60$
$3s = 4{,}20$, dus $s = 1{,}40$. Eén fles sinas kost € 1,40.

12 **a** $5x = 20$, dus $x = 4$.
$2 \cdot 4 - y = 7$ geeft $y = 1$.

b Je vermenigvuldigt de eerste vergelijking met 2 om $-2y$ te krijgen. Door optellen bij de andere vergelijking verdwijnt dan de y.

© Noordhoff Uitgevers bv

c $\begin{cases} 6x - 15y = 36 \\ \underline{6x + y = 4} \quad - \end{cases}$

$-16y = 32$ geeft $y = -2$.
$6x + -2 = 4$ ofwel $6x = 6$, dus $x = 1$.

d $\begin{cases} 2x - 5y = 12 \\ \underline{30x + 5y = 20} \quad + \end{cases}$

$32x = 32$ geeft $x = 1$.
$2 \cdot 1 - 5y = 12$ ofwel $-5y = 10$, dus $y = -2$.

13 **a** $\begin{cases} 2x - 4y = 4 \\ \underline{2x + 5y = 22} \quad - \end{cases}$

$-9y = -18$
$y = 2$
$2x - 4 \cdot 2 = 4$
$2x = 12$ dus $x = 6$

b $\begin{cases} 9x + 6y = 120 \\ \underline{4x - 6y = 88} \quad + \end{cases}$

$13x = 208$
$x = 16$
$2 \cdot 16 - 3y = 44$
$-3y = 12$ dus $y = -4$

c $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ \underline{2x + 10y = 40} \quad - \end{cases}$

$-11y = -33$
$y = 3$
$2x - 3 = 7$
$2x = 10$ dus $x = 5$

d $\begin{cases} -x + 2y = 15 \\ \underline{4x + 2y = 20} \quad - \end{cases}$

$-5x = -5$
$x = 1$
$-1 + 2y = 15$
$2y = 16$ dus $y = 8$

e $\begin{cases} 25x - 10y = 170 \\ \underline{4x - 10y = 2} \quad - \end{cases}$

$21x = 168$
$x = 8$
$2 \cdot 8 - 5y = 1$
$5y = 15$ dus $y = 3$

f $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ \underline{x + 5y = 9} \quad - \end{cases}$

$-7y = -7$
$y = 1$
$x - 2 \cdot 1 = 2$
$x = 4$

14 **a** Bij stelsel B, omdat y daar is uitgedrukt in x.

b A: $\begin{cases} 2x + 2y = -4 \\ \underline{3x - 2y = 4} \quad + \end{cases}$

$5x = 0$
$x = 0$
$0 + y = -2$
$y = -2$

B: $y = \frac{1}{2}x - 2$ substitueren

$2x + \frac{1}{2}x - 2 = 3$

$2\frac{1}{2}x = 5$ dus $x = 2$
$y = \frac{1}{2} \cdot 2 - 2$
$y = -1$

C: $\begin{cases} 35x - 20y = -10 \\ \underline{8x + 20y = -76} \quad + \end{cases}$

$43x = -86$
$x = -2$

$2 \cdot -2 + 5y + 19 = 0$
$5y = -15$ dus $y = -3$

D: $\begin{cases} 2x - 4y = 3 \\ \underline{18x + 4y = -13} \quad + \end{cases}$

$20x = -10$
$x = -\frac{1}{2}$

$9 \cdot -\frac{1}{2} + 2y = -6\frac{1}{2}$
$2y = -2$ dus $y = -1$

15 **a** $0 \times 3 = 0$, dus het is waar. Als $x = 3$, dan is $2y = 5$ ofwel $y = 2\frac{1}{2}$
b Als $x = -4$, dan is $2y = 12$ ofwel $y = 6$.
c Voor alle waarden van x.
d De bijbehorende lijnen vallen samen.

© Noordhoff Uitgevers bv

e $y = -\frac{1}{2}x + 4$ substitueren in de andere vergelijking geeft

$x + 2\left(-\frac{1}{2}x + 4\right) = 6$
$x - x + 8 = 6$
$8 = 6$
Dit is niet waar, dus het stelsel heeft geen oplossingen.

f De lijnen zijn evenwijdig.

16 **a** A: $y = 1\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ substitueren in de andere vergelijking geeft

$3x - 2\left(1\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right) = 1\frac{1}{2}$

$3x - 3x + 1\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

$1\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$, er zijn oneindig veel oplossingen.

B: $\begin{cases} 8x - 8y = 4x - 3 \\ x = 2y + 2 \end{cases}$ oftewel $\begin{cases} 4x - 8y = -3 \\ x = 2y + 2 \end{cases}$

$x = 2y + 2$ substitueren in de andere vergelijking geeft
$4(2y + 2) - 8y = -3$
$8y + 8 - 8y = -3$
$8 = -3$
Dit is niet waar, dus het stelsel heeft geen oplossingen.

b Stelsel A: De lijnen vallen samen.
Stelsel B: De lijnen zijn evenwijdig.

17 **a** $\begin{cases} qx + 4 = y \\ 2y = 4x + 8 \end{cases}$

$y = qx + 4$ substitueren in de andere vergelijking geeft
$2(qx + 4) = 4x + 8$
$2qx + 8 = 4x + 8$
Het stelsel is afhankelijk als $2q = 4$, dus als $q = 2$.

b $\begin{cases} x = -py + 3 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$

$x = -py + 3$ substitueren in de andere vergelijking geeft
$4(-py + 3) - y = 7$
$-4py + 12 - y = 7$
$(-4p - 1)y + 12 = 7$
Het stelsel is strijdig als $-4p - 1 = 0$ dus als $-4p = 1$ ofwel $p = -\frac{1}{4}$

18 Punt $(-2, -11)$ substitueren geeft $-11 = 4 - 2b + c$.
Punt $(3, 4)$ substitueren geeft $4 = 9 + 3b + c$.
Dit geeft het stelsel $\begin{cases} -2b + c = -15 \\ 3b + c = -5 \end{cases}$ aftrekken geeft $-5b = -10$ dus $b = 2$.
$-2 \cdot 2 + c = -15$ geeft $c = -11$.
De parabool heeft vergelijking $y = x^2 + 2x - 11$.

013 **a** Je krijgt dan $6x$ in de eerste vergelijking en $-6x$ in de tweede vergelijking.

b $\begin{cases} 6x + 4y = 10 \\ \underline{-6x + 15y = -48} \; + \end{cases}$

$19y = -38$.

c Uit $19y = -38$ volgt $y = -2$.

d $y = -2$ substitueren in de eerste vergelijking geeft $3x + 2 \cdot -2 = 5$.
$3x = 9$ dus $x = 3$.

© Noordhoff Uitgevers bv

O16 **a** $2x + 3\left(-\frac{2}{3}x + 2\right) = 6$
$2x - 2x + 6 = 6$
$6 = 6$ Er zijn oneindig veel oplossingen.

b Deze lijnen vallen samen.

c $2x + 3y = 6$
$3y = -2x + 6$
$y = -\frac{2}{3}x + 2$, deze vergelijking is identiek aan de tweede vergelijking.

d Vermenigvuldigen van de eerste vergelijking met 3 en de tweede met 10 geeft $\begin{cases} 12x + 18y = 27 \\ 12x + 18y = 47 \end{cases}$ aftrekken geeft $0 = -20$.
Dit is niet waar, dus er zijn geen oplossingen.

e Vermenigvuldigen van deze tweede vergelijking met $\frac{4}{1{,}2} = 3\frac{1}{3}$ geeft
$4x + 6y = 15\frac{2}{3}$

f Deze lijnen zijn evenwijdig.

U3 **a** Vermenigvuldigen van de onderste vergelijking met $\sqrt{2}$ geeft
$\begin{cases} 2x + 3y = 3\sqrt{2} \\ \underline{2x - 2y\sqrt{2} = 3\sqrt{2}} \; - \end{cases}$
$3y - 2y\sqrt{2} = 0$
$\left(3 - 2\sqrt{2}\right)y = 0$ geeft $y = 0$.
$2x + 3 \cdot 0 = 3\sqrt{2}$, dus $x = 1\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

b Vermenigvuldigen van de onderste vergelijking met $\sqrt{2}$ geeft
$\begin{cases} x\sqrt{2} - 2y = 6 \\ \underline{x\sqrt{2} + 2y = 4\sqrt{2}} \; + \end{cases}$ (bedenk dat $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$)
$2x\sqrt{2} = 6 + 4\sqrt{2}$
$x = \frac{6 + 4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{6}{2\sqrt{2}} + \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{2} + 2$
De tweede vergelijking $x + y \cdot \sqrt{2} = 4$ kun je schrijven als
$y \cdot \sqrt{2} = -x + 4$. Door hierin $x = 1\frac{1}{2}\sqrt{2} + 2$ te substitueren vind je
$y \cdot \sqrt{2} = -x + 4 = -1\frac{1}{2}\sqrt{2} - 2 + 4 = -1\frac{1}{2}\sqrt{2} + 2$.
Dit geeft tenslotte $y = -1\frac{1}{2} + \sqrt{2}$.

U4 Als de bijbehorende lijnen elkaar op de lijn $y = x$ snijden, dan kun je de coördinaten van het snijpunt schrijven als (a, a). Er geldt dan
$\begin{cases} pa - 4a = 8 \\ a - 2pa = -17 \end{cases}$
Uit de eerste vergelijking volgt $pa = 4a + 8$.
Dit substitueren in de andere vergelijking geeft $a - 2(4a + 8) = -17$.
$a - 8a - 16 = -17$
$-7a = -1$
$a = \frac{1}{7}$
Dit substitueren in de eerste vergelijking geeft $p \cdot \frac{1}{7} = 4 \cdot \frac{1}{7} + 8$, dus
$p = 4 + 7 \cdot 8 = 60$.

4.3 De hoek tussen twee lijnen

intro Een helling van 1 : 5 is hetzelfde als een helling met een stijging van 20%.
De tangens van 20° is ongeveer 0,36, dus bij een helling van 20° hoort een stijgingspercentage van 36%. De helling van 20° is het steilst.

© Noordhoff Uitgevers bv

19 **a** richtingscoëfficiënt van k is $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

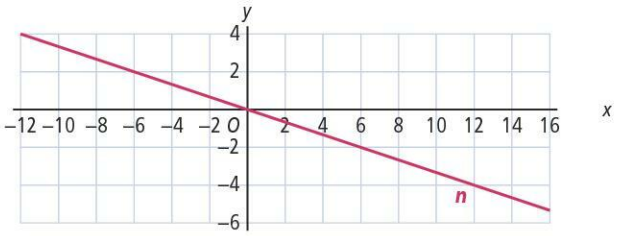
b $\tan(\angle POQ) = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ en dat is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van k.

c $\angle POQ = \tan^{-1}\left(2\frac{1}{2}\right) \approx 68°$.

d De richtingscoëfficiënt van l is $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. De hoek is $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 27°$.

e De richtingscoëfficiënt van m is $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$. De hoek is $\tan^{-1}\left(1\frac{1}{3}\right) \approx 53°$.

20 **a**



b De hoek is $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 18°$.

21 Herleid $4x + 5y = 0$ tot $5y = -4x$ en tot $y = -\frac{4}{5}x$.
De richtingscoëfficiënt van k is $-\frac{4}{5}$. De hoek is $\tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \approx 39°$.
Herleid $4x = y + 2$ tot $y = 4x - 2$.
De richtingscoëfficiënt van m is 4. De hoek is $\tan^{-1}(4) \approx 76°$.
Herleid $\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y = 1$ tot $\frac{1}{5}y = -\frac{1}{3}x + 1$ en tot $y = -1\frac{2}{3}x + 5$.
De richtingscoëfficiënt van n is $-1\frac{2}{3}$. De hoek is $\tan^{-1}\left(1\frac{2}{3}\right) \approx 59°$.

22 **a** Dat zijn de lijnen met vergelijking $y = x$ en $y = -x$.

b De richtingscoëfficiënten van deze lijnen zijn $\tan(30°) \approx 0{,}577$ en $-\tan(30°) \approx -0{,}577$.
De vergelijkingen zijn $y \approx 0{,}577x$ en $y \approx -0{,}577x$.

c Dat is de x-as, dus de vergelijking is $y = 0$.

23 **a** De richtingscoëfficiënt van k is $\frac{1}{2}$. De hoek is $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26{,}565\ldots°$

b De richtingscoëfficiënt van l is -1. De hoek is $\tan^{-1}(1) = 45°$.

c $\angle(k, l) = 26{,}565\ldots + 45 \approx 72°$.

24 **a** Herleid $3x - \frac{1}{2}y = 4$ tot $-\frac{1}{2}y = -3x + 4$ en tot $y = 6x - 8$.
Herleid $2y + 3x = 6$ tot $2y = -3x + 6$ en tot $y = -1\frac{1}{2}x + 3$.
De richtingscoëfficiënten zijn 6 en $-1\frac{1}{2}$.
De hoeken zijn $\tan^{-1}(6) = 80{,}537\ldots°$ en $\tan^{-1}\left(1\frac{1}{2}\right) = 56{,}309\ldots°$
De hoek tussen de lijnen is $180° - (80{,}537\ldots + 56{,}309\ldots) \approx 43°$.

b Herleid $2y + 5x = 1$ tot $2y = -5x + 1$ en tot $y = -2\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.
De richtingscoëfficiënten zijn $\frac{2}{5}$ en $-2\frac{1}{2}$.
De hoeken zijn $\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = 21{,}801\ldots°$ en $\tan^{-1}\left(2\frac{1}{2}\right) = 68{,}198\ldots°$
De hoek tussen de lijnen is $21{,}801\ldots + 68{,}198\ldots = 90°$.

c Herleid $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$ tot $5x + 2y = 10$ en tot $y = -2\frac{1}{2}x + 5$.
Herleid $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$ tot $2x - 3y = 6$ en tot $y = \frac{2}{3}x - 2$.
De richtingscoëfficiënten zijn $-2\frac{1}{2}$ en $\frac{2}{3}$.
De hoeken zijn $\tan^{-1}\left(2\frac{1}{2}\right) = 68{,}198\ldots°$ en $\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33{,}690\ldots°$
De hoek tussen de lijnen is $180° - (68{,}198\ldots + 33{,}690\ldots) \approx 78°$.

© Noordhoff Uitgevers bv

d Herleid $2y = x\sqrt{3} + 4$ tot $y = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot x + 2$.
De richtingscoëfficiënten zijn $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
De hoeken zijn $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 40{,}893\ldots°$ en $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 35{,}264\ldots°$
De hoek tussen de lijnen is is $40{,}893\ldots + 35{,}264\ldots \approx 76°$.

25 **a** De richtingscoëfficiënten van AB en AD zijn resp. $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ en $\frac{12}{-4} = -3$.
De hoeken met de x-as zijn $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 18{,}434\ldots°$ en $\tan^{-1}(3) = 71{,}565\ldots°$
$\angle A = 18{,}434\ldots + 71{,}565\ldots = 90°$.

b De richtingscoëfficiënten van DA en DC zijn resp. $\frac{-12}{4} = -3$ en $\frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$
De hoeken met de x-as zijn $\tan^{-1}(3) = 71{,}565\ldots°$ en $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 18{,}434\ldots°$
$\angle D = 71{,}565 - 18{,}434\ldots \approx 53°$.

c De richtingscoëfficiënten van AC en DC zijn resp. $\frac{8}{8} = 1$ en $\frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$
De hoeken met de x-as zijn $\tan^{-1}(1) = 45°$ en $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 18{,}434\ldots°$
De hoek tussen de lijnen AC en DC is $45 + 18{,}434\ldots \approx 63°$.

26 De richtingscoëfficiënt van l is $\frac{-3}{1} = -3$.
De hoek van l met de x-as is $\tan^{-1}(3) = 71{,}565\ldots°$.
Lijn m is stijgend en maakt met de x-as een hoek van
$71{,}565\ldots + 60 = 131{,}565\ldots°$ oftewel een scherpe hoek van
$180 - 131{,}565\ldots = 48{,}434\ldots°$
De richtingscoëfficiënt van m is $\tan(48{,}434\ldots°) \approx 1{,}13$.

021 **a** Herleid $3x - 5y = 5$ tot $-5y = -3x + 5$ en tot $y = \frac{3}{5}x - 1$.
De richtingscoëfficiënt van l is $\frac{3}{5}$.

b De verticale zijde is $\frac{3}{5}$.

c $\tan(\alpha) = \frac{\frac{3}{5}}{1} = \frac{3}{5}$

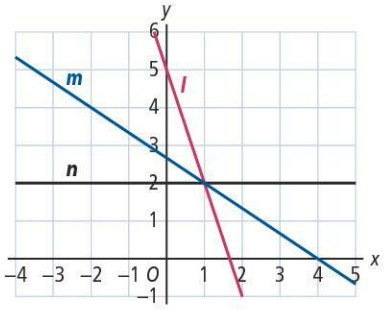
d $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 31°$

e Herleid $2y = -5x + 4$ tot $y = -2\frac{1}{2}x + 2$.
De richtingscoëfficiënt van m is $-2\frac{1}{2}$
$\tan(\alpha) = 2\frac{1}{2}$ geeft $\alpha \approx 68°$. Lijn m maakt een hoek van $68°$ met de x-as.
Herleid $\frac{1}{4}x - \frac{1}{6}y = 1$ tot $-\frac{1}{6}y = -\frac{1}{4}x + 1$ en tot $y = 1\frac{1}{2}x - 6$.

De richtingscoëfficiënt van n is $1\frac{1}{2}$.
$\tan(\alpha) = 1\frac{1}{2}$ geeft $\alpha \approx 56°$. Lijn n maakt een hoek van $56°$ met de x-as.

024 **a** $2x + 3y = 8$ geeft $3y = -2x + 8$ dus $y = -\frac{2}{3}x + 2\frac{2}{3}$

b



c De richtingscoëfficiënt van l is -3.

d $\angle(l, n) = \tan^{-1}(3) = 71{,}565\ldots°$

© Noordhoff Uitgevers bv

e De richtingscoëfficiënt van m is $-\frac{2}{3}$.

f $\angle(m,n) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33{,}690\ldots°$

g De hoek tussen l en m is $71{,}565\ldots - 33{,}690\ldots \approx 38°$.

U5 **a** Lijn l kan 15° steiler of 15° minder steil zijn dan lijn m.

b De vergelijking van lijn m is te herleiden tot $3y = 2x - 9$ of $y = \frac{2}{3}x - 3$.
De hoek tussen m en de x-as is $\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33{,}690\ldots°$.
De hoek tussen l en de x-as is dan $18{,}690\ldots°$ of $48{,}690\ldots°$.
De richtingscoëfficiënt van l is $\tan(18{,}690\ldots°) \approx 0{,}34$ of $\tan(48{,}690\ldots°) \approx 1{,}14$.
Een vergelijking van l is $y = 0{,}34x + b$ of $y = 1{,}14x + b$.
$S(6, 1)$ invullen in beide vergelijkingen geeft $1 = 0{,}34 \cdot 6 + b$ dus $b = -1{,}04$ of $1 = 1{,}14 \cdot 6 + b$ dus $b = -5{,}84$.
De vergelijkingen zijn $y = 0{,}34x - 1{,}04$ en $y = 1{,}14x - 5{,}84$.

U6 De richtingscoëfficiënten van de lijnen zijn 2, 1 en $\frac{1}{2}$
De hoeken met de x-as zijn respectievelijk $\tan^{-1}(2) = 63{,}434\ldots°$, 45° en $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26{,}565\ldots°$.
De hoek tussen u en w is $63{,}434\ldots - 45 = 18{,}434\ldots°$ en de hoek tussen v en w is $45 - 26{,}565\ldots = 18{,}434\ldots°$.
Daarom is lijn w de deellijn van de hoek tussen u en v.

4.4 Loodrecht

intro Het getekende lijnstuk gaat per 4 naar rechts één omhoog.
De twee zijden die daar loodrecht op staan gaan per één naar rechts 4 omlaag.
De vierde zijde is weer evenwijdig aan de eerste.

27 **a** $ED = p$ en $AD = q$

b $m_1 = \frac{-q}{p}$ en $m_2 = \frac{p}{q}$

c $m_1 \cdot m_2 = \frac{-q}{p} \cdot \frac{p}{q} = -\frac{pq}{pq} = -1$

28 **a** Herleid $3y - 2x + 6 = 0$ tot $3y = 2x - 6$ en tot $y = \frac{2}{3}x - 2$
Herleid $2y + 3x - 9 = 0$ tot $2y = -3x + 9$ en tot $y = -1\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$
De richtingscoëfficiënten zijn $\frac{2}{3}$ en $-1\frac{1}{2}$
Het product van de richtingscoëfficiënten is $\frac{2}{3} \cdot -1\frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot -\frac{3}{2} = -1$.

b In $\triangle ADE$ geldt $\tan(\beta) = \frac{3}{2}$
In $\triangle ABC$ geldt $\tan(\alpha) = \frac{2}{3}$ dus $\frac{BC}{AB} = \frac{2}{3}$ en daaruit volgt $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{2}$
$\tan(\angle ACB) = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{2}$ en dus geldt $\angle ACB = \beta$

c Omdat $\angle ABC = 90°$ geldt $\alpha + \beta = 180 - 90 = 90°$, dus snijden l en m elkaar loodrecht.

29 De richtingscoëfficiënt van k is -2.
l: $\frac{x}{3} + \frac{y}{9} = 1$ herleid je tot $3x + y = 9$ en $y = -3x + 9$.

© Noordhoff Uitgevers bv

De richtingscoëfficiënt van l is -3.
m: $x = \frac{1}{2}y - 4$ herleid je tot $\frac{1}{2}y = x + 4$ en $y = 2x + 8$.
De richtingscoëfficiënt van m is 2.
n: $x - 2y = 5$ herleid je tot $-2y = -x + 5$ en $y = \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$.
De richtingscoëfficiënt van n is $\frac{1}{2}$.
p: $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$ herleid je tot $x + 2y = 4$ en $y = -\frac{1}{2}x + 2$.
De richtingscoëfficiënt van p is $-\frac{1}{2}$.
q: $-3x + y = -5$ herleid je tot $y = 3x - 5$.
De richtingscoëfficiënt van q is 3.
Omdat $-2 \cdot \frac{1}{2} = -1$ en $2 \cdot -\frac{1}{2} = -1$ geldt $k \perp n$ en $m \perp p$.

30 **a** Herleid $2y - x = 1$ tot $2y = x + 1$ en tot $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
De richtingscoëfficiënt van l is $\frac{1}{2}$. Omdat $-2 \cdot \frac{1}{2} = -1$ staat de lijn met vergelijking $y = -2x + b$ voor elke waarde van b loodrecht op l.

b $P(5, -4)$ invullen in $y = -2x + b$ geeft $-4 = -2 \cdot 5 + b$, dus $b = 6$.

c Een vergelijking van de loodlijn door P op l is $y = -2x + 6$.

31 **a** Herleid $2x - 3y = 5$ tot $-3y = -2x + 5$ en tot $y = \frac{2}{3}x - 1\frac{2}{3}$
De richtingscoëfficiënt van k is $\frac{2}{3}$, dus de richtingscoëfficiënt van de loodlijn is $-1\frac{1}{2}$. Een vergelijking van de loodlijn is $y = -1\frac{1}{2} + b$.
$P(-2, -1)$ invullen geeft $-1 = -1\frac{1}{2} \cdot -2 + b$ ofwel $-1 = 3 + b$, dus $b = -4$.
Een vergelijking van l is $y = -1\frac{1}{2}x - 4$.

b Herleid $6x - 5y = 15$ tot $-5y = -6x + 15$ en tot $y = 1\frac{1}{5}x - 3$.
De richtingscoëfficiënt van m is $1\frac{1}{5} = \frac{6}{5}$ dus de richtingscoëfficiënt van de loodlijn is $-\frac{5}{6}$. Een vergelijking van de loodlijn is $y = -\frac{5}{6}x + b$.
$Q(-1, 3)$ invullen geeft $3 = -\frac{5}{6} \cdot -1 + b$ dus $b = 2\frac{1}{6}$
Een vergelijking van de loodlijn is $y = -\frac{5}{6}x + 2\frac{1}{6}$

32 **a** Herleid $3x + 4y = 2$ tot $4y = -3x + 2$ en tot $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$
De richtingscoëfficiënt van l is $-\frac{3}{4}$

b Herleid $px + qy = 3$ tot $qy = -px + 3$ en tot $y = -\frac{p}{q}x + \frac{3}{q}$.
De richtingscoëfficiënt van m is $-\frac{p}{q}$

c Dan moet gelden $-\frac{p}{q} \cdot -\frac{3}{4} = -1$ dus $\frac{3p}{4q} = -1$ en daaruit volgt $3p = -4q$ ofwel $3p + 4q = 0$.

d (4, 1) invullen in m geeft $p \cdot 4 + q \cdot 1 = 3$ ofwel $4p + q = 3$.

e $\begin{cases} 3p + 4q = 0 \\ 4p + q = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} 3p + 4q = 0 \\ \underline{16p + 4q = 12} \quad - \end{cases}$

$-13p = -12$ dus $p = \frac{12}{13}$

$3p = -4q$ dus $\frac{36}{13} = -4q$ waaruit volgt $q = -\frac{9}{13}$ en m: $12x - 9y = 39$.

33 **a** De richtingscoëfficiënt van AB is $\frac{-4}{4} = -1$, dus een vergelijking is $y = -x + b$.
De coördinaten van $A(1, 3)$ invullen geeft $3 = -1 \cdot 1 + b$, dus $b = 4$.
Een vergelijking van AB is $y = -x + 4$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b De richtingscoëfficiënt van CD is 1, want $1 \cdot -1 = -1$.
Een vergelijking van CD is $y = x + b$.
De coördinaten van $C(-3, -5)$ invullen geeft $-5 = -3 + b$, dus $b = -2$.
Een vergelijking van CD is $y = x - 2$.

c De richtingscoëfficiënt van BC is $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, dus de richtingscoëfficiënt van de hoogtelijn is -2, want $\frac{1}{2} \cdot -2 = -1$.
Een vergelijking van de hoogtelijn uit A is $y = -2x + b$.
$A(1, 3)$ invullen geeft $3 = -2 \cdot 1 + b$, dus $b = 5$.
Een vergelijking van de hoogtelijn uit A is $y = -2x + 5$.

d Los op: $x - 2 = -2x + 5$
$3x = 7$ geeft $x = 2\frac{1}{3}$. Dit invullen in CD geeft $y = 2\frac{1}{3} - 2 = \frac{1}{3}$
De coördinaten van H zijn $\left(2\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

e De richtingscoëfficiënt van AC is $\frac{8}{4} = 2$, dus de richtingscoëfficiënt van de hoogtelijn uit B is $-\frac{1}{2}$ en een vergelijking is $y = -\frac{1}{2}x + b$.

$B(5, -1)$ invullen geeft $-1 = -\frac{1}{2} \cdot 5 + b$, dus $b = 1\frac{1}{2}$

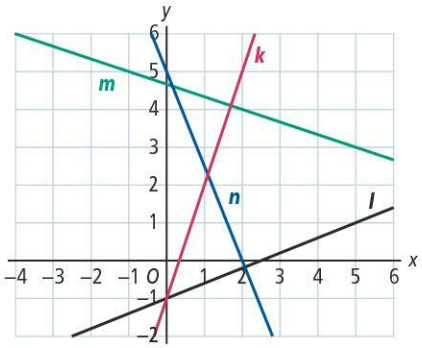
Een vergelijking van de hoogtelijn uit B is $y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$

Invullen van $x = 2\frac{1}{3}$ geeft $y = -\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{3} + 1\frac{1}{2} = -1\frac{1}{6} + 1\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$
dus de hoogtelijn uit B gaat ook door H.

34 **a** Herleid $3x - y = 1$ tot $-y = -3x + 1$ en tot $y = 3x - 1$.
De richtingscoëfficiënt van k is 3, dus de richtingscoëfficiënt van m is $-\frac{1}{3}$
Een vergelijking van m is $y = -\frac{1}{3}x + b$.
De coördinaten van punt $P(2, 4)$ invullen geeft $4 = -\frac{1}{3} \cdot 2 + b$ dus $b = 4\frac{2}{3}$
Een vergelijking van m is $y = -\frac{1}{3}x + 4\frac{2}{3}$

b Herleid $2x - 5y - 5 = 0$ tot $-5y = -2x + 5$ en tot $y = \frac{2}{5}x - 1$.
De richtingscoëfficiënt van l is $\frac{2}{5}$, dus de richtingscoëfficiënt van n is $-2\frac{1}{2}$
Een vergelijking van n is $y = -2\frac{1}{2}x + b$ en de lijn gaat door $Q(0, 5)$.
Een vergelijking van n $y = -2\frac{1}{2}x + 5$.

c



d $k \perp m$ en $l \perp n$ dus geldt:
Als je de lijnen k en l beide 90° draait, krijg je lijnen die evenwijdig zijn aan resp. m en n.
Daaruit volgt dat $\angle(m, n) = \angle(k, l)$.

031 **a** $2x + 3y = 8$, dus $3y = -2x + 8$ ofwel $y = -\frac{2}{3}x + 2\frac{2}{3}$. Daaruit volgt $\text{rc}_l = -\frac{2}{3}$.

b $l \perp m$ dus $\text{rc}_l \cdot \text{rc}_m = -1$ ofwel $\text{rc}_m = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

c $y = 1\frac{1}{2}x + b$

d $P(6, 4)$ invullen geeft $4 = 1\frac{1}{2} \cdot 6 + b$ ofwel $4 = 9 + b$, dus $b = -5$.

e m: $y = 1\frac{1}{2}x - 5$.

© Noordhoff Uitgevers bv

U7 **a** Als $p = 4$ en $q = 5$ dan zijn de richtingscoëfficiënten $\frac{4}{5}$ en $-\frac{1}{9}$.
$\tan(\alpha) = \frac{4}{5}$ geeft $\alpha = 38{,}659\ldots°$ en $\tan(\beta) = \frac{1}{9}$ geeft $\beta = 6{,}340\ldots°$.
De hoek tussen l en m is $38{,}659\ldots + 6{,}340\ldots = 45°$.

b $rc_{AC} = \frac{p}{q}$, $rc_{BC} = \frac{-q}{p}$ en $rc_{AB} = \frac{p-q}{p+q}$.

c De lengte van AC en de lengte van BC zijn beide gelijk aan $\sqrt{p^2 + q^2}$.
Omdat $\frac{p}{q} \cdot \frac{-q}{p} = -1$ staan de zijden AC en BC loodrecht op elkaar.
Driehoek ABC is een rechthoekige gelijkbenige driehoek, dus de hoek tussen l en m is 45°.

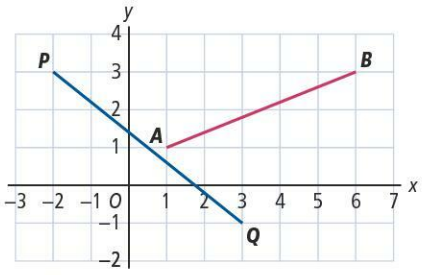
U8 **a** De coördinaten zijn $A(-5, 0)$ en $B(5, 0)$. De richtingscoëfficiënt van AP is $\frac{4}{2} = 2$ en de richtingscoëfficiënt van BP is $\frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$.
Het product van deze richtingscoëfficiënten is -1, dus $AP \perp BP$.

b Als $X(p,q)$ op de cirkel ligt, geldt $OP = \sqrt{p^2 + q^2}$.
De straal van de cirkel is 5, dus $\sqrt{p^2 + q^2} = 5$ ofwel $p^2 + q^2 = 25$.
De richtingscoëfficiënt van AX is $\frac{q-0}{p--5} = \frac{q}{p+5}$ en de richtingscoëfficiënt van BX is $\frac{0-q}{5-p} = \frac{-q}{5-p}$
Het product van deze richtingscoëfficiënten is $\frac{q}{p+5} \cdot \frac{-q}{5-p} = \frac{-q^2}{25-p^2}$
Uit $p^2 + q^2 = 25$ volgt $q^2 = 25 - p^2$ dus het product wordt $\frac{-q^2}{q^2} = -1$.
en daaruit volgt $AX \perp BX$.

4.5 Afstanden

intro Verbind de drie dorpen met lijnstukken. Teken de loodlijnen door de middens van de drie lijnstukken. Deze drie middelloodlijnen gaan door één punt en dat is de beste plaats voor de mast.

35 **a**

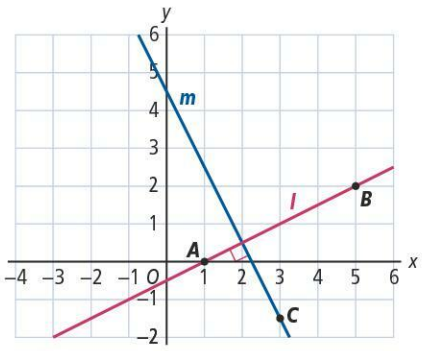


b AB is de lange zijde van een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden 5 en 2.
$AB^2 = 5^2 + 2^2 = 29$, dus $AB = \sqrt{29}$.
PQ is de lange zijde van een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden 5 en 4.
$PQ^2 = 5^2 + 4^2 = 41$, dus $PQ = \sqrt{41}$.

36 $d(S,T) = \sqrt{(7 - -5)^2 + (-11 - -6)^2} = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{169} = 13$.

© Noordhoff Uitgevers bv

37 **a**



b De richtingscoëfficiënt van l is $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, dus een vergelijking is $y = \frac{1}{2}x + b$.

Invullen van $(1, 0)$ geeft $0 = \frac{1}{2} \cdot 1 + b$ dus $b = -\frac{1}{2}$

Een vergelijking van l is $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

c Een lijn loodrecht op l heeft richtingscoëfficiënt -2, dus een vergelijking is

$y = -2x + b$. Invullen van $C\left(3, -1\frac{1}{2}\right)$ geeft $-1\frac{1}{2} = -2 \cdot 3 + b$, dus $b = 4\frac{1}{2}$
Een vergelijking van m is $y = -2x + 4\frac{1}{2}$

d Gelijkstellen van l en m geeft $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = -2x + 4\frac{1}{2}$
$2\frac{1}{2}x = 5$
$x = 2$ en $y = \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Het snijpunt is $Q\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

e $\text{d}(C,l) = CQ = \sqrt{(3-2)^2 + \left(-1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

38 **a** l: $\frac{1}{4}x - \frac{1}{3}y = -1$ kun je herleiden tot $-\frac{1}{3}y = -\frac{1}{4}x - 1$ en $y = \frac{3}{4}x + 3$.
Een vergelijking van een lijn door P loodrecht op l is $y = -\frac{4}{3}x + b$.

$P\left(1, -2\frac{1}{2}\right)$ invullen geeft $-2\frac{1}{2} = -\frac{4}{3} \cdot 1 + b$, dus $b = -1\frac{1}{6}$
Een vergelijking van de loodlijn is $y = -\frac{4}{3}x - 1\frac{1}{6}$
Het snijpunt van l met deze loodlijn door P berekenen:
$\frac{3}{4}x + 3 = -\frac{4}{3}x - 1\frac{1}{6}$
$9x + 36 = -16x - 14$
$25x = -50$ geeft $x = -2$.
$y = \frac{3}{4} \cdot -2 + 3 = 1\frac{1}{2}$, het snijpunt is $S\left(-2, 1\frac{1}{2}\right)$.

$\text{d}(P,l) = PS = \sqrt{(-2-1)^2 + \left(1\frac{1}{2} - -2\frac{1}{2}\right)^2} = 5$.

b m: $2x - 3y = 3$ kun je herleiden tot $-3y = -2x + 3$ en $y = \frac{2}{3}x - 1$.
Een vergelijking van een lijn door Q loodrecht op m is $y = -1\frac{1}{2}x + b$.
$Q(-2, 2)$ invullen geeft $2 = -1\frac{1}{2} \cdot -2 + b$, dus $b = -1$.
Een vergelijking van de loodlijn is $y = -1\frac{1}{2}x - 1$.
Het snijpunt van m met deze loodlijn door Q berekenen: $\frac{2}{3}x - 1 = -1\frac{1}{2}x - 1$
$2\frac{1}{6}x = 0$ geeft $x = 0$ en $y = \frac{2}{3} \cdot 0 - 1 = -1$, het snijpunt is $S(0, -1)$.

$\text{d}(Q,m) = QS = \sqrt{(0 - -2)^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{13}$.

39 **a** Invullen van de coördinaten van P geeft $-1 = 2 \cdot 3 - 7$ en dat klopt.

b Je kunt de vergelijking van m schrijven als $y = 2x + 3$.
Een vergelijking van een lijn door P loodrecht op m is $y = -\frac{1}{2}x + b$.
$P(3, -1)$ invullen geeft $-1 = -\frac{1}{2} \cdot 3 + b$, dus $b = \frac{1}{2}$
Een vergelijking van de loodlijn is $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
Het snijpunt van m met deze loodlijn door P berekenen
$2x + 3 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

$2\frac{1}{2}x = -2\frac{1}{2}$

© Noordhoff Uitgevers bv

$x = -1$. Dit geeft $y = 2 \cdot -1 + 3 = 1$, dus het snijpunt is $S(-1, 1)$.

$d(P, m) = PS = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (1 - -1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

c Nee, je vindt altijd dezelfde afstand omdat alle loodlijnen tussen twee evenwijdige lijnen even lang zijn.

40 De vergelijking van l kun je herleiden tot $-8y = -2x - 21$ en tot $y = \frac{1}{4}x + 2\frac{5}{8}$
De lijnen l en m zijn dus evenwijdig.
De richtingscoëfficiënt van een loodlijn op m is -4.
Kies een punt op m, bijvoorbeeld $P(6, 2)$, en stel een loodlijn door P op m op.
$y = -4x + b$
$2 = -4 \cdot 6 + b$, dus $b = 26$.
De loodlijn door P op m is $y = -4x + 26$.
Nu het snijpunt van deze loodlijn met l berekenen.
$2x - 8(-4x + 26) = -21$
$2x + 32x - 208 = -21$
$34x = 187$
$x = 5\frac{1}{2}$ en $y = -4 \cdot 5\frac{1}{2} + 26 = 4$, dus het snijpunt is $S\left(5\frac{1}{2}, 4\right)$.
$d(l, m) = PS = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{4\frac{1}{4}}$

41 **a** De richtingscoëfficiënt van BC is 3 en het midden is $(5, -2)$.
Een vergelijking van k is $y = -\frac{1}{3}x + b$.
$(5, -2)$ invullen geeft $-2 = -\frac{1}{3} \cdot 5 + b$, dus $b = -\frac{1}{3}$
Een vergelijking van k is $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$

b De richtingscoëfficiënt van AB is $-\frac{1}{5}$ en het midden is $(1, 2)$.
Een vergelijking van l is $y = 5x + b$.
$(1, 2)$ invullen geeft $2 = 5 \cdot 1 + b$, dus $b = -3$.
Een vergelijking van l is $y = 5x - 3$.

c $5x - 3 = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$
$5\frac{1}{3}x = 2\frac{2}{3}$
$x = \frac{1}{2}$ en daaruit volgt $y = -\frac{1}{2}$, dus de coördinaten van M zijn $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

d De richtingscoëfficiënt van AC is -1 en het midden is $(0, -1)$.
De middelloodlijn van AC heeft de vergelijking $y = x - 1$.
Punt M invullen geeft $-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1$, dit klopt dus punt M ligt op de middelloodlijn van AC.

e $AM = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - -4\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - 3\right)^2} = \sqrt{32\frac{1}{2}}$
$BM = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 6\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{32\frac{1}{2}}$
$CM = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 4\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - -5\right)^2} = \sqrt{32\frac{1}{2}}$

f Omdat de afstand van M tot elk hoekpunt hetzelfde is, kun je een cirkel tekenen met middelpunt M die door A, B en C gaat.

42 **a** $x + 2y = 6$ dus $2y = -x + 6$ en $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

b $AP = \sqrt{(x - 3)^2 + \left(-\frac{1}{2}x + 3 - 8\right)^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + \left(-\frac{1}{2}x - 5\right)^2}$
$BP = \sqrt{(x - 9)^2 + \left(-\frac{1}{2}x + 3 - 6\right)^2} = \sqrt{(x - 9)^2 + \left(-\frac{1}{2}x - 3\right)^2}$

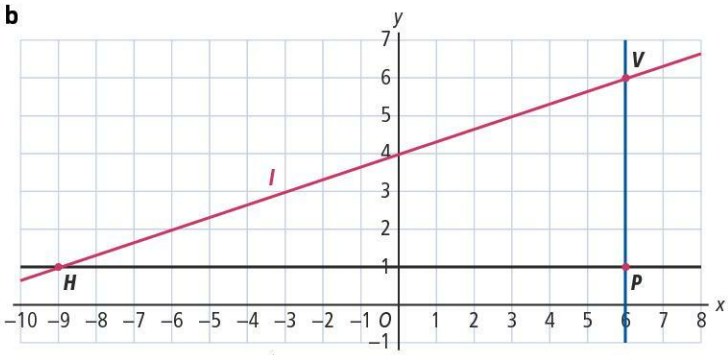
c $\sqrt{(x - 3)^2 + \left(-\frac{1}{2}x - 5\right)^2} = \sqrt{(x - 9)^2 + \left(-\frac{1}{2}x - 3\right)^2}$

© Noordhoff Uitgevers bv

d $x^2 - 6x + 9 + \frac{1}{4}x^2 + 5x + 25 = x^2 - 18x + 81 + \frac{1}{4}x^2 + 3x + 9$
$-6x + 5x + 25 = -18x + 81 + 3x$
$14x = 56$
$x = 4$

e $y = -\frac{1}{2} \cdot 4 + 3 = 1$. De coördinaten zijn $P(4, 1)$.

43 **a** **b**



c Punt V: $x = 6$ dus $y = \frac{1}{3} \cdot 6 + 4 = 6$. De coördinaten van V zijn $(6, 6)$.

Punt H: $y = 1$ dus $1 = \frac{1}{3}x + 4$ waaruit volgt $\frac{1}{3}x = -3$, dus $x = -9$.
De coördinaten van H zijn $(-9, 1)$.

d $HV = \sqrt{(6 - -9)^2 + (6 - 1)^2} = \sqrt{250} = 5\sqrt{10}$.

e De oppervlakte van $\triangle HPV = \frac{1}{2} \cdot HP \cdot PV = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 5 = 37\frac{1}{2}$

f De oppervlakte van $\triangle HPV$ is ook gelijk aan $\frac{1}{2} \cdot HV \cdot \text{d}(P, l)$.
$\frac{1}{2} \cdot HV \cdot \text{d}(P, l) = 37\frac{1}{2}$ ofwel $HV \cdot \text{d}(P, l) = 75$, dus

$$\text{d}(P, l) = \frac{75}{HV} = \frac{75}{5\sqrt{10}} = \frac{15}{\sqrt{10}} = 1\tfrac{1}{2}\sqrt{10}\,.$$

038 **a** Voor de coördinaten van Q geldt $x = 6$ en $y = -\frac{1}{3} \cdot 6 + 2\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.
$PQ = 7 - \frac{1}{3} = 6\frac{2}{3}$

b Omdat PQ niet loodrecht op l staat.

c Met het lijnstuk PS, waarbij S het snijpunt is van l met de loodlijn uit P op l.

d De richtingscoëfficiënt van de loodlijn is 3, want $3 \cdot -\frac{1}{3} = -1$.
Een vergelijking van de loodlijn is $y = 3x + b$.
$P(6, 7)$ invullen geeft $7 = 3 \cdot 6 + b$, dus $b = -11$.
Een vergelijking van de loodlijn is $y = 3x - 11$.

e $-\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3} = 3x - 11$

$-3\frac{1}{3} = -13\frac{1}{3}$
$x = 4$ en $y = 3 \cdot 4 - 11 = 1$, dus $S(4, 1)$.

f $PS = \sqrt{(4 - 6)^2 + (1 - 7)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

g Die afstand is $PS = 2\sqrt{10}$.

h Herleid $x - 4y = -16$ tot $-4y = -x - 16$ en tot $y = \frac{1}{4}x + 4$.
De richtingscoëfficiënt van de loodlijn is -4, want $-4 \cdot \frac{1}{4} = -1$.
Een vergelijking van de loodlijn is $y = -4x + b$.
$R(6, -3)$ invullen geeft $-3 = -4 \cdot 6 + b$, dus $b = 21$.
Een vergelijking van de loodlijn is $y = -4x + 21$.
Het snijpunt van deze loodlijn met lijn m berekenen geeft
$\frac{1}{4}x + 4 = -4x + 21$
$4\frac{1}{4}x = 17$
$x = 4$ en $y = -4 \cdot 4 + 21 = 5$, het snijpunt is $(4, 5)$.
De afstand van punt $R(6, -3)$ tot de lijn m is dan

$$\sqrt{(4 - 6)^2 + (5 - -3)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}.$$

© Noordhoff Uitgevers bv

O41 **a** De richtingscoëfficiënt van AB is $\frac{7--5}{-4-2}=\frac{12}{-6}=-2$.
Een vergelijking is $y=-2x+b$.
$A(2,-5)$ invullen geeft $-5=-2\cdot 2+b$, dus $b=-1$.
Een vergelijking van de lijn AB is $y=-2x-1$.

b $x=\frac{1}{2}(2+-4)=-1$ en $y=\frac{1}{2}(-5+7)=1$ dus $M(-1,1)$.

c De richtingscoëfficiënt van k is $\frac{1}{2}$, want $\frac{1}{2}\cdot -2=-1$.
Een vergelijking is $y=\frac{1}{2}x+b$.
$M(-1,1)$ invullen geeft $1=\frac{1}{2}\cdot -1+b$, dus $b=1\frac{1}{2}$
Een vergelijking van k is $y=\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}$

d Kies bijvoorbeeld $P(7,5)$ (dit punt ligt op k want $5=\frac{1}{2}\cdot 7+1\frac{1}{2}$)

$AP=\sqrt{(7-2)^2+(5--5)^2}=\sqrt{125}$

$BP=\sqrt{(7--4)^2+(5-7)^2}=\sqrt{125}$
dus $AP=BP=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$

U9 Manier 1:
Herleid l: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ tot $\frac{y}{b}=-\frac{x}{a}+1$ en tot $y=-\frac{b}{a}x+b$.
De loodlijn uit O op l heeft dan richtingscoëfficiënt $\frac{a}{b}$, want het product van de richtingscoëfficiënten $\frac{a}{b}\cdot\frac{-b}{a}=-1$. En de vergelijking is $y=\frac{a}{b}x$
Het snijpunt van l en de loodlijn op l berekenen.
$\frac{a}{b}x=-\frac{b}{a}x+b$ (vermenigvuldigen met $a\cdot b$)
$a^2x=-b^2x+ab^2$ of $(a^2+b^2)x=ab^2$, dus $x=\frac{ab^2}{a^2+b^2}$
$y=\frac{a}{b}x=\frac{a}{b}\cdot\frac{ab^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2b}{a^2+b^2}$
De gevraagde afstand is $\sqrt{\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2b^4+a^4b^2}{(a^2+b^2)^2}}=$
$\sqrt{\frac{a^2b^2(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2}}=\frac{\sqrt{a^2b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$
Manier 2:
Noem de snijpunten van l met de assen A en B en die met de loodlijn S.
De oppervlakte van $\triangle OAB$ is $\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB=\frac{1}{2}ab$.
De oppervlakte van $\triangle OAB$ is ook gelijk aan $\frac{1}{2}\cdot AB\cdot OS$, dus
$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot OS$.
Verder geldt $AB^2=a^2+b^2$, dus $AB=\sqrt{a^2+b^2}$.
Hieruit volgt $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot OS=\frac{1}{2}ab$, dus d $=OS=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

U10 Herleid $4x+3y=33$ tot $3y=-4x+33$ en tot $y=-\frac{4}{3}x+11$.
Lijn k snijdt de y-as in $(0,11)$.
De richtingscoëfficiënt van l is $\frac{3}{4}$ en l gaat door $(0,11)$.
Een vergelijking van l is $y=\frac{3}{4}x+11$.
De richtingscoëfficiënt van l is $\frac{3}{4}$ .Vanaf $(0,11)$ 4 naar rechts en 3 omhoog is een afstand 5 (de bekende 3,4,5 driehoek).
Dus 6 naar rechts en $4\frac{1}{2}$ omhoog is een afstand $7\frac{1}{2}$
Dit geldt ook voor 6 naar links en $4\frac{1}{2}$ omlaag.

De gevraagde punten zijn $A\left(-6,6\frac{1}{2}\right)$ en $B\left(6,15\frac{1}{2}\right)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

4.6 Gemengde opdrachten

44 **a** Als je (4, 3) substitueert in l_m krijg je $3 = m(4 - 4) + 3$ ofwel $3 = m \cdot 0 + 3$, en dat klopt voor elke waarde van m.

b (0, 1) substitueren geeft $1 = m(0 - 4) + 3$, dus $-4m = -2$ en $m = \frac{1}{2}$
(0, 8) substitueren geeft $8 = m(0 - 4) + 3$, dus $-4m = 5$ en $m = -1\frac{1}{4}$
l_m snijdt de y-as tussen (0, 1) en (0, 8) als $-1\frac{1}{4} < m < \frac{1}{2}$

c (1, 0) substitueren geeft $0 = m(1 - 4) + 3$ dus $-3m = -3$ en $m = 1$
(8, 0) substitueren geeft $0 = m(8 - 4) + 3$ dus $4m = -3$ en $m = -\frac{3}{4}$
De lijn moet steiler stijgen dan een lijn met richtingscoëfficiënt 1 of steiler dalen dan een lijn met richtingscoëfficiënt $-\frac{3}{4}$, dus $m > 1$ of $m < -\frac{3}{4}$

45 **a** $AB = \sqrt{(1 - -3)^2 + (-2 - -1)^2} = \sqrt{17}$

$BC = \sqrt{(6 - 1)^2 + (8 - -2)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

$AC = \sqrt{(6 - -3)^2 + (8 - -1)^2} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2}$

b De richtingscoëfficiënt van zijde $AB = \dfrac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$

De hoek van zijde AB met de x-as is $\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 14{,}036\ldots°$

De richtingscoëfficiënt van zijde $BC = \dfrac{10}{5} = 2$.

De hoek van zijde BC met de x-as is $\tan^{-1}(2) = 63{,}434\ldots°$

De richtingscoëfficiënt van zijde $AC = \dfrac{9}{9} = 1$.

De hoek van zijde AC met de x-as is $\tan^{-1}(1) = 45°$.
$\angle A = 45 + 14{,}036\ldots \approx 59°$, $\angle C = 63{,}434\ldots - 45 \approx 18°$ dus
$\angle B = 180 - 59 - 18 = 103°$.

c Een vergelijking van de lijn AC is $y = x + b$.
$C(6, 8)$ substitueren geeft $8 = 6 + b$, dus $b = 2$.
Een vergelijking van AC is $y = x + 2$.
De loodlijn uit B op AC heeft vergelijking $y = -x + b$.
$B(1, -2)$ substitueren geeft $-2 = -1 + b$, dus $b = -1$.
Een vergelijking van deze loodlijn is $y = -x - 1$.
Deze loodlijn snijden met AC geeft $x + 2 = -x - 1$
$2x = -3$ dus $x = -1\frac{1}{2}$ en $y = -1\frac{1}{2} + 2 = \frac{1}{2}$

Het snijpunt is $S\left(-1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

De gevraagde afstand $d(B,AC) = d(B,S) = \sqrt{\left(-1\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - -2\right)^2} = \sqrt{12\frac{1}{2}}$

46 **a** Een vergelijking van k is $y = \frac{1}{2}x + 1$. De lijnen l en m zijn evenwijdig, dus $rc_l = rc_m = -\frac{2}{3}$. Een vergelijking van l is $y = -\frac{2}{3}x + 4$.
m ligt twee eenheden hoger dus een vergelijking van m is $y = -\frac{2}{3}x + 6$.

b De hoeken met de x-as zijn $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26{,}565\ldots°$ en $\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33{,}690\ldots°$
$\angle(k, l) = 26{,}565\ldots + 33{,}690\ldots \approx 60°$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c Een vergelijking van de loodlijn uit punt (0, 4) op m is $y = 1\frac{1}{2}x + 4$.
Het snijpunt van deze loodlijn met m geeft
$1\frac{1}{2}x + 4 = -\frac{2}{3}x + 6$

$2\frac{1}{6}x = 2$
$x = \frac{12}{13}$ en $y = 1\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{13} + 4 = 5\frac{5}{13}$
d(l, m) is de afstand tussen de punten (0, 4) en $\left(\frac{12}{13}, 5\frac{5}{13}\right)$.
$\text{d}(l, m) = \sqrt{\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(5\frac{5}{13} - 4\right)^2} \approx 1{,}7$.

47 **a** Substitueer de vergelijking van $m_1 : y = x - 6$ in de vergelijking van l_3
$5x - 2(x - 6) = 3$
$5x - 2x + 12 = 3$
$3x = -9$, dus $x = -3$ en $y = -3 - 6 = -9$.
Het snijpunt is $(-3, -9)$.

b Substitueer de vergelijking van $m_q : y = qx - 6$ in de vergelijking van l_p
$5x - 2(qx - 6) = p$
$5x - 2qx + 12 = p$
$(5 - 2q)x = p - 12$

c Als het stelsel afhankelijk is, moet gelden dat $5 - 2q = 0$ en $p - 12 = 0$.
Daaruit volgt $q = 2\frac{1}{2}$ en $p = 12$.

d Als het stelsel strijdig is, moet gelden dat $5 - 2q = 0$ en $p - 12 \neq 0$, dus $q = 2\frac{1}{2}$ en $p \neq 12$.

e Dat geldt in alle overige gevallen, dus als $q \neq 2\frac{1}{2}$

Onderzoeksopdrachten

48 **a** Het middelpunt is $M(0, 5)$ en de straal is 5.

b -

c De vergelijkingen van k_2 en l_2 zijn $y = 2x + 10$ en $y = -\frac{1}{2}x$.
$2x + 10 = -\frac{1}{2}x$
$2\frac{1}{2}x = -10$ dus $x = -4$ en $y = 2 \cdot -4 + 10 = 2$. Het punt is $A(-4, 2)$.
$AM = \sqrt{4^2 + (5 - 2)^2} = 5$, dus A ligt op de cirkel.

d $mx + 10 = -\frac{1}{m}x$
$mx + \frac{1}{m}x = -10$

$\left(m + \frac{1}{m}\right)x = -10$
$x = \dfrac{-10}{m + \frac{1}{m}} = \dfrac{-10m}{m^2 + 1}$ en $y = -\frac{1}{m} \cdot \dfrac{-10m}{m^2 + 1} = \dfrac{10}{m^2 + 1}$
De coördinaten van het snijpunt zijn $S\left(\dfrac{-10m}{m^2 + 1}, \dfrac{10}{m^2 + 1}\right)$

$$MS^2 = \left(\frac{-10m}{m^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{10}{m^2 + 1} - 5\right)^2 = \frac{100m^2}{(m^2 + 1)^2} + \frac{100}{(m^2 + 1)^2} - \frac{100}{m^2 + 1} + 25 =$$

$$\frac{100m^2}{(m^2 + 1)^2} + \frac{100}{(m^2 + 1)^2} - \frac{100(m^2 + 1)}{(m^2 + 1)^2} + \frac{25(m^2 + 1)^2}{(m^2 + 1)^2} =$$

$$\frac{100m^2 + 100 - 100m^2 - 100}{(m^2 + 1)^2} + 25 \text{ ofwel } 0 + 25 = 25.$$

Dus $MS = \sqrt{25} = 5$ en S ligt voor elke waarde van m op de cirkel.

© Noordhoff Uitgevers bv

49 **a** Als je punt A hebt gekozen, kun je punt C vinden door de loodlijn op de lijn AD uit D te snijden met de lijn door A en C, dus met de lijn m.
Punt B vind je daarna door de lijnen door A en C die evenwijdig zijn met CD respectievelijk AD met elkaar te snijden.

b Dat punt is het snijpunt van de loodlijn uit D op m met lijn m.
In dat geval loopt de lijn door D en loodrecht op AD evenwijdig met m, dus is er geen snijpunt met m.
De loodlijn uit D op m heeft een vergelijking $y = -x + 7$.
$x + 1 = -x + 7$
$2x = 6$, dus $x = 3$ en $y = 3 + 1 = 4$, het punt is $(3, 4)$.

Samenvatting

S1 Eén oplossing, dan snijden de lijnen elkaar.
Geen oplossing, dan zijn de lijnen evenwijdig.
Oneindig veel oplossingen, dan vallen de lijnen samen.

S2 Stel de richtingscoëfficiënt van lijn m is p.
Dan geldt $\frac{5}{7} \cdot p = -1$ en daaruit volgt $p = -\frac{7}{5} = -1\frac{2}{5}$.

S3 **a** De richtingscoëfficiënt van k is $\frac{10}{-4} = -2\frac{1}{2}$, dus een vergelijking is $y = -2\frac{1}{2}x + b$.
Invullen van $(3, -2)$ geeft $-2 = -2\frac{1}{2} \cdot 3 + b$, dus $b = 5\frac{1}{2}$
Een vergelijking van k is $y = -2\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}$
Deze kun je ook schrijven als $2y + 5x = 11$ en als $\frac{x}{2\frac{1}{5}} + \frac{y}{5\frac{1}{2}} = 1$.

b De snijpunten met de assen zijn gegeven, dus een vergelijking van l is $\frac{x}{7} + \frac{y}{-5} = 1$. Deze kun je ook schrijven als $5x - 7y = 35$ en als $y = \frac{5}{7}x - 5$.

c De lijn m is verticaal, de vergelijking is $x = 3$ of $\frac{x}{3} = 1$.

S4 **a** Vul $p = 2$ en $q = 1$ in, dat geeft $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ -x + 4y = 1 \end{cases}$.
vermenigvuldigen van de onderste vergelijking met 3 geeft

$$\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ -3x + 12y = 3 \end{cases} +$$

$10y = 10$ geeft $y = 1$.
$-x + 4 \cdot 1 = 1$, dus $x = 3$.

b Vermenigvuldig van de onderste vergelijking met 3 geeft $\begin{cases} 3x - py = 7 \\ -3x + 12y = 3q \end{cases}$
Optellen geeft $(12 - p)y = 3q + 7$.
Als het stelsel strijdig is, moet gelden $12 - p = 0$ en $3q + 7 \neq 0$, dus $p = 12$ en $q \neq -2\frac{1}{3}$

c Als het stelsel afhankelijk is, moet gelden $12 - p = 0$ en $3q + 7 = 0$, dus $p = 12$ en $q = -2\frac{1}{3}$

© Noordhoff Uitgevers bv

S5 Herleid de vergelijking van l tot $3y = -2x + 4$ en tot $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$.
Herleid de vergelijking van m tot $-2y = -x + 17$ en tot $y = \frac{1}{2}x - 8\frac{1}{2}$.
Voor de hoek die k met de x-as maakt geldt $\tan(\alpha) = 3$ dus $\alpha = 71{,}565\ldots°$.
Voor de hoek die l met de x-as maakt geldt $\tan(\beta) = \frac{2}{3}$ dus $\beta = 33{,}690\ldots°$

Voor de hoek die m met de x-as maakt geldt $\tan(\gamma) = \frac{1}{2}$ dus $\gamma = 26{,}565\ldots°$
$\angle(k,l) = 180 - 71{,}565\ldots - 33{,}690\ldots \approx 75°$
$\angle(k,m) = 71{,}565\ldots - 26{,}565\ldots = 45°$

S6 Je kunt de vergelijking van m herleiden tot $-3y = -2x + 7$ of $y = \frac{2}{3}x - 2\frac{1}{3}$
De $rc_l = \frac{2}{3}$, dus de $rc_{loodlijn} = -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$ en de vergelijking is $y = -1\frac{1}{2}x + b$.

P (1, 3) invullen: $3 = -1\frac{1}{2} \cdot 1 + b$, dus $b = 4\frac{1}{2}$

Een vergelijking van de loodlijn is $y = -1\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$

S7 $PQ = \sqrt{(2 - -5)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}$

S8 **a** Je kunt de vergelijking van l herleiden tot $2y = -x - 4$ of $y = -\frac{1}{2}x - 2$
Een loodlijn op l heeft een vergelijking $y = 2x + b$.
$P(1, 5)$ invullen geeft $5 = 2 \cdot 1 + b$, dus $b = 3$.
Een vergelijking van de loodlijn is $y = 2x + 3$.
Het snijpunt van deze loodlijn met l berekenen
$2x + 3 = -\frac{1}{2}x - 2$
$2\frac{1}{2}x = -5$ dus $x = -2$ en $y = 2 \cdot -2 + 3 = -1$, het snijpunt is $S(-2, -1)$.

$d(P,l) = d(P,S) = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (-1 - 5)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

b Kies een punt op m, bijvoorbeeld punt $Q(0, 8)$.
De loodlijn door Q op l heeft als vergelijking $y = 2x + 8$.
Het snijpunt van deze loodlijn met l berekenen
$2x + 8 = -\frac{1}{2}x - 2$
$2\frac{1}{2}x = -10$ dus $x = -4$ en $y = 2 \cdot -4 + 8 = 0$, het snijpunt is $S(-4, 0)$.

$d(l,m) = d(Q,S) = \sqrt{(-4 - 0)^2 + (0 - 8)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

Test jezelf

T1 **a** De snijpunten van k met de assen zijn $\left(2\frac{1}{2}, 0\right)$ en $(0, 4)$.
Vul $x = 0$ in bij de vergelijking van l: $2 \cdot 0 - 3y = 6$ dit geeft $y = -2$.
Vul $y = 0$ in bij de vergelijking van l: $2x - 3 \cdot 0 = 6$ dit geeft $x = 3$.
De snijpunten van l met de assen zijn $(3, 0)$ en $(0, -2)$.

b Vermenigvuldigen van k links en rechts met 20 geeft $8x + 5y = 20$.
Dit kun je weer herleiden tot $5y = -8x + 20$ en $y = -1\frac{3}{5}x + 4$.

c Uit $2x - 3y = 6$ volgt $-3y = -2x + 6$ dus $y = \frac{2}{3}x - 2$.

Door $2x - 3y = 6$ links en recht door 6 te delen krijg je $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$.

d Een vergelijking van n is $y = -1\frac{3}{5}x + b$.
(5, 12) invullen geeft $12 = -1\frac{3}{5} \cdot 5 + b$, dus $b = 20$.
Een vergelijking van n is $y = -1\frac{3}{5}x + 20$.

© Noordhoff Uitgevers bv

e De richtingscoëfficiënt van r is $-1\frac{1}{2}$, want $-\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = -1$.
Een vergelijking van r is $y = -1\frac{1}{2}x + b$.
$(3, -2)$ invullen geeft $-2 = -1\frac{1}{2} \cdot 3 + b$, dus $b = 2\frac{1}{2}$
Een vergelijking van r is $y = -1\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$

T2 **a** $\begin{cases} y - 2x = -1 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$ +

$5y = 15$ dus $y = 3$

$x + 2 \cdot 3 = 8$ dus $x = 2$

b $\begin{cases} -2x + y = 2 \\ 6y - 2x = 6 \end{cases}$ −

$4x = -4$ dus $x = -1$

$-1 + 2y = 2$ dus $y = 1\frac{1}{2}$

c $\begin{cases} 3x + 2y + 1 = 2 \\ -2x + 5y = -7 \end{cases}$

$\begin{cases} 6x + 4y = 2 \\ -6x + 15y = -21 \end{cases}$ +

$19y = -19$ dus $y = -1$
$-2x + 5 \cdot -1 = -7$ dus $x = 1$

d $\begin{cases} -2x + y = 2 \\ 3y - x = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} -2x + y = 2 \\ 6y - 2x = 6 \end{cases}$ −

$-5y = -4$ dus $y = \frac{4}{5}$

$3 \cdot \frac{4}{5} = x + 3$ dus $x = -\frac{3}{5}$

T3 **a** Substitueer de tweede vergelijking in de eerste
$3x + 4(-0{,}75x + 4) = 12$
$3x - 3x + 16 = 12$
$0 \cdot x = -4$, dus het stelsel is strijdig.
b Deze twee lijnen zijn evenwijdig.

T4 De richtingscoëfficiënt van l is 3, dus voor de hoek tussen l en de x-as geldt $\tan(\alpha) = 3$, dus $\alpha = 71{,}565\ldots \approx 72°$.
De richtingscoëfficiënt van m is $-\frac{2}{3}$, dus voor de hoek tussen m en de x-as geldt $\tan(\beta) = \frac{2}{3}$, dus $\beta = 33{,}690\ldots \approx 34°$.
De derde hoek van deze driehoek is $180 - 71{,}565\ldots - 33{,}690\ldots \approx 75°$.

T5 **a** Herleid $4x - 10y = 158$ tot $-10y = -4x + 158$ en tot $y = \frac{2}{5}x - 15\frac{4}{5}$
De loodlijn heeft een vergelijking $y = -2\frac{1}{2}x + b$.
Invullen van $P(1, 2)$ geeft $2 = -2\frac{1}{2} \cdot 1 + b$ dus $b = 4\frac{1}{2}$
Een vergelijking van de loodlijn is $y = -2\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$
b Substitueren van de vergelijking van de loodlijn $y = -2\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$ in l geeft
$4x - 10\left(-2\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}\right) = 158$
$4x + 25x - 45 = 158$
$29x = 203$
$x = 7$
$y = -2\frac{1}{2} \cdot 7 + 4\frac{1}{2} = -13$, dus het snijpunt is $(7, -13)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

T6 **a** Herleid l: $2x + 3y = 8\frac{1}{2}$ tot $3y = -2x + 8\frac{1}{2}$ en tot $y = -\frac{2}{3}x + 2\frac{5}{6}$
Een vergelijking van de loodlijn uit P op l is $y = 1\frac{1}{2}x + b$.
$P(1, 0)$ invullen geeft $0 = 1\frac{1}{2} \cdot 1 + b$, dus $b = -1\frac{1}{2}$
Een vergelijking van de loodlijn uit P op l is $y = 1\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$

Dit substitueren in l geeft $2x + 3\left(1\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}\right) = 8\frac{1}{2}$ ofwel $6\frac{1}{2}x = 13$ en $x = 2$.
$y = 1\frac{1}{2} \cdot 2 - 1\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$. De loodlijn uit P snijdt de lijn l in punt $S\left(2, 1\frac{1}{2}\right)$.

$d(P,l) = \text{d}(P,S) = \sqrt{(2-1)^2 + \left(1\frac{1}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{3\frac{1}{4}} \approx 1{,}8$.

b De richtingscoëfficiënt van PQ is $\frac{-5}{8} = -\frac{5}{8}$ en het midden is $\left(5, -2\frac{1}{2}\right)$.

Een vergelijking van de middelloodlijn is $y = 1\frac{3}{5}x + b$.

$\left(5, -2\frac{1}{2}\right)$ invullen geeft $-2\frac{1}{2} = 1\frac{3}{5} \cdot 5 + b$ dus $b = -10\frac{1}{2}$
Een vergelijking van de middelloodlijn is $y = 1\frac{3}{5}x - 10\frac{1}{2}$

T7 **a** $PQ = \sqrt{(-1-3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

b De richtingscoëfficiënt van PQ is $\frac{-4}{2} = -2$, dus $y = -2x + b$.

$(2, 3)$ invullen geeft $3 = -2 \cdot 2 + b$, dus $b = 7$ en PQ is $y = -2x + 7$.

c De loodlijn op PQ uit de oorsprong heeft de vergelijking $y = \frac{1}{2}x$.
$-2x + 7 = \frac{1}{2}x$
$-2\frac{1}{2}x = -7$ dus $x = 2\frac{4}{5}$ en $y = \frac{1}{2} \cdot 2\frac{4}{5} = 1\frac{2}{5}$

De afstand van de oorsprong tot l is $\sqrt{\left(2\frac{4}{5}\right)^2 + \left(1\frac{2}{5}\right)^2} \approx 3{,}1$.

d Als een punt A op l ligt, kun je de coördinaten uitdrukken als $A(a, -2a + 7)$.

$AR = \sqrt{(a - -1)^2 + (-2a + 7 - -1)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + (-2a+8)^2} = 10$
$a^2 + 2a + 1 + 4a^2 - 32a + 64 = 100$
$5a^2 - 30a + 65 = 100$
$5a^2 - 30a - 35 = 0$
$a^2 - 6a - 7 = 0$ ofwel $(a - 7)(a + 1) = 0$, dus $a = 7$ of $a = -1$.
De punten zijn $(7, -7)$ en $(-1, 9)$.

T8 **a** $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ \underline{2x + 4y = 10} \quad - \end{cases}$

$-7y = -14$, dus $y = 2$.
$2x - 3 \cdot 2 = -4$ dus $2x = 2$ en $x = 1$.

b Herleid $2x - 3y = -4$ tot $-3y = -2x - 4$ en tot $y = \frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$.

Herleid $x + 2y = 5$ tot $2y = -x + 5$ en tot $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$.
De hoeken met de x-as zijn $\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33{,}690\ldots°$ en $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26{,}565\ldots°$
De hoek tussen de lijnen is $33{,}690\ldots + 26{,}565\ldots \approx 60°$.

T9 **a** Voor deze punten geldt $y = 4$ of $y = -4$.
$4 = 3x - 7$ geeft $3x = 11$ dus $x = 3\frac{2}{3}$
$-4 = 3x - 7$ geeft $3x = 3$ dus $x = 1$
De punten zijn $(1, -4)$ en $\left(3\frac{2}{3}, 4\right)$.

b Deze punten liggen op de lijnen met vergelijking $y = x$ of $y = -x$.
Beide substitueren in $x + 2y = 8$ geeft
$x + 2x = 8$ dus $x = 2\frac{2}{3}$ of $x - 2x = 8$ dus $x = -8$
De punten zijn $\left(2\frac{2}{3}, 2\frac{2}{3}\right)$ en $(-8, -8)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

T10 Stel eerst een vergelijking op van de loodlijn uit C op lijn l:

Een vergelijking van deze loodlijn is $y = 1\frac{1}{3}x + b$.

$C(3, 7)$ substitueren geeft $7 = 1\frac{1}{3} \cdot 3 + b$, dus $b = 3$.
Een vergelijking van de loodlijn uit C op l is $y = 1\frac{1}{3}x + 3$.
Het snijpunt van deze loodlijn met l berekenen

$1\frac{1}{3}x + 3 = -\frac{3}{4}x + 3$

$2\frac{1}{12}x = 0$, dus $x = 0$ en het snijpunt is $S(0, 3)$.

$CS = \sqrt{3^2 + (7-3)^2} = 5$.

$opp.\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot 5$ dus $AB = \dfrac{18\frac{3}{4}}{2\frac{1}{2}} = 7\frac{1}{2}$

Op lijn l ga je per 4 naar rechts 3 omlaag, en de lengte van zo'n stap is 5.
De afstand van A naar B is $7\frac{1}{2}$, dus punt B ligt 6 naar rechts en $4\frac{1}{2}$ omlaag

ten opzichte van punt A. De coördinaten van B zijn $\left(-4 + 6, 6 - 4\frac{1}{2}\right)$ ofwel $B\left(2, 1\frac{1}{2}\right)$.

Een vergelijking van n is $y = 5\frac{1}{2}x - 9\frac{1}{2}$

Extra oefening

E1 Je kunt $y = \frac{1}{2}x - 7$ herleiden tot $-\frac{1}{2}x + y = 7$ of $x - 2y = -14$.
Je kunt $7x - 2y = 14$ herleiden tot $-2y = -7x + 14$ of $y = 3\frac{1}{2}x - 7$.
En je kunt $7x - 2y = 14$ ook herleiden tot $7x = 2y + 14$ of $x = \frac{2}{7}y + 2$.

Je kunt $2x + 7y = 14$ herleiden tot $\dfrac{x}{7} + \dfrac{y}{2} = 1$ en ook tot $7y = -2x + 14$ of $y = -\frac{2}{7}x + 2$.

Conclusie:
A en G horen bij dezelfde lijn
B, E en F horen bij dezelfde lijn.
C, D en H horen bij dezelfde lijn.

E2 **a** $\begin{cases} 2y - 3x = -8 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$ $-$

$-4x = -20$, dus $x = 5$
$5 + 2y = 12$ geeft $y = 3\frac{1}{2}$

b $\begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$ $+$

$7x = 14$, dus $x = 2$
$2 \cdot 2 - y = 3$ geeft $y = 1$

c $\begin{cases} 4x - 6y = 34 \\ x - 6y = 7 \end{cases}$ $-$

$3x = 27$, dus $x = 9$
$2 \cdot 9 - 3y = 17$ geeft $y = \frac{1}{3}$

d $\begin{cases} 4x + 10y = 50 \\ 15x - 10y = 45 \end{cases}$ $+$

$19x = 95$, dus $x = 5$
$3 \cdot 5 - 2y = 9$ geeft $y = 3$

© Noordhoff Uitgevers bv

E3 **a** Herleid $x + 3y = 6$ tot $3y = -x + 6$ en tot $y = -\frac{1}{3} + 2$.

Voor de hoek tussen l en de x-as geldt $\tan(\alpha) = \frac{1}{3}$ dus $\alpha = 18{,}434\ldots \approx 18°$.

b De richtingscoëfficiënt van m is $\frac{2}{3}$

Voor de hoek tussen l en de x-as geldt $\tan(\beta) = \frac{2}{3}$ dus $\beta = 33{,}690\ldots \approx 34°$.

c De hoek tussen l en m is $18{,}434\ldots + 33{,}690\ldots \approx 52°$.

E4 **a** Herleid $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3\frac{1}{2}} = 1$ tot $-3\frac{1}{2}x + 2y = 7$ en tot $y = 1\frac{3}{4}x + 3\frac{1}{2}$

Herleid $4x + 7y = 14$ tot $7y = -4x + 14$ en tot $y = -\frac{4}{7}x + 2$

Het product van de richtingscoëfficiënten is $1\frac{3}{4} \cdot -\frac{4}{7} = \frac{7}{4} \cdot -\frac{4}{7} = -1$, dus l en m staan loodrecht op elkaar.

b Herleid $2x - 5y = 3$ tot $-5y = -2x + 3$ en tot $y = \frac{2}{5}x - \frac{3}{5}$

Een vergelijking van de loodlijn is $y = -2\frac{1}{2}x + b$, want $-2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = -1$.

$P(2, 3)$ substitueren in $y = -2\frac{1}{2}x + b$ geeft $3 = -2\frac{1}{2} \cdot 2 + b$, dus $b = 8$.

Een vergelijking van de loodlijn is $y = -2\frac{1}{2}x + 8$.

E5 $AB = \sqrt{(-2 - 3)^2 + (14 - 7)^2} = \sqrt{74}$

E6 **a** Herleid l : $3x + 2y = 44$ tot $2y = -3x + 44$ en tot $y = -1\frac{1}{2}x + 22$.

Een vergelijking van de loodlijn op l is $y = \frac{2}{3}x + b$, want $\frac{2}{3} \cdot -1\frac{1}{2} - \ = -1$

$P(-3, 7)$ substitueren geeft $7 = \frac{2}{3} \cdot -3 + b$, dus $b = 9$.

Een vergelijking van de loodlijn door P op l is $y = \frac{2}{3}x + 9$.

Het snijpunt S berekenen van l met de loodlijn door P op l

$-1\frac{1}{2}x + 22 = \frac{2}{3}x + 9$

$-2\frac{1}{6}x = -13$

$x = 6$ en $y = -1\frac{1}{2} \cdot 6 + 22 = 13$, het snijpunt is $S(6, 13)$.

$\mathrm{d}(P, l) = \mathrm{d}(P, S) = \sqrt{(6 - -3)^2 + (13 - 7)^2} = \sqrt{117}$.

b De richtingscoëfficiënt van m is $\frac{14 - 2}{-6 - 3} = \frac{12}{-9} = -\frac{4}{3}$, dus $m : y = -\frac{4}{3}x + b$.

$(3, 2)$ substitueren geeft $2 = -\frac{4}{3} \cdot 3 + b$, dus $b = 6$ en $m : y = -\frac{4}{3}x + 6$.

Een vergelijking van de loodlijn op m is $y = \frac{3}{4}x + b$, want $\frac{3}{4} \cdot -\frac{4}{3} = -1$.

$Q(10, 1)$ substitueren geeft $1 = \frac{3}{4} \cdot 10 + b$ dus $b = -6\frac{1}{2}$ en $y = \frac{3}{4}x - 6\frac{1}{2}$

Het snijpunt berekenen: $-1\frac{1}{3}x + 6 = \frac{3}{4}x - 6\frac{1}{2}$ ofwel $-16x + 72 = 9x - 78$

$-25x = -150$. Dit geeft $x = 6$ en $y = -1\frac{1}{3} \cdot 6 + 6 = -2$.

Het snijpunt is $(6, -2)$ en $\mathrm{d}(Q, m) = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (6 - 10)^2} = 5$.

E7 $rc_l = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$, dus $rc_m = 3$ want $-\frac{1}{3} \cdot 3 = -1$

rc_m is ook gelijk aan $\frac{a - 12}{-3 - -10}$ ofwel $\frac{a - 12}{7}$

Dit geeft $\frac{a - 12}{7} = 3$ ofwel $a - 12 = 21$ dus $a = 33$.

© Noordhoff Uitgevers bv

E8 De richtingscoëfficiënt van zijde AC is $\frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$, dus een vergelijking van zijde AC is $y = -\frac{1}{3}x + b$. Punt $A(-1, -1)$ invullen geeft $-1 = -\frac{1}{3} \cdot -1 + b$ dus $b = -1\frac{1}{3}$ en een vergelijking van zijde AC is $y = -\frac{1}{3}x - 1\frac{1}{3}$
De richtingscoëfficiënt van de hoogtelijn uit B op zijde AC is 3, dus een vergelijking van deze hoogtelijn is $y = 3x + b$. Punt $B(2, 5)$ invullen geeft $5 = 3 \cdot 2 + b$, dus $b = -1$ en een vergelijking van de hoogtelijn is $y = 3x - 1$.
Het snijpunt van deze hoogtelijn met zijde AC berekenen
$-\frac{1}{3}x - 1\frac{1}{3} = 3x - 1$

$-3\frac{1}{3}x = \frac{1}{3}$
$x = -\frac{1}{10}$ en $y = 3 \cdot -\frac{1}{10} - 1 = -1\frac{3}{10}$, dus het snijpunt is $S\left(-\frac{1}{10}, -1\frac{3}{10}\right)$.
De lengte van de hoogtelijn is $d(B,S) = \sqrt{\left(-\frac{1}{10} - 2\right)^2 + \left(-1\frac{3}{10} - 5\right)^2} = \sqrt{44{,}1}$.

E9 **a** Herleid $2x - y = 1$ tot $2x - 1 = y$ of $y = 2x - 1$.
Herleid $x + 2y = 10$ tot $2y = -x + 10$ of $y = -\frac{1}{2}x + 5$.
Het product van de richtingscoëfficiënten van l en m is $2 \cdot -\frac{1}{2} = -1$, dus de hoek tussen l en m is recht en de driehoek is daarom rechthoekig.

b Bereken de snijpunten van de drie lijnen lijnen.
$2x - 1 = -\frac{1}{2}x + 5$
$2\frac{1}{2}x = 6$
$x = 2\frac{2}{5}$ en $y = -\frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{5} + 5 = 3\frac{4}{5}$ dus een snijpunt is $A\left(2\frac{2}{5}, 3\frac{4}{5}\right)$.
$2x - 1 = -3x - 5$
$5x = -4$
$x = -\frac{4}{5}$ en $y = 2 \cdot -\frac{4}{5} - 1 = -2\frac{3}{5}$ dus een snijpunt is $B\left(-\frac{4}{5}, -2\frac{3}{5}\right)$.
$-\frac{1}{2}x + 5 = -3x - 5$

$2\frac{1}{2}x = -10$
$x = -4$ en $y = -3 \cdot -4 - 5 = 7$ dus een snijpunt is $C(4, 7)$.
$AB = \sqrt{\left(-\frac{4}{5} - 2\frac{2}{5}\right)^2 + \left(-2\frac{3}{5} - 3\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{51{,}2}$ en
$AC = \sqrt{\left(-4 - 2\frac{2}{5}\right)^2 + \left(7 - 3\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{51{,}2}$, de driehoek is dus gelijkbenig.
(BC is de zijde tegenover de rechte hoek en is dus langer dan AB en AC).

E10 **a** Herleid $x - 3y = 7$ tot $-3y = -x + 7$ en tot $y = \frac{1}{3}x - 2\frac{1}{3}$
$rc_{loodlijn} = -3$, dus een vergelijking van de loodlijn is $y = -3x + b$.
$P(4, -1)$ substitueren geeft $-1 = -3 \cdot 4 + b$, dus $b = 11$.
Een vergelijking van de loodlijn m is $y = -3x + 11$.

b Het snijpunt van l en m berekenen:

$\frac{1}{3}x - 2\frac{1}{3} = -3x + 11$

$3\frac{1}{3}x = 13\frac{1}{3}$
$x = 4$ en $y = -3 \cdot 4 + 11 = -1$, dus het snijpunt is $(4, -1)$.
Een stap van 1 naar rechts en 3 omlaag is een lengte $\sqrt{10}$.
De gevraagde puntten liggen dus vanaf $(4, -1)$ 3 naar rechts en 9 omlaag of 3 naar links en 9 omhoog. Die punten zijn $(7, -10)$ en $(1, 8)$.

c De gevraagde lijnen zijn evenwijdig met l en gaan door $(7, -10)$ respectievelijk $(1, 8)$.
Substitueer $(7, -10)$ in $y = \frac{1}{3}x + b$ dus $-10 = \frac{1}{3} \cdot 7 + b$ ofwel $b = -12\frac{1}{3}$

Substitueer $(1, 8)$ in $y = \frac{1}{3}x + b$ dus $8 = \frac{1}{3} \cdot 1 + b$ ofwel $b = 7\frac{2}{3}$

De vergelijkingen van de lijnen zijn $y = \frac{1}{3}x - 12\frac{1}{3}$ en $y = \frac{1}{3}x + 7\frac{2}{3}$

© Noordhoff Uitgevers bv

E11 De richtingscoëfficiënt van k en van l is 3 en $A(3, 5)$ ligt op k.
Een vergelijking van de loodlijn m uit A op l is $y = -\frac{1}{3}x + b$.
$A(3, 5)$ substitueren geeft $5 = -\frac{1}{3} \cdot 3 + b$, dus $b = 6$.

Een vergelijking van m is $y = -\frac{1}{3}x + 6$.
Berekenen van het snijpunt van deze loodlijn met l geeft
$3x - \left(-\frac{1}{3}x + 6\right) = 24$
$3\frac{1}{3}x - 6 = 24$

$3\frac{1}{3}x = 30$
$x = 9$ en $y = -\frac{1}{3} \cdot 9 + 6 = 3$, dus het tweede hoekpunt is $B(9, 3)$.
Van A naar B is 6 naar rechts en 2 omlaag.
De punten C en D vind je door van B en van A 2 naar rechts en 6 omhoog te gaan. Daaruit volgt $C(11, 9)$ en $D(5, 11)$.
Een vergelijking van n is $y = -\frac{1}{3}x + b$.
$D(5, 11)$ substitueren geeft $11 = -\frac{1}{3} \cdot 5 + b$, dus $b = 12\frac{2}{3}$
Een vergelijking van n is $y = -\frac{1}{3}x + 12\frac{2}{3}$

E12 **a** $rc_{AB} = \frac{-4}{3} = -1\frac{1}{3}$. Een vergelijking is $y = -1\frac{1}{3}x + b$.
$A(-1, 5)$ substitueren geeft $5 = -1\frac{1}{3} \cdot -1 + b$, dus $b = 3\frac{2}{3}$ en $l : y = -1\frac{1}{3}x + 3\frac{2}{3}$
$rc_{BC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Een vergelijking is $y = \frac{1}{2}x + b$.
$B(2, 1)$ substitueren geeft $1 = \frac{1}{2} \cdot 2 + b$, dus $b = 0$ en $m : y = \frac{1}{2}x$.

b Voor de hoek die l maakt met de x-as geldt $\tan(\alpha) = 1\frac{1}{3}$ dus $\alpha = 53{,}130\ldots°$

Voor de hoek die m maakt met de x-as geldt $\tan(\beta) = \frac{1}{2}$ dus $\beta = 26{,}565\ldots°$
De hoek tussen de lijnen l en m is $53{,}130\ldots + 26{,}565\ldots \approx 80°$.

c Het midden van AB is $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ en het midden van BC is $(4, 2)$.
De richtingscoëfficiënten van de middelloodlijnen van AB en BC zijn respectievelijk $\frac{3}{4}$ en -2.
De vergelijkingen zijn respectievelijk $y = \frac{3}{4}x + b$ en $y = -2x + b$.
Door substitueren van de middens van AB en BC vind je de vergelijkingen $y = \frac{3}{4}x + 2\frac{5}{8}$ en $y = -2x + 10$.

d De hoeken die de middelloodlijnen met de x-as maken volgen uit $\tan(\alpha) = \frac{3}{4}$ en $\tan(\beta) = 2$. De hoeken zijn $36{,}869\ldots°$ en $63{,}434\ldots°$
De hoek tussen de middelloodlijnen is $180 - (36{,}869\ldots + 63{,}434\ldots) \approx 80°$.
Dat is gelijk aan de hoek tussen AB en BC.

© Noordhoff Uitgevers bv

1 **a** $\frac{3}{6}-\frac{2}{5}=\frac{15}{30}-\frac{12}{30}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$

b $\frac{7}{x}+\frac{2}{3x}=\frac{21}{3x}+\frac{2}{3x}=\frac{23}{3x}$

c $\frac{3}{13}\times\frac{-2}{5}=\frac{-6}{65}=-\frac{6}{65}$

d $\frac{3}{p}\times\frac{4}{p}=\frac{12}{p^2}$

e $\frac{3p}{4}\times\frac{2p}{-5}=\frac{6p^2}{-20}=-\frac{3p^2}{10}$

f $\frac{2a}{5b}\times\frac{3b}{4a}=\frac{6ab}{20ab}=\frac{3}{10}$

2 **a** $3=\frac{3}{1}=\frac{3\times 7}{1\times 7}=\frac{21}{7}$ dus $3\frac{5}{7}=\frac{21}{7}+\frac{5}{7}=\frac{26}{7}$

b $\frac{3}{x}+2=\frac{3}{x}+\frac{2}{1}=\frac{3}{x}+\frac{2x}{x}=\frac{3+2x}{x}$

c A $5\frac{3}{8}=\frac{5\times 8+3}{8}=\frac{43}{8}$

B $\frac{5}{p}+4=\frac{5}{p}+\frac{4p}{p}=\frac{5+4p}{p}$

C $7-\frac{4}{x}=\frac{7x}{x}-\frac{4}{x}=\frac{7x-4}{x}$

D $8+\frac{2}{3x}=\frac{24x}{3x}+\frac{2}{3x}=\frac{24x+2}{3x}$

3 **a** $\frac{5p}{3p}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$

b $\frac{36}{\frac{3}{7}}=\frac{36\times 7}{3}=\frac{252}{3}=84$

c $\frac{8p}{12p}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$

d $\frac{2p}{\frac{1}{p}}=\frac{2p\times p}{1}=2p^2$

e $\frac{\frac{3}{p}}{\frac{1}{3}}=\frac{\frac{3}{p}\times 3}{\frac{1}{3}\times 3}=\frac{9}{p}$

f $\frac{p}{\frac{1}{2}}=\frac{p\times 2}{\frac{1}{2}\times 2}=\frac{2p}{1}=2p$

g $\frac{\frac{8}{9}}{4}=\frac{\frac{8}{9}\times 9}{4\times 9}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

h $\frac{4p^2}{\frac{2}{p}}=\frac{4p^2\times p}{\frac{2}{p}\times p}=\frac{4p^3}{2}=2p^3$

4 **a** $-(a+5)-3=-a-5-3=-a-8$

b $(-2v+3)(3v+8)=-6v^2-16v+9v+24=-6v^2-7v+24$

c $(p^3+2)(p-3)=p^4-3p^3+2p-6$

d $(3h-2)(2h^2-4)=6h^3-12h-4h^2+8=6h^3-4h^2-12h+8$

e $\left(\frac{1}{2}n+4\right)\left(\frac{1}{2}n-8\right)=\frac{1}{4}n^2-4n+2n-32=\frac{1}{4}n^2-2n-32$

f $-17(3u+5)+6u=-51u-85+6u=-45u-85$

g $(2p+4)(8-3p^2)=16p-6p^3+32-12p^2$

h $-5{,}7(3{,}5x+6{,}2)=-19{,}95x-35{,}34$

5 **a** $(2h+1)(2h+1)=4h^2+4h+1$

b $(w-9)(w-9)=w^2-18w+81$

c $(p+4)^2=p^2+8p+16$

d $(r-4)^2=r^2-8r+16$

e $(5+p)(5-p)=25-p^2$

f $(2e-3)(2e+3)=4e^2-9$

g $(5-q)^2=25-10q+q^2$

h $\left(v-\frac{1}{3}\right)\left(v-\frac{1}{3}\right)=v^2-\frac{2}{3}v+\frac{1}{9}$

6 **a** $(p+5)^2=p^2+10p+25$

b $(2v-4)^2=4v^2-16v+16$

c $(b+5)(b-5)=b^2-25$

d $(3x-6)(3x+6)=9x^2-36$

e $(2l+3)(l^2-7)=$
$2l^3+3l^2-14l-21$

f $(3u-0{,}5)^2=9u^2-3u+0{,}25$

g $\left(\frac{1}{2}r+2\right)^2=\frac{1}{4}r^2+2r+4$

h $(p^2-5)(p^2+5)=p^4-25$

i $x(x+1)^2=x(x^2+2x+1)=$
x^3+2x^2+x

j $(x-y^2)(x+y^2)=x^2-y^4$

© Noordhoff Uitgevers bv

7 **a** $(x + 3)^2 = 4(x + 2) + 1$
$x^2 + 6x + 9 = 4x + 8 + 1$
$x^2 + 2x = 0$
$x(x + 2) = 0$
$x = 0$ of $x + 2 = 0$
$x = 0$ of $x = -2$

b $(x + 4)(x - 4) = x(x + 8)$
$x^2 - 16 = x^2 + 8x$
$8x = -16$
$x = -2$

8 **a** $3k = 2(k + 5)$
$3k = 2k + 10$
$k = 10$

b $(c + 2)(c - 2) = 5$
$c^2 - 4 = 5$
$c^2 = 9$
$c = 3$ of $c = -3$

c $2(t + 5)^2 = 14 + 2t$
$2(t^2 + 10t + 25) = 14 + 2t$
$2t^2 + 20t + 50 = 14 + 2t$
$2t^2 + 18t + 36 = 0$
$t^2 + 9t + 18 = 0$
$(t + 3)(t + 6) = 0$
$t + 3 = 0$ of $t + 6 = 0$
$t = -3$ of $t = -6$

d $(b - 10)(b + 1) = 12$
$b^2 - 9b - 10 = 12$
$b^2 - 9b - 22 = 0$
$(b - 11)(b + 2) = 0$
$b - 11 = 0$ of $b + 2 = 0$
$b = 11$ of $b = -2$

9 **a** Vergelijking A en D kun je oplossen zonder eerst de haakjes weg te werken.
A $(x + 2)(0{,}2x - 8) = 0$
$x + 2 = 0$ of $0{,}2x - 8 = 0$
$x = -2$ of $x = 40$
D $(x + 7)^2 - 11 = 25$
$(x + 7)^2 = 36$
$x + 7 = 6$ of $x + 7 = -6$
$x = -1$ of $x = -13$

b B $(2x - 5)(2x + 5) = 24$
$4x^2 - 25 = 24$
$4x^2 = 49$
$2x = 7$ of $2x = -7$
$x = 3\frac{1}{2}$ of $x = -3\frac{1}{2}$

C $(2x + 3)^2 + 2x = 3$
$4x^2 + 12x + 9 + 2x = 3$
$4x^2 + 14x + 6 = 0$
$2x^2 + 7x + 3 = 0$
$D = 49 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49 - 24 = 25$
$x = \frac{-7 + \sqrt{25}}{4} = \frac{-7 + 5}{4} = -\frac{1}{2}$ of $x = \frac{-7 - \sqrt{25}}{4} = \frac{-7 - 5}{4} = -3$

E $(-4x + 1)(4x + 1) = 17$
$-16x^2 + 1 = 17$
$-16x^2 = 16$
$x^2 = -1$, dus geen oplossing.

© Noordhoff Uitgevers bv

F $6x(x-1) = 1 - 5x$
$6x^2 - 6x = 1 - 5x$
$6x^2 - x - 1 = 0$
$D = (-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot -1 = 1 + 24 = 25$
$x = \frac{1+\sqrt{25}}{12} = \frac{1+5}{12} = \frac{1}{2}$ of $x = \frac{1-\sqrt{25}}{12} = \frac{1-5}{12} = -\frac{1}{3}$

10 **a** Als $3x + 6 = 15$, dan kun je in de vergelijking $3x + 6$ door 15 vervangen. Dan staat er links en rechts hetzelfde, namelijk $15 \cdot (x + 4) = 15 \cdot (x + 4)$.

b Als $x - 4 = 0$, dan kun je in de vergelijking $x - 4$ door 0 vervangen en staat er $(3x + 6) \cdot 0 = 15 \cdot 0$ ofwel $0 = 0$ en dat is ook waar.

c $(3x + 6)(x - 4) = 15(x - 4)$
$3x + 6 = 15$ of $x - 4 = 0$
$3x = 9$ of $x = 4$
$x = 3$ of $x = 4$

11 **a** $(2x + 5)(x - 1) = 3(x - 1)$
$2x + 5 = 3$ of $x - 1 = 0$
$2x = -2$ of $x = 1$
$x = -1$ of $x = 1$

b $x^2(2x - 9) = 7x^2$
$x^2 = 0$ of $2x - 9 = 7$
$x = 0$ of $2x = 16$
$x = 0$ of $x = 8$

c $(3x - 4)(2x - 3) = (x + 1)(2x - 3)$
$3x - 4 = x + 1$ of $2x - 3 = 0$
$2x = 5$ of $2x = 3$
$x = 2\frac{1}{2}$ of $x = 1\frac{1}{2}$

d $(5x + 3)(x^2 - 9) = 7(5x + 3)$
$5x + 3 = 0$ of $x^2 - 9 = 7$
$5x = -3$ of $x^2 = 16$
$x = -\frac{3}{5}$ of $x = 4$ of $x = -4$

12 **a** $2 - (x - 4)^2 = 1$
$(x - 4)^2 = 1$
$x - 4 = 1$ of $x - 4 = -1$
$x = 5$ of $x = 3$

b $(5x - 125)(x^2 - 81) = 0$
$5x - 125 = 0$ of $x^2 - 81 = 0$
$5x = 125$ of $x^2 = 81$
$x = 25$ of $x = 9$ of $x = -9$

c $(x + 2)^2 - (3 - 2x)^2 = 0$
$(x + 2)^2 = (3 - 2x)^2$
$x + 2 = 3 - 2x$ of $x + 2 = -3 + 2x$
$3x = 1$ of $-x = -5$
$x = \frac{1}{3}$ of $x = 5$

d $(0{,}5x + 2)^2 - 2x = 20$
$0{,}25x^2 + 2x + 4 - 2x = 20$
$0{,}25x^2 = 16$
$x^2 = 64$
$x = 8$ of $x = -8$

13 **a** $2x^2 + 3x - 5 = 7x + 1$
$2x^2 - 4x - 6 = 0$
$x^2 - 2x - 3 = 0$
$(x - 3)(x + 1) = 0$
$x - 3 = 0$ of $x + 1 = 0$
$x = 3$ of $x = -1$

b De grafiek van f ligt boven de grafiek van g op $\langle \leftarrow, -1 \rangle \cup \langle 3, \rightarrow \rangle$.

c $f(x) > g(x)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

14 **a** $(1 - x)^2 = 5$
$1 - x = \sqrt{5}$ of $1 - x = -\sqrt{5}$
$x = 1 - \sqrt{5} \approx -1{,}24$ of $x = 1 + \sqrt{5} \approx 3{,}24$
Uit de grafiek blijkt $g(x) < 5$ voor $1 - \sqrt{5} < x < 1 + \sqrt{5}$.

b $g(0) = (1 - 0)^2 = 1^2 = 1$ en $h(0) = \left(\frac{1}{2} \cdot 0 + 1\right)^2 = 1^2 = 1$, klopt.
Dus het punt (1, 0) is een snijpunt van de grafieken.

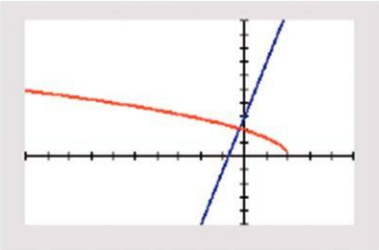
c Een kwadratische vergelijking heeft alleen één oplossing als de snijpunten samenvallen, dat is hier niet het geval, dus moet er nog een snijpunt zijn.

d Een kwadratische vergelijking heeft maximaal twee oplossingen.

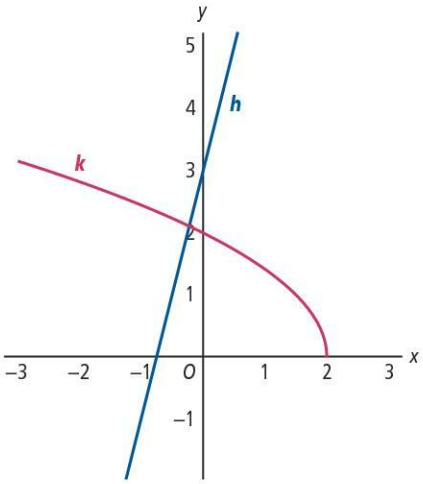
e Eerst het tweede snijpunt berekenen.
$(1 - x)^2 = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2$
$1 - x = \frac{1}{2}x + 1$ of $1 - x = -\frac{1}{2}x - 1$
$-1\frac{1}{2}x = 0$ of $-\frac{1}{2}x = -2$
$x = 0$ of $x = 4$
Het tweede snijpunt ligt bij $x = 4$.
Uit de grafiek blijkt dat $h(x) > g(x)$ voor $0 < x < 4$.

15 **a** $k(x) = \sqrt{4 - 2x}$
$4 - 2x \geq 0$
$2x \leq 4$
$x \leq 2$, dus het domein is $\langle \leftarrow, 2]$ en het bereik is $[0, \rightarrow\rangle$.

b Invoer: $y_1 = 4x + 3$ en $y_2 = \sqrt{4 - 2x}$
Venster: $-10 \leq x \leq 5$ en $-5 \leq y \leq 8$



Schets:



c $h(x) = k(x)$

$4x + 3 = \sqrt{4 - 2x}$

$(4x + 3)^2 = 4 - 2x$

$16x^2 + 24x + 9 = 4 - 2x$

$16x^2 + 26x + 5 = 0$

$D = 26^2 - 4 \cdot 16 \cdot 5 = 356$

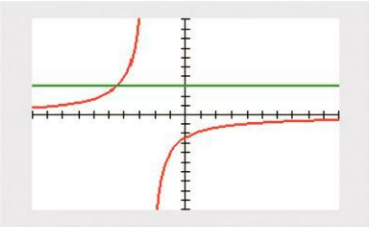
$x = \dfrac{-26 + \sqrt{356}}{32} \approx -0{,}22$ of $x = \dfrac{-26 - \sqrt{356}}{32} \approx -1{,}40$

Uit de grafiek blijkt dat alleen $x \approx -0{,}22$ voldoet.

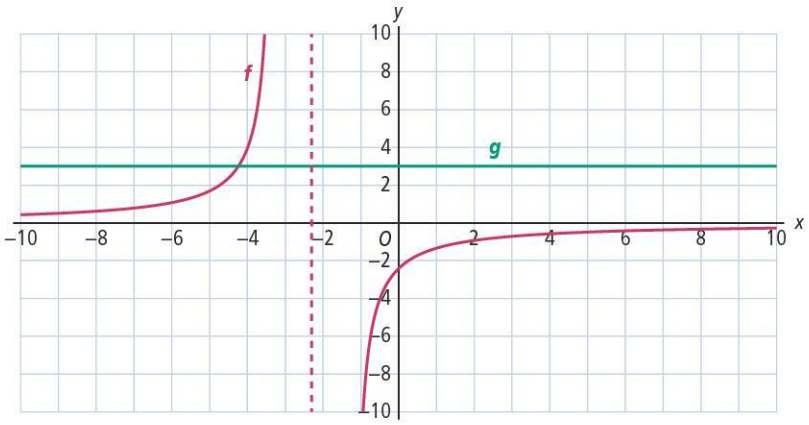
$h(x) \geq k(x)$ voor $-0{,}22 \leq x \leq 2$.

16 **a** Invoer: $y_1 = -\dfrac{12}{2x + 5}$ en $y_2 = 3$.

Venster: $-10 \leq x \leq 10$ en $-10 \leq y \leq 10$.



Schets:



b Het domein van f is $\langle \leftarrow, -2\frac{1}{2} \rangle \cup \langle -2\frac{1}{2}, \rightarrow \rangle$.

$-\dfrac{12}{2x + 5} = 3$

$-12 = 3(2x + 5)$

$-12 = 6x + 15$

$6x = -27$

$x = -4\frac{1}{2}$

Uit de grafiek blijkt $f(x) < g(x)$ voor $\langle \leftarrow, -4\frac{1}{2} \rangle \cup \langle -2\frac{1}{2}, \rightarrow \rangle$.

© Noordhoff Uitgevers bv

5 Afgeleide functies

Voorkennis

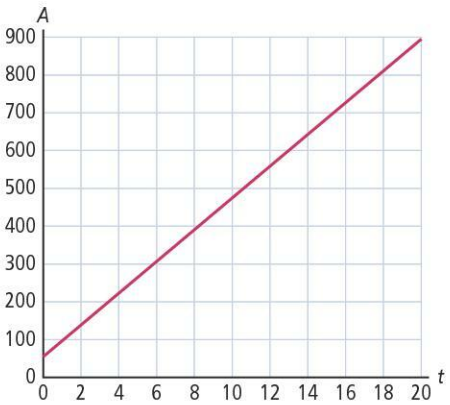
V1 **a** Formule B beschrijft een kwadratisch verband.
Formule C beschrijft een exponentieel verband.

b

t	A	B	C
0	9	8	16
10	44	31	12,04
20	79	100	9,07
30	114	215	6,83

c Bij formule A komt er per tijdseenheid steeds dezelfde hoeveelheid bij.
Bij formule B komt er per tijdseenheid steeds meer bij.
Bij formule C wordt de hoeveelheid elke tijdseenheid met 0,972 vermenigvuldigd. De hoeveelheid wordt steeds kleiner.

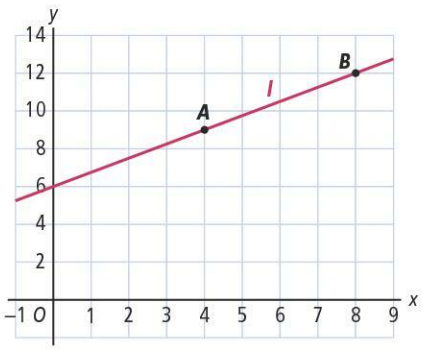
V2 **a**



b Als t met 1 toeneemt, neemt A met 42 toe.

c $210 : 42 = 5$; het verschil tussen de t-waarden is 5.

V3 **a**



b De toename van de y-coördinaat is $12 - 9 = 3$.
Het toename van de x-coördinaat is $8 - 4 = 4$.
De richtingscoëfficiënt is $\frac{3}{4}$, dus $y = \frac{3}{4}x + b$.

Punt $A(4, 9)$ substitueren geeft $9 = \frac{3}{4} \cdot 4 + b$, dus $b = 9 - 3 = 6$.

Een vergelijking van l is $y = \frac{3}{4}x + 6$.

c Lijn m heeft ook richtingscoëfficiënt $\frac{3}{4}$. Het startgetal $b = 2$, want m snijdt de y-as in $(0, 2)$. Een vergelijking van m is $y = \frac{3}{4}x + 2$.

© Noordhoff Uitgevers bv

V4 **a** $y = 2(0{,}6x - 3)$ geeft $y = 1{,}2x - 6$, dus de richtingscoëfficiënt van l is 1,2.
Het startgetal $b = 12$, want l snijdt de y-as in $(0, 12)$.
Een vergelijking van l is $y = 1{,}2x + 12$.

b Voor m geldt $y = -0{,}4x + b$. Invullen van de coördinaten van $(22, 14)$ geeft $14 = -0{,}4 \cdot 22 + b$, dus $b = 14 + 8{,}8 = 22{,}8$.
Een vergelijking van m is $y = -0{,}4x + 22{,}8$.

V5 **a** Voor l geldt $y = 4x + b$. Invullen van de coördinaten van $(1, 4)$ geeft $4 = 4 \cdot 1 + b$, dus $b = 0$. Een vergelijking van l is $y = 4x$.

b m heeft ook richtingscoëfficiënt $-\frac{2}{3}$ dus $y = -\frac{2}{3}x + b$.
Invullen van de coördinaten van $(6, -7)$ geeft $-7 = -\frac{2}{3} \cdot 6 + b$, dus $b = -7 + 4 = -3$. Een vergelijking van m is $y = -\frac{2}{3}x - 3$.

c De toename van de y-coördinaat is $-4 - 5 = -9$ en de toename van de x-coördinaat is $5 - 2 = 3$. De richtingscoëfficiënt is $\frac{-9}{3} = -3$, dus voor n geldt $y = -3x + b$. Invullen van de coördinaten van $(2, 5)$ geeft $5 = -3 \cdot 2 + b$, dus $b = 5 + 6 = 11$. Een vergelijking van n is $y = -3x + 11$.

d De toename van de y-coördinaat is $0 - 3 = -3$ en de toename van de x-coördinaat is $-12 - 3 = -15$. De richtingscoëfficiënt is $\frac{-3}{-15} = \frac{1}{5}$ dus voor k geldt $y = \frac{1}{5}x + b$. Invullen van de coördinaten van $(-12, 0)$ geeft $0 = \frac{1}{5} \cdot -12 + b$, dus $b = 0 + 2\frac{2}{5} = 2\frac{2}{5}$. Een vergelijking van k is $y = \frac{1}{5}x + 2\frac{2}{5}$

V6 De grafiek van f gaat door de punten $(0, 8)$ en $(4, 2)$.
De toename van de y-coördinaat is $2 - 8 = -6$.
De toename van de x-coördinaat is $4 - 0 = 4$.
De richtingscoëfficiënt $a = \frac{-6}{4} = -1\frac{1}{2}$ en het startgetal $b = 8$, want de grafiek snijdt de y-as in $(0, 8)$. Dus $f(x) = -1\frac{1}{2}x + 8$.
De grafiek van de functie g gaat door de punten $(0, 2)$ en $(5, 5)$.
De toename van de y-coördinaat is $5 - 2 = 3$.
De toename van de x-coördinaat is $5 - 0 = 5$.
De richtingscoëfficiënt $a = \frac{3}{5}$ en het startgetal $b = 2$, want de grafiek snijdt de y-as in punt $(0, 2)$. Dus $g(x) = \frac{3}{5}x + 2$.
De grafiek van de functie h gaat door de punten $(0, 100)$ en $(20, 40)$.
De toename van de y-coördinaat is $40 - 100 = -60$.
De toename van de x-coördinaat is $20 - 0 = 20$.
De richtingscoëfficiënt $a = \frac{-60}{20} = -3$ en het startgetal $b = 100$, want de grafiek snijdt de y-as in punt $(0, 100)$. Dus $h(x) = -3x + 100$
De grafiek van de functie k gaat door de punten $(5, 40)$ en $(30, 100)$.
De toename van de y-coördinaat is $100 - 40 = 60$.
De toename van de x-coördinaat is $30 - 5 = 25$.
De richtingscoëfficiënt $a = \frac{60}{25} = 2\frac{2}{5}$. Dus $k(x) = 2\frac{2}{5}x + b$.
Invullen van de coördinaten van $(5, 40)$ geeft $40 = 2\frac{2}{5} \cdot 5 + b$, dus $b = 40 - 12 = 28$. Dus $k(x) = 2\frac{2}{5}x + 28$.

V7 **a** $y = (x^2 - 2)(x^3 + 3)$
$y = x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 6$

b $y = (x^5 - 5)^2$
$y = (x^5 - 5)(x^5 - 5)$
$y = x^{10} - 5x^5 - 5x^5 + 25$
$y = x^{10} - 10x^5 + 25$

c $y = (x^3 + 2x^2)(x^3 - 2x^2)$
$y = x^6 - 2x^5 + 2x^5 - 4x^4$
$y = x^6 - 4x^4$

d $y = (3x^6 - 4)(6x^3 + 4)$
$y = 18x^9 + 12x^6 - 24x^3 - 16$

© Noordhoff Uitgevers bv

e $y = x(x^2 + 1)^2 = x(x^2 + 1)(x^2 + 1)$
$y = x(x^4 + x^2 + x^2 + 1)$
$y = x(x^4 + 2x^2 + 1)$
$y = x^5 + 2x^3 + x$

f $y = (x + 1)(x + 2)(x - 2)$
$y = (x + 1)(x^2 - 2x + 2x - 4)$
$y = (x + 1)(x^2 - 4)$
$y = x^3 - 4x + x^2 - 4$
$y = x^3 + x^2 - 4x - 4$

5.1 Gemiddelde toename en helling

intro 120 km/h is 2 km/min. Rijd je met de maximum toegestane snelheid, dan doe je dus één minuut over dat traject van 2 km. Doe je er 55 seconden over, dan heb je te hard gereden. Doe je er 65 seconden over, dan is je gemiddelde snelheid over dat traject minder dan 120 km/h.

1 **a** De grafiek loopt tussen $t = 30$ en $t = 40$ steiler dan tussen $t = 5$ en $t = 20$, dus tussen $t = 30$ en $t = 40$ is de gemiddelde snelheid groter.

b Als Jurjen met constante snelheid had gereden, was de grafiek een rechte lijn.

c De gemiddelde snelheid tussen $t = 15$ en $t = 30$ is $\frac{s(30) - s(15)}{30 - 15} = 0{,}70875$ km/min en dat is $0{,}70875 \times 60 \approx 42{,}5$ km/uur.

2 **a** Als $x = 1$ is $y = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}$ en als $x = 4$ is $y = \frac{1}{2} \cdot 4^2 = 8$.

De toename van y is $8 - \frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$

b De gemiddelde toename van y is $7\frac{1}{2} : 3 = 2\frac{1}{2}$

De helling van de lijn door A en B is $\frac{\text{toename van } y}{\text{toename van } x} = \frac{7\frac{1}{2}}{3} = 2\frac{1}{2}$

De helling van de lijn door A en B is gelijk aan de gemiddelde toename van y over het interval $[1, 4]$.

c Als $x = -2$ is $y = \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 = 2$ en als $x = 2$ is $y = \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2$.
De toename van y op het interval $[-2, 2]$ is $2 - 2 = 0$.
De gemiddelde toename van y op $[-2, 2]$ is dan ook 0.

3 **a** $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(45) - s(30)}{45 - 30} = \frac{28{,}24875 - 14{,}58}{15} \approx 0{,}91$

b $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(10) - s(9)}{10 - 9} = \frac{1{,}78 - 1{,}444878}{1} \approx 0{,}335$

In de tiende minuut is zijn gemiddelde snelheid 0,335 km/min.

4 **a** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{1 - 6\frac{1}{4}}{3} = -1\frac{3}{4}$

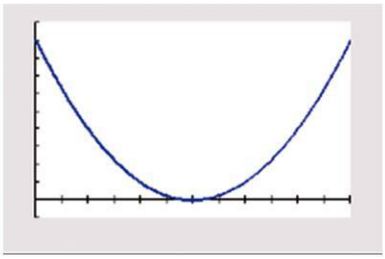
De gemiddelde toename is $-1\frac{3}{4}$

b $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(10) - f(2)}{10 - 2} = \frac{4 - 4}{8} = 0$

Het differentiequotiënt is gelijk aan 0.

© Noordhoff Uitgevers bv

c Invoer: $y_1 = \left(3 - \frac{1}{2}x\right)^2$
Venster: $0 \le x \le 12$, $0 \le y \le 10$



De grafiek is symmetrisch rond de lijn $x = 6$, dus bijvoorbeeld het interval [5, 7], [4, 8] of [1, 11].

5 **a** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{15 - -1}{4} = 4$. Het differentiequotiënt is gelijk aan 4.

b $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1{,}5) - f(-3)}{1{,}5 - -3} = \frac{1 - -17}{4{,}5} = 4$. De gemiddelde toename is 4.

c De functie f is een lineaire functie, dus de grafiek van f is een rechte lijn. De gemiddelde toename is dan over elk interval hetzelfde.

6 **a** Beide fietsers hebben de afstand van 45 km in 3 uur afgelegd, dus is voor beide fietsers de gemiddelde snelheid 45 : 3 = 15 km/h.

b

interval	*gem. snelheid*	*A*	*B*
[1, 2]	$\frac{s(2) - s(1)}{1}$	$\frac{30 - 15}{1} = 15$	$\frac{36 - 21}{1} = 15$
[1; 1.5]	$\frac{s(1{,}5) - s(1)}{0{,}5}$	$\frac{22{,}5 - 15}{0{,}5} = 15$	$\frac{29{,}25 - 21}{0{,}5} = 16{,}5$
[1; 1,1]	$\frac{s(1{,}1) - s(1)}{1}$	$\frac{16{,}5 - 15}{0{,}1} = 15$	$\frac{22{,}77 - 21}{0{,}1} = 17{,}7$
[1; 1,01]	$\frac{s(1{,}01) - s(1)}{1}$	$\frac{15{,}15 - 15}{0{,}01} = 15$	$\frac{21{,}1797 - 21}{0{,}01} = 17{,}97$

c De grafiek van fietser A is een rechte lijn, dus hij heeft een constante snelheid.

d Het laatste antwoord bij opdracht b geeft de beste benadering van de snelheid op tijdstip $t = 1$.

e Deze snelheid zal 18 km/h zijn.

7 **a** Het differentiequotiënt over [2; 2,001] is
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2{,}001) - f(2)}{2{,}001 - 2} \approx \frac{6{,}00075 - 6}{0{,}001} = 0{,}75$
De helling in (2, 6) is ongeveer 0,75.

b Het differentiequotiënt over [−1; −0,999] is
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(-0{,}999) - f(-1)}{-0{,}999 - -1} \approx \frac{3{,}0015 - 3}{0{,}001} = 1{,}5$
De helling in (−1, 3) is ongeveer 1,5.

c Het differentiequotiënt over [7; 7,001] is
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(7{,}001) - f(7)}{7{,}001 - 7} \approx \frac{9{,}0005 - 9}{0{,}001} = 0{,}5$
De helling in (7, 9) is ongeveer 0,5.

© Noordhoff Uitgevers bv

8 **a** Op $t = 2$ is $s = 36$

Op $t = 2{,}001$ is $s = 36{,}011\,997$

$\Delta s = 36{,}011\,997 - 36 = 0{,}011\,997$

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0{,}011\,997}{0{,}001} = 11{,}997$, dus de snelheid op $t = 2$ is ongeveer 12 km/uur.

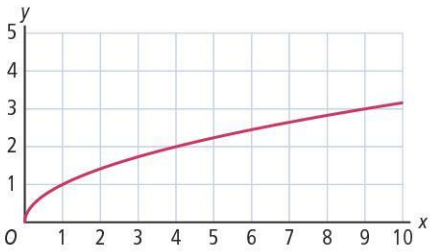
b Op $t = 3$ is $s = 45$

Op $t = 3{,}001$ is $s = 45{,}005\,997$

$\Delta s = 45{,}005\,997 - 45 = 0{,}005\,997$

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0{,}005\,997}{0{,}001} = 5{,}997$, dus de snelheid op $t = 3$ is ongeveer 6 km/uur.

04 **a**



b $y = \sqrt{1} = 1$ en $y = \sqrt{9} = 3$

c $\Delta y = 3 - 1 = 2$

d

	$\Delta x = 8$ ↷	
x	1	9
y	1	3
	↶ $\Delta y = 2$	

e $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

De helling van de lijn is ook $\frac{3-1}{9-1} = \frac{1}{4}$

f $\Delta x = 4 - 1 = 3$ en $\Delta y = \sqrt{4} - \sqrt{1} = 2 - 1 = 1$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{3}$

07 **a** $\Delta y = f(2{,}001) - f(2) =$

$= 2{,}001^2 - 2^2 = 4{,}004\,001 - 4 = 0{,}004\,001$

b $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0{,}004\,001}{0{,}001} = 4{,}001$

c De helling van de grafiek is ongeveer 4.

d $\Delta y = f(-1{,}999) - f(-2) =$

$= (-1{,}999)^2 - (-2)^2 = 3{,}996\,001 - 4 = -0{,}003\,999$

e $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-0{,}003999}{0{,}001} = -3{,}999$

De helling van de grafiek is ongeveer -4.

f $\Delta y = f(3{,}001) - f(3) =$

$= 3{,}001^2 - 3^2 = 9{,}006\,001 - 9 = 0{,}006\,001$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0{,}006001}{0{,}001} = 6{,}001$

De helling van de grafiek is ongeveer 6.

© Noordhoff Uitgevers bv

U1 Het differentiequotiënt over het interval $[4, p]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(p) - f(4)}{p - 4} = \frac{p^2 - 16}{p - 4} = \frac{(p + 4)(p - 4)}{p - 4} = p + 4.$$

Het differentiequotiënt over het interval $[1, 4]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{16 - 1}{3} = 5$$

$p + 4 = 2 \times 5 = 10$

$p = 6$

U2 **a** Het differentiequotiënt over het interval $[3, 4]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = \frac{2^4 - 2^3}{1} = 8$$

Het differentiequotiënt over het interval $[2, 3]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{2^3 - 2^2}{1} = 4$$

Klopt, $8 = 2 \times 4$.

b Het differentiequotiënt over het interval $[p, p + 1]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(p + 1) - f(p)}{p + 1 - p} = \frac{2^{p+1} - 2^p}{1} = 2^{p+1} - 2^p$$

Het differentiequotiënt over het interval $[p + 1, p + 2]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(p + 2) - f(p + 1)}{(p + 2) - (p + 1)} = \frac{2^{p+2} - 2^{p+1}}{1} = 2^{p+2} - 2^{p+1}$$

$2(2^{p+1} - 2^p) = 2^1 \cdot 2^{p+1} - 2^1 \cdot 2^p = 2^{p+2} - 2^{p+1}$, klopt.

5.2 Helling van een grafiek

intro De helling van de glijbaan is steiler bij de nummers 5 en 6.
De helling van de glijbaan is ongeveer gelijk aan de helling van lijn AB bij de nummers 4 en 7.

9 **a** $f(3 + \Delta x) = (3 + \Delta x)^2$

$= (3 + \Delta x)(3 + \Delta x)$

$= 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$

$= 9 + 6 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$

b $\Delta y = f(3 + \Delta x) - f(3) = 9 + 6 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 9 = 6 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$

c $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 \cdot \Delta x}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = 6 + \Delta x$$

d Als Δx steeds kleiner genomen wordt, nadert $6 + \Delta x$ tot 6.

10 $f(4) = 48$

$f(4 + \Delta x) = 3(4 + \Delta x)^2 = 3 \cdot (16 + 8\Delta x + (\Delta x)^2) = 48 + 24\Delta x + 3(\Delta x)^2$

$\Delta y = 48 + 24\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 48 = 24\Delta x + 3(\Delta x)^2$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4 + \Delta x) - f(4)}{\Delta x} = \frac{24\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{24\Delta x}{\Delta x} + \frac{3(\Delta x)^2}{\Delta x} = 24 + 3\Delta x$$

Als $\Delta x \to 0$ is $\frac{dy}{dx} = 24$, dus de helling van de grafiek van f in het punt $(4, 48)$ is 24.

© Noordhoff Uitgevers bv

11 **a** $f(3) = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 7 = -2\frac{1}{2}$

$f(3 + \Delta x) = \frac{1}{2}(3 + \Delta x)^2 - 7 = \frac{1}{2}(9 + 6 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2) - 7$

$= 4\frac{1}{2} + 3 \cdot \Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 - 7 = \frac{1}{2}(\Delta x)^2 + 3 \cdot \Delta x - 2\frac{1}{2}$

$\Delta y = f(3 + \Delta x) - f(3) = \frac{1}{2}(\Delta x)^2 + 3 \cdot \Delta x - 2\frac{1}{2} - \left(-2\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(\Delta x)^2 + 3 \cdot \Delta x$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2}(\Delta x)^2}{\Delta x} + \frac{3 \cdot \Delta x}{\Delta x} = \frac{1}{2}\Delta x + 3$

b Als $\Delta x \to 0$ is $\frac{dy}{dx} = 3$, dus de exacte waarde van helling van de grafiek van f in het punt $\left(3, -2\frac{1}{2}\right)$ is 3.

12 Invoer: $y_1 = 3\sqrt{x + 2}$ en $y_2 = \frac{d(y_1)}{dx}$

Gebruik de tabelfunctie met startwaarde -1 en stapgrootte 1.

X	Y1	Y2
-1	3	1.5
0	4.2426	1.0607
1	5.1962	0.866
2	6	0.75
3	6.7082	0.6708
4	7.3485	0.6124
5	7.9373	0.5669
6	8.4853	0.5303
7	9	0.5
8	9.4868	0.4743
9	9.9499	0.4523

X= -1

13 **a** Invoer: $y_1 = x^3 - 3x^2$.

Gebruik de optie $\frac{dy}{dx}$ voor $x = 1$.

De helling is -3.

b Invoer: $y_1 = x^3 - 3x^2$ en $y_2 = \frac{d(y_1)}{dx}$

Gebruik de tabelfunctie met startwaarde -4 en stapgrootte 1.

X	Y1	Y2
-4	-112	72
-3	-54	45
-2	-20	24
-1	-4	9
0	0	1E-6
1	-2	-3
2	-4	1E-6
3	0	9
4	16	24
5	50	45
6	108	72

X= -4

In $(-4, -112)$ en in $(6, 108)$ is de helling 72.

c In $(0, 0)$ en $(2, -4)$ is de helling 0.

d De toppen van de grafiek van g zijn $(0, 0)$ en $(2, -4)$.
In de toppen is de raaklijn aan de grafiek horizontaal, dus is de helling 0.

© Noordhoff Uitgevers bv

14 **a** $f(1) = 3 \cdot 1^2 - 12 = 3 - 12 = -9$, dus $(1, -9)$ ligt op de grafiek van f.
$y = 6 \cdot 1 - 15 = -9$, dus $(1, -9)$ ligt ook op l.

b Met je rekenmachine bereken je dat de helling van de grafiek in het punt $(1, -9)$ gelijk is aan 6.
De richtingscoëfficiënt van de lijn is 6, dus dit komt overeen.

c $f(-1) = -9$, dus het punt $(-1, -9)$ ligt op de grafiek van f.
In de grafiek van f zie je dat de gevraagde lijn het spiegelbeeld is van de lijn door het punt $(1, 9)$ bij spiegelen in de y-as. De helling van de lijn is dus -6.
De vergelijking is $y = -6x - 15$.

15 **a** $f(-1) = (-1)^2 - 6 \cdot -1 = 7$ en $y = -8 \cdot -1 - 1 = 7$, dus het punt $(-1, 7)$ ligt zowel op de grafiek van f als op de lijn.
$f(-1 + \Delta x) = (-1 + \Delta x)^2 - 6(-1 + \Delta x) =$
$1 - 2 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + 6 - 6 \cdot \Delta x = (\Delta x)^2 - 8 \cdot \Delta x + 7$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^2 - 8 \cdot \Delta x + 7 - 7}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^2 - 8 \cdot \Delta x}{\Delta x} = \Delta x - 8$$
Als $\Delta x \to 0$ is $\frac{dy}{dx} = -8$, dus de helling van de grafiek in $(-1, 7)$ is -8.
De richtingscoëfficiënt van de lijn is ook -8, dus de lijn raakt aan de grafiek van f.

b $f(3 + \Delta x) = (3 + \Delta x)^2 - 6(3 + \Delta x) = 9 + 6 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 18 - 6 \cdot \Delta x = (\Delta x)^2 - 9$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^2 - 9 - (-9)}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = \Delta x$$
Als $\Delta x \to 0$ is $\frac{dy}{dx} = 0$, dus de helling van de grafiek in $(3, -9)$ is 0.

c De lijn $y = -9$ gaat ook door $(0, -9)$ en heeft ook helling 0.

O10 **a** $f(6) = \frac{1}{2} \cdot 6^2 = 18$

b $f(6 + \Delta x) = \frac{1}{2}(6 + \Delta x)^2$
$= \frac{1}{2}(36 + 12 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2)$
$= 18 + 6 \cdot \Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2$

c $\Delta y = f(6 + \Delta x) - f(6) = 18 + 6 \cdot \Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 - 18 = 6 \cdot \Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 \cdot \Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2}{\Delta x} = 6 + \frac{1}{2}\Delta x$$

d Als $\Delta x \to 0$, dan is $\frac{dy}{dx} = 6$

e De helling is 6.

O15 **a** $f(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$ en $y = 4 \cdot 1 - 1 = 3$, dus klopt.

b De helling van l is de richtingscoëfficiënt, dus 4.

c $\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = (1 + \Delta x)^2 + 2(1 + \Delta x) - 3$
$= 1 + 2 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + 2 + 2 \cdot \Delta x - 3 = 4 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{4 \cdot \Delta x}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = 4 + \Delta x$$
Als $\Delta x \to 0$, dan is $\frac{dy}{dx} = 4$.

d Ja, want P ligt zowel op de lijn als op de parabool en beide hebben dezelfde helling in P.

© Noordhoff Uitgevers bv

U3 **a** $(2 + \Delta x)^2 = 4 + 4 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$

b $(2 + \Delta x)^3 = (2 + \Delta x)(2 + \Delta x)^2$
$= (2 + \Delta x)(4 + 4 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2)$
$= 8 + 8 \cdot \Delta x + 2 \cdot (\Delta x)^2 + 4 \cdot \Delta x + 4 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$
$= 8 + 12 \cdot \Delta x + 6 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$

c $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8 + 12 \cdot \Delta x + 6 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 8}{\Delta x} = \frac{12 \cdot \Delta x + 6 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$
$= 12 + 6 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$

Als $\Delta x \to 0$, dan is $\frac{dy}{dx} = 12$. De helling van de grafiek in P is 12.

d De grafiek is puntsymmetrisch in $O(0, 0)$. De helling in $(-2, -8)$ is ook 12.

5.3 De afgeleide functie

intro De grafiek van f heeft helling 25 in het punt met x-coördinaat 5.
De grafiek van g heeft helling 125 in het punt met x-coördinaat 5.

16 **a**

x	$f(x)$	*helling*
0	0	0
1	1	2
2	4	4
3	9	6

b De helling is steeds twee keer zo groot als de x-coördinaat. Een formule waarmee je de helling h van de grafiek van f kunt berekenen, is $h = 2x$.

17 **a** $f(a + \Delta x) = (a + \Delta x)^2$
$= (a + \Delta x)(a + \Delta x)$
$= a^2 + 2a \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$

b **c**
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \frac{a^2 + 2a \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - a^2}{\Delta x} = \frac{2a \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$
$= \frac{2a \cdot \Delta x}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = 2a + \Delta x$

d Als $\Delta x \to 0$, dan nadert het differentiequotiënt $\frac{dy}{dx}$ naar $2a$, dus is de helling van de grafiek van f in het punt $P(a, a^2)$ gelijk aan $2a$.

18 $f'(x) = 2x$, dus de helling in $(\sqrt{3}, 3)$ is $f'(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$.
De helling in $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ is $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot -\frac{1}{2} = -1$.

19 **a** De grafiek bij de formule is een rechte lijn met richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{2}$, dus $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$

b De grafiek van g is een horizontale lijn met helling 0, dus $g'(x) = 0$.

© Noordhoff Uitgevers bv

20 **a** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(a+\Delta x)^3 - a^3}{\Delta x}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(a+\Delta x)^2 + \Delta x(a+\Delta x)^2 - a^3}{\Delta x}$

$= \frac{a(a+\Delta x)^2 - a^3 + \Delta x(a+\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{a((a+\Delta x)^2 - a^2)}{\Delta x} + \frac{\Delta x(a+\Delta x)^2}{\Delta x}$

$= a \cdot \frac{(a+\Delta x)^2 - a^2}{\Delta x} + (a+\Delta x)^2$

b Als $\Delta x \to 0$, nadert $\frac{(a+\Delta x)^2 - a^2}{\Delta x}$ naar $2a$ en $(a+\Delta x)^2$ naar a^2.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nadert dan naar $a \cdot 2a + a^2 = 3a^2$. Dus $g'(x) = 3x^2$.

21 **a** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(a+\Delta x)^4 - a^4}{\Delta x} = \frac{a(a+\Delta x)^3 + \Delta x(a+\Delta x)^3 - a^4}{\Delta x}$

$= \frac{a(a+\Delta x)^3 - a^4 + \Delta x(a+\Delta x)^3}{\Delta x} = \frac{a((a+\Delta x)^3 - a^3) + \Delta x(a+\Delta x)^3}{\Delta x}$

$= \frac{a((a+\Delta x)^3 - a^3)}{\Delta x} + \frac{\Delta x(a+\Delta x)^3}{\Delta x}$

$= a\frac{(a+\Delta x)^3 - a^3}{\Delta x} + (a+\Delta x)^3$

Als $\Delta x \to 0$, nadert $\frac{(a+\Delta x)^3 - a^3}{\Delta x}$ naar $3a^2$ en $(a+\Delta x)^3$ naar a^3.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nadert dan naar $a \cdot 3a^2 + a^3 = 4a^3$, dus $f'(x) = 4x^3$.

b $g'(x) = 10x^9$

22 **a** $f'(x) = 5x^4$ en $g'(x) = 6x^5$

b $f'(1) = 5 \cdot 1^4 = 5$, dus de helling van de grafiek van f in punt $(1, 1)$ is 5.

$g'(1) = 6 \cdot 1^5 = 6$, dus de helling van de grafiek van g in punt $(1, 1)$ is 6.

c Er moet gelden $f'(x) = 80$.

$5x^4 = 80$

$x^4 = 16$

$x = 2$ of $x = -2$

In $(2, 32)$ en in $(-2, -32)$ is de helling van de grafiek van f gelijk aan 80.

23 Er moet gelden $0 < f'(x) < 2$

$f'(x) = 7x^6$

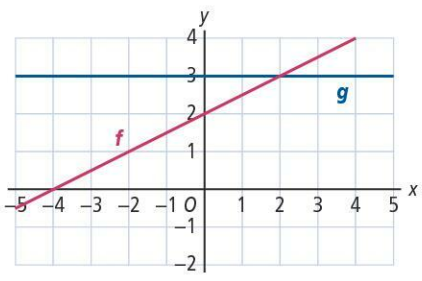
$f'(x) > 0$ geeft $7x^6 > 0$ ofwel $x^6 > 0$, dus $x \neq 0$

$f'(x) < 2$ geeft $7x^6 < 2$ ofwel $x^6 < \frac{2}{7}$, dus $-\sqrt[6]{\frac{2}{7}} < x < \sqrt[6]{\frac{2}{7}}$

Combineren van bovenstaande antwoorden geeft als oplossing

$-0{,}81 < x < 0$ en $0 < x < 0{,}81$.

O19 **a**



© Noordhoff Uitgevers bv

b De helling is $\frac{1}{2}$

c De helling is $\frac{1}{2}$

d De helling is in elk punt $\frac{1}{2}$

e $f'(x) = \frac{1}{2}$

f Zie grafiek bij opdracht a.
De helling is 0, in elk punt is de helling 0, $g'(x) = 0$.

O22 **a** $g'(x) = 4x^3$

b $g(2) = 2^4 = 16$, dus $y = 16$.

c $g'(2) = 4 \cdot 2^3 = 4 \cdot 8 = 32$, dus de helling in $A(2, 16)$ is 32.

U4 $f'(x) = 2x$ en $g'(x) = 3x^2$
$f'(x) = g'(x)$ ofwel $2x = 3x^2$
$x = 0$ of $2 = 3x$
$x = 0$ of $x = \frac{2}{3}$
De helling is $f'\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$ (controle: $g'\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 3 \cdot \frac{4}{9} = 1\frac{1}{3}$ klopt).

U5 **a** $f'(x) = 2x$
De richtingscoëfficiënt van de raaklijn l in $P(2, 4)$ is $f'(2) = 4$.
Het snijpunt van l met de y-as vind je door vanuit P twee naar links te gaan en $2 \cdot 4 = 8$ naar beneden. Dan kom je in het punt $(0, -4)$.

b De richtingscoëfficiënt van de raaklijn l in $P(p, p^2)$ is $f'(p) = 2p$.
Het snijpunt van l met de y-as vind je door vanuit P p naar links te gaan en $p \cdot 2p = 2p^2$ naar beneden. Je komt dan in het punt $(0, -p^2)$.

c De loodlijn in P op l heeft richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{2p}$
Het snijpunt met de y-as vind je door vanuit P p naar links te gaan.
Je moet dan $p \cdot \frac{1}{2p} = \frac{1}{2}$ omhoog. Dan kom je in het punt $\left(0, p^2 + \frac{1}{2}\right)$.

5.4 Regels voor differentiëren

intro Je beweegt je door de gang met een snelheid van $1 + 1{,}5 = 2{,}5$ m/s.
Je beweegt je dan met $1 - 1{,}5 = -0{,}5$ m/s, dat wil zeggen met 0,5 m/s de andere kant op.

24 **a** Door een grafiek omhoog te verschuiven verandert de helling niet, dus die hellingen zijn gelijk.

b Voor elke waarde van x zijn de hellingen van de grafieken van f en g gelijk.
Dus is $f'(x) = g'(x)$.

25 **a** De grafiek van h ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de x-as te vermenigvuldigen met 3.

b Voor elke waarde van x is de helling van de grafiek van h drie keer zo groot als de helling van de grafiek van f.

c $h'(x) = 3 \cdot f'(x)$

d $h'(x) = 3 \cdot 2x = 6x$

© Noordhoff Uitgevers bv

26 **a** Voor f: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{2} = 4$

Voor g: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g(3) - g(1)}{3 - 1} = \frac{27 - 1}{2} = 13$

Voor s: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = \frac{36 - 2}{2} = 17$

b De gemiddelde toename van $s(x)$ over het interval $[1, 3]$ is gelijk aan de som van de gemiddelde toenames van $f(x)$ en $g(x)$ over dat interval.

c $f'(x) = 2x$, dus $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$
$g'(x) = 3x^2$, dus $g'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$

d Met de optie $\frac{dy}{dx}$ vind je $s'(1) = 5$

e $s'(1) = f'(1) + g'(1)$

27 **a** $g'(x) = 3x^2 + 2\frac{1}{2}$

b $k'(p) = -10p^3 + 6p^2$

c $m(t) = (t + 5)(t - 5) = t^2 - 25$
$m'(t) = 2t$

d $s(t) = (10t)^4 = 10\,000t^4$
$s'(t) = 40\,000t^3$

e $f'(x) = 5x^2$

f $g'(x) = 0$

g $h'(x) = \sqrt{2} \cdot 2x = 2\sqrt{2}x$

h $m(x) = -7x - (8 - 3x) = -4x - 8$
$m'(x) = -4$

28 **a** De factor $5x^4$ is de afgeleide van x^5 en de factor $2x - 4$ is de afgeleide van $x^2 - 4x$.

b $k(x) = x^5(x^2 - 4x) = x^7 - 4x^6$
$k'(x) = 7x^6 - 24x^5$

c Nee, hij krijgt $k'(x) = 10x^5 - 20x^4$. Conclusie: eerst haakjes wegwerken!

29 **a** $f'(x) = -12x + 5$
$f'(1) = -12 \cdot 1 + 5 = -7$

b $g'(x) = -15x^4 - 16x$
$g'(1) = -15 \cdot 1^4 - 16 \cdot 1 = -31$

c $h(x) = (2x - 6)(5x + 1)$
$h(x) = 10x^2 + 2x - 30x - 6$
$h(x) = 10x^2 - 28x - 6$
$h'(x) = 20x - 28$
$h'(1) = 20 \cdot 1 - 28 = -8$

d $k(x) = x^2(5 - x^3)$
$k(x) = 5x^2 - x^5$
$k'(x) = 10x - 5x^4$
$k'(1) = 10 \cdot 1 - 5 \cdot 1^4 = 5$

e $l(x) = (7x - 2)^2$
$l(x) = 49x^2 - 28x + 4$
$l'(x) = 98x - 28$
$l'(1) = 98 \cdot 1 - 28 = 70$

f $m(x) = (x^2 + 1)(5x - 8)$
$m(x) = 5x^3 - 8x^2 + 5x - 8$
$m'(x) = 15x^2 - 16x + 5$
$m'(1) = 15 \cdot 1^2 - 16 \cdot 1 + 5 = 4$

30 **a** $f(0) = 5$, dus het snijpunt met de y-as is $(0, 5)$.
$f'(x) = 2x + 6$, dit geeft $f'(0) = 6$.
De helling in $(0, 5)$ is 6.

b Voor de snijpunten met de x-as geldt $f(x) = 0$.
$x^2 + 6x + 5 = 0$
$(x + 1)(x + 5) = 0$
$x + 1 = 0$ of $x + 5 = 0$
$x = -1$ of $x = -5$
$f'(-1) = 2 \cdot -1 + 6 = 4$ en $f'(-5) = 2 \cdot -5 + 6 = -4$
De helling in $(-1, 0)$ is 4 en de helling in $(-5, 0)$ is -4.

© Noordhoff Uitgevers bv

c Er moet gelden $f'(x) = 10$.
$2x + 6 = 10$
$2x = 4$
$x = 2$
$f(2) = 2^2 + 6 \cdot 2 + 5 = 21$, dus $y = 21$
De helling is 10 in punt (2, 21).

d In de top van de grafiek van f is de helling nul.

e Er moet gelden $f'(x) = 0$.
$2x + 6 = 0$
$2x = -6$
$x = -3$
$f(-3) = (-3)^2 + 6 \cdot -3 + 5 = -4$, dus $y = -4$.
De top is het punt $(-3, -4)$.

31 In de top geldt $f'(x) = 0$.
$f'(x) = -6x + 18$
$-6x + 18 = 0$
$-6x = -18$
$x = 3$
$f(3) = -3 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 - 20 = 7$, dus $y = 7$
De top is het punt $(3, 7)$.

32 a De grafiek van g is een lijn met richtingscoëfficiënt 6,75.
De raaklijn in het punt P is evenwijdig is aan de grafiek van g, dus
$f'(x) = 6{,}75$.
$f'(x) = 2x^3$
$2x^3 = 6{,}75$
$x^3 = 3{,}375$
$x = \sqrt[3]{3{,}375} = 1\frac{1}{2}$
$f(1{,}5) = 0{,}5 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^4 + 3 = 5\frac{17}{32}$, dus $y = 5\frac{17}{32}$
P is het punt $\left(1\frac{1}{2}, 5\frac{17}{32}\right)$.

b De helling van de grafiek in het raakpunt is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn, dus $f'(x) = -16$.
$2x^3 = -16$
$x^3 = -8$
$x = -2$
$f(-2) = 0{,}5 \cdot (-2)^4 + 3 = 11$, dus $y = 11$.
Het punt $(-2, 11)$ moet ook op de raaklijn liggen, dus $11 = -16 \cdot -2 + p$
Dit geeft $p = 11 - 32 = -21$.

O29 a $f'(x) = 9x^2 - 8$

b $f'(-1) = 9 \cdot (-1)^2 - 8 = 1$, de helling is 1.

c $g'(x) = 3x^2$
$g'(3) = 3 \cdot 3^2 = 27$, de helling is 27.

d $h'(x) = -5x^4 + 12x^3$
$h'(2) = -5 \cdot 2^4 + 12 \cdot 2^3 = -80 + 96 = 16$, de helling is 16.

e $k(x) = 5x^4 - x^5$
$k'(x) = 20x^3 - 5x^4$
$k'(1) = 20 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^4 = 15$, de helling is 15.

© Noordhoff Uitgevers bv

f $l(x) = 9x^2 - 30x + 25$
$l'(x) = 18x - 30$
$l'(-2) = 18 \cdot -2 - 30 = -66$, de helling is -66.

O30 **a** $f'(x) = x^2 + x - 6$
b $x^2 + x - 6 = 0$
$(x + 3)(x - 2) = 0$
$x + 3 = 0$ of $x - 2 = 0$
$x = -3$ of $x = 2$
c De raaklijn is dan horizontaal, dus de helling is 0.
d $f(-3) = \frac{1}{3} \cdot (-3)^3 + \frac{1}{2} \cdot (-3)^2 - 6 \cdot -3 = -9 + 4\frac{1}{2} + 18 = 13\frac{1}{2}$
$f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 + \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 = 2\frac{2}{3} + 2 - 12 = -7\frac{1}{3}$
De toppen van de grafiek zijn $\left(-3, 13\frac{1}{2}\right)$ en $\left(2, -7\frac{1}{3}\right)$.

U6 De richtingscoëfficiënt van l is gelijk aan $f'(-1)$.
$f'(x) = x + 3$, dus $f'(-1) = -1 + 3 = 2$
$m \perp l$, dus de richtingscoëfficiënt van m is $-\frac{1}{2}$
m raakt de parabool in het punt met helling $-\frac{1}{2}$
$f'(x) = x + 3 = -\frac{1}{2}$ geeft $x = -3\frac{1}{2}$
$f\left(-3\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-3\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot -3\frac{1}{2} - 1 = 6\frac{1}{8} - 10\frac{1}{2} - 1 = -5\frac{3}{8}$
Het raakpunt is $\left(-3\frac{1}{2}, -5\frac{3}{8}\right)$.
Een vergelijking van m is $y = -\frac{1}{2}x + b$.
$-5\frac{3}{8} = -\frac{1}{2} \cdot -3\frac{1}{2} + b$ geeft $b = -5\frac{3}{8} - 1\frac{3}{4} = -7\frac{1}{8}$
Een vergelijking van m is $y = -\frac{1}{2}x - 7\frac{1}{8}$

U7 Uit $f'(x) = x^2 + 2x$ volgt $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + c$.
$f(3) = 7$ geeft $7 = \frac{1}{3} \cdot 3^3 + 3^2 + c$ ofwel $7 = 18 + c$, dus $c = -11$.
$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 11$.

5.5 Maxima en minima

intro Het water bereikte de hoogste stand om 8.30 uur en om 21.00 uur.
Om 8.30 uur stond het water ongeveer 95 cm hoog en om 21.00 uur 100 cm.
Om 17.00 uur ging de waterhoogte over van dalend naar stijgend. Het water stond toen ongeveer 85 cm onder het 0-niveau.

33 **a** $f'(x) = 4x^3 - 4x$
$4x^3 - 4x = 0$
$4x(x^2 - 1) = 0$
$4x = 0$ of $x^2 - 1 = 0$
$x = 0$ of $x^2 = 1$
$x = 0$ of $x = -1$ of $x = 1$
b De raaklijn loopt horizontaal in die punten.
c $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 2 = -1\frac{1}{2}$
De helling is negatief.

© Noordhoff Uitgevers bv

d Uit de grafiek lees je af dat $f'(x) < 0$ als $x < -1$ of $0 < x < 1$.
De helling van de grafiek is voor deze x-waarden negatief.

e Uit de grafiek lees je af dat $f'(x) > 0$ op de intervallen $\langle -1, 0\rangle$ en $\langle 1, \rightarrow\rangle$.

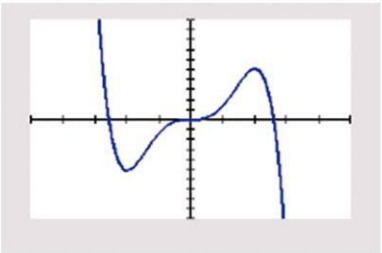
34 **a** $x = -3$ of $x = 1$ of $x = 5$

b $f'(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$
$f'(-3) = -27 - 27 + 39 + 15 = 0$
$f'(1) = 1 - 3 - 13 + 15 = 0$
$f'(5) = 125 - 75 - 65 + 15 = 0$, dus de antwoorden bij opdracht a kloppen.

c Uit de grafiek blijkt, dat f stijgt op de intervallen $[-3, 1]$ en $[5, \rightarrow\rangle$.

35 **a** $g'(x) = 48x^2 - 12x^4$
$48x^2 - 12x^4 = 0$
$12x^2(4 - x^2) = 0$
$x^2 = 0$ of $x^2 = 4$
$x = 0$ of $x = -2$ of $x = 2$

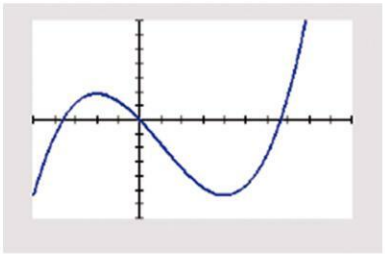
b Invoer: $y_1 = 16x^3 - 2{,}4x^5$
Venster: $-5 \leq x \leq 5$ en $-100 \leq y \leq 100$



Opties: maximum en minimum
De grafiek van g heeft een top bij $x = -2$ en $x = 2$.

c $g(-2) = 16 \cdot -8 - 2{,}4 \cdot -32 = -51{,}2$
$g(2) = 16 \cdot 8 - 2{,}4 \cdot 32 = 51{,}2$

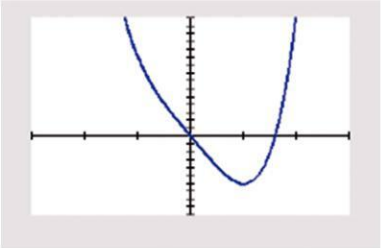
36 **a** $f'(x) = 2x^2 - 4x - 16$
$2x^2 - 4x - 16 = 0$
$x^2 - 2x - 8 = 0$
$(x - 4)(x + 2) = 0$
$x - 4 = 0$ of $x + 2 = 0$
$x = 4$ of $x = -2$
$f(4) = \frac{2}{3} \cdot 64 - 2 \cdot 16 - 16 \cdot 4 = -53\frac{1}{3}$
$f(-2) = \frac{2}{3} \cdot -8 - 2 \cdot 4 - 16 \cdot -2 = 18\frac{2}{3}$



Uit de plot lees je af dat f een maximum $f(-2) = 18\frac{2}{3}$
heeft en een minimum $f(4) = -53\frac{1}{3}$

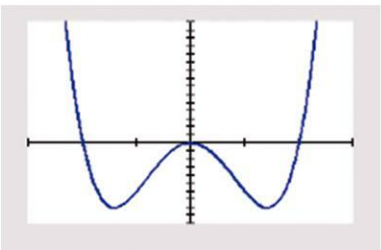
© Noordhoff Uitgevers bv

b $g'(x) = 6$
Er zijn geen extreme waarden,
de grafiek is een rechte lijn.



c $h'(x) = 8x^3 - 8$
$8x^3 - 8 = 0$
$8x^3 = 8$
$x^3 = 1$
$x = 1$
$h(1) = -6$
Uit de plot hiernaast lees je af dat h een
minimum $h(1) = -6$ heeft.

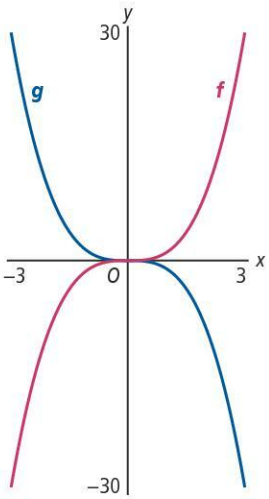
d $k'(x) = 8x^3 - 16x$
$8x^3 - 16x = 0$
$8x(x^2 - 2) = 0$
$8x = 0$ of $x^2 - 2 = 0$
$x = 0$ of $x^2 = 2$
$x = 0$ of $x = \sqrt{2}$ of $x = -\sqrt{2}$
$k(0) = 0$, $k(\sqrt{2}) = -8$ en $k(-\sqrt{2}) = -8$
Uit de plot hiernaast lees je af dat k een maximum $k(0) = 0$
heeft en minima $k(\sqrt{2}) = -8$ en $k(-\sqrt{2}) = -8$.



37 **a** $L(p) = f(p) - g(p) = 4 - p^2 - (2 - p)$ ofwel $L(p) = 2 - p^2 + p$

b $L'(p) = -2p + 1$ en voor het maximum moet $L'(p) = 0$ zijn.
$-2p + 1 = 0$
$-2p = -1$
$p = \frac{1}{2}$
De maximale lengte is $L\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}$

38 Tegenvoorbeeld Ruben: $f(x) = x^3$, zie de grafiek hiernaast.
$f'(x) = 3x^2$
$f'(0) = 0$, maar (0, 0) is geen top.
f heeft geen extreme waarde als $x = 0$
Tegenvoorbeeld Maaike: $g(x) = -x^3$, zie de grafiek hiernaast.
Op het hele domein van g daalt g, want voor elke twee
getallen a en b, $b > a$, geldt dat $g(b) < g(a)$, ook als
a of b nul is, terwijl $g'(0) = 0$.



036 **a** $f'(x) = 3x^2 - 6x$

b $3x^2 - 6x = 0$
$3x(x - 2) = 0$
$3x = 0$ of $x - 2 = 0$
$x = 0$ of $x = 2$

c Voor beide waarden van x heeft de grafiek een top.

d f heeft een maximum $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 = 2$.
f heeft een minimum $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 = 8 - 12 + 2 = -2$.

© Noordhoff Uitgevers bv

O37 **a** De lengte van lijnstuk AC is gelijk aan $f(p) = 2p$.
De lengte van lijnstuk BC is gelijk aan $g(p) = \frac{1}{2}p^2$.

b $L(p) = 2p - \frac{1}{2}p^2$

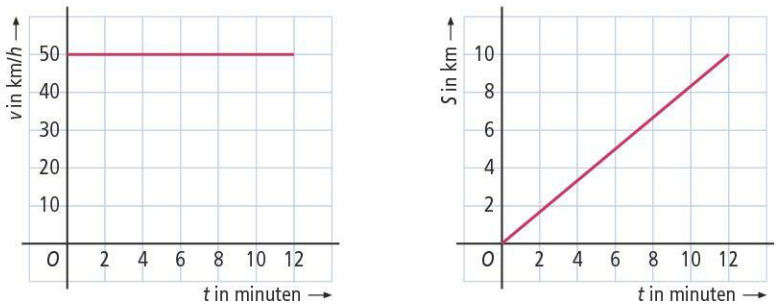
c $L'(p) = 2 - p$
$L'(p) = 0$ geeft $p = 2$

d L heeft een maximum $L(2) = 2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 4 - 2 = 2$

U8 In de toppen is de afgeleide 0.
De afgeleide heeft de vorm $f'(x) = c(x + 4)(x - 2) = c(x^2 + 2x - 8)$
De functie heeft de vorm $f(x) = c\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 8x\right) + d$
$f(0) = 0$ geeft $d = 0$
$f(3) = -3$ geeft $c(9 + 9 - 24) = -3$ ofwel $-6c = -3$, dus $c = \frac{1}{2}$
Het functievoorschrift is $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 8x\right) + 0$ ofwel
$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4x$.

5.6 Raaklijnen en hellinggrafieken

intro



De helling is $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ en die is gelijk aan de snelheid in kilometer per minuut.

39 **a** $f'(x) = 2x - 3$
$a = f'(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$

b $y = x + b$. Invullen van $x = 2$ en $y = -2$ geeft $-2 = 2 + b$, dus $b = -4$.

c $k : y = x - 4$

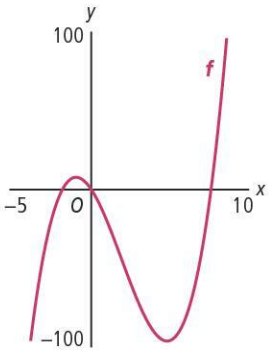
40 **a** $f'(x) = 2x^3$, dus $a = f'(1) = 2 \cdot 1^3 = 2$
Een vergelijking wordt $y = 2x + b$
$x = 1$ en $y = -2{,}5$ invullen geeft $-2{,}5 = 2 \cdot 1 + b$, dus $b = -4{,}5$
Een vergelijking van de raaklijn is $y = 2x - 4{,}5$

b $a = f'(-1) = 2 \cdot (-1)^3 = -2$
Een vergelijking wordt $y = -2x + b$
$f(-1) = 0{,}5 \cdot (-1)^4 - 3 = -2{,}5$
$x = -1$ en $y = -2{,}5$ invullen geeft $-2{,}5 = -2 \cdot -1 + b$, dus $b = -4{,}5$
Een vergelijking van de raaklijn is $y = -2x - 4{,}5$

c $0{,}5x^4 - 3 = 5$ geeft $0{,}5x^4 = 8$
$x^4 = 16$
$x = \sqrt[4]{16} = 2$ of $x = -\sqrt[4]{16} = -2$
$a = f'(2) = 2 \cdot 2^3 = 16$ of $a = f'(-2) = 2 \cdot (-2)^3 = -16$
De vergelijkingen worden $y = 16x + b$ en $y = -16x + b$.
$x = 2$ en $y = 5$ invullen in $y = 16x + b$ geeft $5 = 16 \cdot 2 + b$, dus $b = -27$.
Een vergelijking van de raaklijn in $(2, 5)$ is $y = 16x - 27$.
$x = -2$ en $y = 5$ invullen in $y = -16x + b$ geeft $5 = -16 \cdot -2 + b$, dus $b = -27$.
Een vergelijking van de raaklijn in $(-2, 5)$ is $y = -16x - 27$.

© Noordhoff Uitgevers bv

41 **a** Invoer: $y_1 = x^3 - 6x^2 - 15x$.
Venster: $-5 \le x \le 10$ en $-100 \le y \le 100$
Schets:

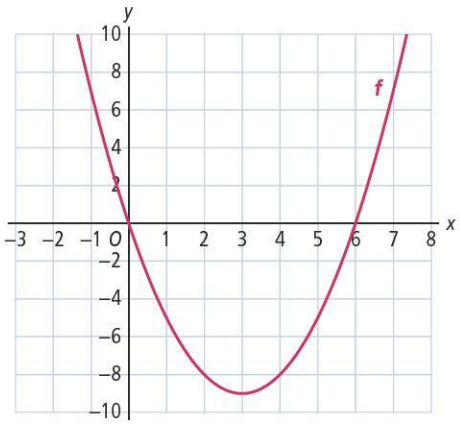


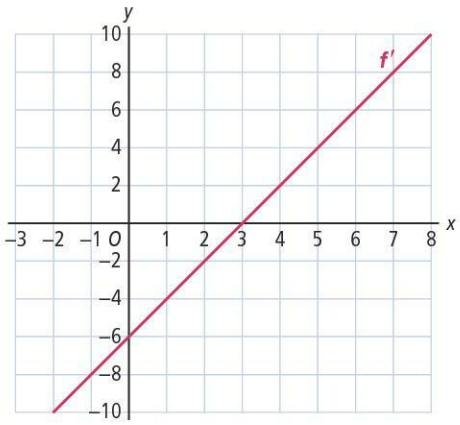
b $f'(x) = 3x^2 - 12x - 15$
$3x^2 - 12x - 15 = 0$
$x^2 - 4x - 5 = 0$
$(x + 1)(x - 5) = 0$
$x + 1 = 0$ of $x - 5 = 0$
$x = -1$ of $x = 5$

c $a = f'(-1) = 0$, zie opdracht b.
Een vergelijking van de raaklijn in P is $y = 8$.

d Er moet gelden $f'(x) = -15$, dus $3x^2 - 12x - 15 = -15$
$3x^2 - 12x = 0$
$x^2 - 4x = 0$
$x(x - 4) = 0$
$x = 0$ of $x - 4 = 0$
$x = 0$ of $x = 4$
$f(0) = 0$ en $f(4) = 64 - 96 - 60 = -92$
De coördinaten zijn $(0, 0)$ en $(4, -92)$.

42 **a** $f'(x) = 2x - 6$
Invoer: $y_1 = x^2 - 6x$ en $y_2 = 2x - 6$.
Venster: $-3 \le x \le 8$ en $-10 \le y \le 10$.





b f stijgt op $[3, \rightarrow\rangle$ en daalt op $\langle \leftarrow, 3]$.

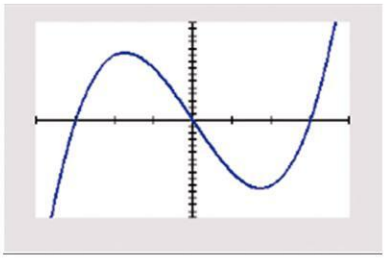
c De grafiek van f' ligt boven de x-as op $[3, \rightarrow\rangle$ en onder de x-as op $\langle \leftarrow, 3]$.

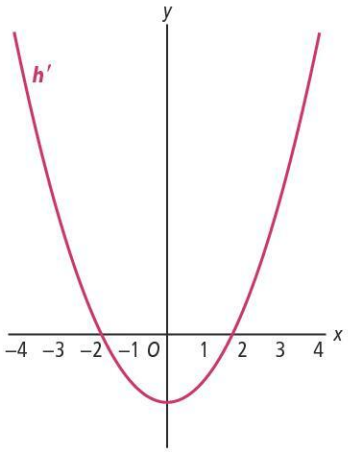
d Als $f'(x) < 0$ daalt f en als $f'(x) > 0$ dan stijgt f'.

e Als de grafiek van f' de x-as snijdt, heeft de grafiek van f een top.

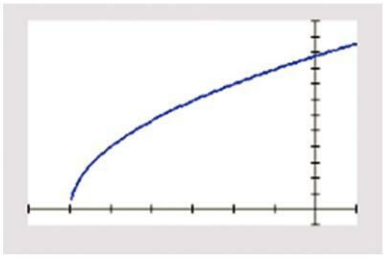
© Noordhoff Uitgevers bv

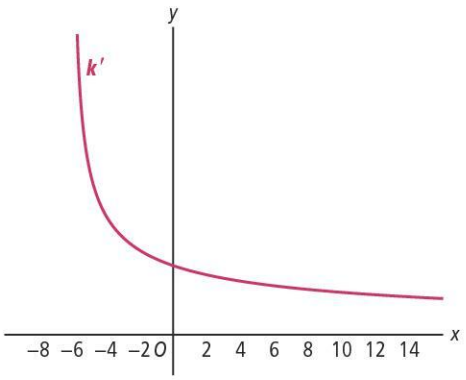
43 **a** Invoer: $y_1 = x^3 - 9x$
Venster: $-4 \le x \le 4$ en $-15 \le y \le 15$



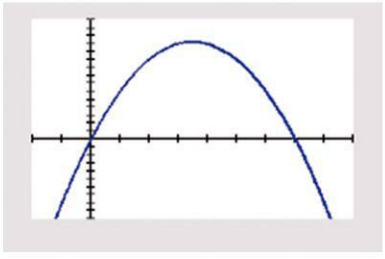


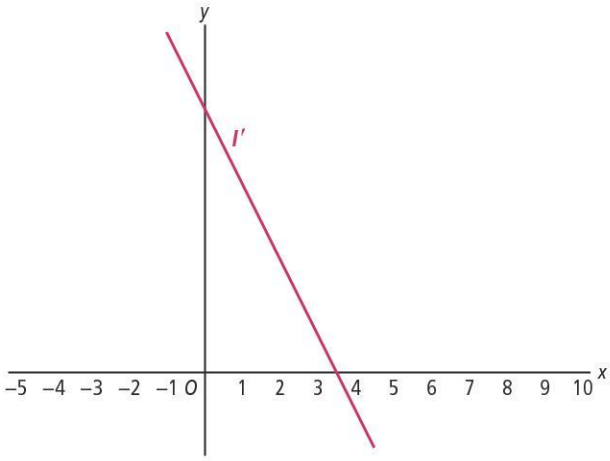
b Invoer: $y_1 = 4\sqrt{x+6}$
Venster: $-7 \le x \le 1$ en $0 \le y \le 12$





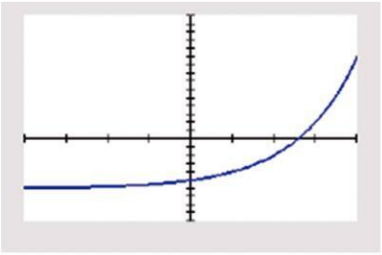
c Invoer: $y_1 = 7x - x^2$
Venster: $-2 \le x \le 9$ en $-10 \le y \le 15$

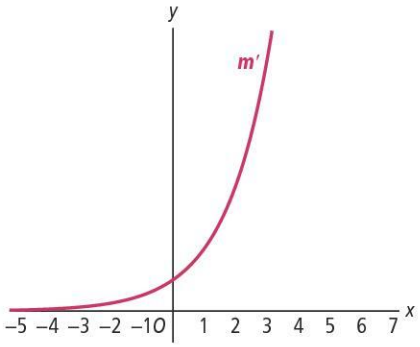




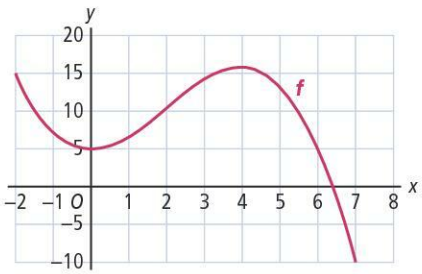
© Noordhoff Uitgevers bv

d Invoer: $y_1 = 2^x - 6$
Venster: $-4 \le x \le 4$ en $-10 \le y \le 15$





44 **a** f stijgt als $f'(x) \ge 0$, dus op het interval $[0, 4]$.
b f daalt als $f'(x) \le 0$, dus op de intervallen $\langle \leftarrow, 0]$ en $[4, \rightarrow \rangle$.
c f heeft een minimum bij $x = 0$, want daar gaat dalen over in stijgen.
d f heeft een maximum bij $x = 4$, want daar gaat stijgen over in dalen.
e Een mogelijke grafiek:



45 **a** De raaklijn heeft richtingscoëfficiënt -4, dus in het raakpunt moet de grafiek ook helling -4 hebben oftewel $f'(x) = -4$.
$f'(x) = x^2 + 6x + 1$
$x^2 + 6x + 1 = -4$
$x^2 + 6x + 5 = 0$
$(x + 1)(x + 5) = 0$
$x + 1 = 0$ of $x + 5 = 0$
$x = -1$ of $x = -5$
$f(-1) = -\frac{1}{3} + 3 - 1 - 4 = -2\frac{1}{3}$ en $f(-5) = -\frac{125}{3} + 75 - 5 - 4 = 24\frac{1}{3}$
De ene raaklijn gaat door $\left(-1, -2\frac{1}{3}\right)$ en de andere raaklijn door $\left(-5, 24\frac{1}{3}\right)$.
$-4 \cdot -1 + c = -2\frac{1}{3}$ geeft $c = -6\frac{1}{3}$.
$-4 \cdot -5 + c = 24\frac{1}{3}$ geeft $c = 4\frac{1}{3}$.
b De functie daalt het snelst f' als een minimum heeft.
De afgeleide van f' is de functie $g(x) = 2x + 6$.
$g(x) = 0$ geeft $x = -3$.
De functie f daalt het snelst bij $x = -3$.

© Noordhoff Uitgevers bv

O40 **a** $f(0) = 0$ en $f(6) = \frac{1}{6} \cdot 6^3 - 36 = 6^2 - 36 = 0$

b $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$

c $f'(6) = \frac{1}{2} \cdot 6^2 - 2 \cdot 6 = \frac{1}{2} \cdot 36 - 12 = 6$

d De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is gelijk aan de helling van de grafiek in A, dus $a = 6$.

e $y = 6x + b$
$x = 6$ en $y = 0$ invullen geeft $0 = 6 \cdot 6 + b$, dus $b = -36$.

f $\frac{1}{2}x^2 - 2x = 6$
$x^2 - 4x - 12 = 0$
$(x + 2)(x - 6) = 0$
$x + 2 = 0$ of $x - 6 = 0$
$x = -2$ of $x = 6$

g $x = -2$, $f(-2) = \frac{1}{6} \cdot -8 - 4 = -5\frac{1}{3}$
P is het punt $(-2, -5\frac{1}{3})$.

h $y = 6x + b$
$x = -2$ en $y = -5\frac{1}{3}$ invullen geeft $-5\frac{1}{3} = 6 \cdot -2 + b$, dus $b = 6\frac{2}{3}$
Een vergelijking van de raaklijn in P is $y = 6x + 6\frac{2}{3}$

U9 **a** Grafiek A is symmetrisch in de verticale as.
Grafiek B is puntsymmetrisch in (0, 0).

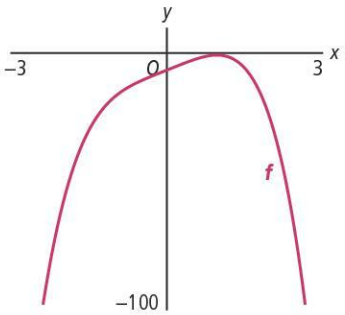
b Grafiek A is de grafiek van de afgeleide, want waar grafiek A boven de x-as ligt, daar heeft grafiek B een positieve helling. Waar grafiek A de x-as snijdt, daar heeft grafiek B een top.

c Het maximum is daar waar de grafiek van f' de x-as snijdt en de helling van positief naar negatief gaat, dus bij $x = 2$.

d $f'(0) = 1$, dus de helling is daar 1.

5.7 Gemengde opdrachten

46 **a** Invoer: $y_1 = -2x^4 + 8x - 7$
Venster: $-3 \leq x \leq 3$ en $-100 \leq y \leq 0$



b $f(0) = -7$, dus het snijpunt van de grafiek met de y-as is $(0, -7)$.
$f'(x) = -8x^3 + 8$, dus $a = f'(0) = 8$.
Het startgetal is $b = -7$, dus een vergelijking van de raaklijn is $y = 8x - 7$.

c $f'(x) = 0$ geeft $-8x^3 + 8 = 0$
$-8x^3 = -8$
$x^3 = 1$
$x = 1$
f heeft een maximum $f(1) = -2 + 8 - 7 = -1$.

© Noordhoff Uitgevers bv

47 **a** $f'(x) = 3x^2 - 16x + 5$
$3x^2 - 16x + 5 = 0$
$a = 3$, $b = -16$ en $c = 5$
$D = 256 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 196$
$x = \dfrac{16 - \sqrt{196}}{6} = \frac{1}{3}$ of $x = \dfrac{16 + \sqrt{196}}{6} = 5$
$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} - 8 \cdot \frac{1}{9} + 5 \cdot \frac{1}{3} + 10 = 10\frac{22}{27}$ en $f(5) = 125 - 8 \cdot 25 + 25 + 10 = -40$
Met behulp van de grafiek: maximum $f\left(\frac{1}{3}\right) = 10\frac{22}{27}$ en minimum $f(5) = -40$.

b $f'(0) = 5$, dus de raaklijn in (0, 10) heeft vergelijking $y = 5x + 10$.
$x^3 - 8x^2 + 5x + 10 = 5x + 10$
$x^3 - 8x^2 = 0$
$x^2(x - 8) = 0$
$x^2 = 0$ of $x - 8 = 0$
$x = 0$ of $x = 8$.
$f(8) = 512 - 512 + 40 + 10 = 50$
Het snijpunt is het punt $P(8, 50)$.

c $f'(8) = 192 - 128 + 5 = 69$
$\tan \angle(\textit{raaklijn in } P, x\text{-}as) = 69$, dus deze hoek is 89,169…°
$\tan \angle(l, x\text{-}as) = 5$, dus deze hoek is 78,690…°
89,169… − 78,690… = 10,47…, dus de hoek tussen deze twee lijnen is 10°.

48 **a** $L'(t) = -0{,}027t$ en $B'(t) = -0{,}05$
$L'(1) = -0{,}027$ cm/maand en $B'(1) = -0{,}05$ cm/maand.
Na één maand krimpt het hout in de breedte sneller, want 0,05 > 0,027.

b Er moet gelden $L'(t) = B'(t)$, dus $-0{,}027t = -0{,}05$.
$t = \dfrac{-0{,}05}{-0{,}027} \approx 1{,}85$
Na 1,85 maanden krimpen de lengte en de breedte met dezelfde snelheid.

49 **a** $O(a) = \frac{1}{2} \cdot \textit{basis} \cdot \textit{hoogte} = \frac{1}{2}a \cdot f(a)$
$O(a) = \frac{1}{2}a(-\frac{1}{8}a^2 + 2a)$
$O(a) = -\frac{1}{16}a^3 + a^2$

b $O'(a) = -\frac{3}{16}a^2 + 2a$
$-\frac{3}{16}a^2 + 2a = 0$
$-3a^2 + 32a = 0$
$-a(3a - 32) = 0$
$a = 0$ of $3a = 32$
$a = 0$ of $a = 10\frac{2}{3}$
Voor $a = 10\frac{2}{3}$ is de oppervlakte maximaal.

Onderzoeksopdrachten

50 **a** $f_c'(x) = 3x^2 + c$
$3x^2 + c = 0$ ofwel $3x^2 = -c$ heeft geen oplossing als $-c < 0$ ofwel $c > 0$.
Als $c = 0$ krijg je de functie $f_0(x) = x^3$ en $f_0'(x) = 3x^2$.
$f_0'(0) = 0$, de grafiek heeft wel een horizontale raaklijn, maar geen extreme waarde bij $x = 0$. Dus voor $c \geq 0$ heeft f_c geen extremen.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $3x^2 = -c$ heeft twee oplossingen als $-c > 0$ ofwel $c < 0$.
Dus voor $c < 0$ heeft f_c twee extreme waarden.

c Deze mogelijkheid doet zich niet voor.

51 **a** Er moet gelden $f'(p) = g'(p)$, dus $2p = g'(p)$.

Plot de grafieken van $y_1 = 2x$, $y_2 = 2^x$ en $y_3 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y_2)_{x=x}$

De grafieken van y_1 en y_3 snijden elkaar twee keer, dus er zijn twee waarden van p waarvoor de helling van de grafiek van f in P gelijk is aan de helling van de grafiek van g in Q, namelijk $p \approx 0{,}485$ en $p \approx 3{,}212$.
Je kunt ook met de tabelfunctie werken.

b Bij $p \approx 0{,}485$ is $P(0{,}49;\ 0{,}24)$ en $Q(0{,}49;\ 1{,}40)$
Bij $p \approx 3{,}212$ is $P(3{,}21;\ 10{,}32)$ en $Q(3{,}21;\ 9{,}27)$

Samenvatting

S1 **a** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(10) - f(3)}{10 - 3} = \frac{494 - 39}{7} = 65$

b $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2{,}1) - f(2)}{0{,}1} = \frac{16{,}05 - 14}{0{,}1} = 20{,}5$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2{,}01) - f(2)}{0{,}01} = \frac{14{,}2005 - 14}{0{,}01} = 20{,}05$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2{,}001) - f(2)}{0{,}001} = \frac{14{,}020005 - 14}{0{,}001} = 20{,}005$

c Het differentaalquotiënt heeft vermoedelijk de waarde 20.

S2 **a** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{4{,}001} - \sqrt{4}}{0{,}001} = 0{,}24998\ldots$

De helling is ongeveer 0,25.

b Met de optie $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ vind je 0,1666…

De helling is ongeveer 0,17.

S3 Over het interval $[2,\ 2 + \Delta x]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4(2 + \Delta x)^2 - 7 - (4 \cdot 2^2 - 7)}{\Delta x} = \frac{4(4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2) - 16}{\Delta x}$$

$$= \frac{16\Delta x + 4(\Delta x)^2}{\Delta x} = 16 + 4\Delta x.$$

Als $\Delta x \to 0$, dan $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 16$, dus de helling in P is 16.

S4 **a** $f'(x) = 111x^{110}$

b $g'(x) = -45$

c $h'(x) = 0$

S5 **a** $f'(x) = x^4 - 6x^2 + 3$

b $g'(x) = 20x^3 - 20x$

© Noordhoff Uitgevers bv

S6 **a** $f'(x) = 9 - 3x^2$
$9 - 3x^2 = 0$
$x^2 = 3$
$x = -\sqrt{3}$ of $x = \sqrt{3}$
$f(-\sqrt{3}) = -9\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = -6\sqrt{3}$ en $f(\sqrt{3}) = 9\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$
Met een plot zie je dat minimum $f(-\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$ en maximum $f(\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$.

b $g'(x) = 5x^4 - 20x^3$
$5x^4 - 20x^3 = 0$
$5x^3(x - 4) = 0$
$5x^3 = 0$ of $x - 4 = 0$
$x = 0$ of $x = 4$
$g(0) = 0$ en $g(4) = 1024 - 1280 = -256$
Met een plot zie je dat maximum $g(0) = 0$ en minimum $g(4) = -256$.

S7 $f'(x) = 9 - 3x^2$
De helling van de grafiek bij $x = 2$ is $f'(2) = 9 - 3 \cdot 2^2 = -3$.
Een vergelijking van de raaklijn is $y = -3x + b$.
$x = 2$ en $y = 10$ invullen geeft $10 = -6 + b$, dus $b = 16$.
Een vergelijking van de raaklijn is $y = -3x + 16$.

S8 **a** f daalt op de intervallen waar de grafiek onder (of op) de x-as ligt:
$\langle \leftarrow, -2]$, $[-1, 0]$ en $[1, 2]$.

b f stijgt op de intervallen waar de grafiek boven (of op) de x-as ligt:
$[-2, -1]$, $[0, 1]$ en $[2, \rightarrow \rangle$.

c f heeft een maximum als de grafiek van f overgaat van stijgen naar dalen, dus als de grafiek van f' van boven de x-as naar onder de x-as gaat. Dat is bij $x = -1$ en $x = 1$.

d f heeft een minimum als de grafiek van f overgaat van dalen naar stijgen, dus als de grafiek van f' van onder de x-as naar boven de x-as gaat. Dat is bij $x = -2$, $x = 0$ en $x = 2$.

Test jezelf

T1 **a** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1{,}1) - f(1)}{0{,}1} = \frac{2{,}30737\ldots - 2}{0{,}1} \approx 3{,}074$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1{,}01) - f(1)}{0{,}01} = \frac{2{,}030074\ldots - 2}{0{,}01} \approx 3{,}007$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1{,}001) - f(1)}{0{,}001} = \frac{2{,}0030007\ldots - 2}{0{,}001} \approx 3{,}001$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1{,}0001) - f(1)}{0{,}0001} = \frac{2{,}000300007\ldots - 2}{0{,}0001} \approx 3{,}000$

b Het differentiequotiënt van f nadert vermoedelijk naar 3.

c De optie $\frac{dy}{dx}$ of nDerive geeft helling 2,999999875.

© Noordhoff Uitgevers bv

d Invoer: $y_1 = 2x\sqrt{x}$ en $y_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y_1)$

X	Y1	Y2
1	2	3
2	5.6569	4.2426
3	10.392	5.1962
4	16	6
5	22.361	6.7082
6	29.394	7.3485
7	37.041	7.9373
8	45.255	8.4853
9	54	9
10	63.246	9.4868
11	72.966	9.9499

X=1

e Het functievoorschrift is waarschijnlijk $f'(x) = 3\sqrt{x}$

T2 **a** $f'(x) = -2x$
De helling is $f'(-1) = 2$.

b $-2x = 6$
$x = -3$
$f(-3) = -9 + 3 = -6$
De coördinaten zijn $(-3, -6)$.

c De helling van de grafiek is -8, dus $f'(x) = -8$.
$-2x = -8$
$x = 4$
$f(4) = -16 + 3 = -13$
Ligt $(4, -13)$ op de lijn $y = -8x + 19$?
$-13 = -8 \cdot 4 + 19$, klopt. Dus de lijn raakt de grafiek.

T3 **a** $p'(x) = -4x^7$

b $d(p) = (3p)^5 = 243p^5$
$d'(p) = 1215p^4$

c $f'(x) = 0{,}2 - 2x^{19}$

d $s(t) = 16t^2 + 32t + 16 - 4$
$s'(t) = 32t + 32$

e $h(t) = 4 - 1\frac{1}{3}t + \frac{1}{9}t^2 + \frac{2}{7}t$
$h(t) = \frac{1}{9}t^2 - 1\frac{1}{21}t + 4$
$h'(t) = \frac{2}{9}t - 1\frac{1}{21}$

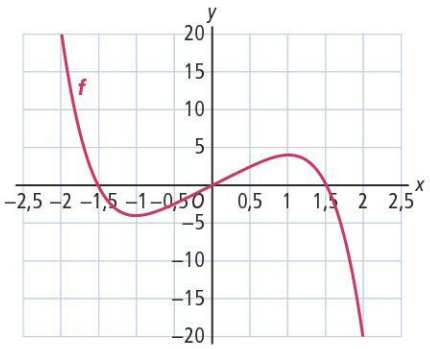
f $N(t) = 9t^2 - 25$
$N'(t) = 18t$

g $A'(u) = -1$

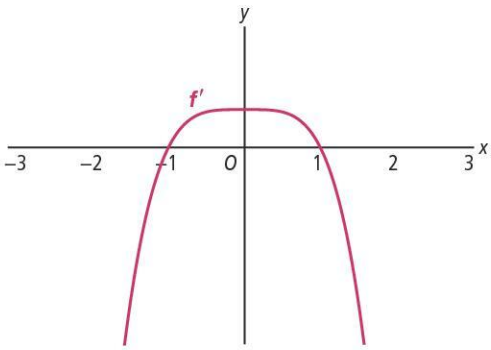
h $h'(r) = 3\pi r^2 - \pi^3$

© Noordhoff Uitgevers bv

T4 **a**

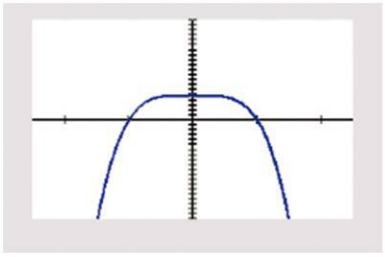


b



c $f'(x) = 5 - 5x^4$

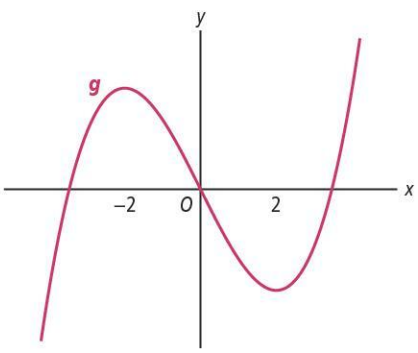
d Invoer: $y_1 = 5 - 5x^4$
Venster: $-2{,}5 \le x \le 2{,}5$ en $-20 \le y \le 20$



e $f'(2) = 5 - 5 \cdot 2^4 = 5 - 5 \cdot 16 = -75$ en $f(2) = 5 \cdot 2 - 2^5 = 10 - 32 = -22$
Een vergelijking van de raaklijn is $y = -75x + b$.
$x = 2$ en $y = -22$ invullen geeft $-22 = -150 + b$, dus $b = 128$.
Een vergelijking van de raaklijn is $y = -75x + 128$.

T5 **a** g heeft een minimum als de grafiek van g overgaat van dalen naar stijgen, dus als de grafiek van g', dus f, van onder de x-as naar boven de x-as gaat.
Dat is bij $x = 2$.
g heeft een maximum als de grafiek van g overgaat van stijgen naar dalen, dus als de grafiek van g', dus f, van boven de x-as naar onder de x-as gaat.
Dat is bij $x = -2$.

b Een mogelijke grafiek:



© Noordhoff Uitgevers bv

T6 **a** De steen raakt de grond als $h = 0$.

$45 - 4,9t^2 = 0$

$t^2 = \frac{45}{4,9}$

$t = \sqrt{\frac{45}{4,9}} = 3,0304 \ldots$

$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{0 - 45}{3,0304 \ldots} \approx -14,8$

De gemiddelde valsnelheid is ongeveer 14,8 m/s.

b $\frac{dh}{dt} = -9,8t$

Voor $t = 3,0304 \ldots$ is $\frac{dh}{dt} = -9,8 \cdot 3,0304 \ldots = -29,698 \ldots$

De snelheid van de steen is ongeveer 29,7 m/s.

c $-9,8t = -14,9$

$t = \frac{14,9}{9,8} \approx 1,5$

Op $t \approx 1,5$ seconde is de snelheid van de steen gelijk aan de gemiddelde snelheid.

T7 **a** $f'(x) = 3x^3 - 6x^2$

$3x^3 - 6x^2 = 0$

$3x^2(x - 2) = 0$

$3x^2 = 0$ of $x - 2 = 0$

$x = 0$ of $x = 2$.

$f(0) = 0$ en $f(2) = \frac{3}{4} \cdot 16 - 2 \cdot 8 = -4$

De punten met een horizontale raaklijn zijn $(0, 0)$ en $(2, -4)$.

b Uit de grafiek: f heeft een minimum $f(2) = -4$.

c $\frac{3}{4}x^4 - 2x^3 = -x^2$

$3x^4 - 8x^3 + 4x^2 = 0$

$x^2(3x^2 - 8x + 4) = 0$

$x = 0$ of $3x^2 - 8x + 4 = 0$

$D = 64 - 48 = 16$

$x = 0$ of $x = \frac{8 + \sqrt{16}}{6} = 2$ of $x = \frac{8 - \sqrt{16}}{6} = \frac{2}{3}$

$g(0) = 0$, $g(2) = -4$ en $g\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{9}$.

De snijpunten zijn $(0, 0)$, $(2, -4)$ en $\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{9}\right)$.

d in $(0, 0)$:

$f'(0) = 0$, dus de raaklijn loopt horizontaal.

$g'(0) = 0$, dus ook deze raaklijn loopt horizontaal.

In $(0, 0)$ maken de raaklijnen een hoek van 0° met elkaar.

in $(2, -4)$:

$f'(2) = 0$, dus de raaklijn loopt horizontaal.

$g'(2) = -4$

$\tan(\alpha) = 4$ geeft $\alpha = 75,963\ldots°$

In $(2, -4)$ maken de raaklijnen een hoek van ongeveer 76° met elkaar.

in $\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{9}\right)$:

$f'\left(\frac{2}{3}\right) = -1\frac{7}{9}$

$\tan(\alpha) = 1\frac{7}{9}$ geeft $\alpha = 60,642\ldots°$

$g'\left(\frac{2}{3}\right) = -1\frac{1}{3}$

© Noordhoff Uitgevers bv

$\tan(\alpha) = 1\frac{1}{3}$ geeft $\alpha = 53{,}130\ldots°$
$60{,}642\ldots - 53{,}130 = 7{,}511\ldots$
In $\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{9}\right)$ maken de raaklijnen een hoek van ongeveer 8° met elkaar.

T8 $g(a) = h(a)$ en $g'(a) = h'(a)$

Extra oefening

E1 **a** Over het interval $[-1; -0{,}999]$ is
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(-0{,}999) - f(-1)}{0{,}001} = \frac{4{,}496\ldots - 4{,}5}{0{,}001} \approx -3{,}65$
De helling in $(-1; 4{,}5)$is ongeveer $-3{,}65$.

b Met de optie $\frac{dy}{dx}$ op je rekenmachine: de helling in (4, 0) is ongeveer 7,09.

E2 **a** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2}(1+\Delta x)^2 + 4{,}5 - (\frac{1}{2} + 4{,}5)}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2}(1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - \frac{1}{2})}{\Delta x}$

$= \frac{\Delta x + \frac{1}{2} \cdot (\Delta x)^2}{\Delta x} = 1 + \frac{1}{2}\Delta x$

b Als $\Delta x \to 0$ is $\frac{dy}{dx} = 1$, dus de helling van de grafiek in (1,5) is 1.

E3 **a** $f'(x) = 17x^{16}$
b $f'(x) = -3$
c $f'(x) = 0$
d $f'(x) = 2020x^{2019}$

E4 **a** $f'(x) = -7$
b $h'(x) = -6x + 5x^3 - 3000x^4$
c $f(t) = 8t^2 + 18t - 18$
$f'(t) = 16t + 18$
d $g(t) = 25t^2 - 90t + 81$
$g'(t) = 50t - 90$

E5 **a** $f'(x) = 3x^2 - 6x$
$3x^2 - 6x = 0$
$3x(x - 2) = 0$
$3x = 0$ of $x - 2 = 0$
$x = 0$ of $x = 2$
$f(0) = 0$ en $f(2) = 8 - 12 = -4$
Uit een plot blijkt dat f een maximum $f(0) = 0$ heeft en een minimum $f(2) = -4$.

b $k'(x) = 6x^2 + 1\frac{1}{2}x^4$

$6x^2 + 1\frac{1}{2}x^4 = 0$

$x^2(6 + 1\frac{1}{2}x^2) = 0$

$x^2 = 0$ of $6 + 1\frac{1}{2}x^2 = 0$

$x = 0$ ($6 + 1\frac{1}{2}x^2 = 0$ heeft geen oplossingen)
Uit de plot blijkt dat k geen extreme waarden heeft.

© Noordhoff Uitgevers bv

E6 $f'(x) = 1\frac{1}{2}x^2 - 8$

$f'(1) = 1\frac{1}{2} - 8 = -6\frac{1}{2}$

Een vergelijking van de raaklijn is $y = -6\frac{1}{2}x + b$.

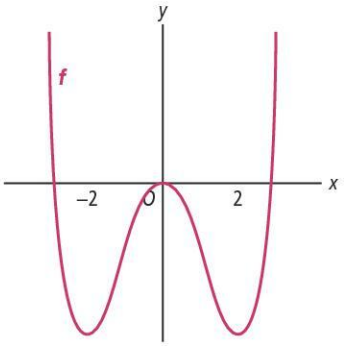
$f(1) = -7\frac{1}{2}$

$x = 1$ en $y = -7\frac{1}{2}$ invullen geeft $-7\frac{1}{2} = -6\frac{1}{2} \cdot 1 + b$, dus $b = -1$.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = -6\frac{1}{2}x - 1$.

E7 **a** f stijgt op de intervallen waar de grafiek boven (of op) de x-as ligt, dus op de intervallen $[-2, 0]$ en $[2, \rightarrow\rangle$.

b Een mogelijke grafiek:



E8 **a** Op $t = 0$ is $s = 0$.

Op $t = 60$ is $s = \dfrac{20 \cdot 60^2}{3 \cdot 60 + 20} = \dfrac{72000}{200} = 360$.

De gemiddelde snelheid is $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{360 - 0}{60} = 6$ m/s.

b Op $t = 10{,}01$ is $s = 40{,}056..$; op $t = 10$ is $s = 40$.

$\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{0{,}056}{0{,}01} = 5{,}6$. Na 10 seconden is de snelheid van Jos ongeveer 5,6 m/s.

c Op $t = 60{,}001$ is $s = 360{,}0066$; op $t = 60$ is $s = 360$.

De snelheid van Jos is $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{0{,}0066}{0{,}001} = 6{,}6$ m/s, dat is ongeveer 23,8 km/h.

E9 $f'(x) = x^2 - 6x + 5$

$x^2 - 6x + 5 = 12$

$x^2 - 6x - 7 = 0$

$(x + 1)(x - 7) = 0$

$x + 1 = 0$ of $x - 7 = 0$

$x = -1$ of $x = 7$

$f(-1) = -\frac{1}{3} - 3 - 5 = -8\frac{1}{3}$ en $f(7) = \frac{1}{3} \cdot 343 - 3 \cdot 49 + 35 = 2\frac{1}{3}$

In de punten $\left(-1, -8\frac{1}{3}\right)$ en $\left(7, 2\frac{1}{3}\right)$ is de helling 12.

© Noordhoff Uitgevers bv

E10 **a** De helling van de grafiek van f moet gelijk zijn aan de richtingscoëfficiënt van l, dus 14.
$f'(x) = 3x^2 - 6x + 5$
$3x^2 - 6x + 5 = 14$
$3x^2 - 6x - 9 = 0$
$x^2 - 2x - 3 = 0$
$(x + 1)(x - 3) = 0$
$x + 1 = 0$ of $x - 3 = 0$
$x = -1$ of $x = 3$
$f(-1) = -1 - 3 - 5 + 3 = -6$ en $f(3) = 27 - 27 + 15 + 3 = 18$
$(-1, -6)$ ligt niet op l.
Ligt $(3, 18)$ op l? Invullen geeft $18 = 14 \cdot 3 - 24$.
Dat klopt, dus l raakt de grafiek van f.

b $f(0) = 3$, het snijpunt met de y-as is $(0, 3)$.
$f'(0) = 5$, de vergelijking van de raaklijn is $y = 5x + 3$.

c De kleinste helling is als $f'(x) = 3x^2 - 6x + 5$ een minimum heeft.
Zie opdracht a, het minimum is bij $x = 1$. $f(1) = 6$, dus in $(1, 6)$.

E11 **a** Als $x = 5$ zijn lengte en breedte beide $60 - 5 - 5 = 50$ cm.
De hoogte is 5 cm, dus de inhoud is $50 \cdot 50 \cdot 5 = 12\,500$ cm^3.
De oppervlakte is $50 \cdot 50 + 4 \cdot 50 \cdot 5 = 3500$ cm^2.

b Lengte en breedte zijn beide $60 - 2x$, dus $A = (60 - 2x)^2$.

c De hoogte h is x, dus de inhoud is $I = h \cdot A = x(60 - 2x)^2$.

d $I = x(3600 - 240x + 4x^2)$
$I = 4x^3 - 240x^2 + 3600x$
$\frac{dI}{dx} = 12x^2 - 480x + 3600 = 12(x^2 - 40x + 300)$
$\frac{dI}{dx} = 0$ geeft $12(x - 10)(x - 30) = 0$
$x - 10 = 0$ of $x - 30 = 0$
$x = 10$ of $x = 30$
Bij $x = 30$ is het niet mogelijk een bakje te vouwen.
Bij $x = 10$ is de inhoud maximaal en die is $40 \cdot 40 \cdot 10 = 16\,000$cm^3.

© Noordhoff Uitgevers bv

6 Periodieke functies

Voorkennis

V1 $AD = \sqrt{6^2 - \left(\sqrt{20}\right)^2} = \sqrt{36 - 20} = \sqrt{16} = 4$

$BC = \sqrt{\left(\sqrt{20}\right)^2 + 7^2} = \sqrt{20 + 49} = \sqrt{69}$

V2 $\cos \angle Q = \frac{8}{9}$, dus $\angle Q = \cos^{-1}\left(\frac{8}{9}\right) \approx 27°$

$PR = \sqrt{9^2 - 8^2} = \sqrt{81 - 64} = \sqrt{17}$

$\tan \angle D = \frac{\sqrt{17}}{1{,}5}$, dus $\angle D = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{17}}{1{,}5}\right) \approx 70°$

$\angle M = 180° - 90° - 65° = 25°$

$\sin(65°) = \frac{MN}{15}$, dus $MN = 15 \cdot \sin(65°) \approx 13{,}6$

$\cos(65°) = \frac{SN}{15}$, dus $SN = 15 \cdot \cos(65°) \approx 6{,}3$

V3 **a** De tijd tussen twee maxima is 5 seconden.

b De gemiddelde waterhoogte is $\frac{1{,}80 + 3{,}00}{2} = 2{,}40$ meter.
Deze wordt bereikt op $t = 1$ uur, $t = 3{,}5$ uur, $t = 6$ uur, enzovoort.

c Het grootste verschil is $3{,}00 - 2{,}40 = 0{,}60$ meter.

V4 **a** De evenwichtsstand is $w = \frac{4{,}6 - 3{,}8}{2} = 0{,}4$ meter.
De amplitude is $4{,}6 - 0{,}4 = 4{,}2$ meter.
De periode is ongeveer 13 uur.

b De evenwichtsstand wordt 75 cm lager.
De amplitude en de periode blijven gelijk.

c De factor is 1,20.

6.1 Radialen

intro In één minuut draait het reuzenrad over $360 : 30 = 12°$.
De hoogte is minimaal $67{,}5 + 67{,}5 \cdot \sin(30°) = 101{,}25$ meter.

1 **a** De omtrek is $2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi \approx 6{,}28$ meter.

b De snelheid is 1 meter per seconde, dus één omwenteling duurt dan $2\pi \approx 6{,}28$ seconden.

c P is dan over een halve cirkel gedraaid en bevindt zich links op gelijke hoogte met de as van het wiel.

d Het hoogste punt is na een kwart rondje dus na $\frac{1}{4} \cdot 2\pi \approx 1{,}57$ seconden.

2 **a** Als $x = \pi$ dan heeft P een halve cirkel afgelegd, dus $\alpha = 180°$.
Als $x = 2\pi$ dan heeft P een hele cirkel afgelegd, dus $\alpha = 360°$.

b Als $x = \pi$, dan is $\alpha = 180°$ en $\frac{1}{4}\pi$ is $\frac{1}{4}$ deel daarvan, dus $\frac{1}{4} \cdot 180° = 45°$.

c $\alpha = \frac{5}{12} \cdot 180° = 75°$

d $\alpha = \frac{1}{\pi} \cdot 180° = \left(\frac{180}{\pi}\right)° \approx 57{,}30°$

© Noordhoff Uitgevers bv

3

aantal graden	0	30	45	60	90	180
aantal radialen	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	π

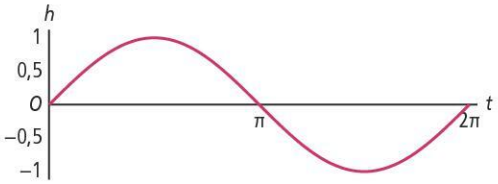
4

aantal graden	6	15	57	60	115	107	172
aantal radialen	0,1	0,26	1	1,05	2	1,87	3

5 **a** $t = \pi$ seconden, $t = 2\pi$ seconden

b $t = 1\frac{1}{2}\pi$ seconden

c De periode is 2π seconden.

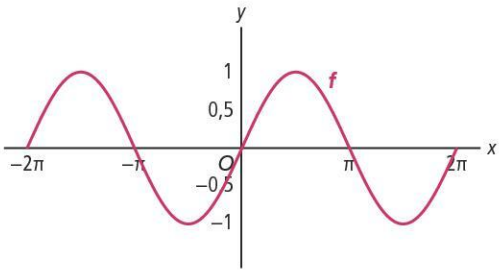


6 **a** $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ rad of $\alpha = 30°$

b $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{h}{1} = \frac{y_P}{1} = y_P$, dus $y_P = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$

c $y_P = \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) \approx 0{,}87$

7 **a**



b $\sin\left(-1\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$

$\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

c Een hoek van $\frac{2}{3}\pi$ (in positieve richting) komt op hetzelfde neer als een hoek van $1\frac{1}{3}\pi$ in negatieve richting, dus als een hoek van $-1\frac{1}{3}\pi$. In beide gevallen kom je in hetzelfde punt P op de cirkel uit.

04 **a** 360° oftewel 2π radialen.

b π radialen

c Bij de bovenste verhoudingstabel : 18 en bij de onderste : 2π

d

hoek in graden	180°	10°	75°
hoek in radialen	π	0,174…	1,31

hoek in graden	180°	28,647…°	229°
hoek in radialen	π	0,5	4

07 **a** $-\frac{5}{6}\pi$

b $-1\frac{1}{6}\pi$ hoort bij punt Q en $-1\frac{5}{6}\pi$ hoort bij punt P.

c Dat is vanaf $-1\frac{1}{6}\pi$ nog één volledige draai (2π) in negatieve draairichting. Je komt dan weer opnieuw in hetzelfde punt Q uit.

© Noordhoff Uitgevers bv

d $\sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

$\sin\left(-1\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$

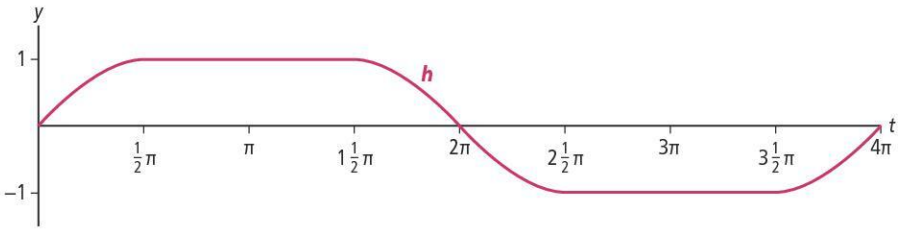
e Een hoek van $1\frac{2}{3}\pi$ in positieve richting komt overeen met een hoek van $\frac{1}{3}\pi$ in negatieve richting, dus met een hoek van $-\frac{1}{3}\pi$. In beide gevallen kom je in hetzelfde punt P op de cirkel uit.

U1 **a** $x_S = \frac{1}{2}\pi + 1$, dus $S\left(\frac{1}{2}\pi + 1, 0\right)$

b 1 ronde duurt $2\pi + 2\pi = 4\pi$ seconden.

In één uur doorloopt het punt deze baan $\frac{3600}{4\pi} \approx 286$ keer.

c

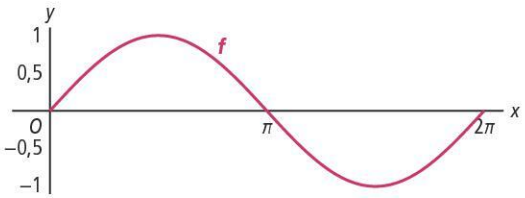


6.2 Sinusfunctie

intro De hoek van de grote wijzer met de horizontale lijn door het midden is dan 30° ofwel $\frac{1}{6}\pi$ rad. De afstand is $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$ meter.

Om vijf voor zes is deze hoek 60° ofwel $\frac{1}{3}\pi$ rad. De afstand is dan $\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 0{,}866\ldots$ meter, dus ongeveer 87 cm.

8 a



b De toppen zijn $\left(\frac{1}{2}\pi, 1\right)$ en $\left(1\frac{1}{2}\pi, -1\right)$.

c Het punt van symmetrie is $(\pi, 0)$.

d Op het interval $[0, 3\pi]$ is de grafiek symmetrisch in de lijn $x = 1\frac{1}{2}\pi$.

e De periode van f is 2π.

f Bij $x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = 2\frac{1}{2}\pi$ heeft de grafiek van f een top. De grafiek van f (met domein $\mathbb{R}$) is symmetrisch in elke verticale lijn door een van de toppen.

9 a Het domein is $\mathbb{R}$.

Het bereik is $[-1, 1]$.

b $x = 2\frac{1}{2}\pi$ en $x = 101\frac{1}{2}\pi$, want dat zijn verticale lijnen door de toppen.

c $(3\pi, 0)$, $(34\pi, 0)$ en $(-53\pi, 0)$, want dat zijn snijpunten van de grafiek met de x-as.

d In $[0, 1000\pi]$ passen $1000\pi : 2\pi = 500$ perioden en in $[0, 1000]$ passen $1000 : 2\pi \approx 159$ perioden.

e $f\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = -1$ $\quad$ $f(5\pi) = 0$

$f(-2\pi) = 0$ $\quad$ $f\left(8\frac{1}{2}\pi\right) = f\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1$

$f\left(-6\frac{1}{2}\pi\right) = f\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = -1$ $\quad$ $f(18\pi) = 0$

© Noordhoff Uitgevers bv

10 **a** De stelling van Pythagoras in driehoek ACD geeft $CD = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

b $\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

c $\angle ACD = \frac{\frac{1}{3}\pi}{2} = \frac{1}{6}\pi$, dus $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2}$

11 **a** $\angle R = \pi - \angle Q - \angle P = \pi - \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{4}\pi$

Dus $\angle R = \angle P$ en $\triangle PQR$ is gelijkbenig, daaruit volgt $QR = PQ = 1$.

$PR = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

b $\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{QR}{PR} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

c $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

12 **a** $\sin\left(2\frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$

b $\sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

$\sin\left(7\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

13 **a** $\sin\left(-1\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$

b $\sin\left(1\frac{1}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

c $\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = -\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

d $\sin\left(2\frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

e $\sin(-3\pi) = 0$

f $\sin\left(2\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

O10 **a** Omdat de driehoek gelijkzijdig is, zijn alle hoeken even groot, 60° of $\frac{1}{3}\pi$ rad.

b Pythagoras in driehoek ACD geeft $CD^2 = 2^2 - 1^2 = 3$, dus $CD = \sqrt{3}$.

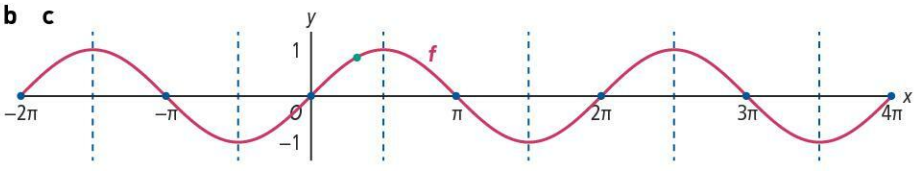
c $\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \sin(\angle A) = \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

d $\angle ACD = \angle BCD = \frac{\frac{1}{3}\pi}{2} = \frac{1}{6}\pi$

e De hoogtelijn CD deelt zijde AB doormidden, dus $AD = 1$.

$\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \sin(\angle ACD) = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2}$

O13 **a** **b** **c**



d Behalve $\left(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ zijn dat $\left(-1\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, $\left(-1\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, $\left(2\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ en $\left(2\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.

e $\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = -\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

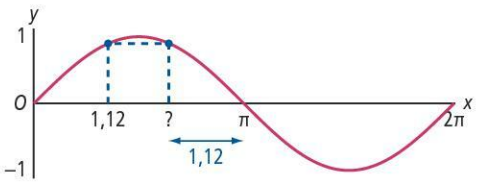
© Noordhoff Uitgevers bv

f $\sin\left(3\frac{1}{4}\pi\right) = \sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

g $\sin\left(-1\frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

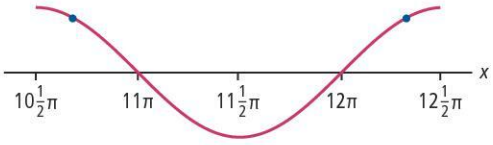
h $\sin\left(3\frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -1$

U2 **a**



$\sin(1{,}12) = \sin(\pi - 1{,}12) = \sin(-1{,}12 + \pi)$

b



$x = -1{,}12 + 11\pi$ of $x = 1{,}12 + 12\pi$

U3 **a** $\sin\left(4\frac{7}{12}\pi\right) = \sin\left(\frac{7}{12}\pi\right) = \sin\left(\frac{5}{12}\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6}$

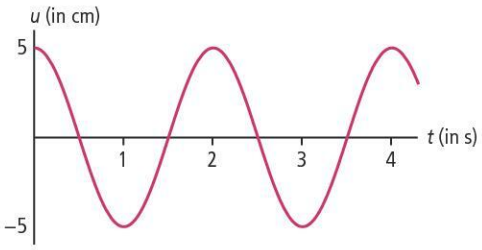
b $\sin\left(-\frac{5}{12}\pi\right) = -\sin\left(\frac{5}{12}\pi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6}$

c $\sin\left(1\frac{5}{12}\pi\right) = \sin\left(-\frac{7}{12}\pi\right) = -\sin\left(\frac{7}{12}\pi\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6}$

d $\sin\left(-3\frac{7}{12}\pi\right) = \sin\left(\frac{5}{12}\pi\right) = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6}$

6.3 Cosinusfunctie

intro



14 **a** $\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$

b $\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

c $\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, dus $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

15 **a** De sinusgrafiek heeft een top bij $\left(\frac{1}{2}\pi, 1\right)$, de cosinusgrafiek bij $(0, 1)$, dus ja Bart heeft gelijk.

b Bijvoorbeeld $1\frac{1}{2}\pi$ naar rechts.

c Bijvoorbeeld $\frac{1}{2}\pi$ of $2\frac{1}{2}\pi$ naar rechts, of $1\frac{1}{2}\pi$ naar links.

© Noordhoff Uitgevers bv

16 **a** $\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$

b $\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

c $\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{PQ}{PR} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

d $\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{BC}{AC}$ en ook $\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{BC}{AC}$, dus $\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)$

$\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{AB}{AC}$ en ook $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{AB}{AC}$, dus $\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)$

17 **a** Dat volgt uit de lijnsymmetrie in de verticale lijn door de top (0, 1), de y-as.

b $\cos\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

c Dat kun je afleiden uit de puntsymmetrie in $\left(\frac{1}{2}\pi, 0\right)$.

d $\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

18 **a** Die kun je afleiden met de periodiciteit 2π van de grafiek van de cosinus.

$\cos\left(2\frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$

b $\cos\left(8\frac{1}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

c $\cos\left(5\frac{1}{6}\pi\right) = \cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

19 **a** $\cos\left(-1\frac{5}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

b $\cos\left(1\frac{1}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

c $\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

d $\cos\left(3\frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = 0$

e $\cos\left(-2\frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(-\frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$

f $\sin\left(3\frac{2}{3}\pi\right) = \sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

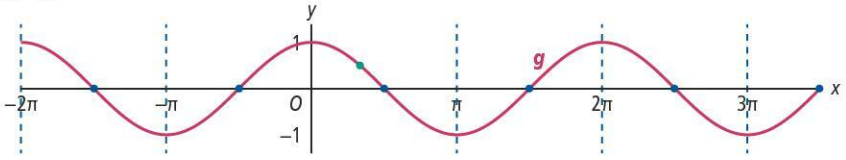
g $\cos\left(-1\frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

h $\sin\left(2\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

i $\cos\left(4\frac{1}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

j $\sin\left(-5\frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$

O18 **a** **b** **c**



d $\left(-1\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\right), \left(1\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{2}\right)$ en $\left(2\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\right)$

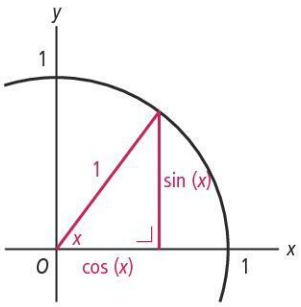
e $\left(-1\frac{1}{3}\pi, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{2}\right), \left(1\frac{1}{3}\pi, -\frac{1}{2}\right), \left(2\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{2}\right)$ en $\left(3\frac{1}{3}\pi, -\frac{1}{2}\right)$

f $\cos\left(2\frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$ en $\cos\left(-1\frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$

g $\cos\left(6\frac{1}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

© Noordhoff Uitgevers bv

U4 **a**



Uit de stelling van Pythagoras volgt $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$.

b $\left(\frac{5}{13}\right)^2 + (\cos(a))^2 = 1$

$(\cos(a))^2 = \frac{144}{169}$

$\cos(a) = \frac{12}{13}$ of $\cos(a) = -\frac{12}{13}$

U5 **a** $\cos(2x) = -\frac{1}{2}$

$2x = \frac{2}{3}\pi$ of $2x = \frac{4}{3}\pi$

dus $x = \frac{1}{3}\pi$ of $x = \frac{2}{3}\pi$

b $x = \frac{1}{3}\pi$ substitueren geeft $1 - 2\left(\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 = 1 - 2 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{2}{3}\pi$ substitueren geeft $1 - 2\left(\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)^2 = 1 - 2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 = 1 - 2 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$

c $\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 1 - 2\left(\sin\left(\frac{1}{12}\pi\right)\right)^2$

$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 1 - 2\left(\sin\left(\frac{1}{12}\pi\right)\right)^2$

$2\left(\sin\left(\frac{1}{12}\pi\right)\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

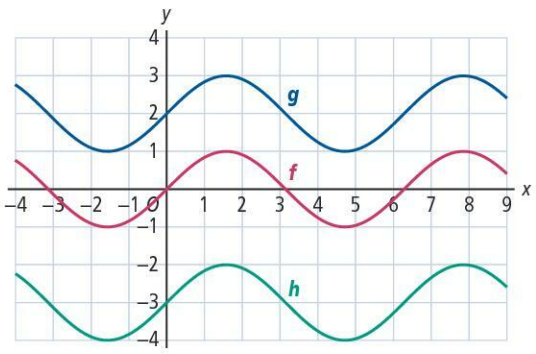
$\left(\sin\left(\frac{1}{12}\pi\right)\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3}$

$\sin\left(\frac{1}{12}\pi\right) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3}}$

6.4 Transformaties

intro De periode bij toonhoogte A is $1\frac{1}{2}$ keer zo groot als bij toonhoogte D, de amplitude en periode zijn voor beide toonhoogtes gelijk.

20 **a**

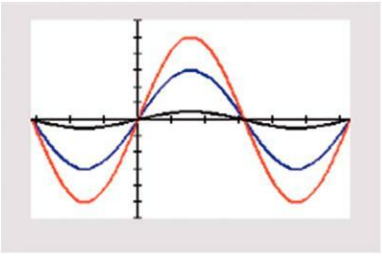


b De grafiek van g is ten opzichte van de grafiek van f 2 omhoog verschoven en die van h is 3 omlaag verschoven.

c De evenwichtsstand van de grafieken verandert.

© Noordhoff Uitgevers bv

d



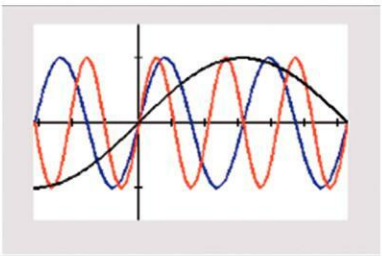
Als je a andere waarden geeft dan verandert de amplitude.

21 **a** De evenwichtsstand is $y = 2$, de amplitude is 3 en het bereik is $[-1, 5]$.
b De evenwichtsstand is $y = -3$, de amplitude is 8 en het bereik is $[-11, 5]$.
c De evenwichtsstand is $y = 10$, de amplitude is 3 en het bereik is $[7, 13]$.
d De evenwichtsstand is $y = -17$, de amplitude is 20 en het bereik is $[-37, 3]$.
e De evenwichtsstand is $y = 0{,}3$, de amplitude is 0,7 en het bereik is $[-0{,}4; 1]$.
f De evenwichtsstand is $y = 24$, de amplitude is 1 en het bereik is $[23, 25]$.

22 **a** Bijvoorbeeld $f(x) = 5 + 6\sin(x)$ of $g(x) = 5 - 6\sin(2x)$ of $h(x) = 5 + 6\cos(3x)$.
b $g(x) = -\sin(x) - 3$

23 **a** Er is 2 naar rechts verschoven.
b Dat punt heeft coördinaten $(-1, 0)$.
c De top van functie k heeft coördinaten $\left(-\frac{1}{6}\pi, 1\right)$.

24 **a**



Als je b andere waarden geeft dan verandert de periode.
b Als $0 < b < 1$ dan wordt de periode groter, de grafiek wordt in horizontale richting uitgerekt. Als $b > 1$ dan wordt de periode kleiner, de grafiek krimpt in horizontale richting.
c

b	0,5	1	π	2π
periode	4π	2π	2	1

d $b = \dfrac{2\pi}{\text{periode}}$

25 **a** $\text{periode} = \dfrac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$
b $\text{periode} = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$
c $\text{periode} = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2$
d $\text{periode} = \dfrac{2\pi}{0{,}1\pi} = 20$

© Noordhoff Uitgevers bv

26 **a** Verschuiving van 3 naar links en 2 omhoog van de functie $h(x) = \cos(x)$.
De toppen zijn $(\pi - 3, 1)$ en $(2\pi - 3, 3)$.

b Verschuiving van $\frac{1}{2}\pi$ naar rechts en een vermenigvuldiging met 2 ten opzichte van de x-as van de functie $f(x) = \sin(x)$.
De toppen zijn $(0, -2)$, $(\pi, 2)$ en $(2\pi, -2)$.

c Spiegeling in de x-as en een verschuiving van 5π naar links van de functie $h(x) = \cos(x)$.
De toppen zijn $(0, 1)$, $(\pi, -1)$ en $(2\pi, 1)$.

d Vermenigvuldiging met 5 ten opzichte van de x-as en met $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de y-as van de functie $f(x) = \sin(x)$.
De toppen zijn $\left(\frac{1}{4}\pi, 5\right)$, $\left(\frac{3}{4}\pi, -5\right)$, $\left(1\frac{1}{4}\pi, 5\right)$ en $\left(1\frac{3}{4}\pi, -5\right)$.

27 Invullen van periode 5 in $b = \dfrac{2\pi}{\text{periode}}$ geeft $b = \dfrac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$.

O21 **a** $-1 \leq \cos(x) \leq 1$
$-4\frac{1}{2} \leq \cos(x) \leq 4\frac{1}{2}$

b De maximale waarde is $-1\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} = 3$.
De minimale waarde is $-1\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2} = -6$.

c Het bereik van f is $[-6, 3]$.

d De evenwichtsstand is de lijn $y = -1\frac{1}{2}$.

O26 **a** $x = -\frac{2}{3}\pi$

b Een verschuiving van $\frac{2}{3}\pi$ naar links.

c De grafiek van g ontstaat uit die van h door een vermenigvuldiging met 4 ten opzichte van de x-as.

d Verschuiving van 1 naar rechts en 2 omlaag van de functie $h(x) = \cos(x)$.
De toppen zijn $(1, -1)$ en $(\pi + 1, -3)$.

e Verschuiving van $\frac{1}{2}\pi$ naar rechts en een vermenigvuldiging van 2 ten opzichte van de x-as van de functie $f(x) = \sin(x)$.
De toppen zijn $(0, -2)$, $(\pi, 2)$ en $(2\pi, -2)$.

f Verschuiving van 3π naar links en een vermenigvuldiging van -4 ten opzichte van de x-as
De toppen zijn $(0, 4)$, $(\pi, -4)$ en $(2\pi, 4)$.

g Vermenigvuldiging van $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de x-as en met $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de y-as van de functie $f(x) = \sin(x)$.
De toppen zijn $\left(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{4}\pi, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(1\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\right)$ en $\left(1\frac{3}{4}\pi, -\frac{1}{2}\right)$.

U6 **a** Het functievoorschrift bij de beeldgrafiek is $g(x) = -2\cos(x) + 3$.
De toppen zijn $(0, 1)$ en $(\pi, 5)$.

b Het functievoorschrift bij de beeldgrafiek is $h(x) = -2 \cdot (\cos(x) + 3)$ ofwel $h(x) = -2\cos(x) - 6$.
De toppen zijn $(0, -8)$ en $(\pi, -4)$.

U7 **a** $2\pi f = 1750$ dus $f = \dfrac{1750}{2\pi} \approx 279$ Hz.

De periode is $\dfrac{2\pi}{1750} \approx 0{,}0036$ seconden.

b De frequentie wordt verdubbeld, dus $2\pi f = 3500$ en $u = 0{,}15 \sin(3500t)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

6.5 Algemene vorm van een sinusoïde

intro De hoogte van het reuzenrad is ongeveer 30 meter, de as zit op een hoogte van iets meer dan 15 meter. Eén rondgang duurt 30 seconden.

28 **a** De amplitude is 3, evenwichtsstand $y = 4$ en de periode is 2π.

b A: amplitude is 1,5, evenwichtsstand $y = -1$ en de periode is $\frac{2}{3}\pi$.
B: amplitude is 55, evenwichtsstand $y = 100$ en de periode is 2π.
C: amplitude is 0,75, evenwichtsstand $y = 0{,}25$ en de periode is $\dfrac{2\pi}{0{,}2\pi} = 10$.
D: amplitude is 45, evenwichtsstand is $y = 900$ en de periode is 2π.

29 f: de amplitude is 4, de periode is $\dfrac{2\pi}{1\frac{1}{2}\pi} = \frac{4}{3}$ en de evenwichtsstand is $y = 2$.

g: de amplitude is 3, de periode is $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$ en de evenwichtsstand is $y = 1$.

h: de amplitude is 8, de periode is $\dfrac{2\pi}{\pi} = 2$ en de evenwichtsstand is $y = 6$.

30 **a** Het maximum is 3, het minimum is -1.
De evenwichtsstand $d = \dfrac{-1+3}{2} = 1$ en de amplitude $a = 3 - 1 = 2$.

b Maximum bij $x = 1\frac{1}{3}\pi$, minimum bij $x = 3\frac{1}{3}\pi$. Een halve periode is dus 2π en een hele periode is 4π.
$b = \dfrac{2\pi}{\text{periode}} = \dfrac{2\pi}{4\pi} = 0{,}5$.

c $\left(\frac{1}{3}\pi, 1\right)$

d $f(x) = 1 + 2\sin\left(0{,}5\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)\right)$

31 $d = 5$, $a = 15$ en $b = \frac{1}{40}\pi$ net als in het voorbeeld.
f heeft een maximum als $x = 0$, dus $c = 0$.

32 Aflezen bij de linkergrafiek:
$d = 1$, $a = 1$, $c = \frac{1}{3}\pi$ (bij een sinus) of $c = \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{4}\pi = \frac{7}{12}\pi$ (bij een cosinus)
en $b = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2$.
$f(x) = 1 + \sin\left(2\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)\right)$ of $f(x) = 1 + \cos\left(2\left(x - \frac{7}{12}\pi\right)\right)$

Aflezen bij de rechtergrafiek:
$d = \dfrac{600 - 100}{2} = 250$, $a = 600 - 250 = 350$,
de periode is 52, dus $b = \dfrac{2\pi}{52} = \frac{1}{26}\pi$ en
$c = 0$ (bij een cosinus) of $c = 0 + \frac{3}{4} \cdot 52 = 39$ (bij een sinus).
$f(x) = 250 + 350\sin\left(\frac{1}{26}\pi\left(x - 39\right)\right)$ of $f(x) = 250 + 350\cos\left(\frac{1}{26}x\right)$

© Noordhoff Uitgevers bv

33 **a** De evenwichtsstand $d = \frac{18 + 2}{2} = 10$.

De amplitude $a = 18 - 10 = 8$.

Een halve periode is 8, dus $b = \frac{2\pi}{16} = \frac{1}{8}\pi$.

Een hoogste punt is $(2, 18)$, dus $c = 2$.

$f(x) = 10 + 8\cos\left(\frac{1}{8}\pi\left(x - 2\right)\right)$ is een functievoorschrift dat hierbij past.

b De evenwichtsstand $d = \frac{-11 - 2}{2} = -6\frac{1}{2}$.

De amplitude $a = -2 - -6\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$.

Een halve periode is 8π, dus $b = \frac{2\pi}{16\pi} = \frac{1}{8}$.

$c = 5\pi$ (bij een cosinus) of $c = \pi$ (bij een sinus).

$f(x) = -6\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{8}\left(x - 5\pi\right)\right)$ of $f(x) = -6 + 4\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{8}\left(x - \pi\right)\right)$

O29 **a** $a = -3$, $b = \frac{2}{3}$, $c = 5$ en $d = -1$.

b De periode is $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi$.

Verschuiving van 5 naar rechts.

c De amplitude is a en de evenwichtsstand is d.

d De amplitude is 3, de evenwichtsstand is $y = -1$.

O33 **a** De afstand tussen de twee toppen is 8, het gaat om een maximum en een minimum dus de halve periode is 8. De hele periode is dan 16.

$b = \frac{2\pi}{16} = \frac{1}{8}\pi$.

b De evenwichtsstand is $y = \frac{10 + 2}{2} = 6$, de amplitude is $10 - 6 = 4$.

c Je weet de coördinaten van een top, dus c weet je ook en die is $c = -1$.

d $f(x) = 6 + 4\cos\left(\frac{1}{8}\pi\left(x + 1\right)\right)$

e De evenwichtsstand $d = \frac{-11 + 3}{2} = -4$.

De amplitude $a = 3 - -4 = 7$.

Een halve periode is 12π, dus $b = \frac{2\pi}{24\pi} = \frac{1}{12}$.

$c = 11\pi$ (bij een cosinus) of $c = 11\pi - \frac{1}{4} \cdot 24\pi = 5\pi$ (bij een sinus).

Dus $f(x) = -4 + 7\cos\left(\frac{1}{12}\left(x - 11\pi\right)\right)$ of $f(x) = -4 + 7\sin\left(\frac{1}{12}\left(x - 5\pi\right)\right)$

U8 **a** $t = 0$: onderin, dus 15 meter hoog.
$t = 8$: na een kwart rondje is hij ter hoogte van de as, dus op een hoogte van $75 + 15 = 90$ meter.
$t = 16$: bovenin, dus 165 meter hoog.
$t = 24$: weer ter hoogte van de as, dus 90 meter hoog.

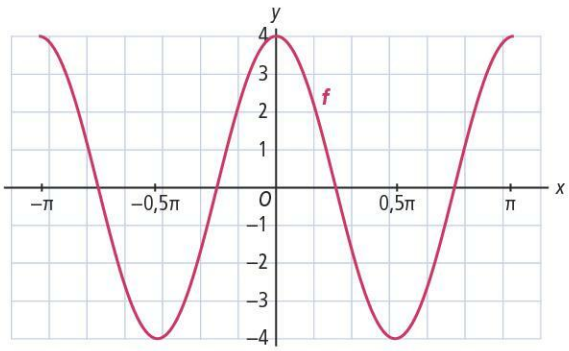
b $b = \frac{2\pi}{32} = \frac{1}{16}\pi$

Een mogelijk functievoorschrift is $h(t) = 90 + 75\cos\left(\frac{1}{16}\pi\left(t - 16\right)\right)$ of

$h(t) = 90 + 75\sin\left(\frac{1}{16}\pi\left(t - 8\right)\right)$

© Noordhoff Uitgevers bv

U9 **a**



b De amplitude $a = 4$, de periode is π dus $b = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2$.

6.6 Vergelijkingen oplossen

intro Tweemaal per omwenteling, dus 24 keer per minuut.

34 **a** $x = \frac{2}{3}\pi$ of $x = 1\frac{1}{3}\pi$

b $x = \frac{1}{4}\pi$ of $x = 1\frac{3}{4}\pi$

c $x = 0$ of $x = 2\pi$

d $x = \frac{5}{6}\pi$ of $x = 1\frac{1}{6}\pi$

e $x = \frac{3}{4}\pi$ of $x = 1\frac{1}{4}\pi$

f $x = \frac{1}{2}\pi$ of $x = 1\frac{1}{2}\pi$

35 **a** Er zijn zes oplossingen op het interval.

b a heeft de waarde $\frac{1}{3}\pi$.

c Je maakt dan gebruik dat de grafiek van f symmetrisch is in de lijn $x = \frac{1}{2}\pi$.

d $x = c$ ligt precies één periode verder dan $x = a$, dus $c = a + 2\pi$.

e $x = -1\frac{2}{3}\pi$ of $x = -1\frac{1}{3}\pi$ of $x = \frac{1}{3}\pi$ of $x = \frac{2}{3}\pi$ of $x = 2\frac{1}{3}\pi$ of $x = 2\frac{2}{3}\pi$.

36 **a** Telkens 2π verder, dus $6\frac{1}{3}\pi$ en $6\frac{2}{3}\pi$.

b $a = \frac{1}{3}\pi - 2\pi = -1\frac{2}{3}\pi$ of $a = \frac{2}{3}\pi - 2\pi = -1\frac{1}{3}\pi$.

c k kan de waarde van alle gehele getallen aannemen.

d $x = \frac{1}{9}\pi$ en $x = \frac{7}{9}\pi$ en $x = 1\frac{4}{9}\pi$ en $x = \frac{2}{9}\pi$ en $x = \frac{8}{9}\pi$ en $x = 1\frac{5}{9}\pi$.

37 **a** $\sin(2x) = \frac{1}{2}$

Een oplossing van $\sin(a) = \frac{1}{2}$ is $a = \frac{1}{6}\pi$.

Dus $2x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi$ of $x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$

Op $[0, 2\pi]$ zijn de oplossingen $x = \frac{1}{12}\pi$ of $x = 1\frac{1}{12}\pi$ of $x = \frac{5}{12}\pi$ of $x = 1\frac{5}{12}\pi$.

b $\cos(4x) = 1$

Een oplossing van $\cos(a) = 1$ is $a = 0$.

Dus $4x = 0 + k \cdot 2\pi$

$x = k \cdot \frac{1}{2}\pi$

Op $[0, \pi]$ zijn de oplossingen $x = 0$ of $x = \frac{1}{2}\pi$ of $x = \pi$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c $2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = -1$

$\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}$

Een oplossing van $\sin(a) = -\frac{1}{2}$ is $a = 1\frac{1}{6}\pi$.

$\frac{1}{2}x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\frac{1}{2}x = 1\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = 2\frac{1}{3}\pi + k \cdot 4\pi$ of $x = 3\frac{2}{3}\pi + k \cdot 4\pi$

Op $[0, 5\pi]$ zijn de oplossingen $x = 2\frac{1}{3}\pi$ of $x = 3\frac{2}{3}\pi$.

d $4\cos(5x) = -2\sqrt{3}$

$\cos(5x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Een oplossing van $\cos(a) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ is $a = \frac{5}{6}\pi$.

Dus $5x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $5x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$ of $x = \frac{7}{30}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$

Op $[0, \frac{1}{2}\pi]$ zijn de oplossingen $x = \frac{1}{6}\pi$ of $x = \frac{7}{30}\pi$.

38 De oplossingen zijn $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$.

Op $[-2\pi, -\pi]$ zijn de oplossingen $x = -1\frac{1}{12}\pi$ of $x = -1\frac{3}{4}\pi$ of $x = -1\frac{7}{12}\pi$.

39 **a** optie: snijpunt geeft $x = 0{,}56$ of $x = 1{,}01$ of $x = 3{,}70$ of $x = 4{,}15$

b optie: snijpunt geeft $x = -1{,}32$ of $x = 1{,}32$ of $x = 7{,}65$ of $x = 10{,}30$

c optie: snijpunt geeft $x = 12{,}21$ of $x = 16{,}07$

d optie: snijpunt geeft $x = -2{,}19$ of $x = -0{,}96$ of $x = 0{,}96$ of $x = 2{,}19$

40 **a** $\sin(b(x - c))$ is maximaal 1 en minimaal -1 wat b en c ook zijn. Dus er zijn geen oplossingen als $p > 1$ of als $p < -1$.

b $p = 0$ of $p = 1$ of $p = -1$.

c Op het interval $[0, 2\pi]$ moet de grafiek viermaal de waarde 1 hebben.
Dit is zo als voor b geldt $3{,}25 \leq b < 4{,}25$.
Voor $b = 3{,}25$ heeft de grafiek een periode van $\frac{2\pi}{3{,}25} = \frac{8}{13}\pi$ en zijn er op het interval $[0, 2\pi]$ precies $\frac{2\pi}{\frac{8}{13}\pi} = 3{,}25$ golven, dus net viermaal de waarde 1.
Voor $b = 4{,}25$ wordt de waarde 1 net geen vijf keer bereikt.

O37 **a** Beide kanten van de vergelijking delen door 6 geeft $\cos\left(\frac{3}{4}x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

b $-\frac{1}{6}\pi$

c $\frac{1}{6} : \frac{3}{4} = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$

d $x = \frac{2}{9}\pi + k \cdot 2\frac{2}{3}\pi$ of $x = -\frac{2}{9}\pi + k \cdot 2\frac{2}{3}\pi$

Op $[0, 2\pi]$ is de oplossing $x = \frac{2}{9}\pi$.

U10 **a** $4\cos(2\pi\,(x - 3)) + 5 = 3$ in de vorm $\cos(p) = -\frac{1}{2}$ schrijven.
$4\cos(2\pi\,(x - 3)) = -2$
$\cos(2\pi\,(x - 3)) = -\frac{1}{2}$
Dan moet $p = 2\pi\,(x - 3)$.

b $p = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $p = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

© Noordhoff Uitgevers bv

c $2\pi(x-3) = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2\pi(x-3) = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$x - 3 = \frac{1}{3} + k \cdot 1$ of $x - 3 = \frac{2}{3} + k \cdot 1$

$x = 3\frac{1}{3} + k$ of $x = 3\frac{2}{3} + k$

Op $[0, 2]$ zijn de oplossingen $x = \frac{1}{3}$ of $x = 1\frac{1}{3}$ of $x = \frac{2}{3}$ of $x = 1\frac{2}{3}$

U11 **a** $d = 12{,}18$

Het maximum is $G = 24 - 3{,}26 \cdot (66{,}5 - b)^{0{,}31}$ als $0 \le b < 66{,}5$

Dan is $a = 24 - 3{,}26 \cdot (66{,}5 - b)^{0{,}31} - 12{,}18 = 11{,}82 - 3{,}26 \cdot (66{,}5 - b)^{0{,}31}$

Als $66{,}5 \le b \le 90$ dan $G = 24$ dus $a = 24 - 12{,}18 = 11{,}82$

$$D = \begin{cases} (11{,}82 - 3{,}26 \cdot (66{,}5 - b)^{0{,}31})\sin(0{,}12(t - 11{,}43)) + 12{,}18 \\ 11{,}82\sin(0{,}12(t - 11{,}43)) + 12{,}18 \end{cases}$$

b $b = 51$ geeft $D = (11{,}82 - 3{,}26 \cdot 15{,}5^{0{,}31})\sin(0{,}12(x - 11{,}43)) + 12{,}18$

Deze formule invoeren op de rekenmachine, evenals $y_2 = 15$.

Optie: snijpunt geeft $t \approx 17{,}573$ en $t \approx 31{,}467$.

Dus in een periode van $31{,}467 - 17{,}573 \approx 13{,}9$ weken ≈ 97 dagen.

6.7 Gemengde opdrachten

41 **a** De amplitude $a = 5$.

$1\frac{1}{4}$ periode is 3π, dus 1 periode is $\frac{3\pi}{1\frac{1}{4}} = \frac{12}{5}\pi$ en $b = \frac{2\pi}{\frac{12}{5}\pi} = \frac{5}{6}$

b De amplitude $a = 5$.

Een kwart periode is 3π, dus 1 periode is 12π en $b = \frac{2\pi}{12\pi} = \frac{1}{6}$

c De amplitude is 5, maar de grafiek is gespiegeld in de x-as, dus $a = -5$

Driekwart periode is 3π, dus 1 periode is 4π en $b = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$

d De periode is $\frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$ en de amplitude is 2

e Als $a = 2$ en $b = \frac{1}{3}\pi$ dan $f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{3}\pi x\right)$

Eerst $f(x) = 1$ oplossen.

$2\sin\left(\frac{1}{3}\pi x\right) = 1$

$\sin\left(\frac{1}{3}\pi x\right) = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}\pi x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\frac{1}{3}\pi x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{2} + k \cdot 6$ of $x = 2\frac{1}{2} + k \cdot 6$

Op het interval $[0, 8]$ zijn de oplossingen $x = \frac{1}{2}$ of $x = 2\frac{1}{2}$ of $x = 6\frac{1}{2}$

$2\sin\left(\frac{1}{3}\pi x\right) < 1$ als $0 \le x < \frac{1}{2}$ of $2\frac{1}{2} < x < 6\frac{1}{2}$

42 **a** $1 + 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 2$

$\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\frac{1}{2}x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 4\pi$ of $x = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 4\pi$

Op $[0, 6\pi]$ zijn de oplossingen $x = \frac{2}{3}\pi$ of $x = 3\frac{1}{3}\pi$ of $x = 4\frac{2}{3}\pi$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $\sin(\pi x) + 1 = 0$
$\sin(\pi x) = -1$

$\pi x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = 1\frac{1}{2} + k \cdot 2$
Op $[-2, 2]$ zijn de oplossingen $x = -\frac{1}{2}$ of $x = 1\frac{1}{2}$

43 **a** De evenwichtsstand is $y = \frac{4 + -2}{2} = 1$, dus $d = 1$.

De amplitude is $4 - 1 = 3$.

De periode is 2π, dus $b = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

De grafiek is gespiegeld in de evenwichtsstand en niet verschoven, dus $a = -3$ en $c = 0$.
$f(x) = 1 - 3\sin(x)$

b f heeft een top bij $x = -\frac{1}{2}\pi$, dus $c = -\frac{1}{2}\pi$.

$f(x) = 1 + 3\cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$

c $(0, 3)$ is een top als er $\frac{1}{2}\pi$ naar rechts en 1 omlaag geschoven wordt.
Dan geldt $f(x) = 3\cos(x)$.

d De grafiek van $f(x) = 1 - 3\sin(x)$ met twee ten opzichte van de x-as vermenigvuldigen geeft $g(x) = 2(1 - 3\sin(x))$ ofwel $g(x) = 2 - 6\sin(x)$.

Daarna een verschuiving van $\frac{1}{6}\pi$ naar links geeft $h(x) = 2 - 6\sin\left(x + \frac{1}{6}\pi\right)$.

44 **a** Optie: maximum geeft (0,39; 0,85) en (3,53; 0,85).
Optie: minimum geeft (1,96; −0,15) en (5,11; −0,15).

b De evenwichtsstand $d = \frac{0{,}85 - 0{,}15}{2} = 0{,}35$.

De amplitude $a = 0{,}85 - 0{,}35 = 0{,}5$.
De periode is π dus $b = 2$.
Voer in $y_2 = 0{,}35$ en snijd deze met de grafiek van f. De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $x \approx 2{,}75$, dus $c = 2{,}90$ en $f(x) = 0{,}35 + 0{,}5\sin(2(x - 2{,}75))$

Onderzoeksopdrachten

45 **a** De hoeken tussen de hoekpunten van de ster zijn $\frac{2\pi}{5}$, dus $\angle AOC = \frac{4}{5}\pi$.

De hoek tussen de positieve x-as en OC is dus $\frac{1}{2}\pi + \frac{4}{5}\pi$.
Daaruit volgt dat de coördinaten van C gelijk zijn aan $\cos\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{4}{5}\pi\right)$ en $\sin\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{4}{5}\pi\right)$.
Er geldt $C(-0{,}59; -0{,}81)$.

b De coördinaten van E zijn $\left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{8}{5}\pi\right), \sin\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{8}{5}\pi\right)\right) \approx (0{,}95; 0{,}31)$

De coördinaten van B zijn $\left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{2}{5}\pi\right), \sin\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{2}{5}\pi\right)\right) \approx (-0{,}95; 0{,}31)$

De coördinaten van D zijn $\left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{6}{5}\pi\right), \sin\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{6}{5}\pi\right)\right) \approx (0{,}59; -0{,}81)$

© Noordhoff Uitgevers bv

c Het hoogste punt van de ster is A. De andere punten, tegen de wijzers van de klok in, zijn B, C, D, E, F en G.

$A(0, 1)$

$B\left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{2}{7}\pi\right), \sin\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{2}{7}\pi\right)\right) \approx (-0{,}78;\ 0{,}62)$

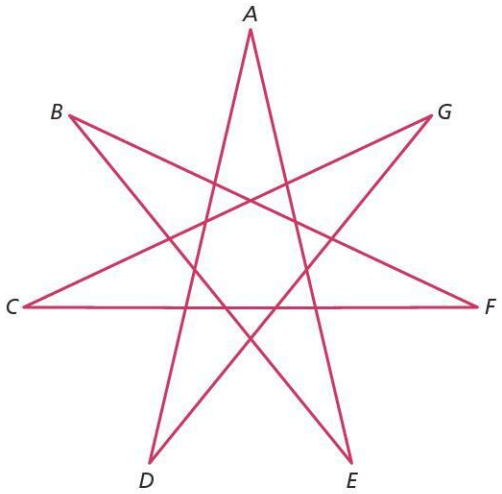
$C\left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{4}{7}\pi\right), \sin\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{4}{7}\pi\right)\right) \approx (-0{,}97;\ -0{,}22)$

$D\left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{6}{7}\pi\right), \sin\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{6}{7}\pi\right)\right) \approx (-0{,}43;\ -0{,}90)$

$E\left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{8}{7}\pi\right), \sin\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{8}{7}\pi\right)\right) \approx (0{,}43;\ -0{,}90)$

$F\left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{10}{7}\pi\right), \sin\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{10}{7}\pi\right)\right) \approx (0{,}97;\ -0{,}22)$

$G\left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{12}{7}\pi\right), \sin\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{12}{7}\pi\right)\right) \approx (0{,}78;\ 0{,}62)$



46 1 periode duurt $\frac{1}{50} = 0{,}02$ seconden. Voor de eenheden op de horizontale as moet dus 0,002 seconden gekozen worden.
De amplitude is 2 mm, het verschil tussen het maximum en minimum is dan 4 mm.
Voor de eenheden op de verticale as moet dus $\frac{4}{8} = 0{,}5$mm gekozen worden.

Samenvatting

S1 **a** Deze hoeken zijn elk $\frac{1}{3}\pi$ radialen.
b In een gelijkbenige rechthoekige driehoek $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$ en $\frac{1}{2}\pi$ radialen.

S2 **a** Bijvoorbeeld de punten $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ en $(2\pi, 0)$.
b Bijvoorbeeld de lijnen $x = 0$, $x = \pi$ en $x = 2\pi$.

S3 **a** $\sin\left(1\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
b $\cos\left(-1\frac{5}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

S4

aantal graden	140	300	1,3	143,2
aantal radialen	$\frac{7}{9}\pi$	$1\frac{2}{3}\pi$	0,023	2,5

S5 f: de amplitude is 5, de evenwichtsstand is $y = 3$ en de periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

g: de amplitude is 3, de evenwichtsstand is $y = 10$ en de periode is $\frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$.

S6 **a** De evenwichtsstand $d = \frac{-4 + 2}{2} = -1$.
De amplitude $a = 2 - -1 = 3$.
De periode is $2 \cdot 2 = 4$ dus $b = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$.
De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $x = 1$, dus $c = 1$.
Het functievoorschrift van de sinusoïde is $f(x) = -1 + 3\sin\left(\frac{1}{2}\pi\left(x - 1\right)\right)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b De periode is 12, dus $b = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi$.

De evenwichtsstand is $y = -2$, dus $d = -2$.
(5, 4) is een top, dus $a = 4 - -2 = 6$ en $c = 5$ (bij een cosinus).
$f(x) = -2 + 6\cos\left(\frac{1}{6}\pi\left(x - 5\right)\right)$

S7 **a** $\sin\left(1\frac{1}{3}x\right) = -1$
Een oplossing van $\sin(a) = -1$ is $a = 1\frac{1}{2}\pi$.

$1\frac{1}{3}x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = 1\frac{1}{8}\pi + k \cdot 1\frac{1}{2}\pi$

De oplossingen op $[-2\pi, 4\pi]$ zijn $x = -1\frac{7}{8}\pi$, $x = -\frac{3}{8}\pi$, $x = 1\frac{1}{8}\pi$ of $x = 2\frac{5}{8}\pi$.

b $2\cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) = \sqrt{3}$

$\cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Een oplossing van $\cos(a) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ is $a = \frac{1}{6}\pi$.

$x - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x - \frac{1}{2}\pi = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

De oplossingen op $[-2\pi, 4\pi]$ zijn $x = -1\frac{2}{3}\pi$, $x = -1\frac{1}{3}\pi$, $x = \frac{1}{3}\pi$, $x = \frac{2}{3}\pi$,
$x = 2\frac{1}{3}\pi$ of $x = 2\frac{2}{3}\pi$.

Test jezelf

T1

α in graden	45	125	29,79	229,18	600	100,27
α in radialen	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{25}{36}\pi$	0,52	4	$3\frac{1}{3}\pi$	1,75

T2 **a** $\sin\left(3\frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = -\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

b $\sin\left(-2\frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -1$

c $\cos\left(4\frac{5}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

d $\sin(8\pi) = \sin(0) = 0$

e $\cos\left(2\frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

f $\cos\left(-1\frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$

g $\sin(-3\pi) = \sin(\pi) = 0$

h $\sin\left(-3\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$

T3 **a** links:
De evenwichtsstand $d = \frac{1 - 5}{2} = -2$ en de amplitude $a = 1 - -2 = 3$.

De periode is 10, dus $b = \frac{2\pi}{10} = \frac{1}{5}\pi$.

De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $x = 6$, dus $c = 6$.

$f(x) = -2 + 3\sin\left(\frac{1}{5}\pi\left(x - 6\right)\right)$

© Noordhoff Uitgevers bv

rechts:
De evenwichtsstand $d = \frac{-4+8}{2} = 2$ en de amplitude $a = 8 - 2 = 6$.
Er is een top bij $x = \pi$, dus $c = \pi$ (of stijgend door de evenwichtsstand bij $x = -\pi$, dus $c = -\pi$).
De periode is 8π, dus $b = \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4}$
$g(x) = 2 + 6\cos\left(\frac{1}{4}\left(x - \pi\right)\right)$ of $g(x) = 2 + 6\sin\left(\frac{1}{4}\left(x + \pi\right)\right)$

T4 **a** $\cos(2x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$2x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi$ of $x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi$
Op $[0, 2\pi]$ zijn de oplossingen: $x = \frac{1}{12}\pi$, $x = \frac{11}{12}\pi$, $x = 1\frac{1}{12}\pi$ of $x = 1\frac{11}{12}\pi$.

b $1\frac{1}{2} + 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = 2\frac{1}{2}$

$2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = 1$

$\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\frac{1}{2}x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 4\pi$ of $x = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 4\pi$
Op $[0, 6\pi]$ zijn de oplossingen: $x = \frac{1}{3}\pi$, $x = 1\frac{2}{3}\pi$, $x = 4\frac{1}{3}\pi$ of $x = 5\frac{2}{3}\pi$.

c $2\cos(3x) = \sqrt{2}$

$\cos(3x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$3x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

Op $[0, \pi]$ zijn de oplossingen: $x = \frac{1}{12}\pi$, $x = \frac{7}{12}\pi$ of $x = \frac{3}{4}\pi$.

d $4\sin(\pi x) = 2\sqrt{3}$

$\sin(\pi x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\pi x = \frac{1}{3}\pi + \cdot 2\pi$ of $\pi x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{3} + k \cdot 2$ of $x = \frac{2}{3} + k \cdot 2$
Op $[0, 5]$ zijn de oplossingen: $x = \frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$, $x = 2\frac{1}{3}$, $x = 2\frac{2}{3}$, $x = 4\frac{1}{3}$ of $x = 4\frac{2}{3}$

T5 **a** De periode is $\frac{1}{20}$ seconde en de amplitude is 5 mm.

b $b = \frac{2\pi}{\frac{1}{20}} = 40\pi$, dus $u = 5\sin(40\pi t)$.

c Invoer: $y_1 = 5\sin(40\pi x)$ en $y_2 = 4$(of $y_2 = -4$).
Optie: snijpunten geeft $x = 0{,}00737\ldots$ en $x = 0{,}01762\ldots$.
In één periode is de uitwijking groter dan 4 mm gedurende $2(0{,}01762\ldots - 0{,}00737\ldots) \approx 0{,}0205$ seconden.

T6 **a** $b = \frac{2\pi}{5\pi} = \frac{2}{5}$

b De amplitude is 2, dus $a = 2$.
De grafiek gaat in $(3, -4)$ stijgend door de evenwichtsstand, dus $d = -4$ en $c = 3$.
De periode is 5π, dus $b = \frac{2}{5}$ en $f(x) = -4 + 2\sin\left(\frac{2}{5}\left(x - 3\right)\right)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

T7 **a** Vermenigvuldigen met $\frac{1}{\frac{2}{3}} = 1\frac{1}{2}$ ten opzichte van de y-as, dan vermenigvuldigen met 2 ten opzichte van de x-as en tot slot 1 omhoog verschuiven.

b De grafiek van een sinus ontstaat uit die van een cosinus door een kwart periode naar rechts te verschuiven.

De periode van g is $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi$ dus een kwart periode is $\frac{3}{4}\pi$.

De grafiek van h ontstaat uit die van g door 1 omlaag te verschuiven en daarna $\frac{3}{4}\pi$ naar rechts (of omgekeerd).

T8 **a** $\left(\frac{2}{3}\pi, 1\right)$ substitueren geeft $a \cdot \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 1$

$a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 1$, dus $a = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

b $b = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi} = 3$

c De periode is π, dus $b = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

Het bereik is $[-1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}]$ dus $d = \frac{-1\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}}{2} = 1$ en $a = 2\frac{1}{2}$

Een functievoorschrift is $f(x) = 1 + 2\frac{1}{2}\sin(2x)$.

T9 De evenwichtsstand is ongeveer $y = \frac{-78 + 58}{2} = -10$ en de amplitude is ongeveer 68.

De periode is ongeveer 12 uur en 20 minuten, dus $b = \frac{2\pi}{12\frac{1}{3}} \approx 0{,}51$

Het tijdstip precies tussen 04:10 en 10:14 is 07:12. Daarbij hoort $t = 7{,}2$

$f(t) = -10 + 68\sin(0{,}51(x - 7{,}2))$

Extra oefening

E1

α in graden	20,05	30	77	135	210	1317,80
α in radialen	0,35	$\frac{1}{6}\pi$	1,34	$\frac{3}{4}\pi$	$1\frac{1}{6}\pi$	23

E2 **a** De amplitude is 5 en de evenwichtsstand is $y = 3$.

b De periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$ en de amplitude is 2.

c Vermenigvuldigen met 5 ten opzichte van de x-as en dan nog 3 omhoog verschuiven.

d Vermenigvuldigen met -2 ten opzichte van de x-as, vermenigvuldigen met 3 ten opzichte van de y-as en dan nog 4 naar rechts verschuiven.

E3 **a** De periode van f is 6π en de amplitude is $1\frac{1}{2}$

De periode van g is π en de amplitude is $2\frac{1}{2}$

b $f(x) = 1\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{3}x\right)$ en $g(x) = 2\frac{1}{2}\sin(2x)$

© Noordhoff Uitgevers bv

E4 **a** $2\sin\left(x-\frac{1}{4}\pi\right)=\sqrt{2}$

$\sin\left(x-\frac{1}{4}\pi\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$x-\frac{1}{4}\pi=\frac{1}{4}\pi+k\cdot 2\pi$ of $x-\frac{1}{4}\pi=\frac{3}{4}\pi+k\cdot 2\pi$

$x=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$ of $x=\pi+k\cdot 2\pi$

Op $[0, 2\pi]$ zijn de oplossingen: $x=\frac{1}{2}\pi$ of $x=\pi$.

b $1+2\cos\left(1\frac{1}{2}x\right)=2$

$2\cos\left(1\frac{1}{2}x\right)=1$

$\cos\left(1\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{2}$

$1\frac{1}{2}x=\frac{1}{3}\pi+k\cdot 2\pi$ of $1\frac{1}{2}x=-\frac{1}{3}\pi+k\cdot 2\pi$

$x=\frac{2}{9}\pi+k\cdot\frac{4}{3}\pi$ of $x=-\frac{2}{9}\pi+k\cdot\frac{4}{3}\pi$

Op $[0, 2\pi]$ zijn de oplossingen: $x=\frac{2}{9}\pi$, $x=1\frac{1}{9}\pi$ of $x=1\frac{5}{9}\pi$.

c $6-\sin\left(\frac{1}{2}x\right)=5\frac{1}{2}$

$\sin\left(\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}x=\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi$ of $\frac{1}{2}x=\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi$

$x=\frac{1}{3}\pi+k\cdot 4\pi$ of $x=1\frac{2}{3}\pi+k\cdot 4\pi$

Op $[0, 2\pi]$ zijn de oplossingen: $x=\frac{1}{3}\pi$ of $x=1\frac{2}{3}\pi$.

d $2\sin(3x)=-\sqrt{3}$

$\sin(3x)=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$3x=1\frac{1}{3}\pi+k\cdot 2\pi$ of $3x=1\frac{2}{3}\pi+k\cdot 2\pi$

$x=\frac{4}{9}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi$ of $x=\frac{5}{9}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi$

Op $[0, 2\pi]$ zijn de oplossingen: $x=\frac{4}{9}\pi$, $x=\frac{5}{9}\pi$, $x=1\frac{1}{9}\pi$, $x=1\frac{2}{9}\pi$, $x=1\frac{7}{9}\pi$ of $x=1\frac{8}{9}\pi$.

E5 **a**

x	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$1\frac{1}{4}\pi$	$1\frac{1}{2}\pi$	$1\frac{2}{3}\pi$
$\sin(x)$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\cos(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$\frac{1}{2}$

b $\sin\left(17\frac{1}{2}\pi\right)=\sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right)=-1$

$\sin\left(-1\frac{5}{6}\pi\right)=\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}$

$\sin\left(1\frac{3}{4}\pi\right)=\sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right)=-\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\sin\left(-1\frac{1}{3}\pi\right)=\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}\sqrt{3}$

© Noordhoff Uitgevers bv

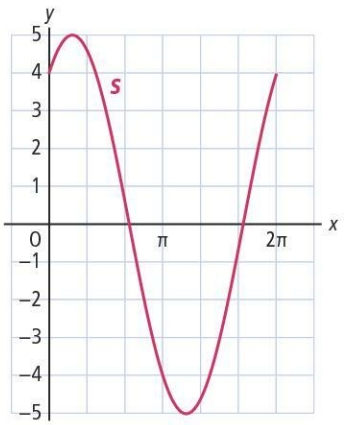
E6 **a** $b = \frac{2\pi}{24} = \frac{1}{12}\pi$

b De amplitude is 3.

c $\frac{6000}{24} = 250$, dus in het interval [0, 6000] passen 250 periodes.
De grafiek snijdt de x-as twee keer per periode, dus in totaal 500 keer.

d Er is geen horizontale verschuiving, dus $(0, -3)$ is een top. De volgende toppen liggen een halve periode verder en zijn $(12, 3)$ en $(24, -3)$.

E7 **a**



b Optie: maximum geeft $x \approx 0{,}644$ en $y = 5$.
Optie: minimum geeft $x \approx 3{,}785$ en $y = -5$.
Daaruit volgt $d = 0$ en $a = 5$.
De periode is 2π, dus $b = 1$.
Optie nulpunt geeft $x \approx 5{,}36$, dus $c \approx 5{,}36$.
Het functievoorschrift is $f(x) = 5\sin(x - 5{,}36)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

1 **a** $\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{9}-\frac{1}{3}=\frac{21}{36}-\frac{1}{3}=\frac{7}{12}-\frac{4}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

b $\frac{2}{-11}\cdot\frac{-3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{-6}{-77}+\frac{2}{7}=\frac{6}{77}+\frac{22}{77}=\frac{28}{77}=\frac{4}{11}$

c $\frac{2}{3p}\cdot\frac{3}{p}+\frac{1}{2p}=\frac{6}{3p^2}+\frac{1}{2p}=\frac{12}{6p^2}+\frac{3p}{6p^2}=\frac{12+3p}{6p^2}=\frac{4+p}{2p^2}$

d $\frac{2a}{3}\cdot\frac{6}{4a}-\frac{1}{2}=\frac{12a}{12a}-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

e $\frac{3p}{7\frac{1}{2}}\cdot\frac{2p}{-3}=\frac{6p^2}{-22\frac{1}{2}}=-\frac{12p^2}{45}=-\frac{4p^2}{15}$

f $\frac{5}{4b^2}\cdot\frac{2b}{5a}=\frac{10b}{20ab^2}=\frac{1}{2ab}$

2 **a** $\frac{9a}{27a}=\frac{1}{3}$

b $\frac{9q}{7\frac{1}{2}q}=\frac{18q}{15q}=\frac{6\times3\times q}{5\times3\times q}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$

c $\frac{12}{\frac{p}{3}}=\frac{12\times3}{\frac{p}{3}\times3}=\frac{36}{p}$

d $\frac{2p}{\frac{4}{3p}}=\frac{2p\times3p}{\frac{4}{3p}\times3p}=\frac{6p^2}{4}=1\frac{1}{2}p^2$

e $\frac{\frac{9}{11}}{3}=\frac{\frac{9}{11}\times11}{3\times11}=\frac{9}{33}=\frac{3}{11}$

f $\frac{\frac{3}{p}}{8p}=\frac{\frac{3}{p}\times p}{8p\times p}=\frac{3}{8p^2}$

3 **a** $\frac{2}{a}-\frac{a}{2}=\frac{4}{2a}-\frac{a^2}{2a}=\frac{4-a^2}{2a}$

b $\frac{a}{b}+\frac{b}{2a}=\frac{2a^2}{2ab}+\frac{b^2}{2ab}=\frac{2a^2+b^2}{2ab}$

c $(2x+x^2)\cdot\frac{1}{x^3}=\frac{2x+x^2}{x^3}=\frac{x(2+x)}{x\cdot x^2}=\frac{2+x}{x^2}$

d $\frac{3}{x}\cdot\frac{x+1}{3x}=\frac{3(x+1)}{3x^2}=\frac{x+1}{x^2}$

e $\frac{4(x+1)}{x}-\frac{1}{4}x=\frac{4(x+1)}{x}-\frac{x}{4}=\frac{16(x+1)}{4x}-\frac{x^2}{4x}=\frac{16x+16-x^2}{4x}=\frac{-x^2+16x+16}{4x}$

f $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{(x+1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{(x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}-\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\frac{4x}{x^2-1}$

g $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=\frac{x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}=\frac{x^2+x+1}{x^3}$

h $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}-\frac{x+1}{(x-1)(x+1)}+\frac{1}{x^2-1}=$
$\frac{x-1}{x^2-1}-\frac{x+1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{x-1-(x+1)+1}{x^2-1}=\frac{-1}{x^2-1}$

4 **a** $y=\sqrt{16x}+\sqrt{25x}$
$y=\sqrt{16}\cdot\sqrt{x}+\sqrt{25}\cdot\sqrt{x}$
$y=4\sqrt{x}+5\sqrt{x}$
$y=9\sqrt{x}$

b A $y=\sqrt{25x}+\sqrt{144x}$
$y=\sqrt{25}\cdot\sqrt{x}+\sqrt{144}\cdot\sqrt{x}$
$y=5\sqrt{x}+12\sqrt{x}$
$y=17\sqrt{x}$

B $y=\sqrt{27x}+\sqrt{75x}$
$y=\sqrt{9}\cdot\sqrt{3x}+\sqrt{25}\cdot\sqrt{3x}$
$y=3\sqrt{3x}+5\sqrt{3x}$
$y=8\sqrt{3x}$

© Noordhoff Uitgevers bv

C $y = \sqrt{121x} - \sqrt{64x}$

$y = \sqrt{121} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{64} \cdot \sqrt{x}$

$y = 11\sqrt{x} - 8\sqrt{x}$

$y = 3\sqrt{x}$

D $y = \sqrt{\frac{1}{9}x} + \sqrt{\frac{4}{25}x}$

$y = \sqrt{\frac{1}{9}} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{\frac{4}{25}} \cdot \sqrt{x}$

$y = \frac{1}{3}\sqrt{x} + \frac{2}{5}\sqrt{x}$

$y = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right)\sqrt{x}$

$y = \left(\frac{5}{15} + \frac{6}{15}\right)\sqrt{x}$

$y = \frac{11}{15}\sqrt{x}$

5 **a** $\left(\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\right)^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2 = 25 \cdot 2 = 50$

b $\left(\sqrt{5} + \sqrt{45}\right)^2 = \left(\sqrt{5} + 3\sqrt{5}\right)^2 = \left(4\sqrt{5}\right)^2 = 16 \cdot 5 = 80$

c $\left(\sqrt{6} + 4\sqrt{24}\right)^2 = \left(\sqrt{6} + 4 \cdot 2\sqrt{6}\right)^2 = \left(\sqrt{6} + 8\sqrt{6}\right)^2 = \left(9\sqrt{6}\right)^2 = 81 \cdot 6 = 486$

d $\left(7\sqrt{2} - 2\sqrt{32}\right)^2 = \left(7\sqrt{2} - 2 \cdot 4\sqrt{2}\right)^2 = \left(7\sqrt{2} - 8\sqrt{2}\right)^2 = \left(-\sqrt{2}\right)^2 = 2$

6 **a** $\frac{12}{\sqrt{7}} = \frac{12}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{12\sqrt{7}}{7} = 1\frac{5}{7}\sqrt{7}$

b $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5} = \frac{1}{15}\sqrt{15}$

c $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$

d $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1{,}25}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1{,}25}} \cdot \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{60}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{15}}{5} = \frac{2\sqrt{15}}{5} = \frac{2}{5}\sqrt{15}$

7 **a** Lijn 1 gaat door (0, 0) en (2, −4).

De richtingscoëfficiënt is $\frac{-4}{2} = -2$ en het startgetal is 0.

Een vergelijking van lijn 1 is $y = -2x$.

Lijn 2 gaat door (−4, 0) en (0, 2).

Een vergelijking van lijn 2 is $\frac{x}{-4} + \frac{y}{2} = 1$.

Lijn 3 gaat door (3, 4) en (4, 0).

De richtingscoëfficiënt is $\frac{4 - 0}{3 - 4} = -4$.

$y = -4x + b$ door (4, 0) geeft $0 = -4 \cdot 4 + b$ dus $b = 16$.

Een vergelijking van lijn 3 is $y = -4x + 16$.

Lijn 4 gaat door (3, −3) en (4, 0).

De richtingscoëfficiënt is $\frac{-3 - 0}{3 - 4} = 3$.

$y = 3x + b$ door (3, −3) geeft $-3 = 3 \cdot 3 + b$ dus $b = -12$.

Een vergelijking van lijn 4 is $y = 3x - 12$.

b $y = 3$

c $x = 1$

© Noordhoff Uitgevers bv

8 **a** $l: y = -3x + b$ door $(3, 7)$ geeft $7 = -3 \cdot 3 + b$ dus $b = 16$.
Een vergelijking van l is $y = -3x + 16$.

b De richtingscoëfficiënt is $\frac{16 - 1}{0 - -2} = 7\frac{1}{2}$ en het startgetal is 16.

Een vergelijking van m is $y = 7\frac{1}{2}x + 16$.

c De richtingscoëfficiënt van n is ook $-0{,}25$, dus een vergelijking van n is $y = -0{,}25x + b$.
Invullen van $x = 16$ en $y = -12$ geeft $-12 = -0{,}25 \cdot 16 + b$ dus $b = -12 + 4 = -8$. Een vergelijking van n is $y = -0{,}25x - 8$.

d q staat loodrecht op de lijn met richtingscoëfficiënt 4, dus geldt voor de richtingscoëfficiënt a van q dat $a \cdot 4 = -1$, dus $a = -\frac{1}{4}$
$q: y = -\frac{1}{4}x + b$ door $(-2, 4)$ geeft $4 = -\frac{1}{4} \cdot -2 + b$ dus $b = 3\frac{1}{2}$
Een vergelijking van q is $y = -\frac{1}{4}x + 3\frac{1}{2}$

9 **a** $3x - 7 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

$2\frac{1}{2}x = 7\frac{1}{2}$
$x = 3$ en $y = 3 \cdot 3 - 7 = 2$
Het snijpunt is $(3, 2)$.

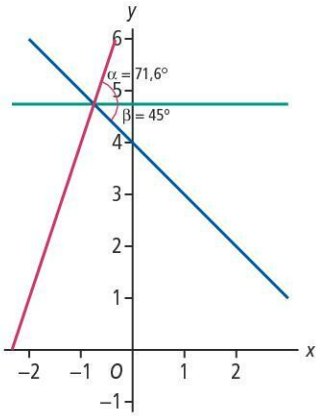
b $2x - 3y = 5$ $\qquad$ $x + 2y = 13$
$-3y = -2x + 5$ $\qquad$ $2y = -x + 13$
$y = \frac{2}{3}x - 1\frac{2}{3}$ $\qquad$ $y = -\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{2}$
Gelijkstellen:
$\frac{2}{3}x - 1\frac{2}{3} = -\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{2}$
$4x - 10 = -3x + 39$
$7x = 49$
$x = 7$ en $y = -\frac{1}{2} \cdot 7 + 6\frac{1}{2} = 3$
Het snijpunt is $(7, 3)$.

c $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$ $\qquad$ $3x - y + 4 = 0$
$3x + 2y = 12$ $\qquad$ $y = 3x + 4$
$y = -1\frac{1}{2}x + 6$
Gelijkstellen:
$-1\frac{1}{2}x + 6 = 3x + 4$

$-4\frac{1}{2}x = -2$
$9x = 4$
$x = \frac{4}{9}$ en $y = 3 \cdot \frac{4}{9} + 4 = 1\frac{1}{3} + 4 = 5\frac{1}{3}$

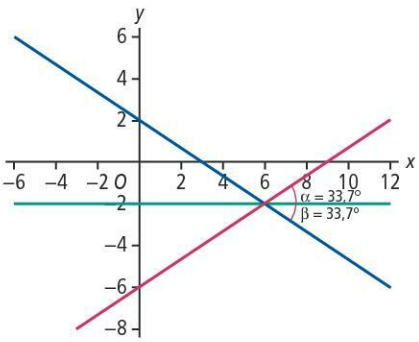
Het snijpunt is $\left(\frac{4}{9}, 5\frac{1}{3}\right)$.

10 **a** $y = 3x + 7$
$\tan(\alpha) = 3$ geeft $\alpha \approx 71{,}6°$.
$y = -x + 4$
$\tan(\beta) = 1$ geeft $\beta = 45°$.
Uit de schets blijkt dat de scherpe hoek die de lijnen maken gelijk is aan $180° - 45° - 71{,}6° \approx 63°$.



© Noordhoff Uitgevers bv

b $2x - 3y = 18$
$3y = 2x - 18$
$y = \frac{2}{3}x - 6$
$\tan(\alpha) = \frac{2}{3}$ geeft $\alpha \approx 33{,}7°$.
$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$
$2x + 3y = 6$
$y = -\frac{2}{3}x + 2$
$\tan(\beta) = \frac{2}{3}$ geeft $\beta \approx 33{,}7°$.
Uit de schets blijkt dat de scherpe hoek die de lijnen maken gelijk is aan $33{,}7° + 33{,}7° \approx 67°$.



11 A De groeifactor is $\frac{400}{500} = 0{,}8$, de beginhoeveelheid is 500.
Een formule bij tabel A is $N = 500 \cdot 0{,}8^t$
B De groeifactor is $\frac{5400}{4500} = 1{,}2$, de beginhoeveelheid is $4500 : 1{,}2^2 = 3125$.
Een formule bij tabel B is $N = 3125 \cdot 1{,}2^t$

12 **a** De groeifactor per 4 jaar is $\frac{2916}{36} = 81$.
b De groeifactor per jaar is $81^{\frac{1}{4}} = 3$.
c De groeifactor per jaar is 3, dan is het groeipercentage $(3 - 1) \cdot 100\% = 200\%$.
d De beginhoeveelheid is $36 : 3^2 = 4$.
Een formule bij de tabel is $A = 4 \cdot 3^t$ met t in jaren.
e De groeifactor per jaar is 3, dus de groeifactor per maand is $3^{\frac{1}{12}} \approx 1{,}096$.
Met t in maanden is een formule $A = 4 \cdot 1{,}096^t$

13 **a** $128 = 2^7$
b $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$
c $\frac{1}{16}\sqrt{2} = \frac{1}{2^4} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{-4} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{-3\frac{1}{2}}$
d $\frac{1}{4}\sqrt{32} = \frac{1}{2^2} \cdot (32)^{\frac{1}{2}} = 2^{-2} \cdot (2^5)^{\frac{1}{2}} = 2^{-2} \cdot 2^{2\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$
e $16\sqrt[3]{2} = 2^4 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{4\frac{1}{3}}$
f $\frac{1}{8}\sqrt{8} = \frac{1}{2^3} \cdot (8)^{\frac{1}{2}} = 2^{-3} \cdot (2^3)^{\frac{1}{2}} = 2^{-3} \cdot 2^{1\frac{1}{2}} = 2^{-1\frac{1}{2}}$

14 **a** $x^3 \cdot x^2 = x^5$
b $x \cdot (x^4)^3 = x \cdot x^{12} = x^{13}$
c $(x^{-3} \cdot x^3)^2 = x^{-6} \cdot x^6 = x^0 = 1$
d $x^3 \cdot (x^{2a})^3 = x^3 \cdot x^{6a} = x^{3+6a}$
e $x^{3a} \cdot (x^{a+1})^2 = x^{3a} \cdot x^{2a+2} = x^{5a+2}$
f $(x^a \cdot x^{2a} \cdot x^{3a})^3 = (x^{6a})^3 = x^{18a}$

15 **a** $(a^2 \cdot 2a^3)^4 = (2a^5)^4 = 16a^{20}$
b $\frac{(4a^3)^3}{(2a)^2} = \frac{64a^9}{4a^2} = 16a^7$
c $\frac{6a}{2\sqrt{a}} = \frac{6a}{2a^{\frac{1}{2}}} = 3a^{\frac{1}{2}}$
d $a \cdot \sqrt[3]{125a^2} \cdot \sqrt{25a} = a \cdot 5 \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot 5 \cdot a^{\frac{1}{2}} = 25a^{2\frac{1}{6}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

e $\dfrac{\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[3]{8a}}{\sqrt{a}}=\dfrac{a^{\frac{1}{4}}\cdot 2\cdot a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}}=2\cdot a^{\frac{3}{12}}\cdot a^{\frac{4}{12}}\cdot a^{-\frac{6}{12}}=2a^{\frac{1}{12}}$

f $\dfrac{3}{a^2}\cdot\dfrac{a^5}{a\sqrt[4]{a^3}}=\dfrac{3\cdot a^5}{a^2\cdot a\cdot a^{\frac{3}{4}}}=3\cdot a^5\cdot a^{-2}\cdot a^{-1}\cdot a^{-\frac{3}{4}}=3a^{1\frac{1}{4}}$

16 **a** $y=4\left(\frac{1}{2}t-1\right)^2-2\left(\frac{1}{2}t-1\right)+8$

$y=4\left(\frac{1}{4}t^2-t+1\right)-t+2+8$

$y=t^2-4t+4-t+10$

$y=t^2-5t+14$

b $y=4\left(\frac{1}{2}t^2+4\right)^2-6\left(\frac{1}{2}t^2+4\right)-40$

$y=4\left(\frac{1}{4}t^4+4t^2+16\right)-3t^2-24-40$

$y=t^4+16t^2+64-3t^2-64$

$y=t^4+13t^2$

17 **a** $y=\frac{1}{8}(2t^5)^4-\frac{1}{2}(2t^5)^3$

$y=\frac{1}{8}\cdot 16t^{20}-\frac{1}{2}\cdot 8t^{15}$

$y=2t^{20}-4t^{15}$

b $y=\dfrac{(t+2)^2+(t+2)}{(t+2)^2-4(t+2)+4}$

$y=\dfrac{t^2+4t+4+t+2}{t^2+4t+4-4t-8+4}$

$y=\dfrac{t^2+5t+6}{t^2}$

c $y=2(t^{-1})^{-2}-3(t^{-1})^{-1}+4$

$y=2t^2-3t+4$

d $y=\dfrac{1}{\frac{1}{t}+2-2}+5$

$y=\dfrac{1}{\frac{1}{t}}+5$

$y=t+5$

18 $y=\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2+1}$ met $x=\dfrac{1}{t}$ geeft

$y=\dfrac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^2-1}-\dfrac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}$

$y=\dfrac{1}{t^{-2}-1}-\dfrac{1}{t^{-2}+1}$

$y=\dfrac{1}{t^{-2}-1}\cdot\dfrac{t^2}{t^2}-\dfrac{1}{t^{-2}+1}\cdot\dfrac{t^2}{t^2}$

$y=\dfrac{t^2}{1-t^2}-\dfrac{t^2}{1+t^2}$

$y=\dfrac{t^2(1+t^2)}{(1-t^2)(1+t^2)}-\dfrac{t^2(1-t^2)}{(1+t^2)(1-t^2)}$

$y=\dfrac{t^2+t^4}{1-t^4}-\dfrac{t^2-t^4}{1-t^4}$

$y=\dfrac{2t^4}{1-t^4}$

© Noordhoff Uitgevers bv

19 **a** $x - 7\sqrt{x} + 12 = 0$ met $\sqrt{x} = t$ en dus $x = t^2$ geeft
$t^2 - 7t + 12 = 0$
$(t - 3)(t - 4) = 0$
$t - 3 = 0$ of $t - 4 = 0$
$t = 3$ of $t = 4$
$\sqrt{x} = 3$ of $\sqrt{x} = 4$
$x = 9$ of $x = 16$

b $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$ met $x^3 = t$ en dus $x^6 = t^2$ geeft
$t^2 + 7t - 8 = 0$
$(t + 8)(t - 1) = 0$
$t = -8$ of $t = 1$
$x^3 = -8$ of $x^3 = 1$
$x = -2$ of $x = 1$

c $4(2x - 1)^2 + 8(2x - 1) - 5 = 0$ met $2x - 1 = t$ geeft
$4t^2 + 8t - 5 = 0$
$D = 8^2 - 4 \cdot 4 \cdot -5 = 64 + 80 = 144$
$t = \dfrac{-8 + \sqrt{144}}{8} = \dfrac{-8 + 12}{8} = \frac{1}{2}$ of $t = \dfrac{-8 - \sqrt{144}}{8} = \dfrac{-8 - 12}{8} = -2\frac{1}{2}$
$2x - 1 = \frac{1}{2}$ of $2x - 1 = -2\frac{1}{2}$
$2x = 1\frac{1}{2}$ of $2x = -1\frac{1}{2}$
$x = \frac{3}{4}$ of $x = -\frac{3}{4}$

d $3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$ met $3^x = t$ en dus $3^{2x} = t^2$ geeft
$t^2 - 10t + 9 = 0$
$(t - 1)(t - 9) = 0$
$t = 1$ of $t = 9$
$3^x = 1$ of $3^x = 9$
$x = 0$ of $x = 2$

20 **a** $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$
Neem $3^x = p$, dit geeft
$p^2 - 12p + 27 = 0.$
$(p - 3)(p - 9) = 0$
$p - 3 = 0$ of $p - 9 = 0$
$p = 3$ of $p = 9$
$3^x = 3$ of $3^x = 9$
$x = 1$ of $x = 2$

b $4^{2x} - 4^x - 12 = 0$
Neem $4^x = p$, dit geeft
$p^2 - p - 12 = 0$
$(p - 4)(p + 3) = 0$
$p - 4 = 0$ of $p + 3 = 0$
$p = 4$ of $p = -3$
$4^x = 4$ of $4^x = -3$ (geen opl.)
$x = 1$

e $8(x - 2)^2 = 2(x - 2)$
Neem $x - 2 = p$, dit geeft
$8p^2 = 2p$
$8p^2 - 2p = 0$
$2p(4p - 1) = 0$
$p = 0$ of $p = \frac{1}{4}$
$x - 2 = 0$ of $x - 2 = \frac{1}{4}$
$x = 2$ of $x = 2\frac{1}{4}$

f $4x^4 + 7x^2 = 2$
Neem $x^2 = p$, dit geeft
$4p^2 + 7p = 2$
$4p^2 + 7p - 2 = 0$
$D = 7^2 - 4 \cdot 4 \cdot -2 = 49 + 32 = 81$
$p = \dfrac{-7 + \sqrt{81}}{8} = \dfrac{-7 + 9}{8} = \frac{1}{4}$ of
$p = \dfrac{-7 - \sqrt{81}}{8} = \dfrac{-7 - 9}{8} = -2$
$x^2 = \frac{1}{4}$ of $x^2 = -2$ (geen opl.)
$x = \frac{1}{2}$ of $x = -\frac{1}{2}$

© Noordhoff Uitgevers bv

c $(4^x - 1)(4^x + 1) = 3$
Neem $4^x = p$, dit geeft
$(p - 1)(p + 1) = 3$
$p^2 - 1 = 3$
$p^2 = 4$
$p = 2$ of $p = -2$
$4^x = 2$ of $4^x = -2$ (geen opl.)
$(2^2)^x = 2$
$2^{2x} = 2^1$
$2x = 1$
$x = \frac{1}{2}$

d $x - 2\sqrt{x} = 0$
Neem $\sqrt{x} = p$, en $x = p^2$, dit geeft
$p^2 - 2p = 0$
$p(p - 2) = 0$
$p = 0$ of $p - 2 = 0$
$p = 0$ of $p = 2$
$\sqrt{x} = 0$ of $\sqrt{x} = 2$
$x = 0$ of $x = 4$

g $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$
Neem $\sqrt{x} = p$ en $x = p^2$, dit geeft
$p^2 - 5p + 6 = 0$
$(p - 2)(p - 3) = 0$
$p - 2 = 0$ of $p - 3 = 0$
$p = 2$ of $p = 3$
$\sqrt{x} = 2$ of $\sqrt{x} = 3$
$x = 4$ of $x = 9$

h $5^{2x} - 125 \cdot 5^x = 0$
Neem $5^x = p$, dit geeft
$p^2 - 125p = 0$
$p(p - 125) = 0$
$p = 0$ of $p - 125 = 0$
$p = 0$ of $p = 125$
$5^x = 0$ (kan niet) of $5^x = 125 = 5^3$
$x = 3$

© Noordhoff Uitgevers bv

Hoofdstuk 1 Vergelijkingen

2 **a** $9 - 2(x - 7) = 4x + 2$
$9 - 2x + 14 = 4x + 2$
$-2x + 23 = 4x + 2$
$-6x + 23 = 2$
$-6x = -21$
$x = \frac{-21}{-6} = 3\frac{1}{2}$

b $-11x + 4 = 9 - 2x$
$-9x + 4 = 9$
$-9x = 5$
$x = -\frac{5}{9}$

c $5(x - 2) = 2x + 4$
$5x - 10 = 2x + 4$
$3x - 10 = 4$
$3x = 14$
$x = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$

d $11x = 7x - 3(1 - 5x)$
$11x = 7x - 3 + 15x$
$11x = 22x - 3$
$-11x = -3$
$x = \frac{-3}{-11} = \frac{3}{11}$

e $\frac{2}{3}(1 - 5x) = 3x + 2$
$2(1 - 5x) = 3(3x + 2)$
$2 - 10x = 9x + 6$
$-19x = 4$
$x = -\frac{4}{19}$

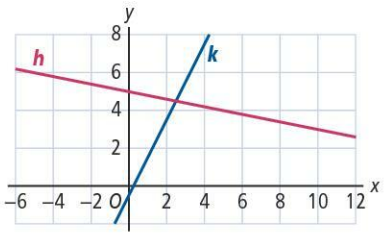
f $6 - 1\frac{1}{2}x = 4 + x$
$2 = 2\frac{1}{2}x$
$4 = 5x$
$x = \frac{4}{5}$

g $7 - 2(3 - x) = 4 - 5x$
$7 - 6 + 2x = 4 - 5x$
$1 + 2x = 4 - 5x$
$7x = 3$
$x = \frac{3}{7}$

h $7\left(2 - \frac{1}{2}x\right) = 2\frac{1}{2}x$
$14 - 3\frac{1}{2}x = 2\frac{1}{2}x$
$-6x = -14$
$x = \frac{-14}{-6} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$

6 **a** Eerst de vergelijking $-\frac{1}{3}x - 2 = -\frac{2}{3}x + 3$ oplossen.
Links en rechts maal drie geeft $-x - 6 = -2x + 9$ ofwel $x = 15$.
Uit de grafieken blijkt dat $g(x) > f(x)$ voor $x > 15$.

b



c $2x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{5}x + 5$
$2\frac{1}{5}x = 5\frac{1}{2}$
$22x = 55$
$x = \frac{55}{22} = 2\frac{1}{2}$

Uit de grafieken blijkt dat $k(x) \leq h(x)$ voor $x \leq 2\frac{1}{2}$

9 **a** $(a + 6)(a - 2) = 20$
$a^2 + 4a - 12 = 20$
$a^2 + 4a - 32 = 0$
$(a + 8)(a - 4) = 0$
$a + 8 = 0$ of $a - 4 = 0$
$a = -8$ of $a = 4$

b $x(x + 2) = 5x$
$x^2 + 2x = 5x$
$x^2 - 3x = 0$
$x(x - 3) = 0$
$x = 0$ of $x - 3 = 0$
$x = 0$ of $x = 3$

© Noordhoff Uitgevers bv

c $3t^2 + 9t + 6 = 0$
$t^2 + 3t + 2 = 0$
$(t + 1)(t + 2) = 0$
$t + 1 = 0$ of $t + 2 = 0$
$t = -1$ of $t = -2$

d $4a^2 + 13 = 29$
$4a^2 = 16$
$a^2 = 4$
$a = -2$ of $a = 2$

11 **a** $(6a + 3)^2 = (2a - 3)^2$
$6a + 3 = 2a - 3$ of $6a + 3 = -2a + 3$
$4a = -6$ of $8a = 0$
$a = -1\frac{1}{2}$ of $a = 0$

b $(2x - 6)^2 = 5^2$
$2x - 6 = -5$ of $2x - 6 = 5$
$2x = 1$ of $2x = 11$
$x = \frac{1}{2}$ of $x = 5\frac{1}{2}$

c $(x^2 - 6x)^2 = 49$

$x^2 - 6x = -7$	of	$x^2 - 6x = 7$
$x^2 - 6x + 7 = 0$	of	$x^2 - 6x - 7 = 0$
$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 8$	of	$(x + 1)(x - 7) = 0$
$x = \frac{6 - \sqrt{8}}{2 \cdot 1}$ of $x = \frac{6 - \sqrt{8}}{2 \cdot 1}$	of	$x + 1 = 0$ of $x - 7 = 0$
$x = 3 - \sqrt{2}$ of $x = 3 + \sqrt{2}$	of	$x = -1$ of $x = 7$

d $(2 - 3p)^2 = (4p + 12)^2$
$2 - 3p = 4p + 12$ of $2 - 3p = -4p - 12$
$-7p = 10$ of $p = -14$
$p = \frac{10}{-7} = -1\frac{3}{7}$ of $p = -14$

13 **a** $x(5x - 11) = 4x^2$
$x(5x - 11) = x \cdot 4x$
$x = 0$ of $5x - 11 = 4x$
$x = 0$ of $x = 11$

b $(2t + 7)(t^2 - 2) = 7(2t + 7)$
$2t + 7 = 0$ of $t^2 - 2 = 7$
$2t = -7$ of $t^2 = 9$
$t = -3\frac{1}{2}$ of $t = -3$ of $t = 3$

c $(3x - 4)(x + 5) = 8(x + 5)$
$x + 5 = 0$ of $3x - 4 = 8$
$x = -5$ of $3x = 12$
$x = -5$ of $x = 4$

d $(3x + 5)(x - 3) = (x - 3)^2$
$x - 3 = 0$ of $3x + 5 = x - 3$
$x = 3$ of $2x = -8$
$x = 3$ of $x = -4$

17 **a** $\sqrt{x^2 - x - 17} = 5$
$x^2 - x - 17 = 25$
$x^2 - x - 42 = 0$
$(x + 6)(x - 7) = 0$
$x + 6 = 0$ of $x - 7 = 0$
$x = -6$ of $x = 7$
$\sqrt{(-6)^2 - -6 - 17} = \sqrt{25} = 5$, klopt
$\sqrt{7^2 - 7 - 17} = \sqrt{25} = 5$, klopt
De oplossing is $x = -6$ of $x = 7$.

b $1 + \sqrt{7 + q} - 3 = 7$
$\sqrt{7 + q} = 9$
$7 + q = 81$
$q = 74$

c $3 - \sqrt{2 - p} = 1\frac{1}{2}$
$\sqrt{2 - p} = 1\frac{1}{2}$
$2 - p = 2\frac{1}{4}$
$p = -\frac{1}{4}$

d $\sqrt{\frac{1}{7}q - 4} = \sqrt{8}$
$\frac{1}{7}q - 4 = 8$
$\frac{1}{7}q = 12$
$q = 84$

© Noordhoff Uitgevers bv

20 **a** $2x + \sqrt{2x+2} = 10$

$\sqrt{2x+2} = 10 - 2x$
$2x + 2 = (10 - 2x)^2$
$2x + 2 = 100 - 40x + 4x^2$
$4x^2 - 42x + 98 = 0$
$2x^2 - 21x + 49 = 0$
$D = 21^2 - 4 \cdot 2 \cdot 49 = 49$
$x = \frac{21 - \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = 3\frac{1}{2}$ of $x = \frac{21 + \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = 7$
$2 \cdot 3\frac{1}{2} + \sqrt{2 \cdot 3\frac{1}{2} + 2} = 10$, klopt
$2 \cdot 7 + \sqrt{2 \cdot 7 + 2} = 10$, klopt niet
De oplossing is $x = 3\frac{1}{2}$

b $\sqrt{4x^2 - 12x} - 3 + x = 0$

$\sqrt{4x^2 - 12x} = 3 - x$
$4x^2 - 12x = (3 - x)^2$
$4x^2 - 12x = x^2 - 6x + 9$
$3x^2 - 6x - 9 = 0$
$x^2 - 2x - 3 = 0$
$(x + 1)(x - 3) = 0$
$x = -1$ of $x = 3$
$\sqrt{4 \cdot (-1)^2 - 12 \cdot -1} - 3 + -1 = 0$, klopt
$\sqrt{4 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3} - 3 + 3 = 0$, klopt
De oplossing is $x = -1$ of $x = 3$.

c $\sqrt{2 - x} \cdot \sqrt{4x + 2} = 0$

$2 - x = 0$ of $4x + 2 = 0$
$x = 2$ of $4x = -2$
$x = 2$ of $x = -\frac{1}{2}$
$\sqrt{2 - 2} \cdot \sqrt{4 \cdot 2 + 2} = 0$, klopt
$\sqrt{2 - -\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{4 \cdot -\frac{1}{2} + 2} = 0$, klopt
De oplossing is $x = 2$ of $x = -\frac{1}{2}$

d $3 + \sqrt{x + 17} = x$

$\sqrt{x + 17} = x - 3$
$x + 17 = (x - 3)^2$
$x + 17 = x^2 - 6x + 9$
$x^2 - 7x - 8 = 0$
$(x - 8)(x + 1) = 0$
$x = 8$ of $x = -1$
$3 + \sqrt{8 + 17} = 8$, klopt
$3 + \sqrt{-1 + 17} = -1$, klopt niet
De oplossing is $x = 8$.

24 **a** $\frac{15}{5x - 3} = 3$

$5x - 3 = 5$
$5x = 8$
$x = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$

b $\frac{-33}{10 - 2a} = 11$

$10 - 2a = -3$
$2a = 13$
$a = 6\frac{1}{2}$

c $\frac{81}{p^2 - 3} = 9$

$p^2 - 3 = 9$
$p^2 = 12$
$p = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ of $p = -2\sqrt{3}$

d $\frac{30}{8 - m^2} - 2\frac{3}{4} = 1$

$\frac{30}{8 - m^2} = 3\frac{3}{4}$
$\frac{120}{8 - m^2} = 15$
$8 - m^2 = 8$
$m^2 = 0$, dus $m = 0$

27 **a** $\frac{4}{6x - 2} = \frac{2x}{6x - 4}$

$4(6x - 4) = 2x(6x - 2)$
$24x - 16 = 12x^2 - 4x$
$3x^2 - 7x + 4 = 0$
$D = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 1$
$x = \frac{7 - \sqrt{1}}{2 \cdot 3} = 1$ of $x = \frac{7 + \sqrt{1}}{2 \cdot 3} = 1\frac{1}{3}$, beide voldoen.

b $\frac{3 - x}{x - 3} + 5 = 2x$

$\frac{-(x - 3)}{x - 3} = 2x - 5$
$-1 = 2x - 5$
$2x = 4$
$x = 2$, voldoet

© Noordhoff Uitgevers bv

c $\dfrac{3x}{7x-3} = x$
$x(7x-3) = 3x$ mits $x \neq \frac{3}{7}$
$7x^2 - 3x = 3x$
$7x^2 - 6x = 0$ dus $x(7x-6) = 0$
$x = 0$ of $x = \frac{6}{7}$

d $\dfrac{x-3}{x+3} = \dfrac{x+4}{x-3}$
$(x-3)^2 = (x+3)(x+4)$
$x^2 - 6x + 9 = x^2 + 7x + 12$
$-13x = 3$
$x = -\frac{3}{13}$, voldoet

30 **a** $2(b-1) = 3a - 4$
$2b - 2 = 3a - 4$
$2b = 3a - 2$
$b = 1\frac{1}{2}a - 1$

b $\frac{2}{7}a - \frac{1}{2}b = 0$
$4a - 7b = 0$
$-7b = -4a$
$b = \frac{4}{7}a$

c $13b - 16 = 2a + 3(b-7)$
$13b - 16 = 2a + 3b - 21$
$10b = 2a - 5$
$b = \frac{1}{5}a - \frac{1}{2}$

d $4a + 7b = 14$
$7b = -4a + 14$
$b = -\frac{4}{7}a + 2$

31 **a** $a = \sqrt{2b+3}$
$a^2 = 2b + 3$
$a^2 - 3 = 2b$
$b = \frac{1}{2}a^2 - 1\frac{1}{2}$

b $\dfrac{2}{b} = 3a + 7$
$2 = b(3a+7)$
$b = \dfrac{2}{3a+7}$

c $2 + \dfrac{3}{b} = 4a - 8$
$\dfrac{3}{b} = 4a - 10$
$3 = b(4a - 10)$
$b = \dfrac{3}{4a-10}$

d $a - 5 = \sqrt{b+3}$
$(a-5)^2 = b + 3$
$b = (a-5)^2 - 3$
$b = a^2 - 10a + 22$

33 **a** $t = 13x + 9$ substitueren in $y = -2t + 71$ geeft
$y = -2(13x + 9) + 71$
$y = -26x - 18 + 71$
$y = -26x + 53$

b $q = x^2 + 2$ substitueren in $y = 9 - 6q$ geeft
$y = 9 - 6(x^2 + 2)$
$y = 9 - 6x^2 - 12$
$y = -6x^2 - 3$

c $p = 3 - 2x$ substitueren in $y = p^2 + 16$ geeft
$y = (3 - 2x)^2 + 16$
$y = 9 - 12x + 4x^2 + 16$
$y = 4x^2 - 12x + 25$

36 **a** $x^4 - 30x^2 - 31 = 0$
substitutie $x^2 = p$
$p^2 - 30p - 31 = 0$
$(p+1)(p-31) = 0$
$p = -1$ of $p = 31$
omdat $p = x^2$ geldt
$x^2 = -1$ (geen oplossing) of $x^2 = 31$
$x = -\sqrt{31}$ of $x = \sqrt{31}$

b $(3x+4)^2 - 5(3x+4) + 6 = 0$
substitutie $3x + 4 = p$
$p^2 - 5p + 6 = 0$
$(p-2)(p-3) = 0$
$p = 2$ of $p = 3$
omdat $p = 3x + 4$ geldt
$3x + 4 = 2$ of $3x + 4 = 3$
$3x = -2$ of $3x = -1$
$x = -\frac{2}{3}$ of $x = -\frac{1}{3}$

© Noordhoff Uitgevers bv

c $(5x-3)^2 = 20x - 12$
$(5x-3)^2 = 4(5x-3)$
substitutie $5x - 3 = p$
$p^2 = 4p$
$p = 0$ of $p = 4$
omdat $p = 5x - 3$ geldt
$5x - 3 = 0$ of $5x - 3 = 4$
$x = \frac{3}{5}$ of $x = 1\frac{2}{5}$

d $5x^4 + 11x^2 + 2 = 0$
substitutie $x^2 = p$
$5p^2 + 11p + 2 = 0$
$D = 11^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 81$
$p = \frac{-11 + \sqrt{81}}{2 \cdot 5}$ of $p = \frac{-11 - \sqrt{81}}{2 \cdot 5}$
$p = -\frac{1}{5}$ of $p = -2$
omdat $p = x^2$ geldt
$x^2 = -\frac{1}{5}$ of $x^2 = -2$
beide hebben geen oplossing.

38 **a** Dan moet gelden $2 \cdot 3^2 + 3m - 3 = 0$ ofwel $15 + 3m = 0$, dus $m = -5$
b Dan moet gelden $a \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 5 = 7$, ofwel $9a = 6$, dus $a = \frac{2}{3}$
c Dan moet gelden $2^2 + 2p - 5 = 2 - p$ ofwel $3p = 3$, dus $p = 1$

Hoofdstuk 2 Machtsfuncties

3 **a** $a^{-5} = \frac{1}{a^5}$

b $2b^2 \cdot 3b^{-3} = 6b^{-1} = \frac{6}{b}$

c $\frac{8a \cdot a^0}{2a^6} = \frac{8a}{2a^6} = \frac{4}{a^5}$

d $\frac{1}{2}p^{-3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^3} = \frac{1}{2p^3}$

e $2d^3 \cdot 6d \cdot \frac{1}{2}d^{-8} = 6d^{-4} = \frac{6}{d^4}$

f $\frac{(3x)^2}{3x \cdot x^{-1}} = \frac{9x^2}{3x^0} = 3x^2$

9 **a** $a \cdot (-2a^3)^2 = a \cdot (-2)^2 \cdot (a^3)^2 = a \cdot 4 \cdot a^6 = 4a^7$
b $6x^4 \cdot (2x)^3 = 6x^4 \cdot 2^3 \cdot x^3 = 6x^4 \cdot 8 \cdot x^3 = 48x^7$
c $\left(\frac{2x^0}{x^2 \cdot x^3}\right)^4 = \frac{2^4 \cdot (x^0)^4}{(x^2)^4 \cdot (x^3)^4} = \frac{16 \cdot 1^4}{x^8 \cdot x^{12}} = \frac{16}{x^{20}}$
d $(-5p)^3 = (-5)^3 \cdot p^3 = -125p^3$
e $(2u)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}u^2\right)^4 = 2^3 \cdot u^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot (u^2)^4 = 8 \cdot u^3 \cdot \frac{1}{16} \cdot u^8 = \frac{1}{2}u^{11}$
f $\frac{-7q^3 \cdot -2q^5}{-4(q^{-2})^{-1}} = \frac{14q^8}{-4q^2} = \frac{7q^6}{-2} = -3\frac{1}{2}q^6$

12 **a** $12^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{12}$

b $3^{2\frac{1}{4}} = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{4}} = 9\sqrt[4]{3}$

c $x^{3\frac{1}{2}} = x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^3\sqrt{x}$

d $(a^3)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$

e $5^{\frac{1}{4}} \cdot 5^3 = 125\sqrt[4]{5}$

f $8 \cdot \left(8^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = 8 \cdot 8^{\frac{1}{12}} = 8\sqrt[12]{8}$

16 **a** $\sqrt[7]{3^2} = 3^{\frac{2}{7}}$ of $9^{\frac{1}{7}}$

b $\sqrt[9]{5^7} = 5^{\frac{7}{9}}$

c $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{-\frac{1}{3}}$

d $\sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}}$

e $\sqrt[7]{a^3} = a^{\frac{3}{7}}$

f $\frac{1}{\sqrt[7]{a^4}} = \frac{1}{a^{\frac{4}{7}}} = a^{-\frac{4}{7}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

19 **a** $(a^2)^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[4]{a} = a^1 \cdot a^{-\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = a^{1-\frac{4}{12}+\frac{3}{12}} = a^{\frac{11}{12}} = \sqrt[12]{a^{11}}$

b $a^2 \cdot (a^{-2})^{-1} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^2 \cdot a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{4\frac{1}{2}} = a^4 \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^4\sqrt{a}$

c $\dfrac{a^3 \cdot 6a^2}{3\sqrt{a}} = \dfrac{6a^5}{3a^{\frac{1}{2}}} = 2a^{4\frac{1}{2}} = 2a^4 \cdot a^{\frac{1}{2}} = 2a^4\sqrt{a}$

d $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[5]{a^2} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{2}{5}} = a^{\frac{5}{15}+\frac{6}{15}} = a^{\frac{11}{15}} = \sqrt[15]{a^{11}}$

e $a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a} \cdot a^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{6}+\frac{3}{6}-\frac{4}{6}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$

f $\dfrac{1}{a^2 \cdot \sqrt{a}} \cdot 4\sqrt[3]{a^2} \cdot a^{-2} = \dfrac{1}{a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}}} \cdot 4a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{-2} = \dfrac{1}{a^{2\frac{1}{2}}} \cdot 4a^{\frac{2}{3}-2} = 4a^{-1\frac{1}{3}-2\frac{1}{2}} = 4a^{-1\frac{2}{6}-2\frac{3}{6}} =$
$4a^{-3\frac{5}{6}} = \dfrac{4}{a^{3\frac{5}{6}}} = \dfrac{4}{a^3 \cdot a^{\frac{5}{6}}} = \dfrac{4}{a^3 \cdot \sqrt[6]{a^5}}$

26 **a** $g(x) = x^{1\frac{1}{4}}$
$g(x) = x^1 \cdot x^{\frac{1}{4}}$
$g(x) = x \cdot \sqrt[4]{x}$

b $g(x) = x^{3\frac{2}{5}}$
$g(x) = x^3 \cdot x^{\frac{2}{5}}$
$g(x) = x^3 \cdot \sqrt[5]{x^2}$

c $g(x) = x^{7\frac{3}{5}}$
$g(x) = x^7 \cdot x^{\frac{3}{5}}$
$g(x) = x^7 \cdot \sqrt[5]{x^3}$

d $g(x) = x^{1\frac{1}{6}}$
$g(x) = x^1 \cdot x^{\frac{1}{6}}$
$g(x) = x \cdot \sqrt[6]{x}$

e $g(x) = x^{5\frac{3}{10}}$
$g(x) = x^5 \cdot x^{\frac{3}{10}}$
$g(x) = x^5 \cdot \sqrt[10]{x^3}$

f $g(x) = x^{\frac{8}{3}}$
$g(x) = x^2 \cdot x^{\frac{2}{3}}$
$g(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}$

30 **a** $x^6 = 64$
$x = \sqrt[6]{64} = 2$ of $x = -\sqrt[6]{64} = -2$

b $x^3 = 12$
$x = \sqrt[3]{12}$

c $x^5 = -12$
$x = \sqrt[5]{-12}$

d $x^4 + 18 = 29$
$x^4 = 11$
$x = \sqrt[4]{11}$ of $x = -\sqrt[4]{11}$

e $4x^3 - 14 = 50$
$4x^3 = 64$
$x^3 = 16$
$x = \sqrt[3]{16}$

f $7x^2 + 15 = 50$
$7x^2 = 35$
$x^2 = 5$
$x = \sqrt{5}$ of $x = -\sqrt{5}$

g $0{,}2x^4 + 3 = 16$
$0{,}2x^4 = 13$
$x^4 = 65$
$x = \sqrt[4]{65}$ of $x = -\sqrt[4]{65}$

h $100 - \frac{1}{4}x^9 = 0$
$\frac{1}{4}x^9 = 100$
$x^9 = 400$
$x = \sqrt[9]{400}$

34 **a** $6x^{\frac{2}{9}} = 12$
$x^{\frac{2}{9}} = 2$
$\left(x^{\frac{2}{9}}\right)^{\frac{9}{2}} = 2^{\frac{9}{2}}$
$x = \sqrt{2^9} = \sqrt{512}$

b $x^{\frac{1}{5}} + 1 = 4$
$x^{\frac{1}{5}} = 3$
$\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^5 = 3^5$
$x = 3^5 = 243$

c $x^{2\frac{1}{2}} = 9$
$\left(x^{2\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{5}} = 9^{\frac{2}{5}}$
$x = \sqrt[5]{9^2} = \sqrt[5]{81}$

d $5x^{\frac{3}{5}} + 25 = 100$
$5x^{\frac{3}{5}} = 75$
$x^{\frac{3}{5}} = 15$
$\left(x^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{5}{3}} = 15^{\frac{5}{3}}$
$x = \sqrt[3]{15^5} = \sqrt[3]{759\,375}$

© Noordhoff Uitgevers bv

e $4 - x^{-\frac{1}{4}} = 1$

$x^{-\frac{1}{4}} = 3$

$\left(x^{-\frac{1}{4}}\right)^{-4} = 3^{-4}$

$x = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

f $18 - 2x^{-3\frac{1}{2}} = 14$

$2x^{-3\frac{1}{2}} = 4$

$x^{-3\frac{1}{2}} = 2$

$\left(x^{-3\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{7}} = 2^{-\frac{2}{7}}$

$x = \frac{1}{2^{\frac{2}{7}}}$

$x = \frac{1}{\sqrt[7]{2^2}} = \frac{1}{\sqrt[7]{4}}$

38 **a** $3x^4 - x^3 = 0$

$x^3(3x - 1) = 0$

$x^3 = 0$ of $3x - 1 = 0$

$x = 0$ of $3x = 1$

$x = 0$ of $x = \frac{1}{3}$

b $12x^{12} - 3x^8 = 0$

$3x^8(4x^4 - 1) = 0$

$3x^8 = 0$ of $4x^4 - 1 = 0$

$x = 0$ of $4x^4 = 1$

$x = 0$ of $x^4 = \frac{1}{4}$

$x = 0$ of $x = \sqrt[4]{\frac{1}{4}}$ of $x = -\sqrt[4]{\frac{1}{4}}$

c $3x^5 = 24x^2$

$3x^3 \cdot x^2 = 24x^2$

$3x^3 = 24$ of $x^2 = 0$

$x^3 = 8$ of $x = 0$

$x = \sqrt[3]{8} = 2$ of $x = 0$

d $32x = -x^6$

$x^6 + 32x = 0$

$x(x^5 + 32) = 0$

$x = 0$ of $x^5 + 32 = 0$

$x = 0$ of $x^5 = -32$

$x = 0$ of $x = \sqrt[5]{-32} = -2$

e $x^7 + \frac{1}{8}x^4 = 0$

$x^4\left(x^3 + \frac{1}{8}\right) = 0$

$x^4 = 0$ of $x^3 + \frac{1}{8} = 0$

$x = 0$ of $x^3 = -\frac{1}{8}$

$x = 0$ of $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}$

f $5x^3 - 20x^2\sqrt{x} = 0$

$5x^2\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 4\right) = 0$

$5x^2\sqrt{x} = 0$ of $\sqrt{x} - 4 = 0$

$x = 0$ of $\sqrt{x} = 4$

$x = 0$ of $x = 16$

g $x^3\sqrt[4]{x} - 2x\sqrt[4]{x} = 0$

$x\sqrt[4]{x}(x^2 - 2) = 0$

$x\sqrt[4]{x} = 0$ of $x^2 - 2 = 0$

$x = 0$ of $x^2 = 2$

$x = 0$ of $x = \sqrt{2}$ of $x = -\sqrt{2}$

h $5x^{3\frac{1}{2}} = 10x$

$5x^{2\frac{1}{2}} \cdot x = 10x$

$5x^{2\frac{1}{2}} = 10$ of $x = 0$

$x^{2\frac{1}{2}} = 2$ of $x = 0$

$x = 2^{\frac{2}{5}}$ of $x = 0$

$x = \sqrt[5]{2^2} = \sqrt[5]{4}$ of $x = 0$

41 **a** $f(x) = 4x^2 \cdot 5x\sqrt{x}$

$f(x) = 4x^2 \cdot 5x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}}$

$f(x) = 20x^{3\frac{1}{2}}$

b $f(x) = \frac{4x \cdot (3x)^2}{9x^{-1\frac{1}{3}}}$

$f(x) = \frac{4x \cdot 9x^2}{9x^{-1\frac{1}{3}}}$

$f(x) = \frac{4x^3}{x^{-1\frac{1}{3}}}$

$f(x) = 4x^{4\frac{1}{3}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

c $f(x) = 6x^{-1\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{9x}$

$f(x) = 6x^{-1\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{x}$

$f(x) = 6x^{-1\frac{1}{2}} \cdot 3x^{\frac{1}{2}}$

$f(x) = 18x^{-1}$

d $f(x) = \dfrac{6x \cdot \sqrt[5]{x^4}}{12x^3}$

$f(x) = \dfrac{6x \cdot x^{\frac{4}{5}}}{12x^3}$

$f(x) = \dfrac{6x^{1\frac{4}{5}}}{12x^3}$

$f(x) = \frac{1}{2}x^{-1\frac{1}{5}}$

43 **a** $P = \frac{1}{4} \cdot Q^3$

$\frac{1}{4} \cdot Q^3 = P$

$Q^3 = 4P$

$Q = (4P)^{\frac{1}{3}}$

$Q = 4^{\frac{1}{3}} \cdot P^{\frac{1}{3}}$

$Q \approx 1{,}59 \cdot P^{0{,}33}$

b $P = 10 \cdot Q^{-2{,}5}$

$10 \cdot Q^{-2{,}5} = P$

$Q^{-2{,}5} = \frac{1}{10}P$

$Q = \left(\frac{1}{10}P\right)^{-\frac{2}{5}}$

$Q = \left(\frac{1}{10}\right)^{-\frac{2}{5}} \cdot P^{-\frac{2}{5}}$

$Q \approx 2{,}51 \cdot P^{-0{,}4}$

c $P = \frac{1}{3} \cdot Q^{1{,}25}$

$\frac{1}{3} \cdot Q^{1{,}25} = P$

$Q^{1{,}25} = 3P$

$Q = (3P)^{\frac{1}{1{,}25}}$

$Q = 3^{\frac{1}{1{,}25}} \cdot P^{\frac{1}{1{,}25}}$

$Q \approx 2{,}41 \cdot P^{0{,}8}$

d $P = \frac{3}{7} \cdot Q^{1\frac{3}{5}}$

$\frac{3}{7} \cdot Q^{1\frac{3}{5}} = P$

$Q^{1\frac{3}{5}} = \frac{7}{3}P$

$Q = \left(\frac{7}{3}P\right)^{\frac{5}{8}}$

$Q = \left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{5}{8}} \cdot P^{\frac{5}{8}}$

$Q \approx 1{,}70 \cdot P^{0{,}63}$

e $P = 2{,}6 \cdot Q^{-0{,}45}$

$2{,}6 \cdot Q^{-0{,}45} = P$

$Q^{-0{,}45} = \frac{1}{2{,}6}P$

$Q = \left(\frac{1}{2{,}6}P\right)^{-\frac{1}{0{,}45}}$

$Q = \left(\frac{1}{2{,}6}\right)^{-\frac{1}{0{,}45}} \cdot P^{-\frac{1}{0{,}45}}$

$Q \approx 8{,}36 \cdot P^{-2{,}22}$

f $P = 0{,}0001 \cdot Q^4$

$0{,}0001 \cdot Q^4 = P$

$Q^4 = 10\,000P$

$Q = (10\,000P)^{\frac{1}{4}}$

$Q = 10\,000^{\frac{1}{4}} \cdot P^{\frac{1}{4}}$

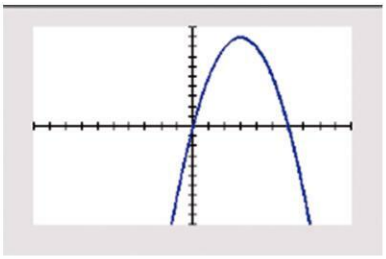
$Q = 10 \cdot P^{0{,}25}$

© Noordhoff Uitgevers bv

5 **a** x kan niet nul zijn, dus het domein is $\langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$.
x^2 is positief op het domein, dus $f(x) < 0$. Het bereik is $\langle \leftarrow, 0\rangle$.

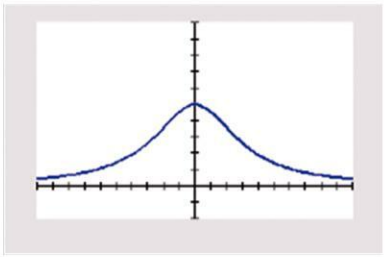
b Voor het domein moet gelden $5 - x > 0$ ofwel $x < 5$.
Het domein is dus $\langle \leftarrow, 5\rangle$.
$\sqrt{5 - x}$ is op het domein positief, dus het bereik is $\langle 0, \rightarrow\rangle$.

c Voor x kun je alle getallen invullen, dus het domein is $\mathbb{R}$.
Invoer: $y_1 = 6x - x^2$



Optie: maximum geeft $y = 9$. Het bereik is $\langle \leftarrow, 9]$.

d Voor x kun je alle getallen invullen, dus het domein is $\mathbb{R}$.
Invoer: $y_1 = 50/(10 + x^2)$

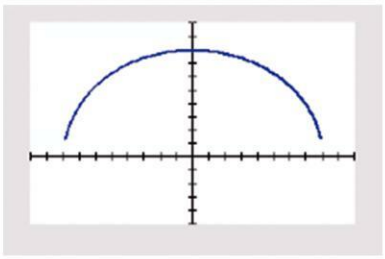


$k(x)$ is altijd positief, k is maximaal als $x = 0$
$k(0) = \frac{50}{10} = 5$. Het bereik is $\langle 0, 5]$.

6 **a** Voor x kun je alle getallen invullen, dus het domein is $\mathbb{R}$.
$5x^4 \geq 0$ dus $f(x) \leq 1$. Het bereik is $\langle \leftarrow, 1]$.

b Voor x kun je alle getallen invullen dus het domein is $\mathbb{R}$.
Het bereik is $\mathbb{R}$.

c Voor het domein moet gelden $64 - x^2 \geq 0$ ofwel $x^2 \leq 64$ dus $-8 \leq x \leq 8$.
Het domein is $[-8, 8]$.
Invoer: $y_1 = \sqrt{64 - x^2}$

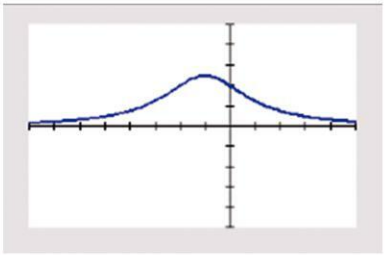


$\sqrt{64 - x^2} \geq 0$ en $\sqrt{64 - x^2}$ is maximaal als $x = 0$, dus het bereik is $[0, 8]$.

© Noordhoff Uitgevers bv

d $x^2 + 2x + 5 = 0$ heeft geen oplossingen, dus voor x kun je alle getallen invullen. Het domein is daarom $\mathbb{R}$.

Invoer: $y_1 = \dfrac{10}{x^2 + 2x + 5}$



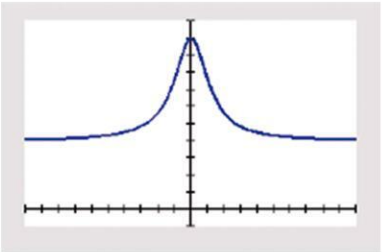
Optie: maximum geeft $\left(-1, 2\frac{1}{2}\right)$. Het bereik is $\left\langle 0, 2\frac{1}{2}\right]$.

13 **a** Het domein is $\langle \leftarrow, 5\rangle \cup \langle 5, \rightarrow\rangle$.
Het bereik is $\langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$.

b Voor x kun je alle getallen invullen, dus het domein is $\mathbb{R}$.
$3x^2 \geq 0$ dus $g(x) \geq 5$. Het bereik is $[5, \rightarrow\rangle$.

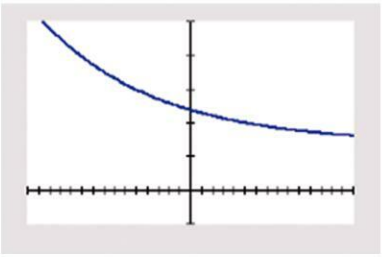
c Voor x kun je alle getallen invullen dus het domein is $\mathbb{R}$.

Invoer: $y_1 = 4 + \dfrac{18}{2x^2 + 3}$



$\dfrac{18}{2x^2 + 3} > 0$, dus $h(x)$ is in elk geval groter dan 4.
$h(x)$ is maximaal als $x = 0$, $h(x) = 4 + \frac{18}{3} = 10$, dus het bereik is $\langle 4, 10]$.

d Voor x kun je alle getallen invullen, dus het domein is $\mathbb{R}$.
Invoer: $y_1 = 14 + 10 \cdot 0{,}91^x$



$10 \cdot 0{,}91^x > 0$ dus $k(x) > 14$

Het bereik is $\langle 14, \rightarrow\rangle$.

© Noordhoff Uitgevers bv

15 **a** De horizontale asymptoot is $y = 0$.

b De horizontale asymptoot is $y = 0$.
$16 - x^2 = 0$ als $x = 4$ of $x = -4$.
De verticale asymptoten zijn $x = 4$ en $x = -4$.

c De horizontale asymptoot is $y = 0$.
$18 - 2x^2 = 0$ als $x^2 = 9$ dus als $x = 3$ of $x = -3$.
De verticale asymptoten zijn $x = 3$ en $x = -3$.

d De horizontale asymptoot is $y = 2$.
$1 - 2x = 0$ als $x = \frac{1}{2}$
De verticale asymptoot is $x = \frac{1}{2}$

20 $f(x) = 2x^2 + x - 1$, graad 2
$g(x) = x^4 - 1$, graad 4
$h(x) = x(3x^2 - x - 4) = 3x^3 - x^2 - 4x$, graad 3
$k(x) = 3 - x^2 + 3x + x^4$, graad 4
$m(x) = x^2 - 4x + 4 - (x^2 + 4x + 4) = -8x$, graad 1
$n(x) = x^3 + 2x + 7 - 2x - x^3 = 7$, graad 0

26 **a** $h(x) = 3x^2 - 2x + 2$
$k(x) = \dfrac{10}{2x + 3} + 2$

b $m(x) = 3(x - 6)^2 - 2(x - 6) + 2$ ofwel $m(x) = 3x^2 - 38x + 122$
$n(x) = \dfrac{10}{2(x - 6) + 3}$ ofwel $n(x) = \dfrac{10}{2x - 9}$

28 **a** $h(x) = -4\left(\dfrac{15}{x^2 - x + 4}\right) + 6 = \dfrac{-60}{x^2 - x + 4} + 6$
$k(x) = -4(3x - 2x^2 + 5) + 6 = -12x + 8x^2 - 14$

b $h(x) = 3\left(\dfrac{15}{(x - 5)^2 - (x - 5) + 4}\right) = \dfrac{45}{(x - 5)^2 - x + 9} = \dfrac{45}{x^2 - 11x + 34}$
$k(x) = 3(3(x - 5) - 2(x - 5)^2 + 5) = 9x - 30 - 6(x - 5)^2 = -6x^2 + 69x - 180$

© Noordhoff Uitgevers bv

31 **a** Vermenigvuldigen met 3 ten opzichte van de x-as geeft
$h(x) = 3(2x^2 - 3x) = 6x^2 - 9x$.
Daarna 13 omhoog verschuiven geeft $g(x) = 6x^2 - 9x + 13$.

b $4\frac{1}{3}$ omhoog verschuiven geeft $h(x) = 2x^2 - 3x + 4\frac{1}{3}$.
Vervolgens vermenigvuldigen met 3 ten opzichte van de x-as geeft
$g(x) = 3\left(2x^2 - 3x + 4\frac{1}{3}\right) = 6x^2 - 9x + 13$.

34 **a** $2x - 4 = \sqrt{x^2 - 5}$
$4x^2 - 16x + 16 = x^2 - 5$
$3x^2 - 16x + 21 = 0$
$D = 16^2 - 4 \cdot 3 \cdot 21 = 4$
$x = \frac{16 + \sqrt{4}}{6} = 3$ of $x = \frac{16 - \sqrt{4}}{6} = 2\frac{1}{3}$
$2 \cdot 3 - 4 = \sqrt{3^2 - 5}$, klopt
$2 \cdot 2\frac{2}{3} - 4 = \sqrt{\left(2\frac{1}{3}\right)^2 - 5}$, klopt ook
De oplossingen zijn $x = 3$ of $x = 2\frac{1}{3}$

b $\frac{20}{x - 1} = 3x + 4$
$(x - 1)(3x + 4) = 20$ mits $x \neq 1$
$3x^2 + x - 4 = 20$
$3x^2 + x - 24 = 0$
$D = 1 - 4 \cdot 3 \cdot -24 = 289$
$x = \frac{-1 + \sqrt{289}}{6} = 2\frac{2}{3}$ of
$x = \frac{-1 - \sqrt{289}}{6} = -3$

c $\frac{1}{2}x(2x - 5) = x^2 - 3x - 11$
$x^2 - 2\frac{1}{2}x = x^2 - 3x - 11$
$\frac{1}{2}x = -11$
$x = -22$

d $x - \sqrt{x + 5} = 1$
$x - 1 = \sqrt{x + 5}$
$x^2 - 2x + 1 = x + 5$
$x^2 - 3x - 4 = 0$
$(x - 4)(x + 1) = 0$
$x = 4$ of $x = -1$
$4 - \sqrt{4 + 5} = 1$, klopt
$-1 - \sqrt{-1 + 5} = 1$ klopt niet
De oplossing is $x = 4$

40 **a** $x^3 - 2x^2 - 15x = 0$
$x(x^2 - 2x - 15) = 0$
$x(x - 5)(x + 3) = 0$
$x = 0$ of $x = 5$ of $x = -3$

b $(3x - 2)\sqrt{x + 1} = 15x - 10$
$(3x - 2)\sqrt{x + 1} = 5(3x - 2)$
$3x - 2 = 0$ of $\sqrt{x + 1} = 5$
$3x = 2$ of $x + 1 = 25$
$x = \frac{2}{3}$ of $x = 24$

c $\frac{2x - 5}{x} = 4x - 10$
$2x - 5 = 4x^2 - 10x$ mits $x \neq 0$
$4x^2 - 12x + 5 = 0$
$D = 144 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 64$
$x = \frac{12 + \sqrt{64}}{8} = 2\frac{1}{2}$ of $x = \frac{12 - \sqrt{64}}{8} = \frac{1}{2}$

d $(x - 1)^2 = (2x + 3)(x - 1)$
$x - 1 = 0$ of $x - 1 = 2x + 3$
$x = 1$ of $x = -4$

© Noordhoff Uitgevers bv

3 **a** $y = -4x + 8$

$4x + y = 8$

$\frac{x}{2} + \frac{y}{8} = 1$

b $\frac{x}{3\frac{1}{3}} + \frac{y}{1\frac{1}{2}} = 1$

$\frac{y}{1\frac{1}{2}} = -\frac{x}{3\frac{1}{3}} + 1$

$y = -\frac{1\frac{1}{2}}{3\frac{1}{3}} \cdot x + 1\frac{1}{2}$

$y = -\frac{9}{20}x + 1\frac{1}{2}$

c $y = 1\frac{2}{3}x - 5$

$-1\frac{2}{3}x + y = -5$

$5x - 3y = 15$

5 **a** $\frac{x}{3} + \frac{y}{8} = 1$, want de lijn gaat door (3, 0) en (0, 8).

De andere twee vormen zijn $2\frac{2}{3}x + y = 8$ ofwel $8x + 3y = 24$ en $y = -2\frac{2}{3}x + 8$.

b De richtingscoëfficiënt is $\frac{11 - 3}{-5 - -1} = \frac{8}{-4} = -2$.

De vergelijking heeft de vorm $y = -2x + b$.

Invullen van $(-1, 3)$ geeft $3 = 2 + b$, dus $b = 1$ en $y = -2x + 1$.

De andere twee vormen zijn $2x + y = 1$ en $\frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{1} = 1$.

c De richtingscoëfficiënt is $\frac{2 - 6}{2 - 0} = \frac{-4}{2} = -2$.

De vergelijking heeft de vorm $y = -2x + b$.

De lijn gaat door (0, 6), dus de vergelijking is $y = -2x + 6$.

De andere twee vormen zijn $2x + y = 6$ en $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$.

d De richtingscoëfficiënt is $\frac{-129 - 51}{65 - 20} = \frac{-180}{45} = -4$.

De vergelijking heeft de vorm $y = -4x + b$.

Invullen van (20, 51) geeft $51 = -4 \cdot 20 + b$, dus $b = 131$.

De drie vormen zijn $y = -4x + 131$ en $4x + y = 131$ en $\frac{x}{32\frac{3}{4}} + \frac{y}{131} = 1$.

13 **a** $\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ 2x + 5y = 22 \end{cases}$

vermenigvuldig de eerste vergelijking met 5 en de tweede met 2:

$\begin{cases} 15x + 10y = 55 \\ 4x + 10y = 44 \end{cases}$

door aftrekken vind je $11x = 11$, dus $x = 1$.

$3 \cdot 1 + 2y = 11$, dit geeft $2y = 8$ en $y = 4$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $\begin{cases} 3x - 2y = 62 \\ 2x + 3y = 50 \end{cases}$

vermenigvuldig de eerste vergelijking met 3 en de tweede met 2:

$\begin{cases} 9x - 6y = 186 \\ 4x + 6y = 100 \end{cases}$

door optellen vind je $13x = 286$, dus $x = 22$.

$3 \cdot 22 - 2y = 62$, dit geeft $2y = 4$ en $y = 2$.

c $\begin{cases} x - 2y + 11 = 0 \\ 5x + 3y + 3 = 0 \end{cases}$

Uit de eerste vergelijking volgt $x = 2y - 11$.

Dit substitueren in de tweede vergelijking geeft $5(2y - 11) + 3y + 3 = 0$.

$10y - 55 + 3y + 3 = 0$

$13y = 52$, dus $y = 4$

$x = 2 \cdot 4 - 11 = -3$

d $\begin{cases} 5x - 3y = 9 \\ 2x + 5y = 16 \end{cases}$

vermenigvuldig de eerste vergelijking met 5 en de tweede met 3:

$\begin{cases} 25x - 15y = 45 \\ 6x + 15y = 48 \end{cases}$

door optellen vind je $31x = 93$, dus $x = 3$.

$5 \cdot 3 - 3y = 9$, dus $3y = 6$ en $y = 2$.

16 a $\begin{cases} 6x - 4y = 3 \\ y = 1\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \end{cases}$

Herleiden van de eerste vergelijking geeft $4y = 6x - 3$ ofwel $y = 1\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

De bijbehorende lijnen zijn evenwijdig, er zijn geen oplossingen.

b $\begin{cases} 6(x - y) = 3(x + 1) \\ x + 2y = 2 \end{cases}$ ofwel $\begin{cases} 6x - 6y = 3x + 3 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$ ofwel $\begin{cases} 3x - 6y = 3 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$ ofwel

$\begin{cases} 6y = 3x - 3 \\ 2y = -x + 2 \end{cases}$ dus $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$

De bijbehorende lijnen zijn niet evenwijdig, er is één oplossing.

17 a $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - py = 7 \end{cases}$ ofwel $\begin{cases} x = -2y + 3 \\ 3x - py = 7 \end{cases}$

Invullen van de eerste vergelijking in de andere vergelijking geeft

$3(-2y + 3) - py = 7$

$-6y + 9 - py = 7$

$(-6 - p)y = -2$

Er is geen oplossing als $-6 - p = 0$, dus als $p = -6$.

in dat geval is het stelsel strijdig.

b $\begin{cases} x + y = p \\ y = 4qx + 8 \end{cases}$ ofwel $\begin{cases} y = -x + p \\ y = 4qx + 8 \end{cases}$

Invullen van de eerste vergelijking in de andere vergelijking geeft

$-x + p = 4qx + 8$

$-x - 4qx = 8 - p$ of $x + 4qx = p - 8$

$(1 + 4q)x = p - 8$

Er zijn oneindig veel oplossingen als $1 + 4q = 0$ en $p - 8 = 0$, dus als $q = -\frac{1}{4}$ en $p = 8$. Het stelsel is dan afhankelijk.

Er zijn geen oplossingen als $1 + 4q = 0$ en $p - 8 \neq 0$, dus als $q = -\frac{1}{4}$ en $p \neq 8$.

Het stelsel is dan strijdig.

© Noordhoff Uitgevers bv

21 Lijn $k: \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 1$

$\frac{1}{4}y = -\frac{1}{2}x + 1$ ofwel $y = -2x + 4$

Voor de hoek met de x-as geldt $\tan(\phi) = 2$. De hoek is $\tan^{-1}(2) = 63{,}434\ldots$
De hoek die lijn k maakt met de x-as is ongeveer 63°.
Lijn $m: 4x + 6y = 1$
$6y = -4x + 1$ ofwel $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}$
Voor de hoek met de x-as geldt $\tan(\phi) = \frac{2}{3}$. De hoek is $\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33{,}690\ldots$
De hoek die lijn m maakt met de x-as is ongeveer 34°.

Lijn $n: 1\frac{1}{2}x = y + 2$

$-y = -1\frac{1}{2}x + 2$ ofwel $y = 1\frac{1}{2}x - 2$

Voor de hoek met de x-as geldt $\tan(\phi) = 1\frac{1}{2}$. De hoek is $\tan^{-1}\left(1\frac{1}{2}\right) = 56{,}309\ldots$
De hoek die lijn n maakt met de x-as is ongeveer 56°.

24 **a** Herleid $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$ via $\frac{y}{3} = -\frac{x}{-2} + 1$ tot $y = 1\frac{1}{2}x + 3$

Herleid $\frac{x}{3} + \frac{y}{1\frac{1}{2}} = 1$ via $\frac{y}{1\frac{1}{2}} = -\frac{x}{3} + 1$ tot $y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$

De hoeken met de x-as zijn 56,309…° en 26,565…°
De hoek tussen de lijnen is 56,309… + 26,565… ≈ 83°.

b Herleid $3x - 1\frac{1}{2}y = 4$ via $-1\frac{1}{2}y = -3x + 4$ tot $y = 2x - 2\frac{2}{3}$

Herleid $2y - 3x = 5$ via $2y = 3x + 5$ tot $y = 1\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$
De hoeken met de x-as zijn 63,434…° en 56,309…°
De hoek tussen de lijnen is 63,434… − 56,309… ≈ 7°.

c Herleid $2y - 5x = 3$ via $2y = 5x + 3$ tot $y = 2\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$

De andere lijn is $y = -\frac{1}{5}x + 4$
De hoeken met de x-as zijn 68,198…° en 11,309…°
De hoek tussen de lijnen is 68,198… + 11,309… ≈ 80°.

d Herleid $2y = -x\sqrt{2} + 4$ tot $y = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot x + 2$

De andere lijn is $y = -2x\sqrt{3} + 2\sqrt{5}$
De hoeken met de x-as zijn 35,264…° en 73,897…°
De hoek tussen de lijnen is 73,897… − 35,264… ≈ 39°.

29 Herleid alle vergelijkingen tot de vorm $y = ax + b$:
$k: y = \frac{1}{3}x - 5$
$l: \frac{x}{1} + \frac{y}{3} = 1$ wordt $\frac{y}{3} = -\frac{x}{1} + 1$ ofwel $y = -3x + 3$
$m: y = \frac{5}{3}x + 1$

$n: 3x - y = 5$ wordt $-y = -3x + 5$ ofwel $y = 3x - 5$

$p: 5x - 3y = 1$ wordt $-3y = -5x + 1$ ofwel $y = \frac{5}{3}x - \frac{1}{3}$

$q: x = 3y + 5$ wordt $-3y = -x + 5$ ofwel $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$

Omdat $\frac{1}{3} \cdot -3 = -1$, staan k en l en ook q en l loodrecht op elkaar.

© Noordhoff Uitgevers bv

31 **a** Herleid $5y = 7 - 2x$ tot $y = -\frac{2}{5}x + 1\frac{2}{5}$

De loodlijn heeft richtingscoëfficiënt $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$, dus de vergelijking heeft de vorm $y = 2\frac{1}{2}x + b$. Punt $P(2, -5)$ invullen: $-5 = 2\frac{1}{2} \cdot 2 + b$, dus $b = -10$

Een vergelijking van de loodlijn is $y = 2\frac{1}{2}x - 10$

b Herleid $8x + 9y = 12$ via $9y = -8x + 12$ tot $y = -\frac{8}{9}x + 1\frac{1}{3}$

De loodlijn heeft richtingscoëfficiënt $\frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$, dus de vergelijking heeft de vorm $y = 1\frac{1}{8}x + b$. Punt $Q(1, 12)$ invullen: $12 = 1\frac{1}{8} \cdot 1 + b$, dus $b = 10\frac{7}{8}$

Een vergelijking van de loodlijn is $y = 1\frac{1}{8}x + 10\frac{7}{8}$

38 **a** Herleid m: $3x + y = 2$ tot $y = -3x + 2$

Een loodlijn op m is $y = \frac{1}{3}x + b$

$Q(-1, -5)$ invullen geeft $-5 = \frac{1}{3} \cdot -1 + b$, dus $b = -4\frac{2}{3}$

Een vergelijking van de loodlijn is $y = \frac{1}{3}x - 4\frac{2}{3}$
Bereken het snijpunt van deze loodlijn met m:

$-3x + 2 = \frac{1}{3}x - 4\frac{2}{3}$

$-3\frac{1}{3}x = -6\frac{2}{3}$
$x = 2$ en $y = -3 \cdot 2 + 2 = -4$. Het snijpunt is $S(2, -4)$.

$\text{d}(Q, m) = \text{d}(Q, S) = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (-5 - -4)^2} = \sqrt{10}$.

b Herleid l: $\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y = 1$ via $\frac{1}{3}y = -\frac{1}{6}x + 1$ tot $y = -\frac{1}{2}x + 3$
Een loodlijn op l is van de vorm $y = 2x + b$
$P(4, 6)$ invullen geeft $6 = 2 \cdot 4 + b$, dus $b = -2$
Een vergelijking van de loodlijn is $y = 2x - 2$
Bereken het snijpunt van deze loodlijn met l:
$2x - 2 = -\frac{1}{2}x + 3$
$2\frac{1}{2}x = 5$
$x = 2$ en $y = 2 \cdot 2 - 2 = 2$. Het snijpunt is $S(2, 2)$.

$\text{d}(P, l) = \text{d}(P, S) = \sqrt{(4 - 2)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

40 **a** Kies het punt $P(0, 15)$ op de tweede lijn.
Een loodlijn door P op de eerste lijn is $y = -\frac{2}{5}x + 15$.
Bereken het snijpunt Q van deze loodlijn met de eerste lijn:

$5x - 2\left(-\frac{2}{5}x + 15\right) = -1$

$5x + \frac{4}{5}x - 30 = -1$

$5\frac{4}{5}x = 29$
$x = 5$ en $y = -\frac{2}{5} \cdot 5 + 15 = 13$, dus het snijpunt is $Q(5, 13)$.

$\text{d}(\text{twee lijnen}) = \text{d}(P, Q) = \sqrt{(0 - 5)^2 + (15 - 13)^2} = \sqrt{29}$

© Noordhoff Uitgevers bv

b Kies het punt $P(0, 8)$ op de tweede lijn.
Een loodlijn door P op de eerste lijn is $y = 2x + 8$.
Bereken het snijpunt Q van deze loodlijn met de eerste lijn:
$-\frac{1}{2}x + 3 = 2x + 8$
$-2\frac{1}{2}x = 5$
$x = -2$ en $y = 2 \cdot -2 + 8 = 4$, dus het snijpunt is $Q(-2, 4)$.

$\text{d(twee lijnen)} = \text{d}(P, Q) = \sqrt{(0 - -2)^2 + (8 - 4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

c De richtingscoëfficiënt van beide lijnen is $-\frac{1}{4}$
Kies het punt $P(-2, -4)$ op de tweede lijn en stel een loodlijn op:
$y = 4x + b$, door invullen van de coördinaten van P vind je $b = 4$, dus de loodlijn door P op de tweede lijn is $y = 4x + 4$.
Bereken nu het snijpunt Q van deze loodlijn met de eerste lijn.
$2x + 8(4x + 4) = 15$
$2x + 32x + 32 = 15$
$34x = -17$
$x = -\frac{1}{2}$ en $y = 4 \cdot -\frac{1}{2} + 4 = 2$, dus het snijpunt is $Q\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$.

$\text{d(twee lijnen)} = \text{d}(P, Q) = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} - -2\right)^2 + (2 - -4)^2} = \sqrt{38\frac{1}{4}}$

d Kies het punt $P\left(0, 4\frac{1}{2}\right)$ op de tweede lijn.
Een loodlijn door P op de eerste lijn is $y = -2x + 4\frac{1}{2}$
Bereken nu het snijpunt Q van deze loodlijn met de eerste lijn.

$\frac{1}{2}x - 3 = -2x + 4\frac{1}{2}$

$2\frac{1}{2}x = 7\frac{1}{2}$

$x = 3$ en $y = \frac{1}{2} \cdot 3 - 3 = -1\frac{1}{2}$, dus het snijpunt is $Q\left(3, -1\frac{1}{2}\right)$.

$\text{d(twee lijnen)} = \text{d}(P, Q) = \sqrt{(0 - 3)^2 + \left(4\frac{1}{2} - -1\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

e Kies het punt $P(0, 5)$ op de tweede lijn.
Een loodlijn door P op de eerste lijn is $y = \frac{3}{5}x + 5$.
Bereken nu het snijpunt Q van deze loodlijn met de eerste lijn.

$5x + 3\left(\frac{3}{5}x + 5\right) = -19$

$5x + 1\frac{4}{5}x + 15 = -19$

$6\frac{4}{5}x = -34$
$x = -5$ en $y = \frac{3}{5} \cdot -5 + 5 = 2$, dus het snijpunt is $Q(-5, 2)$.

$\text{d(twee lijnen)} = \text{d}(P, Q) = \sqrt{(0 - -5)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{34}$

Hoofdstuk 5 Afgeleide functies

4 a $f(4) = 0$ en $f(1) = 3 \cdot 3\frac{1}{2} = 10\frac{1}{2}$
De gemiddelde toename over het interval $[1, 4]$ is

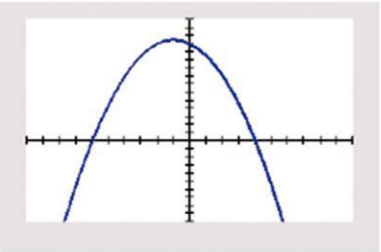
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{0 - 10\frac{1}{2}}{3} = -3\frac{1}{2}$$

b $f(2) = 2 \cdot 4 = 8$ en $f(-5) = 9 \cdot \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$
Het differentiequotiënt over het interval $[-5, 2]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(-5)}{2 - -5} = \frac{8 - 4\frac{1}{2}}{7} = \frac{3\frac{1}{2}}{7} = \frac{1}{2}$$

© Noordhoff Uitgevers bv

c Invoer: $y_1 = (4 - x)\left(3 + \frac{1}{2}x\right)$
Venster: $-10 \le x \le 10$ en $-10 \le y \le 15$



Optie: nulpunten.
De nulpunten zijn 4 en -6. De top ligt op de lijn $x = -1$, dus elk interval waarvan -1 het midden is, voldoet.
Bijvoorbeeld $[-7, 5]$ of $[-4, 2]$.

7 **a** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2\sqrt{0{,}001 + 4} - (-2\sqrt{4})}{0{,}001} = \frac{-2\sqrt{4{,}001} + 4}{0{,}001} \approx -0{,}5$
De helling in $(0, -4)$ is ongeveer $-0{,}5$.

b $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2\sqrt{-2{,}999 + 4} - (-2\sqrt{1})}{0{,}001} = \frac{-2\sqrt{1{,}001} + 2}{0{,}001} \approx -1$
De helling in $(-3, -2)$ is ongeveer -1.

c $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2\sqrt{12{,}001 + 4} - (-2\sqrt{16})}{0{,}001} = \frac{-2\sqrt{16{,}001} + 8}{0{,}001} \approx -0{,}25$
De helling in $(12, -8)$ is ongeveer $-0{,}25$.

10 $\frac{f(5 + \Delta x) - f(5)}{\Delta x} = \frac{-5(5 + \Delta x)^2 - -125}{\Delta x} = \frac{-5(25 + 10\Delta x + (\Delta x)^2) - -125}{\Delta x}$

$= \frac{-125 - 50\Delta x - 5(\Delta x)^2 + 125}{\Delta x} = \frac{-50\Delta x - 5(\Delta x)^2}{\Delta x} = -50 - 5\Delta x$

Als $\Delta x \to 0$, dan $\frac{dy}{dx} = -50$.
De helling is -50.

15 **a** Het punt $(2, 6)$ moet op de grafiek van f liggen en op de lijn.
$f(2) = -\frac{1}{2} \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 6$ en $6 = 2 \cdot 2 + 2 = 4 + 2$, klopt.
De hellingen in $(2, 6)$ moeten ook gelijk zijn:
$f'(x) = -x + 4$
$f'(2) = -2 + 4 = 2$
De richtingscoëfficiënt van de lijn is ook 2, dus de lijn raakt de grafiek.

b $f'(-4) = \ - -4 + 4 = 8$, de helling in $(-4, -24)$ is 8.

c $f'(4) = -4 + 4 = 0$
De raaklijn loopt horizontaal: $y = 8$.

18 **a** $\frac{dy}{dx} = 2x$, dus voor $x = -4$ geldt $\frac{dy}{dx} = 2 \cdot -4 = -8$.

b De helling in $(8, 64)$ is $\frac{dy}{dx} = 2 \cdot 8 = 16$.

© Noordhoff Uitgevers bv

22 **a** $f'(x) = 9x^8$ en $g'(x) = 10x^9$

b $f'(1) = 9$ en $g'(1) = 10$

c $9x^8 = 2304$

$x^8 = 256$

$x = \sqrt[8]{256} = 2$ of $x = -\sqrt[8]{256} = -2$

$f(2) = 2^9 = 512$ en $f(-2) = (-2)^9 = -512$

In de punten $(2, 512)$ en $(-2, -512)$ is de helling 2304.

27 **a** $f'(x) = -\frac{7}{4}$

b $l'(d) = -7d^4$

c $A'(t) = 0$

d $m(x) = -4x + 9 - 5x^2$

$m'(x) = -4 - 10x$

e $g'(x) = -6x^2 + x$

f $q(t) = -2t^2 - t + 21$

$q'(t) = -4t - 1$

g $h'(p) = \sqrt{3}$

h $s(r) = 729r^6$

$s'(r) = 4374r^5$

30 **a** $f'(x) = 2x - 7$

$f'(0) = -7$, dus de helling in het snijpunt met de y-as is -7.

b $x^2 - 7x + 12 = 0$

$(x - 3)(x - 4) = 0$

$x - 3 = 0$ of $x - 4 = 0$

$x = 3$ of $x = 4$

De grafiek van f snijdt de x-as in $(3, 0)$ en in $(4, 0)$.

$f'(3) = 2 \cdot 3 - 7 = -1$ en $f'(4) = 2 \cdot 4 - 7 = 1$

De helling is -1 in $(3, 0)$ en 1 in $(4, 0)$.

c $2x - 7 = 10$

$2x = 17$

$x = 8\frac{1}{2}$

$f\left(8\frac{1}{2}\right) = \left(8\frac{1}{2}\right)^2 - 7 \cdot 8\frac{1}{2} + 12 = 24\frac{3}{4}$

In het punt $\left(8\frac{1}{2}, 24\frac{3}{4}\right)$ is de helling gelijk aan 10.

d Voor de top geldt dat $f'(x) = 0$.

$2x - 7 = 0$

$2x = 7$

$x = 3\frac{1}{2}$

$f\left(3\frac{1}{2}\right) = \left(3\frac{1}{2}\right)^2 - 7 \cdot 3\frac{1}{2} + 12 = -\frac{1}{4}$

De top is $\left(3\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

36 **a** $j'(x) = 36x - 12x^3$

$36x - 12x^3 = 0$

$12x(3 - x^2) = 0$

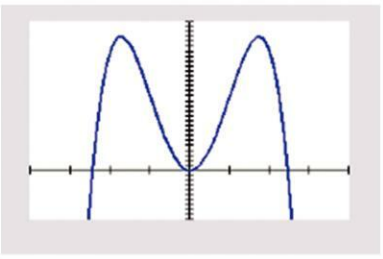
$12x = 0$ of $x^2 = 3$

$x = 0$ of $x = -\sqrt{3}$ of $x = \sqrt{3}$

$j(0) = 0$, $j\left(-\sqrt{3}\right) = j\left(\sqrt{3}\right) = 18 \cdot 3 - 3 \cdot 9 = 27$

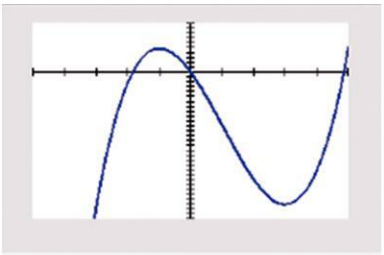
Zie plot: minimum $j(0) = 0$ en

maxima $j\left(-\sqrt{3}\right) = j\left(\sqrt{3}\right) = 27$.

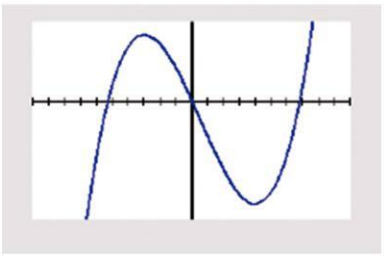


© Noordhoff Uitgevers bv

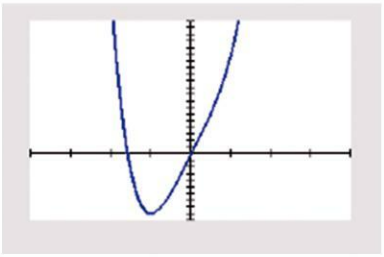
b $g'(x) = 3x^2 - 6x - 9$
$3x^2 - 6x - 9 = 0$
$x^2 - 2x - 3 = 0$
$(x - 3)(x + 1) = 0$
$x - 3 = 0$ of $x + 1 = 0$
$x = 3$ of $x = -1$
$g(3) = 27 - 27 - 27 = -27$
$g(-1) = -1 - 3 + 9 = 5$
Zie plot: maximum $g(-1) = 5$ en
minimum $g(3) = -27$.



c $f'(x) = 3x^2 - 3x - 36$
$3x^2 - 3x - 36 = 0$
$x^2 - x - 12 = 0$
$(x + 3)(x - 4) = 0$
$x = -3$ of $x = 4$
$f(-3) = -27 - 13{,}5 + 108 = 67{,}5$ en
$f(4) = 64 - 24 - 144 = -104$
Zie plot: maximum $f(-3) = 67{,}5$en
minimum $f(4) = -104$.



d $h'(x) = 12x^3 + 12$
$12x^3 + 12 = 0$
$12x^3 = -12$
$x^3 = -1$
$x = -1$
$h(-1) = 3 - 12 = -9$
Zie plot: minimum $h(-1) = -9$.



40 **a** $f'(x) = -x^3$
$f'(2) = -8$
Een vergelijking van de raaklijn is $y = 64x + b$ $y = -8x + b$.
$x = 2$ en $y = 1$ invullen geeft $1 = -16 + b$, dus $b = 17$.
Een vergelijking van de raaklijn is $y = -8x + 17$.

b $-\frac{1}{4}x^4 + 5 = -59$

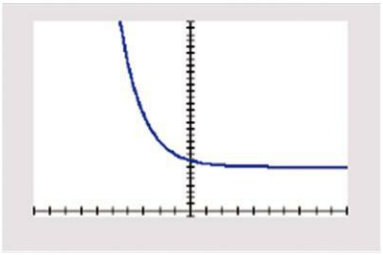
$-\frac{1}{4}x^4 = -64$

$x^4 = 256$
$x = -4$ of $x = 4$
$f'(-4) = 64$ en $f'(4) = -64$
Vergelijkingen van de raaklijnen zijn $y = 64x + b$ en $y = -64x + c$.
$x = -4$ en $y = -59$ respectievelijk $x = 4$ en $y = -59$ invullen:
$-59 = -256 + b$ en $-59 = -256 + c$
$b = 197$ en $c = 197$
Vergelijkingen de raaklijnen zijn $y = 64x + 197$ en $y = -64x + 197$.

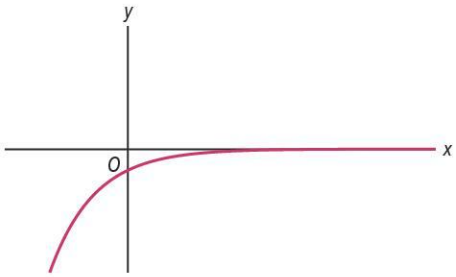
© Noordhoff Uitgevers bv

43 **a** $m(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 7$

grafiek

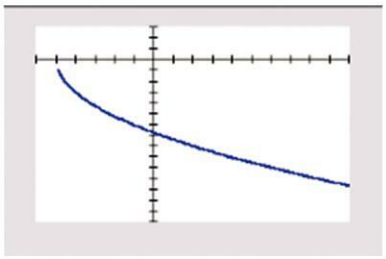


hellinggrafiek

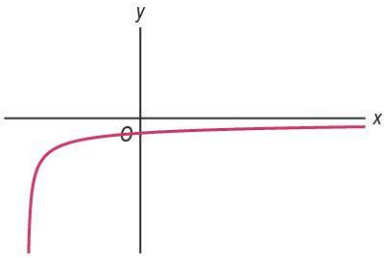


b $k(x) = -3\sqrt{x+5}$

grafiek

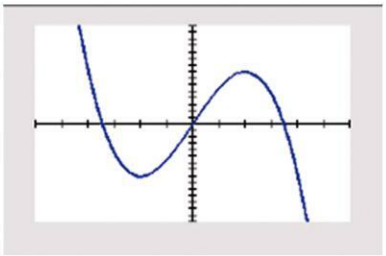


hellinggrafiek

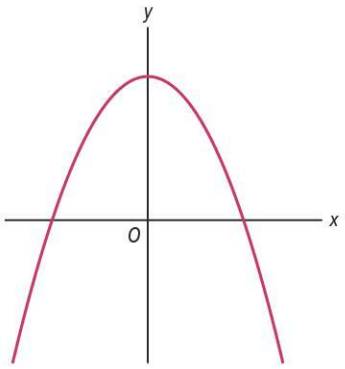


c $h(x) = -0{,}5x^3 + 6x$

grafiek

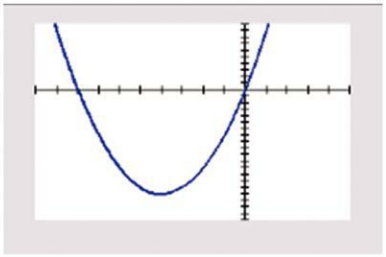


hellinggrafiek

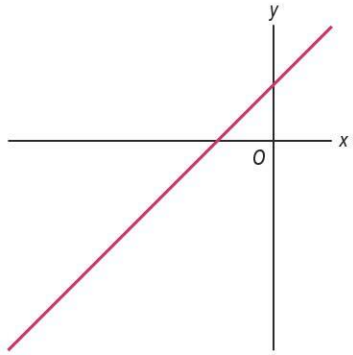


d $l(x) = x^2 + 8x$

grafiek



hellinggrafiek



© Noordhoff Uitgevers bv

Hoofdstuk 6 Periodieke functies

3

aantal graden	0	45	60	120	135	180
aantal radialen exact	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π

4

aantal graden	11	25	57	70	143	160	166
aantal radialen	0,2	0,44	1	1,22	2,5	2,79	2,9

13 **a** $\sin\left(1\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

b $\sin\left(-2\frac{1}{4}\pi\right) = \sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

c $\sin\left(3\frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = -\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

d $\sin\left(-1\frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$

e $\sin\left(3\frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = -1$

f $\sin(5\pi) = \sin(\pi) = 0$

g $\sin\left(-4\frac{2}{3}\pi\right) = \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = -\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

h $\sin\left(8\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$

i $\sin\left(9\frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = -\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

j $\sin\left(-5\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

19 **a** $\cos\left(1\frac{1}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

b $\cos\left(-4\frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

c $\cos\left(1\frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

d $\cos\left(-1\frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0$

e $\cos\left(6\frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

f $\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

g $\sin\left(7\frac{1}{4}\pi\right) = \sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

h $\cos\left(-5\frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$

i $\sin(-7\pi) = \sin(\pi) = 0$

j $\sin\left(-7\frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1$

21 **a** De evenwichtsstand is $y = -3$, de amplitude is 4 en het bereik is $[-7, 1]$.

b De evenwichtsstand is $y = 5$, de amplitude is 3,5 en het bereik is $[1{,}5; 8{,}5]$.

c De evenwichtsstand is $y = 5{,}5$, de amplitude is 0,5 en het bereik is $[5, 6]$.

d De evenwichtsstand is $y = 7$, de amplitude is 20 en het bereik is $[-13, 27]$.

e De evenwichtsstand is $y = 12$, de amplitude is 1 en het bereik is $[11, 13]$.

f De evenwichtsstand is $y = 2{,}7$, de amplitude is 1 en het bereik is $[1{,}7; 3{,}7]$.

25 **a** De periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

b De periode is $\frac{2\pi}{6} = \frac{1}{3}\pi$.

c De periode is $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

d De periode is $\frac{2\pi}{\frac{2}{5}} = 5\pi$.

© Noordhoff Uitgevers bv

26 **a** Een verschuiving van $\frac{1}{2}\pi$ naar links.
De toppen zijn $(0, 1)$, $(\pi, -1)$ en $(2\pi, 1)$.

b Spiegelen in de x-as en een verschuiving van 3 naar links en 2 omhoog.
De toppen zijn $(\pi - 3,3)$ en $(2\pi - 3,1)$.

c Spiegelen in de x-as en een verschuiving van $\frac{1}{3}\pi$ naar rechts.
De toppen zijn $\left(\frac{5}{6}\pi, -1\right)$ en $\left(1\frac{5}{6}\pi, 1\right)$.

d Een verschuiving van $0{,}1\pi$ naar rechts en 1 omlaag.
De toppen zijn $(0{,}1\pi\ ;\ 0)$ en $(1{,}1\pi\ ;\ -2)$.

29 Voor f geldt: de amplitude is 2, de periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ en de evenwichtsstand is $y = 3$.

Voor g geldt: de amplitude is 4, de periode is $\frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3}$ en de evenwichtsstand is $y = 7$.

Voor h geldt: de amplitude is 2, de periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ en de evenwichtsstand is $y = -3$.

Voor k geldt: de amplitude is 5, de periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$ is en de evenwichtsstand is $y = -3$.

32 links:
$d = \frac{1 + 5}{2} = 3$ en $a = 2$
De periode is 4π, dus $b = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$

$f(x) = 3 + 2\cos\left(\frac{1}{2}\left(x - 2\pi\right)\right)$ of $f(x) = 3 + 2\sin\left(\frac{1}{2}\left(x - \pi\right)\right)$
rechts:
$d = 0$ en $a = 3$
De periode is 1, dus $b = 2\pi$
De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $x = -\frac{1}{3}$ dit geeft $c = -\frac{1}{3}$
$f(x) = 3\sin\left(2\pi\left(x + \frac{1}{3}\right)\right)$

37 **a** $\cos(2x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
$2x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{1}{8}\pi + k \cdot \pi$ of $x = -\frac{1}{8}\pi + k \cdot \pi$
De oplossingen op $[0, 2\pi]$ zijn $x = \frac{1}{8}\pi$ of $x = \frac{7}{8}\pi$ of $x = 1\frac{1}{8}\pi$ of $x = 1\frac{7}{8}\pi$.

b $3\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\frac{1}{2}x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 4\pi$ of $x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 4\pi$
De oplossingen op $[0, 6\pi]$ zijn $x = \frac{1}{3}\pi$ of $x = 3\frac{2}{3}\pi$ of $x = 4\frac{1}{3}\pi$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c $2 \sin(3x) + 1 = 1$
$\sin(3x) = 0$
$3x = k \cdot \pi$
$x = k \cdot \frac{1}{3}\pi$
De oplossingen $[0, \pi]$ op zijn $x = 0$ of $x = \frac{1}{3}\pi$ of $x = \frac{2}{3}\pi$ of $x = \pi$.

d $\sin\left(2\frac{1}{2}x\right) + 3 = 2\frac{1}{2}$
$\sin\left(2\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}$
$2\frac{1}{2}x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2\frac{1}{2}x = 1\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{7}{15}\pi + k \cdot \frac{4}{5}\pi$ of $x = \frac{11}{15}\pi + k \cdot \frac{4}{5}\pi$
De oplossingen op $[0, \pi]$ zijn $x = \frac{7}{15}\pi$ of $x = \frac{11}{15}\pi$.

39 **a** Optie snijpunt geeft $x \approx 0{,}86$ of $x \approx 5{,}42$.
b Optie snijpunt geeft $x \approx 4{,}16$ of $x \approx 5{,}27$.
c Optie snijpunt geeft $x \approx 0{,}82$ of $x \approx 5{,}46$.
d Optie snijpunt geeft $x \approx 5{,}73$ of $x \approx 6{,}84$.
e Optie snijpunt geeft $x \approx -1{,}59$ of $x \approx 0{,}23$ of $x \approx 1{,}14$ of $x \approx 2{,}96$.
f Geen oplossingen.

© Noordhoff Uitgevers bv

1 Vergelijkingen

1 **a** $x(3 - 2x) = 6x$
$x = 0$ of $3 - 2x = 6$
$x = 0$ of $x = -1\frac{1}{2}$

b $(x^2 + 5x)^2 = 9x^2$
$(x^2 + 5x)^2 = (3x)^2$
$x^2 + 5x = -3x$ of $x^2 + 5x = 3x$
$x^2 + 8x = 0$ of $x^2 + 2x = 0$
$x(x + 8) = 0$ of $x(x + 2) = 0$
$x = 0$ of $x = -8$ of $x = -2$

2 **a** $-3\sqrt{x + 4} = -13$
$9(x + 4) = 169$
$x + 4 = \frac{169}{9} = 18\frac{7}{9}$
$x = 14\frac{7}{9}$

b $\frac{x + 2}{2x - 4} = x - 5$
$x + 2 = (x - 5)(2x - 4)$
$x + 2 = 2x^2 - 14x + 20$
$2x^2 - 15x + 18 = 0$
$x^2 - 7\frac{1}{2}x + 9 = 0$
$\left(x - 1\frac{1}{2}\right)(x - 6) = 0$
$x = 1\frac{1}{2}$ of $x = 6$

c $6x = \frac{2x^2}{x - 4}$
$6x(x - 4) = 2x^2$
$6x^2 - 24x = 2x^2$
$4x^2 - 24x = 0$
$4x(x - 6) = 0$
$x = 0$ of $x = 6$

d $3x - 2(x + 3) = 4x$
$3x - 2x - 6 = 4x$
$x - 6 = 4x$
$-6 = 3x$
$x = -2$

e $(3x - 2)^2 = (6 - x)^2$
$3x - 2 = 6 - x$ of $3x - 2 = -(6 - x)$
$3x - 2 = 6 - x$ of $3x - 2 = -6 + x$
$4x = 8$ of $2x = -4$
$x = 2$ of $x = -2$

f $\frac{x - 2}{5 - x} = \frac{3x}{x + 1}$
$(x - 2)(x + 1) = (5 - x) \cdot 3x$
$x^2 - x - 2 = -3x^2 + 15x$
$4x^2 - 16x - 2 = 0$
$D = (-16)^2 - 4 \cdot 4 \cdot -2 = 288$
$x = \frac{16 + \sqrt{288}}{8}$ of $x = \frac{16 - \sqrt{288}}{8}$
$x = \frac{16 + 12\sqrt{2}}{8}$ of $x = \frac{16 - 12\sqrt{2}}{8}$
$x = 2 + 1\frac{1}{2}\sqrt{2}$ of $x = 2 - 1\frac{1}{2}\sqrt{2}$

3 **a** $(x - 3)^4 - 14(x - 3)^2 - 15 = 0$
Substitutie $(x - 3)^2 = p$ geeft $p^2 - 14p - 15 = 0$.
$(p - 15)(p + 1) = 0$
$p - 15 = 0$ of $p + 1 = 0$
$p = 15$ of $p = -1$
Substitutie $p = (x - 3)^2$ geeft $(x - 3)^2 = 15$ of $(x - 3)^2 = -1$ (kan niet).
$x - 3 = \sqrt{15}$ of $x - 3 = -\sqrt{15}$
$x = 3 + \sqrt{15}$ of $x = 3 - \sqrt{15}$

© Noordhoff Uitgevers bv

b $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{x-1}\right) - 4 = 0$

Substitutie $\frac{x}{x-1} = p$ geeft $p^2 - 3p - 4 = 0$

$(p - 4)(p + 1) = 0$

$p - 4 = 0$ of $p + 1 = 0$

$p = 4$ of $p = -1$

Substitutie $p = \frac{x}{x-1}$ geeft $\frac{x}{x-1} = 4$ of $\frac{x}{x-1} = -1$

$x = 4(x - 1)$ of $x = -1(x - 1)$

$x = 4x - 4$ of $x = -x + 1$

$-3x = -4$ of $2x = 1$

$x = 1\frac{1}{3}$ of $x = \frac{1}{2}$

c $-\sqrt{x} + x - 90 = 0$

Substitutie $\sqrt{x} = p$ geeft $-p + p^2 - 90 = 0$

$p^2 - p - 90 = 0$

$(p - 10)(p + 9) = 0$

$p - 10 = 0$ of $p + 9 = 0$

$p = 10$ of $p = -9$

Substitutie $p = \sqrt{x}$ geeft $\sqrt{x} = 10$ of $\sqrt{x} = -9$ (kan niet).

$x = 100$

4 **a** $3 + p = 2\sqrt{q} - 3p$

$2\sqrt{q} = 3 + 4p$

$\sqrt{q} = 1\frac{1}{2} + 2p$

$q = \left(1\frac{1}{2} + 2p\right)^2$

b $\frac{2}{3q} = p + 2$

$2 = 3q(p + 2)$

$\frac{2}{p+2} = 3q$

$q = \frac{2}{3(p+2)}$

5 **a** $-3 - \frac{1}{x+2} = 5x + 1$

$-\frac{1}{x+2} = 5x + 4$

$-1 = (x + 2)(5x + 4)$

$-1 = 5x^2 + 4x + 10x + 8$

$5x^2 + 14x + 9 = 0$

$D = 14^2 - 4 \cdot 5 \cdot 9 = 16$

$x = \frac{-14 + \sqrt{16}}{10}$ of $x = \frac{-14 - \sqrt{16}}{10}$

$x = -1$ of $x = -1\frac{4}{5}$

$x = -1$ geeft $y = 5 \cdot -1 + 1 = -4$

$x = -1\frac{4}{5}$ geeft $y = 5 \cdot -1\frac{4}{5} + 1 = -8$

De coördinaten van de snijpunten zijn $(-1, -4)$ en $\left(-1\frac{4}{5}, -8\right)$.

b De verticale asymptoot van de grafiek van f is de lijn $y = -2$.

De oplossing is $\langle \leftarrow, -2\rangle \cup \left[-1\frac{4}{5}, -1\right]$.

© Noordhoff Uitgevers bv

6 **a** Gelijkstellen: $\sqrt{(x-2)^2+2} = \sqrt{-x+4}$
$(x-2)^2 + 2 = -x + 4$
$(x-2)^2 = -x + 2$
$x^2 - 4x + 4 = -x + 2$
$x^2 - 3x + 2 = 0$
$(x-2)(x-1) = 0$
$x - 2 = 0$ of $x - 1 = 0$
$x = 2$ of $x = 1$
Zie grafieken, de oplossing van de ongelijkheid is $\langle \leftarrow, 1\rangle \cup \langle 2, 4]$.

b $\sqrt{(x-2)^2+2} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot x$
Kwadrateren geeft $(x-2)^2 + 2 = \frac{1}{3}x^2$.
$(x-2)^2 = \frac{1}{3}x^2 - 2$
$x^2 - 4x + 4 = \frac{1}{3}x^2 - 2$
$\frac{2}{3}x^2 - 4x + 6 = 0$
Vermenigvuldigen met $1\frac{1}{2}$ geeft $x^2 - 6x + 9 = 0$.
$(x-3)^2 = 0$
$x = 3$
Er is precies één oplossing, dus de lijn heeft één punt gemeenschappelijk met de grafiek van f.

7 **a** $x = 3$ en $y = 6$ invullen bij $y = px + 1$ geeft $6 = 3p + 1$.
$3p = 5$
$p = 1\frac{2}{3}$

b $f(-4) = 3 + \sqrt{5 - -4} = 6$
$x = -4$ en $y = 6$ invullen bij $y = px + 1$ geeft $6 = -4p + 1$.
$4p = -5$
$p = -1\frac{1}{4}$

c De grafiek van f heeft een randpunt als $5 - x = 0$, dus bij $x = 5$.
Het randpunt is $(5, 3)$.
$x = 5$ en $y = 3$ invullen bij $y = px + 1$ geeft $3 = 5p + 1$.
$5p = 2$
$p = \frac{2}{5}$
Als $p \geq \frac{2}{5}$ dan is de bijbehorende lijn stijgend en snijdt de grafiek van f één keer.
Als $0 < p < \frac{2}{5}$ dan is de lijn stijgend, maar snijdt de grafiek van f niet.
Als $p = 0$ is de lijn horizontaal en snijdt de grafiek van f niet.
Als $p < 0$ is de lijn dalend. Elke dalende lijn door $(0, 1)$ snijdt de grafiek.
Conclusie: voor $p < 0$ en $p \geq \frac{2}{5}$ heeft de lijn één punt gemeenschappelijk met de grafiek van f.

8 **a** $q = 180 - 0{,}5p$
$0{,}5p = 180 - q$
$p = 360 - 2q$

b De totale opbrengst bereken je door de prijs per kop soep te vermenigvuldigen met het aantal verkochte koppen soep.
$O = p \cdot q$
$O = p \cdot (180 - 0{,}5p)$
$O = 180p - 0{,}5p^2$

© Noordhoff Uitgevers bv

c $180p - 0{,}5p^2 = 0$
$p(180 - 0{,}5p) = 0$
$p = 0$ of $180 - 0{,}5p = 0$
$p = 0$ of $0{,}5p = 180$
$p = 0$ of $p = 360$
Bij een prijs van 0 cent en van 360 cent is de totale opbrengst nul.

d $TK = 20q + 1000$ en $q = 180 - 0{,}5p$ geeft
$TK = 20(180 - 0{,}5p) + 1000$
$TK = 3600 - 10p + 1000$
$TK = -10p + 4600$
De totale winst is opbrengst minus kosten, dus $TW = O - TK$.
$TW = 180p - 0{,}5p^2 - (-10p + 4600)$
$TW = 190p - 0{,}5p^2 - 4600$

e $-0{,}5p^2 + 190p - 4600 = 0$
$p^2 - 380p + 9200 = 0$
$D = (-380)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9200 = 107\,600$
$p = \dfrac{380 + \sqrt{107600}}{2}$ of $p = \dfrac{380 - \sqrt{107600}}{2}$
$p \approx 354$ of $p \approx 26$
Bij een prijs van minder dan 26 cent of bij een prijs hoger dan € 3,54 wordt er geen meer winst gemaakt.

f De grafiek van TW is een bergparabool waarvan de symmetrieas ligt bij $p = \dfrac{26 + 354}{2} = \dfrac{380}{2} = 190$. De top ligt dus ook bij $p = 190$.
Bij een prijs van 190 cent ofwel € 1,90 is de winst maximaal.

2 Machtsfuncties

1 **a** $(2p^2)^4 \cdot 3p^4 = 16p^8 \cdot 3p^4 = 48p^{12}$

b $2\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^{-6} + \left(2 \cdot \sqrt[4]{a^3}\right)^4 = 2a^3 + \left(2a^{\frac{3}{4}}\right)^4 = 2a^3 + 16a^3 = 18a^3$

c $2x^2(3x - 2x^3) = 6x^3 - 4x^5$

d $\dfrac{2b^2}{4b^8} + \left(\dfrac{2b^2}{b^4}\right)^3 = \dfrac{1}{2b^6} + \dfrac{8b^6}{b^{12}} = \frac{1}{2}b^{-6} + 8b^{-6} = 8\frac{1}{2}b^{-6}$ of $\dfrac{17}{2b^6}$

2 **a** $3y^6 = 729$
$y^6 = 243$
$y = -\sqrt[6]{243}$ of $y = \sqrt[6]{243}$

b $3a^{-\frac{1}{5}} = 4$
$a^{-\frac{1}{5}} = \frac{4}{3}$
$a = \left(\frac{4}{3}\right)^{-5} = \dfrac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^5} = \dfrac{1}{\frac{4^5}{3^5}} = 1 \cdot \frac{3^5}{4^5} = \frac{243}{1024}$

c $5p^{2\frac{1}{2}} - 10 = 5$
$5p^{2\frac{1}{2}} = 15$
$p^{2\frac{1}{2}} = 3$
$p = 3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2} = \sqrt[5]{9}$

d $2 - 0{,}2x^{-\frac{1}{4}} = 1{,}6$
$-0{,}2x^{-\frac{1}{4}} = -0{,}4$
$x^{-\frac{1}{4}} = 2$
$x = 2^{-4} = \frac{1}{16}$

© Noordhoff Uitgevers bv

e $\frac{1}{2}x^8 = -4x^3$

$\frac{1}{2}x^8 + 4x^3 = 0$

$\frac{1}{2}x^3(x^5 + 8) = 0$

$\frac{1}{2}x^3 = 0$ of $x^5 + 8 = 0$

$x = 0$ of $x = \sqrt[5]{-8}$

f $4x^4 = 20\sqrt{x}$

$x^4 = 5\sqrt{x}$

$x^8 = 25x$

$x^8 - 25x = 0$

$x(x^7 - 25) = 0$

$x = 0$ of $x = \sqrt[7]{25}$

3 **a** Grafiek 2 hoort bij f.

b $4{,}5x^{\frac{1}{3}} = 9$

$x^{\frac{1}{3}} = 2$

$x = 2^3 = 8$

Het snijpunt is (8, 9).

c $-10x^{-4} = -160$

$x^{-4} = 16$

$\frac{1}{x^4} = 16$

$16x^4 = 1$

$x^4 = \frac{1}{16}$

$x = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$ of $x = -\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = -\frac{1}{2}$

De punten P en Q zijn $\left(\frac{1}{2}, -160\right)$ en $\left(-\frac{1}{2}, -160\right)$.

De lengte van lijnstuk PQ is $\frac{1}{2} - -\frac{1}{2} = 1$.

d De grafiek van f is symmetrisch in de y-as, dus A ligt op een afstand 2 van de y-as en B ook. Dus $A(-2, p)$ en $B(2, p)$.

$p = f(-2) = f(2) = -10 \cdot 2^{-4} = -\frac{10}{16} = -\frac{5}{8}$

e $f(2) = -10 \cdot 2^{-4} = -\frac{10}{16} = -\frac{5}{8}$, dus $C\left(2, -\frac{5}{8}\right)$

$g(2) = 4{,}5 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 4{,}5\sqrt[3]{2}$, dus $D\left(2; 4{,}5\sqrt[3]{2}\right)$

De lengte van lijnstuk CD is $g(2) - f(2) = 4{,}5\sqrt[3]{2} - -\frac{5}{8} = 4{,}5\sqrt[3]{2} + \frac{5}{8}$

4 **a** $q = 0{,}125 \cdot p^4$

$0{,}125 \cdot p^4 = q$

$p^4 = 8q$

$p = (8q)^{\frac{1}{4}}$

$p = 8^{\frac{1}{4}} \cdot q^{\frac{1}{4}}$

$p \approx 1{,}68 \cdot q^{0{,}25}$

b $q = 10 \cdot p^{\frac{1}{3}}$

$10 \cdot p^{\frac{1}{3}} = q$

$p^{\frac{1}{3}} = 0{,}1q$

$p = (0{,}1q)^3$

$p = 0{,}1^3 \cdot q^3$

$p = 0{,}001q^3$

c $q = 3{,}5 \cdot p^{-1{,}3}$

$3{,}5 \cdot p^{-1{,}3} = q$

$p^{-1{,}3} = \frac{1}{3{,}5}q$

$p = \left(\frac{1}{3{,}5}q\right)^{\frac{1}{-1{,}3}}$

$p = \left(\frac{1}{3{,}5}\right)^{\frac{1}{-1{,}3}} \cdot q^{\frac{1}{-1{,}3}}$

$p \approx 2{,}62 \cdot q^{-0{,}77}$

d $q = \frac{2}{3} \cdot p^{0{,}65}$

$\frac{2}{3} \cdot p^{0{,}65} = q$

$p^{0{,}65} = 1\frac{1}{2}q$

$p = \left(1\frac{1}{2}q\right)^{\frac{1}{0{,}65}}$

$p = \left(1\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{0{,}65}} \cdot q^{\frac{1}{0{,}65}}$

$p \approx 1{,}87 \cdot q^{1{,}54}$

© Noordhoff Uitgevers bv

5 **a** $f(x) = \left(x^{-\frac{2}{5}}\right)^{\frac{5}{4}}$

$f(x) = x^{-\frac{10}{20}}$

$f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

b $f(x) = \dfrac{3x^3 \cdot x^{-\frac{1}{2}}}{\left(3\sqrt[3]{x^2}\right)^3}$

$f(x) = \dfrac{3x^3}{\left(3x^{\frac{2}{3}}\right)^3}$

$f(x) = \dfrac{3x^3}{27x^2}$

$f(x) = \frac{1}{9}x$

c $f(x) = x^{3\frac{1}{2}} \cdot \left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^5$

$f(x) = x^{3\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{10}{3}}$

$f(x) = x^{3\frac{3}{6}} \cdot x^{-3\frac{2}{6}}$

$f(x) = x^{\frac{1}{6}}$ ofwel $f(x) = \sqrt[6]{x}$

d $f(x) = \dfrac{3\sqrt[3]{x^2} \cdot 4\sqrt{x}}{18\sqrt[6]{x^5}}$

$f(x) = \dfrac{3x^{\frac{2}{3}} \cdot 4x^{\frac{1}{2}}}{18x^{\frac{5}{6}}}$

$f(x) = \dfrac{12x^{1\frac{1}{6}}}{18x^{\frac{5}{6}}}$

$f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}$ ofwel $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{x}$

6 **a** $\frac{1}{4}x^5 - 2x^3 = 0$

$x^5 - 8x^3 = 0$

$x^3(x^2 - 8) = 0$

$x^3 = 0$ of $x^2 - 8 = 0$

$x = 0$ of $x^2 = 8$

$x = 0$ of $x = -\sqrt{8}$ of $x = \sqrt{8}$

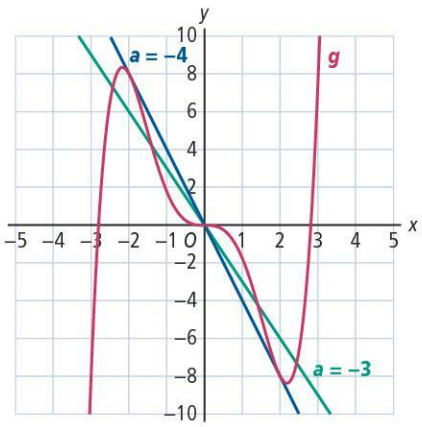
Uit de grafiek lees je de oplossing van de ongelijkheid af:

$\langle \leftarrow, -\sqrt{8} \rangle \cup \langle 0, \sqrt{8} \rangle$.

b De lijn $y = 8$ snijdt de grafiek van g drie keer, dus de vergelijking $g(x) = c$ heeft voor $c = 8$ drie oplossingen.

De lijn $y = 9$ snijdt de grafiek van g één keer, dus de vergelijking $g(x) = c$ heeft voor $c = 9$ één oplossing.

c



d $a = -3$

$\frac{1}{4}x^5 - 2x^3 = -3x$

$\frac{1}{4}x^5 - 2x^3 + 3x = 0$

$x^5 - 8x^3 + 12x = 0$

$x(x^4 - 8x^2 + 12) = 0$

© Noordhoff Uitgevers bv

$x = 0$ of $x^4 - 8x^2 + 12 = 0$

$p^2 - 8p + 12 = 0$ met $p = x^2$

$(p - 2)(p - 6) = 0$

$p = 2$ of $p = 6$

$x = 0$ of $x^2 = 2$ of $x^2 = 6$

$x = 0$ of $x = -\sqrt{2}$ of $x = \sqrt{2}$ of $x = -\sqrt{6}$ of $x = \sqrt{6}$

$a = -4$

$\frac{1}{4}x^5 - 2x^3 = -4x$

$\frac{1}{4}x^5 - 2x^3 + 4x = 0$

$x^5 - 8x^3 + 16x = 0$

$x(x^4 - 8x^2 + 16) = 0$

$x = 0$ of $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

$p^2 - 8p + 16 = 0$ met $p = x^2$

$(p - 4)(p - 4) = 0$

$p = 4$

$x = 0$ of $x^2 = 4$

$x = 0$ of $x = -2$ of $x = 2$

e Bij $a = -4$ snijdt de grafiek van f de grafiek van g behalve in $(0, 0)$ in nog slechts twee andere punten. De grafiek van f raakt in dat geval de grafiek van g.
Als $a < -4$ snijdt de grafiek van f de grafiek van g nog slechts in $(0, 0)$.
De vergelijking $f_a(x) = g(x)$ heeft dan één oplossing.

7 **a** $V = 0{,}45$ geeft $0{,}45 = 0{,}015 \cdot L^{0{,}45}$.
$L^{0{,}45} = 30$
$L = 30^{\frac{1}{0{,}45}} = 1916{,}424\ldots$
De verlichtingssterkte is ongeveer 1916 lux.

b De verlichtingssterkte gaat van L naar $0{,}5L$.
Het spanningsverschil gaat van $V = 0{,}015 \cdot L^{0{,}45}$ naar $V = 0{,}015 \cdot (0{,}5L)^{0{,}45}$.
$V = 0{,}015 \cdot (0{,}5L)^{0{,}45}$ geeft $V = 0{,}015 \cdot (0{,}5)^{0{,}45} \cdot L^{0{,}45}$ ofwel
$V \approx 0{,}732 \cdot 0{,}015 \cdot L^{0{,}45}$
Van het spanningsverschil is dus ongeveer 73,2% over. Dat komt overeen met een afname van 26,8%.

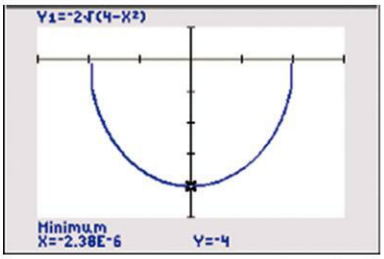
c $V = 0{,}015 \cdot L^{0{,}45}$
$0{,}015 \cdot L^{0{,}45} = V$
$L^{0{,}45} = \frac{1}{0{,}015}\, V$
$L = \left(\frac{1}{0{,}015}\, V\right)^{\frac{1}{0{,}45}}$
$L = \left(\frac{1}{0{,}015}\right)^{\frac{1}{0{,}45}} \cdot V^{\frac{1}{0{,}45}}$
$L \approx 11\,301 \cdot V^{2{,}22}$

d Om V te verdubbelen, moet L toenemen van $L \approx 11\,301 \cdot V^{2{,}22}$ tot $L \approx 11\,301 \cdot (2V)^{2{,}22}$.
$L \approx 11\,301 \cdot 2^{2{,}22} \cdot V^{2{,}22}$
$L \approx 2^{2{,}22} \cdot 11\,301 \cdot V^{2{,}22}$
Dus de verlichtingssterkte moet met de factor $2^{2{,}22} \approx 4{,}7$ vergroot worden.

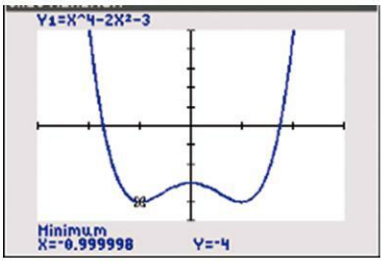
© Noordhoff Uitgevers bv

3 Functies en grafieken

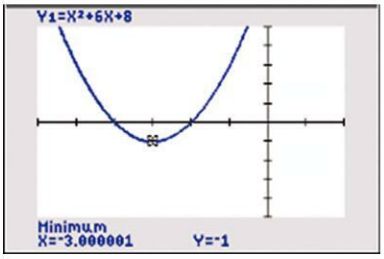
1 **a** Domein: $4 - x^2 \geq 0$, dus $x^2 \leq 4$.
Hieruit volgt $-2 \leq x \leq 2$, ofwel domein $[-2, 2]$.
Met een plot kun je nagaan wat het bereik is.
Invoer: $y_1 = -2 \cdot \sqrt{4 - x^2}$
Venster: $-3 \leq x \leq 3$ en $-5 \leq y \leq 1$
Optie: minimum
De coördinaten van de top zijn $(0, -4)$.
Het bereik is $[-4, 0]$.



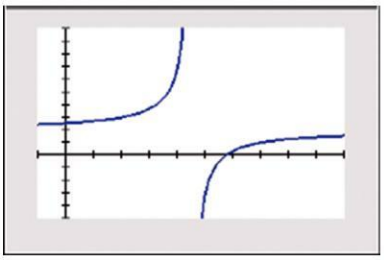
b Voor x kan elke waarde worden ingevuld, ofwel domein $\mathbb{R}$.
Met een plot kun je nagaan wat het bereik is.
Invoer: $y_1 = x^4 - 2x^2 - 3$
Venster: $-3 \leq x \leq 3$ en $-5 \leq y \leq 5$
Opties: minimum
De coördinaten van de laagste toppen zijn $(-1, -4)$ en $(1, -4)$.
Het bereik is $[-4, \rightarrow\rangle$.



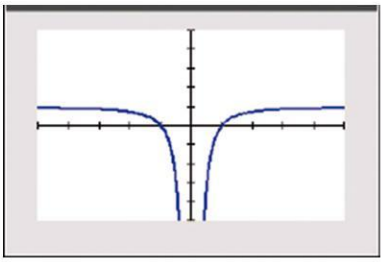
c Voor x kan elke waarde worden ingevuld, ofwel domein $\mathbb{R}$.
Met een plot kun je nagaan wat het bereik is.
Invoer: $y_1 = x^2 + 6x + 8$
Venster: $-6 \leq x \leq 2$ en $-5 \leq y \leq 5$
Opties: minimum
De coördinaten van de top zijn $(-3, -1)$.
Het bereik is $[-1, \rightarrow\rangle$.



d Domein: $9 - 2x \neq 0$, dus $x \neq 4\frac{1}{2}$.
Het domein is $\left\langle \leftarrow, 4\frac{1}{2} \right\rangle \cup \left\langle 4\frac{1}{2}, \rightarrow \right\rangle$.
De horizontale asymptoot is de lijn $y = 2$.
Met een plot kun je nagaan wat het bereik is.
Invoer: $y_1 = 2 + \dfrac{5}{9 - 2x}$
Venster: $-1 \leq x \leq 10$ en $-5 \leq y \leq 10$
Het bereik is $\langle \leftarrow, 2\rangle \cup \langle 2, \rightarrow\rangle$.



e Domein: $x^2 \neq 0$, dus $x \neq 0$ ofwel $x < 0$ of $x > 0$.
Het domein is $\langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$.
De horizontale asymptoot is de lijn $y = 1$.
Met een plot kun je nagaan wat het bereik is.
Invoer: $y_1 = 1 - \dfrac{1}{x^2}$
Venster: $-5 \leq x \leq 5$ en $-5 \leq y \leq 5$
Het bereik is $\langle \leftarrow, 1\rangle$.



2 **a** Invoer: $y_1 = x^3 - 2x^2 + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$
Venster: $-3 \leq x \leq 3$ en $-3 \leq y \leq 3$
Opties: maximum en minimum
De coördinaten van de toppen zijn (0,33; 1,15) en (1, 1).
Optie: nulpunten
Het nulpunt is $x \approx -0{,}47$.

b Invoer: $y_1 = x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^x - 6$
Venster: $-5 \leq x \leq 5$ en $-6 \leq y \leq 6$
Optie: minimum

© Noordhoff Uitgevers bv

De coördinaten van de top zijn (0,28; −5,10).
Optie: nulpunten
De nulpunten zijn $x \approx -1{,}68$ en $x \approx 2{,}41$.

c Invoer: $y_1 = 0{,}08x^3 - x^2 - 10x + 60$
Venster: $-15 \leq x \leq 25$ en $-70 \leq y \leq 80$
Opties: maximum en minimum
De coördinaten van de toppen zijn (−3,52; 79,32) en (11,85; −65,80).
Optie: nulpunten
De nulpunten zijn $x \approx -9{,}37$, $x \approx 4{,}64$ en $x \approx 17{,}23$.

d Invoer: $y_1 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 5$
Venster: $-5 \leq x \leq 5$ en $-10 \leq y \leq 10$
Optie: minimum
De coördinaten van de toppen zijn (−1, −3) en (1, −3).
Optie: nulpunten
De nulpunten zijn $x \approx -2{,}19$, $x \approx -0{,}46$, $x \approx 0{,}46$ en $x \approx 2{,}19$.

3 a Kan exact:
$3 - x = \frac{-2}{x}$
$x(3 - x) = -2$
$3x - x^2 = -2$
$x^2 - 3x - 2 = 0$
$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 17$
$x = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}$ of $x = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}$

b Met de rekenmachine:
Invoer: $y_1 = 100 \cdot 1{,}04^x$ en $y_2 = 200$
Venster: $-50 \leq x \leq 50$ en $0 \leq y \leq 300$
Optie: snijpunt geeft $x = 17{,}67298\ldots$
De oplossing is $x \approx 17{,}67$.

c Met de rekenmachine:
Invoer: $y_1 = \frac{1}{x}$ en $y_2 = x^2 + \sqrt{x + 2}$
Venster: $-5 \leq x \leq 5$ en $-5 \leq y \leq 5$
Optie: snijpunt geeft $x = 0{,}53311\ldots$
De oplossing is $x \approx 0{,}53$.

d Kan exact:
$(x + 1)^2(x + 2) = (x + 1)(x + 10)$
$x + 1 = 0$ of $(x + 1)(x + 2) = x + 10$
$x = -1$ of $x^2 + 3x + 2 = x + 10$
$x = -1$ of $x^2 + 2x - 8 = 0$
$x = -1$ of $(x - 2)(x + 4) = 0$
$x = -1$ of $x = 2$ of $x = -4$

4 a Functie f: verticale asymptoot als $5x + 2 = 0$, dus $x = -\frac{2}{5}$. Vul voor x waarden in ver van 0 en je vindt als horizontale asymptoot $y = -\frac{3}{5}$
Functie g: verticale asymptoot als $2 - \sqrt{x} = 0$, dus $x = 4$. Vul voor x waarden in ver van 0 en je vindt als horizontale asymptoot $y = 0$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $\frac{7-3x}{5x+2}=4$
$7-3x=4(5x+2)$
$7-3x=20x+8$
$-1=23x$
$x=-\frac{1}{23}$
Met behulp van een plot: $f(x)\geq 4$ als $-\frac{2}{5}<x\leq -\frac{1}{23}$

c $\frac{7-3x}{5x+2}=2x-6$
Met de rekenmachine:
Invoer: $y_1=\frac{7-3x}{5x+2}$ en $y_2=2x-6$
Venster: $-10\leq x\leq 10$ en $-10\leq y\leq 10$
Optie: snijpunt
Snijpunten voor $x\approx 2{,}95$ en $x\approx -0{,}65$.
Met behulp van de plot: $f(x)<h(x)$ als $-0{,}65<x<-\frac{2}{5}$ of $x>2{,}95$.

d Vermenigvuldigen met 2 geeft $i(x)=2(2x-6)$ ofwel $i(x)=4x-12$.
Vervolgens 4 omlaag geeft $k(x)=4x-12-4$ ofwel $k(x)=4x-16$.

5 a Voor de vier driehoeken samen geldt
$T(x)=2\cdot\left(x\cdot 2x\cdot\frac{1}{2}\right)+2\cdot(10-x)\cdot(20-2x)\cdot\frac{1}{2}$
ofwel $T(x)=2x^2+200-40x+2x^2$
dus $T(x)=4x^2-40x+200$.

b $V(x)=$ *oppervlakte rechthoek* $-T(x)$
$V(x)=200-(4x^2-40x+200)$
$V(x)=40x-4x^2$

c $4x^2-40x+200=40x-4x^2$
$8x^2-80x+200=0$
$x^2-10x+25=0$
$(x-5)(x-5)=0$
$x=5$

d $T(x)=2\cdot V(x)$
$4x^2-40x+200=2\cdot(40x-4x^2)$
$4x^2-40x+200=80x-8x^2$
$12x^2-120x+200=0$
$3x^2-30x+50=0$
$D=(-30)^2-4\cdot 3\cdot 50=300$
$x=\frac{30-\sqrt{300}}{6}$ of $x=\frac{30+\sqrt{300}}{6}$
$x\approx 2{,}11$ of $x\approx 7{,}89$

6 a Verticale asymptoot als $1-x^2=0$, dit geeft $x=-1$ of $x=1$.
Vul voor x waarden in ver van 0 en je vindt als horizontale asymptoot $y=2$.

b Verticale asymptoot als $x^2-9=0$, dit geeft $x=-3$ of $x=3$.
Vul voor x waarden in ver van 0 en je vindt als horizontale asymptoot $y=-5$.

c Het domein van f is $\langle\leftarrow,-1\rangle\cup\langle-1,1\rangle\cup\langle 1,\rightarrow\rangle$.
Met behulp van een plot kun je nagaan dat het bereik van f is
$\langle\leftarrow,2\rangle\cup[3,\rightarrow\rangle$.

d Het domein van g is $\langle\leftarrow,-3\rangle\cup\langle 3,\rightarrow\rangle$.
Met behulp van een plot kun je nagaan dat het bereik van g is $\langle-5,\rightarrow\rangle$.

© Noordhoff Uitgevers bv

7 **a** Eerst een vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met factor $\frac{1}{2}$ en dan een verschuiving 2 omlaag.

b Eerst een verschuiving 4 omlaag en dan een vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met factor $\frac{1}{2}$.

8 **a** Randpunt (2, 6), dan is $b - 2x = 0$ voor $x = 2$.
$b - 2 \cdot 2 = 0$
$b = 4$
Bovendien geldt $f(2) = 6$, dus $f(2) = a + 2\sqrt{4 - 2 \cdot 2} = 6$.
Hieruit volgt dat $a + 2\sqrt{0} = 6$ en dus $a = 6$.

b Randpunt bij $x = -4$, dan is $b - 2x = 0$ voor $x = -4$.
$b - 2 \cdot -4 = 0$
$b = -8$
De grafiek gaat door het punt $(-4, 12)$ dus $a + 2\sqrt{-8 - 2 \cdot -4} = 12$.
$a + 2 \cdot 0 = 12$
$a = 12$

4 Lijnen

1 **a** $y = 1\frac{1}{3}x - 3$
$3y = 4x - 9$
$4x - 3y = 9$

b $y = 5 - \frac{1}{2}x$
$\frac{1}{2}x + y = 5$
$\frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1$

c $\frac{x}{6} + \frac{y}{-1\frac{1}{2}} = 1$
$x - 4y = 6$
$-4y = -x + 6$
$y = \frac{1}{4}x - 1\frac{1}{2}$

2 k: $y = 5$
Lijn l gaat door de punten (0, 1) en (4, 6).
De richtingscoëfficiënt is dus $\frac{6 - 1}{4 - 0} = 1\frac{1}{4}$ en het startgetal is 1.
l: $y = 1\frac{1}{4}x + 1$
m: $x = -2$
Lijn n gaat door de punten (1, 7) en (3, 0).
De richtingscoëfficiënt is dus $\frac{0 - 7}{3 - 1} = -3\frac{1}{2}$.
$y = -3\frac{1}{2}x + b$ met $x = 3$ en $y = 0$ geeft $0 = -3\frac{1}{2} \cdot 3 + b$, dus $b = 10\frac{1}{2}$
n: $y = -3\frac{1}{2}x + 10\frac{1}{2}$

3 **a** De richtingscoëfficiënt is $\frac{1 - -2}{5 - 2} = \frac{3}{3} = 1$.
$y = x + b$ met $x = 5$ en $y = 1$ geeft $1 = 5 + b$, dus $b = -4$.
Lijn BC: $y = x - 4$. De andere vormen zijn $x - y = 4$ en $\frac{x}{4} + \frac{y}{-4} = 1$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b De richtingscoëfficiënt is $\frac{-2-7}{2-0}=\frac{-9}{2}=-4\frac{1}{2}$ en het startgetal is 7.

Lijn AB: $y=-4\frac{1}{2}x+7$. De andere vormen zijn $4\frac{1}{2}x+y=7$ en $\frac{x}{\frac{14}{9}}+\frac{y}{7}=1$.

c De richtingscoëfficiënt van lijn AB is $-4\frac{1}{2}$

$\tan^{-1}\left(4\frac{1}{2}\right)=77{,}471\ldots°$

De gevraagde hoek is ongeveer 77°.

4 a $\begin{cases}5x+3y=9\\ \frac{1}{2}x+y=3\end{cases}$ geeft $\begin{cases}5x+3y=9\\ 5x+10y=30\end{cases}$

$\begin{cases}5x+3y=9\\ \underline{5x+10y=30\ -}\end{cases}$

$-7y=-21$

$y=3$

$5x+3\cdot 3=9$ geeft $x=0$

De oplossing is $x=0$ en $y=3$.

b $\begin{cases}0{,}2x+0{,}3y-1=0\\ 2x-y=6\end{cases}$ geeft $\begin{cases}2x+3y=10\\ 2x-y=6\end{cases}$

$\begin{cases}2x+3y=10\\ \underline{2x-y=6\ -}\end{cases}$

$4y=4$

$y=1$

$2x-1=6$

$2x=7$, dus $x=3\frac{1}{2}$

De oplossing is $x=3\frac{1}{2}$ en $y=1$.

5 a Substitutie van $y=px+3$ in de onderste vergelijking geeft

$8x-2(px+3)=7$.

$8x-2px-6=7$

$(8-2p)\cdot x=13$

Dit is niet oplosbaar als $8-2p=0$, dus is het stelsel strijdig als $p=4$.

b Uit opdracht a volgt $x=\frac{13}{8-2p}$, mits $p\neq 4$.

Dan is $y=p\cdot\left(\frac{13}{8-2p}\right)+3=\frac{13p}{8-2p}+3$.

6 a De richtingscoëfficiënt van lijn AB is $\frac{-3-5}{3-1}=-4$

De richtingscoëfficiënt van lijn BC is $\frac{-2--3}{7-3}=\frac{1}{4}$

Omdat $\text{rc}_{AB}\cdot\text{rc}_{BC}=-4\cdot\frac{1}{4}=-1$ staat $AB\perp BC$.

b $BC=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$

$AB=\sqrt{8^2+2^2}=\sqrt{68}$

$\tan(\angle A)=\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{68}}=\frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{17}}=\frac{1}{2}$

$\angle A\approx 27°$

© Noordhoff Uitgevers bv

c Het midden van zijde AC is $M\left(4, 1\frac{1}{2}\right)$.

De richtingscoëfficiënt van lijn AC is $\frac{-2-5}{7-1} = -1\frac{1}{6}$

$-1\frac{1}{6} \cdot m_2 = -1$ geeft $m_2 = \frac{6}{7}$, dus de richtingscoëfficiënt van de middelloodlijn is $\frac{6}{7}$

$y = \frac{6}{7}x + b$ met $x = 4$ en $y = 1\frac{1}{2}$ geeft $1\frac{1}{2} = \frac{6}{7} \cdot 4 + b$ ofwel $b = -1\frac{13}{14}$

Een vergelijking van de middelloodlijn van zijde AC is $y = \frac{6}{7}x - 1\frac{13}{14}$

Dus is $P\left(0, -1\frac{13}{14}\right)$.

7 **a** l: $y = \frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$, dus de richtingscoëfficiënt van l is $\frac{1}{3}$

$\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 18{,}434\ldots°$

Lijn m heeft vergelijking $y = -\frac{2}{3}x$ dus de richtingscoëfficiënt van m is $-\frac{2}{3}$

$\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33{,}690\ldots°$

De hoek tussen l en m is ongeveer $18{,}434\ldots° + 33{,}690\ldots° \approx 52°$.

b De richtingscoëfficiënt van l is $\frac{1}{3}$.

$\frac{1}{3} \cdot m_2 = -1$ dus de richtingscoëfficiënt van de loodlijn is -3.

$y = -3x + b$ met $x = 3$ en $y = -2$ geeft $-2 = -3 \cdot 3 + b$, dus $b = 7$.

Een vergelijking van de loodlijn is $y = -3x + 7$.

c $\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3} = -\frac{2}{3}x$

$x = -2\frac{1}{3}$

$y = -\frac{2}{3} \cdot -\frac{7}{3} = \frac{14}{9} = 1\frac{5}{9}$

Het snijpunt is $S\left(-2\frac{1}{3}, 1\frac{5}{9}\right)$.

d De hoek die l met een horizontale lijn maakt is ongeveer 18,43° (zie opdracht a). De hoek met de y-as is dan ongeveer $90° - 18{,}43° \approx 72°$.

8 **a** Uit $\frac{x}{2} + \frac{y}{8} = 1$ volgt $4x + y = 8$ dus q: $y = -4x + 8$.

Deze lijn is evenwijdig aan de lijn p: $y = -4x + 3$ omdat de richtingscoëfficiënten gelijk zijn.

b Een punt van lijn p is $A(0, 3)$. De afstand tussen p en q is gelijk aan de afstand van A tot q.

De vergelijking van een lijn m door A loodrecht op lijn q is $y = \frac{1}{4}x + 3$.

Snijden van q en m geeft $-4x + 8 = \frac{1}{4}x + 3$.

$-16x + 32 = x + 12$

$20 = 17x$

$x = \frac{20}{17}$

$y = -4 \times \frac{20}{17} + 8$ Invullen in q of m geeft $y = \frac{56}{17}$

Dus snijpunt is $T\left(\frac{20}{17}, \frac{56}{17}\right)$.

Dan is de afstand tussen de lijnen p en q gelijk aan de lengte van AT.

$AT = \sqrt{\left(\frac{20}{17}\right)^2 + \left(\frac{5}{17}\right)^2} = \sqrt{\frac{425}{289}} = \frac{\sqrt{425}}{17} = \frac{5\sqrt{17}}{17} = \frac{5}{17}\sqrt{17}$.

9 **a** Uit $AB = AC$ volgt $AB^2 = AC^2$ dus is $(2 - p)^2 + 6^2 = (4 - p)^2 + 4^2$

$4 - 4p + p^2 + 36 = 16 - 8p + p^2 + 16$

$p^2 - 4p + 40 = p^2 - 8p + 32$

$4p = -8$

$p = -2$

© Noordhoff Uitgevers bv

b $\angle BAC = \angle(\text{lijn } AB, \text{ lijn } AC)$

Lijn AB heeft richtingscoëfficiënt $\frac{6}{2-p}$ en

lijn AC heeft richtingscoëfficiënt $\frac{-4}{4-p}$

Uit $AB \perp AC$ volgt $\frac{6}{2-p} \cdot \frac{-4}{4-p} = -1$

$-24 = -(2-p)(4-p)$

$-24 = -(p^2 - 6p + 8)$

$24 = p^2 - 6p + 8$

$p^2 - 6p - 16 = 0$

$(p+2)(p-8) = 0$

$p + 2 = 0$ of $p - 8 = 0$

$p = -2$ of $p = 8$

10 **a** Stel eerst een vergelijking op van de lijn m door $O(0, 0)$ loodrecht op l.
De richtingscoëfficiënt van l is $-\frac{1}{2}$ dus die van m is 2, en m: $y = 2x$.
Het snijpunt S van l en m vind je met $8 - \frac{1}{2}x = 2x$.

$8 = 2\frac{1}{2}x$

$x = 3\frac{1}{5}$

$y = 2 \cdot 3\frac{1}{5} = 6\frac{2}{5}$

Het snijpunt is $S\left(3\frac{1}{5}, 6\frac{2}{5}\right)$.

De afstand van $O(0, 0)$ tot l is gelijk aan $OS = \sqrt{3{,}2^2 + 6{,}4^2} = \sqrt{51{,}2}$

b Een punt op lijn l kun je schrijven als $\left(x, 8 - \frac{1}{2}x\right)$.

Dan moet de afstand van $M(10, 3)$ tot $\left(x, 8 - \frac{1}{2}x\right)$ gelijk aan 10 zijn.

Dus $(x - 10)^2 + (8 - \frac{1}{2}x - 3)^2 = 100$.

$x^2 - 20x + 100 + 25 - 5x + \frac{1}{4}x^2 = 100$

$1\frac{1}{4}x^2 - 25x + 25 = 0$

$x^2 - 20x + 20 = 0$

$D = (-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 320$

$x = \frac{20 - \sqrt{320}}{2} = \frac{20 - 8\sqrt{5}}{2}$ of $x = \frac{20 + \sqrt{320}}{2} = \frac{20 + 8\sqrt{5}}{2}$

$x = 10 - 4\sqrt{5}$ of $x = 10 + 4\sqrt{5}$

$y = 8 - \frac{1}{2}\left(10 - 4\sqrt{5}\right) = 3 + 2\sqrt{5}$ of $y = 8 - \frac{1}{2}\left(10 + 4\sqrt{5}\right) = 3 - 2\sqrt{5}$

Dus zijn P en Q de punten $\left(10 - 4\sqrt{5}, 3 + 2\sqrt{5}\right)$ en $\left(10 + 4\sqrt{5}, 3 - 2\sqrt{5}\right)$.

5 Afgeleide functies

1 **a** $\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{\sqrt{10} - 2}{3} \approx 0{,}39$

$\frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = \frac{\sqrt{14} - \sqrt{12}}{1} \approx 0{,}28$

© Noordhoff Uitgevers bv

b De gemiddelde toename over dit interval is $\frac{f(a)-f(a-2)}{a-(a-2)}=$

$\frac{\sqrt{2a+4}-\sqrt{2(a-2)+4}}{2}=\frac{\sqrt{2a+4}-\sqrt{2a-4+4}}{2}=\frac{\sqrt{2a+4}-\sqrt{2a}}{2}$

c $\frac{f(b)-f(-2)}{b-{-2}}=\frac{\sqrt{2b+4}-\sqrt{2\cdot -2+4}}{b+2}=\frac{\sqrt{2b+4}}{b+2}=\frac{1}{4}$

$4\cdot\sqrt{2b+4}=b+2$

$\sqrt{2b+4}=\frac{1}{4}b+\frac{1}{2}$

$2b+4=\frac{1}{16}b^2+\frac{1}{4}b+\frac{1}{4}$

$\frac{1}{16}b^2-1\frac{3}{4}b-3\frac{3}{4}=0$

$b^2-28b-60=0$

$(b-30)(b+2)=0$

$b-30=0$ of $b+2=0$

$b=30$ of $b=-2$

Controle: alleen $b=30$ voldoet.

2 a Omdat $h(4)=50\cdot 4-10\cdot 4^2=40$ en $h(0)=0$ is de gemiddelde toename gelijk aan $\frac{h(4)-h(0)}{4-0}=\frac{40-0}{4}=10$.

b $h(0{,}002)=50\cdot 0{,}002-10\cdot 0{,}002^2=0{,}09996$ en $h(0)=0$, dus het differentiequotiënt is gelijk aan $\frac{h(0{,}002)-h(0)}{0{,}002-0}=\frac{0{,}09996}{0{,}002}=49{,}98$.

c $\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{h(1+\Delta t)-h(1)}{\Delta t}=\frac{50(1+\Delta t)-10(1+\Delta t)^2-40}{\Delta t}=$

$\frac{50+50\Delta t-10(1+2\Delta t+\Delta t^2)-40}{\Delta t}=\frac{30\Delta t-10\Delta t^2}{\Delta t}$

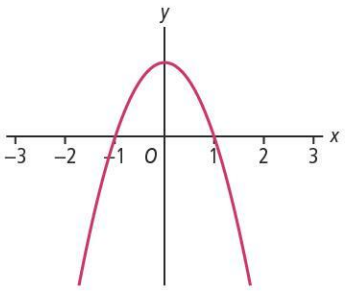
dus $\frac{\Delta y}{\Delta t}=30-10\Delta t$

Als $\Delta t\to 0$ dan $\frac{\Delta y}{\Delta t}\to 30$

Het differentiaalquotiënt is dus gelijk aan 30.

d Het antwoord van opdracht c is de helling van de grafiek van h voor $t=1$.

3 a



b $f'(x)=3-3x^2$

$f'(2)=3-3\cdot 2^2=-9$

De helling van de grafiek is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de lijn.

$f(2)=3\cdot 2-2^3=-2$

$y=-9\cdot 2+16=-2$

Het punt $(2, -2)$ ligt zowel op de lijn als op de grafiek van f, dus raakt de lijn aan de grafiek van f.

© Noordhoff Uitgevers bv

4 **a** $f'(x) = 21x^6 - 8x + 2\sqrt{2}$

b $g(x) = x^3 - 4x + 8x^2 - 2x^3$ ofwel $g(x) = -x^3 + 8x^2 - 4x$

$g'(x) = -3x^2 + 16x - 4$

c $h(x) = 0{,}16x^4 + 1{,}5x^2$

$h'(x) = 0{,}64x^3 + 3x$

d $m(x) = x^5 - 2x^3 + 4x^3 - 8x$ ofwel $m(x) = x^5 + 2x^3 - 8x$

$m'(x) = 5x^4 + 6x^2 - 8$

5 **a** $f'(x) = x^2 + x - 11$

b Uit $f(0) = 7$ en $f'(0) = -11$ volgt $y = -11x + 7$.

c Dan is $f'(x) = 1$.

$x^2 + x - 11 = 1$

$x^2 + x - 12 = 0$

$(x + 4)(x - 3) = 0$

$x + 4 = 0$ of $x - 3 = 0$

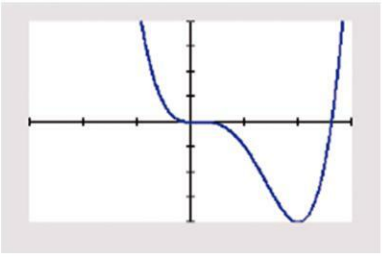
$x = -4$ of $x = 3$

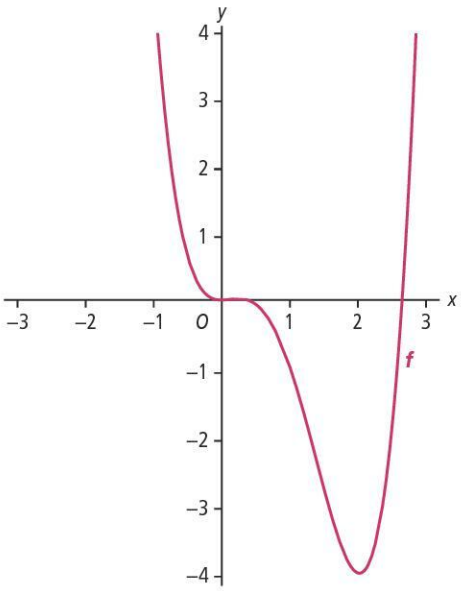
$x = -4$ geeft $y = f(-4) = 37\frac{2}{3}$ en $x = 3$ geeft $y = f(3) = -12\frac{1}{2}$

De raakpunten zijn $\left(-4, 37\frac{2}{3}\right)$ en $\left(3, -12\frac{1}{2}\right)$.

6 **a** Invoer: $y_1 = x^4 - 3x^3 + x^2$

Venster: $-3 \le x \le 3$ en $-4 \le y \le 4$





b $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2x$

$4x^3 - 9x^2 + 2x = 0$

$x(4x^2 - 9x + 2) = 0$

$x = 0$ of $4x^2 - 9x + 2 = 0$

$D = (-9)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 49$

$x = 0$ of $x = \dfrac{9 - \sqrt{49}}{8} = \frac{1}{4}$ of $x = \dfrac{9 + \sqrt{49}}{8} = 2$

Met behulp van de schets van opdracht a krijg je: minimum $f(0) = 0$,

maximum $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{256}$ en minimum $f(2) = -4$.

7 In het raakpunt moet gelden $f(x) = g(x)$ en $f'(x) = g'(x)$.

Dit geeft de vergelijkingen $x^3 + 12 = ax$ en $3x^2 = a$.

Substitueren van $3x^2$ voor a in de eerste vergelijking geeft $x^3 + 12 = 3x^2 \cdot x$.

$x^3 + 12 = 3x^3$

$2x^3 = 12$

$x^3 = 6$

$x = \sqrt[3]{6}$ en $y = f\left(\sqrt[3]{6}\right) = \left(\sqrt[3]{6}\right)^3 + 12 = 6 + 12 = 18$

Het raakpunt is $\left(\sqrt[3]{6}, 18\right)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

8 **a** $B(p; 7{,}5 - 0{,}5p^2)$

b De oppervlakte O is $O = OA \cdot AB = p \cdot (7{,}5 - 0{,}5p^2) = 7{,}5p - 0{,}5p^3$.

c $\dfrac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}p} = 7{,}5 - 1{,}5p^2$

$\dfrac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}p} = 0$ als $7{,}5 - 1{,}5p^2 = 0$ ofwel $p^2 = 5$

$p = -\sqrt{5}$ of $p = \sqrt{5}$

Alleen $p = \sqrt{5}$ voldoet. Dit invullen in $O = 7{,}5p - 0{,}5p^3$ geeft

$O = 7{,}5 \cdot \sqrt{5} - 0{,}5 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^3$

$O = 7{,}5\sqrt{5} - 0{,}5 \cdot 5 \cdot \sqrt{5}$ dus $O = 5\sqrt{5}$

De maximale oppervlakte is gelijk aan $5\sqrt{5}$.

6 Periodieke functies

1

hoek in *graden*	20	225	75	300	210	570
hoek in *radialen*	$\frac{1}{9}\pi$	$1\frac{1}{4}\pi$	$\frac{5}{12}\pi$	$1\frac{2}{3}\pi$	$1\frac{1}{6}\pi$	$3\frac{1}{6}\pi$

2 **a** $\sin\left(3\frac{1}{4}\pi\right) = \sin\left(3\frac{1}{4}\pi - 2\pi\right) = \sin\left(1\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

b $\cos\left(1\frac{1}{3}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

c $\sin\left(11\frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(11\frac{1}{2}\pi - 10\pi\right) = \sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = -1$

d $\cos\left(-7\frac{1}{6}\pi\right) = \cos\left(-7\frac{1}{6}\pi + 8\pi\right) = \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

e $\sin\left(-5\frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(-5\frac{1}{3}\pi + 6\pi\right) = \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

f $\cos\left(15\frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(15\frac{3}{4}\pi - 14\pi\right) = \cos\left(1\frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

3 **a** De amplitude is $1\frac{1}{2}$, de periode is π en de evenwichtsstand is $y = 3$.
De grafiek gaat stijgend door het punt $\left(\frac{1}{4}\pi, 3\right)$.

b De amplitude is 6, de periode is 6 en de evenwichtsstand is $y = -4$.
Een hoogste punt van de grafiek is het punt $(-2, 2)$.

c $f(x)$ is maximaal $3 + 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$ op een kwart periode na de start van een nieuwe periode, dus bijvoorbeeld als $x = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4} \cdot \pi = \frac{1}{2}\pi$.
Omdat de periode π is, is $f(x)$ maximaal $4\frac{1}{2}$ als $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.
Op het interval $[0, 3\pi]$ is dat het geval als $x = \frac{1}{2}\pi$ of $x = 1\frac{1}{2}\pi$ of $x = 2\frac{1}{2}\pi$.
$f(x)$ is minimaal $1\frac{1}{2}$ op driekwart periode na de start van een nieuwe periode, dus bijvoorbeeld als $x = \frac{1}{4}\pi + \frac{3}{4} \cdot \pi = \pi$.
Vanwege periode π is dus $f(x)$ minimaal $1\frac{1}{2}$ als $x = 0 + k \cdot \pi$.
Op het interval $[0, 3\pi]$ is dat het geval als $x = 0$ of $x = \pi$ of $x = 2\pi$ of $x = 3\pi$.

d $g(x)$ is maximaal 2 in een hoogste punt, dus bijvoorbeeld als $x = -2$.
Vanwege periode 6 is dus $g(x)$ maximaal 2 als $x = -2 + k \cdot 6$.
Op het interval $[0, 10]$ is dat het geval als $x = 4$ en $x = 10$.
$g(x)$ is minimaal op een halve periode na een hoogste punt, dus bijvoorbeeld als $x = -2 + 3 = 1$.
Omdat de periode 6 is, is $g(x)$ minimaal -10 als $x = 1 + k \cdot 6$.
Op het interval $[0, 10]$ is dat het geval als $x = 1$ en $x = 7$.

© Noordhoff Uitgevers bv

4 **a** De evenwichtsstand is $y = 1$, dus $d = 1$.
De amplitude is $3 - 1 = 2$, dus $a = 2$.
De periode is π , dus $b = \dfrac{2\pi}{\text{periode}} = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2$.
De grafiek gaat in het punt $\left(\frac{1}{2}\pi, 1\right)$ stijgend door de evenwichtsstand dus $c = \frac{1}{2}\pi$.
$f(x) = 1 + 2\sin\left(2\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right)$

b Periode, evenwichtsstand en amplitude veranderen niet, wel de horizontale verschuiving. Dus $p = 2$, $q = 2$ en $s = 1$.
Een hoogste punt is $\left(-\frac{1}{4}\pi, 3\right)$, dus $r = -\frac{1}{4}\pi$ en $f(x) = 1 + 2\cos\left(2\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)\right)$

c Punten van symmetrie zijn bijvoorbeeld $(0, 1)$ en $\left(\frac{1}{2}\pi, 1\right)$.

d Vergelijkingen van symmetrieassen zijn bijvoorbeeld $x = \frac{1}{4}\pi$ en $x = \frac{3}{4}\pi$.

e De periode van g is $3 \cdot \pi$ en $b = \dfrac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$
Het punt waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat, is ook met 3 vermenigvuldigd ten opzichte van de y-as en is dus nu $\left(1\frac{1}{2}\pi, 1\right)$. De amplitude en de evenwichtsstand zijn hetzelfde als die van de grafiek van f.
$g(x) = 1 + 2\sin\left(\frac{2}{3}\left(x - 1\frac{1}{2}\pi\right)\right)$

5 **a** $\sin(3x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ dus
$3x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
Op het interval $[0, \pi]$ zijn de oplossingen $x = \frac{1}{12}\pi$, $x = \frac{1}{4}\pi$, $x = \frac{3}{4}\pi$ en $x = \frac{11}{12}\pi$.

b $\cos(2x) = \frac{1}{2}$
$\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$ dus
$2x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi$
Op het interval $[-\pi, \pi]$ zijn de oplossingen $x = -\frac{5}{6}\pi$, $x = -\frac{1}{6}\pi$, $x = \frac{1}{6}\pi$ en $x = \frac{5}{6}\pi$.

c $2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = \sqrt{3}$
$\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ dus
$\frac{1}{2}x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\frac{1}{2}x = 1\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 4\pi$ of $x = 3\frac{2}{3}\pi + k \cdot 4\pi$
Op het interval $[0, 6\pi]$ zijn de oplossingen $x = \frac{1}{3}\pi$, $x = 3\frac{2}{3}\pi$ en $x = 4\frac{1}{3}\pi$.

d $3 - 4\sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right) = 1$
$\sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right) = \frac{1}{2}$
$\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$ dus
$\frac{1}{2}\pi x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\frac{1}{2}\pi x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{1}{3} + k \cdot 4$ of $x = 1\frac{2}{3} + k \cdot 4$
Op het interval $[0, 3]$ zijn de oplossingen $x = \frac{1}{3}$ en $x = 1\frac{2}{3}$

© Noordhoff Uitgevers bv

6 **a** $\sin(2x) = -0{,}3$
Invoer: $y_1 = \sin(2x)$ en $y_2 = -0{,}3$
Venster: $0 \le x \le 2\pi$ en $-1 \le y \le 1$
Optie: snijpunten
Op het interval $[0, 2\pi]$ zijn de oplossingen $x \approx 1{,}72$ en $x \approx 2{,}99$ en $x \approx 4{,}86$ en $x \approx 6{,}13$.

b $\cos(0{,}6x) = 0{,}75$
Invoer: $y_1 = \cos(0{,}6x)$ en $y_2 = 0{,}75$
Venster: $0 \le x \le 10$ en $-1 \le y \le 1$
Optie: snijpunten
Op het interval $[0, 10]$ zijn de oplossingen $x \approx 1{,}20$ en $x \approx 9{,}27$.

c $4\sin(3x) = 3$
Invoer: $y_1 = 4\sin(3x)$ en $y_2 = 3$
Venster: $0 \le x \le \pi$ en $-4 \le y \le 4$
Optie: snijpunten
Op het interval $[0, \pi]$ zijn de oplossingen $x \approx 0{,}28$ en $x \approx 0{,}76$ en $x \approx 2{,}38$ en $x \approx 2{,}86$.

d $2 + 3\cos(x - 5) = 1{,}5$
Invoer: $y_1 = 2 + 3\cos(x - 5)$ en $y_2 = 1{,}5$
Venster: $0 \le x \le 3\pi$ en $-1 \le y \le 5$
Optie: snijpunten
Op het interval $[0, 3\pi]$ zijn de oplossingen $x \approx 0{,}46$ en $x \approx 3{,}26$ en $x \approx 6{,}74$.

7 **a** $g(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$

b $g(x) = \sin(x - 2) - 4$

c $g(x) = \sin(-2x)$

8 **a** $t = 0$ geeft $h = 35 + 30\sin\left(\frac{\pi}{300}\left(0 - 150\right)\right) = 5$
Bart is op 5 meter hoogte ingestapt.

b De as bevindt zich op 35 meter hoogte (de evenwichtsstand).

c De periode is $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{300}} = 600$ seconden, dus het duurt 10 minuten voordat Bart precies één keer rond is geweest.

d Kees bevindt zich precies $\frac{1}{4}$ rondgang vóór Bart en is dus $\frac{1}{4} \cdot 600 = 150$ seconden eerder op een bepaalde hoogte dan Bart. De bijbehorende formule is $h = 35 + 30\sin\left(\frac{\pi}{300}\left(t + 150 - 150\right)\right)$ ofwel $h = 35 + 30\sin\left(\frac{\pi}{300}t\right)$.

e Los de vergelijking $35 + 30\sin\left(\frac{\pi}{300}\left(t - 150\right)\right) = 35 + 30\sin\left(\frac{\pi}{300}t\right)$ met behulp van je rekenmachine op.

Invoer: $y_1 = 35 + 30\sin\left(\frac{\pi}{300}\left(x - 150\right)\right)$ en $y_2 = 35 + 30\sin\left(\frac{\pi}{300}x\right)$
Venster: $0 \le x \le 600$ en $0 \le y \le 65$
Optie: snijpunten
Het eerste snijpunt geeft $t = 225$, dus na 225 seconden zijn Kees en Bart voor de eerste keer op gelijke hoogte, dat is na $3\frac{3}{4}$ minuut.

f Het tweede snijpunt geeft $t = 225$, dus na 525 seconden zijn Kees en Bart voor de tweede keer op gelijke hoogte, dat is na $8\frac{3}{4}$ minuut.
Of: een halve draai na de eerste keer, dus 5 minuten later, zijn ze weer op gelijke hoogte. Dat is na $3\frac{3}{4} + 5 = 8\frac{3}{4}$ minuut.

© Noordhoff Uitgevers bv

UITWERKINGEN

WISKUNDE

12E EDITIE

VWO DEEL 1

Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.
Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.
Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.

Noordhoff

MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189

www.modernewiskunde.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-89256-2