LEERBOEK

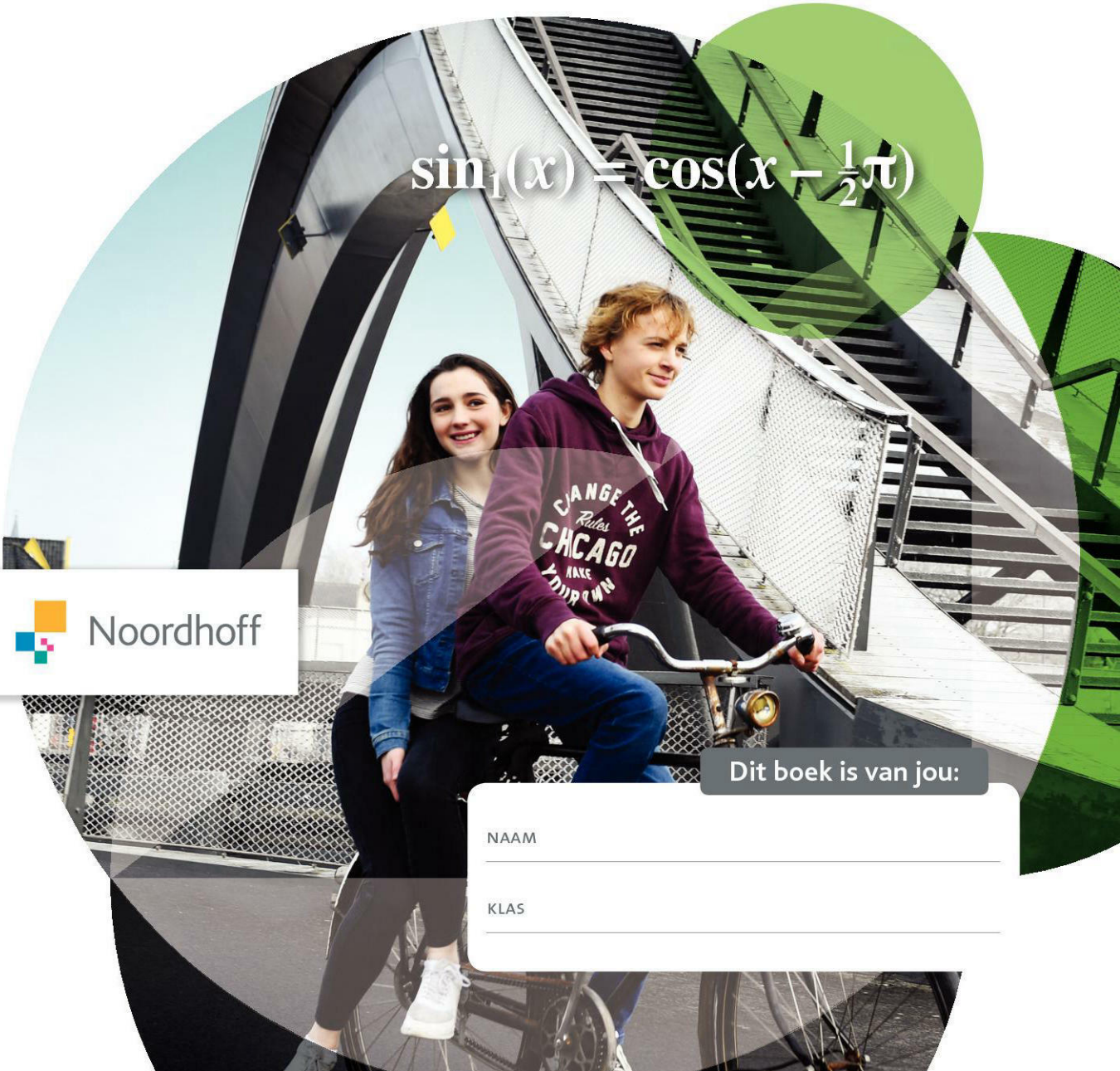
FLEX

WISKUNDE B

VWO DEEL 2

# MODERNE WISKUNDE B

$\sin_1(x) = \cos(x - \frac{1}{2}\pi)$




Noordhoff

Dit boek is van jou:

NAAM

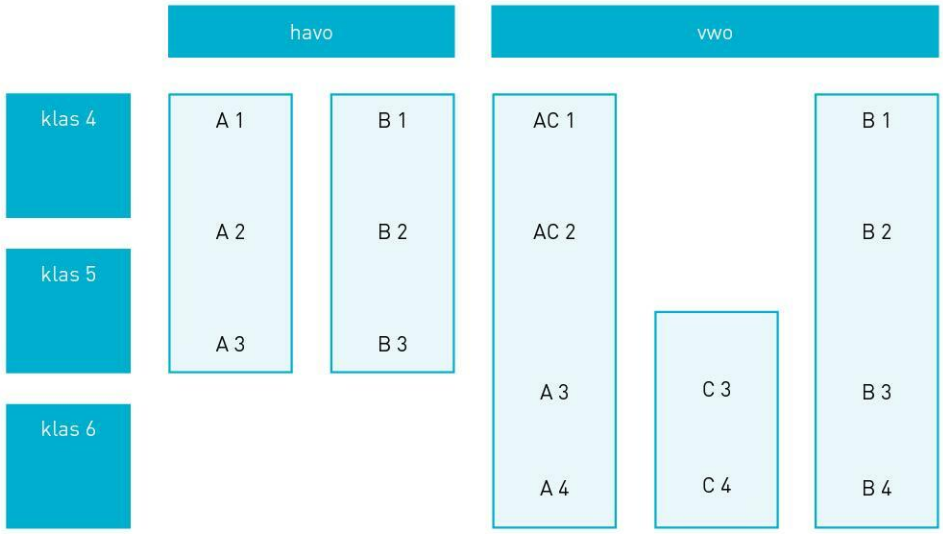
KLAS

12e editie

# Moderne Wiskunde

vwo B deel 2

## Serieoverzicht Tweede Fase




Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

*De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontlenen.*

**Klimaatneutraal**
Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.

MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189

0 / 20

© 2020 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsenauteursrecht.nl.

*This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.*

ISBN 978-90-01-89203-6

© Noordhoff Uitgevers bv

12e editie

# Moderne Wiskunde

## vwo B deel 2

Harm Bakker
Bert Boon
Dick Bos
Ferdi Doddema
Wim Doekes
Gerben van der Hoek
Ilse de Jong
Boris Nolte
Gerard van Proosdij
Rindert Reijenga
Geertrui Schaberg
Ron Sinkeldam
Carolijn Tacken

Noordhoff

# Inhoud


## 7 Exponenten en logaritmen 6

Voorkennis 8
7.1 Exponentiële functies 10
7.2 Exponentiële vergelijkingen 14
7.3 Logaritmen 18
7.4 Logaritmen berekenen 22
7.5 Grafieken van logaritmische functies 26
7.6 Gemengde opdrachten 30
Onderzoeksopdrachten 31
Samenvatting 32
Test jezelf 36
Extra oefening 38

## 8 Vectoren 40

Voorkennis 42
8.1 Vectoren 44
8.2 Vectoren en kentallen 48
8.3 Zwaartepunt en evenwicht 52
8.4 Inwendig product 56
8.5 Vectorvoorstelling van een lijn 60
8.6 Vectorvoorstelling en vergelijking 64
8.7 Gemengde opdrachten 68
Onderzoeksopdrachten 69
Samenvatting 70
Test jezelf 74
Extra oefening 76

**Vaardigheden 4** 78
Rekenen met machten, wortels en breuken 80
Vergelijkingen oplossen 80
Oplossen van stelsels vergelijkingen 83
Differentiëren 83

## 9 Functies bewerken 84

Voorkennis 86
9.1 Transformaties 88
9.2 Symmetrie van grafieken 92
9.3 Absolute waarde 96
9.4 Inverse functies 100
9.5 Gelijkwaardige formules 104
9.6 Gemengde opdrachten 108
Onderzoeksopdrachten 109
Samenvatting 110
Test jezelf 114
Extra oefening 116

## 10 Kettingregel 118

Voorkennis 120
10.1 Machtsfuncties differentiëren 122
10.2 Samengestelde functies 126
10.3 De kettingregel 130
10.4 Extreme waarden 134
10.5 Buigpunten 138
10.6 Gemengde opdrachten 142
Onderzoeksopdrachten 143
Samenvatting 144
Test jezelf 148
Extra oefening 150

**Vaardigheden 5** 152
Kwadratische formules 154
Formules herleiden 155
Meetkunde in driehoeken 155
Goniometrie 156
Exponenten en logaritmen 156
Redeneren met functies 157


© Noordhoff Uitgevers bv

## 11 Exponentiële en logaritmische functies 158

Voorkennis 160
11.1 Vergelijkingen met exponenten en logaritmen 162
11.2 Rekenregels voor logaritmen 166
11.3 Herleiden 170
11.4 Vergelijkingen en ongelijkheden 174
11.5 Groeimodellen 178
11.6 Gemengde opdrachten 182
Onderzoeksopdrachten 183
Samenvatting 184
Test jezelf 188
Extra oefening 190

## 12 Integreren 192

Voorkennis 194
12.1 Oppervlakten benaderen 196
12.2 Integralen 200
12.3 Hoofdstelling van de integraalrekening 204
12.4 Primitiveren en integreren 208
12.5 Oppervlakte en integralen 212
12.6 Gemengde opdrachten 216
Onderzoeksopdrachten 217
Samenvatting 218
Test jezelf 222
Extra oefening 224

**Vaardigheden 6** 226
Lijnen 228
Vergelijkingen oplossen 229
Rekenen met breuken 230
Differentiëren 231

## Keuzeonderwerpen 232

**Getaltheorie** 234

## Extra 250

**Meer oefenen** 252

**Oefenproefwerken** 264

**Trefwoorden** 276


Moderne Wiskunde

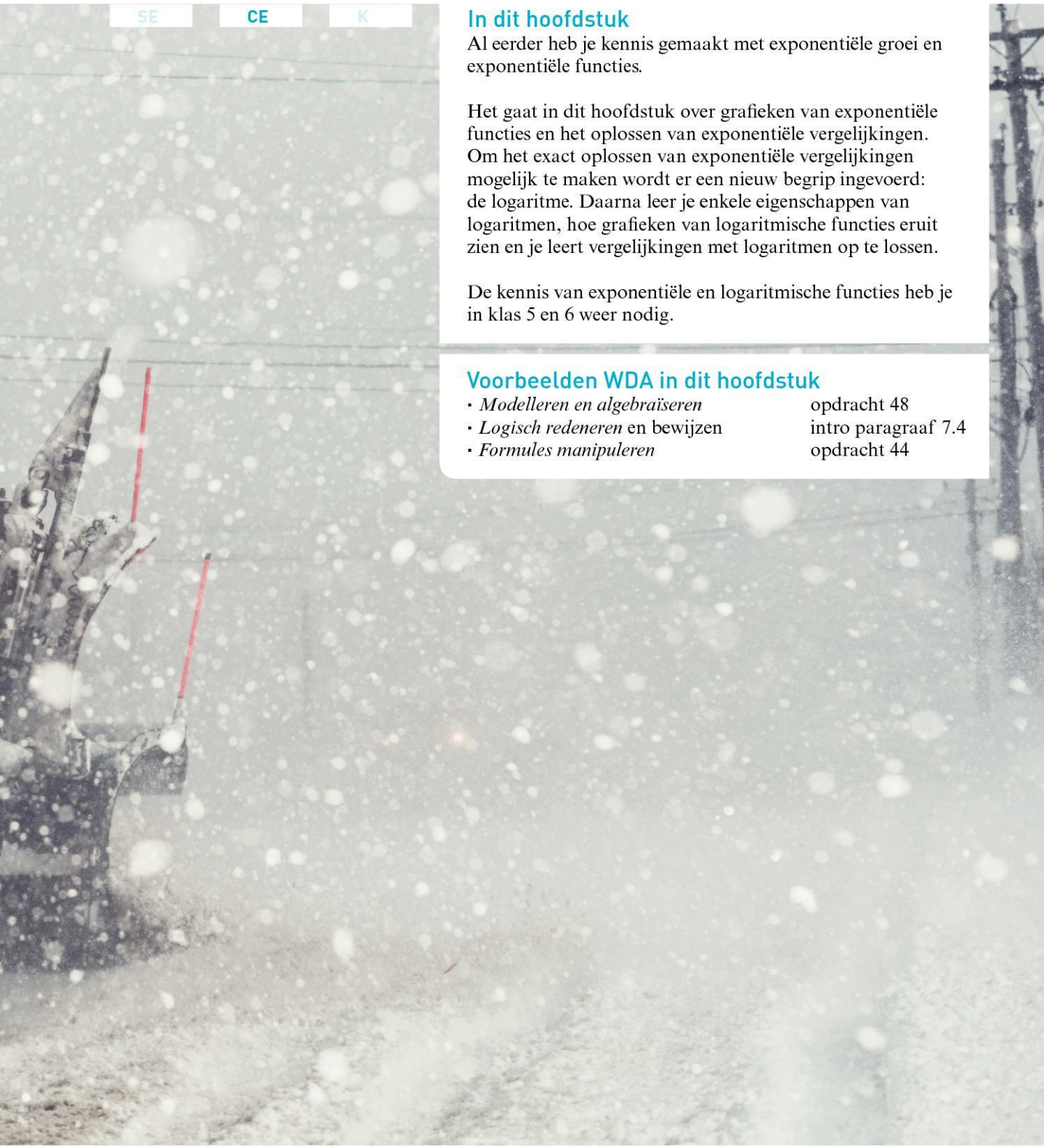
# vwo B deel 2

© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

# Exponenten en logaritmen 7

SE CE K



## In dit hoofdstuk

Al eerder heb je kennis gemaakt met exponentiële groei en exponentiële functies.

Het gaat in dit hoofdstuk over grafieken van exponentiële functies en het oplossen van exponentiële vergelijkingen. Om het exact oplossen van exponentiële vergelijkingen mogelijk te maken wordt er een nieuw begrip ingevoerd: de logaritme. Daarna leer je enkele eigenschappen van logaritmen, hoe grafieken van logaritmische functies eruit zien en je leert vergelijkingen met logaritmen op te lossen.

De kennis van exponentiële en logaritmische functies heb je in klas 5 en 6 weer nodig.

## Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

| | |
|---|---|
| · *Modelleren en algebraïseren* | opdracht 48 |
| · *Logisch redeneren* en bewijzen | intro paragraaf 7.4 |
| · *Formules manipuleren* | opdracht 44 |

© Noordhoff Uitgevers bv

**V1** In de tabel is de grootte van een bacteriepopulatie weergegeven vanaf het moment dat werd begonnen met tellen.

| *tijd* in uren | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| *aantal bacteriën* | 120 | 156 | 203 | 263 | 342 |

**a** Bereken in één decimaal de groeifactor per uur.
**b** Hoe groot is de groeifactor per dag?
**c** Hoeveel bacteriën waren er twee uur voordat er werd begonnen met tellen?
**d** Na hoeveel uur zijn er 660 bacteriën?

**V2** Bij een exponentieel groeiproces is de groeifactor 1,43 per dag. Geef bij de opdrachten het antwoord in twee decimalen.
**a** Bereken de groeifactor per week.
**b** Bereken de groeifactor per halve dag.

**Theorie**

Functies van de vorm $N(t) = b \cdot g^t$ heten exponentiële functies. Hierin is $b$ de beginhoeveelheid op tijdstip $t = 0$ en is $g$ de groeifactor per tijdseenheid.

**Voorbeeld**

Gegeven is de functie $N(t) = 13{,}5 \cdot 1{,}04^t$ met $N$ in miljoenen en $t$ in maanden.
Bereken de beginhoeveelheid en de groeifactor per jaar.

**Oplossing**

De beginhoeveelheid is $N(0) = 13{,}5$ miljoen.
De groeifactor per jaar is $1{,}04^{12} \approx 1{,}6$.

**V3** Gegeven is de functie $N(t) = 12 \cdot 1{,}09^{t-2}$, waarbij $t$ de tijd in dagen is.
**a** Bereken de beginhoeveelheid in twee decimalen.
**b** Bereken de groeifactor per week in twee decimalen.
**c** Bereken de groeifactor per zes uur in twee decimalen.

**Theorie**

Bij het rekenen met groeifactoren kun je gebruik maken van de regels voor het rekenen met machten.
Bij het rekenen met machten geldt:

$$g^a \cdot g^b = g^{a+b}, \quad \frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}, \quad (g^a)^b = g^{a \cdot b}$$

$$g^0 = 1, \; g^1 = g, \quad g^{-n} = \frac{1}{g^n}, \quad g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$$

**Voorbeeld**

Schrijf $81 \cdot \sqrt{\frac{1}{27}}$ als macht van 3.

**Oplossing**

$81 \cdot \sqrt{\frac{1}{27}} = 3^4 \cdot (\frac{1}{27})^{\frac{1}{2}} =$

$3^4 \cdot (3^{-3})^{\frac{1}{2}} =$

$3^4 \cdot 3^{-\frac{3}{2}} = 3^{2\frac{1}{2}}$


© Noordhoff Uitgevers bv

**V4** Schrijf als macht van 2.

**a** $\frac{1}{16}\sqrt{\frac{1}{8}}$

**b** $2^{-4} \cdot \frac{1}{2^{-3}}$

**c** $\frac{\sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[3]{4}}{\frac{1}{32}}$

**d** $4^{-3} \cdot 8^{4\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2}$

**Theorie**

Machtsvergelijkingen kun je vereenvoudigen tot de vorm $x^c = a$ waarbij de variabele in het grondtal staat.
Exponentiële vergelijkingen kun je herleiden tot de vorm $g^x = a$ waarbij de variabele in de exponent staat.

**Voorbeeld 1**

Los exact op $3 \cdot g^5 = 30$.

**Oplossing**

$3 \cdot g^5 = 30$ geeft $g^5 = 10$

ofwel $g = 10^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{10}$.

**Voorbeeld 2**

Los exact op $5^{x+2} = \frac{1}{125}$

**Oplossing**

$\frac{1}{125} = 5^{-3}$ geeft $5^{x+2} = 5^{-3}$.

$x + 2 = -3$ dus $x = -5$.

**V5** Los exact op.

**a** $4 \cdot g^3 = 48$

**b** $g^{\frac{1}{4}} + 3 = 5$

**c** $g^{-2} = \frac{1}{4}$

**d** $15g^{-\frac{1}{3}} = 3$

**e** $\frac{1}{4}g^4 = 16$

**f** $\frac{1}{2}g^{-3} = 12$

**g** $2 + \frac{1}{3}g^{-6} = 3$

**h** $\frac{4}{g^2} = 64g^3$

**V6** Los exact op.

**a** $2^x = \frac{1}{8}$

**b** $3^{-x} = 3$

**c** $5^{3-x} = 1$

**d** $2^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}$

**e** $5^{2x-2} = 125$

**f** $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-4} = 3\sqrt{3}$

**V7** Gegeven is de functie $f(x) = 3^{2x}$.

**a** De grafiek van $f$ wordt 3 naar links verschoven.
Stel een functievoorschrift op van de beeldgrafiek.

**b** De grafiek van $f$ wordt met 5 vermenigvuldigd ten opzichte van de $x$-as.
Stel een functievoorschrift op van de beeldgrafiek.

© Noordhoff Uitgevers bv

# 7.1 Exponentiële functies

**Je leert**
- hoe je een functievoorschrift aanpast na een transformatie

**Leerroutes**
- ondersteunend: 1—2—3—4—O5—O6—6—7
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7—8
- uitdagend: 1—2—4—5—6—8—U1—U2

Een blad papier wordt twee keer zo dik als je het dubbelvouwt. Als je dit papier opnieuw dubbelvouwt heb je vier lagen papier.
Neem aan dat het papier 0,1 mm dik is.
- Stel dat je onbeperkt vaak kunt dubbelvouwen.
  Hoe vaak moet je dan vouwen om een dikte van meer dan 1 km te krijgen?

**1** Gegeven zijn de exponentiële functies $h(x) = 2 \cdot 3^x$,
$i(x) = 0{,}5 \cdot 1{,}65^x$, $j(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en $k(x) = 10 \cdot 0{,}7^x$.

Deze functies zijn allemaal van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

**a** Plot de grafieken van deze functies.
Welke functies zijn stijgend en welke zijn dalend?

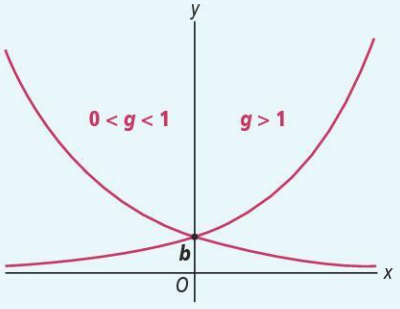
**b** Leg uit waarom de functie stijgend is als $g > 1$.

**c** Welke lijn is asymptoot van elk van de grafieken?

**d** Geef bij elk van de functies de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de $y$-as.

**Theorie**

Een exponentiële functie $f(x) = b \cdot g^x$ met $b > 0$, is stijgend als de groeifactor $g > 1$ en dalend als $0 < g < 1$.
De grafiek gaat door het punt $(0, b)$ op de verticale as.
De grafiek heeft de $x$-as ($y = 0$) als horizontale asymptoot.
Het domein van $f$ is $\mathbb{R}$ en het bereik van $f$ is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.




**2** Gegeven zijn de functies $f(x) = 20 \cdot 1{,}5^x$, $g(x) = 0{,}5^{-x}$,
$h(x) = 3 \cdot 0{,}7^{2x+1}$ en $k(x) = 1{,}0001^x$.

**a** Geef van elke functie aan of deze stijgend of dalend is.

**b** Geef van elke functie het snijpunt van de grafiek met de verticale as.

**c** Geef de groeifactor van de functie $g$ en van de functie $h$.

**d** Geef het domein en het bereik van de functie $k$.

**e** Geef van de functies $f$ en $g$ de vergelijkingen van de asymptoten van de bijbehorende grafieken.


© Noordhoff Uitgevers bv

**3** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x$ en $g(x) = 2^{-x}$.

**a** Plot en schets de grafieken van $f$ en $g$.

**b** Leg uit waarom de grafieken van $f$ en $g$ elkaars spiegelbeeld in de $y$-as zijn.

**c** De grafiek van $h(x) = 2 \cdot 3^x$ wordt gespiegeld in de $y$-as. Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek.

**d** De grafiek van $h(x) = 2 \cdot 3^x$ wordt gespiegeld in de $x$-as. Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek.

**Theorie**

Bij een **transformatie** van de grafiek van een functie $f$ ontstaat een nieuwe grafiek, de **beeldgrafiek**. Bij de beeldgrafiek kun je het functievoorschrift $g(x)$ opstellen.

| *transformatie* | *resultaat* |
|---|---|
| - verschuiving $d$ omhoog | $g(x) = f(x) + d$ |
| - verschuiving $c$ naar rechts | $g(x) = f(x - c)$ |
| - vermenigvuldiging met $a$ ten opzichte van de $x$-as | $g(x) = a \cdot f(x)$ |
| - spiegeling in de $x$-as | $g(x) = -f(x)$ |
| - spiegeling in de $y$-as | $g(x) = f(-x)$ |

**Voorbeeld**

De grafiek van de functie $f(x) = 0{,}5^{2x}$ wordt 3 naar links verschoven en vervolgens gespiegeld in de $y$-as.
Stel het functievoorschrift $g(x)$ op van de beeldgrafiek.

**Oplossing**

Na de verschuiving van 3 naar links ontstaat de grafiek van $h(x) = f(x + 3)$ dus $h(x) = 0{,}5^{2(x+3)}$ ofwel $h(x) = 0{,}5^{2x+6}$.
De spiegeling in de $y$-as geeft vervolgens de grafiek van $g(x) = h(-x)$ dus $g(x) = 0{,}5^{-2x+6}$.

**4** **a** De grafiek van $f(x) = 1{,}5^x$ wordt vermenigvuldigd met 3 ten opzichte van de $x$-as en daarna gespiegeld in de $y$-as. Stel het functievoorschrift op van de beeldgrafiek.

**b** De grafiek van $g(x) = 4 \cdot 3^x$ wordt gespiegeld in de $x$-as en vervolgens 2 omhoog verschoven.
Stel het functievoorschrift op van de beeldgrafiek.

**c** De grafiek van $h(x) = 2 \cdot 0{,}7^x$ wordt gespiegeld in de $y$-as en vervolgens 4 naar rechts verschoven.
Stel het functievoorschrift op van de beeldgrafiek.

**d** De grafiek van $k(x) = 100 \cdot 2^x$ wordt eerst in de $x$-as gespiegeld en daarna in de $y$-as. Tot slot vindt er een verschuiving van 6 omlaag plaats.
Stel het functievoorschrift op van de beeldgrafiek.

**e** Geef van elke beeldgrafiek een vergelijking van de horizontale asymptoot.

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O5

**5** H
**a** Door welke transformaties ontstaat de grafiek van $g(x) = 3 + 0{,}5^{x-4}$ uit de grafiek van $f(x) = 0{,}5^x$?
**b** Door welke transformaties, en in welke volgorde, ontstaat de grafiek van $g(x) = 3 \cdot 5^{-x} + 2$ uit die van $f(x) = 5^x$?
**c** Door welke transformaties, en in welke volgorde, ontstaat de grafiek van $g(x) = 2 - 3^{2-x}$ uit die van $f(x) = 3^x$?

Ondersteunende route → maak opdracht O6

**6** H
Gegeven zijn de functies $g(x) = 8 \cdot 2^x$ en $h(x) = 2^{x+3}$.
**a** Door welke transformaties zijn de grafieken van $g$ en $h$ uit de grafiek van $f(x) = 2^x$ ontstaan?
**b** Plot de grafieken van $g$ en $h$. Wat valt je op?
**c** Gebruik de rekenregels voor het rekenen met machten om aan te tonen dat de functies $g$ en $h$ hetzelfde zijn.
**d** De grafiek van de functie $k(x) = \frac{1}{9} \cdot 3^x$ kan op twee verschillende manieren uit de grafiek van $f(x) = 3^x$ ontstaan: een verschuiving of een vermenigvuldiging. Geef beide mogelijkheden.
**e** Op welke twee manieren kan de grafiek van de functie $m(x) = 2 \cdot 4^x$ ontstaan uit de grafiek van $f(x) = 4^x$?

**7**
Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x$ en $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
**a** Plot en schets de grafieken van $f$ en $g$.
**b** De grafieken van $f$ en $g$ zijn elkaars spiegelbeeld in de $y$-as. Gebruik de rekenregels om aan te tonen dat een spiegeling van de grafiek van $f$ in de $y$-as de grafiek van $g$ oplevert.
**c** De grafiek van $h(x) = 8 \cdot 1{,}5^x$ wordt gespiegeld in de $y$-as. Stel het functievoorschrift op dat bij de beeldgrafiek hoort en schrijf dit in de vorm $k(x) = b \cdot g^x$.

**8**
De grafiek van $p(x) = \sqrt{3} \cdot 3^x$ wordt gespiegeld in de $y$-as en vervolgens $\frac{1}{2}$ naar links verschoven.
Stel het functievoorschrift op dat bij de beeldgrafiek hoort en schrijf dit in de vorm $q(x) = b \cdot g^x$.

Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2


© Noordhoff Uitgevers bv

## Ondersteunende opdrachten

**O5** Gegeven is de functie $g(x) = 7 \cdot 2^{-x} + 6$. Joris onderzoekt door welke transformaties de grafiek van $g$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = 2^x$. Op het blaadje zie je hoe hij te werk gaat.

**a** In het functievoorschrift is $x$ vervangen door $-x$. Welke spiegeling hoort daarbij?

**b** Vul het blaadje verder in.

**c** Als je de grafiek van $g$ ook nog 3 naar rechts verschuift, vervang je in het functievoorschrift $x$ door $x - 3$ om het functievoorschrift van de beeldgrafiek te krijgen. Toon aan dat bij de beeldgrafiek de functie $p(x) = 7 \cdot 2^{3-x} + 6$ hoort.

**Joris**

$h(x) = 2^{-x} = f(-x)$

dus een spiegeling in de ...-as.

$k(x) = 7 \cdot 2^{-x} = 7 \cdot h(x)$

dus een vermenigvuldiging

met ... ten opzichte van de ...

$g(x) = 7 \cdot 2^{-x} + 6 = k(x) + 6$

dus een verschuiving ...

Geef van de volgende functies aan door welke transformaties de grafiek ontstaat uit de grafiek van $f(x) = 3^x$.

**d** $g(x) = 4 + 3^{x+2}$

**e** $g(x) = 8 - 3^{x-4}$

**f** $g(x) = 3^{5-x} - 10$

**g** $g(x) = 1 - 2 \cdot 3^{-x}$

**O6** Gegeven is de functie $h(x) = 5^{x+2}$.

**a** Laat met behulp van de rekenregel $g^{a+b} = g^a \cdot g^b$ zien dat het functievoorschrift van $h$ te schrijven is als $h(x) = 25 \cdot 5^x$.

**b** Uit de twee functievoorschriften van $h$ kun je opmaken dat de grafiek van $h$ door twee verschillende transformaties uit de grafiek van $f(x) = 5^x$ kan ontstaan. Welke twee transformaties zijn dat?

## Uitdagende opdrachten

**U1** Van een functie $f$ is bekend dat $f(x) = b \cdot g^x + c$. Geef het functievoorschrift als gegeven is:

**a** $f(0) = 2$, $f(6) = -50$ en de asymptoot is $y = 4$.

**b** $f(0) = 0$, $f(1) = 2$ en de asymptoot is $y = -2$.

**c** $f(-1) = -8$, $f(1) = -32$ en de asymptoot is $y = -7$.

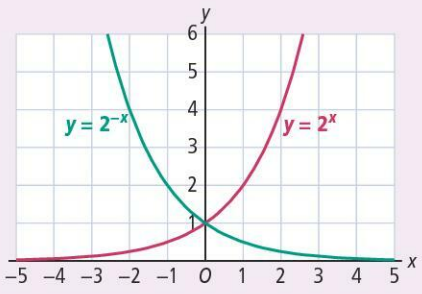
**U2** Beredeneer van de volgende functies welke lijnen een horizontale asymptoot zijn van de grafiek. Je kunt daarbij gebruik maken van de grafieken van $y = 2^x$ en $y = 2^{-x}$.

**a** $f(x) = \dfrac{4}{1 + 2^x}$

**b** $f(x) = (2 + 2^x)^2$

**c** $f(x) = \dfrac{2}{2^{-x} + 2^x}$

**d** $f(x) = \dfrac{2^x}{2^{-x} + 2^x}$




© Noordhoff Uitgevers bv

# 7.2 Exponentiële vergelijkingen

**Je leert** · hoe je een exponentiële vergelijking exact oplost

**Leerroutes**
· ondersteunend: 9—O10—10—11—O12—13—14—15
· doorlopend: 9—10—11—12—13—14—15—16
· uitdagend: 9—10—11—12—13—15—U3—U4

Bij een exponentieel groeiproces verdubbelt de hoeveelheid in één week.
· Hoelang duurt het om acht keer zoveel te krijgen?
· Hoelang duurt het om vijf keer zoveel te krijgen?

**9** Gegeven is de vergelijking $2 \cdot 6^{3+x} = 12 \cdot 36^x$.
**a** Waarom kun je de vergelijking herschrijven als $6^{3+x} = 6 \cdot 36^x$?
**b** Schrijf de rechterkant van de vergelijking als één macht van 6.
**c** Los de vergelijking exact op.

**Aanpak**

**Hoe los je een exponentiële vergelijking exact op?**
**1** Deel zo mogelijk de linker- en de rechterkant van de vergelijking door hetzelfde getal.
**2** Schrijf de linker- en de rechterkant van de vergelijking als machten van hetzelfde grondtal.
**3** Stel de exponenten aan elkaar gelijk en los de hierdoor ontstane vergelijking op.

**Voorbeeld**

Los exact op.

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16\sqrt{2}$

**Oplossing**

**1** niet nodig

**2** $(2^{-1})^x = 2^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$
$2^{-x} = 2^{4\frac{1}{2}}$

**3** $-x = 4\frac{1}{2}$
$x = -4\frac{1}{2}$

$2 \cdot 0{,}2^{1-3x} = 250 \cdot 5^x$

**Oplossing**

**1** $0{,}2^{1-3x} = 125 \cdot 5^x$

**2** $(5^{-1})^{1-3x} = 5^3 \cdot 5^x$
$5^{3x-1} = 5^{3+x}$

**3** $3x - 1 = 3 + x$
$x = 2$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{1-2x} = 8^{x+3}$

**Oplossing**

**1** $(2^{-2})^{1-2x} = (2^3)^{x+3}$

**2** $2^{-2+4x} = 2^{3x+9}$

**3** $4x - 2 = 3x + 9$
$x = 11$


© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O10

**10** H Los exact op.

**a** $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9^{2x-3}$

**b** $3^x = \frac{1}{27}$

**c** $0{,}25^x = 16 \cdot 2^{x-1}$

**d** $\left(\frac{1}{7}\right)^{x+3} = 1$

**e** $2^x = 0{,}125^3$

**f** $0{,}1^{2x} = 1000^{1-x}$

**g** $32 \cdot 2^x = 4^{4x+3}$

**h** $3 \cdot 0{,}5^x = 24 \cdot 2^{4x-3}$

**i** $14 \cdot 4^x = 7 \cdot 2^{3x}$

**j** $\sqrt{2^x} = \frac{1}{64}$

**11** H Ga bij elke vergelijking na of deze exact kan worden opgelost of niet. Bereken de exacte oplossing als dat mogelijk is en geef in de andere gevallen een benadering in twee decimalen.

**a** $36 \cdot 3^{\frac{1}{2}x-1} = 12$

**b** $2^{4x-1} = 24$

**c** $3^x \cdot 4^x = 6^x$

**d** $0{,}125^x = \sqrt{2}$

**e** $2 \cdot 10^x = 5^x$

**f** $6^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}$

Ondersteunende route → maak opdracht O12

**12** H Gegeven zijn de functies $f(x) = 27 \cdot 3^{2-x}$ en $g(x) = (\sqrt{3})^x$.

**a** Los exact op $f(x) = g(x)$.

**b** Gebruik een plot en geef de oplossing van $f(x) > g(x)$.

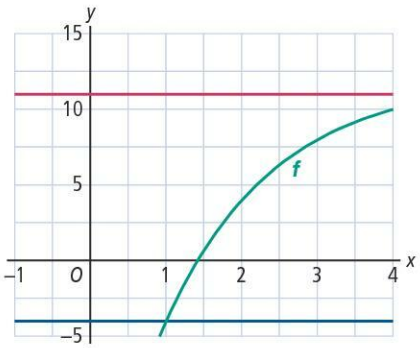
**13** Gegeven zijn de functie $f(x) = 12 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$ en de lijnen met vergelijkingen $y = -4$ en $y = 11$.

**a** Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van $f$ met elk van de lijnen $y = -4$ en $y = 11$.

**b** Geef de oplossing van $f(x) \geq 11$ in intervalnotatie.

**c** Los exact op $-4 < f(x) < 11$.

**d** Los exact op $4 \leq f(x) \leq 11\frac{1}{2}$.

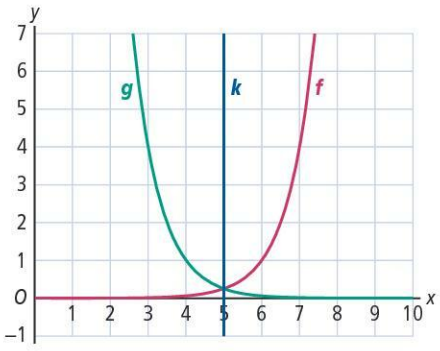


**14** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^{0,5x}$ en $g(x) = 2^{-x+3}$.

**a** Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van $f$ en $g$.

**b** Plot de grafieken van $f$ en $g$ en geef de oplossing van $f(x) \leq g(x)$.

**15** Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{12-2x}$ en $g(x) = 4^{4-x}$. Lijn $k$ is de verticale lijn door het snijpunt van de grafieken van $f$ en $g$.




**a** Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van $f$ en $g$ en geef een vergelijking van lijn $k$.

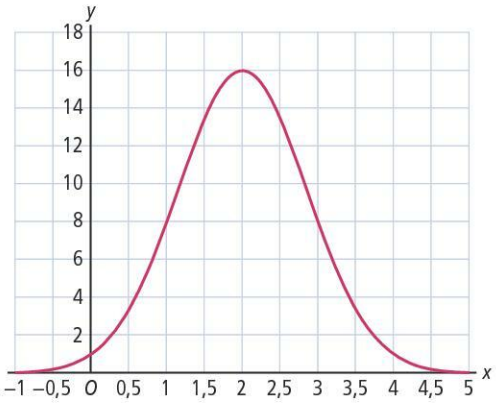
**b** Los op $g(x) \geq f(x)$.

**c** De grafieken van $f$ en $g$ lijken elkaars spiegelbeeld te zijn in lijn $k$.
Bereken exact de coördinaten van de snijpunten $A$ en $B$ van de grafieken van $f$ en $g$ met de lijn $y = 4$.

**d** Waarom zijn $A$ en $B$ elkaars spiegelbeeld in lijn $k$?

**e** De punten $P$ en $Q$ zijn de snijpunten van de lijn $y = 10$ met de grafieken van $f$ en $g$.
Laat zien dat $P$ en $Q$ elkaars spiegelbeeld zijn in lijn $k$.

**16** Gegeven is de grafiek van de functie $g(x) = 2^{4x-x^2}$.




**a** Maak een tabel met functiewaarden van $g$ voor $x = -1$ tot en met $x = 5$.

**b** Beredeneer met behulp van het functievoorschrift dat voor waarden van $x$ ver van 0 de grafiek steeds dichter bij de $x$-as komt.

**c** Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van $g$ met de lijn $y = 2^{-12}$.

**d** Los exact op $1 \leq g(x) \leq 8$.

**e** Los op $g(x) \geq 5$. Rond af op twee decimalen.

Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4


© Noordhoff Uitgevers bv

## Ondersteunende opdrachten

**O10** Gegeven zijn de vergelijkingen $2^{x-3} = 64$ en $25^x = 5\sqrt{5}$.

**a** Gebruik dat $64 = 2^6$ en los de vergelijking $2^{x-3} = 64$ op.

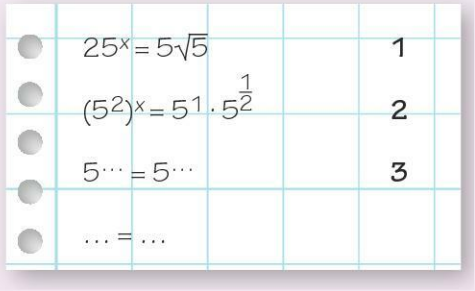
**b** Op het blaadje is een begin gemaakt met het oplossen van de vergelijking $25^x = 5\sqrt{5}$.
Leg uit wat er bij stap 2 is gebeurd.

**c** Gebruik de rekenregels voor het rekenen met machten om bij stap 3 beide kanten als één macht van 5 te schrijven.

**d** Maak de berekening op het blaadje af.

**e** Vereenvoudig de vergelijking $3 \cdot 8^{2x} = 12$ door links en rechts door 3 te delen. Schrijf vervolgens beide kanten als een macht van 2 en los de vergelijking op.

**f** Los de vergelijking $\sqrt{12 \cdot 27^x} = 18$ exact op door eerst te kwadrateren en daarna de vergelijking te vereenvoudigen.



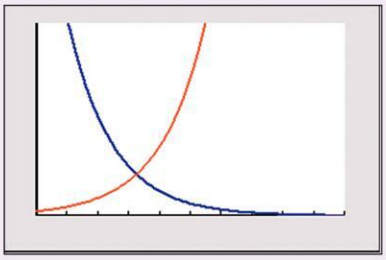

**O12** Gegeven zijn de functies $f(x) = 32 \cdot 2^{5-x}$ en $g(x) = 2^x \cdot \sqrt{128}$.

**a** Schrijf $f(x)$ en $g(x)$ als machten van 2.

**b** Los exact op $f(x) = g(x)$.

**c** In de plot van de grafieken hoort de dalende grafiek bij $f$. Bij welke waarden van $x$ ligt de grafiek van $f$ lager dan die van $g$?

**d** Geef de oplossing van $f(x) \leq g(x)$.



## Uitdagende opdrachten

**U3** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^{\frac{1}{2}x^2-2}$ en $g(x) = (2\sqrt{2})^x$.

**a** Leg uit waarom de grafiek van $f$ symmetrisch is in de $y$-as.

**b** Beredeneer hoe groot het minimum van $f$ is.

**c** Los exact op $2 \leq f(x) \leq 4$.

**d** Los exact op $f(x) = g(x)$.

**U4** Er zijn enkele grafieken van de familie van functies $f_a(x) = \dfrac{8}{2 + a \cdot 2^x}$ getekend.

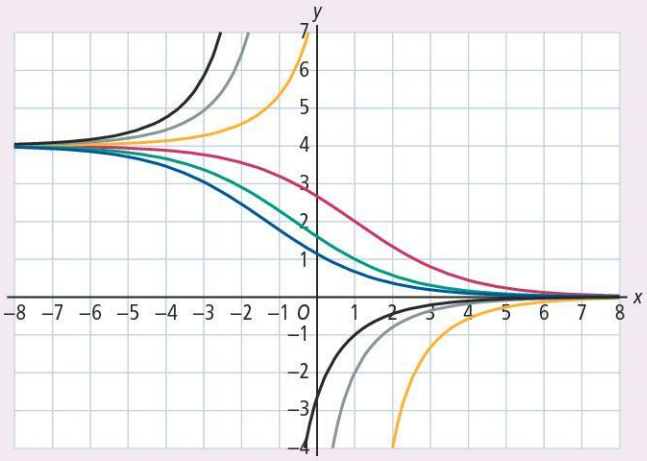
**a** Voor hoeveel verschillende waarden van $a$ is de grafiek getekend?

**b** Waarom hebben de grafieken van alle functies $f_a$ dezelfde horizontale asymptoten?

**c** Neem $a = 1$ en los exact op $\dfrac{8}{2 + 1 \cdot 2^x} = 2^x$.

**d** Bereken exact de $y$-coördinaat van het snijpunt $S$ van de grafiek van $f_{-1}$ met de grafiek van $g(x) = 4 \cdot 2^{-x}$.

**e** Bereken in twee decimalen ook de $x$-coördinaat van $S$.




© Noordhoff Uitgevers bv

# 7.3 Logaritmen

**Je leert**
- wat logaritmen zijn
- hoe je logaritmen gebruikt om exponentiële vergelijkingen exact op te lossen
- hoe je vergelijkingen met logaritmen exact oplost

**Leerroutes**
- ondersteunend: 17—18—19—20—21—22—23—024—025—25
- doorlopend: 17—18—19—20—21—22—23—24—25—26
- uitdagend: 17—18—20—21—22—23—24—26—U5—U6

Sommige waterplanten groeien onder gunstige omstandigheden exponentieel.
Voor de oppervlakte $N$ in $m^2$ van een dergelijke plant geldt $N = 6 \cdot 3^t$ met $t$ in weken.
- Leg uit waarom je de vergelijking $N = 4374$ wel exact kunt oplossen en de vergelijking $N = 6000$ niet.

**17** Gegeven is de vergelijking $3^x = 18$.
- **a** Waarom kun je deze vergelijking niet exact oplossen?
- **b** Toon aan dat voor de oplossing geldt: $2{,}63 < x < 2{,}64$.
- **c** Geef de oplossing in vier decimalen.

**18** Welke vergelijkingen kun je exact oplossen?
Los die vergelijkingen exact op.

- **a** $2^x = 10$
- **b** $3^x = 25$
- **c** $10^x = \frac{1}{10}$
- **d** $5^x = \sqrt{5}$
- **e** $2^x = 256$
- **f** $3^x = \frac{1}{36}$

**19**
- **a** Tussen welke gehele getallen ligt de oplossing van $3^x = 25$?
- **b** Beredeneer welk getal groter is: de oplossing van $3^x = 15$ of die van $6^x = 38$.

**Theorie**

De exacte oplossing van de vergelijking $g^x = a$ heet de logaritme van $a$ voor het grondtal $g$.
Je noteert deze oplossing als $x = {}^g\log(a)$ en je spreekt ${}^g\log(a)$ uit als 'g-log a'.

Basisregel: Uit $g^b = a$ volgt $b = {}^g\log(a)$ en omgekeerd:

uit ${}^g\log(a) = b$ volgt $a = g^b = g^{{}^g\log(a)}$.

Hierbij is $a > 0$, $g > 0$ en $g \neq 1$.

Er geldt: ${}^g\log(1) = 0$ voor elke waarde van $g > 0$ (mits $g \neq 1$)

tot de macht
$g\log(a) = b$
is


© Noordhoff Uitgevers bv

**Voorbeeld 1**

Los exact op $4^x = 13$.

**Oplossing**

Uit $4^x = 13$ volgt

$x = {}^4\log(13)$.

**Voorbeeld 2**

Van welke exponentiële vergelijking is $x = {}^5\log(12)$ de oplossing?

**Oplossing**

$x = {}^5\log(12)$ is de oplossing van $5^x = 12$.

**20** Los exact op, dus schrijf de oplossing met een logaritme.

H

**a** $7^x = 4$

**b** $7^x = 10$

**c** $\left(\frac{1}{7}\right)^x = 13$

**d** $3^{x-2} = 14$

**e** $5^{x+1} = 100$

**f** $5^{2x+3} = 0{,}5$

**21** Geef een exponentiële vergelijking bij de gegeven oplossingen.

**a** $x = {}^3\log(5)$

**b** $x = {}^7\log\left(\frac{1}{2}\right)$

**c** $x = {}^{\frac{1}{2}}\log(7)$

**d** $x = {}^{10}\log(6)$

**e** $x = {}^4\log(8)$

**f** $x = {}^{0{,}1}\log(1000)$

**22** Vul in.

**a** ${}^3\log(27) = \ldots$ want $27 = 3^{\cdots}$

**b** ${}^2\log\left(\frac{1}{8}\right) = \ldots$ want $\frac{1}{8} = 2^{\cdots}$

**c** ${}^5\log(5\sqrt{5}) = \ldots$ want $5\sqrt{5} = 5^{\cdots}$

**d** ${}^7\log(1) = \ldots$ want $1 = 7^{\cdots}$

**23** Gegeven de rij ${}^5\log(1)$, ${}^5\log(2)$, ${}^5\log(3)$, ${}^5\log(4)$, …, ${}^5\log(1000)$.
Welke van deze logaritmen zijn gelijk aan een geheel getal?
Verklaar je antwoord.

Ondersteunende route → maak opdracht 024

**24** Bereken exact.

H

**a** ${}^2\log(2\sqrt{2})$

**b** ${}^7\log\left(\frac{1}{49}\right)$

**c** ${}^{10}\log(1\,000\,000)$

**d** ${}^{\frac{1}{3}}\log(9)$

**e** ${}^{25}\log(5)$

**f** ${}^{\frac{1}{4}}\log\left(\frac{1}{64}\right)$

© Noordhoff Uitgevers bv

**Theorie**

Met de regel 'Uit ${}^g\log(a) = b$ volgt $a = g^b$' kun je vergelijkingen met logaritmen exact oplossen.

**Voorbeeld**

Los exact op ${}^2\log(2x - 4) = 3$.

**Oplossing**

Uit ${}^2\log(2x - 4) = 3$ volgt $2x - 4 = 2^3$.

$2x - 4 = 8$ dus $x = 6$.

Ondersteunende route → maak opdracht O25

**25** Los exact op.

**a** ${}^3\log(x) = 2$

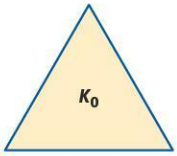
**b** ${}^5\log(x) = -1$

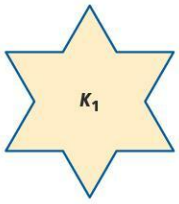
**c** ${}^4\log(5x) = \frac{1}{2}$

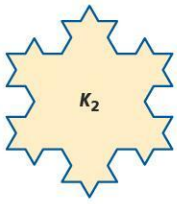
**d** ${}^3\log(x + 10) = 2$

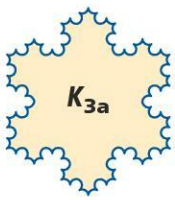
**e** ${}^5\log(x^2 + 4) = 3$

**f** ${}^6\log(x^2 - 13) = 2$




**26** De reeks plaatjes toont de ontwikkeling van de zogenaamde Koch-curve of sneeuwvlokkromme.
Begin met de gelijkzijdige driehoek $K_0$ met zijde 9. Verdeel elke zijde in drieën en vervang steeds het middelste deel door een gelijkzijdige driehoek aan de buitenzijde.

**a** Hoe groot is de omtrek van $K_0$ en van $K_1$?

**b** Leg uit dat geldt: *omtrek* $K_n = 27 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^n$.

**c** Bij welke figuur is de omtrek gelijk aan $85\frac{1}{3}$?

**d** Bij welke figuur is de omtrek groter dan $10^6$?

**e** De antwoorden op de opdrachten c en d kun je schrijven met logaritmen.
Schrijf die antwoorden als logaritmen.

Uitdagende route → maak opdracht U5 en U6


© Noordhoff Uitgevers bv

## Ondersteunende opdrachten

**O24** Je gaat in deze opdracht $^{\frac{1}{2}}\log(4\sqrt{2})$ berekenen.

$x = {}^{\frac{1}{2}}\log(4\sqrt{2})$ is de oplossing van de vergelijking $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4\sqrt{2}$.

**a** Vul het blaadje verder in.

**b** Van welke vergelijking is $x = {}^{3}\log\left(\frac{1}{81}\right)$ de oplossing?

**c** Bereken exact ${}^{3}\log\left(\frac{1}{81}\right)$.

Bereken exact.

**d** ${}^{5}\log(25\sqrt{5})$

**e** ${}^{6}\log\left(\frac{1}{216}\right)$

**f** ${}^{100}\log(10)$

**g** ${}^{\frac{1}{4}}\log(16\sqrt{8})$

**h** ${}^{49}\log(7)$

**i** ${}^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{1}{81}\right)$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4\sqrt{2}$

$(2^{-1})^x = 2^{\cdots} \cdot 2^{\cdots}$

$2^{-x} = 2^{\cdots}$

$-x = \ldots$

$x = \ldots$

dus ${}^{\frac{1}{2}}\log(4\sqrt{2}) = \ldots$

**O25** Er geldt ${}^{3}\log(81) = 4$ want $3^4 = 81$.

**a** Vul in: uit ${}^{3}\log(x) = 2$ volgt $x = 3^{\cdots} = \ldots$

**b** Vul in: uit ${}^{5}\log(x) = 4$ volgt $x = \ldots^{\cdots} = \ldots$

**c** Op het blaadje wordt de vergelijking ${}^{3}\log(5x - 4) = 4$ exact opgelost.
Maak de berekening op het blaadje af.

Uit ${}^{g}\log(a) = b$ volgt $a = g^b$,

uit ${}^{3}\log(5x - 4) = 4$ volgt dus

$5x - 4 = 3^4$.

$5x - 4 = \ldots$

$5x = \ldots$

$x = \ldots$

## Uitdagende opdrachten

**U5** Los exact op.

**a** $4 - {}^{2}\log(-x) = -2$

**b** ${}^{5}\log(10 + \sqrt{x}) = 2$

**c** ${}^{3}\log\left({}^{2}\log(x)\right) = 4$

**d** ${}^{10}\log\left(90 + {}^{2}\log(x)\right) = 2$

**e** ${}^{2}\log(4 + 4^x) = 4$

**f** $\left({}^{3}\log(x + 2)\right)^2 = 9$

**U6** Bij een exponentieel groeiproces is de groeifactor 2 per tijdseenheid.
Dan is ${}^{2}\log(7)$, de oplossing van $2^t = 7$, de groeitijd die nodig is om een hoeveelheid 7 keer zo groot te maken bij groeifactor 2.

**a** Wat is in termen van groeitijden de betekenis van ${}^{2}\log(5)$?

**b** Leg met behulp van groeitijden uit dat moet gelden ${}^{2}\log(7) + {}^{2}\log(5) = {}^{2}\log(35)$.

**c** Leg met behulp van groeitijden uit dat moet gelden ${}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(ab)$.

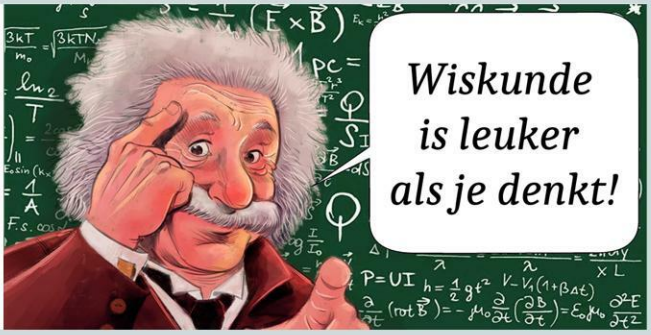
© Noordhoff Uitgevers bv

# 7.4 Logaritmen berekenen

**Je leert**
- hoe je logaritmen met je rekenmachine berekent
- hoe je een logaritme herschrijft naar een logaritme met een ander grondtal

**Leerroutes**
- ondersteunend: 27—28—029—30—31—32—33—034—34
- doorlopend: 27—28—29—30—31—32—33—34—35
- uitdagend: 27—28—29—30—31—33—34—35—U7

In ${}^{g}\log(a)$ kun je verschillende getallen voor $a$ en $g$ invullen. Dat geeft niet altijd een zinvolle uitdrukking. Zo zijn ${}^{5}\log(-5)$, ${}^{3}\log(0)$, ${}^{-2}\log(8)$ en ${}^{1}\log(4)$ niet zinvol.
- Leg uit waarom.




**27**

**a** Zoek de log-toets op je rekenmachine en bereken log(2), log(5), log(10), log(25) en log(100).

**b** Voor welke waarde van $x$ is $\log(x) = 3$?

**c** Waaruit blijkt dat 10 het grondtal van de log-toets op je rekenmachine is?

**d** Bereken log(1 000 000) en log(0,0001). Verklaar de uitkomsten.

**Theorie**

Op rekenmachines zit een log-toets. Op de meeste rekenmachines wordt daarbij het grondtal niet vermeld.
Het grondtal bij deze logaritme is 10.
Als ergens log(…) staat, wordt ${}^{10}\log(\ldots)$ bedoeld.

**Voorbeeld 1**

Bereken log(0,01) en log(50) indien nodig afgerond op twee decimalen en controleer je antwoorden.

**Oplossing**

Met de rekenmachine: $\log(0{,}01) = -2$;

controle $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$

$\log(50) \approx 1{,}70$; controle $10^{1{,}70} \approx 50$.

**Voorbeeld 2**

Los $10^{5x} = 17$ exact op en geef ook een benadering in twee decimalen.

**Oplossing**

$10^{5x} = 17$ dus $5x = {}^{10}\log(17) = \log(17)$

dus $x = \frac{1}{5} \cdot \log(17)$

Op twee decimalen afgerond $x \approx 0{,}25$.

**28**

**a** Bereken met de rekenmachine $\log(3)$, $\log\left(\frac{1}{1000}\right)$, $\log(1)$ en $\log(123\,456)$.

**b** Los $10^{2x+1} = 500$ exact op. Geef ook een benadering in twee decimalen.


© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O29

**29** De exacte oplossing van $10^x = 5$ is $x = \log(5)$. Als je dit antwoord invult in de vergelijking $10^x = 5$ krijg je $10^{\log(5)} = 5$.

**a** Verklaar dat $10^{\log(7)} = 7$.

**b** Geef, zonder de rekenmachine te gebruiken, de uitkomsten van $10^{\log(564)}$, $10^{\log(0,1)}$ en $10^{\log(0,08)}$.

**c** Schrijf de getallen 14, 400 en 0,003 als een macht met grondtal 10. Geef de exponenten als exact getal en ook als benadering in twee decimalen.

**30** De exacte oplossing van $7^x = 20$ is $x = {}^7\log(20)$. Je kunt de getallen 7 en 20 beide schrijven als een macht van 10.
Zo is $7 = 10^{\log(7)}$ en is $20 = 10^{\log(20)}$.

**a** Laat zien dat uit de vergelijking $7^x = 20$ volgt dat $10^{x \cdot \log(7)} = 10^{\log(20)}$.

**b** Druk de oplossing $x$ uit in $\log(7)$ en $\log(20)$.

**c** Waarom volgt uit deze berekening dat ${}^7\log(20) = \dfrac{\log(20)}{\log(7)}$?

**Theorie**

Met behulp van de rekenregel ${}^g\log(a) = \dfrac{\log(a)}{\log(g)}$ kun je elke logaritme met alleen de log-toets van je rekenmachine berekenen.

**Voorbeeld 1**

Bereken ${}^7\log(4)$ en ${}^{\frac{1}{2}}\log(0,7)$ in twee decimalen.

**Oplossing**

${}^7\log(4) = \dfrac{\log(4)}{\log(7)} \approx 0,71$

${}^{\frac{1}{2}}\log(0,7) = \dfrac{\log(0,7)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)} \approx 0,51$

**Voorbeeld 2**

Los de vergelijking $5^t = 23$ exact op. Geef ook een benadering in twee decimalen.

**Oplossing**

$5^t = 23$ dus $t = {}^5\log(23)$

Dit is het exacte antwoord. Een benadering in twee decimalen vind je met

$t = \dfrac{\log(23)}{\log(5)} \approx 1,95.$

© Noordhoff Uitgevers bv

**31** Bereken in twee decimalen.

H

**a** $^{9}\log(35)$ **c** $^{5}\log(10)$

**b** $^{\frac{1}{3}}\log(128)$ **d** $^{4}\log\left(\frac{1}{13}\right)$

**32** Los exact op. Geef ook een benadering in twee decimalen.

H

**a** $15^x = 2$ **d** $10^x = 5$

**b** $4^{2x} = 6$ **e** $10^x = 50$

**c** $3^x = \sqrt{5}$ **f** $10^x = 500$

**33** De exacte oplossing van $7^x = 20$ is $x = {}^{7}\log(20)$.
De getallen 7 en 20 zijn als machten van een willekeurig positief grondtal $b$ ($b \neq 1$) te schrijven.

Zo is $7 = b^{{}^{b}\log(7)}$ en is $20 = b^{{}^{b}\log(20)}$.

Laat zien dat hieruit volgt $x = {}^{7}\log(20) = \dfrac{{}^{b}\log(20)}{{}^{b}\log(7)}$

**Theorie**

Voor het rekenen met logaritmen geldt de rekenregel

$${}^{g}\log(a) = \frac{{}^{b}\log(a)}{{}^{b}\log(g)} \quad (b > 0 \text{ en } b \neq 1).$$

Met deze regel kun je elke logaritme herschrijven naar logaritmen met een ander grondtal.

**Voorbeeld**

Bereken $^{9}\log(27)$ door op grondtal 3 over te gaan.

**Oplossing**

$${}^{9}\log(27) = \frac{{}^{3}\log(27)}{{}^{3}\log(9)} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

Ondersteunende route → maak opdracht O34

**34** **a** Vul in: $^{8}\log(128) = \dfrac{{}^{2}\log(\ldots)}{{}^{2}\log(\ldots)}$ en laat zien dat $^{8}\log(128) = 2\frac{1}{3}$.

**b** Bereken exact $^{4}\log(32)$ door op grondtal 2 over te gaan.

**c** Bereken exact $^{27}\log(9\sqrt{3})$ door op een ander grondtal over te gaan.

**d** Bereken exact $^{25}\log(125)$ door op een ander grondtal over te gaan.

**e** Bereken exact $^{\frac{1}{8}}\log(16)$ door op een ander grondtal over te gaan.

**35** Bereken exact de waarde van $a$ en van $b$ in

$${}^{3}\log(18) \cdot {}^{4}\log(3) = a \cdot {}^{2}\log(b).$$

Uitdagende route → maak opdracht U7


© Noordhoff Uitgevers bv

## Ondersteunende opdrachten

**O29**

**a** Controleer met je rekenmachine dat $\log(5) = 0{,}698\ldots$

**b** Laat met je rekenmachine zien dat $10^{0{,}698\ldots} = 5$.

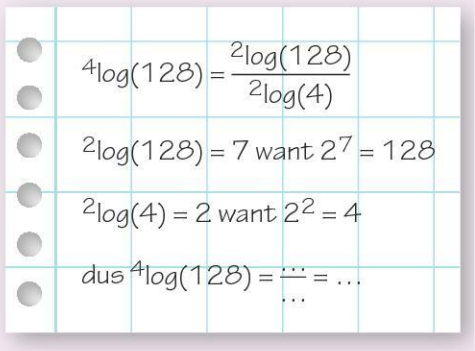
**c** Blijkbaar is $10^{\log(5)} = 5$.
Ga met je rekenmachine na dat $10^{\log(247)} = 247$.

**d** Kies een positief getal $a$, niet gelijk aan 1, en ga na dat $10^{\log(a)} = a$.

**e** Met de regel uit opdracht d kun je elk getal schrijven als macht van 10. Zo is $7 = 10^{\log(7)}$.
Schrijf de getallen 29, 600 en 0,2 als macht van 10. Geef de exponenten als exact getal en ook als benadering in twee decimalen.

**O34**

Op het blaadje wordt ${}^4\log(128)$ berekend door gebruik te maken van de rekenregel ${}^g\log(a) = \dfrac{{}^b\log(a)}{{}^b\log(g)}$




**a** In de berekening is gekozen om het grondtal van de logaritme van 4 te wijzigen in 2.
Leg uit waarom dat in dit geval handig is.

**b** Maak de berekening op het blaadje af.

**c** Om ${}^9\log(3\sqrt{3})$ met dezelfde regel te berekenen, moet je een grondtal $b$ kiezen zodat ${}^b\log(3\sqrt{3})$ en ${}^b\log(9)$ zonder rekenmachine te berekenen zijn.
Leg uit dat $b = 3$ in dat geval een goede keuze is.

**d** Bereken ${}^9\log(3\sqrt{3}) = \dfrac{{}^3\log(3\sqrt{3})}{{}^3\log(9)} = \dfrac{\cdots}{\cdots}$

## Uitdagende opdrachten

**U7**

Met behulp van de rekenregel ${}^g\log(a) = \dfrac{{}^b\log(a)}{{}^b\log(g)}$ kun je verschillende eigenschappen van logaritmen bewijzen. Daartoe moet je soms het grondtal $b$ geschikt kiezen.
Bewijs de volgende eigenschappen.

**a** ${}^2\log(a) \cdot {}^a\log(2) = 1$

**b** ${}^g\log(a) = \dfrac{1}{{}^a\log(g)}$

**c** $\dfrac{{}^2\log(a)}{{}^8\log(a)} = 3$

**d** ${}^g\log(a^3) = 3 \cdot {}^g\log(a)$

**e** ${}^g\log(a^{-1}) = -{}^g\log(a)$

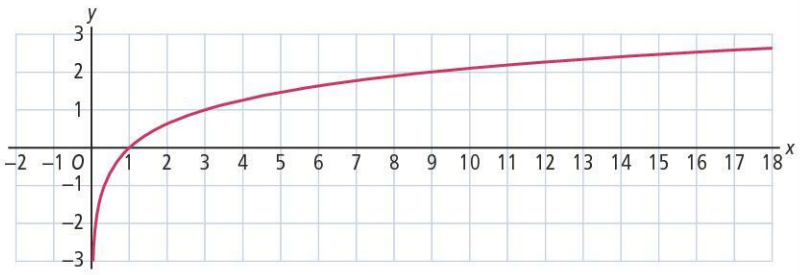
© Noordhoff Uitgevers bv

# 7.5 Grafieken van logaritmische functies

**Je leert**
- grafieken van logaritmische functies onderzoeken
- hoe je het domein, bereik, nulpunt en asymptoten bij logaritmische functies bepaalt

**Leerroutes**
- ondersteunend: 36—37—38—039—40—041—42
- doorlopend: 36—37—38—39—40—41—42
- uitdagend: 36—38—39—40—42—U8—U9

De grafiek hoort bij een functie $f(x) = {}^{g}\log(x)$.
- Hoe kun je met behulp van de grafiek nagaan welke waarde het grondtal $g$ heeft?




**36** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x$ en $g(x) = {}^{2}\log(x)$.

**a** Vul in.

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | … | … | … | … | … | … |

**b** Vul in.

| $x$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $4$ | $8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | … | … | … | … | … | … |

**c** Schets de grafieken van $f$ en $g$ in één figuur.

**d** In welke lijn moet je de grafiek van $f$ spiegelen om de grafiek van $g$ te krijgen?

**e** Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van $f$ en welke lijn is de asymptoot van de grafiek van $g$?

**37** Gegeven zijn de functies $f(x) = 5^x$ en $k(x) = {}^{5}\log(x)$.

**a** Plot en schets de grafieken van $f$ en $k$.

**b** Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van $f$ met de $y$-as.

**c** Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van $k$ met de $x$-as.

**d** Geef het domein en het bereik van beide functies.

**e** Elk van deze grafieken heeft een asymptoot. Geef een vergelijking van elke asymptoot.

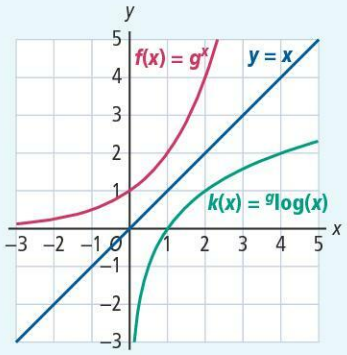
→ Instructie rekenmachine | Logaritmen


© Noordhoff Uitgevers bv

**Theorie**

De grafieken van $f(x) = g^x$ en $k(x) = {}^g\log(x)$ zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

| | |
|---|---|
| functie: $f(x) = g^x$ | $k(x) = {}^g\log(x)$ |
| domein: $D_f = \mathbb{R}$ | $D_k = \langle 0, \to \rangle$ |
| bereik: $B_f = \langle 0, \to \rangle$ | $B_k = \mathbb{R}$ |
| asymptoot: $y = 0$ | $x = 0$ |
| snijpunt assen: $(0, 1)$ | $(1, 0)$ |




**38** Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^{1,2}\log(x)$ en $g(x) = {}^{0,8}\log(x)$.

**a** Plot de grafieken van $f$ en $g$. Welk punt ligt op beide grafieken?

**b** De grafieken van $h$ en $k$ zijn de spiegelbeelden van de grafieken van $f$ en $g$ bij spiegelen in de lijn $y = x$. Stel de functievoorschriften op van $h$ en $k$.

**c** Voor welke waarden van het grondtal $g$ is de functie $l(x) = {}^g\log(x)$ stijgend en voor welke waarden van $g$ is de functie dalend?

**Theorie**

Voor een logaritmische functie geldt, net als bij exponentiële functies, dat het grondtal $g$ altijd positief is, maar niet gelijk aan 1.
Voor $0 < g < 1$ is de functie $f(x) = {}^g\log(x)$ dalend en voor $g > 1$ stijgend.

**Voorbeeld**

| stijgend | dalend |
|---|---|
| $f(x) = {}^{1,2}\log(x)$ | $k(x) = {}^{0,9}\log(x)$ |
| $g(x) = {}^{\frac{3}{2}}\log(x)$ | $l(x) = {}^{\frac{3}{4}}\log(x)$ |
| $h(x) = {}^{\sqrt{2}}\log(x)$ | $m(x) = {}^{0,01}\log(x)$ |

Ondersteunende route → maak opdracht 039

**39** Beredeneer van elke functie of deze stijgend of dalend is.

H

**a** $f(x) = {}^2\log(5x)$

**b** $f(x) = {}^2\log(-x)$

**c** $g(x) = {}^{0,3}\log(x)$

**d** $h(x) = {}^{0,5}\log(-x)$

**e** $k(x) = 2 - {}^4\log(4 - x)$

**f** $p(x) = \dfrac{1}{\log(x)}$ met $x > 1$

© Noordhoff Uitgevers bv

**40** Gegeven is de functie $g(x) = {}^{2}\log(x + 3)$.

**a** Bereken het nulpunt van $g$.

**b** Hoe ontstaat de grafiek van $g$ uit de grafiek van $f(x) = {}^{2}\log(x)$?

**c** Bereken het domein van $g$.

**d** Voor welke waarden van $x$ is $g(x) < 0$?

**e** Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van $g$?

**f** De grafiek van $g$ wordt gespiegeld in de $y$-as en vervolgens 2 naar rechts verschoven.
Geef het domein, het nulpunt van de functie en de vergelijking van de asymptoot bij de beeldgrafiek.

**Theorie**

Het domein van een functie $f(x) = {}^{g}\log(x + b)$ volgt uit

$x + b > 0$, dus het domein is $x > -b$ of $\langle -b, \rightarrow \rangle$.
De verticale asymptoot heeft vergelijking $x = -b$.
Het nulpunt van $f$ volgt uit $x + b = 1$, dus het nulpunt is $x = 1 - b$.

**Voorbeeld**

Gegeven is de functie $f(x) = 2 - {}^{3}\log(4x + 8)$.
Geef het domein, het nulpunt en de verticale asymptoot.

**Oplossing**

Het domein volgt uit $4x + 8 > 0$, dus is het domein $x > -2$.
Uit $2 - {}^{3}\log(4x + 8) = 0$ volgt ${}^{3}\log(4x + 8) = 2$. Dit geeft $4x + 8 = 3^2$.
Het nulpunt is $x = \frac{1}{4}$.
Een verticale asymptoot volgt uit $4x + 8 = 0$, dus $x = -2$.

Ondersteunende route → maak opdracht O41

**41** H Geef het domein, het nulpunt en een vergelijking van de asymptoot van de grafiek.

**a** $f(x) = {}^{3}\log(x - 5)$

**b** $k(x) = {}^{8}\log(21 - 6x)$

**c** $h(x) = {}^{2}\log(2x + 9) - 11$

**d** $g(x) = 4 + {}^{0,5}\log(x - 7)$

**e** $m(x) = -3 - {}^{\frac{1}{2}}\log(-5x - 10)$

**f** $n(x) = x \cdot \log(5x - 1)$

**42** H Gegeven is de functie $h(x) = -7 + {}^{3}\log(x^2 - 5)$.

**a** Plot en schets de grafiek van $h$.

**b** Geef het domein van $h$.

**c** Stel vergelijkingen op van de asymptoten van de grafiek van $h$.

**d** Bereken de nulpunten van $h$.

Uitdagende route → maak opdracht U8 en U9


© Noordhoff Uitgevers bv

## Ondersteunende opdrachten

**O39** Op het blaadje staat een begin van een redenering waarom de functie $f(x) = {}^{2}\log(5 - x)$ dalend is.

**a** Vul bij elke stap op de puntjes het woord *af* of *toe* in.

**b** De functie $f(x) = {}^{0{,}5}\log(x)$ is dalend, want het grondtal $g$ is kleiner dan 1.
Leg uit hoe stap 2 op het blaadje moet worden aangepast als je het grondtal 2 in 0,5 verandert.

**c** Schrijf de redenering van stap 3 op voor $f(x) = {}^{0{,}5}\log(5 - x)$.

1 $g(x) = 5 - x$ is dalend, want als $x$ toeneemt, neemt $5 - x$ ...
2 $f(p) = {}^{2}\log(p)$ is stijgend, dus als $p$ toeneemt, neemt ${}^{2}\log(p)$ ... en als $p$ afneemt, neemt ${}^{2}\log(p)$ ...
3 $f(x) = {}^{2}\log(5 - x)$ is dalend, want als $x$ toeneemt, neemt $5 - x$ ... en dus neemt ${}^{2}\log(5 - x)$ ...

Beredeneer van elke functie of de functie stijgend of dalend is.

**d** $f(x) = {}^{3}\log(x + 6)$

**e** $f(x) = {}^{0{,}5}\log(-x)$

**f** $g(x) = {}^{4}\log(2x)$

**g** $h(x) = {}^{1{,}1}\log(-x) + 8$

**h** $k(x) = 2 - {}^{7}\log(4 + x)$

**i** $p(x) = \dfrac{5}{\log(x)}$ met $x > 1$

**O41** Gegeven is de functie $f(x) = {}^{3}\log(3x + 6)$.

**a** Voor het domein van $f$ moet gelden $3x + 6 > 0$.
Geef het domein van $f$.

**b** Voor het nulpunt van $f$ geldt ${}^{3}\log(3x + 6) = 0$.
Bereken het nulpunt van $f$.

**c** De verticale asymptoot van de grafiek volgt uit $3x + 6 = 0$.
Geef een vergelijking van de verticale asymptoot.

Geef van de volgende functies het domein, het nulpunt en de asymptoot van de grafiek.

**d** $g(x) = {}^{5}\log\left(8 - \frac{1}{2}x\right)$

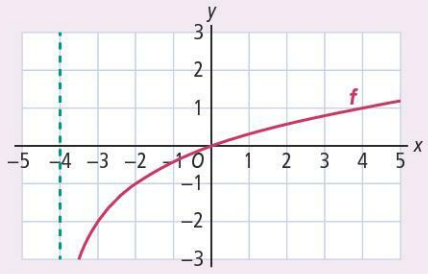
**e** $h(x) = {}^{2}\log(2x - 4)$

**f** $k(x) = 2 + {}^{5}\log(25x)$

**g** $l(x) = 4 - {}^{0{,}5}\log(x - 6)$

## Uitdagende opdrachten

**U8** De grafiek hoort bij een functie van de vorm $f(x) = p + {}^{2}\log(x + q)$.
Van de functie is gegeven dat de lijn $x = -4$ de asymptoot is van de grafiek en dat de grafiek door de oorsprong gaat.
Onderzoek met behulp van een berekening of het punt $(12, 2)$ op de grafiek van $f$ ligt.




**U9** Geef van elke functie het domein, de nulpunten en vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek.

**a** $f(x) = \log(9x - x^2)$

**b** $h(x) = \log(x + 3) - \log(3 - x)$

© Noordhoff Uitgevers bv

**43** Hieronder staan enkele herleidingen met machten. Sommige zijn goed, sommige zijn fout.
Leg uit waarom een herleiding goed is of fout is en verbeter de foute herleidingen.

**a** $4 \cdot 2^x = 8^x$

**b** $4 \cdot 2^x = 2^{x+2}$

**c** $4^x \cdot 2^x = 8^x$

**d** $8^x \cdot 2^x = 2^{3x}$

**e** $\frac{4}{2^x} = 2^x$

**f** $4^x + 2^x = 6^x$

**g** $4 + 2^x = 2^{2+x}$

**h** $4^x \cdot 2^x = 2^{2x} \cdot 2^x = 2^{2x^2}$

**i** $4 \cdot 2^x = 2^2 \cdot 2^x = 2^{2x}$

**j** $\frac{4^x}{2^x} = 2^x$

**44** **a** Bewijs dat de functies $f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$ en $g(x) = 2^{2-2x}$ hetzelfde zijn.

**b** Herleid $f(x) = 4^{0{,}5(x+1)}$ tot de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

**c** Herleid $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1-2x}$ tot de vorm $f(x) = b \cdot g^x$ met $g > 1$.

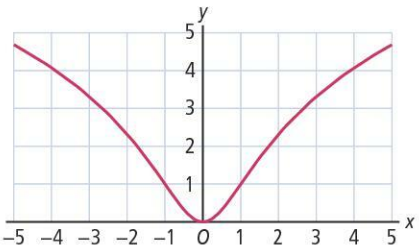
**45** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = {}^2\log(x^2 + 1)$.

**a** Geef het domein en het bereik van $f$.

**b** Verklaar dat de oorsprong de top van de grafiek van $f$ is.

**c** Heeft de grafiek van $f$ asymptoten? Zo ja, welke? Zo nee, waarom niet?

**d** Los exact op $f(x) = 6$.




**46** Gegeven is de functie $f(x) = \log(x^2 - 6x + 8)$.

**a** Plot en schets de grafiek van $f$.

**b** Geef het domein en het bereik van $f$.

**c** Geef de asymptoten van de grafiek van $f$.

**d** Los exact op $f(x) = 0$.

**47** Los exact op.

**a** $16 \cdot 2^{x-6} = \sqrt{2}$

**b** $15 \cdot 3^{x+2} + 18 = 93$

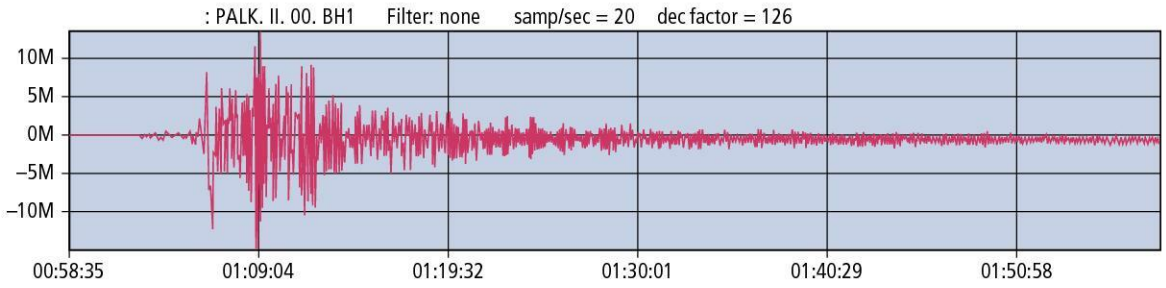
**c** $1 - {}^2\log(4x + 1) = -4$

**d** ${}^4\log(2x) + {}^4\log(2x) = 6$

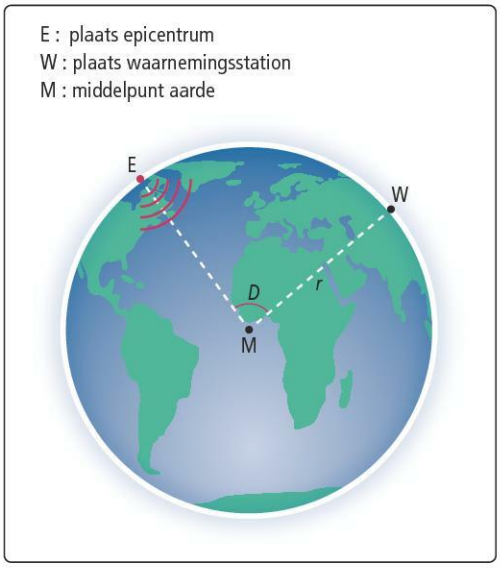
**e** $2 - {}^4\log(x + 3) = -\frac{1}{2}$

**f** ${}^{\frac{1}{2}}\log(x^2 - 2x) = -3$


© Noordhoff Uitgevers bv




**48** Aardbevingen worden geregistreerd met een seismograaf, die de aardbevingsgolven weergeeft in een seismogram. De kracht van een aardbeving wordt meestal uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter. Dat getal $R$ bereken je met $R = \log(U) + 1{,}66 \cdot \log(D) + 3{,}08$. Hierin is $U$ de grootste uitwijking in mm in het seismogram en is $D$ de grootte van de hoek tussen $MW$ en $ME$ in graden. Neem voor de omtrek van de aarde 40 000 km.
De schaal van Richter is zo ontworpen, dat je nul krijgt bij een uitwijking van 0,001 mm op 100 km van het epicentrum.




**a** Bereken de hoek $D$ die hoort bij een afstand van 100 km langs het aardoppervlak. Controleer daarna met een berekening dat een uitwijking van 0,001 mm ongeveer $R = 0$ oplevert.

**b** In 2011 vond er een aardbeving plaats met een kracht van 9,0 op de schaal van Richter. Het epicentrum van deze aardbeving lag in Japan.
Bereken de uitwijking in Nederland. De hoek tussen $MW$ en $ME$ is in dit geval ongeveer 84°.

**49** Leerlingen van klas 4B onderzoeken of er bij de uitkomsten in de tabel een passende formule te vinden is.

**a** Teken een grafiek bij de uitkomsten in de tabel.

**b** Waarom verwerpen de leerlingen direct lineaire formules en wortelformules?

**c** Onderzoek of één van de volgende formules bij benadering wel voldoet: $N = b + t^a$ of $N = b \cdot g^t$.

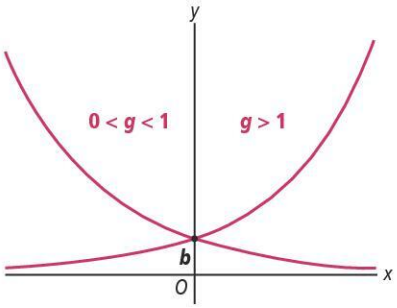
| $t$ | $N$ |
|---|---|
| 0 | 3 |
| 1 | 4 |
| 2 | 7 |
| 3 | 11 |
| 4 | 17 |
| 5 | 25 |
| 6 | 35 |
| 7 | 52 |
| 8 | 72 |
| 9 | 100 |

© Noordhoff Uitgevers bv

**Theorie**

### Exponentiële functie

Een exponentiële functie $f(x) = b \cdot g^x$ met $b > 0$ is stijgend als de groeifactor $g > 1$ en dalend als $0 < g < 1$.
De grafiek gaat door het punt $(0, b)$ op de verticale as.
De grafiek heeft de $x$-as ($y = 0$) als horizontale asymptoot.
Het domein van $f$ is $\mathbb{R}$ en het bereik van $f$ is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.



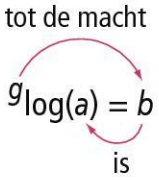

**S1** Gegeven zijn de functies $f(x) = 3 \cdot 0{,}85^x$, $g(x) = 2{,}1^x$, $h(x) = 10 \cdot 1{,}7^x$ en $k(x) = -12 \cdot 0{,}01^x$.

**a** Welke van deze functies zijn stijgend?
**b** Van welke van deze functies gaat de grafiek gaat door het punt $(0, 1)$?
**c** Geef het domein en het bereik van de functies $f$ en $k$.

**Theorie**

### Logaritme

De exacte oplossing van $g^x = a$ is $x = {}^g\log(a)$, de logaritme van $a$ voor het grondtal $g$.
Omgekeerd volgt uit $x = {}^g\log(a)$ dat $g^x = a$.
Dus geldt $g^{{}^g\log(a)} = a$.
Hierin is $a > 0$, $g > 0$ en $g \neq 1$.



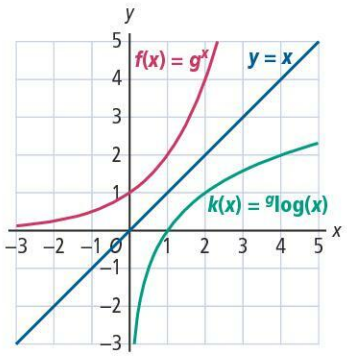

**S2** **a** Van welke vergelijking is ${}^3\log(7)$ de exacte oplossing?
**b** Geef de exacte oplossing van de vergelijking $2^x = 18$.

**Theorie**

### Grafieken van logaritmische functies

De grafieken van $f(x) = g^x$ en $k(x) = {}^g\log(x)$ zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

| | |
|---|---|
| functie: $f(x) = g^x$ | $k(x) = {}^g\log(x)$ |
| domein: $D_f = \mathbb{R}$ | $D_k = \langle 0, \rightarrow \rangle$ |
| bereik: $B_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$ | $B_k = \mathbb{R}$ |
| asymptoot: $y = 0$ | $x = 0$ |
| snijpunt assen: $(0, 1)$ | $(1, 0)$ |
| stijgend als $g > 1$ | stijgend als $g > 1$ |
| dalend als $0 < g < 1$ | dalend als $0 < g < 1$ |





© Noordhoff Uitgevers bv

**S3** Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^{2}\log(x)$ en $g(x) = {}^{0,5}\log(x)$.

**a** Plot de grafieken van $f$ en $g$ en geef de coördinaten van het snijpunt van deze grafieken.

**b** Spiegelen van de grafieken van $f$ en $g$ in de lijn $y = x$ geeft de grafieken van $h$ en $k$.
Geef de functievoorschriften van $h$ en $k$.

**c** Geef de asymptoten van de grafieken van $f$, $g$, $h$ en $k$.

**Vaardigheid**

**Je kunt een functievoorschrift aanpassen na een transformatie.**

Bij een transformatie van de grafiek van een functie $f$ ontstaat een nieuwe grafiek, de beeldgrafiek. Bij de beeldgrafiek kun je het functievoorschrift $g(x)$ opstellen.

| *transformatie* | *resultaat* |
|---|---|
| - verschuiving $d$ omhoog | $g(x) = f(x) + d$ |
| - verschuiving $c$ naar rechts | $g(x) = f(x - c)$ |
| - vermenigvuldiging met $a$ ten opzichte van de $x$-as | $g(x) = a \cdot f(x)$ |
| - spiegeling in de $x$-as | $g(x) = -f(x)$ |
| - spiegeling in de $y$-as | $g(x) = f(-x)$ |

**Voorbeeld**

De grafiek van $f(x) = 1{,}5^{2x-3}$ wordt 2 naar rechts verschoven, vervolgens met 3 vermenigvuldigd ten opzichte van de $x$-as en ten slotte gespiegeld in de $y$-as.
Stel het functievoorschrift $g(x)$ op van de beeldgrafiek.

**Oplossing**

| | |
|---|---|
| $f(x) = 1{,}5^{2x-3}$ | |
| $h(x) = 1{,}5^{2(x-2)-3} = 1{,}5^{2x-7}$ | 2 naar rechts verschoven |
| $k(x) = 3 \cdot 1{,}5^{2x-7}$ | met 3 vermenigvuldigd ten opzichte van de $x$-as |
| $g(x) = 3 \cdot 1{,}5^{-2x-7}$ | gespiegeld in de $y$-as |

**S4** Gegeven is de functie $f(x) = 3 \cdot 2^{3x}$.
Stel het functievoorschrift op van de beeldgrafiek na de volgende transformaties.

**a** Vermenigvuldigen met factor 2 ten opzichte van de $x$-as.

**b** Spiegelen in de $x$-as en daarna 3 omlaag verschuiven.

**c** 3 omlaag verschuiven en daarna spiegelen in de $x$-as.

**d** Vermenigvuldigen met factor $-4$ ten opzichte van de $x$-as en daarna de spiegelen in de $y$-as.

**e** Spiegelen in de $y$-as en daarna 4 naar links verschuiven.

© Noordhoff Uitgevers bv

**Vaardigheid**

**Je kunt een exponentiële vergelijking exact oplossen, zo nodig met logaritmen.**

1. Deel zo mogelijk linker- en rechterkant van de vergelijking door hetzelfde getal.
2. Schrijf de linker- en rechterkant van de vergelijking als machten van hetzelfde grondtal.
3. Stel de exponenten aan elkaar gelijk en los de hierdoor ontstane vergelijking op.
   Als stap 2 niet mogelijk is, gebruik je een logaritme om de vergelijking exact op te lossen.

**Voorbeeld 1**

Los exact op $\frac{2}{9} \cdot 3^{2t} = 162$.

**Oplossing**

1. $3^{2t} = 162 : \frac{2}{9} = 729$
2. $3^{2t} = 3^6$
3. $2t = 6$ dus $t = 3$.

**Voorbeeld 2**

Los exact op $2 \cdot 3^{t+1} = 28$.

**Oplossing**

1. $3^{t+1} = 14$
   $t + 1 = {}^3\log(14)$
   $t = {}^3\log(14) - 1$

**S5** Los exact op.

**a** $2^{3t} = 4 \cdot 2^{3+t}$

**b** $4^{2t-1} = 32^t$

**c** $6 \cdot 5^{t+8} = 36$

**d** $\frac{1}{5} \cdot 25^{3t} = 10$

**Vaardigheid**

**Je kunt vergelijkingen met logaritmen exact oplossen.**

Bij het exact oplossen van vergelijkingen met logaritmen gebruik je de regel: 'Uit ${}^g\log(a) = b$ volgt $a = g^b$'.

**Voorbeeld**

Los exact op ${}^{\frac{1}{2}}\log(6 - 2x) = -2$.

**Oplossing**

Uit ${}^{\frac{1}{2}}\log(6 - 2x) = -2$ volgt $6 - 2x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

$6 - 2x = 4$ dus $x = 1$.

**S6** Los exact op.

**a** ${}^8\log(x) = 2$

**b** ${}^{\frac{1}{2}}\log(x + 9) = 3$

**c** ${}^3\log(4x) = 4$

**d** ${}^5\log(5x - 100) = 3$


© Noordhoff Uitgevers bv

**Vaardigheid**

**Je kunt logaritmen met je rekenmachine berekenen.**

Met behulp van de rekenregel $^{g}\log(a) = \dfrac{\log(a)}{\log(g)}$ kun je elke logaritme met alleen de log-toets van je rekenmachine berekenen.

**Voorbeeld**

Bereken in drie decimalen $^{7}\log(845)$.

**Oplossing**

$^{7}\log(845) = \dfrac{\log(845)}{\log(7)} \approx 3{,}463$

**S7** Bereken in drie decimalen.

**a** $^{5}\log(90)$ **c** $^{12}\log(0{,}01)$

**b** $^{10}\log(12\,480)$ **d** $^{0{,}78}\log(2)$

**Vaardigheid**

**Je kunt een logaritme herschrijven naar een logaritme met een ander grondtal.**

Met de rekenregel $^{g}\log(a) = \dfrac{^{b}\log(a)}{^{b}\log(g)}$ $(b > 0 \text{ en } b \neq 1)$ kun je elke logaritme herschrijven naar logaritmen met een ander grondtal.

**Voorbeeld**

Bereken exact $^{8}\log(64\sqrt{2})$.

**Oplossing**

$^{8}\log(64\sqrt{2}) = \dfrac{^{2}\log(2^6 \cdot 2^{\frac{1}{2}})}{^{2}\log(8)} = \dfrac{6\frac{1}{2}}{3} = 2\frac{1}{6}$

**S8** Bereken exact zonder gebruik te maken van je rekenmachine.

**a** $^{4}\log(32)$ **c** $^{\frac{1}{4}}\log(32)$

**b** $^{9}\log(243)$ **d** $^{16}\log(1024)$

**Vaardigheid**

**Je kunt het domein, bereik, nulpunt en asymptoten bij logaritmische functies bepalen.**

Het domein van een functie $f(x) = {}^{g}\log(x + b)$ volgt uit $x + b > 0$, dus het domein is $x > -b$ of $\langle -b, \rightarrow \rangle$.
Het bereik van $f$ is $\mathbb{R}$.
De verticale asymptoot heeft vergelijking $x = -b$.
Het nulpunt van $f$ volgt uit $x + b = 1$, dus is het nulpunt $x = 1 - b$.

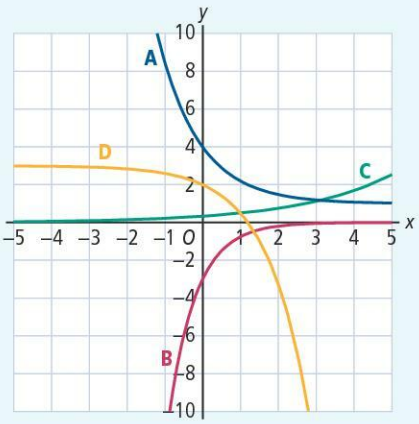
**S9** Bepaal van elke functie het domein, het bereik en het nulpunt en geef een vergelijking van de asymptoot van de grafiek.

**a** $f(x) = {}^{2}\log(2 - x)$ **c** $h(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log(7 - 2x) + 1$

**b** $g(x) = 2 - {}^{3}\log(x)$ **d** $k(x) = 3 - {}^{6}\log(3x + 3)$

© Noordhoff Uitgevers bv

**T1** Getekend zijn de grafieken van $f(x) = -2{,}5^x + 3$, $g(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^x$, $h(x) = -3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$ en $j(x) = 3 \cdot 0{,}4^x + 1$.




**a** Welke van deze functies zijn stijgend?
**b** Welke grafiek hoort bij welke functie?
**c** Geef vergelijkingen van de asymptoten van deze grafieken.
**d** Bereken van elk van de functies de coördinaten van de snijpunten van de grafiek met de beide assen.
**e** De grafiek van $f$ wordt eerst 4 omlaag verschoven en daarna vermenigvuldigd ten opzichte van de $x$-as met $-\frac{1}{2}$. Het resultaat wordt daarna gespiegeld in de $y$-as. Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek.

**T2** Een koud voorwerp, bijvoorbeeld een blikje frisdrank dat in de koelkast heeft gestaan, zal langzamerhand opwarmen. Ga uit van een blikje met temperatuur van 5 °C, terwijl de omgevingstemperatuur 25 °C is. Het temperatuurverschil neemt per minuut met 7,5% af.

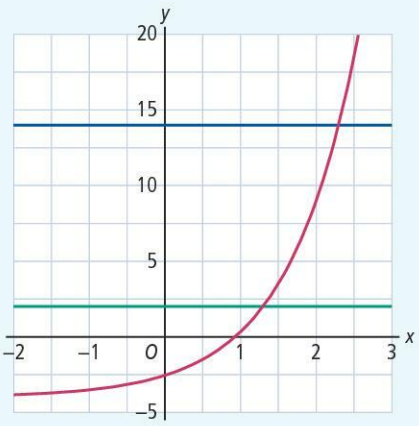
**a** Bereken de temperatuur van het blikje na 1 minuut, na 5 minuten en na 10 minuten.
**b** Stel een formule op voor de temperatuur $T$ in °C na $t$ minuten.
**c** Na hoeveel minuten is de temperatuur van 10 °C bereikt?

**T3** Beredeneer welke van deze logaritmen gelijk zijn aan een negatief getal: $^{\frac{1}{2}}\log(2)$, $^{2}\log(4)$, $^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{1}{4}\right)$, $^{2}\log(1)$, $^{2}\log\left(\frac{1}{5}\right)$, $^{5}\log\left(\frac{1}{3}\right)$, $^{3}\log(0{,}9)$

**T4** Bereken exact zonder gebruik te maken van je rekenmachine.

**a** $^{3}\log(\sqrt{3})$
**b** $^{2}\log\left(\frac{1}{8}\right)$
**c** $^{\frac{1}{5}}\log(125)$
**d** $^{\frac{1}{3}}\log(1)$
**e** $^{16}\log\left(\frac{1}{32}\right)$
**f** $^{\sqrt{125}}\log\left(\frac{1}{5}\right)$

**T5** Getekend zijn de grafiek van de functie $f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{0{,}3-x} - 4$ en de lijnen met vergelijkingen $y = 2$ en $y = 14$.




**a** Bereken exact de $x$-coördinaten van de snijpunten van de grafiek van $f$ met elk van deze lijnen.
**b** Los exact op $2 < f(x) < 14$.
**c** Los op $f(x) \geq 50$.


© Noordhoff Uitgevers bv

**T6** Los exact op. Geef ook een benadering in twee decimalen.

**a** $3^{4k} = 5$

**b** $\frac{1}{3} \cdot 2^{2x} = 42\frac{2}{3}$

**c** $3^{-x} = 81\sqrt{27}$

**d** $\left(\frac{1}{5}\right)^p = 3\sqrt{2}$

**e** $\sqrt{3^x} \geq \frac{1}{27}$

**f** $16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t \leq 4^{3t}$

**T7** Beredeneer van de functies of ze stijgend of dalend zijn.

**a** $f(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log(6 - 3x)$

**b** $g(x) = {}^{2}\log\left(\frac{1}{x}\right)$

**c** $h(x) = \frac{1}{\log(-x)}$

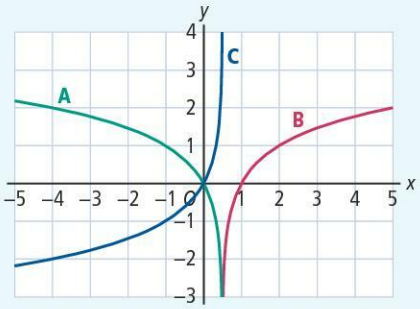
**T8** Getekend zijn de grafieken van de functies

$f(x) = {}^{3}\log(2x - 1)$, $g(x) = {}^{3}\log(1 - 2x)$ en $h(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log(1 - 2x)$.

**a** Waarom hebben deze drie grafieken dezelfde verticale asymptoot?

**b** Volgens de tekening hebben twee van de functies hetzelfde domein.
Welke twee functies zijn dat?

**c** Geef aan welke grafiek bij welke functie hoort.




**T9** Los exact op.

**a** ${}^{3}\log(3x + 3) = 3$

**b** ${}^{2}\log(2x - 6) = 4$

**c** $3 - \log(x + 2) = 2\frac{1}{3}$

**d** ${}^{3}\log(3x^2 + 4x) = 0$

**e** ${}^{2}\log(3x - 4) = 7$

**f** ${}^{\frac{1}{2}}\log(8 - x^2) = -1$

**T10** Gegeven is de functie $f(x) = {}^{3}\log\left(\frac{1}{3}x + 4\right)$.

**a** Geef het domein van deze functie.

**b** Geef een vergelijking van de verticale asymptoot van de grafiek van $f$.

**c** Plot de grafiek van $f$ en los exact op $f(x) \leq 2$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt een functievoorschrift aanpassen na een transformatie.

**E1** Gegeven is de functie $f(x) = 2 \cdot 5^x$.
Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek na

**a** een verschuiving 2 omhoog en daarna een vermenigvuldiging met 3 ten opzichte van de $x$-as.

**b** een spiegeling in de $x$-as en daarna een verschuiving 3 naar links.

**c** spiegeling in de $x$-as en daarna een spiegeling in de $y$-as.

Je kunt een exponentiële vergelijking exact oplossen, zo nodig met logaritmen.

**E2** Los exact op.

**a** $9^t = 3 \cdot 3^{2+t}$

**b** $4^{t-1} = 8^t$

**c** $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-t} = 2^{-t+2}$

**d** $45 \cdot 3^{t+7} = 90$

Je kunt vergelijkingen met logaritmen exact oplossen.

**E3** Los exact op.

**a** $\log(3 - 2x) = -1$

**b** ${}^3\log(6 + 3x) = 4$

**c** ${}^{\frac{1}{2}}\log(2x) = 3$

**d** ${}^{\frac{1}{4}}\log(5x - 1) = -2$

Je kunt logaritmen met je rekenmachine berekenen.

**E4** Bereken in drie decimalen.

**a** ${}^{100}\log(175)$

**b** ${}^{1,5}\log(75)$

**c** ${}^{0,3}\log(23{,}78)$

**d** ${}^{\frac{1}{4}}\log(15)$

Je kunt een logaritme herschrijven naar een logaritme met een ander grondtal.

**E5** Bereken exact zonder gebruik te maken van je rekenmachine.

**a** ${}^5\log(125\sqrt{5})$

**b** ${}^{\frac{1}{3}}\log(9)$

**c** ${}^{25}\log(125)$

**d** ${}^{32}\log(64)$

Je kunt het domein, bereik, nulpunt en asymptoten bij logaritmische functies bepalen.

**E6** Bepaal van elke functie het domein, het bereik en de nulpunten en geef een vergelijking van de asymptoot van de grafiek.

**a** $f(x) = {}^3\log(12 - 3x)$

**b** $g(x) = 3 + {}^{\frac{1}{2}}\log(4x - 28)$

**c** $h(x) = {}^5\log(-5x)$

**d** $k(x) = \log(x^2 - 100)$


© Noordhoff Uitgevers bv

**E7** Los exact op. Geef ook een benadering in twee decimalen.

**a** $3^{1-2t} = 15$

**b** $\left(\frac{1}{3}\right)^{3t} = 26$

**c** $(2{,}7)^{3t+2} = 127$

**d** $\left(\frac{3}{2^t}\right)^3 = 64$

**E8** Los exact op.

**a** $5^{2t} = 125^{1-t}$

**b** $32 \cdot 2^t = \frac{1}{4}\sqrt{2}$

**c** $3^{2x+3} = 44$

**d** $16 \cdot 0{,}5^x \geq 0{,}125$

**e** $0{,}25^{t-3} < 7$

**f** $16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x \geq \frac{1}{16}$

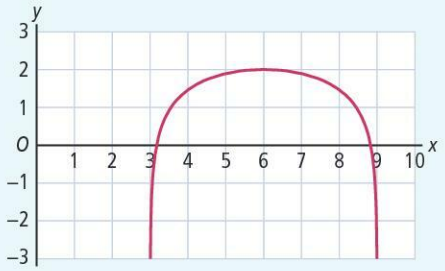
**E9** Gegeven is de functie $f(x) = {}^3\log(-x^2 + 12x - 27)$.

**a** Bereken exact het domein van $f$.

**b** Bereken exact de nulpunten van $f$.

**c** Bereken exact de maximale waarde die de functie $g(x) = -x^2 + 12x - 27$ heeft.

**d** Bereken exact het maximum van $f$.




**E10** Beredeneer van de functies of ze stijgend of dalend zijn.

**a** $f(x) = {}^{1\frac{1}{3}}\log(1 - 3x)$

**b** $g(x) = 25 - {}^4\log(x - 8)$

**E11** De verkoop van een nieuw product neemt bij aanvang vaak snel toe, maar na een zekere periode stabiliseert de verkoop. De grafiek geeft de verkoop van een nieuw product weer. De bijbehorende formule heeft de vorm $S = b - a \cdot 2{,}7^{-t}$, met $t$ in maanden.

**a** Onderzoek welke waarden $a$ en $b$ hebben.

**b** Bereken na hoeveel maanden er 4000 producten werden verkocht.

**E12** Gegeven zijn de functies $f(x) = \left(\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{2}x}$ en $g(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 5^{1-x}$.

**a** Los exact op $f(x) = g(x)$.

**b** Voor welke waarden van $x$ geldt $f(x) \leq g(x)$?

© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

# Vectoren 8

SE CE K

## In dit hoofdstuk

In klas 3 heb je geleerd dat de grafiek van een lineaire functie een rechte lijn is. Ook weet je hoe je een vergelijking van een lijn opstelt als de coördinaten van twee punten van die lijn gegeven zijn.

In dit hoofdstuk maak je kennis met vectoren. Je leert dat een lijn ook kan worden beschreven met een vectorvoorstelling en hoe je vectoren kunt gebruiken om de hoek tussen twee lijnen te berekenen.

Behalve in de wiskunde spelen vectoren een belangrijke rol in de natuurkunde. Alle grootheden waarbij naast de grootte ook de richting een rol speelt, zoals bijvoorbeeld snelheid en kracht, kun je met vectoren beschrijven. In klas 6 zul je nog meer toepassingen van vectoren tegenkomen.

## Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 23
- *Modelleren en algebraïseren* opdracht 56
- *Formules manipuleren* opdracht 25

© Noordhoff Uitgevers bv

**V1** **a** Van $\triangle PQR$ is gegeven dat $\angle Q = 90°$, $PQ = 14$ en $QR = 11$.
Schets deze driehoek en bereken exact $PR$.

**b** Van $\triangle ABC$ is gegeven: $\angle C = 90°$, $AB = 17$ en $BC = 8$.
Schets deze driehoek en bereken exact $AC$.

| *zijde* | *kwadraat* |
|---|---|
| *rechthoekszijde* = 14 | 196 |
| *rechthoekszijde* = 11 | … + |
| *langste zijde* = … | … |

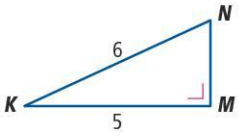
**Theorie**

In rechthoekige driehoeken geldt de stelling van Pythagoras: Noem je de rechthoekszijden $a$ en $b$ en de langste zijde $c$, dan geldt $a^2 + b^2 = c^2$.

**Voorbeeld**

In $\triangle KMN$ is $\angle M = 90°$, $KM = 5$ en $KN = 6$. Bereken exact $MN$.

**Oplossing**




| *zijde* | *kwadraat* |
|---|---|
| $KM = 5$ | 25 |
| $MN = \ldots$ | 11 + |
| $KN = 6$ | 36 |

dus $MN = \sqrt{11}$.

**V2** Bereken exact de lengte van de onbekende zijde.

**a** $\triangle ABC$ met $\angle B = 90°$, $AB = 12$ en $BC = 9$.

**b** $\triangle DEF$ met $\angle D = 90°$, $DE = 7$ en $DF = 7$.

**c** $\triangle PQR$ met $\angle R = 90°$, $PQ = 13$ en $PR = 3$.

**d** $\triangle STV$ met $\angle S = 90°$, $ST = 17$ en $TV = 25$.

**V3** Van $\triangle ABC$ is gegeven dat $AC = 5$ en $BC = 6$. De lengte van de hoogtelijn $CD$ is 3.

**a** Maak een schets van $\triangle ABC$.

**b** Bereken exact $AB$.

**V4** Een ruit is een vierhoek waarvan alle zijden even lang zijn.
Van een ruit $ABCD$ zijn de diagonalen $AC = 20$ en $BD = 16$.

**a** Maak een schets van deze ruit.

**b** Bereken exact de lengte van de zijden van deze ruit.

**Theorie**

Bij berekeningen in rechthoekige driehoeken kun je de goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens gebruiken. In de tabel zie je voor een aantal hoeken de exacte waarde van de sinus en de cosinus.
Als je te maken hebt met andere hoekgrootten dan die in de tabel, kun je niet met exacte waarden rekenen.

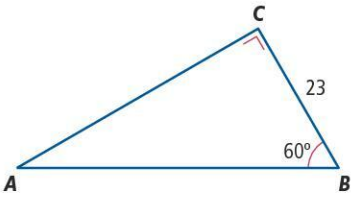
| $\alpha$ | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(\alpha)$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | 1 |
| $\cos(\alpha)$ | 1 | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |


© Noordhoff Uitgevers bv

**Voorbeeld 1**

In $\triangle ABC$ is $\angle C = 90°$, $\angle B = 60°$ en $BC = 23$.
Bereken exact $AC$ en $BC$.

**Oplossing**




$\cos(60°) = \frac{BC}{AB}$ $\qquad$ $\sin(60°) = \frac{AC}{AB}$

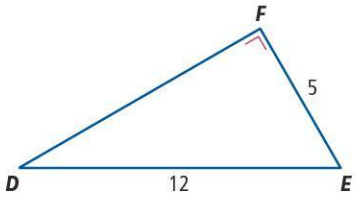
$\frac{1}{2} = \frac{23}{AB}$ $\qquad$ $\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{AC}{46}$

$AB = 46$ $\qquad$ $AC = 23\sqrt{3}$

**Voorbeeld 2**

In $\triangle DEF$ is $\angle F = 90°$, $DE = 12$ en $EF = 5$.
Bereken $\angle D$ en $\angle E$ in graden nauwkeurig.

**Oplossing**




$\sin(\angle D) = \frac{5}{12}$

$\angle D \approx 25°$

$\angle E \approx 180° - 90° - 25° = 65°$

**V5** Bereken in de driehoeken de lengte van de onbekende zijden en grootte van de onbekende hoeken. Geef indien mogelijk de exacte waarde en rond in andere gevallen lengtes af op één decimaal en hoeken op hele graden.

**a** $\triangle ABC$ met $\angle C = 90°$, $AC = 4$ en $\angle B = 30°$.

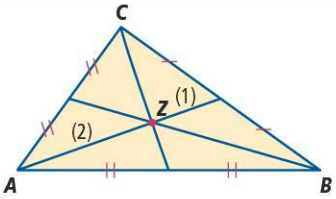
**b** $\triangle DEF$ met $\angle F = 90°$, $DE = 13$ en $\angle E = 36°$.

**c** $\triangle GHK$ met $\angle H = 90°$, $GK = 7\sqrt{3}$ en $GH = 7$.

**d** $\triangle PQR$ met $\angle P = 90°$, $PQ = \sqrt{18}$ en $QR = 6$.

**Theorie**

Een zwaartelijn in een driehoek is een lijnstuk dat een hoekpunt verbindt met het midden van de overstaande zijde. De drie zwaartelijnen van een driehoek snijden elkaar in één punt, het zwaartepunt. Het zwaartepunt verdeelt elke zwaartelijn in twee delen waarvan de lengtes zich verhouden als 2 : 1.




*Om verwarring met de echte lengtes te voorkomen, worden verhoudingsgetallen in een tekening tussen haakjes weergegeven.*

**V6** Van $\triangle ABC$ is gegeven: $A(7, 1)$, $B(7, 5)$ en $C(1, 1)$.

**a** Teken $\triangle ABC$ en de zwaartelijnen $BD$ en $CE$ in een assenstelsel.

**b** Bereken exact $BD$ en $CE$.

**c** Noem het zwaartepunt $Z$ en bereken exact $CZ$ en $BZ$.

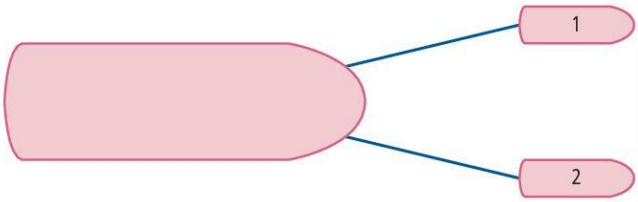
© Noordhoff Uitgevers bv

# 8.1 Vectoren

**Je leert**
- wat een vector is
- hoe je vectoren optelt

**Leerroutes**
- ondersteunend: 1—2—3— 04—4—5—6
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7
- uitdagend: 1—2—3—4—6—7—U1

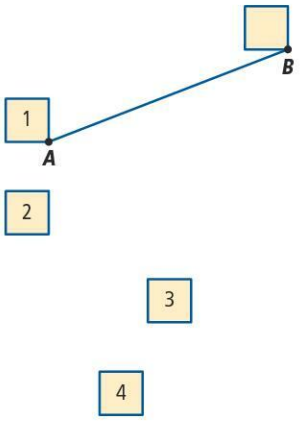
Een groot zeeschip wordt gesleept door twee sleepboten.
- Onder welke voorwaarde zal het grote zeeschip recht vooruit gaan?
- Als de afstand tussen de twee sleepboten groter is, is er dan een grotere of kleinere kracht nodig om het zeeschip met dezelfde snelheid vooruit te slepen?




**1** Bij een zolderopruiming worden dozen verplaatst. Gert verplaatst doos 1 van $A$ naar $B$. De dozen 2 en 3 worden door Gert in dezelfde richting en over dezelfde afstand verplaatst.

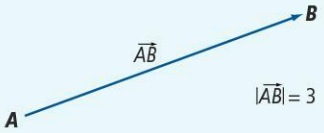
**a** Teken de nieuwe plek van de dozen 2 en 3.

**b** Doos 4 wordt in precies de tegengestelde richting verplaatst en over de helft van de afstand van de andere dozen. Teken de nieuwe plek van doos 4.

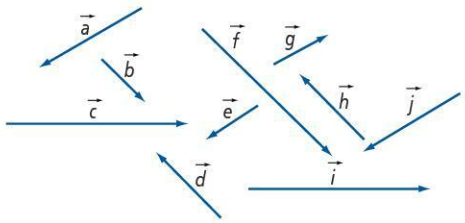



**Theorie**

Bij een verplaatsing heb je te maken met een afstand en een richting. Een verplaatsing kun je goed weergeven met een pijl. In de wiskunde spreek je van een vector.
Een vector met beginpunt $A$ en eindpunt $B$ noteer je als $\overrightarrow{AB}$.
Je kunt een vector ook aangeven met een kleine letter en een pijltje erboven, zoals $\vec{a}$.
De lengte van een vector noteer je als $|\overrightarrow{AB}|$ of als $|\vec{a}|$.




**2** Welke vectoren horen bij dezelfde verplaatsing?

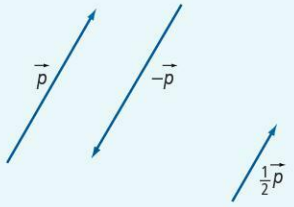




© Noordhoff Uitgevers bv

**Theorie**

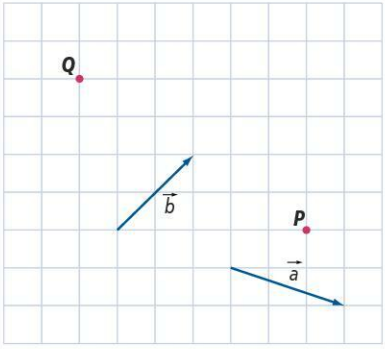
De vector $2\vec{p}$ heeft dezelfde richting als de vector $\vec{p}$, maar is twee keer zo lang. De vector $-\vec{p}$ is even lang als de vector $\vec{p}$, maar heeft een tegengestelde richting.
Je noemt de vectoren $\vec{p}$ en $-\vec{p}$ **tegengestelde vectoren**.




**3** Gegeven zijn de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ en twee punten $P$ en $Q$.

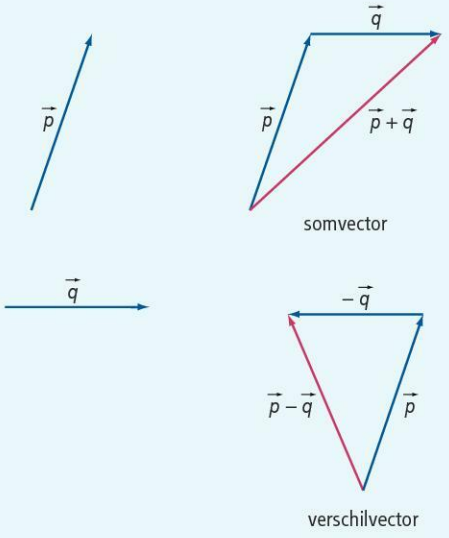
**a** Verplaats $P$ eerst over de vector $3\vec{a}$ en vervolgens verder over de vector $2\vec{a}$. Het resultaat had je ook kunnen bereiken door $P$ in één keer te verplaatsen.
Over welke vector?

**b** Verplaats $Q$ eerst over de vector $\vec{a}$ en vervolgens verder over de vector $\vec{b}$. Teken de vector die het resultaat van de verplaatsingen in één keer bereikt.




**Theorie**

De **somvector** $\vec{p} + \vec{q}$ van twee vectoren $\vec{p}$ en $\vec{q}$ vind je door eerst de verplaatsing over $\vec{p}$ te doen en daarna de verplaatsing over $\vec{q}$. Daartoe maak je het beginpunt van $\vec{q}$ vast aan het eindpunt van $\vec{p}$. De vector $\vec{p} + \vec{q}$ is dan de vector van het beginpunt van $\vec{p}$ naar het eindpunt van $\vec{q}$.
Deze constructie heet de **kop-staart methode**.
De **verschilvector** $\vec{p} - \vec{q}$ is de somvector van $\vec{p}$ en $-\vec{q}$.
Dus $\vec{p} - \vec{q} = \vec{p} + (-\vec{q})$.
De som van twee tegengestelde vectoren is de **nulvector** $\vec{0}$.
De nulvector heeft lengte nul en de richting is onbepaald.




Ondersteunende route → maak opdracht 04

**4** Teken de vectoren met de kop-staart methode.

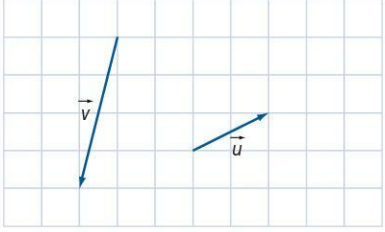
H

**a** $\vec{v} - 2\vec{u}$

**b** $\frac{1}{2}\vec{u} + 1\frac{1}{2}\vec{v}$

**c** $-3\vec{u} - 2\vec{v}$

**d** $(\vec{u} - \vec{v}) - (\vec{v} - \vec{u})$



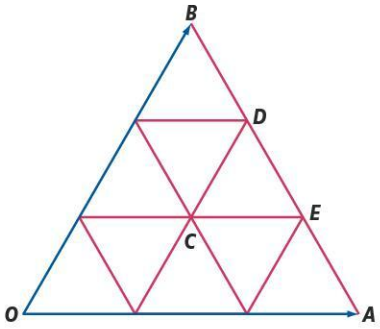

© Noordhoff Uitgevers bv

**5** In driehoek $OAB$ is $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ en $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

**a** Welke vector is gelijk aan $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$?

**b** Druk $\overrightarrow{OD}$ en $\overrightarrow{OE}$ uit in $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

**c** Druk $\overrightarrow{BA}$ en $\overrightarrow{DE}$ uit in $\vec{a}$ en $\vec{b}$.



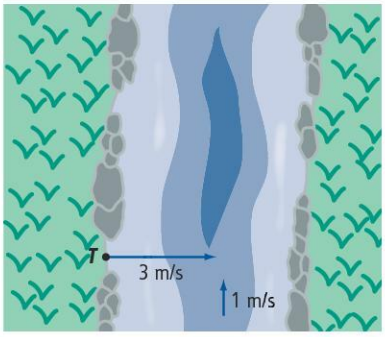

Omdat krachten en snelheden een richting en een grootte hebben, kun je deze weergegeven met behulp van vectoren.

**6** Tim wil met een boot een rivier oversteken. Hij start in punt $T$. De richting waarin Tim vaart en zijn snelheid ten opzichte van het water zijn in de tekening met een vector aangegeven. Ook is een vector getekend die de richting en de stroomsnelheid van de rivier aangeeft.

**a** Teken het punt waar de boot zich na één seconde bevindt.

**b** Teken het punt waar Tim de overkant zal bereiken.

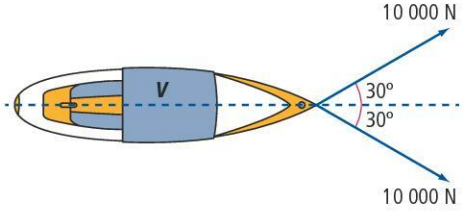
**c** Bereken hoeveel meter de boot in één seconde aflegt.




**7** Twee sleepboten trekken een schip. Elke sleepboot oefent een kracht uit van 10 000 N. Hieronder is de situatie geschetst. De kabels naar de sleepboten maken een hoek van 60° met elkaar.

**a** Teken de kracht die door de sleepboten samen op het schip wordt uitgeoefend.

**b** Bereken de grootte van deze kracht.

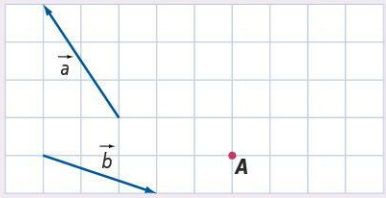



Uitdagende route → maak opdracht U1


© Noordhoff Uitgevers bv

## Ondersteunende opdrachten

**O4** Gegeven zijn de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ en punt $A$.




**a** Teken met beginpunt $A$ een vector gelijk aan vector $\vec{a}$.
Noem het eindpunt van die vector $B$.

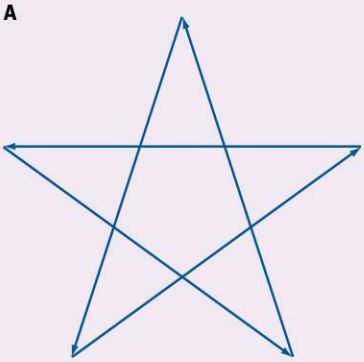
**b** Teken met beginpunt $B$ een vector gelijk aan vector $2\vec{b}$.
Noem het eindpunt van die vector $C$.

**c** Teken vector $\overrightarrow{AC}$ en druk $\overrightarrow{AC}$ uit in $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

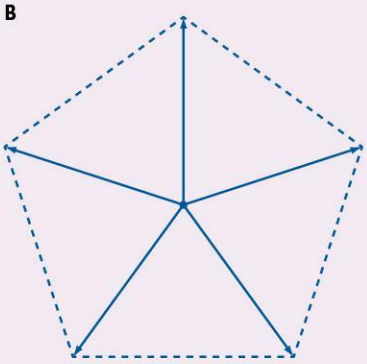
## Uitdagende opdrachten

**U1** **a** Waaraan is de som van de vijf vectoren in figuur A gelijk?

**A**



**B**



**b** In de regelmatige vijfhoek van figuur B gaan vanuit het middelpunt vectoren naar de hoekpunten.
Als vijf personen op de hoekpunten van de vijfhoek met dezelfde kracht in de richting van de vectoren trekken aan een voorwerp in het middelpunt, zou dat voorwerp op zijn plaats moeten blijven.
Toon met een tekening aan dat de som van de vijf vectoren inderdaad gelijk is aan $\vec{0}$.

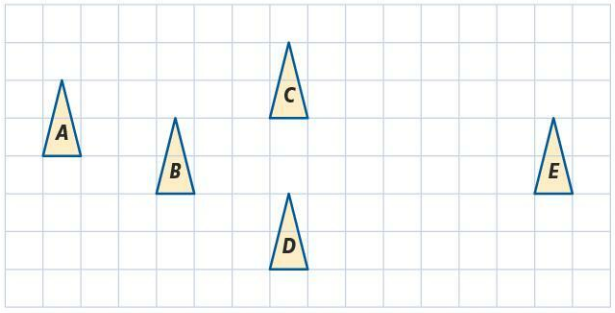
© Noordhoff Uitgevers bv

# 8.2 Vectoren en kentallen

**Je leert**
- wat kentallen zijn
- hoe je met kentallen rekent

**Leerroutes**
- ondersteunend: 8—9—10—011—11—12—13—014
- doorlopend: 8—9—10—11—12—13—14—15
- uitdagend: 8—9—10—11—12—13—15—U2

In het rooster staan vijf gelijke driehoeken, die je kunt verplaatsen door horizontaal en verticaal te verschuiven. Zo verplaats je driehoek $A$ naar driehoek $B$ door 3 hokjes naar rechts en 1 omlaag te schuiven.
- Hoe verplaats je driehoek $B$ naar driehoek $E$? En driehoek $A$ naar driehoek $E$?
- Geef aan hoe je driehoek $D$ naar driehoek $B$, driehoek $C$ of driehoek $E$ verplaatst.



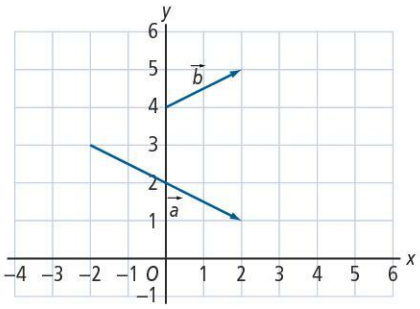

**8** Vector $\vec{a}$ heeft beginpunt $(-2, 3)$ en eindpunt $(2, 1)$.
Vector $\vec{b}$ heeft beginpunt $(0, 4)$ en eindpunt $(2, 5)$.

**a** Teken met beginpunt $(-3, 6)$ de vector $\vec{p} = 2\vec{a}$.

**b** Geef de coördinaten van het eindpunt van de vector $\vec{p}$.

**c** Teken met beginpunt $(-2, 3)$ de vector $\vec{q} = \vec{a} + \vec{b}$.
Welke coördinaten heeft het eindpunt van $\vec{q}$?

**d** Bereken $|\vec{a}|$ met behulp van een geschikte driehoek.




**Theorie**

In een assenstelsel kun je vectoren beschrijven met **kentallen**. De drie vectoren in de tekening hebben de kentallen 4 en −2, want de pijl gaat vier naar rechts en twee omlaag.

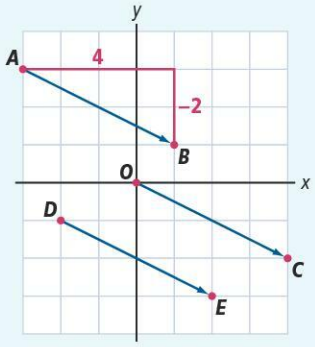
Je noteert dit als $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Voor de lengte van vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ geldt $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Een vector die in de oorsprong begint, heet een **plaatsvector**.

Het eindpunt van de plaatsvector $\overrightarrow{OC}$ is $C\,(4, -2)$.

Er geldt $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$ en $k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \end{pmatrix}$,
met $k$ een reëel getal.




$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$


© Noordhoff Uitgevers bv

**9** Gegeven zijn de plaatsvectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

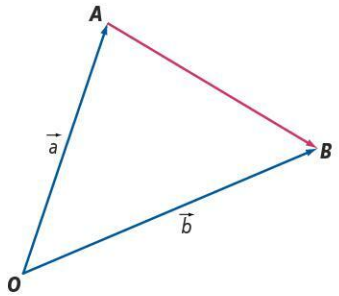
H

**a** Bereken de kentallen van de vectoren $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - 2\vec{b}$ en $3\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

**b** Bereken exact $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$ en $|3\vec{a} - 2\vec{b}|$.

**c** Laat met een berekening zien dat $|3\vec{a}| = 3 \cdot |\vec{a}|$.

**10** Gegeven zijn twee vectoren $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ en $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.




**a** Ga na dat $\vec{a} + \overrightarrow{AB} = \vec{b}$.

Vul in: $\overrightarrow{AB} = \ldots - \ldots$

**b** Teken vector $\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b}$.

**c** Waarom is vierhoek $OBCA$ een parallellogram?

**d** Lijn $OC$ snijdt lijnstuk $AB$ in punt $M$.

Druk $\overrightarrow{OM}$ uit in $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

**Theorie**

Als $A(a_1, a_2)$ en $B(b_1, b_2)$ is de vector

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix},$$

dus $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.
Voor het midden $M$ van een lijnstuk $AB$ geldt
$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

Ondersteunende route → maak opdracht O11

**11** Gegeven zijn de punten $A(3, 7)$, $B(-2, 5)$ en $C(1, -4)$.

H

**a** Bereken de kentallen van de vectoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ en $\overrightarrow{CA}$.

**b** Bereken exact $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{BC}|$ en $|\overrightarrow{CA}|$.

**c** Bereken exact $|5\overrightarrow{AB}|$ en $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}|$.

**d** Bereken exact de coördinaten van de middens van de zijden van $\triangle ABC$.

© Noordhoff Uitgevers bv

**12** **a** Teken de plaatsvectoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$.

**b** Leg uit hoe je aan de kentallen kunt zien dat de vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ dezelfde richting hebben.

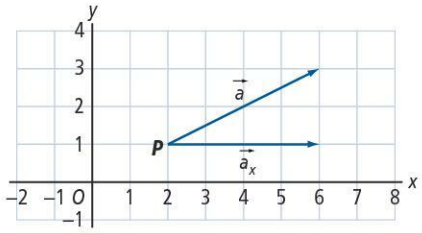
**c** Geef de kentallen van drie vectoren die dezelfde richting hebben als $\vec{v}$ en $\vec{w}$.

**d** Geef de kentallen van drie vectoren waarvan de richting tegengesteld is aan de richting van $\vec{v}$.

**e** Geef de kentallen van een vector die dezelfde lengte heeft als $\vec{v}$, maar die niet dezelfde of een tegengestelde richting heeft.

**13** Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{a_x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, beide met beginpunt $P(2, 1)$.

Teken de vector $\vec{a_y}$ met beginpunt $P$ die evenwijdig is aan de $y$-as en zo dat $\vec{a_x} + \vec{a_y} = \vec{a}$.




**Theorie**

Als $\vec{a} = \vec{a_x} + \vec{a_y}$ waarbij de drie vectoren hetzelfde beginpunt hebben met $\vec{a_x}$ evenwijdig aan de $x$-as en $\vec{a_y}$ evenwijdig aan de $y$-as, dan is vector $\vec{a}$ ontbonden in de vectoren $\vec{a_x}$ en $\vec{a_y}$.

Ondersteunende route → maak opdracht O14

**14** Gegeven is de vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Geef de kentallen van $\vec{u_x}$ en $\vec{u_y}$.

**15** Gegeven is de vector $\vec{a}$ met $|\vec{a}| = 3\sqrt{5}$ en $\vec{a_x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Bereken exact de kentallen van $\vec{a_y}$ (twee oplossingen).

Uitdagende route → maak opdracht U2


© Noordhoff Uitgevers bv

## Ondersteunende opdrachten

**O11**

**a** Teken in een assenstelsel de punten $A(2, 6)$ en $B(7, 3)$ en teken de vector $\overrightarrow{AB}$.

**b** Welke kentallen heeft $\overrightarrow{AB}$?

**c** Ga na dat geldt: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

**d** Bereken exact $|\overrightarrow{AB}|$.

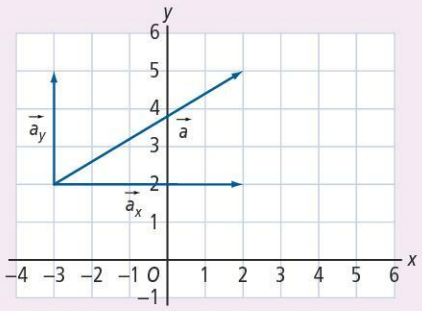
**e** Teken in het assenstelsel de vector $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

**f** Bereken de coördinaten van $C$.

**g** Voor punt $M$ geldt: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

Bereken de coördinaten van $M$.

**O14** Gegeven zijn de vectoren $\vec{a}$, $\vec{a_x}$ en $\vec{a_y}$.




**a** Geef de kentallen van $\vec{a}$, $\vec{a_x}$ en $\vec{a_y}$.

**b** Controleer dat $\vec{a} = \vec{a_x} + \vec{a_y}$.

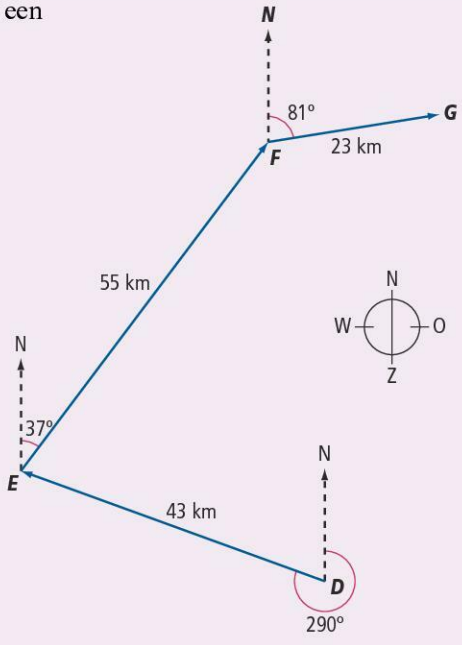
**c** Teken met beginpunt $(0, 4)$ de vector $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

**d** Teken met beginpunt $(0, 4)$ een vector $\vec{b_x}$ evenwijdig aan de $x$-as en een vector $\vec{b_y}$ evenwijdig aan de $y$-as, zodat $\vec{b} = \vec{b_x} + \vec{b_y}$.

**e** Vul in: $\vec{b_x} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$ en $\vec{b_y} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$.

## Uitdagende opdrachten

**U2** Een helikopter vertrekt vanuit Den Helder Airport ($D$) voor een vlucht langs drie boorplatforms $E$, $F$ en $G$.
De vliegtocht is in de tekening aangegeven met vectoren.




**a** Laat zien dat voor $\overrightarrow{DE}$ geldt: $\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} -43 \cdot \sin(70°) \\ 43 \cdot \cos(70°) \end{pmatrix}$.

**b** Bereken de kentallen van de drie vectoren $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$ en $\overrightarrow{FG}$ in twee decimalen.

**c** Bereken de lengte en de koers van de terugvlucht van punt $G$ naar Den Helder Airport in hele kilometers en hele graden.

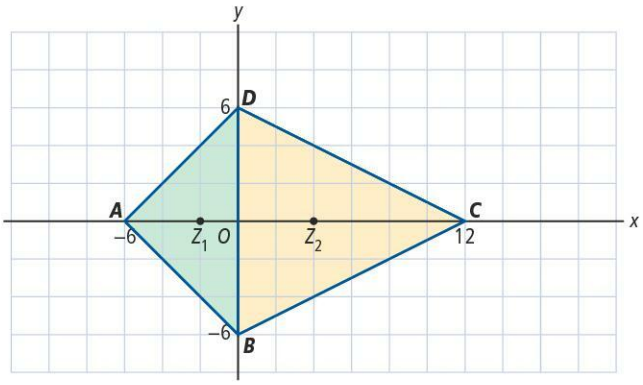
© Noordhoff Uitgevers bv

# 8.3 Zwaartepunt en evenwicht

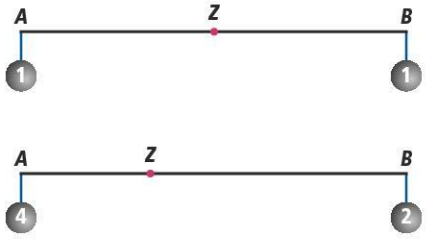
**Je leert**
- wat het zwaartepunt is van een aantal puntmassa's
- hoe je de plaats van een zwaartepunt vindt

**Leerroutes**
- ondersteunend: 16—17—18—19—20—021—21—22
- doorlopend: 16—17—18—19—20—21—22—23
- uitdagend: 16—17—18—19—20—23—U3—U4

In de figuur zijn de zwaartepunten van de gekleurde driehoeken aangegeven. Stel je voor dat de vlieger van stevig karton is.
- Wat denk je: ligt het zwaartepunt van de vlieger dichter bij $Z_1$ of $Z_2$? Waarom?
- Teken de vlieger op stevig papier en laat hem balanceren op je vingertop.
  Klopt je antwoord op de vorige vraag?



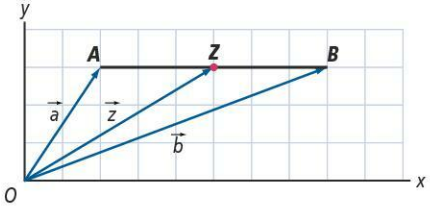

**16** Aan een (massaloze) stang hangen twee massa's van 1 kg in de punten $A$ en $B$. De stang wordt opgehangen in punt $Z$.
Als $AZ = BZ$, hangt de stang in evenwicht.
Volgens de hefboomwet van Archimedes is de stang in de tweede figuur in evenwicht als geldt: $m_A \cdot AZ = m_B \cdot BZ$ met $m_A$ de massa in $A$ in kg en $m_B$ de massa in $B$ in kg.




**a** Leg uit dat als $m_A = 4$ en $m_B = 2$ bij evenwicht geldt: $AZ : BZ = 1 : 2$.

**b** Gegeven is $m_A = 4$, $m_B = 10$ en $AB = 7$ cm.
Teken deze situatie en teken de plaats van het ophangpunt $Z$ zodat de stang in evenwicht is. Hoe lang is $AZ$?

**17** De eerste situatie van opdracht 16 is getekend in een assenstelsel met oorsprong $O$ en de plaatsvectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{z}$.




**a** Leg uit dat hier geldt dat $\vec{z} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

**b** Teken de situatie van 16a in een assenstelsel.

**c** Gebruik dat $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ en laat zien dat $\vec{z} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

**Theorie**

Bevindt zich bij een (massaloze) stang $AB$ in $A$ een massa $a$ en in $B$ een massa $b$, dan is het evenwichtspunt ofwel **zwaartepunt** $Z$ het ophangpunt waarbij de stang met massa's in evenwicht is. $Z$ is het eindpunt van de plaatsvector $\vec{z} = \frac{a}{a+b} \cdot \vec{a} + \frac{b}{a+b} \cdot \vec{b}$, met $\vec{a}$ en $\vec{b}$ de plaatsvectoren van $A$ en $B$.


© Noordhoff Uitgevers bv

**Voorbeeld**

In $A(-2, 5)$ bevindt zich een massa $a = 3$ en in $B(3, 2)$ een massa $b = 5$.
Bereken de coördinaten van het zwaartepunt $Z$.

**Oplossing**

$\vec{z} = \begin{pmatrix} x_z \\ y_z \end{pmatrix} = \frac{3}{8}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{5}{8}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{8} + \frac{15}{8} \\ \frac{15}{8} + \frac{10}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{8} \\ 3\frac{1}{8} \end{pmatrix}$, dus is $Z(1\frac{1}{8}, 3\frac{1}{8})$.

**18** H

De massa in $A$ is $a$ en de massa in $B$ is $b$. Er is steeds evenwicht.
Bereken de coördinaten van het zwaartepunt $Z$.

**a** $A(1, 3)$, $B(7, 3)$, $a = 4$ en $b = 8$.

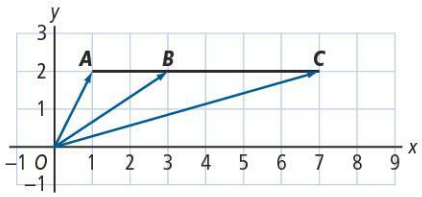
**b** $A(2, 9)$, $B(7, -3)$, $a = 5$ en $b = 8$.

**19**

In de punten $A(1, 2)$, $B(3, 2)$ en $C(7, 2)$ bevinden zich massa's van 1 kg.

**a** Waar ligt het zwaartepunt $Z_{AC}$ van de massa's in $A$ en $C$?

**b** Laat zien dat voor het zwaartepunt $Z$ van de massa van 2 kg in $Z_{AC}$ en de massa in $B$ geldt: $\vec{z} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$.




**Theorie**

Bij het rekenen met massa's ga je er meestal vanuit dat die massa's in een punt zijn geconcentreerd. Je spreekt dan van puntmassa's. Als zich in de punten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de massa's $m_1, m_2, \ldots, m_n$ bevinden, dan geldt voor het zwaartepunt $Z$ van die puntmassa's:

$\vec{z} = \frac{m_1}{m} \cdot \overrightarrow{a_1} + \frac{m_2}{m} \cdot \overrightarrow{a_2} + \ldots + \frac{m_n}{m} \cdot \overrightarrow{a_n}$, waarbij
$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$

**Voorbeeld**

In de punten $A(-2, 5)$, $B(1, 6)$ en $C(7, -3)$ bevinden zich puntmassa's van achtereenvolgens 2, 5 en 3.
Bereken de coördinaten van het zwaartepunt $Z$.

**Oplossing**

$m = 2 + 5 + 3 = 10$

$\vec{z} = \begin{pmatrix} x_z \\ y_z \end{pmatrix} = \frac{2}{10}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{5}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{3}{10}\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{10} + \frac{5}{10} + \frac{21}{10} \\ 1 + 3 - \frac{9}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{5} \\ 3\frac{1}{10} \end{pmatrix}$,

dus is $Z(2\frac{1}{5}, 3\frac{1}{10})$.

© Noordhoff Uitgevers bv

**20** H

**a** In de punten $A(1, 2)$, $B(4, 5)$ en $C(7, 3)$ bevinden zich puntmassa's ter grootte van achtereenvolgens 6, 4 en 10.
Bereken de coördinaten van het zwaartepunt $Z$.

**b** In $P(-3, -5)$, $Q(-1, 7)$, $R(0, 4)$, $S(5, 2)$ en $T(3, -3)$ bevinden zich puntmassa's ter grootte van achtereenvolgens 10, 30, 6, 14 en 5.
Bereken de coördinaten van het zwaartepunt $Z$.

Ondersteunende route → maak opdracht O21

**21** De punten $A$, $B$ en $C$ liggen op één rechte lijn zo dat $AB = 2$, $BC = 8$ en $AC = 10$. De puntmassa's in $A$, $B$ en $C$ zijn achtereenvolgens 10, 30 en 20.

**a** Teken de situatie in een assenstelsel met $A(1, 3)$ en lijnstuk $AC$ evenwijdig aan de $x$-as.

**b** Bereken en teken de positie van het zwaartepunt $Z$.

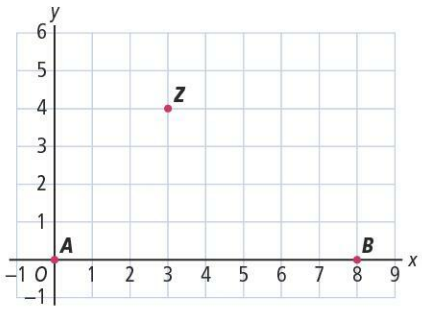
**22** In de punten $A$, $B$ en $C$ van $\triangle ABC$ bevinden zich puntmassa's ter grootte van 4, 6 en 8.

Druk de vector $\vec{z}$ van het zwaartepunt uit in $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$.

**23** Gegeven is $\triangle ABC$ met $A(0, 0)$ en $B(8, 0)$. In elk hoekpunt van $\triangle ABC$ bevindt zich een massa van 1 kg. Het zwaartepunt $Z$ bevindt zich in het punt $(3, 4)$.

**a** Bereken de coördinaten van $C$.

**b** In $\triangle ABR$ zijn de massa's in $A$, $B$ en $R$ respectievelijk 1, 1 en 3 kg, terwijl $Z$ in $(3, 4)$ blijft.
Bereken de coördinaten van $R$.




Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4


© Noordhoff Uitgevers bv

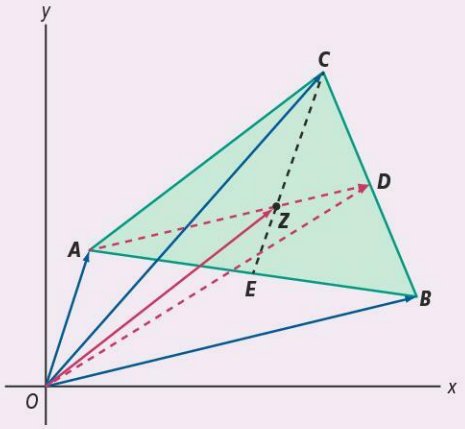
## Ondersteunende opdrachten

**O21** Op een lijnstuk $AB$ met lengte 9 ligt een punt $C$ zo dat $AC = 6$.
De puntmassa's in $A$, $B$ en $C$ zijn achtereenvolgens $m_1 = 4$, $m_2 = 3$ en $m_3 = 1$.

- **a** Teken in een assenstelsel lijnstuk $AB$ evenwijdig aan de $x$-as met punt $C$ in $(0, 3)$.
- **b** Geef de coördinaten van $A$ en $B$.
- **c** Teken en geef de plaatsvectoren van $A$, $B$ en $C$.
- **d** Hoe groot is de totale massa $m$?
- **e** Gebruik de formule $\vec{z} = \frac{m_1}{m} \cdot \vec{a} + \frac{m_2}{m} \cdot \vec{b} + \frac{m_3}{m} \cdot \vec{c}$ om de positie van het zwaartepunt $Z$ te berekenen.
- **f** Teken $Z$.

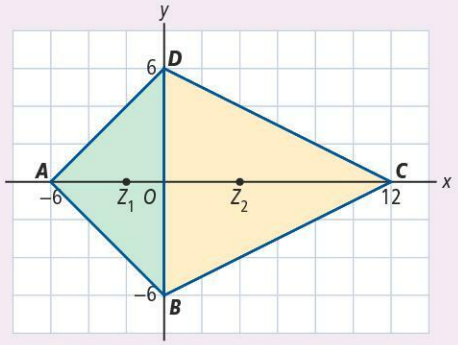
## Uitdagende opdrachten

**U3** Gegeven is $\triangle ABC$.
De plaatsvectoren van $A$, $B$ en $C$ zijn $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$.
De punten $D$ en $E$ zijn de middens van de zijden $BC$ en $AB$. De zwaartelijnen $AD$ en $CE$ snijden elkaar in het zwaartepunt $Z$.




- **a** Druk $\overrightarrow{OD}$ uit in de vectoren $\vec{b}$ en $\vec{c}$.
- **b** Waarom geldt $\overrightarrow{AZ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$?
- **c** Toon aan dat $\overrightarrow{OZ} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.
- **d** Als zich in de hoekpunten van $\triangle ABC$ puntmassa's bevinden met massa 1, dan valt zwaartepunt $Z_m$ van de puntmassa's samen met $Z$.
  Toon dat aan.

**U4** In deze opdracht bereken je het zwaartepunt $Z$ van de vlieger uit de opdracht op bladzijde 52. De hoekpunten zijn $A(-6, 0)$, $B(0, -6)$, $C(12, 0)$ en $D(0, 6)$.




- **a** Beredeneer dat het zwaartepunt $Z$ van de vlieger op de lijn $AC$ ligt.
- **b** Bereken de coördinaten van de zwaartepunten $Z_3$ en $Z_4$ van de driehoeken $ACD$ en $ABC$.
- **c** $Z$ is het snijpunt van de lijnen $Z_1Z_2$ en $Z_3Z_4$.
  Geef de coördinaten van $Z$.
- **d** In de hoekpunten van de vlieger bevinden zich puntmassa's met massa 1.
  Onderzoek of het zwaartepunt van de puntmassa's samenvalt met het zwaartepunt van de vlieger.

© Noordhoff Uitgevers bv

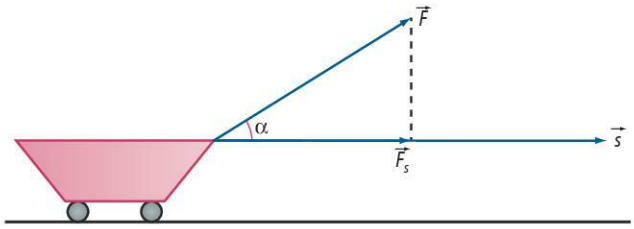
# 8.4 Inwendig product

**Je leert**
- wat een inwendig product is
- hoe je de hoek tussen twee vectoren berekent

**Leerroutes**
- ondersteunend: 24—25—26—27—028—29—30—031—31
- doorlopend: 24—25—26—27—28—29—30—31—32
- uitdagend: 24—25—26—27—28—29—30—32—U5

Als je een wagentje aan een touw over een horizontale weg verplaatst, verricht je arbeid. Die arbeid $W$ kun je berekenen door de kracht *in de richting van de weg*, $|\vec{F}_s|$, te vermenigvuldigen met de afgelegde weg. $W$ hangt dus ook af van de hoek $\alpha$ tussen de kracht $\vec{F}$ waarmee je aan het touw trekt en de weg $\vec{s}$.

- Bij welke hoek geldt $W = \frac{1}{2} \cdot |\vec{F}| \cdot |\vec{s}|$?




**24** Op de eenheidscirkel liggen de punten $A\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ en $B\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

In deze opdracht bereken je de hoek $\alpha$ tussen de vectoren $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OB}$.

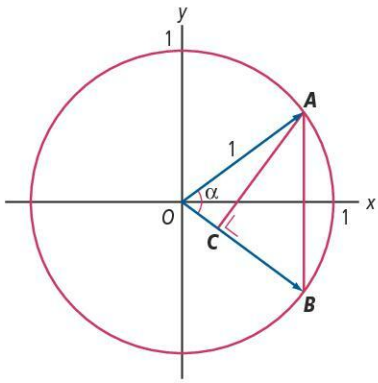
**a** De loodlijn uit $A$ op $\overrightarrow{OB}$ snijdt deze in $C$.
Leg uit dat $OC = \cos(\alpha)$.

**b** Leg uit dat $AC^2 = 1 - \cos^2(\alpha)$.

**c** Leg uit dat $BC = 1 - \cos(\alpha)$ en
$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2 - 2\cos(\alpha)$.

**d** Bereken $\cos(\alpha)$. Gebruik daarbij dat $AB = \frac{6}{5}$.

**e** Bereken $\alpha$ in graden nauwkeurig.




**25** Op de eenheidscirkel liggen de punten $A(a_1, a_2)$ en $B(b_1, b_2)$.

De loodlijn uit $A$ op $\overrightarrow{OB}$ snijdt deze in $C$.
Je gaat een formule afleiden voor $\cos(\alpha)$.

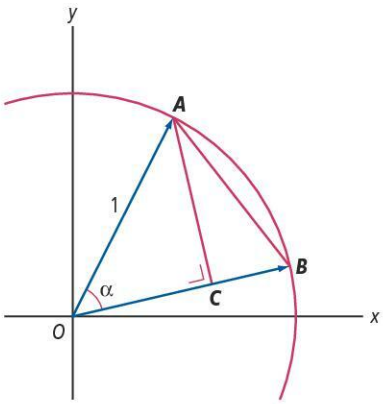
**a** Toon op de manier van de vorige opdracht aan dat
$AB^2 = 2 - 2\cos(\alpha)$.

**b** Je weet $AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

Toon aan dat $AB^2 = 2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$.

**c** Toon aan dat $\cos(\alpha) = a_1b_1 + a_2b_2$.

**d** Controleer je antwoord van opdracht 24e met behulp van deze formule.





© Noordhoff Uitgevers bv

**26** Gegeven zijn de punten $A(3, 4)$ en $B(5, 12)$ met plaatsvectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Om $\angle(\vec{a},\vec{b})$ met de formule van opdracht 25c te berekenen, heb je vectoren met lengte 1 nodig. Kies dus op de lijnstukken $OA$ en $OB$ punten $C$ en $D$ zo, dat $OC = OD = 1$.

**a** Bereken $|\vec{a}|$ en $|\vec{b}|$ en geef de kentallen van $\overrightarrow{OC}$ en $\overrightarrow{OD}$.

**b** Bereken $\angle(\vec{a},\vec{b})$ met de formule van opdracht 25c.

**Theorie**

De uitdrukking $a_1b_1 + a_2b_2$ heet het inwendig product of inproduct van de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

De notatie voor het inwendig product is $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Als $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha$ en $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ geldt $\cos(\alpha) = \vec{a} \cdot \vec{b}$.

Algemeen geldt: $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ of $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$.

**Voorbeeld**

Bereken in hele graden de hoek $\alpha$ tussen de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

**Oplossing**

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot -1 + 1 \cdot 2 = -1$

$\cos(\alpha) = \dfrac{-1}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = -0{,}141\ldots$

$\alpha \approx 98°$

**27** Gegeven zijn de plaatsvectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$.

**a** Bereken het inproduct $\vec{a} \cdot \vec{b}$ met behulp van de kentallen.

**b** Bereken $\angle(\vec{a},\vec{b})$ in graden nauwkeurig.

Ondersteunende route → maak opdracht 028

**28** H Bereken bij elk paar plaatsvectoren het inproduct en de ingesloten hoek, dat is de hoek die de twee plaatsvectoren met elkaar maken. Rond je antwoorden af op hele graden.

**a** $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

**b** $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

**c** $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$

**d** $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

© Noordhoff Uitgevers bv

**29** **a** Uit de formule van het inproduct volgt dat als $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 90°$ dan $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
Leg dat uit.

**b** Is het omgekeerde 'uit $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ volgt $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 90°$' ook waar?

**Theorie**

Als twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ loodrecht op elkaar staan, is hun inproduct gelijk aan 0. Het omgekeerde is ook waar, mits $\vec{a}$ en/of $\vec{b}$ niet gelijk zijn aan de nulvector.

**Voorbeeld**

Gegeven zijn de punten $A(4, 6)$ en $B(3, -2)$. Onderzoek of $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$.

**Oplossing**

$\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} = 4 \cdot 3 + 6 \cdot -2 = 0$, dus $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$.

**30** **a** Leg uit dat voor $p$ en $q$ (niet beide 0) geldt: $\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}q\\-p\end{pmatrix}$.

**b** Geef de kentallen van drie vectoren die loodrecht staan op $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

**c** Doe hetzelfde voor de vectoren

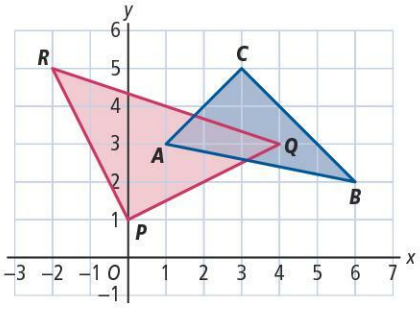
$\vec{b} = \begin{pmatrix}-4\\7\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ en $\vec{e} = \begin{pmatrix}17\\-43\end{pmatrix}$.

Ondersteunende route → maak opdracht O31

**31** Gegeven is $\triangle ABC$ met $A(1, 3)$, $B(6, 2)$ en $C(3, 5)$.

**a** Hoek $C$ is de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CB}$ (let op: het hoekpunt is het beginpunt van de vectoren!). Bereken met behulp van het inproduct $\angle C$ en $\angle A$ van $\triangle ABC$ in graden nauwkeurig.

**b** Bereken ook de hoeken van $\triangle PQR$ met $P(0, 1)$, $Q(4, 3)$ en $R(-2, 5)$ in hele graden.




**32** Gegeven is vierhoek $ABCD$ met $A(-24, -1)$, $B(36, -25)$, $C(3, 23)$ en $D(-12, 29)$.

**a** Bereken de hoeken van de vierhoek in graden nauwkeurig.

**b** Onderzoek of de diagonalen $AC$ en $BD$ loodrecht op elkaar staan.

Uitdagende route → maak opdracht U5


© Noordhoff Uitgevers bv

## Ondersteunende opdrachten

**O28** Gegeven zijn de punten $A(6, 2)$ en $B(1, 3)$.

**a** Met de berekening van $\alpha = \angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ is al een begin gemaakt. Maak de berekening af.

Bereken in hele graden de hoek tussen de plaatsvectoren.

**b** $\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$

**c** $\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$

**d** $\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}15\\10\end{pmatrix}$

**e** $\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix} = 6 \cdot \dots + 2 \cdot \dots$

$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{\dots^2 + \dots^2} = \dots$en

$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{\dots^2 + \dots^2} = \dots$

$\cos(\alpha) = \frac{\dots}{\dots \cdot \dots}$

$\alpha \approx \dots^\circ$

**O31** Gegeven is $\triangle ABC$ met $A(5, 2)$, $B(10, 3)$ en $C(2, 6)$.

Hoek $A$ is de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AC}$.

**a** Geef de kentallen van $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AC}$.

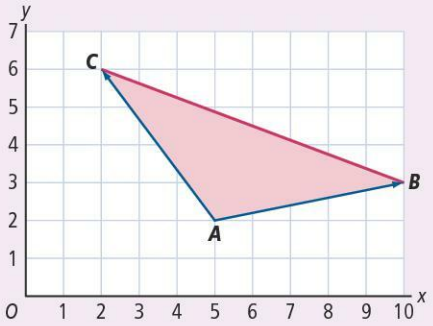
**b** Vul in: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix} = \dots$

**c** Vul in: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\dots^2 + \dots^2} = \dots$

**d** Bereken exact $|\overrightarrow{AC}|$.

**e** Bereken $\cos(\angle A)$.

**f** Bereken $\angle A$ in graden nauwkeurig.




## Uitdagende opdrachten

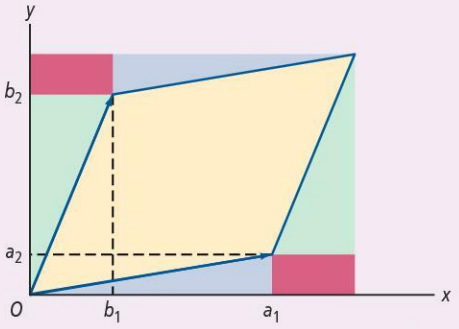
**U5** De vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ vormen twee zijden van een parallellogram.

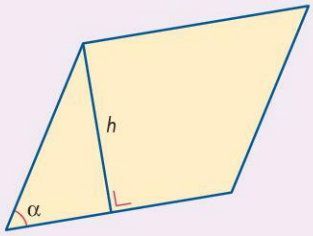
**a** Bereken met inlijsten de oppervlakte van het parallellogram.

**b** Toon aan dat de oppervlakte van het parallellogram met als twee zijden de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ gelijk is aan $a_1b_2 - a_2b_1$.

**c** Laat zien dat de oppervlakte van het parallellogram ook gelijk is aan $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha)$.

**d** Druk $\sin(\alpha)$ uit in de kentallen van $\vec{a}$ en $\vec{b}$.




© Noordhoff Uitgevers bv

# 8.5 Vectorvoorstelling van een lijn

**Je leert**
- wat een vectorvoorstelling van een lijn is
- hoe je een vectorvoorstelling van een lijn door twee gegeven punten opstelt

**Leerroutes**
- ondersteunend: 33—034—35—36—37—38—039—39—41
- doorlopend: 33—34—35—36—37—38—39—40—41
- uitdagend: 33—34—35—36—37—38—39—41—U6

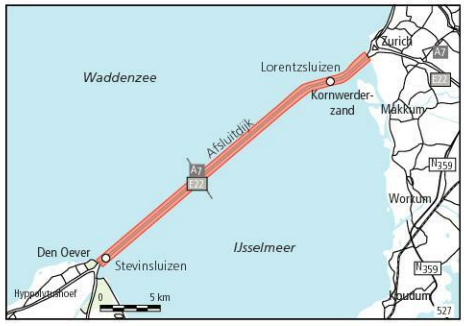
Een jacht vertrekt om 12 uur uit Medemblik.
Een uur later passeert het een boei bij het punt (3, 5). De vector $\overrightarrow{\text{Medemblik} - \text{boei}}$ geeft de richting en de snelheid aan van het jacht.
- Hoe laat bereikt het jacht de Afsluitdijk?
- Als niets de doortocht van het jacht belemmert, wordt dan ooit het punt (77, 225) bereikt?

**33** Anton fietst in $1\frac{1}{2}$ uur over het rechte stuk van de Afsluitdijk. In een rooster heeft het startpunt van de dijk bij Den Oever coördinaten (2, 1) en het einde van het rechte stuk (23, 13).

**a** Teken in een assenstelsel de vector die de afstand aangeeft die Anton na een kwartier heeft afgelegd.

**b** Laat zien dat je de coördinaten van Anton na $t$ kwartier kunt berekenen met $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$.

**c** Bereken zijn positie na 1 uur en 15 minuten.



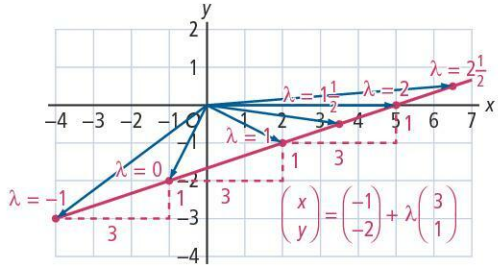

**Theorie**

Gegeven zijn een punt $A$ met plaatsvector $\vec{a}$ en een vector $\vec{r}$. De eindpunten van alle plaatsvectoren $\vec{v}$ waarvoor $\vec{v} = \vec{a} + \lambda\vec{r}$ liggen op een lijn $l$ door $A$ evenwijdig aan $\vec{r}$.

$\vec{v} = \vec{a} + \lambda\vec{r}$ heet een **vectorvoorstelling** van $l$. Met kentallen schrijf je $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + \lambda r_1 \\ a_2 + \lambda r_2 \end{pmatrix}$.

$\vec{a}$ heet een **steunvector** van $l$ en $\vec{r}$ een **richtingsvector**.
$\lambda$ heet een **parameter** (spreek uit: para*meter*). Als de parameter de tijd voorstelt, wordt vaak de letter $t$ gebruikt.

**Voorbeeld**




Griekse letters voor parameters:
$\lambda$: lambda, $\mu$: mu, $\nu$: nu


© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht 034

**34** H

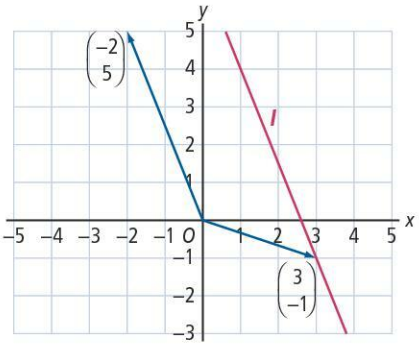
Teken de lijnen $l$ en $m$ in een assenstelsel.

**a** $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ **b** $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 2\lambda \\ 5 + \lambda \end{pmatrix}$

**35**

Gegeven is lijn $l$ met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

**a** Welke punten van $l$ horen bij $\mu = 5$ en $\mu = -2\frac{1}{2}$?
**b** Voor welke waarde van $\mu$ krijg je het punt $(1, 4)$?
**c** Welke waarde van $\mu$ hoort bij punt $(9, -16)$ van $l$?
**d** Ligt het punt $(-33, 90)$ op $l$?
**e** Bereken $p$, zodat het punt $(31, p)$ op $l$ ligt.




**36**

In deze opdracht stel je een vectorvoorstelling op van de lijn $l$ door de punten $P(8, -2)$ en $Q(18, 3)$.

**a** Kies als steunvector $\overrightarrow{OP}$ of $\overrightarrow{OQ}$ en schrijf de kentallen op.
**b** Bereken de kentallen van $\overrightarrow{PQ}$.
**c** Waarom is behalve de vector $\overrightarrow{PQ}$ ook de vector $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ een richtingsvector van de lijn door $P$ en $Q$?
**d** Stel een vectorvoorstelling op van de lijn door $P$ en $Q$.

**Aanpak**

**Hoe stel je een vectorvoorstelling op van een lijn door twee gegeven punten $P$ en $Q$?**

**1** Kies als steunvector $\overrightarrow{OP}$ of $\overrightarrow{OQ}$.
**2** Een richtingsvector is $\vec{r} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$.
**3** Een vectorvoorstelling is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}$.

Je mag de richtingsvector korter of langer maken door de kentallen door hetzelfde getal te delen of met hetzelfde getal te vermenigvuldigen.

**Voorbeeld**

Stel een vectorvoorstelling op van de lijn $l$ door de punten $P(12, 20)$ en $Q(18, 11)$.

**Oplossing**

**1** $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix}$ is een steunvector.

**2** $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Neem als richtingsvector $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

**3** Een vectorvoorstelling van $l$ is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

**37** Stel een vectorvoorstelling op van de lijn:

H

**a** door de punten $A(-5, 9)$ en $B(-4, 2)$.

**b** door de punten $C(-4, 5)$ en $D(4, 17)$.

**c** door de punten $E(5, 2020)$ en $F(365, 1540)$.

**38** De hoek tussen twee lijnen is de scherpe of rechte hoek tussen die lijnen.

**a** Bereken met behulp van het inproduct van de richtingsvectoren de hoek tussen de lijnen $AB$ en $CD$ van opdracht 37.

**b** Bereken ook de hoek tussen de lijnen $CD$ en $EF$.

Ondersteunende route → maak opdracht O39

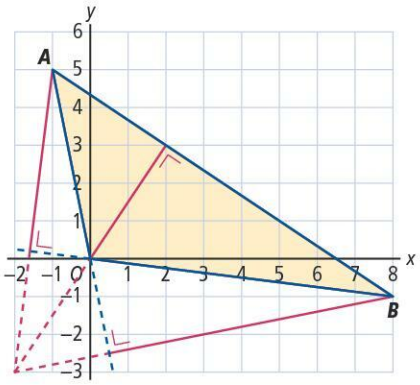
**39** Gegeven is $\triangle OAB$ met $A(-1, 5)$ en $B(8, -1)$.
Een *hoogtelijn* in een driehoek is een lijn door een hoekpunt loodrecht op de overstaande zijde.

**a** Geef een vectorvoorstelling van de lijn $AB$.

**b** Geef een vectorvoorstelling van de hoogtelijn uit $O$.

**c** Geef ook een vectorvoorstelling van de hoogtelijn uit $A$ en van de hoogtelijn uit $B$.

**d** In de figuur lijken de drie hoogtelijnen door het punt $(-2, -3)$ te gaan.
Onderzoek met behulp van de vectorvoorstellingen van de hoogtelijnen of dat klopt.




**40** Gegeven is de lijn $l$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 3t \\ 7 + 2t \end{pmatrix}$.

Bereken de coördinaten van de snijpunten van $l$ met de $x$-as en de $y$-as.

**41** Gegeven zijn de punten $K(-3, 1)$, $L(18, 7)$ en $M(74, 23)$.

**a** Stel een vectorvoorstelling op van de lijn door $K$ en $L$.

**b** Onderzoek of punt $M$ op de lijn $KL$ ligt.

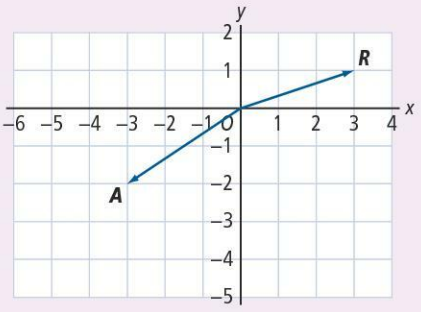
**c** Onderzoek of de punten $A(-3, 5)$, $B(7, 13)$ en $C(42, 41)$ op één lijn liggen.

Uitdagende route → maak opdracht U6


© Noordhoff Uitgevers bv

## Ondersteunende opdrachten

**O34** Gegeven zijn de plaatsvector $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ en de vector $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.




**a** Teken in een assenstelsel de plaatsvectoren $\vec{a} - 2\vec{r}$, $\vec{a} - \vec{r}$, $\vec{a} + \vec{r}$ en $\vec{a} + 2\vec{r}$.

**b** Teken een lijn $l$ door de eindpunten van de vectoren.

**c** Geef een vectorvoorstelling van $l$ in de vorm $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$.

**d** Teken de lijn met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

**O39** $l$ is de lijn door de punten $A(0, 5)$ en $B(6, 0)$.

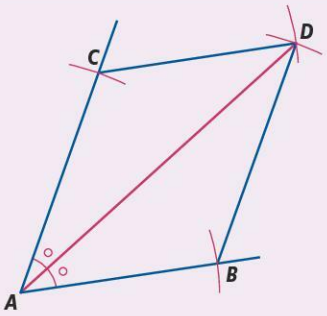
**a** Geef een richtingsvector $\vec{r}$ van $l$.

**b** Geef een vector $\vec{p}$ die loodrecht staat op $\vec{r}$.

**c** Stel een vectorvoorstelling op van de lijn door $O$ die loodrecht staat op $l$.

## Uitdagende opdrachten

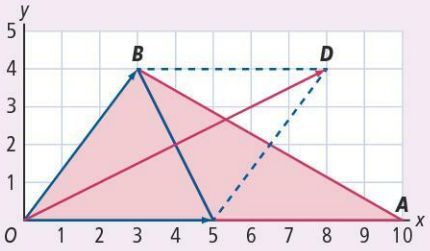
**U6** De bissectrice (deellijn) van een hoek kun je construeren met een *ruitconstructie*: een cirkel met middelpunt $A$ snijdt de benen van de hoek in $B$ en $C$ en de cirkels met middelpunten $B$ en $C$ en straal $AC$ snijden elkaar behalve in $A$ ook in $D$. De lijn $AD$ deelt dan de hoek bij $A$ doormidden. Die ruitconstructie kun je ook gebruiken om een vectorvoorstelling van een bissectrice op te stellen.




**a** Gegeven is $\triangle OAB$ met $A(10, 0)$ en $B(3, 4)$.

Bereken exact $|\overrightarrow{OB}|$.

**b** Kies een punt $E$ op lijnstuk $OA$ zodat $|\overrightarrow{OE}| = |\overrightarrow{OB}|$ en stel een vectorvoorstelling op van de bissectrice van hoek $BOE$.




**c** Controleer met behulp van het inproduct dat $\angle(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB}) = \angle(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE})$.

**d** Gegeven is $\triangle PQR$ met $P(-4, 0)$, $Q(12, 2)$ en $R(0, 7)$. Stel een vectorvoorstelling op van de bissectrice van hoek $P$.

**e** De bissectrice van de hoek tussen de plaatsvectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ heeft vectorvoorstelling $\vec{v} = \lambda\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$.

Toon dat aan.

© Noordhoff Uitgevers bv

# 8.6 Vectorvoorstelling en vergelijking

**Je leert**
- wat een normaalvector is
- hoe je een vectorvoorstelling van een lijn omzet in een vergelijking en omgekeerd

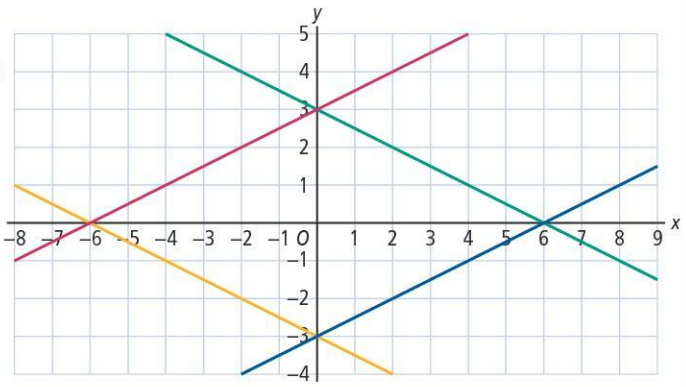
**Leerroutes**
- ondersteunend: 42—43—44—045—45—46—47—48—049
- doorlopend: 42—43—44—45—46—47—48—49—50
- uitdagend: 42—43—44—45—47—48—49—50—U7

Bij elke lijn in de figuur hoort een vergelijking en een vectorvoorstelling.
De vergelijkingen zijn: $x - 2y = 6$, $x + 2y = -6$ $x + 2y = 6$ en $x - 2y = -6$.
De vectorvoorstellingen zijn:

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Zoek bij elke vergelijking de bijbehorende vectorvoorstelling.




**42** Gegeven is lijn $l$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

**a** Bereken de richtingscoëfficiënt van $l$ en stel een vergelijking op van $l$.

**b** Laat zien dat je de vergelijking kunt herleiden tot $5x - 2y = 11$.

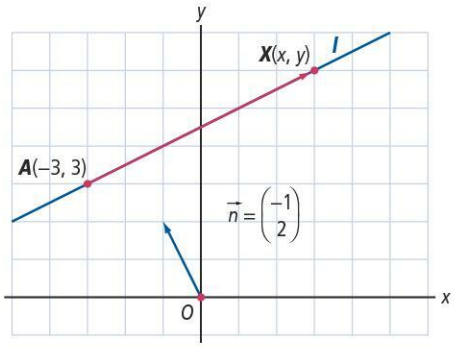
**c** De uitdrukking links van het =-teken kun je ook schrijven als het inproduct van de vectoren $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Wat kun je zeggen over de onderlinge ligging van de vector $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ en de richtingsvector $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ van $l$?


© Noordhoff Uitgevers bv

**43** Gegeven is het punt $A(-3, 3)$ en een vector $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$l$ is de lijn door $A$ met een richtingsvector loodrecht op $\vec{n}$.
Punt $X(x, y)$ is een willekeurig punt op $l$.




**a** Druk de kentallen van vector $\overrightarrow{AX}$ uit in $x$ en $y$.

**b** Omdat $\vec{n} \perp \overrightarrow{AX}$ geldt $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} = 0$.
Laat zien dat hieruit volgt dat $x - 2y = -9$ een vergelijking is van $l$.

**Theorie**

Een vector loodrecht op een richtingsvector van lijn $l$ heet een normaalvector van $l$. De notatie voor een normaalvector is $\vec{n}_l$.
Is $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ een richtingsvector van $l$, dan is $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$ een normaalvector van $l$.
Een vergelijking van $l$ is dan $qx - py = c$.
De waarde van $c$ vind je door in deze vergelijking de coördinaten van een punt van $l$ in te vullen.

**Voorbeeld**

Stel een vergelijking op van de lijn $l$:
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

**Oplossing**

$\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, dus een vergelijking van $l$ is $3x - 4y = c$.
$(-3, 5)$ ligt op $l$. Invullen geeft:
$-9 - 20 = c$, dus $c = -29$.
$l$: $3x - 4y = -29$

**44** H

Stel een vergelijking op.

**a** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ **b** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 3t \\ 3 + 5t \end{pmatrix}$

Ondersteunende route → maak opdracht 045

**45** Gegeven is $\triangle OAB$ met $A(8, 0)$ en $B(3, 6)$. $m_{OA}$, $m_{OB}$ en $m_{AB}$ zijn de middelloodlijnen van de lijnstukken $OA$, $OB$ en $AB$.

**a** Teken $\triangle OAB$, $m_{OA}$ en $m_{OB}$.

**b** Leg uit dat $\overrightarrow{OB}$ een normaalvector is van $m_{OB}$ en stel een vergelijking op van $m_{OB}$.

**c** $m_{OA}$ en $m_{OB}$ snijden elkaar in $M$.
Bereken exact de coördinaten van $M$.

**d** Stel een vergelijking op van $m_{AB}$.

**e** Toon met een berekening aan dat $M$ ook op $m_{AB}$ ligt.

© Noordhoff Uitgevers bv

**46** Gegeven is vierhoek $PQRS$ met $P(-4, 2)$, $Q(5, 9)$, $R(6, 17)$ en $S(-1, 13)$.

**a** Toon aan dat de diagonalen $PR$ en $QS$ loodrecht op elkaar staan.

**b** Stel een vergelijking op van de lijn door punt $S$ die loodrecht staat op lijnstuk $PQ$.

**47** Gegeven is $\triangle ABC$ met $A(4, 0)$, $B(1, 7)$ en $C(-5, 2)$.
Stel een vergelijking op van de hoogtelijn uit $A$.

**48** Gegeven is lijn $k$ met vergelijking $7x + 2y = 4$.

**a** Waarom zijn $\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ beide te kiezen als richtingsvector van $k$?

**b** Leg uit dat het punt $(0, 2)$ op $k$ ligt.

**c** Stel een vectorvoorstelling op van $k$.

**Theorie**

De lijn $l$: $ax + by = c$ heeft normaalvector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Een richtingsvector van $l$ is dan $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Ondersteunende route → maak opdracht 049

**49** Stel van elke lijn een vectorvoorstelling op.

H

**a** $3x - 2y = 8$

**b** $7x + 2y - 16 = 0$

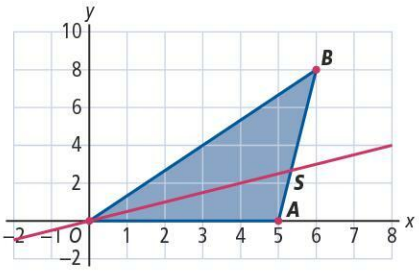
**c** $-4x + y = 0$

**d** $y = 5$

**e** $x = -8$

**f** $y = \frac{1}{2}x - 0{,}4$

**50** Gegeven is $\triangle OAB$ met $A(5, 0)$ en $B(6, 8)$ en de lijn $l$ met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.




**a** Toon aan dat $l$ gelijke hoeken maakt met de lijnen $OA$ en $OB$.

**b** Stel vergelijkingen op van $l$ en de lijn $m$ door $A$ en $B$.

**c** Bereken exact de coördinaten van het snijpunt $S$ van $l$ en $m$.

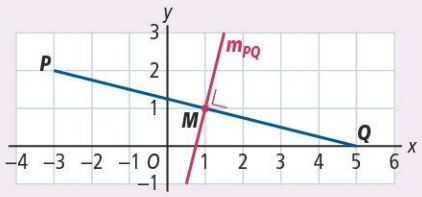
**d** Toon aan dat $SA : SB = OA : OB$.

Uitdagende route → maak opdracht U7


© Noordhoff Uitgevers bv

## Ondersteunende opdrachten

**O45** Gegeven zijn de punten $P(-3, 2)$ en $Q(5, 0)$.




**a** Bereken de coördinaten van het midden $M$ van lijnstuk $PQ$.

**b** $m_{PQ}$ is de middelloodlijn van lijnstuk $PQ$.

Leg uit dat $\overrightarrow{PQ}$ een normaalvector is van $m_{PQ}$.

**c** Stel een vergelijking op van $m_{PQ}$.

**O49** Lijn $l$ heeft vergelijking $6x - 11y = 1$.

**a** Om een steunvector van $l$ te vinden, kies je een punt op $l$. Zo'n punt kun je vinden door proberen. Je kunt ook een $x$-coördinaat kiezen en dan de bijbehorende $y$-coördinaat berekenen met behulp van de vergelijking van $l$.
Bereken de $y$-coördinaat van het punt op $l$ waarvoor $x = 2$.

**b** Geef de kentallen van $\overrightarrow{n_l}$.

**c** Geef een richtingsvector van $l$.

**d** Geef een vectorvoorstelling van $l$.

**e** Stel een vectorvoorstelling op van $k$: $4x + 3y = 7$.

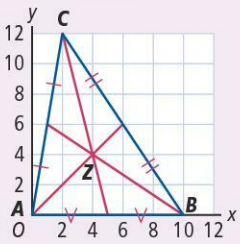
**f** Stel een vectorvoorstelling op van $n$: $y = 15$ en $p$: $x = -3$.

**g** Stel een vectorvoorstelling op van $q$: $y = \frac{2}{3}x - 1$.

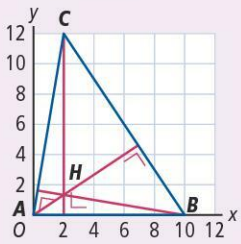
## Uitdagende opdrachten

**U7** De Zwitserse wiskundige Leonhard Euler (1707 – 1783) bewees dat in elke driehoek het zwaartepunt $Z$, het snijpunt $H$ van de hoogtelijnen en het snijpunt $M$ van de middelloodlijnen op één lijn liggen en dat bovendien geldt $ZH = 2 \cdot ZM$.

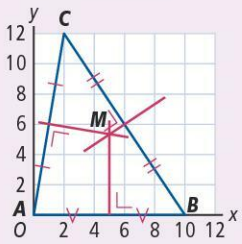
zwaartelijnen




hoogtelijnen




middelloodlijnen




Voor een concreet voorbeeld ga je dat bewijzen.
Van $\triangle ABC$ is $A(0, 0)$, $B(10, 0)$ en $C(2, 12)$.

**a** Bereken de coördinaten van het zwaartepunt $Z$ van $\triangle ABC$.

**b** Toon aan dat de hoogtelijnen van $\triangle ABC$ door één punt gaan ($H$). $H$ heet het *hoogtepunt* van de driehoek.

**c** Toon aan dat de middelloodlijnen van $\triangle ABC$ door één punt gaan ($M$).

**d** Toon aan dat $\overrightarrow{ZH} = 2\overrightarrow{MZ}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

**51** Geef bij elk paar vectoren aan of ze dezelfde richting hebben, een tegengestelde richting hebben, loodrecht op elkaar staan of dat geen van deze drie mogelijkheden geldt.

**a** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -24 \\ 9 \end{pmatrix}$

**b** $\vec{p} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix}$ en $\vec{q} = \begin{pmatrix} -25 \\ 10 \end{pmatrix}$

**c** $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 24 \end{pmatrix}$

**d** $\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ en $\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

**52** Gegeven zijn de punten $A(1, 2)$, $B(5, -6)$, $C(-2, 8)$ en $D(-5, -2)$.

**a** Onderzoek of het punt $C$ op de lijn $AB$ ligt.

**b** Onderzoek of de lijn $DA$ loodrecht op de lijn $AB$ staat.

**c** Het punt $Q$ heeft coördinaten $(3, q)$.
Onderzoek voor welke waarde van $q$ de vectoren $\overrightarrow{DQ}$ en $\overrightarrow{DA}$ loodrecht op elkaar staan.

**d** Bereken in graden nauwkeurig $\angle(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC})$.

**53** Gegeven is vierhoek $ABCD$ met $A(-2, -1)$, $B(-1, 2)$, $C(2, 3)$ en $D(p, q)$.

**a** Neem $p = 4$ en $q = -2$. In elk hoekpunt bevindt zich een puntmassa van 1 kg.
Bereken de coördinaten van het zwaartepunt $Z$.

**b** In $A$, $B$, $C$ en $D$ bevinden zich puntmassa's van achtereenvolgens 1, 2, 3 en 4 kg. Het zwaartepunt van deze puntmassa's is $O(0, 0)$.
Bereken $p$ en $q$.

**54** Gegeven zijn de punten $P(3, 2)$, $Q(6, 6)$ en $R(8, 2)$.
Samen met een vierde punt $S$ zijn dit de hoekpunten van een parallellogram.

**a** Teken in een assenstelsel alle mogelijke posities van $S$.

**b** Is er een positie van $S$ zo, dat $P$, $Q$, $R$ en $S$ de hoekpunten van een ruit zijn?

**c** Geef bij elk gevonden parallellogram zowel een vergelijking als een vectorvoorstelling van de diagonalen.

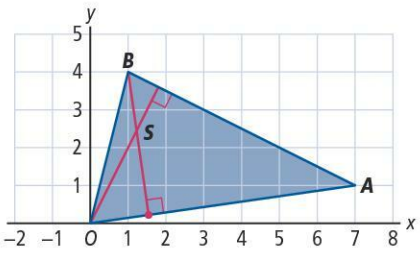
**55** Gegeven is $\triangle OAB$ met $A(7, 1)$ en $B(1, 4)$.
Een hoogtelijn is een lijn door een hoekpunt loodrecht op de overstaande zijde.

**a** Stel van elke hoogtelijn een vergelijking op.

**b** Bereken de coördinaten van het snijpunt $S$ van de hoogtelijnen uit $O$ en $B$.

**c** Toon aan dat $S$ ook op de hoogtelijn uit $A$ ligt.

**d** Bereken $\angle A$ in hele graden.



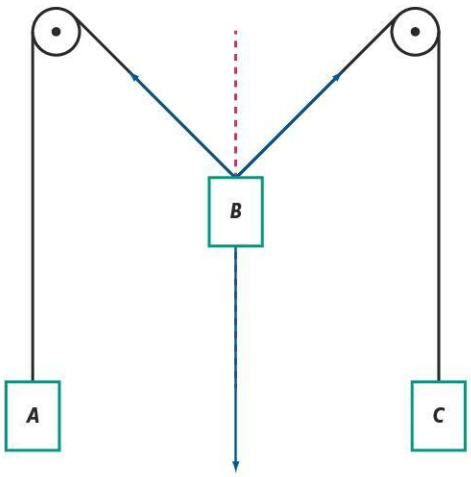


© Noordhoff Uitgevers bv

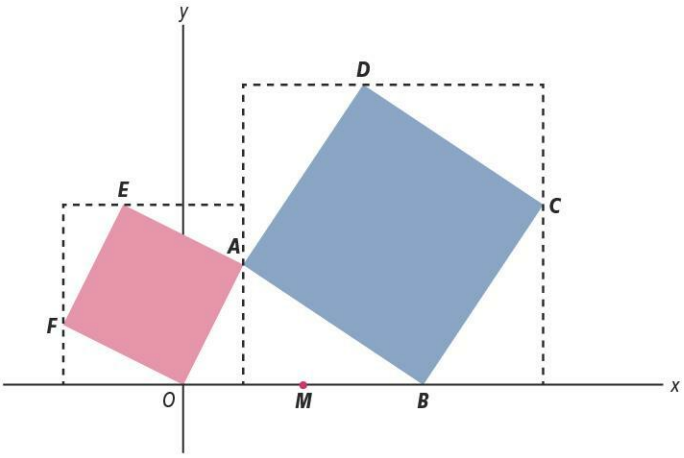
**56** De voorwerpen $A$, $B$ en $C$ zijn met touwen via katrollen verbonden. Op $A$ en $C$ werkt een zwaartekracht van 20 N en daardoor op $B$ twee krachten van 20 N schuin omhoog. Daarnaast werkt op $B$ een zwaartekracht van 30 N.

**a** Naar boven werkt een kracht die de som is van de twee getekende krachten.
Onderzoek wat er in de getekende situatie met $B$ gebeurt.

**b** Op een gegeven moment hangt $B$ stil.
Bereken in dat geval de hoek die de touwen bij $B$ met elkaar maken in hele graden.




**57** Voor positieve waarden van $p$ en $q$ is gegeven $\triangle OAB$ met $O(0, 0)$, $A(p, q)$ en $B(4, 0)$.
Het midden van lijnstuk $OB$ is punt $M$.
Op de zijden $OA$ en $AB$ staan de vierkanten $OAEF$ en $ABCD$.




**a** In de figuur is de situatie getekend voor $p = 1$ en $q = 2$.
Toon aan dat de lijnen $MA$ en $ED$ loodrecht op elkaar staan.

**b** Onderzoek of de lijnen $MA$ en $ED$ ook loodrecht op elkaar staan voor andere waarden van $p$ en $q$.

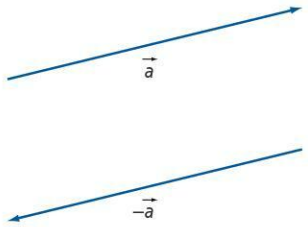
© Noordhoff Uitgevers bv

**Theorie**

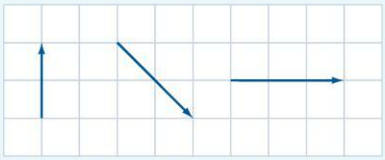
### Vector, tegengestelde vector en lengte van een vector

Een vector is een pijl die een verplaatsing aangeeft. Een vector heeft een grootte en een richting. $\overrightarrow{AB}$ is de vector met beginpunt $A$ en eindpunt $B$. $|\overrightarrow{AB}|$ is de lengte van $\overrightarrow{AB}$.

De tegengestelde vector van $\vec{a}$ is $-\vec{a}$. Deze is even lang als $\vec{a}$, maar heeft een tegengestelde richting.




**S1** Teken op roosterpapier de tegengestelde vectoren van de vectoren in de figuur.



**Theorie**

### Kentallen en plaatsvector

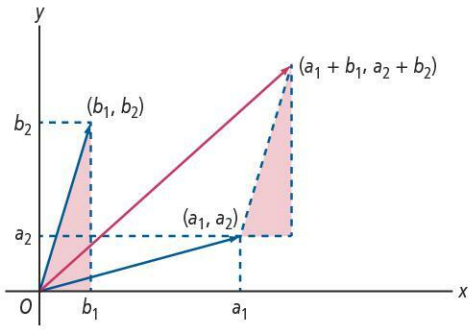
In een assenstelsel kun je vectoren beschrijven met kentallen.

Er geldt $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$ en $k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \end{pmatrix}$.

Voor de lengte van de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ geldt $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Een vector die in de oorsprong begint, heet een plaatsvector.

Als $A(a_1, a_2)$ en $B(b_1, b_2)$, is $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$.




$$\left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$$

**Voorbeeld**

Gegeven zijn de punten $A(-6, -2)$ en $B(9, 4)$.

Geef de kentallen van de vectoren

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ en $\overrightarrow{AB}$.

Bereken exact ook de lengte van deze vectoren.

**Oplossing**

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{15^2 + 6^2} = \sqrt{261} \ (= 3\sqrt{29})$$

**S2** Gegeven zijn de punten $P(-6, 2)$ en $Q(7, 7)$.

**a** Bereken de kentallen van de vectoren $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ en $7\overrightarrow{OP} + 6\overrightarrow{OQ}$.

**b** Bereken exact ook de lengte van deze vectoren.

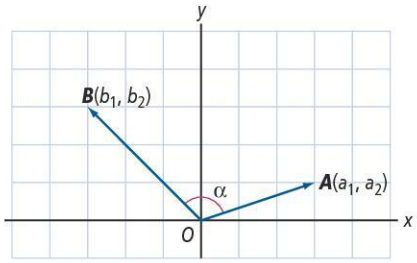

© Noordhoff Uitgevers bv

**Theorie**

### Inwendig product

Het inwendig product van twee vectoren $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OB}$ is $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = a_1b_1 + a_2b_2 = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos(\alpha)$.

Als $\vec{a} \perp \vec{b}$ is hun inproduct gelijk aan 0. Als $\vec{a} \neq \vec{0}$ en $\vec{b} \neq \vec{0}$ is ook het omgekeerde waar: als $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ geldt $\vec{a} \perp \vec{b}$.




**S3** **a** Bereken het inwendig product van $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

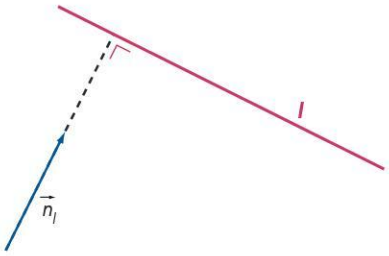
**b** Toon aan dat $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 17\frac{1}{2} \\ 7 \end{pmatrix}$.

**Theorie**

### Normaalvector

Een vector loodrecht op een lijn $l$ is een normaalvector van $l$.

Is $\vec{r} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ een richtingsvector van $l$, dan is $\begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix}$ een normaalvector van $l$. Ook $\begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$ is een normaalvector van $l$.



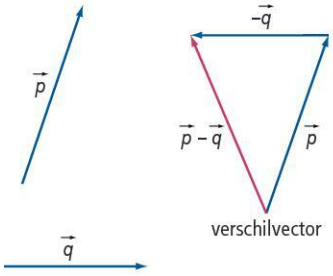

**S4** Geef van elke lijn een normaalvector.

**a** $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ **b** $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 48 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}$

**Vaardigheid**

### Je kunt vectoren optellen.

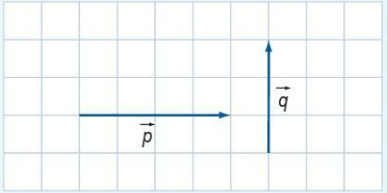
De somvector $\vec{p} + \vec{q}$ van twee vectoren $\vec{p}$ en $\vec{q}$ construeer je met de kop-staart methode. De verschilvector $\vec{p} - \vec{q}$ is de somvector van $\vec{p}$ en $-\vec{q}$. Dus $\vec{p} - \vec{q} = \vec{p} + (-\vec{q})$.




**S5** Gegeven zijn de vectoren $\vec{p}$ en $\vec{q}$ met $|\vec{p}| = 4$ en $|\vec{q}| = 3$.

**a** Teken op roosterpapier de vectoren $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{p} + \vec{q}$ en $\vec{q} - \vec{p}$.

**b** Bereken $|\vec{p} + \vec{q}|$.




© Noordhoff Uitgevers bv

**Vaardigheid**

**Je kunt met kentallen rekenen.**

Voor het midden $M$ van een lijnstuk $AB$ geldt $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ of ook $\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$.

**S6** Van $\triangle ABC$ is $A(-24, -12)$, $B(15, -3)$ en $C(0, 5)$.
Bereken de coördinaten van de middens $P$, $Q$ en $R$ van de zijden $AB$, $BC$ en $AC$.

**Vaardigheid**

**Je kunt de plaats van een zwaartepunt vinden.**

Het zwaartepunt of evenwichtspunt is het ophangpunt van een massaloze stang met massa's die in evenwicht is.
Als zich in de punten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de massa's $m_1, m_2, \ldots, m_n$ bevinden met zwaartepunt $Z$, dan geldt: $\vec{z} = \frac{m_1}{m} \cdot \overrightarrow{a_1} + \frac{m_2}{m} \cdot \overrightarrow{a_2} + \ldots + \frac{m_n}{m} \cdot \overrightarrow{a_n}$, waarbij $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$.

**S7** In de punten $A(-1, 2)$, $B(3, 1)$, $C(2, 5)$ en $D(-1, 4)$ bevinden zich puntmassa's van respectievelijk 1, 2, 2 en 1 kg.
Bereken de coördinaten van het zwaartepunt.

**Vaardigheid**

**Je kunt de hoek tussen twee vectoren berekenen.**

De hoek $\alpha$ tussen twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ kun je berekenen met de formule $\cos(\alpha) = \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

**Voorbeeld**

Bereken de hoek $\alpha$ tussen de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**Oplossing**

$|\vec{a}| = \sqrt{65}$, $|\vec{b}| = \sqrt{65}$ en $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4 \cdot 8 + 7 \cdot 1 = -25$.

$\cos(\alpha) = -\frac{25}{65} = -\frac{5}{13}$ dus $\alpha \approx 113°$.

**S8** Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OB}$ met $A(-7, 1)$ en $B(1, 1)$.


© Noordhoff Uitgevers bv

**Vaardigheid**

**Je kunt de vectorvoorstelling van een lijn door twee gegeven punten $P$ en $Q$ opstellen.**

**1** Kies als steunvector $\overrightarrow{OP}$ of $\overrightarrow{OQ}$.

**2** Een richtingsvector is $\vec{r} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$.

**3** Een vectorvoorstelling is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}$.

Je mag de richtingsvector korter of langer maken door de kentallen door hetzelfde getal te delen of met hetzelfde getal te vermenigvuldigen.

**Voorbeeld**

Geef een vectorvoorstelling van de lijn door $A(3, -2)$ en $B(1, 4)$.

**Oplossing**

**1** $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ is een steunvector.

**2** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Neem als richtingsvector $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

**3** lijn $AB$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

**S9** Gegeven zijn de punten $A(-5, 0)$, $B(3, 2)$ en $C(1, 6)$.
Stel vectorvoorstellingen op van de lijnen $AB$, $BC$ en $AC$.

**Vaardigheid**

**Je kunt een vectorvoorstelling van een lijn omzetten in een vergelijking en omgekeerd.**

Lijn $l$: $ax + by = c$ heeft normaalvector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

**Voorbeeld 1**

Geef een vergelijking van de lijn $l$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

**Oplossing**

Een normaalvector van $l$ is $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Een vergelijking van $l$ is $2x + 5y = 2 \cdot -6 + 5 \cdot -2$.

$l$: $2x + 5y = -22$.

**Voorbeeld 2**

Geef een vectorvoorstelling van de lijn $m$ met vergelijking $x - 3y = 4$.

**Oplossing**

$\vec{n}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ dus een richtingsvector van $m$ is $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

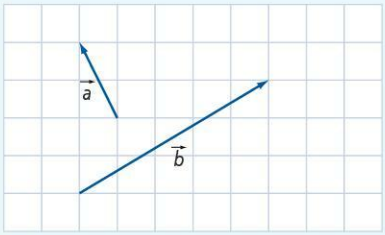
Het punt $(4, 0)$ ligt op $m$, dus een vectorvoorstelling van $m$ is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**S10** **a** Stel een vectorvoorstelling op van $l$: $3x + 5y = 2$.

**b** Stel een vergelijking op van $m$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

**T1** Gegeven zijn de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$.




**a** Teken de vector $-2\vec{b}$.

**b** Teken de vector $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

**c** Teken de vector $2\vec{a} - \vec{b}$.

**T2** Gegeven zijn de vectoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$.

**a** Bereken de kentallen van de vectoren $\vec{v} + 3\vec{w}$ en $2\vec{v} - \vec{w}$.

**b** Bereken $|\vec{v} + 3\vec{w}|$ en $|2\vec{v} - \vec{w}|$.

**c** De vector $2\vec{v} - 3\vec{w}$ wordt ontbonden in vectoren evenwijdig aan de $x$-as en de $y$-as.
Geef de kentallen van deze vectoren.

**T3** **a** Teken een lijnstuk $AB$ met lengte 8 cm.

**b** In $A$ bevindt zich een massa met grootte 9 en in $B$ bevindt zich een massa met grootte 3.
Bereken en teken de positie van het zwaartepunt $Z$.

**T4** In de punten $A(-6, 0)$, $B(6, 3)$, $C(0, -4)$ en $D(-2, 10)$ bevinden zich vier puntmassa's van achtereenvolgens 5, 10, 20, 15.

**a** Bereken de coördinaten van het zwaartepunt $Z$.

**b** In punt $E(p, q)$ bevindt zich een puntmassa van 15.
Het zwaartepunt van de puntmassa's in $A$, $B$ en $E$ is het punt $(2, 0)$.
Bereken de coördinaten van $E$.

**T5** Gegeven is $\triangle ABC$ met $A(-1, -2)$, $B(6, -1)$ en $C(1, 4)$.

**a** Bereken exact de lengte van de zijden van $\triangle ABC$.

**b** Bereken de grootte van de hoeken van $\triangle ABC$.
Rond je antwoorden af op hele graden.


© Noordhoff Uitgevers bv

**T6** Stel een vergelijking op van de lijn.

**a** $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ **b** $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 5t \\ 2 + 8t \end{pmatrix}$

**T7** Geef een vectorvoorstelling van de lijn.

**a** $l : -x + 3y = 8$ **c** $n : y = -5$

**b** $m : y = -5x - 4$ **d** $k : x = 64$

**T8** Gegeven is lijn $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 - 5t \\ 8 - 2t \end{pmatrix}$ en punt $A(-3, 12)$.

**a** Bereken de coördinaten van de snijpunten van $l$ met de assen.

**b** Lijn $m$ gaat door $A$ en is evenwijdig met $l$.
Geef een vectorvoorstelling van $m$.

**c** Lijn $k$ gaat door $A$ en staat loodrecht op $l$.
Geef een vectorvoorstelling van $k$.

**T9** De hoekpunten van vierhoek $ABCD$ zijn $A(-4, -2)$, $B(6, -3)$, $C(4, 5)$ en $D(-3, 3)$. De punten $P$, $Q$, $R$ en $S$ zijn de middens van de zijden $AB$, $BC$, $CD$ en $DA$.

**a** Toon aan dat $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$.

**b** Wat voor vierhoek is vierhoek $PQRS$?

**T10** **a** Gegeven zijn de lijnen $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Toon aan dat $m$ de hoek van $l$ met de $x$-as middendoor deelt.

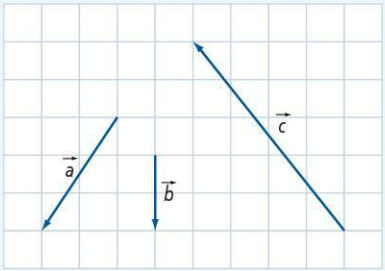
**b** Gegeven zijn de lijnen $p: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ en $q: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bereken de waarde van $t$ waarvoor $q$ de hoek van $p$ met de $x$-as middendoor deelt.

© Noordhoff Uitgevers bv

### Je kunt vectoren optellen.

**E1** Gegeven zijn de vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$.




**a** Teken de vector $\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a}$.

**b** Teken de vector $3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$.

### Je kunt met kentallen rekenen.

**E2** Gegeven zijn de punten $P(2, 6)$ en $Q(-8, 0)$.

**a** Bereken de kentallen en de lengte van de vector $-\frac{1}{2}\vec{p} + 1\frac{1}{2}\vec{q}$.

**b** Bereken de coördinaten van het midden van lijnstuk $PQ$.

### Je kunt de plaats van een zwaartepunt vinden.

**E3** De hoekpunten van een vierhoek $ABCD$ hebben de coördinaten $A(-1, 30)$, $B(3, 31)$, $C(4, 35)$ en $D(0, 34)$.

**a** In de vier hoekpunten bevinden zich gelijke puntmassa's. Bereken hiervan de coördinaten van het zwaartepunt $Z$.

**b** Nu bevinden zich in de punten $A$ en $C$ puntmassa's van 3 en 10.
Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van deze twee puntmassa's.

### Je kunt de hoek tussen twee vectoren berekenen.

**E4** Gegeven zijn de punten $A(-3, -2)$, $B(8, 3)$ en $C(-1, 4)$.

**a** Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AC}$.

**b** Bereken de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CB}$ in hele graden.

**c** Onderzoek of de vector $\vec{p} = \begin{pmatrix} 45 \\ -99 \end{pmatrix}$ loodrecht staat op $\overrightarrow{AB}$.

### Je kunt een vectorvoorstelling van een lijn door twee gegeven punten opstellen.

**E5** Deze opdracht gaat over de punten $A$, $B$ en $C$ van opdracht E4.

**a** Stel een vectorvoorstelling op van de lijn door $B$ en $C$.

**b** Stel een vectorvoorstelling op van lijn $l$ die door $A$ en het midden $M$ van lijnstuk $BC$ gaat.


© Noordhoff Uitgevers bv

**Je kunt een vectorvoorstelling van een lijn omzetten in een vergelijking en omgekeerd.**

**E6** Gegeven zijn de lijnen $l$: $2x - 7y = 4$ en $m$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 5t \\ 6 - t \end{pmatrix}$.

**a** Stel een vectorvoorstelling op van lijn $l$.
**b** Stel een vergelijking op van lijn $m$.
**c** Stel een vectorvoorstelling en een vergelijking op van de lijn door $P(2, 1)$ die loodrecht staat op lijn $m$.

**E7** **a** Teken in een assenstelsel $\triangle OAB$ met $A(4, 1)$ en $B(2, 4)$.
**b** Bereken de hoeken van $\triangle OAB$ in graden nauwkeurig.

**E8** Gegeven zijn de punten $A(-2, 1)$, $B(4, -1)$ en $P(p, 3)$.

Bereken voor welke waarden van $p$ de vectoren $\overrightarrow{AP}$ en $\overrightarrow{BP}$ loodrecht op elkaar staan.

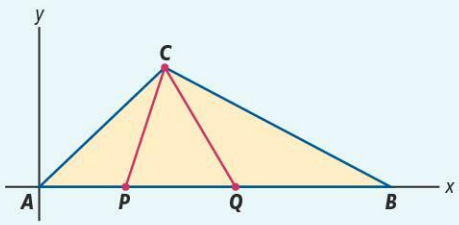
**E9** Gegeven is vierhoek $ABCD$ met $A(4, 0)$, $B(5, 6)$, $C(0, 3)$ en $D(-2, 0)$. In de punten $A$, $B$ en $C$ bevinden zich puntmassa's van achtereenvolgens 2, 4 en 6.

**a** Bereken exact de grootte van de puntmassa in punt $D$ zodat de $y$-coördinaat van het zwaartepunt van deze vier puntmassa's gelijk is aan 1.
**b** Bereken de $x$-coördinaat van het zwaartepunt.

**E10** Gegeven is $\triangle ABC$ met $A(0, 0)$, $B(224, 0)$ en $C(80, 60)$.

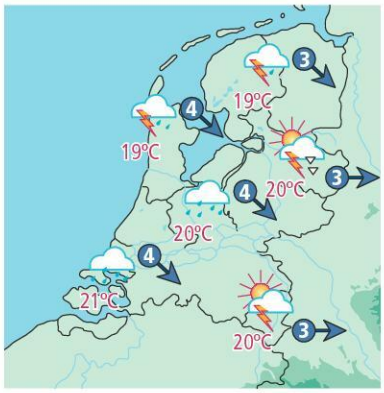
**a** Op zijde $AB$ liggen de punten $P(p, 0)$ en $Q(q, 0)$, zodat $\angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CQ}) = \angle(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CB}) = 90°$.
Bereken $p$ en $q$.

**b** Bij meting lijkt $\angle(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CQ}) = 60°$.
Onderzoek of dat klopt.

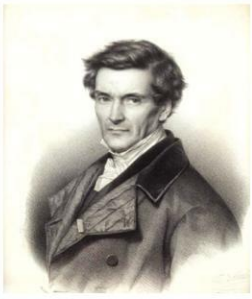


## Windrichting

Vectoren worden vaak gebruikt in kaartjes met de weersvoorspelling. Wind wordt veroorzaakt doordat luchtdeeltjes zich bewegen van plaatsen met een hoge luchtdruk naar plaatsen met een lage luchtdruk.
C.H.D. Buys Ballot (1817-1890) was de eerste die dit met metingen aantoonde. Buys Ballot was een veelzijdige wetenschapper, die zich bezig hield met onder andere natuurkunde, wiskunde en meteorologie. Hij is de oprichter van het KNMI.



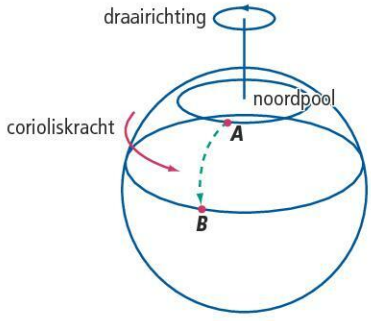
Buys Ballot

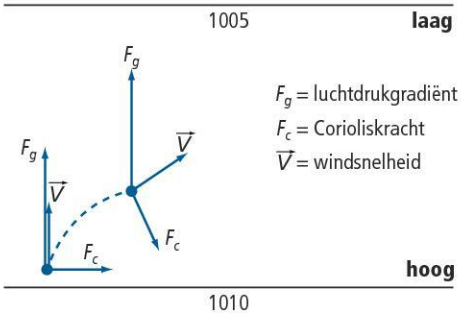


De Coriolis

### Hoe ontstaat wind en windrichting?

Luchtdrukverschillen veroorzaken een kracht, die luchtdrukgradiënt wordt genoemd. Deze kracht brengt de luchtmassa in beweging van plaatsen met een hoge luchtdruk naar die met een lage. De draaiing van de aarde speelt echter ook een rol met betrekking tot de windrichting. De kracht die daarbij een rol speelt heet Corioliskracht.
Zowel punt *A* als punt *B* draaien in 24 uur rond de aarde. Als je van *A* naar *B* gaat neemt de omloopsnelheid toe en ben je aan het versnellen. De kracht die deze versnelling geeft heet de Corioliskracht, genoemd naar G.G de Coriolis (1792-1843). Deze kracht is alleen van toepassing op vaste punten van het aardoppervlak. Op punten erboven heeft deze kracht geen invloed.
Zodra de lucht beweegt, treedt de Corioliskracht op. De wind die vanuit een gebied met hoge luchtdruk waait naar een gebied met lage luchtdruk wijkt op het noordelijk halfrond af naar rechts en op het zuidelijk halfrond naar links. Dit geldt voor een waarnemer op aarde.
De Corioliskracht staat altijd loodrecht op de windrichting en buigt deze af.




### Opdracht

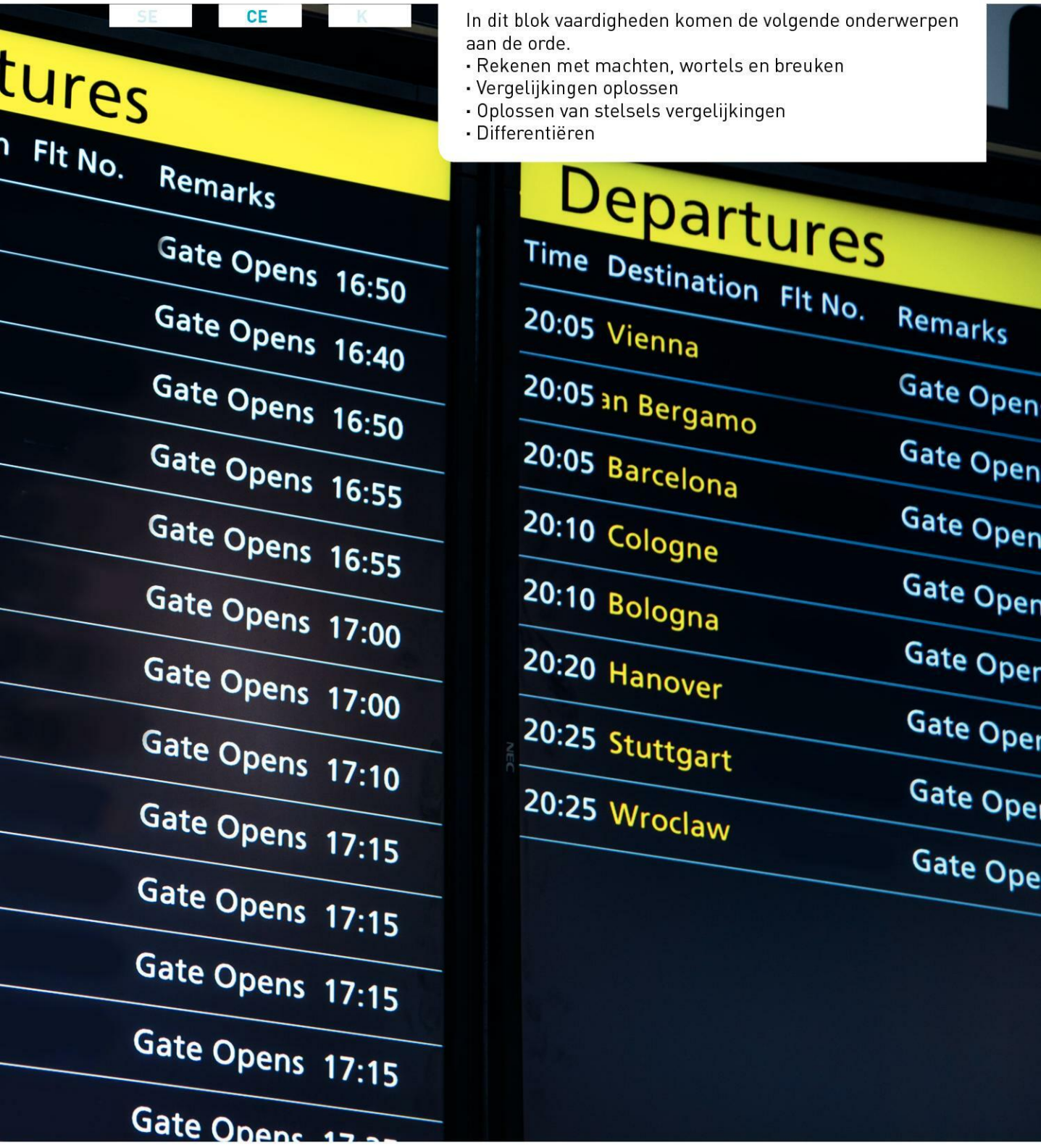
**a** Wat zal de windrichting op den duur worden?
**b** Welke richting en onderlinge sterkte hebben de luchtdrukgradient en de Corioliskracht dan?


© Noordhoff Uitgevers bv

# Vaardigheden 4

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Rekenen met machten, wortels en breuken
- Vergelijkingen oplossen
- Oplossen van stelsels vergelijkingen
- Differentiëren




© Noordhoff Uitgevers bv

## Rekenen met machten, wortels en breuken

**1** Schrijf als één macht van $x$.

**a** $x^3 \cdot (x^2)^4$

**b** $(x\sqrt{x})^3$

**c** $\left(x \cdot x^2 \sqrt[3]{x^2}\right)^3$

**d** $((x^2)^3)^4$

**e** $(x^{-2} \cdot \sqrt{x})^{-3}$

**f** $\dfrac{x\sqrt{x}}{x^3}$

**2** Bereken.

**a** $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$

**b** $5\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{2}$

**c** $\left(3\sqrt{2}\right)^2$

**d** $\left(-2\sqrt{5}\right)^4$

**e** $4\sqrt{7} + 3\sqrt{7}$

**f** $8\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} + 7\sqrt{6}$

**g** $\left(\sqrt{6}\right)^2 + 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

**h** $\left(5\sqrt{6}\right)^3$

**3** Vereenvoudig de wortelvormen.

**a** $\sqrt{200} = \sqrt{\ldots} \cdot \sqrt{\ldots} = \ldots$

**b** $\sqrt{63}$

**c** $\sqrt{108}$

**d** $\sqrt{20} + \sqrt{45}$

**e** $\frac{1}{4}\sqrt{32}$

**f** $\frac{1}{5}\left(\sqrt{40} + \sqrt{90}\right)$

**g** $\sqrt{75} - \sqrt{48}$

**h** $\sqrt{98}$

**4** Bereken en schrijf het antwoord als één breuk. Vereenvoudig indien mogelijk het antwoord.

**a** $\dfrac{8}{3a} + \dfrac{2}{3}$

**b** $\dfrac{13}{2p} - \dfrac{7}{3p}$

**c** $\dfrac{a}{3b} + \dfrac{4}{5b}$

**d** $\dfrac{11}{4a^2} - \dfrac{4}{2a}$

**e** $\dfrac{d^2}{4} \cdot \dfrac{7}{d}$

**f** $\dfrac{2a}{7} \cdot \dfrac{21}{8a}$

**g** $\dfrac{3a^2}{2b} \cdot \dfrac{4b}{7a}$

**h** $\dfrac{2a}{5} \cdot \dfrac{7}{4a^3}$

## Vergelijkingen oplossen

**5** Los exact op.

**a** $3\left(2\frac{1}{4}p - 4\right) = 5p - 3$

**b** $-10\frac{1}{2}s = 7 - (13 - 9s)$

**c** $\frac{1}{2}m - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{4}m + 2\frac{1}{4}$

**d** $3\frac{1}{2} - 4(2x - 8) = 13$


© Noordhoff Uitgevers bv

**Theorie**

Kwadratische vergelijkingen los je meestal op met ontbinden, en als dat niet lukt met de *abc*-formule. Soms is er een handigere manier door gebruik te maken van de regels hiernaast. Vaak is het nodig dat je de vergelijking eerst op nul herleidt.
Als ontbinden in factoren niet lukt kun je de *abc*-formule $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ gebruiken.

$A \cdot B = 0$ dus $A = 0$ of $B = 0$

$A \cdot B = A \cdot C$ dus $A = 0$ of $B = C$

$A^2 = B^2$ dus $A = B$ of $A = -B$

**6** Los exact op.

**a** $(x - 6)(2x + 7) = 0$

**b** $(5p + 10)(p - 3) = 18(p - 3)$

**c** $(8a + 1)^2 = 81$

**d** $2x^2 + 5x + 2 = 0$

**e** $3x^2 + 3x = 5x + 4$

**f** $(x + 4)\left(\frac{1}{2}x - 7\right) = \left(\frac{1}{2}x - 7\right)(6 - x)$

**g** $15 - (3 - a)^2 = 6$

**h** $x^2 = 11x$

**i** $(2x - 3)^2 = x$

**j** $(7 - s)^2 = 9s^2$

**Theorie**

Je kunt een exponentiële vergelijking exact oplossen door, na vereenvoudiging, het linker- en rechterlid van de vergelijking te schrijven als macht met hetzelfde grondtal. In andere gevallen gebruik je logaritmen.

**Voorbeeld**

Los op $\frac{1}{9} \cdot 3^{x-5} = 81 \cdot (\sqrt{3})^x$.

**Oplossing**

$3^{-2} \cdot 3^{x-5} = 3^4 \cdot (3^{\frac{1}{2}})^x$

$3^{x-7} = 3^4 \cdot 3^{\frac{1}{2}x}$

$3^{x-7} = 3^{4+\frac{1}{2}x}$

$x - 7 = 4 + \frac{1}{2}x$

$\frac{1}{2}x = 11$ dus $x = 22$

**7** Los exact op.

**a** $2^x = 8\sqrt{2}$

**b** $\frac{1}{4} \cdot 3^x = 25$

**c** $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 8 \cdot 2^x$

**d** $25 \cdot 5^{4x-1} = 5\sqrt{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$

**e** $7^{x+2} = 500$

**f** $10 \cdot 0{,}1^{x+10} = 0{,}1 \cdot \left(\sqrt[5]{100}\right)^x$

**g** $15 \cdot 3^{7x+9} = 5 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{8-x}$

**h** $21 \cdot 9^{6-x} = 63 \cdot 27^{\frac{1}{2}x+4}$

**Theorie**

De machtsvergelijking $x^a = c$ kan twee, één of geen oplossingen hebben. Bij het oplossen van de vergelijking $x^a = c$ verhef je linker- en rechterlid tot dezelfde macht zodat $x = c^{\frac{1}{a}}$ ontstaat.

**Voorbeeld**

Los op $x^{\frac{3}{4}} = 7$.

**Oplossing**

$\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{3}} = (7)^{\frac{4}{3}}$

$x = 7^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{7^4} \approx 13{,}39$

© Noordhoff Uitgevers bv

**8** Los exact op. Geef ook een benadering in twee decimalen.

**a** $a^3 = 100$

**b** $-2a^2 = -34$

**c** $a^4 - 12 = 9$

**d** $8 + 3a^{\frac{1}{3}} = 14$

**e** $1{,}5a^4 = -10$

**f** $0{,}2a^5 = -10$

**g** $15 - 3p^{\frac{2}{3}} = 9$

**h** $8 + 0{,}5x^{0{,}25} = 9$

**Theorie**

Bij het oplossen van wortelvergelijkingen maak je, na het isoleren van de wortel, gebruik van de regel: als $\sqrt{A} = B$ dan is $A = B^2$.
Controleer altijd een mogelijke oplossing door deze in te vullen in de oorspronkelijke vergelijking.

**9** Los de vergelijking op het blaadje verder op en controleer of alle oplossingen voldoen.

$1 + \sqrt{x+4} = 2x - 1$

$\sqrt{x+4} = 2x - 2$

$(\sqrt{x+4})^2 = (2x-2)^2$

$x + 4 = \ldots$

$\ldots$

**10** Los exact op.

**a** $\sqrt{x-8} = 5$

**b** $\sqrt{2a+3} = 5$

**c** $3 + \sqrt{2p+4} = 10$

**d** $3 + \sqrt{x} = x - 3$

**e** $2 + \sqrt{q-2} = 6$

**f** $\sqrt{6a-5} = a$

**g** $\sqrt{3d+1} = 2 + d$

**h** $6x + \sqrt{x} = 7x - 20$

**Theorie**

Bij het oplossen van gebroken vergelijkingen maak je gebruik van de regels:
Uit $\frac{A}{B} = C$ volgt $A = B \cdot C$ mits $B \neq 0$.
Uit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ volgt $A \cdot D = B \cdot C$ mits $B \neq 0$ en $D \neq 0$.

**11** Los de gebroken vergelijking op het blaadje verder op.

$\frac{4}{2q-1} + 3 = 11 - 4q$

$\frac{4}{2q-1} = 8 - 4q$

$4 = (8 - 4q)(2q - 1)$

$4 = 16q - 8 - 8q^2 + 4q$

$\ldots$

**12** Los exact op.

**a** $\frac{1}{h+4} + 8 = 8\frac{1}{2}$

**b** $\frac{7}{2a-3} = 2a + 3$

**c** $\frac{3x^2}{x+1} = x$

**d** $\frac{p}{p+3} = \frac{1}{2p}$


© Noordhoff Uitgevers bv

**13** Los exact op het interval $[0, 3\pi]$ op.

**a** $\sin(2x) = 1$

**b** $\cos(3x) = 1$

**c** $2\cos(3x) = 1$

**d** $2\sin(\pi x) = \sqrt{2}$

## Oplossen van stelsels vergelijkingen

**Theorie**

Je kunt stelsels vergelijkingen oplossen door de vergelijkingen zo te herleiden dat je ze aan elkaar gelijk kunt stellen. Stelsels vergelijkingen zijn ook op te lossen door gebruik te maken van substitutie of van eliminatie.

**14** Los het stelsel $\begin{cases} \frac{1}{3}x + 2y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$ op met behulp van elimineren.

**15** Los de stelsels vergelijkingen op. Kies een geschikte methode.

**a** $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ y = -4x + 3 \end{cases}$

**b** $\begin{cases} y + 3x = 0 \\ 5x + y = 4 \end{cases}$

**c** $\begin{cases} 4p - q = 10 \\ 13q - 7p = 5 \end{cases}$

**d** $\begin{cases} 8a - 12 = 3b \\ 6b - 7a + 2 = 0 \end{cases}$

**e** $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x + y = 6 \end{cases}$

**f** $\begin{cases} 3b + 7a = 18 \\ a - 4b = 7 \end{cases}$

## Differentiëren

**16** Differentieer de functies.

**a** $f(x) = 4x^2 - 6x + 13$

**b** $g(x) = (3x + 7)(8 - x)$

**c** $h(x) = (2x + 7)^2$

**d** $k(x) = 4x^3(x^2 + 7)$

**17** Bereken de helling van de grafiek in het gegeven punt.

**a** $f(x) = 3x^2 + 6$ en het punt $(1, 9)$

**b** $g(x) = 2x^3$ en het punt $(-2, -16)$

**c** $h(x) = 5x(x^2 - x^4)$ en het punt $(1, 0)$

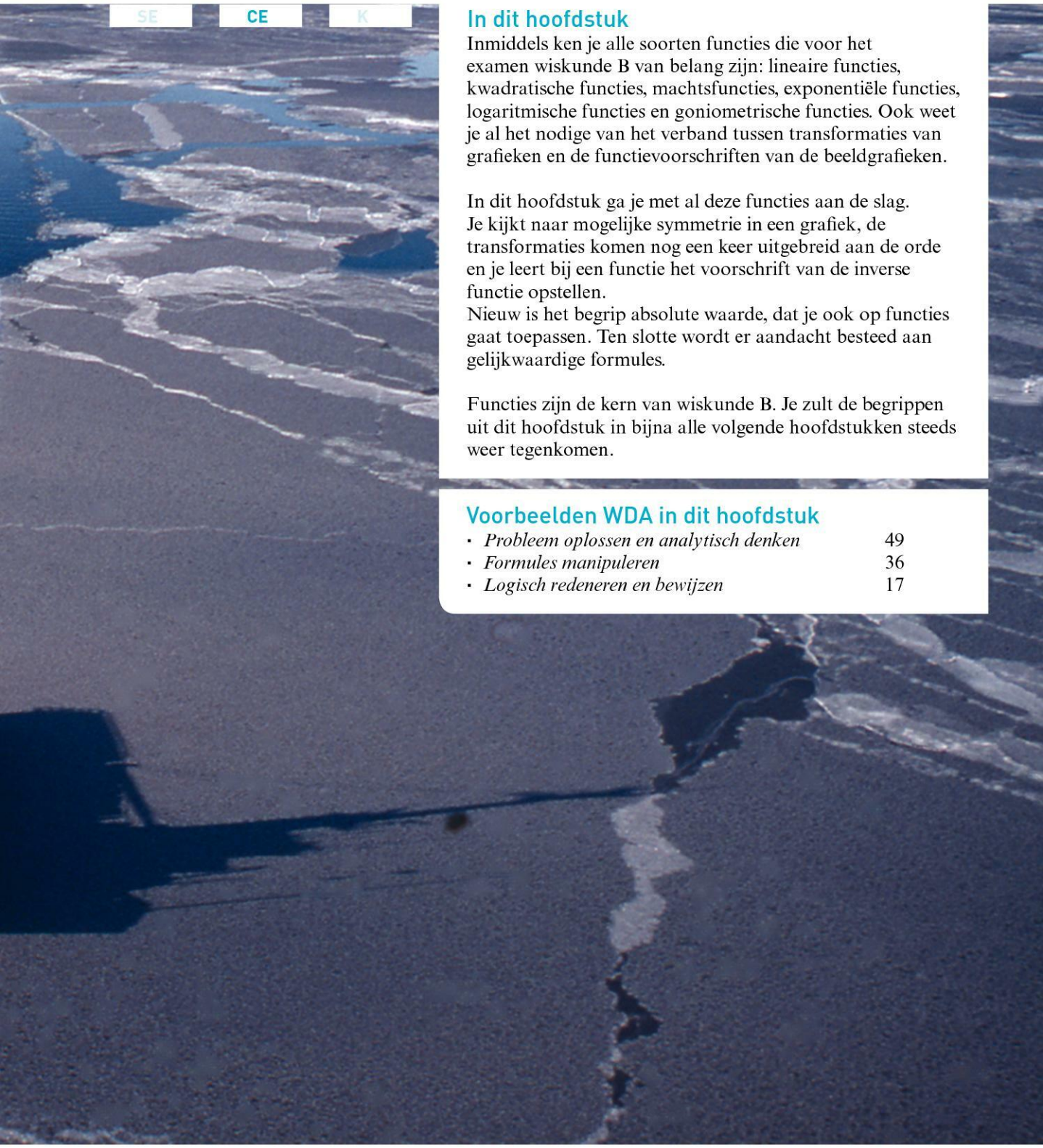
**18** De grafiek van de functie $f(x) = x^3 + ax^2 + x$ heeft helling $-1$ in het punt waarvoor $x = 2$.
Bereken de waarde van $a$.

© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

# Functies bewerken 9

SE CE K



## In dit hoofdstuk

Inmiddels ken je alle soorten functies die voor het examen wiskunde B van belang zijn: lineaire functies, kwadratische functies, machtsfuncties, exponentiële functies, logaritmische functies en goniometrische functies. Ook weet je al het nodige van het verband tussen transformaties van grafieken en de functievoorschriften van de beeldgrafieken.

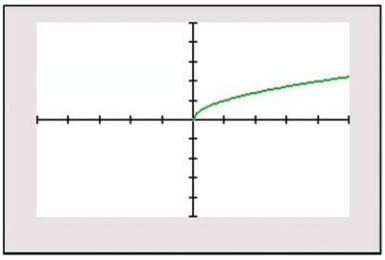
In dit hoofdstuk ga je met al deze functies aan de slag. Je kijkt naar mogelijke symmetrie in een grafiek, de transformaties komen nog een keer uitgebreid aan de orde en je leert bij een functie het voorschrift van de inverse functie opstellen.
Nieuw is het begrip absolute waarde, dat je ook op functies gaat toepassen. Ten slotte wordt er aandacht besteed aan gelijkwaardige formules.

Functies zijn de kern van wiskunde B. Je zult de begrippen uit dit hoofdstuk in bijna alle volgende hoofdstukken steeds weer tegenkomen.

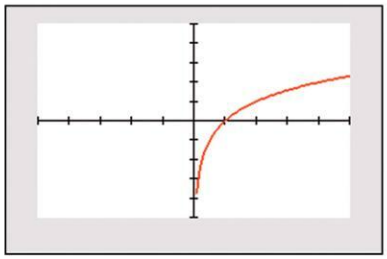
## Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk


- *Probleem oplossen en analytisch denken* 49
- *Formules manipuleren* 36
- *Logisch redeneren en bewijzen* 17

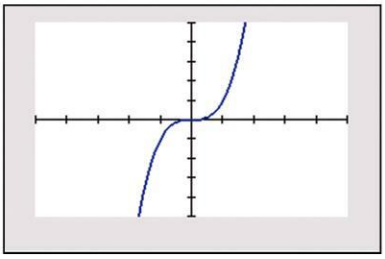

© Noordhoff Uitgevers bv



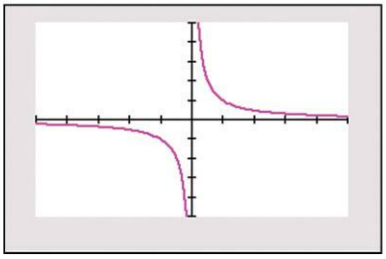
A



C



B



D

**V1** Gegeven zijn de functies $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = \cos(x)$,

$k(x) = {}^2\log(x)$, $m(x) = \frac{1}{x}$, $n(x) = \sin(x)$, $p(x) = x^2$, $q(x) = x^3$ en $r(x) = 1$.

Van vier functies is de grafiek geplot. De vensterinstelling is zo dat beide assen lopen van $-5$ tot 5.
Geef voor elke plot aan welke van de gegeven functies hierbij hoort.

**V2** Gegeven zijn de functies $f(x) = g^x$ en $h(x) = {}^g\log(x)$.

**a** Neem $g = 2$ en teken de grafieken van $f$ en $h$ in één assenstelsel.

**b** Neem $g = \frac{1}{3}$ en teken opnieuw de grafieken van $f$ en $h$.

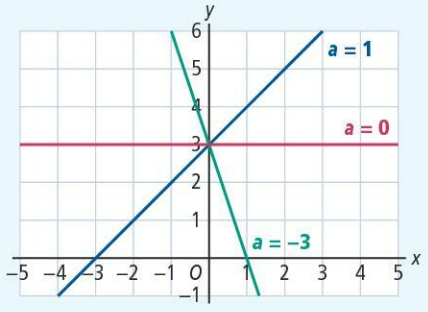
**c** Voor welke waarden van $g$ zijn $f$ en $h$ stijgend?
En voor welke waarden van $g$ zijn $f$ en $h$ dalend?

**d** Welk verband is er tussen de grafieken van $f$ en $h$?

**e** Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van $f$?
En welke lijn is de asymptoot van de grafiek van $h$?

**Theorie**

Het functievoorschrift $f_a(x) = ax + 3$ hoort bij een familie van functies.
Bij elke waarde van $a$ hoort een functie en een grafiek.
Getekend zijn de grafieken van $f_0$, $f_1$ en $f_{-3}$. In het functievoorschrift is $x$ de variabele; $a$ heet een parameter.





© Noordhoff Uitgevers bv

**V3** Gegeven is de familie van functies $g_a(x) = \dfrac{12}{ax - 6}$

**a** De grafiek van $g_a$ gaat door het punt $(8, 2)$.
Bereken $a$.

**b** De grafiek van $g_a$ heeft een verticale asymptoot $x = 1\frac{1}{2}$.
Bereken $a$.

**c** Welke lijn is voor elke waarde van $a \neq 0$ een asymptoot van de grafiek van $g_a$?

**V4** Gegeven is de familie van functies $f_n(x) = x^n$ met $n$ geheel.

**a** Plot de grafiek van $f_n$ voor $n = 5$ en voor $n = -2$ en geef van beide functies het domein en het bereik.

**b** Voor welke waarde van $n$ gaat de grafiek van $f_n$ door het punt $\left(2, \frac{1}{8}\right)$?

**c** Welk punt ligt voor elke waarde van $n$ op de grafiek van $f_n$?

**d** Voor welke positieve waarden van $n$ ligt de grafiek van $f_n$ nergens onder de $x$-as?

**V5** Gegeven is de familie van functies $h_p(x) = x^3 + px + 8$.

**a** De grafiek van $h_p$ gaat door het punt $(4, 20)$.
Bereken $p$.

**b** In het punt op de grafiek met $x = -2$ is de helling van de grafiek gelijk aan $-3$.
Bereken $p$.

**V6** Gegeven is de functie $f(x) = 3\sin(x - 2) + 5$.
Geef het bereik van $f$.

**V7** Bepaal van elke functie het domein en het bereik.

**a** $f(x) = 3(x - 2)^2 + 5$

**b** $f(x) = 3\sqrt{x - 2} + 5$

**c** $f(x) = \dfrac{3}{x - 2} + 5$

**d** $f(x) = 3^{x-2} + 5$

**e** $f(x) = {}^3\log(x - 2) + 5$

© Noordhoff Uitgevers bv

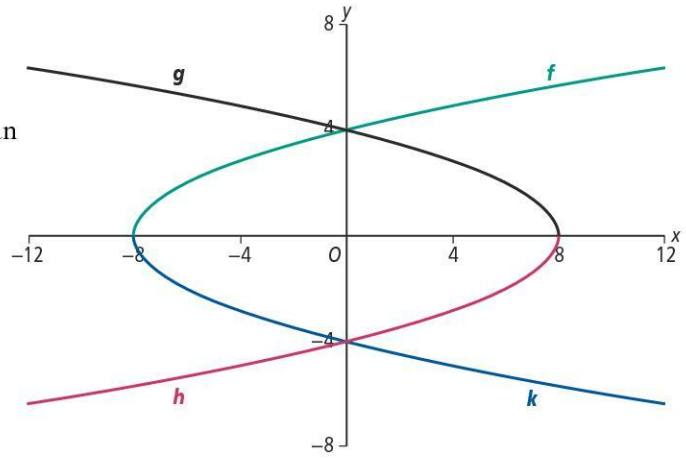
# 9.1 Transformaties

**Je leert**
- hoe je na een transformatie het functievoorschrift opstelt bij de beeldgrafiek

**Leerroutes**
- ondersteunend: 1—2—3—O4—5—6—7—O8—9
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7—8—9
- uitdagend: 1—2—4—5—6—7—8—9—U1

In de figuur zie je de grafieken van de functies $f(x) = \sqrt{16 + 2x}$, $g(x) = \sqrt{16 - 2x}$, $h(x) = -\sqrt{16 - 2x}$ en $k(x) = -\sqrt{16 + 2x}$.

- Hoe zijn de grafieken van $g$, $h$ en $k$ ontstaan uit de grafiek van $f$?

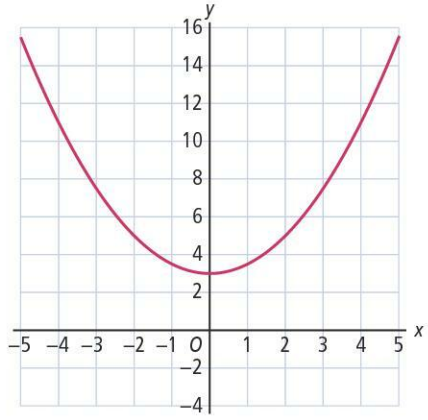



**1** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$.

**a** De grafiek van $f$ wordt 5 omlaag verschoven. Daardoor ontstaat de grafiek van de functie $g$. Stel het functievoorschrift op van $g$.

**b** De grafiek van $f$ wordt 2 naar rechts verschoven. Het resultaat is de grafiek van de functie $h$. Stel het functievoorschrift op van $h$.

**c** Door de grafiek van $f$ ten opzichte van de $x$-as met 4 te vermenigvuldigen ontstaat de grafiek van de functie $j$. Stel het functievoorschrift op van $j$.




**2** Gegeven is de functie $f(x) = 9 - x^2$.
Door de grafiek van $f$ met 2 te vermenigvuldigen ten opzichte van de $y$-as ontstaat de grafiek van een functie $g$.

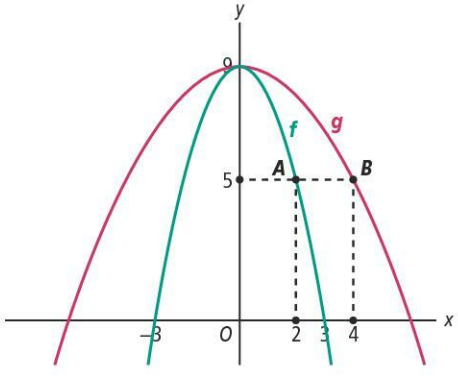
**a** In welke punten snijdt de grafiek van $f$ de $x$-as?

**b** In welke punten snijdt de grafiek van $g$ de $x$-as?

**c** Het punt $A(2, 5)$ ligt op de grafiek van $f$. Het beeld van $A$ is het punt $B$ op de grafiek van $g$.
Vul in: $g(4) = f(2)$, dus $g(4) = \ldots$.

**d** Vul in: $g(a) = f(\ldots)$, dus $g(a) = \ldots$.

**e** Stel het functievoorschrift op van $g$.





© Noordhoff Uitgevers bv

**Theorie**

Pas je op de grafiek van een functie $f$ een transformatie toe, zoals een verschuiving (translatie), een spiegeling of een vermenigvuldiging, dan heet de grafiek die zo ontstaat, de beeldgrafiek.
Bij een verticale translatie over een afstand $d$ omhoog ontstaat de grafiek van $g(x) = f(x) + d$.
Bij een horizontale translatie over een afstand $c$ naar rechts ontstaat de grafiek van $g(x) = f(x - c)$.
Bij een vermenigvuldiging ten opzichte van de $x$-as met factor $a$ ontstaat de grafiek van $g(x) = a \cdot f(x)$.
Bij een vermenigvuldiging ten opzichte van de $y$-as met factor $b$ ontstaat de grafiek van $g(x) = f\left(\frac{1}{b} \cdot x\right)$

**Voorbeeld**

Stel het functievoorschrift op van de grafiek die ontstaat door de grafiek van de functie $f(x) = 2 + {}^3\log(x)$

**a** 7 naar links te verschuiven.

**b** ten opzichte van de $y$-as met 4 te vermenigvuldigen.

**Oplossing**

**a** $g(x) = f(x + 7)$

$g(x) = 2 + {}^3\log(x + 7)$

**b** $h(x) = f(\frac{1}{4} \cdot x)$

$h(x) = 2 + {}^3\log(\frac{1}{4}x)$

**3** H

Gegeven is de functie $f(x) = 3^x$.
Stel het functievoorschrift op van de beeldgrafiek bij toepassing van de aangegeven transformaties.

**a** Een vermenigvuldiging met $-2$ ten opzichte van de $x$-as en daarna een verschuiving van 4 naar links.

**b** Een vermenigvuldiging met $-\frac{1}{2}$ ten opzichte van de $y$-as en daarna een verschuiving van 4 omhoog.

Ondersteunende route → maak opdracht 04

**4**

De grafiek van de functie $f(x) = 4x + \sqrt{x}$ wordt 2 naar links verschoven.
Leg uit wat het juiste functievoorschrift van de beeldgrafiek is.

Kies uit $g(x) = 4(x + 2) + \sqrt{x}$, $g(x) = 4(x + 2) + \sqrt{x + 2}$ en $g(x) = 4x + \sqrt{x + 2}$.

**5**

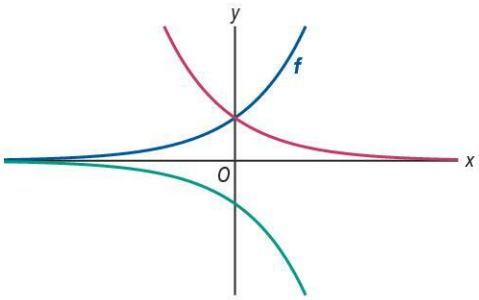
Gegeven is de functie $f(x) = 2^x$.

**a** De grafiek van $f$ wordt gespiegeld in de $x$-as. Met welke vermenigvuldiging krijg je dezelfde beeldgrafiek?

**b** Stel het functievoorschrift op bij de beeldgrafiek.

**c** De grafiek van $f$ wordt gespiegeld in de $y$-as. Met welke vermenigvuldiging krijg je dezelfde beeldgrafiek?

**d** Stel het functievoorschrift op bij de beeldgrafiek.




© Noordhoff Uitgevers bv

**Theorie**

Als de grafiek van een functie $f$ wordt gespiegeld in de $x$-as, ontstaat de grafiek van de functie $g(x) = -f(x)$.
Als de grafiek van een functie $f$ wordt gespiegeld in de $y$-as, ontstaat de grafiek van de functie $g(x) = f(-x)$.

**Voorbeeld**

Stel het functievoorschrift op van de beeldgrafiek van $f(x) = x^2 - 3x$ bij spiegeling in de $y$-as.

**Oplossing**

$g(x) = f(-x) = (-x)^2 - 3(-x)$

$g(x) = x^2 + 3x$

**6** De grafiek van de functie $f(x) = x^2 + 2x$ wordt gespiegeld in de $x$-as en daarna 5 naar rechts verschoven.
Stel het functievoorschrift op van de beeldgrafiek.

**7** H Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x}$.

**a** De grafiek van $g$ ontstaat door de grafiek van $f$ te spiegelen in de $y$-as en daarna de translatie 3 naar rechts toe te passen. Stel het functievoorschrift op van $g$.

**b** Krijg je hetzelfde antwoord als de volgorde van de twee transformaties wordt veranderd? Leg je antwoord uit.

Ondersteunende route → maak opdracht O8

**8** Gegeven is de functie $f(x) = \sin(2x + 5)$.

**a** Alya beweert dat je de grafiek van $f$ krijgt als je de grafiek van $g(x) = \sin(2x)$ over een afstand 5 naar links verschuift. Waarom is dit niet juist?

**b** Door welke transformaties ontstaat de grafiek van $f$ uit die van $h(x) = \sin(x)$? Vermeld ook de volgorde waarin de transformaties moeten worden toegepast.

**9** H Geef aan door welke transformaties de grafiek van de functie $g$ kan ontstaan uit de grafiek van de functie $f$. Geef aan in welke volgorde deze transformaties moeten worden toegepast.

**a** $f(x) = 2^x$ en $g(x) = 3 \cdot 2^{\frac{1}{2}x}$

**b** $f(x) = \log(x)$ en $g(x) = 8 + \log(x - 6)$

**c** $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = 3\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\pi\right)$

Uitdagende route → maak opdracht U1


© Noordhoff Uitgevers bv

## Ondersteunende opdrachten

**O4** Gegeven is de functie $f(x) = x \cdot 2^x$.
Als op de grafiek van $f$ een verschuiving van 3 naar rechts wordt toegepast, is de beeldgrafiek de grafiek van een functie $g$.

**a** Plot de grafieken van $f$ en $g(x) = (x - 3) \cdot 2^x$.
Is $g(x)$ het functievoorschrift bij de beeldgrafiek?

**b** Plot de grafieken van $f$ en $g(x) = x \cdot 2^{x-3}$.
Is $g(x)$ het functievoorschrift bij de beeldgrafiek?

**c** Plot de grafieken $f$ en $g(x) = (x - 3) \cdot 2^{x-3}$.
Is $g(x)$ het functievoorschrift bij de beeldgrafiek?

**d** Vul in: bij een verschuiving van 3 naar rechts van de grafiek van $f$, geldt $g(x) = f(\ldots)$. Dan moet je *elke* $x$ in het functievoorschrift van $f$ vervangen door …

**e** De grafiek van $f$ wordt 5 naar links verschoven.
Stel het functievoorschrift op bij de beeldgrafiek.

**O8** Gegeven is de functie $f(x) = \log(3x)$.
Als op de grafiek van $f$ een verschuiving van 4 naar rechts wordt toegepast, is de beeldgrafiek de grafiek van een functie $g$.

**a** Plot de grafieken van $f$ en $g(x) = \log(3x - 4)$.
Is het functievoorschrift van $g$ juist? Geef een verklaring.

**b** Plot de grafieken van $f$ en $g(x) = \log(3x - 12)$.
Is het functievoorschrift van $g$ juist? Geef een verklaring.

**c** De grafiek van de functie $h(x) = \log(3x + 30)$ is de beeldgrafiek bij een verschuiving van de grafiek van $f$.
Welke verschuiving is hier toegepast?

**d** Door welke transformaties ontstaat de grafiek van $h$ uit die van $k(x) = \log(x)$? Vermeld ook de volgorde waarin de transformaties moeten worden toegepast.

## Uitdagende opdrachten

**U1** Op de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{a}{x - b}$ worden achtereenvolgens de volgende transformaties toegepast:

- translatie 3 omhoog en 5 naar links,
- vermenigvuldiging ten opzichte van de $x$-as met 3 en
- vermenigvuldiging ten opzichte van de $y$-as met $\frac{1}{2}$.

Het resultaat is de grafiek van de functie $g(x) = 9\left(\dfrac{1}{x} + 1\right)$.
Bereken de waarde van $a$ en van $b$.

© Noordhoff Uitgevers bv

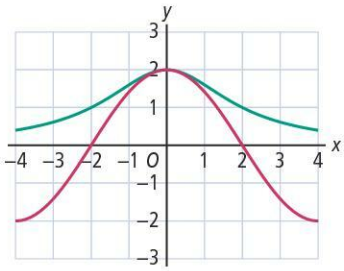
# 9.2 Symmetrie van grafieken

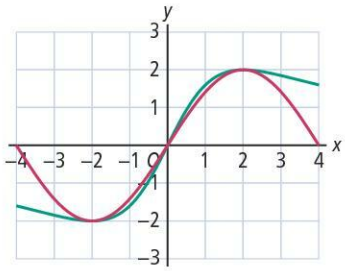
**Je leert**
- wat even en oneven functies zijn
- hoe je de symmetrie van een grafiek aantoont

**Leerroutes**
- ondersteunend: 10—O11—11—12—13—14—O15—16
- doorlopend: 10—11—12—13—14—15—16—17
- uitdagend: 10—11—12—14—15—16—17—U2

In beide assenstelsels zie je twee grafieken.
De grafieken horen bij de functies
$f(x) = \frac{8x}{x^2+4}$, $g(x) = \frac{8}{x^2+4}$,
$h(x) = 2\cos\left(\frac{1}{4}\pi x\right)$ en $k(x) = 2\sin\left(\frac{1}{4}\pi x\right)$.

- Van welke functies is de grafiek symmetrisch in de $y$-as?
- Welke symmetrie hebben de grafieken van de andere functies?



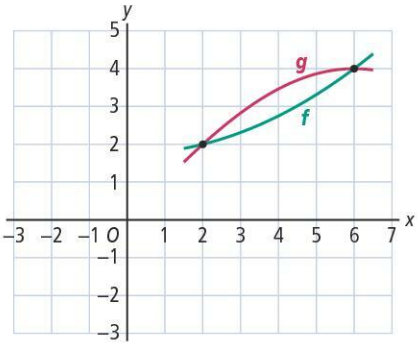

**10** Van de functie $f$ is gegeven dat $f(2) = 2$ en $f(6) = 4$.
De grafiek van $f$ is symmetrisch in de $y$-as.

**a** Bereken $f(-2)$ en $f(-6)$.

**b** Maak met een schets duidelijk dat voor elke waarde van $a$ uit het domein van $f$ geldt $f(-a) = f(a)$.

**c** Van de functie $g$ is gegeven dat $g(2) = 2$ en $g(6) = 4$.
De grafiek van $g$ is puntsymmetrisch in de oorsprong.
Bereken $g(-2)$ en $g(-6)$.

**d** Schets een grafiek die puntsymmetrisch is in de oorsprong.
Geef in de schets aan waarom voor elke waarde van $a$ geldt $g(-a) = -g(a)$.




**Theorie**

De grafiek van een functie $f$ is **symmetrisch in de $y$-as** als $f(-a) = f(a)$ voor elke waarde van $a$ uit het domein van $f$.
De grafiek van een functie $f$ is **puntsymmetrisch in (0, 0)** als $f(-a) = -f(a)$ voor elke waarde van $a$ uit het domein van $f$.


© Noordhoff Uitgevers bv

**Voorbeeld**

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^3}{x^2+4}$

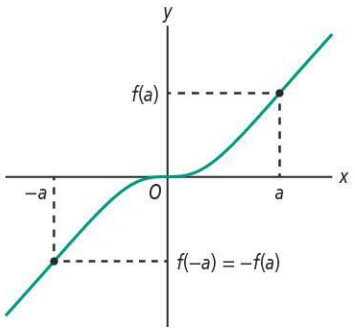
Toon aan dat de grafiek van $f$ puntsymmetrisch is in de oorsprong.

**Oplossing**

$f(a) = \frac{a^3}{a^2+4}$ en $f(-a) = \frac{(-a)^3}{(-a)^2+4} = \frac{-a^3}{a^2+4} = -\frac{a^3}{a^2+4}$,

dus $f(-a) = -f(a)$.

De grafiek van $f$ is puntsymmetrisch in de oorsprong.




Ondersteunende route → maak opdracht O11

**11** H

Plot van elke functie de grafiek en noteer of de grafiek symmetrisch is in de $y$-as, in de oorsprong of geen van beide. Toon bij de symmetrische grafieken de symmetrie aan door $f(a)$ te vergelijken met $f(-a)$.

**a** $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

**b** $f(x) = x^3 - 4x$

**c** $f(x) = x^4 - x$

**d** $f(x) = \frac{x^4 - 4x^2}{x^3}$

**12**

Gegeven is de machtsfunctie $f(x) = x^n$ met $n$ een geheel, positief getal.

**a** Laat zien dat voor $n = 6$ geldt $f(-a) = f(a)$.

**b** Laat zien dat voor $n = 7$ geldt $f(-a) = -f(a)$.

**c** Voor welke waarden van $n$ geldt $f(-a) = f(a)$? Is voor die waarden van $n$ de grafiek van $f$ lijnsymmetrisch of puntsymmetrisch?

**d** Voor welke waarden van $n$ geldt $f(-a) = -f(a)$? Welke symmetrie heeft de grafiek van $f$ voor die waarden van $n$?

**Theorie**

Voor $f(x) = x^n$, met $n$ even, geldt $f(-a) = f(a)$. Elke functie met deze eigenschap heet daarom een even functie.

Voor $f(x) = x^n$, met $n$ oneven, geldt $f(-a) = -f(a)$.

Elke functie met deze eigenschap heet een oneven functie.

**Voorbeeld**

De grafiek van $f(x) = \frac{x^3}{x^2+4}$ uit het voorbeeld hierboven is een oneven functie, want $f(-a) = -f(a)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

**13** Plot de grafiek en geef aan of de functie even of oneven is.

**a** $f(x) = x^5 - 5x^3$

**b** $f(x) = 6\sin^3(x)$

**c** $f(x) = \cos(x)$

**d** $f(x) = \dfrac{2^x - 1}{2^x + 1}$

**14** **a** Toon aan dat de grafiek van $f(x) = \sqrt[3]{x}$ puntsymmetrisch is in de oorsprong.

**b** Is $f$ een even functie of een oneven functie?

**c** Door welke verschuiving ontstaat de grafiek van $g(x) = \sqrt[3]{x} + 2$ uit de grafiek van $f$?

**d** Geef het punt van symmetrie van de grafiek van $g$.

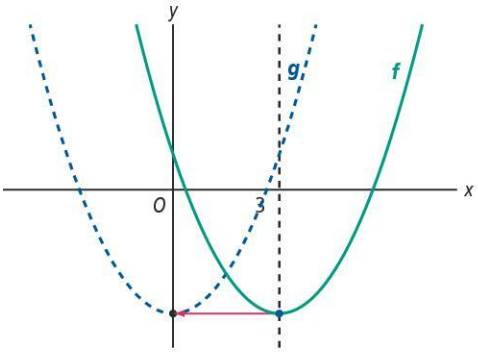
Ondersteunende route → maak opdracht O15

**15** Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 6x + 2$.
In deze opdracht ga je bewijzen dat de grafiek van $f$ symmetrisch is in de lijn $x = 3$.

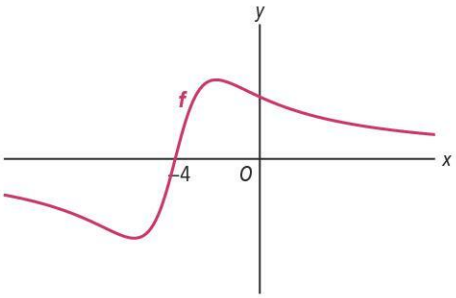
**a** Bij een verschuiving van 3 naar links is de grafiek van $g$ het beeld van de grafiek van $f$.
Stel het functievoorschrift op van $g$.

**b** Toon aan dat $g$ een even functie is.

**c** Leg uit dat hieruit volgt dat de grafiek van $f$ symmetrisch is in de lijn $x = 3$.




**16** Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{10x + 40}{x^2 + 8x + 20}$
Toon aan dat de grafiek van $f$ puntsymmetrisch is in het punt $(-4, 0)$ door de grafiek eerst 4 naar rechts te verschuiven en aan te tonen dat de beeldgrafiek puntsymmetrisch is in $(0, 0)$.




**17** Gegeven zijn twee oneven functies $f$ en $g$.

**a** Toon aan dat $h(x) = f(x) + g(x)$ een oneven functie is.

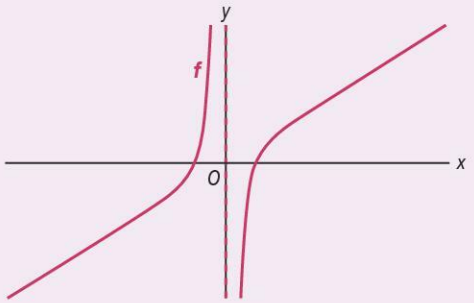
**b** Toon aan dat $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ een even functie is.

Uitdagende route → maak opdracht U2


© Noordhoff Uitgevers bv

## Ondersteunende opdrachten

**O11** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{x^3}$




De grafiek lijkt symmetrisch in de oorsprong. In deze opdracht toon je dat aan.

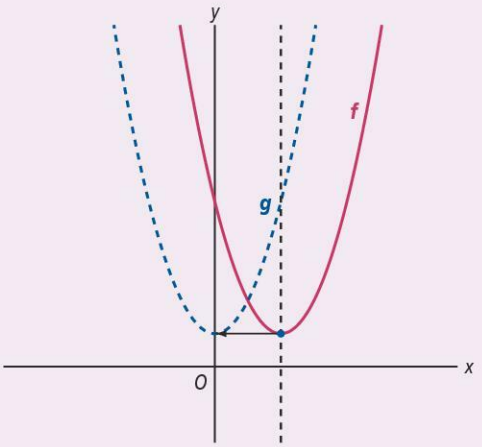
**a** Bereken $f(-1)$ en $f(1)$.

**b** Bereken ook $f(-2)$ en $f(2)$.

**c** Vul in: $f(a) = \frac{1}{2} \cdot \ldots - \frac{1}{\ldots^3}$ en $f(-a) = \frac{1}{2} \cdot \ldots - \frac{1}{(\ldots)^3}$

**d** Werk de haakjes weg en laat zien dat $f(-a) = -f(a)$.

**O15** Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 4x + 5$.
Je gaat aantonen dat de grafiek van $f$ symmetrisch is in de lijn $x = 2$. Dat doe je door de grafiek van $f$ twee naar links te verschuiven en aan te tonen dat de beeldgrafiek de grafiek van een even functie is en dus symmetrisch in de $y$-as.




**a** De grafiek van $g$ ontstaat door de grafiek van $f$ twee naar links te verschuiven.
Vul in: $g(x) = f(x + \ldots) = (x + \ldots)^2 - 4(x + \ldots) + 5$.

**b** Schrijf het functievoorschrift van $g$ zo eenvoudig mogelijk.

**c** Bereken $g(4)$ en $g(-4)$.

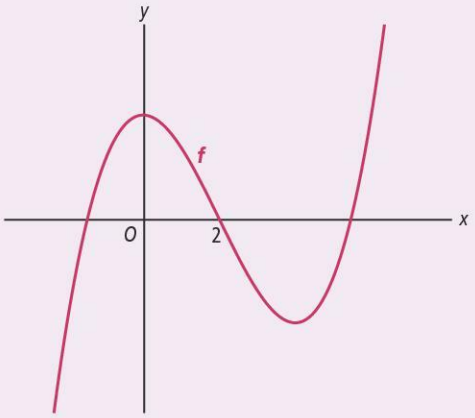
**d** Toon aan dat $g$ een even functie is.

**e** Welke lijn is de symmetrieas van de grafiek van $g$?

**f** Dus in welke lijn is de grafiek van $f$ symmetrisch?

## Uitdagende opdrachten

**U2** Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 6x^2 + 16$.




**a** Toon met een berekening aan dat het punt $(2, 0)$ op de grafiek van $f$ ligt.

**b** Toon aan dat de grafiek van $f$ symmetrisch is in $(2, 0)$.

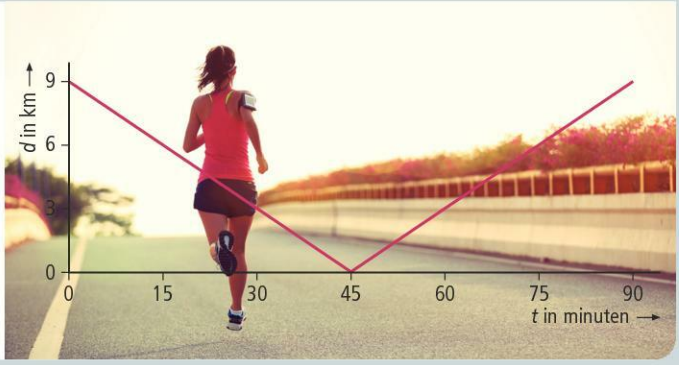
© Noordhoff Uitgevers bv

# 9.3 Absolute waarde

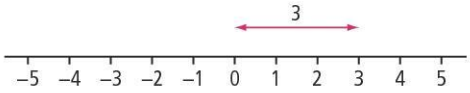
**Je leert**
- wat een absolute waarde is
- hoe je de grafiek van een absolute waarde-functie tekent

**Leerroutes**
- ondersteunend: 18—19—20—21—O22—23—24—O25—25
- doorlopend: 18—19—20—21—22—23—24—25—26
- uitdagend: 18—19—20—21—23—25—26—U3—U4

Wendy loopt met een constante snelheid van 12 km/h over een weg 9 km heen en 9 km terug.
$d$ is de afstand in km tot haar keerpunt.
- Welke bijzonderheid heeft de grafiek die het verband aangeeft tussen de afstand $d$ en de tijd $t$?




**18** **a** Op de getallenlijn is de afstand van het getal 3 tot het getal 0 gelijk aan 3.
Welk getal ligt ook op een afstand 3 tot het getal 0?




**b** Noem twee getallen die op een afstand van $\sqrt{5}$ liggen van het getal 0.
**c** Voor welke getallen $a$ is de afstand tot 0 gelijk aan $a$?
**d** Voor welke getallen $a$ is de afstand tot 0 gelijk aan $-a$?

**Theorie**

De afstand op de getallenlijn van een getal $x$ tot 0 noem je de absolute waarde van $x$.
De notatie voor de absolute waarde van $x$ is $|x|$.

Voor de absolute waarde van $x$ geldt: $|x| = \begin{cases} x & \text{als } x \geq 0 \\ -x & \text{als } x < 0 \end{cases}$

**Voorbeeld**

$|6| = 6$ en $|-8| = 8$

$|-14| + |5| = 14 + 5 = 19$

$|8 - 15| = |-7| = 7$

**19** Bereken.

**a** $|3 - 28|$
**b** $3 - |-28|$
**c** $\sqrt{|-100|} - \log(|-100|)$
**d** $|18 - |-24||$

**20** Gegeven is de functie $f(x) = |x|$.
**a** Bereken $f(-4)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ en $f(4)$.
**b** Teken de grafiek van $f$ voor $-5 \leq x \leq 5$.
**c** Plot en schets de grafiek van $g(x) = \sqrt{x^2}$.
**d** Vergelijk de grafieken van $f$ en $g$.
Welke conclusie kun je daaruit trekken?


© Noordhoff Uitgevers bv

**21** Gegeven zijn de functies $k(x) = -x^2 + 2x$ en $l(x) = |-x^2 + 2x|$.

**a** Vul de tabel in.

| | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k(x)$ | … | … | … | … | … | … | … |
| $l(x)$ | … | … | … | … | … | … | … |

**b** Teken in één figuur de grafieken van $k$ en $l$.

**c** Schrijf op hoe de grafiek van $l$ uit die van $k$ ontstaat.

**d** Hoe groot zijn de extreme waarden van $l$?

**Theorie**

De grafiek van $f(x) = |g(x)|$ ontstaat door de delen van de grafiek van $g$ die onder de $x$-as liggen te spiegelen in de $x$-as. Daardoor zal de grafiek van $f$ vaak een knik vertonen in de punten die op de $x$-as liggen.
$f$ heeft een minimum in elk van de nulpunten van $g$, die je vindt door $g(x) = 0$ op te lossen.
Je kunt $f(x)$ ook zonder absolute waarde-strepen schrijven:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{als } g(x) \geq 0 \\ -g(x) & \text{als } g(x) < 0 \end{cases}$$

**Voorbeeld**

Gegeven is de functie $f(x) = |\sin(x)|$ op het interval $[0, 2\pi]$.
Teken de grafiek van $f$, geef de extreme waarden van $f$ en schrijf $f(x)$ zonder absolute waarde-strepen.

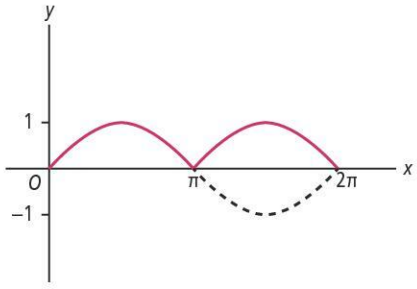
**Oplossing**

Teken eerst de grafiek van $g(x) = \sin(x)$.
Los op $g(x) = 0$. De nulpunten zijn 0, $\pi$ en $2\pi$.
Spiegel de delen van de grafiek van $g$ die onder de $x$-as liggen, in de $x$-as.
De extreme waarden van $f$ zijn:

minima: $f(0) = 0, f(\pi) = 0$ en $f(2\pi) = 0$,

maxima: $f(\frac{1}{2}\pi) = 1$ en $f(1\frac{1}{2}\pi) = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{als } 0 \leq x \leq \pi \\ -\sin(x) & \text{als } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$




→ Instructie rekenmachine | Absolute waarde

Ondersteunende route → maak opdracht O22

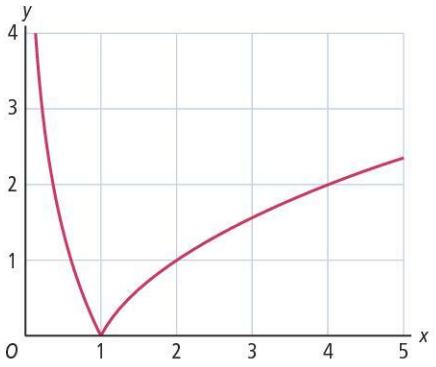
**22** Gegeven is de grafiek van $f(x) = |^2\log(x)|$.

**a** Los op $^2\log(x) = 0$.

**b** Geef de extreme waarde van $f$.

**c** Schrijf $f(x)$ zonder absolute waarde-strepen.

**d** Los exact op $f(x) > 2$.




**23** Gegeven zijn de functies $f(x) = |x^3 - 12x|$ en $g(x) = x^3 - 12x$.

H

**a** Plot en schets de grafiek van $g$.

**b** Bereken exact de nulpunten van $g$.

**c** Schrijf $f(x)$ zonder absolute waarde-strepen.

**d** Voor welke waarden van $x$ valt de grafiek van $f$ samen met de grafiek van $g$?

**e** Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek van $g$.

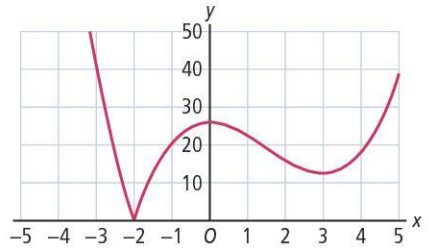
**f** Geef de extreme waarden van $f$.

**24** Gegeven is de functie $f(x) = |-x^3 + 4\frac{1}{2}x^2 - 26|$.

**a** Bereken exact de extreme waarden van de functie $g(x) = -x^3 + 4\frac{1}{2}x^2 - 26$.

**b** Ga na dat $x = -2$ het nulpunt van $g$ is.

**c** Geef de extreme waarden van $f$.




Ondersteunende route → maak opdracht O25

**25** **a** Plot en schets de grafiek van $f(x) = {}^3\log(|x|)$.

**b** Los exact op $f(x) > 2$.

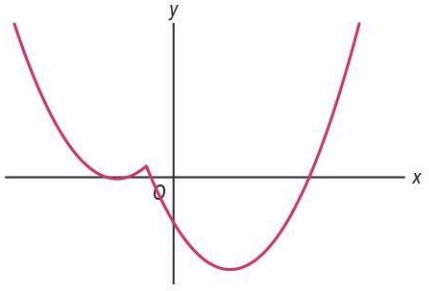
**26** Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - |5x + 6|$.

**a** Schrijf $f(x)$ zonder absolute waarde-strepen.

**b** In welk punt zit er een knik in de grafiek?

**c** Bereken exact de nulpunten van $f$.

**d** Bereken exact de extreme waarden van $f$.

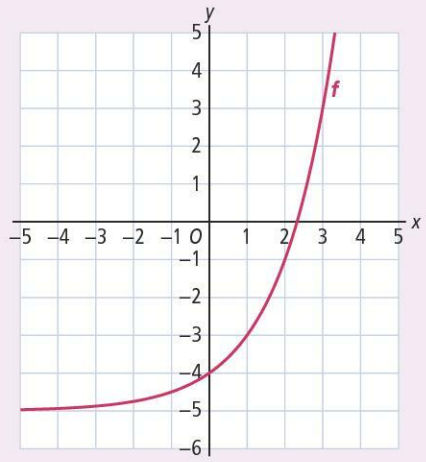



Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4


© Noordhoff Uitgevers bv

## Ondersteunende opdrachten

**O22** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = 2^x - 5$.




**a** Hoe ontstaat de grafiek van de functie $g(x) = |2^x - 5|$ uit de grafiek van $f$?
**b** Los exact op $f(x) = 0$.
**c** Schets de grafiek van $g$.
**d** Bereken exact de coördinaten van het punt waarin de grafiek van $g$ een knik heeft.
**e** Stel het functievoorschrift op van $g$ zonder absolute waarde-strepen.
**f** Hoe groot is het minimum van $g$?
**g** Los exact op $f(x) = 3$ en $-f(x) = 3$.
**h** Los exact op $g(x) \leq 3$.

**O25** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{|x|}$.

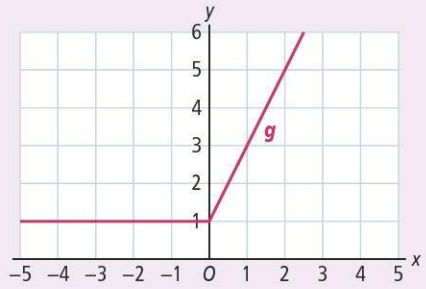
**a** Bereken $f(1)$ en $f(-1)$.
**b** Bereken $f(9)$ en $f(-9)$.
**c** Schrijf $f(x)$ zonder absolute waarde-strepen.
**d** Plot en schets de grafiek van $f$.
**e** Welke symmetrie heeft de grafiek?
**f** Er zijn twee waarden van $x$ waarvoor $f(x) = 2$. Welke zijn dat?
**g** Los exact op $f(x) > 2$.

## Uitdagende opdrachten

**U3** **a** Plot en schets de grafiek van de functie $f(x) = |x| - 2x$.

**b** Los exact op $-3 \leq f(x) \leq 3$.

**U4** De grafiek hoort bij een functie $g$.
Onderzoek welk functievoorschrift deze functie kan hebben.
Gebruik in je antwoord absolute waarde-strepen.




© Noordhoff Uitgevers bv

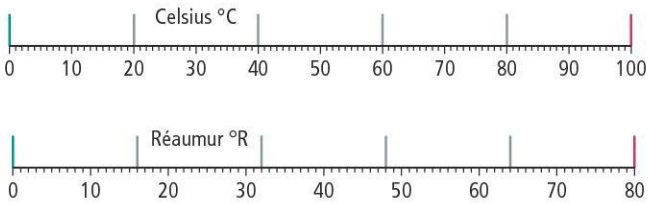
# 9.4 Inverse functies

**Je leert**
- wat een inverse functie is
- hoe je het functievoorschrift van een inverse functie opstelt

**Leerroutes**
- ondersteunend: 27—28—029—30—31—032—32
- doorlopend: 27—28—29—30—31—32—33
- uitdagend: 28—29—30—31—32—33—U5

In de 18e eeuw werden er door verschillende natuurkundigen temperatuurschalen ontwikkeld. Een van de eerste schalen was die van Réaumur (1731), later vervangen door die van Celsius (1742). Van graden Réaumur naar graden Celsius reken je om met de formule $C = \frac{5}{4} R$.

- Hoe reken je om van graden Celsius naar graden Réaumur?




**27** Gegeven zijn de functies $f(x) = 3^x$ en $g(x) = {}^3\log(x)$.

**a** Vul de tabellen in.

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | … | … | … | … |

| $x$ | $\frac{1}{3}$ | $1$ | $3$ | $9$ |
|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | … | … | … | … |

**b** Welke bijzonderheid zie je in de tabellen?

**c** Er geldt $f\left(2\frac{1}{2}\right) = 9\sqrt{3}$.

Wat volgt hieruit voor de waarde van $g(9\sqrt{3})$?

**28** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2x - 8$ en $g(x) = \frac{1}{2}x + 4$.
Er geldt $f(5) = 2$ en $g(2) = 5$.
Leg uit dat geldt: als $f(a) = b$, dan is $g(b) = a$ voor elke waarde van $a$.

$f$: $5 \xrightarrow{\times 2} 10 \xrightarrow{-8} 2$

$g$: $5 \xleftarrow{:2} 10 \xleftarrow{+8} 2$

**Theorie**

Bij elke functie $f$ hoort een rekenschema. Soms kun je daarbij een terugrekenschema maken. Bij zo'n terugrekenschema hoort een functie $g$.
De functies $f$ en $g$ heten inverse functies van elkaar als geldt: uit $f(a) = b$ volgt $g(b) = a$ (en omgekeerd) voor elke $a$ uit het domein van $f$ en elke $b$ uit het domein van $g$.
De notatie voor de inverse functie van $f$ is $f^{inv}$.
Het domein van $f^{inv}$ is gelijk aan het bereik van $f$.
Bij het opstellen van het functievoorschrift van een inverse functie maak je gebruik van inverse bewerkingen.

Voorbeelden van inverse bewerkingen

| | | |
|---|---|---|
| $+7$ | en | $-7$ |
| $\times 3$ | en | $:3$ |
| $(\ldots)^2$ | en | $\sqrt{\ldots}$ |
| $(\ldots)^3$ | en | $\sqrt[3]{\ldots}$ |
| $(\ldots)^a$ | en | $(\ldots)^{\frac{1}{a}}$ |
| $g\cdots$ | en | ${}^g\log(\ldots)$ |


© Noordhoff Uitgevers bv

**Voorbeeld**

Stel het functievoorschrift op van de inverse van $f(x) = \sqrt{x - 7}$.
Vermeld daarbij het domein van $f^{inv}$.

**Oplossing**

Bij $f$ hoort het rekenschema: $x \xrightarrow{-7} x - 7 \xrightarrow{\sqrt{\ldots}} \sqrt{x - 7}$

Bij $f^{inv}$ hoort het terugrekenschema: $x^2 + 7 \xleftarrow{+7} x^2 \xleftarrow{\ldots^2} x$

Dus $f^{inv}(x) = x^2 + 7$.

Het bereik van $f$ is $[0, \rightarrow\rangle$, dus het domein van $f^{inv}$ is $[0, \rightarrow\rangle$.

Ondersteunende route → maak opdracht 029

**29** H Stel een functievoorschrift op van $f^{inv}$. Vermeld daarbij ook het domein van $f^{inv}$.

**a** $f(x) = -4x + 3$

**b** $f(x) = \sqrt{2x + 5}$

**c** $f(x) = \log(x - 3)$

**d** $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

**30** **a** Teken de punten $P(4, 2)$, $Q(-4, 1)$ en $R(4, -2)$.

**b** Geef de coördinaten van de beeldpunten $P'$, $Q'$ en $R'$ bij spiegeling in de lijn $y = x$.

Uit $f(a) = b$ volgt $f(b) = a$. Dus als het punt $(a, b)$ op de grafiek van $f$ ligt, dan ligt het punt $(b, a)$ op de grafiek van $f^{inv}$. Bij spiegeling in de lijn $y = x$ worden de $x$- en $y$-coördinaat van een punt verwisseld. De grafieken van $f$ en $f^{inv}$ zijn dus elkaars spiegelbeeld bij spiegeling in de lijn $y = x$.

© Noordhoff Uitgevers bv

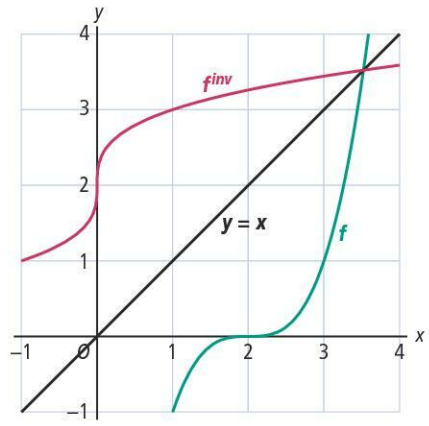
**31** Gegeven is de functie $f(x) = (x - 2)^3$ met daarop het punt $P(3, 1)$. Bij spiegelen in de lijn $y = x$ is de grafiek van $f^{inv}$ het beeld van de grafiek van $f$ en $P'$ het beeld van $P$.
De coördinaten van elk punt op de grafiek van $f$ voldoen aan de vergelijking $y = (x - 2)^3$.

**a** Laat zien dat de coördinaten van $P'$ voldoen aan de vergelijking $x = (y - 2)^3$.

**b** Leg uit waarom de coördinaten van elk punt van de grafiek van $f^{inv}$ voldoen aan de vergelijking $x = (y - 2)^3$.

**c** Herleid de vergelijking $x = (y - 2)^3$ tot $y = 2 + \sqrt[3]{x}$.

**d** Schrijf het functievoorschrift van $f^{inv}$ op.




**Aanpak**

**Hoe stel je het functievoorschrift op van de inverse functie van een gegeven functie *f*?**

1 Vervang in het functievoorschrift $f(x)$ door $y$.
2 Vervang in de formule $x$ door $y$ en $y$ door $x$.
3 Druk in de nieuwe formule $y$ uit in $x$.
4 Schrijf het resultaat als functievoorschrift door $y$ te vervangen door $f^{inv}(x)$.

**Voorbeeld**

Stel het functievoorschrift op van de inverse functie van $f(x) = {}^3\log(2x - 5)$.

**Oplossing**

1 $y = {}^3\log(2x - 5)$
2 $x = {}^3\log(2y - 5)$
3 $3^x = 2y - 5$
$2y = 3^x + 5$ dus $y = \frac{1}{2} \cdot 3^x + 2\frac{1}{2}$
4 $f^{inv}(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^x + 2\frac{1}{2}$

Ondersteunende route → maak opdracht O32

**32** H Stel het functievoorschrift op van $f^{inv}$. Vermeld ook het domein van $f^{inv}$.

**a** $f(x) = {}^2\log\left(\frac{1}{2}x + 3\right)$
**b** $f(x) = 2 - \sqrt{x}$
**c** $f(x) = \frac{3}{x + 1}$
**d** $f(x) = 2^x - 3$
**e** $f(x) = \sqrt[3]{1 - 2x}$
**f** $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 3}$

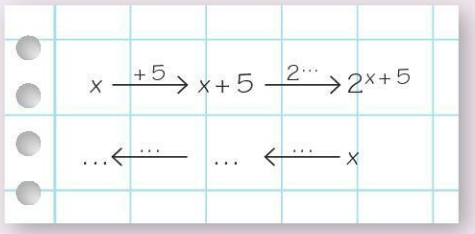
**33** Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{x}$.
Geef het functievoorschrift en het domein van $f^{inv}$.

Uitdagende route → maak opdracht U4 en U5


© Noordhoff Uitgevers bv

## Ondersteunende opdrachten

**O29** Gegeven is de functie $f(x) = 2^{x+5}$.




**a** Op het blaadje zie je het rekenschema dat bij $f$ hoort. In het terugrekenschema moet je de inverse bewerking van $2^{\cdots}$ opnemen. Wat is de inverse bewerking van $2^{\cdots}$?

**b** En wat is de inverse bewerking van + 5?

**c** Vul het schema in en geef het functievoorschrift van $f^{inv}$.

**d** Het domein van $f^{inv}$ is het bereik van $f$. Geef het domein van $f^{inv}$.

Stel het functievoorschrift op van $f^{inv}$. Vermeld daarbij ook het domein van $f^{inv}$.

**e** $f(x) = 3^{x-2}$

**f** $f(x) = -2x + 8$

**g** $f(x) = \sqrt{5x + 10}$

**h** $f(x) = \dfrac{1}{x + 3}$

**O32** Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 4}$. Je gaat in deze opdracht het functievoorschrift van $f^{inv}$ opstellen.

$x = \dfrac{y+1}{y-4}$

$x(y-4) = y+1$ 1

$xy - 4x = y + 1$ 2

$xy - y = \ldots$ 3

$y \cdot (\ldots) =$ 4

**a** Vervang $f(x)$ door $y$.

**b** Vervang $x$ door $y$ en $y$ door $x$.

**c** De formule van opdracht b moet je herleiden zo dat $y$ uitgedrukt wordt in $x$. Op het blaadje is een begin gemaakt.
Leg uit wat er in elke stap gebeurt en maak de herleiding af.

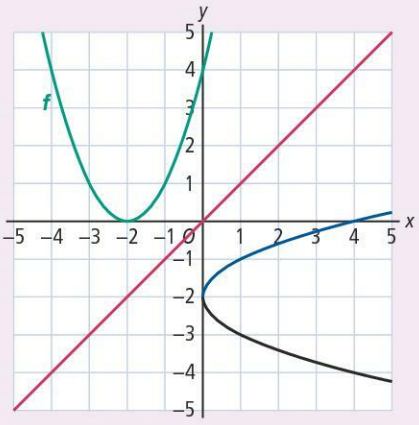
**d** Stel het functievoorschrift op van $f^{inv}$.

**e** Wat is het bereik van $f$?

**f** Geef het domein van $f^{inv}$.

## Uitdagende opdrachten

**U5** Gegeven is de functie $f(x) = (x + 2)^2$. De grafiek van $f$ is gespiegeld in de lijn $y = x$.




**a** Waarom is de beeldgrafiek niet de grafiek van een functie?

**b** Als je het domein van $f$ beperkt tot het interval $[-2, \rightarrow\rangle$, bestaat er wel een inverse functie.
Stel voor deze situatie het functievoorschrift van $f^{inv}$ op.

**c** Stel ook het functievoorschrift op van $f^{inv}$ als het domein van $f$ beperkt wordt tot het interval $\langle\leftarrow, -2]$.

© Noordhoff Uitgevers bv

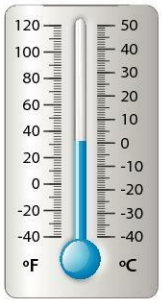
# 9.5 Gelijkwaardige formules

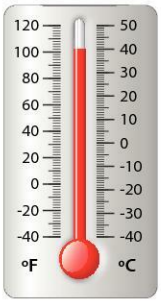
**Je leert**
- wat gelijkwaardige formules zijn

**Leerroutes**
- ondersteunend: 34—35—036—37—38—039—39—40—41
- doorlopend: 34—35—36—37—38—39—40—41—42
- uitdagend: 34—35—37—38—39—40—41—42—U6

In de Verenigde Staten gebruikt men nog de temperatuurschaal van Fahrenheit (1724). Daarbij is 0 °C gelijk aan 32 °F en 100 °C aan 212 °F.

- Welke twee formules geven het verband weer tussen de temperatuur $C$ in °C en de temperatuur $F$ in °F? Kies uit: $C = \frac{5}{9}F - 32$, $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, $F = \frac{9}{5}C + 32$ en $F = \frac{9}{5}(C + 32)$.






**34** Gegeven zijn de formules $y = 2 \cdot 3^x + 6$ en $x = {}^3\log\left(\frac{1}{2}y - 3\right)$.

**a** Controleer door invullen dat $x = 1$ en $y = 12$ aan beide formules voldoen.

**b** $x = 0$ en $y = 8$ voldoen aan de eerste formule. Voldoen deze getallen ook aan de tweede formule?

**c** Laat zien dat de tweede formule te herleiden is tot de eerste.

**Theorie**

Als bij twee formules elke combinatie van waarden die aan de ene formule voldoet, ook aan de andere voldoet en omgekeerd, dan heten die formules **gelijkwaardig** of **equivalent**.
Bij het herleiden van een formule pas je links en rechts dezelfde bewerking toe of gebruik je inverse bewerkingen.

**Voorbeeld**

Herleid $y = \frac{24}{2x - 5}$ tot een gelijkwaardige formule waarbij $x$ is uitgedrukt in $y$.

**Oplossing**

Uit $y = \frac{24}{2x - 5}$ volgt $y(2x - 5) = 24$,

dus $2x - 5 = \frac{24}{y}$ of ook $2x = 5 + \frac{24}{y}$

$x = 2\frac{1}{2} + \frac{12}{y}$

**35** Leg uit dat de formule $2xy = 5y + 24$ gelijkwaardig is met de formules in het voorbeeld.


© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O36

**36** H Herleid tot een gelijkwaardige formule waarbij $p$ is uitgedrukt in $q$.

**a** $p^3 + 2q = 5$

**b** $q = \dfrac{5}{p+3}$

**c** $q + 3^p = 4$

**d** $q = {}^6\log(p+20)$

**e** $q = \sqrt[5]{p+1} - 2$

**f** $q = \dfrac{-7}{6 + \sqrt[3]{p}}$

**37** Op het blaadje is een begin gemaakt met het herleiden van de formule $q = \dfrac{24p}{2p-1}$ tot een equivalente formule waarbij $p$ is uitgedrukt in $q$.

| | |
|---|---|
| $q = \dfrac{24p}{2p-1}$ | |
| $q(2p-1) = 24p$ | 1 |
| $2pq - q = 24p$ | 2 |
| $2pq - 24p = q$ | 3 |
| $p(2q-12) = q$ | 4 |

**a** Leg uit wat er in de stappen 1 tot en met 4 is gebeurd en maak de herleiding af.

Druk $p$ uit in $q$.

**b** $q = \dfrac{p-3}{p+4}$

**c** $q = \dfrac{4p-12}{3p-5}$

**38** Gegeven is de formule $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{v}$

**a** Neem $b = 50$ en druk $v$ uit in $f$.

**b** Neem $f = 10$ en laat zien dat de formule te herleiden is tot $b = \dfrac{10v}{v-10}$

Ondersteunende route → maak opdracht O39

**39** Robert maakt een kanotocht van 10 km heen en 10 km terug. De stroomsnelheid van de rivier is $v$ km per uur en Robert vaart met een gemiddelde snelheid van 4 km per uur ten opzichte van het water. $T$ is de tijd in uren die hij over de tocht doet.

**a** Leg uit dat geldt $T = \dfrac{10}{4-v} + \dfrac{10}{4+v}$

**b** Voor welke waarden van $v$ kan met deze formule de vaartijd worden berekend?

**c** Herleid de formule tot een vorm met één breuk.

**d** Druk $v$ uit in $T$ voor $v \geq 0$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Herleid je de formule $q = p^2$ tot een vorm waarbij $p$ uitgedrukt wordt in $q$, dan vind je $p = \sqrt{q}$ of $p = -\sqrt{q}$.

De formule $p = \sqrt{q}$ is gelijkwaardig met $q = p^2$ voor $p \geq 0$.

De formule $p = -\sqrt{q}$ is gelijkwaardig met $q = p^2$ voor $p \leq 0$.

**Voorbeeld**

Herleid $p^2 = 2q - 3$ voor $p \leq 0$ tot een gelijkwaardige formule waarbij $q$ is uitgedrukt in $p$.

**Oplossing**

$p^2 = 2q - 3$ geeft

$p = \sqrt{2q - 3}$ of $p = -\sqrt{2q - 3}$.

Omdat $p \leq 0$ is de oplossing

$p = -\sqrt{2q - 3}$.

**40** H Herleid de formule tot een gelijkwaardige formule waarbij $p$ is uitgedrukt in $q$.

**a** $p^2 + 4q = 5$ voor $p \geq 0$

**b** $p^2 + 4q = 5$ voor $p \leq 0$

**c** $(p - 2)^2 + 4q = 5$ voor $p - 2 \leq 0$

**41** De formule voor kinetische energie is $E = \frac{1}{2}mv^2$. $E$ is de energie in joule, $m$ is de massa in kg en $v$ is de snelheid in m/s.

**a** Druk $m$ uit in de andere variabelen.

**b** Druk $v$ uit in $E$ en $m$ voor $v \geq 0$.

Herleid je de formule $q = \sqrt{p}$ tot een vorm waarbij $p$ uitgedrukt wordt in $q$, dan vind je $p = q^2$. Deze formule is alleen equivalent met de formule $q = \sqrt{p}$ voor $q \geq 0$.
Zo voldoet de combinatie $(p, q) = (4, -2)$ wel aan de formule $p = q^2$, maar niet aan de formule $q = \sqrt{p}$.

**42** Herleid de formules tot een vorm waarbij $p$ is uitgedrukt in $q$.
Geef aan voor welke waarden van $q$ de formules gelijkwaardig zijn.

**a** $q = \sqrt{p + 5}$

**b** $q = \dfrac{6}{1 + \sqrt{p - 3}}$

Uitdagende route → maak opdracht U6


© Noordhoff Uitgevers bv

## Ondersteunende opdrachten

**O36** Je gaat de formule $q = \dfrac{12}{6 + \sqrt[3]{p+1}}$ herleiden tot een gelijkwaardige formule waarbij $p$ is uitgedrukt in $q$.

**a** Op het blaadje wordt er in stap 1 met $6 + \sqrt[3]{p+1}$ vermenigvuldigd.
Wat moet er op de puntjes staan?
**b** In stap 2 wordt gedeeld door $q$. Vul stap 2 in.
**c** Vul stap 3 in.
**d** Wat gebeurt er in stap 4?
**e** Maak de herleiding af.

$q = \dfrac{12}{6 + \sqrt[3]{p+1}}$

| | |
|---|---|
| $q \cdot (\ldots) = 12$ | 1 |
| $\ldots = \dfrac{12}{q}$ | 2 |
| $\sqrt[3]{p+1} = \ldots$ | 3 |
| $p + 1 = (\ldots)^3$ | 4 |

Herleid de formules tot een vorm waarbij $p$ is uitgedrukt in $q$.

**f** $4p^3 + 2q = 9$

**g** $q = \dfrac{6}{p-1}$

**h** $3q + 10^p = 6$

**i** $q = {}^4\log(2p - 7)$

**j** $q = \dfrac{5}{2 + \sqrt[5]{p}}$

**k** $q = \dfrac{p}{4p - 8}$

**O39** Je gaat de formule $q = \dfrac{6}{1-p} + \dfrac{6}{1+p}$ herleiden tot een formule waarbij $p$ is uitgedrukt in $q$.

**a** Gebruik het blaadje om de breuken gelijknamig te maken en op te tellen.
**b** Laat zien dat $q = \dfrac{12}{1-p^2}$
**c** Laat zien dat $p^2 = 1 - \dfrac{12}{q}$
**d** Druk $p$ uit in $q$ voor $p \geq 0$.

$q = \dfrac{6}{1-p} + \dfrac{6}{1+p}$

$\dfrac{6}{1-p} + \dfrac{6}{1+p} =$

$\dfrac{6(\ldots)}{(1-p)(1+p)} + \dfrac{6(\ldots)}{(1-p)(1+p)} =$

$\dfrac{\ldots}{(1-p)(1+p)}$

## Uitdagende opdrachten

**U6** Herleid de formules tot een vorm waarbij $p$ is uitgedrukt in $q$.

**a** $q = \dfrac{1 - {}^2\log(p)}{{}^2\log(p)}$

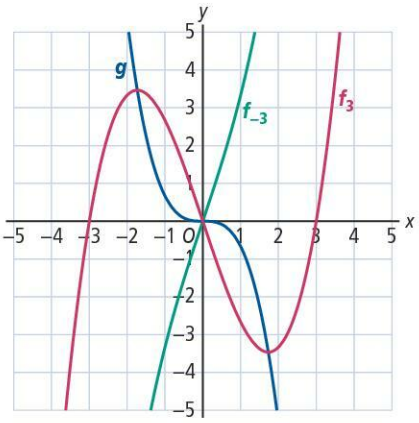
**b** $q = 3 + \sqrt[3]{3 - 3p^3}$

**c** $4pq = 3p + 2q + 1$

**d** $q - 4 = p(p-4),\ p \geq 2$

© Noordhoff Uitgevers bv

**43** Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 - px$ en de functie $g(x) = -\frac{2}{3}x^3$.
Getekend zijn de grafieken van $f_{-3}$, $f_3$ en $g$.



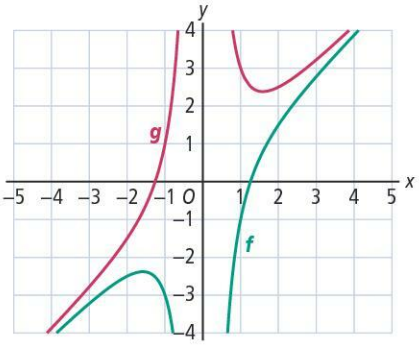

- **a** Toon aan dat $f_p$ voor elke waarde van $p$ een oneven functie is.
- **b** Leg uit waarom je alleen voor positieve waarden van $p$ grafieken krijgt die drie snijpunten met de $x$-as hebben.
- **c** Toon aan dat voor positieve waarden van $p$ de toppen van de grafiek van $f_p$ op de grafiek van $g$ liggen.

**44** Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 6|x|$.

- **a** Plot en schets de grafiek van $f$.
- **b** Welke symmetrie vertoont de grafiek van $f$?
- **c** Schrijf het functievoorschrift van $f$ zonder absolute waarde-strepen.
- **d** Bereken exact de extreme waarden van $f$.
- **e** Beantwoord de opdrachten a, b, c, en d ook voor de functie $f(x) = x^2 + 6|x|$.

**45** Gegeven zijn de functies $f(x) = x - \frac{2}{x^2}$ en $g(x) = x + \frac{2}{x^2}$

Het lijkt er op dat de grafiek van $g$ het spiegelbeeld is van de grafiek van $f$ bij spiegeling in $O$.
Toon aan dat dat juist is door de grafiek van $f$ eerst te spiegelen in de $x$-as en daarna in de $y$-as.




**46** Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = p + \frac{4}{x - p}$

- **a** Plot en schets de grafiek van $f_1$.
- **b** Stel vergelijkingen op van de asymptoten van de grafiek van $f_1$.
- **c** Voor welke waarden van $p$ gaat de grafiek van $f_p$ door de oorsprong?
- **d** Toon aan dat ${f_1}^{inv} = f_1$.
- **e** Toon aan dat voor elke waarde van $p$ geldt ${f_p}^{inv} = f_p$.
- **f** De grafiek van $f_p$ snijdt de lijn $y = x$ in de punten $P$ en $Q$. Toon aan dat $PQ$ onafhankelijk is van $p$.


© Noordhoff Uitgevers bv

**47** De volgorde van de transformaties die op de grafiek van een functie worden toegepast, is soms wel en soms niet van belang. Ga uit van de functie $f(x) = \sqrt{x}$ en onderzoek voor elk geval of de volgorde van de twee transformaties invloed heeft op het resultaat. Geef telkens een voorbeeld.

- **a** Twee translaties na elkaar.
- **b** Een vermenigvuldiging ten opzichte van de $x$-as en een translatie omhoog of omlaag.
- **c** Een vermenigvuldiging ten opzichte van de $x$-as en een translatie naar links of rechts.
- **d** Een vermenigvuldiging ten opzichte van de $y$-as en een translatie naar links of rechts.
- **e** Een vermenigvuldiging ten opzichte van de $y$-as en een translatie omhoog of omlaag.

**48** Gegeven is een functie $f$, waarvoor geldt $f^{inv} = f$.

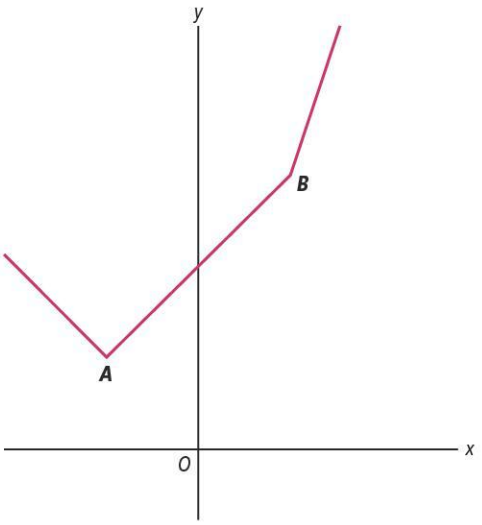
- **a** Wat kun je zeggen over de symmetrie van de grafiek van $f$?
- **b** Onderzoek voor welke lineaire functies geldt dat $f^{inv} = f$.
- **c** Kun je nog andere dan lineaire functies vinden waarvoor geldt dat $f^{inv} = f$?

**49** Voor $p \geq 0$ is gegeven de familie van functies

$f_p(x) = |x - p| + x + |x + p|$.

Getekend is de grafiek van $f_2$.

- **a** In de punten $A$ en $B$ vertoont de grafiek van $f_2$ een knik. Bereken exact de coördinaten van $A$ en $B$.
- **b** Bereken voor verschillende waarden van $p$ de coördinaten van de knikpunten.
- **c** Voor elke waarde van $p$ krijg je andere knikpunten $A$ en $B$.
  Onderzoek wat de verzameling van de knikpunten $A$ en wat de verzameling van de knikpunten $B$ is.




© Noordhoff Uitgevers bv

**Theorie**

### Gelijkwaardige formules

Als bij twee formules elke combinatie van waarden die aan de ene formule voldoet, ook aan de andere voldoet en omgekeerd, dan heten die formules gelijkwaardig of equivalent.
Bij herleiden pas je links en rechts dezelfde bewerking toe of gebruik je inverse bewerkingen.

**Voorbeeld**

Herleid de formule $q = \frac{p-3}{p-4}$ tot een gelijkwaardige formule waarbij $p$ uitgedrukt is in $q$.

**Oplossing**

| | |
|---|---|
| $q(p-4) = p-3$ | $\times (p-4)$ |
| $pq - 4q = p - 3$ | haakjes weggewerkt |
| $pq - p = 4q - 3$ | alle termen met $p$ naar één kant |
| $p(q-1) = 4q - 3$ | $p$ buiten haakjes gehaald |
| $p = \frac{4q-3}{q-1}$ | $: (q-1)$ |

**S1** Herleid tot een gelijkwaardige formule waarbij $p$ uitgedrukt is in $q$.

**a** $q = \frac{1}{2} \cdot \log(p-5)$

**b** $q = \sqrt[5]{4p+20} - 1$

**Theorie**

### Inverse functies

De functies $f$ en $g$ heten inverse functies van elkaar als voor elk getal $a$ uit het domein van $f$ en voor elk getal $b$ uit het domein van $g$ geldt: uit $f(a) = b$ volgt $g(b) = a$ (en omgekeerd).
Het domein van $f^{inv}$ is gelijk aan het bereik van $f$.
Bij het opstellen van het functievoorschrift van een inverse functie maak je gebruik van inverse bewerkingen.
De grafieken van $f$ en $f^{inv}$ zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegeling in de lijn $y = x$.

**S2** Gegeven zijn de functies $f(x) = 4x + 2$ en $g(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$.

Kies twee punten $A$ en $B$ op de grafiek van $f$ en spiegel deze punten in de lijn $y = x$.
Laat met een berekening zien dat de beeldpunten $A'$ en $B'$ op de grafiek van $g$ liggen.


© Noordhoff Uitgevers bv

**Vaardigheid**

**Je kunt na een transformatie het functievoorschrift opstellen bij de beeldgrafiek.**

Pas je op de grafiek van een functie $f$ een transformatie toe, dan heet de grafiek die zo ontstaat, de beeldgrafiek.

Het functievoorschrift $g(x)$ van de beeldgrafiek is bij een

- verticale translatie $d$ omhoog: $g(x) = f(x) + d$
- horizontale translatie $c$ naar rechts: $g(x) = f(x - c)$
- vermenigvuldiging ten opzichte van de $x$-as met factor $a$: $g(x) = a \cdot f(x)$
- vermenigvuldiging ten opzichte van de $y$-as met factor $b$: $g(x) = f\left(\frac{1}{b} \cdot x\right)$
- spiegelen in de $x$-as: $g(x) = -f(x)$
- spiegelen in de $y$-as: $g(x) = f(-x)$

**Voorbeeld**

$f(x) = \sqrt{x}$

verschuiving 1 omhoog: $g(x) = \sqrt{x} + 1$

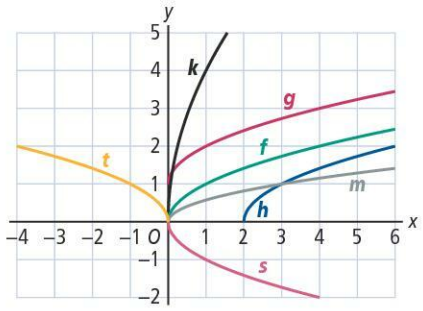
verschuiving 2 naar rechts: $h(x) = \sqrt{x - 2}$

vermenigvuldiging ten opzichte van de $x$-as met 4: $k(x) = 4\sqrt{x}$

vermenigvuldiging ten opzichte van de $y$-as met 3: $m(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x}$

spiegelen in de $x$-as: $s(x) = -\sqrt{x}$

spiegelen in de $y$-as: $t(x) = \sqrt{-x}$




**S3** Op de grafiek van $f(x) = x^2$ worden achtereenvolgens de volgende transformaties toegepast:

- verschuiving 6 naar rechts
- vermenigvuldiging met $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de $y$-as
- verschuiving 4 omlaag

**a** Stel het functievoorschrift op bij de beeldgrafiek.

**b** Stel ook het functievoorschrift op bij de grafiek die ontstaat door de transformaties in omgekeerde volgorde uit te voeren.

© Noordhoff Uitgevers bv

**Vaardigheid**

**Je kunt de symmetrie van een grafiek aantonen.**

De grafiek van een functie $f$ is symmetrisch in de $y$-as als $f(-a) = f(a)$ voor elke waarde van $a$ uit het domein van $f$.
$f$ heet dan een even functie.
De grafiek van een functie $f$ is puntsymmetrisch in $(0, 0)$ als $f(-a) = -f(a)$ voor elke waarde van $a$ uit het domein van $f$.
$f$ heet dan een oneven functie.

**Voorbeeld**

Toon aan dat $f(x) = \frac{1}{4}x^5 - 4x$ een oneven functie is.

**Oplossing**

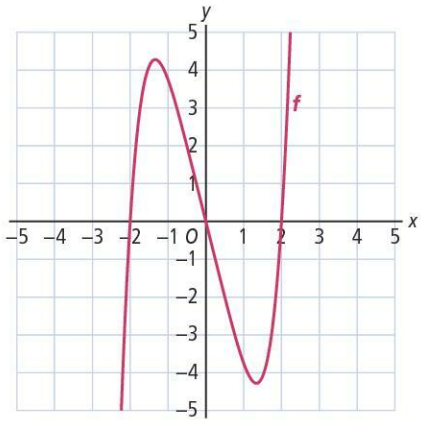
$f(a) = \frac{1}{4}a^5 - 4a$

$f(-a) = \frac{1}{4}(-a)^5 - 4(-a)$

$f(-a) = -\frac{1}{4}a^5 + 4a$

$f(-a) = -(\frac{1}{4}a^5 - 4a) = -f(a)$

$f(-a) = -f(a)$ dus $f$ is een oneven functie.




**S4** **a** Toon aan dat $f(x) = 3^x - 3^{-x}$ een oneven functie is.
**b** Toon aan dat $f(x) = 3^x + 3^{-x}$ een even functie is.

**Vaardigheid**

**Je kunt de grafiek van een absolute waarde-functie tekenen.**

Voor de absolute waarde van $x$ geldt: $|x| = \begin{cases} x & \text{als } x \geq 0 \\ -x & \text{als } x < 0 \end{cases}$

De functie $f(x) = |g(x)|$ ontstaat door de delen van de grafiek van $g$ die onder de $x$-as liggen te spiegelen in de $x$-as.
Je kunt $f(x)$ ook zonder absolute waarde-strepen schrijven:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{als } g(x) \geq 0 \\ -g(x) & \text{als } g(x) < 0 \end{cases}$$


© Noordhoff Uitgevers bv

**Voorbeeld**

Teken de grafiek van $f(x) = |{}^3\log(x)|$ en schrijf het functievoorschrift zonder absolute waarde-strepen.

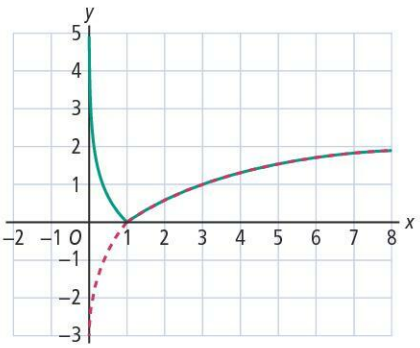
**Oplossing**

Teken de grafiek van $g(x) = {}^3\log(x)$.

${}^3\log(x) = 0$ geeft $x = 1$.

Spiegel het gedeelte waarvoor $0 < x < 1$ in de $x$-as.

$$f(x) = \begin{cases} {}^3\log(x) \text{ als } x > 1 \\ -{}^3\log(x) \text{ als } 0 < x < 1 \end{cases}$$




**S5**

**a** Teken de grafiek van de functie $f(x) = |x^2 + x - 6|$.

**b** Schrijf het functievoorschrift van $f$ zonder absolute waarde-strepen.

**c** Bereken exact de extreme waarden van $f$.

**Vaardigheid**

**Je kunt het functievoorschrift van de inverse functie van een gegeven functie $f$ opstellen.**

**1** Vervang in het functievoorschrift $f(x)$ door $y$.

**2** Vervang in de formule $x$ door $y$ en $y$ door $x$.

**3** Druk in de nieuwe formule $y$ uit in $x$.

**4** Schrijf het resultaat als functievoorschrift door $y$ te vervangen door $f^{inv}(x)$.

**Voorbeeld**

Stel het functievoorschrift op van de inverse functie van $f(x) = \sqrt[3]{x + 7}$.

**Oplossing**

**1** $y = \sqrt[3]{x + 7}$

**2** $x = \sqrt[3]{y + 7}$

**3** $x^3 = y + 7$, dus $y = x^3 - 7$

**4** $f^{inv}(x) = x^3 - 7$

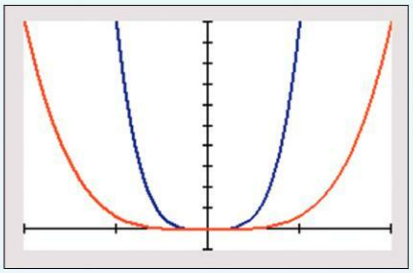
**S6** Stel het functievoorschrift op van $f^{inv}$.

**a** $f(x) = \frac{1}{2}x - 5$

**b** $f(x) = 6^{2x+3}$

© Noordhoff Uitgevers bv

**T1** Gegeven is de functie $f(x) = 100x^4$.



**a** De grafiek van $f$ wordt vermenigvuldigd met factor 2 ten opzichte van de $y$-as.
Toon aan dat de beeldgrafiek bij de functie $g(x) = 6{,}25x^4$ hoort.

**b** Welke vermenigvuldiging ten opzichte van de $x$-as geeft dezelfde beeldgrafiek?

**c** De grafiek van $f$ wordt ten opzichte van de $y$-as met factor $\frac{1}{3}$ vermenigvuldigd.
Stel bij de beeldgrafiek het functievoorschrift op.

**T2** Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 4x$.

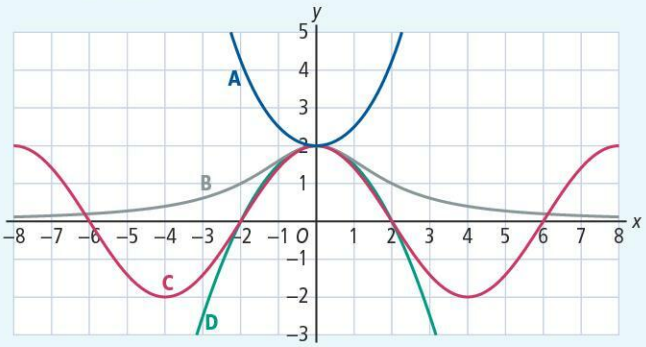
**a** De grafiek van $f$ wordt gespiegeld in de $y$-as en daarna 3 naar rechts verschoven.
Stel het functievoorschrift op bij de beeldgrafiek.

**b** Beantwoord opdracht a ook voor het geval de grafiek van $f$ eerst 3 naar rechts wordt verschoven en daarna wordt gespiegeld in de $y$-as.

**T3** In het assenstelsel zie je vier grafieken die horen bij de functies

$f(x) = 2 - \frac{1}{2}x^2$ $\quad$ $h(x) = 2\cos\left(\frac{1}{4}\pi x\right)$

$g(x) = \dfrac{8}{x^2 + 4}$ $\quad$ $k(x) = 2^x + 2^{-x}$




**a** Welke grafiek hoort bij welke functie?

**b** Toon van elke functie aan dat de grafiek symmetrisch is in de $y$-as.

**T4** Gegeven zijn de functies $f(x) = |-x^3 + 12x|$ en $g(x) = |3x|$.

**a** Bereken exact de nulpunten van $f$.

**b** Plot en schets de grafieken van $f$ en $g$ in één figuur.

**c** Schrijf beide functievoorschriften zonder absolute waarde-strepen.

**d** Bereken exact de extreme waarden van $f$.

**e** Los exact op $f(x) < g(x)$.


© Noordhoff Uitgevers bv

**T5** Stel het functievoorschrift op van $f^{inv}$.
Vermeld ook het domein van $f^{inv}$.

**a** $f(x) = 8 - 4x$

**b** $f(x) = \dfrac{10}{8 - 4x}$

**c** $f(x) = 10^{8-4x}$

**d** $f(x) = \sqrt{8 - 4x}$

**T6** Herleid tot een gelijkwaardige formule waarbij $p$ is uitgedrukt in $q$.

**a** $q = 4 + 5^{p-6}$

**b** $q = \dfrac{4}{2p - 5}$

**c** $q = \dfrac{4p}{2p - 5}$

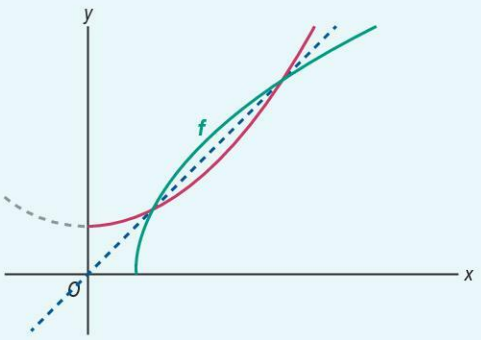
**d** $3p^2 - 6q = 5$ met $p \leq 0$

**T7** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{12x - 27}$.

**a** De grafiek van $f^{inv}$ is een deel van een parabool. Stel een vergelijking van die parabool op.

**b** Leg uit dat de snijpunten van de grafieken van $f$ en $f^{inv}$ op de lijn $y = x$ liggen.

**c** Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van $f$ en $f^{inv}$.




**T8** Gegeven is de formule $x^2y = 2x - y$.

**a** Herleid de formule tot een vorm waarbij $y$ is uitgedrukt in $x$.

**b** Plot en schets de grafiek bij de formule uit opdracht a.

**c** Welke waarden kan $x$ aannemen? En welke $y$?

**T9** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x}$.

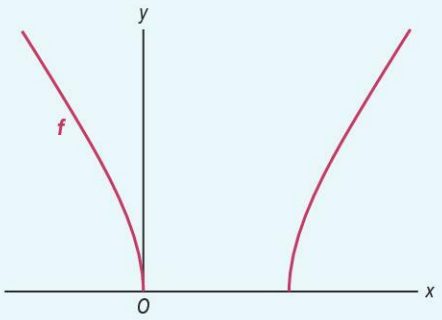
**a** Toon met een berekening aan dat het domein van $f$ gelijk is aan $\langle \leftarrow, 0] \cup [8, \rightarrow \rangle$.

**b** Waarom kan de functie bij dit domein geen inverse functie hebben?

Als het domein van $f$ beperkt wordt tot $[8, \rightarrow \rangle$ kan er wel een inverse functie worden gevonden.

**c** Toon aan dat het functievoorschrift van $f$ ook geschreven kan worden als $f(x) = \sqrt{(x - 4)^2 - 16}$.

**d** Stel het functievoorschrift van $f^{inv}$ op in het geval het domein van $f$ beperkt wordt tot $[8, \rightarrow \rangle$.




© Noordhoff Uitgevers bv

### Je kunt na een transformatie het functievoorschrift opstellen bij de beeldgrafiek.

**E1** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{3x - 9} + 4$.

**a** Door welke transformaties ontstaat de grafiek van $f$ uit de grafiek van de functie $g(x) = \sqrt{x}$?

**b** De grafiek van $f$ wordt gespiegeld in de $y$-as en daarna 5 naar rechts verschoven.
Stel het functievoorschrift op bij de beeldgrafiek.

**c** Beantwoord opdracht b ook voor het geval dat de transformaties in omgekeerde volgorde worden toegepast.

### Je kunt de symmetrie van een grafiek aantonen.

**E2** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$.

**a** Toon aan dat de grafiek van $f$ puntsymmetrisch is in $O$.

**b** Bereken exact de nulpunten van $f$.

**c** Los exact op $f(x) < -x$.

**d** Toon aan dat de grafiek van $g(x) = |\frac{1}{3}x^3 - 4x|$ symmetrisch is in de $y$-as.

### Je kunt de grafiek van een absolute waarde-functie tekenen.

**E3** Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 3)(x + 4)$.

**a** Plot en schets de grafiek van $f$.

**b** Bereken exact de nulpunten van $f$.

**c** Bereken exact de extreme waarden van $f$.

**d** Teken de grafiek van $g(x) = |(x^2 - 3)(x + 4)|$.

**e** Bereken exact de extreme waarden van $g$.

### Je kunt het functievoorschrift van de inverse functie van een gegeven functie *f* opstellen.

**E4** Stel het functievoorschrift op van de inverse functie.

**a** $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 7)$

**b** $f(x) = 2^{x-4}$

**c** $f(x) = {}^3\log(2x) - 5$

**d** $f(x) = \dfrac{1}{3x + 6}$


© Noordhoff Uitgevers bv

**E5** Herleid tot een gelijkwaardige formule waarbij $p$ is uitgedrukt in $q$.

**a** $q = \log(10p - 6)$

**b** $q = \dfrac{5p}{p - 5}$

**c** $q = \sqrt[3]{\frac{1}{3}p + 3} - 3$

**d** $q = \sqrt{p + 15}$

**E6** Geef aan door welke transformaties de grafiek van de functie $g$ kan ontstaan uit de grafiek van de functie $f$. Geef ook aan in welke volgorde deze transformaties moeten worden toegepast.

**a** $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = 3\sqrt{2x - 6}$

**b** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $g(x) = 2 + \dfrac{5}{x - 1}$

**E7** Plot de grafiek van de functie $f$ en noteer of $f$ even of oneven is of geen van beide. Toon bij de grafieken van de even en oneven functies de symmetrie aan door $f(a)$ te vergelijken met $f(-a)$.

**a** $f(x) = \sqrt{|3x|} + 3$

**b** $f(x) = \frac{1}{3}x + \dfrac{3}{x}$

**c** $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

**d** $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x}}$

**E8** Een route van 40 km wordt afgelegd met $x$ km/h op de heenweg en $y$ km/h op de terugweg. De gemiddelde snelheid over de heen- en terugweg is 100 km/h.

**a** Verklaar dat voor het verband tussen $x$ en $y$ moet gelden:

$$\frac{80}{100} = \frac{40}{x} + \frac{40}{y}$$

**b** Herleid de formule en druk $y$ uit in $x$.

**c** Waarom kan $x$ geen waarden kleiner of gelijk aan 50 aannemen?

**E9** Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = p + \sqrt{px + 4}$.

**a** Voor welke waarde van $p$ gaat de grafiek van $f_p$ door het punt (6, 6)?

**b** Voor welke waarde van $p$ is het domein van $f_p$ gelijk aan $\langle \leftarrow, 3]$?

**c** Door welke transformaties ontstaat de grafiek van $f_8$ uit de grafiek van $f_4$?

© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

# Kettingregel 10

SE CE K

## In dit hoofdstuk

In vwo B deel 1 heb je in hoofdstuk 5 gezien dat bij elke functie $f$ een afgeleide functie hoort waarmee je de helling in een punt van de grafiek van $f$ exact kunt berekenen. De afgeleide functie gebruik je onder andere bij het berekenen van hellingen, bij het bepalen van extreme waarden en bij het opstellen van een vergelijking van de raaklijn in een gegeven punt van de grafiek.
In hoofdstuk 5 ging het alleen over de afgeleide van veeltermfuncties.

In dit hoofdstuk ga je ook andere functies differentiëren waaronder wortelfuncties en gebroken functies en ook functies die samengesteld zijn uit meerdere functies. Het aantal regels om functies te kunnen differentiëren wordt daarmee uitgebreid.

In vwo B deel 3 wordt het aantal regels voor het differentiëren van functies nog verder uitgebreid en leer je ook nog andere soorten functies te differentiëren, zoals goniometrische functies, exponentiële functies en logaritmische functies.

## Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 30
- *Modelleren en abstraheren* opdracht 44
- *Logisch redeneren en bewijzen* opdracht 39

© Noordhoff Uitgevers bv

**Theorie**

De helling van de grafiek van de functie $f$ in een punt op de grafiek van $f$ bereken je met de afgeleide functie van $f$. Het bepalen van een afgeleide functie heet differentiëren.

De notatie voor de afgeleide functie is $f'$ of $\frac{dy}{dx}$

**Regels voor het differentiëren**

| functie | afgeleide functie |
|---|---|
| $f(x) = x^n$ | $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ |
| $f(x) = c$ | $f'(x) = 0$ |
| $g(x) = f(x) + c$ | $g'(x) = f'(x)$ |
| $g(x) = c \cdot f(x)$ | $g'(x) = c \cdot f'(x)$ |
| $s(x) = f(x) + g(x)$ | $s'(x) = f'(x) + g'(x)$ **(somregel)** |
| $s(x) = f(x) - g(x)$ | $s'(x) = f'(x) - g'(x)$ |

**Voorbeeld**

Differentieer.

$f(x) = x^5$

$g(x) = 3x^4 + 7x^2 + 8x - 1$

$h(x) = (x - 3)(x^2 + 8)$

$p = -9t^7 + 18$

**Oplossing**

$f'(x) = 5x^4$

$g'(x) = 12x^3 + 14x + 8$

$h(x) = x^3 - 3x^2 + 8x - 24$ dus

$h'(x) = 3x^2 - 6x + 8$

$\frac{dp}{dt} = -63t^6$

**V1** Differentieer. Werk zo nodig eerst de haakjes weg.

**a** $f(x) = 6x - 0{,}3x^{10}$

**b** $g(x) = 6x^3 + x + 2$

**c** $h(x) = 2(x^4 - x^2 + 3)$

**d** $k(x) = x^2(3x - 2x^3)$

**V2** Stel een formule op voor $\frac{ds}{dt}$. Werk eerst de haakjes weg.

**a** $s = 3(t + 5)^2$

**b** $s = \frac{1}{3}(t^4 - 5)$

**c** $s = (t^3 + 3)(2t - 3)$

**d** $s = 25t^2 + (t - 2)^2$

**V3**

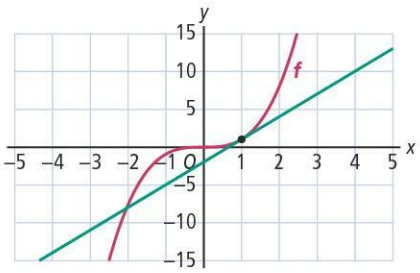
**a** Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}5x^2 + 3x$.
Bereken met de afgeleide de helling van de grafiek van $f$ in het punt $P(2, 8)$.

**b** Gegeven is de functie $g(x) = 5x^3 - 0{,}5x^2 - 7$.
Bereken exact de helling van de grafiek van $g$ in het punt $Q\left(1, -2\frac{1}{2}\right)$.

**V4** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = x^3$.
In het punt $(1, 1)$ is de raaklijn aan de grafiek van $f$ getekend.

**a** Bereken exact de richtingscoëfficiënt van deze raaklijn.

**b** Bereken exact de coördinaten van de punten op de grafiek van $f$ waar de helling gelijk is aan 6.





© Noordhoff Uitgevers bv

**V5** Gegeven is de functie $K(p) = -p^3 + 3p^2 + 7$.

**a** Los exact op $K'(p) = 0$.

**b** Ga met een plot van de grafiek na of er bij de gevonden waarden van $p$ sprake is van een minimum of een maximum van $K$.

**c** Bereken het maximum en het minimum van $K$.

**V6** Bereken exact de maxima en minima.

**a** $L(m) = -8m^2 + 16m - 3$

**b** $h(x) = x^3 + 4x^2 + 16x$

**c** $T(q) = -q^3 + 3q^2 + 9q$

**d** $w(r) = (3r - 4)^2 - 3r$

**Aanpak**

**Hoe stel je een vergelijking op van de raaklijn in een punt $P$ van een grafiek?**

**1** Bereken de helling $a$ in $P$ met behulp van $f'(x)$.

**2** Vul $a$ in bij de vergelijking $y = ax + b$.

**3** Bereken $b$ door de coördinaten van $P$ in te vullen.

**4** Schrijf een vergelijking van de raaklijn op.

**Voorbeeld**

Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van $f(x) = x^3 + 8x^2 - 15x$ in het punt $P(2, 10)$.

**Oplossing**

**1** $f'(x) = 3x^2 + 16x - 15$
$a = f'(2) = 29$

**2** $y = 29x + b$

**3** $10 = 29 \times 2 + b$
$b = -48$

**4** $y = 29x - 48$

**V7** Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van $f$ in het punt $P$.

**a** $f(x) = 0{,}5x^4 - 3$ en $P\left(1, -2\frac{1}{2}\right)$.

**b** $f(x) = -2x^3 - 0{,}25x^2 + 5$; de $x$-coördinaat van $P$ is 2.

**c** $f(x) = (x^2 + 2)(x^2 - 1)$ en $P(2, 18)$.

**V8** Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

**a** Bereken exact het maximum en het minimum van $f$.

**b** Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van $f$ in het snijpunt van de grafiek met de $y$-as.

**c** De grafiek van $f$ snijdt de $x$-as in het punt $A(-2, 0)$.
Op de grafiek ligt een punt $P$ zo, dat de raaklijnen in $A$ en $P$ aan de grafiek van $f$ evenwijdig zijn.
Bereken de coördinaten van $P$.

© Noordhoff Uitgevers bv

# 10.1 Machtsfuncties differentiëren

**Je leert** · hoe je een machtsfunctie differentieert

**Leerroutes**
· ondersteunend: 1—2—03—4—5—06—6
· doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7
· uitdagend: 1—2—3—4—6—7—U1

Max beweert dat zijn auto vanuit stilstand binnen 10 seconden een snelheid van 100 km per uur bereikt. Als zijn auto vertrekt, voldoet de afgelegde afstand aan de formule $s = 6t\sqrt{t}$, met $s$ in meters en $t$ in seconden.
· Is de bewering van Max in overeenstemming met deze formule?

**1** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{x}$

**a** Benader met het differentiequotiënt $\frac{f(2{,}001) - f(2)}{0{,}001}$ de helling van de grafiek van $f$ in het punt $\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

**b** Benader met een differentiequotiënt de helling van de grafiek van $f$ in het punt $(-1, -1)$.

**c** De helling van de grafiek van $f$ bereken je door in het differentiequotiënt $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ de waarde van $\Delta x$ naar 0 te laten naderen. Je moet de teller van het differentiequotiënt eerst herleiden tot één breuk. Op het blaadje staat een begin van deze herleiding.
Maak deze herleiding af.

$f(x + \Delta x) - f(x) =$
$\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} =$
$\frac{\dots}{x(x + \Delta x)} - \frac{\dots}{x(x + \Delta x)} = \dots$

**d** Gebruik deze herleiding om te laten zien dat $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ tot $-\frac{1}{x^2}$ nadert als $\Delta x \to 0$.

**e** Je kunt $f(x) = \frac{1}{x}$ ook schrijven als $f(x) = x^{-1}$.
Neem aan dat de regel voor het differentiëren van machtsfuncties ook geldt voor negatieve exponenten.
Laat zien dat dan ook volgt dat $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Als $f(x) = x^n$
dan $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.


© Noordhoff Uitgevers bv

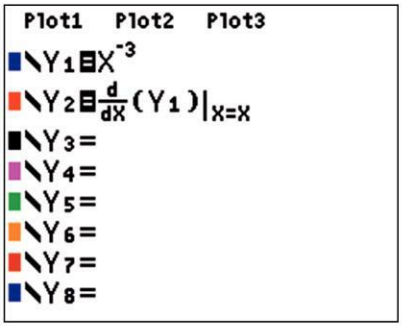
**2** Gegeven is de functie $g(x) = \frac{1}{x^3}$

**a** Het functievoorschrift $g(x)$ kun je schrijven als $g(x) = x^{-3}$. Hoe ziet $g'(x)$ eruit volgens de regel naast opdracht 1e?

**b** Maak met je rekenmachine een tabel met benaderingen van de hellingen van de grafiek van $g$ voor $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ en $x = 4$.

**c** Maak ook een tabel bij de afgeleide functie die je bij opdracht a hebt gevonden. Komen de tabellen met elkaar overeen?

**d** Beantwoord de vragen bij de opdrachten a, b en c voor de functie $h(x) = x^{0,7}$.




**Theorie**

De afgeleide functie van $f(x) = x^a$ is $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$ voor elke waarde van $a$.

**Voorbeeld**

Differentieer $f(x) = \frac{1}{x^4}$, $g(x) = 4x^{0,6}$ en $h(x) = \frac{5x+6}{x^3}$

Schrijf de afgeleide zonder negatieve exponent.

**Oplossing**

$f(x) = \frac{1}{x^4}$ geeft $f(x) = x^{-4}$

$f'(x) = -4x^{-5}$

$f'(x) = -\frac{4}{x^5}$

$g(x) = 4x^{0,6}$

$g'(x) = 2{,}4x^{-0,4}$

$g'(x) = \frac{2{,}4}{x^{0,4}}$

$h(x) = \frac{5x+6}{x^3}$ geeft $h(x) = \frac{5x}{x^3} + \frac{6}{x^3}$

$h(x) = 5x^{-2} + 6x^{-3}$ dus $h'(x) = -10x^{-3} - 18x^{-4}$

$h'(x) = -\frac{10}{x^3} - \frac{18}{x^4}$

Ondersteunende route → maak opdracht 03

**3** Differentieer. Schrijf de afgeleide zonder negatieve exponent.

H

**a** $p(x) = -2x^{-2,8}$

**b** $f(x) = \frac{2}{x^6} + \frac{1}{3x^2}$

**c** $g(x) = \frac{x+1}{x^2}$

**d** $k(x) = \frac{x^3 + 4x - 3}{x^4}$

**4** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x}$.

Schrijf $f(x)$ in de vorm $f(x) = c \cdot x^a$ en toon aan dat $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

**Theorie**

Ook wortelfuncties zijn machtsfuncties. Om een wortelfunctie te differentiëren schrijf je deze eerst in de vorm $f(x) = c \cdot x^a$.

In het bijzonder geldt: als $f(x) = \sqrt{x}$ dan is $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

**Voorbeeld**

Differentieer $f(x) = x^3\sqrt{x}$ en $g(x) = x^2(5 + \sqrt[3]{x})$.

**Oplossing**

$f(x) = x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $g(x) = 5x^2 + x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$

$f(x) = x^{3\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $g(x) = 5x^2 + x^{2\frac{1}{3}}$

$f'(x) = 3\frac{1}{2}x^{2\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $g'(x) = 10x + 2\frac{1}{3}x^{1\frac{1}{3}}$

$f'(x) = 3\frac{1}{2}x^2\sqrt{x}$ $\qquad$ $g'(x) = 10x + 2\frac{1}{3}x\sqrt[3]{x}$

**5** Gegeven is de functie $f(t) = 4t^3 \cdot \frac{2}{\sqrt{t}}$

**a** Laat zien dat je $f(t)$ kunt schrijven als $f(t) = 8t^{2\frac{1}{2}}$.

**b** Toon aan dat $f'(t) = 20t\sqrt{t}$.

Ondersteunende route → maak opdracht O6

**6** H Differentieer. Schrijf de afgeleide zonder negatieve of gebroken exponent.

**a** $a(x) = \sqrt[5]{x} + 2\sqrt{x}$

**b** $f(x) = 5x^2\sqrt{x}$

**c** $k(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{4x}{\sqrt[4]{x}} + \frac{6}{5x}$

**d** $r(x) = x(3x + \sqrt{x})$

**e** $h(x) = (4x - \sqrt{x})^2$

**f** $j(x) = \frac{2x + 4}{x\sqrt{x}}$

**7** Uit onderzoek blijkt dat de hoeveelheid energie die een parkiet per meter bij een bepaalde snelheid verbruikt, bij benadering berekend kan worden met de formule $D = \frac{6{,}0}{v^2} + 0{,}00050v^2 - 0{,}033$ met $D$ het energieverbruik per meter in joule per meter (J/m) en $v$ de snelheid in meters per seconde (m/s). De snelheid waarbij het energieverbruik per meter minimaal is, heet de kruissnelheid. Om die kruissnelheid te berekenen is de afgeleide van $D$ nodig.
Bereken deze kruissnelheid in m/s. Rond af op één decimaal.
(*Ontleend aan CE havo wiskunde B 2012 1e tijdvak*)

Uitdagende route → maak opdracht U1


© Noordhoff Uitgevers bv

## Ondersteunende opdrachten

**O3** Op het blaadje is een begin gemaakt met het differentiëren van $f(x) = \dfrac{8x^2 - 3}{x^4}$

**a** Leg uit wat er in stap 1 is gebeurd.
**b** Leg uit wat er in stap 2 is gebeurd en vul op de puntjes de ontbrekende exponent in.
**c** De afgeleide functie van $f(x) = x^a$ is $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$. Gebruik deze regel om stap 3 af te maken.
**d** Maak het functievoorschrift van $f'$ in stap 4 af.

$f(x) = \dfrac{8x^2 - 3}{x^4}$

$f(x) = \dfrac{8x^2}{x^4} - \dfrac{3}{x^4}$ 1

$f(x) = 8x^{-2} - 3x^{\cdots}$ 2

$f'(x) = -16x^{\cdots} + \ldots x^{\cdots}$ 3

$f'(x) = -\dfrac{16}{x^{\cdots}} + \dfrac{\cdots}{x^{\cdots}}$ 4

Differentieer. Schrijf de afgeleide zonder negatieve exponent.

**e** $g(x) = 15x^{-3,2}$

**f** $h(x) = \dfrac{8}{x^4} + \dfrac{1}{4x^5}$

**g** $i(x) = \dfrac{4x^2 + 6}{x^3}$

**h** $j(x) = \dfrac{x^4 + 6x^2 + 10}{x^6}$

**O6** Op het blaadje zie je hoe Dave de afgeleide vindt van de functie $f(x) = \dfrac{8x + 5\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}}$

**a** In stap 1 heeft Dave de breuk gesplitst in twee breuken. Leg uit hoe Dave aan de noemer $x^{2\frac{1}{2}}$ komt.
**b** Welke rekenregel voor machten gebruikt hij in stap 2?
**c** Verklaar de factor $-12$ in stap 3.
**d** Leg uit wat Dave in stap 4 heeft gedaan.
**e** In stap 5 heeft hij de afgeleide zonder gebroken exponent geschreven. Waarom schrijft hij $x^2$ voor de wortel?

$f(x) = \dfrac{8x + 5\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}}$ Dave

$f(x) = \dfrac{8x}{x^{2\frac{1}{2}}} + \dfrac{5x^{\frac{1}{2}}}{x^{2\frac{1}{2}}}$ 1

$f(x) = 8x^{-1\frac{1}{2}} + 5x^{-2}$ 2

$f'(x) = -12x^{-2\frac{1}{2}} - 10x^{-3}$ 3

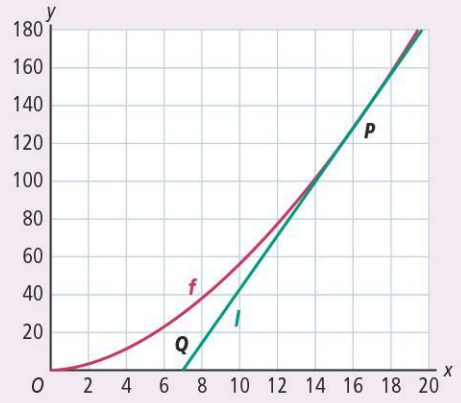
$f'(x) = -\dfrac{12}{x^{2\frac{1}{2}}} - \dfrac{10}{x^3}$ 4

$f'(x) = -\dfrac{12}{x^2\sqrt{x}} - \dfrac{10}{x^3}$ 5

## Uitdagende opdrachten

**U1** Lijn $l$ met vergelijking $y = 14x - 98$ snijdt de $x$-as in punt $Q$ en raakt de grafiek van de functie $f(x) = x\sqrt[4]{x^3}$ in punt $P$.

Bereken exact de oppervlakte van $\triangle OPQ$.




© Noordhoff Uitgevers bv

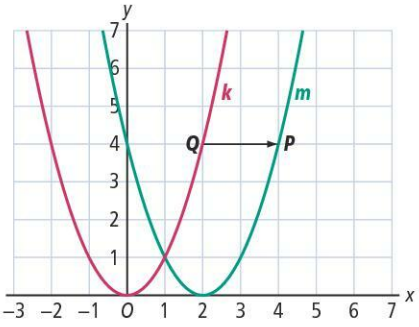
# 10.2 Samengestelde functies

**Je leert**
- wat een samengestelde functie of kettingfunctie is
- hoe je herkent uit welke functies een samengestelde functie is opgebouwd

**Leerroutes**
- ondersteunend: 8—9—O10—10—11—12—O13
- doorlopend: 8—9—10—11—12—13—14
- uitdagend: 8—9—10—11—13—14—U2

Een stalen vat is gevuld met gas. Als het vat verwarmd wordt, neemt ook de temperatuur $T$ in °C van het gas toe, en daarmee de druk $p$ in hPa van het gas in het afgesloten vat. $T$ voldoet aan de formule $T = 20 + 0{,}5t$ met $t$ de tijd in minuten en $p$ aan de formule $p = 3{,}4T + 932$.
- Hoe kun je de druk van het gas op een bepaald tijdstip uitrekenen zonder eerst de temperatuur te berekenen?

**8** Op de grafiek van de functie $k(x) = x^2$ ligt het punt $Q(2, 4)$. Bij de verschuiving van 2 naar rechts is de grafiek van de functie $m$ de beeldgrafiek van de grafiek van $k$ en is punt $P$ het beeld van $Q$.




**a** Geef het functievoorschrift van $m$.

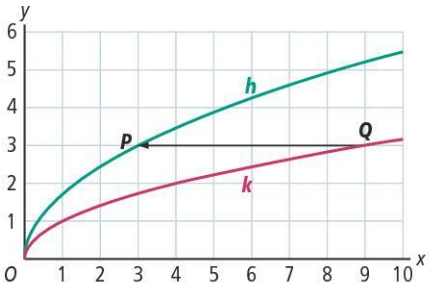
**b** Bereken exact de helling van de grafiek van $k$ in $Q$. Waarom weet je nu de helling van de grafiek van $m$ in $P$?

**c** Welke waarde van $x$ moet je bij $k'(x)$ invullen om de helling in $P$ te berekenen? Vul in: $m'(4) = k'(\ldots)$.

**d** Vul in: $m'(x) = k'(x - \ldots)$.

**e** Geef het functievoorschrift van $m'$.

**9** Gegeven zijn de grafieken van $k(x) = \sqrt{x}$ en $h(x) = \sqrt{3x}$. Op de grafiek van $k$ ligt het punt $Q(9, 3)$ en op de grafiek van $h$ het punt $P(3, 3)$. Bij een vermenigvuldiging met $\frac{1}{3}$ ten opzichte van de $y$-as is de grafiek van $h$ de beeldgrafiek van de grafiek van $k$ en is $P$ het beeld van $Q$.




**a** De raaklijn in $Q$ heeft als vergelijking $y = \frac{1}{6}x + 1\frac{1}{2}$.

Geef een vergelijking van het beeld van deze raaklijn bij vermenigvuldiging met $\frac{1}{3}$ ten opzichte van de $y$-as.

**b** Hoe groot is de helling in het beeldpunt $P$?

**c** Vul in: de helling in punt $P = \ldots \times$ de helling in punt $Q$, dus $h'(3) = \ldots \cdot k'(9)$.

**d** Vul in: $h'(x) = \ldots \cdot k'(..x)$.

**e** Geef het functievoorschrift van $h'$.


© Noordhoff Uitgevers bv

**Theorie**

Als $g(x) = f(x - b)$ dan is $g'(x) = f'(x - b)$.

Als $g(x) = f(ax)$ dan is $g'(x) = a \cdot f'(ax)$.

**Voorbeeld**

Differentieer $f(x) = (x + 7)^3$ en $h(x) = \sqrt{7x}$.

**Oplossing**

$f'(x) = 3(x + 7)^2$ en $h'(x) = 7 \cdot \frac{1}{2\sqrt{7x}}$ ofwel $h'(x) = \frac{7}{2\sqrt{7x}}$

Ondersteunende route → maak opdracht O10

**10** Differentieer.

**a** $f(x) = (x - 3)^5$

**b** $W = \sqrt{p + 7}$

**c** $g(x) = \frac{4}{x + 5}$

**d** $y = \sqrt{-3x}$

**e** $h(x) = (x + 8)^4$

**f** $k(x) = \sqrt[3]{5x}$

**g** $r(x) = \frac{6}{x - 2}$

**h** $P = \frac{13}{(9t)^8}$

Als de grafiek van een functie $f$ horizontaal verschoven wordt en vervolgens vermenigvuldigd ten opzichte van de $y$-as, ontstaat de grafiek van de functie $g(x) = f(ax + b)$. Een nieuwe functie kan ook ontstaan door twee functies achter elkaar toe te passen. Daar gaan de volgende opdrachten over.

**11** **a** Gegeven zijn de functies $f(x) = 4x - 2$ en $g(x) = 2^{\frac{1}{2}x}$.
Je berekent $g(f(3))$ door eerst $f(3)$ te berekenen en de uitkomst hiervan in het functievoorschrift $g(x)$ in te vullen.
Ga na dat $g(f(3)) = 32$.

$3 \xrightarrow{f(x) = 4x - 2} 10 \xrightarrow{g(x) = 2^{\frac{1}{2}x}} 2^5$

**b** Gegeven is de functie $k(x) = 2^{2x-1}$.
Laat zien dat $k(x) = g(f(x))$.

$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$

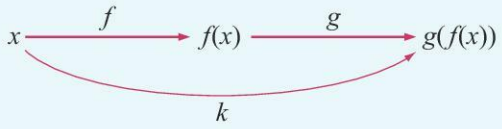
**c** Gegeven zijn de functies $p(x) = 2x + 1$ en $q(x) = \sin(x)$.
Geef het functievoorschrift van $r(x) = q(p(x))$.

**d** $m(x) = \log(4x - 3)$ is te schrijven als $m(x) = w(v(x))$.
Geef functievoorschriften van $v$ en $w$.

© Noordhoff Uitgevers bv

**Theorie**

Als $k(x)$ wordt berekend door eerst $x$ in te vullen in het functievoorschrift van de functie $f$ en dat resultaat in te vullen in het functievoorschrift van de functie $g$, dan heet de functie $k$ een samenstelling van $f$ en $g$. In formule: $k(x) = g(f(x))$.
Een samengestelde functie heet ook wel een kettingfunctie.




**Voorbeeld 1**

Geef het functievoorschrift $k(x) = g(f(x))$ als

$f(x) = x^3$ en $g(x) = \sqrt{x} + 2$

**Oplossing**

$k(x) = g(x^3) = \sqrt{x^3} + 2$

**Voorbeeld 2**

De functie $h(x) = \dfrac{5}{(3x^2 + 4)^3}$ is samengesteld uit de functies $f$ en $g$ met $h(x) = g(f(x))$.
Geef functievoorschriften voor $f$ en $g$.

**Oplossing**

Kies $f(x) = 3x^2 + 4$ en $g(x) = \dfrac{5}{x^3}$

**12** H Geef functievoorschriften van $k(x) = g(f(x))$ en $h(x) = f(g(x))$.

**a** $f(x) = \log(x)$ en $g(x) = 4 - 2x$

**b** $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = 2x - 3$

**c** $f(x) = 3^x$ en $g(x) = \dfrac{3}{x}$

**d** $f(x) = 2^x$ en $g(x) = {}^2\log(x)$

Ondersteunende route → maak opdracht O13

**13** H Gegeven zijn functies van de vorm $k(x) = g(f(x))$.
Geef mogelijke functievoorschriften van $g$ en $f$.

**a** $k(x) = \sqrt{3x^2 - 5}$

**b** $k(x) = \dfrac{2}{3x^4 + 7}$

**c** $k(x) = \log(x^2 - 3x)$

**d** $k(x) = \dfrac{2}{\sin(x)}$

**14** Gegeven is de functie $k(x) = -3 + \sqrt{5x}$. Op de grafiek van $k$ liggen de punten $A\left(\frac{1}{5}, -2\right)$ en $B(5, 2)$.

**a** Geef een vergelijking van de lijn $l$ door $A$ en $B$.

**b** Bereken exact de coördinaten van het punt op de grafiek van $k$ waarin de raaklijn aan de grafiek evenwijdig is met $l$.

Uitdagende route → maak opdracht U2


© Noordhoff Uitgevers bv

## Ondersteunende opdrachten

**O10** Op het blaadje staan enkele functies en hun afgeleiden.

**a** De grafiek van $g$ ontstaat uit die van $f$ door een translatie van 4 naar links.
Leg uit waarom dat verband ook geldt voor de grafieken van $f'$ en $g'$.

**b** Bepaal de afgeleide van $h(x) = (x - 7)^4$.

**c** Hoe ontstaat de grafiek van $k(x) = 8\sqrt{3x}$ uit die van $j(x) = 8\sqrt{x}$?

**d** Leg uit waarom in het functievoorschrift van $k'$ de breuk met 3 vermenigvuldigd wordt.

**e** Bepaal de afgeleide van $m(x) = 5\sqrt{6x}$.

$f(x) = x^3$ $\quad g(x) = (x + 4)^3$

$f'(x) = 3x^2$ $\quad g'(x) = 3(x + 4)^2$

$j(x) = 8\sqrt{x}$ $\quad k(x) = 8\sqrt{3x}$

$j'(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$ $\quad k'(x) = 3 \cdot \frac{4}{\sqrt{3x}}$

$k'(x) = \frac{12}{\sqrt{3x}}$

**O13**

**a** Gegeven is de functie $k(x) = 2^{6x-3}$ met $k(x) = g(f(x))$.
Vul in: $g(x) = \ldots$ en $f(x) = 6x - 3$.

**b** Gegeven is de functie $k(x) = \sqrt{8 - x^2}$.
Vul in: De functie $k$ is ontstaan door in de functie $g(x) = \sqrt{x}$ de $x$ te vervangen door $f(x) = \ldots$

**c** Vul op het blaadje de functievoorschriften van $f$ en $g$ in.

Gegeven zijn functies van de vorm $k(x) = g(f(x))$.
Geef mogelijke functievoorschriften van $g$ en $f$.

**d** $k(x) = (7x^2 - 2)^5$

**e** $k(x) = \dfrac{3}{\log(x)}$

**f** $k(x) = \sqrt[3]{8 - 9x}$

**g** $k(x) = \dfrac{-4}{\cos(x)}$

$k(x) = g(f(x))$ houdt in dat je in het functievoorschrift van $g$ elke $x$ vervangt door $f(x)$.

$k(x) = \frac{5}{4x^2 - 9}$ is van de vorm $k(x) = g(f(x))$ met

$g(x) = \frac{5}{\ldots}$ en $f(x) = \ldots$

## Uitdagende opdrachten

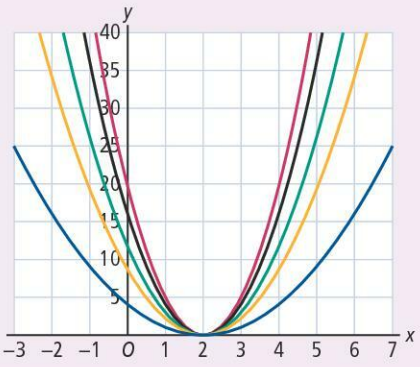
**U2** Gegeven is voor verschillende waarden van $a$ de grafiek van de functie $f_a(x) = a(x - 2)^2$.

**a** Bereken exact voor welke waarde van $a$ de helling in het punt van de grafiek van $f$ met $x$-coördinaat 1 gelijk is aan $-6$.

**b** In welk punt van de grafiek van $f_1$ is de helling 1?

**c** In welk punt van de grafiek van $f_4$ is de helling 1?

**d** Toon aan dat voor elke $a \neq 0$ geldt:
Het punt op de grafiek van $f_a$ waarin de helling van de grafiek van $f_a$ gelijk is aan 1, ligt op de lijn $y = \frac{1}{2}x - 1$.




© Noordhoff Uitgevers bv

# 10.3 De kettingregel

**Je leert**
- hoe je afgeleide van een kettingfunctie bepaalt

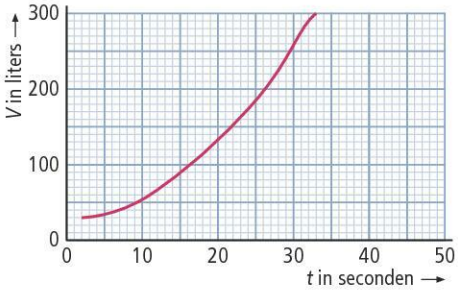
**Leerroutes**
- ondersteunend: 15—16—017—18—19—020—20—21—22—23
- doorlopend: 15—16—17—18—19—20—21—22—23—24
- uitdagend: 15—16—17—18—20—21—23—24—U3—U4

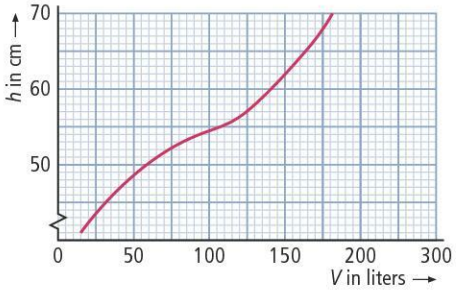
Yorick gaat op zoek naar de afgeleide van de functie $f(x) = (x^2 + 5)^3$. Omdat de afgeleide van $g(x) = x^3$ gelijk is aan $g'(x) = 3x^2$ probeert hij als afgeleide $f'(x) = 3(x^2 + 5)^2$. Controle met de rekenmachine geeft de drie kolommen:

$y_1 = (x^2 + 5)^3$, $y_2 = 3(x^2 + 5)^2$ en $y_3 = \frac{d}{dx}(y_1)$

- Doe op grond van deze kolommen een voorspelling voor $f'(x)$.

| X | Y1 | Y2 | Y3 |
|---|---|---|---|
| 0 | 125 | 75 | 0 |
| 1 | 216 | 108 | 216 |
| 2 | 729 | 243 | 972 |
| 3 | 2744 | 588 | 3528 |
| 4 | 9261 | 1323 | 10584 |
| 5 | 27000 | 2700 | 27000 |
| 6 | 68921 | 5043 | 60516 |
| 7 | 157464 | 8748 | 122472 |




**15** Gegeven zijn grafieken die het verband aangeven tussen tijd, volume en hoogte bij het vullen van een waterreservoir.

**a** Hoe groot is $\frac{\Delta V}{\Delta t}$, de gemiddelde vulsnelheid in liters per seconde, gedurende het tijdsinterval [10, 20]?

**b** Hoe groot is $\frac{\Delta h}{\Delta V}$, de gemiddelde verandering van de hoogte in cm per liter, gedurende dat tijdsinterval?

**c** Hoe groot is $\frac{\Delta h}{\Delta t}$, de gemiddelde stijgsnelheid in cm per seconde, gedurende dat tijdsinterval?

**d** Leg uit dat geldt: $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{\Delta h}{\Delta V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t}$
Ga na dat de eenheden in deze formulering kloppen.


© Noordhoff Uitgevers bv

**16** Bij het vullen van een ander waterreservoir gelden de functies $V(t) = 2t + 50$ en $h(V) = 2\sqrt{V}$ met $t$ in seconden, $V$ in liters en $h$ in cm. In deze opdracht ga je onderzoeken hoe snel het water stijgt op het tijdstip $t = 10$.

**a** Bereken $V'(10)$, de snelheid waarmee het volume toeneemt op $t = 10$.

**b** Hoeveel liter water zit er in het reservoir op $t = 10$?

**c** Bereken $h'(V)$ op $t = 10$.

**d** Druk $h$ uit in $t$.

**e** Met behulp van een klein interval, bijvoorbeeld $[10; 10{,}001]$, kun je een schatting maken van de snelheid waarmee het water stijgt op $t = 10$.
Bereken de stijgsnelheid van het water op $t = 10$.

**f** Laat zien dat voor $t = 10$ geldt: $h'(t) = h'(V) \cdot V'(t)$.

**Theorie**

De afgeleide van de kettingfunctie $k(x) = g(f(x))$ is de functie $k'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.
Deze regel heet de kettingregel.
Bij formules noteer je de kettingregel meestal met differentiaalquotiënten, bijvoorbeeld: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt}$

**Voorbeeld**

Differentieer $k(x) = 6(x^2 - 7)^4$.

**Oplossing**

$k(x) = g(f(x))$ met

$f(x) = x^2 - 7$ en $g(x) = 6x^4$

$f'(x) = 2x$ en $g'(x) = 24x^3$

$k'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ geeft

$k'(x) = 24(x^2 - 7)^3 \cdot 2x$ ofwel

$k'(x) = 48x(x^2 - 7)^3$

Ondersteunende route → maak opdracht 017

**17** Differentieer.

H

**a** $f(x) = (3x^2 + 8)^4$

**b** $w(x) = (1 - 3x^3)^6$

**c** $s(t) = (t^3 + 7)^3$

**d** $h(x) = (5x^{1{,}3} - 12)^7$

**e** $p(q) = (2 - \sqrt{q})^5$

**f** $k(t) = \left(1 - \frac{1}{t}\right)^3$

**18** Gegeven is de functie $f(x) = (x^3 + 4x)^5$.
Casper maakt een fout bij het differentiëren en vindt $f'(x) = 15x^2(x^3 + 4x)^4 + 4$.

**a** Wat doet Casper fout?

**b** Verbeter de fout en schrijf de juiste afgeleide op.

Casper

$f'(x) = 5(x^3 + 4x)^4 \cdot 3x^2 + 4$

$f'(x) = 15x^2(x^3 + 4x)^4 + 4$

Fout!

© Noordhoff Uitgevers bv

**19** Differentieer.

**a** $f(x) = (x^2 + x + 311)^4$ **b** $g(x) = (3x^{2,7} - 19^{1,7})^3$

Ondersteunende route → maak opdracht O20

**20** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ kun je schrijven als $f(x) = (x^2 + 1)^{-1}$.
Differentieer. Schrijf de afgeleide zonder negatieve exponent.

**a** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ **c** $h(x) = \dfrac{3}{(x + 4)^2 - 4}$

**b** $g(x) = \dfrac{5}{(2x^3 - 4x)^2}$ **d** $k(x) = \dfrac{-4}{(x^4 + 7x)^3}$

**21** $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ kun je schrijven als $f(x) = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - x$.
Differentieer. Schrijf de afgeleide zonder negatieve of gebroken exponent.

**a** $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ **c** $h(x) = \sqrt{2x^3 - 4x} + 5x$

**b** $g(x) = x^2 + \sqrt{4 - x}$ **d** $k(x) = 4x - \sqrt{4x - 4x^4}$

**22** H Differentieer. Schrijf de afgeleide zonder negatieve of gebroken exponent.

**a** $f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}$ **c** $g(a) = 15a\sqrt{3a}$

**b** $y = \dfrac{12}{\sqrt{3x^4 - 2}}$ **d** $p = \dfrac{6}{(3t^2 - 4t)^3}$

**23** Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x^2 - 11}}$

**a** Bepaal het domein van $f$.
**b** Stel een vergelijking op van de raaklijn in het punt van de grafiek met $x = 6$.

**24** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$.

**a** Toon aan dat $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{16 - x^2}}$

**b** Plot de grafieken van $f$ en $f'$.
Hoe zie je aan deze grafieken dat het domein van $f$ groter is dan het domein van $f'$?

Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4


© Noordhoff Uitgevers bv

## Ondersteunende opdrachten

**O17** Gegeven is de functie $k(x) = (7x^3 - 9)^5$.
Je gaat in deze opdracht deze functie differentiëren.

**a** Vul in: $k(x) = g(f(x))$ met $g(x) = x^5$ en $f(x) = \ldots$

**b** Vul in: $g'(x) = 5x^4$ dus $g'(f(x)) = 5(\ldots)^4$.

**c** Controleer dat $f'(x) = 21x^2$.

**d** De kettingregel luidt $k'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.
Vul het blaadje verder in.

$g'(x) = 5x^4$ dus
$g'(f(x)) = 5(\ldots)^4$
$f'(x) = 21x^2$
$k'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ geeft
$k'(x) = 5(\ldots)^4 \cdot 21x^2$
$k'(x) = \ldots x^2(\ldots)^4$

Differentieer.

**e** $k(x) = (6x^3 + 1)^3$

**f** $w(x) = (12 - 5x^2)^4$

**g** $m(p) = (4p^5 + 2)^4$

**h** $h(x) = (2x^{1,4} + 2{,}5)^6$

**i** $v(a) = (\sqrt{a} + 8)^3$

**j** $f(x) = \left(\frac{4}{x} + 2\right)^3$

**O20** Je gaat de functie $f(x) = \frac{6}{(3x^2 + 5x)^4}$ differentiëren.

Je kunt $f(x)$ schrijven als $f(x) = 6(3x^2 + 5x)^{-4}$.

Er geldt $f(x) = g(h(x))$ met $g(x) = 6x^{-4}$ en $h(x) = 3x^2 + 5x$.

**a** Vul het blaadje verder in.

**b** Leg uit waarom de haakjes om $6x + 5$ noodzakelijk zijn.

$g(x) = 6x^{-4}$ en $h(x) = 3x^2 + 5x$
$f'(x) = -24(h(x))^{-5} \cdot h'(x)$
$f'(x) = -24(\ldots)^{-5} \cdot (6x + 5)$
$f'(x) = \frac{-24(6x + 5)}{(\ldots)^5}$

## Uitdagende opdrachten

**U3** Differentieer.

**a** $h(x) = \sqrt{(4x - 2)^5 + 3}$

**b** $g(x) = \frac{16}{(3x - 1)\sqrt{3x - 1}}$

**c** $f(x) = (18x^2 + 6)\sqrt{3x^2 + 1}$

**d** $k(x) = \frac{2x^2 + x + 6}{\sqrt{2x^2 + x}}$

**e** $m(x) = \frac{x + 8}{x + 2}$

**f** $j(x) = x\sqrt{x + 4}$

**U4** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2x - 1} + x$.

De lijn $y = ax$ raakt de grafiek van $f$.
Bereken exact de waarde van $a$.

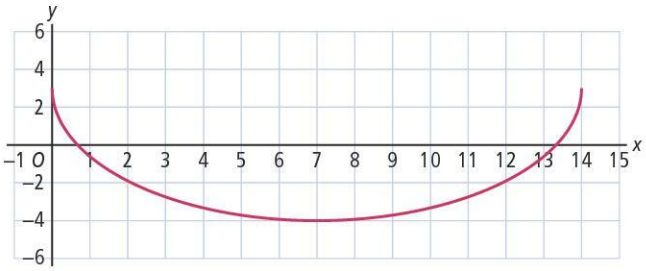
© Noordhoff Uitgevers bv

# 10.4 Extreme waarden

**Je leert**
- wat randextremen zijn
- hoe je exact de extreme waarden van een functie berekent

**Leerroutes**
- ondersteunend: 25—26—27—28—O29—29—30
- doorlopend: 25—26—27—28—29—30—31
- uitdagend: 25—27—28—29—30—U5—U6

De functie $f(x) = 3 - \sqrt{14x - x^2}$ heeft bij $x = 7$ een minimum, want daar is de afgeleide $f'(x)$ gelijk aan 0.
De afgeleide is echter alléén bij $x = 7$ gelijk aan 0. Toch heeft de functie een maximale waarde.
- Hoe zit dat?




**25** Gegeven is de functie $g(x) = 2{,}4x^5 - 16x^3$.
- **a** Differentieer $g$.
- **b** Los exact op $g'(x) = 0$.
- **c** Plot de grafiek van $g$ en ga na bij welke waarden van $x$ de grafiek van $g$ een top heeft.
- **d** Bereken van elke top de $y$-coördinaat en geef aan of het een minimum of een maximum betreft.

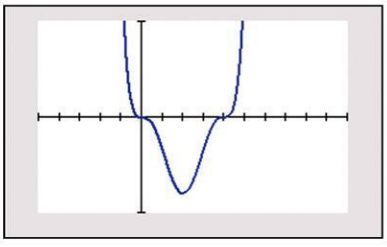
**Aanpak**

**Hoe bereken je exact de extreme waarden van een functie *f*?**
1. Differentieer $f$.
2. Los exact op $f'(x) = 0$.
3. Plot de grafiek en kijk of er sprake is van een minimum of een maximum.
4. Bereken de extreme waarden door de gevonden $x$-waarden in te vullen in $f(x)$.

**Voorbeeld**

Bereken de extreme waarden van de functie $f(x) = (x^2 - 4x)^3$.

**Oplossing**
1. $f'(x) = 3(x^2 - 4x)^2 \cdot (2x - 4)$
2. $3(x^2 - 4x)^2 \cdot (2x - 4) = 0$ geeft $x^2 - 4x = 0$ of $2x - 4 = 0$
   $x = 0$ of $x = 4$ of $x = 2$
3. Zie de plot hiernaast. Bij $x = 0$ en $x = 4$ is er geen sprake van een extreme waarde.
4. $f$ heeft een minimum $f(2) = -64$.




© Noordhoff Uitgevers bv

**26** Bereken exact de extreme waarden.

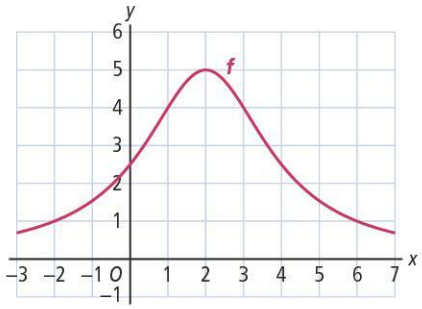
H

**a** $f(x) = x^4 - 4x^2$

**b** $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 10}$

**c** $f(x) = (x^3 - 1)^4$

**27** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{20}{(x-2)^2 + 4}$




**a** Leg uit hoe je met behulp van het functievoorschrift kunt beredeneren dat $f$ een extreme waarde heeft.

**b** De grafiek suggereert dat $f$ maar één extreme waarde heeft. Ga met behulp van de afgeleide na dat dit inderdaad het geval is.

**c** Bereken exact de extreme waarde van $f$.

**28** Gegeven is de functie $h(x) = 1 + 2\sqrt{3 - 2x}$.

**a** Geef het domein en het bereik van $h$.

**b** Onderzoek of de vergelijking $h'(x) = 0$ oplossingen heeft.

**c** Ga met een plot na of $h$ een extreme waarde heeft.

**Theorie**

Als de grafiek van een functie een randpunt heeft, zoals bij een wortelfunctie, dan heeft die functie daar een (rand)maximum of (rand)minimum. Randminima en randmaxima noem je ook wel randextremen.

**Voorbeeld**

Gegeven is de functie $h(x) = 2 + \frac{1}{2}\sqrt{12x - 2x^2}$.
Bereken exact de extreme waarde van $h$.
Bereken ook exact de randextremen.

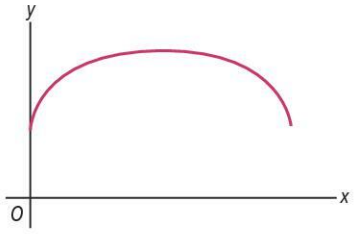
**Oplossing**

$h'(x) = \frac{1}{2} \cdot \dfrac{12 - 4x}{2\sqrt{12x - 2x^2}}$ ofwel $h'(x) = \dfrac{3 - x}{\sqrt{12x - 2x^2}}$

$h'(x) = 0$ geeft $x = 3$.

$h(3) = 2 + \frac{1}{2}\sqrt{18} = 2 + 1\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$h$ heeft een maximum $h(3) = 2 + 1\frac{1}{2}\sqrt{2}$.




Voor het domein van $h$ geldt $12x - 2x^2 \geq 0$.
$2x(6 - x) = 0$ geeft randpunten $(0, 2)$ en $(6, 2)$.
$h$ heeft randminima $h(0) = 2$ en $h(6) = 2$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O29

**29** H Bereken exact de extreme waarden.
Vermeld ook eventuele randextremen.

**a** $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

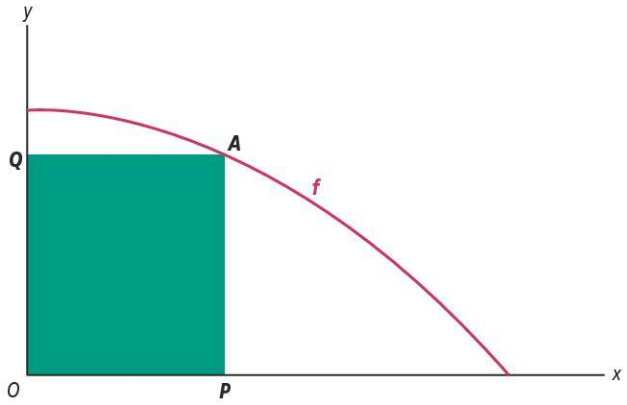
**b** $g(x) = (x^3 - 3x)^4$

**c** $h(x) = x^2 - 4x\sqrt{x}$

**d** $n(x) = 2x + \sqrt{12 - 2x^2}$

**e** $p(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

**f** $q(x) = \dfrac{-5}{x^2 + 3}$

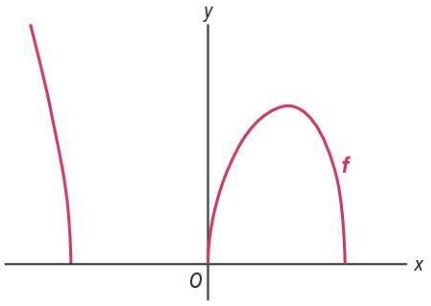



**30** Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 16$ met $x > 0$.
Op de grafiek van $f$ wordt tussen de $y$-as en het snijpunt van de grafiek met de $x$-as een punt $A$ gekozen.
De projecties van $A$ op de $x$-as en $y$-as zijn de punten $P$ en $Q$.
Bereken exact de maximale oppervlakte van rechthoek $OPAQ$.

**31** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{12x - x^3}$.

**a** In de figuur zie je dat de grafiek een top heeft.
Bereken exact de coördinaten van de top.

**b** Bereken exact het domein van $f$.




Uitdagende route → maak opdracht U5 en U6


© Noordhoff Uitgevers bv

## Ondersteunende opdrachten

**O29** Gegeven is de functie $f(x) = x + \sqrt{32 - x^2}$.
Gevraagd wordt de extreme waarden van $f$ exact uit te rekenen, inclusief de randextremen. Op het blaadje is hiermee een begin gemaakt.

**a** In stap 1 is het functievoorschrift herschreven zodat in stap 2 de functie gedifferentieerd kan worden. Waar komt in stap 2 de factor $-2x$ vandaan?

**b** Laat zien hoe stap 3 uit stap 2 volgt.

**c** In stap 4 wordt de vergelijking $f'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{32 - x^2}}$ opgelost.
Ga na dat $x = 4$ wel een oplossing is en $x = -4$ niet.

**d** Plot de grafiek van $f$. Heeft $f$ bij $x = 4$ een maximum of een minimum? Bereken deze extreme waarde.

**e** In de plot zie je ook dat de grafiek van $f$ twee randpunten heeft. In deze randpunten heeft $f$ een randextreem.
Bereken exact de coördinaten van de randpunten.

**f** Vul in:
$f$ heeft een maximum $f(4) = \ldots$
$f$ heeft een randminimum $f(\ldots) = \ldots$
$f$ heeft een randminimum $f(\ldots) = \ldots$

$f(x) = x + \sqrt{32 - x^2}$

$f(x) = x + (32 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ 1

$f'(x) = 1 + \frac{1}{2}(32 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2x$ 2

$f'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{32 - x^2}}$ 3

$f'(x) = 0$ geeft $\dfrac{x}{\sqrt{32 - x^2}} = 1$ 4

$\sqrt{32 - x^2} = x$

$32 - x^2 = x^2$

$x = 4$ of $x = -4$

De grafiek van $f$ heeft een randpunt als $32 - x^2 = 0$. 5

## Uitdagende opdrachten

**U5** Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = ax + \dfrac{4}{2x - 7}$

**a** Bereken exact de extreme waarden van $f_2$.

**b** Bereken exact de extreme waarden van $f_{\frac{1}{2}}$.

**c** Onderzoek voor welke waarden van $a$ de functie $f_a$ geen extreme waarden heeft.

**d** Voor een zekere waarde van $a$ heeft $f_a$ een maximum bij $x = 3$. Bij die waarde van $a$ heeft $f_a$ ook een minimum.
Bereken hoe groot dat minimum is.

**U6** De functie $g(x) = a\sqrt{4x^2 - x^4 + b}$ heeft een maximum 5.

Verder heeft $g$ een randminimum bij $x = \sqrt{3}$.
Bereken exact $a$ en $b$.

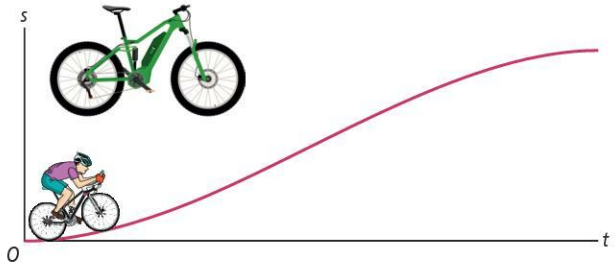
© Noordhoff Uitgevers bv

# 10.5 Buigpunten

**Je leert**
- wat een buigpunt is
- hoe je de coördinaten van een buigpunt exact berekent

**Leerroutes**
- ondersteunend: 32—033—34—35—36—037—37—38
- doorlopend: 32—33—34—35—36—37—38—39
- uitdagend: 32—33—34—35—36—37—38—U7

Sjoerd rijdt een stukje met zijn e-bike.
De grafiek geeft het verband tussen de afgelegde afstand $s$ in meters die Sjoerd na $t$ in minuten heeft afgelegd.
- Welke informatie geeft de grafiek over de rit die Sjoerd gemaakt heeft met zijn e-bike?



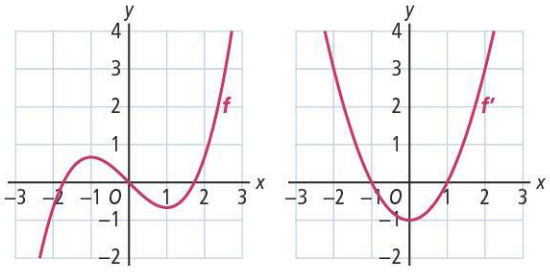

**32** Gegeven zijn de grafiek en de hellinggrafiek van een functie $f$.

**a** Op het interval $[-1, 1]$ daalt $f$. Wat geldt er op dat interval voor de afgeleide $f'(x)$?

**b** Is de daling op $[-1, 0]$ toenemend of afnemend? Neemt de afgeleide toe of af op dit interval?

**c** Welke soort daling vertoont $f$ op $[0, 1]$? Neemt $f'$ op dit interval toe of af? Wat geldt er dus op dit interval voor de afgeleide van $f'$?

**d** Op $[-2, -1]$ is $f$ afnemend stijgend. Wat kun je zeggen over $f'(x)$ en over de afgeleide van $f'$ op dit interval?




**Theorie**

Op intervallen waar $f'(x) > 0$, stijgt $f$.

Op intervallen waar $f'(x) < 0$, daalt $f$.

De afgeleide van $f'$, de tweede afgeleide van $f$, notatie $f''$ of $\frac{d^2y}{dx^2}$ of $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$, geeft informatie over het soort stijgen of dalen van $f$:
Als op een interval geldt $f''(x) > 0$, neemt $f'(x)$ toe.
$f$ is dan toenemend stijgend of afnemend dalend.
Als op een interval geldt $f''(x) < 0$, neemt $f'(x)$ af.
$f$ is dan afnemend stijgend of toenemend dalend.

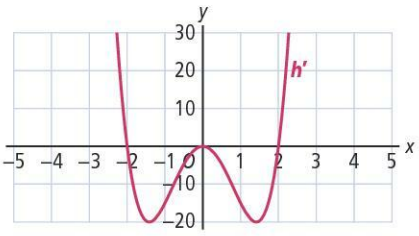
| | $f''(x) > 0$ | $f''(x) < 0$ |
|---|---|---|
| $f'(x) > 0$ | $f$ is toenemend stijgend | $f$ is afnemend stijgend |
| $f'(x) < 0$ | $f$ is afnemend dalend | $f$ is toenemend dalend |


© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht 033

**33** H

Gegeven is de grafiek van de afgeleide van een functie $h$.
$h'$ heeft extreme waarden bij $x = -\sqrt{2}$, $x = 0$ en $x = \sqrt{2}$.




**a** Op welke intervallen is $h$ afnemend dalend? En op welke intervallen toenemend dalend?

**b** Bij welke waarden van $x$ gaat $h$ over van toenemend dalend naar afnemend dalend?

**c** Maak een schets van de grafiek van $h$ met $h(0) = 0$.

**34**

Gegeven is de functie $f(x) = x - 4\sqrt{x}$.

**a** Plot de grafiek van $f$ en bereken exact de extreme waarde(n) van $f$.

**b** Toon met behulp van $f''(x)$ aan dat $f'$ stijgt op het interval $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

**c** $f$ is eerst dalend en daarna stijgend.
Is er hier sprake van afnemende of toenemende daling?
En is er sprake van afnemende of toenemende stijging?

**35**

**a** Schets de grafiek van een functie $f$ die overgaat van afnemende stijging naar toenemende stijging.

**b** Het punt waar de overgang plaatsvindt, noem je $A$.
Leg uit dat $f'$ een extreme waarde heeft voor de $x$-coördinaat van $A$.

**c** Teken de raaklijn in $A$ aan de grafiek.

**Theorie**

Als de afgeleide $f'$ van een functie $f$ een extreme waarde heeft, is er een punt op de grafiek van $f$ waar de helling een maximale of minimale waarde heeft. Zo'n punt heet een **buigpunt**. Je berekent de extreme waarden van $f'$ met behulp van de tweede afgeleide $f''$.
Buigpunten vind je door $f''(x) = 0$ op te lossen en met een plot te onderzoeken of de grafiek voor die waarden van $x$ een buigpunt heeft.
De raaklijn in het buigpunt heet ook wel de **buigraaklijn**.

**Voorbeeld**

Bereken de coördinaten van het buigpunt van de grafiek van de functie $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 8x$.

**Oplossing**

$f'(x) = -3x^2 + 12x + 8$ en
$f''(x) = -6x + 12$
$f''(x) = 0$ voor $x = 2$.
In een plot van de grafiek zie je dat de grafiek bij $x = 2$ een buigpunt heeft.
$f(2) = -8 + 24 + 16 = 32$
Het buigpunt is $(2, 32)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

**36** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - 3x^2$.

**a** Los exact op $f''(x) = 0$.

**b** Onderzoek met een plot of de grafiek voor de gevonden waarden van $x$ buigpunten heeft.

**c** Bereken exact de coördinaten van de buigpunten.

**d** Beantwoord de opdrachten a, b en c voor de functie $f(x) = x^4$.

Ondersteunende route → maak opdracht O37

**37** Bereken exact de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van $f$.

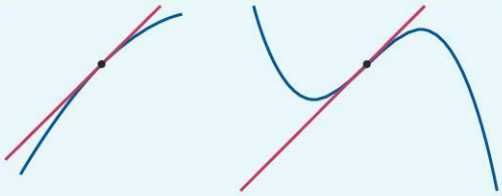
**a** $f(x) = x^5 - 10x^4$

**b** $f(x) = \dfrac{6x - 4}{x^2}$

**c** $f(x) = \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{12}x^4 - x^3$

**d** $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x - 5}{10x}$

Trek je een raaklijn aan de grafiek van een functie, dan zal de grafiek in het algemeen in de buurt van het raakpunt aan één kant van de raaklijn liggen. Een buigraaklijn ligt links en rechts van het buigpunt aan verschillende kanten van de grafiek.
De grafiek passeert als het ware de buigraaklijn.



**38** H Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{54}x^4 - x^2$.

**a** Bereken exact de nulpunten van $f$.

**b** Bereken exact de extreme waarden van $f$.

**c** Stel van elke buigraaklijn een vergelijking op.

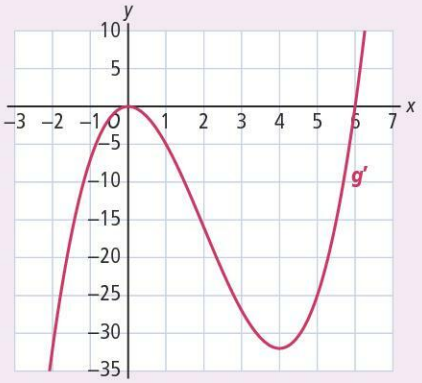
**39** Een functie $f$ heeft een extreme waarde $f(a)$; $f'(a) = 0$ en $f''(a) < 0$.
Is $f(a)$ een minimum of een maximum?

Uitdagende route → maak opdracht U7


© Noordhoff Uitgevers bv

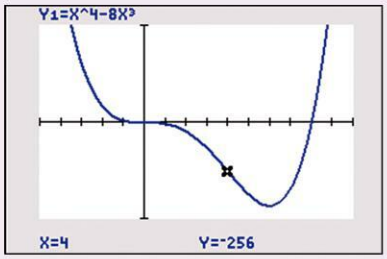
## Ondersteunende opdrachten

**O33** Gegeven is de grafiek van de afgeleide van de functie $g$.
$g'$ heeft extreme waarden bij $x = 0$ en $x = 4$.




- **a** Op het interval $\langle \leftarrow, 0]$ is $g'(x) \leq 0$.
  Is $g$ dan stijgend of dalend?
- **b** Op het interval $\langle \leftarrow, 0]$ stijgt $g'$. De waarden van $g'(x)$ worden dus minder negatief.
  Wat zegt dat over de mate waarin $g$ stijgt of daalt?
- **c** Op welk ander interval is $g'(x) \leq 0$ en stijgt $g'$?
- **d** Bij $x = 4$ gaat $g$ over van toenemend dalend naar afnemend dalend. Hoe zie je dat in de grafiek van $g'$?
- **e** Maak een schets van de grafiek van $g$ met $g(0) = 0$.

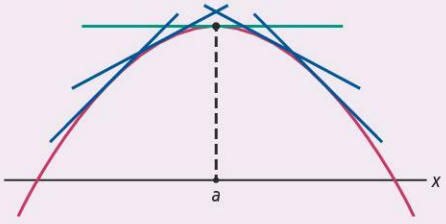
**O37** Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - 8x^3$. Je gaat de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van $f$ exact berekenen.




- **a** Differentieer $f$.
- **b** Toon aan dat $f''(x) = 12x^2 - 48x$.
- **c** Los de vergelijking $f''(x) = 0$ exact op.
- **d** Bij de nulpunten van $f''$ heeft de grafiek van $f$ mogelijk buigpunten. Met een plot stel je vast of er inderdaad buigpunten zijn.
  Beschrijf het verloop van $f$ in de waarden van $x$ waarvoor geldt $f''(x) = 0$.
- **e** Gebruik $f(x)$ om van elk buigpunt de $y$-coördinaat te berekenen.

## Uitdagende opdrachten

**U7**




- **a** Gegeven is de grafiek van een functie $f$ met een aantal raaklijnen in de buurt van de top $(a, f(a))$.
  Neemt de helling van de grafiek van $f$ in de buurt van de top toe of af?
- **b** Leg uit: als de grafiek van $f$ een top $(a, f(a))$ heeft en $f''(a) < 0$, dan is $f(a)$ een maximum van $f$.
- **c** Beredeneer dat als de grafiek van $f$ een top $(b, f(b))$ heeft en $f''(b) > 0$, $f(b)$ een minimum is van $f$.
- **d** Beredeneer dat als $f''(c) = 0$ en $f'''(c) \neq 0$, de grafiek van $f$ een buigpunt $(c, f(c))$ heeft.
- **e** Gegeven is de functie $g(x) = 2x^5 - 5x^2$.
  Onderzoek met behulp van de derde afgeleide of de grafiek van $g$ een buigpunt heeft.

© Noordhoff Uitgevers bv

**40** Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = x^3 - 6x^2 + ax$.

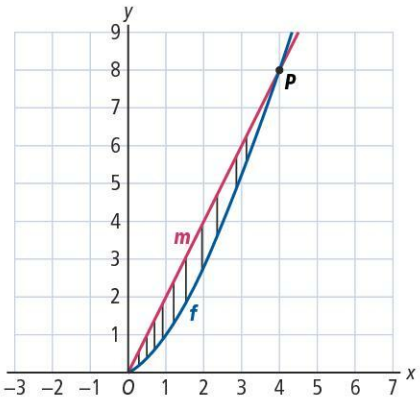
**a** Voor elke waarde van $a$ gaat de grafiek van $f_a$ door $(0, 0)$. Toon dit aan.

**b** Toon aan dat de grafiek van $f_a$ voor elke waarde van $a$ een buigpunt heeft en druk de coördinaten van dit buigpunt uit in $a$.

**c** Laat zien dat de grafiek voor $a = 12$ een buigpunt met een horizontale raaklijn heeft.
Bereken exact de coördinaten van dit buigpunt.

**d** Voor welke waarden van $a$ heeft de grafiek geen horizontale raaklijn?

**41** Op de grafiek van de functie $f(x) = x\sqrt{x}$ ligt een punt $P$. $m$ is de lijn door $O$ en $P$. In het gebied begrensd door $m$ en de grafiek van $f$ zijn een aantal verticale lijnstukken getekend. De lengte van zo'n lijnstuk is een functie $l$ van $x$.




**a** Kies voor $P$ het punt $(4, 8)$.
Stel het functievoorschrift $l(x)$ op.

**b** Bereken exact de maximale lengte van zo'n lijnstuk.

**c** Kies voor $P$ het punt $\left(p, p\sqrt{p}\right)$ en bereken $p$ in het geval dat de maximale lengte van het lijnstuk gelijk is aan 4.

**42** Gegeven is de functie $g(x) = -2 + 2\sqrt{3x^2 - 2x}$.

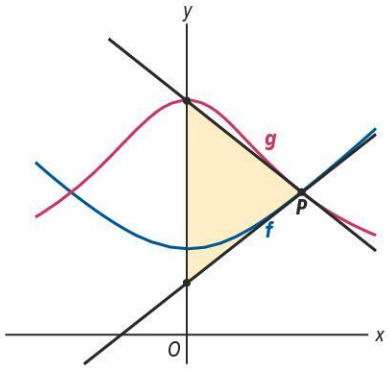
**a** Bereken exact het domein van $g$.

**b** Bereken de randextremen van $g$.

**c** De grafiek van $g$ snijdt de $x$-as in de punten $A$ en $B$.
Bereken exact de coördinaten van deze punten.

**d** De raaklijnen aan de grafiek van $g$ in de punten $A$ en $B$ snijden elkaar in punt $C$.
Bereken exact de coördinaten van punt $C$.

**43** Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ en $g(x) = \dfrac{25}{\sqrt{x^2 + 9}}$. In het snijpunt $P$ zijn de raaklijnen aan beide grafieken getekend.

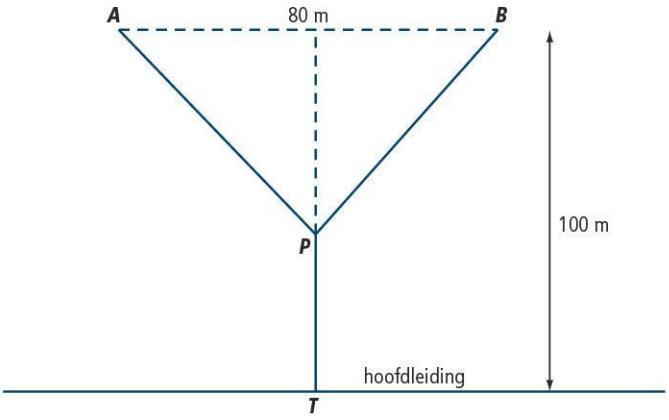



**a** Controleer met een berekening dat de grafieken elkaar snijden in het punt $P(4, 5)$.

**b** Bereken exact de helling van beide grafieken in $P$.

**c** De raaklijnen in $P$ aan beide grafieken sluiten samen met de $y$-as een driehoek in.
Bereken de oppervlakte van deze driehoek.


© Noordhoff Uitgevers bv



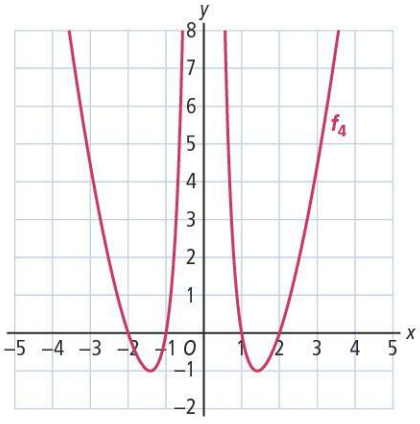

**44** De huizen $A$ en $B$ moeten op de waterleiding worden aangesloten. De huizen liggen beide op 100 meter afstand van de hoofdleiding. In plaats van twee aftakkingen van de hoofdleiding, één naar $A$ en één naar $B$, wordt gekozen voor een Y-verbinding: één aftakking bij $T$ die zich bij $P$ splitst in een tak naar $A$ en een tak naar $B$. De punten $P$ en $T$ worden zo gekozen dat ze even ver van $A$ als van $B$ liggen.
De afstand in meters tussen $A$ en $B$ is 80 meter.
Onderzoek waar punt $P$ moet liggen zodat de totale lengte van de nieuw aan te leggen leidingen minimaal is.

**45** Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = \dfrac{x^4 - 5x^2 + a}{x^2}$

Voor $a = 4$ heeft de grafiek van $f$ twee toppen.

**a** Onderzoek voor welke waarden van $a$ de grafiek van $f_a$ twee toppen heeft.

**b** In die gevallen dat de grafiek twee toppen heeft, liggen die toppen op de grafiek van de functie $g(x) = 2x^2 - 5$.
Toon dat aan.

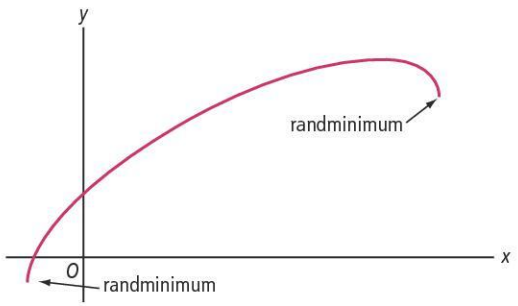



© Noordhoff Uitgevers bv

**Theorie**

### Randextremen

Als de grafiek van een functie een randpunt heeft, zoals bij een wortelfunctie, dan heeft die functie daar een (rand)maximum of (rand)minimum. Randminima en randmaxima noem je ook wel randextremen.

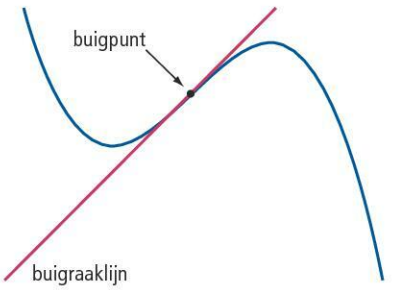



**S1** Gegeven is de functie $f(x) = 2x + \sqrt{18 - 7x - x^2}$.
$f$ heeft twee randextremen.
Bereken exact de twee randextremen en vermeld of het een randminimum of een randmaximum betreft.

**Theorie**

### Tweede afgeleide, buigpunt, buigraaklijn

De afgeleide van $f'$, de tweede afgeleide van $f$, notatie $f''$ of $\frac{d^2y}{dx^2}$ of $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$, geeft informatie over het soort stijgen of dalen van $f$:
Als op een interval geldt $f''(x) > 0$, neemt $f'(x)$ toe.
$f$ is dan toenemend stijgend of afnemend dalend.
Als op een interval geldt $f''(x) < 0$, neemt $f'(x)$ af.
$f$ is dan afnemend stijgend of toenemend dalend.
Als de afgeleide $f'$ van een functie $f$ een extreme waarde heeft, is er een punt op de grafiek van $f$ waar de helling een maximale of minimale waarde heeft. Zo'n punt heet een buigpunt. Je berekent de extreme waarden met behulp van de tweede afgeleide $f''$.
De raaklijn in het buigpunt heet ook wel de buigraaklijn.

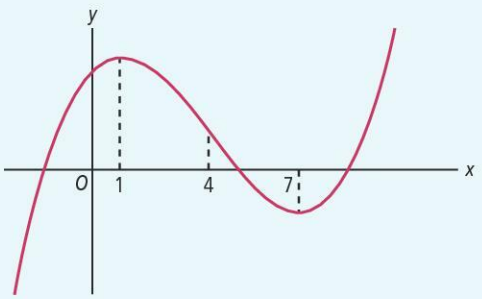



**S2** Gegeven is de grafiek van een derdegraads functie $f$.

**a** Op welk interval is $f$ toenemend stijgend?

**b** Op welk interval is $f$ dalend?

**c** Vul in: bij $x = 4$ gaat $f$ over van … dalend in … dalend, dus de grafiek heeft bij $x = 4$ een …





© Noordhoff Uitgevers bv

**Vaardigheid**

**Je kunt een machtsfunctie differentiëren.**

De afgeleide functie van $f(x) = x^a$ is $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$ voor elke waarde van $a$.

Om een gebroken functie of een wortelfunctie te differentiëren schrijf je deze eerst in de vorm $f(x) = c \cdot x^a$.

In het bijzonder geldt: als $f(x) = \sqrt{x}$ dan is $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

**Voorbeeld**

Differentieer $f(x) = x^2\sqrt[3]{x}$ en $g(x) = \dfrac{6}{x^4}$

**Oplossing**

$f(x) = x^2\sqrt[3]{x}$ schrijf je als $f(x) = x^{2\frac{1}{3}}$.

$f'(x) = 2\frac{1}{3}x^{1\frac{1}{3}}$ ofwel $f'(x) = 2\frac{1}{3}x\sqrt[3]{x}$.

$g(x) = \dfrac{6}{x^4}$ schrijf je als $g(x) = 6x^{-4}$.

$g'(x) = -24x^{-5}$ ofwel $g'(x) = \dfrac{-24}{x^5}$

**S3** Differentieer. Schrijf de afgeleide zonder negatieve of gebroken exponent.

**a** $f(x) = 8x\sqrt{x}$

**b** $g(x) = \dfrac{x^3 + x\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}}$

**c** $h(x) = \sqrt[3]{x}(x^2 + x)$

**Vaardigheid**

**Je kunt herkennen uit welke functies een samengestelde functie is opgebouwd.**

Als $k(x)$ wordt berekend door eerst $x$ in te vullen in de functie $f$ en dat resultaat in te vullen in de functie $g$, dan heet de functie $k$ een samenstelling van $f$ en $g$.

In formule: $k(x) = g(f(x))$.

Een samengestelde functie heet ook wel een kettingfunctie.

**Voorbeeld**

De functie $k(x) = \dfrac{4}{(\sqrt{x} + 1)^2}$ is van de vorm $k(x) = g(f(x))$. Geef mogelijke functievoorschriften van $f$ en $g$.

**Oplossing**

$f(x) = \sqrt{x} + 1$ en $g(x) = \dfrac{4}{x^2}$

**S4** Gegeven zijn functies van de vorm $k(x) = g(f(x))$. Geef mogelijke functievoorschriften van $g$ en $f$.

**a** $k(x) = {}^3\log(x^2 - 7)$

**b** $k(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\cos(x)}$

© Noordhoff Uitgevers bv

**Vaardigheid**

**Je kunt de afgeleide van een kettingfunctie bepalen.**

De afgeleide van de kettingfunctie $k(x) = g(f(x))$ is de functie $k'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.
Deze regel heet de kettingregel.

**Voorbeeld**

Differentieer $k(x) = (x^2 + 8x)^4$.

**Oplossing**

$k(x) = g(f(x))$ met

$f(x) = x^2 + 8x$ en $g(x) = x^4$

$f'(x) = 2x + 8$ en $g'(x) = 4x^3$

$k'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

$k'(x) = 4(x^2 + 8x)^3 \cdot (2x + 8)$

$k'(x) = (8x + 32)(x^2 + 8x)^3$

**S5** Differentieer.

**a** $f(x) = 5(x^4 + 6x)^3$

**b** $g(x) = \sqrt{4x^3 + 8x^2 + 6}$

**Vaardigheid**

**Je kunt exact de extreme waarden van een functie berekenen.**

**1** Differentieer $f$.
**2** Los exact op $f'(x) = 0$.
**3** Plot de grafiek en kijk of er sprake is van een minimum of een maximum.
**4** Bereken de extreme waarden door de gevonden $x$-waarden in te vullen in $f(x)$.

Een functie waarvan de grafiek een randpunt heeft, heeft ook een randextreem.

**Voorbeeld**

Gegeven is de functie $f(x) = x - \sqrt{16 - x^2}$.
Bereken exact de extreme waarde van $f$. Denk ook aan randextremen.

**Oplossing**

**1** $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{16 - x^2}} \cdot -2x$ ofwel $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}$

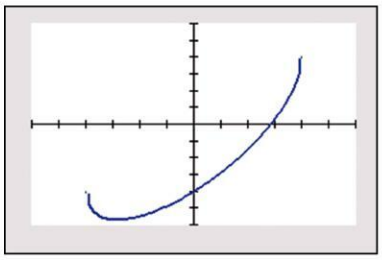
**2** $f'(x) = 0$ geeft $\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}} = -1$ ofwel $x = -\sqrt{16 - x^2}$

$x^2 = 16 - x^2$ dus $x^2 = 8$ ofwel $x = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$ of $x = 2\sqrt{2}$

$x = 2\sqrt{2}$ voldoet niet, dus $x = -2\sqrt{2}$.

**3** In de plot is te zien dat $f$ bij $x = -2\sqrt{2}$ een minimum heeft.

**4** $f$ heeft een minimum $f(-2\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} - \sqrt{16 - 8} = -4\sqrt{2}$.



In de randpunten van de grafiek geldt $16 - x^2 = 0$ dus $x = -4$ of $x = 4$.

$f$ heeft een randmaximum $f(-4) = -4$ en een randmaximum $f(4) = 4$.


© Noordhoff Uitgevers bv

**S6** Bereken exact de extreme waarden. Denk ook aan eventuele randextremen.

**a** $f(x) = \sqrt{-x^2 + 10x - 9}$

**b** $g(x) = \dfrac{100}{(x^2 + 4x)^3}$

**Vaardigheid**

**Je kunt de coördinaten van een buigpunt exact berekenen.**
Buigpunten vind je door $f''(x) = 0$ op te lossen en met een plot te onderzoeken of de grafiek voor die waarden van $x$ een buigpunt heeft.

**Voorbeeld**

Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 18$.
Bereken exact de coördinaten van het buigpunt van de grafiek van $f$.

**Oplossing**

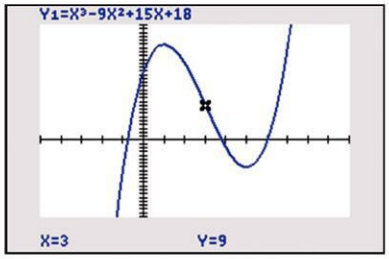
$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 18$

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$

$f''(x) = 6x - 18$

$f''(x) = 0$ voor $x = 3$.

In de plot is te zien dat de grafiek bij $x = 3$ een buigpunt heeft.
$f(3) = 9$ dus het buigpunt is $(3, 9)$.




**S7** Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - 6x^2 - 5$.
Bereken exact de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van $f$.

© Noordhoff Uitgevers bv

**T1** Differentieer. Schrijf de afgeleide zonder gebroken of negatieve exponent.

**a** $f(x) = \dfrac{3x^2 + 5}{x^2}$

**b** $g(x) = 4x^3 + \sqrt{x}$

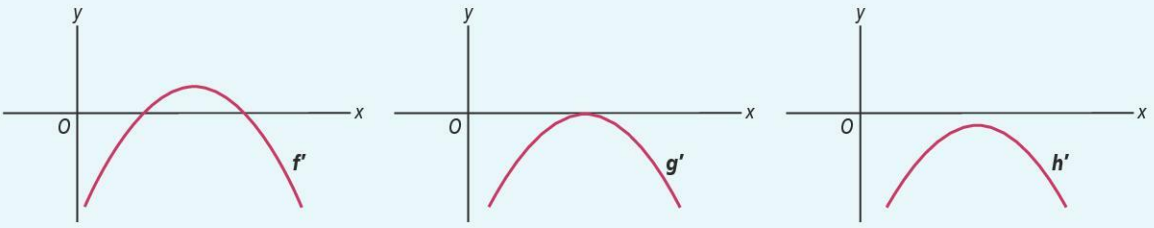
**c** $h(x) = (\sqrt{x} + x)(x - 1)$

**T2** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2$.

**a** Bereken exact de coördinaten van de punten op de grafiek van $f$ waar de raaklijn evenwijdig is aan de $x$-as.

**b** Onderzoek of er in de gevonden punten sprake is van een maximum, een minimum of geen van beide.

**T3** De functies $f$, $g$ en $h$ zijn derdegraads functies. Gegeven zijn de grafieken van $f'$, $g'$ en $h'$.
Schets een mogelijke grafiek van $f$, van $g$ en van $h$.

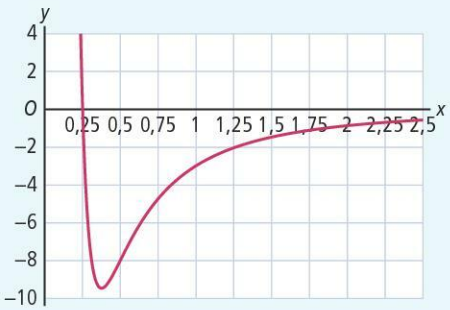



**T4** Gegeven is voor $x > 0$ de functie $g(x) = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{4}{x^2}$

**a** Bereken exact de $x$-coördinaat van de top van de grafiek van $g$.

**b** Bereken exact de coördinaten van het buigpunt van de grafiek van $g$.

**c** Stel een vergelijking op van de buigraaklijn.




**T5** Gegeven zijn functies van de vorm $k(x) = g(f(x))$.
Geef mogelijke functievoorschriften van $g$ en $f$.

**a** $k(x) = 3 + 2(4x - 9)^5$

**b** $k(x) = \sqrt{6x - 3x^2} - 7$

**c** $k(x) = (2x - x^2)^{1,7}$

**d** $k(x) = \dfrac{2}{(x^3 - 7)^4}$


© Noordhoff Uitgevers bv

**T6** Differentieer. Schrijf de afgeleide zonder negatieve exponent.

**a** $f(x) = (x - 3)^{10} + 2$

**b** $g(p) = (2 - p^2)^3$

**c** $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

**d** $k(x) = (2x - 3x^4)^2$

**e** $q(x) = \dfrac{2}{(x^3 - 7)^4}$

**f** $m(t) = 3 + 2(4t - 9)^5$

**T7** **a** Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{x} - 3x - 1$.
Bereken exact de extreme waarden van $f$. Vermeld ook eventuele randextremen.

**b** Gegeven is de functie $g(x) = (4x^2 + px + 1)^3$.
$g$ heeft een extreme waarde voor $x = 1$.
Bereken de waarden van $p$.

**T8** Gegeven is de familie van functies
$g_a(x) = \dfrac{1}{3x - a} - \dfrac{1}{(3x - a)^2}$

**a** $g_a(4)$ is een extreme waarde van een functie $g_a$.
Bereken exact de waarde van $a$.

**b** De grafiek van een functie $g_a$ heeft een buigpunt bij $x = 2$.
Bereken exact de waarde van $a$.

**T9** Gegeven is de familie van functies $f_{p,q}(x) = p(x + 2)^3 + q$.

**a** Bereken exact de waarde van $p$ en van $q$ als gegeven is dat de grafiek van $f_{p,q}$ door de punten $(0, 0)$ en $(-3, 18)$ gaat.

**b** Bereken exact de waarde van $p$ en van $q$ als de lijn $l$ met richtingscoëfficiënt $-6$ de grafiek van een functie $f_{p,q}$ raakt in het punt $(-4, 12)$.

**c** Toon aan dat de buigpunten van de grafieken van alle functies $f_{p,q}$ op een rechte lijn liggen en geef een vergelijking van deze lijn.

© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt een machtsfunctie differentiëren.

**E1** Differentieer. Schrijf de afgeleide zonder negatieve of gebroken exponent.

**a** $f(x) = 2\sqrt[3]{x}$

**b** $g(x) = 2\sqrt{x} + 5x^2$

**c** $h(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{2x^6}$

**d** $k(x) = 5x(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x})$

**e** $m(x) = x^3 \cdot \sqrt[3]{x}$

**f** $n(x) = \dfrac{2}{x^{1,3}} - \dfrac{4}{5x^{2,8}}$

Je kunt herkennen uit welke functies een samengestelde functie is opgebouwd.

**E2** **a** De functie $k(x) = 5 \cdot 2^{x^2+7}$ heeft de vorm $k(x) = g(f(x))$. Geef de mogelijke functievoorschriften van $f$ en $g$.

**b** De functie $k(x) = \sqrt{x^4 - 3}$ heeft de vorm $k(x) = g(f(x))$. Geef de mogelijke functievoorschriften van $f$ en $g$.

Je kunt de afgeleide van een kettingfunctie bepalen.

**E3** Differentieer en schrijf de afgeleide zonder gebroken en negatieve exponenten.

**a** $g(m) = (4m - 5)^3$

**b** $h(x) = \dfrac{4}{x^2 + 3}$

**c** $Q(p) = \sqrt{2p^3 - 25p}$

**d** $f(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{2x - \frac{1}{2}}}$

Je kunt exact de extreme waarden van een functie berekenen.

**E4** Bereken bij welke waarden van $x$ de afgeleide van de functies gelijk is aan nul. Onderzoek of er bij deze waarden van $x$ sprake is van een maximum, een minimum of geen van beide. Vermeld ook eventuele randextremen.

**a** $f(x) = \dfrac{3}{2x^2 - x}$

**b** $g(x) = 3 + 2\sqrt{4x - x^2}$

**c** $h(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2 - 2x}}$

**d** $k(x) = (x^2 - 2)^4$

Je kunt de coördinaten van een buigpunt exact berekenen.

**E5** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 3$.

**a** Bereken exact de extreme waarde van $f$.

**b** Bereken exact de coördinaten van de buigpunten.

**c** Stel een vergelijking op van elke buigraaklijn.

**d** Voor welke waarden van $x$ is $f$ toenemend dalend?


© Noordhoff Uitgevers bv

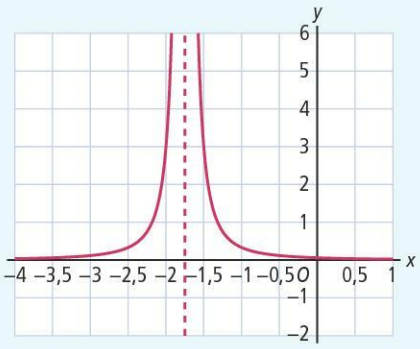
**E6** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3}{4}x + \sqrt{9x - x^2}$.

**a** Geef het domein van $f$.

**b** Bereken exact de extreme waarden van $f$. Vermeld ook eventuele randextremen.

**c** Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van $f$ in het punt met $x$-coördinaat $4\frac{1}{2}$.

**E7** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{3}{(4x + 7)^2}$




**a** Toon aan dat $f'(x) = \dfrac{-24}{(4x + 7)^3}$

**b** Punt $P(-2, 3)$ ligt op de grafiek van $f$.
De lijn $y = ax + b$ raakt de grafiek van $f$ in $P$.
Bereken exact de waarde van $a$ en van $b$.

**E8** Differentieer. Schrijf de afgeleide zonder negatieve of gebroken exponent.

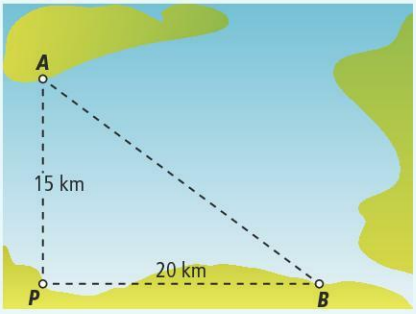
**a** $f(x) = (8x - 4)^3 + 7$

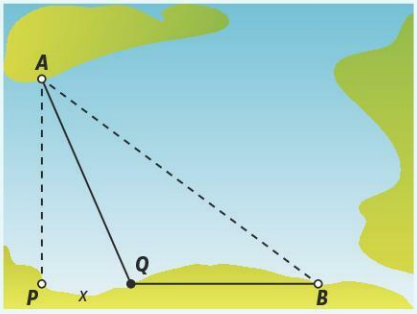
**b** $p(t) = \dfrac{10}{(x - 5)^2 - 25}$

**c** $Q(p) = (3p + 2)\sqrt{3p + 2}$

**d** $g(p) = 2\sqrt{(4p)^3 - 7}$

**E9** Plaats $A$ ligt op een eiland, plaats $B$ op het vasteland. Tussen de plaatsen $A$ en $B$ moet een kabel worden gelegd.




De aanlegkosten onder water bedragen € 1000,- per km; de aanlegkosten over land zijn € 400,- per km.
Er ligt tussen $P$ en $B$ een punt $Q$ zodat de kosten over het traject $A$-$Q$-$B$ minimaal zijn.

**a** Noem $PQ = x$ (km) en toon aan dat de aanlegkosten $K$ in euro's gegeven worden door de formule

$K = 1000\sqrt{225 + x^2} + 400(20 - x)$.

**b** Bereken exact de afstand $PQ$ waarvoor de aanlegkosten minimaal zijn.

© Noordhoff Uitgevers bv

## Middelwaardestelling

### Lagrange

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) was een wiskundige en astronoom van Italiaanse afkomst, die later in Frankrijk en Pruisen werkte. Hij ontwikkelde zich tot een van de grootste twee wiskundigen van de 18e eeuw (de andere was Euler). Hij werkte aan getaltheorie, differentiaalrekening, mechanica en astronomie. Hij formuleerde onder andere de middelwaardestelling.

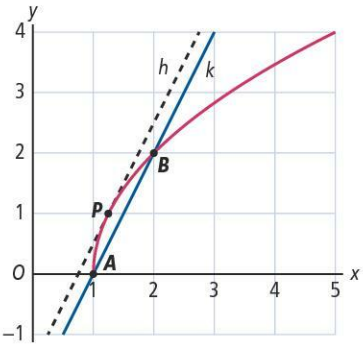
### De middelwaardestelling:

Twee punten $A$ en $B$ met $x$-coördinaten $a$ en $b$ liggen op de grafiek van functie $f$. Als de afgeleide $f'$ op interval $\langle a,b\rangle$ bestaat, dan is er in dat interval een getal $c$ zodat $f'(c)$ gelijk is aan de richtingscoëfficiënt van de lijn door $A$ en $B$.

### Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 2\sqrt{x-1}$. Op de grafiek liggen de punten $A(1, 0)$ en $B(2, 2)$.
De lijn door $AB$ is de grafiek van $k(x) = 2x - 2$.
Als je de grafieken bekijkt, zijn er twee dingen die opvallen.

- Er is een punt $P$ waarin de raaklijn evenwijdig is aan de lijn door $A$ en $B$. Op het oog is $x_P = 1\frac{1}{4}$.
- Tussen de punten $A$ en $B$ zie je de verticale afstand tussen de grafiek van $f$ en die van $k$ eerst toenemen en daarna afnemen. Er is dus een punt waar de afstand maximaal is. Is dat ook punt $P$?




In de tabel met $y_1 = 2\sqrt{x-1}$, $y_2 = 2x - 2$ en $y_3 = y_2 - y_1$ zie je dat de maximale afstand bij $x = 1{,}25$ ligt.
Is het toeval dat de afstand het grootst is bij $x = 1\frac{1}{4}$?
Dat ga je in de volgende opdracht onderzoeken.

| X | Y1 | Y2 | Y3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1.125 | 0.7071 | 0.25 | -0.457 |
| 1.25 | 1 | 0.5 | -0.5 |
| 1.375 | 1.2247 | 0.75 | -0.475 |
| 1.5 | 1.4142 | 1 | -0.414 |
| 1.625 | 1.5811 | 1.25 | -0.331 |
| 1.75 | 1.7321 | 1.5 | -0.232 |
| 1.875 | 1.8708 | 1.75 | -0.121 |
| 2 | 2 | 2 | 0 |
| 2.125 | 2.1213 | 2.25 | 0.1287 |
| 2.25 | 2.2361 | 2.5 | 0.2639 |

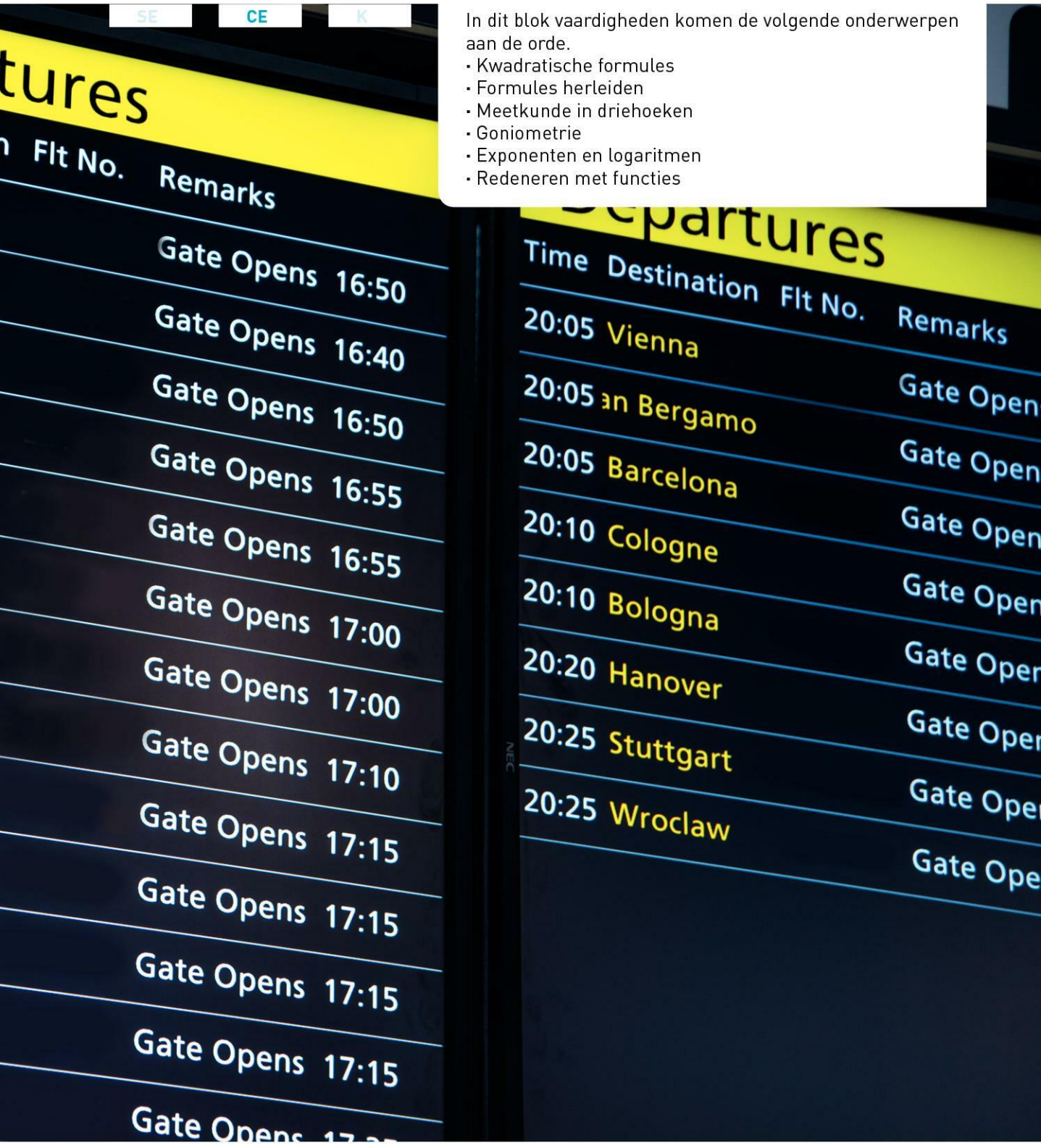
X=1.25

### Opdracht

**a** Los op $f'(x) = rc_{AB}$.
**b** Ga na dat de verticale afstand van een punt op de grafiek tot de lijn $AB$ gegeven wordt door $g(x) = f(x) - k(x)$.
**c** Differentieer $g$.
**d** Heeft $g$ een maximum of minimum?
**e** Leg uit: Het punt $P$ waar de raaklijn evenwijdig is aan lijn $AB$, is ook het punt waar de verticale afstand van een punt op de grafiek tot de lijn $AB$ het grootst is.
**f** Voer de opdrachten a tot en met e uit voor de functie $f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x - 3\right)^3 + \frac{4}{3}$ op het interval $[2, 8]$.


© Noordhoff Uitgevers bv

# Vaardigheden 5




In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Kwadratische formules
- Formules herleiden
- Meetkunde in driehoeken
- Goniometrie
- Exponenten en logaritmen
- Redeneren met functies

© Noordhoff Uitgevers bv

## Kwadratische formules

**1** Vul in.

**a** $(x + 6)^2 = x^2 + \ldots$

**b** $(x - \ldots)^2 = x^2 - \ldots x + 25$

**c** $x^2 + 16x + \ldots = (x + \ldots)^2$

**d** $x^2 - x + \ldots = (x - \ldots)^2$

**2** Je kunt de formule $y = x^2 + 6x + 5$ schrijven als $y = (x + 3)^2 - 9 + 5$ en dus als $y = (x + 3)^2 - 4$.
Schrijf in de vorm $y = (x + p)^2 + q$.

**a** $y = x^2 + 4x + 7$

**b** $y = x^2 - 7x - 8$

**c** $y = x^2 - 1{,}2x - 1$

**d** $y = x^2 + 5x + 4$

**3** Gegeven is de formule $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$.

**a** Breng een factor $\frac{1}{2}$ buiten haakjes.

**b** Schrijf de uitdrukking binnen de haakjes als $(x + p)^2 + q$ zodat de formule in de vorm $y = \frac{1}{2}\left((x + p)^2 + q\right)$ kan worden geschreven.

**c** Schrijf de gegeven formule in de vorm $y = \frac{1}{2}(x + \ldots)^2 + \ldots$

**Theorie**

Om een formule van de vorm $y = ax^2 + bx + c$ in de vorm $y = a(x + p)^2 + q$ te schrijven, haal je eerst $a$ buiten haakjes.

**4** Schrijf in de vorm $y = a(x + p)^2 + q$.

**a** $y = 2x^2 + 5x + 3$

**b** $y = \frac{1}{4}x^2 - 3x - 1$

**c** $y = 3x^2 - x$

**d** $y = 1\frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$

**5** Gegeven is de functie $f(x) = 3(x + 2)(x - 4)$.

**a** Toon aan dat het functievoorschrift van $f$ ook te schrijven is als $f(x) = 3x^2 - 6x - 24$ en $f(x) = 3(x - 1)^2 - 27$.

**b** Met welk functievoorschrift bereken je handig de coördinaten van de top?

**c** Met welk functievoorschrift bereken je handig de coördinaten van de snijpunten met de $x$-as?

**d** Van welk punt kun je met het overblijvende functievoorschrift de coördinaten handig berekenen?


© Noordhoff Uitgevers bv

**6** Bereken de coördinaten van de snijpunten met de $x$-as en de coördinaten van de top.

**a** $f(x) = -6(x - 6)(x + 12)$

**b** $g(x) = 2(x + 1)^2 - 18$

**c** $h(x) = x^2 + 4x - 12$

**d** $k(x) = -2x^2 + 16x + 18$

### Formules herleiden

**7** Druk $x$ uit in $y$.

**a** $10x + 5y = 12$

**b** $y = \frac{8}{x - 1}$

**c** $y = 2\sqrt{x - 10}$

**d** $y = {}^2\log(x + 6)$

**8** Druk $p$ uit in $q$.

**a** $pq + 2q = 4$

**b** $q = \frac{4}{2p + 5}$

**c** $q = \frac{4}{\sqrt{p + 2}}$

**d** $q = 3^{p+3} + 3$

**9** Substitueer $x$ en druk $y$ uit in $t$.

**a** $y = 2x^2 - 3x + 1$ en $x = t + 1$

**b** $y = x \cdot 2^{9-2x}$ en $x = t - 3$

**c** $y = \log(x^2 - 4)$ en $x = 3t - 2$

**d** $y = \frac{\sqrt{2x - 4}}{2x}$ en $x = 0{,}5t^2 + 2$

### Meetkunde in driehoeken

**10** Van driehoek $ABC$ zijn enkele hoeken en zijden gegeven. Bereken de gevraagde zijden of hoeken. Rond de lengten af op één decimaal en de hoeken op hele graden.

**a** Bereken $AC$ en $BC$ als $\angle A = 90°$, $\angle B = 47°$ en $AB = 9$.

**b** Bereken $AB$ en $BC$ als $\angle A = 22°$, $\angle B = 90°$ en $AC = 11$.

**c** Bereken $AC$, $\angle B$ en $\angle C$ als $\angle A = 90°$, $AB = 9$ en $BC = 14$.

**d** Bereken $AC$ en $BC$ als $\angle A = 23°$, $\angle C = 67°$ en $AB = 20$.

**11**

**a** Van rechthoek $ABCD$ is gegeven dat $AB = 12$ en $AC = 15$. Bereken de lengte van zijde $BC$.

**b** De lengte van de diagonalen van vierkant $KLMN$ is 10. Bereken de oppervlakte van het vierkant.

**c** Van een ruit $PQRS$ is gegeven dat $PR = 12$ en $QS = 9$. Bereken de lengte van de zijden van deze ruit.

© Noordhoff Uitgevers bv

### Goniometrie

**12** **a** Vul in de tabel de exacte waarden in.

| $x$ | 0 | $\frac{1}{6}\pi$ | $\frac{1}{4}\pi$ | $\frac{1}{3}\pi$ | $\frac{1}{2}\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(x)$ | … | … | … | … | … |
| $\cos(x)$ | … | … | … | … | … |

**b** Teken de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ op het interval $[0,2\pi]$.

**c** Geef met behulp van een redenering, dus zonder je rekenmachine te gebruiken, de exacte waarden van $\sin\left(137\frac{1}{2}\pi\right)$, $\sin\left(-1\frac{1}{4}\pi\right)$, $\sin\left(1\frac{5}{6}\pi\right)$ en $\sin\left(-3\frac{2}{3}\pi\right)$.

**d** Teken de grafiek van $g(x) = \cos(x)$ op het interval $[-\pi, \pi]$.

**e** Geef met behulp van een redenering, dus zonder je rekenmachine te gebruiken, de exacte waarden van $\cos\left(-137\frac{1}{2}\pi\right)$, $\cos\left(3\frac{3}{4}\pi\right)$, $\cos\left(2\frac{2}{3}\pi\right)$ en $\cos\left(-1\frac{5}{6}\pi\right)$.

**13** Los de vergelijkingen op het gegeven interval exact op.

**a** $\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = 1$ op $[0, 16\pi]$

**b** $2\sin(x) = -\sqrt{3}$ op $[-6\pi, 0]$

**c** $3\cos(2x) = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$ op $[0, 2\pi]$

**d** $\sin(6x) = -1$ op $[-\pi, \pi]$

### Exponenten en logaritmen

**14** Los exact op.

**a** $8 \cdot 2^{3x+7} = 64$

**b** $5^{4-x} = 5\sqrt{5}$

**c** $5 - 4^{2x+7} = -27$

**d** $\frac{1}{9} \cdot 3^{x-4} = 27 \cdot 3^{2x+1}$

**e** $3 \cdot 4^{6-x} = 12 \cdot 8^{x}$

**f** $\frac{1}{2} \cdot 16^{2-3x} = 2 \cdot 4^{2x-9}$

**15** ${}^{3}\log(81) = 4$ want $81 = 3^4$.
Vul in.

**a** ${}^{5}\log\left(\frac{1}{25}\right) = \ldots$, want $\frac{1}{25} = 5^{\cdots}$

**b** ${}^{3}\log(9\sqrt{3}) = \ldots$, want …

**c** ${}^{8}\log(2) = \ldots$, want …

**16** Los exact op.

**a** ${}^{4}\log(x) = \frac{1}{2}$

**b** ${}^{4}\log(3x) + 7 = 9$

**c** ${}^{0{,}1}\log(x) = 0$

**d** ${}^{2}\log(x^2 - 4) = 5$

**e** ${}^{5}\log(6 - 4x) = 1$

**f** ${}^{2}\log(4x + 1) = -2$


© Noordhoff Uitgevers bv

### Redeneren met functies

**17** Schrijf op of de functie stijgend of dalend is, op het gehele domein van de functie.

**a** $f(x) = 2^x$

**b** $g(x) = \sqrt{x}$

**c** $h(x) = -8x + 19$

**d** $k(x) = 0{,}5x$

**e** $l(x) = 0{,}75^x$

**f** $m(x) = x^{-1}$, $x > 0$

**g** $n(x) = x^3$

**h** $p(x) = 200 \cdot 0{,}1^x$

**Theorie**

Van eenvoudige functies weet je of ze stijgend of dalend zijn. Van een functie waarvan de grafiek door transformaties te herleiden is uit de grafiek van een eenvoudige functie is dat soms met redeneren vast te stellen.

**Voorbeeld**

Beredeneer of de functie $h(x) = (1 - 2x)^3$ stijgend of dalend is op het gehele domein.

**Oplossing**

De functie $f(x) = x^3$ is stijgend, dus als $x$ toeneemt, neemt $x^3$ ook toe, en als $x$ afneemt, neemt $x^3$ ook af.

Als $x$ toeneemt, neemt $1 - 2x$ af, dus neemt $(1 - 2x)^3$ ook af.

De functie $h(x) = (1 - 2x)^3$ is dalend op het gehele domein.

**18** Beredeneer, zonder gebruik te maken van een plot, of de functies stijgend of dalend zijn op het gehele domein.

**a** $g(x) = x^3 - 7$

**b** $h(x) = 5x^3$

**c** $k(x) = -2x^3$

**d** $m(x) = (-x)^3$

**e** $n(x) = (2 - x)^3$

**f** $p(x) = -6(x - 4)^3$

**19** Beredeneer of de functies stijgend of dalend zijn.

**a** $f(x) = 0{,}3 \cdot 2^x$

**b** $g(x) = 2 \cdot 0{,}3^x$

**c** $h(x) = 100 - 2^x$

**d** $k(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(-x)$

**e** $m(x) = \sqrt{8 - x}$

**f** $n(x) = 3 - {}^{2}\log(x)$

**20** Gegeven zijn de functies $f$, $g$, $s = f + g$, $v = f - g$ en $p = f \cdot g$. Onderzoek of de volgende uitspraken juist zijn. Indien een uitspraak niet juist is, geef dan een tegenvoorbeeld.

**a** Als $f$ en $g$ stijgen op een interval, stijgt $s$ daar ook.

**b** Als $f$ en $g$ stijgen op een interval, stijgt $v$ daar ook.

**c** Als $f$ en $g$ stijgen op een interval, stijgt $p$ daar ook.

© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

# Exponentiële en logaritmische functies 11

SE CE K

## In dit hoofdstuk

In de eerdere hoofdstukken heb je geleerd te werken met exponentiële functies en in hoofdstuk 7 heb je kennis gemaakt met logaritmen.

In dit hoofdstuk ga je dieper in op het oplossen van exponentiële vergelijkingen en vergelijkingen met logaritmen. Daartoe leer je een aantal rekenregels met betrekking tot logaritmen. Verder leer je om exponentiële en logaritmische formules te herleiden tot een andere vorm, en ook te bewijzen dat twee functies hetzelfde zijn. In de laatste paragraaf wordt aandacht besteed aan wiskundige modellen, dat wil zeggen een beschrijving van een proces of verschijnsel door middel van formules.

Het onderwerp exponentiële en logaritmische functies komt weer terug in een volgend deel.

## Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 42
- *Formules manipuleren* opdracht 12
- *Modelleren en algebraïseren* opdracht 35

© Noordhoff Uitgevers bv

**V1** Gegeven zijn de functies $f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $g(x) = 2 \cdot 1{,}7^x$, $h(x) = 5 \cdot x^{1{,}7}$, $i(x) = 17 \cdot x^{\frac{1}{2}}$ en $j(x) = 7 \cdot 1{,}0001^x$.

**a** Welke van deze functies zijn exponentiële functies?

**b** Welke van deze functies zijn stijgend? Verklaar je antwoord.

**c** Bereken voor elke functie exact de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de $y$-as.

**Theorie**

De exacte oplossing van de vergelijking $g^x = a$ heet de logaritme van $a$ voor het grondtal $g$. Je noteert deze oplossing als $x = {}^g\log(a)$.

Basisregel: Uit $g^b = a$ volgt $b = {}^g\log(a)$ en omgekeerd:

uit ${}^g\log(a) = b$ volgt $a = g^b$.

Hierbij is $a > 0$, $g > 0$ en $g \neq 1$.

Er geldt: ${}^g\log(1) = 0$ voor $g > 0$ en $g \neq 1$.

**Voorbeeld**

**a** Los exact op $7^{2x} = 3$.

**b** Van welke exponentiële vergelijking is $x = {}^2\log(11)$ de oplossing?

**Oplossing**

**a** Uit $7^{2x} = 3$ volgt $2x = {}^7\log(3)$

dus $x = \frac{1}{2} \cdot {}^7\log(3)$

**b** $x = {}^2\log(11)$ is de oplossing van $2^x = 11$.

**V2** Los exact op.

**a** $5^x = 10$

**b** $8^x = 3$

**c** $3^{5x} = 9$

**d** $4^{2x} = 7$

**V3** Stel een exponentiële vergelijking op waarvan de oplossing is gegeven.

**a** $x = {}^4\log(7)$

**b** $x = 2 \cdot {}^5\log(6)$

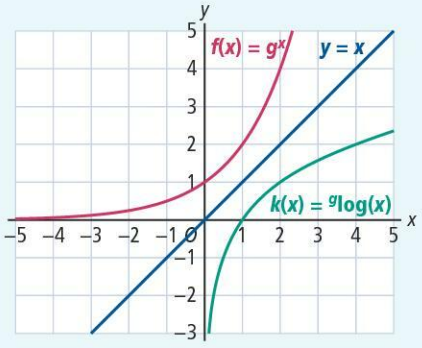
**c** $x = 1\frac{1}{2} \cdot {}^3\log(2)$

**d** $x = 1 + {}^2\log(12)$

**Theorie**

De grafieken van $f(x) = g^x$ en $k(x) = {}^g\log(x)$ zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

| functie | $f(x) = g^x$ | $k(x) = {}^g\log(x)$ |
|---|---|---|
| domein | $D_f = \mathbb{R}$ | $D_k = \langle 0, \rightarrow \rangle$ |
| bereik | $B_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$ | $B_k = \mathbb{R}$ |
| asymptoot | $y = 0$ | $x = 0$ |
| snijpunt assen | $(0, 1)$ | $(1, 0)$ |





© Noordhoff Uitgevers bv

**V4** Geef van elke functie het domein en de vergelijking van de asymptoot van de grafiek.

**a** $f(x) = -12 + {}^{3}\log(4x - 8)$

**b** $g(x) = 4 \cdot {}^{2}\log(15 - 3x)$

**V5** **a** De grafiek van $f(x) = {}^{5}\log(x)$ wordt gespiegeld in de lijn $y = x$.
Vul in: de beeldgrafiek hoort bij de functie …

**b** De functie $f(x) = {}^{g}\log(x)$ is dalend.
Wat weet je over de waarde van $g$?

**V6** **a** Plot en schets in één figuur de grafieken van $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ en $g(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$.

**b** Controleer dat het snijpunt van de grafieken op de lijn $y = x$ ligt.

**Theorie**

Voor het rekenen met logaritmen geldt de rekenregel

$${}^{g}\log(a) = \frac{{}^{b}\log(a)}{{}^{b}\log(g)} \qquad (b > 0 \text{ en } b \neq 1).$$

Met deze regel kun je elke logaritme herschrijven naar logaritmen met een ander grondtal.

**Voorbeeld**

Schrijf ${}^{8}\log(5)$ als een logaritme met grondtal 2.

**Oplossing**

$${}^{8}\log(5) = \frac{{}^{2}\log(5)}{{}^{2}\log(8)} = \frac{{}^{2}\log(5)}{3} = \frac{1}{3} \cdot {}^{2}\log(5)$$

**V7** **a** Druk ${}^{3}\log(25)$ uit in logaritmen met grondtal 10.

**b** Druk ${}^{\frac{1}{2}}\log(15)$ uit in logaritmen met grondtal 6.

**V8** Toon met behulp van de rekenregel aan dat

**a** ${}^{8}\log(17) = \frac{1}{3} \cdot {}^{2}\log(17)$

**b** ${}^{\sqrt{2}}\log(20) = 2 \cdot {}^{2}\log(20)$

**V9** Het functievoorschrift $N(t) = 4 \cdot 3^{t+1}$ is te herleiden tot $N(t) = 4 \cdot 3^{t} \cdot 3^{1}$ en dus tot $N(t) = 12 \cdot 3^{t}$.

Schrijf in de vorm $N(t) = b \cdot g^{t}$.

**a** $N(t) = 2^{3+t}$

**b** $N(t) = 15 \cdot 2^{t+4}$

**c** $N(t) = 3^{-2+3t}$

**d** $N(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-t}$

© Noordhoff Uitgevers bv

# 11.1 Vergelijkingen met exponenten en logaritmen

**Je leert**
- hoe je vergelijkingen met exponenten en logaritmen exact kunt oplossen
- hoe je een verdubbelingstijd of halveringstijd berekent

**Leerroutes**
- ondersteunend: 1—2—3—O4—5—6—7
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7
- uitdagend: 2—3—4—5—7—U1—U2

Een beleggingsfonds belooft de klanten een toename van de waarde van de beleggingen van 4% per jaar.
- Hoe kun je een schatting geven van het aantal jaren dat verloopt totdat de waarde is verdubbeld?

**1**

**a** Los $2^{5-x} = 8$ exact op door beide kanten van de vergelijking te schrijven als macht van 2.

**b** Los $3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{2x+5} = \sqrt[4]{27}$ exact op door beide kanten van de vergelijking te schrijven als machten met hetzelfde grondtal.

**c** Laat zien dat $x = -1 + {}^{3}\log(6)$ de oplossing is van de vergelijking $3^{1+x} = 6$.

**d** Los exact op $5^{1\frac{1}{2}x} = 2$.

**Theorie**

$x = {}^{g}\log(a)$ is de exacte oplossing van de vergelijking $g^x = a$. Je gebruikt deze eigenschap om de exacte oplossing van vergelijkingen met exponenten of logaritmen te vinden.

**Voorbeeld 1**

Los exact op $2^{1-x} = 25$.

**Oplossing**

$1 - x = {}^{2}\log(25)$
$-x = -1 + {}^{2}\log(25)$
$x = 1 - {}^{2}\log(25)$

**Voorbeeld 2**

Los exact op ${}^{3}\log(2x - 1) = 5$.

**Oplossing**

$2x - 1 = 3^5$
$2x = 1 + 243$
$2x = 244$
$x = 122$

**Voorbeeld 3**

Los exact op $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2} = 14$.

**Oplossing**

$3x - 2 = {}^{\frac{1}{2}}\log(14)$
$3x = 2 + {}^{\frac{1}{2}}\log(14)$
$x = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(14)$


© Noordhoff Uitgevers bv

**2** Los exact op.

**a** $7^{1-2x} = 21$

**b** $^{\frac{1}{2}}\log(1-2x) = 3$

**c** $\left(\frac{1}{3}\right)^{4x-1} = 81$

**d** $1 + {}^{5}\log(x-1) = -2$

**3** $^{3}\log^{2}(x)$ betekent $(^{3}\log(x))^{2}$.
Gegeven is de vergelijking $^{3}\log^{2}(x) - 5 \cdot {}^{3}\log(x) = 6$.

**a** Stel $^{3}\log(x) = p$ en berekenen de oplossingen voor $p$.

**b** Welke waarden van $x$ volgen hieruit?

**Theorie**

Ook bij sommige vergelijkingen met exponenten en logaritmen kan het handig zijn een substitutie te gebruiken.

**Voorbeeld 1**

Los exact op $\log^{2}(x) - \log(x) = 2$.

**Oplossing**

Stel $\log(x) = p$,
de vergelijking wordt $p^2 - p = 2$.
$p^2 - p - 2 = 0$
$(p-2)(p+1) = 0$
$p = 2$ of $p = -1$
$\log(x) = 2$ of $\log(x) = -1$
$x = 10^2 = 100$ of $x = 10^{-1} = \frac{1}{10}$

**Voorbeeld 2**

Los exact op $2^x - 5 \cdot 2^{-x} = 4$.

**Oplossing**

Vermenigvuldig links en rechts met $2^x$.
$(2^x)^2 - 5 = 4 \cdot 2^x$
Stel $2^x = p$, de vergelijking wordt
$p^2 - 4p - 5 = 0$
$(p-5)(p+1) = 0$
$p = 5$ of $p = -1$
$2^x = 5$ of $2^x = -1$
Uit $2^x = 5$ volgt $x = {}^{2}\log(5)$.
$2^x = -1$ heeft geen oplossing.

Ondersteunende route → maak opdracht 04

**4** Los exact op.

H

**a** $3^{2x} - 7 \cdot 3^x + 6 = 0$

**b** $3^x - 6 \cdot 3^{-x} = 5$

**c** $6^{2x} - 4 \cdot 6^x = 0$

**d** $^{\frac{1}{2}}\log^{2}(x) = 25$

**e** $^{2}\log^{2}(x) + 3 \cdot {}^{2}\log(x) + 2 = 0$

**f** $25^x - 3 \cdot 5^x = 28$

© Noordhoff Uitgevers bv

**5** Bij een exponentieel groeiproces hoort de functie $A(t) = 600 \cdot 0{,}8^t$. De beginhoeveelheid is 600 en $t$ is in uren.

**a** Bereken algebraïsch hoelang het duurt voordat die hoeveelheid is gehalveerd. Rond af op één decimaal.

**b** Op een gegeven moment is de hoeveelheid 100. Bereken hoeveel tijd er verloopt tot die hoeveelheid is afgenomen tot 50. Rond af op één decimaal.

**c** Leg uit: bij een exponentieel groeiproces met groeifactor 0,8 is de tijd die nodig is om te halveren onafhankelijk van de beginhoeveelheid en gelijk aan de oplossing van de vergelijking $0{,}8^t = 0{,}5$.

**Theorie**

Bij een exponentieel groeiproces met groeifactor $g$ is de verdubbelingstijd de tijd die nodig is om een hoeveelheid te verdubbelen. Deze tijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = 2$.
De halveringstijd is de tijd die nodig is om een hoeveelheid te halveren. Deze tijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = \frac{1}{2}$.
De halveringstijd noem je ook wel halfwaardetijd.

**Voorbeeld**

Een groeiproces wordt beschreven door de formule $A = 30 \cdot 1{,}4^t$.
Bereken de verdubbelingstijd, afgerond op twee decimalen.

**Oplossing**

$g = 1{,}4$ dus los op $1{,}4^t = 2$.

$t = {}^{1,4}\log(2) \approx 2{,}06$

**6** Het volume van de stam van een spar neemt per jaar met gemiddeld 5% toe.

**a** Stel een vergelijking op waarmee je de verdubbelingstijd voor het volume kunt vinden.

**b** Benader deze verdubbelingstijd in hele jaren nauwkeurig.

**c** Na hoeveel jaar is het volume van de spar verachtvoudigd?

**d** Hoeveel keer past de verdubbelingstijd in de tijd die nodig is om de hoeveelheid acht keer zo groot te maken?

**7** In 2011 leidden een aardbeving en een tsunami tot grote problemen in de Japanse kerncentrale Fukushima. Een kernramp volgde en er kwam radioactief materiaal vrij, onder andere jodium-131 en cesium-137. De halfwaardetijd van jodium-131 is 8 dagen en die van cesium-137 is 30 jaar.

**a** Bereken voor beide elementen hoelang het duurt totdat de radioactiviteit is teruggebracht tot 5%.

**b** Stel dat het gebied als veilig wordt beschouwd als de radioactiviteit is teruggebracht tot 0,1%. Hoeveel keer langer duurt dit bij cesium-137 dan bij jodium-131? Rond je antwoord af op tientallen.

Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2


© Noordhoff Uitgevers bv

## Ondersteunende opdrachten

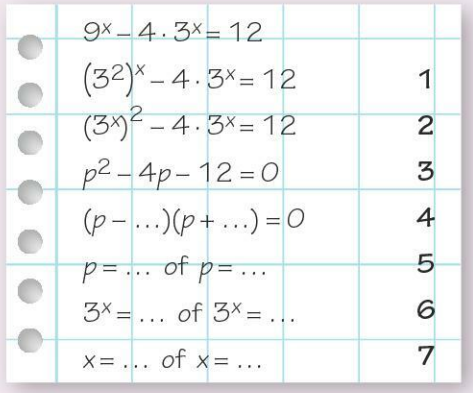
**O4** Je gaat de vergelijking $9^x - 4 \cdot 3^x = 12$ exact oplossen.

**a** Verklaar stap 1 van de berekening op het blaadje.

**b** Welke rekenregel is gebruikt bij stap 2?

**c** Wat gebeurt er in stap 3?

**d** Maak de berekening op het blaadje af.




Los exact op.

**e** $4^{2x} - 3 \cdot 4^x = 0$

**f** $\left(1\frac{1}{2}\right)^x + 2 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^{-x} = 3$

**g** ${}^3\log^2(x) + {}^3\log(x) = 12$

**h** ${}^2\log^2\left(\frac{1}{2}x\right) = 16$

**i** $49^x + 2 \cdot 7^x = 8$

**j** $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$

## Uitdagende opdrachten

**U1** **a** Plot en schets in één figuur de grafieken van $f(x) = x^2$ en $g(x) = 2^x$.

**b** Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van $f$ en $g$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

**c** Bereken ook de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van $f(x) = x^2$ en $h(x) = 1{,}1^x$. Rond af op één decimaal.

**d** Voor welke waarden van $a$ heeft de grafiek van de functie $k(x) = a^x$ met $a > 1$ precies één punt gemeenschappelijk met de grafiek van $f(x) = x^2$? Rond af op één decimaal.

**U2** Gegeven is een groeiproces met een groeipercentage van $p\%$.

**a** Leg uit dat de groeifactor kan worden geschreven als $1 + 0{,}01p$.

**b** Leg uit dat voor de verdubbelingstijd geldt $t = {}^{1+0{,}01p}\log(2)$.

**c** Plot en schets de grafiek van $t$.

**d** In de economie wordt vaak de volgende vuistregel gebruikt: $\textit{verdubbelingstijd} = \dfrac{70}{\textit{groeipercentage}}$

Komt deze regel goed overeen met de formule uit opdracht b?

**e** Tot welk groeipercentage wijkt het resultaat van de vuistregel minder dan 5% af van de exacte waarde?

© Noordhoff Uitgevers bv

# 11.2 Rekenregels voor logaritmen

**Je leert**
- wat de rekenregels voor logaritmen zijn

**Leerroutes**
- ondersteunend: 8—9—010—11—12—13
- doorlopend: 8—9—10—11—12—13
- uitdagend: 8—9—10—11—13—U3

In een land waar slechts weinig mensen zijn ingeënt, is een mazelen-epidemie uitgebroken. Het aantal patiënten wordt driemaal zo groot in ongeveer 5 dagen en tweemaal zo groot in ongeveer 3 dagen.
- In hoeveel dagen, ongeveer, wordt het aantal patiënten zesmaal zo groot?
- In hoeveel dagen, ongeveer, wordt het aantal patiënten achtmaal zo groot?

**8**

**a** $x = {}^{3}\log(11)$ is de exacte oplossing van $3^x = 11$.
Wat is dus de waarde van $3^{{}^{3}\log(11)}$?

**b** Geef zonder de rekenmachine te gebruiken de uitkomsten van $2^{{}^{2}\log(3)}$, $0{,}3^{{}^{0{,}3}\log(4)}$ en $a^{{}^{a}\log(3)}$.

**c** Omgekeerd geldt $4 = 6^{{}^{6}\log(4)}$ of ook $4 = 0{,}3^{{}^{0{,}3}\log(4)}$.
Zo kun je 4 schrijven als een macht van 6 en ook als een macht van 0,3.
Schrijf op dezelfde manier het getal 7 als macht van 2, als macht van 12 en als macht van $p$.

**9** Voor het rekenen met machten ken je rekenregels. Voor het rekenen met logaritmen bestaan ook rekenregels. Je kunt de rekenregels voor machten gebruiken om rekenregels voor logaritmen af te leiden.

**a** Bereken $2^{{}^{2}\log(3)}$, $2^{{}^{2}\log(7)}$ en $2^{{}^{2}\log(3)} \cdot 2^{{}^{2}\log(7)}$.

**b** Uit welke rekenregel voor machten volgt
$2^{{}^{2}\log(3)} \cdot 2^{{}^{2}\log(7)} = 2^{{}^{2}\log(3)+{}^{2}\log(7)}$?

**c** Leg uit dat de opdrachten a en b volgt dat
$2^{{}^{2}\log(3)+{}^{2}\log(7)} = 2^{{}^{2}\log(21)}$.

**d** Vul in: ${}^{2}\log(3) + {}^{2}\log(7) = {}^{2}\log(\ldots)$.

**e** Vul in: ${}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(\ldots)$.

**f** ${}^{5}\log(7) + {}^{5}\log(70) = {}^{5}\log(a)$. Welke waarde heeft $a$?

**g** Schrijf de vergelijking ${}^{5}\log(70) - {}^{5}\log(7) = {}^{5}\log(b)$ als een optelling en bereken de waarde van $b$.

**h** Schrijf $4 \cdot {}^{3}\log(2)$ als een optelling en toon aan:
$4 \cdot {}^{3}\log(2) = {}^{3}\log(16)$.


© Noordhoff Uitgevers bv

**Theorie**

Voor het rekenen met logaritmen gelden de volgende rekenregels.

$^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(a \cdot b)$

$^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log\left(\frac{a}{b}\right)$

$p \cdot {}^{g}\log(a) = {}^{g}\log(a^{p})$

$g^{{}^{g}\log(a)} = a$

$^{g}\log(m) = \frac{^{n}\log(m)}{^{n}\log(g)}$

met $g > 0$, $g \neq 1$, $a > 0$, $b > 0$, $n > 0$, $n \neq 1$ en $m > 0$.

**Voorbeeld 1**

Schrijf als één logaritme $^{4}\log(3) + \frac{1}{2} \cdot {}^{4}\log(36)$.

**Oplossing**

$^{4}\log(3) + \frac{1}{2} \cdot {}^{4}\log(36) =$

$^{4}\log(3) + {}^{4}\log(36^{\frac{1}{2}}) =$

$^{4}\log(3) + {}^{4}\log(6) =$

$^{4}\log(18)$

**Voorbeeld 2**

Schrijf als één logaritme $3 \cdot {}^{2}\log(7x) - {}^{2}\log(7)$.

**Oplossing**

$3 \cdot {}^{2}\log(7x) - {}^{2}\log(7) =$

$^{2}\log(7x)^{3} - {}^{2}\log(7) =$

$^{2}\log(343x^{3}) - {}^{2}\log(7) =$

$^{2}\log\left(\frac{343x^{3}}{7}\right) = {}^{2}\log(49x^{3})$

Ondersteunende route → maak opdracht O10

**10** H Schrijf als één logaritme.

**a** $^{3}\log(5) + {}^{3}\log(6)$

**b** $^{7}\log(42) - {}^{7}\log(3) + {}^{7}\log(2)$

**c** $^{7}\log(42) - ({}^{7}\log(3) + {}^{7}\log(2))$

**d** $2 \cdot {}^{5}\log(4) + {}^{5}\log(a)$

**e** $^{5}\log(a) + {}^{5}\log(a + 1)$

**f** $3 \cdot {}^{0{,}5}\log(p) - {}^{0{,}5}\log(p^{2})$

© Noordhoff Uitgevers bv

**11** Gegeven zijn $f(x) = \log(x)$, $g(x) = \log(1000x)$ en $h(x) = \log(0{,}01x)$.

**a** Toon aan dat $g(x) = 3 + f(x)$.

**b** Toon aan dat $h(x) = -2 + f(x)$.

**c** Er geldt $h(x) = a + g(x)$.

Bereken de waarde van $a$.

**d** Schrijf $k(x) = 4 + f(x)$ als één logaritme.

**e** Schrijf $m(x) = 6 + f(x)$ als één logaritme.

**f** Gegeven is verder de functie $n(x) = \log\left(\frac{1}{x}\right)$.

Toon aan dat $n(x) = -f(x)$ voor elke positieve waarde van $x$.

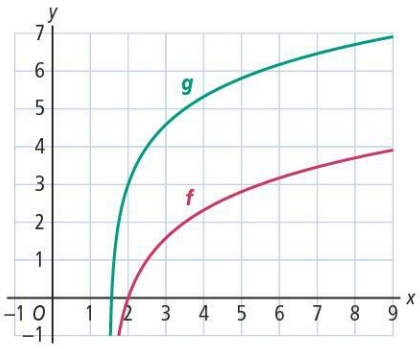
**g** Hoe ontstaan de grafieken van $m$ en van $n$ uit die $f$?

**12** In het assenstelsel staan de grafieken van $f(x) = {}^2\log(2x - 3)$ en $g(x) = {}^2\log(16x - 24)$.

**a** Toon aan dat beide functies hetzelfde domein hebben.

**b** Gebruik de rekenregels voor logaritmen om te laten zien dat $g(x) = 3 + {}^2\log(2x - 3)$

**c** Door welke transformatie ontstaat de grafiek van $g$ uit de grafiek van $f$?



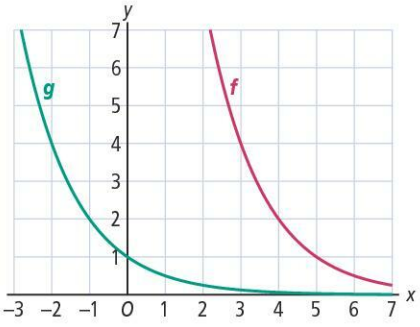

**13** H Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^{5-x}$ en $g(x) = 2^{-x}$.

**a** Door in het functievoorschrift van $g$ de variabele $x$ te vervangen door $x - 5$ krijg je het functievoorschrift van $f$. Laat zien dat dit klopt.

**b** Door welke transformatie ontstaat de grafiek van $f$ uit de grafiek van $g$?

**c** Je kunt het functievoorschrift van $f$ ook schrijven als $f(x) = b \cdot 2^{-x}$.
Welke waarde heeft $b$?

**d** Door welke andere transformatie gaat de grafiek van $g$ over in de grafiek van $f$?




Uitdagende route → maak opdracht U3


© Noordhoff Uitgevers bv

## Ondersteunende opdrachten

$^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(a \cdot b)$ **1**

$^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log\left(\frac{a}{b}\right)$ **2**

$p \cdot {}^{g}\log(a) = {}^{g}\log(a^p)$ **3**

**O10** Op het blaadje staan drie rekenregels voor logaritmen.

**a** Op grond van welke rekenregel geldt $\log(25) = 2 \cdot \log(5)$?

**b** Verklaar met behulp van rekenregel 2 dat $\log(10x) - \log(x) = 1$.

Schrijf als één logaritme.

**c** $^{3}\log(55) - {}^{3}\log(5)$

**d** $^{5}\log(90) - ({}^{5}\log(3) + {}^{5}\log(6))$

**e** $4 \cdot {}^{9}\log(2) - {}^{9}\log(3)$

**f** $^{2}\log(7) + 3 \cdot {}^{2}\log(p)$

**g** $^{3}\log(b^2) + {}^{3}\log(b - 2)$

**h** $5 \cdot {}^{0{,}3}\log(d) - {}^{0{,}3}\log(d^2)$

## Uitdagende opdrachten

**U3** Neem de vermenigvuldiging

$^{2}\log(3) \cdot {}^{3}\log(4) \cdot {}^{4}\log(5) \cdot \ldots \cdot \ldots \cdot {}^{n-1}\log(n)$.

**a** Voor welke waarden van $n < 100$ is de uitkomst van deze vermenigvuldiging een geheel getal?

**b** Voor welke waarden van $n$ is de uitkomst van deze vermenigvuldiging groter dan 20?

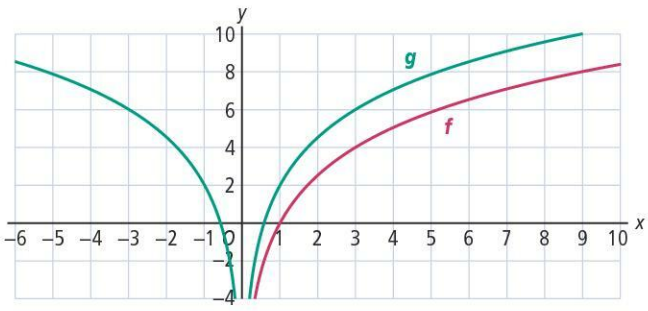
© Noordhoff Uitgevers bv

# 11.3 Herleiden

**Je leert**
- hoe je exponentiële en logaritmische formules herleidt
- hoe je aantoont dat twee functies hetzelfde zijn

**Leerroutes**
- ondersteunend: 14—15— 016—17—18—19—20—021—21—22
- doorlopend: 14—15—16—17—18—19—20—21—22—23
- uitdagend: 16—17—18—19—20—21—22—23—U4—U5

Gegeven zijn de grafieken van
$f(x) = 4 \cdot {}^3\log(x)$ en $g(x) = {}^3\log(9x^4)$.
- Welke overeenkomst en welk verschil is er tussen de grafieken van $f$ en $g$?




**14** Gegeven is de formule $p = 1 + {}^3\log(r + 2)$.
- **a** Leg uit dat $r + 2 = 3^{p-1}$.
- **b** Druk $r$ uit in $p$.

**15** Gegeven is de formule $T = {}^4\log(2a)$.
- **a** Laat zien dat je de formule kunt schrijven als $a = \frac{1}{2} \cdot 4^T$.
- **b** Laat zien dat je de formule ook kunt schrijven als $a = 2^{2T-1}$.

**Theorie**

Een logaritmische formule kun je herleiden tot een exponentiële formule.
Omgekeerd kun je een logaritmische formule tot een exponentiële formule herleiden. Je gebruikt de basisregel:
uit $g^b = a$ volgt $b = {}^g\log(a)$
en omgekeerd:
uit ${}^g\log(a) = b$ volgt $a = g^b$.

tot de macht
$${}^g\log(a) = b$$
is

**Voorbeeld 1**

Gegeven is de formule $R = 2 + 3 \cdot 5^t$.
Druk $t$ uit in $R$.

**Oplossing**

$2 + 3 \cdot 5^t = R$
$3 \cdot 5^t = R - 2$ (links en rechts − 2)
$5^t = \frac{1}{3}R - \frac{2}{3}$ (links en rechts : 3)
$t = {}^5\log(\frac{1}{3}R - \frac{2}{3})$ ($g^b = a$ geeft $b = {}^g\log(a)$)

**Voorbeeld 2**

Gegeven is de formule $Z = 4 + {}^2\log(3a)$.
Druk $a$ uit in $Z$.

**Oplossing**

$4 + {}^2\log(3a) = Z$
${}^2\log(3a) = Z - 4$ (links en rechts − 4)
$3a = 2^{Z-4}$ (${}^g\log(a) = b$ geeft $a = g^b$)
$a = \frac{1}{3} \cdot 2^{Z-4}$ (links en rechts : 3)


© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O16

**16** Druk $t$ uit in $N$.

**a** $N = 3 \cdot 4^t$

**b** $N = -16 + 4 \cdot 5^t$

**c** $4N \cdot 6^t = 5$

**d** $7^{tN} = 10$

**17** Druk $p$ uit in $q$.

H

**a** $q = -2 + {}^5\log(p)$

**b** $q = \log(6p - 12)$

**c** $2^p \cdot q = 1$

**d** $4q \cdot {}^3\log(p) = 8$

**18** H

**a** Het verband tussen de variabelen $R$ en $S$ voldoet aan de formule $4 \cdot \log(S) - 2 \cdot \log(R) = 1$.

Toon algebraïsch aan dat $S^4 = 10R^2$.

**b** Het verband tussen de variabelen $P$ en $Q$ voldoet aan de formule ${}^2\log(P) + 2 \cdot {}^2\log(Q) = -1$.

Schrijf het verband tussen deze variabelen als een formule zonder logaritmen.

**19** Gegeven is de formule ${}^9\log(K) + {}^{27}\log(M) = 2$.
Druk $K$ uit in $M$. Schrijf de formule zonder logaritmen.

**20** Gegeven zijn de functies $f(x) = \log(x^2)$ en $g(x) = 2 \cdot \log(x)$.

**a** Plot en schets de grafieken van $f$ en $g$.

**b** Welke overeenkomst en welk verschil is er tussen de twee grafieken? Geef hiervoor een verklaring.

**c** Vergelijk ook de grafieken van de functies $h(x) = \log(x^3)$ en $j(x) = 3 \cdot \log(x)$ met elkaar.
Wat is je conclusie?

© Noordhoff Uitgevers bv

**Theorie**

Twee functies $f$ en $g$, met hetzelfde domein, zijn hetzelfde als je kunt aantonen dat beide functies voor alle waarden uit het domein dezelfde uitkomst geven. Je toont dit meestal aan door te laten zien dat het functievoorschrift van $f$ met behulp van de rekenregels kan worden omgezet in het functievoorschrift van $g$.

**Voorbeeld**

Toon aan dat de functies $f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(4x)$ en $g(x) = -2 - {}^{2}\log(x)$ hetzelfde zijn.

**Oplossing**

$f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(4) + {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$

$f(x) = \dfrac{{}^{2}\log(4)}{{}^{2}\log(\frac{1}{2})} + \dfrac{{}^{2}\log(x)}{{}^{2}\log(\frac{1}{2})}$

$f(x) = \dfrac{2}{-1} + \dfrac{{}^{2}\log(x)}{-1}$

$f(x) = -2 - {}^{2}\log(x)$

dus de functies $f$ en $g$ zijn hetzelfde.

Ondersteunende route → maak opdracht O21

**21** H

**a** Toon aan dat de functies $f(x) = {}^{5}\log(x^3) + 6$ en $g(x) = 3 \cdot {}^{5}\log(25x)$ hetzelfde zijn.

**b** Bewijs dat de functies $p(x) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x+6}$ en $q(x) = \frac{1}{8} \cdot 2^{-\frac{1}{2}x}$ hetzelfde zijn.

**c** Schrijf $f(x) = {}^{2}\log(32x)$ in de vorm $f(x) = b + {}^{2}\log(x)$.

**d** Schrijf $f(x) = 9^{2x-2}$ in de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

**22**

**a** De functies $f(x) = a \cdot g^x$ en $h(x) = g^{x+b}$ zijn hetzelfde.

Wat is het verband tussen de getallen $a$ en $b$?

**b** De functies $f(x) = {}^{g}\log(x) + a$ en $h(x) = {}^{g}\log(bx)$ zijn hetzelfde.

Welk verband bestaat er tussen de getallen $a$ en $b$?

**23** Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^{5}\log(4x)$, $g(x) = 2 \cdot {}^{5}\log\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ en $h(x) = f(x) + g(x)$ met $x > 0$.

Toon algebraïsch aan dat $h(x) = 2 \cdot {}^{5}\log(2) - 3 \cdot {}^{5}\log(x)$.

Uitdagende route → maak opdracht U4 en U5


© Noordhoff Uitgevers bv

## Ondersteunende opdrachten

**O16** Gegeven is de formule $2P - 5 = 3 \cdot 6^t$. Op het blaadje is een begin gemaakt met het herschrijven van de formule, zodat $t$ wordt uitgedrukt in $P$.

**a** Wat is er gebeurd in stap 1?

**b** Vul stap 2 verder in.

**c** Pas de regel: 'Uit $g^b = a$ volgt $b = {}^g\log(a)$' toe om stap 3 af te maken.

$2P - 5 = 3 \cdot 6^t$

$3 \cdot 6^t = 2P - 5$ 1

$6^t = \ldots$ 2

$t = \cdots \log(\ldots)$ 3

Druk $t$ uit in $P$.

**d** $2P - 7 = \frac{1}{10} \cdot 3^t$

**e** $2P \cdot 3^t = 9$

**f** $5^{t \cdot P} = 12$

**g** $3P = 1\frac{1}{2} - 2 \cdot 5^t$

**O21** In deze opdracht ga je bewijzen dat de functies $f(x) = {}^3\log(x^5) + 5$ en $g(x) = 5 \cdot {}^3\log(3x)$ hetzelfde zijn.

**a** Vul de juiste getallen in bij de eerste twee stappen.

**b** Verklaar stap 3.

**c** Maak het bewijs af.

$g(x) = 5 \cdot {}^3\log(3x)$

$g(x) = {}^3\log\left((3x)^{\cdots}\right)$ 1

$g(x) = {}^3\log(3^{\cdots} \cdot x^{\cdots})$ 2

$g(x) = {}^3\log(\ldots) + {}^3\log(\ldots)$ 3

Je gaat ook bewijzen dat de functies $f(x) = \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^{4-x}$ en $g(x) = \frac{1}{729} \cdot 3^{1\frac{1}{2}x}$ hetzelfde zijn.

**d** Vul het juiste getal in bij stap 1 van dit bewijs.

**e** Maak dit bewijs af.

$f(x) = \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^{4-x}$

$f(x) = (3^{\cdots})^{4-x}$ 1

$f(x) = 3^{\cdots} \cdot 3^{\cdots}$ 2

## Uitdagende opdrachten

**U4** Van een bepaalde hoeveelheid radioactief materiaal is er een verband tussen de intensiteit $I$ van de straling en de tijd $t$ in dagen volgens de formule $\log(I) = -0{,}009t + 1$.
Je kunt deze formule herleiden tot de vorm $I = b \cdot g^t$.

**a** Toon dat aan en bereken de waarde van $b$ en van $g$.

**b** Bereken na hoeveel dagen de intensiteit is gehalveerd.

**U5** Gegeven is de functie $f(x) = 5 \cdot 3^x$.

**a** Toon aan dat $h(x) = f(x + a) - f(x)$ voor elke waarde van $a \neq 0$ een exponentiële functie is.

**b** Toon aan dat $k(x) = \frac{f(cx)}{f(x)}$ voor elke waarde van $c \neq 1$ te schrijven is als $k(x) = b \cdot g^x$.

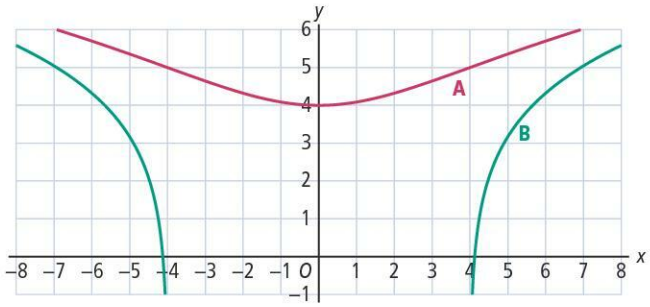
© Noordhoff Uitgevers bv

# 11.4 Vergelijkingen en ongelijkheden

**Je leert**
- hoe je exponentiële en logaritmische vergelijkingen exact oplost
- hoe je exponentiële en logaritmische ongelijkheden exact oplost

**Leerroutes**
- ondersteunend: 24—25—026—26—27—28—029
- doorlopend: 24—25—26—27—28—29—30
- uitdagend: 24—25—26—27—29—30—U6

In het assenstelsel staan de grafieken van $f(x) = {}^2\log(x^2 - 16)$ en $g(x) = {}^2\log(x^2 + 16)$.
- Leg zonder te rekenen uit welke grafiek bij welke functie hoort.
- Leg zonder te rekenen uit dat de grafieken van deze functies elkaar niet snijden.




**24** Gegeven is de vergelijking ${}^5\log(|3x - 7|) = 2$.
- **a** Welke waarde kan $3x - 7$ in deze vergelijking hebben?
- **b** Los de vergelijking exact op.

**25** Gegeven is de vergelijking ${}^2\log(x^2 - 4x) = {}^2\log(x - 4)$.
- **a** Los op $x^2 - 4x = x - 4$.
- **b** Leg uit waarom de vergelijking ${}^2\log(x^2 - 4x) = {}^2\log(x - 4)$ geen oplossingen heeft.

**Theorie**

Van de logaritmische vergelijking ${}^g\log(x) = c$ is $x = g^c$ de exacte oplossing.
Met behulp van deze regel en de rekenregels voor logaritmen los je logaritmische vergelijkingen exact op.
Controleer zo nodig of je oplossing voldoet.

**Voorbeeld 1**

Los exact op $|{}^5\log(2x - 1)| = 3$.

**Oplossing**

${}^5\log(2x - 1) = 3$ of ${}^5\log(2x - 1) = -3$

$2x - 1 = 5^3 = 125$ of $2x - 1 = 5^{-3} = \frac{1}{125}$

$2x = 126$ of $2x = 1\frac{1}{125} = \frac{126}{125}$

$x = 63$ of $x = \frac{63}{125}$

(beide oplossingen voldoen)

**Voorbeeld 2**

Los exact op ${}^2\log(x) + {}^2\log(x + 2) = 3$.

**Oplossing**

${}^2\log(x(x + 2)) = 3$

$x(x + 2) = 2^3$ geeft $x^2 + 2x - 8 = 0$

$(x + 4)(x - 2) = 0$

$x = -4$ of $x = 2$

Bij $x = -4$ bestaan ${}^2\log(x)$ en ${}^2\log(x + 2)$ niet.
De oplossing is $x = 2$.


© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O26

**26** Los exact op.

H

**a** $^{3}\log\left(|2x-3|\right)=4$

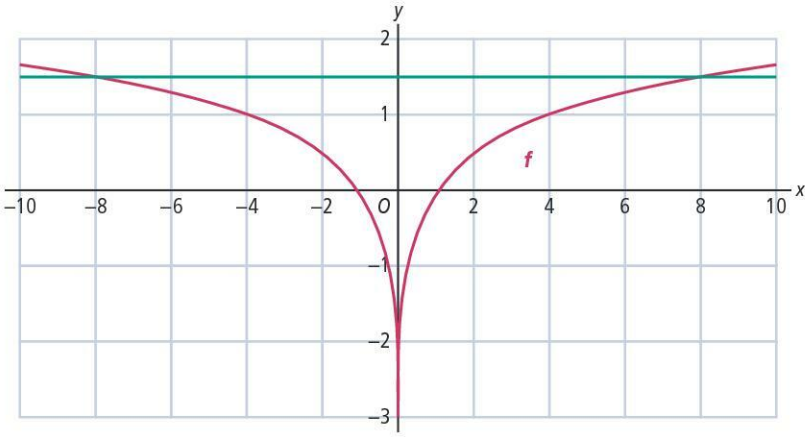
**b** $^{2}\log(x-3)=1-{}^{2}\log(x+3)$

**c** $\log(2x-4)-\log(7)=1$

**d** $^{\frac{1}{3}}\log(4x)-{}^{\frac{1}{3}}\log(6)=-2$

**e** $^{5}\log\left(\frac{1}{x}\right)=2+{}^{5}\log(x)$

**f** $^{3}\log(5-x)-{}^{3}\log(2x+4)=1$




**27** Getekend zijn de grafiek van de functie $f(x)=^{4}\log(|x|)$ en de lijn $y=1\frac{1}{2}$.

**a** Geef het domein van $f$.

**b** Los exact op $f(x)=1\frac{1}{2}$.

**c** Voor welke waarden van $x$ geldt $f(x)<1\frac{1}{2}$?

**d** Los exact op $f(x)\geq -2$.

© Noordhoff Uitgevers bv

**Theorie**

Bij het oplossen van een ongelijkheid los je eerst de bijbehorende vergelijking op. Voor het trekken van de juiste conclusie over de oplossing van de ongelijkheid speelt ook het domein van de functie een belangrijke rol. Een plot van de grafieken kan daarbij helpen.

**Voorbeeld**

Los exact op $^4\log(x-5) \leq 2$.

**Oplossing**

$^4\log(x-5) = 2$

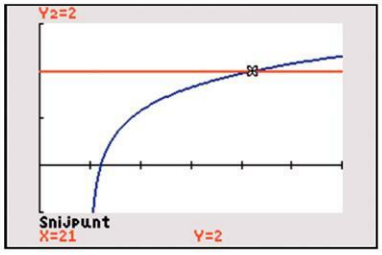
$x - 5 = 4^2$

$x = 21$

In de plot staan de grafiek van $f(x) = {}^4\log(x-5)$ en de lijn $y = 2$.

Het domein van $f$ is $\langle 5, \rightarrow \rangle$.

De oplossing van de ongelijkheid is $5 < x \leq 21$.

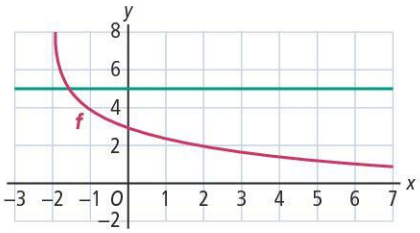



**28** H

De grafiek van $f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(x+2) + 4$ en de lijn $y = 5$ zijn getekend.

**a** Geef het domein van $f$.

**b** Los exact op $f(x) > 5$.




Ondersteunende route → maak opdracht O29

**29** H

Los exact op.

**a** $^2\log(2x+1) < 5$

**b** $^3\log(4-x) \geq 2 - {}^3\log(4+x)$

**30**

Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^3\log(15-2x)$ en $g(x) = {}^3\log(5x+20)$.

**a** Los exact op $f(x) \geq 1$.

**b** Los exact op $f(x) < g(x)$.

**c** Los exact op $f(x) \cdot g(x) > 0$.

Uitdagende route → maak opdracht U6


© Noordhoff Uitgevers bv

## Ondersteunende opdrachten

**O26** Je gaat de vergelijking $^2\log(x^2 + 7) - {}^2\log(13 - x) = 2$ exact oplossen.

- **a** Welke rekenregel is toegepast in stap 1?
- **b** Vul stap 2 verder in.
- **c** Los de vergelijking verder op.
- **d** Waarom moet je de oplossingen bij een vergelijking met logaritmen altijd controleren?
- **e** Voldoen de oplossingen van deze vergelijking?

$^2\log(x^2 + 7) - {}^2\log(13 - x) = 2$

$^2\log\left(\frac{x^2 + 7}{\dots}\right) = 2$ 1

$\frac{x^2 + 7}{\dots} = \dots$ 2

$x^2 + 7 = \dots$ 3

$x^2 + \dots - \dots = 0$ 4

**O29** Je gaat de ongelijkheid $^2\log(x - 1) + {}^2\log(7 - x) \leq 3$ exact oplossen.

- **a** Maak de berekening op het blaadje af en los de bijbehorende vergelijking op.
- **b** Voldoen de oplossingen die je vindt?
- **c** Geef het domein van elk van de functies $f(x) = {}^2\log(x - 1)$ en $g(x) = {}^2\log(7 - x)$.
- **d** Plot en schets de grafieken van $h(x) = {}^2\log(x - 1) + {}^2\log(7 - x)$ en $k(x) = 3$.
- **e** Los de ongelijkheid op. Let daarbij op de domeinen van $f$ en $g$.
- **f** Los exact op $^3\log(5 - 3x) > 4$.
- **g** Los exact op $^5\log(x^2 + 10) - {}^5\log(x + 2) \geq 1$.

$^2\log(x - 1) + {}^2\log(7 - x) \leq 3$

$^2\log(x - 1) + {}^2\log(7 - x) = 3$ 1

$^2\log((x - 1)(7 - x)) = 3$ 2

$(x - 1)(7 - x) = \dots \cdots$ 3

$\dots = \dots$ 4

## Uitdagende opdrachten

**U6** Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = {}^3\log(p + 6x - x^2)$.

- **a** Plot en schets de grafiek van $f_0$.
- **b** Geef het domein van $f_0$.
- **c** Voor welke waarde van $p$ is het interval $\langle -3, 9\rangle$ het domein van $f_p$?
- **d** Voor welke waarde van $p$ is het maximum van $f_p$ gelijk aan 4?
- **e** Voor welke waarden van $p$ bestaat de functie $f_p$ voor geen enkele waarde van $x$?

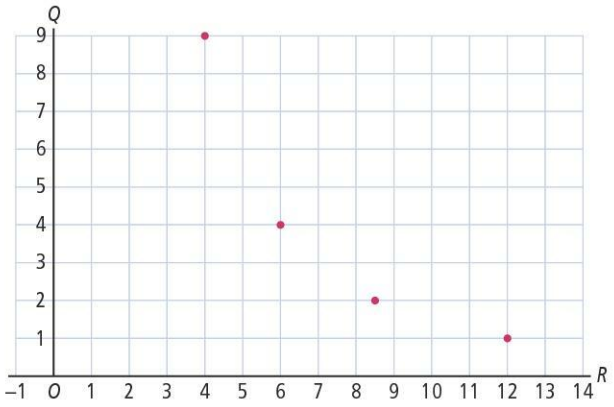
© Noordhoff Uitgevers bv

# 11.5 Groeimodellen

**Je leert**
- wat een wiskundig model is

**Leerroutes**
- ondersteunend: 31—32—33—034—34—35
- doorlopend: 31—32—33—34—35—36
- uitdagend: 31—32—33—34—35—U7

Bij een experiment wordt gekeken naar het verband tussen de variabelen $R$ en $Q$.
In de grafiek staan enkele meetgegevens.
- Welk soort verband kan er zijn tussen de variabelen?




**31** Metingen die gedaan zijn bij een experiment leveren uitkomsten die vaak in een tabel worden weergegeven.
Hiernaast zie je een klein deel van een dergelijke tabel.

| $t$ | $C$ |
|---|---|
| 2 | 10 |
| 6 | 50 |
| 10 | … |

**a** Op basis hiervan kun je een lineaire formule $C = a \cdot t + b$ opstellen voor het verband tussen $C$ en $t$.
Bereken de waarde van $a$ en van $b$.

**b** Het is ook mogelijk dat er een exponentieel verband van de vorm $C = b \cdot g^t$ bestaat tussen $C$ en $t$.
Laat met een berekening zien dat de groeifactor ongeveer gelijk is aan 1,495 en bereken de waarde van $b$ in twee decimalen.

In de praktijk zijn er meestal veel meer tabelwaarden beschikbaar dan in opdracht 31 het geval is. Door de waarden in een assenstelsel weer te geven kun je soms al een vermoeden krijgen over de formule die er bij past.


© Noordhoff Uitgevers bv

**32** H

Bij radioactief materiaal neemt de sterkte van de straling op den duur af. Hoe snel dit gaat is afhankelijk van het soort materiaal. In de tabel staat van een voorwerp een aantal meetgegevens van de sterkte van de straling $S$.

| *tijd t* in uren | *sterkte straling S* in becquerel per gram |
|---|---|
| 1 | 4200 |
| 2 | 2940 |
| 5 | 1000 |
| 7 | 500 |

**a** Verwerk de gegevens in een assenstelsel met $t$ langs de horizontale as en $S$ langs de verticale as. Neem langs de verticale as 1 cm voor 1000 becquerel.

**b** Schets zo goed mogelijk een vloeiende grafiek door de getekende punten en ga na dat het verband tussen $t$ en $S$ exponentieel zou kunnen zijn.

**c** Neem aan dat er sprake is van een exponentieel verband en bereken de groeifactor per uur en de sterkte van de straling op tijdstip $t = 0$.

**d** Stel een formule op waarbij $S$ is uitgedrukt in $t$.

**e** Controleer of alle waarden in de tabel bij benadering voldoen aan de gevonden formule.

De becquerel is de eenheid die wordt gebruikt om de sterkte van radioactieve straling aan te geven.

**Theorie**

Gegevens die je verkrijgt bij het bestuderen van processen in de natuur of de wetenschap kun je vaak met behulp van een tabel en een grafiek weergeven. De tabel of de grafiek kun je gebruiken om vragen over het proces te beantwoorden. Soms kun je het proces beschrijven met een formule.
Je probeert de werkelijkheid dan weer te geven in een wiskundig model.

**Voorbeeld**

Bij een slinger is de slingertijd $T$ in seconden afhankelijk van de lengte $l$ in meters van de slinger. Enkele meetgegevens staan in de tabel. Zoek een formule bij de tabel.

| $l$ | $T$ | $T^2$ |
|---|---|---|
| 0,2 | 0,90 | 0,81 |
| 0,4 | 1,26 | 1,59 |
| 0,6 | 1,55 | 2,40 |
| 0,8 | 1,79 | 3,20 |
| 1,0 | 2,00 | 4,00 |

**Oplossing**

Er is geen lineair verband en de waarden van $T$ zijn afnemend stijgend. In dit geval vind je een verband door een tabel met $T^2$ toe te voegen.

Je ziet dan dat $T^2 \approx 4l$ en daaruit volgt $T \approx \sqrt{4l} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{l} = 2\sqrt{l}$.

**33**

Bij de tabel in opdracht 31 kun je ook een kwadratische formule van de vorm $C = p \cdot t^2 + q$ opstellen.

**a** Geef de vergelijking die ontstaat door hierin $t = 2$ en $C = 10$ in te vullen.

**b** Doe hetzelfde als bij opdracht a met $t = 6$ en $C = 50$.

**c** Druk bij de vergelijkingen die je in opdracht a en b hebt gevonden $q$ uit in $p$.

**d** Bereken de waarden van $p$ en $q$ door het stelsel vergelijkingen bij opdracht c op te lossen.

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O34

**34** In de tabel zie je van een aantal planeten de afstand $A$ tot de zon in miljoenen kilometers en de omlooptijd $t$ in jaren.

| | Mercurius | Aarde | Mars | Jupiter | Saturnus | Neptunus |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$ | 0,24 | 1,00 | 1,88 | 11,86 | 29,46 | 164,80 |
| $A$ | 57,8 | 149,6 | 228 | 778 | 1430 | 4500 |

**a** Teken de punten uit de tabel in een assenstelsel waarbij je $x = \log(t)$ uitzet op de horizontale as en $y = \log(A)$ op de verticale as.

**b** Teken een rechte lijn die zo goed mogelijk door de getekende punten gaat en stel bij deze lijn een vergelijking op van de vorm $\log(A) = m \cdot \log(t) + n$.

**c** Leid uit de vergelijking die je in opdracht b hebt gevonden een verband af tussen $t$ en $A$. Schrijf dit verband zonder logaritmen.

**35** Verwarmde vloeistoffen, zoals koffie, thee of soep, koelen langzaam af. In het algemeen geldt daarbij dat het verschil tussen de temperatuur van de vloeistof en de omgevingstemperatuur per tijdseenheid met een vaste factor wordt vermenigvuldigd.

**a** Leg uit waarom die factor een getal tussen 0 en 1 moet zijn.

Ga uit van een omgevingstemperatuur van 20 °C, een vloeistoftemperatuur van 85 °C, terwijl het temperatuurverschil per 5 minuten met 70% afneemt.

**b** Stel een formule op voor het temperatuurverschil $V$ in °C met de tijd $t$ in eenheden van 5 minuten.

**c** Stel ook een formule op voor de vloeistoftemperatuur $T$ in °C met de tijd $t$ in minuten.

**36** Bij een proef met een geluidsbron is de geluidssterkte $I$ gemeten op verschillende afstanden $d$ van de geluidsbron. De resultaten staan in de tabel.

| $d$ in m | 4 | 10 | 14 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| $I$ in W/m$^2$ | 25 | 4 | 2 | 1 |

**a** Leg uit waarom de tabel niet bij een exponentieel verband kan horen.

**b** Leg uit waarom de tabel niet bij een omgekeerd evenredig verband kan horen.

**c** Door een nieuwe tabel te maken met daarin de waarden van $d^2$ kun je ontdekken welk verband tussen $d$ en $I$ bestaat. Welke formule beschrijft dit verband?

Uitdagende route → maak opdracht U7


© Noordhoff Uitgevers bv

## Ondersteunende opdrachten

**O34** Bij een experiment zijn meetgegevens verzameld over de variabelen $s$ en $K$.
Het is duidelijk dat het zinloos is om een grafiek te tekenen, omdat de waarden van $K$ onderling sterk verschillen.

| $s$ | $K$ |
|---|---|
| 2 | 370 |
| 5 | 14 380 |
| 10 | 230 000 |
| 25 | 8 984 400 |
| 40 | 58 800 000 |

**a** Maak een nieuwe tabel met de waarden van $x = \log(s)$ en $y = \log(K)$.

**b** Teken de punten uit de tabel van opdracht a in een assenstelsel en teken een rechte lijn die zo goed mogelijk bij deze punten aansluit.

**c** Toon aan dat de vergelijking $y = 1{,}36 + 4x$ bij benadering de vergelijking van deze lijn is.

**d** Uit het voorafgaande volgt dat $\log(K) = 1{,}36 + 4 \cdot \log(s)$. Schrijf de rechterkant van deze vergelijking als één logaritme.

**e** Schrijf een formule op waarbij $K$ is uitgedrukt in $s$ en waarin geen logaritmen voorkomen.

## Uitdagende opdrachten

**U7** Bij een experiment wordt op verschillende afstanden $d$ van een geluidsbron de geluidsintensiteit $I$ gemeten.
De resultaten staan in de tabel.

| $d$ in m | $I$ in W/m$^2$ | decibel |
|---|---|---|
| 10 | 0,495 | 117 |
| 20 | 0,125 | 111 |
| 40 | 0,031 | 105 |
| 60 | 0,014 | 101 |
| 80 | 0,008 | 99 |
| 100 | 0,005 | 97 |

**a** Neem de tabel over en voeg kolommen toe met $\log(d)$ en $\log(I)$.

**b** Maak een grafiek met daarin de punten $(\log(d), \log(I))$.

**c** Door de ligging van de punten is het mogelijk een formule op te stellen voor het verband tussen $\log(d)$ en $\log(I)$. Stel deze formule op.

**d** Stel een formule zonder logaritmen op voor het verband tussen $d$ en $I$.

**e** Er is een lineair verband tussen de geluidssterkten in decibel en $\log(I)$.
Druk dit verband uit in een formule.

© Noordhoff Uitgevers bv

**37** Gegeven is de functie $f(x) = 1 + 4 \cdot {}^3\log(x)$.

**a** Los exact op $f(x) = 7$.

**b** Het functievoorschrift van $f$ kan worden geschreven in de vorm $f(x) = {}^3\log(px^q)$ met $x > 0$.
Bereken exact de waarde van $p$ en van $q$.

**c** Gegeven is de functie $g(x) = 1 + {}^3\log(9x^2)$.
Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van $f$ en $g$.

**38** Gegeven is de functie $f(x) = \log(x^2 - 6x + 8)$.

**a** Plot en schets de grafiek van $f$.

**b** Bereken het domein van $f$.

**c** Geef vergelijkingen van de asymptoten van $f$.

**d** Los exact op $f(x) < 0$.

**39** Het verband tussen de variabelen $R$ en $S$ is gegeven door de formule ${}^2\log(R) = 4{,}45 - 2{,}31S$.
Deze formule is ook te schrijven als $R = b \cdot g^S$.
Bereken algebraïsch de waarde van $b$ en van $g$ in twee decimalen.

**40** Los exact op.

**a** $16 \cdot 2^{x-6} = \sqrt{2}$

**b** $15 \cdot 3^{x+2} + 18 = 93$

**c** $|1 - {}^2\log(4x + 1)| = 2$

**d** $\dfrac{4}{{}^2\log(x) + 3} = {}^2\log(x)$

**e** ${}^4\log(2x) + {}^4\log(7) \leq 3$

**f** ${}^6\log(5x + 3) + {}^6\log(x - 1) = 2$

**g** ${}^{\frac{1}{2}}\log(x^2 - 2x) \geq -3$

**h** $8^x + 4^x = 6 \cdot 2^x$

**41** Iemand krijgt 100 mg geneesmiddel toegediend door inspuiting in het bloed. Per dag wordt 40% van de aanwezige hoeveelheid afgebroken.
Na de halfwaardetijd $t_h$ is nog precies de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid over.

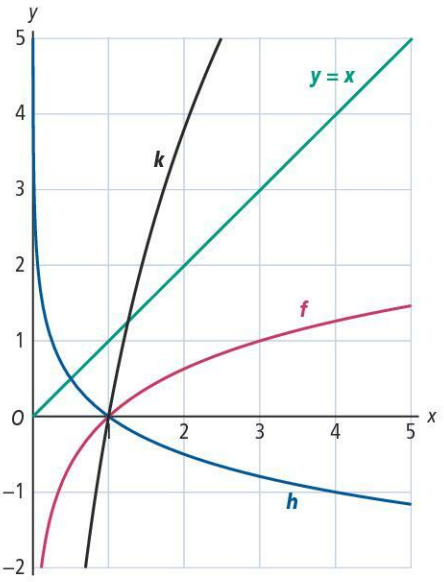
**a** Schrijf $t_h$ als logaritme en bereken $t_h$ in uren nauwkeurig.

**b** Na hoeveel tijd is er nog 36 mg over?

**c** Zodra er nog maar 18 mg geneesmiddel in het bloed over is, moet er opnieuw ingespoten worden.
Na hoeveel tijd gebeurt dat?

© Noordhoff Uitgevers bv

**42** In het assenstelsel staan de grafieken van de functies $f(x) = {}^{3}\log(x)$, $h(x) = {}^{\frac{1}{4}}\log(x)$ en $k(x) = {}^{1,2}\log(x)$.
Verder is getekend de lijn $y = x$.
Het is duidelijk te zien dat de grafiek van $f$ de lijn $y = x$ niet snijdt, en dat de grafieken van $h$ en $k$ de lijn $y = x$ wel snijden.
Bekijk nu de familie van functies $m_g(x) = {}^{g}\log(x)$.
Onderzoek voor welke waarden van $g$ de grafiek van een functie $m_g$ met de lijn $y = x$ één gemeenschappelijk punt heeft en voor welke waarden van $g$ de grafiek de lijn $y = x$ tweemaal snijdt. Rond de antwoorden af op één decimaal.



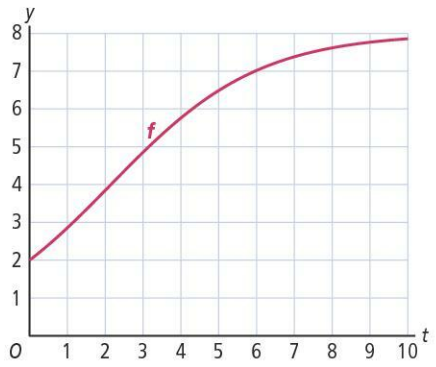

**43** Veel groeiprocessen verlopen volgens een zogenaamde S-curve. Bij een dergelijk groeiproces is de groei aanvankelijk ongeveer exponentieel, daarna neemt de groeisnelheid af en de uitkomst nadert tot een zekere grenswaarde.
Een voorbeeld van een bijbehorende functie is

$$f(t) = \frac{8}{1 + 3 \cdot 0{,}6^t}$$

**a** Hoe groot is de beginwaarde $f(0)$ en tot welke waarde nadert de uitkomst van deze functie op den duur?

De algemene vorm voor de functie bij een S-curve is $f(t) = \frac{A}{1 + B \cdot g^t}$. Hierbij zijn $A$ en $B$ zijn positieve getallen en heeft $g$ een waarde tussen 0 en 1.

**b** Door welke van de parameters $A$, $B$ en $g$ wordt het snijpunt met de $y$-as bepaald?
**c** Door welke parameter wordt de grenswaarde bepaald?
**d** Onderzoek hoe de grafiek verandert, als je de waarde van de parameter $B$ groter maakt.
**e** Onderzoek welke invloed de waarde van $g$ heeft op de vorm en de ligging van de S-curve.




© Noordhoff Uitgevers bv

**Theorie**

### Rekenregels voor logaritmen

$^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$

$^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$

$p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$

$g^{{}^g\log(a)} = a$

$^g\log(m) = \frac{{}^n\log(m)}{{}^n\log(g)}$

met $g > 0$, $g \neq 1$, $a > 0$, $b > 0$, $n > 0$, $n \neq 1$ en $m > 0$.

**S1** Schrijf als één logaritme.

**a** $^2\log(13) - 2 \cdot {}^2\log(3)$ **b** $1\frac{1}{2} \cdot {}^5\log(x) + \frac{1}{2} \cdot {}^5\log(2)$

**Theorie**

### Wiskundig model

In een wiskundig model wordt door middel van een formule - een verband tussen verschillende variabelen - een beschrijving gegeven van een proces of verschijnsel.

**S2** Welke van de onderstaande kenmerken past bij het gegeven wiskundig model voor de variabelen $S$ en $t$?

A Er is sprake van constante stijging.
B De uitkomst nadert een grenswaarde.
C Er is sprake van toenemende stijging.

**a** $S = 25 - 3 \cdot 0{,}95^t$ **b** $S = 12 + 4(t - 1)$

**Vaardigheid**

### Je kunt een verdubbelingstijd of halveringstijd berekenen.

Bij een exponentieel groeiproces met groeifactor $g$ is de verdubbelingstijd de tijd die nodig is om een hoeveelheid te verdubbelen. Deze tijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = 2$.
De halveringstijd is de tijd die nodig is om een hoeveelheid te halveren. Deze tijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = \frac{1}{2}$.

**S3** Bij een groeiproces is de groeifactor 1,004 per week.
Bereken algebraïsch de verdubbelingstijd. Geef een benadering in dagen nauwkeurig.


© Noordhoff Uitgevers bv

**Vaardigheid**

**Je kunt exponentiële en logaritmische vergelijkingen exact oplossen.**

Van de logaritmische vergelijking ${}^{g}\log(x) = c$ is $x = g^c$ de exacte oplossing. Met behulp van deze regel en de rekenregels voor logaritmen los je logaritmische vergelijkingen exact op.
Controleer zo nodig of je oplossing voldoet.
In sommige gevallen los je de vergelijking op door een substitutie toe te passen.

**Voorbeeld 1**

Los exact op
${}^{3}\log(x^2 - 5x - 20) = 1 + {}^{3}\log(x)$.

**Oplossing**

${}^{3}\log(x^2 - 5x - 20) = {}^{3}\log(3) + {}^{3}\log(x)$

${}^{3}\log(x^2 - 5x - 20) = {}^{3}\log(3x)$

$x^2 - 5x - 20 = 3x$

$x^2 - 8x - 20 = 0$

$(x - 10)(x + 2) = 0$

$x = 10$ (voldoet)

of $x = -2$ (voldoet niet)

**Voorbeeld 2**

Los exact op

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x} = 15$.

**Oplossing**

Stel $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = p$, dan wordt de vergelijking

$p^2 + 2p - 15 = 0$

$(p + 5)(p - 3) = 0$

$p = -5$ of $p = 3$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = -5$ heeft geen oplossing.

Uit $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = 3$ volgt $x = {}^{\frac{1}{2}}\log(3)$.

**S4** Los exact op.

**a** $\left({}^{\frac{1}{2}}\log(x)\right)^2 = {}^{\frac{1}{2}}\log(x) + 2$

**b** ${}^{5}\log(3x) + {}^{5}\log(2) = 4$

**c** ${}^{\frac{1}{3}}\log(x^2 + 6x) = -3$

**d** $4^{2x} - 11 \cdot 4^{x} + 24 = 0$

© Noordhoff Uitgevers bv

**Vaardigheid**

**Je kunt een exponentiële of logaritmische ongelijkheid exact oplossen.**

Bij het oplossen van een ongelijkheid los je eerst de bijbehorende vergelijking op. Voor het trekken van de juiste conclusie over de oplossing van de ongelijkheid speelt ook het domein van de functie een belangrijke rol. Een plot van de grafieken kan daarbij helpen.

**Voorbeeld 1**

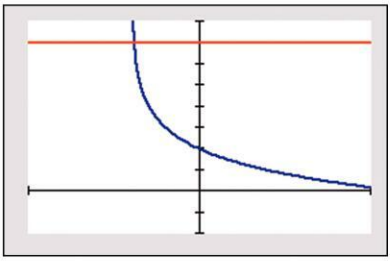
Los exact op $3 - {}^2\log(x + 2) > 7$.

**Oplossing**

${}^2\log(x + 2) = -4$

$x + 2 = 2^{-4} = \frac{1}{16}$ dus $x = -1\frac{15}{16}$

De logaritme bestaat alleen als $x > -2$.



De oplossing is $-2 < x < -1\frac{15}{16}$.

**Voorbeeld 2**

Los exact op ${}^2\log(9 - x^2) > 3 + {}^2\log(x)$.

**Oplossing**

${}^2\log(9 - x^2) = 3 + {}^2\log(x)$

${}^2\log(9 - x^2) = {}^2\log(8) + {}^2\log(x) = {}^2\log(8x)$

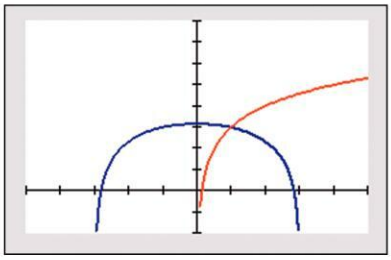
$9 - x^2 = 8x$

$x^2 + 8x - 9 = 0$

$(x + 9)(x - 1) = 0$

$x = -9$ (voldoet niet) of $x = 1$

$3 + {}^2\log(x)$ heeft alleen waarden als $x > 0$.



De oplossing is $0 < x < 1$.

**S5** Los exact op.

**a** ${}^3\log(10x - x^2) < 2$

**b** ${}^3\log(10 - x) > -2 + {}^3\log(x + 5)$



© Noordhoff Uitgevers bv

**Vaardigheid**

**Je kunt exponentiële en logaritmische formules herleiden.**

Een logaritmische formule kun je herleiden tot een exponentiële formule of omgekeerd door het gebruiken van de regel: uit $g^b = a$ volgt $b = {}^g\log(a)$ of omgekeerd.

**Voorbeeld 1**

Gegeven is de formule $Q = 4 \cdot 1{,}5^x$.
Druk $x$ uit in $Q$.

**Oplossing**

$Q = 4 \cdot 1{,}5^x$

$4 \cdot 1{,}5^x = Q$

$1{,}5^x = \frac{1}{4}Q$

$x = {}^{1{,}5}\log\left(\frac{1}{4}Q\right)$

**Voorbeeld 2**

Gegeven is de formule $2 \cdot {}^3\log(T) = 5 \cdot {}^3\log(R) + 4$.
Druk $T$ uit in $R$.

**Oplossing**

$2 \cdot {}^3\log(T) = 5 \cdot {}^3\log(R) + 4$

${}^3\log(T) = 2\frac{1}{2} \cdot {}^3\log(R) + 2$

${}^3\log(T) = {}^3\log(R^{2\frac{1}{2}}) + {}^3\log(9)$

${}^3\log(T) = {}^3\log(9R^{2\frac{1}{2}})$

$T = 9R^{2\frac{1}{2}}$

**S6** Het verband tussen de variabelen $P$ en $Q$ is gegeven door de formule ${}^3\log(P) = 2{,}73 - 0{,}41Q$.
Deze formule is ook te schrijven als $P = c \cdot g^Q$.
Bereken algebraïsch de waarde van $c$ en van $g$ in twee decimalen.

**Vaardigheid**

**Je kunt aantonen dat twee functies hetzelfde zijn.**

Twee functies $f$ en $g$, met hetzelfde domein, zijn hetzelfde als je kunt aantonen dat beide functies voor alle waarden uit het domein dezelfde uitkomst geven.

**Voorbeeld**

Toon aan dat de functies $f(x) = 2^{4x-3}$ en $g(x) = \frac{1}{8} \cdot 16^x$ hetzelfde zijn.

**Oplossing**

$2^{4x-3} = 2^{4x} \cdot 2^{-3} = (2^4)^x \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \cdot 16^x$

dus $f$ en $g$ zijn hetzelfde.

**S7** Toon aan dat de functies hetzelfde zijn.

**a** $f(x) = 3 + 5 \cdot {}^2\log(x)$ en $g(x) = {}^2\log(8x^5)$

**b** $f(x) = \sqrt{\frac{1}{27} \cdot 5^x}$ en $g(x) = 3^{-1\frac{1}{2}} \cdot (\sqrt{5})^x$

© Noordhoff Uitgevers bv

**T1** Schrijf als één logaritme.

**a** $^{24}\log(14) + {}^{24}\log(41)$

**b** $\log(2) - \log(12) + \log(8)$

**c** $^{5}\log(6) - ({}^{5}\log(\frac{1}{12}) - {}^{5}\log(2))$

**d** $^{2}\log(b) - {}^{2}\log(3)$

**e** $^{\frac{1}{2}}\log(p) + {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{4p}\right)$

**f** $\frac{1}{2} \cdot {}^{5}\log(x^7) - 3 \cdot {}^{5}\log(\sqrt{x})$

**T2** Los exact op.

**a** $5^{|x-2|} = 7$

**b** $3 - \log(x + 2) = 2\frac{1}{3}$

**c** $^{2}\log(x - 6) + {}^{2}\log(x) = 4$

**d** $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 11 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 24 = 0$

**e** $2 \cdot {}^{3}\log(x) - {}^{3}\log(3x + 4) = 0$

**f** $^{2}\log(3x - 2) < 7$

**g** $^{\frac{1}{2}}\log(|8 - x^2|) > -2$

**h** $3^x - \frac{5}{3^x} = 4$

**T3** Bij een exponentieel groeiproces hoort de formule $N = 1350 \cdot 1{,}08^t$ met $t$ in jaren.

**a** Bereken bij dit groeiproces algebraïsch de verdubbelingstijd in jaren. Rond af op hele jaren.

**b** Op een bepaald moment is de hoeveelheid $N$ gelijk aan 15 000.
Bereken algebraïsch hoeveel jaar het duurt totdat die hoeveelheid is toegenomen tot 60 000. Rond af op hele jaren.

**T4** Gegeven zijn de functies $f(x) = -1 + {}^{2}\log(5x - 2)$ en $g(x) = {}^{2}\log(x^2)$.

**a** Plot en schets de grafieken van $f$ en $g$.

**b** Geef een vergelijking van de verticale asymptoot van de grafiek van $f$ en van de grafiek van $g$.

**c** Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van $f$ en $g$.

**d** Los exact op $f(x) \geq g(x)$.

**T5** Op de grafiek van de functie $f(x) = {}^{a}\log(x + b) + c$ liggen de punten $(-1, 0)$ en $(1, 1)$.
De verticale asymptoot van $f$ is de lijn $x = -3$.
Bereken exact de waarde van $a$, van $b$ en van $c$.


© Noordhoff Uitgevers bv

**T6** Gegeven is de functie $f(x) = {}^3\log\left(\frac{1}{3}x + 4\right)$.

**a** Geef het domein van deze functie.

**b** Geef een vergelijking van de verticale asymptoot van de grafiek van $f$.

**c** Het functievoorschrift van $f$ kan worden geschreven als $f(x) = a + {}^3\log(x + b)$.
Toon dit aan en bereken de waarde van $a$ en van $b$.

**T7** Voor de geluidssterkte $D$ in decibel (dB) van een toongenerator geldt $D = 10 \cdot \log\left(\frac{4{,}9 \cdot 10^5}{r^2}\right)$

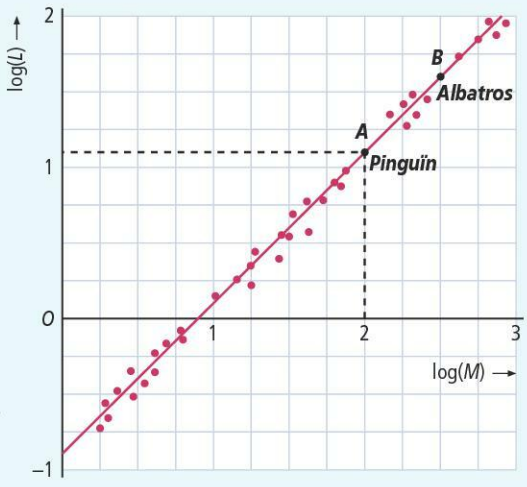
Hierin is $r$ de afstand in meters tot de toongenerator.

**a** Bereken de geluidssterkte op de afstanden 5 m, 7 m, 10 m en 20 m.

**b** De formule is te herleiden tot de vorm $D = a + b \cdot \log(r)$, waarbij $a$ en $b$ constanten zijn.
Bereken de waarde van $a$ en van $b$.

**c** Bereken exact op welke afstand de geluidssterkte gelijk is aan 0 dB.

**T8** Als een ei wordt uitgebroed, verliest het embryo water gedurende het broeden. De massa van het ei noem je $M$. De hoeveelheid water die verloren gaat noem je $L$. Zowel $M$ als $L$ zijn in grammen.
In de grafiek is het verband tussen $\log(M)$ en $\log(L)$ weergegeven. De grafiek is gebaseerd op data die verkregen zijn van 65 soorten eieren.
De meetpunten liggen min of meer op een rechte lijn.




**a** Bij punt $A$ horen de meetgegevens van de *pinguïn*.
Hoeveel gram is de massa van een ei van de pinguïn en hoeveel gram bedraagt het waterverlies van het embryo?

**b** Ongeacht de lengte van broedtijd en de massa van het ei is het verlies aan water van het embryo ongeveer 13% van de massa van het ei.
Ga na of dit voor de *pinguïn* geldt.

**c** Klopt dit ook voor de *albatros* (punt $B$)?

**d** Een formule die bij de rechte lijn hoort is $\log(L) = 1{,}031 \cdot \log(M) - 0{,}885$.
Deze formule is ook te schrijven als $L = a \cdot M^b$.
Bereken algebraïsch de waarde van $a$ en van $b$.
Rond af op drie decimalen.

© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt een verdubbelingstijd of halveringstijd berekenen.

**E1** De staatsschuld van een land stijgt al jaren exponentieel en de verwachting is dat dit blijft doorgaan. In 2018 kwam de schuld overeen met 64 miljard dollar en in 2019 was de schuld 72 miljard dollar.

**a** Bereken de groeifactor per jaar.

**b** Bereken de staatsschuld in 2025, afgerond op miljarden dollars.

**c** Bereken de verdubbelingstijd exact en geef ook een afgerond antwoord in maanden nauwkeurig.

Je kunt exponentiële en logaritmische vergelijkingen exact oplossen.

**E2** Los exact op.

**a** $\left(1\frac{1}{2}\right)^{1-x} = 3$

**b** $6^{2x-1} = 3$

**c** $2 - {}^{3}\log(2x+1) = -2$

**d** ${}^{7}\log\left(\frac{1}{x-1}\right) = 1 - {}^{7}\log(x)$

**e** ${}^{2}\log(|5-2x|) = -3$

**f** $5^{-x+1} = 4$

**g** $16^{x} - 3 \cdot 4^{x} = 10$

**h** ${}^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{x-3}{x+3}\right) = -1$

Je kunt exponentiële en logaritmische ongelijkheden exact oplossen.

**E3** Los exact op.

**a** ${}^{2}\log(-2x+1) > 5$

**b** $2^{3x-1} < \left(\frac{1}{4}\right)^{x}$

**c** $2 \cdot {}^{5}\log(x) > {}^{5}\log(x+6)$

**d** $2 - 3 \cdot \log(x) < 1$

**e** ${}^{3}\log(7-x^2) < -1$

**f** $4^{x} \leq 2^{x} + 12$

Je kunt exponentiële en logaritmische formules herleiden.

**E4** Druk $t$ uit in $P$.

**a** $P = 4^{t} - 3$

**b** $2P - 4 \cdot 3^{2t} = 0$

**c** $\log(P) - \log(t) = 1 \quad (P > 0 \text{ en } t > 0)$

**d** $P = 4 \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log(2t) \quad (t > 0)$

Je kunt aantonen dat twee functies hetzelfde zijn.

**E5** Toon aan dat de functies $f(x) = 5 - 3 \cdot {}^{2}\log(x)$ en $g(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{32}x^{3}\right)$ hetzelfde zijn.


© Noordhoff Uitgevers bv

**E6** Schrijf als één logaritme.

**a** $2 \cdot {}^{5}\log(11) - 3 \cdot {}^{5}\log(4)$

**b** ${}^{\frac{1}{4}}\log(x) + 2$

**c** $3 \cdot {}^{2}\log(x) + 1$

**d** $2 \cdot \left({}^{4}\log(15) - {}^{4}\log(5)\right) + {}^{4}\log(3)$

**E7** Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^{2}\log(4 - 2x)$ en $g(x) = 2 + {}^{2}\log(x + 4)$.

Los exact op.

**a** $f(x) = g(x)$

**b** $f(x) \cdot g(x) = 0$

**E8** Gegeven is de familie van functies

$f_a(x) = {}^{3}\log(3x - a) - {}^{3}\log(x - 2)$.

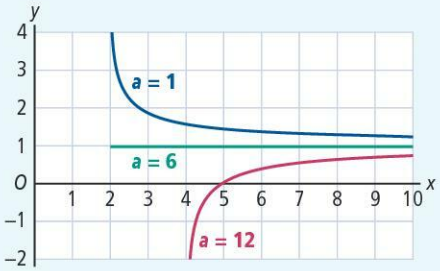
De grafieken zijn getekend voor $a = 12$, $a = 1$ en $a = 6$.

**a** Geef het domein van de drie functies waarvan de grafiek getekend is.

**b** Welke waarde moet je voor $a$ kiezen zodat het domein $\langle 10, \rightarrow \rangle$ is?

**c** Voor welke waarden van $a$ is het domein $\langle 2, \rightarrow \rangle$?

**d** Leg uit waarom de grafiek voor $a = 6$ een deel van een rechte lijn is.




**E9** De snelwegen in Nederland zijn vooral asfaltbetonwegen. De meest voorkomende zijn de dichte asfaltbetonwegen (DAB-wegen) en de zeer open asfaltbetonwegen (ZOAB-wegen). Voor beide soorten wegen is een formule op te stellen voor het verband tussen het geluidsniveau $D$ in dB van het verkeer en de snelheid $v$ in km per uur van het verkeer. Voor een DAB-weg geldt de formule $D = 35{,}9 \cdot \log(v) + 4{,}1$.

**a** Bij welke snelheid op een DAB-weg is het geluidsniveau 75 dB?

**b** Toon met de rekenregels aan dat een verdubbeling van de snelheid altijd ongeveer 11 dB méér geeft.

Voor een ZOAB-weg geldt de formule $D = 28{,}1 \cdot \log(v) + 16{,}0$.

**c** Ga na bij welke snelheden van het verkeer een ZOAB-weg een lager geluidsniveau heeft dan een DAB-weg.

**d** Bereken algebraïsch bij welke snelheden van het verkeer het geluid op een ZOAB-weg meer dan 4 dB lager is dan op een DAB-weg. Rond af op gehele kilometers per uur.

(*Ontleend aan CE havo wiskunde B 2004 tijdvak 2*)

© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

# Integreren 12

SE CE K

## In dit hoofdstuk

In voorgaande hoofdstukken heb je geleerd hoe je functies kunt differentiëren.

In dit hoofdstuk leer je hoe je functies kunt vinden waarvan de afgeleide functie gegeven is. Zulke functies kun je gebruiken om de oppervlakte te berekenen van een gebied dat wordt begrensd door grafieken.

De technieken die in dit hoofdstuk worden besproken ga je in volgende hoofdstukken ook gebruiken bij andere toepassingen, zoals het berekenen van inhouden.

## Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 51
- *Formules manipuleren* opdracht 49
- *Logisch redeneren en bewijzen* opdracht 18

© Noordhoff Uitgevers bv

**V1** Schrijf de functievoorschriften in de vorm $f(x) = a \cdot x^n$.

**a** $f(x) = \frac{1}{x^3}$

**b** $f(x) = \frac{4}{5x}$

**c** $f(x) = 5x^2\sqrt{x}$

**d** $f(x) = \frac{1}{3x\sqrt{x}}$

**V2** Schrijf de functievoorschriften voor $x \neq 0$ als som van uitdrukkingen van de vorm $a \cdot x^n$.

**a** $f(x) = \frac{3x^4 - 5x^2 + 2x}{x}$

**b** $g(x) = \frac{x^4 + 8x^3 - 5x^2}{2x^3}$

**c** $h(x) = \frac{3(2x - 3)^2}{4x}$

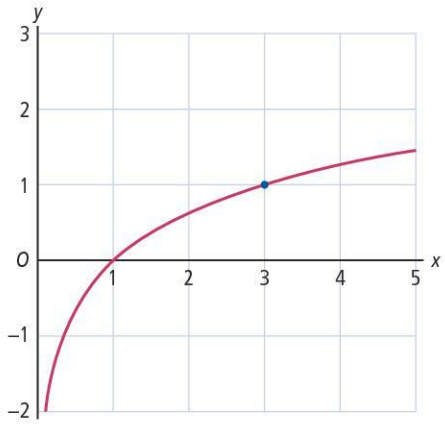
**d** $k(x) = \frac{2(x + 5)^3}{x^2}$

**V3** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = {}^3\log(x)$.
Je kunt de helling in een punt van deze grafiek benaderen door $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ over een klein interval te berekenen.

**a** Geef een benadering van de helling in het punt (3, 1) in vier decimalen door $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ over het interval [3; 3,1] te berekenen.

**b** Herhaal opdracht a maar nu over de intervallen [3; 3,01] en [3; 3,001].

**c** Geef de helling in (3, 1) in twee decimalen.




**Theorie**

Als in het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de waarde van $\Delta x$ naar 0 nadert, $(\Delta x \to 0)$ dan gaat het differentiequotiënt over in het differentiaalquotiënt $\frac{dy}{dx}$, de exacte waarde van de helling in een punt van de grafiek.


© Noordhoff Uitgevers bv

**Voorbeeld**

Gegeven is de functie $f(x) = \log(x)$.

Bereken in vier decimalen $\frac{dy}{dx}$ voor $x = 1$.

**Oplossing**

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \frac{\log(1 + \Delta x) - \log(1)}{\Delta x} = \frac{\log(1 + \Delta x)}{\Delta x}$

$\Delta x = 0{,}1$ geeft 0,41392685…

$\Delta x = 0{,}0001$ geeft 0,43427276…

Zo doorgaand vind je $\frac{dy}{dx} \approx 0{,}4343$.

**V4** Bereken van elke functie het differentiaalquotiënt voor $x = 4$.
Neem $\Delta x = 0{,}0001$ en geef het antwoord in vier decimalen.

**a** $f(x) = \log(x)$

**b** $g(x) = 1{,}2^x$

**c** $h(x) = x\sqrt{2x + 1}$

**d** $k(x) = \frac{x}{x + 1}$

**V5** Differentieer.

**a** $f(x) = 3(2x - 5)^4$

**b** $g(x) = \frac{3}{5x + 1}$

**c** $h(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3 - 4x}$

**d** $k(x) = \frac{4}{3\sqrt{5x + 6}}$

**V6** Gegeven zijn de functies $f(x) = (2x^3 - 1)^2$ en $g(x) = 4(x^6 - x^3)$.

**a** Differentieer $f$ en $g$.
**b** Laat zien dat $f$ en $g$ dezelfde afgeleide hebben.
**c** Waarom moet gelden dat $g(x) = f(x) + c$ voor een constante $c$?
**d** Bereken de waarde van $c$.

**V7** Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van $f$ en $g$.

**a** $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = \frac{1}{2}x$

**b** $f(x) = \frac{4}{x + 3}$ en $g(x) = x$

**c** $f(x) = x^2 + 4$ en $g(x) = x + 6$

**d** $f(x) = \frac{3}{x^2 - 4}$ en $g(x) = x^2 - 2$

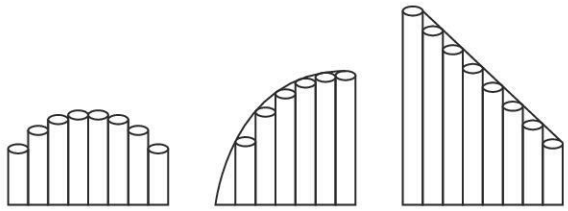
© Noordhoff Uitgevers bv

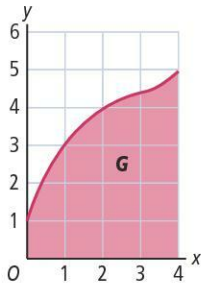
# 12.1 Oppervlakten benaderen

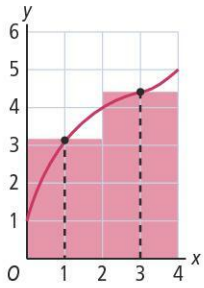
**Je leert**
- wat een Riemann-som is
- hoe je de oppervlakte van een gebied onder een grafiek kunt benaderen

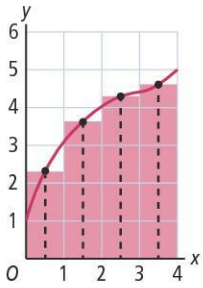
**Leerroutes**
- ondersteunend: 1—2—3—4—5—O6—7—8
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7—8
- uitdagend: 1—2—3—4—6—7—8—U1

Nicole Oresme (1323 – 1382), bisschop van Lisieux, bestudeerde het verband tussen de afgelegde weg en de snelheid van een voorwerp. Als een van de eerste wiskundigen zette hij de tijd af op een horizontale lijn en richtte hij in elk punt een loodlijn op waarvan de lengte correspondeerde met de snelheid op dat moment.
- Wat is de natuurkundige betekenis van de oppervlakte van de getekende figuren?






**1** Het gebied $G$ wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - x^2 + 3x + 1$, de $x$-as, de $y$-as en de lijn $x = 4$.

**a** Bereken exact de totale oppervlakte van de twee gekleurde rechthoeken in de tweede tekening.

**b** Bereken exact de totale oppervlakte van de vier gekleurde rechthoeken in de derde tekening.

**c** Welke benadering voor de oppervlakte van het gebied $G$ is beter, het antwoord van opdracht a of het antwoord van opdracht b?

**d** Hoe zou je de oppervlakte van het gebied $G$ nog beter kunnen benaderen?


© Noordhoff Uitgevers bv

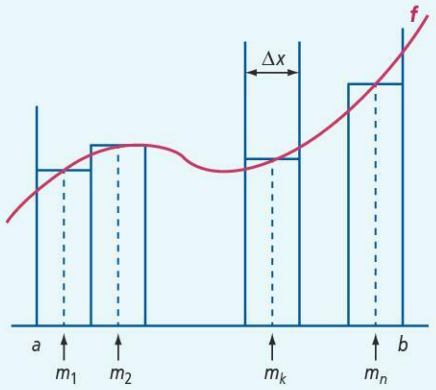
**Theorie**

Gegeven is de functie $f$ op het interval $[a, b]$.
$[a, b]$ is verdeeld in $n$ gelijke deelintervallen met breedte $\Delta x$.
$m_1, m_2, \ldots m_n$ zijn de middens van de deelintervallen.

$f(m_1) \cdot \Delta x + f(m_2) \cdot \Delta x + \ldots + f(m_n) \cdot \Delta x$ heet een

Riemann-som van de functie $f$ op het interval $[a, b]$.

Voor $f(x) \geq 0$ op $[a, b]$ is de Riemann-som een benadering van de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van $f$, de $x$-as en de lijnen $x = a$ en $x = b$.
Bernard Riemann (1826-1866) was een Duitse wiskundige.




**Voorbeeld**

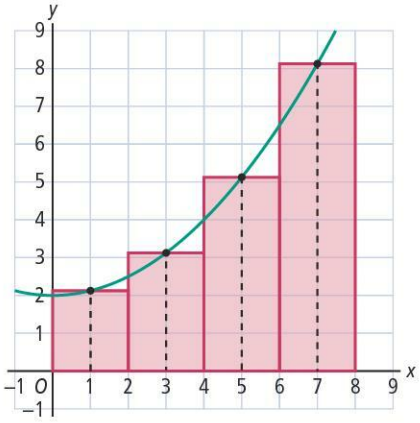
Gegeven is de functie $f(x) = 2 + \frac{1}{8}x^2$.
Bereken een Riemann-som van $f$ op het interval $[0, 8]$ met vier deelintervallen.

**Oplossing**

$\Delta x = \frac{8}{4} = 2$; $m_1 = 1$, $m_2 = 3$, $m_3 = 5$, $m_4 = 7$.

De Riemann-som wordt:
$f(1) \cdot 2 + f(3) \cdot 2 + f(5) \cdot 2 + f(7) \cdot 2 =$

$(2\frac{1}{8} + 3\frac{1}{8} + 5\frac{1}{8} + 8\frac{1}{8}) \cdot 2 = 37.$




**2** Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 6x$. Het gebied $G$ wordt begrensd door de grafiek van $f$, de $x$-as en de lijnen $x = 1$ en $x = 5$. Het interval $[1, 5]$ wordt verdeeld in vier gelijke deelintervallen.

**a** Hoe groot is de lengte $\Delta x$ van een deelinterval?

**b** Wat is het midden van het eerste deelinterval?
En van het laatste deelinterval?

**c** Benader de oppervlakte van $G$ met een Riemann-som van $f$ op het interval $[1, 5]$ met vier deelintervallen.

**3** Bereken een Riemann-som van de functie $f(x) = \sqrt{x}$ op het interval $[0, 10]$ met vijf deelintervallen.
Rond je antwoord af op één decimaal.

© Noordhoff Uitgevers bv

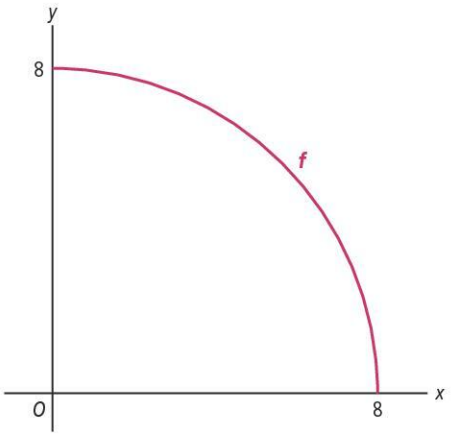
**4** Een gebied $G$ wordt begrensd door de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2}x + 5$, de $x$-as en de lijnen $x = 1$ en $x = 9$.

**a** Benader de oppervlakte van $G$ met een Riemann-som van $f$ op het interval $[1, 9]$ met vier deelintervallen.

**b** Benader de oppervlakte van $G$ met een Riemann-som van $f$ op het interval $[1, 9]$ met acht deelintervallen.

**c** Teken $G$ en bereken de oppervlakte meetkundig.

**5** De getekende kwart cirkel is een deel van de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{64 - x^2}$.




**a** Bereken de oppervlakte van de kwart cirkel exact met behulp van de formule *oppervlakte cirkel* $= \pi r^2$.

**b** Benader de oppervlakte van de kwart cirkel met een Riemann-som van $f$ op het interval $[0, 8]$ met vier deelintervallen.

**c** Is de afwijking van het antwoord op opdracht b meer of minder dan 2%?

Ondersteunende route → maak opdracht O6

**6** H Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{6}{2x - 1}$

Benader met een Riemann-som de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van $f$ en de $x$-as op het interval $[2, 7]$.
Kies $\Delta x = 1$.

**7** Een gebied $G$ wordt begrensd door de $x$-as, de grafiek van de functie $f(x) = 2^x$ en de lijnen $x = -2$ en $x = 2$.
Benader de oppervlakte van $G$ met een Riemann-som van $f$ op het interval $[-2, 2]$ met vier deelintervallen. Rond af op één decimaal.

**8** Verdeel je een interval in een groot aantal deelintervallen, dan bereken je een Riemann-som met je rekenmachine.

**a** Bereken een Riemann-som van de functie $f(x) = x^2 + 2x + 3$ op het interval $[-24, 6]$ met twintig deelintervallen.

**b** Voer opdracht a nogmaals uit, maar nu met honderd deelintervallen.

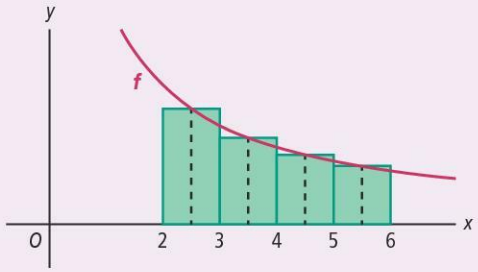
→ Instructie rekenmachine | Riemann-som

Uitdagende route → maak opdracht U1


© Noordhoff Uitgevers bv

## Ondersteunende opdrachten

**O6** Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{12}{2x + 1}$




Je gaat de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van $f$ en de $x$-as op het interval $[2, 6]$ benaderen door de oppervlakte van de vier rechthoeken te berekenen.

**a** Hoe breed is elke rechthoek?

**b** Vul in: de hoogte van de eerste rechthoek is $f(\ldots)$.

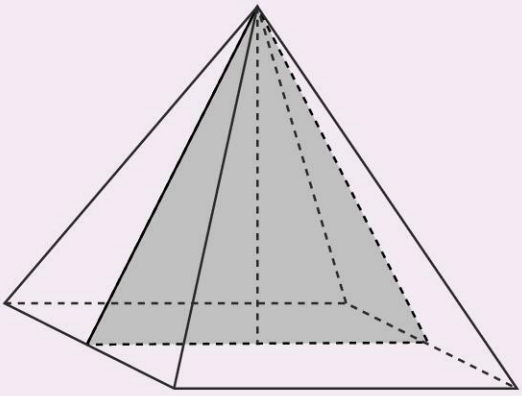
**c** Bereken de hoogte van elke rechthoek.

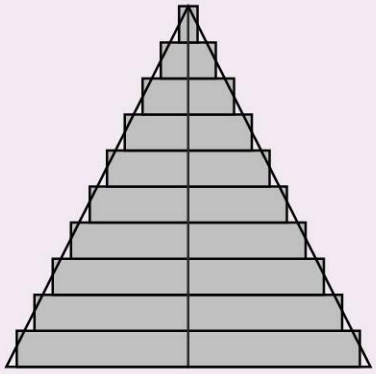
**d** Tel de oppervlakten van de rechthoeken bij elkaar op.

**e** Gegeven is de functie $g(x) = \dfrac{3}{x + 1}$

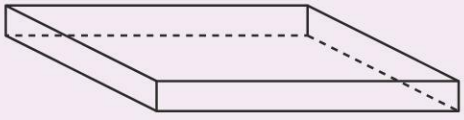
Benader de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van $g$ en de $x$-as op het interval $[3, 7]$. Kies deelintervallen met lengte 1.

## Uitdagende opdrachten





**U1** Van de getekende piramide is het grondvlak 10 m bij 10 m. De hoogte is ook 10 m. De inhoud van de piramide kun je benaderen door de hoogte te verdelen in tien gelijke intervallen. Het midden van een deelinterval is dan het middelpunt van een balk met hoogte 1 en een vierkant grondvlak.



Door de inhouden van de tien balken bij elkaar op te tellen, krijg je een benadering van de inhoud van de piramide.

**a** Benader op bovenstaande manier de inhoud van de piramide.

**b** Hoeveel procent wijkt je antwoord op opdracht a af van de inhoud $I$ van een piramide ($I = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$)?

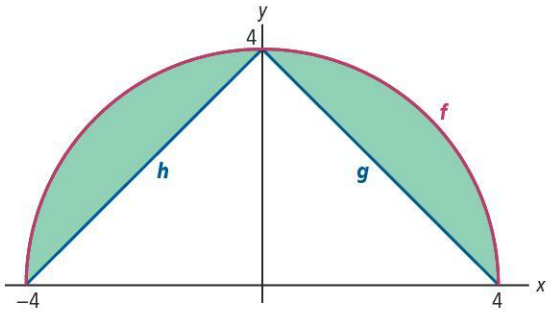
© Noordhoff Uitgevers bv

# 12.2 Integralen

**Je leert**
- wat een integraal is
- hoe je een integraal gebruikt om een oppervlakte te berekenen

**Leerroutes**
- ondersteunend: 9—010—11—12—13—14—15—16—17
- doorlopend: 9—10—11—12—13—14—15—16—17
- uitdagend: 10—11—13—14—15—16—17—U2—U3

Getekend zijn de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ en delen van de grafieken van de functies $g(x) = 4 - x$ en $h(x) = 4 + x$.
- Hoe bereken je de oppervlakten van de groene gebieden?




**9** Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.

**a** Bereken met de rekenmachine Riemann-sommen van $f$ op het interval $[0, 3]$ met 10, 30 en 100 deelintervallen.

**b** Naar welke waarde zullen deze Riemann-sommen naderen als het aantal deelintervallen onbegrensd toeneemt?

**Theorie**

Gegeven is een functie $f$ op het interval $[a, b]$.

De integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ is de exacte waarde waar de Riemann-sommen van $f$ op het interval $[a, b]$ naar naderen als het aantal deelintervallen onbegrensd toeneemt, dus als $\Delta x \to 0$.
$f(x)$ heet de integrand, $a$ de ondergrens en $b$ de bovengrens.

Is $f(x) \geq 0$ op $[a, b]$, dan is de integraal de exacte waarde van de oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van $f$, de $x$-as en de lijnen $x = a$ en $x = b$.

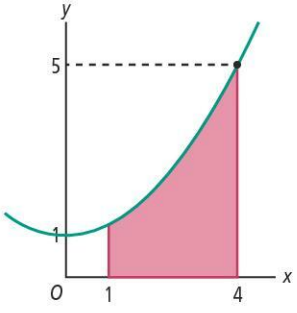
**Voorbeeld**

In de figuur is $G$ het gebied begrensd door de grafiek van $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$, de $x$-as en de lijnen $x = 1$ en $x = 4$.
Beschrijf de oppervlakte van $G$ met een integraal.

**Oplossing**

De integrand is $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$, de ondergrens van de integraal is 1 en de bovengrens is 4.

De oppervlakte van $G$ beschrijf je met de integraal $\int_1^4 (\frac{1}{4}x^2 + 1)\,dx$.





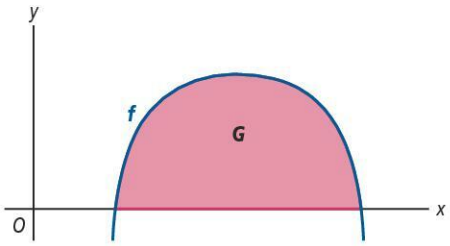
© Noordhoff Uitgevers bv

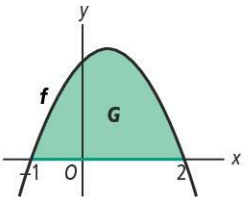
Ondersteunende route → maak opdracht O10

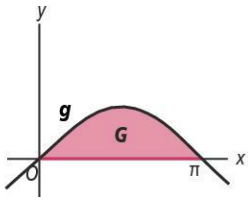
**10** Gegeven is de functie $f(x) = {}^2\log(-x^2 + 10x - 15)$.

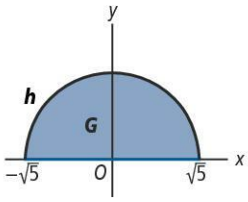
**a** Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van $f$ met de $x$-as.

**b** $G$ is het gebied ingesloten door de grafiek van $f$ en de $x$-as. Beschrijf de oppervlakte van $G$ met een integraal.




**11** Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x) = -x^2 + x + 2$, $g(x) = \sin(x)$ en $h(x) = \sqrt{5 - x^2}$.

**a** Beschrijf de oppervlakte van elk van de gebieden $G$ met een integraal.

**b** Benader de eerste integraal met behulp van een Riemann-som op het interval $[-1, 2]$. Kies $\Delta x = \frac{1}{2}$.

**c** In de laatste figuur is $G$ een halve cirkel. Bereken deze integraal op meetkundige wijze.

**12** **a** Teken de grafiek van de functie $f(x) = 2$.

**b** Bereken $\int_1^5 2 \, dx$ met behulp van de grafiek.

**13** $G$ is het gebied tussen de grafiek van $f(x) = 5 - x$ en de $x$-as op het interval $[0, 5]$.

**a** Beschrijf de oppervlakte van $G$ met een integraal.

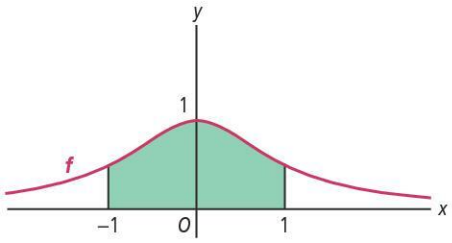
**b** Bereken exact (meetkundig) de oppervlakte van $G$.

Een integraal kun je met je rekenmachine benaderen. Daarover gaan de volgende opdrachten.

→ Instructie rekenmachine | Oppervlakte en integralen

© Noordhoff Uitgevers bv

**14** Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$




**a** Stel een integraal op om de oppervlakte van het gekleurde gebied te berekenen.

**b** Benader deze integraal met je rekenmachine. Rond je antwoord af op twee decimalen.

**15** **a** Plot en schets de grafiek van $f(x) = 3x^2 - x^3$.

**b** Benader de oppervlakte van het gebied begrensd door de grafiek van $f$ en de $x$-as.

**16** Benader de integralen. Rond zo nodig af op één decimaal.

H

**a** $\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$

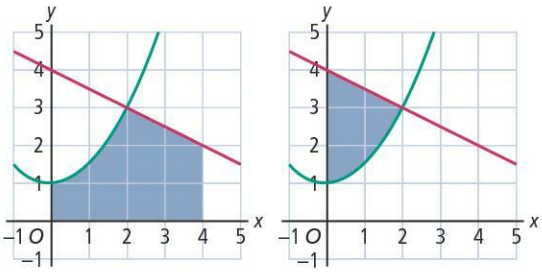
**b** $\int_{-3}^{0} 5 \cdot \log(x^2 + 1)\,dx$

**c** $\int_1^4 \dfrac{16}{x\sqrt{x}}\,dx$

**d** $\int_0^5 (2^x + 2^{-x})\,dx$

Ondersteunende route → maak opdracht O17

**17** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ en $g(x) = 4 - \frac{1}{2}x$.




**a** Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van $f$ en $g$.

**b** Schrijf de oppervlakte van het gekleurde vlakdeel in de linker figuur als een som van twee integralen en benader deze oppervlakte in twee decimalen.

**c** Schrijf de oppervlakte van het gekleurde vlakdeel in de rechter figuur als een verschil van twee integralen en benader deze oppervlakte in twee decimalen.

Uitdagende route → maak opdracht U2 en U3


© Noordhoff Uitgevers bv

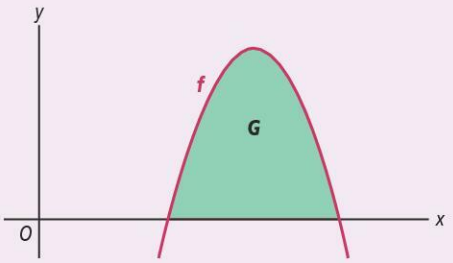
## Ondersteunende opdrachten

**O10** Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 10x - 21$.

**a** Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van $f$ met de $x$-as.

**b** $G$ is het gebied ingesloten door de grafiek van $f$ en de $x$-as. De oppervlakte van $G$ kun je benaderen met een integraal.
Wat zijn de ondergrens en de bovengrens van de integraal?

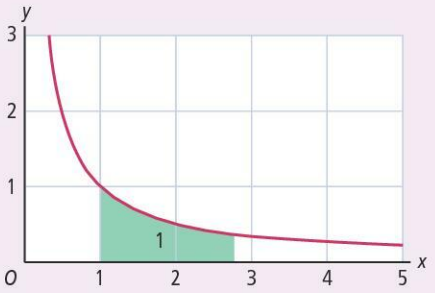
**c** Vul in.
De oppervlakte van $G$ is $\int_{\dots}^{\dots} f(x)\,dx = \int_{\dots}^{\dots} (\dots)\,dx$.




## Uitdagende opdrachten

**U2** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{x}$

$G$ is het gebied begrensd door de grafiek van $f$, de $x$-as , de lijn $x = 1$ en de lijn $x = p$ met $p > 1$.
De oppervlakte van $G$ is exact gelijk aan 1.
Benader $p$ in vier decimalen.

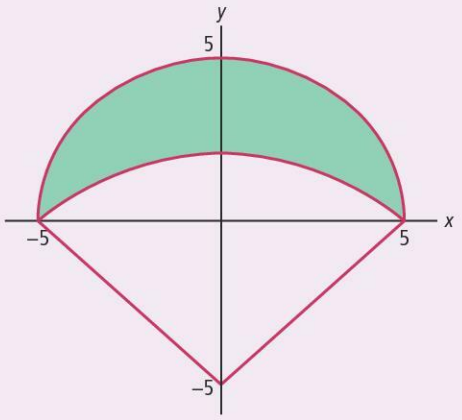



**U3** Van het maantje is de bovenste boog de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ en de onderste boog een deel van de grafiek van de functie $g(x) = \sqrt{50 - x^2} - 5$.

**a** Schrijf de oppervlakte van het maantje als verschil van twee integralen.

**b** Benader de oppervlakte van het maantje in één decimaal.

**c** Bereken de oppervlakte van het maantje langs meetkundige weg exact.



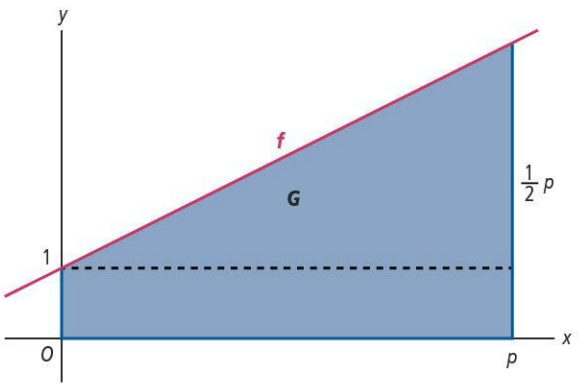

© Noordhoff Uitgevers bv

# 12.3 Hoofdstelling van de integraalrekening

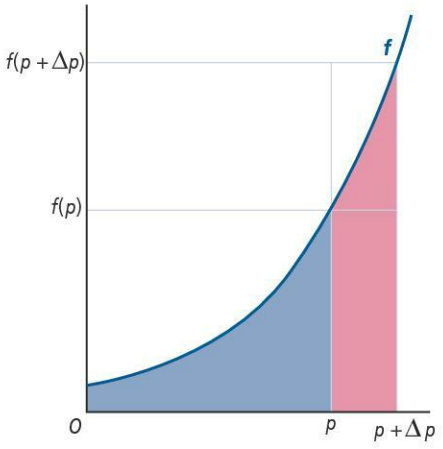
**Je leert**
- wat een primitieve functie is
- hoe je een integraal exact berekent
- hoe je een primitieve van een machtsfunctie opstelt

**Leerroutes**
- ondersteunend: 18—19—20—O21—22—23—24—25—O26—26
- doorlopend: 18—19—20—21—22—23—24—25—26—27
- uitdagend: 18—19—20—21—22—23—25—26—27—U4

$G$ is het gebied begrensd door de grafiek van $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x$, de $x$-as, de $y$-as en de lijn $x = p$.
$O(p)$ is de oppervlakte van $G$.
- Wat is het functievoorschrift van $O$?
- Wat valt je op aan het functievoorschrift van $O'$?




**18** In de figuur is de grafiek van een functie $f$ getekend.
$O(p)$ is de oppervlakte van het gebied begrensd door de grafiek van $f$, de $x$-as, de $y$-as en de lijn $x = p$, $p \geq 0$.




**a** Leg uit dat de oppervlakte van het rood gekleurde gebied gelijk is aan $\Delta O(p) = O(p + \Delta p) - O(p)$.

**b** Je kunt de oppervlakte van het rode gebied insluiten door twee rechthoeken met breedte $\Delta p$.
Leg uit dat geldt: $\Delta p \cdot f(p) \leq \Delta O(p) \leq \Delta p \cdot f(p + \Delta p)$.

**c** Als je de uitdrukking van opdracht b deelt door $\Delta p$ dan krijg je $f(p) \leq \dfrac{\Delta O(p)}{\Delta p} \leq f(p + \Delta p)$.
Tot welke waarde nadert $\dfrac{\Delta O(p)}{\Delta p}$ als $\Delta p \to 0$?

**d** Leg uit dat hieruit volgt: $O'(p) = f(p)$.

**19** Gegeven is de functie $f(x) = x^2$. Voor $p \geq 0$ is $O(p)$ de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de $x$-as, de grafiek van $f$, de $y$-as en de lijn $x = p$, dus $O(p) = \int_0^p x^2 \,\mathrm{d}x$.

**a** Leg uit dat uit opdracht 18d volgt $O(p) = \frac{1}{3}p^3 + C$, waarbij $C$ een constante is.

**b** Waarom moet gelden dat $O(0) = 0$? Bereken $C$.

**c** Bereken exact $\int_0^6 x^2 \,\mathrm{d}x$.


© Noordhoff Uitgevers bv

**20** $G$ is het gebied begrensd door de grafiek van de functie $f(x) = x^2$, de $x$-as en de lijnen $x = 3$ en $x = 6$.
$O$ is de oppervlaktefunctie uit de vorige opdracht.

**a** Leg uit dat de oppervlakte van $G$ gelijk is aan $O(6) - O(3)$.

**b** Bereken exact $\int_3^6 x^2 \,dx$.

**Theorie**

Het verband dat je in de vorige opdrachten hebt gevonden, heet de hoofdstelling van de integraalrekening:

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ , waarbij $F'(x) = f(x)$.

$F(b) - F(a)$ wordt ook wel genoteerd als $\left[F(x)\right]_a^b$.

Een functie $F$ waarvoor geldt dat $F'(x) = f(x)$ heet een primitieve functie (of kortweg primitieve) van $f$.
Het vinden van een primitieve functie heet primitiveren.
Het berekenen van een integraal met behulp van de hoofdstelling heet integreren.

**Voorbeeld**

Toon aan dat $F(x) = \frac{1}{6}x^6$ een primitieve is van $f(x) = x^5$ en bereken exact $\int_1^3 x^5 \,dx$.

**Oplossing**

$F'(x) = \frac{1}{6} \cdot 6x^5 = x^5$, dus
$F'(x) = f(x)$.

$\int_1^3 x^5 \,dx = \left[\frac{1}{6}x^6\right]_1^3 = \frac{1}{6} \cdot 3^6 - \frac{1}{6} \cdot 1^6 = 121\frac{1}{3}$

Ondersteunende route → maak opdracht O21

**21** **a** Toon aan dat $f(x) = x^4$ een primitieve is van $f(x) = 4x^3$.

**b** Bereken exact $\int_0^2 4x^3 \,dx$.

**22** **a** Toon aan dat $f(x) = 2x\sqrt{x}$ een primitieve is van $f(x) = 3\sqrt{x}$.

**b** Bereken exact $\int_4^9 3\sqrt{x}\,dx$.

**23** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{x^2}$

**a** Differentieer $f$.

**b** Geef een primitieve functie van $g(x) = \frac{1}{x^3}$

© Noordhoff Uitgevers bv

**24** Gegeven is de functie $F(x) = x^{11}$.
**a** Differentieer $F$.
**b** Geef een primitieve functie van $g(x) = x^{10}$.

**Theorie**

Een primitieve functie van de machtsfunctie $f(x) = x^p$ is

$$F(x) = \frac{1}{p+1}\,x^{p+1}.$$

Deze regel geldt voor alle waarden van $p$ behalve $p = -1$.

**Voorbeeld**

Primitiveer $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

**Oplossing**

$$\frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = x^{-1\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{-1\frac{1}{2}+1}\,x^{-1\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{-\frac{1}{2}}\,x^{-\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = -2 \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{2}{\sqrt{x}}$$

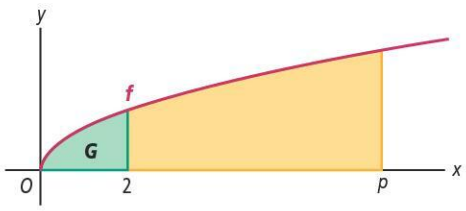
**25** Waarom geldt de regel in de theorie niet voor $p = -1$?

Ondersteunende route → maak opdracht O26

**26** Primitiveer.

H
**a** $f(x) = x^{99}$
**b** $f(x) = \frac{1}{x^{10}}$
**c** $f(x) = x\sqrt{x}$
**d** $f(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$

**27** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x}$.
$G$ is het gebied ingesloten door de grafiek van $f$, de $x$-as en de lijn $x = 2$.
**a** Bereken exact de oppervlakte van $G$.
**b** De oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van $f$, de $x$-as en de lijn $x = p$ is acht keer zo groot als de oppervlakte van $G$.
Bereken $p$.




Uitdagende route → maak opdracht U4


© Noordhoff Uitgevers bv

## Ondersteunende opdrachten

**O21** In deze opdracht toon je aan dat $F(x) = x^6$ een primitieve is van $f(x) = 6x^5$ en bereken je de integraal $\int_1^2 6x^5\,dx$ exact.

**a** Differentieer $F$ en laat zien dat $F'(x) = f(x)$.

**b** Vul in.

$$\int_1^2 6x^5\,dx = \left[\ldots\right]_1^2 = F(\ldots) - F(\ldots) = \ldots - \ldots = \ldots.$$

**O26** In deze opdracht ga je op zoek naar een primitieve functie van $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

**a** Schrijf $f$ in de vorm $f(x) = x^p$.

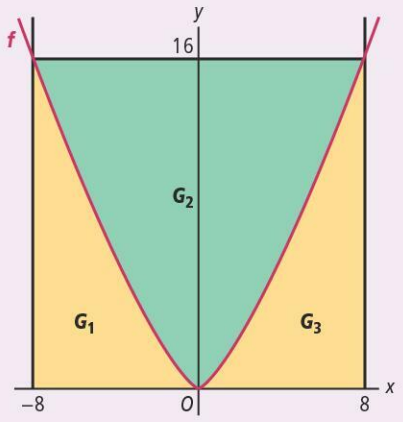
**b** Vul de gevonden waarde van $p$ in de formule $F(x) = \frac{1}{p+1}\,x^{p+1}$ in.

**c** Vereenvoudig de breuk en schrijf $F(x)$ zonder macht van $x$ met een gebroken exponent.

## Uitdagende opdrachten

**U4** Het vierkant met hoekpunten $(-8, 0)$, $(8, 0)$, $(8, 16)$ en $(-8, 16)$ wordt door de grafiek van de functie $f(x) = x\sqrt[3]{x}$ in drie stukken: $G_1$, $G_2$ en $G_3$ met oppervlakte $O_1$, $O_2$ en $O_3$ verdeeld.

Bewijs dat geldt: $O_2 : (O_1 + O_3) = 4 : 3$.




© Noordhoff Uitgevers bv

# 12.4 Primitiveren en integreren

**Je leert**
- hoe je een somfunctie primitiveert en integreert
- hoe je een functie van de vorm $g(x) = f(a \cdot x + b)$ primitiveert

**Leerroutes**
- ondersteunend: 28—29—030—31—32—33—34—35—036—36
- doorlopend: 28—29—30—31—32—33—34—35—36—37
- uitdagend: 28—29—30—32—33—34—35—36—37—U5

Janne probeert een primitieve functie te vinden van $f(x) = (x + 3)^2$. Haar klasgenoten Iris en Anouk helpen haar. Janne controleert de antwoorden van haar vriendinnen.
Beide antwoorden zijn goed.
- Hoe kan dat?

**28**
**a** Geef een functie $F$ waarvoor geldt $F'(x) = 5$.
**b** Geef een primitieve van $g(x) = 6x^2 + 5$.
**c** Geef een primitieve van $h(x) = 4x^3 + 6x^2 + 5$.

**Theorie**

Uit de regels voor differentiëren kun je regels voor het primitiveren en regels voor het integreren afleiden.

**Regels voor het primitiveren**
Als $g(x) = c \cdot f(x)$, dan is $G(x) = c \cdot F(x)$.
Als $s(x) = f(x) + g(x)$, dan is $S(x) = F(x) + G(x)$.

**Regels voor het integreren**

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \quad \text{(somregel)}$$

**Voorbeeld**

Primitiveer $f(x) = 4x^2 + 6\sqrt{x}$.

**Oplossing**
De functie $f$ is te schrijven als
$f(x) = 4x^2 + 6x^{\frac{1}{2}}$.
Een primitieve functie is
$F(x) = 4 \cdot \frac{1}{3}x^3 + 6 \cdot \frac{1}{1\frac{1}{2}}x^{1\frac{1}{2}}$
$F(x) = 1\frac{1}{3}x^3 + 4x\sqrt{x}$

**29** Primitiveer.

H
**a** $f(x) = 3x^4 - 4x^3$
**b** $g(x) = 2x^2 + \frac{3}{x^4}$
**c** $h(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$
**d** $k(x) = (x^2 - 2)^2$


© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O30

**30** Bereken exact.

**a** $\int_1^4 (4x^2 - 6x + 5)\,dx$

**b** $\int_1^4 \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)dx$

**c** $\int_0^9 (\sqrt{x} + 1)\,dx$

**d** $\int_{-4}^{-1} \frac{x^4 + 1}{x^4}\,dx$

**31** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^5 + 3x^3 + 6}{3x^3}$

**a** Schrijf het functievoorschrift als de som van machtsfuncties.

**b** Geef een primitieve van $f$.

**32** **a** Toon aan dat $F_1(x) = x^3$ en $F_2(x) = x^3 + 12$ beide primitieven zijn van $f(x) = 3x^2$.

**b** Laat zien dat $F_2(4) - F_2(2) = F_1(4) - F_1(2)$.

**c** Laat zien dat $F_2(b) - F_2(a) = F_1(b) - F_1(a)$.

**Theorie**

Een functie $f$ heeft meerdere primitieve functies. Als $F_1$ een primitieve functie van $f$ is, dan is voor elke waarde van $C$ de functie $F_2(x) = F_1(x) + C$ ook een primitieve van $f$.

Omdat $\int_a^b f(x)\,dx = F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) - F_2(a)$ maakt het niet uit welke primitieve van $f$ je bij het integreren gebruikt.

**Voorbeeld**

Stel de primitieve functies op van $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2$.

**Oplossing**

Een primitieve functie van $f$ is $g(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x$.
De primitieve functies zijn dus $F(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x + C$.

**33** Geef de primitieve functies.

H

**a** $f(x) = 2x^4 + 4x^3 - x + 3$

**b** $k(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$

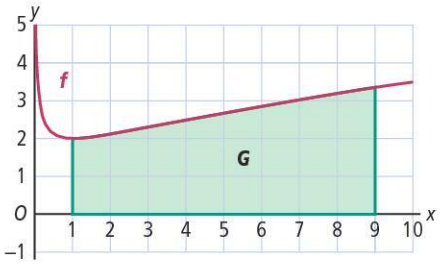
**c** $g(x) = -x^5 + \frac{1}{3x^3} - 1$

**d** $h(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 5}{x^2}$

© Noordhoff Uitgevers bv

**34** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

Bereken exact de oppervlakte van het gekleurde gebied.




**35** Gegeven zijn de functies $g(x) = x^3$ en $f(x) = (3x - 4)^3$.

**a** Geef een primitieve van $g$.

**b** Als primitieve van $f$ probeert Marjan $f(x) = c \cdot (3x - 4)^4$.
Geef de afgeleide $F'(x)$.

**c** Welke waarde moet $c$ hebben zodat $F$ een primitieve functie van $f$ is?

**d** Geef een primitieve van $f$.

**e** Gegeven is $g(x) = x^3$ en $f(x) = g(ax + b)$.
Noem $G$ de primitieve van $g$ en $F$ de primitieve van $f$.
Vul in: $f(x) = \ldots \cdot G(ax + b)$.

**Theorie**

Als $G$ een primitieve is van $g$ en $f(x) = g(a \cdot x + b)$, dan is $f(x) = \frac{1}{a} \cdot G(ax + b)$ een primitieve van $f$.

**Voorbeeld**

Geef een primitieve van $f(x) = (3 - 2x)^5$.

**Oplossing**

In dit geval is $a = -2$, dus
$F(x) = \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{6} \cdot (3 - 2x)^6$ ofwel
$F(x) = -\frac{1}{12}(3 - 2x)^6$.

Ondersteunende route → maak opdracht O36

**36** Primitiveer.

H

**a** $f(x) = 2 \cdot (5x + 1)^3$

**b** $g(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}x - 1\right)^5$

**c** $h(x) = \frac{2}{(1 - 6x)^3}$

**d** $k(x) = \sqrt{3x + 5}$

**37** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{4}{(2x + 1)^2}$

De oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van $f$, de $x$-as en de lijnen $x = 2$ en $x = p$ is gelijk aan $\frac{1}{5}$.
Bereken exact de waarde van $p$.

Uitdagende route → maak opdracht U5


© Noordhoff Uitgevers bv

## Ondersteunende opdrachten

**O30** Gegeven is de functie $f(x) = 2x + 3\sqrt{x}$.

Je gaat de integraal $\int_1^4 (2x + 3\sqrt{x})\,dx$ berekenen.

**a** Schrijf $\sqrt{x}$ als macht van $x$.
**b** Primitiveer $f$. Gebruik de formule op het blaadje.
**c** Bereken $F(4)$ en $F(1)$.
**d** Vul in.

$$\int_1^4 (2x + 3\sqrt{x})\,dx = \left[\ldots + \ldots\right]_{\ldots}^{\ldots} = \ldots - \ldots = \ldots \ .$$

Bereken exact.

**e** $\int_0^4 (x\sqrt{x} + 3)\,dx$

**f** $\int_{-1}^2 (3x^2 - x + 5)\,dx$

**g** $\int_1^4 \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)dx$

**h** $\int_{-3}^{-1} \frac{2x^3 - 1}{x^2}\,dx$

Een primitieve van $f(x) = x^p$ is $F(x) = \frac{1}{p+1}x^{p+1}$.

**O36** Gegeven is de functie $f(x) = 2\sqrt{4x + 1}$.
In deze opdracht ga je een primitieve functie van $f$ bepalen.

**a** Geef een primitieve van $g(x) = 2\sqrt{x}$.

**b** Vul in: $f(x) = g(\ldots)$, dus $F(x) = \frac{1}{\ldots} \cdot G(\ldots)$.
**c** Geef een primitieve van $f$.

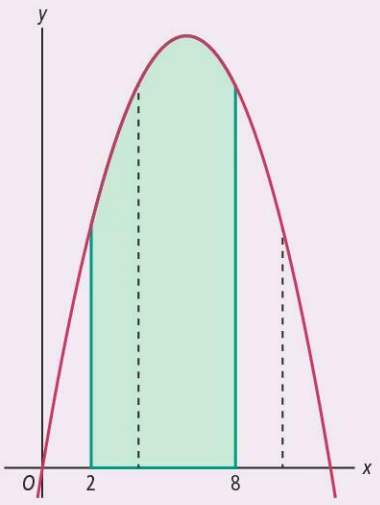
## Uitdagende opdrachten

**U5** Gegeven is de familie van functies $g_a(x) = ax(12 - x)$.
$G$ is het gebied begrensd door de grafiek van $g_a$, de $x$-as en de lijnen $x = 2$ en $x = 8$. De oppervlakte van $G$ is 96.

**a** Bereken exact de waarde van $a$.

**b** Verder is gegeven dat $\int_p^{10} g_a(x)\,dx = \int_2^8 g_a(x)\,dx = 96$ .

Bereken de waarde van $p$.




© Noordhoff Uitgevers bv

# 12.5 Oppervlakte en integralen

**Je leert**
- hoe je exact de oppervlakte berekent van een gebied dat onder de $x$-as ligt
- hoe je exact de oppervlakte berekent van een gebied ingesloten door twee grafieken

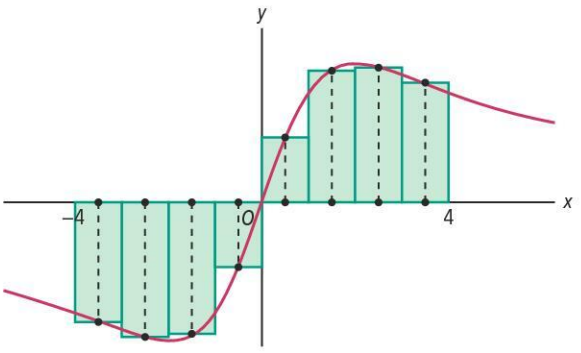
**Leerroutes**
- ondersteunend: 38—039—40—41—042—43—44—45
- doorlopend: 38—39—40—41—42—43—44—45
- uitdagend: 38—39—40—41—43—44—45—U6

Kayvan berekent de Riemann-som van

$f(x) = \dfrac{12x}{x^2 + 4}$ op het interval $[-4, 4]$

met $\Delta x = 1$.

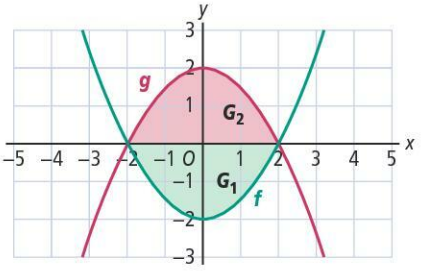
- Verklaar waarom hij als antwoord 0 vindt.




**38** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ en $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$.
$G_1$ is het gebied ingesloten door de grafiek van $f$ en de $x$-as en
$G_2$ is het gebied ingesloten door de grafiek van $g$ en de $x$-as.

**a** Bereken exact $\int_{-2}^{2} (\frac{1}{2}x^2 - 2)\,dx$ en $\int_{-2}^{2} (-\frac{1}{2}x^2 + 2)\,dx$.

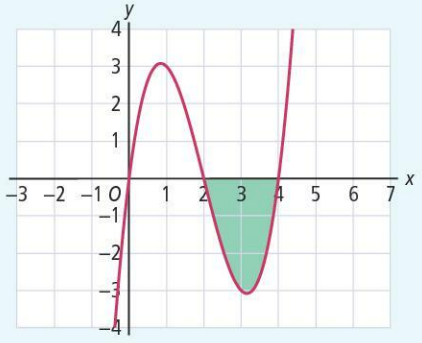
**b** Hoe groot is de oppervlakte van $G_1$?




**Theorie**

Tot nu toe heb je de oppervlakte berekend van gebieden die boven de $x$-as liggen. Als een gebied onder de $x$-as ligt, dan kun je de oppervlakte van dat gebied berekenen door het te spiegelen in de $x$-as.
De oppervlakte van het gebied is dan gelijk aan

$\int_a^b (-f(x))\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ of ook gelijk aan $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$.




**Voorbeeld**

$G$ is het gebied ingesloten door grafiek van de functie $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ en de $x$-as op het interval $[2, 4]$.
Bereken exact de oppervlakte van $G$.

**Oplossing**

De grafiek van $f$ staat hierboven.
De oppervlakte van $G$ is

$-\int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx = -\left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2\right]_2^4 =$

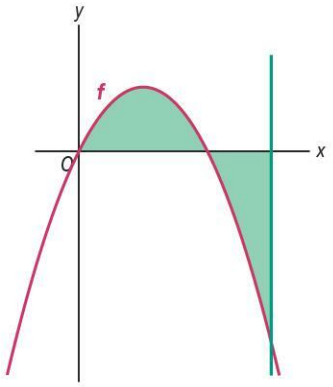
$-((64 - 128 + 64) - (4 - 16 + 16)) = 4.$


© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht 039

**39** H

Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2$.
De grafiek van $f$, de $x$-as en de lijn $x = 6$ sluiten een gebied $G$ in dat uit twee stukken bestaat.
Bereken exact de oppervlakte van $G$.




**40**

Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{8x}$ en $g(x) = \frac{1}{8}x^2$.

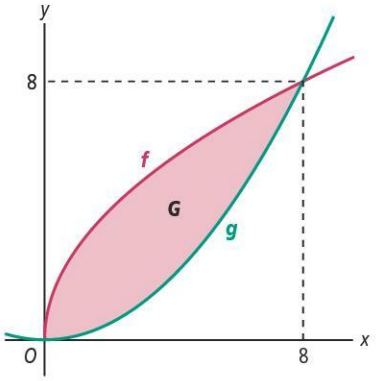
**a** Ga na dat de grafieken elkaar snijden in (0, 0) en (8, 8).

**b** Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de $x$-as, de grafiek van $f$ en de lijn $x = 8$.

**c** Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de $x$-as, de grafiek van $g$ en de lijn $x = 8$.

**d** Bereken exact de oppervlakte van het gekleurde gebied $G$.

**e** Leg uit dat *oppervlakte* $G = \int_0^8 (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$.




**41**

Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ en $g(x) = x + 2$.
Het gebied $G$ wordt ingesloten door de grafieken van $f$ en $g$.

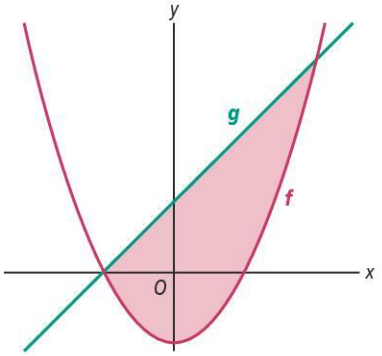
**a** Controleer dat de grafieken elkaar snijden in de punten (−2, 0) en (4, 6).

**b** Door beide grafieken 3 omhoog te schuiven, ontstaan de grafieken van de functies $p$ en $q$.
Geef de functievoorschriften van $p$ en $q$.

**c** Bereken de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van $p$ en $q$.

**d** Toon aan dat $g(x) - f(x) = q(x) - p(x)$.

**e** Leg uit dat je de oppervlakte van $G$ ook direct kunt berekenen met de integraal $\int_{-2}^{4} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$.




**Aanpak**

**Hoe bereken je exact de oppervlakte van een gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van twee functies?**

**1** Plot de grafieken en bereken de $x$-coördinaten van de snijpunten van beide grafieken.

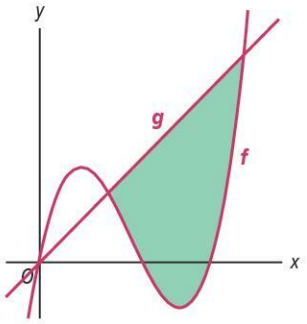
**2** Stel één of meer integralen op die de oppervlakte weergeven. Let daarbij op de onderlinge ligging van de grafieken.

**3** Bereken de integraal of de integralen en geef de oppervlakte.

© Noordhoff Uitgevers bv

**Voorbeeld**

De grafieken van de functies $f(x) = x^3 - 8x^2 + 15x$ en $g(x) = 3x$ sluiten het gebied in dat in de tekening is gekleurd.
Bereken exact de oppervlakte van dat gebied.




**Oplossing**

1 De oplossingen van $f(x) = g(x)$ zijn $x = 0$, $x = 2$ en $x = 6$.

2 Tussen $x = 2$ en $x = 6$ ligt de grafiek van $g$ boven de grafiek van $f$.
De oppervlakte wordt berekend met $\int_2^6 (g(x) - f(x))\,dx$.

3 $\int_2^6 (-x^3 + 8x^2 - 12x)\,dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{8}{3}x^3 - 6x^2\right]_2^6 = 42\frac{2}{3}$, dus de oppervlakte is $42\frac{2}{3}$.

**42** Gegeven zijn de functies uit het voorbeeld.
Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat door de grafieken van $f$ en $g$ worden ingesloten op het interval $[0, 2]$.

**43** Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{7 - 2x}$ en $g(x) = 3 - \sqrt{x + 1}$.
De grafieken snijden elkaar in de punten $(-1, 3)$ en $(3, 1)$.
Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat door de beide grafieken worden ingesloten.

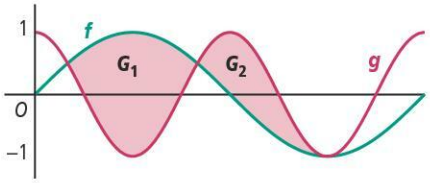
Ondersteunende route → maak opdracht O44

**44** H Gegeven zijn de functies $f(x) = x^3 + 6x$ en $g(x) = -x^3 + 4x^2 + 12x$.

**a** Bereken exact de oppervlakte van elk van de gebieden die worden ingesloten door de grafieken van $f$ en $g$.

**b** Controleer het antwoord bij opdracht a door de oppervlakte te berekenen met je rekenmachine.

**45** Op het interval $[0, 2\pi]$ zijn de grafieken getekend van de functies $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(2x)$.




**a** Controleer met een berekening dat de grafieken een punt gemeenschappelijk hebben voor $x = \frac{1}{6}\pi$, $x = \frac{5}{6}\pi$ en $x = 1\frac{1}{2}\pi$.

**b** Bereken de oppervlakte van elk van de twee gebieden die worden ingesloten door de grafieken van $f$ en $g$.
Rond af op één decimaal.

Uitdagende route → maak opdracht U5


© Noordhoff Uitgevers bv

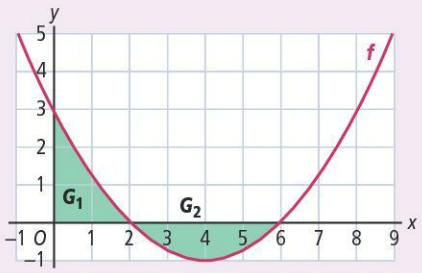
## Ondersteunende opdrachten

**O39** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$.
In deze opdracht bereken je de totale oppervlakte van de gebieden ingesloten door de grafiek van $f$, de $x$-as en de $y$-as.

**a** Los exact op $f(x) = 0$.

**b** Het gebied $G_1$ ligt boven de $x$-as en het gebied $G_2$ eronder. Met welke integraal kun je de oppervlakte van $G_1$ berekenen? En met welke integraal de oppervlakte van $G_2$?

**c** Bereken exact de totale oppervlakte van de twee gebieden.




**O44** Gegeven zijn de functies $f(x) = x^3 - 6x$ en $g(x) = -x^3 - 4x^2 + 10x$.

**a** Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van $f$ en $g$.

**b** Op welk interval ligt de grafiek van $f$ boven de grafiek van $g$?

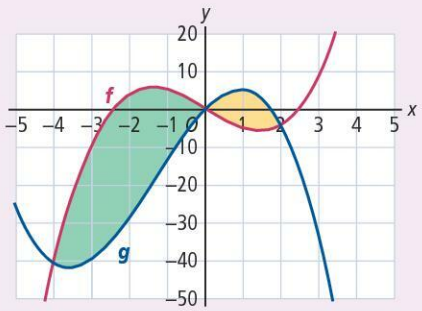
**c** Leg uit dat je de oppervlakte van dat gebied kunt berekenen met $\int_{-4}^{0} (f(x) - g(x))\,dx$.

**d** Vereenvoudig de uitdrukking $f(x) - g(x)$.

**e** Bereken exact de oppervlakte van het gekleurde gebied links van de $y$-as.

**f** Bereken op een vergelijkbare manier ook de oppervlakte van het gekleurde gebied rechts van de $y$-as.

**g** Controleer de antwoorden van de opdrachten e en f door de oppervlakten te berekenen met je rekenmachine.

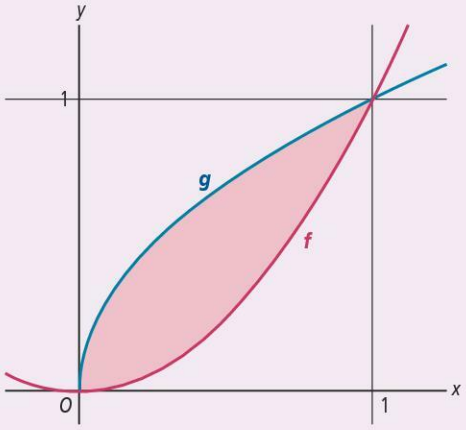



## Uitdagende opdrachten

**U6** $G$ is het gebied ingesloten door de grafieken van de functies $f(x) = x^n$ en $g(x) = \sqrt[n]{x}$.

**a** Neem $n = 2$ en bereken exact de oppervlakte van $G$.

**b** Bewijs dat de oppervlakte van $G$ voor elke gehele waarde van $n$ groter dan 1 gelijk is aan $\frac{n-1}{n+1}$.




© Noordhoff Uitgevers bv

**46** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$G$ is het gebied ingesloten door de grafiek van $f$, de $x$-as en de lijnen $x = 1$ en $x = p$.

**a** Kies $p = 10$ en bereken exact de oppervlakte van $G$.

**b** Kies $p = 100$ en bereken exact de oppervlakte van $G$.

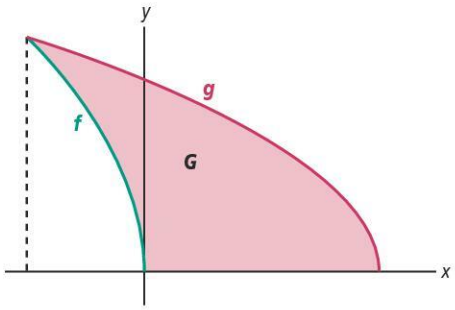
**c** Naar welke waarde nadert de oppervlakte van $G$ als $p$ onbegrensd toeneemt?

**47** Het gebied $G$ wordt ingesloten door de $x$-as en de grafieken van de functies $f(x) = \sqrt{-12x}$ en $g(x) = 2\sqrt{6 - x}$.

**a** Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van $f$ en $g$.

**b** Stel integralen op waarmee je de oppervlakte van $G$ kunt berekenen.

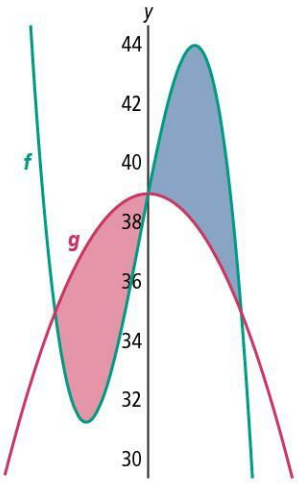
**c** Bereken exact de oppervlakte van $G$.




**48** In de figuur zie je langs de $y$-as een deel van de grafieken van de functies $f(x) = (3 - x)(2x^2 + 7x + 13)$ en $g(x) = 39 - x^2$.

**a** Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken.

**b** De grafieken sluiten twee gebieden in.
Toon aan dat de oppervlaktes van deze gebieden even groot zijn.




**49** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{12x + 9}{16x^4 + 48x^3 + 36x^2}$

**a** Toon algebraïsch aan dat de noemer van $f(x)$ geschreven kan worden als $4x^2(2x + 3)^2$.

**b** Laat algebraïsch zien dat het functievoorschrift van $f$ geschreven kan worden als $f(x) = \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{(2x + 3)^2}$

**c** Bereken exact $\int_1^2 \frac{12x + 9}{16x^4 + 48x^3 + 36x^2}\,dx$.


© Noordhoff Uitgevers bv

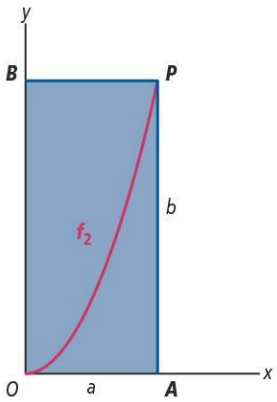
**50** Gegeven is de familie van functies $f_n(x) = x^n$, met $x \geq 0$.
Op de grafiek van $f_n$ ligt het punt $P(a, b)$. De rechthoek met hoekpunten $O(0, 0)$, $A(a, 0)$, $P$ en $B(0, b)$ wordt door de grafiek van $f_n$ in twee gebieden verdeeld.

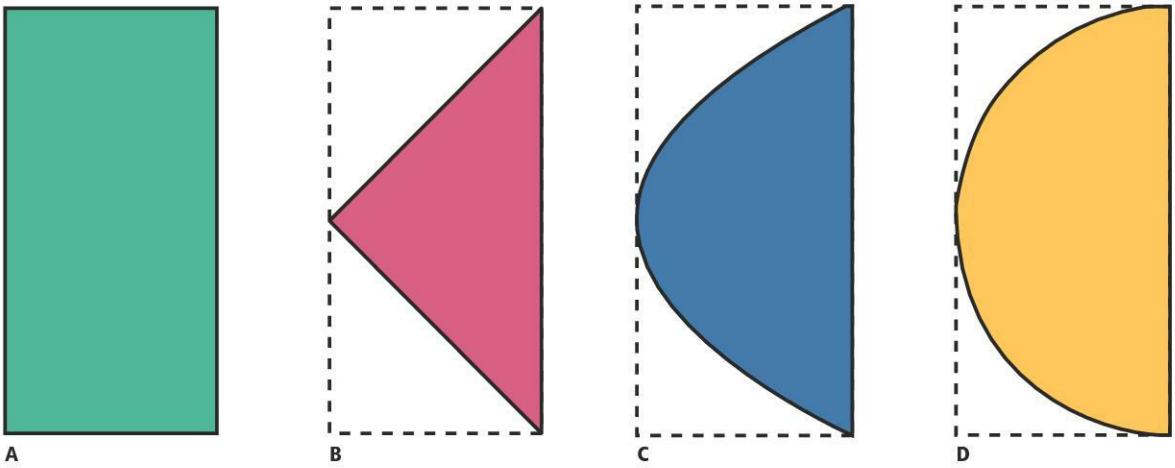
**a** In de figuur is de situatie getekend voor $n = 2$.
Bewijs dat de oppervlaktes van de twee gebieden zich verhouden als 1 : 2.

**b** Onderzoek de verhouding van de twee oppervlaktes voor $n = 3$.

**c** Formuleer een algemene regel voor de verhouding van de twee oppervlaktes voor elke gehele waarde van $n$ groter dan 1 en bewijs de regel.

**d** Onderzoek of de regel ook geldt voor $n = 1$.




**51** In een rechthoek met lengte 4 en breedte 8 zijn achtereenvolgens een rechthoek, een driehoek, een parabool en een halve cirkel gekleurd.
De figuren worden langs een verticale lijn doorgeknipt.
Onderzoek voor elk van de figuren op welke afstand van de linker zijde van de rechthoek de figuur moet worden doorgeknipt, zodat de oppervlaktes van de twee gekleurde stukken even groot zijn. Geef je antwoord zo mogelijk exact en anders in één decimaal.

© Noordhoff Uitgevers bv

**Theorie**

### Integraal, integrand en oppervlakte

De integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ is de exacte waarde waar de Riemann-sommen van $f$ op het interval $[a, b]$ naar naderen als het aantal deelintervallen onbegrensd toeneemt, dus als $\Delta x \to 0$.
$f(x)$ heet de integrand, $a$ de ondergrens en $b$ de bovengrens.
Is $f(x) \geq 0$ op $[a, b]$, dan is de integraal de exacte waarde van de oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van $f$, de $x$-as en de lijnen $x = a$ en $x = b$.

**S1** $G$ is het gebied begrensd door de grafiek van de functie $f(x) = 2^x$, de $x$-as, de $y$-as en de lijn $x = 3$.

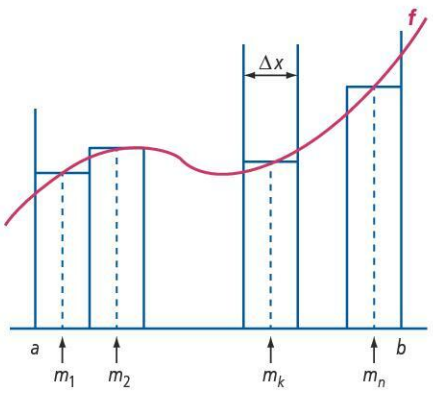
**a** Stel een integraal op om de oppervlakte te berekenen.

**b** Benader de integraal met de rekenmachine in drie decimalen.

**Vaardigheid**

### Je kunt de oppervlakte van een gebied onder een grafiek benaderen.

Is $f$ een functie met $f(x) \geq 0$ op een interval $[a, b]$ en $G$ het gebied begrensd door de grafiek van $f$, de $x$-as en de lijnen $x = a$ en $x = b$, dan benader je de oppervlakte van $G$ met een Riemann-som van $f$ op het interval $[a, b]$.
Daartoe verdeel je $[a, b]$ in $n$ gelijke deelintervallen met breedte $\Delta x$. Als $m_1, m_2, \ldots m_n$ de middens zijn van de deelintervallen, is de Riemann-som gelijk aan $f(m_1) \cdot \Delta x + f(m_2) \cdot \Delta x + \ldots + f(m_n) \cdot \Delta x$.




**Voorbeeld**

Benader de oppervlakte van het gebied begrensd door de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, de $x$-as, de $y$-as en de lijn $x = 2$ met een Riemann-som met vier deelintervallen. Rond af op twee decimalen.

**Oplossing**

De lengte van een deelinterval is $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

De middens van de deelintervallen zijn

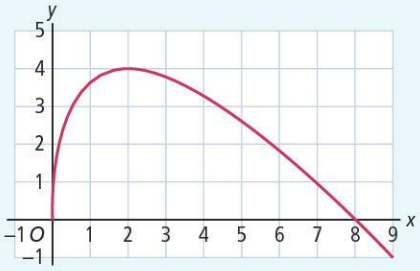
$x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{3}{4}$, $x = 1\frac{1}{4}$ en $x = 1\frac{3}{4}$.

De totale oppervlakte van de rechthoekjes is

$\frac{1}{2} \cdot (f(\frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4}) + f(1\frac{1}{4}) + f(1\frac{3}{4})) \approx 1{,}36$.


© Noordhoff Uitgevers bv

**S2** Benader de oppervlakte van het gebied begrensd door de grafiek van $f(x) = 4\sqrt{2x} - 2x$ en de $x$-as op het interval $[0, 8]$ met een Riemann-som met vier deelintervallen. Rond af op twee decimalen.




**Vaardigheid**

**Je kunt een integraal exact berekenen.**

Je kunt een integraal exact berekenen met behulp van de hoofdstelling van de integraalrekening.
Als $f$ een functie is op het interval $[a, b]$ en $F$ is een primitieve van $f$, dan geldt $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$.

Een functie $F$ waarvoor geldt dat $F'(x) = f(x)$ heet een primitieve functie (of kortweg primitieve) van $f$.
Het vinden van een primitieve functie heet primitiveren.

**S3** Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.

**a** Teken het gebied waarvan je de oppervlakte exact kunt berekenen door $F(3) - F(2)$ te berekenen.

**b** Bereken deze oppervlakte exact.

**Vaardigheid**

**Je kunt een primitieve van een machtsfunctie opstellen.**

Als $f(x) = x^p$ $(p \neq -1)$ dan is de functie

$F(x) = \frac{1}{p+1}\,x^{p+1}$ een primitieve van $f$.

**Voorbeeld**

Geef een primitieve functie van $f(x) = x\sqrt{x}$.

**Oplossing**

$f(x)$ is te schrijven als $f(x) = x^{1\frac{1}{2}}$.
Een primitieve is

$F(x) = \frac{1}{2\frac{1}{2}} \cdot x^{2\frac{1}{2}}$ ofwel

$F(x) = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$.

**S4** **a** Geef een primitieve functie van $f(x) = x^2\sqrt{x}$.

**b** Geef een primitieve functie van $f(x) = \frac{1}{x^6}$

© Noordhoff Uitgevers bv

**Vaardigheid**

**Je kunt een somfunctie primitiveren en integreren.**

*Regels voor het primitiveren*

Als $g(x) = c \cdot f(x)$, dan is $G(x) = c \cdot F(x)$.

Als $s(x) = f(x) + g(x)$, dan is $S(x) = F(x) + G(x)$

*Regels voor het integreren*

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \quad \text{(somregel)}$$

**Voorbeeld**

Bereken exact $\int_{-3}^{-1} (\frac{1}{2}x^3 + x^2 - 2x)\,dx$.

**Oplossing**

$$\int_{-3}^{-1} (\tfrac{1}{2}x^3 + x^2 - 2x)\,dx =$$

$$\left[\tfrac{1}{8}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-3}^{-1} =$$

$$-1\tfrac{5}{24} - (-7\tfrac{7}{8}) = 6\tfrac{2}{3}$$

**S5** Bereken exact.

**a** $\int_1^4 \left(3\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$

**b** $\int_1^4 \frac{4x+1}{x^3}\,dx$

**Vaardigheid**

**Je kunt een functie van de vorm $f(x) = (a \cdot x + b)^n$ primitiveren.**

Als $G$ een primitieve is van $g$ en $f(x) = g(a \cdot x + b)$, dan is $F(x) = \frac{1}{a} \cdot G(ax + b)$ een primitieve van $g$.

**Voorbeeld**

Geef een primitieve van $f(x) = \dfrac{15}{(5x-1)^4}$

**Oplossing**

Een primitieve van $g(x) = \dfrac{15}{x^4}$ is $G(x) = -\dfrac{5}{x^3}$

Een primitieve van $f$ is $F(x) = \frac{1}{5} \cdot -\dfrac{5}{(5x-1)^4}$ ofwel

$F(x) = -\dfrac{1}{(5x-1)^4}$

**S6** Primitiveer.

**a** $f(x) = 2(5 - 2x)^4$

**b** $g(x) = -2\left(\frac{1}{2}x - 3\right)^{-2}$


© Noordhoff Uitgevers bv

**Vaardigheid**

**Je kunt exact de oppervlakte berekenen van een gebied dat onder de *x*-as ligt.**

De oppervlakte van een gebied dat onder de $x$-as ligt en begrensd wordt door de grafiek van een functie $f$, de $x$-as en de lijnen $x = a$ en $x = b$ bereken je met de integraal $-\int_a^b f(x)\,dx$ of ook wel met de integraal $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$.

**Voorbeeld**

Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat ingesloten wordt door de grafiek van $f(x) = x^2 - 4$, de $x$-as en de lijn $x = -1$.

**Oplossing**

Met een plot zie je dat het gebied onder de $x$-as ligt. De oppervlakte is

$$-\int_{-1}^{2}(x^2 - 4)\,dx = -\left[\tfrac{1}{3}x^3 - 4x\right]_{-1}^{2} = 9.$$

**S7** Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ en de $x$-as.

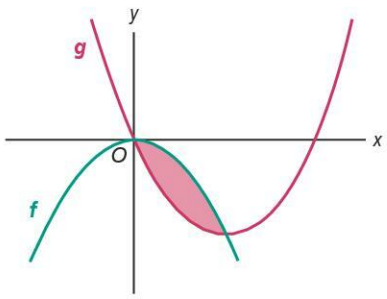
**Vaardigheid**

**Je kunt de oppervlakte exact berekenen van een gebied ingesloten door twee grafieken.**

1. Plot de grafieken en bereken de $x$-coördinaten van de snijpunten van beide grafieken.
2. Stel één of meer integralen op die de oppervlakte weergeven. Let daarbij op de onderlinge ligging van de grafieken.
3. Bereken de integraal of de integralen en geef de oppervlakte.

**Voorbeeld**

Bereken de oppervlakte van het gebied, begrensd door de grafieken van de functies $f(x) = -x^2$ en $g(x) = x^2 - 4x$.




1. Snijpunten: $-x^2 = x^2 - 4x$ ofwel $x^2 - 2x = 0$. Dat geeft $x = 0$ of $x = 2$.
2. De oppervlakte is gelijk aan $\int_0^2(-x^2 - (x^2 - 4x))\,dx = \int_0^2(-2x^2 + 4x)\,dx$.
3. $\int_0^2(-2x^2 + 4x)\,dx = \left[-\tfrac{2}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2 = -\tfrac{2}{3} \cdot 8 + 2 \cdot 4 = 2\tfrac{2}{3}$

**S8** Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van $f(x) = 4 - \frac{16}{x^2}$ en $g(x) = 5x - 17$.

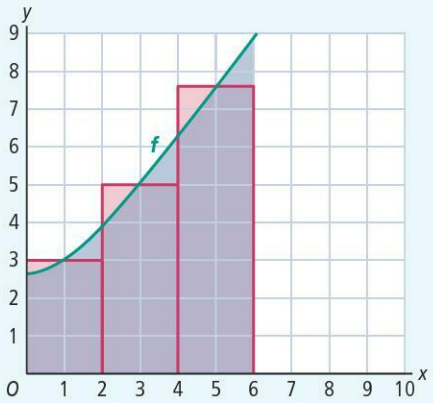
© Noordhoff Uitgevers bv

**T1** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{2x^2 + 7}$.
$G$ is het gebied begrensd door de grafiek van $f$, de $x$-as, de $y$-as en de lijn $x = 6$.

**a** Benader de oppervlakte van $G$ met een Riemann-som van $f$ met drie deelintervallen. Geef het antwoord in twee decimalen.

**b** Stel een integraal op om de oppervlakte van $G$ te berekenen.

**c** Benader de integraal in twee decimalen.




**T2** Primitiveer.

**a** $f(x) = 3x^5 + 8x - 4$

**b** $f(x) = 9\sqrt{3x + 5} - \dfrac{8}{\sqrt{4x + 3}}$

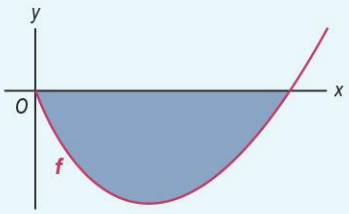
**c** $f(x) = 6x\sqrt[5]{x^2} - 4x$

**d** $f(x) = \dfrac{3}{4x^4} - \dfrac{6}{5x^2}$

**e** $f(x) = \dfrac{x^2 + 6}{x^2}$

**f** $f(x) = \dfrac{28}{(7x - 3)^3}$

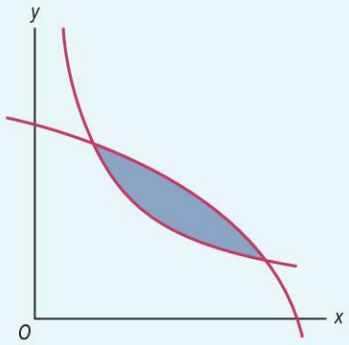
**T3** Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{x} - 3x$.
Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van $f$ en de $x$-as.




**T4** Gegeven zijn de functies $f(x) = \dfrac{6}{x + \sqrt{x}}$ en $g(x) = 1 + {}^2\log(5 - x)$.

**a** Laat met een berekening zien dat de grafieken van $f$ en $g$ elkaar snijden voor $x = 1$ en voor $x = 4$.

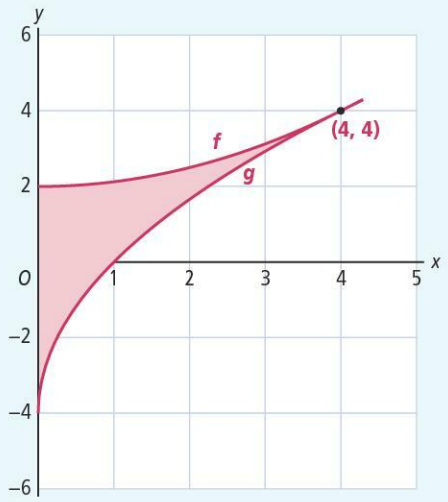
**b** De grafieken van $f$ en $g$ sluiten een gebied in.
Benader de oppervlakte van het gebied in twee decimalen.





© Noordhoff Uitgevers bv

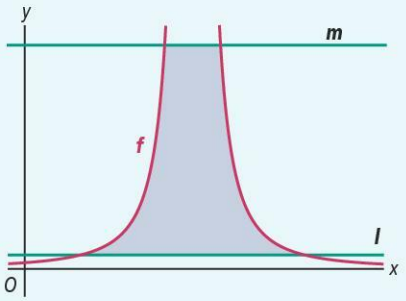
**T5** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{8}x^2 + 2$ en $g(x) = 4\sqrt{x} - 4$.
De grafieken van $f$ en $g$ raken elkaar in het punt (4, 4).
Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door beide grafieken en de $y$-as.




**T6** Gegeven zijn de functie $f(x) = \dfrac{2}{(3 - \frac{1}{2}x)^2}$ en de lijnen $l$: $y = \frac{1}{2}$ en $m$: $y = 8$.

**a** Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van $l$ en $m$ met de grafiek van $f$.

**b** Bereken exact de oppervlakte van het gebied begrensd door de grafiek van $f$ en de lijnen $l$ en $m$.

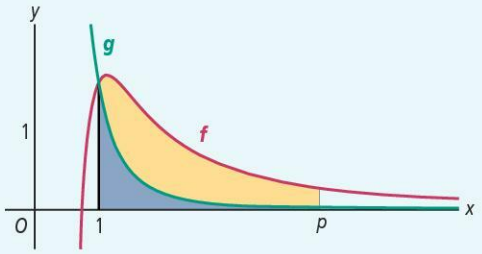



**T7** Gegeven zijn de functies $f(x) = \dfrac{8x - 6}{x^3}$ en $g(x) = \dfrac{2}{x^2}$

**a** Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van $f$ en $g$.

**b** Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door beide grafieken en de lijn $x = 4$.

**c** Het gebied begrensd door de grafiek van $f$, de $x$-as en de lijnen $x = 1$ en $x = p$ met $p > 1$, wordt door de grafiek van $g$ verdeeld in twee delen met gelijke oppervlakte. Bereken $p$ exact.



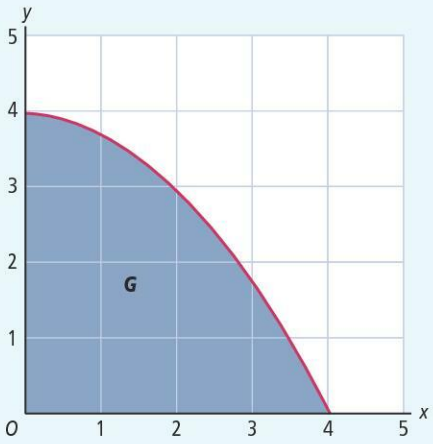

© Noordhoff Uitgevers bv

### Je kunt de oppervlakte van een gebied onder een grafiek benaderen.

**E1** Gegeven is de functie $f(x) = 4 - \frac{1}{4}x^2$. $G$ is het gebied ingesloten door de grafiek van $f$, de $x$-as en de $y$-as.

**a** Bereken exact een Riemann-som van $f$ op het interval $[0, 4]$. Neem $\Delta x = 1$.

**b** Bereken exact de oppervlakte van $G$.




### Je kunt een integraal gebruiken om een oppervlakte te berekenen.

**E2** $G$ is het gebied onder de grafiek van $f(x) = 2x + 3$ op het interval $[-1, 4]$.

**a** Schrijf de oppervlakte van $G$ met een integraal.

**b** Bereken meetkundig de oppervlakte van $G$.

**c** Controleer je antwoord op opdracht b door de integraal te berekenen.

### Je kunt een integraal exact berekenen.

**E3** $H$ is het gebied onder de grafiek van $f(x) = 8x - 2x^2$ op het interval $[1, 4]$.
Bereken exact de oppervlakte van $H$.

### Je kunt een primitieve van een machtsfunctie opstellen.

**E4** Primitiveer.

**a** $f(x) = x^{19}$

**b** $f(x) = x^3\sqrt[3]{x^2}$

**c** $f(x) = \dfrac{1}{x^{19}}$

**d** $f(x) = \dfrac{1}{x^3\sqrt[3]{x^2}}$

### Je kunt een somfunctie primitiveren en integreren.

**E5** Primitiveer.

**a** $f(x) = (x + 1)(x - 5)$

**b** $f(x) = 6x(x + \sqrt{x})$

**c** $f(x) = \dfrac{x^2 - 13x - 30}{x^4}$

**d** $f(x) = \dfrac{x^2 - 13x + 30}{\sqrt{x}}$


© Noordhoff Uitgevers bv

**Je kunt een functie van de vorm $f(x) = (ax + b)^n$ primitiveren.**

**E6** Primitiveer.

**a** $f(x) = (3x + 2)^4$ **b** $f(x) = \dfrac{2}{(5x - 3)^3}$

**Je kunt exact de oppervlakte berekenen van een gebied dat onder de $x$-as ligt.**

**E7** Gegeven is de functie $f(x) = x - 3\sqrt{x}$.

**a** Plot en schets de grafiek van $f$.

**b** Bereken exact de nulpunten van $f$.

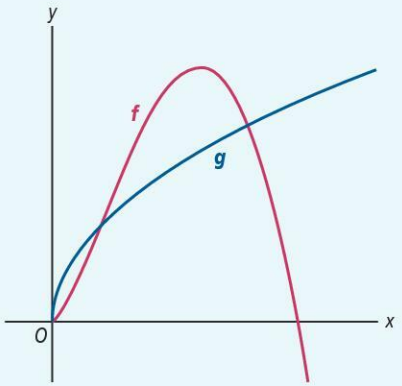
**c** Bereken exact de oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van $f$ en de $x$-as.

**Je kunt exact de oppervlakte berekenen van een gebied ingesloten door twee grafieken.**

**E8** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}(5x - x^2)\sqrt{x}$ en $g(x) = 2\sqrt{x}$.

**a** Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken.

**b** Bereken exact de oppervlakte van elk van de twee gebieden, ingesloten door de twee grafieken.

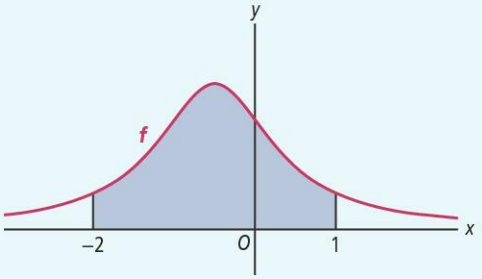



**E9** Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$

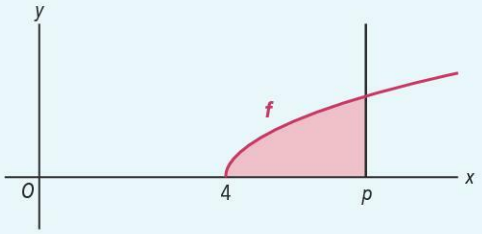
$G$ is het gebied begrensd door de grafiek van $f$, de $x$-as en de lijnen $x = -2$ en $x = 1$.

**a** Stel een integraal op om de oppervlakte $G$ te berekenen.

**b** Bereken de integraal in twee decimalen.




**E10** Gegeven is functie $f(x) = \sqrt{x - 4}$. De oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van $f$ en de lijn $x = p$ met $p > 4$, is gelijk aan $2\sqrt{3}$.
Bereken $p$.

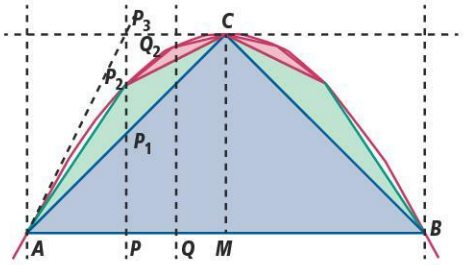



© Noordhoff Uitgevers bv

## Oppervlakte onder een parabool

In 1906 werd in een klooster te Constantinopel een brief gevonden van Archimedes (287-212 v.Chr.) aan Eratosthenes (276-194 v.Chr.). Archimedes schrijft daarin onder meer dat *een segment van een parabool 4/3 is van de driehoek, die dezelfde grondlijn en dezelfde hoogte heeft.*
Archimedes introduceerde hiermee de zogenaamde uitputtingsmethode voor het berekenen van de oppervlakte onder de boog van een parabool.
Anders dan bij de Riemann-som waarbij rechthoekjes worden gebruikt, wordt hier de oppervlakte opgevuld met driehoekjes.

Je gaat onderzoeken of de bewering van Archimedes klopt.
Van parabool $p$ ligt de top in $C$, is lijn $CM$ de symmetrieas en is punt $P$ het midden van lijnstuk $AM$. De lijn $PP_3$ snijdt lijnstuk $AC$ in punt $P_1$ en $p$ in $P_2$.
Dan is $P_1$ het midden van lijnstuk $PP_3$, vanwege gelijkvormige driehoeken. Ook blijkt $P_2$ het midden van lijnstuk $P_1P_3$ te zijn, wat je kunt nagaan met een berekening.
Dan gelden de volgende beweringen:




$opp\,\triangle P_1P_2C = \frac{1}{2}\ opp\,\triangle P_1P_3C$ (halve basis)

$opp\,\triangle AP_1P_2 = \frac{1}{2}\ opp\,\triangle AP_1P_3 = \frac{1}{2}\ opp\,\triangle APP_1$ (idem)

$opp\,\triangle APP_1 = \frac{1}{4}\ \triangle AMC$ (gelijkvormigheid)

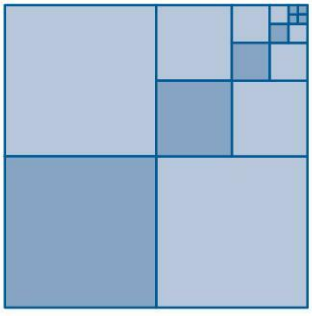
### Opdracht

Noem $D$ de oppervlakte van driehoek $ABC$.
Volgens Archimedes is de oppervlakte onder de parabool $\frac{4}{3}D$.

**a** Laat zien dat geldt $opp\,\triangle ACP_2 = \frac{1}{8}\ opp\,\triangle ABC$.

**b** Op dezelfde manier vind je dat $opp\ \triangle P_2CQ_2 = \frac{1}{8}\ opp\ \triangle ACP_2$.
Leg uit dat de oppervlakte ingesloten door de parabool en het lijnstuk $AB$ geschreven kan worden als

$D + 2 \cdot \frac{1}{8}D + 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}D + \ldots$



**c** Laat met de figuur zien dat $\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots = \frac{1}{3}$.

**d** Laat zien dat $D + 2 \cdot \frac{1}{8}D + 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}D + \ldots = \frac{4}{3}D$.

**e** Kies bij de parabool de functie $f(x) = k^2 - x^2$.
Om te laten zien dat $P_2$ het midden van lijnstuk $P_1P_3$ is, vul je $x = -\frac{1}{2}k$ in. Druk $P_2P_3$ uit in $k$.

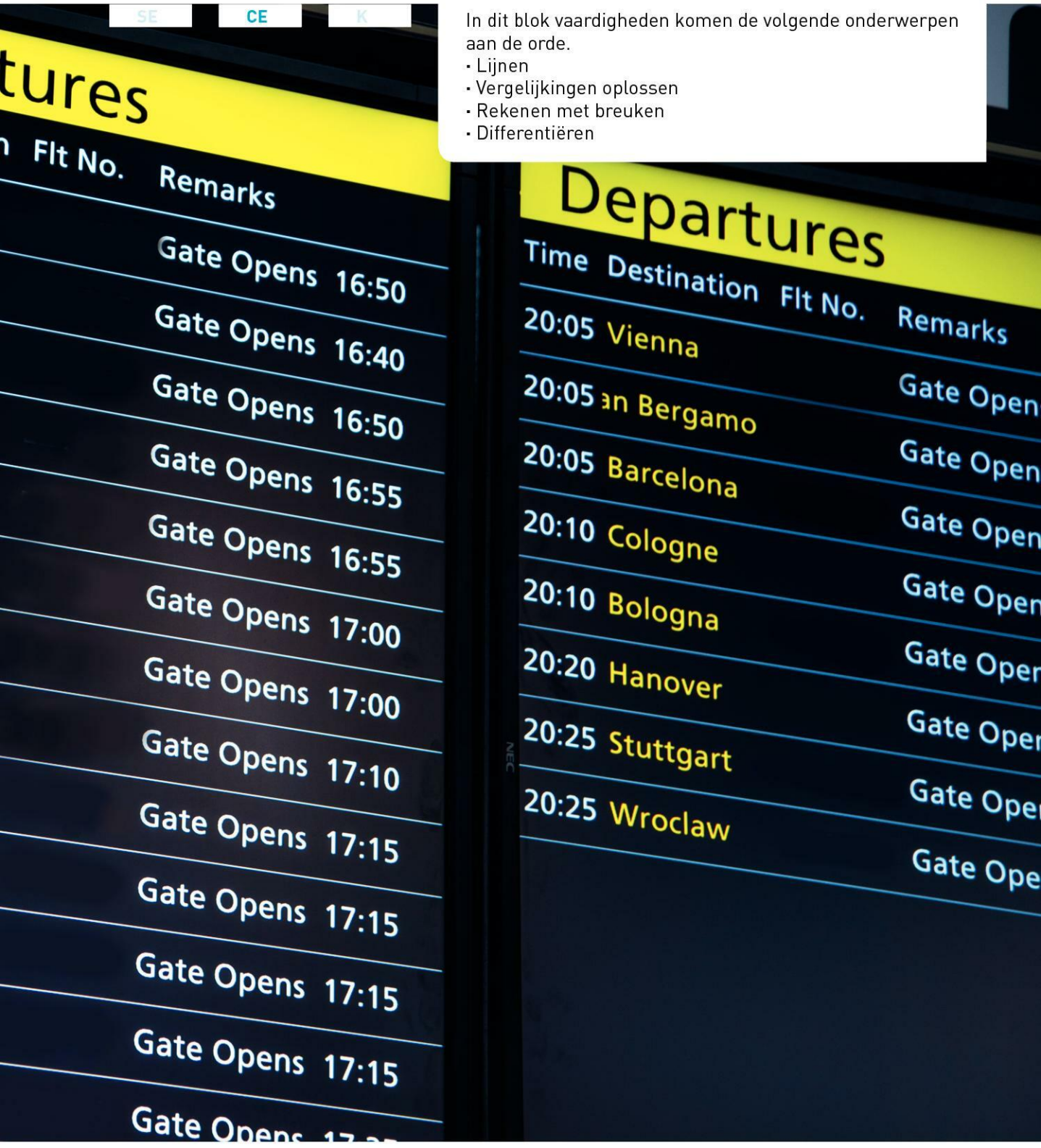
**f** Druk $opp\,\triangle ABC$ uit in $k$ en bereken $\int_{-k}^{k} f(x)\mathrm{d}x$.
Formuleer je conclusie.


© Noordhoff Uitgevers bv

# Vaardigheden 6

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Lijnen
- Vergelijkingen oplossen
- Rekenen met breuken
- Differentiëren




© Noordhoff Uitgevers bv

## Lijnen

**Theorie**

Een vergelijking van een lijn kun je op verschillende manieren weergeven.

- Een vergelijking van een lijn kun je schrijven als $ax + by = c$.
- Als de lijn niet evenwijdig is aan de verticale as, kun je de vergelijking ook schrijven als $y = mx + n$.
- Als een lijn de assen snijdt in $(p, 0)$ en $(0, q)$ met $p \neq 0$ én $q \neq 0$, dan kun je de vergelijking schrijven als $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

**Voorbeeld**

Lijn $l$ snijdt de assen in $(-4, 0)$ en $(0, 8)$. Geef een vergelijking van $l$ in de vorm $y = mx + n$.

**Oplossing**

Er geldt $l$: $\frac{x}{-4} + \frac{y}{8} = 1$.

Links en rechts vermenigvuldigen met 8 geeft $-2x + y = 8$, dus $y = 2x + 8$.

**1**

**a** Schrijf $y = \frac{3}{4}x - 5$ in de vorm $ax + by = c$.

**b** Schrijf $y = -1\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$ in de vorm $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

**c** Schrijf $\frac{x}{-5} + \frac{y}{4} = 1$ in de vorm $y = mx + n$.

**2** Geef de drie vormen van een vergelijking van een lijn door elk van de tweetallen punten.

**a** $(5, 0)$ en $(0, 20)$

**b** $(-1, 8)$ en $(1, 4)$

**c** $(-3, 0)$ en $(2, 25)$

**d** $(-2, -6)$ en $(5, -27)$

**3** Gegeven zijn de lijnen $m$: $y = 2x + 1$ en $n$: $3y + x = -11$.

**a** Schrijf een vergelijking van lijn $n$ in de vorm $y = ax + b$.

**b** Teken de lijnen $m$ en $n$ in één assenstelsel.

**c** Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van $m$ en $n$.

**4** Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de paren lijnen.

**a** $2x - \frac{1}{3}y = 2\frac{2}{3}$ en $3y + 4\frac{1}{2}x = 9$

**b** $\frac{y}{2} - \frac{x}{5} = 1$ en $6y + 10x = 3$

**Theorie**

Als twee lijnen $k$ en $l$ met richtingscoëfficiënten $m_1$ en $m_2$ loodrecht op elkaar staan, dan geldt $m_1 \cdot m_2 = -1$.
Het omgekeerde geldt ook: als voor twee lijnen $k$ en $l$ met richtingscoëfficiënten $m_1$ en $m_2$ geldt $m_1 \cdot m_2 = -1$, dan staan $k$ en $l$ loodrecht op elkaar.

**Voorbeeld**

Bereken de richtingscoëfficiënt van de lijn die loodrecht staat op $l$: $2x + 3y = 5$.

**Oplossing**

De richtingscoëfficiënt van $l$ is $-\frac{2}{3}$ dus de gevraagde richtingscoëfficiënt is $\frac{3}{2}$, want $-\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = -1$.


© Noordhoff Uitgevers bv

**5** **a** Gegeven zijn lijn $l$: $x + y = 3$ en punt $P(-1, 2)$.
Toon aan dat de lijn met vergelijking $y = x + 3$ door punt $P$ gaat en loodrecht op $l$ staat.

**b** Op lijn $m$: $3x - \frac{1}{4}y = 1$ liggen de punten $Q(3, 32)$ en $R(-1, 16)$.
Stel een vergelijking op van de lijn door het midden van lijnstuk $QR$ loodrecht op $m$.

**6** **a** Gegeven zijn lijn $l$: $4x - 2y = 3$ en punt $P(-3, 1)$.
Stel een vergelijking op van loodlijn $n$ door punt $P$ op lijn $l$.

**b** Gegeven zijn lijn $m$: $\frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = 1$ en punt $Q(5, 3)$.
Stel een vergelijking op van de lijn $n$ door punt $Q$ die loodrecht staat op lijn $m$.

### Vergelijkingen oplossen

**7** Los exact op.

**a** $\sqrt{x+2} = x$

**b** $\sqrt{x+2} = x - 4$

**c** $\frac{3\sqrt{x}}{2} = x$

**d** $3\sqrt{x} - x = 2$

**e** $3\sqrt{x+2} - 2 = -x$

**f** $\frac{5}{2\sqrt{x}} = 3x$

**8** Los exact op.

**a** $\frac{2x}{x+1} = \frac{1}{6x}$

**b** $\frac{x^2+1}{x^2-1} = 5$

**c** $\frac{2}{x-1} = \frac{4x}{x+2}$

**d** $\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 3$

**e** $\frac{2^x - 3}{2^x + 1} = \frac{-1}{2^x}$

**f** $\frac{3-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}} + 1 = 0$

**9** Los exact op.

**a** $3x^4 - 6x^3 = 9x^2$

**b** $(2 \cdot {}^2\log(x) + 3)^2 = 25$

**c** $(3x + 7)(2x - 1) = -12$

**d** $3^{2x-1} = 81$

**e** $3x^2 - 7x < 10$

**f** $x^2 \geq 20 - x^4$

**g** $x\sqrt{x} - 7\sqrt{x} \geq 0$

**h** $2x - 28 \leq \sqrt{x}$

© Noordhoff Uitgevers bv

## Rekenen met breuken

**Theorie**

Breuken kun je bij elkaar optellen en van elkaar aftrekken als ze gelijknamig zijn. Bij ongelijknamige breuken maak je eerst de noemers gelijk: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$

Breuken kun je met elkaar vermenigvuldigen door de tellers met elkaar te vermenigvuldigen en de noemers met elkaar te vermenigvuldigen: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

Bij het vereenvoudigen van breuken kun je de teller en de noemer met hetzelfde getal vermenigvuldigen of door hetzelfde getal delen.

**Voorbeeld**

Herleid tot één breuk: $\frac{x}{x+2}+\frac{2x}{x-1}$

**Oplossing**

Als je de breuken gelijknamig maakt, wordt de noemer $(x+2)(x-1)$.

$\frac{x}{x+2}+\frac{2x}{x-1}=$

$\frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)}+\frac{2x(x+2)}{(x+2)(x-1)}=$

$\frac{x(x-1)+2x(x+2)}{(x+2)(x-1)}=\frac{3x^2+3x}{(x+2)(x-1)}$

**10** Herleid tot één breuk.

**a** $\frac{x+2}{x^2}+\frac{2}{x-1}$

**b** $\frac{x-1}{x+4}-\frac{x+4}{x-1}$

**c** $\frac{1}{2x-1}+\frac{2x+1}{x+1}$

**d** $\frac{-x^3}{2x-1}+\frac{2x^2+1}{4}$

**11** Herleid tot één breuk.

**a** $\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}-\frac{4}{x^4}$

**b** $\frac{-x}{x-2}+3$

**c** $\frac{x}{x+1}-x$

**d** $\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

**12** Schrijf als één breuk en vereenvoudig zoveel mogelijk.

**a** $\frac{-2x^2}{5}\cdot\frac{10}{3x}$

**b** $\frac{5}{3x}\cdot-\frac{1}{3}x$

**c** $3x\cdot\frac{-2}{x}\cdot-\frac{3}{4}$

**d** $-x^2\cdot\frac{-1}{x^3}$

**13** Schrijf zonder haakjes en vereenvoudig zoveel mogelijk.

**a** $y=\left(2x-\frac{1}{x}\right)^2$

**b** $y=-2x^3\left(\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x}-1\right)$

**c** $y=\frac{1}{3}x\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\right)$

**d** $y=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)$


© Noordhoff Uitgevers bv

## Differentiëren

**Theorie**

Regels voor het differentiëren van functies:

$f(x) = x^a$ $\quad f'(x) = a \cdot x^{a-1}$

$g(x) = f(x) + c$ $\quad g'(x) = f'(x)$

$g(x) = c \cdot f(x) g'(x) = c \cdot f'(x)$

$s(x) = f(x) + g(x)$ $\quad s'(x) = f'(x) + g'(x)$

De kettingregel:

$k(x) = g(f(x))$ $\quad k'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

**Voorbeeld**

Differentieer $f(x) = (4x^2 - 7)^3$ en $g(x) = \sqrt{8 - 4x}$.

**Oplossing**

$f'(x) = 3(4x^2 - 7)^2 \cdot 8x$ ofwel

$f'(x) = 24x(4x^2 - 7)^2$

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{8 - 4x}} \cdot -4$ ofwel

$g'(x) = \frac{-2}{\sqrt{8 - 4x}}$

**14** Differentieer.

**a** $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 - x + 8$

**b** $M(a) = 4 + a - \sqrt{6 - a}$

**c** $f(x) = (5x^4 - 9x)^3$

**d** $q(x) = \frac{1}{6 + 7x}$

**e** $l(s) = s^3(s^2 + 4)$

**f** $w(p) = p^2\sqrt{p}$

**g** $V(p) = 4\sqrt{6p + 8}$

**h** $B(u) = \frac{6}{u} - \frac{1}{u^6} - 6u$

**15** Bereken exact de helling van de grafiek in het gegeven punt.

**a** $f(x) = 5\sqrt{4x - 11}$ in (5, 15)

**b** $g(x) = \frac{36}{x^2}$ in (−2, 9)

**c** $h(x) = x^2\sqrt{x}$ in (4, 32)

**d** $k(x) = \frac{4}{3x + 2}$ in (−1, −4)

**16** Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van de functie.

**a** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2 - 7\frac{1}{2}x$ in het punt (3, 9)

**b** $g(x) = \frac{5x^3 + 1}{x^2}$ in het punt $\left(\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}\right)$

**c** $h(x) = 3x - 1 + \sqrt{6x + 3}$ in het punt (1, 5)

**17** Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = 8x^3 - 6x^2 + a$.
Bereken exact voor welke waarden van $a$ de grafiek van $f_a$ de $x$-as raakt.

**18** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$ en $g_a(x) = 3x + a$.
Voor welke waarden van $a$ raakt de grafiek van $g_a$ de grafiek van $f$? Geef voor die waarden van $a$ ook de coördinaten van het raakpunt.

© Noordhoff Uitgevers bv

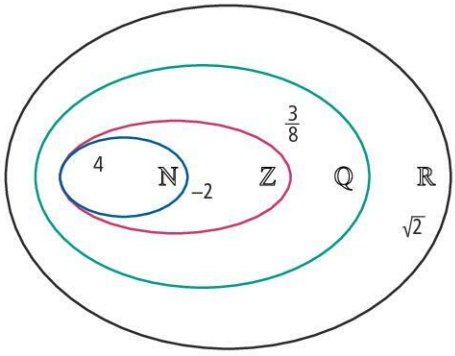
© Noordhoff Uitgevers bv

# Keuzeonderwerpen

SE CE K

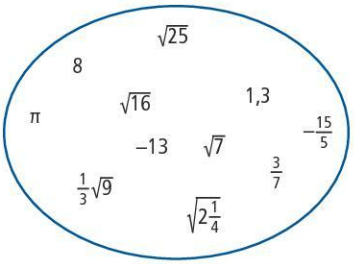
## Keuzehoofdstuk Getaltheorie

Een tak van de wiskunde die zich alleen bezig houdt met gehele getallen is de getaltheorie. Binnen dit gebied worden de eigenschappen van gehele getallen onderzocht, zoals deelbaarheid en het voorkomen van priemgetallen. Deze kennis wordt gebruikt om problemen op te lossen waarvan de uitkomsten alleen gehele getallen kunnen zijn. Verder is de getaltheorie van groot belang voor het ontwikkelen van allerlei vormen van digitale beveiliging en codering.




© Noordhoff Uitgevers bv

**1** In de figuur zie je enkele getallen.




**a** Welke getallen zijn gehele getallen of te schrijven als een geheel getal?

**b** Welke getallen zijn breuken of te schrijven als een breuk?

**2** De getallen 0, 1, 2, 3, … heten *natuurlijke getallen.*
De getallen …, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, … heten *gehele getallen.*

**a** Is de som of het product van twee natuurlijke getallen altijd een natuurlijk getal?

**b** Is het verschil of het quotiënt van twee natuurlijke getallen altijd een natuurlijk getal?

**c** Onderzoek of de som, het verschil, het product en het quotiënt van twee gehele getallen weer een geheel getal is.

De natuurlijke getallen zijn telgetallen: 1, 2, 3, ...

De Babyloniërs gebruikten vanaf ca. 450 v.Chr. het teken 'nul' als plaatsvervangend teken voor bijvoorbeeld *geen honderdtallen*. Zij beschouwden nul zelf echter niet als een natuurlijk getal.

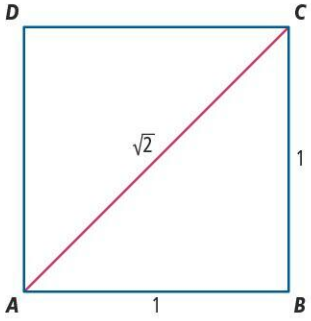
Pas in de 19e eeuw definieert de Italiaanse wiskundige Giuseppe Peano (1858 – 1932) nul als een natuurlijk getal.

**3** Omdat de bewerking *aftrekken* in de verzameling van de natuurlijke getallen niet altijd een natuurlijk getal oplevert, is die verzameling uitgebreid met negatieve getallen. Zo ontstond de verzameling van de gehele getallen.

**a** Welke bewerking veroorzaakte problemen binnen de verzameling van de gehele getallen, waardoor de uitbreiding met gebroken getallen noodzakelijk werd?

**b** Getallen die als breuk te schrijven zijn, heten *rationale getallen* (ratio (Latijn of Engels) = verhouding).
Noem een bewerking binnen de verzameling van de rationale getallen waarvan de uitkomst niet altijd een rationaal getal is.

**4** Een lijnstuk met lengte $\sqrt{2}$ kun je construeren. In deze opdracht bewijs je dat je $\sqrt{2}$ niet als breuk kunt schrijven, dus dat $\sqrt{2}$ geen rationaal getal is.




**a** Veronderstel dat je $\sqrt{2}$ wel als een breuk kunt schrijven dus $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, waarbij de breuk *zo ver mogelijk vereenvoudigd is*.

Leg uit dat uit $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ volgt dat $a^2 = 2b^2$.

**b** Waarom volgt uit $a^2 = 2b^2$ dat $a$ deelbaar is door 2?

**c** Schrijf nu $a = 2c$. Laat zien dat hieruit volgt dat $b^2 = 2c^2$.

**d** Waarom volgt uit $b^2 = 2c^2$ dat $b$ deelbaar is door 2?

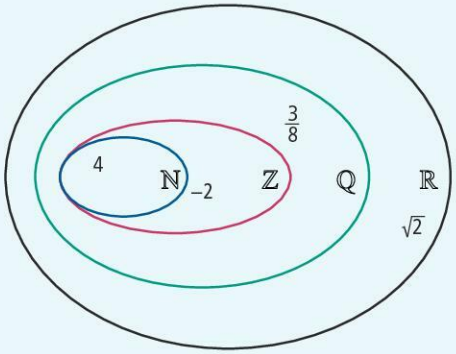
**e** Welke tegenspraak heb je nu gevonden?


© Noordhoff Uitgevers bv

**Theorie**

De getallen 0, 1, 2, 3, 4, … vormen de verzameling **natuurlijke getallen** $\mathbb{N}$.
De getallen …, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, … vormen de verzameling van de **gehele getallen** $\mathbb{Z}$.
Getallen die als breuk zijn te schrijven vormen de verzameling van **rationale getallen** $\mathbb{Q}$.

Getallen zoals $\sqrt{2}$ en $\pi$ kun je niet als een breuk schrijven. Zulke getallen heten **irrationale getallen**. De irrationale getallen en de rationale getallen vormen samen de verzameling van de **reële getallen** $\mathbb{R}$.
Met de symbolen $\in$ en $\notin$ geef je aan of een getal wel of niet tot een verzameling behoort.
$3 \in \mathbb{N}$ spreek je uit als '3 is een element van $\mathbb{N}$'.




**5** Vul in: $\in$ of $\notin$

**a** $\frac{126}{3}$ … $\mathbb{N}$
**b** $-\frac{15}{5}$ … $\mathbb{N}$
**c** $-\frac{135}{18}$ … $\mathbb{Z}$
**d** $-\sqrt{64}$ … $\mathbb{Z}$
**e** $\sqrt{12{,}25}$ … $\mathbb{Q}$
**f** 4,5 … $\mathbb{Q}$

**6** Gehele getallen kun je ook als breuk schrijven. Zo kun je 3 schrijven als $\frac{3}{1}$, $\frac{6}{2}$ of $\frac{-60}{-20}$. Gehele getallen zijn dus ook rationale getallen.
Schrijf de getallen 7; −5; 0,2 en 1,5 als breuk. Geef steeds drie mogelijkheden.

**7** Als je de plaats van een breuk op de getallenlijn wilt aangeven, is het handig de decimale schrijfwijze te gebruiken. Zo is $\frac{3}{8} = 0{,}375$.
Schrijf $a = \frac{17}{40}$, $b = \frac{5}{6}$, $c = \frac{13}{27}$, en $d = \frac{3}{125}$ als decimaal getal.

**8** Bij de uitkomsten van de vorige opdracht zie je dat de decimale schrijfwijze afbreekt of repeterend is.
**a** De repeterende decimale breuk 0,324324324… kun je als breuk schrijven.
Maak de berekening op het blaadje af.
**b** Als je 0,181818… als breuk wilt schrijven is het niet handig om in je berekening $1000x$ te gebruiken. Leg uit waarom niet.
**c** Welke breuk hoort er bij 0,181818…?
**d** Maak met een soortgelijke berekening duidelijk dat 0,999 999… = 1.

Stel 0,324324324… gelijk aan x.
Het repeterende deel is 324.
Dan is $1000x = 324{,}324324\ldots$
Hieruit volgt
$1000x = 324{,}324324\ldots$
$x = \quad 0{,}324324\ldots$ −
$999x = \ldots$
dus $x = \frac{\ldots}{999} = \frac{\ldots}{\ldots}$

© Noordhoff Uitgevers bv

**9** Gegeven zijn de getallen 13, 15, 17, 19, 21, 23.
Welke getallen zijn alleen deelbaar door 1 en door het getal zelf?

**Theorie**

Een natuurlijk getal $a$ ($a > 0$) heet een **deler** van een geheel getal $b$ als er een geheel getal $k$ bestaat zo dat $b = k \cdot a$.
Een **priemgetal** is een geheel getal, groter dan 1, dat precies twee delers heeft. Een geheel getal dat geen priemgetal is, heet **samengesteld**. Een samengesteld getal is te ontbinden in factoren, die priem zijn, de **priemontbinding** van dat getal.

**Voorbeeld**

Schrijf de priemontbinding op van 60.

**Oplossing**

| | 60 |
|---|---|
| 2 | 30 |
| 2 | 15 |
| 3 | 5 |
| 5 | 1 |

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$

**10** Gegeven zijn de getallen 25, 29, 31, 33, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 57, 59, 61, 67.
- **a** Welke van deze getallen zijn priemgetallen?
- **b** Schrijf de volgende vier priemgetallen op.
- **c** Is 999 een samengesteld getal? Zo ja, geef dan de priemontbinding.

**11** Geef de priemontbinding van 168 en van 675.

**12** Eén van de oudste methoden om priemgetallen te zoeken is de *zeef van Eratosthenes* (± 200 v. Chr.). Die werkt zo: schrijf de getallen 2 tot en met 100 op. Kleur het vakje van 2 niet, maar kleur de vakjes van de getallen die een veelvoud van 2 zijn. Dat zijn geen priemgetallen zijn, want ze zijn deelbaar door 2.
- **a** Kleur 3 niet en kleur de vakjes van de getallen die een veelvoud zijn van 3 en nog niet gekleurd zijn.
- **b** Werk ook de veelvouden van 5, 7, 11, … weg.
- **c** Schrijf de overgebleven getallen op.
- **d** Controleer je antwoord van opdracht c met de lijst in de samenvatting.

| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

**13** Een priemtweeling is een tweetal priemgetallen waarvan het verschil precies 2 is, bijvoorbeeld 11 en 13.
Schrijf alle priemtweelingen kleiner dan 100 op.

**14** Bij de zoektocht naar priemgetallen groter dan 2 zijn de volgende beweringen gedaan. Helaas zijn de beweringen niet waar. Zoek een tegenvoorbeeld.
- **a** Van drie opeenvolgende oneven natuurlijke getallen zijn er precies twee priem.
- **b** Van drie opeenvolgende oneven natuurlijke getallen is er minstens één priem.


© Noordhoff Uitgevers bv

**15** Als je een natuurlijk getal $p$ door 6 deelt, dan kun je als rest 0, 1, 2, 3, 4 of 5 krijgen. Je kunt $p$ dan schrijven als $p = 6 \cdot v$, $p = 6 \cdot v + 1$, $p = 6 \cdot v + 2$, $p = 6 \cdot v + 3$, $p = 6 \cdot v + 4$ of $p = 6 \cdot v + 5$ met $v \in \mathbb{N}$.

**a** Waarom staat $p = 6 \cdot v + 6$ of $p = 6 \cdot v + 7$ er niet bij?

**b** Leg uit dat $p = 6 \cdot v$ geen priemgetal is.

**c** $p = 6 \cdot v + 1$ sla je even over. Je onderzoekt $p = 6 \cdot v + 2$.
Kan dit een priemgetal zijn? Licht je antwoord toe.

**d** Vervolgens is $p = 6 \cdot v + 3$ aan de beurt.
Kan dit een priemgetal zijn? Licht je antwoord toe.

**e** Onderzoek op dezelfde wijze de andere mogelijkheden en formuleer een vermoeden.

**16** De Franse priester en wiskundige Marin Mersenne (1588-1648) onderzocht of getallen van de vorm $2^n - 1$ priemgetallen zijn.

**a** In de tabel staan de eerste twee Mersenne-priemgetallen.
Bereken voor $n = 4$ tot en met $n = 10$ de uitkomst van $2^n - 1$. Zijn het priemgetallen?

**b** Voor $n = 11$ is $2^n - 1$ deelbaar door 23.
Bereken de andere factor.

**c** Laat zien dat $2^n - 1$ altijd te ontbinden is in twee factoren als $n$ een even getal is groter dan 2.

| $n$ | 2 | 3 |
|---|---|---|
| $2^n - 1$ priem? | $2^2 - 1 = 3$ ja | $2^3 - 1 = 7$ ja |

Op 26 december 2017 is er een nieuw Mersenne priemgetal gevonden door de Great Internet Mersenne Prime Search.
Het getal is $2^{77\,232\,917} - 1$
en bestaat uit 23 249 425 cijfers.

**17** De Franse wiskundige Pierre de Fermat (1601-1665) dacht dat alle getallen van de vorm $F_n = 2^{2^n} + 1$ priemgetallen zijn. Hieronder wordt beschreven hoe zo'n vermoeden ontstaat.

**a** Bereken de getallen van het type $2^a + 1$.
Als het getal samengesteld is, dan geef je een ontbinding in priemfactoren.
Vul de tabel verder in.

**b** Welke waarden van $a$ leveren priemgetallen op?

**c** Geef een formule voor deze waarden van $a$.

**d** Euler (1707-1783) ontdekte dat niet alle Fermat-getallen $F_n = 2^{2^n} + 1$ priemgetallen zijn.

Controleer dat $F_5 = 2^{2^5} + 1$ deelbaar is door 641 en geef de andere factor.

| $a$ | $2^a + 1$ | ontbinding |
|---|---|---|
| 1 | 3 | priem |
| 2 | 5 | priem |
| 3 | 9 | $3 \times 3$ |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | 65 | $5 \times 13$ |
| 7 | | |
| 8 | | |
| 9 | | |
| … | | |
| 16 | 65 537 | priem |

© Noordhoff Uitgevers bv

**18** **a** Schrijf 255 als product van twee factoren uit $\mathbb{N}$.
**b** Op hoeveel manieren kan dat?

**19** **a** Laat zien dat 13 een deler is van 1001.
**b** Geef alle delers van 1001.

**20** Kies drie cijfers $a$, $b$ en $c$ uit de getallen uit 1, 2, 3, …, 9 en vorm daarmee het getal $abcabc$.
**a** Is je getal deelbaar door 7, 11 en 13?
**b** Het getal $abcabc$ is te schrijven is als $1000 \cdot abc + abc$.
Toon aan dat $abcabc$ altijd deelbaar door is 7, 11 en 13.

**21** Bereken het kleinste positieve natuurlijke getal dat 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 en 10 als delers heeft.

**22** De regel van 9 zegt: een getal is deelbaar door 9 als de som van de cijfers deelbaar is door 9 (de zogenaamde negenproef).
**a** Controleer door de deling uit te voeren dat 7965 deelbaar is door 9.
**b** Tel de cijfers op: 7 + 9 + 6 + 5.
Is de uitkomst deelbaar door 9?
**c** Er is een begin gemaakt om de regel te verklaren.
Vul de stappen aan.

Schrijf 7965 als
$7 \times 1000 + 9 \times 100 + 6 \times 10 + 5$
Bedenk dat $10 = 9 + 1$, $100 = 99 + 1$ en $1000 = \ldots$

$7965 = 7(\ldots + 1) + 9(99 + 1) + \ldots + \ldots$
$= 7 \times 999 + 7 \times 1 + 9 \times 99 + \ldots$
$= 7 \times 999 + 9 \times 99 + \ldots + 7 + 9 + 6 + 5$
$= 9(\ldots) + 7 + 9 + 6 + 5$

**23** Een andere regel zegt: een getal is deelbaar door 3 als de som van de cijfers deelbaar is door 3.
**a** Controleer door de deling uit te voeren dat 8142 deelbaar is door 3.
**b** Tel de cijfers op: 8 + 1 + 4 + 2.
Is de uitkomst deelbaar door 3?
**c** Gebruik de methode van de vorige opdracht om aan te tonen dat deze regel klopt.

**24** Gegeven zijn de getallen $a = 2367$, $b = 54\,321$, $c = 246\,834$, $d = 11\,111\,112$, $e = 4512$ en $f = 47\,672$.
**a** Welke van deze getallen zijn deelbaar door 3?
**b** Welke getallen zijn ook deelbaar door 9?

**25** **a** Schrijf alle delers op van 40.
**b** Schrijf alle delers op van 60.
**c** Geef alle getallen die zowel deler zijn van 40 als van 60.
**d** Welke is de grootste gemeenschappelijke deler?


© Noordhoff Uitgevers bv

**26** Veelvouden van 40 zijn 40, 80, 120, 160, 200, 240, …

**a** Welke getallen zijn veelvouden van 60?

**b** Geef het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van 40 en 60.

**Theorie**

Het grootste getal dat zowel een deler is van $a$ als van $b$ heet de grootste gemeenschappelijke deler van $a$ en $b$ of *ggd(a, b)*.

Het kleinste getal dat zowel een veelvoud is van $a$ als van $b$ heet het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van $a$ en $b$ of *kgv(a, b)*.

**Voorbeeld**

Bereken $kgv(28, 35)$.

**Oplossing**

Veelvouden van 28 zijn:
28, 56, 84, 112, 140, …
Veelvouden van 35 zijn:
35, 70, 105, 140, …
$kgv(28, 35) = 140$

**27** **a** Bereken $ggd(54, 63)$ en $kgv(54, 63)$.

**b** Bereken $ggd\ (60, 72)$ en $kgv(60, 72)$.

**28** Als je de *ggd* van grote getallen moet bepalen, is het handig eerst de priemontbinding op te schrijven.

**a** De priemontbinding van 168 is al gemaakt.
Maak zelf de priemontbinding van 180.

**b** Waarom bevat de *ggd* de laagste macht van 2?

**c** Maak de uitwerking af.

$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$

$180 = 2^{\cdots} \cdot \ldots \cdot \ldots$

$ggd(168,180) = 2^2 \cdot \ldots \cdot \ldots$

**29** Ook voor het *kgv* van grote getallen is het handig de priemontbinding op te schrijven.

**a** Gebruik de priemontbinding van 168 en 180 van de vorige opdracht.
Waarom bevat het *kgv* de hoogste macht van 2?

**b** Maak de uitwerking af.

**c** Bereken $ggd(660, 1008)$ en $kgv(660,1008)$.

$kgv(168, 180) = 2^3 \cdot \ldots \cdot \ldots$

**30** **a** Bereken de *ggd* en het *kgv* van $r = 345$ en $s = 531$.

**b** Bereken met het antwoord van opdracht a $ggd(r, s) \cdot kgv(r, s)$ en bereken ook $r \cdot s$.
Welk vermoeden heb je?

**c** Je gaat je vermoeden bewijzen. Er is al een begin gemaakt.
Waarom hebben $p$ en $q$ geen gemeenschappelijke delers?

**d** Leg uit dat $kgv(r, s) = p \cdot q \cdot g$.

**e** Maak nu het bewijs af.

Noem $ggd(r, s) = g$.

Schrijf $r = p \cdot g$ en $s = q \cdot g$.

Dan is $r \cdot s = \ldots$

en $kgv(r, s) = \ldots$

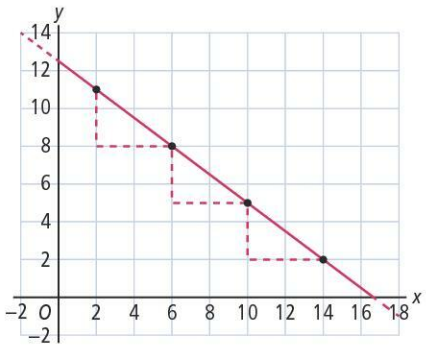
© Noordhoff Uitgevers bv

**31** Sanne gaat boeketten samenstellen uit rozen en gerbera's. Daarvoor koopt ze $x$ bossen rozen voor € 3,- per bos en $y$ bossen gerbera's voor € 4,- per bos. Ze kan € 50,- uitgeven. Alle combinaties van $x$ en $y$ die voor precies € 50,- mogelijk zijn, liggen als roosterpunten op de lijn $3x + 4y = 50$.

**a** Controleer dat (14, 2) op de lijn ligt.

**b** Leg uit dat je elke andere oplossing kunt vinden met behulp van de richtingscoëfficiënt van de lijn.

**c** Welke oplossing zal Sanne kiezen als ze wil bereiken dat het verschil tussen de aantallen bossen rozen en gerbera's zo klein mogelijk is?




**32** **a** Waarom is $6x + 3y$ met $x \in \mathbb{Z}$ en $y \in \mathbb{Z}$ altijd deelbaar door 3?

**b** Leg uit dat $4x + 2y = 5$ geen oplossing heeft met $x, y \in \mathbb{Z}$.

**c** Geef een oplossing van $15x + 12y = 3$ met $x, y \in \mathbb{Z}$.

**Theorie**

Vergelijkingen waarbij als oplossingen uitsluitend gehele getallen zijn toegestaan, heten **Diophantische vergelijkingen**. Diophantische vergelijkingen van het type $ax + by = c$ met $a, b, c \in \mathbb{Z}$ hebben alleen gehele oplossingen, als $c$ een veelvoud is van $ggd(a, b)$.

Diophantus van Alexandrië (± 250 n. Chr.) was een Griekse wiskundige. In zijn boek 'Arithmetica' behandelt hij veel verschillende vergelijkingen, waarbij alleen maar rationale oplossingen zijn toegestaan.

**33** Gegeven is de Diophantische vergelijking $12x + 27y = 51$.

**a** Controleer of 51 deelbaar is door $ggd(12, 27)$.

**b** Laat zien dat je de vergelijking kunt vereenvoudigen tot $4x + 9y = 17$.

**c** Laat zien dat $x = 2$ en $y = 1$ een oplossing is.

**d** Teken een grafiek bij de vergelijking.

**e** Gebruik de richtingscoëfficiënt van de grafiek om aan te tonen dat je elke oplossing kunt schrijven als $x = 2 + k \cdot 9$ en $y = 1 + k \cdot -4$ met $k \in \mathbb{Z}$.

**34** Bereken alle oplossingen van de Diophantische vergelijking. Controleer eerst of er een oplossing kan zijn.

**a** $500x + 750y = 2000$

**b** $5x + 7y = 4$

**c** $24x + 8y = 50$

**d** $18x + 15y = 9$


© Noordhoff Uitgevers bv

**35** Bij het oplossen van een lineaire Diophantische vergelijking is het vinden van de eerste oplossing het lastigst. Een methode om zo'n eerste oplossing te vinden is het *algoritme van Euclides*, waarmee in eerste instantie de *ggd* van twee getallen wordt berekend. Deze methode is gebaseerd op de eigenschap: *Als d een deler is van a en b, dan is d ook een deler van a − b.*
Gegeven is $a = 917$ en $b = 238$.

**a** Leg uit dat $ggd(917, 238) = ggd(917 - 238, 238) = ggd(679, 238) = ggd(441, 238)$.

**b** $917 = 3 \cdot 238 + 203$

Leg uit dat $ggd(917, 238) = ggd(203, 238) = ggd(203, 35) = ggd(35, 28) = 7$.

**c** Vul het schema in.

In schema

$917 = 3 \cdot 238 + 203$

$238 = \ldots \cdot 203 + \ldots$

$203 = \ldots \cdot \ldots + \ldots$

**36** Bereken de *ggd* met het algoritme (= rekenregel) van Euclides.

**a** 1632 en 1350
**b** 1224 en 1024
**c** 731 en 425
**d** 1234 en 432

**37** Met het algoritme van Euclides kun je een vergelijking van het type $ax + by = ggd(a, b)$ oplossen.
Gegeven is de vergelijking $917x + 238y = 7$.

**a** Uit $917 = 3 \cdot 238 + 203$ volgt $203 = 917 - 3 \cdot 238$.

Noem $917 = a$ en $238 = b$, dan is $203 = a - 3b$.

Laat zien dat uit $203 = 238 - 35$ volgt

$35 = b - (a - 3b) = 4b - a$.

**b** Toon aan dat $28 = 203 - 5 \cdot 35 = 6a - 23b$.

**c** Toon aan dat $7 = 35 - 28 = 27b - 7a$.

**d** Geef een oplossing van $917x + 238y = 7$.

**e** Toon aan dat de richtingscoëfficiënt van de lijn $917x + 238y = 7$ gelijk is aan $-\frac{131}{34}$ en geef nog twee oplossingen van de vergelijking.

In schema

| | |
|---|---|
| $917 = 3 \cdot 238 + 203$ | $203 = a - 3b$ |
| $238 = 203 + 35$ | $35 = 4b - a$ |
| $203 = 5 \cdot 35 + 28$ | $28 = 6a - 23b$ |
| $28 = 35 - 7$ | $7 = 27b - 7a$ |

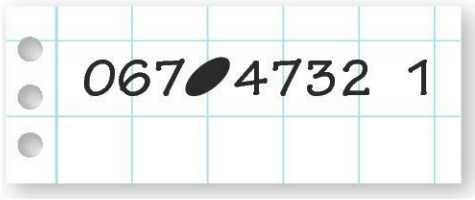
**38** Los met de werkwijze van de vorige opdracht de vergelijkingen op voor $x, y \in \mathbb{Z}$ en geef telkens drie oplossingen.

**a** $91x + 33y = 1$
**b** $91x + 33y = 5$
**c** $24x + 30y = 144$
**d** $223x + 157y = 2$

**39** Gebruik een Diophantische vergelijking om 100 te schrijven als som van een zevenvoud en een elfvoud, beide positief.

© Noordhoff Uitgevers bv

**40** Alle Nederlanders hebben een persoonlijk nummer, dat is het negencijferige burgerservicenummer (BSN). Dat nummer bestaat uit acht cijfers die het eigenlijke BSN vormen en daarna een controlecijfer ($Z$), bijvoorbeeld 06379636 3. Bij dit nummer wordt met $Z = 3$ gecontroleerd of het BSN geldig is. Van de eerste acht cijfers van het BSN wordt de *totaalsom* $T$ berekend op de volgende manier:
$T = 9 \times$ het eerste cijfer + $8 \times$ keer het tweede cijfer + $7 \times$ het derde cijfer + … + $2 \times$ het achtste cijfer.




**a** Controleer dat bij nummer 06379636 3 geldt: $T = 201$.
**b** Als het BSN geldig is, dan is $T - Z$ deelbaar door 11. Reken na dat het BSN geldig is.
**c** Onderzoek of 34546787 5 een geldig BSN is.
**d** Welk cijfer moet er op de plaats van de inktvlek om een geldig BSN te krijgen?

**41** Een getal is deelbaar door 11 als de som van de cijfers op de oneven plaatsen min de som van de cijfers op de even plaatsen deelbaar is door 11 (de zogenaamde elfproef ).

| 1 | 8 | 2 | 6 | |
|---|---|---|---|---|
| 4e | 3e | 2e | 1e | plaats |
| −1 | +8 | −2 | +6 | |

**a** Gebruik een deling om te onderzoeken of 1826 deelbaar is door 11.
**b** Bereken (6 + 8) − (2 + 1). Is de uitkomst deelbaar door 11?
**c** Er is een begin gemaakt om deze regel te verklaren. Vul de stappen aan.
**d** Is 12345678987654321 deelbaar door 11? Zo ja, voer de deling uit. Zo nee, haal één cijfer weg zodat het overblijvende getal wel deelbaar is door 11 en voer de deling uit.

1826 =
1 × 1000 + 8 × 100 + 2 × 10 + 6

Bedenk dat
10 = 11 − 1 en 100 = 9 × 11 + 1
1000 = …

**42** In het Nederlandse elektronische betalingsverkeer controleert men met een test of een rekeningnummer geldig is. Dat gaat als volgt. Het laatste cijfer van het rekeningnummer wordt met 1 vermenigvuldigd, het voorlaatste met 2, het op twee na laatste met 3, enzovoort. De producten worden bij elkaar opgeteld en de som moet deelbaar zijn door 11.
Is 73.61.60.221 een geldig rekeningnummer?


© Noordhoff Uitgevers bv

Om berichten tegen ongewenste lezers te beveiligen wordt van oudsher gebruik gemaakt van geheimschrift. Dat is een methode om een tekst te *vercijferen*.

**43** Het oudste geheimschrift werd gebruikt door Julius Caesar om berichten te sturen naar zijn generaals. Elke letter uit het bericht werd vervangen door een letter drie plaatsen verderop in het alfabet.

**a** In de tabel zie je een verschuiving over vijf plaatsen. Maak de tabel af met het gehele alfabet.

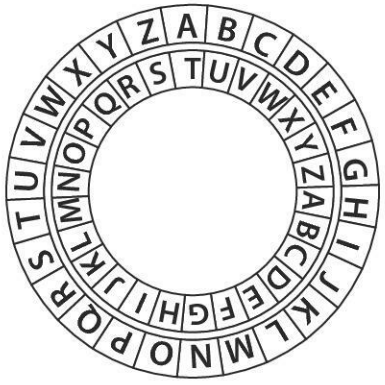
| letter | a | b | c | d | e | f | g |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| verschuiving | F | G | H | I | J | K | L |

**b** Bij verschuiving over vijf plaatsen ziet het bericht HALLO eruit als MFQQT.
Ontcijfer het bericht IJFKXUWFFPLFFYITTW bij deze verschuiving.

**c** Door de buitenste schijf te draaien krijg je de verschuiving. Over hoeveel plaatsen worden de letters op deze schijf verplaatst?

**d** Vercijfer met deze schijf het bericht naregenkomtzonneschijn.

**e** Ontcijfer het bericht:
KHHYOLIPRCHUKHHNDLPUPNHHU




**44** Een Caesarverschuiving is makkelijk te kraken. Je hoeft maar 25 verschuivingen uit te proberen. Je kunt het kraken heel wat lastiger maken door met de ontvanger een codewoord af te spreken, bijvoorbeeld ZOMERVAKANTIE. Eerst gebruik je de letters van het codewoord, daarna de overige letters.

**a** Vercijfer de zin:
zoujevanmiddagmetmijwillengamen

**b** Ontcijfer de zin:
AJZZACZZJKRBZZLCFRPNIPJZNDRD

| a | b | c | d | e | f | g | h | i | j | k | l | m |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | O | M | E | R | V | A | K | N | T | I | B | C |
| n | o | p | q | r | s | t | u | v | w | x | y | z |
| D | F | G | H | J | L | P | Q | S | U | W | X | Y |

**45** Verzin zelf een codewoord (of zin) en wissel met een klasgenoot berichten uit.

**46** Om het hackers nog moeilijker te maken kun je beurtelings gebruik maken van twee verschuivingen met twee codewoorden, hier ZOMERVAKANTIE en WISKUNDEPROEFWERK.
Je vercijfert de eerste letter van een bericht met de eerste verschuiving en de tweede letter met de tweede verschuiving, enzovoort 'hallo' wordt dan 'KWBEF'.
Vercijfer de zin die de uitkomst is van opdracht 44b opnieuw met deze twee verschuivingen.

| a | b | c | d | e | f | g | h | i | j | k | l | m |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | O | M | E | R | V | A | K | N | T | I | B | C |
| W | I | S | K | U | N | D | E | P | R | O | F | A |
| n | o | p | q | r | s | t | u | v | w | x | y | z |
| D | F | G | H | J | L | P | Q | S | U | W | X | Y |
| B | C | G | H | J | L | M | Q | T | V | X | Y | Z |

© Noordhoff Uitgevers bv

**47** Een priemgetal $p$ heet een 'Sophie Germain priemgetal' als $q = 2p + 1$ ook een priemgetal is.

**a** In de tabel hieronder staat een aantal Sophie Germain priemgetallen.
Reken de bijbehorende priemgetallen $q$ uit en vul de tabel in.

| $p$ | 2 | 3 | 5 | 11 | 23 | 41 | 53 | 83 | 89 | 113 | 131 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q$ | | | | | | | | | | | |

**b** In het rijtje Sophie Germain priemgetallen ontbreken de priemgetallen 7, 17, 37, 47, …
Je gaat uitzoeken hoe dat komt.
Controleer dat je deze getallen kunt schrijven als $p = 7 + 10v$.

**c** Substitueer $p = 7 + 10v$ in $q = 2p + 1$ en laat zien dat $q$ geen priemgetal is.

**d** Ook 13, 19, 31, 43, … ontbreken in het rijtje Sophie Germain priemgetallen.
Controleer dat je deze getallen kunt schrijven als $p = 1 + 6v$.

**e** Waarom is $q$ ook in deze gevallen geen priemgetal?

**f** Gebruik de lijst met priemgetallen om te onderzoeken welk priemgetal het volgende Sophie Germain priemgetal is.
Licht je werkwijze toe.

**Priemgetallen van 100 tot 500**

101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137,
139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179,
181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227,
229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269,
271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313,
317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367,
373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419,
421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461,
463, 467, 479, 487, 491, 499

**48** Euclides (324-265 v. Chr.) heeft de volgende stelling geformuleerd: '*Er zijn oneindig veel priemgetallen.*'
Om de stelling te bewijzen gebruik je de volgende aanname:
Stel er zijn slechts eindig veel priemgetallen, dat wil zeggen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ zijn alle priemgetallen. Schrijf dan $m = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$.

**a** Leg uit dat $m$ niet deelbaar is door $p_1$.

**b** Is $m$ deelbaar door de andere priemgetallen $p_2, \ldots, p_n$?

**c** Elk geheel getal is een priemgetal of een product van priemfactoren.
Is $m$ een product van priemfactoren $p_1, p_2, \ldots, p_n$?

**d** Welke aanname is dus niet waar?


© Noordhoff Uitgevers bv

**49** De leden van een tennisclub houden een barbecue. Er is afgesproken dat de senioren 19 euro betalen en de junioren 13 euro. De totale inkomsten bedragen precies 1000 euro. Bereken het kleinste mogelijke aantal leden van de club dat voor de barbecue heeft betaald.

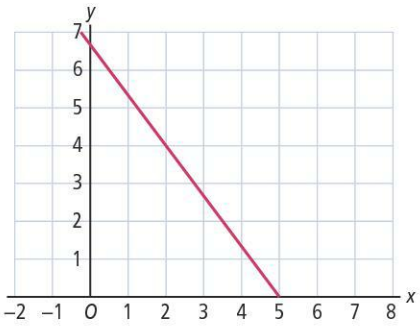
**50** Gegeven is de lijn $l$ met vergelijking $24x + 18y = 120$.

**a** Vereenvoudig de vergelijking en geef een roosterpunt $(x_0, y_0)$ dat op $l$ ligt.

**b** Laat zien dat de punten $(x_n, y_n)$ met $x_n = x_0 + k \cdot 3$, $y_n = y_0 + k \cdot -4$ en $k \in \mathbb{Z}$ de andere roosterpunten op $l$ zijn.

**c** Onderzoek welk roosterpunt het dichtst bij de oorsprong ligt.

**d** Onderzoek welk roosterpunt op de lijn met vergelijking $13x + 43y = 12$ het dichtst bij de oorsprong ligt.




**51** Twee natuurlijke getallen $a$ en $b$ heten 'bevriend' als de som van de delers van het getal $a$, kleiner dan $a$, gelijk is aan $b$, terwijl som van de delers van $b$, kleiner dan $b$, gelijk is aan $a$.

**a** Toon aan dat 220 en 284 bevriend zijn.

**b** Zijn de getallen 1184 en 1210 bevriend?

**c** Fermat vond het stel bevriende getallen 17 296 en 18 416 met de formules $a = 2^k \cdot p \cdot q$ en $b = 2^k \cdot r$ met $p$, $q$ en $r$ priemgetallen, $q = 2p + 1$ en $r = (p + 1)(q + 1) - 1$. Bereken $p$, $q$ en $r$.

**d** Ga na dat $a = 220$ en $b = 284$ wel voldoen aan de formules van opdracht c, maar $a = 1184$ en $b = 1210$ niet.

**52** In het getallenraadsel moet elk van de vier letters vervangen worden door een cijfer ongelijk aan 0 waarbij verschillende letters voor verschillende cijfers staan, zodat een correcte vermenigvuldiging ontstaat.

**a** Waarom is DDD deelbaar door 3?

**b** Welke andere delers heeft DDD?

**c** Leg uit waarom één van de gevonden delers gelijk moet zijn aan AB of CB.

**d** Los het probleem verder op.

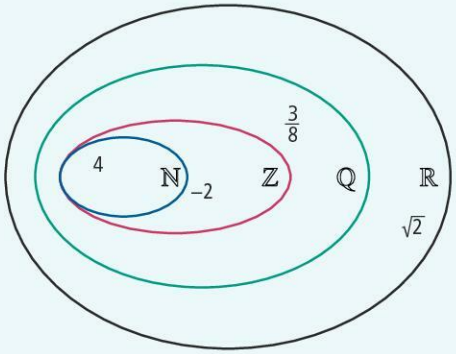
Wat staat hier in cijfers?

**AB × CB = DDD**

© Noordhoff Uitgevers bv

### Getallenverzamelingen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$

$\mathbb{N}$ is de verzameling van de natuurlijke getallen 0, 1, 2, 3, …
$\mathbb{Z}$ is de verzameling van de gehele getallen
…, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, … .
Getallen die als breuk zijn te schrijven vormen de verzameling van rationale getallen $\mathbb{Q}$.
Getallen zoals $\pi$ en $\sqrt{2}$ kun je niet als een breuk schrijven.
Zulke getallen heten irrationale getallen.
De irrationale getallen en de rationale getallen vormen samen de verzameling van de reële getallen $\mathbb{R}$.
Met de symbolen $\in$ en $\notin$ geef je aan of een getal wel of niet tot een verzameling behoort.
$3 \in \mathbb{N}$ spreek je uit als '3 is element van $\mathbb{N}$'.




### Deler

Een natuurlijk getal $a$, $a > 0$, heet een deler van een geheel getal $b$ als er een geheel getal $k$ bestaat zo dat $b = k \cdot a$.

**Voorbeeld**

13 is een deler van 91 want $91 = 7 \times 13$.
1, 7, 13 en 91 zijn delers van 91.

### Priemgetallen

Een priemgetal is een getal dat precies twee delers heeft.
Een getal dat geen priemgetal is, heet samengesteld.
Een samengesteld getal is te ontbinden in factoren, die priem zijn, de priemontbinding van het getal.

**Voorbeeld**

Schrijf de priemontbinding op van 504.
**Oplossing**
$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$

| | 504 |
|---|---|
| 2 | 252 |
| 2 | 126 |
| 2 | 63 |
| 3 | 21 |
| 3 | 7 |
| 7 | 1 |

**Priemgetallen kleiner dan 100**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 5 | 7 | 11 |
| 13 | 17 | 19 | 23 | 29 |
| 31 | 37 | 41 | 43 | 47 |
| 53 | 59 | 61 | 67 | 71 |
| 73 | 79 | 83 | 89 | 97 |


© Noordhoff Uitgevers bv

### Diophantische vergelijkingen

Vergelijkingen waarbij als oplossingen uitsluitend gehele getallen zijn toegestaan, heten Diophantische vergelijkingen. Diophantische vergelijkingen van het type $ax + by = c$ met $a,b,c \in \mathbb{Z}$ hebben alleen gehele oplossingen, als $c$ een veelvoud is van $ggd(a, b)$.

**Voorbeeld**

$28x + 23y = 6$ met $x, y \in \mathbb{Z}$ is een diophantische vergelijking.

Een mogelijke oplossing is $x = -54$ en $y = 66$.

Alle oplossingen zijn: $x = -54 + k \cdot 23$ en $y = 16 - k \cdot 28$ met $k \in \mathbb{Z}$.

### Het algoritme van Euclides en Diophantische vergelijkingen

Bij het oplossen van een Diophantische vergelijking $ax + by = c$ bereken je eerst met het algoritme van Euclides de $ggd(a, b)$. Vervolgens werk je terug om een oplossing van $ax + by = c$ te vinden.

**Voorbeeld**

Geef een oplossing in $\mathbb{Z}$ van $1224x + 1024y = 8$.

**Oplossing**

$1224 - 1 \cdot 1024 = 200$
$1024 - 5 \cdot 200 = 24$
$200 - 8 \cdot 24 = 8$
$ggd(24, 8) = 8$

$a = 1224, b = 1024$
$200 = a - b$
$24 = b - 5(a - b) = 6b - 5a$
$8 = a - b - 8(6b - 5a) = 41a - 49b$
Een oplossing is: $x = 41$ en $y = -49$.

© Noordhoff Uitgevers bv

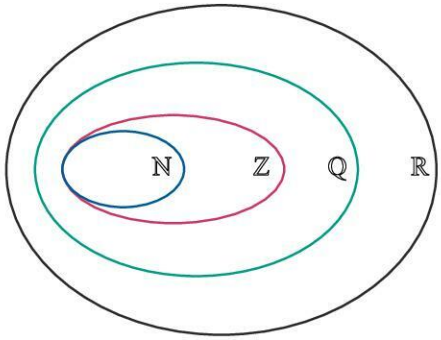
**T1** Gegeven zijn de getallen 7, $-28$, $\sqrt{25}$, $\frac{3}{4}$, $\sqrt{5}$, $4\pi$ en $-0{,}125$.

**a** Zet in de afbeelding de getallen in de juiste verzameling.

**b** Neem over vul in: $\in$ of $\notin$.

$\frac{125}{5}$ … $\mathbb{N}$ $\quad -\frac{45}{8}$ … $\mathbb{Z}$ $\quad 3\pi$ … $\mathbb{Q}$

$-\frac{18}{6}$ … $\mathbb{N}$ $\quad -\sqrt{36}$ … $\mathbb{Z}$ $\quad \sqrt{45}$ … $\mathbb{R}$




**T2** 7! is een verkorte notatie voor $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

**a** Laat zien dat $7! + 1 = 71 \cdot 71$.

**b** Bewering:
'*De volgende rij bevat geen priemgetallen:* 1000! + 2, 1000! + 3 , 1000! + 4, …, 1000! + 1000.'
Bewijs deze bewering.

**c** Geef een rij met 1000 opeenvolgende samengestelde getallen.

**T3** **a** Geef de priemontbinding van 945 en 999.

**b** Bereken de *ggd* en het *kgv* van 945 en 999.

**T4** Gegeven is de vergelijking $311x + 83y = 2$.

**a** Controleer of de vergelijking oplossingen heeft.

**b** Gebruik het algoritme van Euclides om een oplossing $x_0$ en $y_0$ te vinden.

**c** Om andere oplossingen te vinden schrijf je $x = x_0 + k \cdot 83$ en $y = y_0 - k \cdot p$.
Welk getal moet $p$ zijn?

**d** Geef een oplossing $x$ waarvoor geldt $x > 500$.

**T5** Een van de manieren om valse bankbiljetten te kunnen opsporen is controle van het nummer. Daarvoor werd vroeger de negenproef gebruikt, dat wil zeggen dat er werd gecontroleerd of het nummer deelbaar is door 9.
Van de biljetten die getest worden, zijn de nummers bekend: 9210116430, 4223042733, 6380821481 en 7027560654.
Welke biljetten zijn op grond van deze test vals?


© Noordhoff Uitgevers bv

**T6** Jarenlang is er gezocht naar een formule om priemgetallen te vinden. Euler vond de formule $p = n^2 + n + 41$.

**a** Reken $p = n^2 + n + 41$ uit voor $n = 1$, $n = 2$, …, $n = 10$.

**b** Waarom gaat het zeker mis bij $n = 41$?

**c** Bij welke waarden van $n$ zal de formule ook geen priemgetal opleveren?

**T7** Een natuurlijk getal $a$ heet *perfect* als het gelijk is aan de som van zijn delers kleiner dan $a$.

**a** Als je de delers van 6 (behalve 6 zelf) optelt, komt er 6 uit: $1 + 2 + 3 = 6$.
Toon aan dat 28 een perfect getal is.

**b** Perfecte getallen kun je vinden met de formule $p = (2^n - 1) \cdot 2^{n-1}$ met $2^n - 1$ een priemgetal.
Voor $n = 2$ krijg je het eerste perfecte getal.
Voor welke waarde van $n$ vind je 28?

**c** Geeft de formule voor $n = 4$ een perfect getal? Motiveer je antwoord.

**d** Bereken het volgende perfecte getal.

**T8** De wiskundige Christian Goldbach (1690-1764) werkte vooral in de getaltheorie en wisselde veel ideeën uit met de beroemde wiskundige Leonhard Euler. In 1742 schreef hij aan Euler: *'Het lijkt erop dat elk even getal groter dan 2 geschreven kan worden als de som van twee priemgetallen.'*
Euler antwoordde dat hij geen bewijs kon vinden. Tot op heden heeft niemand een bewijs kunnen vinden en er is onder de vier triljoen ook nog geen getal gevonden waarvoor het niet klopt Daarom heet deze bewering 'het *vermoeden* van Goldbach'.

**a** Schrijf de getallen als som van twee priemgetallen (als er meer oplossingen zijn, geef ze ook): 18, 20, 30, 40, 50.

**b** Laat zien dat je 100 op zes manieren kunt schrijven als som van twee priemgetallen.

Is elk even getal groter dan 2 de som van twee priemgetallen?
$4 = 2 + 2$
$6 = 3 + 3$
$8 = 3 + 5$
$10 = 3 + 7$ of $10 = 5 + 5$
$12 = 5 + 7$
$14 = 7 + 7$ of $14 = 3 + 11$

© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

SE CE K

## Meer oefenen 252

In ieder hoofdstuk wordt bij enkele opdrachten extra oefening aangeboden. In de extra oefeningen wordt in het algemeen hetzelfde type opdracht gegeven maar met andere getallen.

## Oefenproefwerken 264

Bij ieder hoofdstuk vind je hier een oefenproefwerk. Dit oefenproefwerk kun je gebruiken om je voor te bereiden op het echte proefwerk. De oefenproefwerken zijn in het algemeen wat langer dan een proefwerk dat je in een les van 45 of 50 minuten moet maken.

In een proefwerk komen verschillende soorten opdrachten voor:

- opdrachten waarmee getoetst wordt of je de vaardigheden van het hoofdstuk beheerst;
- opdrachten waarmee getoetst wordt of je de vaardigheden kunt toepassen binnen een grotere wiskundige opdracht of binnen een context of binnen een situatie die meer denkstappen vraagt en dus meer inzicht.

© Noordhoff Uitgevers bv

**5** **a** Door welke transformaties ontstaat de grafiek van $g(x) = 2 \cdot 3^{x+8}$ uit de grafiek van $f(x) = 3^x$?
**b** Door welke transformaties, en in welke volgorde, ontstaat de grafiek van $g(x) = 8 - 10 \cdot 2^x$ uit die van $f(x) = 2^x$?
**c** Door welke transformaties, en in welke volgorde, ontstaat de grafiek van $g(x) = 17 + 0{,}2^{7-x}$ uit die van $f(x) = 0{,}2^x$?

**6** Gegeven zijn de functies $g(x) = 9 \cdot 3^x$ en $h(x) = 3^{x+2}$.
**a** Door welke transformaties zijn de grafieken van $g$ en $h$ uit de grafiek van $f(x) = 3^x$ ontstaan?
**b** Plot de grafieken van $g$ en $h$. Wat valt je op?
**c** Gebruik de rekenregels voor het rekenen met machten om aan te tonen dat de functies $g$ en $h$ hetzelfde zijn.
**d** De grafiek van de functie $k(x) = \frac{1}{2} \cdot 4^x$ kan op twee verschillende manieren uit de grafiek van $f(x) = 4^x$ ontstaan: een verschuiving of een vermenigvuldiging. Geef beide mogelijkheden.

**10** Los exact op.

**a** $7 \cdot 0{,}5^x = 112 \cdot 4^x$
**b** $4^x = \frac{1}{256}$
**c** $0{,}1^{5x} = 10\,000$
**d** $0{,}4^{2x-6} = 1$
**e** $3^t = \left(\frac{1}{9}\right)^3$
**f** $2^{x+4} = \frac{1}{8} \cdot (\sqrt{2})^x$
**g** $27 \cdot 3^t = 9 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{t-4}$
**h** $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16$
**i** $5^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{125} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^x$
**j** $15 \cdot 9^t = 5 \cdot 3^{3t}$

**11** Ga bij elk van de vergelijkingen na of deze exact kan worden opgelost of niet. Bereken de exacte oplossing als dat mogelijk is en geef in de andere gevallen een benadering in twee decimalen.

**a** $0{,}25^x = \sqrt{\frac{1}{2}}$
**b** $3^{5x+2} = 15$
**c** $60 \cdot 5^{3x-5} = 12$
**d** $2^{\frac{1}{2}x-1} = \frac{1}{16}$
**e** $4^x \cdot 5^x = 10^x$
**f** $3^{2+x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}$

**12** Gegeven zijn de functies $f(x) = 8 \cdot 2^{4-x}$ en $g(x) = (\sqrt{2})^x$.
**a** Los exact op $f(x) = g(x)$.
**b** Gebruik een plot en geef de oplossing van $f(x) > g(x)$.
**c** Maak de opdrachten a en b ook voor de functies $f(x) = \frac{1}{9} \cdot 3^{4+x}$ en $g(x) = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^x$.


© Noordhoff Uitgevers bv

**20** Los exact op, dus schrijf de oplossing met een logaritme.

**a** $3^x = 15$

**b** $0{,}3^x = 0{,}01$

**c** $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 250$

**d** $8^{x+5} = 23$

**e** $2^{3x+1} = 50$

**f** $10^{8-3x} = 0{,}5$

**24** Bereken exact.

**a** ${}^{3}\log(81\sqrt{3})$

**b** ${}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{16}\right)$

**c** ${}^{5}\log\left(\frac{1}{125}\right)$

**d** ${}^{\frac{1}{5}}\log(25)$

**31** Bereken in twee decimalen.

**a** ${}^{6}\log(231)$

**b** ${}^{11}\log(17)$

**c** ${}^{\frac{1}{7}}\log(23)$

**d** ${}^{3}\log\left(\frac{1}{11}\right)$

**32** Los exact op. Geef ook een benadering in twee decimalen.

**a** $11^x = 7$

**b** $6^x = 10$

**c** $3^{x+1} = 5$

**d** $2^{4x} = 3\sqrt{2}$

**39** Beredeneer van elke functie of de functie stijgend of dalend is.

**a** $f(x) = {}^{0{,}2}\log(-x)$

**b** $g(x) = {}^{1{,}3}\log(2{,}6 - x)$

**c** $h(x) = {}^{0{,}5}\log(1 + x)$

**d** $k(x) = -{}^{0{,}4}\log(4 + x)$

**e** $p(x) = -{}^{\frac{1}{4}}\log(4 - x)$

**41** Geef het domein, het nulpunt en een vergelijking van de asymptoot van de grafiek.

**a** $p(x) = 5 + {}^{2}\log(3x + 5)$

**b** $k(x) = {}^{6}\log(8 - x) + 8$

**c** $h(x) = {}^{2}\log(2x + 4) - 3$

**d** $g(x) = 18 - \log(10x)$

**e** $m(x) = -2 + {}^{4}\log(x + 7)$

**f** $n(x) = 3x \cdot \log(3x - 10)$

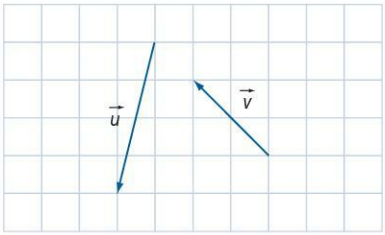
**42** Gegeven zijn de functies $f(x) = 8 - {}^{0{,}5}\log(x^2 - 16)$ en $g(x) = {}^{4}\log(x^3 + 8)$.

**a** Geef van beide functies het domein.

**b** Stel voor beide functies vergelijkingen op van de asymptoten van de grafiek.

**c** Bereken de nulpunten van $f$.

**4** Teken de vectoren met de kop-staart methode.




**a** $2\vec{v} - \vec{u}$

**b** $\frac{1}{2}\vec{u} + 1\frac{1}{2}\vec{v}$

**c** $-\vec{u} - 3\vec{v}$

**d** $(\vec{u} + 2\vec{v}) - \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{u})$

**9** Gegeven zijn de plaatsvectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

**a** Bereken de kentallen van de vectoren $2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - 2\vec{b}$ en $4\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}$.

**b** Bereken exact $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$ en $|5\vec{a} - 3\vec{b}|$.

**c** Laat met een berekening zien dat $\left|\frac{1}{2}\vec{a}\right| = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}|$.

**11** Gegeven zijn de punten $A(5, 2)$, $B(-3, -5)$ en $C(4, -1)$.

**a** Bereken de kentallen van de vectoren $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{BC}$.

**b** Bereken exact $|2\overrightarrow{CA}|$, $|-3\overrightarrow{CB}|$ en $|2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB}|$.

**c** Bereken exact de coördinaten van de middens van de zijden van $\triangle ABC$.

**18** De massa in $A$ is $a$ en de massa in $B$ is $b$. Er is steeds evenwicht.

Bereken de coördinaten van het zwaartepunt $Z$.

**a** $A(6, 6)$ en $B(8, -4)$, $a = 3$ en $b = 2$.

**b** $A(-6, 12)$ en $B(4, 24)$, $a = 4$ en $b = 8$.

**c** $A(-2, 5)$, $B(4, -3)$, $a = 8$ en $b = 4$.

**20** **a** Gegeven zijn de punten $A(2, 1)$, $B(-4, 2)$ en $C(6, 7)$.
In deze punten bevinden zich puntmassa's ter grootte van achtereenvolgens 3, 2 en 5.
Bereken de coördinaten van het zwaartepunt $Z$.

**b** Gegeven zijn de punten $P(3, 7)$, $Q(-2, 5)$, $R(6, 0)$, $S(1, 4)$ en $T(5, -4)$.
In deze punten bevinden zich vijf massa's ter grootte van achtereenvolgens 15, 30, 5, 15 en 10.
Bereken de coördinaten van het zwaartepunt $Z$.


© Noordhoff Uitgevers bv

**28** Bereken bij elk paar plaatsvectoren de grootte van de ingesloten hoek. Rond je antwoorden af op hele graden.

**a** $\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$

**b** $\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$

**c** $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$

**d** $\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix}$

**34** Teken in één assenstelsel

lijn $l$ met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ en

lijn $m$ met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-5\mu\\-2+\mu\end{pmatrix}$.

**37** Stel een vectorvoorstelling op van de lijn

**a** door de punten $A(3, -7)$ en $B(5, -1)$.

**b** door de punten $C(-4, 15)$ en $D(4, 0)$.

**c** door de punten $E(-27, 64)$ en $F(33, 24)$.

**44** Stel van elke lijn een vergelijking op.

**a** $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

**b** $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-t\\4t+8\end{pmatrix}$

**c** $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

**d** $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2t+6\\3-5t\end{pmatrix}$

**49** Stel van elke lijn een vectorvoorstelling op.

**a** $y = -7$

**b** $x + 5y - 3 = 0$

**c** $y = -\frac{3}{7}x - 2$

**d** $2x + 3y = 6$

**e** $x = 15$

**f** $-3x + y = 0$

© Noordhoff Uitgevers bv

**3** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{x}$

**a** De grafiek van $f$ wordt vermenigvuldigd met 3 ten opzichte van de $x$-as en daarna 4 naar links verschoven.
Stel het functievoorschrift op bij de beeldgrafiek.

**b** De grafiek van $f$ wordt vermenigvuldigd met 3 ten opzichte van de $y$-as en daarna 4 naar rechts verschoven.
Stel het functievoorschrift op bij de beeldgrafiek.

**7** Gegeven is de functie $f(x) = \log(x)$.

**a** De grafiek van $g$ ontstaat door de grafiek van $f$ te spiegelen in de $y$-as en daarna de translatie 10 naar links toe te passen.
Stel het functievoorschrift op van $g$.

**b** Krijg je hetzelfde antwoord als de volgorde van de twee transformaties wordt veranderd? Leg je antwoord uit.

**9** Geef aan door welke transformaties de grafiek van de functie $g$ kan ontstaan uit de grafiek van de functie $f$. Geef aan in welke volgorde deze transformaties moeten worden toegepast.

**a** $f(x) = 2^x$ en $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$

**b** $f(x) = \cos(x)$ en $g(x) = \frac{1}{2}\cos(2x + 3)$

**c** $f(x) = x^2$ en $g(x) = \frac{1}{3}(x + 2)^2 - 7$

**d** $f(x) = x^2$ en $g(x) = \frac{1}{3}(4x + 2)^2 - 7$

**e** $f(x) = \frac{1}{x}$ en $g(x) = \frac{5}{3x + 4}$

**11** Plot van elke functie de grafiek en noteer of de grafiek symmetrisch is in de $y$-as, in de oorsprong of geen van beide. Toon bij de symmetrische grafieken de symmetrie aan door $f(a)$ te vergelijken met $f(-a)$.

**a** $f(x) = \frac{10}{\sqrt{x^2 + 6}}$

**b** $f(x) = x^5 - 2x^3 + 3x - \frac{4}{x}$

**c** $f(x) = \frac{x^4 - x^3}{x^2}$

**d** $f(x) = 3^{x^2-1}$


© Noordhoff Uitgevers bv

**23** Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 7)$.

**a** Bereken exact de nulpunten van $f$.

**b** Plot en schets de grafiek van $f$.

**c** Bereken exact de extreme waarden van $f$.

**d** Geef exact de extreme waarden van de functie $g(x) = |f(x)|$.

**29** Stel het functievoorschrift op van $f^{inv}$.
Vermeld daarbij ook het domein van $f^{inv}$.

**a** $f(x) = 7x + 28$

**b** $f(x) = \sqrt{6x - 5}$

**c** $f(x) = 5^{x+6}$

**d** $f(x) = \frac{16}{x}$

**32** Stel het functievoorschrift op van $f^{inv}$.
Vermeld ook het domein van $f^{inv}$.

**a** $f(x) = \frac{2}{3}x - 8$

**b** $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x + 1}$

**c** $f(x) = 8 \cdot 2^x$

**d** $f(x) = 6 - {}^6\log(x)$

**e** $f(x) = -\sqrt{1 - 2x}$

**f** $f(x) = \frac{x + 2}{x + 1}$

**36** Herleid de formules tot een vorm waarbij $p$ is uitgedrukt in $q$.

**a** $pq + 2q = 5p - 3q$

**b** $q = \frac{p}{p - 9}$

**c** $q - 5^{p+1} = 1$

**d** $q = \sqrt[7]{7p - 77}$

**e** $q = 4 + \sqrt[3]{5p}$

**f** $q = (p - 8)^3 + 8$

**40** Herleid de formules tot een vorm waarbij $p$ is uitgedrukt in $q$.

**a** $p^2 - 5q = 1$ voor $p \geq 0$

**b** $p^2 - 5q = 1$ voor $p \leq 0$

**c** $(p + 4)^2 - 9q = 15$ voor $p \leq -4$

© Noordhoff Uitgevers bv

**3** Differentieer. Schrijf de afgeleide zonder negatieve exponent.

**a** $f(x) = -\frac{3}{4}x^{-\frac{2}{3}}$

**b** $g(x) = x^{-4} - \frac{1}{2x^3}$

**c** $p(x) = 7x^{1,25} \cdot 2x^{0,35}$

**d** $r(x) = \frac{4x^4 + 8x^3 + 10x^2}{2x^3}$

**6** Differentieer. Schrijf de afgeleide zonder gebroken of negatieve exponent.

**a** $B(p) = \sqrt[3]{p} \cdot \sqrt{p}$

**b** $k(x) = 4\sqrt[3]{x^4}$

**c** $f(p) = \frac{1}{3}p + \frac{p}{p^2\sqrt[3]{p}}$

**d** $f(x) = 3x^2(x + \sqrt{x})$

**e** $g(x) = \frac{6x^3 + 4\sqrt{x} + 2x}{x\sqrt{x}}$

**f** $A(k) = (x\sqrt{x} + 4)^2$

**12** Geef functievoorschriften van $k(x) = g(f(x))$ en $h(x) = f(g(x))$.

**a** $f(x) = 3x^2 - 2x$ en $g(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$

**b** $f(x) = 2 \cdot {}^5\log(x)$ en $g(x) = 3\sqrt[5]{x}$

**c** $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x}$

**d** $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x}$ en $g(x) = 5^x$

**13** Gegeven zijn functies van de vorm $k(x) = g(f(x))$.
Geef mogelijke functievoorschriften van $g$ en $f$.

**a** $k(x) = 6 \cdot {}^3\log(x^3)$

**b** $k(x) = \frac{-5}{3\sqrt[4]{x}}$

**c** $k(x) = \sin(x^2 - x)$

**d** $k(x) = \frac{6}{5\cos(x)}$

**17** Differentieer.

**a** $f(x) = \left(2\frac{1}{2} - 7x\right)^3$

**b** $g(x) = \left(x^3 - \frac{1}{3}x^2\right)^2$

**c** $w(x) = (23 - x)^{11}$

**d** $s(t) = \left(t^3 + \frac{6}{t}\right)^4$

**e** $h(x) = (0{,}7x^{2,3} - 1)^5$

**f** $p = \left(\sqrt[3]{q^2} - \sqrt{q}\right)^5$

**g** $A(k) = \left(4k + 8k^{\frac{2}{3}}\right)^3$

**h** $k(t) = \left(3t - \frac{4}{5t^2}\right)^3$


© Noordhoff Uitgevers bv

**22** Differentieer. Schrijf de afgeleide zonder negatieve of gebroken exponent.

**a** $h(x) = \sqrt[3]{3x^2 - 12x}$

**b** $f(x) = \dfrac{7}{\sqrt{x^2 - 2x}}$

**c** $g(x) = \dfrac{4}{(2x - x^4)^2}$

**d** $k(x) = \sqrt{4x^5 - 2x}$

**26** Bereken exact de extreme waarden.

**a** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$

**b** $g(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 5}$

**29** Bereken exact de extreme waarden.
Vermeld ook eventuele randextremen.

**a** $n(x) = \sqrt{x^2 + 25}$

**b** $h(x) = (x - x^3)^2$

**c** $q(x) = \dfrac{7}{x^2 - 8}$

**d** $g(x) = 8x\sqrt{x} - 6x$

**e** $f(x) = \sqrt{72 - 2x^2}$

**f** $p(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$

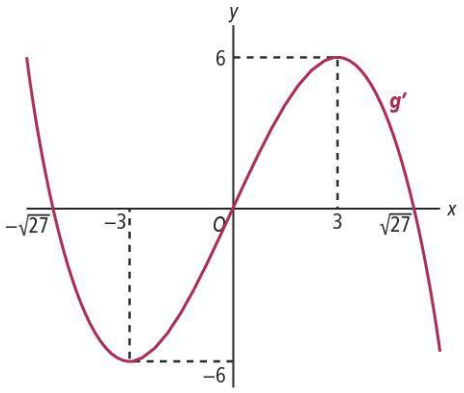
**33** Gegeven is de grafiek van de afgeleide $g'$ van een functie $g$.

$g'$ heeft nulpunten $x = -\sqrt{27}$, $x = 0$ en $x = \sqrt{27}$ en extreme waarden bij $x = -3$ en $x = 3$.

**a** Op welk interval is $g$ afnemend dalend? En op welke intervallen toenemend dalend?

**b** Bij welke waarde van $x$ gaat $g$ over van toenemend stijgend naar afnemend stijgend?

**c** Maak een schets van de grafiek van $g$ met $g(0) = 0$.




**38** Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - 12x^2$.

**a** Bereken exact de extreme waarden van $f$.

**b** Bereken exact de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van $f$.

**c** Geef een vergelijking van de buigraaklijn in elk van de buigpunten.

© Noordhoff Uitgevers bv

**4** Los exact op.

**a** $5^{2x} - 2 \cdot 5^x - 24 = 0$

**b** $\left({}^2\log(x) - 3\right)^2 = 2\frac{1}{4}$

**c** ${}^2\log\left(\left|1 + \frac{1}{x}\right|\right) = -1$

**d** $\left(\frac{1}{2}\right)^x - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 4$

**e** $\left({}^3\log(x)\right)^2 - {}^3\log(x) - 20 = 0$

**f** $9^x = 3 \cdot 3^x + 18$

**10** Schrijf als één logaritme.

**a** ${}^3\log(35) - {}^3\log(7) + {}^3\log(2)$

**b** ${}^{\frac{1}{2}}\log(7) + 5 \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$

**c** ${}^7\log(3x^2) - 3 \cdot {}^7\log(x)$

**d** ${}^7\log(p) + 3 \cdot {}^7\log(2)$

**e** ${}^4\log(30) - \left({}^4\log(3) + {}^4\log(2)\right)$

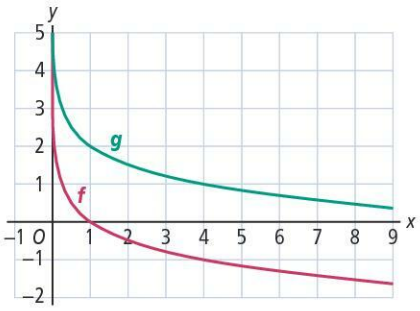
**f** ${}^{0{,}1}\log(2x) + {}^{0{,}1}\log(13x)$

**13** Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^{\frac{1}{4}}\log(x)$ en $g(x) = 2 + {}^{\frac{1}{4}}\log(x)$.

**a** Door welke transformatie ontstaat de grafiek van $g$ uit de grafiek van $f$?

**b** Je kunt het functievoorschrift van $g$ ook schrijven als $g(x) = {}^{\frac{1}{4}}\log(bx)$.
Bereken exact de waarde van $b$.

**c** De grafiek van $g$ kan ook uit de grafiek van $f$ ontstaan door een vermenigvuldiging.
Welke vermenigvuldiging is dat en wat is de bijbehorende factor?




**17** Druk $x$ uit in $y$.

**a** $y = 4 \cdot 3^x$

**b** $y + 5 = {}^2\log(x + 1)$

**c** $2y - 5 = \frac{1}{4} \cdot 6^x$

**d** $y = {}^2\log(14 - 3x)$

**e** $y = 3 - 7 \cdot 10^x$

**f** $(2y - 6) \cdot \log(3x) = 12$

**g** $2 \cdot 5^x = 6y - 1$

**h** $4^{\frac{x}{y}} = 11$

**18** **a** Het verband tussen de variabelen $K$ en $H$ voldoet aan de formule $3 \cdot {}^2\log(K) - 0{,}5 \cdot {}^2\log(H) = 3$.

Toon algebraïsch aan dat $K^3 = 8\sqrt{H}$.

**b** Het verband tussen de variabelen $A$ en $B$ voldoet aan de formule $2 \cdot {}^3\log(A) + 3 \cdot {}^3\log(B) = 6$.
Schrijf het verband tussen deze variabelen als een formule zonder logaritmen.


© Noordhoff Uitgevers bv

**21** **a** Schrijf $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-2x}$ in de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

**b** Toon aan dat de functies $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^x$ en $g(x) = \left(\frac{1}{9}\sqrt{3}\right)^{2x+1}$ hetzelfde zijn.

**c** Schrijf $f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(64x^3)$ in de vorm $f(x) = b + c \cdot {}^2\log(x)$.

**d** Bewijs dat de functies $f(x) = 4 - 3 \cdot {}^2\log(x)$ en $g(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{16}x^3\right)$ hetzelfde zijn.

**26** Los exact op.

**a** ${}^3\log(|4 - x|) = -1$

**b** ${}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{3}x\right) = -3$

**c** ${}^5\log\left(\frac{1}{2x}\right) = 3$

**d** ${}^2\log(4 - 2x) = 7$

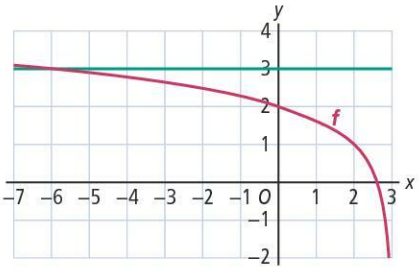
**e** ${}^6\log(x - 9) = 2 - {}^6\log(x)$

**f** $\log(3x + 2) + \log(5) = 2$

**28** In het assenstelsel zijn de grafiek van $f(x) = 1 - {}^{\frac{1}{3}}\log(3 - x)$ en de lijn $y = 3$ getekend.

**a** Geef het domein van $f$.

**b** Los exact op $f(x) \leq 3$.




**29** Los exact op.

**a** $\log(x - 4) < 2$

**b** ${}^3\log(7 - 3x) > -1$

**c** ${}^{\frac{1}{3}}\log(12x) > -2 + {}^{\frac{1}{3}}\log(4)$

**d** $-5 - 3 \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(x) > 1$

**32** Bij veel infectieziekten krijgt de patiënt koorts en wordt een middel gegeven om de koorts te verminderen. Bij een groot aantal patiënten is de temperatuur opgenomen vanaf het moment dat het middel is toegediend. De gemiddelde waarden van dit onderzoek staan in de tabel.

| $t$ in uren | $T$ in °C |
|---|---|
| 1 | 39,3 |
| 2 | 38,8 |
| 4 | 38,3 |
| 6 | 38,0 |
| 8 | 37,8 |
| 10 | 37,7 |
| 12 | 37,6 |

**a** Teken een assenstelsel met een geschikte schaalverdeling en teken de meetpunten er in.

**b** Teken een vloeiende lijn door de getekende punten.

**c** De punten lijken op de grafiek met de formule $T = 37 + \frac{a}{t + b}$ te liggen.
Bereken de waarde van $a$ en van $b$. Rond af op één decimaal.

© Noordhoff Uitgevers bv

**6** Teken de grafiek van $f$ en benader de oppervlakte van het gebied $G$ tussen de grafiek en de $x$-as op het aangegeven interval met een Riemann-som met vijf deelintervallen.

**a** $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ op het interval $[0, 5]$.

**b** $f(x) = \dfrac{12}{x}$ op het interval $[1, 11]$.

**16** Benader de integralen. Rond zo nodig af op één decimaal.

**a** $\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \mathrm{d}x$

**b** $\int_1^4 (2^x + 2)\,\mathrm{d}x$

**c** $\int_1^9 \dfrac{12}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

**d** $\int_{1\frac{1}{2}\pi}^{2\frac{1}{2}\pi} (x\cos(x))\,\mathrm{d}x$

**26** Primitiveer.

**a** $f(x) = x^{25}$

**b** $g(x) = \dfrac{1}{x^7}$

**c** $h(x) = x^5\sqrt[5]{x^3}$

**d** $k(x) = \dfrac{1}{x^2\sqrt[4]{x}}$

**29** Primitiveer.

**a** $f(x) = 5x - 6x^3 + 7$

**b** $g(x) = \dfrac{6}{x^2} - \dfrac{8}{x^3}$

**c** $h(x) = x^2(3x + 6)$

**d** $k(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{\sqrt{x}}$


© Noordhoff Uitgevers bv

**33** Geef de primitieve functies.

**a** $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x + 4}{x^4}$

**b** $g(x) = \sqrt{x}(3 + 5x + 7x^2)$

**c** $h(x) = 2x\sqrt{x} + \dfrac{3}{2x^3}$

**d** $k(x) = (1 + \sqrt{x})(x - \sqrt{x})$

**36** Primitiveer.

**a** $f(x) = 3\sqrt{5 - 2x}$

**b** $g(x) = \dfrac{7}{(2x - 5)^2}$

**c** $h(x) = \left(\dfrac{1}{2x + 1}\right)^3$

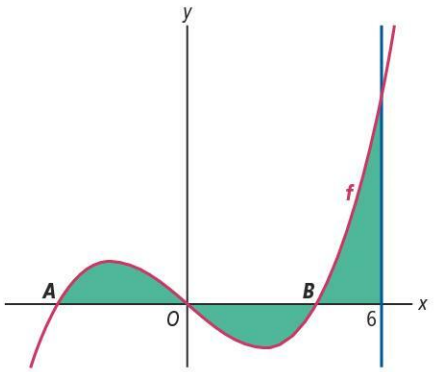
**d** $k(x) = \dfrac{4}{(2x - 5)\sqrt{2x - 5}}$

**39** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{16}x^3 - x$. De grafiek van $f$, de $x$-as en de lijn $x = 6$ sluiten drie gebieden in.

**a** De grafiek van $f$ snijdt de $x$-as behalve in $O(0, 0)$ ook in de punten $A(a, 0)$ en $B(b, 0)$.
Bereken $a$ en $b$.

**b** Bereken $\int_a^b f(x)\,dx$.

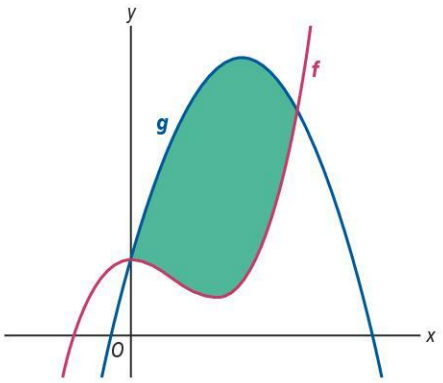
**c** Bereken exact de oppervlakte van elk van de drie gebieden.




**44** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 2$ en $g(x) = 4x + 2 - \frac{3}{4}x^2$.

**a** Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van $f$ en $g$.

**b** $G$ is het gebied rechts van de $y$-as dat wordt ingesloten door de grafieken van $f$ en $g$.
Bereken exact de oppervlakte van $G$.




© Noordhoff Uitgevers bv

**1** Los exact op.

**a** $3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = 27 \cdot \sqrt{3}$

**b** $\left(\frac{1}{8}\right)^{2x} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{16}$

**c** $16 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{x-2} = 8$

**d** $\frac{1}{2} \cdot 2^{x+3} = \sqrt{2} \cdot 4^x$

**e** $\left(\frac{1}{6}\right)^{x-3} = 6^x$

**f** $4 \cdot \sqrt[3]{2} = \frac{1}{8^x}$

**2** Gegeven is de functie $f(x) = 3^x$.
Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek van $f$ na

**a** translatie 3 omlaag en 5 naar links.

**b** translatie 2 naar omhoog en daarna spiegeling in de $x$-as.

**c** translatie 2 naar rechts en daarna vermenigvuldiging met 3 ten opzichte van de $x$-as.

**d** spiegeling in de $y$-as gevolgd door een vermenigvuldiging met 9 ten opzichte van de $x$-as.

**3** Gegeven zijn de functies $f(x) = 3^{-x}$ en $g(x) = 6 - 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$.

**a** Plot en schets de grafieken van $f$ en $g$.

**b** Geef de vergelijking van de asymptoot van de grafiek van $g$.

**c** Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van $f$ en $g$.

**d** Los exact op $-21 < 6 - 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} < 5$.

**e** Welke transformaties en in welke volgorde kun je op de grafiek van $f$ toepassen om de grafiek van $g$ te krijgen?

**f** Laat zien dat $k(x) = 18 - 3^{1-x}$ een functievoorschrift is van de beeldgrafiek van $g$ na de vermenigvuldiging ten opzichte van de $x$-as met factor 3.

**4** Bereken exact.

**a** ${}^5\log(25\sqrt[3]{5})$

**b** ${}^3\log\left(\frac{1}{27}\sqrt[4]{9}\right)$

**5** Los exact op. Geef ook een benadering in twee decimalen.

**a** $6^x = 12$

**b** $7^{3x} = 490$

**c** ${}^3\log(9\sqrt{x}) = \frac{1}{2}$


© Noordhoff Uitgevers bv

**6** Gegeven is de functie $f(x) = -3 + {}^2\log(x - 1)$.

**a** Geef het domein van $f$.

**b** Geef een vergelijking van de asymptoot van de grafiek van $f$.

**c** Bereken exact het nulpunt van $f$.

**d** Los exact op $f(x) < 2$.

**e** Beredeneer of $f$ stijgend of dalend is.

**f** Door welke transformaties kun je de grafiek van $f$ laten ontstaan uit de grafiek van $y = {}^2\log(x)$?

**7** Gegeven is de functie $f(x) = \log(x^2 - 4x)$.

**a** Geef het domein en het bereik van $f$.

**b** Los exact op $f(x) \leq 0$.

**8** Een bioloog heeft onderzoek gedaan naar een insectenpopulatie. Op grond van zijn waarnemingen heeft hij een formule opgesteld die het verband weergeeft tussen het aantal insecten en de tijd. Deze formule is $N = 12 \cdot 1{,}06^{5-2t}$, waarin $N$ het aantal insecten is in duizendtallen en $t$ de tijd in weken met $t = 0$ bij het begin van de waarnemingen.

**a** Bereken het aantal insecten bij het begin van de waarnemingen.

**b** Schrijf de formule in de vorm $N = b \cdot g^t$. Geef $b$ en $g$ in twee decimalen.

**c** Bereken in twee decimalen de groeifactor per dag.

**d** Bereken na hoeveel dagen het aantal insecten voor het eerst kleiner is dan 500.

**9** Op de grafiek van de exponentiële functie $f$ liggen de punten $A$, $B$ en $C$.

De grafiek wordt met $\frac{1}{3}$ vermenigvuldigd ten opzichte van de $y$-as.

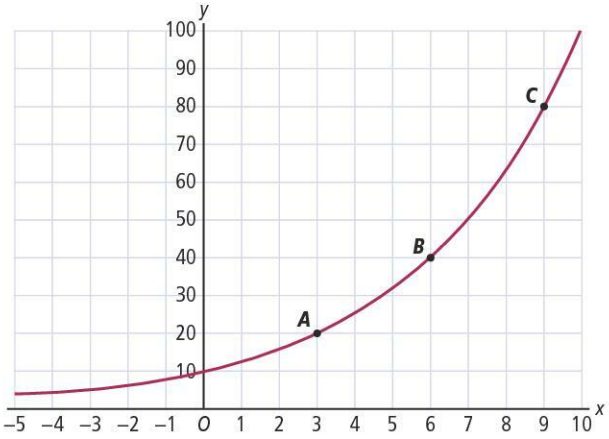
**a** Geef de coördinaten van de beeldpunten van $A$, $B$ en $C$ bij deze vermenigvuldiging.

**b** Geef een functievoorschrift van de beeldgrafiek van $f$.

**c** Geef een functievoorschrift van de grafiek van $f$.

**d** Schrijf het functievoorschrift van $f$ in de vorm $f(x) = 20 \cdot 2^{ax+b}$.
Geef de exacte waarde van $a$ en van $b$.

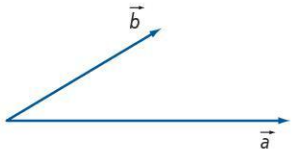
**e** Los de ongelijkheid $f(x) < 64$ op.
Geef je antwoord in twee decimalen.

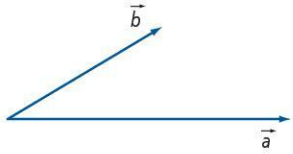



© Noordhoff Uitgevers bv

**1** Gegeven zijn twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$.
Teken met behulp van de kop-staart-methode de vectoren:

**a** $\vec{q} = 2 \cdot \vec{a} - 3 \cdot \vec{b}$ **b** $\vec{r} = -2 \cdot \vec{a} - \vec{b}$




**2** Gegeven zijn de punten $A$ en $B$ met plaatsvectoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$.

**a** Bereken de kentallen van $\vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$ en $3 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}$.
**b** Bereken $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ en $|\vec{a} - \vec{b}|$. Geef exacte antwoorden.
**c** Bereken de coördinaten van het midden $M$ van lijnstuk $AB$.
**d** Bereken de kentallen van $\vec{c}$ als $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ gelijk is aan de nulvector.
**e** $\vec{d}$ is een normaalvector van $\vec{a} + \vec{b}$ met $|\vec{d}| = \sqrt{40}$.
Bereken de kentallen van de twee mogelijke vectoren $\vec{d}$.

**3** Geef een vergelijking van elk van de lijnen.

**a** $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ **b** $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} \\ -1\frac{1}{4} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

**4** Geef een vectorvoorstelling van elk van de lijnen.

**a** $l$: $2x + 3y = 7$

**b** $m$: $y = 4x - 3$

**5** Gegeven zijn lijn $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ en lijn $m$ met vergelijking $ax + 4y = c$ waarbij $a$ en $c$ constanten zijn.

Verder is gegeven dat $l \perp m$ en dat beide lijnen door het punt (2, 3) gaan.
Bereken exact de waarde van $a$ en van $c$.


© Noordhoff Uitgevers bv

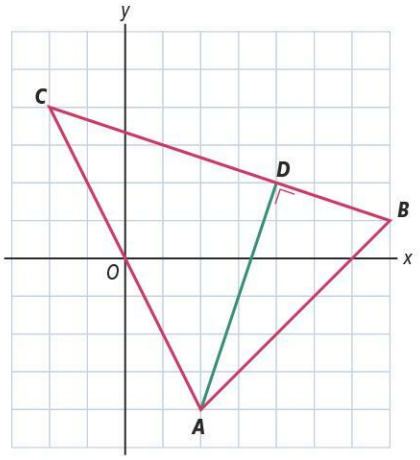
**6** In een assenstelsel is gegeven driehoek $ABC$ met hoekpunten $A(2, -4)$, $B(7, 1)$ en $C(-2, 4)$.
Punt $D$ ligt op zijde $BC$ zó, dat $AD \perp BC$.

**a** Stel een vectorvoorstelling op van zijde $BC$.

**b** Stel een vectorvoorstelling op van hoogtelijn $AD$.

**c** In de punten $A$, $B$ en $C$ bevinden zich puntmassa's met grootte van achtereenvolgens 5, 3 en 8.
Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van dit systeem van drie puntmassa's.

**d** Het gegeven systeem van drie puntmassa's wordt uitgebreid met een punt $E$ waarin zich een puntmassa met grootte 4 bevindt. Voor het zwaartepunt $Z$ van dit systeem met vier puntmassa's geldt $Z(2, 3)$.
Bereken de coördinaten van punt $E$.




**7** Gegeven is vierhoek $ABCD$ met $A(1, 1)$, $B(6, 6)$, $C(7, 13)$ en $D(2, 8)$.

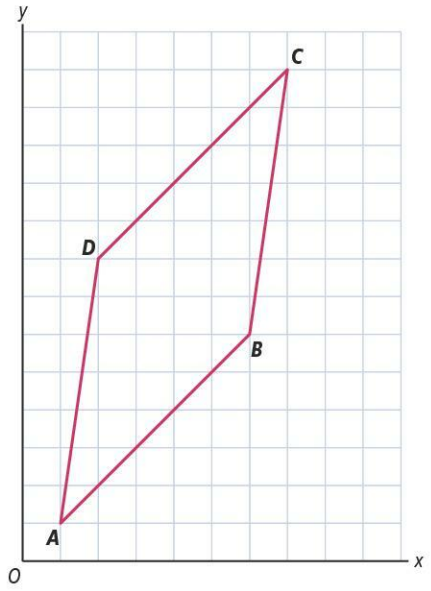
**a** Toon met behulp van vectoren aan dat vierhoek $ABCD$ een ruit is.

**b** Bewijs dat de diagonalen van $ABCD$ loodrecht op elkaar staan.

**c** Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen $\overrightarrow{AD}$ en $\overrightarrow{AC}$.

**d** Toon aan dat diagonaal $AC$ de hoek bij hoekpunt $A$ middendoor deelt.

**e** Ontbind de vector $\overrightarrow{CA}$ in twee vectoren evenwijdig aan de $x$-as en de $y$-as. Teken deze vectoren en geef de kentallen.

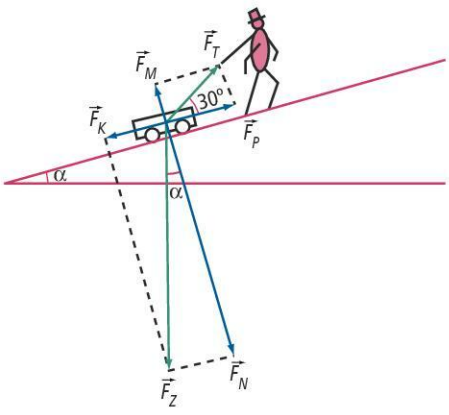



**8** Iemand trekt een karretje tegen een helling omhoog.

Op het karretje werkt de zwaartekracht $\overrightarrow{F_Z}$.
De hellingshoek is $\alpha = 15°$ en $F_Z = 250\,\text{N}$.
Deze kracht is ontbonden in twee onderling loodrechte componenten $\overrightarrow{F_N}$ en $\overrightarrow{F_K}$.

**a** Bereken met behulp van rechthoekige driehoeken de grootte van $\overrightarrow{F_N}$ en $\overrightarrow{F_K}$.

**b** Om het karretje tegen de helling op te trekken moet $\overrightarrow{F_P}$ minstens even groot zijn als $\overrightarrow{F_K}$ maar tegengesteld gericht.
De hoek tussen het touw en de helling is 30°.
Bereken in één decimaal de grootte van de kracht $\overrightarrow{F_T}$ waarmee minstens getrokken moet worden om het karretje te verplaatsen.




© Noordhoff Uitgevers bv

**1** Herleid de volgende formules tot een gelijkwaardige formule, waarbij $p$ is uitgedrukt in $q$.

**a** $q = 11 - \sqrt[3]{2p}$

**b** $q = \dfrac{2p + 1}{p}$

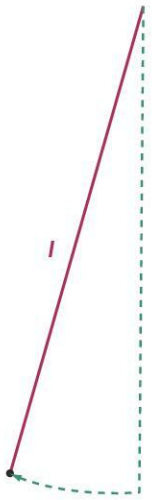
**2** Geef het functievoorschrift van de inverse functie.

**a** $f(x) = 1 + {}^3\log(10 - 2x)$

**b** $g(x) = (4 + 2\sqrt{x})^3$

**3** De vooraanstaande Nederlandse wis-, natuur- en sterrenkundige Christiaan Huygens formuleerde in de 17e eeuw een wet voor de slingertijd van een mathematische slinger. Deze wet luidt: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

Hierin is $T$ de slingertijd (de periode van de slinger) in seconden, $l$ is de lengte van de slinger in meters en $g$ is de versnelling van de zwaartekracht in m/s$^2$.




**a** Neem $g = 9{,}81$ en bereken algebraïsch de lengte van een slinger met een slingertijd van anderhalve seconde. Rond je antwoord af op hele cm.

**b** De valversnelling $g$ is constant onder de aanname dat de aarde een homogene bol is. In werkelijkheid is dat niet zo en zijn er kleine verschillen in het zwaartekrachtsveld van de aarde. Met een slinger kun je deze verschillen meten.
Druk daartoe $g$ uit in de overige variabelen.

**c** Op de evenaar heeft een slinger van 4,50 m lengte een slingertijd van 4,262 seconden.
Bereken de waarde van $g$ op de evenaar in twee decimalen.

**4** Op de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{x - 5}$ worden verschillende transformaties toegepast.
De beeldgrafiek is de grafiek van de functie $g$.

**a** Geef de horizontale translatie waarbij de grafiek van $g$ door (3, 3) gaat en geef het voorschrift van de functie $g$.

Je kunt de grafiek van $g$ door het punt $(-9, 2)$ laten gaan door één horizontale translatie op de grafiek van $f$ toe te passen, maar ook door de grafiek van $f$ te spiegelen in de $x$-as of de $y$-as.

**b** Geef de horizontale translatie en geef het functievoorschrift van $g$.

**c** Geef de as waarin gespiegeld wordt en geef het functievoorschrift van $g$.


© Noordhoff Uitgevers bv

**5** Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$.
De familie van functies $g_{a,b}$ wordt gegeven door $g_{a,b}(x) = a \cdot f(bx)$.

**a** Met welke transformaties kun je de grafiek van $g_{a,b}$ uit die van $f$ laten ontstaan?

**b** Geef een waarde van $a$ en een waarde van $b$, zó dat de grafiek van $g_{a,b}$ door $\left(\frac{1}{4}\pi, -2\right)$ gaat.

**6** Gegeven zijn de functies $f(x) = x^6 - 4x^4 + 2x^2 - 6$,
$g(x) = 4x(x^4 - x^2)$, $h(x) = \dfrac{4}{x^2 - x}$ en $k(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 1}$

**a** Ga met behulp van een plot na of de grafieken van bovenstaande functies symmetrisch zijn in de $y$-as, symmetrisch in de oorsprong of geen van beide.

**b** Toon de in opdracht a gevonden symmetrieën aan.

**c** Welke van de bovenstaande functies zijn even en welke oneven?

**7** Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = |(x - p)^2 - 12|$.

**a** Plot en schets de grafiek van $f_2$.

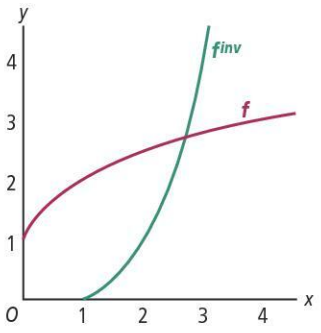
**b** Los exact op $f_4(x) = 4$.

**c** Bereken exact de extreme waarden van $f_4$.

**d** Bereken exact de waarden van $p$ zó dat de grafiek van $f_p$ door het punt (3, 3) gaat.

**e** De grafiek van $f_p$ heeft drie toppen.
Druk de coördinaten van elk van de drie toppen uit in $p$.
Je mag in je antwoord geen absolute waarde-strepen gebruiken.

**8** Gegeven zijn de grafieken van de functie $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ en de inverse functie $f^{inv}$.
$S$ is het snijpunt van deze grafieken.
Los exact op $f^{inv}(x) \leq f(x)$.



**1** Differentieer. Schrijf de afgeleide zonder gebroken of negatieve exponent.

**a** $g(x) = 3x\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}$

**b** $a(t) = (5t^3 + 2\sqrt{t})^5$

**c** $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{4x^3 - 7x}}$

**d** $q(p) = \dfrac{2p^3 - 2p\sqrt{p} + 5}{p\sqrt{p}}$

**2** Gegeven zijn de functies $g(x) = \sqrt{x}$ en $h(x) = x^2 - 6x + 8$.
Verder is $f(x) = g(h(x))$.

**a** Geef het functievoorschrift van $f$ en toon aan dat $f'(x) = \dfrac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}}$

**b** Leg uit waarom de grafiek van $f$ geen top heeft bij $x = 3$.

**c** Bereken de (rand)extreme waarden van $f$.

**d** Onderzoek de stand van de raaklijn aan de grafiek van $f$ in het punt $(2, 0)$.

**3** Gegeven is de grafiek van de afgeleide functie van een functie $k$.

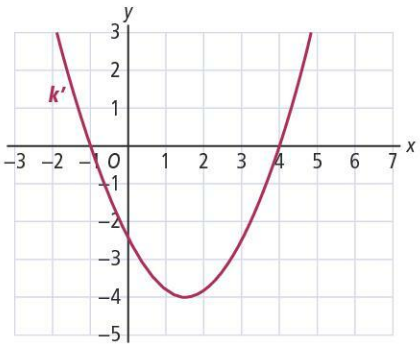
**a** Op welk(e) interval(len) is $k$ stijgend?

**b** Voor welke waarde van $x$ heeft $k$ een maximum en voor welke waarde van $x$ een minimum?

**c** Voor welke waarden van $x$ is er bij $k$ sprake van toenemende daling?

**d** Voor welke waarde van $x$ heeft de grafiek van $k$ een buigpunt?

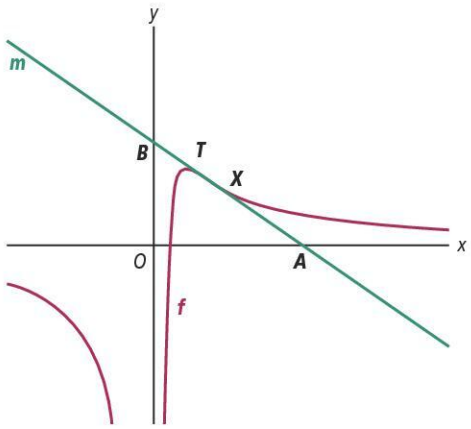
**e** Maak een schets van de grafiek van $k$ als bovendien gegeven is dat $k(5) = -4$.





© Noordhoff Uitgevers bv

**4** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}$




**a** De top van de grafiek is punt $T$.
Bereken exact de coördinaten van $T$.

**b** Het buigpunt van de grafiek is $X$.
Toon met behulp van de tweede afgeleide van $f$ aan dat $X$ de coördinaten $(1, 2)$ heeft.

**c** De buigraaklijn $m$ in punt $X$ snijdt de assen in $A$ en $B$.
Bereken exact de oppervlakte van $\triangle OAB$.

**5** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}}$

**a** Er geldt: $f(x) = g(h(x))$. Geef mogelijke voorschriften voor $g$ en $h$.

**b** Je kunt het voorschrift van $f$ ook opgebouwd denken uit drie functies $u$, $v$ en $w$.
Geef mogelijke voorschriften voor $u$, $v$ en $w$.

**c** Bereken exact de extreme waarde van $f$.

**6** Een weerballon wordt opgeblazen met behulp van een cilinder met waterstofgas. De ballon is bolvormig met een straal van $r$ cm. Het volume $V$ in m$^3$ van de ballon wordt gegeven door $V = -\frac{\pi}{50} \cdot t^2 \cdot (t - 15)$, hierin is $t$ de tijd in seconden, gemeten vanaf het moment dat de ballon aan de gascilinder is gekoppeld en de kraan daarvan wordt opengedraaid. De formule geldt zolang de kraan openstaat, dus zolang het volume toeneemt.

**a** Laat met een berekening zien dat de ballon nog geen gas bevat op het moment dat de ballon aan de cilinder wordt gekoppeld.

**b** Leg uit wat in deze situatie de betekenis is van $V'$.

De ervaring heeft geleerd dat de ballon op die manier op de juiste spanning wordt opgeblazen. De formule geldt dus tot de cilinderkraan weer dichtgedraaid wordt.

**c** Bereken exact na hoeveel seconden de kraan van de cilinder weer dichtgedraaid wordt.

**d** Bereken exact na hoeveel seconden de kraan van de cilinder maximaal geopend is.

**e** Voor het volume van de ballon geldt $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Laat zien dat de straal van de ballon wordt gegeven door $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} \cdot V}$ en bereken algebraïsch de snelheid waarmee de straal van de ballon toeneemt op het tijdstip $t = 5$. Rond af op twee decimalen.

© Noordhoff Uitgevers bv

**1** Schrijf als één logaritme.

**a** $\log(42) + \log(0{,}5)$

**b** $2 \cdot {}^{4}\log(6) - {}^{4}\log(2)$

**c** $3 + {}^{\frac{1}{2}}\log(88)$

**2** Los exact op.

**a** $5^{2x} - 6 \cdot 5^{x} + 5 = 0$

**b** $2^{x} + 24 \cdot 2^{-x} = 11$

**c** $9^{2x} - 2 \cdot 9^{x} = 0$

**d** ${}^{4}\log^{2}(x) - 8 \cdot {}^{4}\log(x) + 12 = 0$

**e** ${}^{\frac{1}{2}}\log^{2}(x) = 25$

**3** Los exact op.

**a** ${}^{3}\log(x + 1) + {}^{3}\log(x - 1) \leq 2$

**b** ${}^{5}\log(4 - x) - {}^{5}\log(3x - 4) = 1$

**c** $2 \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log(x) - {}^{\frac{1}{3}}\log(x - 2) = -2$

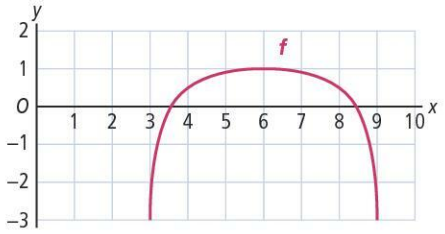
**4** Gebruik de rekenregels voor logaritmen om aan te tonen dat de functies hetzelfde zijn.

**a** $f(x) = {}^{3}\log(x) + 2 \cdot {}^{3}\log\left(\frac{1}{x}\right)$ en $g(x) = -{}^{3}\log(x)$

**b** $f(x) = {}^{2}\log(x) + {}^{4}\log(x)$ en $g(x) = 1\frac{1}{2} \cdot {}^{2}\log(x)$

**c** $f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$ en $g(x) = {}^{2}\log\left(\frac{1}{x}\right)$

**5** Gegeven is een functie $f(x) = {}^{3}\log(ax^2 + bx + c)$.
In de grafiek is aangegeven dat de lijnen $x = 3$ en $x = 9$ asymptoten zijn van de grafiek.
Het maximum van $f$ is 1.
Bereken de waarden van $a$, $b$ en $c$.





© Noordhoff Uitgevers bv

**6** In een laboratorium wordt de groei van een schimmel onderzocht. De met de schimmel bedekte oppervlakte kan bij benadering beschreven worden met de formule $O = 1{,}8^{1+\frac{2}{3}t}$.
Hierin is $O$ de oppervlakte in $cm^2$ en is $t$ de tijd in uren na het begin van het experiment.

**a** Bereken algebraïsch de verdubbelingstijd van de oppervlakte. Rond je antwoord af op een geheel aantal minuten.

**b** Druk $t$ uit in $O$.

**7** De kracht van een aardbeving kan worden aangegeven door een getal $R$ op de schaal van Richter en door de grootte van de versnelling $a$ van de gronddeeltjes in het epicentrum van de beving.
Tussen $R$ en $a$ blijkt een exponentieel verband te bestaan.
Enkele waarden van $R$ en de bijbehorende waarden van $a$ staan in onderstaande tabel.

| $R$ | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 0,08 | 0,29 | 1,02 | 13,3 | 620,6 |

**a** Laat zien dat er inderdaad bij benadering sprake is van een exponentieel verband.

**b** Laat zien dat voor het verband tussen $a$ en $R$ bij benadering de formule $a = 0{,}022 \cdot 3{,}6^R$ geldt.

**c** Herleid de formule uit opdracht b tot een vorm waarbij $R$ wordt uitgedrukt in $a$.

**d** Twee aardbevingen hebben een kracht van respectievelijk $R = 5{,}7$ en $R = 8{,}2$ op de schaal van Richter.
Bereken hoeveel keer de waarde van $a$ in het laatste geval groter was dan de waarde van $a$ in het eerste geval.

**8** Druk $p$ uit in $q$.

**a** $q = 4 + {}^2\log(p + 1)$

**b** $3q \cdot {}^5\log(p) = 12$

**9** **a** Het verband tussen de variabelen $a$ en $b$ voldoet aan de formule $2 \cdot \log(a) + 3 \cdot \log(b) = 1$.
Schrijf het verband tussen deze variabelen als een formule zonder logaritmen.

**b** Het verband tussen de variabelen $M$ en $Q$ voldoet aan de formule ${}^3\log(M) - 3 \cdot {}^3\log(Q) = 2$.
Druk $M$ uit in $Q$. Schrijf de formule zonder logaritmen.

© Noordhoff Uitgevers bv

**1** **a** Bereken een Riemann-som van $f(x) = \frac{4}{x}$ op het interval $[1, 5]$ met vier deelintervallen. Rond je antwoord af op twee decimalen.

**b** Bereken een Riemann-som van $g(x) = {}^{10}\log(2x + 1)$ op het interval $[0, 8]$ met 100 deelintervallen. Rond je antwoord af op twee decimalen.

**2** Geef de primitieve functies.

**a** $f(x) = \frac{1}{7}x^4 + \frac{4}{7x^4}$

**b** $g(x) = 1 - \sqrt{5x + 8}$

**c** $h(x) = \frac{6}{(3x + 2)^2}$

**3** Bereken exact.

**a** $\int_0^6 (x^3 - 2x^2 + 1)\,dx$

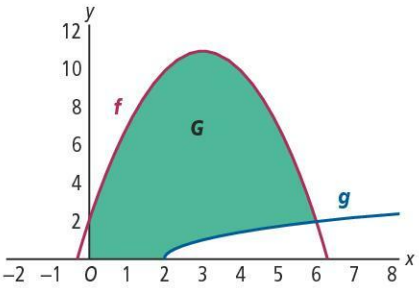
**b** $\int_{-3}^{-1} \frac{2x^3 - 3}{x^2}\,dx$

**c** $\int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{5x + 4}\right)dx$

**4** Gegeven zijn de functies $f(x) = -x^2 + 6x + 2$ en $g(x) = \sqrt{x - 2}$.

**a** Laat met een berekening zien dat de grafieken van $f$ en $g$ elkaar in het punt $S(6, 2)$ snijden.

**b** Het gebied $G$ wordt ingesloten door de $x$-as, de $y$-as en de grafieken van $f$ en $g$.
Bereken exact de oppervlakte van $G$.



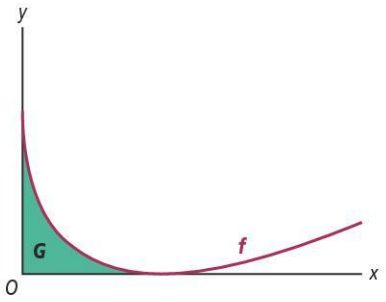

**5** Bereken met je rekenmachine en rond je antwoord af op twee decimalen.

**a** $\int_{-1}^{1} 8^x\,dx$

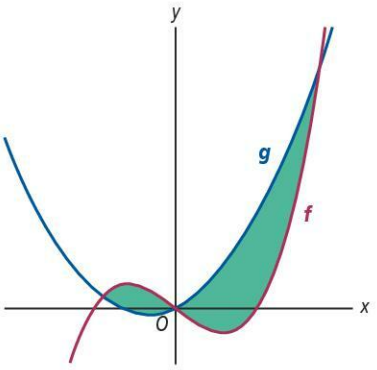
**b** $\int_0^6 \sqrt{x(6 - x)}\,dx$


© Noordhoff Uitgevers bv

**6** Met domein $[0, \rightarrow\rangle$ is gegeven de functie $f(x) = (\sqrt{x} - 2)^2$.
$G$ is het gebied dat wordt ingesloten door de $x$-as, de $y$-as en de grafiek van $f$.
Bereken exact de oppervlakte $G$.




**7** Gegeven zijn de functies $f(x) = x^3 - 5x$ en $g(x) = 2x^2 + 3x$.
In de figuur zijn de grafieken van $f$ en $g$ getekend.
De grafieken sluiten twee gebieden in.
Bereken exact de totale oppervlakte van de ingesloten gebieden.




**8** De parabool met vergelijking $y = 4x - x^2$ en de $x$-as sluiten een gebied $V$ in. In de tekening is $V$ het totale gebied $G_1$ en $G_2$.
De lijn $y = ax$ (met $0 \leq a < 4$) snijdt de parabool in de oorsprong en in punt $A$.

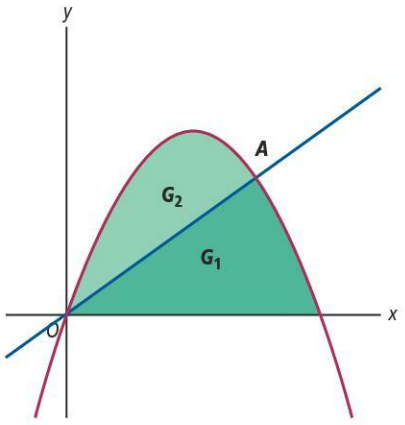
**a** Bereken exact de oppervlakte van $V$.

**b** Neem $a = 1$ en bereken exact de oppervlakte van het gebied $G_1$ dat ingesloten wordt door de lijn $y = ax$, de parabool en de $x$-as.

**c** Toon aan dat punt $A$ coördinaten $(4 - a, 4a - a^2)$ heeft.

**d** Toon aan dat de oppervlakte van het deel van $V$ dat boven de lijn $OA$ ligt $(G_2)$ gelijk is aan $\frac{1}{6}(4 - a)^3$.

**e** Bereken exact voor welke waarde van $a$ de oppervlakte van $G_1$ gelijk is aan $G_2$.




© Noordhoff Uitgevers bv

**A**
absolute waarde 96
afgeleide functie 120
afnemend dalend 138
afnemend stijgend 138

**B**
beeldgrafiek 11
beginhoeveelheid 8
bovengrens 200
buigpunt 139
buigraaklijn 139

**D**
deler 236
differentiëren 120
diophantische vergelijking 240

**E**
equivalent 104
even functie 93
exponentiële functie 10
exponentiële vergelijking 14
extreme waarden 134

**F**
familie van functies 86

**G**
gehele getallen 235
gelijkwaardig 104
ggd 239
groeifactor 8

**H**
halfwaardetijd 164
halveringstijd 164
hoofdstelling van de integraalrekening 205

**I**
inproduct 57
integraal 200
integrand 200
integreren 205
inverse bewerkingen 100
inverse functie 100
inwendig product 57
irrationale getallen 235

**K**
kentallen 48
kettingfunctie 127
kettingregel 131
kgv 239
knik 97
kop-staart-methode 45

**L**
lengte van een vector 44
logaritme 18
logaritmische functies 26

**N**
natuurlijke getallen 235
normaalvector 65
nulvector 45

**O**
ondergrens 200
oneven functie 93
ontbinden in vectoren 50

**P**
parameter 60
plaatsvector 48
priemgetal 236
priemontbinding 236
primitieve 205
primitiveren 205
puntmassa's 53
puntsymmetrie in (0, 0) 92

**R**
raaklijn aan een grafiek 120
randextremen 135
rationale getallen 235
reële getallen 235
regels voor integreren 208
regels voor primitiveren 208
rekenregels voor logaritmen 167
rekenregels voor machten 8
richtingsvector 60
Riemann-som 197

**S**
samengestelde functie 127
samengesteld getal 236
somregel 120
somvector 45
steunvector 60
symmetrie in de $x$-as 92

**T**
tegengestelde vector 45
terugrekenschema 100
toenemend dalend 138
toenemend stijgend 138
transformatie 11
translatie 89
tweede afgeleide 138


© Noordhoff Uitgevers bv

**V** vector 44
vectorvoorstelling 60
verdubbelingstijd 164
vermenigvuldigen t.o.v. de $x$-as 89
vermenigvuldigen t.o.v. de $y$-as 89
verschilvector 45

**W** wiskundig model 179

**Z** zwaartepunt 52

© Noordhoff Uitgevers bv

**Ontwerp omslag** G2K, Groningen/Amsterdam
**Fotografie omslag** Getty Images
**Ontwerp binnenwerk** Ebel Kuipers, Sappemeer
**Illustraties** Peter Fitzverploegh, Utrecht
**Technisch tekenwerk** Integra Software Services, India
**Beeldresearch** Daliz, Den Haag

**Fotoverantwoording**
E+/ Getty Images, Amsterdam: p. 6-7, 40-41, 84-85, 166
Dave de Bruin/ Daliz, Den Haag: p. 10, 248
Shutterstock, New York: p. 14, 18, 131, 180
istockphoto/Getty Images, Amsterdam: p. 78-79, 152-153, 226-227
Universiteitsmuseum, Utrecht: p. 78l
Alamy/ Image Select, Wassenaar: p. 78r, 152, 244
lzf/Shutterstock.com: p. 96
Caiaimage/ Getty Images, Amsterdam: p. 118-119
jonson/Shutterstock: p. 122
Philip B. Espinasse/Shutterstock.com: p. 124
Sukpaiboonwat/Shutterstock.com: p. 126
Milat_oo/Shutterstock.com: p. 138
Alex Domanski/ Reuters, Londen: p. 158-159
Rawpixel.com/Shutterstock.com: p. 162
EPA/ ANP Foto, Den Haag: p. 164
Roman Zaiets/Shutterstock.com: p. 182
Goran Jakus/Shutterstock.com: p. 191
EyeEm/ Getty Images, Amsterdam: p. 192-193
Suriyapong Thongsawangetty/ Getty Images, Amsterdam: p. 232-233
David Johnson/ Dreamstime.com, San Francisco: p. 250-251
Raoul Axinte/Shutterstock.com: p. 271


© Noordhoff Uitgevers bv

LEERBOEK

FLEX

WISKUNDE B

VWO DEEL 2

## Met FLEX heb je:

**Boeken die je mag houden**

- elk schooljaar krijg je een nieuw boek
- dit boek mag je houden om in te markeren en te werken
- zo wordt je boek een effectief leermiddel

**Een persoonlijke digitale leeromgeving**

- waarin je wordt uitgedaagd om het beste uit jezelf te halen
- met oefentoetsen, interactieve opdrachten en feedback
- en met inzicht in je resultaten

+

**Altijd actueel lesmateriaal**

- actuele inhoud met opdrachten en toetsen
- zowel in je boek als digitaal
- aangevuld met nieuw lesmateriaal op basis van het nieuws en actualiteiten

Noordhoff

MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189

www.modernewiskunde.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-89203-6
9 789001 892036