

MODERNE WISKUNDE

B



Noordhoff

$$v = \frac{4h}{2(h+z) - zh}$$

12e editie

Moderne Wiskunde

vwo B deel 3

Serieoverzicht Tweede Fase

	havo		vwo		
klas 4	A 1	B 1	AC 1		B 1
klas 5	A 2	B 2	AC 2		B 2
klas 6	A 3	B 3	A 3	C 3	B 3
			A 4	C 4	B 4

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleen.

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 21

© 2021 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsenauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-73612-5

12e editie

Moderne Wiskunde

vwo B deel 3

Jeroen van den Boom

Bert Boon

Ferdi Doddema

Wim Doekes

Ilse de Jong

Gerard van Proosdij

Colin Roll

Geertrui Schaberg

Ron Sinkeldam

Carolijn Tacken

Moderne Wiskunde

vwo B deel 3

13 Cirkels 6

- Voorkennis 8
- 13.1 Vergelijking van een cirkel 10
- 13.2 Snijpunten van lijn en cirkel 14
- 13.3 Raaklijnen aan een cirkel 18
- 13.4 Snijdende cirkels 22
- 13.5 Afstand tot een cirkel 26
- 13.6 Ingeschreven en omgeschreven cirkel 30
- 13.7 Gemengde opdrachten 34
 - Onderzoeksopdrachten 35
 - Samenvatting 36
 - Test jezelf 40
 - Extra oefening 42

14 Exponentiële en logaritmische functies 44

- Voorkennis 46
- 14.1 Een ander grondtal 48
- 14.2 Het getal e 52
- 14.3 Natuurlijke logaritme 56
- 14.4 Afgeleide functies 60
- 14.5 Primitieven 64
- 14.6 Gemengde opdrachten 68
 - Onderzoeksopdrachten 69
 - Samenvatting 70
 - Test jezelf 74
 - Extra oefening 76
- Vaardigheden 7 78**
 - Som- en verschilfuncties 80
 - Goniometrische vergelijkingen 81
 - Integreren 82
 - Vergelijkingen oplossen 83

15 Meetkunde: rekenen of redeneren 84

- Voorkennis 86
- 15.1 Sinusregel 88
- 15.2 Cosinusregel 92
- 15.3 Stelling van Thales 96
- 15.4 Cirkels en raaklijnen 100
- 15.5 Algebraïsch of meetkundig 104
- 15.6 Gemengde opdrachten 108
- Onderzoeksopdrachten 109
- Samenvatting 110
- Test jezelf 114
- Extra oefening 116

16 Product- en quotiëntfuncties 118

- Voorkennis 120
- 16.1 Product- en quotiëntfuncties 122
- 16.2 Limieten en horizontale asymptoten 126
- 16.3 Productregel 130
- 16.4 Quotiëntregel 134
- 16.5 Gemengde opdrachten 138
- Onderzoeksopdrachten 139
- Samenvatting 140
- Test jezelf 144
- Extra oefening 146

Vaardigheden 8 148

- Rekenen met machten, exponenten en wortels 150
- Lijnen en cirkels 151
- Inverse functies 152
- Lijn- en puntsymmetrie 153

17 Goniometrische functies 154

- Voorkennis 156
- 17.1 Harmonische trillingen 158
- 17.2 Goniometrische formules 162
- 17.3 Vergelijkingen oplossen 166
- 17.4 Differentiëren 170
- 17.5 Integreren 174
- 17.6 Tangensfunctie 178
- 17.7 Gemengde opdrachten 182
- Onderzoeksopdrachten 183
- Samenvatting 184
- Test jezelf 188
- Extra oefening 190

18 Toepassingen van integreren 192

- Voorkennis 194
- 18.1 Integraal en oppervlakte 196
- 18.2 Omwentelingslichamen 200
- 18.3 Wentelen om de y-as 204
- 18.4 Variabele grenzen 208
- 18.5 Gemengde opdrachten 212
- Onderzoeksopdrachten 213
- Samenvatting 214
- Test jezelf 218
- Extra oefening 220

Vaardigheden 9 222

- Lijnen 224
- Machtsverbanden 225
- Sinus- en cosinusregel 226
- Differentiëren 227

Keuzeonderwerpen 228

- Matrices 230
- Meetkundige bewijzen 244

Trefwoorden 248





In dit hoofdstuk

Hoofdstuk 4 ging over vergelijkingen van lijnen, hoeken tussen lijnen en afstanden tot lijnen.

In hoofdstuk 8 heb je geleerd een lijn te beschrijven met een vectorvoorstelling en hoe je een vectorvoorstelling omzet in een vergelijking.

In dit hoofdstuk ga je werken met cirkels: vergelijkingen van cirkels opstellen, cirkels snijden, raaklijnen aan cirkels opstellen en de afstand tot een cirkel berekenen.

De meetkunde krijgt een vervolg in hoofdstuk 15 en een afsluitend hoofdstuk 22.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk:

- | | |
|--|-------------|
| • <i>Probleemoplossen en analytisch denken</i> | opdracht 36 |
| • <i>Logisch redeneren en bewijzen</i> | opdracht 55 |
| • <i>Ordenen en structureren</i> | opdracht 58 |

- V1** Gegeven is de lijn met vergelijking $3x + 4y = 12$.
- Bereken de coördinaten van de snijpunten met de assen.
 - Schrijf de vergelijking in de vorm $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.
 - Hoe kun je in de vergelijking van opdracht b de snijpunten met de assen herkennen?
 - Schrijf de vergelijking in de vorm $y = mx + n$.

Theorie

Een vergelijking van een lijn l kun je op verschillende manieren weergeven:

- in de vorm $ax + by = c$.
Als $a = 0$ dan is l evenwijdig met de x -as,
als $b = 0$ dan is l evenwijdig met de y -as.
- in de vorm $y = mx + n$, mits l niet evenwijdig is aan de y -as.
- in de vorm $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$, als l de assen snijdt in $(p, 0)$ en $(0, q)$ met $p \neq 0$ en $q \neq 0$.

Als twee lijnen k en l met richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 loodrecht op elkaar staan, dan geldt $m_1 \cdot m_2 = -1$.
Het omgekeerde is ook waar.

Voorbeeld

Lijn l gaat door $(-6, 0)$ en $(0, 2)$.
Stel een vergelijking van l op in de vorm $y = mx + n$ en toon aan dat l loodrecht staat op lijn k : $y = -3x + 8$.

Oplossing

Er geldt l : $\frac{x}{-6} + \frac{y}{2} = 1$.

Links en rechts vermenigvuldigen met 6 geeft $-x + 3y = 6$ ofwel $y = \frac{1}{3}x + 2$.

De richtingscoëfficiënt van l is $\frac{1}{3}$.
De richtingscoëfficiënt van k is -3 .
 $\frac{1}{3} \cdot -3 = -1$ dus $l \perp k$.

- V2**
- Schrijf $y = -1\frac{1}{5}x + 3$ in de vorm $ax + by = c$.
 - Schrijf $y = -\frac{2}{5}x + 10$ in de vorm $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.
 - Schrijf $\frac{x}{5} + \frac{y}{7} = 1$ in de vorm $y = mx + n$.
- V3** Onderzoek of de lijnen k en l loodrecht op elkaar staan.
- k : $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$ en l : $4x - 5y = 12$
 - k : $y = 2x - 3$ en l : $x - 2y = 1$
- V4**
- Stel een vergelijking op van de lijn l door het punt $P(3, -4)$ loodrecht op lijn k : $y = 1\frac{1}{2}x + 3$.
 - Stel een vergelijking op van de lijn m door het punt $P(-2, 8)$ loodrecht op lijn n : $3x - 8y = 9$.
 - Gegeven zijn de punten $A(-2, 7)$ en $B(6, 1)$.
Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van lijnstuk AB .

Theorie

Een **vectorvoorstelling** van de lijn l door de punten $P(p_1, p_2)$

en $Q(q_1, q_2)$ is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}$.

Als twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ loodrecht op elkaar staan, is hun **inproduct** $\vec{a} \cdot \vec{b}$ gelijk aan 0.

Is $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ een richtingsvector van een lijn k , dan is $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$

een **normaalvector** van k .

Een vergelijking van k is dan $bx - ay = c$.

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van

lijn l : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Oplossing

$\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, dus een vergelijking

van l is $5x + 2y = c$.

$(2, 7)$ ligt op l . Invullen geeft:

$10 + 14 = c$, dus $c = 24$.

l : $5x + 2y = 24$

V5 Stel van elke lijn een vectorvoorstelling op.

a door de punten $A(2, -3)$ en $B(-7, 0)$.

b door de punten $C(8, 15)$ en $D(2, -10)$.

V6 Stel van elke lijn een vergelijking op.

a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

V7 Stel van elke lijn een vectorvoorstelling op.

a $x + y = 5$

b $y = -5x + 3$

Theorie

De **afstand tussen twee punten** $A(a_1, a_2)$ en $B(b_1, b_2)$ is

$$AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

De afstand $d(P, l)$ van een punt P tot een lijn l vind je door de loodlijn door P te snijden met l . Is Q het snijpunt, dan is $d(P, l) = PQ$.

V8 Bereken exact $d(P, l)$.

a $P(3, -11)$ en $l: y = x$

b $P(5, 12)$ en $l: 3x + 4y = 13$

13.1 Vergelijking van een cirkel

Je leert

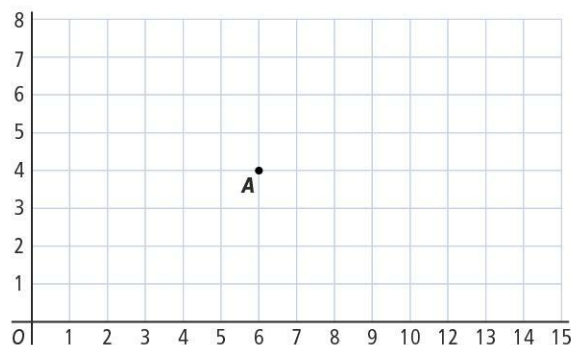
- wat de middelpuntsvergelijking van een cirkel is
- hoe je met kwadraat afsplitsen een vergelijking van een cirkel herleidt tot een middelpuntsvergelijking

Leerroutes

- ondersteunend: 1–2–3–4–5–6–07–7–8
- doorlopend: 1–2–3–4–5–6–7–8–9
- uitdagend: 1–2–4–5–7–8–9–U1–U2

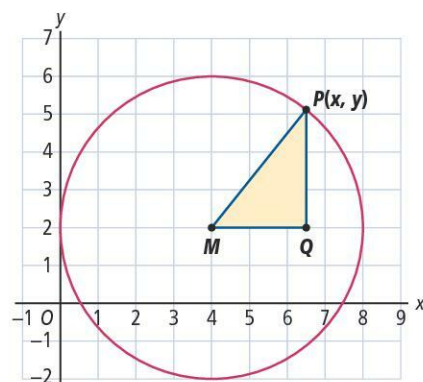
Kay wil weten hoeveel roosterpunten op een afstand kleiner dan 4 liggen van punt $A(6, 4)$.

- Hoe kan Kay het handig aanpakken om dat aantal te bepalen?



1 Gegeven is cirkel c met middelpunt $M(4, 2)$ en straal 4. Op de cirkel ligt een punt $P(x, y)$.

- Er geldt $MQ = x - 4$ of $MQ = 4 - x$. In welk geval geldt $MQ = x - 4$? En in welk geval $MQ = 4 - x$?
- Druk PQ uit in y .
- Druk MP^2 uit in x en y .
- Toon aan dat de coördinaten van P voldoen aan de vergelijking $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$.
- Cirkel d heeft middelpunt $(3, -4)$ en straal 5. Stel een vergelijking op van d .



Theorie

Bij de cirkel met middelpunt $M(a, b)$ en straal r hoort de vergelijking $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Zo'n vergelijking noem je de **middelpuntsvergelijking** van de cirkel.

Voorbeeld

Geef de middelpuntsvergelijking van de cirkel met middelpunt $(-2, 1)$ en straal $3\sqrt{2}$.

Oplossing

De middelpuntsvergelijking van de cirkel is

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = (3\sqrt{2})^2$$

$$\text{ofwel } (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 18.$$

- 2** **H** a Gegeven is cirkel c met middelpunt $(-4, -7)$ en straal 8.
Stel de middelpuntsvergelijking op van c .
- b Gegeven zijn de punten $A(-1, -3)$ en $B(4, -2)$.
Cirkel d heeft middelpunt B en gaat door A .
Stel de middelpuntsvergelijking op van d .
- c Toon met een berekening aan dat punt $C(3, 3)$ op d ligt.
- 3** Gegeven is cirkel $c: (x - 3)^2 + y^2 = 9$.
- a Geef de coördinaten van het middelpunt en de straal van c .
- b Stel een vergelijking op van de beeldcirkel van c bij spiegelen in de y -as.
- c Cirkel d heeft als middelpunt het punt $(6, 0)$.
De straal van d is twee keer zo groot als die van c .
Stel de middelpuntsvergelijking op van d .
- 4** Een cirkel met straal $\sqrt{65}$ en het middelpunt op een van beide assen gaat door het punt $(7, 8)$.
- a Hoeveel cirkels voldoen aan deze voorwaarden?
- b Stel de middelpuntsvergelijking op van elke mogelijke cirkel.
- 5** Gegeven is cirkel $c: (x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 26$.
- a Geef de coördinaten van het middelpunt en de straal van c .
- b Toon aan dat de vergelijking te schrijven is als $x^2 + y^2 - 8x + 2y = 9$.

Voor een vergelijking van een cirkel zijn twee notaties gebruikelijk. De eerste is in de vorm van een middelpuntsvergelijking $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. De tweede is in de vorm $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$. In opdracht 5 heb je de eerste vorm omgewerkt naar de tweede vorm, in opdracht 6 leer je hoe je de tweede vorm kunt herleiden naar een middelpuntsvergelijking.

- 6** Gegeven is cirkel $c: x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$.
Om de middelpuntsvergelijking te vinden, ga je kwadraat afsplitsen. Zet eerst de termen met een factor x bij elkaar en ook de termen met een factor y :
 $x^2 - 8x + y^2 + 2y + 12 = 0$.
- a Op het blaadje is een begin gemaakt met de herleiding tot de middelpuntsvergelijking. Maak de herleiding af.
- b Geef de coördinaten van het middelpunt en de straal van c .

●	$x^2 - 8x + y^2 + 2y + 12 = 0$					
●	$x^2 - 8x = (x - \dots)^2 - \dots$					
●	$y^2 + 2y = (y + \dots)^2 - \dots$					
●	$(x - \dots)^2 - \dots + (y + \dots)^2 - \dots + 12 = 0$					
●	$(x - \dots)^2 + (y + \dots)^2 = \dots$					

Theorie

Door twee keer **kwadraat afsplitsen** toe te passen op de vergelijking $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$ kun je de vergelijking herleiden tot de middelpuntsvergelijking.

Voorbeeld

Herleid $x^2 + y^2 - 16x + 12y + 75 = 0$ tot de middelpuntsvergelijking.

Oplossing

$$x^2 - 16x = (x - 8)^2 - 64 \text{ en}$$

$$y^2 + 12y = (y + 6)^2 - 36$$

De vergelijking kan herschreven worden als

$$(x - 8)^2 - 64 + (y + 6)^2 - 36 + 75 = 0 \text{ ofwel}$$

$$(x - 8)^2 + (y + 6)^2 = 25.$$

Ondersteunende route → maak opdracht 07

- 7** Herleid tot de middelpuntsvergelijking en geef de coördinaten van het middelpunt en de straal van de cirkel.

H

a $x^2 + y^2 + 4y = 9$

b $x^2 + y^2 - 10x - 24y = 0$

c $x^2 + y^2 - 3x - y + \frac{1}{2} = 0$

d $x^2 + y^2 - 2\sqrt{3} \cdot x + 4\sqrt{2} \cdot y + 4 = 0$

- 8** De cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = 0$ gaat behalve door de oorsprong ook nog door de punten $P(1, 5)$ en $Q(6, 4)$.

a Controleer dat de cirkel door de oorsprong gaat.

b Bereken a en b .

c Bereken exact de coördinaten van het middelpunt en de straal van de cirkel.

- 9**
- a** Waarom hoort bij de vergelijking $x^2 + y^2 - 4x - 20y + 108 = 0$ geen cirkel?
- b** Toon aan dat de vergelijking $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$ alleen de vergelijking van een cirkel is als $p^2 + q^2 > 4s$.

Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2

Ondersteunende opdrachten

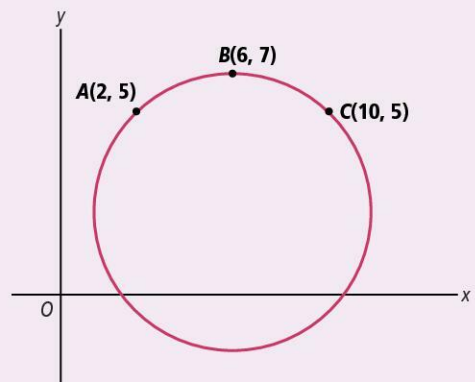
- 07** Gegeven is cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 + 10x - 6y + 9 = 0$. In deze opdracht ga je de vergelijking van c herleiden tot een middelpuntsvergelijking.
- Leg uit wat er in stap 1 is gebeurd.
 - Schrijf $(x + 5)^2$ zonder haakjes. Welk getal moet er in stap 2 op de puntjes staan?
 - Leg uit hoe je het getal kunt vinden dat in stap 3 op de puntjes tussen haakjes moet staan.
 - Hoe vind je het getal dat in stap 3 op de laatste puntjes moet staan?
 - Vul de ontbrekende getallen in bij de stappen 4 en 5.
 - Geef de coördinaten van het middelpunt en de straal van c .

☐	$x^2 + y^2 + 10x - 6y + 9 = 0$	
☐	$x^2 + 10x + y^2 - 6y + 9 = 0$	1
☐	$x^2 + 10x = (x + 5)^2 - \dots$	2
☐	$y^2 - 6y = (y - \dots)^2 - \dots$	3
☐	$(x + 5)^2 + (y - \dots)^2 - \dots + 9 = 0$	4
☐	$(x + 5)^2 + (y - \dots)^2 = \dots$	5

Uitdagende opdrachten

- U1** **a** Gegeven is de plaatsvector $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
- Leg uit dat $|\vec{a}| = r$ voor $r > 0$ de vergelijking van een cirkel is.
- b** Gegeven is de plaatsvector $\vec{b} = \begin{pmatrix} x - 6 \\ y + 4 \end{pmatrix}$.
- Leg uit dat $|\vec{b}| = 7$ de vergelijking van een cirkel is. Geef ook de coördinaten van het middelpunt en de straal.

- U2** Van de cirkel zijn drie punten gegeven. Stel de middelpuntsvergelijking op van deze cirkel.



13.2 Snijpunten van lijn en cirkel

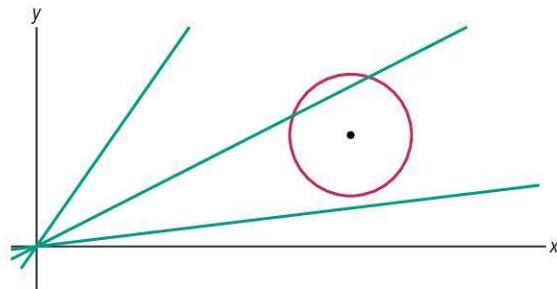
Je leert

- hoe je de coördinaten van de snijpunten van een lijn en een cirkel berekent

Leerroutes

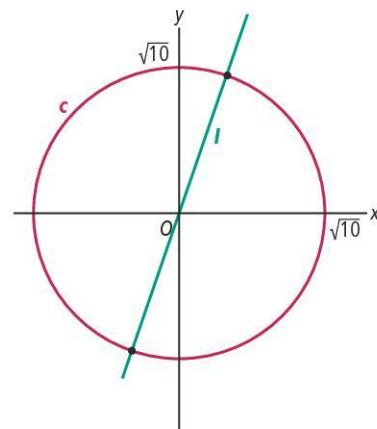
- ondersteunend: 10—11—12—013—13—14—15—016—17
- doorlopend: 10—11—12—13—14—15—16—17—18
- uitdagend: 10—11—12—13—14—16—17—18—U3

- Hoeveel punten kan een lijn door de oorsprong gemeenschappelijk hebben met de getekende cirkel?
- Lijnen door de oorsprong voldoen aan de vergelijking $y = mx$.
Stel dat een vergelijking van de cirkel is gegeven.
Hoe kun je dan onderzoeken bij welke waarden van m de lijn en de cirkel gemeenschappelijke punten hebben?



- 10** Lijn $l: y = 3x$ snijdt cirkel $c: x^2 + y^2 = 10$ in twee punten.

- Substitueer $y = 3x$ in de vergelijking van c en bereken van elk snijpunt de x -coördinaat.
- Bereken met behulp van de vergelijking van l de y -coördinaten van de snijpunten.
- Lijn $m: x + 2y = 1$ snijdt c ook in twee punten.
Schrijf de vergelijking van m in de vorm $x = \dots$ en gebruik deze vorm om de coördinaten van de snijpunten van m en c te berekenen.



- 11** Een lijn kan ook gegeven worden door een vectorvoorstelling.

Gegeven is lijn $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ en cirkel $c: x^2 + y^2 = 169$.

Voor elk punt van l geldt $x = 2 + 3\lambda$ en $y = 10 + 2\lambda$.

- Om de coördinaten van de snijpunten van l met c te berekenen, substitueer je $x = 2 + 3\lambda$ en $y = 10 + 2\lambda$ in de vergelijking $x^2 + y^2 = 169$.
Toon aan dat dit leidt tot de vergelijking $13\lambda^2 + 52\lambda - 65 = 0$.
- Los de vergelijking $13\lambda^2 + 52\lambda - 65 = 0$ op en bereken de coördinaten van de snijpunten van l en c .

Theorie

Je kunt de coördinaten van de snijpunten van een lijn en een cirkel berekenen met behulp van substitutie.

- Als de lijn gegeven is door een vergelijking, herleid je de vergelijking eerst tot de vorm $y = \dots$ of $x = \dots$
- Als de lijn gegeven is door een vectorvoorstelling, druk je x en y eerst uit in de parameter.

Voorbeeld 1

Bereken de coördinaten van de snijpunten van lijn l : $y - 3x = 1$ en cirkel c : $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

Oplossing

Substitutie van $y = 3x + 1$ geeft

$$(x + 1)^2 + (3x - 2)^2 = 25.$$

$$x^2 + 2x + 1 + 9x^2 - 12x + 4 = 25$$

$$10x^2 - 10x - 20 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \text{ dus } (x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x = -1 \text{ of } x = 2$$

Invullen in $y = 3x + 1$ geeft

$$y = -2 \text{ of } y = 7.$$

Snijpunten: $(-1, -2)$ en $(2, 7)$.

Voorbeeld 2

Bereken de coördinaten van de snijpunten van

$$\text{lijn } l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ en}$$

$$\text{cirkel } c: x^2 + y^2 - 4x - 2y = 20.$$

Oplossing

Substitutie van $x = \lambda$ en $y = 4 - \lambda$ geeft

$$\lambda^2 + (4 - \lambda)^2 - 4\lambda - 2(4 - \lambda) = 20.$$

$$\lambda^2 + 16 - 8\lambda + \lambda^2 - 4\lambda - 8 + 2\lambda = 20$$

$$2\lambda^2 - 10\lambda - 12 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$$

$$(\lambda - 6)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda = 6 \text{ of } \lambda = -1$$

Invullen in $x = \lambda$ en $y = 4 - \lambda$ geeft de snijpunten: $(6, -2)$ en $(-1, 5)$.

- 12** Bereken de coördinaten van de snijpunten van cirkel c en lijn l .

H **a** c : $x^2 + y^2 = 20$ en l : $y = x + 2$

b c : $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 80$ en l : $3y + x = 15$

Ondersteunende route → maak opdracht 013

- 13** Bereken de coördinaten van de snijpunten van cirkel c en lijn l .

H **a** c : $x^2 + y^2 = 40$ en l : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b c : $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 10$ en l : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- 14** Gegeven zijn cirkel c : $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 39 = 0$ en de punten $A(-2, 10)$ en $B(8, 2)$.

H Bereken de coördinaten van de snijpunten van c en lijn AB .

- 15** Gegeven zijn cirkel c : $x^2 + y^2 = 5$ en lijn l : $2y + x = 5$.

a Toon aan dat substitutie van $x = 5 - 2y$ in de vergelijking van c leidt tot de vergelijking $y^2 - 4y + 4 = 0$.

b Bereken de discriminant van de vergelijking van opdracht a.

c Bereken de coördinaten van het gemeenschappelijke punt.

Een cirkel en een lijn kunnen twee, één of geen punten gemeenschappelijk hebben. De kwadratische vergelijking waarmee je de coördinaten van de gemeenschappelijke punten berekent, heeft dan twee, één of geen oplossingen. Met behulp van de discriminant stel je het aantal oplossingen vast.

$D < 0$: geen oplossingen
 $D = 0$: één oplossing
 $D > 0$: twee oplossingen

Ondersteunende route → maak opdracht 016

- 16** Ga met een berekening na hoeveel punten de cirkel en de lijn gemeenschappelijk hebben.

a $c: x^2 + y^2 = 20$ en $l: y = 3x + 4$

b $c: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 16$ en $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c $c: x^2 + y^2 - 2x - 119 = 0$ en de lijn door $A(1, 6)$ en $B(4, 3)$

Theorie

Als een lijn l en een cirkel c precies één punt R gemeenschappelijk hebben, dan is l de **raaklijn** in R aan c . Punt R heet het **raakpunt**.

- 17** Gegeven zijn cirkel $c: x^2 + (y - 15)^2 = 180$ en lijn $l: y = px$. Er zijn twee waarden voor p waarvoor c en l precies één punt gemeenschappelijk hebben.

a Substitueer $y = px$ in $x^2 + (y - 15)^2 = 180$ en herleid het resultaat tot de vergelijking $(p^2 + 1)x^2 - 30px + 45 = 0$.

b Deze vergelijking heeft precies één oplossing als de discriminant gelijk is aan 0.

Neem $a = p^2 + 1$, $b = -30p$ en $c = 45$ en bereken exact de waarden van p waarvoor $D = b^2 - 4ac$ gelijk is aan 0.

c Bereken exact voor elk van de gevonden waarden van p de coördinaten van het gemeenschappelijke punt van c en l .

- 18** Gegeven zijn cirkel $c: (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 11$ en lijn $l: 5y - x = 17$.

a Bereken de afstand van het middelpunt van c tot l .

b Beredeneer met je antwoord van opdracht a hoeveel punten c en l gemeenschappelijk hebben.

Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

- 013** Op het blaadje is een begin gemaakt met het berekenen van de coördinaten van de snijpunten van de cirkel $c: (x-1)^2 + y^2 = 10$ en de lijn

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Voor elk punt op l kun je schrijven $x = -2 + 2\lambda$.
Vul bij stap 1 in hoe je y in λ uitdrukt.
- Het resultaat van stap 1 vul je in de vergelijking van c in.
Leg uit waarom er -3 tussen de eerste haakjes staat.
- Vul stap 2 verder in.
- Werk de haakjes weg in stap 3 en los de vergelijking verder op.
- Je vindt twee waarden voor λ .
Vul de twee waarden in bij de vectorvoorstelling van l en schrijf in stap 6 de coördinaten van de snijpunten op.

●	$x = -2 + 2\lambda$ en $y = \dots$	1
●	$(-3 + 2\lambda)^2 + (\dots)^2 = 10$	2
●	$9 - 12\lambda + 4\lambda^2 + \dots - \dots\lambda + \dots\lambda^2 = 10$	3
●	$\dots\lambda^2 - \dots\lambda + \dots = 0$	4
●	$\lambda = \dots$ of $\lambda = \dots$	5
●	Snijpunten: $(\dots, \dots)$ en $(\dots, \dots)$	6

- 016** Gegeven zijn cirkel $c: x^2 + y^2 + 8y = 24$ en lijn $l: x + 3y = 9$.
Om te bepalen hoeveel gemeenschappelijke punten c en l hebben, substitueer je $x = -3y + 9$ in de vergelijking van c .

- Laat zien dat dit leidt tot de vergelijking $10y^2 - 46y + 57 = 0$.
- Bereken de discriminant van de vergelijking in opdracht a.
- Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking in opdracht a?
Hoeveel punten hebben c en l dus gemeenschappelijk?

Ga met een berekening na hoeveel punten de cirkel en de lijn gemeenschappelijk hebben.

d $c: (x-1)^2 + y^2 = 20$ en $l: y = 3x + 1$

e $c: x^2 + y^2 = 16$ en $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

f $c: x^2 + y^2 - 6x - 2y = 19$ en $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Uitdagende opdrachten

- U3** Gegeven is punt $P(0, -14)$ en cirkel $c: x^2 + y^2 + 2x + 4y = 15$.
Een vergelijking van een lijn met richtingscoëfficiënt m door P is $y = mx - 14$.
Onderzoek voor welke waarden van m de lijn $y = mx - 14$ geen punten gemeenschappelijk heeft met c .

13.3 Raaklijnen aan een cirkel

Je leert

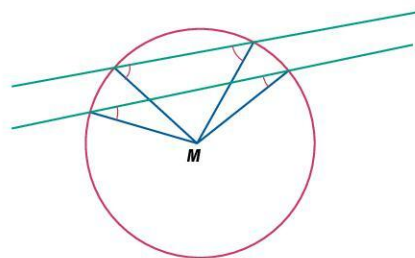
- hoe je een vergelijking opstelt van de raaklijn in een punt P van de cirkel met middelpunt M
- hoe je vectorvoorstellingen opstelt van de raaklijnen die door een gegeven punt buiten de cirkel gaan

Leerroutes

- ondersteunend: 19–20–021–22–23–24–025–25–26
- doorlopend: 19–20–21–22–23–24–25–26–27
- uitdagend: 19–20–21–23–24–25–27–U4–U5

Een lijn die een cirkel snijdt, maakt een hoek met de straal naar elk snijpunt.

- Waarom zijn die twee hoeken even groot?
- Hoe groot kan die hoek zijn?



19 Gegeven zijn cirkel $c: (x - 9)^2 + (y - 1)^2 = 20$ en lijn $l: y = -2x + 9$.

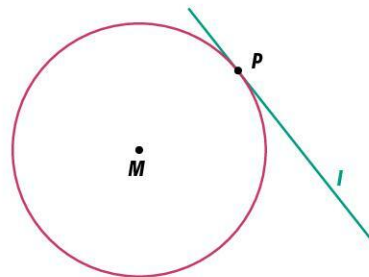
- Toon aan dat lijn l cirkel c raakt.
- Toon aan dat de straal naar het raakpunt loodrecht staat op l .

Stelling: Raaklijn

Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.

20 Om de raaklijnstelling te bewijzen teken je de raaklijn l door P . Te bewijzen is dat l loodrecht staat op de straal MP .

- Stel dat l niet loodrecht staat op de straal MP . Dan is er een punt Q op l zodat lijnstuk MQ wel loodrecht staat op l . Leg uit waarom in dat geval geldt: $MQ < MP$.
- Waarom volgt uit $MQ < MP$ dat Q binnen de cirkel ligt?
- Welke tegenspraak volgt uit opdracht b?
- Is nu bewezen dat l loodrecht staat op de straal MP ?



Aanpak

Hoe stel je een vergelijking op van de raaklijn l in een gegeven punt P van een cirkel met middelpunt M ?

- Bereken de kentallen van de vector $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
- $\overrightarrow{MP}$ is een normaalvector van de raaklijn, dus een vergelijking van l is $ax + by = c$. Vul de coördinaten van P in bij $ax + by = c$ en bereken c .

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de raaklijn l in punt $P(3, 4)$ van de cirkel $x^2 + y^2 = 25$.

Oplossing

- Het middelpunt van de cirkel is $(0, 0)$.

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

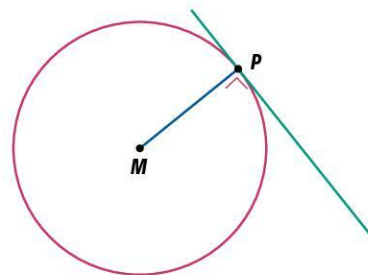
- $l: 3x + 4y = c$

$x = 3$ en $y = 4$ invullen geeft $c = 25$.

Een vergelijking van l is $3x + 4y = 25$.

Ondersteunende route → maak opdracht 021

- 21** Stel een vergelijking op van de raaklijn in P aan c .
- H**
- a** $c: x^2 + y^2 = 10$ en $P(-1, 3)$
- b** $c: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 10$ en $P(5, -4)$
- 22** Punt $P(14, 2)$ ligt op cirkel $c: (x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 125$.
- a** M is het middelpunt van c .
Geef de richtingsvector van lijn MP .
- b** Geef de kentallen van een vector loodrecht op $\overrightarrow{MP}$.
- c** Stel een vectorvoorstelling op van de raaklijn in P aan c .



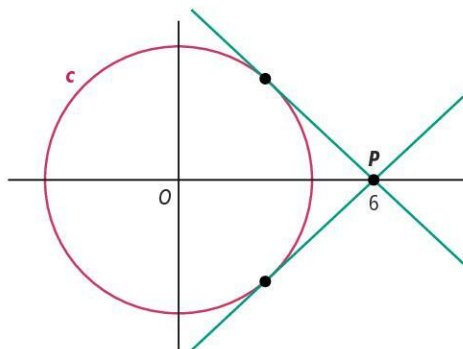
- 23** Stel een vectorvoorstelling op van de raaklijn in P aan c .

- H**
- a** $c: (x + 3)^2 + (y - 7)^2 = 25$ en $P(0, 3)$
- b** $c: x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0$ en $P(2, 1)$

- 24** Gegeven is cirkel $c: x^2 + y^2 = 18$ en punt $P(6, 0)$ buiten de cirkel. Er zijn twee lijnen door P die c raken.

Lijnen door $(6, 0)$ voldoen aan $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

- a** De richtingsvector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ is te vereenvoudigen tot $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ voor $a \neq 0$. Licht dat toe.
- b** Licht met de tekening toe dat $a = 0$ in dit geval geen raaklijn oplevert.
- c** Substitueer $x = 6 + \lambda$ en $y = \lambda m$ in $x^2 + y^2 = 18$ en herleid het resultaat tot de vergelijking $(m^2 + 1)\lambda^2 + 12\lambda + 18 = 0$.
- d** Bereken voor welke waarden van m deze vergelijking precies één oplossing heeft.
- e** Stel voor beide raaklijnen een vectorvoorstelling op.



Aanpak

Hoe stel je vectorvoorstellingen op van de raaklijnen door een gegeven punt $P(a, b)$ buiten de cirkel?

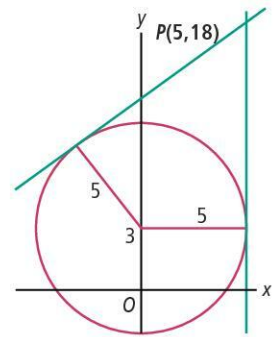
- 1 Neem als vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ en ga met een schets na of een van de raaklijnen verticaal is.
- 2 Substitueer $x = a + \lambda$ en $y = b + \lambda m$ in de vergelijking van de cirkel en herleid het resultaat op 0.
- 3 Stel met behulp van de discriminant vast voor welke waarden van m de vergelijking één oplossing heeft.
- 4 Schrijf van elke raaklijn een vectorvoorstelling op.

Voorbeeld

Gegeven zijn cirkel $c: x^2 + (y - 3)^2 = 25$ en punt $P(5, 18)$.
Stel vectorvoorstellingen op van de raaklijnen vanuit P aan c .

Oplossing

- 1 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 18 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$. Uit de schets blijkt dat een van de raaklijnen verticaal is.
- 2 $(5 + \lambda)^2 + (15 + \lambda m)^2 = 25$ geeft $\lambda^2 + 10\lambda + 25 + 225 + 30\lambda m + \lambda^2 m^2 = 25$
 $(m^2 + 1)\lambda^2 + (30m + 10)\lambda + 225 = 0$
- 3 $D = (30m + 10)^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 225 = 0$ geeft $m = \frac{4}{3}$.
- 4 De verticale raaklijn heeft richtingsvector $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dus de raaklijnen zijn
 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 18 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 18 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.



Ondersteunende route → maak opdracht 025

- 25** Stel vectorvoorstellingen op van de raaklijnen vanuit P aan c .

H

- a $P(-6, 2)$ en $c: x^2 + y^2 = 20$
- b $P(10, -20)$ en $c: x^2 + y^2 = 100$
- c $P(0, -4)$ en $c: x^2 + y^2 - 2x - 6y = 15$

- 26** Stel vergelijkingen op van de raaklijnen vanuit P aan c .

- a $P(6\frac{1}{2}, 13)$ en $c: x^2 + y^2 = 65$
- b $P(-4, 13)$ en $c: x^2 + y^2 - 10x = 0$

- 27** Lijn $l: x + y = 17$ raakt cirkel c met middelpunt $(5, 6)$.
Stel een vergelijking op van c .

Uitdagende route → maak opdracht U4 en U5

Ondersteunende opdrachten

021

Je gaat in deze opdracht een vergelijking van de raaklijn opstellen in het punt $P(-2, 2)$ van de cirkel $(x - 6)^2 + y^2 = 68$.

a Welke coördinaten heeft het middelpunt M van de cirkel?

b Bereken de kentallen van de vector $\overrightarrow{MP}$.

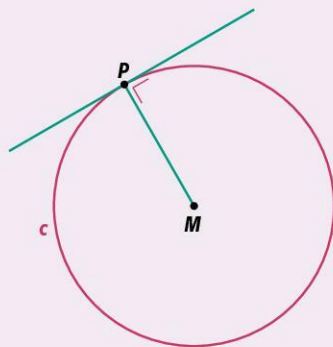
c Waarom is $\overrightarrow{MP}$ een normaalvector van de raaklijn in P ?

d Vul in.

Een vergelijking van de raaklijn is $\dots x + \dots y = c$.

e De raaklijn gaat door $P(-2, 2)$.

Vul $x = -2$ en $y = 2$ in bij de vergelijking van opdracht d, bereken c en schrijf de vergelijking van de raaklijn op.



Stel een vergelijking op van de raaklijn in P aan c .

f $c: x^2 + y^2 = 73$ en $P(8, -3)$

g $c: (x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 29$ en $P(1, -4)$

025

Gegeven zijn cirkel $c: x^2 + y^2 = 5$ en punt $P(1, 7)$.

Op het blaadje is een begin gemaakt met het opstellen van vectorvoorstellingen van de raaklijnen vanuit P aan c .

a Schets c en de raaklijnen vanuit P en stel daarmee vast dat geen van de raaklijnen verticaal is.

b In stap 1 staat de vectorrepresentatie van elke niet-verticale lijn door $(1, 7)$.

Leg uit wat er in stap 2 is gebeurd.

c Laat zien dat de vergelijking in stap 2 te herleiden is tot de vergelijking in stap 3.

d In stap 4 is de discriminant van de vergelijking opgeschreven. In geval van raken is $D = 0$.

Los de vergelijking

$$(14m + 2)^2 - 4 \cdot 45 \cdot (m^2 + 1) = 0 \text{ op.}$$

e Vul in stap 6 en 7 de ontbrekende getallen in.

f Schrijf van beide raaklijnen een vectorrepresentatie op.

☐	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$	1
☐	$(1 + \lambda)^2 + (7 + \lambda m)^2 = 5$	2
☐	$(m^2 + 1)\lambda^2 + (14m + 2)\lambda + 45 = 0$	3
☐	$D = (14m + 2)^2 - 4 \cdot 45 \cdot (m^2 + 1)$	4
☐	$D = 0$ geeft $m = \dots$ of $m = -5\frac{1}{2}$	5
☐	Richtingsvector $\begin{pmatrix} 1 \\ \dots \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ -5\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	6
☐	Ofwel $\begin{pmatrix} 1 \\ \dots \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ \dots \end{pmatrix}$	7

Uitdagende opdrachten

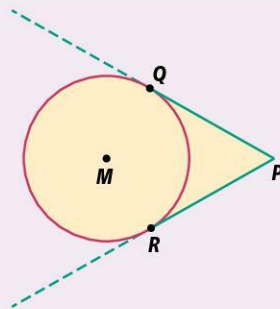
U4

De cirkel in de figuur heeft middelpunt M en straal 4.

Punt P ligt buiten de cirkel op afstand 8 van M . Vanuit P zijn de raaklijnen aan de cirkel getekend.

Bereken exact de oppervlakte van het gekleurde gebied.

Geef ook een benadering in één decimaal.



U5

Een cirkel raakt de lijnen $x = 5$ en $y = 4$. Het middelpunt van de cirkel ligt op de lijn $7x + 3y = 67$.

Bereken exact de straal van deze cirkel.

13.4 Snijdende cirkels

Je leert

- hoe je de coördinaten van de snijpunten van twee cirkels berekent

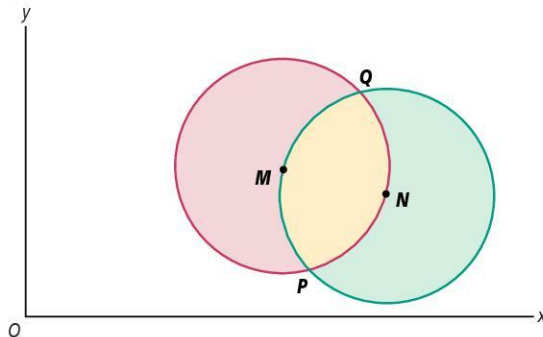
Leerroutes

- ondersteunend: 28—029—30—31—32—033—33—34—35
- doorlopend: 28—29—30—31—32—33—34—35—36
- uitdagend: 28—29—30—31—32—33—34—36—U6

Van de twee even grote cirkels zijn de middelpunten $M(8, 4)$ en $N(10, 3)$. Het middelpunt van de ene cirkel ligt op de andere cirkel.

De cirkels snijden elkaar in de punten P en Q .

- Heb je nu genoeg gegevens om de afstand PQ te berekenen?

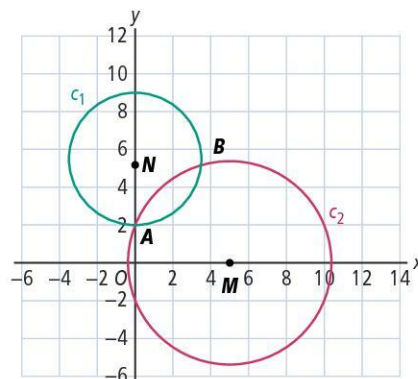


- 28** De cirkels $c_1: x^2 + (y - 5)^2 = 9$ en $c_2: (x - 5)^2 + y^2 = 29$ snijden elkaar in de punten A en B .

- a** Om de coördinaten van A en B te berekenen los je het stelsel $\begin{cases} x^2 + (y - 5)^2 = 9 \\ (x - 5)^2 + y^2 = 29 \end{cases}$ op.

Werk de haakjes weg en elimineer $x^2 + y^2$ door de vergelijkingen van elkaar af te trekken.

- b** Je vindt de vergelijking van een lijn. Welke lijn is dat?
c Snijd de lijn met één van de cirkels en bereken de coördinaten van A en B .



Aanpak

Hoe bereken je de coördinaten van de snijpunten van twee cirkels?

- 1 Elimineer $x^2 + y^2$ door de vergelijkingen van de cirkels van elkaar af te trekken. Zo vind je de vergelijking van de lijn door de snijpunten.
- 2 Bereken de coördinaten van de snijpunten van deze lijn met één van de cirkels.

Voorbeeld

Bereken de coördinaten van de snijpunten van de cirkels $c_1: x^2 + y^2 = 25$ en $c_2: x^2 + y^2 - 12x - 6y + 35 = 0$.

Oplossing

- 1 Elimineren van $x^2 + y^2$ geeft $60 - 12x - 6y = 0$.
 $y = -2x + 10$
- 2 Substitutie in $x^2 + y^2 = 25$ geeft $x^2 - 8x + 15 = 0$.
 $(x - 3)(x - 5) = 0$
 $x = 3$ of $x = 5$
 Invullen bij $y = -2x + 10$ geeft $y = 4$ en $y = 0$.
 De snijpunten zijn $(5, 0)$ en $(3, 4)$.

Ondersteunende route → maak opdracht 029

- 29** Bereken de coördinaten van de snijpunten van de cirkels c_1 en c_2 .

H

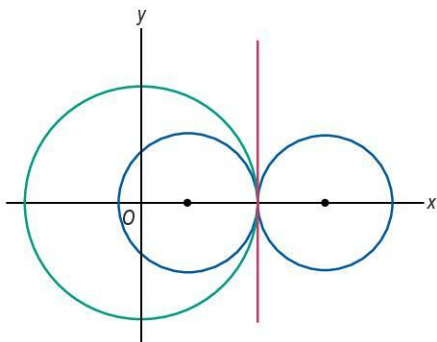
- a $c_1 : x^2 + y^2 = 13$ en $c_2 : x^2 + y^2 = 4x + 1$
- b $c_1 : x^2 + y^2 = 50$ en $c_2 : x^2 + y^2 - 6x - 18y + 70 = 0$
- c $c_1 : x^2 + y^2 = 25$ en $c_2 : x^2 + y^2 - 4x + 4y = 21$

- 30** Gegeven zijn de cirkels $c_1 : x^2 + y^2 = 10$ en $c_2 : x^2 + y^2 + 30 = 12x + 4y$.
- a Laat met een berekening zien dat de cirkels precies één punt gemeenschappelijk hebben. Noem dat punt P .
 - b Stel een vectorvoorstelling op van de raaklijn l in P aan c_1 .
 - c Laat zien dat l ook raakt aan c_2 .
 - d Toon aan dat l loodrecht staat op de lijn door de middelpunten van de cirkels.

Stelling: Rakende cirkels

De raaklijn in het gemeenschappelijke raakpunt van twee elkaar rakende cirkels staat loodrecht op de verbindingslijn van de middelpunten.

- 31** Bewijs de stelling meetkundig met behulp van de raaklijnstelling.

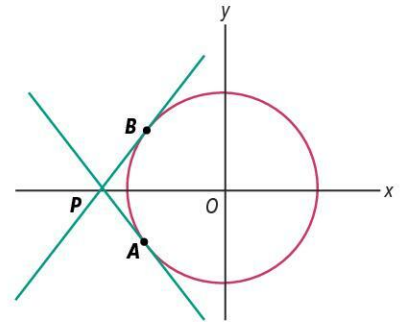


- 32** In een assenstelsel is cirkel $c : x^2 + y^2 = 25$ getekend. Twee cirkels met straal 3 raken c in het punt $(5, 0)$, de ene *inwendig* en de andere *uitwendig*.
- a Stel van elk van beide cirkels een vergelijking op.
 - b Stel ook een vergelijking op van elke cirkel met straal $2\frac{1}{2}$ die c raakt in het punt $(4, 3)$.

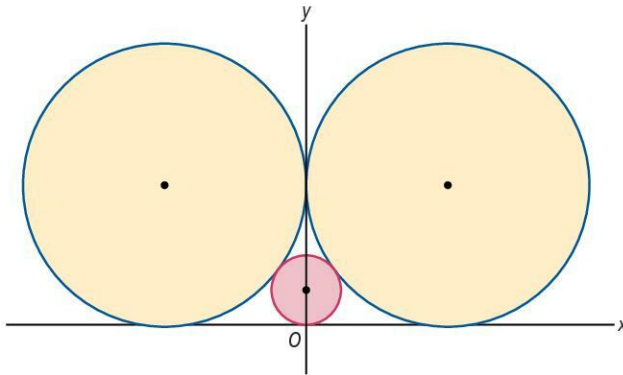
Ondersteunende route → maak opdracht 033

- 33** Gegeven is cirkel $c: (x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 13$.
 Cirkel d met straal $\sqrt{52}$ raakt cirkel c . De gemeenschappelijke raaklijn is $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.
 Stel een vergelijking op van d .

- 34** Gegeven zijn cirkel $c: x^2 + y^2 = 16$ en het punt $P(-5, 0)$.
 De raaklijnen uit P aan c raken de cirkel in de punten A en B .
- Bereken exact PA en PB .
 - A en B liggen ook op de cirkel met middelpunt P en straal PA .
 Stel een vergelijking op van deze cirkel.
 - Bereken exact de coördinaten van A en van B .
 - Stel een vergelijking op van elk van de raaklijnen uit P aan c .



- 35** Opdracht 34 geeft je een alternatieve methode om vergelijkingen op te stellen van raaklijnen aan een cirkel vanuit een punt buiten de cirkel.
 Stel met deze methode een vergelijking op van elk van de raaklijnen uit $P(-3, 2)$ aan cirkel $c: (x - 3)^2 + y^2 = 20$.



- 36** Gegeven zijn de cirkels $(x + 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$ en $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$.
 Stel een vergelijking op van de cirkel die raakt aan beide gegeven cirkels en de x -as.

Uitdagende route → maak opdracht U6

13.5 Afstand tot een cirkel

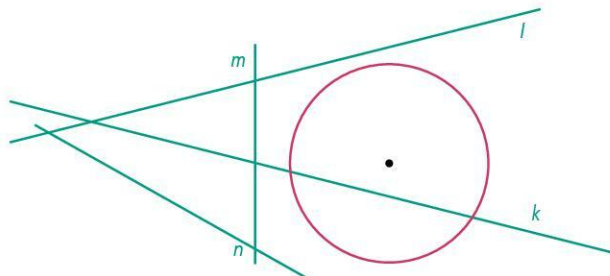
Je leert

- hoe je de afstand van een punt tot een cirkel berekent
- hoe je de afstand tussen twee cirkels berekent
- hoe je de afstand tussen een lijn en een cirkel berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 37—38—39—40—041—42—43—044—44
- doorlopend: 37—38—39—40—41—42—43—44—45
- uitdagend: 37—38—40—41—42—43—44—U7—U8

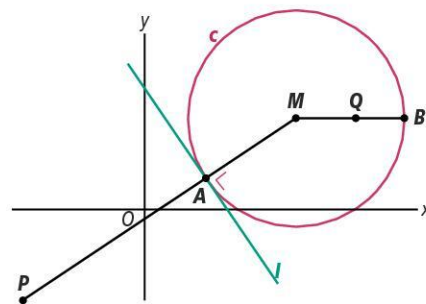
- Welke lijn heeft de kleinste afstand tot de cirkel?
En welke de grootste?



- 37** Gegeven is cirkel $c : (x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 34$.
- Ligt het punt $A(1, 0)$ op de cirkel?
 - Hoe zie je met behulp van de vergelijking van c dat het punt $B(-1, -1)$ buiten de cirkel ligt?
 - Ga met behulp van de vergelijking na of de cirkel nul, één of twee punten gemeenschappelijk heeft met de lijn $x = 10$.
 - Voor welke waarden van d ligt het punt $D(1, d)$ binnen de cirkel?

- 38** Gegeven is cirkel $c : (x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 13$ met middelpunt M . P is het punt $(-4, -3)$ en lijnstuk PM snijdt c in A . Lijn l is de raaklijn in A aan c .

- Waarom is PA het kortste verbindingslijnstuk van P en l ?
- Bereken PM exact.
- Welk lijnstuk is het kortste verbindingslijnstuk van P en c ? Bereken exact de lengte van dat lijnstuk.
- Bereken exact de lengte van het kortste verbindingslijnstuk van het punt $Q(7, 3)$ en c .

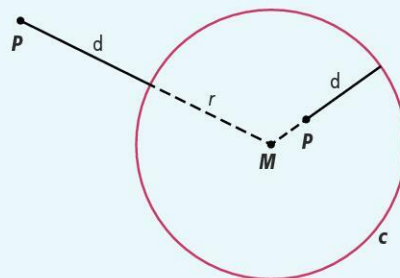


Theorie

De **afstand tussen twee meetkundige figuren** is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen die figuren.

Is P een punt en c een cirkel met middelpunt M en straal r , dan geldt:

- als $PM > r$, dan ligt P buiten c en is $d(P, c) = PM - r$,
- als $PM = r$, dan ligt P op c en is $d(P, c) = 0$,
- als $PM < r$, dan ligt P binnen c en is $d(P, c) = r - PM$.



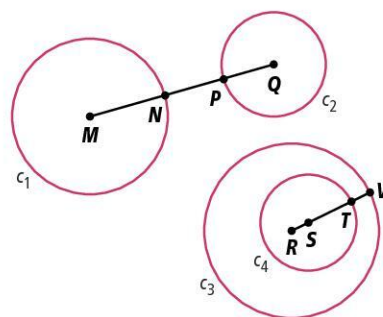
- 39** Onderzoek of het punt P binnen of buiten de cirkel c ligt en bereken $d(P, c)$ exact.

H

- $P(7, -2)$ en $c: (x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 25$
- $P(-3, 4)$ en $c: (x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 25$
- $P(-1, -6)$ en $c: (x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 289$

- 40** Gegeven zijn de cirkels c_1, c_2, c_3 en c_4 met de respectievelijke middelpunten M, Q, R en S .

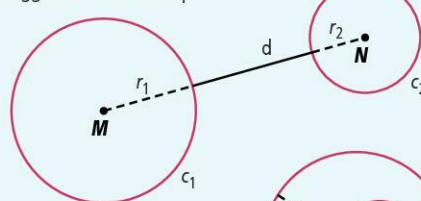
- Welk lijnstuk geeft de afstand aan tussen de cirkels c_1 en c_2 ?
- Welk lijnstuk geeft de afstand aan tussen de cirkels c_3 en c_4 ?



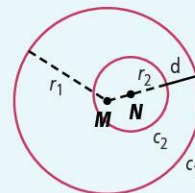
Theorie

Om de **afstand tussen twee cirkels** te berekenen, gebruik je de lijn door de middelpunten van de cirkels. Snijden of raken de cirkels elkaar, dan is de afstand 0. Snijden de cirkels elkaar niet, dan liggen zij geheel buiten elkaar of de ene cirkel ligt binnen de andere. In de figuur zie je dat de afstand in het eerste geval gelijk is aan $d(c_1, c_2) = MN - r_1 - r_2$ en in het tweede geval aan $d(c_1, c_2) = r_1 - MN - r_2$.

alle punten van cirkel c_2 liggen buiten cirkel c_1

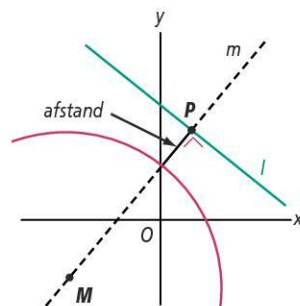


alle punten van cirkel c_2 liggen binnen cirkel c_1



Ondersteunende route → maak opdracht 041

- 41** Teken de cirkels c_1 en c_2 en bereken exact $d(c_1, c_2)$.
- H** a $c_1 : (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 18$ en $c_2 : (x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 8$
 b $c_1 : x^2 + y^2 + 2x + 2y = 6$ en $c_2 : x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$
- 42** Gegeven is cirkel $c_1 : x^2 + y^2 = 24y - 108$. Van cirkel c_2 met straal 3 ligt het middelpunt op de x -as. Er geldt $d(c_1, c_2) = 4$. Stel een vergelijking op van c_2 .
- 43** Gegeven zijn cirkel $c : (x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$ met middelpunt M en lijn $l : 4x + 5y = 19$. In de figuur zie je dat de afstand van l tot c gelijk is aan de afstand van M tot l min de straal van c .
- a Stel een vergelijking op van loodlijn m door M op l .
 b P is het snijpunt van l en m .
 Verklaar waarom $PM - 5$ de afstand is tussen l en c .
 c Bereken exact $d(l, c)$.



Aanpak

Hoe bereken je de afstand tussen een lijn l en een cirkel c ?

- 1 Stel een vergelijking op van de loodlijn m uit het middelpunt M van c op l .
- 2 Bereken de coördinaten van het snijpunt P van l en m .
- 3 Als $PM > r$ dan is $d(l, c) = PM - r$,
 als $PM \leq r$ dan is $d(l, c) = 0$.

Voorbeeld

Gegeven lijn $l : y = -x + 3$ en cirkel $c : (x + 1)^2 + y^2 = 5$. Bereken $d(l, c)$.

Oplossing

- 1 Loodlijn m heeft de vorm $y = x + b$.
 Substitutie van $M(-1, 0)$ geeft $b = 1$,
 dus $m : y = x + 1$.
- 2 Het snijpunt P van l en m is $(1, 2)$.
- 3 $PM = \sqrt{8}$ en $r = \sqrt{5}$
 $d(l, c) = \sqrt{8} - \sqrt{5}$

Ondersteunende route → maak opdracht 044

- 44** Bereken exact $d(l, c)$.
- H** a $l : 4x + 3y + 9 = 0$ en $c : (x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 6$
 b $l : 4x + 3y = 50$ en $c : x^2 + y^2 = 16$
 c $l : y = 3x$ en $c : (x - 8)^2 + (y - 4)^2 = 4$

- 45** Gegeven is cirkel $c : x^2 + y^2 = 4$ en punt $D(-5, 0)$. Stel een vectorvoorstelling op van elke lijn door D die afstand 1 heeft tot c .

Uitdagende route → maak opdracht U7 en U8

Ondersteunende opdrachten

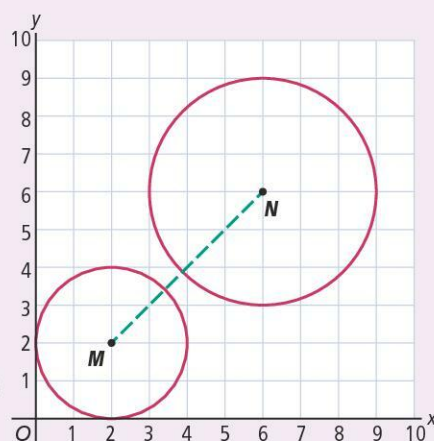
041 Gegeven zijn de cirkels $c_1 : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ met middelpunt M en $c_2 : (x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 9$ met middelpunt N .

- Bereken MN .
- Bereken de straal r_1 van c_1 en de straal r_2 van c_2 .
- In de tekening zie je dat de cirkels elkaar niet snijden.
Leg uit waarom je ook aan de antwoorden van opdracht a en b kunt zien dat de cirkels elkaar niet snijden.
- Bereken $d(c_1, c_2) = MN - r_1 - r_2$.

Teken de cirkels c_1 en c_2 en bereken exact $d(c_1, c_2)$.

e $c_1 : (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$ en $c_2 : (x - 7)^2 + (y - 5)^2 = 49$

f $c_1 : x^2 + y^2 - 12y + 4 = 0$ en $c_2 : x^2 + y^2 - 2x - 12y + 29 = 0$



044 Gegeven zijn cirkel $c : x^2 + (y - 2)^2 = 20$ en lijn $l : x + 2y = 19$. Er is een begin gemaakt met het berekenen van $d(l, c)$.

- In de stappen 1, 2 en 3 wordt de vergelijking van een lijn m opgesteld.
Leg uit waarom voor deze lijn m gekozen wordt.
- Bereken de coördinaten van het snijpunt P van l en m .
- M is het middelpunt van c .
Bereken PM .
- Er geldt $d(l, c) = PM - r$ als $PM > r$.
Bereken $d(l, c)$.

●	$l: y = -\frac{1}{2}x + 9\frac{1}{2}$	1
●	$m \perp l$ dus $m: y = 2x + b$	2
●	m door $M(0, 2)$	
●	dus $m: y = 2x + 2$	3
●	$-\frac{1}{2}x + 9\frac{1}{2} = 2x + 2$	4
●	Het snijpunt is $P(\dots, \dots)$.	5
●	$PM = \dots$ en $r = \dots$	6
●	dus $d(l, c) = \dots$	

Uitdagende opdrachten

U7 Gegeven zijn cirkel $c : (x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 50$ en

$$\text{lijn } l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Er zijn twee cirkels waarvan het middelpunt op l ligt en de straal net zo groot is als die van c , en die c raken.
Stel van beide cirkels een vergelijking op.

U8 Gegeven zijn de cirkels $c_1 : x^2 + y^2 = 4$ en $c_2 : (x - 6)^2 + y^2 = 16$.

Er zijn twee cirkels met straal 3 die op een afstand 3 liggen van zowel c_1 als c_2 .
Stel van beide cirkels een vergelijking op.

13.6 Ingeschreven en omgeschreven cirkel

Je leert

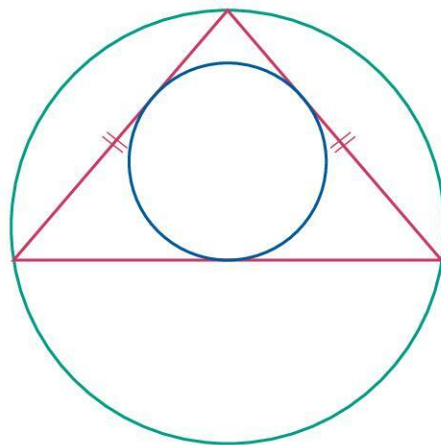
- wat een omgeschreven cirkel is
- wat een ingeschreven cirkel is

Leerroutes

- ondersteunend: 46—47—048—48—49—50—51—52
- doorlopend: 46—47—48—49—50—51—52—53
- uitdagend: 46—48—50—51—52—53—U9—U10

De rode driehoek is gelijkbenig. De groene cirkel gaat door de hoekpunten van de driehoek. De blauwe cirkel raakt de zijden van de driehoek.

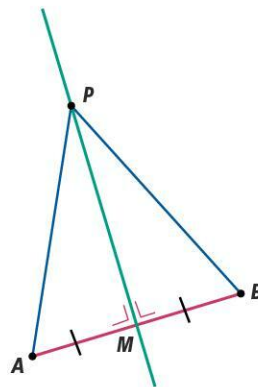
- Hoe moet je de rode driehoek aanpassen zodat de middelpunten van de twee cirkels samenvallen?



- 46** In de figuur ligt punt P op de middelloodlijn van lijnstuk AB .
- Toon met de stelling van Pythagoras aan dat $PA = PB$.
 - Teken een lijnstuk AB . Voor een punt Q geldt $QA = QB$. De loodlijn uit Q snijdt lijnstuk AB in een punt R . Toon aan dat R het midden is van lijnstuk AB .

Theorie

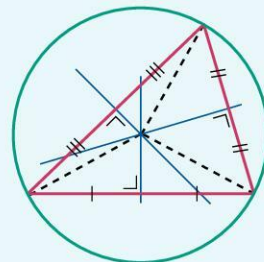
Elk punt van de middelloodlijn van een lijnstuk AB heeft gelijke afstanden tot A en B . Ook het omgekeerde geldt: elk punt dat gelijke afstanden heeft tot de punten A en B , ligt op de middelloodlijn van lijnstuk AB .



- 47**
- Teken $\triangle ABC$ met $A(-1, -2)$, $B(5, -2)$ en $C(3, 2)$.
 - Stel vergelijkingen op van de middelloodlijnen l en m van de zijden AB en AC en bereken de coördinaten van het snijpunt M van l en m .
 - Beredeneer dat M ook op de middelloodlijn van zijde BC ligt.
 - Stel een vergelijking op van de cirkel door A , B en C .

Theorie

De cirkel die door de hoekpunten van een driehoek gaat, heet de **omgeschreven cirkel** van die driehoek. Het middelpunt is het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden. De straal is de afstand van het middelpunt tot de hoekpunten.



Ondersteunende route → maak opdracht 048

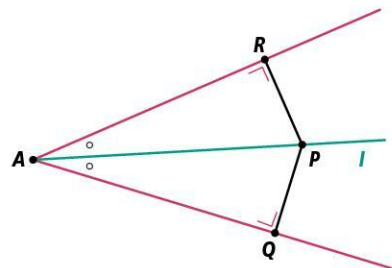
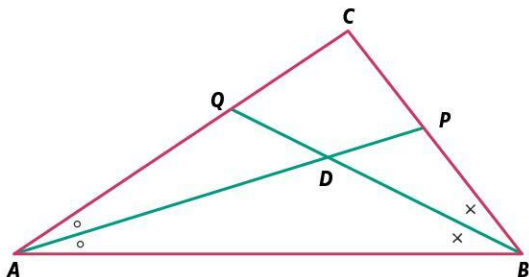
48 Stel een vergelijking op van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$.

H

- a $A(-1, -1)$, $B(5, -1)$ en $C(1, 3)$
- b $A(1, -3)$, $B(-3, 5)$ en $C(4, 6)$

49 P is een punt op de deellijn van hoek A . De punten Q en R liggen op de benen van de hoek zo dat $PQ \perp AQ$ en $PR \perp AR$.

- a Laat zien dat $PQ = AP \cdot \sin(\angle PAQ)$.
- b Toon aan dat $PQ = PR$.
- c Teken een hoek B en een punt K dat gelijke afstanden heeft tot de benen van hoek B en toon aan dat K op de deellijn van hoek B ligt.



50 In $\triangle ABC$ zijn de deellijnen AP en BQ getekend. Het snijpunt van de deellijnen is punt D .

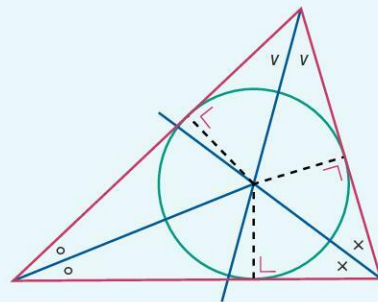
- a Waarom ligt D ook op de deellijn van hoek C ?
- b Verklaar waarom D het middelpunt is van een cirkel die raakt aan de zijden van $\triangle ABC$.

Theorie

Een ander woord voor deellijn is **bissectrice**.

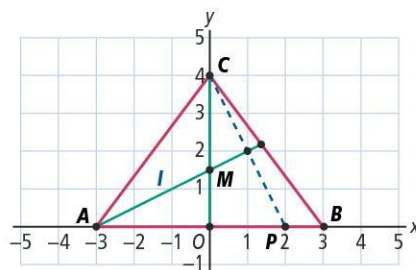
Elk punt van de bissectrice van een hoek heeft gelijke afstanden tot de benen van de hoek en andersom: elk punt dat gelijke afstanden heeft tot de benen van een hoek, ligt op de bissectrice van die hoek.

De cirkel die aan de drie zijden van een driehoek raakt, heet de **ingeschreven cirkel** van die driehoek. Het middelpunt is het snijpunt van de bissectrices van de hoeken. De straal is de afstand van het middelpunt tot de zijden.

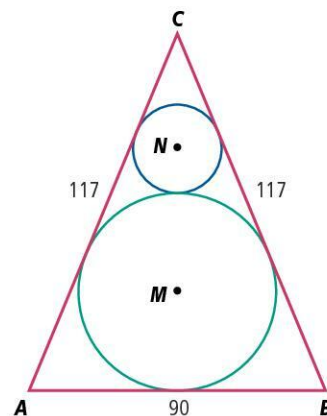


- 51 Gegeven is $\triangle ABC$ met $A(-3, 0)$, $B(3, 0)$ en $C(0, 4)$.
Je gaat in deze opdracht een vergelijking van de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$ opstellen.

- Op zijde AB ligt een punt P , zodat $AP = AC$.
Wat zijn de coördinaten van P ?
- Leg uit dat in $\triangle APC$ de hoogtelijn uit A ook bissectrice is van hoek A .
- M is het snijpunt van de bissectrices van hoek A en hoek C .
Bereken exact de coördinaten van M .
- Stel een vergelijking op van de ingeschreven cirkel.



- 52 Van $\triangle ABC$ is $AC = BC = 117$ en $AB = 90$.
De ingeschreven cirkel heeft middelpunt M en straal r .
Je gaat r berekenen.
- Bereken exact de oppervlakte van $\triangle ABC$.
 - Druk de oppervlakte van de driehoeken ABM , BCM en ACM uit in r .
 - Bereken r met behulp van je antwoorden op opdracht a en opdracht b.
 - De cirkel met middelpunt N raakt aan twee zijden van $\triangle ABC$ en aan de ingeschreven cirkel.
Bereken exact de straal van deze cirkel.



- 53 De cirkel met middelpunt M en straal 5 is de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ met $AB = AC = 8$.
Maak een schets van deze situatie en bereken exact BC .

Uitdagende route → maak opdracht U9 en U10

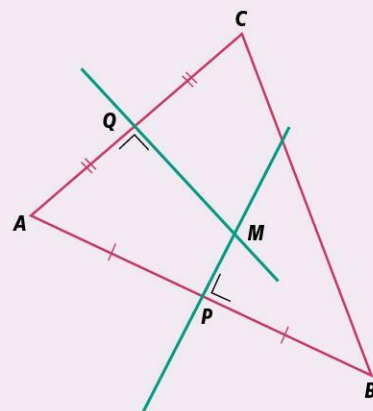
Ondersteunende opdrachten

048

Gegeven zijn de punten $A(0, 3)$, $B(8, -1)$ en $C(5, 8)$.

Je gaat in deze opdracht een vergelijking opstellen van de omschreven cirkel van $\triangle ABC$.

- Bereken de coördinaten van het midden P van zijde AB .
- Bereken de richtingscoëfficiënt van lijn AB .
- Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van zijde AB .
- Stel een vergelijking op van de middelloodlijn van zijde AC .
- Punt M is het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden AB en AC .
Bereken de coördinaten van M .
- Bereken AM .
- De omschreven cirkel van $\triangle ABC$ heeft middelpunt M en straal AM .
Stel een vergelijking op van deze cirkel.



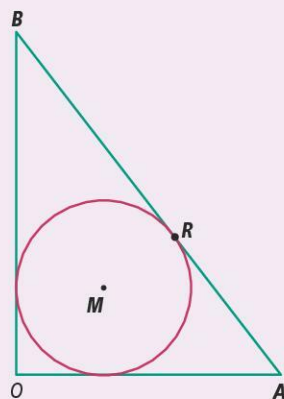
Uitdagende opdrachten

U9

Gegeven zijn de punten $A(6, 0)$ en $B(0, 8)$.

De ingeschreven cirkel van $\triangle OAB$ heeft middelpunt M en raakt lijn AB in punt R .

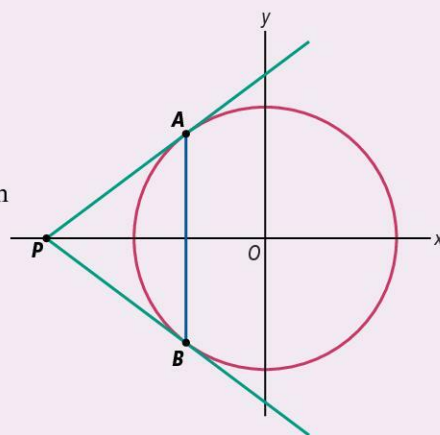
- Bereken de straal van de ingeschreven cirkel.
- Bewijs: $\text{opp } \triangle OAB = AR \cdot BR$.



U10

In de figuur is cirkel $c : x^2 + y^2 = 25$ getekend met daarop het punt $A(-3, 4)$. De raaklijn in A aan c snijdt de x -as in punt P . De loodlijn door A op de lijn PO snijdt c in punt B .

- Toon aan dat de lijn PB de cirkel raakt.
- Op de lijnen PA en PB liggen de punten C en D zo, dat $\triangle PCD$ gelijkvormig is met $\triangle PAB$ met factor p .
Bereken exact de waarde van p waarvoor c de ingeschreven cirkel is van $\triangle PCD$.



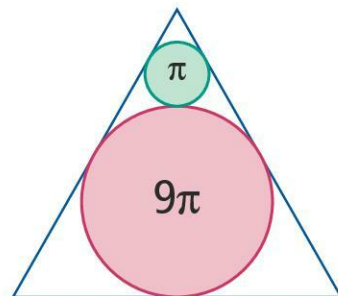
13.7 Gemengde opdrachten

- 54** Gegeven zijn de cirkels $c_1 : (x + 12)^2 + (y - 6)^2 = 45$ met middelpunt M , $c_2 : x^2 + y^2 = 20$ met middelpunt N en

$$\text{lijn } l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

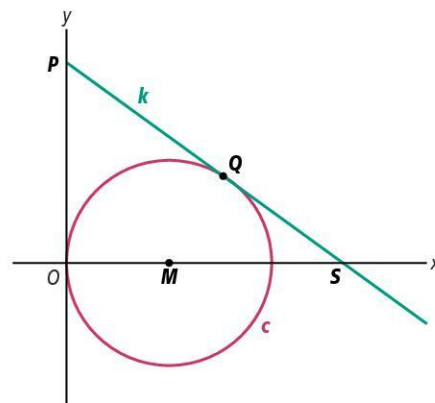
- Bereken exact $d(l, c_1)$.
- Bereken exact $d(c_1, c_2)$.
- Op l ligt een punt P zo dat $PM = PN$.
Bereken exact de coördinaten van P .

- 55** In een gelijkzijdige driehoek passen twee cirkels die elkaar raken en raken aan de zijden van de driehoek.
- Bewijs dat de oppervlakte van de grootste cirkel altijd negen keer zo groot is als de oppervlakte van de kleinste cirkel.
 - $\triangle ABC$ is gelijkbenig met $AB = 16$ en $AC = BC = 10$. Ook in $\triangle ABC$ passen twee cirkels die elkaar raken en raken aan de zijden van de driehoek.
Bereken exact de verhouding van de oppervlakten van de twee cirkels.



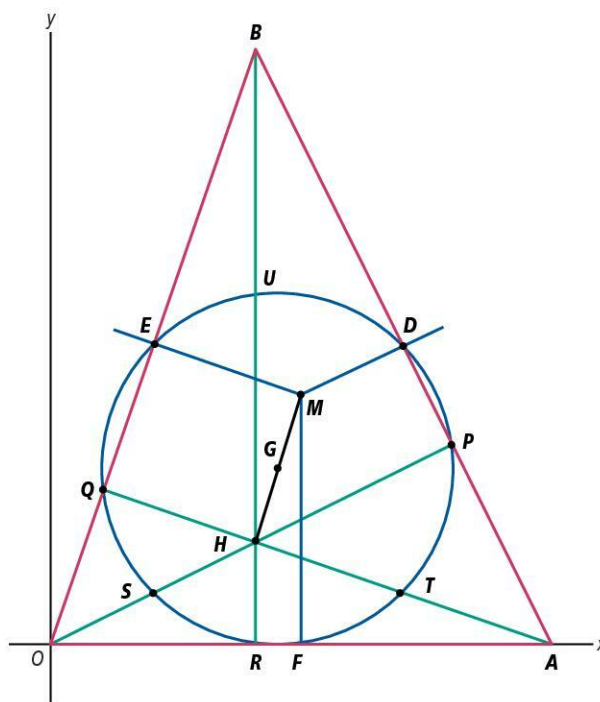
- 56** Gegeven zijn de lijnen $k: y = 1\frac{1}{3}x$, $l: 4x - 3y + 25 = 0$ en $m: x - 7y + 25 = 0$.
- Toon aan dat k en l evenwijdig zijn.
 - Bereken exact $d(k, l)$.
 - Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van m met k en l .
 - Stel de middelpuntsvergelijking op van de cirkel waarvan het middelpunt op m ligt en die raakt aan k en l .

- 57** Gegeven zijn punt $P(0, 10)$ en cirkel c met middelpunt $M(5, 0)$ en straal 5.
- De niet-verticale lijn k gaat door P , raakt de cirkel in punt Q en snijdt de positieve x -as in S .
Bereken exact de oppervlakte van $\triangle OPS$.
 - De lijn $y = p$ met $p > 0$ snijdt c in de punten A en B met $AB = \sqrt{28}$.
Bereken exact de coördinaten van A en van B .
 - De lijn $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ snijdt c in de punten C en D .
Bereken exact CD .
 - Op c liggen twee punten E en F zo dat $PE = PF = \sqrt{50}$.
Bereken exact de coördinaten van E en van F .



- 58** Elke driehoek heeft een ingeschreven cirkel en een omschreven cirkel. Dat is niet het geval bij elke vierhoek.
- Heeft elk vierkant een omschreven cirkel? Waarom?
 - Heeft elk vierkant een ingeschreven cirkel? Waarom?
 - Leg uit waarom niet elke ruit een omschreven cirkel heeft, maar wel een ingeschreven cirkel.
 - Aan welke voorwaarde(n) moet een ruit voldoen om ook een omschreven cirkel te hebben?
 - Onderzoek voor de volgende figuren onder welke voorwaarde(n) ze een omschreven cirkel hebben en onder welke voorwaarde(n) ze een ingeschreven cirkel hebben.
 - parallellogram
 - vlieger
 - rechthoek
 - trapezium

- 59** De *negenpuntscirkel van Feuerbach* bestaat voor elke driehoek en is genoemd naar de Duitse wiskundige Karl Wilhelm Feuerbach (1800 – 1834).
 Gegeven is $\triangle OAB$ met $A(10, 0)$ en $B(4, 12)$.
 De hoogtelijnen OP , AQ en BR snijden elkaar in het punt H .
 De (blauwe) middelloodlijnen van de zijden van $\triangle OAB$ snijden elkaar in het punt M .
 Punt G is het midden van lijnstuk HM .
 De middens van de lijnstukken OH , AH en BH zijn de punten S , T en U .
 Feuerbach beweert dat de negen punten D , E , F , P , Q , R , S , T en U op één cirkel liggen.
 Onderzoek of dat het geval is.

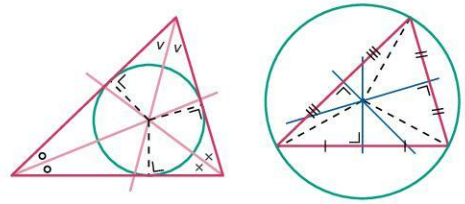


Theorie

Omgeschreven en ingeschreven cirkel

De cirkel die door de hoekpunten van een driehoek gaat, heet de omgeschreven cirkel van die driehoek. Het middelpunt is het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden. De straal is de afstand van het middelpunt tot de hoekpunten.

De cirkel die aan de drie zijden van een driehoek raakt, heet de ingeschreven cirkel van die driehoek. Het middelpunt is het snijpunt van de bissectrices van de hoeken. De straal is de afstand van het middelpunt tot de zijden.



- S1** Gegeven zijn de punten $A(2, 0)$, $B(6, 0)$ en $C(4, 6)$.
- Teken de punten in een assenstelsel en teken $\triangle ABC$.
 - Teken de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$.
 - Teken de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$.

Theorie

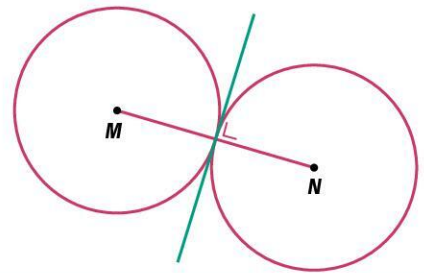
Stellingen

Raaklijn

Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.

Rakende cirkels

De raaklijn in het gemeenschappelijke raakpunt van twee elkaar rakende cirkels staat loodrecht op de verbindingslijn van de middelpunten.



- S2** De cirkels $x^2 + (y - 8)^2 = 25$ en $(x - 8)^2 + (y - 2)^2 = 25$ raken elkaar in $R(4, 5)$.
Stel een vergelijking op van de gemeenschappelijke raaklijn.

Vaardigheid

Je kunt met kwadraat afsplitsen een vergelijking van een cirkel herleiden tot een middelpuntsvergelijking.

Door twee keer kwadraat afsplitsen toe te passen op de vergelijking $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$ kun je de vergelijking herleiden tot de middelpuntsvergelijking $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Voorbeeld

Herleid $x^2 + y^2 + 18x - 2y + 18 = 0$ tot een middelpuntsvergelijking.

Oplossing

$$x^2 + 18x = (x + 9)^2 - 81$$

$$y^2 - 2y = (y - 1)^2 - 1$$

$$x^2 + y^2 + 18x - 2y + 18 = 0 \text{ wordt dan}$$

$$(x + 9)^2 - 81 + (y - 1)^2 - 1 + 18 = 0$$

$$\text{ofwel } (x + 9)^2 + (y - 1)^2 = 64$$

- S3** a Herleid $x^2 + y^2 + 10x + 6y + 25 = 0$ tot een middelpuntsvergelijking.
 b Bereken de straal en de coördinaten van het middelpunt van de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$.

Vaardigheid

Je kunt de coördinaten van de snijpunten van een lijn en een cirkel berekenen.

- Als de lijn gegeven is door een vergelijking, herleid je de vergelijking eerst tot de vorm $y = \dots$ of $x = \dots$
- Als de lijn gegeven is door een vectorvoorstelling, druk je x en y eerst uit in de parameter.

Vervolgens substitueer je in de vergelijking van de cirkel.

Voorbeeld

Bereken de coördinaten van de snijpunten van lijn $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en cirkel $c: x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$.

Oplossing

Substitutie van $x = 2 - \lambda$ en $y = 3\lambda$ geeft

$$(2 - \lambda)^2 + (3\lambda)^2 + 8(2 - \lambda) - 6 \cdot 3\lambda = 0$$

$$4 - 4\lambda + \lambda^2 + 9\lambda^2 + 16 - 8\lambda - 18\lambda = 0$$

$$10\lambda^2 - 30\lambda + 20 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda = 2 \text{ of } \lambda = 1$$

Invullen in $x = 2 - \lambda$ en $y = 3\lambda$ geeft de snijpunten: $(0, 6)$ en $(1, 3)$.

- S4** Bereken de coördinaten van de snijpunten van cirkel c en lijn l .

a $c: x^2 + y^2 - 2x = 12$ en $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

b $c: (x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 18$ en $l: y - x = 3$

Vaardigheid

Je kunt een vergelijking opstellen van de raaklijn in een punt P van de cirkel met middelpunt M .

- 1 Bereken de kentallen van de vector $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
- 2 $\overrightarrow{MP}$ is een normaalvector van de raaklijn, dus een vergelijking van l is $ax + by = c$. Vul de coördinaten van P in bij $ax + by = c$ en bereken c .

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de raaklijn l in punt $P(2, 2)$ van cirkel $c: (x - 1)^2 + y^2 = 5$.

Oplossing

- 1 Het middelpunt van c is $M(1, 0)$.

$$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- 2 $l: x + 2y = c$
 $x = 2$ en $y = 2$ invullen geeft $c = 6$.
 Een vergelijking van l is $x + 2y = 6$.

- S5** Stel een vergelijking op van de raaklijn in $P(1, 2)$ van cirkel $c: (x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 10$.

Vaardigheid

Je kunt vectorvoorstellingen opstellen van de raaklijnen die door een gegeven punt $P(a, b)$ buiten de cirkel gaan.

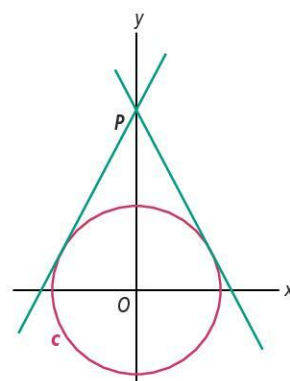
- 1 Neem als vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ en ga met een schets na of een van de raaklijnen verticaal is.
- 2 Substitueer $x = a + \lambda$ en $y = b + \lambda m$ in de vergelijking van de cirkel en herleid het resultaat op 0.
- 3 Stel met behulp van de discriminant vast voor welke waarden van m de vergelijking één oplossing heeft.
- 4 Schrijf van elke raaklijn een vectorvoorstelling op.

Voorbeeld

Gegeven zijn cirkel $c: x^2 + y^2 = 18$ en punt $P(0, 6)$.
Stel vectorvoorstellingen op van de raaklijnen vanuit P aan c .

Oplossing

- 1 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$. Uit de schets blijkt dat geen van de raaklijnen verticaal is.
- 2 $\lambda^2 + (6 + \lambda m)^2 = 18$ geeft $\lambda^2 + 36 + 12\lambda m + \lambda^2 m^2 = 18$.
 $(m^2 + 1)\lambda^2 + 12m\lambda + 18 = 0$
- 3 $D = (12m)^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 18 = 0$ geeft $m^2 = 1$ ofwel $m = -1$ of $m = 1$.
- 4 De raaklijnen zijn $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.



- S6 Stel vectorvoorstellingen op van de raaklijnen door punt $P(2, 6)$ aan cirkel $c: (x - 4)^2 + y^2 = 20$.

Vaardigheid

Je kunt de coördinaten van de snijpunten van twee cirkels berekenen.

- 1 Elimineer $x^2 + y^2$ door de vergelijkingen van de cirkels van elkaar af te trekken. Zo vind je de vergelijking van de lijn door de snijpunten.
- 2 Bereken de coördinaten van de snijpunten van deze lijn met één van de cirkels.

Voorbeeld

Gegeven $c_1: x^2 + y^2 + 4x - 8y + 10 = 0$ en $c_2: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 80 = 0$.
Bereken de coördinaten van de snijpunten.

Oplossing

- 1 Elimineren van $x^2 + y^2$ geeft $6x - 12y + 90 = 0$ ofwel $x = 2y - 15$.
- 2 Substitutie in $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 10 = 0$ geeft $y^2 - 12y + 35 = 0$.
 $(y - 5)(y - 7) = 0$ dus $y = 5$ of $y = 7$
Invullen bij $x = 2y - 15$ geeft de snijpunten $(-5, 5)$ en $(-1, 7)$.

- S7 Gegeven zijn de cirkels $c_1: x^2 + y^2 = 100$ en $c_2: (x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 25$.
Bereken de coördinaten van de snijpunten van c_1 en c_2 .

Vaardigheid

Je kunt de afstand van een punt tot een cirkel en de afstand tussen twee cirkels berekenen.

Is P een punt en c een cirkel met middelpunt M en straal r , dan geldt:

- als $PM > r$, dan ligt P buiten c en is $d(P, c) = PM - r$,
- als $PM = r$, dan ligt P op c en is $d(P, c) = 0$,
- als $PM < r$, dan ligt P binnen c en is $d(P, c) = r - PM$.

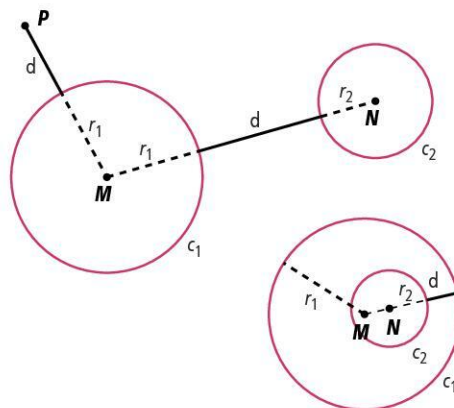
Als twee cirkels elkaar snijden, dan is de afstand 0.

Liggen twee cirkels geheel buiten elkaar dan is

$$d(c_1, c_2) = MN - r_1 - r_2.$$

Ligt de ene cirkel geheel binnen de andere, dan is

$$d(c_1, c_2) = r_1 - MN - r_2.$$



S8 Gegeven zijn punt $P(10, -4)$ en de cirkels

$$c_1: (x + 8)^2 + (y + 10)^2 = 90 \text{ en } c_2: x^2 + (y - 14)^2 = 10$$

a Bereken exact $d(P, c_1)$.

b Bereken exact $d(c_1, c_2)$.

Vaardigheid

Je kunt de afstand tussen een lijn l en een cirkel c berekenen.

- 1 Stel een vergelijking op van de loodlijn m uit het middelpunt M van c op l .
- 2 Bereken de coördinaten van het snijpunt P van l en m .
- 3 Als $PM > r$ dan is $d(l, c) = PM - r$,
als $PM \leq r$ dan is $d(l, c) = 0$.

Voorbeeld

Gegeven lijn $l: y = 2x - 18$ en cirkel $c: x^2 + (y - 7)^2 = 20$. Bereken $d(l, c)$.

Oplossing

1 Het middelpunt M van c is $(0, 7)$.

Loodlijn $m: y = -\frac{1}{2}x + 7$

$$2x - 18 = -\frac{1}{2}x + 7$$

$$2\frac{1}{2}x = 25 \text{ dus } x = 10 \text{ en } y = 2$$

Het snijpunt van l en m is $P(10, 2)$.

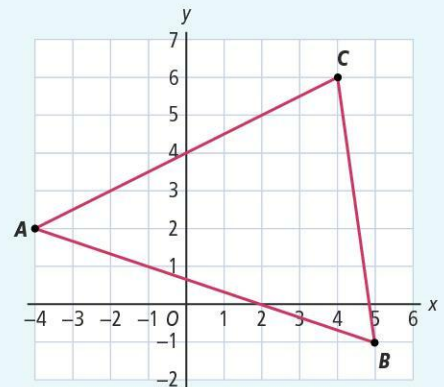
$$\mathbf{3} \quad PM = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125} \text{ en } r = \sqrt{20} \\ d(l, c) = \sqrt{125} - \sqrt{20} (= 5\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5})$$

S9 Gegeven lijn $l: y = 3x + 16$ en cirkel $c: x^2 + (y - 1)^2 = 10$. Bereken $d(l, c)$.

- T1** Gegeven zijn cirkel $c: (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 10$ en lijn $l: x - 2y = 5$. Op c ligt punt $P(3, 5)$.
- Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van l en c .
 - Stel een vergelijking op van de raaklijn in P aan c .
 - De lijn met vergelijking $y = px$ raakt aan c .
Bereken exact de waarde van p .

- T2** In een assenstelsel is gegeven $\triangle OAB$ met $A(16, 0)$ en $B(0, 12)$.
- Stel een vergelijking op van de omschreven cirkel van $\triangle OAB$.
 - Toon aan dat punt $I(4, 4)$ gelijke afstanden heeft tot de zijden van de driehoek.
 - Stel een vergelijking op van de ingeschreven cirkel van $\triangle OAB$.

- T3** In een assenstelsel is driehoek ABC getekend met $A(-4, 2)$, $B(5, -1)$ en $C(4, 6)$.
- Bereken exact de lengte van de zijden.
 - Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden van $\triangle ABC$.
 - Stel een vergelijking op van de omschreven cirkel van $\triangle ABC$.



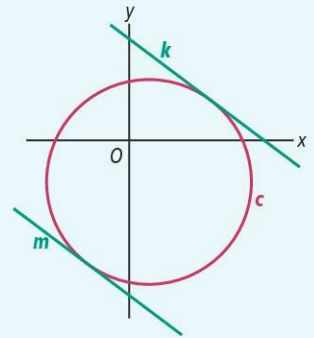
- T4** Gegeven is cirkel c met middelpunt $M(4, 3)$ en straal $\sqrt{5}$.
De lijn door M met richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{2}$ snijdt c in de punten P en Q .
- Bereken exact de coördinaten van P en Q .
 - Stel een vergelijking op van de raaklijn in P .
 - Stel een vergelijking op van de raaklijn in Q .

- T5** Gegeven zijn lijn $l: x - 2y = 13$ en de cirkels $c_1: (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ en $c_2: (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$.
De cirkels snijden elkaar in de punten P en Q .
Stel een vergelijking op van de cirkel door P en Q waarvan het middelpunt op l ligt.

T6 Gegeven zijn cirkel $c: (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$ en

$$\text{lijn } k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

- Toon met behulp van een berekening aan dat k de cirkel raakt.
- Bereken exact de coördinaten van het raakpunt.
- Er is een raaklijn m aan de cirkel die evenwijdig loopt met k .
Stel een vergelijking op van m .



T7 Gegeven zijn punt $P(16, 15)$, lijn $l: 2x + y = 19$ en de cirkels

$$c_1: x^2 + y^2 = 4x \text{ en } c_2: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 13.$$

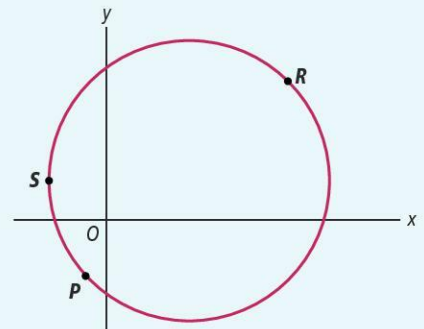
- Bereken exact $d(P, c_2)$.
- Bereken exact $d(l, c_1)$.
- Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van c_1 en c_2 .
- Stel vectorvoorstellingen op van de raaklijnen uit P aan c_2 .

T8 Gegeven is cirkel $c: x^2 + y^2 - 2x - 6y = 10$ en de lijnen met vergelijking $y = 2x + q$.

Er zijn twee waarden van q waarvoor een lijn met vergelijking $y = 2x + q$ cirkel c raakt.
Bereken deze waarden van q .

T9 Op cirkel c_1 liggen de punten $P(-1, -3)$, $R(5, 5)$ en $S(-3, 1)$.

- Toon aan dat $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ een vergelijking van c_1 is.
- Punt Q ligt op c zo dat vierhoek $PQRS$ een vlieger is.
Bereken exact de coördinaten van Q .
- Verder is gegeven cirkel $c_2: x^2 + y^2 = 1$.
Bereken exact $d(c_1, c_2)$.



T10 Gegeven zijn de cirkels $c_1: x^2 + y^2 = 6x - 4$ en $c_2: x^2 + y^2 = 2y + 4$.

- Bereken exact de coördinaten van de snijpunten P en Q van de twee cirkels.
- Toon aan dat de cirkels elkaar in P loodrecht snijden, dat wil zeggen dat de raaklijnen in P aan beide cirkels loodrecht op elkaar staan.

Je kunt met kwadraat afsplitsen een vergelijking van een cirkel herleiden tot een middelpuntsvergelijking.

- E1**
- a** Stel een vergelijking op van de cirkel met middelpunt $M(-3, 2)$ en straal $\sqrt{17}$.
 - b** Bepaal van de cirkel met vergelijking $x^2 - 2x + y^2 + 6y = 0$ de coördinaten van het middelpunt en de straal.
 - c** Waarom hoort er geen cirkel bij de vergelijking $x^2 - 2x + y^2 + 6y + 15 = 0$?

Je kunt de coördinaten van de snijpunten van een lijn en een cirkel berekenen.

- E2** Gegeven zijn cirkel $c: (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 17$ en de lijnen $l: 3x + 5y = 18$ en $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
- a** Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van c en l .
 - b** Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van c en m .

Je kunt een vergelijking opstellen van de raaklijn in een punt P van de cirkel met middelpunt M .

- E3**
- a** Gegeven zijn cirkel $c: x^2 + y^2 + 6x = 43$ en punt $P(1, -6)$. Stel een vergelijking op van de raaklijn in punt P van c .
 - b** Gegeven zijn cirkel $d: (x - 4)^2 + (y + 8)^2 = 2$ en punt $Q(5, -7)$. Stel een vergelijking op van de raaklijn in punt Q van d .

Je kunt vectorvoorstellingen opstellen van de raaklijnen die door een gegeven punt $P(a, b)$ buiten de cirkel gaan.

- E4** Stel vectorvoorstellingen op van de raaklijnen door P aan c .
- a** $P(3, 7)$ en $c: (x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 10$
 - b** $P(3, -3)$ en $c: x^2 + y^2 - 16x - 4y + 63 = 0$

Je kunt de coördinaten van de snijpunten van twee cirkels berekenen.

- E5** Bereken de coördinaten van de snijpunten van de cirkels c_1 en c_2 .
- a** $c_1: x^2 + y^2 + 14x = 4$ en $c_2: x^2 + y^2 = 6x + 4$
 - b** $c_1: x^2 + (y - 5)^2 = 10$ en $c_2: (x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 5$

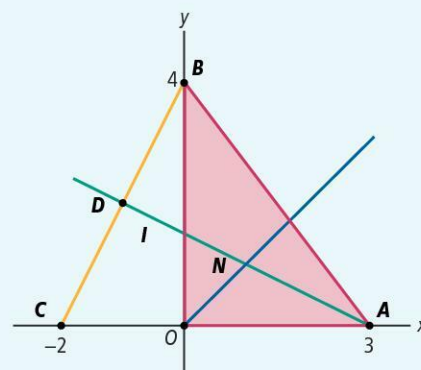
Je kunt de afstand van een punt tot een cirkel en de afstand tussen twee cirkels berekenen.

- E6** Gegeven zijn de cirkels $c_1 : (x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 18$ en $c_2 : x^2 + y^2 + 16x - 8y + 8 = 0$.
- Bereken exact de afstand van punt $P(-4, 5)$ tot cirkel c_1 .
 - Bereken exact de afstand van punt $Q(-2, 4)$ tot cirkel c_2 .
 - Bereken exact de afstand tussen de cirkels c_1 en c_2 .

Je kunt de afstand tussen een lijn l en een cirkel c berekenen.

- E7** Gegeven zijn cirkel $c : (x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 18$ en lijn $l : y = x + 3$.
Bereken exact $d(l, c)$.
- E8** Gegeven zijn cirkel c_1 met middelpunt $M(4, 2)$ en straal 2 en cirkel c_2 met middelpunt $N(2, 3)$ en straal 1.
- Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van c_1 en c_2 .
 - Stel een vergelijking op van elk van de raaklijnen uit punt $P(3, 5)$ aan c_2 .
- E9** Gegeven is $\triangle ABC$ met $A(0, 6)$, $B(-12, 0)$ en $C(3, -5)$.
Stel een vergelijking op van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$.

- E10** Gegeven is $\triangle OAB$ met $A(3, 0)$ en $B(0, 4)$.
Verder is gegeven punt $C(-2, 0)$.
De loodlijn l door A op lijnstuk BC snijdt lijnstuk BC in punt D .
- Leg uit dat l de bissectrice is van hoek A .
 - In $\triangle OAB$ snijden de bissectrices van de hoeken O en A elkaar in punt N .
Bereken de coördinaten van N .
 - Stel een vergelijking op van de ingeschreven cirkel van $\triangle OAB$.



- E11** Gegeven zijn lijn $l : y = -\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}$ en cirkel $c : (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 20$.
- Bereken exact $d(l, c)$.
 - Er is nog een lijn die evenwijdig is met lijn l en die dezelfde afstand tot cirkel c heeft als lijn l .
Stel een vergelijking op van die lijn.



Exponentiële en logaritmische functies 14

SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In voorgaande hoofdstukken zijn exponentiële en logaritmische functies aan de orde geweest. Je hebt rekenregels voor machten en logaritmen geleerd.

In dit hoofdstuk maak je kennis met een nieuw grondtal voor exponentiële en logaritmische functies, het getal e . Je leert hoe je beide soorten functies kunt differentiëren en hoe je exponentiële functies kunt primitiveren.

Na dit hoofdstuk heb je alle examenstof met betrekking tot exponentiële en logaritmische functies gezien.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Formules manipuleren*
- *Logisch redeneren en bewijzen*
- *Probleem oplossen en analytisch denken*

opdracht 24

opdracht 49

opdracht 51



- V1** Tellingen hebben duidelijk gemaakt dat de vlindersoort heideblauwtje in ons land per jaar met 12% in aantal afneemt. Op 1 augustus 2016 waren er naar schatting 21 000 vlinders van deze soort over.
- Leg uit dat je hier te maken hebt met exponentiële afname.
 - Hoe groot is de groeifactor per jaar? En per 2 jaar?
 - Geef een functievoorschrift waarmee het aantal vlinders $N(t)$ berekend kan worden na t jaar.
Neem $t = 0$ op 1 augustus 2016.
 - Bereken het aantal vlinders op 1 augustus 2018.
 - In welk jaar zullen er nog ongeveer 10 000 vlinders over zijn als het afnameproces zo door blijft gaan?
- V2** Bij een groeiproces is de groeifactor 2,3 per uur.
- Geef in drie decimalen de groeifactor per half uur en de groeifactor per kwartier.
 - Geef in vijf decimalen de groeifactor per minuut.
- V3**
- De bevolking in een land neemt elk jaar met 3,5% toe. Met welk percentage neemt de bevolking in 10 jaar toe?
 - Een bacteriekolonie neemt exponentieel toe met 80% per 17 uur.
Bereken de procentuele toename per zes uur.
 - De verdubbelingstijd van een diersoort is vijf jaar.
Hoe groot is de groeifactor per drie jaar?



Theorie

De exacte oplossing van $g^x = a$ is $x = {}^g\log(a)$.
Omgekeerd volgt uit $x = {}^g\log(a)$ dat $g^x = a$.
Hierin is: $a > 0$, $g > 0$ en $g \neq 1$.

Voor logaritmen gelden de rekenregels:

$${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$$

$${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$$

$$g^{{}^g\log(a)} = a$$

$${}^g\log(a) = \frac{{}^n\log(a)}{{}^n\log(g)}$$

met $g > 0$, $g \neq 1$, $a > 0$, $b > 0$, $n > 0$, $n \neq 1$.

Voorbeeld

Schrijf als één logaritme.

$$3 \cdot {}^2\log(3) - {}^2\log(5) + {}^2\log(6)$$

Oplossing

$$3 \cdot {}^2\log(3) - {}^2\log(5) + {}^2\log(6) =$$

$${}^2\log(3^3) - {}^2\log(5) + {}^2\log(6) =$$

$${}^2\log\left(\frac{27}{5}\right) + {}^2\log(6) =$$

$${}^2\log\left(\frac{27}{5} \cdot 6\right) = {}^2\log\left(32 \frac{2}{5}\right)$$

V4 Herleid tot één logaritme.

- a** ${}^3\log(8) + {}^3\log(5)$ **c** ${}^3\log(6) + 2 \cdot {}^3\log(5)$
b ${}^2\log(18) - {}^2\log(3)$ **d** $3 \cdot {}^3\log(4) - 2 \cdot {}^3\log(2)$

V5 Bereken exact.

- a** ${}^2\log\left(\frac{1}{4}\right)$ **d** ${}^{125}\log(25)$
b ${}^{\frac{1}{2}}\log(4)$ **e** ${}^{16}\log\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$
c ${}^7\log\left(\frac{1}{49}\sqrt[4]{7}\right)$ **f** ${}^{\frac{1}{9}}\log(27\sqrt{3})$

V6 Los exact op.

- a** $2^t = 3$
b $3^{2t-1} = 7$
c $1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t = 10$
d ${}^2\log(3x - 2) = 4$
e $\log(2x) - \log(x - 1) = \log(3)$
f $2 \cdot {}^3\log(x) + {}^3\log(4) = {}^3\log(3 - x)$

V7 Laat zien dat de functies f en g hetzelfde zijn.

- a** $f(x) = 2 \cdot 3^{2x-2}$ en $g(x) = 18 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{2-x}$
b $f(x) = 25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$ en $g(x) = 5^{2-2x}$
c $f(x) = 1\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ en $g(x) = 12 \cdot 2^{x-3}$
d $f(x) = \left(\frac{1}{8}\right)^x \cdot \sqrt{8}$ en $g(x) = \sqrt[4]{64} \cdot 4^{-1\frac{1}{2}x}$

V8 Er is een logaritmisch verband tussen de diameter D van een bepaalde boomsoort, gemeten op één meter boven de grond, en de hoogte H , beide in meters. Dat verband wordt beschreven door de formule $\log(D) = -2 + 1,5 \cdot \log(H)$.

- a** Welke hoogte hebben bomen met een diameter van 180 cm?
b Ga na of bomen met een tweemaal zo grote diameter ook tweemaal zo hoog zijn.
c De formule van het logaritmische verband kun je ook schrijven in de vorm $D = p \cdot H^q$.
Bereken de waarde van p en van q .



14.1 Een ander grondtal

Je leert

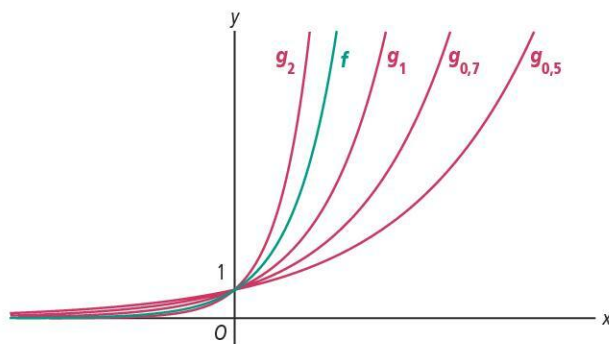
- hoe je de exponentiële functie $f(t) = a^t$ schrijft als een functie met grondtal g

Leerroutes

- ondersteunend: 1–02–2–3–4–5–6–07
- doorlopend: 1–2–3–4–5–6–7–8
- uitdagend: 1–2–3–5–6–7–8–U1

Gegeven zijn de functies $f(t) = 6^t$ en $g_k(t) = 3^{kt}$.
Het lijkt of er een waarde van k is waarvoor de grafiek van g_k samenvalt met die van f .

- Hoe zou je die waarde van k kunnen vinden?



- 1 Gegeven is de functie $f(t) = 2^t$. In deze opdracht ga je het functievoorschrift herschrijven naar een exponentiële functie met grondtal 5.

- a Om het functievoorschrift $f(t) = 2^t$ te schrijven met grondtal 5, moet je 2 als macht van 5 schrijven.
Daarvoor gebruik je de rekenregel $g^{\log(a)} = a$.
Vul in: $2 = 5^{\dots}$.
- b Vul in: $f(t) = 2^t = (5^{\dots})^{\dots} = 5^{\dots}$.

Aanpak

Hoe schrijf je de exponentiële functie $f(t) = a^t$ als een functie met grondtal g ?

- 1 Schrijf a als macht van g : $a = g^{\log(a)}$.
- 2 Het functievoorschrift wordt $f(t) = (g^{\log(a)})^t = g^{\log(a) \cdot t}$.

Voorbeeld

Schrijf de functie $f(x) = 3^x$ met grondtal 10.

Oplossing

- 1 $3 = 10^{\log(3)} \approx 10^{0,48}$
- 2 $f(x) = 3^x \approx (10^{0,48})^x$ dus $f(x) \approx 10^{0,48x}$.

Ondersteunende route → maak opdracht 02

- 2** Gegeven zijn de functies $f(t) = 2 \cdot 5^t$, $h(t) = 4 \cdot 2,8^t$, $k(t) = 3 \cdot 0,75^t$ en $m(t) = 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t$.
- Leg uit dat je kunt schrijven $f(t) \approx 2 \cdot 0,5^{-2,32t}$.
 - Schrijf het functievoorschrift $h(t)$ in de vorm $h(t) = 4 \cdot 10^{at}$.
Rond de waarde van a af op twee decimalen.
 - Schrijf de functievoorschriften $k(t)$ en $m(t)$ ook in de vorm $y = b \cdot 10^{at}$.
 - Als je de exponentiële functie $f(t) = b \cdot g^t$ met $g \neq 10$ in de vorm $f(t) = b \cdot 10^{at}$ schrijft, krijg je soms een positieve waarde van a en soms een negatieve waarde van a .
Bij welke waarden van g hoort een negatieve waarde van a ?

- 3** Schrijf de functievoorschriften in de vorm $f(t) = b \cdot 10^{at}$.
Rond indien nodig af op twee decimalen.

H

- $f(t) = 100^{2t}$
- $f(t) = 3 \cdot 2^{3t}$
- $f(t) = 0,7^{3t}$
- $f(t) = 500 \cdot 1,95^{4t-1}$

- 4** Gegeven is de functie $f(t) = 2^{at+b}$.
Bereken exact voor welke waarden van a en b de grafiek van f samenvalt met de grafiek van:

H

- $y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$
- $y = 32 \cdot 5^t$
- $y = 4,5 \cdot 0,6^t$
- $y = 3^{1-2t}$

- 5** In de tabel staat de olieproductie van de Verenigde Staten van 1950 tot 1975.

Neem aan dat er sprake was van exponentiële groei.

- Bereken in twee decimalen de groeifactor per jaar.
- Geef de bijbehorende functie $P(t) = b \cdot g^t$ met P in miljarden vaten en t in jaren, met $t = 0$ in het jaar 1950.
- Bereken algebraïsch de verdubbelingstijd T in jaren. Rond af op één decimaal.
- Schrijf het functievoorschrift van P in de vorm $P(t) = b \cdot 2^{at}$. Rond a af op drie decimalen.
- Leg uit welk verband er bestaat tussen a en T .

jaar	aantal vaten ($\times 10^9$)
1950	1,0
1960	1,5
1965	1,8
1970	2,2
1975	2,7

- 6** Het gewicht van een zwangere vrouw neemt gedurende haar zwangerschap toe. Dit wordt voor een deel veroorzaakt door de gewichtstoename van de ongeboren baby en anderzijds door de eigen gewichtstoename. Bij benadering verloopt de gewichtstoename volgens de formule $V = 1450 \cdot 2^{0,1t-1,5}$. Hierin is t de duur van de zwangerschap in weken en is V de gewichtstoename van de vrouw in grammen. $t = 0$ komt overeen met het begin van de zwangerschap.
- Een zwangerschap duurt gemiddeld 38 weken. Bereken met hoeveel gram het gewicht van de vrouw halverwege deze periode is toegenomen.
 - Geef de formule voor de gewichtstoename waarbij de tijd in dagen wordt genomen.
 - Bereken algebraïsch na hoeveel weken het gewicht van de vrouw met 5 kg is toegenomen. Rond af op hele weken.
 - De gegeven formule is te herleiden tot de vorm $V = a \cdot g^t$. Bereken de waarde van a en van g eerst exact en daarna in twee decimalen.



Ondersteunende route → maak opdracht 07

- 7** Schrijf de functievoorschriften in de vorm $f(t) = p \cdot q^t$.
- $f(t) = 3^{-t+2}$
 - $f(t) = 2 \cdot 6^{3t-1}$
 - $f(t) = 124 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1-4t}$
 - $f(t) = \frac{4^{\frac{1}{2}t}}{2^{-3-t}}$
- 8** De halfwaardetijd van Radium-226 is 1600 jaar.
- Bereken algebraïsch hoeveel mg er na 500 jaar nog over is van 100 mg Radium-226. Rond je antwoord af op één decimaal.
 - Geef een formule voor de hoeveelheid Radium-226 in de vorm $N = b \cdot 2^{at}$ met t in jaren. Neem als beginhoeveelheid 100 mg en rond a af op vijf decimalen.

Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

02 Gegeven is de functie $f(t) = 5 \cdot 1,2^t$. In deze opdracht ga je het functievoorschrift van f schrijven met grondtal 10.

- a** Vul in: $1,2 = 10^{\log(\dots)} \approx 10^{\dots}$. Rond de laatste exponent af op twee decimalen.
- b** Vul in: $f(t) = 5 \cdot (10^{\dots})^t$.
- c** Met welke rekenregel kun je in het functievoorschrift de haakjes wegwerken?
- d** Geef het functievoorschrift van f met grondtal 10.

07 Gegeven is de functie $f(t) = 75 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{1-2t}$. Je gaat het functievoorschrift schrijven in de vorm $f(t) = p \cdot q^t$.

- a** Op het blaadje is een begin gemaakt met de herleiding.
Welke rekenregel is gebruikt in stap 1?
- b** Welke rekenregel is gebruikt in stap 2?
- c** Vul stap 3 verder in.

☐	$f(t) = 75 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{1-2t}$	
☐	$f(t) = 75 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2t}$	1
☐	$f(t) = 75 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right)^t$	2
☐	$f(t) = \dots \cdot (\dots)^t$	3

Schrijf de functievoorschriften in de vorm $f(t) = p \cdot q^t$.

- d** $f(t) = 4^{5-t}$
- e** $f(t) = 4 \cdot 7^{2t+3}$
- f** $f(t) = 5 \cdot 1,2^{2t+1}$
- g** $f(t) = \frac{9^{2t}}{3^{t+2}}$

Uitdagende opdrachten

- U1** **a** Door welke transformatie ontstaat de grafiek van $g(x) = 7^x$ uit de grafiek van $f(x) = 2^x$?
- b** Leg uit dat je de grafiek van elke exponentiële functie van de vorm $g(x) = b^x$ door één transformatie kunt laten ontstaan uit de grafiek van een andere exponentiële functie van de vorm $f(x) = a^x$.

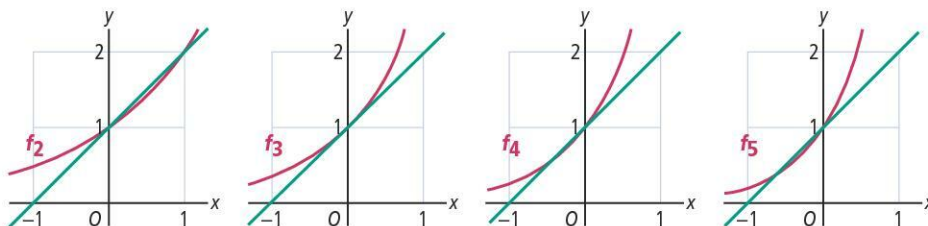
14.2 Het getal e

Je leert

- wat het getal e is
- hoe je exponentiële functies met grondtal e differentieert

Leerroutes

- ondersteunend: 9—10—11—12—13—014—15—016—16
- doorlopend: 9—10—11—12—13—14—15—16—17
- uitdagend: 10—12—13—14—15—16—17—U2—U3



De lijn $y = x + 1$ en de grafieken $f_2(x) = 2^x$, $f_3(x) = 3^x$, $f_4(x) = 4^x$ en $f_5(x) = 5^x$ gaan allemaal door het punt $(0, 1)$.

- Welke van deze grafieken hebben in $(0, 1)$ een helling kleiner dan 1? En welke groter dan 1? Gebruik zo nodig je rekenmachine.

9 Gegeven is de functie $f(x) = 2^x$.

- Maak op je rekenmachine tabellen van f en f' .
- f' lijkt een exponentiële functie te zijn. Hoe groot is de groeifactor? En de beginwaarde? Rond de beginwaarde af op twee decimalen.
- Geef een functievoorschrift voor f' .
- Benader op dezelfde manier de functievoorschriften $g'(x)$ en $h'(x)$ in het geval $g(x) = 3^x$ en $h(x) = 0,7^x$.

10 Gegeven is de functie $f(x) = g^x$.

- Toon aan dat het differentiequotiënt $\frac{f(x + 0,001) - f(x)}{0,001}$ over het interval $[x; x + 0,001]$ te herleiden is tot $\frac{g^{0,001} - 1}{0,001} \cdot g^x$.
- $\frac{g^{0,001} - 1}{0,001}$ is een constante c_g die afhangt van g .

Geef een benadering van c_g in drie decimalen voor $g = 2$, $g = 3$ en $g = 0,7$.

Theorie

Voor de afgeleide van een exponentiële functie $f(x) = g^x$ geldt $f'(x) = c_g \cdot f(x)$ waarbij $c_g = f'(0)$.
Je kunt c_g benaderen met een differentiequotient over een klein interval, bijvoorbeeld $c_g \approx \frac{g^{0,001} - 1}{0,001}$

Voorbeeld

Geef de afgeleide van $f(x) = 2 \cdot (\frac{1}{6})^x$.

Oplossing

$$f'(x) = 2 \cdot c_{\frac{1}{6}} \cdot (\frac{1}{6})^x \text{ met}$$

$$c_{\frac{1}{6}} \approx \frac{(\frac{1}{6})^{0,001} - 1}{0,001} \approx -1,79$$

$$\text{dus } f'(x) \approx 2 \cdot -1,79 \cdot (\frac{1}{6})^x = -3,58 \cdot (\frac{1}{6})^x.$$

- 11 Gegeven is de functie $f(x) = 3 \cdot 0,4^x$.
- Geef de afgeleide van f .
 - Benader de helling van de grafiek van f in het punt met $x = 2$. Rond je antwoord af op twee decimalen.
- 12 Gegeven is de functie $f(x) = 2^x + (\frac{1}{2})^x$.
- Bereken de helling van de grafiek van f in het snijpunt met de y -as.
 - Bereken in twee decimalen $f'(-2)$ en $f'(3)$.
- 13 Gegeven is de functie $f(x) = g^x$. Voor een zekere waarde van g geldt $c_g = 1$.
- Laat zien dat $2 < g < 3$.
 - Benader g in twee decimalen door de vergelijking $\frac{g^{0,001} - 1}{0,001} = 1$ op te lossen.

Theorie

Het grondtal van de exponentiële functie $f(x) = g^x$ waarvoor $c_g = 1$ wordt **e** genoemd en heet **het getal van Euler**, naar de Zwitserse wiskundige Leonhard Euler (1707 – 1783).
 $e \approx 2,718282$
De afgeleide van $f(x) = e^x$ is $f'(x) = e^x$.
Op je rekenmachine zit een aparte toets voor e .

Voorbeeld

Geef de afgeleide van $f(x) = e^{4x-2}$.

Oplossing

$$f'(x) = e^{4x-2} \cdot 4 \quad (\text{kettingregel})$$

$$\text{dus } f'(x) = 4e^{4x-2}.$$

Ondersteunende route → maak opdracht 014

14 Differentieer.**H**

a $f(x) = e^{3x}$

d $f(x) = x^e + e^x$

b $f(x) = e^{-2x}$

e $f(x) = e^{-x^2+5x}$

c $f(x) = e^{5-3x}$

f $f(x) = \frac{2e^{4x} - 3}{e^x}$

15 Gegeven is de functie $f(x) = e^{2x} - 4e^x$.**a** Bereken exact de helling van de grafiek van f in het punt met $x = 1$.**b** Bereken exact de extreme waarde van f .**c** Plot en schets de grafiek van f . Geef het buigpunt aan in je schets.**d** Bereken exact de coördinaten van het buigpunt.**e** Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het snijpunt met de y -as.

Ondersteunende route → maak opdracht 016

16 Los exact op.**H**

a $e^{3x-5} = e^2$

d $e^{2x} - e^{x+2} = 0$

b $2 - e^{2x} = 0$

e $\frac{1}{e^{x+1}} = \sqrt{e^{2x+6}}$

c $(3x - 1)e^{x-1} = 0$

f $\sqrt{e^{2x}} = e$

17 Onder bepaalde omstandigheden kan de luchtdruk p worden benaderd door de formule $p = 1000 \cdot e^{-0,14h}$ met p in hectopascal (hPa) en met h de hoogte in kilometers boven de zeespiegel.

Een ballon bevindt zich op 1200 meter hoogte en stijgt met een snelheid van 1 meter per seconde.

a Neem de tijd t in seconden en druk h uit in t .**b** Druk ook p uit in t .**c** Bereken de snelheid in hPa per seconde waarmee de druk op de ballon afneemt, als deze op een hoogte van 1200 m is.

Uitdagende route → maak opdracht U2 en U3

Ondersteunende opdrachten

- 014** Je gaat de functie $f(x) = e^{3x^2+5x}$ differentiëren.
Er geldt $f(x) = g(h(x))$ met $g(x) = e^x$ en $h(x) = 3x^2 + 5x$.
- Geef de afgeleide van g en van h .
 - Vul het blaadje verder in.

Differentieer.

- $f(x) = e^{5x}$
- $f(x) = e^{-3x}$
- $f(x) = e^{1+2x}$
- $f(x) = e^{2x} - e^{-4x}$
- $f(x) = e^{5-7x^2}$
- $f(x) = \frac{4e^x - 3e^{6x}}{e^x}$

☐	$g(x) = e^x$ en $h(x) = 3x^2 + 5x$				
☐	$g'(x) = \dots$ en $h'(x) = \dots$				
☐	$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$				
☐	dus $f'(x) = e^{\dots} \cdot \dots$				

- 016** **a** Op het blaadje is een begin gemaakt met het oplossen van de vergelijking $(2x + 1) \cdot e^{2x} = 0$.
Hoeveel oplossingen heeft $e^{2x} = 0$?
- b** Los de vergelijking verder op.
- c** Bij de vergelijking $\frac{1}{e^{2x}} = e^{x+1}$ moet je toewerken naar de vorm $e^{\dots} = e^{\dots}$. Dan kun je vervolgens de exponenten gelijkstellen.
Welke rekenregel is gebruikt in stap 1?
- d** Stel de exponenten aan elkaar gelijk en los de vergelijking verder op.

☐	$(2x + 1) \cdot e^{2x} = 0$				
☐	$2x + 1 = 0$ of $e^{2x} = 0$				
☐	$\dots$				
☐	$\frac{1}{e^{2x}} = e^{x+1}$				
☐	$e^{-2x} = e^{x+1}$				1
☐	$\dots$				

Uitdagende opdrachten

- U2** Gegeven is de functie $f(x) = e^{3x+1}$. Lijn k door het punt $(-1, 0)$ raakt de grafiek van f .
Stel een vergelijking op van k .
- U3** Gegeven zijn de functies $f(x) = 3 + 4e^{\frac{1}{2}x}$ en $g(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$.
De grafieken van f en g snijden elkaar in punt S .
Bewijs dat de raaklijnen aan de grafieken van f en g in S elkaar loodrecht snijden.

14.3 Natuurlijke logaritme

Je leert

- wat de natuurlijke logaritme is
- hoe je functies met natuurlijke logaritmen differentieert
- hoe je vergelijkingen met de natuurlijke logaritme exact oplost

Leerroutes

- ondersteunend: 18—019—20—21—22—23—024—24—25
- doorlopend: 18—19—20—21—22—23—24—25—26
- uitdagend: 18—19—20—21—23—24—25—26—U4

Een satelliet gebruikt voor de energievoorziening onder andere een radioactieve brandstof. Hiervan neemt het vermogen P af volgens de formule

$$P = 40 \cdot e^{-0,006t}, \text{ met } P \text{ in watt en } t \text{ in dagen.}$$

- Hoe kun je t berekenen als P gegeven is?



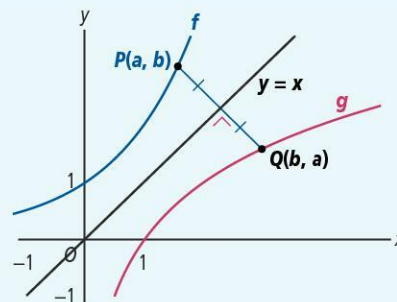
- 18 Gegeven is de functie $f(x) = e^x$.
- Geef de inverse van f .
 - Geef een vergelijking van elk van de asymptoten van de grafieken van f en van f^{inv} .
 - Welk domein heeft f^{inv} ?

Theorie

De inverse functie van $f(x) = e^x$ is de logaritmische functie $g(x) = {}^e\log(x)$. Deze logaritme wordt de **natuurlijke logaritme** genoemd en wordt vaak afgekort tot **ln**. In plaats van ${}^e\log(x)$ schrijf je meestal $\ln(x)$.

Op je rekenmachine zit een aparte toets voor de natuurlijke logaritme.

Als je in de eerder gevonden regel $g^{\log(x)} = x$ het grondtal g vervangt door het getal e krijg je $e^{\ln(x)} = x$.



Ondersteunende route → maak opdracht 019

- 19 Los exact op.

- | | | |
|----------|---|--|
| H | a $\ln(3x) = 2$ | e $\ln^2(5x - 2) = 9$ |
| | b $7 - 2\ln(x + 4) = 1$ | f $\ln(x^2) = 3$ |
| | c $3\ln(\sqrt{x}) - 1 = 5$ | g $\ln(\ln(x)) = 2$ |
| | d $\ln(3x) \cdot \ln(x - 2) = 0$ | h $\ln^2(x) - 3\ln(x) - 10 = 0$ |

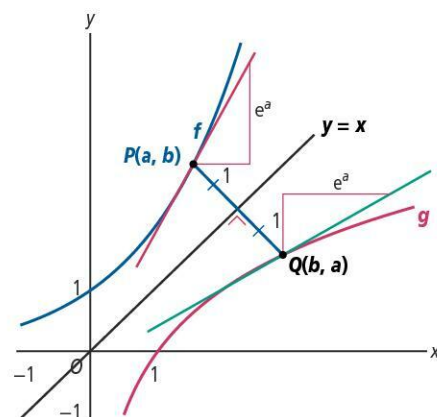
$\ln^2(x)$ is een andere schrijfwijze voor $(\ln(x))^2$.

- 20** Los exact op
- a** $e^{3x} \cdot e^{x+2} = 1$ **d** $8e^{3x} = 64$
- b** $e^{5x} \cdot \ln(5x) = 0$ **e** $\ln(3-x) - \ln(2x) = -\ln(4)$
- c** $e^{2x} = \frac{1}{e\sqrt{e}}$ **f** $\ln(x+1) = \frac{1}{2} \ln(x+3)$

- 21** Je gaat op zoek naar de afgeleide van $g(x) = \ln(x)$. Gegeven is de grafiek van $f(x) = e^x$ met de raaklijn aan de grafiek in het punt $P(a, b)$. De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is gelijk aan e^a .
- a** Laat zien dat deze richtingscoëfficiënt in overeenstemming is met de afgeleide waarde van f in het punt P .
- b** Je ziet ook de grafiek van $g(x) = \ln(x)$.

Leg uit waarom geldt $g'(b) = \frac{1}{e^a}$

- c** Waarom is $e^a = b$?
- d** Wat volgt uit de opdrachten b en c voor het functievoorschrift van de afgeleide van $g(x) = \ln(x)$?



Theorie

De afgeleide van $f(x) = \ln(x)$ is $f'(x) = \frac{1}{x}$ ($x > 0$).

Voorbeeld

Differentieer $f(x) = \ln(5x - 3)$.

Oplossing

$f(x) = g(h(x))$ met $g(x) = \ln(x)$ en $h(x) = 5x - 3$.

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{5x-3} \cdot 5 = \frac{5}{5x-3}$$

- 22** Gegeven is de functie $g(x) = 4\ln(x) - 3$.
- a** Bereken exact $g'(2)$.
- b** Bereken exact de coördinaten van het punt waarin de helling van de grafiek van g gelijk is aan $\frac{1}{2}$.

- 23** Gegeven zijn de functies $f(x) = \ln(5x)$ en $g(x) = \ln(x)$.
- Toon aan dat de functievoorschriften $f'(x)$ en $g'(x)$ hetzelfde zijn.
 - Leg zonder te differentiëren uit waarom f' gelijk is aan g' .

Ondersteunende route → maak opdracht 024

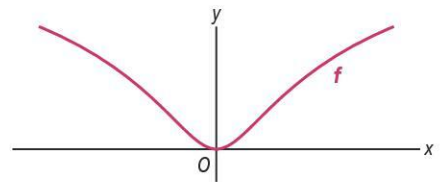
- 24** Door gebruik te maken van de rekenregels van logaritmen zijn functies soms makkelijker te differentiëren.
- Gegeven is de functie $f(x) = \ln(x^3)$.
Differentieer f met behulp van de kettingregel.
 - Het functievoorschrift van f is ook te schrijven als $f(x) = 3 \cdot \ln(x)$.
Differentieer f opnieuw.
 - Schrijf het functievoorschrift van $g(x) = \ln\left(\frac{x+3}{5-2x}\right)$ als het verschil van twee logaritmen.
 - Differentieer g .

- 25** Differentieer.

- | | | |
|----------|-------------------------------|---|
| H | a $f(x) = \ln(7x)$ | e $k(x) = \ln(\sqrt{x})$ |
| | b $g(x) = \ln(7x + 2)$ | f $l(x) = \ln(\ln(x))$ |
| | c $h(x) = \ln(x^2)$ | g $n(x) = \ln\left(\frac{4}{x+5}\right)$ |
| | d $j(x) = \ln^2(x)$ | h $p(x) = \ln(x(x+3))$ |

- 26** Gegeven is de functie $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

- Bereken de x -coördinaat van de punten op de grafiek van f waar de helling $\frac{1}{2}$ is. Rond af op twee decimalen.
- Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt met x -coördinaat 2.



Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten

019 Je gaat de vergelijking $5\ln(2x - 1) + 3 = 13$ oplossen.

- a** Vul stap 1 en 2 op het blaadje in.
- b** Bedenk dat $\ln(2x - 1) = {}^e\log(2x - 1)$.
Vul stap 3 in en los de vergelijking verder op.

Los exact op.

- c** $\ln(5x) = 4$
- d** $2 + \ln(x + 1) = 7$
- e** $2\ln\left(\frac{1}{x}\right) - 3 = -1$
- f** $\ln(x - 1) \cdot \ln(4x) = 0$
- g** $\ln^2(x) - 4\ln(x) = 0$
- h** $\ln^2(3x + 1) = 16$
- i** $\ln(\ln(x)) = 0$
- j** $\ln^2(x) = \ln(x)$

☐	$5\ln(2x - 1) + 3 = 13$	
☐	$5\ln(2x - 1) = \dots$	1
☐	$\ln(2x - 1) = \dots$	2
☐	$2x - 1 = \dots$	3

$\ln^2(x)$ is een
andere schrijfwijze
voor $(\ln(x))^2$.

- 024**
- a** Uit welke rekenregel volgt dat het functievoorschrift van $f(x) = \ln(x^7)$ ook te schrijven is als $f(x) = 7\ln(x)$?
 - b** Schrijf het functievoorschrift van $g(x) = \ln(x^2(2 - 5x))$ als som van twee logaritmen. Welke rekenregel heb je gebruikt?
 - c** Schrijf $h(x) = \ln\left(\frac{x}{1 - x}\right)$ als verschil van twee logaritmen.

Uitdagende opdrachten

U4 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{x}$

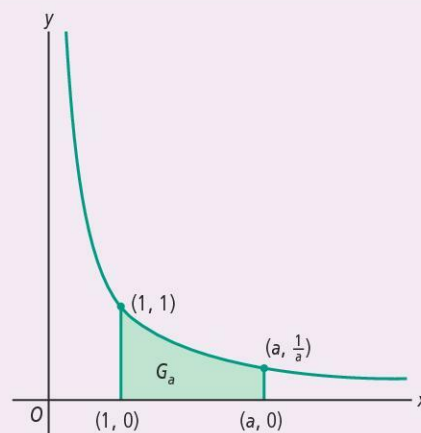
G_a is het gebied begrensd door de grafiek van f en de lijnen

$x = 1$ en $x = a$. $O(a)$ is de oppervlakte van G_a .

G_a wordt ten opzichte van de y -as met b vermenigvuldigd en

ten opzichte van de x -as met $\frac{1}{b}$. Zo ontstaat gebied H met dezelfde oppervlakte.

- a** In de figuur zie je de coördinaten van de hoekpunten van G_a .
Geef de coördinaten van de hoekpunten van H .
- b** Leg uit dat het beeld van $(1, 1)$ en het beeld van $(a, \frac{1}{a})$ weer op de grafiek van f liggen.
- c** Leg met behulp van de oppervlaktes van G_a en H uit dat $O(ab) = O(a) + O(b)$.
- d** Voor welk soort functies geldt de eigenschap uit opdracht c?



14.4 Afgeleide functies

Je leert

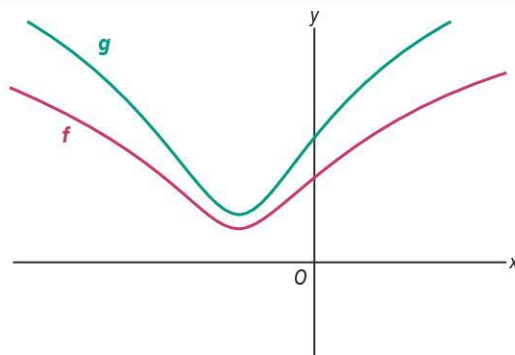
- hoe je exponentiële en logaritmische functies differentieert

Leerroutes

- ondersteunend: 27–28–029–29–30–31–32–33
- doorlopend: 27–28–29–30–31–32–33–34
- uitdagend: 27–28–30–31–32–34–U5–U6

Gegeven zijn de functies $f(x) = \ln(x^2 + 4x + 6)$ en $g(x) = {}^2\log(x^2 + 4x + 6)$. De extreme waarde van f kun je met de afgeleide berekenen.

- g is samengesteld uit twee functies. Je kunt de eigenschappen van deze functies gebruiken om de extreme waarde te bepalen. Hoe doe je dat?
- Je kunt ook een van de rekenregels voor logaritmen gebruiken om het functievoorschrift van g te herschrijven tot een vorm die je kunt differentiëren. Welke regel is dat?



27 De functie $f(x) = {}^2\log(x)$ kun je schrijven als

$$f(x) = \frac{{}^e\log(x)}{{}^e\log(2)} = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$$

Stel een functievoorschrift op voor f' .

Theorie

De functie $f(x) = {}^g\log(x)$ kun je schrijven als

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(g)} = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \ln(x).$$

$$\text{Dan is } f'(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln(g)}$$

$$\text{Dus de afgeleide van } f(x) = {}^g\log(x) \text{ is } f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(g)}$$

Voorbeeld

Differentieer $f(x) = {}^3\log(5x + 2)$.

Oplossing

$$f'(x) = \frac{1}{(5x + 2) \cdot \ln(3)} \cdot 5 \quad (\text{kettingregel})$$

$$\text{dus } f'(x) = \frac{5}{(5x + 2) \cdot \ln(3)}$$

28 Differentieer.

H

a $f(x) = {}^6\log(x)$

d $f(x) = \log(2x - 4)$

b $f(x) = {}^6\log(5x)$

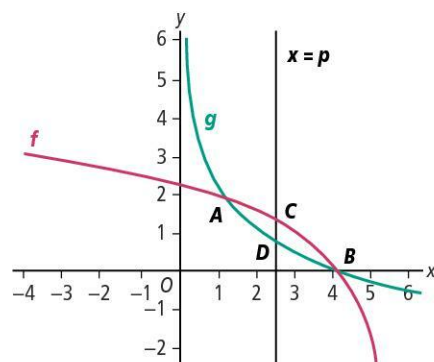
e $f(x) = \ln\left(\frac{5}{x}\right)$

c $f(x) = {}^2\log(x^2 + 1)$

f $f(x) = {}^3\log\left(\frac{2}{x}\right)$

Ondersteunende route → maak opdracht 029

- 29** Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^2\log(5 - x)$ en $g(x) = 2 - {}^2\log(x)$.
- Bereken exact de coördinaten van de snijpunten A en B .
 - De grafieken van f en g worden tussen de punten A en B gesneden door de lijn $x = p$. Deze lijn snijdt de grafiek van f in het punt C en de grafiek van g in het punt D . Bereken exact voor welke waarde van p de lengte van lijnstuk CD maximaal is.



- 30** Om de functie $f(x) = 3^x$ in de vorm $f(x) = e^{ax}$ te schrijven, schrijf je 3 als macht van e: $3 = e^{\ln(3)}$.
- Vul in: $f(x) = 3^x = e^{\dots}$.
 - Toon aan dat $f'(x) = \ln(3) \cdot 3^x$.
 - Gegeven is de functie $f(x) = 2^{x-1}$. Schrijf het functievoorschrift als een macht van e en differentieer de functie.
 - Doe hetzelfde voor de functie $g(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Theorie

Elke exponentiële functie $f(x) = g^x$ is als een exponentiële functie met grondtal e te schrijven: $f(x) = e^{\ln(g) \cdot x}$.

Dan is $f'(x) = e^{\ln(g) \cdot x} \cdot \ln(g) = g^x \cdot \ln(g)$.

Dus de afgeleide van $f(x) = g^x$ is $f'(x) = \ln(g) \cdot g^x$.

Voorbeeld

Geef de afgeleide van $f(x) = 3 \cdot 8^x$.

Oplossing

$$f'(x) = 3 \cdot \ln(8) \cdot 8^x$$

- 31** Differentieer.

H

- | | |
|---|------------------------------------|
| a $f(x) = 4^x$ | e $k(x) = 2^{-3x}$ |
| b $g(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$ | f $m(x) = 3 \cdot 4^{2x+1}$ |
| c $h(x) = 7 \cdot 0,45^x$ | g $n(x) = 3x^2 + 5^x$ |
| d $j(x) = e^{-3x}$ | h $p(x) = 5^{x^2-2x}$ |

32 Gegeven is de functie $f(x) = 2^{x^3-2x^2}$.

H

- Geef de afgeleide functie van f .
- Bereken exact de x -coördinaten van de toppen van de grafiek van f .

33 Ieder levend organisme bevat een kleine hoeveelheid van de radioactieve isotoop C-14. Na de dood van het organisme daalt de hoeveelheid C-14 met 0,012% per jaar.

- Welke groeifactor per jaar hoort bij een afname van 0,012% per jaar?
- Een organisme bevat op het tijdstip van sterven 0,14 milligram C-14. Geef een formule waarmee je de hoeveelheid C-14 na t jaar kunt berekenen.
- Bereken de snelheid in mg/jaar waarmee de hoeveelheid C-14 afneemt na 50 jaar.
- Een fossiel van een vis bevat 2% van de hoeveelheid C-14 die een levende vis bevat. Hoe oud is dit fossiel?

34 Om het uitsterven van de korenwolf te voorkomen is in een gebied waar nog geen korenwolf voorkwam, een aantal korenwolven uitgezet. De grootte van de populatie in dit gebied wordt benaderd door

$$P = \frac{558}{1 + 54,8e^{-0,462t}}$$

met t in jaren na het uitzetten van de korenwolven en P het aantal korenwolven.

- Hoeveel korenwolven zijn er uitgezet in het gebied?
- Beredeneer dat de populatie niet groter zal worden dan 558 korenwolven.
- Bereken na hoeveel jaar er voor het eerst meer dan 100 korenwolven zijn.
- Toon aan dat geldt: $\frac{dP}{dt} = \frac{14127,22e^{-0,462t}}{(1 + 54,8e^{-0,462t})^2}$
- Beredeneer met behulp van de afgeleide dat P overal stijgt.
- Het aantal korenwolven is eerst toenemend stijgend en vervolgens afnemend stijgend. Het buigpunt van de grafiek lijkt te liggen bij 279 korenwolven. Onderzoek of dat inderdaad het geval is.



Uitdagende route → maak opdracht U5 en U6

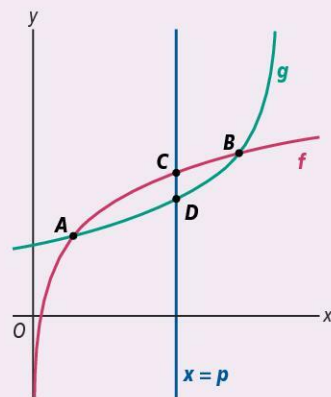
Ondersteunende opdrachten

029

Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^5\log(5x)$ en $g(x) = 2 - {}^5\log(6 - x)$. De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten A en B . De verticale lijn tussen A en B met vergelijking $x = p$ snijdt de grafiek van f in punt C en de grafiek van g in punt D .

Je gaat in deze opdracht berekenen voor welke waarde van p de lengte van lijnstuk CD maximaal is.

- Waarom is de x -coördinaat van C gelijk aan p ?
- Druk de y -coördinaat van C uit in p .
- Druk de coördinaten van D uit in p .
- Leg uit waarom de lengte $L(p)$ van CD gelijk is aan $L(p) = {}^5\log(5p) - 2 + {}^5\log(6 - p)$.
- Bereken met behulp van $L'(p)$ voor welke waarde van p de lengte van lijnstuk CD maximaal is.

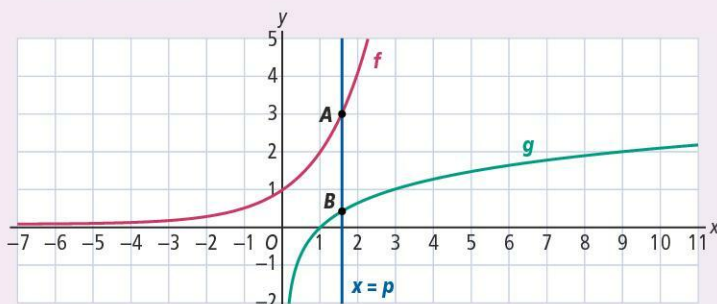


Uitdagende opdrachten

U5

Gegeven is de functie $f_a(x) = {}^a\log(x)$. Op de grafiek van f_a ligt het punt P met x -coördinaat e .

Bewijs dat de raaklijn in P aan de grafiek van f_a door de oorsprong gaat.



U6

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x$ en $g(x) = {}^3\log(x)$.

- De lijn $x = p$ snijdt de grafieken van f en g in de punten A en B .
Bereken met behulp van differentiëren voor welke waarde van p de lengte van lijnstuk AB minimaal is. Rond af op twee decimalen.
- De lijn $y = q$ snijdt de grafieken van f en g in de punten C en D , waarbij D rechts van C ligt.
Bereken met behulp van differentiëren voor welke waarde van q de lengte van lijnstuk CD minimaal is. Rond af op twee decimalen.

14.5 Primitieven

Je leert

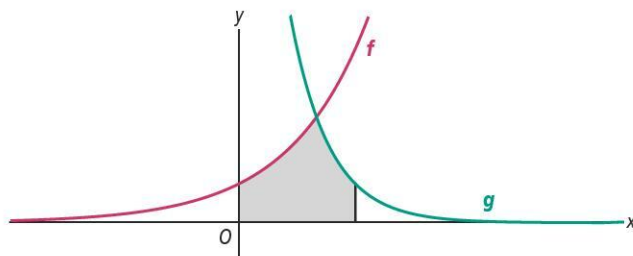
- hoe je exponentiële functies primitiveert
- hoe je functies van de vorm $f(x) = \frac{1}{ax+b}$ primitiveert

Leerroutes

- ondersteunend: 35–36–037–37–38–39–40–41–42–43–44
- doorlopend: 35–36–37–38–39–40–41–42–43–44–45
- uitdagend: 36–37–38–39–41–42–43–44–45–U7–U8

Gegeven zijn de functies $f(x) = e^{\frac{1}{3}x}$ en $g(x) = e^{3-x}$.

- Welke regels kun je gebruiken om de oppervlakte van het grijze gebied exact te berekenen?



35 Gegeven zijn de functies $f_a(x) = e^{ax}$.

- Bewijs dat $F_a(x) = \frac{1}{a} \cdot e^{ax}$ een primitieve is van f_a .
- Welke waarde heeft a als $f_a(x) = 2^x$?
- Geef een primitieve van $f_a(x) = 2^x$.

36 Gegeven is de functie $h(x) = \ln|x|$.

- Schrijf het functievoorschrift van h zonder absolute waarde-strepen.
- Stel het functievoorschrift $h'(x)$ op voor $x > 0$.
- Stel het functievoorschrift $h'(x)$ op voor $x < 0$.

Theorie

Een primitieve van $f(x) = e^x$ is $F(x) = e^x$.

Een primitieve van $f(x) = g^x$ is $F(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot g^x$.

De afgeleide van $h(x) = \ln|x|$ is $h'(x) = \frac{1}{x}$.

Een primitieve van $f(x) = \frac{1}{x}$ is $F(x) = \ln|x|$.

Voorbeeld

Geef de primitieve van elk van de functies

$$f(x) = 8^x \text{ en } g(x) = \frac{8}{x}$$

Oplossing

Een primitieve van f is $F(x) = \frac{1}{\ln(8)} \cdot 8^x$.

$g(x)$ kun je schrijven als $g(x) = 8 \cdot \frac{1}{x}$

dus een primitieve van g is

$$G(x) = 8 \cdot \ln|x|.$$

Ondersteunende route → maak opdracht 037

37 Primitiveer.

H

a $f(x) = 10^x$

e $l(x) = 12 \cdot 5^{7x}$

b $g(x) = \frac{-4}{x}$

f $m(x) = \frac{1}{3x^2}$

c $h(x) = \frac{3}{5x}$

g $n(x) = \frac{5}{3-2x}$

d $k(x) = \frac{1}{4x-3}$

h $p(x) = 3 \cdot 7^{5-x} + 2$

38 Primitiveer.

H

a $f(x) = e^{-3x+5}$

d $f(x) = e^{2x}(1 - e^{-2x})$

b $f(x) = e^{\ln(x)}$

e $f(x) = 3^{2x-1} + x^3$

c $f(x) = \frac{x^3 + 7x^2 + 4x}{2x^2}$

f $f(x) = \frac{3}{e^{x-4}}$

39 Bereken de primitieven van de functies van de vorm $F(x) = \ln |ax|$

primitieven zijn van $f(x) = \frac{1}{x}$

40 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{8}{x+4}$

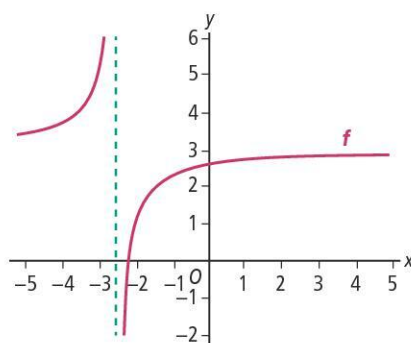
Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat ingesloten wordt door de x -as, de y -as, de grafiek van f en de lijn $x = 3$.

41 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{6x+13}{2x+5}$

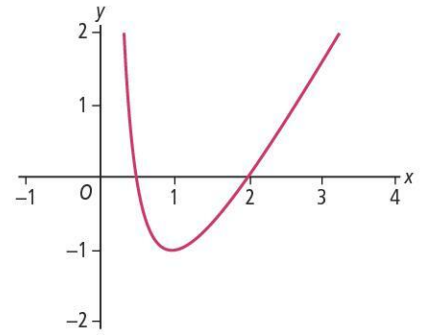
a Laat zien dat f dezelfde functie is als $g(x) = 3 - \frac{2}{2x+5}$

b De grafiek van f , de x -as en de y -as sluiten een gebied G in. Bereken exact de oppervlakte van G .

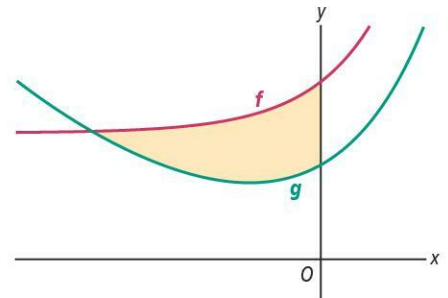
Als G een primitieve is van g en $f(x) = g(ax+b)$ dan is $F(x) = \frac{1}{a} \cdot G(ax+b)$ een primitieve van f .



- 42** Gegeven is de functie $f(x) = 2x + \frac{2}{x} - 5$.
Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x -as.



- 43** Gegeven is de functie $f(x) = 2e^{0,5x}$.
- Plot en schets de grafiek van f .
 - A_p is de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijnen $x = 0$ en $x = p$. Kies $p = 1$ en schets dit gebied in de figuur van opdracht a.
 - Bereken de exacte waarde van A_1 .
 - Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de y -as, de grafiek van f en de lijn $y = 8$.
- 44** Gegeven zijn de functies $f(x) = e^{2x} + e$ en $g(x) = e^{2x} + e^{-\frac{1}{2}x}$. Bereken exact de oppervlakte van het gebied ingesloten door de y -as en de grafieken van f en g .



- 45** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$.
- Plot en schets de grafiek van f .
 - Toon aan dat de functie $F(x) = \ln^2(x)$ een primitieve is van f .
 - Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijn $x = e$.
 - Onderzoek welke functie een primitieve is van $g(x) = \frac{\ln^5(x)}{x}$.

Uitdagende route → maak opdracht U7 en U8

Ondersteunende opdrachten

- 037** Om samengestelde functies te primitiveren gebruik je de regel: als G een primitieve is van g en $f(x) = g(ax + b)$ dan is

$F(x) = \frac{1}{a} \cdot G(ax + b)$ een primitieve van f .

- a** Primitiveer $f(x) = 2^x$.
b Gebruik de regel om $f(x) = 2^{4x-1}$ te primitiveren.

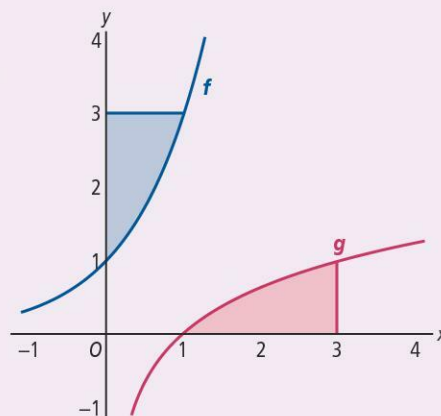
c Primitiveer $f(x) = \frac{5}{x}$

- d** Gebruik de regel om $f(x) = \frac{5}{7x+2}$ te primitiveren.

Uitdagende opdrachten

- U7** Gegeven zijn de functies $f(x) = 3^x$ en $g(x) = {}^3\log(x)$. Het vinden van een primitieve van g is in dit hoofdstuk niet behandeld. Door gebruik te maken van de eigenschappen van logaritmische en exponentiële functies kun je de oppervlakte van het rode gebied toch exact berekenen.

- a** Bereken exact de oppervlakte van het blauwe gebied.
b Leg uit waarom de oppervlakte van het blauwe gebied en die van het rode gebied gelijk zijn.
c Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van $h(x) = {}^2\log(x-1)$, de x -as en de lijn $x = 9$.



- U8** Een griep epidemie verloopt volgens het model $N = \frac{G}{1 + (G-1) \cdot g^t}$

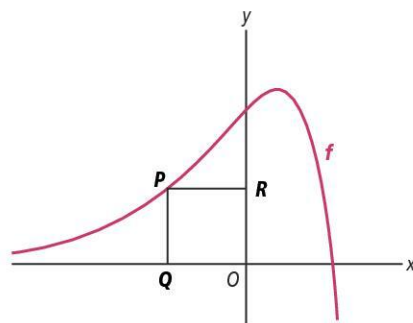
Hierbij is N het aantal zieken,
 t het aantal dagen na het uitbreken van de griep,
 g een constante met $0 < g < 1$ en
 G de grenswaarde van het aantal zieken.

- a** De snelheid waarmee het aantal zieken toeneemt is het grootst als $N = \frac{1}{2}G$.
 Druk de waarde van t die daarbij hoort uit in g en G .

- b** Toon aan dat voor die waarde van t geldt $\frac{dN}{dt} = -\frac{1}{4}G \cdot \ln(g)$.

14.6 Gemengde opdrachten

- 46** Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = 2p \ln(x) - 3x^2$ met $p > 0$. Verder is gegeven de functie $g(x) = -3x^2$.
- a Bewijs dat de grafieken van f_p en g elkaar snijden in het punt $(1, -3)$.
 - b Bereken exact de helling van de raaklijn aan de grafiek van g in het punt $(1, -3)$.
 - c Er is een waarde van p waarvoor de raaklijnen aan de grafieken van f_p en g in het punt $(1, -3)$ loodrecht op elkaar staan.
Bereken exact deze waarde van p .
 - d Bereken exact de waarde van p waarvoor de top van de grafiek van f_p op de x -as ligt.
- 47** Los exact op.
- a $\ln(x) + \ln(x+3) = \ln(7x)$
 - d $(x-2)\ln(x) = x-2$
 - b $4^x - 2^x = 56$
 - e $\frac{1}{2}e^x = e^{-x}$
 - c $2\ln(x) = \ln(2x+3)$
 - f $x\ln(x) - 3x = 0$
- 48** Gegeven is de functie $f(x) = 4 \cdot 2^x - 2^{2x}$.
- a Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de y -as.
 - b De grafiek van f snijdt de y -as in punt A . De raaklijn aan de grafiek in A snijdt de x -as in punt B .
Bereken exact de oppervlakte van $\triangle OAB$.
 - c Bereken exact de coördinaten van de top van de grafiek van f .
 - d Punt P met x -coördinaat p ($p < 0$) ligt op de grafiek van f . De punten Q en R zijn de projecties van P op respectievelijk de x -as en de y -as.
Bereken voor welke waarde van p geldt dat vierhoek $OQPR$ een vierkant is. Rond je antwoord af op twee decimalen.
- 49** Gegeven is de functie $f_a(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2 - \ln(ax)$ met $a > 0$.
- a Bewijs dat de x -coördinaat van de top van de grafiek van f_a onafhankelijk is van a .
 - b Bewijs dat de grafiek van f_a voor geen enkele waarde van a een buigpunt heeft.





- 50** Een *kettinglijn* is de grafiek die de vorm weergeeft van een touw dat aan de uiteinden is opgehangen. Het algemene functievoorschrift dat bij een kettinglijn hoort is

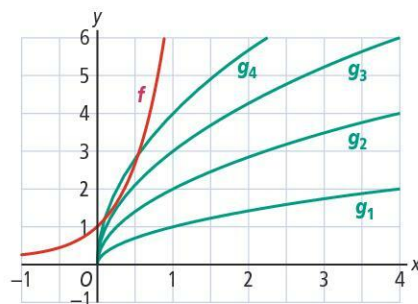
$$f(x) = \frac{1}{2a} (e^{ax} + e^{-ax}) + b.$$

De kettinglijn zie je ook terug in de architectuur.

Ondersteboven vormt een kettinglijn een stevige, stabiele boog. De Gateway Arch in St. Louis, Missouri, is daar een voorbeeld van. Deze boog is even breed als dat hij hoog is. De voetpunten van deze boog staan 192 meter uit elkaar.

- Kies het assenstelsel zo, dat de voetpunten op de x -as liggen en de top van de boog op de y -as.
Bepaal de waarden voor a en b . Rond a af op drie decimalen en b op gehelen.
- De boog lijkt ook op een parabool.
Stel een formule op van de parabool die door de top van de boog gaat en door de voetpunten.
- Onderzoek hoe groot het verticale verschil tussen de parabool en de kettinglijn maximaal is. Rond af op twee decimalen.

- 51** Gegeven zijn de functies $f(x) = e^{2x}$ en $g_a(x) = a\sqrt{x}$. De grafieken van f en g_a hebben nul, één of twee punten gemeenschappelijk. Onderzoek met exacte berekeningen welke waarde(n) van a bij elk van deze drie situaties horen.



Theorie

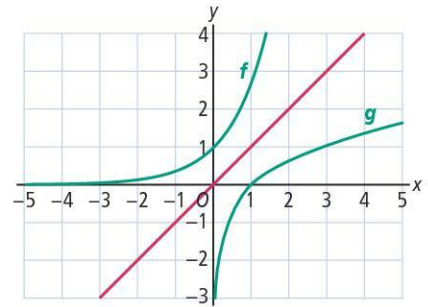
Het getal e en de natuurlijke logaritme

De afgeleide van $f(x) = e^x$ is $f'(x) = e^x$.

Het getal e is het getal van Euler en $e \approx 2,71828$.

De functie $g(x) = {}^e\log(x)$ schrijf je als $g(x) = \ln(x)$, de natuurlijke logaritme.

De functies $f(x) = e^x$ en $g(x) = \ln(x)$ zijn elkaars inverse.



S1 Los exact op.

a $e^{2x-7} = e^{-x+3}$

b $2\ln(x-3) + 2 = 12$

Vaardigheid

Je kunt de exponentiële functie $f(t) = a^t$ schrijven als een functie met grondtal g .

1 Schrijf a als macht van g : $a = g^{\log(a)}$.

2 Het functievoorschrift schrijf je als

$$f(t) = a^t = (g^{\log(a)})^t = g^{\log(a) \cdot t}.$$

Voorbeeld

Schrijf de functie $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ met grondtal e .

Oplossing

1 $\frac{1}{2} = e^{\ln(\frac{1}{2})} \approx e^{-0,69}$

2 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \approx (e^{-0,69})^x$ dus $f(x) \approx e^{-0,69x}$

S2 Gegeven is de functie $f(x) = 4 \cdot 3^{5x}$.

a Schrijf $f(x)$ in een vorm met grondtal 10.

b Schrijf $f(x)$ in een vorm met grondtal e .

Vaardigheid**Je kunt exponentiële en logaritmische functies differentiëren.**

functie

afgeleide

$f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$

$f(x) = g^x$

$f'(x) = \ln(g) \cdot g^x$

$f(x) = \ln(x)$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = {}^g\log(x)$

$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(g)}$

Voorbeeld 1Differentieer $f(x) = 2e^{3x} + 0,7^x$.**Oplossing**

$f'(x) = 2e^{3x} \cdot 3 + \ln(0,7) \cdot 0,7^x$

$f'(x) = 6e^{3x} + \ln(0,7) \cdot 0,7^x$

Voorbeeld 2Differentieer $g(x) = {}^2\log(7 - 3x) - x$.**Oplossing**

$g'(x) = \frac{1}{(7 - 3x) \cdot \ln(2)} \cdot -3 - 1$

$g'(x) = \frac{-3}{(7 - 3x) \cdot \ln(2)} - 1$

S3 Differentieer.

a $f(x) = 2^{5x+1}$

c $f(x) = 5 \cdot {}^2\log(3x)$

b $f(x) = \ln(4 - x)$

d $f(x) = 3e^{\frac{1}{2}x-2}$

Vaardigheid**Je kunt exponentiële functies primitiveren.**Een primitieve van $f(x) = e^x$ is $F(x) = e^x$.Een primitieve van $f(x) = g^x$ is $F(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot g^x$.**Voorbeeld 1**Primitiveer $f(x) = 6 \cdot 2^x + 1$.**Oplossing**

$F(x) = 6 \cdot \frac{1}{\ln(2)} \cdot 2^x + x$ ofwel $F(x) = \frac{6}{\ln(2)} \cdot 2^x + x$

Voorbeeld 2Primitiveer $g(x) = -3e^{9-4x}$.**Oplossing**

$G(x) = -3 \cdot -\frac{1}{4} \cdot e^{9-4x}$ ofwel $G(x) = \frac{3}{4} e^{9-4x}$.

- S4** Primitiveer.
- a** $f(x) = 5e^{4x-1}$
- b** $f(x) = 5^{\frac{1}{4}x+1}$

Vaardigheid

Je kunt functies van de vorm $f(x) = \frac{1}{ax+b}$ primitiveren.

De afgeleide van $h(x) = \ln|x|$ is $h'(x) = \frac{1}{x}$

Een primitieve van $f(x) = \frac{1}{x}$ is $F(x) = \ln|x|$.

Een primitieve van $f(x) = \frac{1}{ax+b}$ is $F(x) = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax+b|$.

Voorbeeld

Primitiveer $h(x) = \frac{6}{2x-1}$

Oplossing

$H(x) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln|2x-1|$ ofwel $H(x) = 3\ln|2x-1|$

- S5** Primitiveer.
- a** $f(x) = \frac{6}{5x-3}$
- b** $f(x) = \frac{1}{6x}$

Vaardigheid

Je kunt vergelijkingen met de natuurlijke logaritme exact oplossen.

Gebruik de rekenregels voor logaritmen en de definitie van de natuurlijke logaritme om een vergelijking exact op te lossen. Soms is het handig om een substitutie te gebruiken om een vergelijking op te lossen.

Voorbeeld 1

Los exact op
 $2 \ln(x) = \ln(6 - x)$.

Oplossing

$\ln(x^2) = \ln(6 - x)$
 $x^2 = 6 - x$
 $x^2 + x - 6 = 0$
 $(x + 3)(x - 2) = 0$
 $x = -3$ of $x = 2$
 Alleen $x = 2$ voldoet.

Voorbeeld 2

Los exact op $e^{x+5} = 7$.

Oplossing

$x + 5 = \ln(7)$
 $x = \ln(7) - 5$

Voorbeeld 3

Los exact op $\ln^2(x) - \ln(x) = 2$.

Oplossing

Stel $\ln(x) = p$.

$$p^2 - p - 2 = 0$$

$$(p - 2)(p + 1) = 0$$

$$p = 2 \text{ of } p = -1$$

$$\ln(x) = 2 \text{ of } \ln(x) = -1$$

$$x = e^2 \text{ of } x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

S6 Los exact op.

a $8 - \ln(2x - 3) = 6$

b $\ln(x) - \ln(x - 2) = \ln(4)$

c $e^{2x} - 6 = e^x$

T1 De formule $B = 60 \cdot 1,169^t$ beschrijft de groei van een bevolking. Hierbij is t de tijd in perioden van 10 jaar; $t = 0$ komt overeen met 1 januari 2010. B is de grootte van de bevolking in miljoenen.

- a Schrijf de formule met grondtal 2.
- b Benader de verdubbelingstijd in jaren in één decimaal.

T2 Differentieer.

- a $f(x) = e^{0,5x+3}$
- b $f(x) = e^x \cdot e^{2x+1}$
- c $f(x) = \ln(-2x)$
- d $f(x) = \ln\left(\frac{1}{6-2x}\right) + \ln(x+3)$
- e $f(x) = (\ln(x) - 1)(\ln(x) - 2)$
- f $f(x) = \ln(\sqrt{2-3x})$
- g $f(x) = e^{-2x} + \ln\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)$
- h $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$

T3 Differentieer.

- a $f(x) = 3 \cdot 2^x$
- b $g(x) = 3x - 2^{-x}$
- c $h(x) = 3^{1-2x}$
- d $k(x) = (\sqrt{5})^x$
- e $l(x) = {}^3\log(3x(x+1))$
- f $m(x) = x^2 + {}^5\log(2x)$

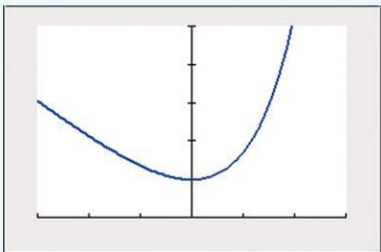
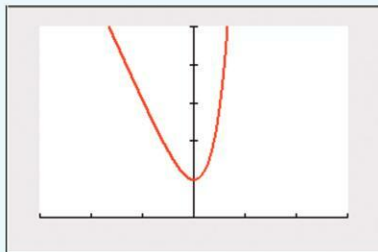
T4 Primitiveer.

- a $f(x) = e^{2x+1}$
- b $g(x) = 3^{1-x}$
- c $h(x) = \frac{3}{4x-9}$
- d $k(x) = 1 - 2 \cdot 3^{-2x}$
- e $l(x) = e^x(1 - e^{-3x})$
- f $m(x) = \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{x-1}$

T5 Los exact op.

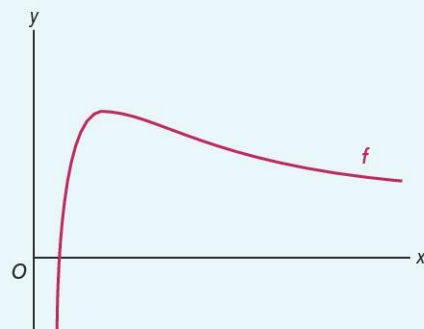
- a $e^{x^2} - e^{2x} = 0$
- b $\frac{2 + e^{0,5x}}{e} = 1$
- c $2\ln(2-4x) - 5 = 1$
- d $\frac{\ln^2(x)}{2 - \ln(x)} = 1$

- T6** a Links zie je een plot van de grafiek van $f(x) = e^x - x$.
Onderzoek met exacte berekeningen of het minimum van deze functie bij $x = 0$ ligt.



- b Rechts is de grafiek van $g(x) = 20^x - 3x$ geplot.
Onderzoek ook voor deze functie met exacte berekeningen of het minimum bij $x = 0$ ligt.
- T7** Gegeven is de functie $f(x) = \ln(e^x - a) - 2x$.
- Voor elke waarde van $a > 0$ heeft de grafiek van f een top. Bewijs dat de x -coördinaat van de top gelijk is aan $\ln(2a)$.
 - Bereken exact voor welke waarden van a de top van de grafiek van f boven de x -as ligt.
- T8** Gegeven is de functie $f(x) = -2x + 6\ln(x)$.
- Bereken exact de coördinaten van de top van de grafiek van f .
 - Bereken de coördinaten van het punt op de grafiek waarin de helling gelijk is aan 18.
 - De raaklijn aan de grafiek in het punt met x -coördinaat 1 snijdt de x -as in punt A en de y -as in punt B . Bereken de oppervlakte van driehoek OAB .

- T9** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1 + {}^4\log(x)}{x \cdot \ln(4)}$
- Bereken exact het nulpunt van f .
 - Geef een vergelijking van elk van de asymptoten van de grafiek van f .
 - Toon aan dat $F(x) = \frac{1}{2} \cdot {}^4\log^2(x) + {}^4\log(x)$ een primitieve van f is.
 - De grafiek van f , de x -as en de lijn $x = 4$ sluiten een gebied G in. Bereken exact de oppervlakte van G .



Je kunt de exponentiële functie $f(t) = a^t$ schrijven als een functie met grondtal g .

- E1 Schrijf de functievoorschriften in de vorm $f(x) = a \cdot 10^{bx}$. Rond indien nodig af op twee decimalen.

- a $f(x) = 3^{2+x}$
- b $f(x) = 4 \cdot 0,1^{2x-3}$
- c $f(x) = -32 \cdot 5^{3-6x}$

Je kunt exponentiële en logaritmische functies differentiëren.

- E2 Differentieer.

- a $f(x) = e^{-3x+2}$
- b $f(x) = \ln(8x + 3)$
- c $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2+x}$
- d $f(x) = \ln^2(x) - 4\ln(x) + 5$

Je kunt exponentiële functies primitiveren.

- E3 Primitiveer.

- a $f(x) = -3 \cdot 0,7^{x+1} + x$
- b $g(x) = 2 - 11 \cdot e^{2-x}$
- c $h(x) = e^{2x} - 2x^e$
- d $k(x) = 4 - 2^{-3x}$

Je kunt functies van de vorm $f(x) = \frac{1}{ax+b}$ primitiveren.

- E4 Primitiveer.

- a $f(x) = \frac{4}{7x}$
- b $g(x) = \frac{4}{3 - 0,2x}$
- c $h(x) = \frac{5}{x+5} + \frac{x+5}{5}$
- d $k(x) = \frac{2}{1-7x} + 3$

Je kunt vergelijkingen met de natuurlijke logaritme exact oplossen.

- E5 Los exact op.

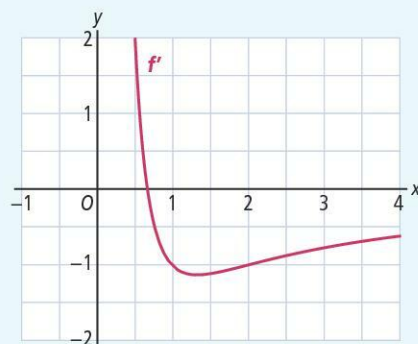
- a $4e^{2x} + 5 = 11$
- b $e^{2x} = e^x + 56$
- c $\ln(2x + 8) - 3 = 1$
- d $\ln(x^2) = \ln(2x + 3)$

- E6** a Bereken exact de helling van de grafiek van $f(x) = {}^3\log(4x - 1)$ in het punt met x -coördinaat 1.
- b Gegeven is de functie $g(x) = \frac{2}{1 + e^{-x}}$
- Stel op algebraïsche wijze een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van g in het snijpunt met de y -as.

- E7** De grafiek van de functie $f(x) = 4 - e^{2x}$ sluit met de x -as en de y -as een gebied G in.
- Bereken exact de oppervlakte van G .

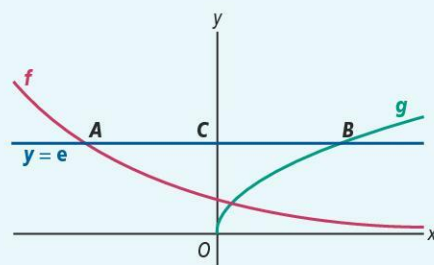
- E8** Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{2}{x} - \ln(x^3)$. In de grafiek is de afgeleide van f getekend.

- a Bewijs dat $f'(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x}$
- b Bereken exact de extreme waarde van f .
- c Aan de grafiek van de afgeleide is te zien dat de grafiek van f een buigpunt heeft.
- Bereken exact de x -coördinaat van het buigpunt van de grafiek van f .



- E9** Twee grafieken raken elkaar wanneer ze in een punt een gemeenschappelijke raaklijn hebben.
- Bereken exact voor welke waarde van c de grafieken van $f(x) = cx^2$ en $g(x) = \ln(x)$ elkaar raken.

- E10** Gegeven zijn de functies $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$ en $g_p(x) = p\sqrt{x}$.
- a De lijn met vergelijking $y = e$ snijdt de grafiek van f in punt A , de grafiek van g_p in punt B en de y -as in punt C . Bereken exact de waarde van p in het geval C het midden is van lijnstuk AB .
- b De grafieken van f en g_p snijden elkaar in een punt met x -coördinaat 1.
- Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g_p en de y -as.



Sangaku

Van 1639 tot 1854 was Japan volkomen geïsoleerd van de Westerse wereld. Er was alleen contact met Japan via de Nederlandse handelspost op het eilandje Dejima, bij Nagasaki. Gedurende deze periode van isolement bloeide een soort eigen wiskunde op. Zowel kooplieden, boeren als samoerai ontwierpen diverse gevarieerde meetkundige problemen en losten deze op. Deze problemen met de door hen zelf gevonden antwoorden zetten ze op houten panelen, die onder de daken van religieuze gebouwen werden opgehangen. Uitwerkingen werden niet gegeven.

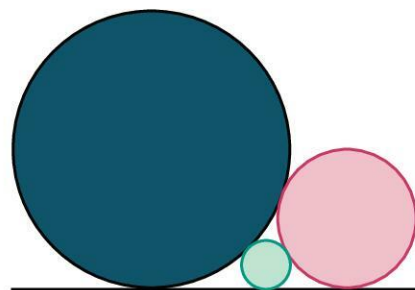
Deze zogenaamde Sangaku kunnen een eer voor de geesten geweest zijn, maar ook een uitdaging voor anderen. Sangaku zijn in heel Japan te vinden. Deze Sangaku's zijn in Kyoto gevonden. Hiernaast staat een vergroting van een deel van het paneel op de bovenste foto.



Bij veel van deze meetkundige problemen spelen cirkels een rol. Het probleem met de cirkels komt van een paneel uit 1824, dat gevonden is in de provincie Gunma.

Drie verschillende cirkels raken elkaar en hebben één gemeenschappelijke raaklijn.

De vraag is wat het verband is tussen de drie stralen van deze cirkels.



Opdracht

In driehoek O_1O_2A is $O_1O_2 = r_1 + r_2$.

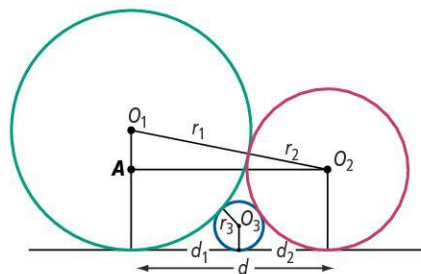
a Druk O_1A uit in r_1 en r_2 .

b Toon aan dat $d = 2 \cdot \sqrt{r_1 \cdot r_2}$.

Op dezelfde manier kun je aantonen dat

$$d_1 = 2 \cdot \sqrt{r_1 \cdot r_3} \text{ en } d_2 = 2 \cdot \sqrt{r_2 \cdot r_3}$$

c Toon aan dat uit $d = d_1 + d_2$ volgt $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$



In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Som- en verschilfuncties
- Goniometrische vergelijkingen
- Integreren
- Vergelijkingen oplossen



Som- en verschilfuncties

Theorie

Het functievoorschrift van de **somfunctie** $f + g$ krijg je door de functievoorschriften van f en g bij elkaar op te tellen.
Het functievoorschrift van de **verschilfunctie** $f - g$ krijg je door het functievoorschrift van g af te trekken van het functievoorschrift van f .
Vaak is het nodig haakjes te gebruiken.

Voorbeeld

Stel functievoorschriften op van $s = k + m$ en $v = k - m$ als $k(x) = -x^2 + 2x$ en $m(x) = -4x + 2$.

Oplossing

$$s(x) = (-x^2 + 2x) + (-4x + 2)$$

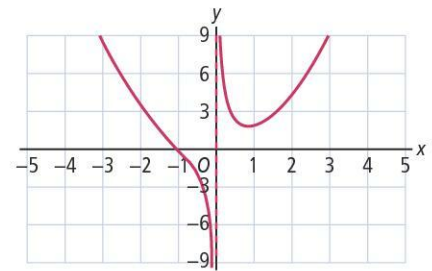
$$s(x) = -x^2 - 2x + 2$$

$$v(x) = (-x^2 + 2x) - (-4x + 2)$$

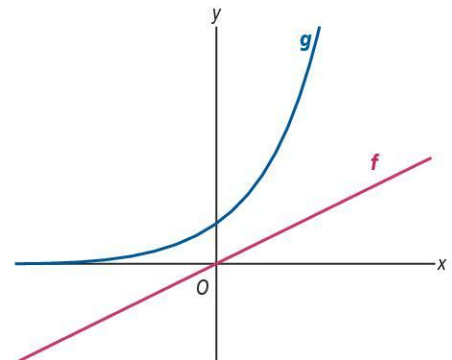
$$v(x) = -x^2 + 2x + 4x - 2$$

$$v(x) = -x^2 + 6x - 2$$

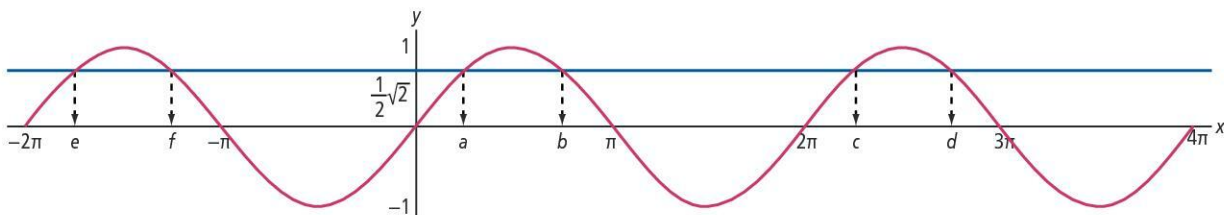
- 1 Gegeven zijn $f(x) = -2x^2 - 3$ en $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$.
 - a Stel functievoorschriften op van de somfunctie $s = f + g$ en van de verschilfuncties $v = f - g$ en $w = g - f$.
 - b Welke van de functies s , v en w is lineair?
- 2 Geef het functievoorschrift van $s = p + q$ en van $v = p - q$ en geef het domein van s en van v .
 - a $p(x) = \frac{1}{1+x}$ en $q(x) = \frac{1}{x}$, schrijf je antwoorden als één breuk.
 - b $p(x) = 2 \cdot \log(2x + 3)$ en $q(x) = 1 + \log(x)$, schrijf je antwoorden als één logaritme.
- 3 Gegeven is de grafiek van $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$
 - a In welk deel van het domein heeft de functie $p(x) = x^2$ de meeste invloed op de functie f ? Waarom?
 - b En in welk deel heeft $q(x) = \frac{1}{x}$ de meeste invloed? Waarom?



- 4 Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x) = \frac{1}{2}x$ en $g(x) = 2^x$.
 - a Schets in deze figuur ook de grafiek van de functie $h = f + g$.
 - b In welk deel van het domein heeft f de meeste invloed op het gedrag van h ? Waarom?
 - c De grafiek van de functie $k(x) = f(x) + g(-x)$ valt voor grote waarden van x praktisch samen met de grafiek van f . Verklaar dit.



Goniometrische vergelijkingen



- 5 Op het interval $[-2\pi, 4\pi]$ is de grafiek van $f(x) = \sin(x)$

getekend met daarin de lijn $y = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

- a Het getal a is de oplossing van de vergelijking

$$\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ op het interval } [0, \frac{1}{2}\pi].$$

Welk getal is a ?

- b Schrijf alle oplossingen op van de vergelijking

$$\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ op het gegeven interval.}$$

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

- 6 Los exact op voor $0 \leq t \leq 2\pi$.

a $\sin(t) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

c $2\cos(t) + 1 = 0$

b $\cos(t) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

d $\sin(t) \cdot \cos(t) = 0$

- 7 Gegeven is de functie $f(x) = \sin(3x)$.

- a Geef de oplossingen van de vergelijking $\sin(x) = \frac{1}{2}$ op het interval $[0, 2\pi]$.

- b Op het blaadje is een begin gemaakt met het oplossen van $f(x) = \frac{1}{2}$ op het interval $[0, 2\pi]$. Maak de berekening op het blaadje af.

☐	$\sin(3x) = \frac{1}{2}$				
☐	$3x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$				
☐	$x = \frac{1}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $x = \dots + k \cdot \dots$				
☐	Op $[0, 2\pi]$ zijn de oplossingen:				
☐	$x = \frac{1}{18}\pi$ of $x = \dots$ of $\dots$				
☐					

- 8 Los exact op voor $-\pi \leq t \leq 3\pi$.

a $\sin(2t) = -1$

c $2\sin(3t) = \sqrt{3}$

b $\cos(\frac{1}{4}t) - \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0$

d $-10\cos(4t) = 5$

- 9 Los exact op.

a $6\cos(\frac{1}{2}x) = 3\sqrt{2}$ op het interval $[0, 3\pi]$

b $5\sin(2x) = 2\frac{1}{2}\sqrt{3}$ op het interval $[-\pi, 2\pi]$

- 10 Los op. Rond af op drie decimalen.

a $\cos(x) = 0,43$ op het interval $[0, 2\pi]$

b $2\cos(x) + 2,3 = 1,5$ op het interval $[0, 3\pi]$

Integreren

Theorie

De integraal van een functie f over het interval $[a, b]$ is

gelijk aan $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, waarbij $F'(x) = f(x)$.

$F(b) - F(a)$ wordt ook wel genoteerd als $[F(x)]_a^b$.

11 Bereken exact.

a $\int_1^{11} (x^3 - 6x) dx$

c $\int_1^{16} (2x\sqrt{x} - 3\sqrt{x}) dx$

b $\int_1^4 \left(\frac{x^4 + 3x^2 + 5}{x^2} \right) dx$

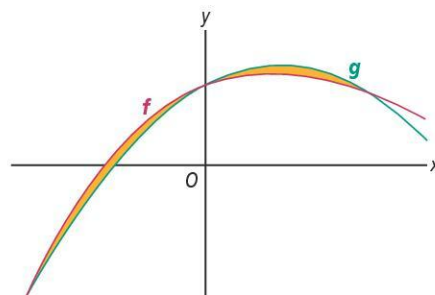
d $\int_0^1 (\sqrt[3]{x^2} + 3x^4) dx$

12 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 5x + 12$ en $g(x) = -4x^2 + 7x + 12$.

a Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g .

b De grafieken van f en g sluiten twee gebieden in.

Bereken exact de oppervlakte van elk van de twee gebieden.



13 Bereken exact.

a $\int_3^4 \left(\frac{5}{x-2} \right)^3 dx$

c $\int_{-2}^3 (2 - 3x)^2 dx$

b $\int_2^6 (5x + 9) dx$

d $\int_{-1}^3 \left(\frac{4}{\sqrt{2x+3}} \right) dx$

14 Bereken exact.

a $\int_{-3}^0 (x^4 - 3) dx + \int_0^2 (x^4 - 3) dx$

b $\int_1^{14} \left(\frac{1}{2x} - x \right) dx - \int_1^{14} \left(\frac{1}{2x} + x \right) dx$

c $\int_5^7 (-x^2 + 2x + 7) dx + \int_5^7 (3x + 7) dx$

Vergelijkingen oplossen

15 Los exact op.

a $\sqrt{x^2 - 4} = x - 2$

d $\sqrt{6 + \sqrt{x}} = 4$

b $\frac{3}{\sqrt{2x + 4}} = 2$

e $\frac{2 + x}{\sqrt{x}} = 3$

c $2\sqrt{x} = \sqrt{2x}$

f $\sqrt{x^2 + 2x} = x + 2$

16 Vergelijkingen kun je soms oplossen met behulp van een substitutie.

a Los $2\left(\frac{1}{2}x + 3\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}x + 3\right) - 60 = 0$ op met behulp van de substitutie $\frac{1}{2}x + 3 = t$.

b Los $5^{2x} - 5 \cdot 5^x + 6 = 0$ op met behulp van de substitutie $5^x = t$.

17 Los exact op met behulp van een substitutie.

a $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

d $-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\sqrt{x} + 14 = 0$

b $\left(1 + \frac{1}{3}x\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{3}x\right) - 2 = 0$

e $-6^{-2x} + \frac{37}{6} \cdot 6^{-x} - 1 = 0$

c $\frac{1}{x^2} + \frac{8}{x} + 15 = 0$

f $\frac{25}{4a^2} + \frac{10}{a} + 4 = 0$

Theorie

Bij vergelijkingen van de vorm $A \cdot B = 0$, $A^2 = B^2$ of $A \cdot B = A \cdot C$ gebruik je de volgende regels:

- Uit $A \cdot B = 0$ volgt $A = 0$ of $B = 0$.
- Uit $A^2 = B^2$ volgt $A = B$ of $A = -B$.
- Uit $A \cdot B = A \cdot C$ volgt $A = 0$ of $B = C$.

18 Los exact op.

a $6(x - 21)(x + 13) = 0$

d $(x^{\frac{1}{6}} - 5)(3x^5 - 21)(4 - x) = 0$

b $x^2(x - 9) = 3x^2$

e $(x - 9)^2 = (2x + 3)^2$

c $3(5x - 2)^2 = 48$

f $3(x^4 - 9) = (x^4 - 9)^2$

19 Los exact op.

a $\frac{1}{|x + 1|} = \frac{2}{3}$

c $|x^2 - 5x| = 6$

b $|-x^3 + 1| = 12$

d $|4x - x\sqrt{x}| = x$



SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In de voorafgaande jaren heb je geleerd te werken met gelijkvormige driehoeken, de stelling van Pythagoras en met de sinus, cosinus en tangens in rechthoekige driehoeken.

In dit hoofdstuk leer je formules waarmee je lengten en hoeken kunt berekenen in driehoeken die niet rechthoekig zijn. Verder komen stellingen over cirkels en raaklijnen en hun toepassingen aan de orde. In de laatste paragraaf wordt aandacht besteed aan het zowel meetkundig als algebraïsch oplossen van een meetkundig probleem.

In deel 4 wordt de meetkunde afgesloten.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Formules manipuleren*
- *Logisch redeneren en bewijzen*
- *Probleem oplossen en analytisch denken*

opdracht 10
opdracht 23
opdracht 31



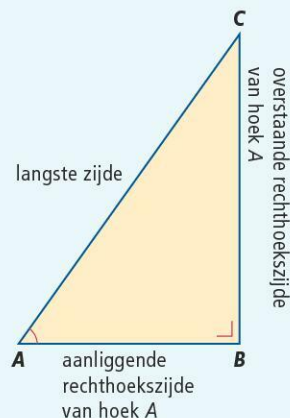
Theorie

In een rechthoekige driehoek kun je de goniometrische verhoudingen **sinus**, **cosinus** en **tangens** gebruiken:

$$\sin(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van hoek } A}{\text{langste zijde}}$$

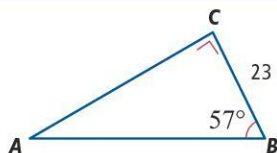
$$\cos(\angle A) = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde van hoek } A}{\text{langste zijde}}$$

$$\tan(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van hoek } A}{\text{aanliggende rechthoekszijde van hoek } A}$$



Voorbeeld 1

In $\triangle ABC$ is $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 57^\circ$ en $BC = 23$.



Bereken in één decimaal AC en AB .

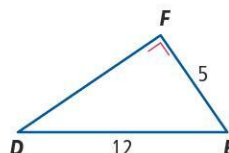
Oplossing

$$\tan(57^\circ) = \frac{AC}{23} \text{ dus } AC = 23 \cdot \tan(57^\circ) \approx 35,4.$$

$$\cos(57^\circ) = \frac{23}{AB} \text{ dus } AB = \frac{23}{\cos(57^\circ)} \approx 42,2.$$

Voorbeeld 2

In $\triangle DEF$ is $\angle F = 90^\circ$, $DE = 12$ en $EF = 5$. Bereken in hele graden $\angle D$ en $\angle E$.



Oplossing

$$\sin(\angle D) = \frac{5}{12} \text{ dus } \angle D \approx 25^\circ \text{ en } \angle E \approx 180^\circ - 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ.$$

V1 Bereken in één decimaal de lengte van de onbekende zijden en in hele graden de grootte van de scherpe hoeken.

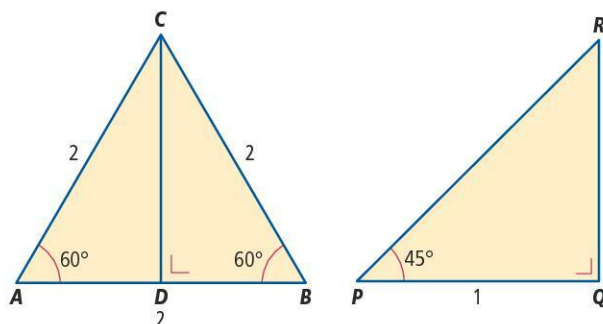
a $\triangle ABC$ met $\angle A = 90^\circ$, $AB = 13$ en $BC = 14$

b $\triangle DEF$ met $\angle F = 90^\circ$, $DE = 13$ en $EF = 5$

c $\triangle PQR$ met $\angle R = 90^\circ$, $\angle Q = 57^\circ$ en $PR = 16$

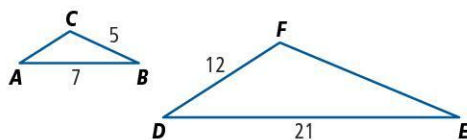
V2 Vul de tabel met exacte waarden verder in. Gebruik eventueel de gelijkzijdige driehoek ABC en de gelijkbenige rechthoekige driehoek PQR .

graden	0	30	45	60	90
sinus	0	...	...	...	...
cosinus	1	...	...	...	...



V3 $\triangle DEF$ is een vergroting van $\triangle ABC$.

- Wat kun je zeggen over de hoeken van beide driehoeken?
- Bereken de vergrotingsfactor.
- Bereken AC en EF .



Theorie

Twee driehoeken zijn **gelijkvormig** als je kunt aantonen dat aan één van de twee volgende voorwaarden is voldaan.

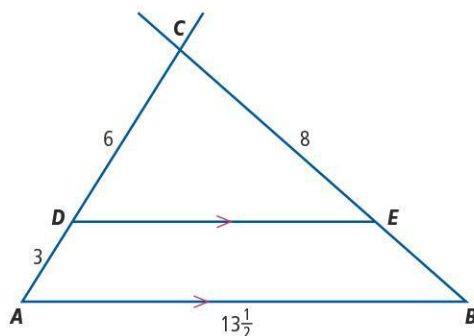
- De overeenkomstige hoeken zijn gelijk.
- De overeenkomstige zijden zijn met dezelfde factor vermenigvuldigd.

Voor gelijkvormige figuren gebruik je het teken $\sim$.

V4 In $\triangle ABC$ is $AB \parallel DE$.

$AD = 3$, $DC = 6$, $CE = 8$ en $AB = 13\frac{1}{2}$.

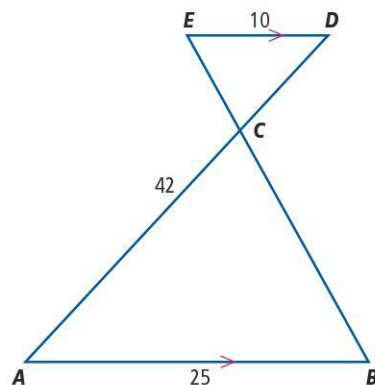
- Leg uit waarom $\triangle ABC$ gelijkvormig is met $\triangle DEC$.
- Bereken DE en BC .
- Bereken BE .



V5 In de tekening is $ED \parallel AB$. AD is 42, maar van de twee delen AC en CD weet je de lengte niet.

Er zijn verschillende methoden om AC te berekenen.

- Leg uit waarom $\triangle ABC$ gelijkvormig is met $\triangle DEC$.
- Manier 1: Stel $AC = x$, dan geldt $CD = 42 - x$. Maak een verhoudingstabel en bereken daarmee x .
- Manier 2: De verhouding tussen de lengten van de zijden van de driehoeken is gelijk aan $AB : DE$. Verdeel AD volgens deze verhouding en bereken AC .



- V6
- Teken een cirkel met middelpunt M . Kies twee punten A en B op de cirkel en teken lijnstuk AB .
 - Waarom ligt M op de middelloodlijn van lijnstuk AB ?
 - Teken een cirkel met middelpunt N . Kies twee punten C en D op de cirkel en teken lijnstuk CD .
 - Op lijnstuk CD ligt een punt Q met $\angle DQN = 90^\circ$. Toon aan dat Q op de bissectrice van $\angle CND$ ligt.

15.1 Sinusregel

Je leert

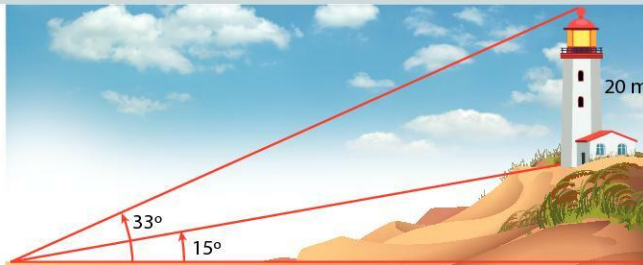
- wat de sinusregel is
- hoe je de sinusregel gebruikt om een lengte of de grootte van een hoek te berekenen

Leerroutes

- ondersteunend: 1 — 2 — 03 — 3 — 4 — 05 — 6
- doorlopend: 1 — 2 — 3 — 4 — 5 — 6 — 7
- uitdagend: 1 — 2 — 3 — 5 — 6 — 7 — U1

Een 20 meter hoge vuurtoren staat op een duintop. Vanaf een punt op het strand zie je de onderkant van de vuurtoren onder een hoek van 15° en de top onder een hoek van 33° .

- Hoe zou je hulplijnen kunnen gebruiken om de hoogte van de duintop te berekenen?

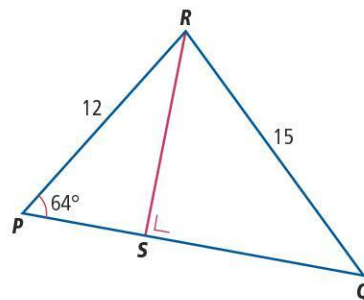


- 1 Gegeven is $\triangle PQR$ met $\angle P = 64^\circ$, $PR = 12$ en $QR = 15$.

Lijnstuk RS is de hoogtelijn vanuit R .

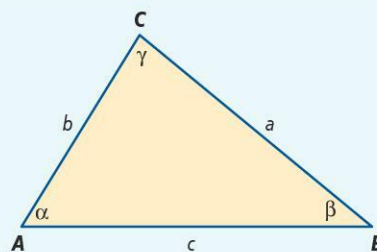
- Bereken RS in twee decimalen.
- Bereken $\angle Q$ en $\angle PRQ$ in hele graden.
- Bereken PS , QS en PQ .
- Controleer dat bij benadering geldt

$$\frac{PQ}{\sin(\angle R)} = \frac{QR}{\sin(\angle P)} = \frac{PR}{\sin(\angle Q)}$$



Voor de lengten van de zijden en de grootte van de hoeken in een willekeurige driehoek ABC gebruik je vaak vaste letters:
 $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ en $\angle C = \gamma$.

De lengte van de zijde tegenover hoek A is a . Evenzo zijn b en c de lengten van de zijden tegenover de hoeken B en C .



- 2
- Teken een willekeurige driehoek ABC en zet de letters α , β , γ , a , b en c op de juiste plaats.
 - Teken de hoogtelijn CD in deze driehoek.
 - De lengte van hoogtelijn CD is h .
Leg uit dat $h = b \cdot \sin(\alpha)$ en $h = a \cdot \sin(\beta)$.
 - Verklaar dat uit opdracht c volgt: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$
 - Welke hoogtelijn heb je nodig om op dezelfde manier als in opdracht d te bewijzen dat $\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$?

Theorie

In elke driehoek geldt de **sinusregel**:

Voor een driehoek waarvan α , β en γ de grootten van de hoeken zijn en a , b en c de lengten van de tegenoverliggende

zijden, geldt $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

Je kunt de sinusregel gebruiken als je de lengte van een zijde en de grootte van de tegenoverliggende hoek kent.

Voorbeeld 1

In $\triangle ABC$ geldt $c = 8$, $\alpha = 52^\circ$ en $\gamma = 47^\circ$.
Bereken a en b .

Oplossing

$$c = 8, \text{ dus } \frac{a}{\sin(52^\circ)} = \frac{8}{\sin(47^\circ)}$$

$$\text{Daaruit volgt } a = \frac{8 \cdot \sin(52^\circ)}{\sin(47^\circ)} \approx 8,6.$$

$$\beta = 180^\circ - 52^\circ - 47^\circ = 81^\circ$$

$$\frac{b}{\sin(81^\circ)} = \frac{8}{\sin(47^\circ)} \text{ dus } b = \frac{8 \cdot \sin(81^\circ)}{\sin(47^\circ)} \approx 10,8.$$

Voorbeeld 2

In $\triangle PQR$ is $\angle P = 59^\circ$, $PQ = 17$ en $QR = 19$.
Bereken $\angle Q$ en $\angle R$.

Oplossing

Stel $PQ = c$, $PR = b$ en $QR = a$,

$$\text{dan geldt } \frac{19}{\sin(59^\circ)} = \frac{17}{\sin(\angle R)}$$

$$\text{Daaruit volgt } \sin(\angle R) = \frac{17 \cdot \sin(59^\circ)}{19} = 0,766...$$

$$\text{dus } \angle R \approx 50^\circ \text{ en } \angle Q \approx 180^\circ - 59^\circ - 50^\circ = 71^\circ.$$

Ondersteunende route → maak opdracht 03

- 3** Bereken de lengte van de onbekende zijden en de grootte van de hoeken van $\triangle ABC$. Maak zo nodig eerst een schets.

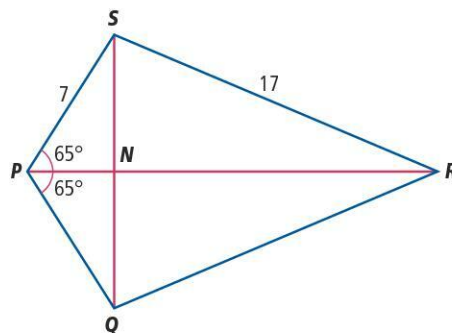
H

- a $a = 5$, $\alpha = 49^\circ$ en $\beta = 88^\circ$
- b $\alpha = 79^\circ$, $b = 13$ en $a = 17$
- c $AC = 45$, $\angle A = 67^\circ$ en $\angle C = 53^\circ$
- d $AB = 14$, $BC = 12$ en $\angle C = 82^\circ$

- 4** Van een vlieger $PQRS$ is gegeven:
 $PS = 7$, $RS = 17$ en $\angle QPR = \angle SPR = 65^\circ$.
Het snijpunt van de diagonalen is punt N .

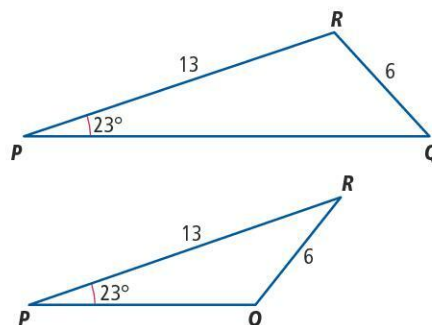
- a Bereken PN en SN .
- b Bereken RN en PR .
- c Bereken ook PR door de sinusregel toe te passen in $\triangle PRS$.

Rond bij alle berekeningen lengten af op één decimaal en hoeken op hele graden.



Ondersteunende route → maak opdracht O5

- 5 In beide driehoeken PQR geldt $\angle P = 23^\circ$, $PR = 13$ en $QR = 6$.
- Laat met een berekening zien dat in de bovenste driehoek geldt: $\angle Q = 58^\circ$.
 - Bereken $\sin(\angle Q)$ voor de onderste driehoek.
 - Ga met je rekenmachine na dat $\sin(180^\circ - 58^\circ) = \sin(58^\circ)$.
 - Hoe groot is hoek Q in de onderste driehoek?



Theorie

Voor een stompe hoek A kun je $\sin(\angle A)$ berekenen met $\sin(\angle A) = \sin(180^\circ - \angle A)$. Daarom zijn er soms twee oplossingen mogelijk bij het rekenen met de sinusregel.

Voorbeeld

In de stomphoekige driehoek PQR is $PR = 10$, $QR = 7$ en $\angle P = 43^\circ$. Bereken $\angle Q$ en PQ .

Oplossing

De sinusregel geeft $\frac{7}{\sin(43^\circ)} = \frac{10}{\sin(\angle Q)}$, dus $\sin(\angle Q) = \frac{10 \cdot \sin(43^\circ)}{7} = 0,974\dots$

$\angle Q \approx 77^\circ$ (voldoet niet, want dan geldt $\angle R = 180^\circ - 43^\circ - 77^\circ = 60^\circ$ en dan is er geen stompe hoek)

of $\angle Q \approx 180^\circ - 77^\circ = 103^\circ$ en dus $\angle R = 180^\circ - 43^\circ - 103^\circ = 34^\circ$.

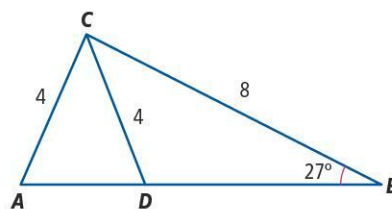
$$\frac{PQ}{\sin(34^\circ)} = \frac{7}{\sin(43^\circ)} \text{ dus } PQ = \frac{7 \cdot \sin(34^\circ)}{\sin(43^\circ)} \approx 5,7.$$

- 6 Van $\triangle ABC$ is $BC = 8$, $AC = 4$ en $\angle B = 27^\circ$.

H

Punt D ligt op zijde AB met $CD = 4$.

- Bereken $\angle BDC$.
- Bereken de overige hoeken in de figuur.
- Bereken AD en BD .



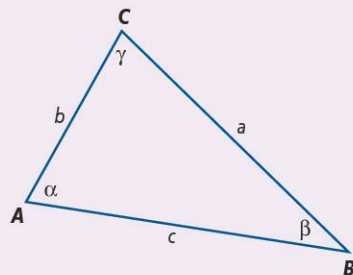
- 7 In $\triangle ABC$ geldt $\angle A = 30^\circ$, $AC = 12$ en $BC = 10$. In $\triangle DEF$ geldt $\angle D = 30^\circ$, $DF = 12$ en $EF = 6$. Een van deze driehoeken is door deze gegevens vastgelegd, voor de andere driehoek zijn er twee mogelijkheden. Toon dit aan met tekeningen en berekeningen.

Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

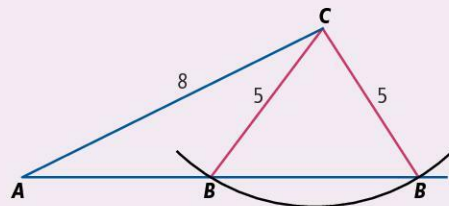
03 In $\triangle ABC$ is $\alpha = 73^\circ$, $\beta = 32^\circ$ en $b = 10$.

- Vul de gegevens in bij de sinusregel: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$
- Bereken a .
- Bereken γ .
- Bereken c met behulp van $\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$



05 Van $\triangle ABC$ is gegeven: $AC = 8$, $BC = 5$ en $\angle A = 27^\circ$. In de tekening kun je zien dat er twee mogelijkheden zijn voor de plaats van punt B .

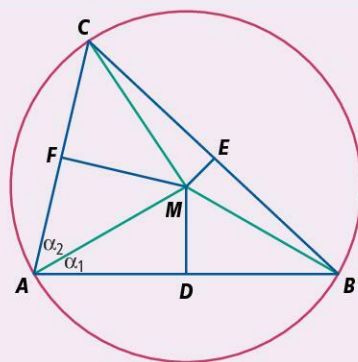
- Vul bij de sinusregel $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$ de gegevens in en controleer met een berekening dat $\sin(\beta) \approx 0,726$.
- Bereken β .
- Bereken $180^\circ - \beta$ en controleer dat $\sin(180^\circ - \beta) = \sin(\beta)$.
- Bereken γ en AB voor elk van de twee mogelijke driehoeken.



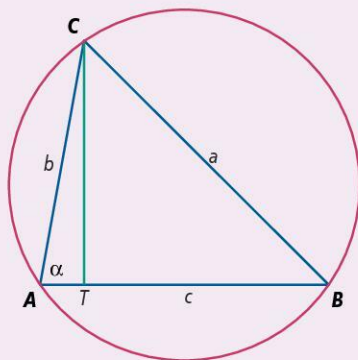
Uitdagende opdrachten

U1 In $\triangle ABC$ zijn de punten D , E en F de middens van de zijden. De middelloodlijnen van de zijden snijden elkaar in punt M . M is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van de driehoek. De straal van de omgeschreven cirkel is R .

- Stel $\angle BAM = \alpha_1$, $\angle CAM = \alpha_2$ en $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$. Druk $\angle BMC$ uit in α_1 en α_2 .
- Laat zien dat $R = \frac{a}{2 \sin(\alpha)}$



- In de tweede figuur is in $\triangle ABC$ de hoogtelijn CT getekend. Toon aan dat voor de oppervlakte O van $\triangle ABC$ geldt $O = \frac{1}{2}bc \sin(\alpha)$.
- Bewijs dat $R = \frac{abc}{4O}$



15.2 Cosinusregel

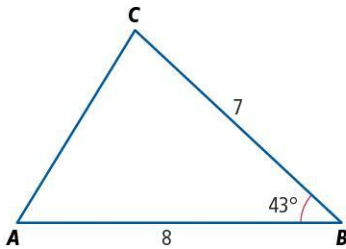
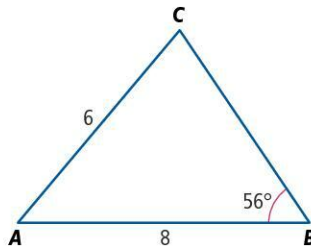
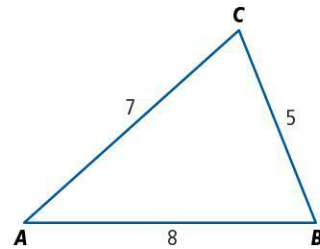
Je leert

- wat de cosinusregel is
- hoe je de cosinusregel gebruikt om een lengte of de grootte van een hoek te berekenen

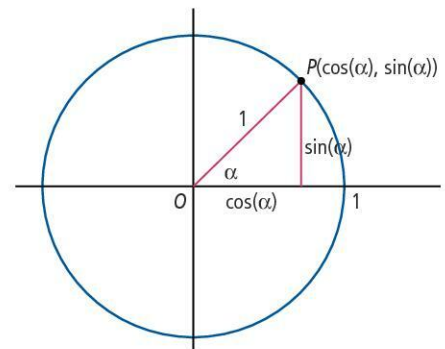
Leerroutes

- ondersteunend: 8—9—011—11—12—13—14—15—16
- doorlopend: 8—9—10—11—12—13—14—15—16
- uitdagend: 8—10—11—12—13—14—15—16—U2

- Bij welke van deze driehoeken kun je $\angle C$ berekenen? Verklaar je antwoord.



- 8 Een punt P ligt op de eenheidscirkel, zodat de hoek tussen de lijn OP en de positieve x -as gelijk is aan α . De coördinaten van P zijn dan gelijk aan $x_P = \cos(\alpha)$ en $y_P = \sin(\alpha)$.
- Verklaar dat voor een scherpe hoek α geldt: $(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$.
 - Toon aan dat deze formule ook geldt voor een stompe hoek α .

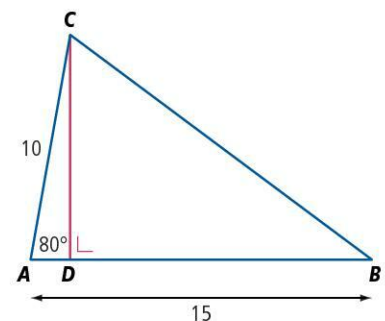


Theorie

Voor elke α , $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, geldt $(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$.

Je kunt dit ook schrijven als $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

- 9 In $\triangle ABC$ is $AC = 10$, $AB = 15$ en $\angle CAB = 80^\circ$. De driehoek wordt door de hoogtelijn CD in twee rechthoekige driehoeken verdeeld.
- Bereken met behulp van $\sin(\angle A)$ de lengte van de hoogtelijn CD .
 - Bereken AD en BD .
 - Bereken BC nu in $\triangle BDC$.



- 10** In $\triangle ABC$ is CD de hoogtelijn uit punt C .
Als b , c en α bekend zijn, dan kun je een formule opstellen om a te berekenen.

a Leg uit waarom $CD = b \cdot \sin(\alpha)$ en $BD = c - b \cdot \cos(\alpha)$.

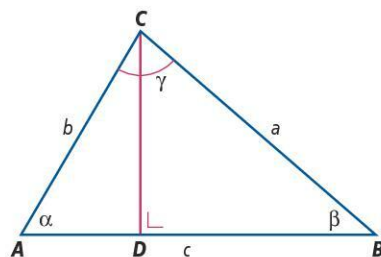
b In $\triangle BCD$ geldt $BC^2 = CD^2 + BD^2$.

Gebruik opdracht a om aan te tonen dat

$$a^2 = b^2 \cdot \sin^2(\alpha) + b^2 \cdot \cos^2(\alpha) - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) + c^2.$$

c Omdat $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ kun je het resultaat van opdracht b schrijven als $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$.

Laat dat zien.



Theorie

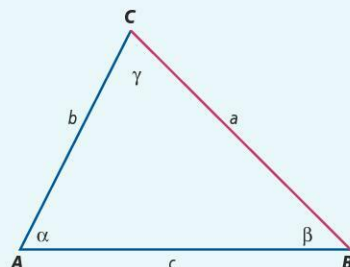
In een driehoek kun je de lengte van een zijde berekenen als je de lengte van de andere zijden en de grootte van de tegenoverliggende hoek kent. De regel die je gebruikt heet de **cosinusregel**.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

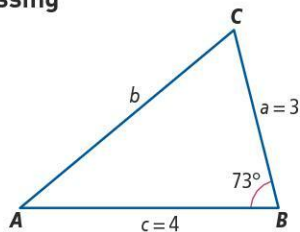
Je kunt deze formules ook gebruiken om de grootte van de hoeken te berekenen als je van een driehoek de lengte van alle drie zijden kent.



Voorbeeld 1

In $\triangle ABC$ is $c = 4$, $a = 3$ en $\beta = 73^\circ$.
Bereken b .

Oplossing



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$

$$b^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos(73^\circ) = 17,983\dots,$$

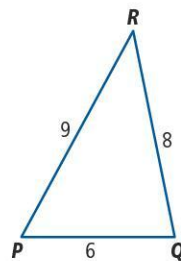
$$\text{dus } AC = b = \sqrt{17,983\dots} \approx 4,2.$$

Voorbeeld 2

In $\triangle PQR$ is $PQ = 6$,
 $QR = 8$ en $PR = 9$.
Bereken $\angle P$.

Oplossing

Hoek P ligt tegenover zijde QR .



$$QR^2 = PQ^2 + PR^2 - 2 \cdot PQ \cdot PR \cdot \cos(\angle P)$$

$$64 = 36 + 81 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \cos(\angle P)$$

$$64 = 117 - 108 \cos(\angle P)$$

$$108 \cos(\angle P) = 53$$

$$\cos(\angle P) = \frac{53}{108} \text{ geeft } \angle P \approx 61^\circ.$$

Ondersteunende route → maak opdracht 011

- 11** a Van $\triangle ABC$ is gegeven: $b = 19$, $c = 15$ en $\alpha = 39^\circ$.
 Maak een schets en bereken a .
H b Van $\triangle PQR$ is gegeven: $PQ = 35$, $PR = 13$ en $\angle P = 85^\circ$.
 Bereken QR .
 c Van $\triangle KLM$ is gegeven: $KL = 15$, $LM = 18$ en $KM = 12$.
 Bereken $\angle L$ en $\angle M$.
- 12** Van $\triangle ABC$ is gegeven: $a = 33$, $b = 56$ en $c = 65$.
 a Bereken γ .
 b Welke bijzonderheid heeft $\triangle ABC$?
 c De stelling van Pythagoras is eigenlijk een bijzonder geval van de cosinusregel.
 Leg uit waarom dat zo is.
- 13** Gegeven is $\triangle DEF$ met $DE = 9$, $EF = 14$ en $DF = 8$.
 a Bereken $\angle F$ met de cosinusregel.
 b Bereken $\angle E$ met de sinusregel.
 c Laat met de cosinusregel zien dat $\cos(\angle D)$ negatief is.
 d Bereken $\angle D$ en controleer dat de som van de drie hoeken gelijk is aan 180° .

Theorie

Voor een stompe hoek A kun je $\cos(\angle A)$ berekenen met $\cos(\angle A) = -\cos(180^\circ - \angle A)$.
 Voor een rechte hoek geldt $\cos(90^\circ) = 0$.

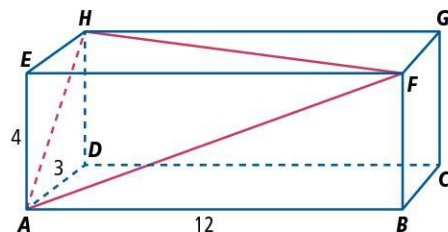
Voorbeeld

$\cos(130^\circ) = -\cos(50^\circ)$
 $\cos(175^\circ) = -\cos(5^\circ)$
 $\cos(93^\circ) = -\cos(87^\circ)$

- 14** Van een stomphoekige driehoek STU is gegeven: $ST = 13$, $TU = 6$ en $SU = 9$.
 Bereken de grootte van de stompe hoek.

- 15** Gegeven is de balk $ABCD.EFGH$ met $AD = 3$, $AB = 12$ en $AE = 4$.

- H** a Bereken exact AH , AF en FH .
 b Bereken de grootte van de hoeken van $\triangle AFH$.



- 16** Van $\triangle ABC$ is gegeven: $a = 21$, $b = 17$ en $c = 28$.
 Punt D is het midden van zijde AB .
 Bereken CD exact.

Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

011 Van $\triangle ABC$ is gegeven: $b = 11$, $a = 21$ en $\gamma = 57^\circ$.

Birk gaat c berekenen.

- Maak een schets van $\triangle ABC$.
- Vul het blaadje van Birk verder in.
- Bereken c .

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

$$\dots = \dots + \dots - 2 \cdot \dots \cdot \dots \cdot \cos(\dots)$$

$$\dots$$

$$\dots$$

Dennis wil in $\triangle PQR$ met $PQ = 15$, $QR = 12$ en $PR = 11$ de grootte van hoek R berekenen.

- d Maak een schets van $\triangle PQR$.
- e Welke zijde ligt tegenover hoek R ?
- f Vul het blaadje van Dennis in en bereken zo $\cos(\angle R)$.
- g Bereken $\angle R$.

Vul in:

$PQ^2 =$

$PR^2 + QR^2 - 2 \cdot PR \cdot QR \cdot \cos(\angle R)$

$15^2 = \dots + \dots - 2 \cdot \dots \cdot \dots \cdot \cos(\angle R)$

$\dots \cos(\angle R) = \dots$

$\cos(\angle R) = \dots$

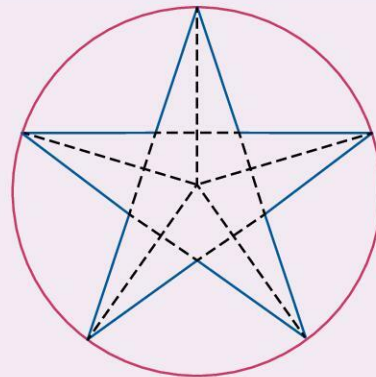
Dennis

Uitdagende opdrachten

U2 Sanne wil een regelmatige vijfpuntige ster maken met zijden van 8 cm. Dat doet zij door in een cirkel met de geodriehoek vijf middelpuntshoeken van 72° te tekenen.

Door de zo verkregen punten op de cirkel om en om te verbinden, krijgt ze haar vijfpuntige ster.

Bereken algebraïsch hoe groot zij de straal van de cirkel moet nemen. Geef je antwoord in hele millimeters.



15.3 Stelling van Thales

Je leert

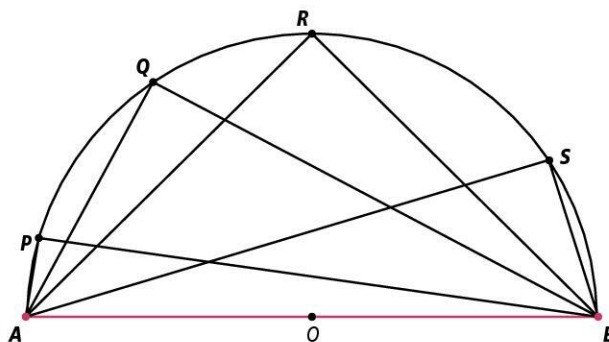
- wat de stelling van Thales is
- hoe je de stelling van Thales gebruikt

Leerroutes

- ondersteunend: 17–18–20–021–21–22–023–23
- doorlopend: 17–18–19–20–21–22–23–24
- uitdagend: 17–18–19–21–22–23–24–U3

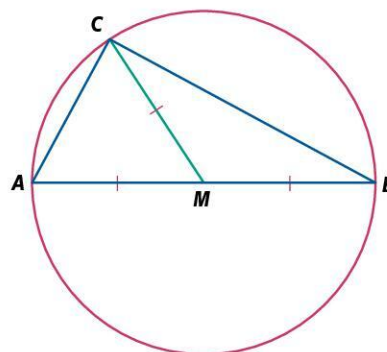
Vanuit elk punt van de halve cirkel met middellijn AB zie je lijnstuk AB onder een bepaalde hoek.

- Meet de grootte van de hoeken P , Q , R en S . Wat valt je op?



17 Lijnstuk AB is een middellijn van een cirkel met middelpunt M .

- Neem $\angle BAC = 54^\circ$.
Toon aan dat $\angle ACB = 90^\circ$.
- Veronderstel dat $\angle ABC = 40^\circ$.
Toon aan dat $\angle ACB = 90^\circ$.
- Stel $\angle A = \alpha$ en $\angle B = \beta$.
Toon aan dat $\angle ACB = 90^\circ$.



18

- Teken een driehoek ABC met $\angle C = 90^\circ$ en vul deze aan met een punt D tot de rechthoek $ADBC$.
- Teken ook de diagonaal CD .
- Welke eigenschappen hebben de diagonalen van een rechthoek?
- Waarom volgt uit het antwoord dat C op de cirkel met middellijn AB moet liggen?

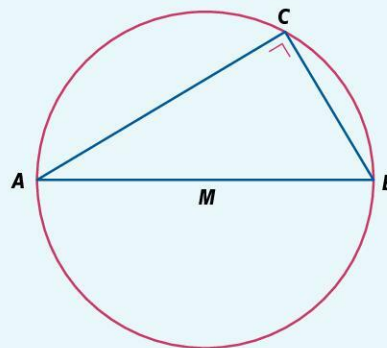
Theorie

Stelling van Thales (genoemd naar de Griekse wiskundige Thales van Milete, 624 – 545 v. Chr.)

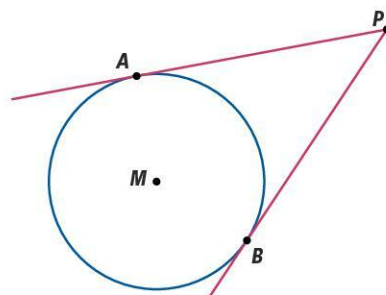
Een driehoek waarvan een zijde de middellijn van de omgeschreven cirkel is, is rechthoekig.

En omgekeerd:

Van een rechthoekige driehoek is het midden van de lange zijde het middelpunt van de omgeschreven cirkel.



- 19 Gegeven is een cirkel met middelpunt M . De raaklijnen vanuit een punt P buiten de cirkel raken de cirkel in de punten A en B .
- Toon aan dat M , A , B en P op een cirkel liggen.
 - Wat is het middelpunt van deze cirkel?
 - Beschrijf hoe je met behulp van het antwoord op opdracht b de raakpunten van de raaklijnen uit P aan de cirkel kunt vinden.



- 20 Op een cirkel met middelpunt M en middellijn AB liggen de punten C en D aan verschillende kanten van de middellijn. Verder geldt $AC = BC$ en $\angle BAD = 35^\circ$. Bereken exact de grootte van de hoeken van vierhoek $ADBC$.

Theorie

Als er in een meetkundige opdracht een meetkundige redenering of berekening wordt gevraagd, kun je gebruikmaken van

- gelijkvormigheid
- stellingen (noem dan de naam van de stelling, bijvoorbeeld Pythagoras of Thales).
- de sinusregel of de cosinusregel.

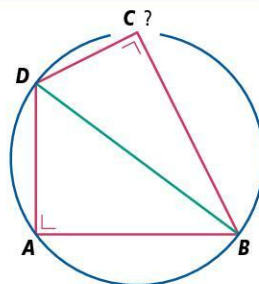
Voorbeeld

Van vierhoek $ABCD$ zijn hoek A en hoek C recht. Bewijs dat C op de omgeschreven cirkel van $\triangle ABD$ ligt.

Oplossing

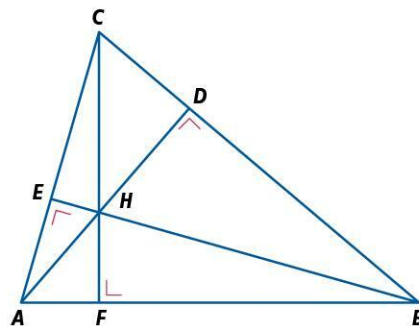
Omdat hoek A recht is, is het middelpunt M van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABD$ het midden van zijde BD (Thales).

Omdat hoek C recht is, ligt C op de cirkel met middellijn BD (Thales). Dus C ligt op dezelfde cirkel als A , B en D .

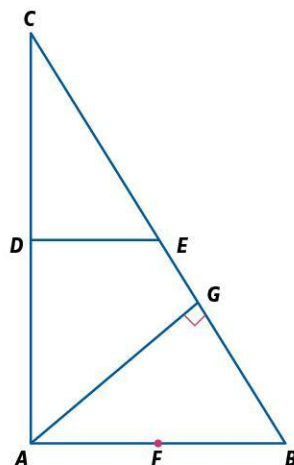


Ondersteunende route → maak opdracht 021

- 21 In $\triangle ABC$ zijn de hoogtelijnen getekend.
- Toon aan dat de punten B , D , H en F op een cirkel liggen.
 - Toon aan dat de punten A , B , D en E op een cirkel liggen.
 - Waar ligt het middelpunt van de cirkel door A , B , D en E ?
 - Noem nog vier vierhoeken in de figuur waarvan de hoekpunten op een cirkel liggen.
 - Onderzoek of de beweringen in de opdrachten a en b ook gelden als hoek A stomp is.

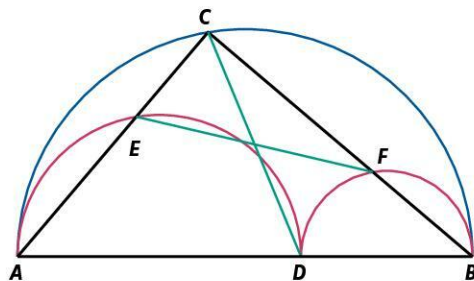


- 22** Gegeven is $\triangle ABC$ met $\angle BAC = 90^\circ$. De punten D , E en F zijn de middens van de zijden AC , BC en AB en $AG \perp BC$.
- H**
- Waarom is $DE \parallel AB$?
 - Welke vorm heeft vierhoek $ADEF$? Waarom?
 - Waarom is er precies één cirkel mogelijk door de vijf punten A , D , E , G en F ?
 - Waar ligt het middelpunt van deze cirkel?

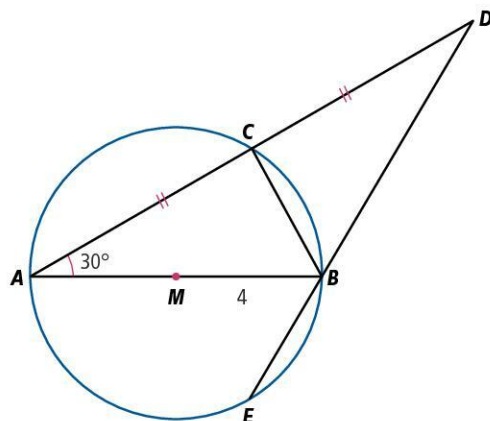


Ondersteunende route → maak opdracht 023

- 23** Gegeven is een halve cirkel met middellijn AB . Op de halve cirkel ligt een punt C en op lijnstuk AB ligt een punt D . De halve cirkel met middellijn AD snijdt lijnstuk AC in punt E en de halve cirkel met middellijn BD snijdt lijnstuk BC in punt F . Bewijs dat $CD = EF$.



- 24** Lijnstuk AB is een middellijn van een cirkel met middelpunt M en straal 4. Op de cirkel ligt het punt C met $\angle BAC = 30^\circ$. Punt D ligt op het verlengde van lijnstuk AC met $CD = AC$. Lijn DB snijdt de cirkel in punt E .
- Bereken exact AC .
 - Toon aan dat $BE = BC$.



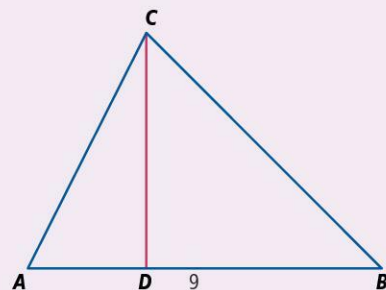
Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

021 Gegeven is $\triangle ABC$ met $AB = 9$. De loodlijn uit C op lijnstuk AB snijdt dat lijnstuk in punt D .

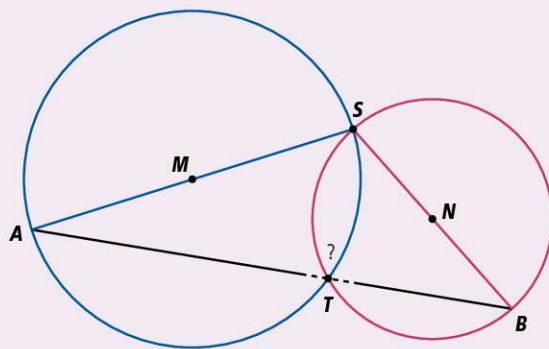
M is het middelpunt van de omschreven cirkel van $\triangle ADC$.
 N is het middelpunt van de omschreven van cirkel $\triangle BCD$.
 Je gaat in deze opdracht MN berekenen.

- Wat voor soort driehoek is $\triangle ADC$?
- Waar ligt punt M ? Waarom?
- Waar ligt punt N ? Waarom?
- Waarom is $\triangle CMN$ gelijkvormig met $\triangle CAB$?
 Hoe groot is de factor?
- Bereken MN .



023 Een cirkel c_1 met middelpunt M en een cirkel c_2 met middelpunt N snijden elkaar in de punten S en T . De lijn door S en M snijdt c_1 in punt A en de lijn door S en N snijdt c_2 in punt B .
 Je gaat aantonen dat T op lijnstuk AB ligt.

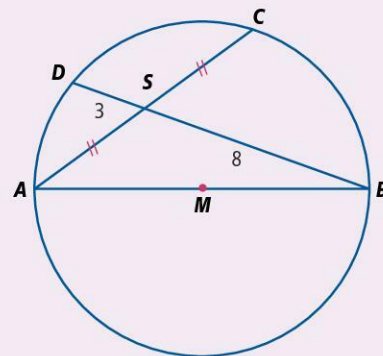
- Hoe groot is hoek STA ? Waarom?
- Hoe groot is hoek STB ? Waarom?
- Maak het bewijs af.



Uitdagende opdrachten

U3 Gegeven is een cirkel met middelpunt M en middellijn AB .
 De punten C en D liggen op de cirkel waarbij lijnstuk BD door het midden S van lijnstuk AC gaat. $BS = 8$ en $DS = 3$.

- Toon aan dat $\triangle ASD \sim \triangle BSC$.
- Bereken exact AS .
- Bereken exact de straal van de cirkel.



15.4 Cirkels en raaklijnen

Je leert

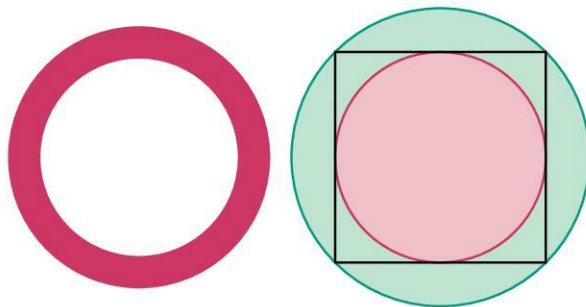
- hoe je stellingen over raaklijnen aan cirkels gebruikt

Leerroutes

- ondersteunend: 25—26—27—028—029—29—30
- doorlopend: 25—26—27—28—29—30—31
- uitdagend: 25—26—27—28—29—30—U4

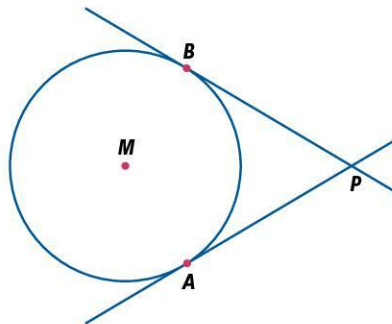
In de figuur zie je naast het verkeersbord een vierkant met de ingeschreven en de omgeschreven cirkel.

- Hoe verhouden zich de oppervlakten van de ingeschreven cirkel en de omgeschreven cirkel?



- 25** Gegeven is een cirkel en een punt P buiten de cirkel. De raaklijnen uit punt P aan de cirkel raken de cirkel in de punten A en B .

- Welke lijn is de symmetrieas van de figuur?
- Wat volgt uit de symmetrie voor de raaklijnstukken PA en PB ?
- Waarom is lijn PM de deellijn van $\angle APB$?
- Waarom geldt $\angle PAB = \angle PBA$?



Theorie

Raaklijnstukken

Als vanuit een punt twee raaklijnen aan een cirkel getrokken worden, dan zijn de afstanden van dat punt tot de twee raakpunten gelijk.

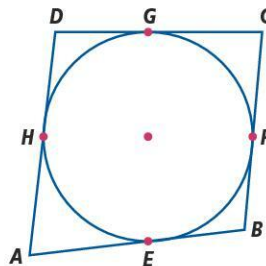
Voorbeeld

De zijden van vierhoek $ABCD$ raken aan een cirkel.
Bewijs dat $AB + CD = AD + BC$.

Oplossing

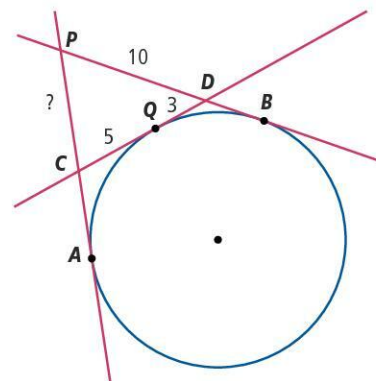
$AE = AH$, $BE = BF$, $HD = DG$ en $CG = CF$ (raaklijnstukken)
 $AB + CD = AE + EB + DG + CG$

$AB + CD = AH + BF + DH + CF$
 $AB + CD = AH + DH + BF + CF$
dus $AB + CD = AD + BC$.



- 26** Vanuit een punt P buiten een cirkel met middelpunt M en straal 5 worden de beide raaklijnen PA en PB getekend. Er geldt $\angle APB = 60^\circ$. Bereken exact PM en PA .

- 27** Vanuit punt P zijn de raaklijnen PA en PB aan een cirkel getekend. Lijn CD raakt de cirkel in Q . $CQ = 5$, $DQ = 3$ en $PD = 10$. Bereken PC exact.



Theorie

Soms heb je bij een meetkundig bewijs of een berekening een hulplijn nodig. Daarbij kun je denken aan een lijnstuk zoals een diagonaal, een loodlijn, een lijn evenwijdig aan een gegeven lijn of een straal in een cirkel. Ook kun je gebruik maken van de stellingen uit hoofdstuk 13:

Raaklijn aan een cirkel

Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.

Rakende cirkels

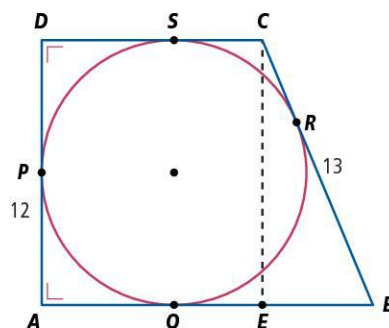
De raaklijn in het gemeenschappelijke raakpunt van twee elkaar rakende cirkels staat loodrecht op de verbindingslijn van de middelpunten.

Voorbeeld

In het trapezium $ABCD$ is de ingeschreven cirkel getekend. $\angle A = \angle D = 90^\circ$, $AD = 12$ en $BC = 13$. Bereken AB en CD .

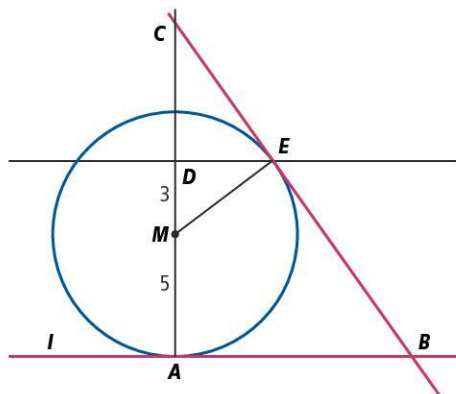
Oplossing

Noem de raakpunten P , Q , R en S . $AP = AQ$, $BQ = BR$, $CR = CS$ en $DS = DP$ (raaklijnstukken). Dan is $AB + CD = AQ + QB + CS + DS$
 $AB + CD = AP + BR + CR + DP = AD + BC = 25$.
 Trek als hulplijn de loodlijn CE uit C op zijde AB .
 In $\triangle BEC$ is $BE^2 = BC^2 - EC^2 = 169 - 144 = 25$, dus $BE = 5$.
 $DC + AE = 25 - 5 = 20$, dus $DC = AE = 10$ en $AB = 15$.



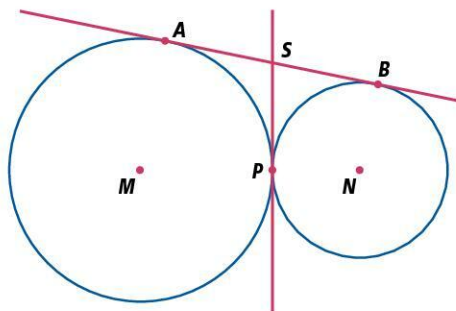
Ondersteunende route → maak opdracht 028

- 28** Een punt A ligt op de cirkel c met middelpunt M en straal 5. l is de raaklijn in A aan c . Op lijn AM ligt een punt D met $AD = 8$. De lijn door D evenwijdig aan l snijdt c in punt E . De raaklijn in E aan c snijdt l in punt B en lijn AM in punt C .
- Toon aan dat $\angle CME = \angle CBA$.
 - Trek als hulplijn de lijn door E loodrecht op l en bereken AB exact.

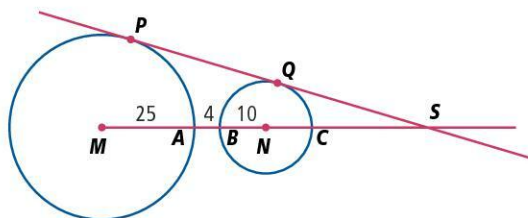


Ondersteunende route → maak opdracht 029

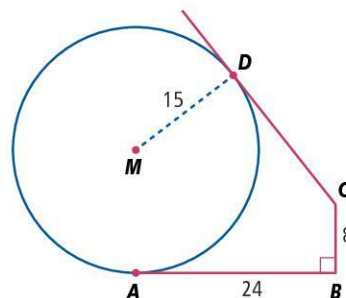
- 29** Een cirkel met middelpunt M raakt een cirkel met middelpunt N in punt P . De raaklijn in P snijdt de gemeenschappelijke raaklijn AB in punt S .
- Waarom geldt $MA \parallel NB$?
 - Toon aan dat S het midden is van lijnstuk AB .
 - Toon aan dat $\angle MSN = 90^\circ$.



- 30** Gegeven zijn de cirkel c_1 met middelpunt M en straal 25 en de cirkel c_2 met middelpunt N en straal 10. c_1 en c_2 snijden lijnstuk MN in de punten A en B . Lijn l raakt c_1 in punt P en c_2 in punt Q en snijdt lijn MN in punt S . $MA = 25$, $NB = 10$ en $AB = 4$. Bereken PQ exact (je mag gebruiken dat $MP \parallel NQ$).



- 31** De lijnen AB en CD raken aan de cirkel met middelpunt M en straal 15. Verder is $AB = 24$, $BC = 8$ en is $\angle ABC = 90^\circ$. Bereken CD exact.



Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten

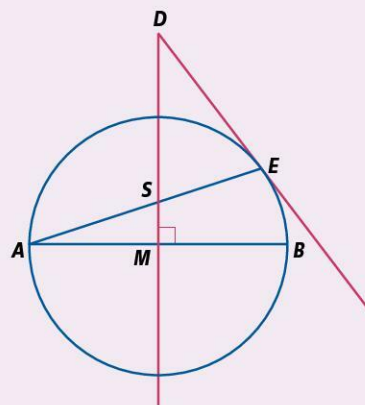
028

W

In een cirkel met middelpunt M is lijnstuk AB een middellijn. Punt D ligt buiten de cirkel op de lijn door M loodrecht op lijnstuk AB . Vanuit D is raaklijn DE aan de cirkel getekend. De lijn AE snijdt MD in het punt S .

Je gaat aantonen dat $DS = DE$.

- Waarom is het voldoende om aan te tonen dat $\angle DSE = \angle DES$?
- Welke hulplijn ligt bij een situatie van raken voor de hand?
- Waarom zijn de hoeken SAM en SEM gelijk?
- Gebruik de stelling over de raaklijn aan een cirkel om $\angle DES$ uit te drukken in $\angle SEM$.
- Maak het bewijs af.

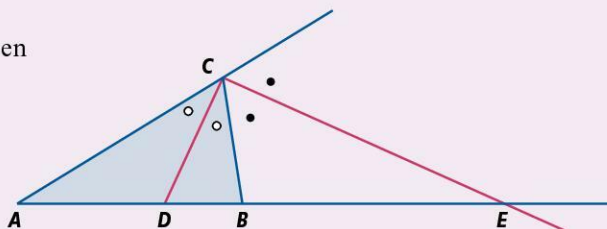


029

In $\triangle ABC$ is CD de bissectrice van hoek C . Lijn l is de bissectrice van de stompe hoek tussen de lijnen AC en BC . Deze snijdt de lijn AB in punt E .

Je gaat bewijzen dat C op de cirkel met middellijn DE ligt.

- Toon aan dat $\angle DCE = 90^\circ$.
- Welke stelling kun je gebruiken om het bewijs te leveren?
- Maak het bewijs af.

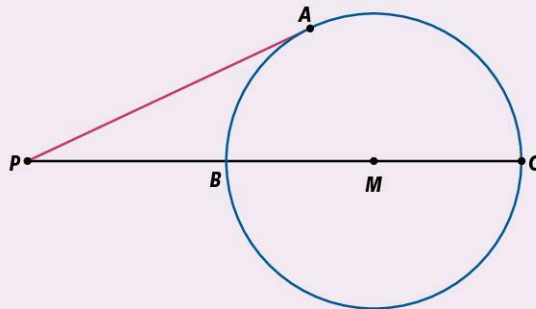


Uitdagende opdrachten

U4

Gegeven is een cirkel met middelpunt M . Een lijn door een punt P raakt de cirkel in een punt A . Een lijn door P en M snijdt de cirkel in de punten B en C .

Bewijs dat $PB \times PC = PA^2$.



15.5 Algebraïsch of meetkundig

Je leert

- hoe je bij een meetkundig probleem verschillende oplossingsmethoden gebruikt

Leerroutes

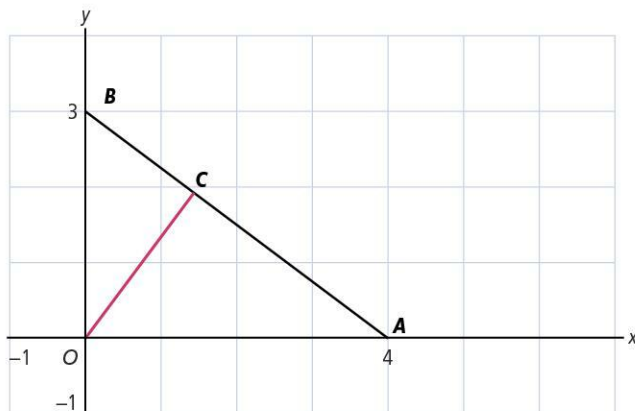
- ondersteunend: 32—033—34—35—36—37—38—039—40
- doorlopend: 32—33—34—35—36—37—38—39—40
- uitdagend: 32—33—34—36—37—38—39—40—U5

Van $\triangle OAB$ is $OA = 4$, $OB = 3$ en $\angle O = 90^\circ$.

De hoogtelijn uit O snijdt zijde AB in punt C .

Je wilt OC berekenen.

- Je kunt de driehoek in een assenstelsel zetten. Hoe zou je dan de coördinaten van C kunnen berekenen?
- Je kunt OC ook meetkundig berekenen met behulp van gelijkvormige driehoeken. Welke driehoeken zou je dan gebruiken?



32 In bovenstaande driehoek kun je OC berekenen met behulp van goniometrie.

- Bereken $\sin(\angle A)$ in $\triangle OAB$.
- Waarom is $\sin(\angle A)$ gelijk in $\triangle OAC$?
- Bereken OC .
- Je kunt OC ook berekenen met behulp van oppervlakten.
De oppervlakte van $\triangle OAB$ is gelijk aan $\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB$, maar ook aan $\frac{1}{2} \cdot OC \cdot AB$.
Bereken OC ook op deze manier.

Theorie

Je kunt een meetkundig probleem vaak op meerdere manieren aanpakken.

- Meetkundig: met stellingen, gelijkvormigheid, gelijke hoeken, evenwijdigheid, oppervlakte, sinusregel of cosinusregel.
 - Algebraïsch: in een assenstelsel met vergelijkingen van lijnen en cirkels.
- Probeer vooraf te bedenken welke manier het meest geschikt is.

Voorbeeld

Hoe kun je aantonen dat twee lijnen loodrecht op elkaar staan?

Oplossing

Meetkundig kun je vaak gebruik maken van de stelling van Pythagoras of de stelling van Thales. Algebraïsch kun je gebruiken dat het product van de richtingscoëfficiënten gelijk is aan -1 , $m_1 \cdot m_2 = -1$ of dat het inproduct van twee richtingsvectoren gelijk is aan 0 .

Ondersteunende route → maak opdracht 033

- 33** Gegeven is cirkel $c: x^2 + y^2 = 169$ en op c het punt $R(5, -12)$.
H De raaklijn in R aan c snijdt de raaklijnen $x = -13$ en $x = 13$ in de punten P en Q .

- Bereken de coördinaten van P en Q en bewijs dat $\angle POQ = 90^\circ$.
- Bewijs nogmaals dat $\angle POQ = 90^\circ$ door het meetkundig aan te pakken.

- 34** Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 90^\circ$, $AB = 21$ en $AC = 28$. Een cirkel met middelpunt M raakt de zijden AB en AC . Je kunt op verschillende manieren de straal van de cirkel berekenen.

Manier 1 (algebraïsch)

- Waarom ligt M op de bissectrice van hoek A ?
- Kies lijn AB als x -as en lijn AC als y -as en geef vergelijkingen van de lijnen AM en BC .
- Bereken de coördinaten van M en geef de straal van de cirkel.

Manier 2 (gelijkvormigheid)

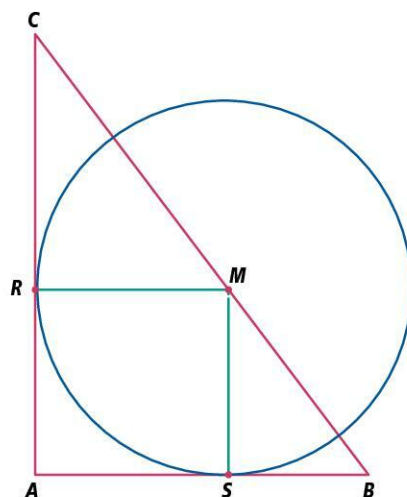
- Noem de straal van de cirkel r en druk BS uit in r .
- Gebruik gelijkvormigheid en bereken r .

Manier 3 (oppervlakten)

- Druk de oppervlakte van $\triangle ABM$ en $\triangle ACM$ uit in r .
- Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$ en vervolgens r .

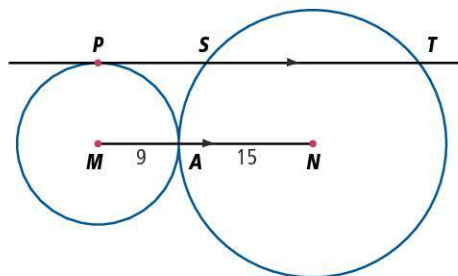
- 35**
- Teken een gelijkzijdige driehoek ABC met zijde 12 en teken de zwaartelijnen AD en CE , die elkaar snijden in punt Z .
 - Kies een assenstelsel zo dat $A(-6, 0)$, $B(6, 0)$ en $E(0, 0)$. Bereken exact de coördinaten van de punten C en D .
 - Bereken de coördinaten van punt F , het midden van het lijnstuk CZ .
 - Toon aan dat $\angle EDF = 90^\circ$.

- 36** Gegeven is een gelijkzijdige driehoek ABC . De zwaartelijnen AD en CE snijden elkaar in punt Z . Punt F is het midden van lijnstuk CZ .
 Toon meetkundig aan dat $\angle EDF = 90^\circ$.



- 37** Gegeven zijn de cirkel c_1 met middelpunt M en straal 9 en de cirkel c_2 met middelpunt N en straal 15. De cirkels raken elkaar in punt A . Op c_1 ligt een punt P . De raaklijn l in P aan c_1 is evenwijdig aan lijn MN . l snijdt c_2 in S en T .

- Plaats de figuur in een assenstelsel met A als oorsprong en bereken PS en PT .
- Laat Q het midden zijn van lijnstuk ST en bereken PS en PT nu meetkundig.

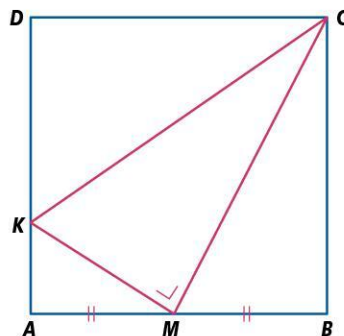


- 38** In vierkant $ABCD$ is M het midden van zijde AB .

W Punt K ligt op zijde AD zodat $\angle CMK = 90^\circ$.

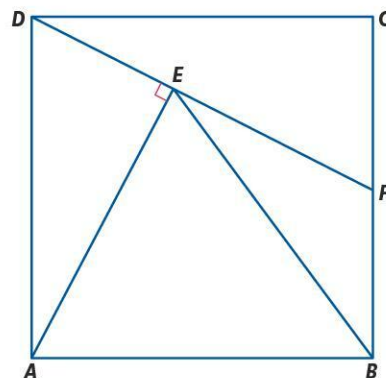
Je gaat bewijzen dat $\angle BCM = \angle MCK$.

- Kies $M(0, 0)$ en een lengte voor zijde AB .
Stel vergelijkingen op van de lijnen MC en MK .
- Bereken de coördinaten van B , C en K .
- Bewijs dat $\angle BCM = \angle MCK$.
- Bewijs ook meetkundig dat $\angle BCM = \angle MCK$.
(bijvoorbeeld door de lijnen KM en CB te snijden en te werken met driehoeken die elkaars spiegelbeeld zijn).

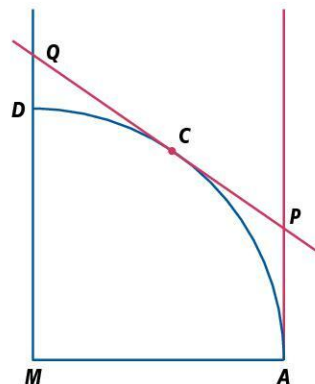


Ondersteunende route → maak opdracht O39

- 39** In vierkant $ABCD$ met zijde 6 is punt F het midden van zijde BC en is punt E de loodrechte projectie van A op lijnstuk DF . Kies een geschikte aanpak en bewijs dat $BE = AB$.



- 40** De cirkel c met straal 5 snijdt de x -as in punt A en de y -as in punt D . De raaklijn in een punt C aan de cirkel snijdt de y -as in punt Q en de raaklijn in A aan de cirkel in punt P . Kies een geschikte aanpak en bewijs dat $MQ = PQ$.



Uitdagende route → maak opdracht U5

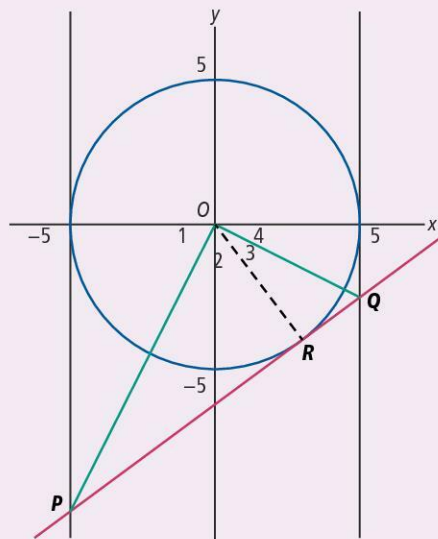
Ondersteunende opdrachten

033 Gegeven is cirkel $c: x^2 + y^2 = 25$ en op c het punt $R(3, -4)$. De raaklijn in R aan c snijdt de raaklijnen $x = -5$ en $x = 5$ in de punten P en Q .

- Bereken de coördinaten van P en Q .
- Bewijs dat $\angle POQ = 90^\circ$.

Je gaat nu bewijzen dat $\angle POQ = 90^\circ$ door het meetkundig aan te pakken.

- Om gebruik te maken van het gegeven dat lijn PQ raaklijn is, trek je de hulplijn OR . Welke hoeken bij O zijn aan elkaar gelijk? Leg uit waarom.
- Toon aan dat $\angle POQ (= \angle O_{2,3}) = 90^\circ$.

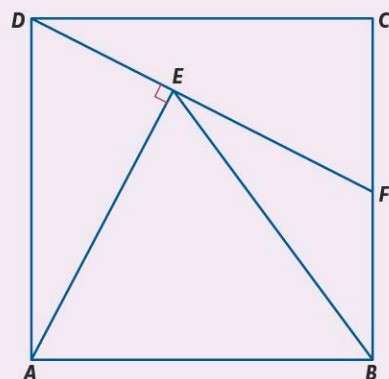


039 In vierkant $ABCD$ met zijde 6 is punt F het midden van zijde BC en is punt E de loodrechte projectie van A op lijnstuk DF .

- Plaats de figuur in een assenstelsel, stel de vergelijkingen op van de lijnen AE en DF en bereken de coördinaten van E .
- Toon aan dat $BE = AB$.

Je kunt de opdracht ook meetkundig aanpakken.

- Trek de hulplijn BG , met G het midden van zijde AD . Laat zien dat de hulplijn de middelloodlijn is van lijnstuk AE .



Uitdagende opdrachten

U5

W

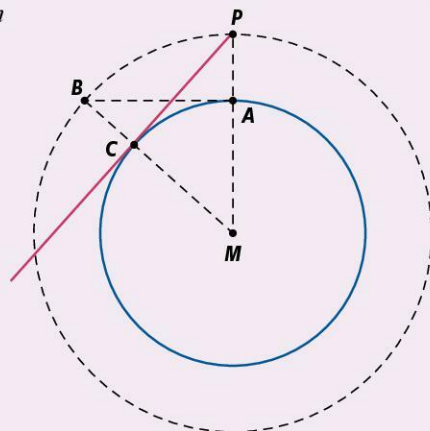
In het beroemdste wiskundeboek uit de oudheid, de *Elementen* van Euclides (rond 300 v. Chr.), wordt in boek III, stelling 17, een manier gegeven om vanuit een punt P buiten de cirkel de raaklijn aan de cirkel te construeren.

- Lijnstuk MP snijdt de cirkel in een punt A .
- Teken de cirkel met middelpunt M en straal MP .
- De loodlijn in A op lijnstuk MP snijdt die cirkel in een punt B .
- Lijnstuk BM snijdt de gegeven cirkel in een punt C .

Bewering: lijn PC raakt de gegeven cirkel.

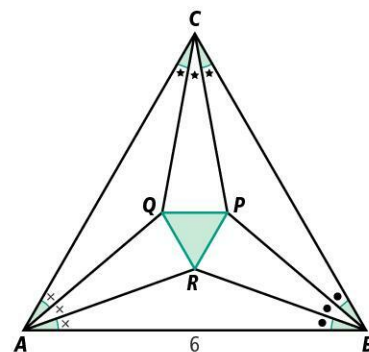
Bewijs meetkundig dat de constructie klopt.

Gebruik daar bij dat twee driehoeken gelijkvormig zijn met factor 1 als ze twee zijden en de ingesloten hoek gemeenschappelijk hebben (dat volgt uit de cosinusregel).

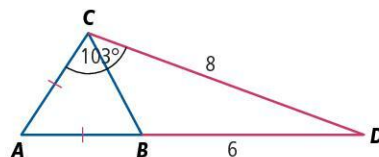


15.6 Gemengde opdrachten

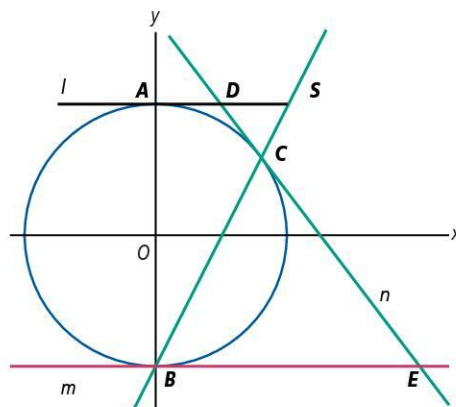
- 41** Trisectrices zijn lijnen die een hoek in drie gelijke hoeken verdelen. In de gelijkzijdige $\triangle ABC$ met $AB = 6$ zijn de snijpunten P , Q en R van de trisectrices de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek. Bereken de lengten van de zijden van die driehoek in twee decimalen.



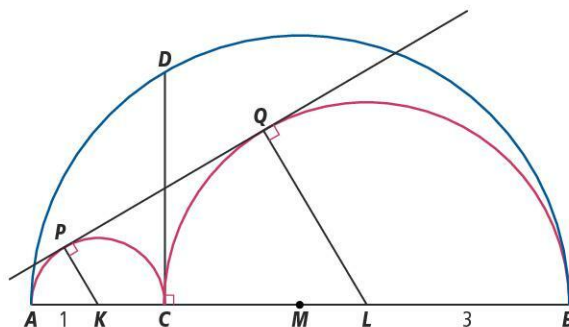
- 42** Gegeven is $\triangle ABC$ met $AB = AC$. Op het verlengde van lijnstuk AB ligt een punt D zodat $BD = 6$. Verder is gegeven dat $CD = 8$ en $\angle ACD = 103^\circ$. Bereken AB en AC . Rond af op één decimaal.

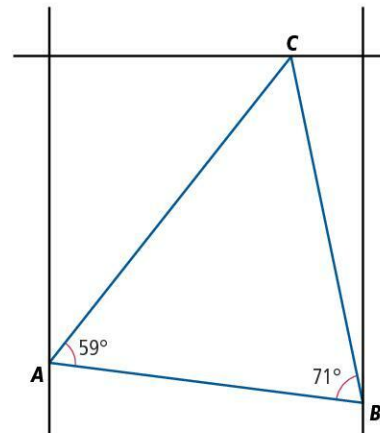


- 43** Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 = 25$. In de punten $A(0, 5)$, $B(0, -5)$ en $C(4, 3)$ zijn de raaklijnen l , m en n getrokken. n snijdt l in punt D en m in punt E en lijn BC snijdt l in punt S .
- Toon algebraïsch aan dat D het midden is van lijnstuk AS .
 - Toon meetkundig aan dat D het midden is van lijnstuk AS .



- 44** Lijnstuk AB is de middellijn in een halve cirkel met middelpunt M en straal 4. Op lijnstuk AB ligt punt C met $AC = 2$. AC en CB zijn middellijnen van twee halve cirkels met stralen 1 en 3. De bijbehorende middelpunten zijn K en L . De lijn door C loodrecht op AB snijdt de grootste cirkel in D . Lijn PQ is de gemeenschappelijke raaklijn aan de binnenste halve cirkels, waarbij P en Q de raakpunten zijn. Toon aan dat $CD = PQ$.





- 45** Van veel punten, bijvoorbeeld de toppen van kerktorens, zijn de coördinaten in Nederland vastgelegd door middel van de Rijksdriehoeksmeting. In de linker figuur zie je een kaart van het rijksdriehoeksmetnet.

In de tekening rechts zijn van twee punten A en B de coördinaten bekend en de hoeken CAB en CBA gemeten. Hiermee kunnen de coördinaten van C worden berekend.

In dit geval zijn de gegevens:

$A(162, 384)$, $B(208, 375)$, $\angle CAB = 59^\circ$ en $\angle CBA = 71^\circ$.

Maak een plan voor alle tussenstappen en bereken de coördinaten van C . Rond af op één decimaal.

- 46** Een punt P ligt op een cirkel met middelpunt O .

W

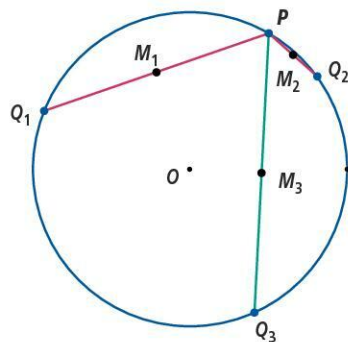
a Kies een punt Q op de cirkel en teken lijnstuk PQ .

b Punt M is het midden van lijnstuk PQ .

Teken nog enkele lijn stukken vanuit P naar punten op de cirkel en onderzoek op welke figuur de middens van die lijnstukken kunnen liggen.

c Bewijs dat die middens op een cirkel met middellijn OP liggen.

d Onderzoek en bewijs de situatie als P binnen de cirkel ligt.



Vaardigheid

Je kunt de sinusregel gebruiken om een lengte of de grootte van een hoek te berekenen.

Voor een driehoek waarvan α , β en γ de grootten van de hoeken zijn en a , b en c de lengten van de tegenoverliggende

zijden, geldt $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

Voor een stompe hoek A geldt $\sin(\angle A) = \sin(180^\circ - \angle A)$.

Soms zijn er daarom twee oplossingen mogelijk bij het rekenen met de sinusregel.

Voorbeeld

Van een scherphoekige driehoek ABC is $\angle C = 65^\circ$, $AB = 7$ en $AC = 4$.

Bereken de grootte van de andere hoeken van $\triangle ABC$.

Oplossing

$$\frac{7}{\sin(65^\circ)} = \frac{4}{\sin(\angle B)}$$

$$\sin(\angle B) = \frac{4 \cdot \sin(65^\circ)}{7} \approx 0,517...$$

$$\angle B \approx 31^\circ$$

$$\angle A \approx 180^\circ - 65^\circ - 31^\circ = 84^\circ$$

- S1**
- a** Van $\triangle ABC$ is gegeven: $\angle A = 42^\circ$, $\angle C = 81^\circ$ en $AB = 11$.
Bereken AC en BC .
 - b** Van $\triangle PQR$ is gegeven: $\angle P = 48^\circ$, $PQ = 13$ en $QR = 10$.
Bereken $\angle Q$ en PR .

Vaardigheid

Je kunt de cosinusregel gebruiken om een lengte of de grootte van een hoek te berekenen.

In een driehoek kun je de lengte van een zijde berekenen als je de lengte van de andere zijden en de grootte van de tegenoverliggende hoek kent. De regel die je gebruikt heet de cosinusregel.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

Je kunt deze formules ook gebruiken om de grootte van de hoeken te berekenen als je van een driehoek de lengte van alle drie zijden kent.

Voorbeeld 1

Van $\triangle ABC$ is gegeven: $a = 5$, $c = 7$ en $\beta = 122^\circ$.
Bereken b .

Oplossing

$$b^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos(122^\circ) = 111,094 \dots$$

$$\text{dus } b = \sqrt{111,094 \dots} \approx 10,5$$

Voorbeeld 2

Van $\triangle ABC$ is gegeven: $a = 5$, $b = 7$ en $c = 9$.
Bereken α .

Oplossing

$$5^2 = 7^2 + 9^2 - 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \cos(\alpha)$$

$$25 = 130 - 126 \cos(\alpha)$$

$$126 \cos(\alpha) = 105$$

$$\cos(\alpha) = \frac{105}{126} \approx 0,833 \dots \text{ dus } \alpha \approx 34^\circ$$

- S2**
- Van $\triangle ABC$ is gegeven: $AB = 4$, $BC = 6$ en $AC = 9$.
Bereken de grootte van de hoeken van $\triangle ABC$.
 - Van $\triangle KLM$ is gegeven: $\angle K = 117^\circ$, $KL = 15$ en $KM = 7$.
Bereken LM .

Vaardigheid

Je kunt de stelling van Thales gebruiken.

Stelling van Thales

- Een driehoek waarvan een zijde de middellijn van de omschreven cirkel is, is rechthoekig.
- Van een rechthoekige driehoek is het midden van de lange zijde het middelpunt van de omschreven cirkel.

Voorbeeld

Op de cirkel met middelpunt M en middellijn AB ligt een punt Q .
De loodlijn uit Q op de middellijn snijdt de middellijn in P .

- Bewijs dat de driehoeken APQ en BPQ gelijkvormig zijn.
- Bewijs dat $PQ^2 = PA \times PB$.

Oplossing

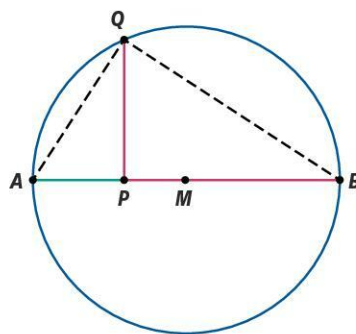
- $\triangle ABQ$ is rechthoekig (*Thales*), dus $\angle B = 90^\circ - \angle A$.

In $\triangle AQP$ is $\angle AQP = 90^\circ - \angle A$.

Verder geldt $\angle QPA = \angle QPB = 90^\circ$.

Dus $\triangle AQP \sim \triangle QPB$ (twee hoeken gelijk).

- Uit de gelijkvormigheid volgt: $\frac{AP}{PQ} = \frac{PQ}{PB}$, dus $PQ^2 = PA \times PB$



- S3** Je kunt de opdracht in het voorbeeld ook met Thales en goniometrie bewijzen.
Gebruik de tangens in de driehoeken $\triangle APQ$ en $\triangle QPB$ en bewijs dat $PQ^2 = PA \times PB$.

Vaardigheid

Je kunt stellingen over raaklijnen aan cirkels gebruiken.

Raaklijnstukken

Als vanuit een punt twee raaklijnen aan een cirkel getrokken worden, dan zijn de afstanden van dat punt tot de twee raakpunten gelijk.

Raaklijn aan cirkel

Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.

Rakende cirkels

De raaklijn in het gemeenschappelijke raakpunt van twee elkaar rakende cirkels staat loodrecht op de verbindinglijn van de middelpunten.

Voorbeeld

Vanuit een punt P zijn lijnen getrokken die de cirkel met middelpunt M en straal 4 raken in de punten A en B , $\angle P = 50^\circ$. Bereken AB . Rond af op twee decimalen.

Oplossing

Teken de lijnstukken MA en MB .

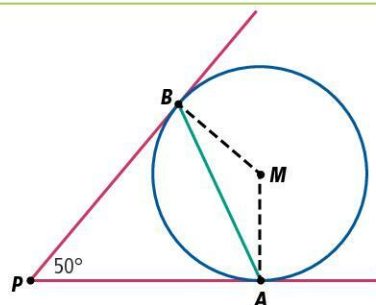
$\angle PAM = \angle PBM = 90^\circ$ (raaklijn aan cirkel)

De som van de hoeken in een vierhoek is 360° .

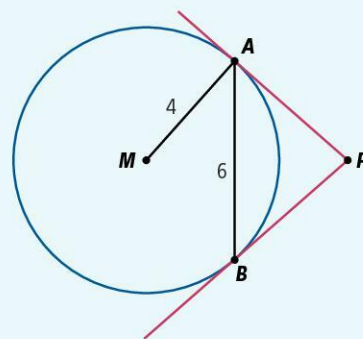
$\angle M = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 50^\circ) = 130^\circ$.

De cosinusregel in $\triangle MAB$ geeft $AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2 \cdot MA \cdot MB \cdot \cos(\angle M)$.

$AB^2 = 16 + 16 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos(130^\circ) = 52,569\dots$, dus $AB = \sqrt{52,569\dots} \approx 7,25$.



- S4** Vanuit een punt P zijn lijnen getrokken die de cirkel met middelpunt M en straal 4 raken in de punten A en B , $AB = 6$. Bereken $\angle APB$. Rond af op hele graden.



Vaardigheid

Je kunt bij een meetkundig probleem verschillende oplossingsmethoden gebruiken.

Bij het oplossen van meetkundige vraagstukken kun je gebruik maken van verschillende methoden.

- Meetkundig: met stellingen, gelijkvormigheid, gelijke hoeken, evenwijdigheid, oppervlakte, sinusregel of cosinusregel.
- Algebraïsch: in een assenstelsel met vergelijkingen van lijnen en cirkels.

Voorbeeld

Gegeven is $\triangle ABC$. De hoogtelijn uit C snijdt zijde AB in punt D . $CD = 32$, $AD = 24$ en $BD = 12$. Een cirkel waarvan het middelpunt M op zijde AC ligt gaat door A en B . Bereken exact de straal van de cirkel.

Oplossing 1 (algebraïsch)

Zet de figuur in een assenstelsel met lijn AB als x -as en lijn CD als y -as. Dan is $A(-24, 0)$ en $B(12, 0)$, dus M ligt op de lijn $x = -6$.

Lijn AC heeft vergelijking $y = \frac{4}{3}x + 32$.

Lijn AC snijden met de lijn $x = -6$ geeft $M(-6, 24)$.

De straal van de cirkel is gelijk aan $MA = \sqrt{(-24 - (-6))^2 + 24^2} = 30$.

Oplossing 2 (meetkundig)

E is het midden van lijnstuk AB , dus $AE = 18$.

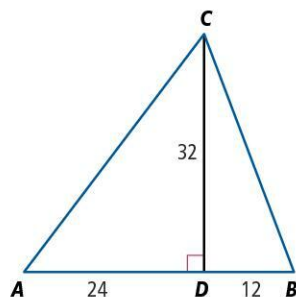
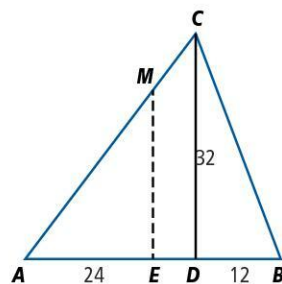
De middelloodlijn van lijnstuk AB snijdt zijde AC in M .

$\triangle AEM \sim \triangle ADC$ (twee gelijke hoeken) met factor $\frac{18}{24}$ ofwel $\frac{3}{4}$.

$$AM = \frac{3}{4} \cdot AC$$

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 \text{ geeft } AC^2 = 24^2 + 32^2 = 1600.$$

$$\text{Dus } AC = 40 \text{ en } AM = \frac{3}{4} \cdot 40 = 30.$$

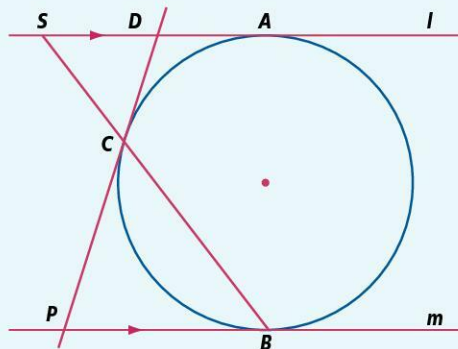


- S5 Aan een cirkel met straal 5 zijn in de punten A en B twee evenwijdige raaklijnen l en m getrokken. De lijn door B en een punt $C(-4, 8)$ op de cirkel snijdt l in punt S . De raaklijn in C aan de cirkel snijdt l in punt D en m in punt P .

a Toon algebraïsch aan dat D het midden is van lijnstuk AS .

Je kunt het probleem ook meetkundig aanpakken.

- b Wat voor soort driehoek is $\triangle PBC$?
c Welke driehoeken zijn gelijkvormig?
d Toon aan dat $DS = AD$.



Voor alle opdrachten geldt, tenzij anders vermeld, rond een lengte af op één decimaal en de grootte van een hoek op hele graden.

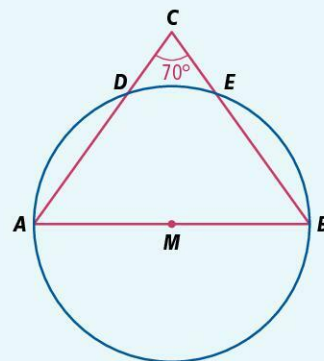
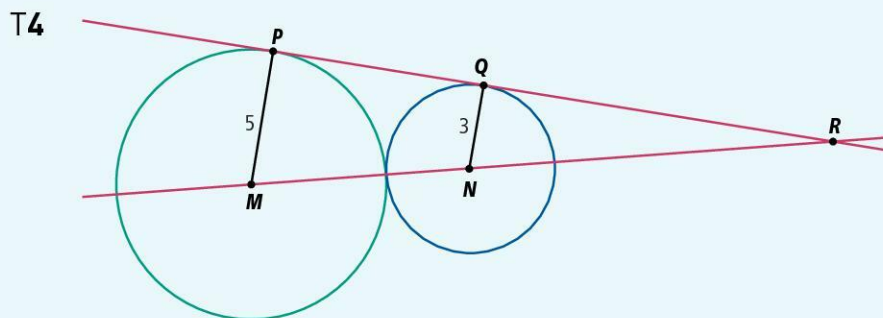
T1 Gegeven is $\triangle PQR$ met $\angle P = 83^\circ$, $PQ = 7$ en $QR = 12$.
Bereken PR .

T2 Gegeven is $\triangle KLM$ met $KL = 13$, $LM = 9$ en $KM = 20$.
Bereken de lengte van de hoogtelijn uit K .

T3 $\triangle ABC$ is gelijkbenig met $\angle C = 70^\circ$. Zijde AB is een middellijn van de cirkel met middelpunt M .
a Bereken $\angle B$.
b Bereken $\angle CAE$.

Neem nu $\angle C = \alpha$.

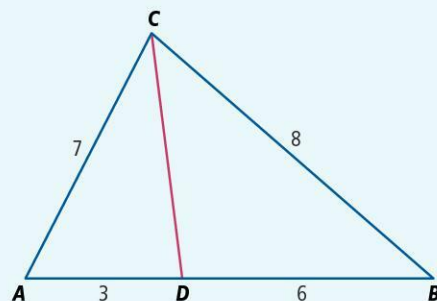
- c Onder welke voorwaarde ligt C buiten de cirkel met middellijn AB ?
d Druk de hoeken van vierhoek $AMEC$ uit in α .



De cirkel met middelpunt M en straal 5 raakt de cirkel met middelpunt N en straal 3. Lijn MN snijdt de gemeenschappelijke raaklijn PQ in punt R .

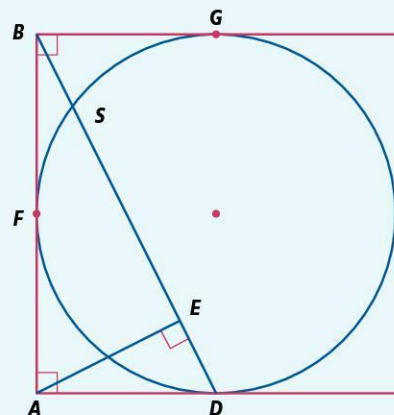
- a Bereken exact PQ .
b Bereken exact RQ .

- T5** Gegeven is $\triangle ABC$ met $AB = 9$, $BC = 8$ en $AC = 7$.
Op zijde AB ligt punt D zodat $AD = 3$.
Bereken exact CD .



- T6** Gegeven is een cirkel daarop de punten D , F en G .
De raaklijnen in D en F snijden elkaar loodrecht in punt A en
de raaklijnen in F en G snijden elkaar loodrecht in punt B .
De lijn BD snijdt de cirkel ook nog in punt S . De lijn door A
loodrecht op lijn BD snijdt lijn BD in punt E .

- Neem als straal van de cirkel 4 en plaats de figuur in een assenstelsel met A als oorsprong.
- Toon algebraïsch aan dat $DE = BS$.



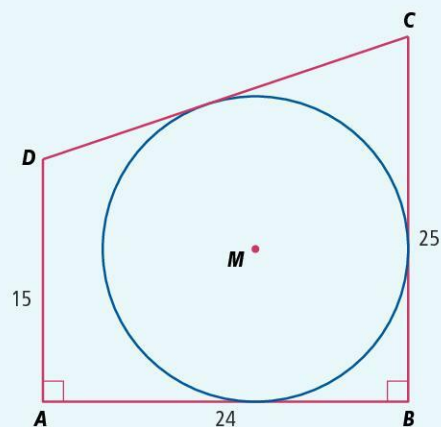
- T7** Je kunt het probleem uit de vorige opdracht ook meetkundig aanpakken. Trek daartoe de hulplijn GS .
Los de opdracht meetkundig op.

- T8** Van vierhoek $ABCD$ raken de zijden AB , BC en CD een cirkel met middelpunt M . $AB = 24$, $BC = 25$ en $AD = 15$.

W

In deze opdracht ga je de straal r van de cirkel berekenen.

- Verleng de zijden AB en CD tot ze elkaar snijden in een punt S .
- Bereken AS en SD .
- De cirkel is nu de ingeschreven cirkel van $\triangle SBC$. Druk de oppervlakten van de driehoeken SMB , BMC en SMC uit in r en bereken r exact.



Je kunt de sinusregel gebruiken om een lengte of de grootte van een hoek te berekenen.

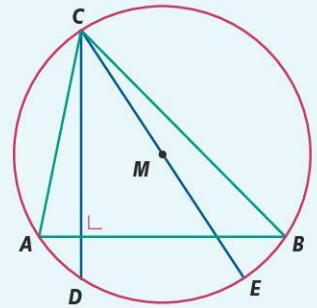
- E1**
- Van $\triangle ABC$ is gegeven $AB = 22$, $\angle B = 12^\circ$ en $\angle C = 82^\circ$. Bereken AC en BC .
 - Van $\triangle DEF$ is gegeven $DE = 14$, $\angle D = 21^\circ$ en $EF = 7$. Er zijn twee driehoeken die aan deze gegevens voldoen. Bereken van elk van deze driehoeken $\angle E$ en $\angle F$.

Je kunt de cosinusregel gebruiken om een lengte of de grootte van een hoek te berekenen.

- E2**
- Van $\triangle KLM$ is gegeven $\angle K = 47^\circ$, $KL = 13$ en $KM = 15$. Bereken ML .
 - Van $\triangle STU$ is gegeven $ST = 17$, $TU = 8$ en $SU = 10$. Bereken de grootte van de hoeken van $\triangle STU$.

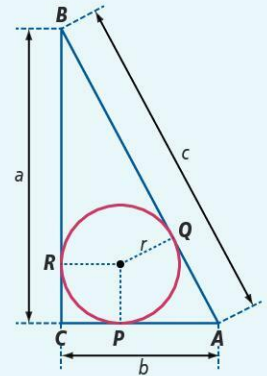
Je kunt de stelling van Thales gebruiken.

- E3**
- De omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ heeft middelpunt M . De hoogtelijn uit C snijdt de cirkel in punt D en de lijn CM snijdt de cirkel in punt E . Toon aan dat $DE \parallel AB$.



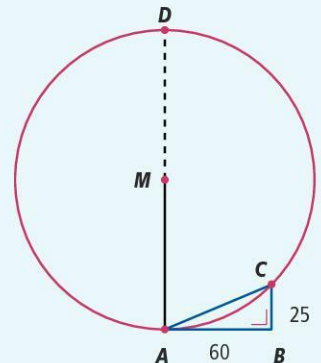
Je kunt stellingen over raaklijnen aan cirkels gebruiken.

- E4**
- Van een rechthoekige driehoek ABC zijn a en b de lengten van de rechthoekszijden. Verder is c de lengte van de langste zijde en is de straal van de ingeschreven cirkel gelijk aan r .
- Laat zien dat $c = a + b - 2r$.
 - Van een rechthoekige driehoek is de lengte van één rechthoekszijde gelijk aan 4 en is de langste zijde gelijk aan 6. Bereken exact de straal van de ingeschreven cirkel.

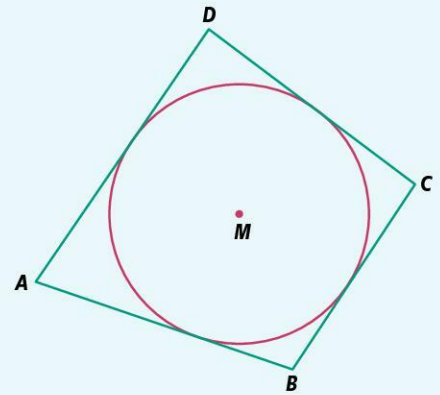


Je kunt bij een meetkundig probleem verschillende oplossingsmethoden gebruiken.

- E5**
- W** Gegeven is $\triangle ABC$ met $\angle B = 90^\circ$, $AB = 60$ en $BC = 25$. Een cirkel met middelpunt M gaat door A en C en raakt in A aan lijn AB .
- Kies $A(0, 0)$ in een geschikt assenstelsel en bereken exact de straal van de cirkel.
 - Een andere aanpak is: teken de middellijn AD en lijnstuk DC en gebruik gelijkvormigheid om de straal van de cirkel te berekenen. Bereken de straal met deze aanpak.



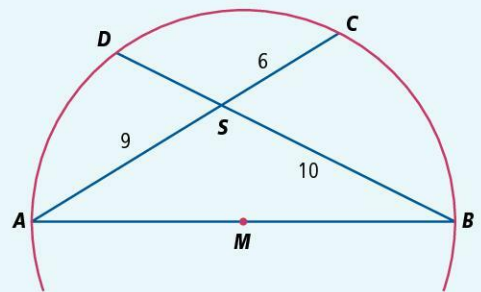
- E6** Om een cirkel met middelpunt M is een vierhoek $ABCD$ getekend waarvan de zijden aan de cirkel raken. Toon aan dat de straal van de ingeschreven cirkel gelijk is aan de oppervlakte van vierhoek $ABCD$ gedeeld door de halve omtrek.



- E7** In een cirkel met middelpunt M is lijnstuk AB een middellijn. De lijnstukken AC en BD snijden elkaar in S . $AS = 9$, $SC = 6$ en $BS = 10$.

Je gaat exact DS en de straal van de cirkel berekenen.

- Waarom zijn de driehoeken ASD en BSC gelijkvormig?
- Bereken met een verhoudingsschema exact DS .
- Zoek een rechthoekige driehoek waarvan een zijde de middellijn van de cirkel is. In die driehoek is één rechthoekszijde bekend. Bereken de lengte van de andere rechthoekszijde.
- Bereken exact de straal van de cirkel.



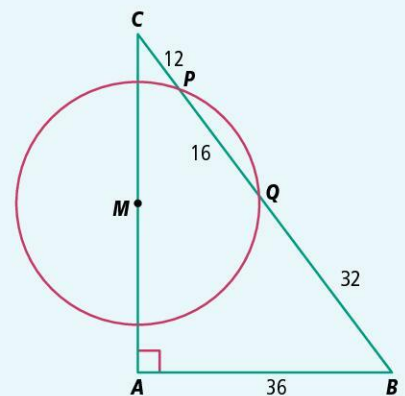
- E8** Op zijde AC van de rechthoekige driehoek ABC ligt het middelpunt M van een cirkel.

W

Zijde BC snijdt de cirkel in de punten P en Q .

$AB = 36$, $BQ = 32$, $PQ = 16$ en $CP = 12$.

Teken vanuit M een hulplijn en gebruik gelijkvormigheid om exact de straal van de cirkel te berekenen.



- E9** Gegeven is $\triangle ABC$ met $AB = 13$, $AC = 12$ en $BC = 11$. Je gaat exact de lengte van de zwaartelijn CD berekenen.
- Teken driehoek ABC met zwaartelijn CD .
 - Pas de cosinusregel toe in $\triangle ACD$ met hoek A .
 - Pas de cosinusregel toe in $\triangle ABC$ met hoek A .
 - Elimineer de term met $\cos(\angle A)$ en bereken CD exact.



SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In hoofdstuk 5 en hoofdstuk 11 heb je geleerd hoe je de afgeleide kunt bepalen van veeltermfuncties en van een kettingfunctie.

In dit hoofdstuk leer je functies differentiëren die het product of het quotiënt zijn van twee functies die je al kunt differentiëren.

De technieken uit dit hoofdstuk heb je onder andere nodig bij alle volgende analyse-hoofdstukken.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Logisch redeneren en bewijzen*
- *Abstraheren*
- *Probleemoplossen en analytisch denken*

opdracht 29
opdracht 40
opdracht 42



Theorie

Bij het differentiëren maak je gebruik van de regels:

$$f(x) = x^a$$

$$f'(x) = a \cdot x^{a-1}$$

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f(x) = g^x$$

$$f'(x) = \ln(g) \cdot g^x$$

$$f(x) = \ln(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = {}^s\log(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(g)}$$

$$f(x) = c \cdot g(x)$$

$$f'(x) = c \cdot g'(x)$$

$$f(x) = g(x) + c$$

$$f'(x) = g'(x)$$

$$s(x) = f(x) + g(x)$$

$$s'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$v(x) = f(x) - g(x)$$

$$v'(x) = f'(x) - g'(x)$$

$$k(x) = g(f(x))$$

$$k'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Voorbeeld

Differentieer $f(x) = 2x^3 + \frac{3}{x^2}$ en $g(x) = {}^4\log(2x - 4)$.

Oplossing

$$f(x) = 2x^3 + 3x^{-2}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x^{-3} \text{ ofwel } f'(x) = 6x^2 - \frac{6}{x^3}$$

Met de kettingregel:

$$g'(x) = \frac{1}{(2x-4) \cdot \ln(4)} \cdot 2 \text{ ofwel}$$

$$g'(x) = \frac{1}{(x-2) \cdot \ln(4)}$$

V1 Differentieer. Schrijf de afgeleide zonder negatieve en gebroken exponenten.

a $f(x) = 11 + 6x^{11} - \frac{11}{x^7}$

d $k(x) = \frac{-4}{(2x-5)^2}$

b $g(x) = -4\sqrt[5]{x^3} + 5^3$

e $l(x) = \frac{1}{3}x^3 \left(3 - \frac{1}{x}\right)$

c $h(x) = e^x + 5$

f $m(x) = 2\ln(x) + 7$

V2 Differentieer.

a $f(x) = 6\sqrt{3x-4}$

d $k(x) = \frac{7}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}$

b $g(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 20}$

e $l(x) = e^{5x+2}$

c $h(x) = \left(x + \frac{4}{x}\right)(1 + 4x)$

f $m(x) = \ln(3x + 2)$

V3 **a** Bereken exact de helling van de grafiek van $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x}$ in het punt $(1, -1)$.

b Bereken exact de coördinaten van het punt op de grafiek van $g(x) = x - 10\sqrt{x}$ waarin de helling van de grafiek gelijk is aan 0.

Aanpak

Hoe bereken je de extreme waarden van een functie f ?

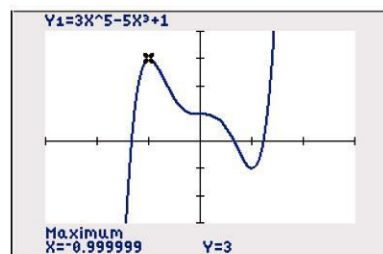
- 1 Differentieer f .
- 2 Los exact op $f'(x) = 0$.
- 3 Plot de grafiek en kijk of er sprake is van een minimum of een maximum.
- 4 Bereken de extreme waarden door de gevonden x -waarden in te vullen in $f(x)$.

Voorbeeld

Bereken exact de extreme waarden van $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$.

Oplossing

- 1 $f'(x) = 15x^4 - 15x^2$
- 2 $15x^4 - 15x^2 = 0$
 $15x^2(x^2 - 1) = 0$
 $x = 0, x = -1$ of $x = 1$
- 3 Uit de plot blijkt dat er bij $x = -1$ een maximum en bij $x = 1$ een minimum is.
- 4 f heeft een maximum $f(-1) = 3$.
 f heeft een minimum $f(1) = -1$.



- V4** Bereken exact de extreme waarden.
- a $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$
 - b $g(x) = 2 - (3x - 4)^4$
 - c $h(x) = (x - 1) \cdot (x - 3)^2$
 - d $k(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 20}$
- V5** Gegeven is de functie $f(x) = 3e^{4x} - 12e^{x+1}$.
- a Bereken exact de waarde van x waarvoor de grafiek van f een horizontale raaklijn heeft.
 - b Is hier sprake van een minimum of een maximum?
- V6** Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 6x)^a$ met a een positief geheel getal.
- a Toon met behulp van differentiëren aan dat voor elke waarde van a de helling van de grafiek van f in het punt met x -coördinaat 3 gelijk is aan 0.
 - b Er is een waarde van a waarvoor de grafiek van f_a in het punt met x -coördinaat 8 een helling 3 heeft. Bereken deze waarde van a . Rond af op twee decimalen.

16.1 Product- en quotiëntfuncties

Je leert

- wat een productfunctie is
- wat een quotiëntfunctie is

Leerroutes

- ondersteunend: 1–2–3–04–5–6–07–7
- doorlopend: 1–2–3–4–5–6–7–8
- uitdagend: 1–2–4–6–7–8–U1–U2

Een foto van 15×30 cm wordt in een passe-partout opgehangen. Een passe-partout is een lijst waarbij om de foto een witte rand wordt geplaatst. De witte rand is overal even breed.

De breedte mag je zelf kiezen.

- Hoe zou je met een formule de oppervlakte van de gehele lijst kunnen berekenen bij een gegeven breedte van de witte rand?



- 1 Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x + 4}$.
- Geef het domein van f .
 - Plot en schets de grafiek van f .
 - Bereken exact de nulpunten van f . Gebruik daarbij de regel:
Uit $A \cdot B = 0$ volgt $A = 0$ of $B = 0$.

Theorie

Een functie van de vorm $f(x) = p(x) \cdot q(x)$ heet een **productfunctie**.

De nulpunten van een productfunctie bereken je door op te lossen: $p(x) = 0$ of $q(x) = 0$.

Voorbeeld 1

Uit welke factoren bestaat de functie $f(x) = (3x + 2)\sqrt{5x + 6}$?

Oplossing

$$f(x) = p(x) \cdot q(x)$$

De factoren zijn

$$p(x) = 3x + 2 \text{ en } q(x) = \sqrt{5x + 6}$$

Voorbeeld 2

Bereken exact de nulpunten van $f(x) = (1 - \frac{4}{x^2})(x^3 - 7)$.

Oplossing

$$f(x) = 0 \text{ geeft } 1 - \frac{4}{x^2} = 0 \text{ of } x^3 - 7 = 0.$$

$$x^2 = 4 \text{ of } x^3 = 7$$

De nulpunten van f zijn $x = 2$, $x = -2$ en $x = \sqrt[3]{7}$.

- 2 Bereken exact de nulpunten.

H

- a $f(x) = (2x + 1)(x^3 - 8)$ c $h(x) = x \cdot \ln(x + 3) \cdot (x - 4)$
b $g(x) = (x^2 - 16)(e^{3x} - 4)$ d $k(x) = (x^2 + 3)\sqrt{3 - x^2}$

- 3** Gegeven is de functie $f(x) = (3x - 12)\sqrt{2 - x}$.
 Bij de opdracht om de nulpunten van f te berekenen, reageert Frederike met:
 ‘Dat kun je in één keer opschrijven, $x = 4$ en $x = 2$.’
 Welke fout maakt Frederike?

Bij het oplossen van vergelijkingen met een wortel of een logaritme moet je altijd controleren of de oplossing voldoet aan de vergelijking.

Ondersteunende route → maak opdracht 04

- 4** Bereken exact de nulpunten.

H **a** $f(x) = (x^2 - 4)\sqrt{x - 1}$ **c** $h(x) = \sqrt{8 - x} \cdot \ln(x + 3)$
b $g(x) = (2x + 3)\ln(x - 4)$ **d** $k(x) = x \cdot \sqrt{x + 2} \cdot \sqrt{x^2 - 3}$

- 5** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3x - 6}{x - 4}$
- a** Plot en schets de grafiek van f .
 - b** Bij welke waarde van x bestaat f niet?
 - c** Bij welke waarde van x geldt $f(x) = 0$?
 - d** Hoe groot is de teller en hoe groot is de noemer voor de waarde van x uit opdracht c?

Theorie

Een functie van de vorm $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ heet een **quotiëntfunctie**.

Een quotiëntfunctie f is niet gedefinieerd als $n(x) = 0$ en heeft een nulpunt als $t(x) = 0$ én $n(x) \neq 0$.

De grafiek van de functie $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ heeft een **verticale asymptoot** $x = a$ als geldt $n(a) = 0$ én $t(a) \neq 0$.

Voorbeeld 1

Bereken exact het nulpunt van de functie

$$f(x) = \frac{4x + 8}{x^2 - 4}$$

Oplossing

$$t(x) = 4x + 8 \text{ en } n(x) = x^2 - 4$$

$$f(x) = 0 \text{ geeft } 4x + 8 = 0 \text{ én } x^2 - 4 \neq 0.$$

$4x + 8 = 0$ als $x = -2$. Voor deze waarde geldt echter $n(-2) = 0$ dus f heeft geen nulpunt.

Voorbeeld 2

Geef vergelijkingen van de verticale asymptoten van de grafiek van $f(x) = \frac{2x^2 - 4x}{5 - x^2}$

Oplossing

$$n(x) = 0 \text{ geeft } 5 - x^2 = 0.$$

$x = -\sqrt{5}$ en $x = \sqrt{5}$. De teller is voor deze waarden van x niet gelijk aan nul.

De verticale asymptoten zijn $x = -\sqrt{5}$ en $x = \sqrt{5}$.

6 Bereken exact de nulpunten.

H

a $f(x) = \frac{7x - 3}{3 - 6x}$

c $h(x) = \frac{x^2 - 6x}{x^2 - 36}$

b $g(x) = \frac{e^{3x} - 2}{x}$

d $k(x) = \frac{x^2 - 5x - 6}{\ln(x)}$

Ondersteunende route → maak opdracht 07

7 Stel bij de grafieken van de functies vergelijkingen op van de verticale asymptoten.

H

a $f(x) = \frac{x^2 + 6}{x^2 - 4}$

c $h(x) = \frac{e^x + 3}{10 - x^2}$

b $g(x) = \frac{7x - 3}{8 - 2x}$

d $k(x) = \frac{3x - 9}{x^2 - 2x - 3}$



8 Als iemand in koud water terechtkomt, daalt zijn lichaamstemperatuur. Als de lichaamstemperatuur gedaald is tot 30 °C ontstaat een levensbedreigende situatie. De overlevingstijd R is de tijd die verstrijkt tussen het te water raken en het bereiken van een lichaamstemperatuur van 30 °C.

Daarvoor geldt de formule: $R = 15 + \frac{7,2}{0,0785 - 0,0034T}$ met

$R > 0$ en $T \geq 5$.

Hierin is R de overlevingstijd in minuten en T de watertemperatuur in °C.

- a** Bereken algebraïsch de watertemperatuur waarbij de overlevingstijd 5,0 uur is. Rond af op gehele graden.
b Stel een vergelijking op van de verticale asymptoot en leg uit wat dit betekent voor de te water geraakte persoon.
(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2011 1e tijdvak)

Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2

Ondersteunende opdrachten

04 Je gaat in deze opdracht de nulpunten van de functie

$f(x) = (x^2 + 9x)\sqrt{8 - x^2}$ berekenen.

- a** Uit $f(x) = 0$ volgt $x^2 + 9x = 0$ of $\sqrt{8 - x^2} = 0$.
Uit welke regel blijkt dat?
- b** Maak stap 2 op het blaadje af.
- c** De oplossing $x = -9$ van stap 1 is geen oplossing van
de vergelijking $(x^2 + 9x)\sqrt{8 - x^2} = 0$. Controleer dat
door $x = -9$ in te vullen bij deze vergelijking.
- d** Controleer ook je andere oplossingen.

Bereken exact de nulpunten.

e $g(x) = (9 - x^2)\sqrt{4x - 16}$ **g** $h(x) = \sqrt{x - 6} \cdot \ln(x^2 - 3)$

f $g(x) = (x^2 - 3)\ln(x)$ **h** $i(x) = x \cdot \sqrt{x - 4} \cdot \sqrt{x^2 - 1}$

$x^2 + 9x = 0$ $x(x + 9) = 0$ $x = 0$ of $x = -9$	1
$\sqrt{8 - x^2} = 0$ $8 - x^2 = 0$ $x^2 = \dots$ $x = \dots$ of $x = \dots$	2

07 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$

- a Los exact op $x^2 - 4x = 0$.
- b Los exact op $x^2 - 16 = 0$.
- c Voor welke waarde(n) van x geldt $x^2 - 4x = 0$ en $x^2 - 16 \neq 0$?
- d Welke lijn is een verticale asymptoot van de grafiek van f ?

Uitdagende opdrachten

U1 De grafiek van een derdegraadsfunctie f snijdt de lijn $y = 1$ drie keer en wel in de punten met $x = -1$, $x = 2$ en $x = 4$. De grafiek gaat tevens door het punt $O(0, 0)$. Stel een functievoorschrift op van f . Stel hiervoor eerst een functievoorschrift op van $g(x) = f(x) - 1$.

U2 Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = \frac{ax^3 - 9ax - 6x^2 + 59}{x^2 - 9}$

- Stel voor $a = 0$ vergelijkingen op van de verticale asymptoten van de grafiek van f_0 .
- Laat zien dat je het functievoorschrift $f_a(x)$ kunt schrijven als $f_a(x) = ax - 6 + \frac{5}{x^2 - 9}$.
- De grafiek van f komt voor $a \neq 0$ op den duur steeds dichter bij een rechte lijn.
Stel voor $a = 10$ een vergelijking op van deze rechte lijn.

16.2 Limieten en horizontale asymptoten

Je leert

- wat een limiet is
- hoe je een limiet exact berekent met behulp van standaardlimieten

Leerroutes

- ondersteunend: 9–10–11–12–13–014–14–15–016–16
- doorlopend: 9–10–11–12–13–14–15–16–17–18
- uitdagend: 9–10–11–13–14–15–16–18–U3–U4

Als je een stuk papier dubbel gaat vouwen, kun je in theorie oneindig lang blijven vouwen. Bij elke keer dubbelvouwen halveert de oppervlakte.

- Hoe groot wordt de oppervlakte als je oneindig lang door zou kunnen blijven vouwen?



9 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{12}{x-3}$

- Stel een vergelijking op van de verticale asymptoot.
- Wat gebeurt er met $f(x)$ als x steeds groter wordt?
- Stel een vergelijking op van de horizontale asymptoot.

Theorie

De wiskundige notatie voor 'x ver van 0' is $x \rightarrow \infty$ als $x > 0$ en $x \rightarrow -\infty$ als $x < 0$. Het symbool ∞ betekent 'oneindig'.

Bij een horizontale asymptoot $y = c$ geldt: als x naar ∞ of $-\infty$ nadert, dan nadert $f(x)$ naar c .

Dit noteer je als $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$ of $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$.

In woorden: de **limiet** van $f(x)$ als x naar oneindig of min oneindig nadert, is gelijk aan c .

Voorbeeld

Bereken de uitkomst van $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x-7}$

Oplossing

Als x nadert naar oneindig, dan nadert de noemer van de breuk ook naar oneindig. De breuk in zijn geheel nadert dan naar nul.

Dus is $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x-7} = 0$.

10 Bereken de uitkomst.

a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-15}{x^2 - 5}$

b $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(12 - \frac{3}{8x + 10} \right)$

11 Leg uit wat deze limieten betekenen voor de grafiek van een functie f .

H

a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -3$

b $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 7$

12 Geef de uitkomst van de limieten.

a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$

d $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^3}$

b $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$

e $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000}{x^{0,3}}$

c $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{0,3}}$

f $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x^n}$ met $n > 0$

13 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{5x-7}{6x+8}$

- a Bereken $f(100)$, $f(1000)$, $f(-100)$ en $f(-1000)$ en geef een schatting van $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- b Op het blaadje wordt $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ exact berekend. Leg uit wat er in stap 1 is gebeurd.
- c Maak stap 3 af.
- d Bereken op soortgelijke wijze $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- e Geef een vergelijking van de horizontale asymptoot.

●	$f(x) = \frac{5 - \frac{7}{x}}{6 + \frac{8}{x}}$ voor $x \neq 0$	1
●	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x} = 0$ en $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{x} = 0$	2
●	dus $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{5 - \dots}{6 + \dots} = \dots$	3

Theorie

De limieten $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x^n} = 0$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{x^n} = 0$ met $n > 0$ zijn voorbeelden van **standaardlimieten**. Deze standaardlimieten gebruik je om limieten exact te berekenen.

Als bij een quotiëntfunctie f de teller en noemer beide veeltermfuncties zijn, dan kun je het functievoorschrift herleiden tot een vorm waarmee

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ exact te berekenen zijn. Deel daarvoor teller en

noemer door de hoogste macht van x die in de noemer voorkomt.

Limieten gebruik je om de horizontale asymptoot van de grafiek van een gebroken functie te bepalen.

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de horizontale asymptoot van de grafiek van $f(x) = \frac{4x-9x^2}{5x^2-3}$

Oplossing

Deel in het functievoorschrift teller en noemer door x^2 .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-9x^2}{5x^2-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x}-9}{5-\frac{3}{x^2}} = \frac{0-9}{5-0} = -1\frac{4}{5} \text{ en } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x-9x^2}{5x^2-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4}{x}-9}{5-\frac{3}{x^2}} = \frac{0-9}{5-0} = -1\frac{4}{5}$$

De horizontale asymptoot is $y = -1\frac{4}{5}$.

Ondersteunende route → maak opdracht 014

- 14** Stel bij elke functie een vergelijking op van de horizontale asymptoot van de grafiek. Maak hierbij gebruik van limieten.

H

a $f(x) = \frac{11x - 6}{5x + 2}$

c $h(x) = \frac{3x^2 - 4x + 2}{4x^2 - 10}$

b $g(x) = \frac{4x(3x + 2)}{8 + 7x - 6x^2}$

d $k(x) = \frac{2x^2 + 9x}{12 - x^3}$

- 15** Niet van elke gebroken functie heeft de grafiek een horizontale asymptoot.

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{6x^2 + 5x - 8}{3x + 9}$

- a Laat met een berekening zien dat $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.
 b Hoe groot is $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$?
 c Heeft de grafiek van f wel een verticale asymptoot? Zo ja, geef een vergelijking van deze asymptoot.
 d Plot en schets de grafiek van f en controleer daarmee je antwoorden van de opdrachten b en c.

Ondersteunende route → maak opdracht 016

- 16** Onderzoek met limieten bij elke functie of de grafiek een horizontale asymptoot heeft.

a $f(x) = \frac{x^2 - 81}{16 - 3x^2}$

c $h(x) = \frac{15x + 3}{5x^2 - 8x}$

b $g(x) = \frac{x^3 + 8x^2 - 4x + 1}{3x^2 + 10x + 11}$

d $k(x) = \frac{(x^2 - 2)^2}{5x^2(x - 1)^2}$

- 17** a Leg uit: $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x = \infty$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$. Wat volgt hieruit voor de grafiek van $f(x) = 2^x$?
 b Bereken $\lim_{x \rightarrow \infty} g^x$ als $g > 1$. En als $0 < g < 1$.

- 18** Bereken de limieten.

a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 3}{e^x + 2}$

c $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 5}$

b $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0,5^x - 3}{0,4^x + 2}$

d $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 18}{4e^x - 3}$

Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4

Ondersteunende opdrachten

- 014** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3x^3 + 7}{8 - x^3}$. Op het blaadje is een begin gemaakt met het berekenen van $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- Leg uit wat er is gebeurd in stap 1.
 - Hoe groot is $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x^3}$?
 - Vul stap 2 verder in en bereken ook $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - Geef een vergelijking van de horizontale asymptoot van de grafiek van f .

$f(x) = \frac{3 + \frac{7}{x^3}}{\frac{8}{x^3} - 1}$	1
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{7}{x^3}}{\frac{8}{x^3} - 1} = \frac{3 + \dots}{\dots - 1} = \dots$	2

- 016** Je gaat onderzoeken of de grafiek van de functie $f(x) = \frac{5x^3 - 8x + 7}{1 - x^2}$ een horizontale asymptoot heeft.

- De hoogste macht van x in de noemer is x^2 . Teller en noemer delen door x^2 geeft het functievoorschrift dat je op het blaadje ziet. Van welke breuken in dit functievoorschrift is de limiet 0 als $x \rightarrow \infty$?
- Wat kun je zeggen over de uitkomst van $5x$ als $x \rightarrow \infty$?
- Leg uit: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$.
- Waarom volgt uit opdracht c dat de grafiek van f geen horizontale asymptoot heeft?

$f(x) = \frac{5x - \frac{8}{x} + \frac{7}{x^2}}{\frac{1}{x^2} - 1}$

Uitdagende opdrachten

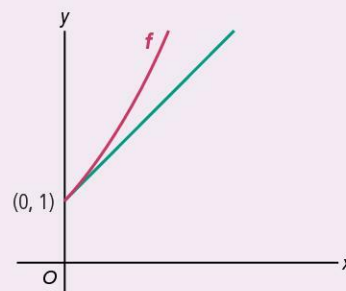
- U3** Bereken $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ en geef vergelijkingen van de horizontale asymptoten.

a $f(x) = \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$ **b** $f(x) = \frac{6 \cdot 2^x + 8}{3 \cdot 2^x + 2}$

- U4** Je gaat aantonen dat de rij getallen $1^1, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{3}\right)^3, \left(\frac{1}{4}\right)^4, \dots$ als limiet het getal e heeft.

Gegeven is de functie $f(x) = e^x$.

- Stel een vergelijking van de raaklijn op in het punt $(0, 1)$.
- Leg uit dat voor $x \approx 0$ geldt $e^x \approx 1 + x$.
- Leg uit dat voor $x \approx 0$ geldt $e \approx (1 + x)^{\frac{1}{x}}$.
- Toon aan dat $\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.



16.3 Productregel

Je leert • hoe je een productfunctie differentieert

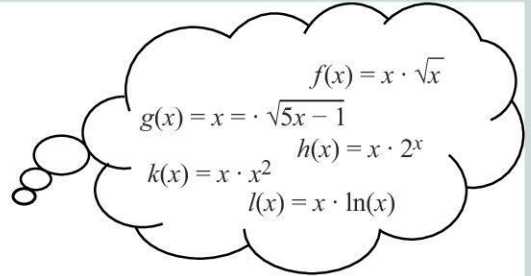
Leerroutes • ondersteunend: 19–21–22–023–23–24–025–26–27
 • doorlopend: 19–20–21–22–23–24–25–26–27
 • uitdagend: 19–20–21–23–24–26–27–U5–U6

Gegeven zijn de functies $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$,

$g(x) = x \cdot \sqrt{5x-1}$, $h(x) = x \cdot 2^x$, $k(x) = x \cdot x^2$

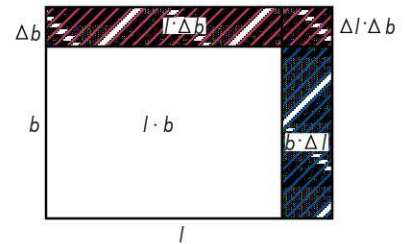
en $l(x) = x \cdot \ln(x)$.

- Leg uit welke van de functies je kunt differentiëren en welke niet.



- 19** Gegeven is de functie $f(x) = x^2(x^2 - 4)$.
- Plot en schets de grafiek van f .
 - Floris vindt als afgeleide: $f'(x) = 2x \cdot 2x$ dus $f'(x) = 4x^2$. Hoe denk je dat hij aan dit antwoord is gekomen?
 - Beredeneer met behulp van de grafiek van f dat het antwoord van Floris niet juist kan zijn.
 - Laat zien dat de correcte afgeleide is: $f'(x) = 4x^3 - 8x$.

- 20** Gegeven is de functie $f(x) = p(x) \cdot q(x)$. Als je $l = p(x)$ en $b = q(x)$ neemt, dan stelt $f(x)$ de oppervlakte O voor van een rechthoek met lengte l en breedte b .
 Neemt l toe met Δl en b met Δb dan stelt het product $(l + \Delta l)(b + \Delta b)$ de oppervlakte voor van de volledige rechthoek in de figuur hiernaast.



- De oppervlakte O van de rechthoek neemt toe met ΔO . Controleer met behulp van de figuur dat $\Delta O = \Delta l \cdot b + l \cdot \Delta b + \Delta l \cdot \Delta b$.
- Deel links en rechts door Δx en ga na dat je het resultaat

$$\text{kunt herleiden tot } \frac{\Delta O}{\Delta x} = \frac{\Delta l}{\Delta x} \cdot b + (l + \Delta l) \cdot \frac{\Delta b}{\Delta x}$$

- Als Δx naar 0 nadert, nadert Δl ook naar 0.

$$\text{Ga na dat uit opdracht b volgt: } \frac{dO}{dx} = \frac{dl}{dx} \cdot b + l \cdot \frac{db}{dx}$$

- Vervang l , b en O door $p(x)$, $q(x)$ en $f(x)$ en laat zien dat $f'(x) = p'(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot q'(x)$.

Theorie

Een productfunctie $f(x) = p(x) \cdot q(x)$ differentieer je met de **productregel**: $f'(x) = p'(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot q'(x)$.

Voorbeeld 1

Differentieer $f(x) = (2 - x^2)(1 + x^3)$.

Oplossing

$$p(x) = 2 - x^2 \text{ en } p'(x) = -2x$$

$$q(x) = 1 + x^3 \text{ en } q'(x) = 3x^2$$

$$\text{dus } f'(x) = -2x \cdot (1 + x^3) + (2 - x^2) \cdot 3x^2.$$

$$f'(x) = -2x - 2x^4 + 6x^2 - 3x^4$$

$$f'(x) = -5x^4 + 6x^2 - 2x$$

Voorbeeld 2

Differentieer $g(x) = x \ln(x)$.

Oplossing

$$p(x) = x \text{ en } p'(x) = 1$$

$$q(x) = \ln(x) \text{ en } q'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{dus } g'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$

21 Differentieer. Schrijf de afgeleide zo eenvoudig mogelijk.

H

a $f(x) = (4x^3 + 3)(x^5 - 5)$

b $g(x) = (1 + x + x^2)(x^3 - 7)$

c $h(x) = (x^2 + 4x) \cdot e^x$

d $k(x) = x^3 \cdot \log(x)$

e $l(x) = (4x^2 - 10) \cdot \sqrt{x}$

22 Gegeven is de functie $f(x) = (2x - 1)(5x + 2)^4$. Bij het differentiëren van f heb je niet alleen de productregel, maar ook de kettingregel nodig.

a Op het blaadje is een begin gemaakt met differentiëren van f . Geef het functievoorschrift van f' . Je hoeft het functievoorschrift niet te vereenvoudigen.

b Differentieer op dezelfde manier

$$g(x) = (3x - 1)^3(5x^2 + 8) \text{ en } h(x) = (7x - 4)\sqrt{3 - x}.$$

●	$f(x) = (2x - 1)(5x + 2)^4$						
●	$p(x) = 2x - 1 \text{ en } p'(x) = 2$						
●	$q(x) = (5x + 2)^4 \text{ en}$						
●	$q'(x) = 4(5x + 2)^3 \cdot 5 = 20(5x + 2)^3$						
●	$f'(x) = \dots$						
●							

Ondersteunende route → maak opdracht 023

23 Differentieer. Je hoeft niet te vereenvoudigen.

H

a $f(x) = x \cdot \sqrt{9 - x^2}$

d $k(x) = x^2 \cdot \sqrt{x^3 + 1}$

b $g(x) = (3x + 1) \cdot 6^{2x+1}$

e $m(x) = \frac{8x}{(4x - 5)^2}$

c $h(x) = e^{-2x} \cdot \ln^2(x)$

f $n(x) = x^3 \cdot e^{-x+3}$

24 Gegeven is de functie $K(p) = p^2(p + 3)^4$.

a Toon aan dat $K'(p) = 2p(p + 3)^4 + 4p^2(p + 3)^3$.

b Op het blaadje is een begin gemaakt met het herleiden van $K'(p)$.

Maak deze herleiding af en laat zien dat

$$K'(p) = (6p^2 + 6p)(p + 3)^3.$$

c Los exact op $K'(p) = 0$.

☐	$K'(p) = 2p(p + 3)^4 + 4p^2(p + 3)^3$
☐	$K'(p) = 2p(p + 3)(p + 3)^3 + 4p^2(p + 3)^3$
☐	$K'(p) = (2p^2 + 6p)(p + 3)^3 + 4p^2(p + 3)^3$
☐	$K'(p) = (2p^2 + \dots + \dots)(p + 3)^3$

Ondersteunende route → maak opdracht 025

25 Schrijf als product van twee factoren en bereken exact de nulpunten.

a $g(x) = 4(x - 7)^3 + 5x(x - 7)^3$

b $h(x) = 2(2x + 1)^3 - 5(2x + 1)^2$

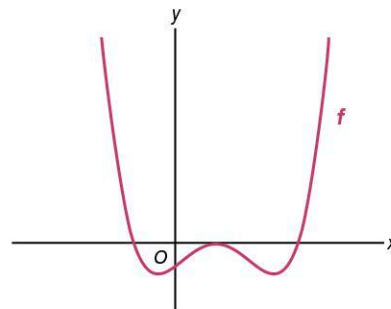
c $k(x) = 2x(x^2 - 1) - 5(x^2 - 1)^2$

26 Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 8x + 12)$.

a Bereken exact de nulpunten van f .

b Differentieer f en laat zien dat $f'(x)$ te herleiden is tot $f'(x) = 4(x - 2)(x^2 - 4x - 4)$.

c Bereken exact de x -coördinaten van de punten van de grafiek van f waarin de raaklijn evenwijdig is aan de x -as.



27 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

a Bereken exact het nulpunt van f .

b Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek van f .

c Stel een vergelijking op van de horizontale asymptoot van de grafiek van f .

d Bereken exact de x -coördinaten van de buigpunten van de grafiek van f .

Uitdagende route → maak opdracht U5 en U6

Ondersteunende opdrachten

023 Gegeven is de functie $f(x) = (3x^4 - 7) \cdot e^{-x^2+1}$.

Je gaat in deze opdracht f differentiëren.

- Leg uit dat je voor het differentiëren van f zowel de productregel als de kettingregel nodig hebt.
- Vul bij stap 1 de afgeleide van p in.
- Gebruik de kettingregel om bij stap 2 de afgeleide van q in te vullen.
- Vul de productregel bij stap 3 in. Je hoeft $f'(x)$ niet te vereenvoudigen.

$f(x) = (3x^4 - 7) \cdot e^{-x^2+1}$	
$p(x) = 3x^4 - 7$ en $p'(x) = \dots$	1
$q(x) = e^{-x^2+1}$ en $q'(x) = \dots$	2
$f'(x) = p'(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot q'(x)$	3
dus $f'(x) = \dots$	

025 Je gaat aantonen dat de functies $f(x) = x^2(x-3)^4 - 12(x-3)^5$

en $g(x) = (x-6)^2(x-3)^4$ hetzelfde zijn.

- Leg uit waarom je $f(x)$ kunt schrijven als

$$f(x) = x^2(x-3)^4 - 12(x-3)(x-3)^4.$$
- Vul in: $f(x) = x^2(x-3)^4 - (\dots - \dots)(x-3)^4.$
- Vul in: $f(x) = (x^2 - \dots + \dots)(x-3)^4.$
- Heb je nu aangetoond dat f en g hetzelfde zijn?
- Bereken exact de nulpunten van f . Welk functievoorschrift van f kun je daar het beste voor gebruiken?

Schrijf als een product en bereken exact de nulpunten.

- $g(x) = 8x(x+2)^3 - 48(x+2)^3$
- $h(x) = 2(3x-2)^3 + 12(3x-2)^2$
- $k(x) = 9x(x^2-4) + 3(x^2-4)^2$

Uitdagende opdrachten

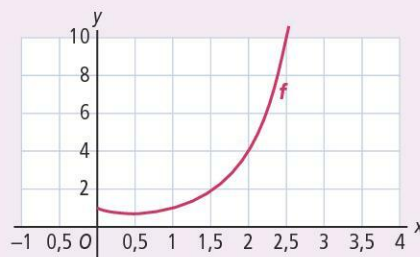
U5 De functie f is gegeven door $f(x) = p(x) \cdot q(x) \cdot r(x)$.

Toon aan:

$$f'(x) = p'(x) \cdot q(x) \cdot r(x) + p(x) \cdot q'(x) \cdot r(x) + p(x) \cdot q(x) \cdot r'(x).$$

U6 Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = x^x$.

- Leg uit dat je $f(x)$ kunt schrijven als $f(x) = e^{x \ln(x)}$.
- Bereken exact de coördinaten van de top van de grafiek.
- Het domein van de functie is $\langle 0, \rightarrow \rangle$. Je ziet in de grafiek dat $f(x)$ niet naar 0 nadert als x naar 0 nadert. Onderzoek naar welke waarde $f(x)$ wel nadert als x naar 0 nadert.



16.4 Quotiëntregel

Je leert

- hoe je een quotiëntfunctie differentieert
- hoe je aantoonst dat de grafieken van twee functies elkaar raken

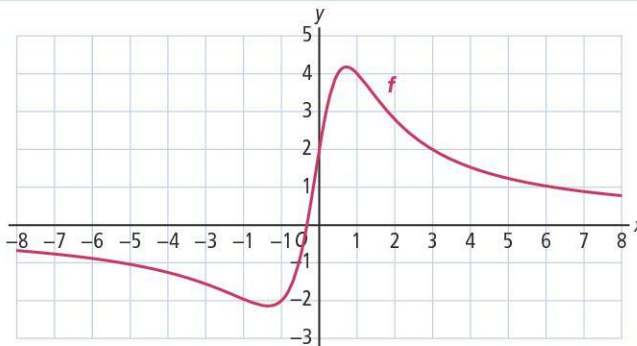
Leerroutes

- ondersteunend: 28—29—30—31—032—33—34—35—36—37
- doorlopend: 28—29—30—31—32—33—34—35—36—37
- uitdagend: 28—29—30—31—32—34—35—36—37—U7

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{6x+2}{x^2+1}$

Er zijn punten op de grafiek waarin de helling gelijk is aan 1.

- Hoe kun je deze punten vinden?



- 28** Om de afgeleide van de functie $f(x) = \frac{x^2+2}{1+2x}$ te vinden kun je het functievoorschrift schrijven als $f(x) = (x^2+2)(1+2x)^{-1}$ en vervolgens differentiëren met de productregel en de kettingregel.

- Differentieer f op deze manier.
- Laat zien dat je het functievoorschrift van f' kunt

$$\text{herleiden tot } f'(x) = \frac{2x(1+2x) - (x^2+2) \cdot 2}{(1+2x)^2}$$

- 29** Een quotiëntfunctie heeft de vorm $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$

- Schrijf $f(x)$ als $f(x) = t(x) \cdot (n(x))^{-1}$ en laat met de productregel en kettingregel zien dat

$$f'(x) = t'(x) \cdot \frac{1}{n(x)} - t(x) \cdot \frac{1}{(n(x))^2} \cdot n'(x)$$

- Laat zien dat het resultaat van opdracht a te schrijven is als

$$f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

- Ga na dat het functievoorschrift van f' in opdracht 28b in overeenstemming is met de regel in opdracht 29b.

Theorie

Een quotiëntfunctie $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ differentieer je met de

quotiëntregel:

$$f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

Gebruik haakjes waar dat nodig is. De teller werk je zo ver mogelijk uit, het kwadraat in de noemer hoeft je in het algemeen niet uit te werken.

Voorbeeld

$$\text{Differentieer } f(x) = \frac{3x-2}{x^2+1}$$

Oplossing

$$t(x) = 3x \text{ en } t'(x) = 3$$

$$n(x) = x^2 + 1 \text{ en } n'(x) = 2x$$

$$\text{dus } f'(x) = \frac{3 \cdot (x^2 + 1) - (3x - 2) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 3 - 6x^2 + 4x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\text{ofwel } f'(x) = \frac{-3x^2 + 4x + 3}{(x^2 + 1)^2}$$

30 Differentieer.

H

a $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

c $h(x) = \frac{3e^x}{x^3 + 8}$

b $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$

d $k(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

31 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{4x+3}{x-2}$

Toon met behulp van de afgeleide functie aan dat op de grafiek van f geen punten liggen waarin de helling gelijk is aan 0.

Ondersteunende route → maak opdracht 032

32 Differentieer.

a $f(x) = \frac{x^2 + 5}{(4x - 1)^2}$

c $h(x) = \frac{x^2 \cdot \sqrt{x}}{x + 2}$

b $g(x) = \frac{2^{3x-2} + 3}{2^x + 4}$

d $k(x) = \frac{x \ln(x)}{x + 4}$

33 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{e^x}$

a Bereken exact de nulpunten van f .

b Stel een functievoorschrift op voor de afgeleide van f .

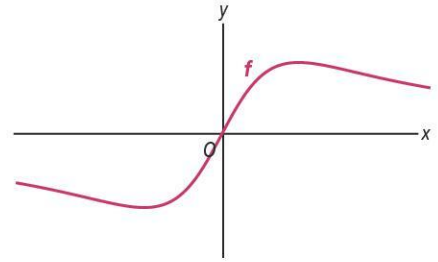
c Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(0, 0)$.

d Bereken exact de extreme waarden van f .

34 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

H

- Toon aan dat $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$
- Bereken exact de extreme waarden van f .
- Toon aan dat $f''(x) = \frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3}$
- Bereken exact de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van f .



35 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 + e^x$ en $g(x) = 3 - \frac{4}{x+2}$

- Toon aan dat het punt $(0, 1)$ een gemeenschappelijk punt is van de grafieken van f en g .
- Toon aan dat de grafieken van f en g in $(0, 1)$ een gemeenschappelijke raaklijn hebben.

Theorie

De grafieken van twee functies f en g **raken elkaar** als de grafieken in het raakpunt een gemeenschappelijke raaklijn hebben. In het raakpunt geldt $f(x) = g(x)$ én $f'(x) = g'(x)$.

36 **H** a Toon aan dat de grafieken van $f(x) = -\frac{2}{x}$ en $g(x) = x^2 - 3$ elkaar raken.

- Bereken exact voor welke waarde van p de grafieken van $h(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ en $k(x) = -3x^2 + p$ elkaar raken.

37 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$

- Toon aan dat $f'(x) = \frac{\frac{x}{2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1}}{x^2}$
- Toon aan dat $f'(x)$ te herleiden is tot $f'(x) = \frac{-x-2}{2x^2\sqrt{x+1}}$
- Verder is gegeven de functie $g(x) = -\sqrt{x+1} + p$. Bereken exact de waarde van p waarvoor de grafieken van f en g elkaar raken.

Uitdagende route → maak opdracht U7

Ondersteunende opdrachten

032 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x \cdot e^{2x}}{x+3}$

Je gaat in deze opdracht f differentiëren.

- Leg uit dat je voor het differentiëren van f behalve de quotiëntregel ook de productregel en de kettingregel nodig hebt.
- In stap 1 is de teller gedifferentieerd. Verklaar de factor 2 aan het eind.
- Vul stap 2 in.
- Vul de quotiëntregel bij stap 3 in. Laat zien dat

$$f'(x) \text{ te herleiden is tot } f'(x) = \frac{(2x^2 + 6x + 3)e^{2x}}{(x+3)^2}$$

Differentieer.

e $g(x) = \frac{x^2 - 1}{(8x + 2)^2}$

g $k(x) = \frac{x^3 \cdot \sqrt{x}}{x + 4}$

f $h(x) = \frac{2^{5-x}}{2^x + 1}$

h $l(x) = \frac{\ln(2x)}{x^2 + 4x}$

●	$f(x) = \frac{x \cdot e^{2x}}{x+3}$			
●	$t(x) = x \cdot e^{2x}$			
●	$t'(x) = 1 \cdot e^{2x} + x \cdot e^{2x} \cdot 2$		1	
●	$n(x) = x + 3$ en $n'(x) = \dots$		2	
●	$f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$		3	
●	duis $f'(x) = \dots$			

Uitdagende opdrachten

U7 De grafiek van de functie $f(x) = \frac{2x^2 + x - 2}{x - 1}$ heeft twee asymptoten: een verticale en een 'scheve'. In deze opdracht zoek je een vergelijking van de scheve asymptoot l .

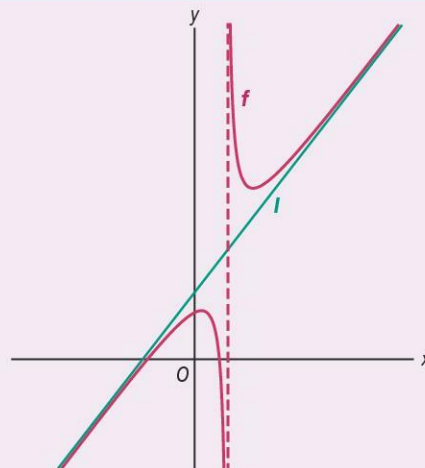
- Eerst kijk je naar de richtingscoëfficiënt van l .
De helling van de grafiek van f benadert op den duur de helling van lijn l .
Leg uit dat de richtingscoëfficiënt van l gelijk is aan $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$.
- Bereken deze limiet.

De vergelijking van l is van de vorm $y = ax + b$ met $a = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$.

Op den duur valt de grafiek van f vrijwel samen met lijn l .

- Leg uit dat moet gelden $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.

- Je kunt deze limiet herschrijven tot $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$.
Bereken b en geef een vergelijking van de asymptoot.



- 38** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$
- Plot en schets de grafiek van f .
 - Bereken exact de coördinaten van het buigpunt van de grafiek van f .

- 39** Bereken de limieten van elke functie voor $x \rightarrow \infty$ en $x \rightarrow -\infty$. Geef een vergelijking van elke horizontale asymptoot.

a $f(x) = \frac{12x^3 - 5x + 2}{1 + 4x^2 + 3x^3}$

b $g(x) = \sqrt{\frac{12x^3 - 5x + 2}{1 + 4x^2 + 3x^3}}$

c $h(x) = \frac{\sqrt{4x^2 + x + 3}}{8x + 10}$

d $k(x) = \frac{6 \cdot |x| + 1}{2x + 5}$

- 40** Gegeven is rechthoek $OPQR$ met $OP = 1$ en $OR = 2$. Lijnstuk AB met $A(a, 0)$ en $B(0, b)$, waarbij $a > 1$ en $b > 2$, gaat door Q .

- a** Toon met behulp van gelijkvormige driehoeken aan dat

$$b = 2 + \frac{2}{a-1}$$

- b** Welke asymptoten heeft de grafiek van de functie

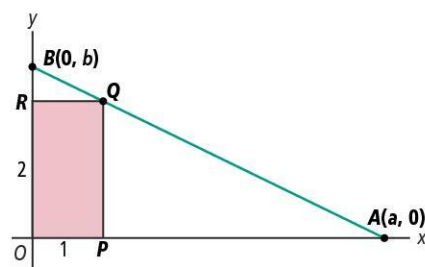
$$f(x) = 2 + \frac{2}{x-1} \text{ en hoe zie je die in de figuur terug?}$$

- c** Toon aan dat voor de oppervlakte S van $\triangle OAB$ geldt:

$$S = \frac{a^2}{a-1}$$

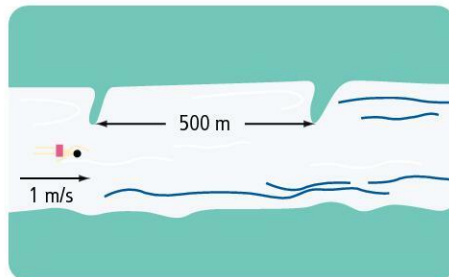
- d** Leg met behulp van de figuur uit dat de oppervlakte van $\triangle OAB$ een minimale waarde moet hebben.

- e** Bereken met behulp van $\frac{dS}{da}$ de coördinaten van punt A en van punt B die bij de minimale oppervlakte horen.

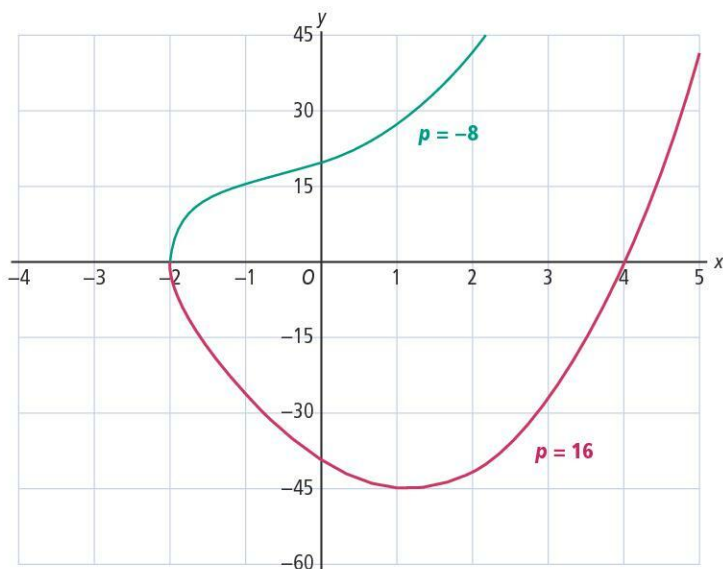


- 41** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{3x^2 - 27}{x^2 + 3x}$ en $g(x) = 3 - \frac{9}{x}$

- Laat zien dat je het functievoorschrift van f kunt herleiden tot dat van g .
- De herleiding in opdracht a is niet voor elke waarde van x mogelijk, dus er is een verschil tussen de functies f en g . Welk verschil is er tussen de grafieken van f en g ?



- 42** In een rivier liggen twee kribben 500 meter uit elkaar. Een krib is een korte dam haaks op de rivieroever. Kjell zwemt stroomopwaarts van een krib naar een volgende krib en weer terug. Zijn zwemsnelheid is 1 m/s. Kjell vraagt zich af of hij sneller in stilstaand water heen en terug kan zwemmen dan in stromend water. Onderzoek bij welke stroomsnelheid Kjell het snelst heen en terug zal zijn.



- 43** Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = (x^2 - p)\sqrt{3x + 6}$.
- Bereken de waarde van p waarvoor $x = 5$ een nulpunt is.
 - Bereken exact hoeveel nulpunten f_1 heeft.
 - Voor $p = -8$ en $p = 16$ zijn de grafieken getekend.
Het aantal nulpunten van f_p hangt af van de waarde van p .
Zo heeft f_{-8} één nulpunt en heeft f_{16} twee nulpunten.
Onderzoek voor elke waarde van p hoeveel nulpunten f_p heeft.

Theorie

Productfunctie

Een functie van de vorm $f(x) = p(x) \cdot q(x)$ heet een productfunctie.

De nulpunten van een productfunctie bereken je door op te lossen: $p(x) = 0$ of $q(x) = 0$.

Voorbeeld

Bereken de nulpunten van de functie $f(x) = (x^2 - 10)\sqrt{3x - 7}$.

Oplossing

$f(x) = 0$ geeft $x^2 - 10 = 0$ of $\sqrt{3x - 7} = 0$.

$x^2 = 10$ of $3x - 7 = 0$

$x = -\sqrt{10}$ (voldoet niet) of $x = \sqrt{10}$ of $x = \frac{7}{3}$.

De nulpunten zijn $x = \sqrt{10}$ en $x = 2\frac{1}{3}$.

S1 Bereken exact de nulpunten van deze productfuncties.

a $f(x) = (2^x - 10)(6 - 7x)$

b $g(x) = (3x^2 - 75)\ln(x)$

Theorie

Quotiëntfunctie en verticale asymptoot

Een functie van de vorm $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ heet een quotiëntfunctie.

Een quotiëntfunctie f is niet gedefinieerd als $n(x) = 0$ en heeft een nulpunt als $t(x) = 0$ én $n(x) \neq 0$.

De grafiek van de functie $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ heeft een verticale

asymptoot $x = a$ als geldt $n(a) = 0$ én $t(a) \neq 0$.

Voorbeeld 1

Bereken het nulpunt van de functie

$$f(x) = \frac{-9x + 54}{x^2 - 25}$$

Oplossing

$$t(x) = -9x + 54 \text{ en } n(x) = x^2 - 25$$

$$f(x) = 0 \text{ geeft } -9x + 54 = 0 \text{ én } x^2 - 25 \neq 0.$$

$$-9x + 54 = 0 \text{ als } x = 6.$$

$$n(6) \neq 0 \text{ dus } f \text{ heeft nulpunt } x = 6.$$

Voorbeeld 2

Geef een vergelijking van de verticale asymptoot van

$$\text{de grafiek van } f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 6x + 8}$$

Oplossing

$$n(x) = 0 \text{ geeft } x^2 - 6x + 8 = 0.$$

$$(x - 2)(x - 4) = 0 \text{ dus } x = 2 \text{ of } x = 4.$$

$$t(2) = 0 \text{ en } t(4) \neq 0.$$

De verticale asymptoot is $x = 4$.

S2 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3x^2 + 6x}{1 - 4x^2}$

- a** Bereken exact de nulpunten van f .
- b** Stel vergelijkingen op van de verticale asymptoten van de grafiek van f .

Theorie

Limieten, horizontale asymptoten

De wiskundige notatie voor 'x ver van 0' is $x \rightarrow \infty$ als $x > 0$ en $x \rightarrow -\infty$ als $x < 0$. Het symbool ∞ betekent 'oneindig'.

De grafiek van f heeft een horizontale asymptoot $y = c$ als voor x -waarden ver van 0 de waarde van $f(x)$ tot een constante c nadert.

Bij een horizontale asymptoot $y = c$ geldt:
als x naar ∞ of $-\infty$ nadert, dan nadert $f(x)$ naar c .

Dit noteer je als $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$ of $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$.

In woorden: de limiet van $f(x)$ als x naar oneindig of min oneindig nadert, is gelijk aan c .

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 4 + \frac{17}{8x - 10}$

Bepaal $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ en geef een vergelijking van de horizontale asymptoot van f .

Oplossing

Als $x \rightarrow \infty$ dan nadert de noemer $8x - 10$ ook naar oneindig.

De breuk nadert dan naar 0 en dus $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4 + 0 = 4$.

Zo is ook $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$.

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 4$.

S3 Leg uit wat deze limieten betekenen voor de grafiek van een functie f .

a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 13$

b $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2\frac{1}{3}$

Vaardigheid

Je kunt een limiet exact berekenen met behulp van standaardlimieten.

De limieten $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x^n} = 0$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{x^n} = 0$ ($n > 0$) zijn

voorbeelden van standaardlimieten.

Om limieten exact te kunnen berekenen, herleid je de limieten tot standaardlimieten. Als bij een quotiëntfunctie f de teller en noemer beide veeltermfuncties zijn, dan kun je het functievoorschrift herleiden tot een vorm waarmee $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ en

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ exact te berekenen zijn. Deel daarvoor teller en noemer door de hoogste macht van x die in de noemer voorkomt.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2x + 5x^2}{3x^2 - 2}$

Bereken exact $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Oplossing

Teller en noemer delen door x^2 geeft

$$f(x) = \frac{\frac{2}{x} + 5}{3 - \frac{2}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} + 5}{3 - \frac{2}{x^2}} = \frac{0 + 5}{3 - 0} = 1\frac{2}{3}$$

S4 Bereken exact $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

a $f(x) = \frac{5x + 2}{3 - x}$

c $f(x) = \frac{4x^4 + 2}{7x^3 - 4}$

b $f(x) = \frac{(2x + 1)(6 - 3x)}{19 - 3x^2}$

d $f(x) = \frac{7 - x^2}{8x^3 + 5x^2 - 9x + 12}$

Vaardigheid

Je kunt een productfunctie differentiëren.

Een productfunctie $f(x) = p(x) \cdot q(x)$ differentieer je met de productregel $f'(x) = p'(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot q'(x)$.

Voorbeeld

Differentieer $f(x) = (3x + 6)(10x - 100)$ en schrijf de afgeleide zo eenvoudig mogelijk.

Oplossing

$$p(x) = 3x + 6 \text{ en } p'(x) = 3$$

$$q(x) = 10x - 100 \text{ en } q'(x) = 10$$

$$f'(x) = 3 \cdot (10x - 100) + (3x + 6) \cdot 10 \text{ ofwel}$$

$$f'(x) = 60x - 240$$

S5 Differentieer. Schrijf de afgeleide zo eenvoudig mogelijk.

a $f(x) = (80x^2 - 35)(5 - 2x)$

b $g(x) = (7x + 3) \cdot e^{5x-10}$

Vaardigheid

Je kunt een quotiëntfunctie differentiëren.

Een quotiëntfunctie $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ differentieer je met de

$$\text{quotiëntregel: } f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

Gebruik haakjes waar dat nodig is. De teller werk je zo ver mogelijk uit, het kwadraat in de noemer hoeft je in het algemeen niet uit te werken.

Voorbeeld

$$\text{Differentieer } f(x) = \frac{28x + 7}{x^2 - 19}$$

Oplossing

$$t(x) = 28x + 7 \text{ en } t'(x) = 28$$

$$n(x) = x^2 - 19 \text{ en } n'(x) = 2x$$

$$f'(x) = \frac{28 \cdot (x^2 - 19) - (28x + 7) \cdot 2x}{(x^2 - 19)^2}$$

$$\text{ofwel } f'(x) = \frac{-28x^2 - 14x - 532}{(x^2 - 19)^2}$$

S6 Differentieer.

a $f(x) = \frac{19x + 26}{4x - 12}$

c $h(x) = \frac{2xe^x}{x + 5}$

b $g(x) = \frac{3x^2 - 27}{4 - x^2}$

d $k(x) = \frac{x^2}{\ln(x)}$

Vaardigheid

Je kunt aantonen dat de grafieken van twee functies elkaar raken.

De grafieken van twee functies f en g raken elkaar als de grafieken in het raakpunt een gemeenschappelijke raaklijn hebben. In het raakpunt geldt $f(x) = g(x)$ én $f'(x) = g'(x)$.

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = -(x + 3)^2 + p$.
Bereken exact voor welke waarde van p de grafieken van f en g elkaar raken.

Oplossing

$$f'(x) = 2x \text{ en } g'(x) = -2(x + 3)$$

$$f'(x) = g'(x) \text{ geeft } 2x = -2(x + 3) \text{ dus } x = -1\frac{1}{2}.$$

$$f(-1\frac{1}{2}) = 2\frac{1}{4} \text{ en } g(-1\frac{1}{2}) = -2\frac{1}{4} + p$$

$$f(x) = g(x) \text{ geeft } -2\frac{1}{4} + p = 2\frac{1}{4} \text{ dus } p = 4\frac{1}{2}.$$

S7 Toon aan dat de grafieken van de functies $f(x) = x + \frac{1}{x}$ en $g(x) = -4x^2 + x + 3$ elkaar raken.

- T1**
- Bereken exact de nulpunten van $f(x) = (2x - 5)\sqrt{12x - x^2}$.
 - Plot en schets de grafiek van f .
 - Bereken exact de nulpunten van $g(x) = (2x + 5)\sqrt{12x - x^2}$.
 - Controleer het antwoord bij opdracht c met een plot.

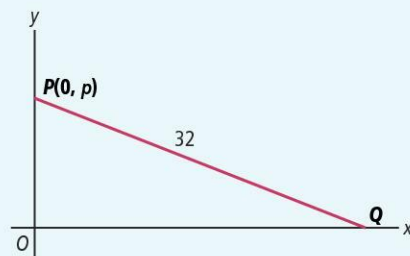
- T2** Bereken exact de nulpunten en stel vergelijkingen op van de asymptoten van de bijbehorende grafieken.

a $f(x) = \frac{3x + 6}{2 - 5x}$	c $h(x) = \frac{8x + 3x^2}{x^3 - 8}$
b $g(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 6}$	d $k(x) = 5 - \frac{3}{x + 1} + \frac{2}{x}$

- T3** Differentieer en schrijf de afgeleide zo eenvoudig mogelijk.

- $g(x) = (x + 2)^2(x - 5)$
- $h(x) = (2 - 9x)\sqrt{x + 7}$
- $k(x) = x^2 \cdot {}^3\log(4x)$
- $f(x) = 3^x \cdot e^{2x+1}$

- T4** Op de y -as ligt een punt $P(0, p)$ met $p > 0$. Op de positieve x -as ligt een punt Q zodat $PQ = 32$.
- Druk de lengte van OQ uit in p .
 - Welke waarden kan p aannemen?
 - De oppervlakte A van driehoek OPQ is een functie van p . Geef het functievoorschrift $A(p)$.
 - Bereken met behulp van differentiëren de maximale oppervlakte van driehoek OPQ .



- T5** Differentieer. Schrijf de teller zo eenvoudig mogelijk.

a $f(x) = \frac{8x - 3}{5 - x}$	c $g(x) = \frac{\ln^2(x)}{2 - \ln(x)}$
b $h(x) = \frac{2 - e^{0,5x}}{3x + 2}$	d $k(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^3 - 1}$

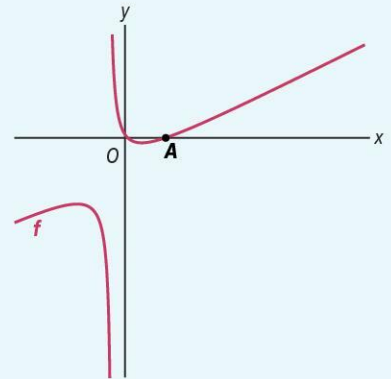
- T6**
- Gegeven zijn de functies $f(x) = xe^x$ en $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$. Toon aan dat de grafieken van f en g elkaar raken.
 - Gegeven zijn de functies $h(x) = \ln(x)$ en $k(x) = x^2 + p$. Bereken exact voor welke waarde van p de grafieken van h en k elkaar raken.

T7 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2 + 2\ln(x)}{x}$

- Bereken exact het nulpunt van f .
- Geef een vergelijking van elk van de asymptoten van de grafiek van f .
- Bereken exact de extreme waarde van f .

T8 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^2 - 15x}{x + 5}$

- Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek van f .
- De grafiek van f snijdt de x -as in de oorsprong en in het punt A .
Stel een vergelijking op van de raaklijn in het punt A .



T9 Bij een scheikundige reactie ontstaat een hoeveelheid eindproduct, uitgedrukt in mol. De ontstane hoeveelheid na t minuten wordt gegeven met de formule $C = \frac{6t}{3t + 2}$

met C in mol en t in minuten.

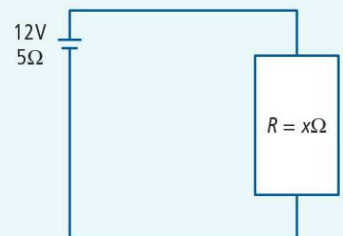
- Bereken hoe groot de hoeveelheid eindproduct op den duur wordt.
- Geef een formule voor de reactiesnelheid in mol per minuut.
- Hoe groot wordt deze reactiesnelheid op den duur?

T10 Een elektrisch circuit bestaat uit een spanningsbron van 12 volt met een inwendige weerstand van 5 ohm en een uitwendige weerstand van x ohm. Voor de stroomsterkte I in ampère geldt bij spanning V in volt en weerstand R in ohm de wet:

$$V = I \times (R_{\text{inwendig}} + R_{\text{uitwendig}}).$$

Voor het vermogen P in watt in het circuit geldt: $P = I^2 \times R_{\text{uitwendig}}$.

- Toon aan dat in het circuit moet gelden: $I = \frac{12}{x + 5}$
- Geef een formule die het vermogen P uitdrukt in x .
- Geef de formule voor $\frac{dP}{dx}$ en bereken hiermee het maximale vermogen en de bijbehorende grootte van de uitwendige weerstand.



Je kunt een limiet exact berekenen met behulp van standaardlimieten

- E1** Bereken exact $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ en stel een vergelijking op van de horizontale asymptoot van de grafieken van de functies.

a $f(x) = \frac{15x + 7}{3 - 6x}$

b $f(x) = \frac{5x^2 - 16}{6x^3 + 8x}$

c $f(x) = \frac{4x^2 + 4x - 12}{3x^2 - 10x}$

Je kunt een productfunctie differentiëren.

- E2** Differentieer. Je hoeft de afgeleide niet te vereenvoudigen.

a $f(x) = \sqrt{x} \cdot (5x^3 - 12x)$ **c** $h(x) = \left(\frac{1}{x^3} - 5\right) \cdot \sqrt{3x - 4}$

b $g(x) = 8x \cdot e^{5x}$ **d** $k(x) = x^3 \ln(x)$

Je kunt een quotiëntfunctie differentiëren.

- E3** Differentieer. Schrijf de teller zo eenvoudig mogelijk.

a $f(x) = \frac{3x - 7}{2 - x^2}$ **c** $h(x) = \frac{1 - \ln(x)}{2x}$

b $n(x) = \frac{x^3 + 2x}{\ln(x)}$ **d** $k(x) = \frac{x^3 - 4x}{15 - 3x^2}$

Je kunt aantonen dat de grafieken van twee functies elkaar raken.

- E4** **a** Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 \ln(x)$ en

$$g(x) = 1 - \frac{x + 3}{5x - 1}$$

Toon aan dat de grafieken van f en g elkaar raken in het punt met x -coördinaat 1.

b Gegeven zijn de functies $h(x) = \frac{1}{x^2}$ en $k(x) = 2 - x^2$.

Toon aan dat de grafieken van h en k elkaar raken.

- E5** Bereken exact de nulpunten.

a $g(t) = (t^2 - 8t)(t^4 + 6t)$ **c** $k(s) = \sqrt{16 - s^2} \cdot \sqrt{3s + 7}$

b $h(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)\sqrt{4x + 10}$ **d** $h(x) = x^3 \ln(x)$

E6 Bereken exact de nulpunten en stel vergelijkingen op van de verticale asymptoten van de grafieken van de functies.

a $f(x) = \frac{3x-7}{2-x^2}$

c $h(x) = \frac{5x-2}{e^{0,2x}}$

b $g(x) = \frac{1-x-x^2}{x^2+1}$

d $k(x) = \frac{\sqrt{e^x}}{x^3}$

E7 a Bereken exact de extreme waarden van de functie $f(x) = (5x^2 + 20)(20 - x^2)$.

b Bereken exact de extreme waarden van de functie $g(x) = 3x\sqrt{12-2x}$. Vermeld ook eventuele randextremen.

E8 Gegeven is de functie $f(x) = (3x+1) \cdot 2^x$.

a Geef een functievoorschrift van f' .

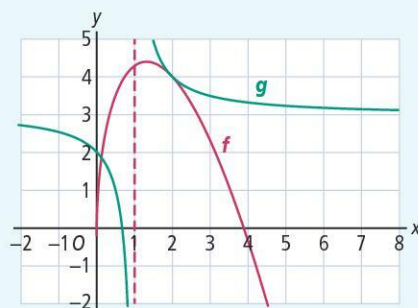
b De grafiek van f heeft één top.

Toon algebraïsch aan dat de x -coördinaat van deze top gelijk is aan $x = \frac{-3 - \ln(2)}{3 \ln(2)}$

E9 Gegeven zijn de grafieken van de functies

$$f(x) = (4-x)\sqrt{2x} \text{ en } g(x) = \frac{3x-2}{x-1}$$

Het lijkt alsof de grafieken elkaar raken in een punt met $x = 2$. Onderzoek algebraïsch of dat het geval is.



E10 Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + ax + 4}$

a Plot en schets de grafiek van f_4 .

b De grafiek van f_4 snijdt de horizontale asymptoot in een punt P .

Bereken exact de coördinaten van P .

c Beredeneer dat f_4 een maximum heeft. Beredeneer ook dat de grafiek van f_4 een buigpunt heeft.

d Bereken exact de coördinaten van het buigpunt van de grafiek van f_4 .

e Voor welke waarde(n) van a heeft de grafiek van f_a geen verticale asymptoot?

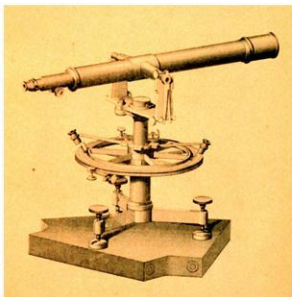
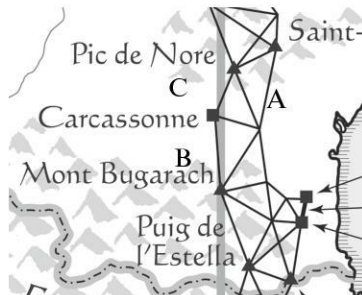
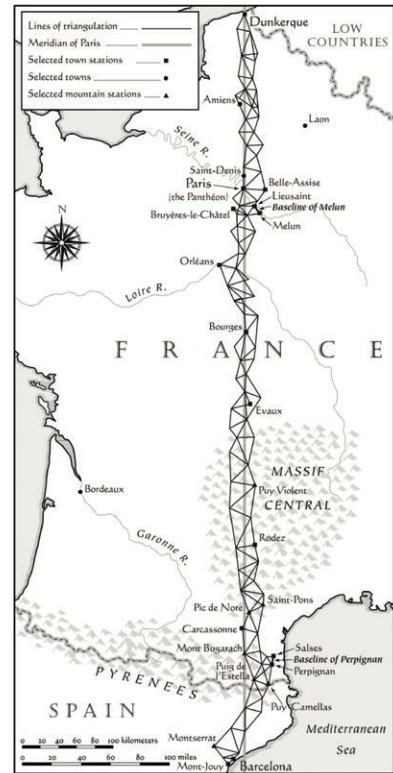
De standaardmeter

In de beginjaren van de Franse Revolutie verklaarde een team van wetenschappers dat de meter één tienmiljoenste van de afstand van de noordpool tot de evenaar zou moeten zijn.

In 1792 vertrokken de Franse wetenschappers, Méchain en Delambre met een bijzondere taak: het meten van het deel van de meridiaan tussen Duinkerken en Barcelona. Hun hoop was dat ooit iedereen dezelfde standaardmaat zou gaan gebruiken: de meter.

Om de afstand van Duinkerken tot Barcelona te bepalen, pasten Méchain en Delambre de methode van driehoeksmeting toe. Daarbij maak je gebruik van de eigenschap dat een driehoek volledig bepaald is als één zijde en de aanliggende hoeken bekend zijn. Daarna wordt de sinusregel gebruikt om de andere zijden te berekenen.

De voornaamste taak van Méchain en Delambre was het meten van hoeken met de repetitielcirkel (zie afbeelding) en de onderlinge afstand tussen goed waarneembare punten. Zo gebruikte ze bijvoorbeeld de kerktoeren van het hoog gelegen stadje Carcassonne en Mont Bugarach (1230 meter).



Opdracht

Als je de kaart met de driehoeksmeting uitvergroot, zie je Carcassonne en Mont Bugarach aangegeven en een derde plaats, aangeduid met de letter *A*.

Je kunt meten dat $\angle ACB \approx 72^\circ$ en $\angle CBA \approx 36^\circ$.

- Zoek met een atlas of Googlemaps uit welke plaats *A* is.
- Tussen Carcassonne en *A* dat een uitzichtpunt is, ligt een deel van het lange afstandspad GR 36, dat ook in die tijd een verbinding was. De afstand hemelsbreed is circa 21,6 km. Bereken met de sinusregel de afstanden *CB* en *AB*.

Méchain en Delambre presenteerden hun meetgegevens pas in 1799. In Parijs ligt een platina staaf: dat is de meter.

In het SI-stelsel is de meter de eenheid voor lengte en is sinds

1983 gedefinieerd als de afstand die licht in $\frac{1}{299\,792\,458}$ seconde in vacuüm aflegt.

Vaardigheden 8

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Rekenen met machten, exponenten en wortels
- Lijnen en cirkels
- Inverse functies
- Lijn- en puntsymmetrie



Rekenen met machten, exponenten en wortels

- 1 Schrijf de formules in de vorm $y = b \cdot g^x$.
 - a $y = 12 \cdot 3^{2-x}$
 - b $y = 6^{1-2x}$
 - c $y = \frac{1}{2} \cdot 2^{-2x+5}$
 - d $y = 4 \cdot 9^{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$
- 2 Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk.
 - a $y = (3^t - 2)^2$
 - b $y = (4^x + 3)(4^{-x} - 2)$
 - c $y = 5^{3p}(5^{\frac{1}{2}p} - 5^{-p})$
 - d $y = (8^{3p} + 3)(8^p - p)$
- 3 Herleid en schrijf in de vorm $y = b \cdot x^a$.
 - a $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot 2\sqrt{x}$
 - b $y = \left(-\frac{1}{2}x\right)^3 \cdot (\sqrt[4]{x^3})^2$
 - c $y = \frac{(3x)^2}{2\sqrt[4]{x}}$
 - d $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}$
 - e $y = \left(\frac{x}{\sqrt[3]{2} \cdot (2x)^2}\right)^3$
 - f $y = (\sqrt{3}x)^3 \cdot (-2)^{-3}$
- 4 Op het blaadje wordt $\sqrt[4]{3}$ geschreven in de vorm $b\sqrt[a]{a}$, met a een zo klein mogelijk geheel getal.
 - a Van welke rekenregel voor wortels is gebruikt gemaakt in stap 1?
 - b Waarom is het handig om in stap 2 teller en noemer te vermenigvuldigen met $\sqrt{3}$?
 - c Laat zien dat $\sqrt[8]{3}$ te schrijven is als $\frac{2}{3}\sqrt{6}$.
- 5 Herleid en schrijf in de vorm $b\sqrt[a]{a}$, met a een zo klein mogelijk positief geheel getal.
 - a $\frac{3}{\sqrt{2}}$
 - b $\sqrt{1875}$
 - c $\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^4$
 - d $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$
 - e $\sqrt{2048}$
 - f $\frac{6}{\sqrt{3}}$
- 6 Schrijf zo eenvoudig mogelijk.
 - a $y = \frac{1}{2}x \cdot \frac{2}{\sqrt{x}}$
 - b $y = x^2\sqrt{x} \cdot \frac{4}{(\sqrt{3}x)^2}$

	$\sqrt[4]{3} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$		1	
	$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$		2	
	Dus $\sqrt[4]{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$			

Lijnen en cirkels

- 7 Gegeven is lijn l door de punten $A(2, -5)$ en $B(-3, 2)$.
- Bereken de richtingscoëfficiënt van lijn l .
 - Stel een vergelijking op van lijn l in de vorm $y = mx + n$.
 - Geef ook een vergelijking van lijn l in de vorm $ax + by = c$, waarbij a , b en c gehele getallen zijn.

Theorie

Een vergelijking van een lijn kan worden gegeven in de vorm $y = mx + n$ of in de vorm $ax + by = c$.

Een vergelijking van een cirkel met middelpunt (p, q) en straal r is $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$.

Twee lijnen met richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 staan loodrecht op elkaar als $m_1 \cdot m_2 = -1$.

- 8 Stel vergelijkingen op van de lijnen in de vorm $ax + by = c$, met a , b en c geheel.
- Lijn l door $(2, 5)$ en evenwijdig aan de lijn $y = 1\frac{1}{2}x$.
 - Lijn m door $(4, -3)$ en loodrecht op de lijn $y = 4\frac{1}{2}x$.
 - Lijn p door $(0, 5)$ en $(-8, 1)$.
- 9 Bereken van elke cirkel de coördinaten van het middelpunt en de straal.
- $x^2 + 12x + y^2 + 5y = 0$
 - $x^2 + y^2 - x + 3y + 2\frac{1}{4} = 0$
 - $x^2 - 4y = 8x - y^2$
- 10 Bereken de coördinaten van de snijpunten van de lijn en de cirkel.
- Lijn l : $y = 2x - 1$ en cirkel c : $x^2 + y^2 - 3y - 19 = 0$
 - Lijn l : $x + 7y = 3$ en cirkel c : $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$
 - Lijn l : $y = x + 2$ en cirkel c : $x^2 + y^2 - 2x - 10y - 74 = 0$
- 11 Gegeven zijn cirkel c : $x^2 + 7x + y^2 + 5y = 0$ en punt $P(1, 8)$. Bereken $d(P, c)$.
- 12 Lijn q raakt cirkel c : $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$ in het snijpunt van c met de positieve y -as.
Stel een vergelijking van q op.

Inverse functies

13 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{12}{4x-1}$ en $g(x) = \frac{3}{x} + \frac{1}{4}$

- Toon aan dat $f(4) = \frac{4}{5}$ en $g(\frac{4}{5}) = 4$.
- Toon aan dat $f(g(x)) = x$ en $g(f(x)) = x$ als $x \neq 0$.
- Welk verband bestaat er tussen de functies f en g ?

Aanpak

Hoe stel je het functievoorschrift op van de inverse van een gegeven functie f ?

- Vervang het functievoorschrift $f(x)$ door y .
- Vervang in de formule x door y en y door x .
- Druk in de nieuwe formule y uit in x .
- Schrijf het resultaat als functievoorschrift door y te vervangen door $f^{inv}(x)$.

Voorbeeld

Stel het functievoorschrift op van de inverse van $f(x) = {}^3\log(2x-7)$.

Oplossing

- $y = {}^3\log(2x-7)$
- $x = {}^3\log(2y-7)$
- $2y-7 = 3^x$
 $2y = 7 + 3^x$ dus $y = \frac{1}{2}(7 + 3^x)$
- $f^{inv}(x) = 3\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3^x$

14 Stel het functievoorschrift op van de inverse functie.

- $f(x) = 12 - 5x$
- $g(x) = 1 + (2x-7)^3$
- $h(x) = \frac{20}{x-4}$
- $k(x) = 8 + 7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$
- $p(x) = \frac{1}{5} \cdot 2^{3x-1}$
- $q(x) = \ln(5x-10)$

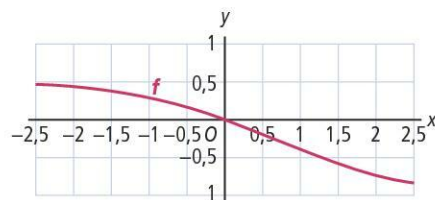
15 Gegeven is de functie $f(x) = 1 + \sqrt{12-x}$.

- Geef het domein en het bereik van f .
- Bereken het functievoorschrift van f^{inv} en geef het domein en bereik van f^{inv} .
- Voer de opdrachten a en b ook uit voor de functie $g(x) = 1 + \sqrt[4]{2x-6}$.

d Doe hetzelfde voor de functie $h(x) = \frac{3}{2\sqrt{1-x}}$

16 Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1-3^x}{2+3^x}$

- Geef het domein van f .
- Waarom kun je uit de grafiek van f concluderen dat f een inverse functie moet hebben?
- Stel een functievoorschrift op van f^{inv} .
- Geef het domein van de inverse functie van f .



Lijn- en puntsymmetrie

- 17** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{4x}{4 + x^2}$
- Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek van f .
 - Hoe liggen de toppen ten opzichte van de oorsprong?

Theorie

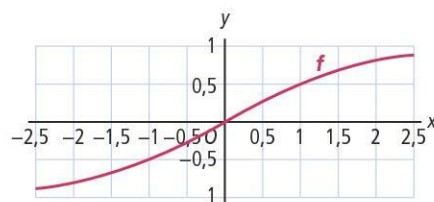
De grafiek van een functie f is lijnsymmetrisch in de y -as als geldt: $f(-a) = f(a)$ voor elke waarde van a uit het domein van f .

Als voor een functie f geldt: $f(-a) = -f(a)$ voor elke waarde van a uit het domein van f , dan is de grafiek van f puntsymmetrisch in de oorsprong $(0, 0)$.

- 18** Geef bij elk van de functies aan of de bijbehorende grafiek lijnsymmetrisch is in de y -as, puntsymmetrisch in de oorsprong of geen van beide. Verklaar je antwoord met een berekening of een redenering.

- | | |
|---------------------------------------|---|
| a $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5$ | d $p(x) = \cos^2(x) + 2\cos(x)$ |
| b $h(x) = 2\log(1 + x^2)$ | e $r(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x$ |
| c $k(x) = \frac{2x^2 + 1}{3x}$ | f $s(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$ |

- 19** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1 - 3^{-x}}{1 + 3^{-x}}$.
De grafiek lijkt puntsymmetrisch te zijn in de oorsprong.
Toon aan dat dit inderdaad het geval is.



- 20** Er zijn ook functies waarvan de grafiek symmetrisch is in de lijn $y = x$. Daarover gaat deze opdracht.

Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \frac{3x + p}{x - 3}$

- Plot en schets de grafiek van de functie f_{-8} .
- De grafiek van f_{-8} lijkt symmetrisch te zijn in de lijn $y = x$. Welke conclusie zou je dan kunnen trekken over de inverse functie van f_{-8} ?
- Bewijs dat deze conclusie juist is.
- Toon aan dat deze eigenschap geldt voor alle functies f_p , mits $p \neq -9$.





In dit hoofdstuk

In hoofdstuk 6 heb je kennis gemaakt met de sinusfunctie en de cosinusfunctie en je hebt geleerd om vergelijkingen met sinus en cosinus op te lossen.

In dit hoofdstuk wordt deze kennis uitgebreid. Je gaat ingewikkeldere vergelijkingen met sinus en cosinus oplossen en je leert de sinusfunctie en de cosinusfunctie te differentiëren of te primitiveren. Ook wordt de tangensfunctie ingevoerd.

Er volgen in deel 4 nog twee hoofdstukken waarin sinus en cosinus een belangrijke rol spelen.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Formules manipuleren* opdracht 12
- *Logisch redeneren en bewijzen* opdracht 47
- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 60



- V1** Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$.
- Plot en schets de grafiek van f op $[-\pi, 3\pi]$.
 - Geef de exacte nulpunten van f .
 - Los exact op $f(x) = 1$ en $f(x) = -1$.
 - Hoe groot is de periode van f ?
 - Maak de opdrachten a tot en met d ook voor de functie $f(x) = \cos(2x)$.

- V2** Leg met behulp van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ of $g(x) = \cos(x)$ uit dat:

- | | |
|---|--|
| a $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)$ | d $\cos\left(1\frac{1}{3}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)$ |
| b $\cos\left(-1\frac{1}{4}\pi\right) = \cos\left(1\frac{1}{4}\pi\right)$ | e $\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)$ |
| c $\sin\left(1\frac{1}{6}\pi\right) = -\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)$ | f $\sin\left(1\frac{1}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)$ |

Theorie

Voor enkele waarden van x moet je de exacte waarde van $\sin(x)$ en $\cos(x)$ kennen.

Met behulp van symmetrie en periodiciteit kun je dan voor verschillende andere waarden van x ook de exacte waarde van $\sin(x)$ en $\cos(x)$ vinden.

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

- V3** Geef de exacte waarde.

- | | |
|--|--|
| a $\sin\left(1\frac{1}{4}\pi\right)$ | e $\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)$ |
| b $\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)$ | f $\cos\left(1\frac{1}{6}\pi\right)$ |
| c $\sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right)$ | g $\sin\left(-1\frac{1}{6}\pi\right)$ |
| d $\cos\left(-1\frac{2}{3}\pi\right)$ | h $\sin\left(1\frac{3}{4}\pi\right)$ |

- V4**
- Plot de grafieken van de functies $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = 3\sin(x)$ en $h(x) = \sin(3x)$.
Door welke transformaties kan de grafiek van g ontstaan uit de grafiek van f ? En hoe zit dat bij de grafiek van h ?
 - Plot de grafieken van de functies $k(x) = \cos(x)$, $m(x) = 2 + \cos(x)$ en $n(x) = \cos(x + 2)$.
Door welke transformaties kunnen de grafieken van m en n uit die van k ontstaan?

Theorie

De algemene vorm voor het functievoorschrift bij een sinusoidale is $f(x) = d + a \sin(b(x - c))$ of $g(x) = d + a \cos(b(x - c))$. Daarbij geldt:

- De amplitude is $|a|$.
- Voor het verband tussen b (met $b > 0$) en de periode geldt

$$b = \frac{2\pi}{\text{periode}} \text{ of } \text{periode} = \frac{2\pi}{b}$$

- De evenwichtsstand is de lijn $y = d$.
- Er is een horizontale verschuiving c naar rechts.

Voorbeeld

Geef de kenmerken van de grafiek van de functie $f(x) = 2 \cos(\frac{1}{3}\pi(x + 1)) - 5$.

Oplossing

De amplitude is 2.

De evenwichtsstand is $y = -5$.

De periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}\pi} = 6$.

De grafiek is 1 naar links verschoven.

V5 Geef aan hoe de grafieken van de functies kunnen ontstaan uit de grafiek van $f(x) = \cos(x)$ en geef bij elke functie de evenwichtsstand, de amplitude en de periode van de bijbehorende grafiek.

- a** $g(x) = \cos(6x)$ **c** $m(x) = \sqrt{5} \cdot \cos(4\pi x)$
b $h(x) = -\cos(x + 0,22)$ **d** $n(x) = 1 - 2\cos(x)$

Theorie

Vergelijkingen van de vorm $\sin(bx) = p$ of $\cos(bx) = p$ los je exact op door gebruik te maken van de waarden in de tabel met de exacte waarden.

De notatie voor een oneindige rij oplossingen met periode 2π is $x = a + k \cdot 2\pi$ waarbij k een geheel getal is.

Voorbeeld

Los exact op $\cos(3x) = \frac{1}{2}$ op het interval $[0, \pi]$.

Oplossing

$$\cos(\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2} \text{ dus}$$

$$3x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 3x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \text{ of } x = -\frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

De oplossingen op $[0, \pi]$ zijn

$$x = \frac{1}{9}\pi, x = \frac{7}{9}\pi \text{ en } x = \frac{5}{9}\pi.$$

V6 Los exact op het interval $[0, 2\pi]$ op.

- a** $\sin(5x) = 1$ **c** $\sin(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
b $\cos(4x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ **d** $\cos(6x) = -1$

V7 Los exact op het interval $[-\pi, 3\pi]$ op.

- a** $4\cos(2x) = 2\sqrt{3}$ **c** $\cos(1\frac{1}{2}x) = 0$
b $1\frac{1}{2}\sin(\frac{1}{2}x) = -\frac{3}{4}$ **d** $6\sin(2x) = 3$

17.1 Harmonische trillingen

Je leert

- wat een harmonische trilling is

Leerroutes

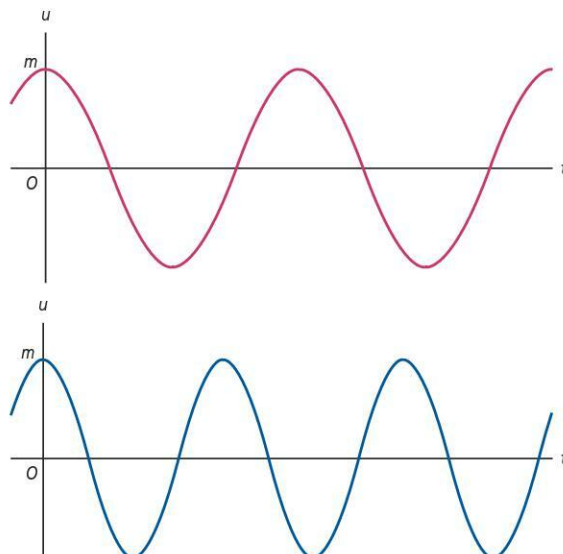
- ondersteunend: 1–2–3–4–05–5–6–7
- doorlopend: 1–2–3–4–5–6–7–8
- uitdagend: 1–2–4–5–6–8–U1–U2

De twee grafieken tonen de uitwijking als functie van de tijd van twee slingers. De ene slinger is 30 cm lang, de andere slinger is 60 cm lang.

De slingertijd T in seconden hangt af van de lengte l van de slinger in meters. De formule is

bij benadering $T = 2\sqrt{l}$. De schaal op de horizontale as is in beide grafieken hetzelfde. In beide grafieken is m de maximale uitwijking.

- Hoe kun je beredeneren welke grafiek bij de kortere slinger hoort?



- 1 Een stemvork geeft een toon met frequentie 440 hertz, dat wil zeggen 440 trillingen per seconde. Voor de trilling van de uiteinden van de stemvork geldt $u = \sin(880\pi t)$, met de uitwijking u in mm en de tijd t in seconden.
- Geef de periode van u .
 - Wat is het verband tussen de periode en het aantal trillingen per seconde?
 - Geef een formule voor de uitwijking van een stemvork met 600 trillingen per seconde.

Theorie

Als de grafiek van een trilling een sinusoïde is, dan is er sprake van een **harmonische trilling**.

Bij trillingen wordt de periode ook de **trillingstijd** genoemd.

Naast de trillingstijd T wordt ook vaak gesproken over de **frequentie**, dat wil zeggen het aantal trillingen per tijdseenheid. De eenheid voor het aantal trillingen per seconde is hertz (Hz). Voor de periode T en frequentie f geldt: $f = \frac{1}{T}$

Als T de trillingstijd is dan voldoet de uitwijking u aan een formule van de vorm $u = a \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ of $u = a \sin(2\pi f t)$. Hierin is $|a|$ de amplitude.

Voorbeeld

Geef de amplitude, de trillingstijd en de frequentie van een trilling met de formule $u = 2 \sin(10\pi t)$ met u in cm en t in seconden.

Oplossing

De amplitude is 2 cm.

De frequentie f volgt uit $2\pi f = 10\pi$, dus de frequentie is 5 hertz.

Voor de trillingstijd T geldt

$$T = \frac{2\pi}{10\pi} = 0,2 \text{ ofwel } \frac{1}{5} \text{ seconde.}$$

- 2** Bereken de amplitude, de frequentie en de trillingstijd van de harmonische trillingen die voldoen aan de gegeven formules. De tijdseenheid t is in seconden en de uitwijking u is in mm.

H

a $u = \sin(500\pi t)$ **c** $u = \cos(256\pi t)$
b $u = 0,02\cos(300t)$ **d** $u = 9\sin(12\pi(t - 2))$

- 3** Gegeven is de harmonische trilling met formule $u = 6\sin(4t)$. Hierin is u uitgedrukt in mm en t in seconden.

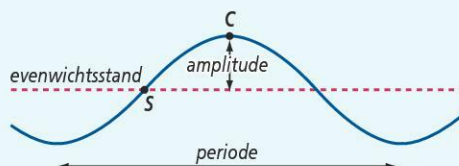
- a** Van deze trilling wordt de frequentie verdubbeld.
 Hoe verandert de formule?
b Van de oorspronkelijke trilling wordt de frequentie met 50% verhoogd.
 Geef een formule van deze trilling.

Theorie

Bij het opstellen van een functievoorschrift bij een gegeven sinusoïde moet je letten op de periode, de amplitude, de evenwichtsstand en de horizontale verschuiving. Het functievoorschrift heeft de vorm $f(x) = d + a\sin(b(x - c))$ of $f(x) = d + a\cos(b(x - c))$. De evenwichtsstand is $y = d$, de

amplitude is $|a|$, $b = \frac{2\pi}{\text{periode}}$

Bij een sinusfunctie is c de x -coördinaat van het punt waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat. Bij een cosinusfunctie is c de x -coördinaat van een hoogste punt van de grafiek.



Voorbeeld

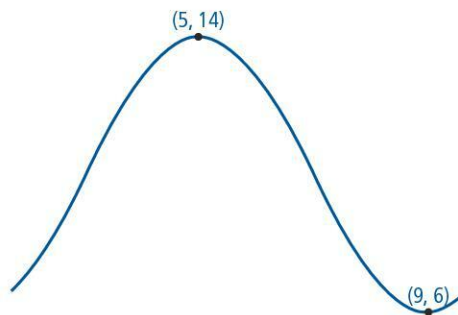
Een sinusoïde heeft als toppen $(5, 14)$ en $(9, 6)$. Stel een passend functievoorschrift op.

Oplossing

De evenwichtsstand is $y = \frac{1}{2}(14 + 6) = 10$ en de amplitude is $14 - 10 = 4$. De halve periode is $9 - 5 = 4$, dus de periode is 8.

$a = 4$, $d = 10$ en $b = \frac{2\pi}{8} = \frac{1}{4}\pi$.

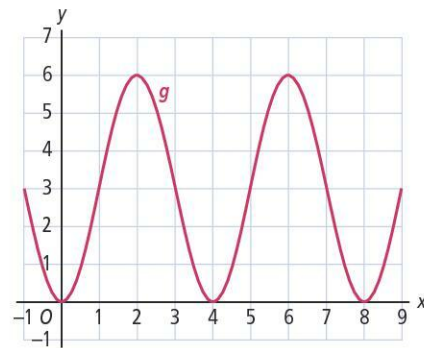
$(5, 14)$ is een hoogste punt van de grafiek, dus een passend functievoorschrift is $f(x) = 10 + 4\cos(\frac{1}{4}\pi(x - 5))$.



- 4** Stel een functievoorschrift met een sinus op bij de sinusoïde van het voorbeeld.

Ondersteunende route → maak opdracht O5

- 5** Stel een passend functievoorschrift op.
- H** **a** Twee opeenvolgende toppen van een sinusoïde zijn $(-7, 14)$ en $(1, 13)$.
- b** Van een sinusoïde is het punt $(-5, 2)$ een top, is de periode 12 en is de evenwichtsstand $y = -2$.
- c** Bij de grafiek die hier is afgebeeld.



- 6** Bij een harmonische trilling is de maximale uitwijking 7 cm en de frequentie is 20 hertz. Stel een functievoorschrift op voor de uitwijking u als functie van de tijd t .
- 7** Het menselijk oor kan slechts tonen horen waarvan de frequenties liggen tussen 20 en 20 000 hertz. Neem aan dat voor zo'n trilling geldt: $u = \sin(bt)$.
- a** Welke positieve waarden van b horen hierbij?
- b** Als een toon een kwint hoger wordt gemaakt (bijvoorbeeld C wordt G) dan wordt de frequentie 1,5 maal zo groot. Hoe verandert in dit geval de waarde van b ?
- 8** Een sterk vereenvoudigd model van de getijdebeweging is te beschrijven met de formule $h = m + a\sin(bt)$. Hierin is m de gemiddelde waterhoogte in meters en is t de tijd in uren. De periode is 12 uur en 25 minuten.
- a** Toon aan dat $b \approx 0,506$.
- b** Neem $m = 5$ en $a = 3$. Gedurende hoeveel uur per periode is de waterhoogte meer dan 4 meter? Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

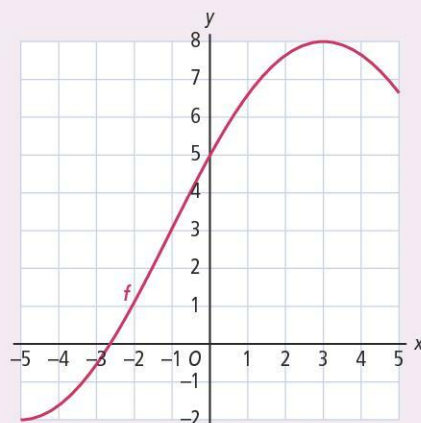


Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2

Ondersteunende opdrachten

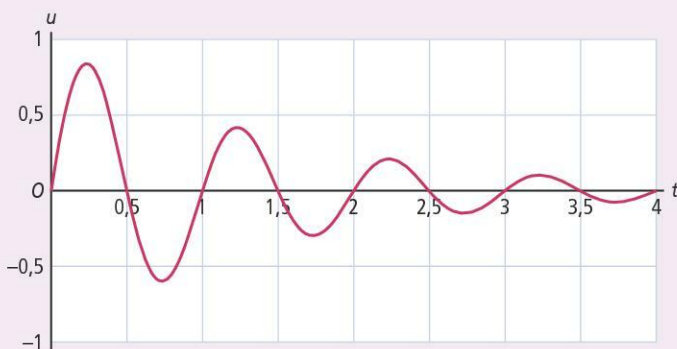
05 Op een sinusöide liggen de toppen $(-5, -2)$ en $(3, 8)$. Je gaat een functievoorschrift $f(x) = d + a \sin(b(x - c))$ bij deze sinusöide opstellen.

- Leg uit dat de periode gelijk is aan 16.
- Geef de waarden van d en van a .
- Bereken de waarde van b .
- De sinusöide gaat stijgend door de evenwichtstand in punt dat midden tussen de twee gegeven toppen ligt. Welke coördinaten heeft dit punt en wat is dus de waarde van c ?
- Noteer het functievoorschrift.



Uitdagende opdrachten

- U1**
- Plot en schets de grafiek van de functie $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$.
 - De grafiek van f blijkt een sinusöide te zijn. Geef een functievoorschrift voor f in de vorm $f(x) = d + a \sin(b(x - c))$. Geef de waarden van a , b , c en d in twee decimalen.
 - Voer de opdrachten a en b ook uit voor de functie $g(x) = \sin(x) - \cos(x)$.



- U2**
- De formule $u = 2^{-t} \cdot \sin(2\pi t)$ beschrijft een zogenaamde gedempte trilling.
- Leg uit waarom de grafiek bij deze trilling geheel tussen de grafieken van $f(t) = 2^{-t}$ en $g(t) = -2^{-t}$ ligt.
 - Onderzoek of de gemeenschappelijke punten van de grafiek van u met de grafieken van f of g toppen van de grafiek van u zijn. Verklaar je antwoord.

17.2 Goniometrische formules

Je leert

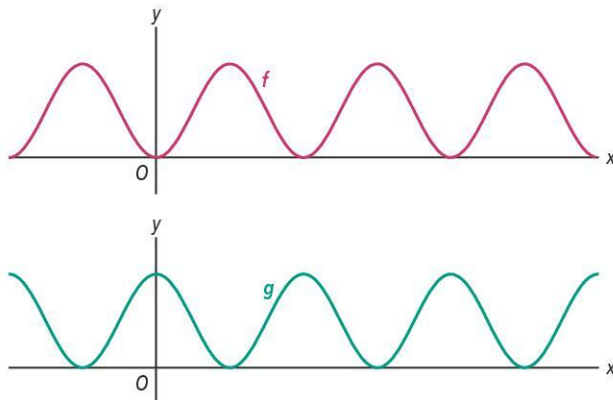
- hoe je goniometrische formules herschrijft
- hoe je de formule $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ gebruikt om exacte waarden van $\sin(x)$ of $\cos(x)$ te berekenen

Leerroutes

- ondersteunend: 9—10—11—012—12—13—014—15
- doorlopend: 9—10—11—12—13—14—15—16
- uitdagend: 9—10—11—12—14—15—16—U3

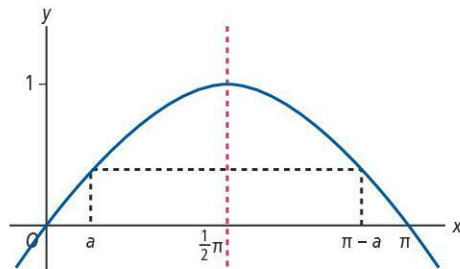
Gegeven zijn de grafieken van $f(x) = \sin^2(x)$ en $g(x) = \cos^2(x)$.

- Hoe ziet de grafiek van $h(x) = f(x) + g(x)$ er uit?

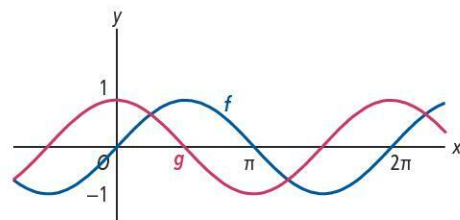


- 9 a Plot de grafieken van $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \sin(x + \pi)$. Welk verband is er tussen $\sin(x)$ en $\sin(x + \pi)$?
- b Onderzoek het verband tussen $\cos(x)$ en $\cos(x + \pi)$.

- 10 De grafiek van $f(x) = \sin(x)$ is getekend op het interval $[0, \pi]$.
- a Leg uit dat voor elke waarde van a geldt: $\sin(\pi - a) = \sin(a)$.
- b Maak een schets van de grafiek van $g(x) = \cos(x)$ op het interval $[-\pi, 2\pi]$.
- c Geldt de formule van opdracht a ook als je sinus vervangt door cosinus?
- d Leg uit dat voor elke waarde van a geldt $\cos(-a) = \cos(a)$.



- 11 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$.
- a Door welke translatie gaat de grafiek van g over in de grafiek van f ?
- b Uit opdracht a volgt dat $\sin(x) = \cos(x \dots \dots)$ voor elke waarde van x . Wat moet er op de puntjes worden ingevuld?
- c Leg uit dat $\cos(x) = \sin(x + \frac{1}{2}\pi)$ voor elke waarde van x .



Theorie

Goniometrische formules

Uit de symmetrie van de grafieken volgt:

$$\begin{array}{ll}\sin(-x) = -\sin(x) & \cos(-x) = \cos(x) \\ \sin(\pi - x) = \sin(x) & \cos(\pi - x) = -\cos(x)\end{array}$$

Uit de translatie van de grafieken volgt:

$$\begin{array}{ll}\sin(x + \pi) = -\sin(x) & \cos(x + \pi) = -\cos(x) \\ \sin(x) = \cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) & \cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) \\ \sin(x + 2\pi) = \sin(x) & \cos(x + 2\pi) = \cos(x)\end{array}$$

Verder geldt $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Voorbeeld

Schrijf $\sin(2x - \frac{1}{3}\pi)$ in de vorm $\cos(px + q)$.

Oplossing

Gebruik de formule $\sin(x) = \cos(x - \frac{1}{2}\pi)$ en

vervang x door $2x - \frac{1}{3}\pi$.

$$\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = \cos((2x - \frac{1}{3}\pi) - \frac{1}{2}\pi)$$

$$\text{ofwel } \sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = \cos(2x - \frac{5}{6}\pi)$$

Ondersteunende route → maak opdracht 012

12 Gebruik de goniometrische formules en schrijf

H

- a $\sin(x + \frac{1}{4}\pi)$ in de vorm $\cos(px + q)$.
- b $\cos(1\frac{1}{3}\pi - x)$ in de vorm $\sin(px + q)$.
- c $-\cos(2x - \frac{1}{3}\pi)$ in de vorm $\sin(px + q)$.
- d $-\sin(2(x + \frac{1}{4}\pi))$ in de vorm $\cos(px + q)$.

- 13**
- a Toon aan dat de functies $f(x) = \cos(2x - \frac{5}{6}\pi)$ en $g(x) = \sin(1\frac{1}{3}\pi - 2x)$ hetzelfde zijn.
 - b Beantwoord opdracht a ook voor de functies $f(x) = \sin(1\frac{3}{4}\pi - 3x)$ en $g(x) = -\cos(3x - \frac{1}{4}\pi)$.

Theorie

De formule $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ gebruik je om de exacte waarde van $\cos(x)$ te berekenen, als de waarde van $\sin(x)$ bekend is, of andersom.

Voorbeeld

Bereken exact de waarde van $\cos(x)$ als $\sin(x) = -\frac{1}{3}$ en $1\frac{1}{2}\pi < x < 2\pi$.

Oplossing

Invullen van $\sin(x) = -\frac{1}{3}$ in $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ geeft $\frac{1}{9} + \cos^2(x) = 1$.

Uit $\cos^2(x) = \frac{8}{9}$ volgt $\cos(x) = \sqrt{\frac{8}{9}}$ of $\cos(x) = -\sqrt{\frac{8}{9}}$.

Je kunt $\sqrt{\frac{8}{9}}$ eventueel herleiden: $\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$.

Omdat $1\frac{1}{2}\pi < x < 2\pi$ is $\cos(x)$ positief, dus $\cos(x) = \frac{2}{3}\sqrt{2}$.

Ondersteunende route → maak opdracht 014

- 14** Bereken exact de waarde van $\sin(x)$ of $\cos(x)$ als:

- H**
- a** $\sin(x) = \frac{2}{5}$ met $0 < x < \frac{1}{2}\pi$
 - b** $\cos(x) = -\frac{7}{25}$ met $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$
 - c** $\cos(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{5}$ met $\pi < x < 1\frac{1}{2}\pi$
 - d** $\sin(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{15}$ met $1\frac{1}{2}\pi < x < 2\pi$

- 15** Van een getal a is gegeven dat $\sin(a) = 3\cos(a)$.

Gebruik de formule $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ om de waarden van $\sin(a)$ en $\cos(a)$ exact te berekenen.

- 16** De grafiek van $f(x) = \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$ wordt gespiegeld in de x -as, daarna π naar rechts verschoven en ten slotte met 2 vermenigvuldigd ten opzichte van de y -as.

- a** De beeldgrafiek is de grafiek van de functie g .
Stel een functievoorschrift van g op.
- b** Schrijf dit functievoorschrift in de vorm $g(x) = a\cos(b(x - c)) + d$.

Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

012 In deze opdracht ga je $\cos(1\frac{3}{4}\pi - 2x)$ in de vorm $\sin(px + q)$ schrijven. Je gebruikt de regel $\cos(x) = \sin(x + \frac{1}{2}\pi)$.

- Vervang in deze regel x door $1\frac{3}{4}\pi - 2x$ en vul stap 1 in.
- Werk in stap 2 de haakjes weg.
- Maak in stap 3 de berekening af.
- Schrijf $\sin(-x + \frac{2}{3}\pi)$ in de vorm $\cos(px + q)$.

☐	$\cos(1\frac{3}{4}\pi - 2x) = \sin((\dots) + \frac{1}{2}\pi)$	1
☐	$\cos(1\frac{3}{4}\pi - 2x) = \sin(\dots + \frac{1}{2}\pi)$	2
☐	$\cos(1\frac{3}{4}\pi - 2x) = \sin(\dots + \dots)$	3

014 Gegeven is $\cos(x) = -\frac{1}{4}$ met $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$.
Je gaat $\sin(x)$ exact berekenen.

- Bereken $\cos^2(x)$ en vul stap 1 in.
- Vul stap 2 en stap 3 in.
- Is $\sin(x)$ positief of negatief op het gegeven interval?
- Welke waarde heeft $\sin(x)$?

☐	$\sin^2(x) + \dots = 1$	1
☐	$\sin^2(x) = \dots$	2
☐	$\sin(x) = \dots$ of $\sin(x) = \dots$	3
☐	$\sin(x) = \dots$	4

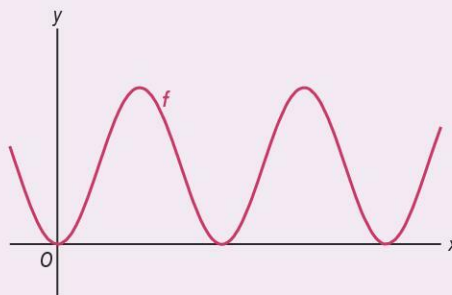
Bereken exact de waarden van $\sin(x)$ of $\cos(x)$ als:

- $\sin(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{5}$ met $1\frac{1}{2}\pi < x < 2\pi$
- $\cos(x) = -\frac{12}{13}$ met $\pi < x < 1\frac{1}{2}\pi$
- $\cos(x) = \frac{1}{10}$ met $0 < x < \frac{1}{2}\pi$
- $\sin(x) = \frac{1}{7}\sqrt{48}$ met $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$

Uitdagende opdrachten

U3 Gegeven is de functie $f(x) = \sin^2(x)$.

- De grafiek van f lijkt een sinusoïde te zijn. Geef de amplitude en de periode van f .
- Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f uit de grafiek van de functie $g(x) = \sin(x)$?
- Stel een functievoorschrift op voor f met de vorm $f(x) = d + a\cos(b(x - c))$.
- Bij welke transformatie is de grafiek van $h(x) = \cos^2(x)$ het beeld van de grafiek van f ?
- Stel een functievoorschrift op voor h in de vorm $h(x) = d + a\sin(b(x - c))$.



17.3 Vergelijkingen oplossen

Je leert

- hoe je vergelijkingen van de vormen $\sin(A) = \sin(B)$, $\cos(A) = \cos(B)$ en $\sin(A) = \cos(B)$ oplost
- hoe je vergelijkingen oplost waarin $\sin^2(x)$ of $\cos^2(x)$ voorkomt

Leerroutes

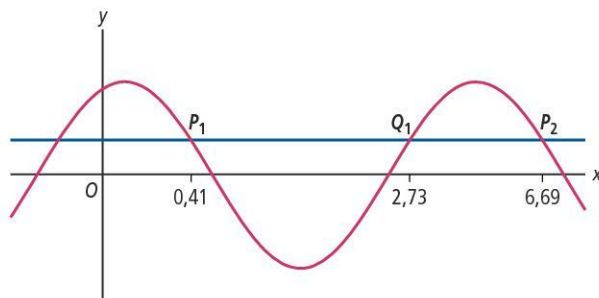
- ondersteunend: 17–018–19–20–21–22–023–23
- doorlopend: 17–18–19–20–21–22–23–24
- uitdagend: 18–19–20–21–22–23–24–U4

Een sinusöide wordt gesneden door een horizontale lijn.

De snijpunten zijn P_1 , Q_1 , P_2 , Q_2 enzovoort.

De x -coördinaten van de eerste drie snijpunten staan in de tekening.

- Wat is de x -coördinaat van Q_2 ?
- Hoe bereken je de x -coördinaat van Q_{30} ?



17 Gegeven is de vergelijking $\sin\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

a Omdat $\frac{1}{2}\sqrt{3} = \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)$ bereken je één rij oplossingen met

$$2x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi.$$

Laat zien dat hieruit volgt $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$.

b De andere rij oplossingen volgt uit $2x - \frac{1}{6}\pi = \pi - \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$.
Verklaar dit en bereken de andere rij oplossingen.

c Los op $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ exact op $\cos(x) = \frac{1}{2}$.

d Schrijf de oplossingen van $\cos(x) = \frac{1}{2}$ op het domein $\mathbb{R}$ in de vorm $x = \dots + k \cdot \dots$ of $x = \dots + k \cdot \dots$.

Theorie

De oplossingen van de vergelijking $\sin(A) = \sin(B)$ vind je met $A = B + k \cdot 2\pi$ en $A = \pi - B + k \cdot 2\pi$ met k een geheel getal.

De oplossingen van $\cos(A) = \cos(B)$ vind je met

$A = B + k \cdot 2\pi$ en $A = -B + k \cdot 2\pi$ met k een geheel getal.

Voorbeeld 1

Los exact op $\sin(3x) = \sin(2x + \frac{1}{4}\pi)$.

Oplossing

$$3x = 2x + \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 3x = \pi - (2x + \frac{1}{4}\pi) + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 3x = -2x + \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 5x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{3}{20}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$$

Voorbeeld 2

Los exact op $\cos(3x) = \cos(\pi - \frac{1}{3}x)$.

Oplossing

$$3x = \pi - \frac{1}{3}x + k \cdot 2\pi \text{ of } 3x = -\pi + \frac{1}{3}x + k \cdot 2\pi$$

$$3\frac{1}{3}x = \pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2\frac{2}{3}x = -\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{3}{10}\pi + k \cdot \frac{3}{5}\pi \text{ of } x = -\frac{3}{8}\pi + k \cdot \frac{3}{4}\pi$$

18 Los exact op.

- H** a $\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ d $\cos\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$
 b $\sin(2x) = \sin(3x)$ e $\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$
 c $\sin(4x - \pi) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$ f $\cos\left(\frac{2}{3}\pi x\right) = \cos(3\pi - \pi x)$

19 Als er een min-teken vóór een sinus of cosinus staat, kun je gebruik maken van de formules $-\sin(x) = \sin(x + \pi)$ of $-\cos(x) = \cos(x + \pi)$.

Los exact op.

- a $\sin(x) = -\sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$ c $\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{4}\pi - 2x\right)$
 b $\cos\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) = -\cos(3x)$ d $\sin(3x) = -\sin\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right)$

20 Gegeven is de vergelijking $\sin\left(3x - \frac{1}{6}\pi\right) = \cos(2x)$.

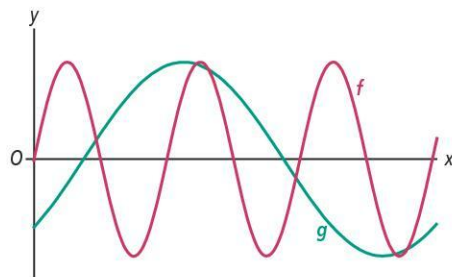
- H** a Door gebruik te maken van de formule $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$ kun je de vergelijking schrijven als $\cos\left(3x - \frac{2}{3}\pi\right) = \cos(2x)$.
 Los deze vergelijking exact op.

Los ook exact op.

- b $\sin(2x) = \cos(x)$ d $\sin(4x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$
 c $\cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) = \sin(2x)$ e $\cos\left(x - 1\frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)$

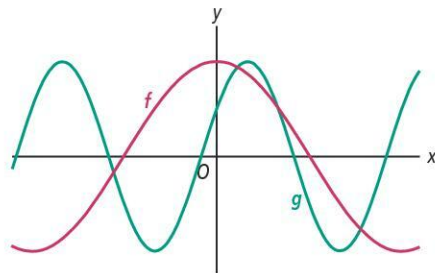
21 Gegeven zijn de grafieken van $f(x) = \sin(3x)$ en $g(x) = \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$ op het interval $[0, 2\pi]$.

Bereken exact de x -coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g op dit interval.



22 Gegeven zijn de functies $f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ en $g(x) = \sin\left(x + \frac{1}{6}\pi\right)$ op het interval $[-2\pi, 2\pi]$.

Bereken exact de x -coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g op dit interval.



Theorie

Vergelijkingen die termen met $\sin^2(x)$ of $\cos^2(x)$ bevatten kun je soms met een substitutie of met ontbinden in factoren aanpakken.

Verder moet je in sommige gevallen gebruik maken van $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ om dergelijke vergelijkingen op te lossen.

Voorbeeld

Los exact op $2\sin^2(x) + 3\cos(x) = 3$.

Oplossing

Omdat $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ herleid je de vergelijking tot $2 - 2\cos^2(x) + 3\cos(x) - 3 = 0$.

$$-2\cos^2(x) + 3\cos(x) - 1 = 0$$

$$2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 = 0$$

Stel $\cos(x) = p$, de vergelijking wordt $2p^2 - 3p + 1 = 0$.

Met de *abc*-formule vind je $p = 1$ of $p = \frac{1}{2}$.

$\cos(x) = 1$ geeft $x = 0 + k \cdot 2\pi$ en

$\cos(x) = \frac{1}{2}$ geeft $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$.

Ondersteunende route → maak opdracht O23

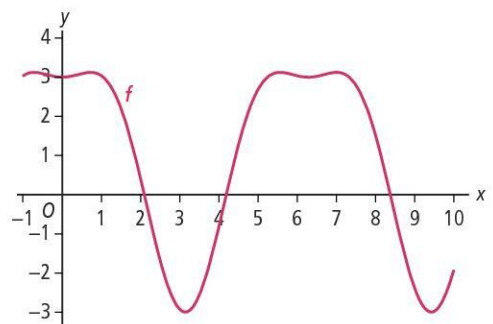
23 Los exact op.

- H**
- a $2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 = 0$
 - b $3\cos(x) - 2\sin^2(x) = 0$
 - c $\sin^2(\frac{1}{2}x) = 1 + 2\cos(\frac{1}{2}x)$
 - d $\cos^2(x) + 2\cos(x) + 1 = 0$

24 Gegeven is de functie $f(x) = 3\cos(x) + 2\sin^2(x)$.

- a Beredeneer waarom de functiewaarden in het interval $[-3, 5]$ moeten liggen.
- b Bereken exact de nulpunten van f .
- c Los exact op $f(x) = 3$.

Uitdagende route → maak opdracht U4



Ondersteunende opdrachten

018 Je gaat de vergelijking $\sin(3x - \frac{1}{2}\pi) = \sin(\frac{1}{2}x)$ exact oplossen.

- a Vul stap 1 verder in.
- b Vul stap 2 in.
- c Verklaar het getal $\frac{4}{5}$ in stap 3.
- d Maak stap 3 af.

Uit $\sin(A) = \sin(B)$ volgt $A = B + k \cdot 2\pi$ of $A = \pi - B + k \cdot 2\pi$.	
$3x - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}x + k \cdot 2\pi$ of $3x - \frac{1}{2}\pi = \dots + k \cdot 2\pi$	1
$2\frac{1}{2}x = \dots + k \cdot 2\pi$ of $\dots x = \dots + k \cdot 2\pi$	2
$x = \dots + k \cdot \frac{4}{5}\pi$ of $\dots x = \dots + k \cdot \dots$	3

Los exact op.

- e $\cos(2x - \frac{1}{4}\pi) = \cos(\frac{1}{2}x)$
- f $\cos(2x) = \cos(3x - \frac{1}{3}\pi)$
- g $\sin(5x - \pi) = \sin(x - \frac{1}{2}\pi)$
- h $\cos(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
- i $\cos(x + \frac{1}{3}\pi) = \cos(\frac{1}{6}\pi - x)$
- j $\sin(\frac{3}{4}\pi x) = \sin(2\pi + \pi x)$

023 Je gaat de vergelijking $2\cos^2(2x) + \sin(2x) - 1 = 0$ exact oplossen.

- a Welke regel is gebruikt om de vergelijking in stap 1 te krijgen?
- b Wat is er in stap 2 gebeurd?
- c Stel $\sin(2x) = p$. De vergelijking wordt $2p^2 - p - 1 = 0$.
Los deze vergelijking op en vul stap 4 in.
- d Vul de waarden van $\sin(2x)$ in bij stap 5.
- e Maak de berekening af.

$-2\sin^2(2x) + \sin(2x) + 1 = 0$	1
$2\sin^2(2x) - \sin(2x) - 1 = 0$	2
$2p^2 - p - 1 = 0$	3
$p = \dots$ of $p = \dots$	4
$\sin(2x) = \dots$ of $\sin(2x) = \dots$	5
$2x = \dots + k \cdot 2\pi$ of $2x = \dots$ of	6
$x = \dots + k \cdot \pi$ of $x = \dots$ of	7

Uitdagende opdrachten

U4 Los exact op.

- a $16\cos^4(x) - 8\sin^2(x) = -5$
- b $\frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- c $\cos^4(x) - \sin^4(x) = \frac{1}{2}$

17.4 Differentiëren

Je leert

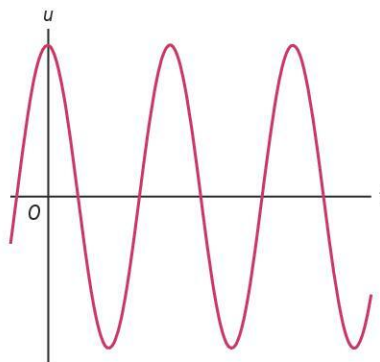
- hoe je sinusfuncties en cosinusfuncties differentieert

Leerroutes

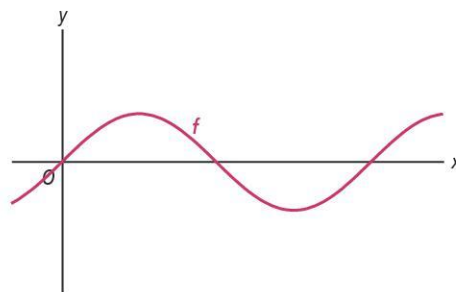
- ondersteunend: 25—026—027—27—28—29—30—31—32—33
- doorlopend: 25—26—27—28—29—30—31—32—33—34
- uitdagend: 25—26—27—28—30—31—33—35—U5—U6

De uitwijking u van een slinger ten opzichte van een verticale lijn wordt gegeven door de formule $u = 5 \cdot \cos(2\pi t)$ met u in cm en de tijd t in seconden.

- Op welke tijdstippen is de horizontale snelheid van de slinger het grootst?



- 25 Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \sin(x)$.
- Bij welke waarden van x is de helling gelijk aan 0?
 - Benader $f'(0)$ met je rekenmachine.
 - Schets de grafiek van f' op het interval $[0, 2\pi]$.
 - Wat is vermoedelijk het functievoorschrift van f' ?
 - Beantwoord de opdrachten c en d ook voor de functie $g(x) = \cos(x)$.



Theorie

De afgeleide van $f(x) = \sin(x)$ is $f'(x) = \cos(x)$.

De afgeleide van $g(x) = \cos(x)$ is $g'(x) = -\sin(x)$.

Voorbeeld 1

Differentieer $f(x) = \cos^3(x)$.

Oplossing

$$f(x) = \cos^3(x), \text{ dus}$$

$$f'(x) = 3(\cos(x))^2 \cdot -\sin(x) \text{ (kettingregel)}$$

$$\text{ofwel } f'(x) = -3\cos^2(x) \cdot \sin(x).$$

Voorbeeld 2

Differentieer $g(x) = x^2 \cdot \cos(3x)$.

Oplossing

$$g'(x) = 2x \cdot \cos(3x) + x^2 \cdot -\sin(3x) \cdot 3$$

(productregel en kettingregel)

$$\text{ofwel } g'(x) = 2x \cos(3x) - 3x^2 \sin(3x).$$

Ondersteunende route → maak opdracht 026

26 Differentieer.

a $f(x) = \sqrt{\sin(x) + 1}$

d $l(x) = 3\cos(\frac{1}{3}x)$

b $k(x) = \ln(\cos(x))$

e $m(x) = \sin^2(3x)$

c $g(x) = \frac{1}{2} \cos^2(x)$

f $n(x) = e^{x+2\cos(x)}$

Ondersteunende route → maak opdracht 027

27 Differentieer.

H a $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

c $h(x) = x^3 \sin(x)$

b $g(x) = \frac{x}{\sin(x)}$

d $k(x) = \frac{x}{\cos^2(2x)}$

28 a Gegeven is de functie $f(x) = \frac{\cos(3x)}{\sin(3x)}$

Laat zien dat $f'(x) = \frac{-3}{\sin^2(3x)}$

Differentieer.

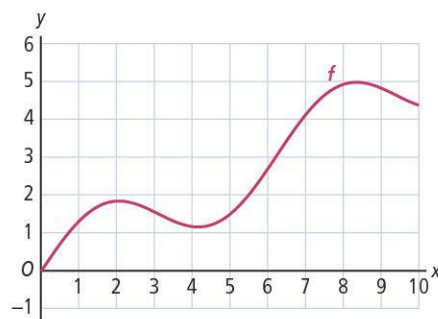
b $f(x) = x^2 \cdot \sin(2x)$

c $g(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{\sin(3x)}$

29 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x + \sin(x)$.

a Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek van f op het interval $[0, 3\pi]$.

b Bereken exact de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van f op het interval $[0, 3\pi]$.



30 Op het interval $[0, 2\pi]$ zijn gegeven de functies

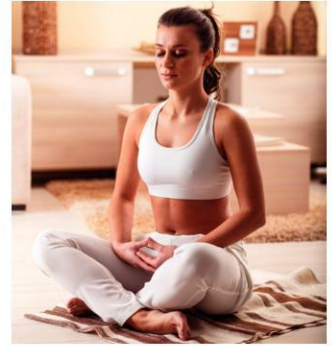
$f(x) = \frac{3}{1 + \sin(x)}$ en $g(x) = 4\sin(x)$.

a Geef een vergelijking van de asymptoot van de grafiek van f .

b Bereken exact de extreme waarden van f .

c Los exact op $f(x) \leq g(x)$.

- 31** Tijdens de ademhaling verandert de luchtdruk in de longen. Voor een persoon in rust wordt de luchtdruk p in de longen redelijk benaderd door $p(t) = -20\sin(0,4\pi t)$ met t in seconden.
- Bereken de periode van deze functie.
 - Bereken $p'(1)$. Ademt de persoon op het tijdstip $t = 1$ in of uit?
 - Hoe groot is de maximale snelheid waarmee de luchtdruk toeneemt of afneemt? Op welke tijdstippen komt dit voor?
- 32** Gegeven is de functie $f(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$ op het interval $[0, 2\pi]$.
- H**
- Plot en schets de grafiek van f .
 - Bereken exact de extreme waarden van f .
 - De functie is hetzelfde als de functie $g(x) = \sin(bx)$. Welke waarde heeft b ?
- 33** Gegeven is de familie van functies $f_{a,b}(x) = a\sin(bx)$ en de lijn $l: y = 3x$.
- Lijn l raakt de grafiek van $f_{a,b}$ in het punt $(0, 0)$. Wat weet je nu over de waarden van a en b ?
 - Geef de waarden van a en b als bovendien gegeven is dat het maximum van $f_{a,b}$ gelijk is aan 5.
- 34** Gegeven is de functie $f(x) = 2\sin^3(x)$ op het interval $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$.
- Bereken exact de extreme waarden van f .
 - Toon aan dat de punten waarin de grafiek van f de x -as snijdt tevens buigpunten van de grafiek zijn.
 - Laat met een berekening zien, dat de grafiek van f ook buigpunten heeft voor de waarden van x waarvoor geldt $\cos^2(x) = \frac{1}{3}$.



Uitdagende route → maak opdracht U5 en U6

Ondersteunende opdrachten

- 026** Je gaat de functie $h(x) = \sin^3(x)$ differentiëren.
- Je kunt het functievoorschrift schrijven als $h(x) = f(g(x))$.
Als $g(x) = \sin(x)$, welke functie is dan $f(x)$?
 - Volgens de kettingregel is $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.
Bepaal $f'(g(x))$ en $g'(x)$.
 - Vul in: $h'(x) = \dots$

Differentieer.

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| d $f(x) = 7\cos(\frac{1}{2}x)$ | g $l(x) = 2\sin(\frac{1}{5}x)$ |
| e $k(x) = \ln(\sin(x))$ | h $m(x) = e^{\sin(x)}$ |
| f $n(x) = \cos(\ln(x))$ | i $p(x) = \sin(e^{2x})$ |

- 027** Je gaat de functie $f(x) = \frac{1}{2}x \cdot \sin(x)$ differentiëren.

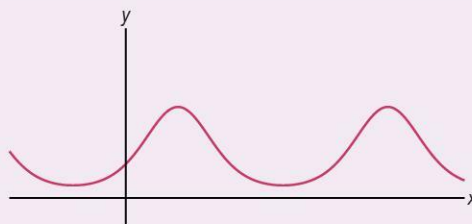
- Voer stap 1 uit.
- Vul de productregel in bij stap 2.
- Is het resultaat bij stap 2 te vereenvoudigen?
- Voer soortgelijke stappen uit voor de

$$\text{quotiëntfunctie } g(x) = \frac{\sin(x)}{\frac{1}{2} - \cos(x)}$$

Stel $f(x) = p(x) \cdot q(x)$.	
Bepaal $p'(x)$ en $q'(x)$.	1
$f'(x) = p'(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot q'(x)$	2
Vereenvoudig zo mogelijk.	3
Stel $g(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$	
dan $g'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$	

Uitdagende opdrachten

- U5** Gegeven is de functie $f(x) = e^{\sin(x)}$.
- Bereken exact de extreme waarden van f op het interval $[0, 2\pi]$.
 - Bepaal het functievoorschrift $f''(x)$.
 - Bereken exact de waarden van $\sin(x)$ waarvoor de grafiek van f een buigpunt heeft.
 - Bereken algebraïsch de coördinaten van de buigpunten die tussen $x = 0$ en $x = 2\pi$ liggen.
Rond af op twee decimalen.



- U6** Gegeven zijn $f(x) = \sin(x - \pi)$ en $g_a(x) = a + \cos(x)$.
- Bereken exact de waarden van a waarvoor de grafieken van f en g_a elkaar raken.
 - Bereken de waarden van a waarvoor de grafieken van f en g_a geen punten gemeenschappelijk hebben.

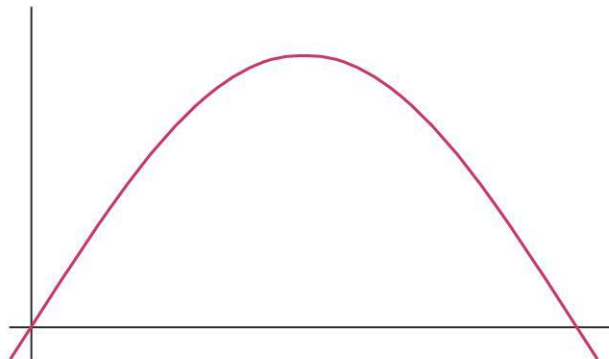
Je leert

- hoe je sinusfuncties en cosinusfuncties primitiveert

Leerroutes

- ondersteunend: 35—36—37—38—39—40—41—042—43—44
- doorlopend: 35—36—37—38—39—40—41—42—43—44
- uitdagend: 35—36—38—39—40—42—43—44—U7—U8

De grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2}\pi \cdot \sin(x)$ is getekend op het interval $[0, \pi]$. De oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek en de x -as kun je benaderen door een halve cirkel met middelpunt $(\frac{1}{2}\pi, 0)$ en straal $\frac{1}{2}\pi$ of door een driehoek met basis π en hoogte $\frac{1}{2}\pi$.
De exacte oppervlakte van dit gebied is π .
• Welke benadering is beter?



35 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$.

- Differentieer f .
- Geef een primitieve van g .
- Differentieer g .
- Geef een primitieve van f .

Theorie

Een primitieve van $f(x) = \sin(x)$ is $F(x) = -\cos(x)$.

Een primitieve van $g(x) = \cos(x)$ is $G(x) = \sin(x)$.

Een primitieve van $f(x) = \sin(px)$ is $F(x) = -\frac{1}{p} \cos(px)$.

Een primitieve van $g(x) = \cos(px)$ is $G(x) = \frac{1}{p} \sin(px)$.

Voorbeeld

Geef een primitieve van $f(x) = 2\sin(5x)$ en van $g(x) = 3\cos(2x)$.

Oplossing

$$F(x) = 2 \cdot -\frac{1}{5} \cos(5x) \text{ ofwel } F(x) = -\frac{2}{5} \cos(5x)$$

$$G(x) = 3 \cdot \frac{1}{2} \sin(2x) \text{ ofwel } G(x) = 1\frac{1}{2} \sin(2x)$$

36 Geef een primitieve van elke functie.

a $f(x) = \sin(x) + \cos(2x)$

b $g(x) = \sin(2x) - \cos(3x)$

c $h(x) = 2 - 3\sin(4x)$

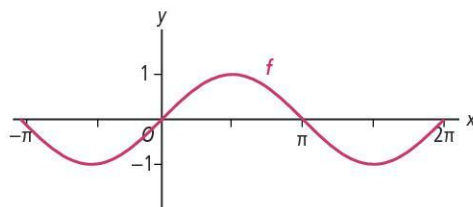
d $k(x) = -3\sin(5x) + 4\cos(2x)$

37 Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$.

a Bereken exact $\int_0^{\pi} f(x) dx$, $\int_0^{2\pi} f(x) dx$ en $\int_{-\pi}^0 f(x) dx$.

b Geef met behulp van de grafiek een verklaring voor het verband tussen de antwoorden bij opdracht a.

c De lijn $l: y = \frac{1}{2}$ snijdt de grafiek van f op het interval $[0, 2\pi]$ in twee punten.
Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door l en de grafiek van f .



38 Primitiveer.

H **a** $f(x) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ **c** $h(x) = \pi \sin(2\pi x)$
b $g(x) = 2 - 3\cos(4 - 2x)$ **d** $l(x) = 3\sin(4x) + \cos(\pi - x)$

39 Gegeven is de functie $f(x) = 2\sin(x) \cdot \cos(x)$.

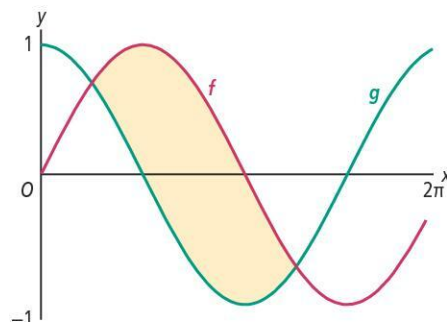
a Toon aan dat $F(x) = \sin^2(x)$ en $G(x) = -\cos^2(x)$ beide primitieve functies van f zijn.

b Verklaar, zonder te differentiëren, dat $F(x) = \sin^2(x)$ en $G(x) = -\cos^2(x)$ beide primitieve functies van f zijn.

40 Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ op het interval $[0, 2\pi]$.

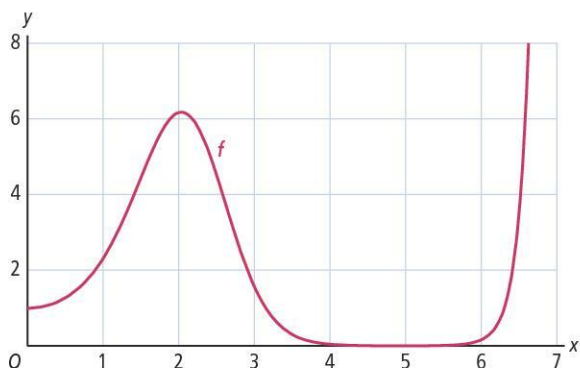
a Bereken exact de coördinaten van de beide snijpunten van deze grafieken.

b Bereken exact de oppervlakte van het gekleurde gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g .



41 Gegeven is de functie $f(x) = e^{x \sin(x)}$.

- Leg uit dat de grafiek geen gemeenschappelijke punten heeft met de x -as.
- Bereken in twee decimalen de oppervlakte van het gebied, dat wordt ingesloten door de x -as, de y -as, de grafiek van f en de lijn $x = 2\pi$.



Ondersteunende route → maak opdracht 042

42 Bereken exact de waarde van a .

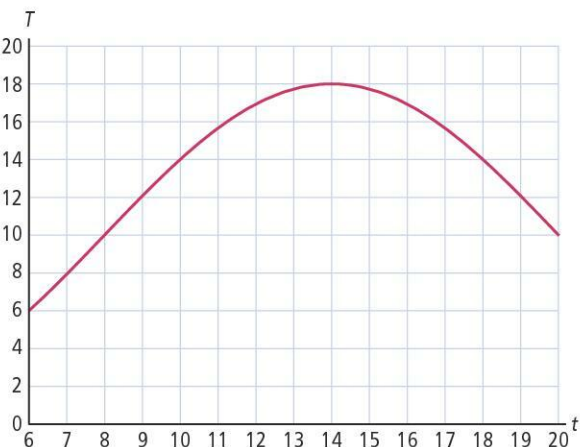
H

- $P(x) = a \cdot (3\sin(x) + 1)^{\frac{1}{2}}$ is een primitieve van $p(x) = \cos(x)\sqrt{3\sin(x) + 1}$.
- $Q(x) = \frac{a}{\sin^2(2x)}$ is een primitieve van $q(x) = \frac{4\cos(2x)}{3\sin^3(2x)}$

43 Gegeven is de formule $T = 10 + 8\cos\left(\frac{\pi}{12}(t - 14)\right)$

met T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ en t de tijd in uren.

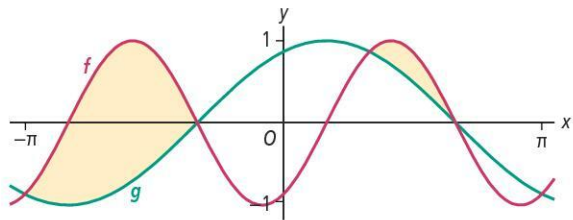
- Toon aan dat T maximaal is als $t = 14$.
- Bereken algebraïsch de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de lijnen $t = 6$ en $t = 18$, de grafiek van T en de t -as. Rond je antwoord af op twee decimalen.
- De oppervlakte die je in opdracht b hebt berekend, is gelijk aan de oppervlakte van een rechthoek die wordt ingesloten door de lijnen $t = 6$ en $t = 18$, de t -as en de horizontale lijn $T = C$, waarbij C een constante is. Bereken C .
- Welke betekenis heeft het getal C in deze situatie?



44 Gegeven zijn de functies $f(x) = \cos\left(2x - \frac{5}{6}\pi\right)$

en $g(x) = \cos\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)$.

- Los exact op $f(x) = g(x)$ op het interval $[-\pi, \pi]$.
- Bereken exact de oppervlakte van elk van de gekleurde gebieden die door de grafieken van f en g worden ingesloten.



Uitdagende route → maak opdracht U7 en U8

Ondersteunende opdrachten

- 042** Een primitieve van $f(x) = 3\sin(x) \cdot \cos^2(x)$ is $F(x) = a \cdot \cos^3(x)$. Je gaat de waarde van a berekenen.
- Differentieer F .
 - Omdat $F'(x) = f(x)$ kun je nu de waarde van a berekenen.
Voer die berekening uit.
 - Een primitieve van $g(x) = \sin^3(2x)\cos(2x)$ is $G(x) = a \cdot \sin^4(2x)$.
Bereken de waarde van a .
 - Een primitieve van $h(x) = \frac{\sin(\frac{1}{2}x)}{1 + 5\cos(\frac{1}{2}x)}$ is $H(x) = a \cdot \ln(1 + 5\cos(\frac{1}{2}x))$.
Bereken de waarde van a .

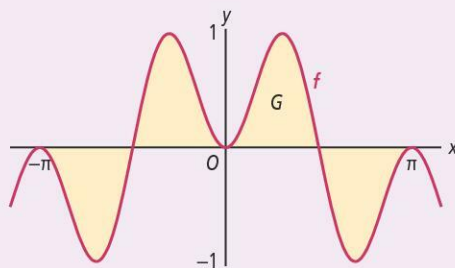
Uitdagende opdrachten

- U7** Gegeven zijn de functies $g_p(x) = \sin(px)$, met p geheel en positief.

Voor welke waarden van p geldt $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} g_p(x) dx = 0$?

- U8** Gegeven is de functie $f(x) = \sin^2(x) \cdot \cos(x)$.

- Leg uit waarom f een even functie is.
- Een primitieve van f is $F(x) = a \cdot \sin^3(x)$.
Bereken a .
- Bereken exact de oppervlakte van het gebied G , dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x -as.
- Op het interval $[-\pi, \pi]$ zijn er nog drie gebieden die worden ingesloten door de grafiek van f en de x -as. Toon met een redenering aan dat alle vier gebieden dezelfde oppervlakte hebben.



17.6 Tangensfunctie

Je leert

- wat de tangensfunctie is
- hoe je vergelijkingen van de vorm $\tan(A) = \tan(B)$ oplost

Leerroutes

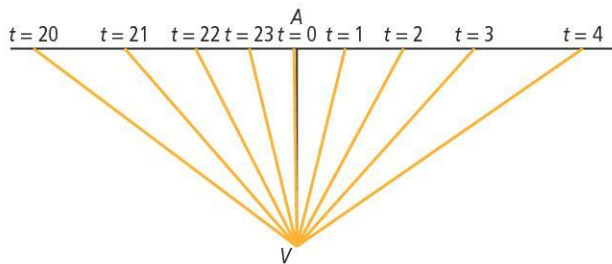
- ondersteunend: 45—46—47—48—49—050—051—52—53—54—55
- doorlopend: 45—46—47—48—49—50—51—52—53—54—55
- uitdagend: 45—46—47—48—50—51—52—53—54—55—U9

De lichtstraal van een vuurtoren draait in 24 seconden rond. De lichtbundel schijnt op de kademuur. VA is de kortste verbinding tussen vuurtoren en de muur. In de schets zie je een bovenaanzicht van de situatie.

u is de afstand tussen punt A en de plaats waar de lichtbundel de muur treft.

u is een functie van de tijd t in seconden.

- Hoe ziet de grafiek van u er uit?



- 45** a Plot en schets de grafiek van $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ op het interval $[-\pi, \pi]$.
- b Verklaar met behulp van het functievoorschrift dat de grafiek van f verticale asymptoten heeft en geef vergelijkingen van de asymptoten.
- c Geef de nulpunten en de periode van f .

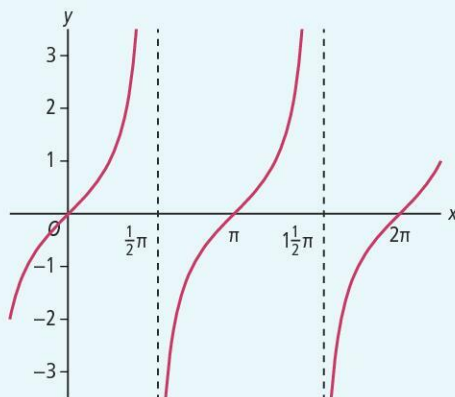
Theorie

De functie $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ heet de **tangensfunctie**.

Je schrijft deze functie als $f(x) = \tan(x)$.

Voor de tangensfunctie geldt:

- De nulpunten zijn dezelfde als die van de sinusfunctie.
- De periode is gelijk aan π .
- De grafiek heeft verticale asymptoten als $\cos(x) = 0$. De vergelijkingen van de verticale asymptoten zijn $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ met k geheel.
- De grafiek is puntsymmetrisch in onder andere $(0, 0)$.
- $\tan(-x) = -\tan(x)$ en $\tan(\pi + x) = \tan(x)$



- 46** a Je weet dat $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$ en $\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Toon aan dat $\tan\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.
- b Je kent nog enkele andere exacte waarden van de sinus en de cosinus. Gebruik deze om de tabel in te vullen.

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$
$\tan(x)$	...	...	...	...

47 Toon met behulp van de formule $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ aan dat de formules $\tan(-x) = -\tan(x)$ en $\tan(x + \pi) = \tan(x)$ juist zijn.

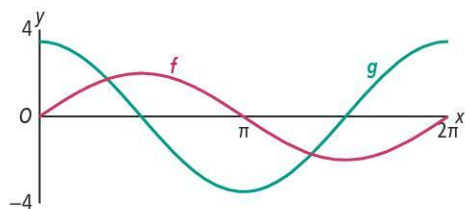
48 Gegeven is de functie $f(x) = 1 + \tan(x)$.

- Plot en schets de grafiek van f op het interval $[-\pi, \pi]$.
- Geef alle oplossingen van $f(x) = 4$ op $[-\pi, \pi]$. Rond af op twee decimalen.
- Los exact op $f(x) \leq 0$ op $[-\pi, \pi]$.

49 Op het interval $[0, 2\pi]$ zijn gegeven zijn de functies

$$f(x) = 2\sin(x) \text{ en } g(x) = 2\sqrt{3} \cdot \cos(x).$$

- Laat zien dat de vergelijking $f(x) = g(x)$ kan worden herleid tot $\tan(x) = \sqrt{3}$.
- Los de vergelijking exact op.
- Geef de coördinaten van de snijpunten.



Theorie

De oplossingen van vergelijkingen van de vorm $\tan(A) = \tan(B)$ vind je met $A = B + k \cdot \pi$. Bij het oplossen van vergelijkingen met de vorm $p\sin(A) = q\cos(A)$ kun je de tangens gebruiken.

Voorbeeld 1

Los exact op $\tan(3x) = \tan(x + \frac{1}{2}\pi)$.

Oplossing

$$3x = x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

Voorbeeld 2

Los exact op $6\sin(3x) = 2\sqrt{3}\cos(3x)$.

Oplossing

$$\sin(3x) = \frac{1}{3}\sqrt{3}\cos(3x)$$

$$\tan(3x) = \frac{1}{3}\sqrt{3} = \tan(\frac{1}{6}\pi)$$

$$3x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{18}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$$

Ondersteunende route → maak opdracht 050

50 Los exact op.

- | | | |
|----------|--|--|
| H | <ol style="list-style-type: none"> $\tan(-\frac{1}{2}x) = 1$ $\tan^2(x) = 3$ | <ol style="list-style-type: none"> $\tan^2(x) - 1\frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot \tan(x) + 1 = 0$ $2\tan(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ |
|----------|--|--|

Ondersteunende route → maak opdracht 051

51 Los exact op.

H

a $4\sin(3x) = -4\cos(3x)$

b $\cos\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = -\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right)$

c $\sqrt{3}\sin\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right)$

d $3\cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) = \sqrt{3}\sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$

52 a Gebruik de quotiëntregel om de afgeleide van $f(x) = \tan(x)$ te bepalen.b Toon aan dat $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ en laat zien dat ook geldt $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$.

Theorie

De afgeleide van $f(x) = \tan(x)$ is

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \text{ of ook } f'(x) = 1 + \tan^2(x).$$

53 Differentieer.

H

a $f(x) = 2\tan(3x)$

c $h(x) = \sin(x) \cdot \tan(x)$

b $g(x) = \ln(|\tan(x)|)$

d $k(x) = \frac{1}{\tan(x)}$

54 Gegeven is de functie $f(x) = \tan\left(\frac{1}{4}\pi x^2\right)$.a Laat zien dat het punt $P(1, 1)$ op de grafiek van f ligt.b Stel een vergelijking op van de raaklijn in $P(1, 1)$ aan de grafiek van f .55 a Toon aan dat $F(x) = -\ln|\cos(x)|$ een primitieve is van de functie $f(x) = \tan(x)$.b Bereken exact de oppervlakte van het gebied, dat wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijn met vergelijking $x = \frac{1}{4}\pi$.c Bereken exact de oppervlakte van het gebied, dat wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijn met vergelijking $x = \frac{2}{3}\pi$.

Uitdagende route → maak opdracht U9

Ondersteunende opdrachten

050 Je gaat de vergelijking $\tan(2x) = \tan\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$ exact oplossen.

a In stap 1 is de regel gebruikt:

Uit $\tan(A) = \tan(B)$ volgt $A = B + k \cdot \pi$.

Vul stap 2 in.

b Welk getal komt in stap 3 te staan in $k \cdot \dots \pi$?

c Maak de berekening af.

Los exact op.

d $\tan\left(\frac{1}{3}x\right) = -\sqrt{3}$

f $\tan(3x) = \tan\left(-x + \frac{1}{2}\pi\right)$

e $\tan^2(x) - 1 = 0$

g $2\sin(x) = \tan(x)$

☐	$\tan(2x) = \tan\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$	
☐	$2x = \frac{1}{2}\pi - x + k \cdot \pi$	1
☐	$3x = \dots + k \cdot \pi$	2
☐	$x = \dots + k \cdot \dots \pi$	3
☐		
☐		

051 Je gaat de vergelijking $3\sin(2x) = \sqrt{3}\cos(2x)$ exact oplossen.

a Laat zien dat de vergelijking herleid kan worden tot

$$\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

b Voor welke waarde van a uit het interval $[0, \frac{1}{2}\pi]$ geldt

$$\tan(a) = \frac{1}{3}\sqrt{3}?$$

c Los de vergelijking verder op.

Los exact op.

d $\sin(2x) = -\sqrt{3}\cos(2x)$

e $\sin(4x) = -\cos(4x)$

f $\sin(3x - \pi) = \cos(3x - \pi)$

g $\sqrt{3}\sin\left(x - \frac{1}{6}\pi\right) = \cos\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)$

☐	$\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$	1
☐	$\tan(2x) = \dots$	2
☐	$2x = \dots + k \cdot \pi$	3
☐	$x = \dots + k \cdot \dots$	4
☐		

Uitdagende opdrachten

U9 De functies $f_a(x) = a \cdot \sin(x)$ en $g(x) = \tan(x)$ zijn gegeven op

het interval $\left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$.

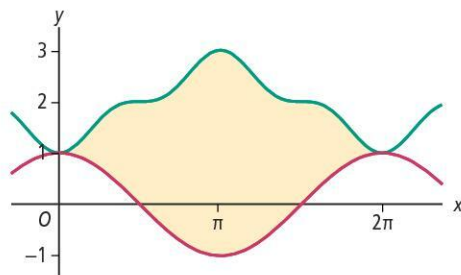
Het aantal oplossingen van de vergelijking $f_a(x) = g(x)$ hangt af van de waarde van a .

Vul de tabel in en licht je antwoord toe.

aantal oplossingen van $f_a(x) = g(x)$	0	1	2	3	meer dan 3
waarden van a					

56 Gegeven zijn de functies $f(x) = \cos(x)$ en $g(x) = 2 - \cos^3(x)$.

- Toon aan dat de grafieken van f en g in de punten met $x = 0 + k \cdot 2\pi$ elkaar raken.
- Toon aan dat $H(x) = \sin(x) - \frac{1}{3} \sin^3(x)$ een primitieve is van de functie $h(x) = \cos^3(x)$.
- Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat tussen $x = 0$ en $x = 2\pi$ wordt ingesloten door de grafieken van f en g .

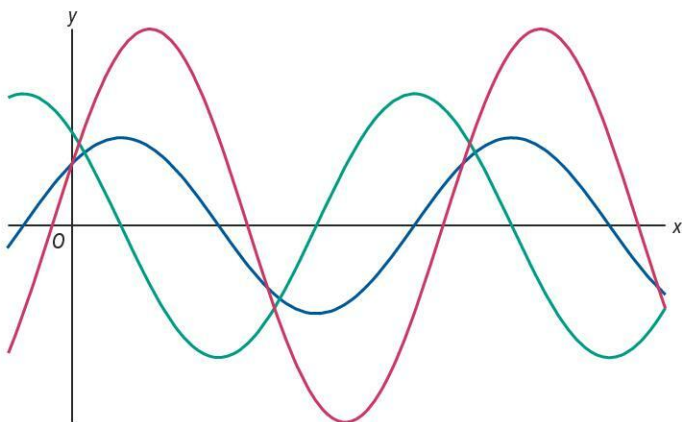


57 Gegeven is de functie $f(x) = 2x \cdot \sin(x)$ op het interval $[-2\pi, 2\pi]$.

- Plot en schets de grafiek van f .
- Bereken exact de coördinaten van de gemeenschappelijke punten van de grafiek van f en de lijn met vergelijking $y = x$.
- Bereken $f''(2)$.
- De grafiek van f heeft een top in de buurt van $x = 2$. Leg met behulp van het antwoord van opdracht c uit of deze top links of rechts van de lijn $x = 2$ ligt.
- Toon aan dat $F(x) = -2x \cdot \cos(x) + 2\sin(x)$ een primitieve van f is en bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x -as tussen $x = 0$ en $x = \pi$.

58 Gegeven is de functie $f_a(x) = \tan^2(x) - a \cdot \tan(x)$ op het interval $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$.

- Neem $a = \sqrt{3}$ en plot en schets de grafiek van $f_{\sqrt{3}}$.
- Bereken exact de nulpunten van $f_{\sqrt{3}}$.
- Geef het functievoorschrift van f'_a .
- Bereken exact voor welke waarden van a de functie f_a een extreme waarde -1 heeft.



- 59** Gegeven zijn de functies $f_{a,b}(x) = a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x)$. Voor verschillende combinaties van waarden voor a en b is de grafiek getekend. Je kunt zulke functies opvatten als de optelling van twee trillingen met gelijke periode. De grafieken lijken alle sinusoiden te zijn.

a Je kunt $a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x)$ opvatten als het inwendig

product van de vectoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}$.

Waarom kun je hieruit concluderen dat een functie van de vorm $f_{a,b}(x) = c \cdot \cos(x + d)$ moet zijn?

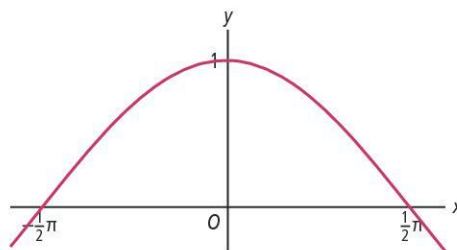
- b** Onderzoek welk verband er bestaat tussen c , a en b .
c Stel dat de grafiek van een functie $f_{a,b}$ een top heeft voor $x = p$.
 Onderzoek welk verband er is tussen p , a , b en d .

- 60** De grafiek van $f(x) = \cos(x)$ op het interval $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ kun je benaderen met een parabool, die dezelfde nulpunten en top heeft.

Een andere benadering is met een zogenaamde kettinglijn.

In dit geval is de kettinglijn de grafiek van een functie van de vorm $k_{p,q}(x) = p - (e^{qx} + e^{-qx})$.

Stel een functievoorschrift op voor beide benaderingen en onderzoek welk van de twee benaderingen de kleinste maximale afwijking ten opzichte van $f(x) = \cos(x)$ heeft.



Theorie

Harmonische trilling, trillingstijd en frequentie

Als de grafiek van een trilling een sinusoïde is, dan is er sprake van een harmonische trilling. De frequentie van een periodieke functie is het aantal perioden per tijdseenheid. De periode van een trilling wordt ook de trillingstijd genoemd. De eenheid voor het aantal trillingen per seconde is hertz (Hz).

De formule voor de uitwijking u te schrijven als $u = a \sin(\frac{2\pi}{T} \cdot t)$ of $u = a \sin(2\pi f t)$.

$|a|$ is de amplitude, T is de trillingstijd en voor de

frequentie f geldt $f = \frac{1}{T}$

- S1** Geef de maximale uitwijking, de trillingstijd en de frequentie van een harmonische trilling met de formule $u = 2,5 \cos(640\pi t)$. Hierbij is u in mm en t in seconden.

Theorie

Tangensfunctie

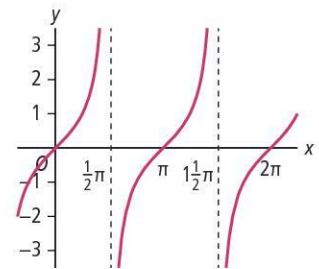
Voor de tangensfunctie geldt $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

De periode van deze functie is π .

De nulpunten zijn $x = 0 + k \cdot \pi$.

De afgeleide van $f(x) = \tan(x)$ is $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$



- S2** Geef de periode, de nulpunten en de asymptoten van de functie $f(x) = \frac{1}{2} \tan(\frac{1}{3}x)$.

Vaardigheid

Je kunt de formule $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ gebruiken om exacte waarden van $\sin(x)$ of $\cos(x)$ te berekenen.

Bedenk in welke kwadranten de sinus en de cosinus positief dan wel negatief zijn.

Voorbeeld

Gegeven is $\cos(x) = -\frac{1}{7}$ en $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$. Bereken exact $\sin(x)$.

Oplossing

$$\sin^2(x) + \left(-\frac{1}{7}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2(x) = 1 - \frac{1}{49} = \frac{48}{49}$$

Omdat $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$ geldt $\sin(x) > 0$.

$$\sin(x) = \sqrt{\frac{48}{49}} = \frac{4}{7}\sqrt{3}$$

- S3** a Bereken exact $\sin(a)$ als $\pi < a < 1\frac{1}{2}\pi$ en $\cos(a) = -\frac{1}{5}$.
 b Bereken exact $\cos(b)$ als $-\frac{1}{2}\pi < b < 0$ en $\sin(b) = -\frac{3}{7}$.

Vaardigheid

Je kunt goniometrische formules herschrijven.

Je gebruikt deze formules om te controleren of twee functies hetzelfde zijn en bij het oplossen van vergelijkingen.

$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\cos(-x) = \cos(x)$
$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$	$\cos(x + \pi) = -\cos(x)$
$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$	$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$
$\sin(\pi - x) = \sin(x)$	$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$	$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

- S4** Herleid.
 a $\cos\left(2\frac{1}{3}\pi - 2x\right)$ tot de vorm $\sin(px + q)$.
 b $-\sin\left(3\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)\right)$ tot de vorm $\cos(px + q)$.

Vaardigheid

Je kunt vergelijkingen van de vormen $\sin(A) = \sin(B)$, $\cos(A) = \cos(B)$ en $\sin(A) = \cos(B)$ oplossen.

Eventueel herschrijf je de vergelijking eerst in de vorm $\sin(A) = \sin(B)$ of $\cos(A) = \cos(B)$ door gebruik te maken van goniometrische formules.

Voorbeeld 1

Los exact op $\sin(3x) = \sin\left(\frac{1}{4}\pi - x\right)$.

Oplossing

$$3x = \frac{1}{4}\pi - x + k \cdot 2\pi \text{ of } 3x = \pi - \left(\frac{1}{4}\pi - x\right) + k \cdot 2\pi$$

$$4x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{16}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi \text{ of } x = \frac{3}{8}\pi + k \cdot \pi$$

Voorbeeld 2

Los exact op $\sin(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x - \pi\right)$.

Oplossing

$$\cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{2}x - \pi\right)$$

$$x - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}x - \pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x - \frac{1}{2}\pi = -\frac{1}{2}x + \pi + k \cdot 2\pi$$

$$\frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\pi + k \cdot 4\pi \text{ of } x = \pi + k \cdot 4\pi$$

- S5** Los exact op.
 a $\cos\left(3x + \frac{1}{4}\pi\right) = \cos(x)$
 b $\sin(2x) = \cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$

Vaardigheid

Je kunt vergelijkingen oplossen waarin $\sin^2(x)$ of $\cos^2(x)$ voorkomt.
Gebruik de formule $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Voorbeeld

Los exact op $2\cos^2(x) + 5\sin(x) = -1$ op het interval $[0, 2\pi]$.

Oplossing

$$2(1 - \sin^2(x)) + 5\sin(x) = -1$$

$$2\sin^2(x) - 5\sin(x) - 3 = 0$$

Stel $\sin(x) = p$, de vergelijking wordt $2p^2 - 5p - 3 = 0$.

De abc -formule geeft $p = 3$ of $p = -\frac{1}{2}$.

$\sin(x) = 3$ geeft geen oplossingen.

Uit $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ volgt $x = \frac{1}{6}\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi$.

S6 Los exact op.

a $2\sin^2(x) = 1 - \sin(x)$

b $3\sin^2(x) + 4\cos(x) = \frac{1}{4}$

Vaardigheid

Je kunt sinusfuncties en cosinusfuncties differentiëren.

functie

$$f(x) = \sin(x)$$

$$h(x) = \cos(x)$$

$$m(x) = \tan(x)$$

afgeleide

$$f'(x) = \cos(x)$$

$$h'(x) = -\sin(x)$$

$$m'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

Voorbeeld

Differentieer de functies $f(x) = 3\cos(4x)$ en $g(x) = -\sin^3(2x)$.

Oplossing

$$f'(x) = -3\sin(4x) \cdot 4$$

$$\text{dus } f'(x) = -12\sin(4x)$$

$$g'(x) = -3\sin^2(2x) \cdot \cos(2x) \cdot 2$$

$$\text{dus } g'(x) = -6\sin^2(2x) \cdot \cos(2x)$$

S7 Differentieer.

a $f(x) = \sin^2(x) + \tan(2x)$

b $g(x) = \frac{1}{2}\cos(x^2 + 1)$

Vaardigheid**Je kunt sinusfuncties en cosinusfuncties primitiveren.***functie*

$$f(x) = \sin(x)$$

$$g(x) = \sin(px)$$

$$h(x) = \cos(x)$$

$$k(x) = \cos(px)$$

primitieve

$$F(x) = -\cos(x)$$

$$G(x) = -\frac{1}{p} \cos(px)$$

$$H(x) = \sin(x)$$

$$K(x) = \frac{1}{p} \sin(px)$$

Voorbeeld

Primitiveer de functies

$$f(x) = \sin(5x) \text{ en } g(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right).$$

Oplossing

$$F(x) = -\frac{1}{5} \cos(5x)$$

$$G(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{1}{2}x\right) = 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

S8 a Primitiveer de functies $f(x) = \frac{1}{3} \sin\left(\frac{1}{6}x\right)$

en $g(x) = \cos(2x) - \cos\left(\frac{1}{2}x\right).$

b Bereken exact $\int_{\pi}^{3\pi} \left(2\cos\left(\frac{1}{3}x\right)\right) dx$

Vaardigheid**Je kunt vergelijkingen van de vorm $\tan(A) = \tan(B)$ oplossen.**Uit $\tan(A) = \tan(B)$ volgt $A = B + k \cdot \pi$.**Voorbeeld 1**

Los exact op $\tan\left(1\frac{1}{2}\pi - x\right) = \tan\left(2x - \frac{1}{4}\pi\right).$

Oplossing

$$1\frac{1}{2}\pi - x = 2x - \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$-3x = -1\frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$$

Voorbeeld 2

Los exact op $5\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = \sqrt{75} \sin\left(\frac{1}{2}x\right).$

Oplossing

$$\tan\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{5}{\sqrt{75}} = \sqrt{\frac{25}{75}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

S9 Los exact op.

a $\tan(3x) = 1$

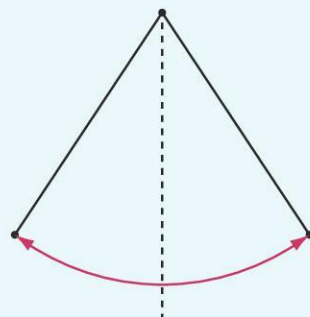
b $\tan(2x) = \tan\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$

c $2\sin(4x) = \sqrt{12} \cos(4x)$

- T1** Een slinger wordt op tijdstip $t = 0$ in een uiterste stand losgelaten. De uitwijking u van de slinger ten opzichte van de evenwichtsstand na t seconden wordt gegeven door

$$u = 2,5 \sin\left(\frac{1}{2} \pi(t + 1)\right) \text{ met } u \text{ in centimeters en } t \text{ in seconden.}$$

- Bereken de periode van deze slingerbeweging.
- Een andere slinger heeft frequentie 3 Hz en een maximale uitwijking van 2 cm. De uitwijking is maximaal bij $t = 0$. Stel een formule op voor de uitwijking w van deze slinger.



- T2** De grafiek van een functie f is een sinusöide met periode 4, amplitude 0,3 en evenwichtsstand $y = -0,5$. Een functie $g(x) = \sin(bx)$ heeft dezelfde periode als f . Als de grafiek van g één kwart periode naar rechts wordt verschoven hebben de functies f en g maxima en minima voor dezelfde waarden van x .

- Geef een functievoorschrift van g .
- Maak een schets van de grafiek van f .
- Stel een functievoorschrift van f op.

- T3** **a** Schrijf het functievoorschrift van $f(x) = -\cos\left(3x - \frac{1}{2} \pi\right)$ in de vorm $f(x) = \sin(px + q)$.

- b** Bereken exact de waarde van $\cos(x)$ als $\sin(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{2}$ en $\frac{1}{2} \pi < x < \pi$.

- c** Bereken exact de waarde van $\sin(x)$ als $\cos(x) = \frac{2}{5}\sqrt{3}$ en $1\frac{1}{2} \pi < x < 2\pi$.

- T4** Los exact op.

- | | |
|---|--|
| a $2\sin\left(2x - \frac{1}{2} \pi\right) = -\sqrt{3}$ | c $\cos^2(x) - 1\frac{1}{2} \sin(x) = 0$ |
| b $\cos(2x) = \cos(\pi - 3x)$ | d $\cos(3x - \pi) = \sin\left(\frac{1}{4} \pi - x\right)$ |

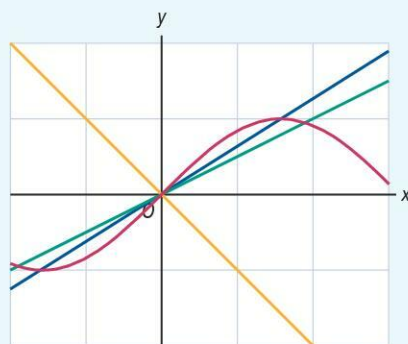
- T5** Differentieer.

- | | |
|--|---|
| a $f(x) = 2\cos\left(\frac{1}{3} \pi - 4x\right)$ | c $h(x) = \ln(\sin(x) + 2\cos(x))$ |
| b $g(x) = e^{2\cos(x)} \cdot \sin(3x)$ | d $k(x) = \frac{\cos(3x)}{1 + \sin(3x)}$ |

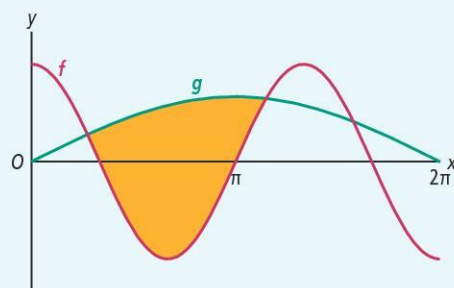
- T6** Bereken exact.

- | | |
|--|---|
| a $\int_{-\pi}^{\pi} (2 + 2\cos(x)) dx$ | c $\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{1}{3} \sin\left(\frac{1}{2} x\right)\right) dx$ |
| b $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (3\sin(5x)) dx$ | d $\int_{-\pi}^{-\frac{1}{2}\pi} \left(1 - \cos\left(\frac{2}{3} x\right)\right) dx$ |

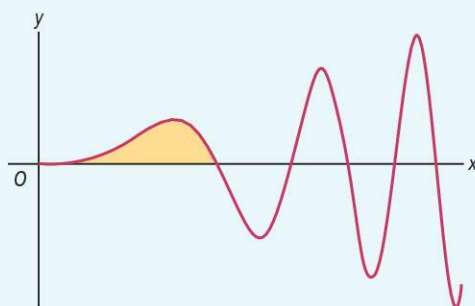
- T7** Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$ en een aantal lijnen uit de bundel van lijnen $y = ax$.
- Welke lijn uit de bundel $y = ax$ raakt de grafiek van f in $(0, 0)$?
 - Is er een waarde van a waarvoor er twee snijpunten zijn? Leg je antwoord uit.
 - Een van de lijnen $y = ax$ snijdt de grafiek van f in het punt met $x = \frac{1}{2}\pi$. Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door deze lijn, de x -as en de grafiek van f .



- T8** Gegeven zijn de functies $f(x) = 3\cos(\frac{1}{2}x)$ en $g(x) = 2\sin(\frac{1}{2}x)$ op het interval $[0, 2\pi]$.
- Los op $f(x) = g(x)$ op het interval $[0, 2\pi]$. Rond af op twee decimalen.
 - Bereken met behulp van primitiveren de oppervlakte van het gekleurde gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g . Rond af op twee decimalen.



- T9** Gegeven is de grafiek van $f(x) = x \cdot \sin(x^2)$. Een primitieve van f heeft de vorm $F(x) = p \cdot \cos(x^2)$. Bereken exact de oppervlakte van het gekleurde vlakdeel.



- T10** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
- Toon aan dat $F(x) = \ln(|\sin(x)|)$ een primitieve van f is.
 - Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f , de lijn $x = \frac{1}{4}\pi$ en de x -as.
 - Toon aan dat $\frac{1}{\sin(x)\cos(x)} = \tan(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
 - Bereken exact $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\sin(x)\cos(x)} dx$.

Je kunt de formule $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ gebruiken om exacte waarden van $\sin(x)$ of $\cos(x)$ te berekenen.

- E1**
- a Bereken exact $\cos(a)$ als $\sin(a) = -\frac{2}{3}$ en $1\frac{1}{2}\pi < a < 2\pi$.
 - b Bereken exact $\sin(b)$ als $\cos(b) = \frac{5}{6}$ en $-\frac{1}{2}\pi < b < 0$.
 - c Van een getal c is gegeven $\sin^2(c) = 5\cos^2(c)$. Bereken exact $\sin(c)$ en $\cos(c)$.

Je kunt goniometrische formules herschrijven.

- E2**
- a Schrijf $-\cos\left(1\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\pi\right)$ in de vorm $\sin(px + q)$.
 - b Schrijf $\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi\right)$ in de vorm $\cos(px + q)$.
 - c Toon aan dat de functies $f(x) = \sin\left(2\frac{1}{2}x - 3\pi\right)$ en $g(x) = \cos\left(2\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\pi\right)$ hetzelfde zijn.
 - d Toon aan dat de functies $h(x) = \cos\left(3\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) + \pi\right)$ en $k(x) = \sin\left(3\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)\right)$ hetzelfde zijn.

Je kunt vergelijkingen van de vormen $\sin(A) = \sin(B)$, $\cos(A) = \cos(B)$ en $\sin(A) = \cos(B)$ oplossen.

- E3** Los exact op.
- a $\cos\left(2x + \frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
 - b $\sin\left(\frac{2}{3}\pi - x\right) = \sin(-4x)$
 - c $\sin(2x) = \cos(3x)$
 - d $\sin^2(x) = \frac{3}{4}$
 - e $\cos(2x) = \cos\left(1\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x\right)$
 - f $\cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) = -\sin(3x)$

Je kunt vergelijkingen oplossen waarin $\sin^2(x)$ of $\cos^2(x)$ voorkomt.

- E4** Los exact op.
- a $2\sin^2(2x) + 3\sin(2x) = 2$
 - b $4\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) = 1 + 4\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

Je kunt sinusfuncties en cosinusfuncties differentiëren.

- E5** Differentieer.
- a $f(x) = 2\sin(3(x - 0,25\pi))$
 - b $g(x) = \ln(\cos(5 - 2x))$
 - c $h(x) = \cos(2x) \cdot e^{0,5\sin(3x)}$
 - d $k(x) = \frac{3}{\cos^2(5x)}$

Je kunt sinusfuncties en cosinusfuncties primitiveren.

- E6** Primitiveer.
- a $f(x) = 2\frac{1}{2}\sin(4x)$
 - b $g(x) = -4\cos(2x)$
 - c $h(x) = 3\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$
 - d $k(x) = -1\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{3}x\right)$

Je kunt vergelijkingen van de vorm $\tan(A) = \tan(B)$ oplossen.

E7 Los exact op.

- a** $\tan(2x) = \tan\left(1\frac{1}{3}\pi - x\right)$ **c** $\tan^2(x) = \frac{1}{3}$
b $\sqrt{3}\sin(x) = -\cos(x)$ **d** $\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right) = 3\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right)$

E8 Bereken exact.

- a** $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (2\sin(x) - \cos(x)) dx$ **c** $\int_0^1 \left(\sin(\pi x) - 2\cos\left(\frac{1}{4}\pi x\right)\right) dx$
b $\int_0^{\pi} (2 + x + 2\sin(4x)) dx$ **d** $\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} (2\sin(x) - \sin(2x)) dx$

E9 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ en $g(x) = \tan(x)$.

- a** Geef exact de nulpunten en de periode van f .
b Geef vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek van f .
c Los exact op $f(x) \leq 1$ voor $0 \leq x \leq 2\pi$.
d Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek van $h(x) = f(x) + g(x)$ op het interval $[0, 2\pi]$.

E10 Gegeven is de functie $f(x) = (1 - \sin(x)) \cdot \cos(x)$.

- a** Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek op het interval $[-\pi, \pi]$.
b Toon aan dat voor de x -coördinaat van de buigpunten van de grafiek van f geldt $\cos(x) = 0$ of $\cos(x) = \frac{1}{4}\sqrt{15}$ of $\cos(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{15}$.
c Toon aan dat $F(x) = \sin(x) + \frac{1}{2}\cos^2(x)$ een primitieve van f is.
d Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel dat op het interval $[-\pi, \pi]$ wordt ingesloten door de grafiek van f en de x -as.



SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In hoofdstuk 12 heb je geleerd wat integralen zijn en hoe je die met je rekenmachine kunt benaderen. Met behulp van de hoofdstelling van de integraalrekening kun je integralen exact uitrekenen. Je hebt daarbij de primitieve van een functie nodig.

Vervolgens heb je integralen gebruikt om oppervlakten te berekenen van gebieden die ingesloten worden door grafieken van functies.

In dit hoofdstuk wordt het berekenen van oppervlakten herhaald en uitgebreid. Ook ga je met behulp van integralen inhouden berekenen van lichamen die ontstaan door een gebied te wentelen om een as.

Met dit hoofdstuk sluit je de leerstof over primitiveren en integreren voor het examen af.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Modelleren en algebraïseren*
- *Logisch redeneren en bewijzen*
- *Probleem oplossen en analytisch denken*

opdracht 22
opdracht 33
opdracht 38



Theorie

Een functie F waarvoor geldt dat $F'(x) = f(x)$ heet een **primitieve functie** (of kortweg **primitieve**) van f .

Het vinden van een primitieve functie heet **primitiveren**.

Een primitieve functie van de machtsfunctie $f(x) = x^p$ is

$$F(x) = \frac{1}{p+1} x^{p+1} \text{ (voor } p \neq -1\text{)}.$$

Als G een primitieve is van g en $f(x) = g(a \cdot x + b)$, dan is

$$F(x) = \frac{1}{a} \cdot G(ax + b) \text{ een primitieve van } f.$$

functie	primitieve
$f(x) = x^n$ ($n \neq -1$)	$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x $
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = g^x$	$F(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot g^x$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x)$

Voorbeeld 1

Geef een primitieve van $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$.

Oplossing

$$f(x) = x \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{5}{3}}$$

Een primitieve is

$$F(x) = \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} = \frac{3}{7} x^{2\frac{1}{3}} \text{ ofwel } F(x) = \frac{3}{7} x^2 \sqrt[3]{x}.$$

Voorbeeld 2

Geef een primitieve van $f(x) = \frac{3}{(2x-4)^2}$.

Oplossing

$$f(x) = 3(2x-4)^{-2}$$

Een primitieve is

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot -1 \cdot (2x-4)^{-1} \text{ ofwel } F(x) = -\frac{3}{2} \cdot (2x-4)^{-1}$$

$$F(x) = -\frac{3}{2(2x-4)} \text{ ofwel } F(x) = -\frac{3}{4x-8}$$

V1 Geef een primitieve.

a $f(x) = x^3 - 3x$

d $i(x) = (x^2 + 4x)^2$

b $g(x) = \sin(x) - 3\cos(x)$

e $m(x) = 3^x + x^3$

c $h(x) = \frac{1}{2x}$

f $k(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$

V2 **a** Gegeven is de functie $f(x) = 2x\sqrt{x}$.

Schrijf het functievoorschrift in de vorm $f(x) = c \cdot x^p$ en geef een primitieve van f .

b Geef een primitieve van de functie $g(x) = \frac{4}{\sqrt[3]{x}}$

V3 Primitiveer.

a $f(x) = e^{7x+1}$

d $f(x) = \frac{1}{4x} + 4\sin(4x)$

b $f(x) = \cos(3x-4)$

e $f(x) = 3^{2x+1} + (3x+1)^{-3}$

c $f(x) = \sqrt[5]{5x+1}$

f $f(x) = \frac{1}{2x-4}$

Theorie

De **hoofdstelling van de integraalrekening** luidt:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \text{ waarbij } F'(x) = f(x).$$

Het berekenen van een integraal met behulp van de hoofdstelling heet **integreren**.

Voorbeeld

Bereken exact $\int_1^4 e^{2x+1} dx$.

Oplossing

Een primitieve van $f(x) = e^{2x+1}$ is

$$F(x) = \frac{1}{2} e^{2x+1}.$$

$$\int_1^4 e^{2x+1} dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x+1} \right]_1^4 = \frac{1}{2} e^9 - \frac{1}{2} e^3$$

V4 Bereken exact.

a $\int_1^e \frac{2}{x} dx$

c $\int_0^3 (x^3 - x^2) dx$

b $\int_0^\pi 2\sin(3x) dx$

d $\int_0^\pi (\sin(2x) + \cos(x)) dx$

V5 Bereken de integralen in twee decimalen.

a $\int_0^1 4\sqrt{1-x^2} dx$

b $\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2) dx$

Met je rekenmachine kun je integralen berekenen. Bijvoorbeeld als er geen exact antwoord wordt gevraagd of als je van de integrand geen primitieve kunt opstellen.

Theorie

De functies f en g heten **inverse functies** van elkaar als geldt: uit $f(a) = b$ volgt $g(b) = a$ (en omgekeerd) voor elke a uit het domein van f en elke b uit het domein van g .

De notatie voor de inverse functie van f is f^{inv} .

De grafieken van f en f^{inv} zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegeling in de lijn $y = x$.

Voorbeeld

Gegeven is $f(x) = \ln(2x - 1)$.

Geef een functievoorschrift van f^{inv} .

Oplossing

$$f: y = \ln(2x - 1)$$

$$f^{inv}: x = \ln(2y - 1)$$

$$2y - 1 = e^x \text{ dus } y = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2}$$

$$f^{inv}(x) = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2}$$

V6 Stel het functievoorschrift op van de inverse functie.

a $f(x) = \frac{1}{x+1}$

b $f(x) = e^{2x+1}$

c $f(x) = \ln(x+3)$

d $f(x) = \sqrt{3x-2}$

18.1 Integraal en oppervlakte

Je leert

- hoe je de oppervlakte berekent van een gebied dat ingesloten wordt door meerdere grafieken

Leerroutes

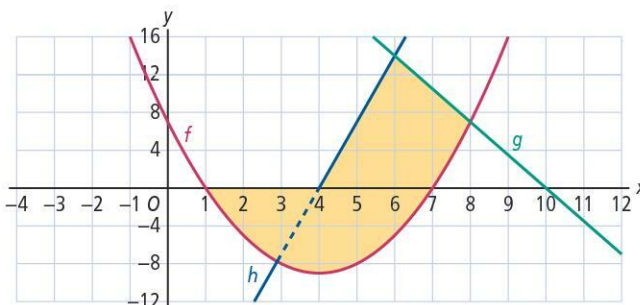
- ondersteunend: 1—2—03—4—5—6—07—7—8
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7—8—9
- uitdagend: 1—2—4—5—6—7—8—9—U1

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 - 8x + 7$,

$g(x) = -3\frac{1}{2}x + 35$ en $h(x) = 7x - 28$.

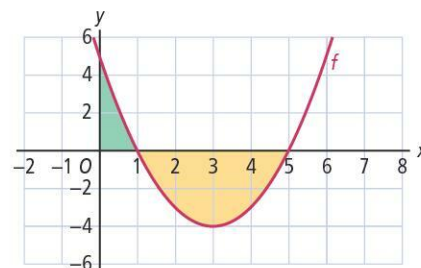
Het gekleurde gebied wordt ingesloten door de x -as en de grafieken van f , g en h .

- Hoeveel integralen heb je (ten minste) nodig om de oppervlakte van het gekleurde gebied exact te kunnen berekenen? En wat zijn de onder- en bovengrenzen van die integralen?



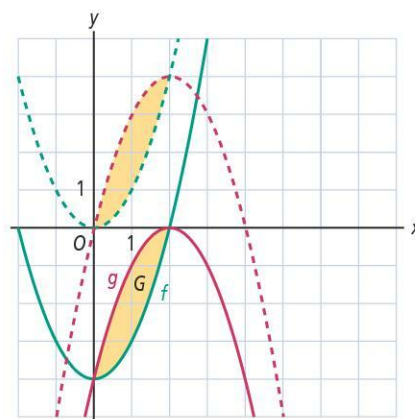
- 1 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 6x + 5$. G_1 is het gebied dat ingesloten wordt door de x -as, de y -as en de grafiek van f en G_2 is het gebied dat ingesloten wordt door de x -as en de grafiek van f .

- Bereken exact de oppervlakte van G_1 .
- Bereken exact de oppervlakte van G_2 .



- 2 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 - 4$ en $g(x) = -x^2 + 4x - 4$. De grafieken sluiten een gebied G in. Om de oppervlakte van G te berekenen, kun je de grafieken zo verschuiven, dat G boven de x -as komt te liggen.

- Schuif de grafieken 4 omhoog en geef functievoorschriften bij de nieuwe grafieken.
- Bereken de oppervlakte van G .
- Toon aan: $\int_0^2 ((g(x) + 4) - (f(x) + 4)) dx = \int_0^2 (g(x) - f(x)) dx$
- Leg uit dat uit opdracht c volgt dat het omhoog schuiven van G niet nodig is om de oppervlakte uit te rekenen.



Ondersteunende route → maak opdracht 03

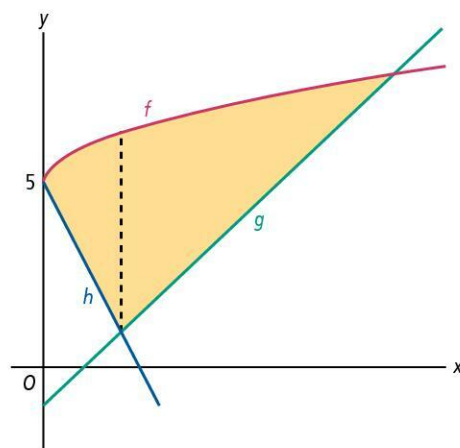
- 3 a De grafieken van de functies $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = x^2 - 3\frac{1}{2}x$ snijden elkaar in $(0, 0)$ en $(4, 2)$. Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g .
- b Gegeven is de functie $h(x) = e^{2x}$. Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt begrensd door de grafiek van h , de y -as en de lijn $y = e^2$.

- 4 Gegeven zijn de functies $f(x) = 5 + \sqrt{x}$, $g(x) = x - 1$ en $h(x) = 5 - 2x$. De grafieken van deze functies sluiten een gebied G in.

- a De grafieken van f en h snijden elkaar in $(0, 5)$.
Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g en van het snijpunt van de grafieken van g en h .
- b Om de oppervlakte van G te berekenen, heb je twee integralen nodig.
Vul de juiste grenzen in.

$$\text{opp } G = \int_{\dots}^{\dots} (f(x) - h(x)) dx + \int_{\dots}^{\dots} (f(x) - g(x)) dx$$

- c Bereken exact de oppervlakte van G .



Theorie

- Voor een gebied dat geheel onder de x -as ligt en ingesloten wordt door de grafiek van een functie f en de x -as geldt $\text{opp} = -\int_a^b f(x) dx$.

- Voor een gebied dat ingesloten wordt door de grafieken van twee functies f en g waarbij de grafiek van f boven de grafiek van g ligt geldt

$$\text{opp} = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

- Soms is het nodig een gebied op te splitsen.

Voorbeeld

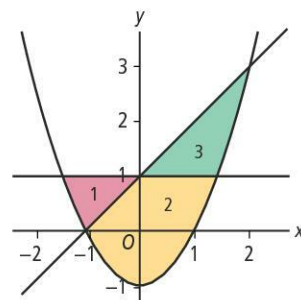
De grafieken van de functies $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$ en $h(x) = 1$ sluiten drie gebieden in.
Bereken exact de oppervlakte van de gebieden 2 en 3 samen.

Oplossing

De grafieken van f en g snijden elkaar bij $x = -1$ en $x = 2$.

De oppervlakte is $\int_{-1}^2 ((x + 1) - (x^2 - 1)) dx = \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx =$

$$\left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^2 = 3\frac{1}{3} - -1\frac{1}{6} = 4\frac{1}{2}.$$

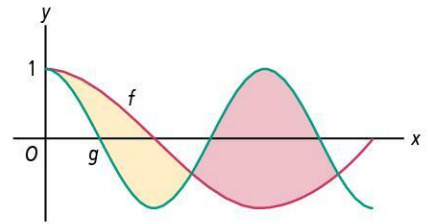


- 5 Kijk naar de figuur uit het voorbeeld en bereken exact:

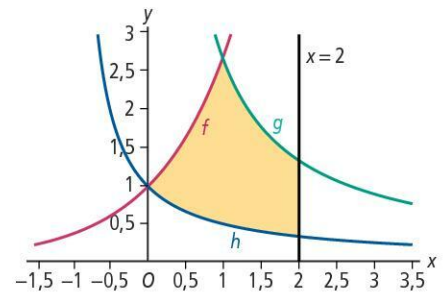
- H**
- a de oppervlakte van gebied 3.
b de oppervlakte van gebied 2 (maak gebruik van het resultaat uit het voorbeeld).
c de oppervlakte van gebied 1.

- 6 De grafieken van de functies $f(x) = \cos(x)$ en $g(x) = \cos(2x)$ sluiten op het interval $[0, \frac{1}{3}\pi]$ twee gebieden in. Bereken exact de oppervlakte van elk gebied.

Ondersteunende route → maak opdracht 07



- 7 Gegeven zijn de functies $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{e}{x}$ en $h(x) = \frac{1}{x+1}$
- Toon aan dat de grafieken van f en g elkaar snijden bij $x = 1$.
 - Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat ingesloten wordt door de grafieken van f , g en h en de lijn $x = 2$.



- 8 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{x}$ en $g(x) = \frac{1}{x^2}$
- G is het gebied ingesloten door de grafieken van f en g en de lijn $x = 2$.
- H is het gebied ingesloten door de grafieken van f en g en de lijn $y = 2$.
- Schets de grafieken van f en g met daarin de gebieden G en H .
 - Onderzoek met een berekening of G en H een even grote oppervlakte hebben.
 - Bereken de kleinste gehele waarde van a waarvoor de oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafieken van f en g en de lijn $x = a$ ($a > 1$) groter dan 3 is.
- 9 Gegeven is de functie $f(x) = \ln(x)$.
- Toon aan dat de functie $F(x) = x \ln(x) - x$ een primitieve van f is.
 - Bereken exact de oppervlakte van het gebied, ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijn $x = e^2$.
 - Bereken exact de oppervlakte van het gebied, ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijn $x = \frac{1}{e}$.

Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

03 De grafieken van de functies $f(x) = x^2 - 4$ en $g(x) = x^3 - 10x^2 + 24x - 4$ snijden elkaar onder andere in $(0, 0)$ en $(3, 9)$. G is het aangegeven gebied.

- Welke grafiek ligt op het interval $[0, 3]$ hoger, de grafiek van f of die van g ?
- Met welke integraal bereken je de oppervlakte van G , met

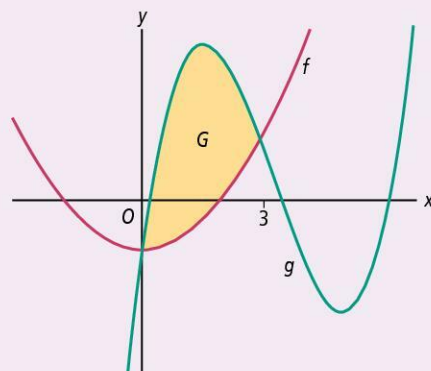
$$\text{opp} = \int_0^3 (f(x) - g(x))dx \text{ of met } \text{opp} = \int_0^3 (g(x) - f(x))dx?$$

Licht je antwoord toe.

- Bereken exact de oppervlakte van G .
- H is het gebied ingesloten door de y -as en de grafieken van $h(x) = 4$ en $k(x) = 1 + \sqrt{x+3}$.

Plot en schets de grafieken van h en k .

- Bereken exact de oppervlakte van H .
- Bereken exact de oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van $m(x) = e^{3x}$, de y -as en de lijn $y = e^3$.



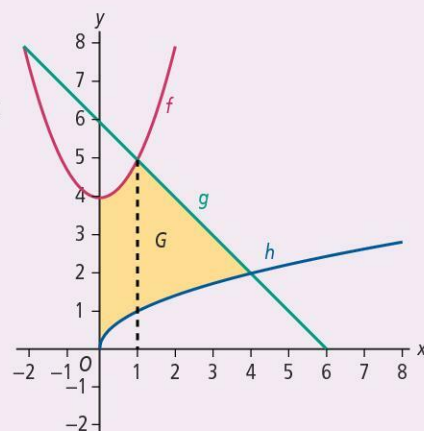
07 G is het gebied ingesloten door de y -as en de grafieken van $f(x) = x^2 + 4$, $g(x) = 6 - x$ en $h(x) = \sqrt{x}$.

- Ga na dat de grafieken van f en g elkaar snijden bij $x = 1$ en de grafieken van g en h elkaar snijden bij $x = 4$.
- Waarom heb je twee integralen nodig om de oppervlakte van G te berekenen?
- Van het deel tussen de y -as en de lijn $x = 1$ bereken je de

$$\text{oppervlakte met } \text{opp} = \int_0^1 (f(x) - h(x))dx.$$

Met welke integraal bereken je de oppervlakte van het deel van G tussen de lijnen $x = 1$ en $x = 4$?

- Bereken exact de oppervlakte van G .



Uitdagende opdrachten

U1 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$ op het interval $[0, \infty)$. G is het gebied dat begrensd wordt door de grafiek van f en de lijn $m: y = \frac{2}{5}x$.

- Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van lijn m en de grafiek van f .
- $F(x) = c \cdot \ln(x^2 + 1)$ is een primitieve van f . Bereken exact c en de oppervlakte van G .

18.2 Omwentelingslichamen

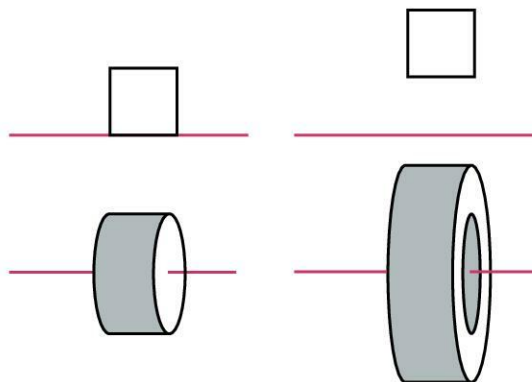
Je leert

- wat een omwentelingslichaam is
- hoe je de inhoud van een omwentelingslichaam berekent bij wentelen om de x -as

Leerroutes

- ondersteunend: 10—11—12—13—014—14—15
- doorlopend: 10—11—12—13—14—15—16
- uitdagend: 10—11—12—14—15—U2—U3

In de linker figuur staat een vierkant met zijde 1 op de x -as. Wentel je dat vierkantje om de x -as, dan krijg je een cilinder.
Schuif je het vierkant 1 omhoog en wentel je het dan om de x -as, dan krijg je een ring.
De inhoud van de ring is groter dan de inhoud van de cilinder.
• Hoeveel keer zo groot?



- 10** In de figuur is G het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$ en de lijnen $x = 1$ en $x = 5$.

Dit gebied wordt om de x -as gewenteld. Er ontstaat dan een ruimtelijke figuur.

- a** Elk punt op de grafiek van f doorloopt bij deze omwenteling een cirkel.

Geef voor $x = 2$ de straal en de oppervlakte van deze cirkel.

- b** Leg uit dat voor elke waarde van x de oppervlakte van de bijbehorende cirkel gelijk is aan $g(x) = \pi (f(x))^2$.

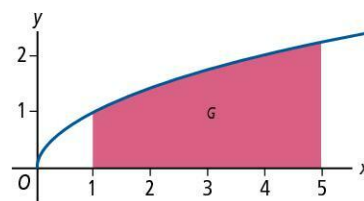
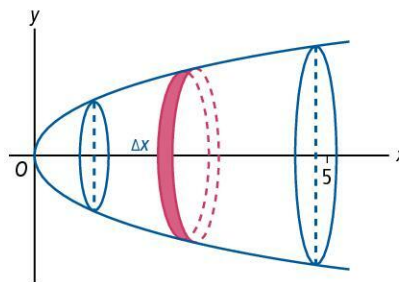
- c** De inhoud van de ruimtelijke figuur kun je benaderen met de inhoud van cilinders met hoogte Δx .

De inhoud van zo'n cilinder is dan $\pi (f(x))^2 \cdot \Delta x$.

Als je Δx naar 0 laat naderen dan geeft de som van alle cilinders de exacte inhoud van de ruimtelijke figuur.

Leg uit dat de exacte inhoud gelijk is aan $\int_1^5 \pi (f(x))^2 dx$.

- d** Bereken exact de inhoud van de ruimtelijke figuur.

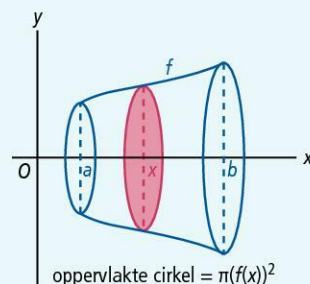


Theorie

Als je een gebied, ingesloten door de grafiek van een functie f , de x -as en de lijnen $x = a$ en $x = b$, om de x -as wentelt, ontstaat een **omwentelingslichaam**.

De inhoud van dit lichaam bereken je met de integraal

$$\int_a^b \pi (f(x))^2 dx \text{ of } \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$



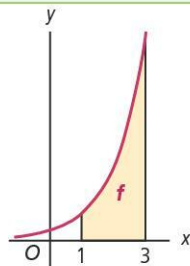
Voorbeeld

Het gebied ingesloten door de grafiek van $f(x) = e^x$ en de lijnen $x = 1$ en $x = 3$ wordt gewenteld om de x -as. Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam.

Oplossing

$$\pi \int_1^3 (f(x))^2 dx = \pi \int_1^3 e^{2x} dx = \pi \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_1^3 = \frac{1}{2} \pi (e^6 - e^2)$$

De inhoud van het omwentelingslichaam is $\frac{1}{2} \pi (e^6 - e^2)$.



- 11** Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door het gebied G te wentelen om de x -as.

H

G is het gebied dat begrensd wordt door

- de grafiek van $h(x) = e^{\frac{1}{2}x}$, de x -as en de lijnen $x = 0$ en $x = 3$.
- de grafiek van $g(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$, de x -as en de lijnen $x = 1$ en $x = 6$.
- de grafiek van $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{16x - x^3}$ voor $x \geq 0$ en de x -as.

- 12** Het gebied G wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = e^x$, de lijn $x = 1$ en de lijn $y = 1$.

H

Het gebied wordt gewenteld om de lijn $y = 1$.

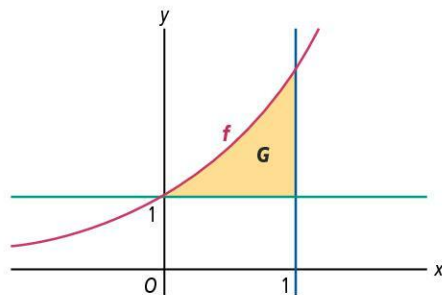
- Hoe moet je het gebied G verschuiven, zodat je om de x -as kunt wentelen?
- Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam.

- 13** De grafieken van $f(x) = 4x - x^2$ en $g(x) = x$ sluiten een gebied G in. Dit gebied wordt gewenteld om de x -as.

- Met welke integraal kun je de inhoud van dit omwentelingslichaam berekenen:

$$\pi \int_0^3 (f(x) - g(x))^2 dx \text{ of } \pi \int_0^3 ((f(x))^2 - (g(x))^2) dx?$$

- Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam.

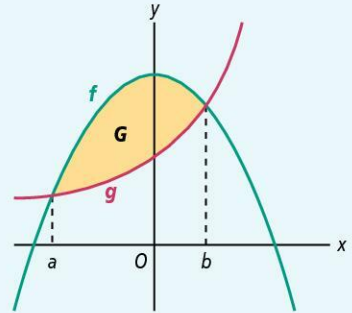


Theorie

Een gebied G , dat geheel boven de x -as ligt, wordt ingesloten door de grafieken van de functies f en g , waarbij de grafiek van f boven de grafiek van g ligt. De inhoud van het lichaam dat ontstaat door G om de x -as te wentelen bereken je met

$$\pi \int_a^b ((f(x))^2 - (g(x))^2) dx \text{ of met } \pi \int_a^b (f(x))^2 dx - \pi \int_a^b (g(x))^2 dx,$$

waarin a en b de x -coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn.



Voorbeeld

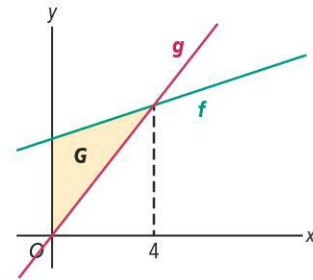
Het gebied ingesloten door de y -as en de grafieken van $f(x) = x + 4$ en $g(x) = 2x$ wordt gewenteld om de x -as.

Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam.

Oplossing

$$\begin{aligned} \pi \int_0^4 ((x+4)^2 - (2x)^2) dx &= \pi \int_0^4 (-3x^2 + 8x + 16) dx = \\ \pi \left[-x^3 + 4x^2 + 16x \right]_0^4 &= 64\pi \end{aligned}$$

De inhoud van het omwentelingslichaam is 64π .



Ondersteunende route → maak opdracht 014

- 14** Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door het gebied G te wentelen om de x -as.

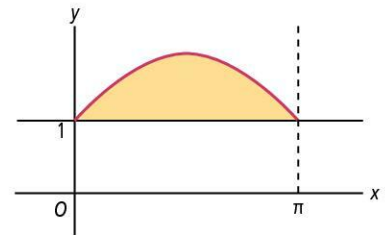
H

G is het gebied ingesloten door

- a de grafiek van $f(x) = 2\sqrt{x}$ en de lijn $y = x$.
- b de grafiek van $g(x) = \frac{4}{x}$ en de lijn $y = 5 - x$.

- 15** Gegeven is de functie $g(x) = \sin(x) + 1$ op het interval $[0, \pi]$.

- a Toon aan dat de functie $F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x)$ een primitieve is van $f(x) = \sin^2(x)$.
- b Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door het gebied ingesloten door de grafiek van g en de lijn $y = 1$ te wentelen om de x -as.



- 16** Bekijk het gebied G uit opdracht 12 nogmaals. Bereken exact de inhoud van het lichaam dat ontstaat door G om de x -as te wentelen.

Uitdagende route → maak opdracht U2 en U3

Ondersteunende opdrachten

014 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 + 4$ en $g(x) = 4x$. G is het gebied dat ingesloten is door de grafieken van f en g en de y -as. G wordt gewenteld om de x -as. Je gaat de inhoud berekenen van het omwentelingslichaam dat ontstaat.

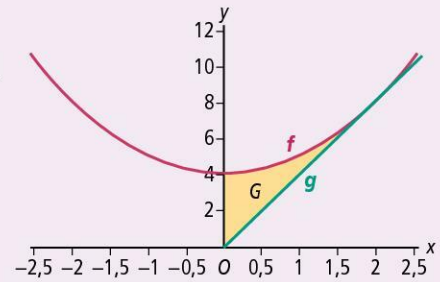
a Los exact op $f(x) = g(x)$.

b Waarom geldt voor de inhoud van het

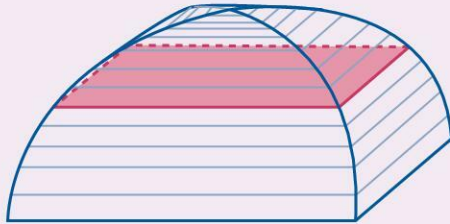
omwentelingslichaam $\pi \int_a^b ((f(x))^2 - (g(x))^2) dx$ en niet $\pi \int_a^b ((g(x))^2 - (f(x))^2) dx$?

c Toon aan de inhoud gelijk is aan $\pi \int_0^2 (x^4 - 8x^2 + 16) dx$.

d Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam.



Uitdagende opdrachten



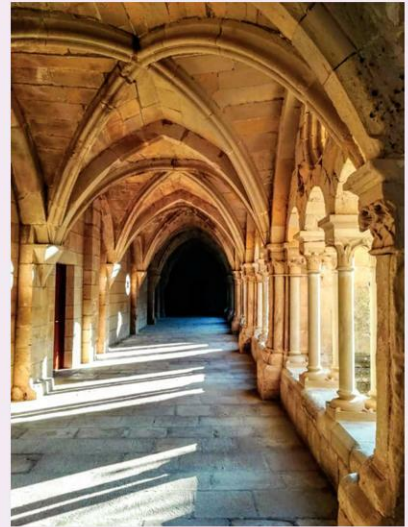
U2 Een kruisgewelf kun je opvatten als het gemeenschappelijk deel van twee even grote halve cilinders, waarvan de assen elkaar loodrecht snijden. Het bedoelde kruisgewelf heeft een vierkant grondvlak van 12 bij 12 meter. De horizontale doorsneden zijn ook vierkanten.

a Druk de oppervlakte O van een doorsnede op hoogte h uit in h .

b Leg uit dat de inhoud van het kruisgewelf gelijk is aan

$$\int_0^R O dh, \text{ met } R \text{ de straal van de halve cirkels.}$$

c Bereken exact de inhoud van het kruisgewelf.



U3 Twee gebieden G_1 en G_2 hebben een even grote oppervlakte en worden beide gewenteld om de x -as. Hebben de twee omwentelingslichamen dan ook een even grote inhoud? Zo ja, leg je antwoord uit. Zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

18.3 Wentelen om de y-as

Je leert

- hoe je de inhoud van een omwentelingslichaam berekent als je een gebied wentelt om de y-as

Leerroutes

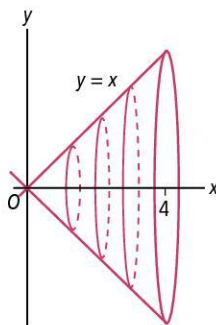
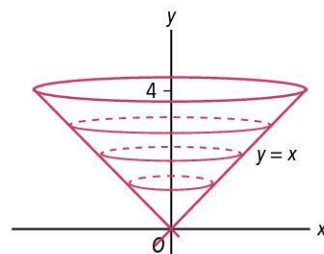
- ondersteunend: 17–18–019–19–20–021–21
- doorlopend: 17–18–19–20–21–22–23
- uitdagend: 18–19–20–22–23–U4–U5

Als je de lijn $y = x$ op het interval $[0, 4]$ wentelt om de x-as, ontstaat er een kegel.

Als je dezelfde lijn wentelt om de y-as, ontstaat er ook een kegel.

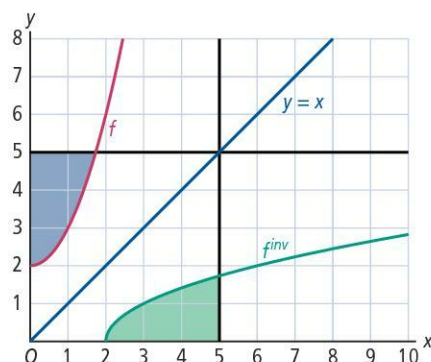
De inhoud van de twee kegels is gelijk.

- Is dat ook het geval als je de lijn $y = 2x$ wentelt om de x-as en de y-as?
- Krijg je ook dezelfde inhoud als je de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{x}$ op het interval $[1, 4]$ wentelt om beide assen?



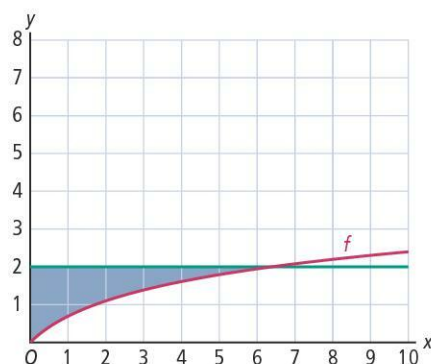
- 17** Het blauwe gebied wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = x^2 + 2$ en de lijn $y = 5$. Het groene gebied krijg je door het blauwe gebied te spiegelen in de lijn $y = x$. Het blauwe gebied wordt gewenteld om de y-as en het groene gebied om de x-as. De inhoud van de omwentelingslichamen die zo ontstaan, zijn gelijk.

- Stel het functievoorschrift op van de functie die hoort bij het spiegelbeeld van de grafiek van f .
- Stel de integraal op waarmee je de inhoud van het omwentelingslichaam kunt berekenen dat ontstaat door het groene gebied te wentelen om de x-as.
- Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door het blauwe gebied te wentelen om de y-as.



- 18** G is het gebied ingesloten door de grafiek van $f(x) = \ln(x + 1)$, de y-as en de lijn $y = 2$. Door G te wentelen om de y-as ontstaat een omwentelingslichaam L . Je kunt de inhoud van L berekenen door G te spiegelen in de lijn $y = x$ en dan te wentelen om de x-as.

- Schets het gebied H dat ontstaat door G te spiegelen in de lijn $y = x$.
- Geef het functievoorschrift van f^{inv} .
- Geef het interval waarover je f^{inv} integreert.
- Bereken exact de inhoud van L .



Aanpak

Hoe bereken je de inhoud van een omwentelingslichaam als je een gebied wentelt om de y -as?

- 1 Spiegel het gebied in de lijn $y = x$.
- 2 Stel het functievoorschrift van de inverse functie op.
- 3 Stel het interval waarover je integreert vast.
- 4 Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door het gespiegelde gebied te wentelen om de x -as.

Voorbeeld

Het gebied ingesloten door de grafiek van $f(x) = x^3$, de y -as en de lijn $y = 8$ wordt gewenteld om de y -as. Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam.

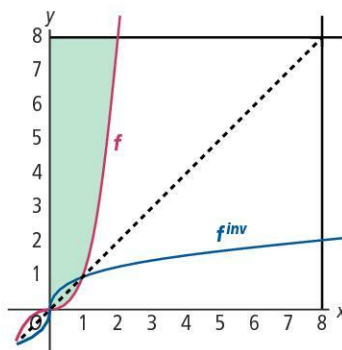
Oplossing

1 Zie het plaatje.

2 $f^{inv}(x) = \sqrt[3]{x}$

3 Het integratie-interval is $[0, 8]$.

4
$$\pi \int_0^8 (\sqrt[3]{x})^2 dx = \pi \int_0^8 x^{\frac{2}{3}} dx = \pi \left[\frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} \right]_0^8 = 19\frac{1}{5}\pi$$



Ondersteunende route → maak opdracht 019

- 19 a G is het gebied ingesloten door de grafiek van de functie

H

$h(x) = \sqrt{x-1}$, de x -as, de y -as en de lijn $y = 5$.

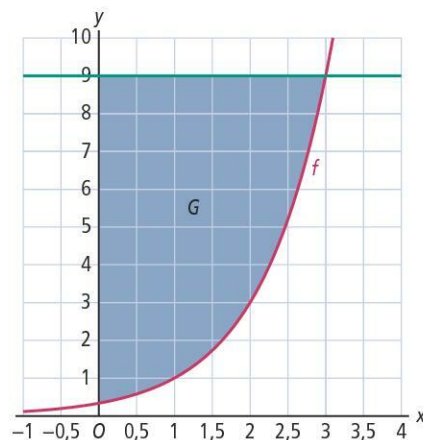
Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als G wordt gewenteld om de y -as.

- b Het gebied ingesloten door de grafiek van de functie $k(x) = \ln(x)$, de x -as en de lijn $x = e$ wordt gewenteld om de y -as.

Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam.

- 20 Gegeven is de functie $f(x) = 3^{x-1}$. Het gebied G wordt begrensd door de grafiek van f , de y -as en de lijn $y = 9$.

- a Bereken in twee decimalen de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als je G wentelt om de y -as.
- b Bereken algebraïsch in twee decimalen de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als je G wentelt om de x -as.



Ondersteunende route → maak opdracht 021

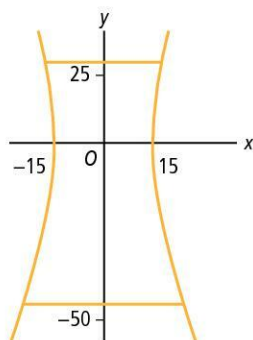
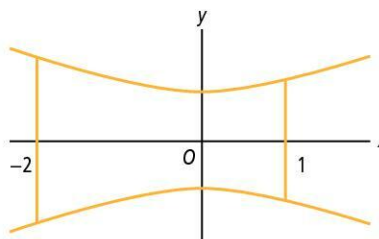
- 21** Gegeven zijn de functies $f(x) = x\sqrt{x}$ en $g(x) = 4\sqrt{x}$.
 G is het gebied dat ingesloten wordt door de grafieken van f en g .

- a** Bereken exact de oppervlakte van G .
b Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als je G wentelt om de y -as.

- 22** Een vat heeft een inwendige vorm van een paraboloid, dat is een parabool die gewenteld is om zijn symmetrieas. De inwendige hoogte is 100 cm en de diameter van de bovenkant is 60 cm. Het vat is met water gevuld tot een hoogte van 50 cm. Er wordt 80 liter water toegevoegd. Ga met een berekening na of het vat overstroomt.



- 23** Een koeltoren bij een elektriciteitscentrale heeft de vorm van een *omwentelingshyperboloïde*. In het model (middelste figuur) is de vergelijking van de hyperbool $25x^2 - 4y^2 = 75^2$ met x en y in meters.



Om het rekenwerk te vereenvoudigen, werk je met een schaal 1: 25. De vergelijking van de hyperbool wordt dan $25x^2 - 4y^2 = 9$.

- a** Om de inhoud uit te rekenen spiegel je de hyperbool in de lijn $y = x$.
 Toon aan dat de bovenste tak van de hyperbool de grafiek is van de functie $f(x) = \frac{1}{5} \sqrt{4x^2 + 9}$.
b Bereken algebraïsch de inhoud van de koeltoren. Rond af op hele m^3 .

Uitdagende route → maak opdracht U4 en U5

Ondersteunende opdrachten

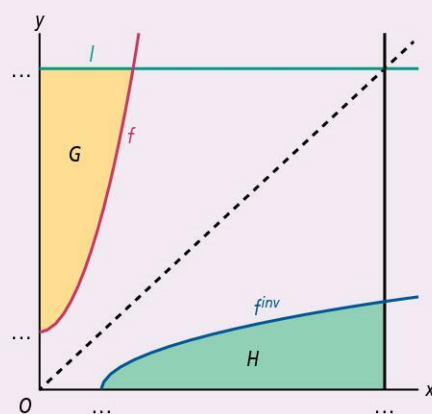
- 019** G is het gebied ingesloten door de grafiek van $f(x) = x^2 + 3$, de y -as en de lijn $l: y = 12$. Je gaat de inhoud berekenen van het omwentelingslichaam dat ontstaat door G te wentelen om de y -as. In de tekening zie je het gebied H dat ontstaat door G te spiegelen in de lijn $y = x$.

- Vul op de puntjes de ontbrekende getallen in.
- Toon aan dat voor de inverse van f geldt:

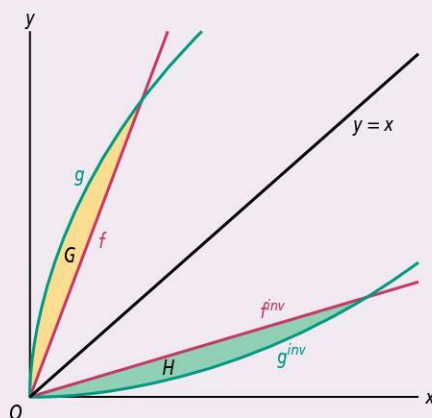
$$f^{inv}(x) = \sqrt{x - 3}.$$
- In plaats van G te wentelen om de y -as kun je ook H wentelen om de x -as. Beide omwentelingslichaamen hebben een even grote inhoud.

$$\text{Vul in: } inh = \pi \int_{\dots}^{\dots} (f^{inv}(x))^2 dx = \pi \int_{\dots}^{\dots} (\dots) dx.$$

- Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door G te wentelen om de y -as



- 021** Gegeven zijn de functies $f(x) = 3x$ en $g(x) = 6\sqrt{x}$. G is het gebied ingesloten door de grafieken van f en g . H is het gebied ingesloten door de grafieken van f^{inv} en g^{inv} .
- Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g .
 - Bereken exact de oppervlakte van G .
 - Stel de functievoorschriften op van f^{inv} en g^{inv} .
 - Welke coördinaten hebben de snijpunten van de grafieken van f^{inv} en g^{inv} ?
 - H wordt gewenteld om de x -as. Stel de integraal op waarmee je de inhoud kunt berekenen van het omwentelingslichaam dat zo ontstaat.
 - Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als je G wentelt om de y -as.



Uitdagende opdrachten

- U4**
- Toon aan dat $G(x) = x \cdot \ln^2(x) - 2x \cdot \ln(x) + 2x$ een primitieve is van $g(x) = \ln^2(x)$.
 - Het gebied ingesloten door de grafiek van $f(x) = e^x$, de y -as en de lijn $y = e^2$ wordt gewenteld om de y -as. Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam.

- U5** G is het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van $f(x) = x$ en $g(x) = x^2$. Onderzoek wanneer je het omwentelingslichaam met de grootste inhoud krijgt, bij wentelen van G om de x -as of bij wentelen van G om de y -as.

18.4 Variabele grenzen

Je leert

- hoe je de onder- of bovengrens van een integraal berekent als de uitkomst van de integraal gegeven is

Leerroutes

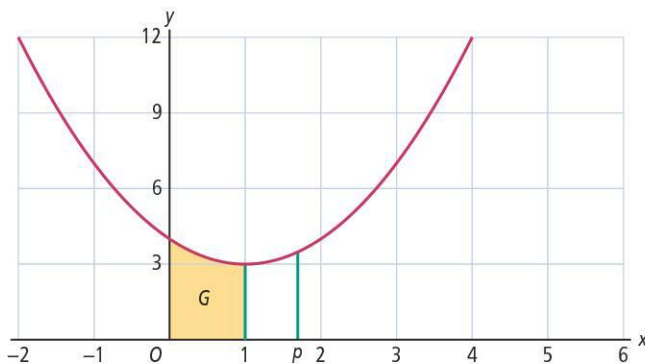
- ondersteunend: 24—025—25—26—27—28—29—30—31
- doorlopend: 24—25—26—27—28—29—30—31—32
- uitdagend: 24—26—27—28—29—30—31—U6—U7

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 2x + 4$.

G is het gebied ingesloten door de assen, de grafiek van f en de lijn $x = 1$.

H is het gebied ingesloten door de assen, de grafiek van f en de lijn $x = p$.

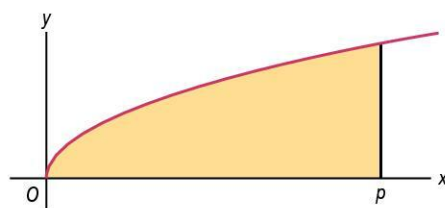
- Voor welke waarde van p is de oppervlakte van H twee keer zo groot als die van G ?
- Is er een waarde van p waarvoor de oppervlakte van H drie keer zo groot is als die van G ? Zo ja, hoe bereken je die?



- 24** A_p is de oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$, de x -as en de lijn $x = p$ met $p > 0$.

a Geef een formule waarmee je A_p uitdrukt in p .

b Los exact op $A_p = 18$.



Theorie

Als in een integraal een boven- of ondergrens p variabel is, dan is de integraal te schrijven als een functie van die grens.

Zo is bijvoorbeeld $\int_1^p f(x) dx = F(p) - F(1)$ een functie g van p :

$$g(p) = F(p) - F(1).$$

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{e^x}$.

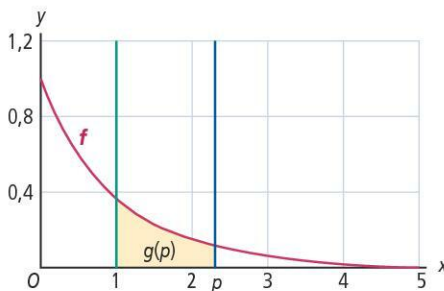
$g(p)$ is de oppervlakte van het gebied ingesloten door de lijnen $x = 1$, $x = p$, de grafiek van f en de x -as.

Geef een functievoorschrift van $g(p)$.

Oplossing

Een primitieve van f is $F(x) = -\frac{1}{e^x}$.

$$g(p) = \int_1^p \frac{1}{e^x} dx = \left[-\frac{1}{e^x} \right]_1^p = -\frac{1}{e^p} + \frac{1}{e}$$



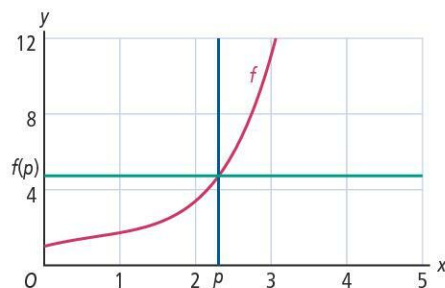
Ondersteunende route → maak opdracht 025

- 25** In de integraal $\int_0^a \cos(x) \, dx$ met $0 < a \leq 2\pi$ is de bovengrens a variabel.

H

Bereken exact voor welke waarde van a geldt $\int_0^a \cos(x) \, dx = 1$.

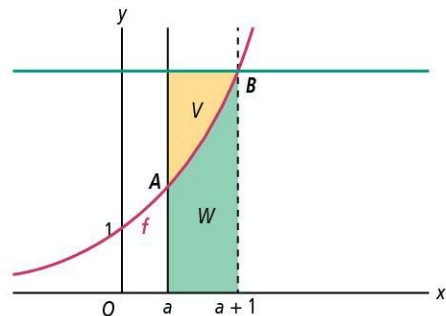
- 26** Gegeven is de functie $f(x) = e^x - x^2$. Op de grafiek van f ligt het punt $P(p, f(p))$. De grafiek van f verdeelt de rechthoek die begrensd wordt door de lijnen $x = p$, $y = f(p)$ en de beide assen, in twee gelijke delen. Bereken de waarde van p met behulp van de primitieve van f . Rond af op twee decimalen.



- 27** Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{x}$. G is het gebied dat ingesloten wordt door de grafiek van f , de x -as en de lijnen $x = p$ en $x = 4p$. Bereken exact de waarde van p in het geval de oppervlakte van G gelijk is aan 5022.

- 28** Gegeven is de functie $f(x) = e^x$. Op de grafiek van f liggen de punten A en B met $x_A = a$ en $x_B = a + 1$. V is het gebied ingesloten door de grafiek van f , de verticale lijn door A en de horizontale lijn door B .

- a** Bereken exact de waarde van a waarvoor de oppervlakte van V gelijk is aan 3.
b W is het gebied ingesloten door de grafiek van f , de x -as, de lijn $x = a$ en de lijn $x = a + 1$. Toon aan dat de verhouding tussen de oppervlakte van W en de oppervlakte van V onafhankelijk is van a .



- 29** Gegeven is lijn $l: y = 4x - 8$. G is het gebied dat ingesloten wordt door l , de y -as en de lijn $y = p$. De inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als je G wentelt om de y -as, is gelijk aan $85\frac{1}{3}\pi$. Bereken exact de waarde van p .

H

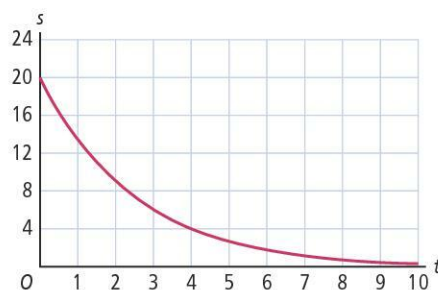


- 30** Bij een chemisch proces wordt een hoeveelheid van de stof cyclopropan omgezet in propeen. Gegeven is de grafiek van de snelheid waarmee het proces plaatsvindt als functie van de tijd. Hierin is s de snelheid in mol per liter per seconde en t de tijd in seconden. In dit geval geldt $s = 20e^{-0,4t}$.

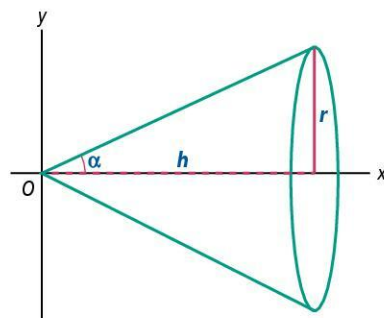
a De hoeveelheid cyclopropan in mol die na p seconden is omgezet is te schrijven als $g(p) = \int_0^p s \, dt$.

Geef een functievoorschrift van g en toon aan dat er uiteindelijk 50 mol cyclopropan wordt omgezet.

b Na hoeveel seconden is de helft van deze hoeveelheid cyclopropan omgezet? Rond af op één decimaal.



- 31** Een kegel ontstaat door een lijn l te wentelen om een as. In een kegel met hoogte h en straal grondcirkel r is een assenstelsel aangebracht met de top in de oorsprong, het grondvlak evenwijdig met de y -as en de hoogte langs de x -as.
- a** Stel een vergelijking op van de lijn door O en het punt (h, r) .
- b** Druk de inhoud van de kegel uit in r en h .
- c** Voor een bepaalde kegel geldt dat de hoek tussen l en de x -as gelijk is aan 30° . Druk de inhoud van deze kegel uit in h .



- 32** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Het gebied ingesloten door de grafiek van f en de x -as wordt gewenteld om de x -as.
- a** Welke vorm heeft dit omwentelingslichaam?
- b** Druk de inhoud van het omwentelingslichaam uit in r .
- c** Stel een integraal op waarmee je een formule voor de inhoud van een cilinder met straal r en hoogte h kunt afleiden en geef deze formule.

Uitdagende route → maak opdracht U6 en U7

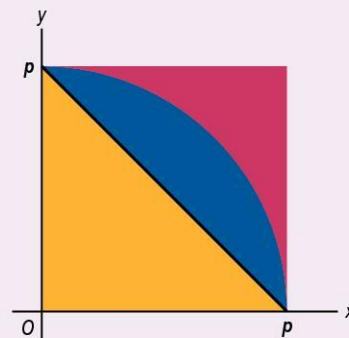
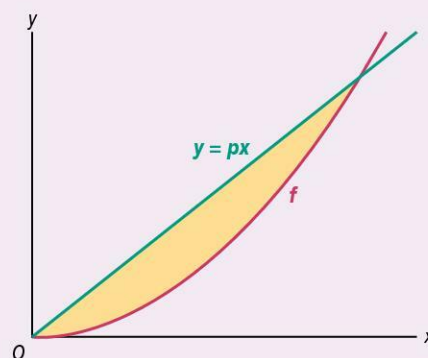
Ondersteunende opdrachten

- 025** In de integraal $\int_7^p \sqrt{4x-12} \, dx$ is de bovengrens p variabel.
In deze opdracht ga je exact berekenen voor welke waarde van p de integraal gelijk is aan $25\frac{1}{3}$.
- a** Op het blaadje wordt in stap 2 en 3 de primitieve bepaald van $f(x) = \sqrt{4x-12}$.
Leg uit waarom er met $\frac{1}{4}$ en $\frac{2}{3}$ vermenigvuldigd wordt.
- b** In de stappen 4 en 5 wordt de uitkomst van de integraal uitgedrukt in p .
Vul stap 5 verder in.
- c** Stel de uitdrukking in stap 5 gelijk aan $25\frac{1}{3}$ en los de vergelijking die je zo krijgt exact op.

☐	$f(x) = \sqrt{4x-12}$		
☐	$f(x) = (4x-12)^{\frac{1}{2}}$		1
☐	$F(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot (4x-12)^{\frac{1}{2}}$		2
☐	$F(x) = \frac{1}{6} (4x-12)^{\frac{1}{2}}$		3
☐	$\int_7^p \sqrt{4x-12} \, dx = \left[\frac{1}{6} (4x-12)^{\frac{1}{2}} \right]_7^p =$		4
☐	$\frac{1}{6} (\dots - 12)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6} \dots^{\frac{1}{2}}$		5

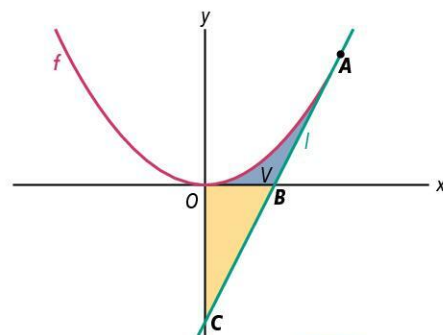
Uitdagende opdrachten

- U6** Een vierkant met zijde p is door een diagonaal en een kwart cirkel verdeeld in drie gebieden.
- a** Toon met behulp van integralen aan dat de inhoud van de drie omwentelingslichamen die ontstaan door elk van de drie gebieden om de x -as te wentelen aan elkaar gelijk zijn.
- b** Toon zonder gebruik te maken van integralen aan dat de inhoud van de drie omwentelingslichamen die ontstaan door elk van de drie gebieden om de x -as te wentelen aan elkaar gelijk zijn.
- U7** Het gebied ingesloten door de grafiek van $f(x) = x^2$ en de lijn $y = px$ (met $p > 0$) wordt gewenteld om de x -as. De inhoud van het omwentelingslichaam is 4π .
Bereken exact de waarde van p .



- 33** Gegeven is de functie $f(x) = x^2$. Lijn l raakt de grafiek van f in het punt A . Punt B is het snijpunt van l met de x -as en punt C is het snijpunt van l met de y -as. V is het vlakdeel ingesloten door de x -as, de grafiek van f en lijn l .

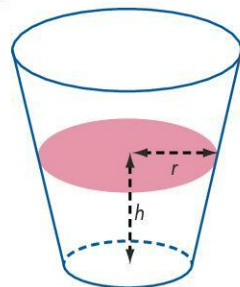
- Bereken de oppervlakte van V als $A(3,9)$.
Laat vervolgens zien dat $\text{opp}(\triangle OBC) : \text{opp}(V) = 3 : 1$.
- V_p is oppervlakte van het vlakdeel V voor $x_A = p$.
Druk de coördinaten van A , B en C uit in p .
- Toon aan dat voor elke waarde van p geldt:
 $\text{opp}(\triangle OBC) : \text{opp}(V_p) = 3 : 1$.



- 34** Een emmer is 40 cm hoog. De straal van de bodem is 10 cm en de straal van de bovenkant is 20 cm.

Je kunt de emmer opvatten als een omwentelingslichaam dat ontstaat door een geschikte lijn te wentelen om de x -as.

- Bereken algebraïsch de inhoud van de emmer, afgerond op hele cm^3 .
- Geef je antwoord ook in hele liters.

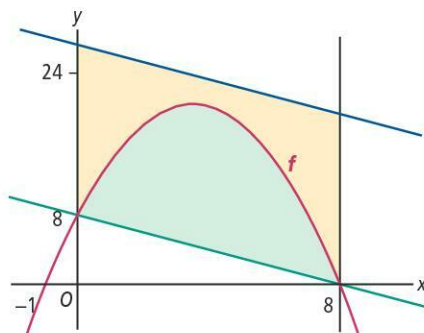


- 35** Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$. G is het gebied, ingesloten door de grafiek van f en de positieve x -as.

- Toon aan dat de functie $F(x) = -\frac{1}{3}(4-x^2)\sqrt{4-x^2}$ een primitieve van f is.
- Bereken exact de oppervlakte van G .
- Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als je G om de x -as wentelt.

- 36** Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 7x + 8$.

- Toon aan dat de lijn $y = 24 - x$ de grafiek van f raakt.
- De lijnen $x = 0$, $x = 8$, $y = 8 - x$ en de lijn $y = b - x$ met $b \geq 24$ sluiten een gebied in dat door de grafiek van f in twee delen met gelijke oppervlakte wordt verdeeld. Bereken exact de waarde van b .



- 37** Gegeven is de functie $f(x) = {}^3\log(x)$. Ook zonder dat je een

primitieve van f kent, kun je de integraal $\int_9^{81} f(x) dx$ exact

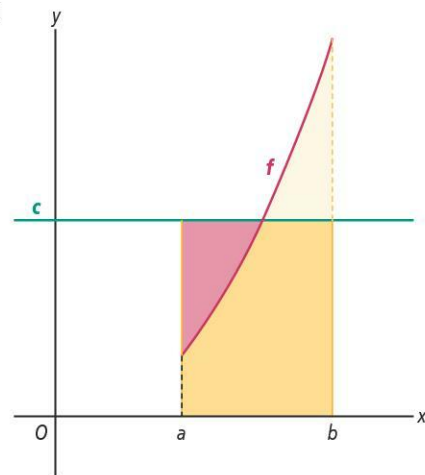
berekenen, namelijk door gebruik te maken van f^{inv} .

Maak een schets en bereken exact $\int_9^{81} f(x) dx$.

- 38** Voor een functie f met functiewaarden die groter dan of gelijk aan nul zijn op een interval $[a, b]$, wordt de gemiddelde functiewaarde c op $[a, b]$ als volgt gedefinieerd:

Er is een constante functie g met $g(x) = c$ waarvoor geldt dat de oppervlakte onder de grafiek van f even groot is als de oppervlakte onder de grafiek van g op het interval $[a, b]$.

- Bereken exact de gemiddelde functiewaarde van de functie $f(x) = 1 + \sin\left(\frac{1}{4}x\right)$ op het interval $[0, 4\pi]$.
- Bereken p als de gemiddelde functiewaarde van $h(x) = \sqrt{p-x}$ op het interval $[0, p]$ gelijk is aan 6.
- Onderzoek of er functies zijn waarvan de gemiddelde functiewaarde op het interval $[0, p]$ gelijk is aan $\frac{1}{2}p$.



- 39** Op de foto zie je een *torus*. Een torus is een omwentelingslichaam dat ontstaat door een cirkel die de x -as niet snijdt, te wentelen om de x -as. In deze opdracht ga je de stelling bewijzen:
- inhoud torus = lengte van de baan van $M \times$ oppervlakte van de cirkel, met M het middelpunt van de cirkel.*

Gegeven is de cirkel met vergelijking $x^2 + (y - 3)^2 = 4$. De bovenste helft van de cirkel is de grafiek van

$$f(x) = 3 + \sqrt{4 - x^2}.$$

- Geef het functievoorschrift van de functie g die bij de onderste helft van de cirkel hoort.
- De cirkel wordt gewenteld om de x -as. Er ontstaat dan een torus met als inhoud $\pi \int_{-2}^2 ((f(x))^2 - (g(x))^2) dx$.

Toon aan dat $(f(x))^2 - (g(x))^2 = 12\sqrt{4 - x^2}$.

- $\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx$ is de oppervlakte van een halve cirkel met straal 2.

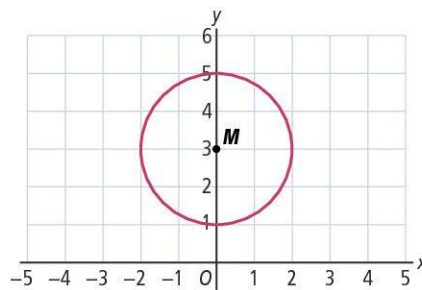
Gebruik dit en het resultaat van opdracht b om aan te tonen dat de inhoud van de torus gelijk is aan $24\pi^2$.

- De cirkel $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ ($R \geq r$) wordt gewenteld om de x -as.

Laat zien dat de inhoud van de torus gelijk is aan

$$2\pi \int_0^r ((f(x))^2 - (g(x))^2) dx = 8\pi R \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2\pi R \cdot \pi r^2.$$

- Ga na dat met het resultaat van opdracht d de stelling bewezen is.



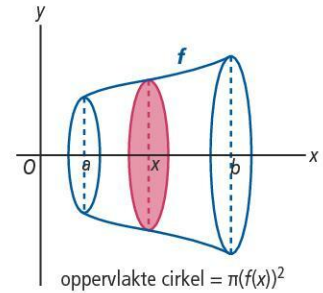
Theorie

Omwentelingslichaam

Als je een gebied, ingesloten door de grafiek van een functie f , de x -as en de lijnen $x = a$ en $x = b$, om de x -as wentelt, ontstaat een omwentelingslichaam.

De inhoud van dit lichaam bereken je met de integraal

$$\int_a^b \pi (f(x))^2 dx \text{ of } \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$



- S1** G is het gebied ingesloten door de x -as, de lijn $x = 9$ en de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{x}$. Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam als G wordt gewenteld om de x -as.

Vaardigheid

Je kunt de oppervlakte berekenen van een gebied dat ingesloten wordt door meerdere grafieken.

- Voor een gebied dat geheel onder de x -as ligt en ingesloten wordt door de grafiek van een functie f en de x -as geldt $opp = -\int_a^b f(x) dx$.
- Voor een gebied dat ingesloten wordt door de grafieken van twee functies f en g waarbij de grafiek van f boven de grafiek van g ligt geldt $opp = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$.
- Soms is het nodig een gebied in meerdere gebieden op te splitsen.

Voorbeeld

G is het gebied ingesloten door de y -as, de lijn $y = 4$ en de grafieken van de functies $f(x) = 2^{x-2}$ en $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Bereken exact de oppervlakte van G .

Oplossing

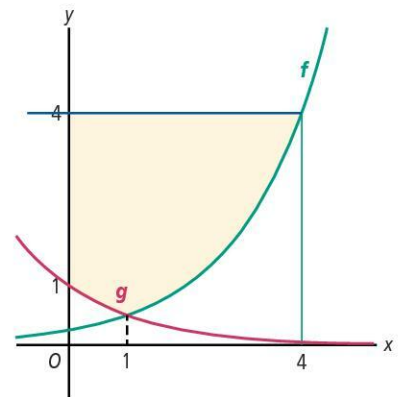
$$2^{x-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x} \text{ geeft } x = 1.$$

De grafiek van f snijdt de lijn $y = 4$ bij $x = 4$.

$$\int_0^1 (4 - 2^{-x}) dx + \int_1^4 (4 - 2^{x-2}) dx = \left[4x - \frac{-2^{-x}}{\ln(2)} \right]_0^1 + \left[4x - \frac{2^{x-2}}{\ln(2)} \right]_1^4 =$$

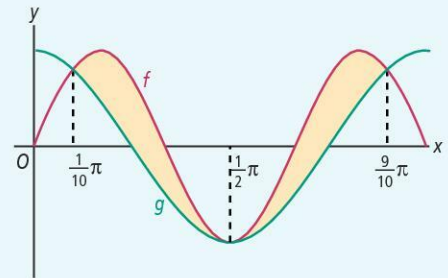
$$\left(4 + \frac{\frac{1}{2}}{\ln(2)} - \left(0 + \frac{1}{\ln(2)}\right)\right) + \left(16 - \frac{\frac{1}{16}}{\ln(2)} - \left(4 - \frac{\frac{1}{4}}{\ln(2)}\right)\right) = 16 - \frac{5}{16 \ln(2)}$$

De oppervlakte van G is $16 - \frac{5}{16 \ln(2)}$



- S2** Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin(3x)$ en $g(x) = \cos(2x)$ op het interval $[0, \pi]$. De grafieken snijden elkaar bij $x = \frac{1}{10}\pi$ en $x = \frac{9}{10}\pi$ en raken elkaar bij $x = \frac{1}{2}\pi$.

G is het totale gebied dat begrensd wordt door de grafieken van f en g .
Bereken algebraïsch de oppervlakte van G . Rond af op twee decimalen.



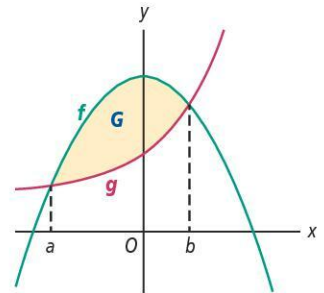
Vaardigheid

Je kunt de inhoud van een omwentelingslichaam berekenen bij wentelen om de x -as.

Een gebied G , dat geheel boven de x -as ligt, wordt ingesloten door de grafieken van de functies f en g , waarbij de grafiek van f boven de grafiek van g ligt. De inhoud van het lichaam dat ontstaat door G om de x -as te wentelen bereken je met

$$\pi \int_a^b ((f(x))^2 - (g(x))^2) dx \text{ of met } \pi \int_a^b (f(x))^2 dx - \pi \int_a^b (g(x))^2 dx,$$

waarin a en b de x -coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn.



Voorbeeld

G is het gebied ingesloten door de grafieken van $f(x) = x\sqrt{x}$ en $g(x) = 2x$.

G wordt gewenteld om de x -as.

Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam.

Oplossing

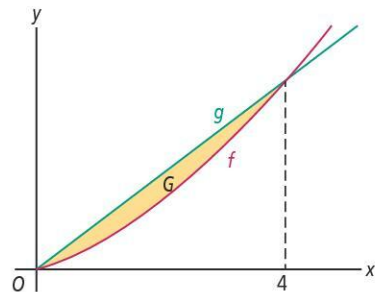
$x\sqrt{x} = 2x$ geeft $x = 0$ of $\sqrt{x} = 2$ dus de grafieken van f en g snijden elkaar bij $x = 0$ en $x = 4$.

Op het interval $[0, 4]$ ligt de grafiek van g boven de grafiek van f .

$$\pi \int_0^4 ((2x)^2 - (x\sqrt{x})^2) dx = \pi \int_0^4 (4x^2 - x^3) dx =$$

$$\pi \left[\frac{4}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^4 = \pi \left(\frac{4}{3} \cdot 64 - 64 \right) = 21\frac{1}{3} \pi$$

De inhoud van het omwentelingslichaam is $21\frac{1}{3} \pi$.



- S3** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ en $g(x) = 18 + 3\sqrt{x}$.

- Toon aan dat de grafieken elkaar snijden in het punt $(9, 27)$.
- G is het gebied dat ingesloten wordt door de y -as en de grafieken van f en g . G wordt gewenteld om de x -as. Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam.

Vaardigheid

Je kunt de inhoud van een omwentelingslichaam berekenen als je een gebied wentelt om de y -as.

- 1 Spiegel het gebied in de lijn $y = x$.
- 2 Stel het functievoorschrift van de inverse functie op.
- 3 Stel het interval waarover je integreert vast.
- 4 Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door het gespiegelde gebied te wentelen om de x -as.

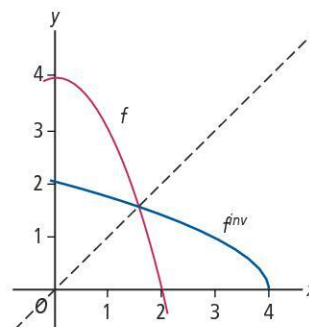
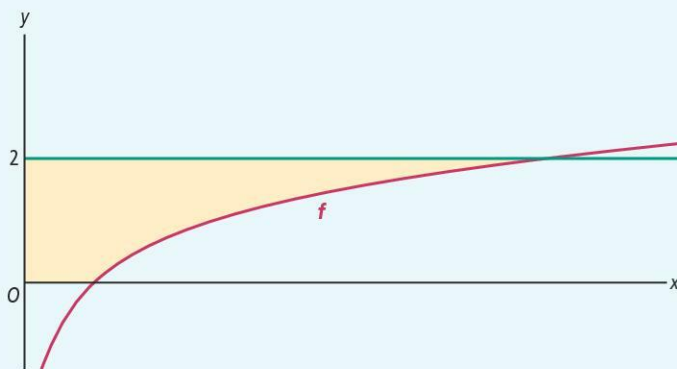
Voorbeeld

Het gebied ingesloten door de grafiek van $f(x) = 4 - x^2$ en de beide assen wordt gewenteld om de y -as. Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam.

Oplossing

- 1 Zie de grafieken.
- 2 $f^{inv}(x) = \sqrt{4 - x}$
- 3 Het integratie-interval is $[0, 4]$.
- 4
$$\pi \int_0^4 (\sqrt{4 - x})^2 dx = \pi \int_0^4 (4 - x) dx =$$
$$\pi \left[4x - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^4 = \pi (8 - 0) = 8\pi$$

De inhoud is 8π .



- S4** Gegeven is de functie $f(x) = \ln(x)$. Het gebied ingesloten door beide assen, de grafiek van f en de lijn $y = 2$ wordt gewenteld om de y -as. Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam.

Vaardigheid

Je kunt de onder- of bovengrens van een integraal berekenen als de uitkomst van de integraal gegeven is.

Als in een integraal een boven- of ondergrens p variabel is, dan is de integraal te schrijven als een functie van die grens.

Zo is bijvoorbeeld $\int_1^p f(x) \, dx = F(p) - F(1)$ een functie g van p :

$$g(p) = F(p) - F(1).$$

Voorbeeld

Gegeven is de functie $g(p) = \int_e^p \frac{4}{x} \, dx$ met $p > e$.

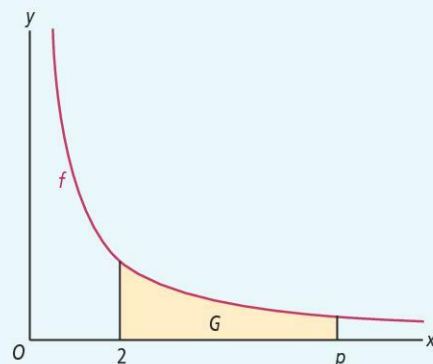
Los exact op $g(p) = 8$.

Oplossing

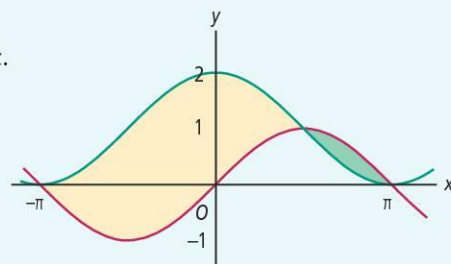
$$g(p) = [4 \ln(x)]_e^p = 4 \ln(p) - 4$$

$4 \ln(p) - 4 = 8$ geeft $\ln(p) = 3$, dus $p = e^3$.

- S5** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{8}{x}$.
 G is het gebied ingesloten door de x -as, de grafiek van f en de lijnen $x = 2$ en $x = p$.
- a** Neem $p = 6$ en bereken exact de oppervlakte van G .
 - b** Bereken exact de waarde van p in het geval de oppervlakte van G gelijk is aan 24.
 - c** G wordt gewenteld om de x -as.
Bereken exact de waarde van p in het geval de inhoud van het omwentelingslichaam gelijk is aan 24π .

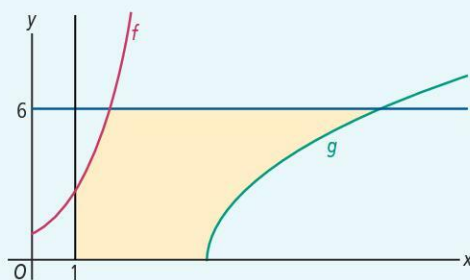


- T1** Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x) = \sin(x)$ en $h(x) = 1 + \cos(x)$, die elkaar snijden bij $x = -\pi$, $x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = \pi$.
De grafieken sluiten een geel en een groen gebied in.
Bereken exact de oppervlakte van elk van deze twee gebieden.



- T2** Het gebied ingesloten door de grafiek van $f(x) = x^2 - 4$ en de x -as wordt gewenteld om de x -as.
Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam.

- T3** De grafieken van $f(x) = e^x$, $g(x) = 3\sqrt{x-4}$ en de lijnen $y = 6$ en $x = 1$ sluiten een gebied in.
Bereken exact de oppervlakte van dit gebied.

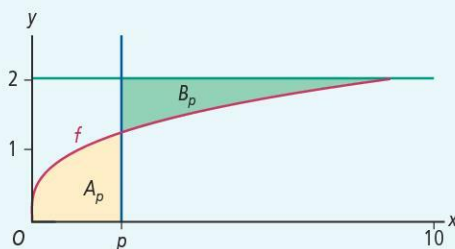


- T4** Gegeven is de functie $f(x) = 1 + \frac{4}{x+2}$.
 G is het gebied dat begrensd wordt door de grafiek van f en de lijnen $x = 0$, $x = 2$ en $y = 1$.
a Plot en schets de grafiek van f . Schets ook de lijnen $x = 2$ en $y = 1$.
b Laat zien dat $f^{inv}(x) = -2 + \frac{4}{x-1}$.
c Bereken exact de inhoud van het lichaam dat ontstaat als je G wentelt om de y -as.

- T5** A_p is het vlakdeel, ingesloten door de grafiek van $f(x) = \sqrt[3]{x}$, de x -as en de lijn $x = p$.

B_p is het vlakdeel, ingesloten door de grafiek van f en de lijnen $y = 2$ en $x = p$.

- a Bereken in twee decimalen de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door A_2 om de x -as te wentelen.
b Bereken in twee decimalen de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door B_4 om de x -as te wentelen.
c A_p en B_p worden beide gewenteld om de x -as. Bereken exact de waarde van p waarvoor beide omwentelingslichamen dezelfde inhoud hebben.

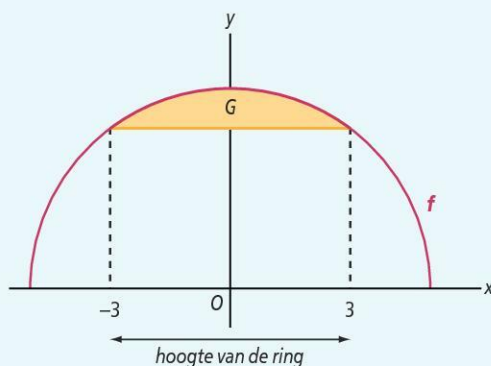


- T6** Gegeven is de bol met middelpunt O en straal 5. De bol wordt horizontaal doorboord door een cilinder zo, dat de overblijvende ring een hoogte 6 heeft.

De ring is het omwentelingslichaam van het gebied G tussen de grafiek van de functie

$$f(x) = \sqrt{25 - x^2} \text{ en de lijn } y = p.$$

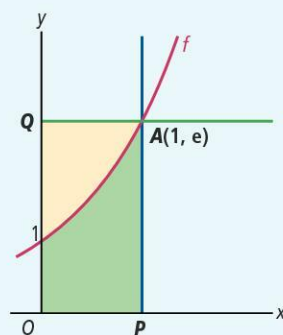
- Bereken p exact.
- Bereken exact de inhoud van de ring.
- Kies nu de straal r van de bol variabel met $r > 3$, de hoogte van de ring blijft 6. Toon aan dat de inhoud van de ring niet verandert.



- T7** De grafiek van de functie $g(x) = \frac{4}{x+3}$, de x -as en de lijnen $x = 1$ en $x = a$ sluiten een gebied in. Als je het gebied wentelt om de x -as ontstaat een omwentelingslichaam met inhoud I_a .

- Bereken exact I_4 .
- Schrijf I_a als functie van a .
- Los exact op $I_a = 2\pi$.

- T8** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = e^x$. De punten P en Q zijn de loodrechte projecties van $A(1, e)$ op respectievelijk de x -as en de y -as. De rechthoek $OPAQ$ wordt door de grafiek van f in twee stukken verdeeld. Beide stukken worden gewenteld om de x -as. Bereken exact het verschil tussen de inhoud van de omwentelingslichamen.



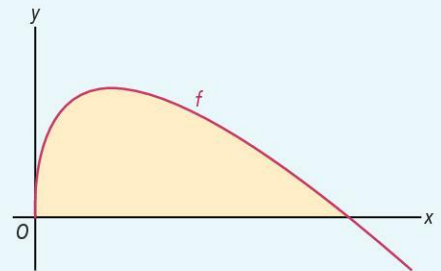
- T9** De grafiek van $f(x) = \sin(2x)$ sluit op het interval $[0, \frac{1}{2}\pi]$ samen met de x -as een gebied G in. G wordt door de lijn $x = p$ verdeeld in twee stukken waarvan de oppervlakten zich verhouden als 2 : 1. Bereken algebraïsch de (twee) waarden van p . Rond af op twee decimalen.

Je kunt de oppervlakte berekenen van een gebied dat ingesloten wordt door meerdere grafieken.

- E1** Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 - 4$ en $g(x) = \sqrt{5x + 10}$.
- Plot en schets de grafieken van f en g .
 - Bereken exact de oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van f en de x -as.
 - De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten A en B . Lees de coördinaten van A en B af en controleer deze met een berekening.
 - Stel een integraal op waarmee je de oppervlakte van het gebied dat wordt begrensd door de grafieken van f en g kunt berekenen.
 - Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g .

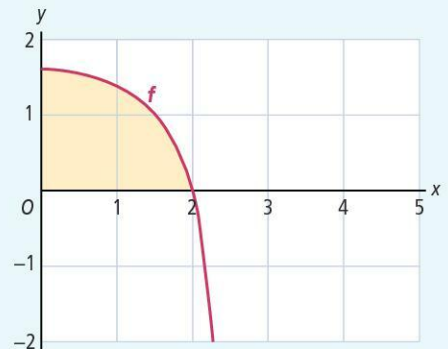
Je kunt de inhoud van een omwentelingslichaam berekenen bij wentelen om de x -as.

- E2** Gegeven is de functie $f(x) = 4\sqrt{x} - x$.
- Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x -as.
 - Het gebied uit opdracht a wordt gewenteld om de x -as. Hierdoor ontstaat het omwentelingslichaam A . Stel de integraal op waarmee je de inhoud van A kunt berekenen.
 - Bereken exact de inhoud van A .



Je kunt de inhoud van een omwentelingslichaam berekenen als je een gebied wentelt om de y -as.

- E3** Voor $x \geq 0$ is gegeven is de functie $f(x) = \ln(5 - x^2)$. G is het gebied ingesloten door de grafiek van f en de beide assen. G wordt gewenteld om de y -as.
- Stel het functievoorschrift op van f^{inv} .
 - Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam met behulp van f^{inv} .



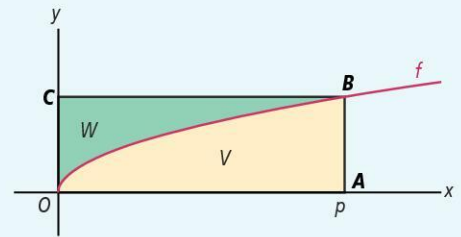
Je kunt de onder- of bovengrens van een integraal berekenen als de uitkomst van de integraal gegeven is.

- E4** Bereken exact de waarde van p als gegeven is

$$\int_1^p \frac{4}{(2x+1)^2} dx = \frac{1}{3}.$$

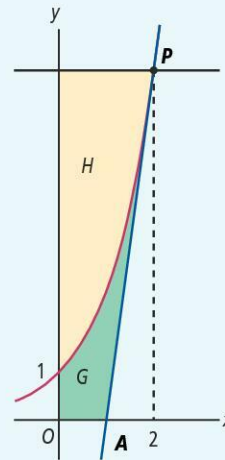
E5 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x}$. De lijn $x = p$ snijdt de x -as in A en de grafiek van f in B . De lijn door B evenwijdig aan de x -as snijdt de y -as in C . De grafiek van f verdeelt rechthoek $OABC$ in twee gebieden V en W .

- Bewijs dat voor elke waarde van p de oppervlakte van V twee keer zo groot is als de oppervlakte van W .
- Beide gebieden worden gewenteld om de x as. Bewijs dat voor elke waarde van p beide omwentelingslichamen dezelfde inhoud hebben.



E6 Gegeven is de functie $f(x) = e^x$.

- De raaklijn l in het punt $P(2, e^2)$ snijdt de x -as in het punt A . Bereken exact de x -coördinaat van A .
- Bereken exact de oppervlakte van het gebied G dat wordt ingesloten door de beide assen, de grafiek van f en l .
- H is het gebied ingesloten door de grafiek van f , de y -as en de lijn $y = e^2$. Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als H wordt gewenteld om de x -as.



E7 Gegeven zijn de functies

$$f(x) = 4 + \sqrt{3x}, \quad g(x) = -4x + 19 \quad \text{en} \quad h(x) = (x - 1)(x - 3).$$

De grafieken van f , g en h sluiten samen met de y -as een gebied G in.

Bereken exact de oppervlakte van G .

E8 De Spaanse architect Antoni Gaudí (1852-1926) maakte in zijn ontwerpen veel gebruik van de *kettinglijn*. De kettinglijn is de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

- Plot en schets de grafiek van $g(x) = 10 - f(x)$.
- Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de x -as. Rond af op een geheel getal.
- Gebruik de in opdracht b gevonden waarden en bereken algebraïsch de oppervlakte van het gebied, ingesloten door de grafiek van g en de x -as. Rond het antwoord af op een geheel getal.
- De kettinglijn lijkt erg op een parabool. Schets in de figuur van opdracht a de parabool $y = 9 - x^2$.
- Bereken het verschil tussen het antwoord op opdracht c en de exacte oppervlakte van het gebied tussen de parabool en de x -as.

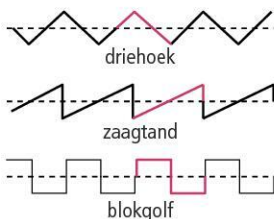


Fourier

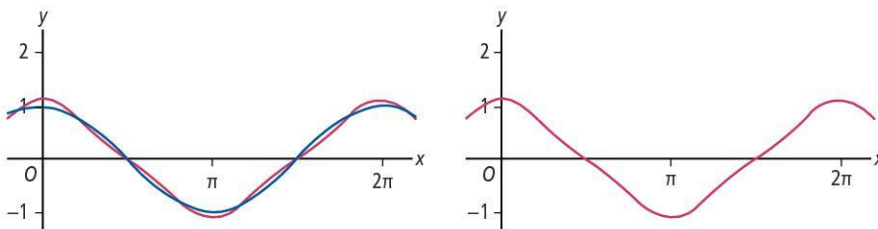
Sinus en cosinus worden gebruikt als wiskundig model voor periodieke verschijnselen.

De Franse wiskundige Joseph Fourier (1768 – 1830) publiceerde in 1822 een baanbrekend boek over warmtetheorie: *Théorie analytique de la chaleur*.

Daarbij ontwikkelde hij een methode om periodieke functies zoals de driehoeksgolf, de zaagtand en de blok golf te benaderen met een (oneindige) som van sinussen en/of cosinussen.



Links zijn gegeven de grafieken van $f(x) = \cos(x)$ en $g(x) = \cos(x) + \frac{1}{9} \cos(3x)$.



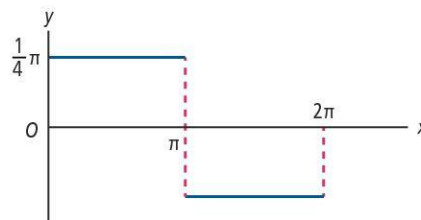
Je ziet dat de grafiek van g de driehoeksgolf al aardig benadert. De benadering wordt beter (rechts) als je er nog een term aan toevoegt: $h(x) = \cos(x) + \frac{1}{9} \cos(3x) + \frac{1}{25} \cos(5x)$.

Opdracht

Bij de getekende *blok golf* hoort de functie

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}\pi & \text{als } 0 < t < \pi \\ -\frac{1}{4}\pi & \text{als } \pi < t < 2\pi \end{cases} \text{ met periode } 2\pi.$$

- Plot de lijn $y = \frac{1}{4}\pi$ en in hetzelfde scherm de grafieken van de functies: $y = \sin(t)$, $y = \sin(t) + \frac{1}{3} \sin(3t)$ en $y = \sin(t) + \frac{1}{3} \sin(3t) + \frac{1}{5} \sin(5t) + \frac{1}{7} \sin(7t)$
- Hoe meer termen van de vorm $\frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)t)$ je toevoegt, des te nauwkeuriger wordt je benadering. Voeg nog twee termen toe en plot de grafiek.



In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Lijnen
- Machtsverbanden
- Sinus- en cosinusregel
- Differentiëren



Lijnen

- 1 Bij lijn l hoort de vergelijking $2x - 5y = 24$ en bij lijn m hoort de vergelijking $y = -3x + 2$.
Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen l en m .

- 2 Los exact op met elimineren.

a
$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

b
$$\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ 4y - x = 5\frac{1}{3} \end{cases}$$

Theorie

Je kunt bij het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen uitkomen op een vergelijking van de vorm $0 \cdot x = a$.

Als $a = 0$, dan heeft het stelsel oneindig veel oplossingen en vallen de bijbehorende lijnen samen. Het stelsel heet dan afhankelijk.

Als $a \neq 0$ dan heeft het stelsel géén oplossing en zijn de bijbehorende lijnen evenwijdig. Het stelsel heet dan strijdig.

$0 \cdot x = 0$
oneindig veel
oplossingen



$0 \cdot x = a$ met $a \neq 0$
géén oplossingen



- 3 Onderzoek voor welke waarden van p , q en r de stelsels strijdig of afhankelijk zijn.

a
$$\begin{cases} x - py = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

b
$$\begin{cases} qx + 3y = 4 \\ 3y = 3x + 7 \end{cases}$$

c
$$\begin{cases} rx + 3y = 1\frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} - y \end{cases}$$

- 4 Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen l en m .

a $l: 6x - y = 8$ en $m: 4y + 6x = 12$

b $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $m: 2y + 5x = 1$

c $l: \frac{x}{-1} - \frac{y}{2\frac{1}{2}} = 1$ en $m: \frac{x}{-6} - \frac{y}{3} = 1$

- 5 a Gegeven zijn lijn $l: 4x - 10y = 5$ en punt $P(1, 2)$.
Stel een vergelijking op van loodlijn m door P op lijn l .

b Gegeven zijn de lijnen $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ en $m: 4x + 7y = 14$.

Toon aan dat de lijnen l en m loodrecht op elkaar staan.

- c Op lijn $n: 2x - \frac{1}{3}y = 3$ liggen de punten $P(2, 3)$ en $Q(-2, -21)$.
Stel een vectorvoorstelling op van de lijn die door het midden van lijnstuk PQ gaat en loodrecht op n staat.

Machtsverbanden

- 6 In de tabel is een aantal meetresultaten gegeven. Neem aan dat de bijbehorende formule de vorm $N = c \cdot t^a$ heeft.

t	1	4	7	16
N	36	203,65	409,9	1152

- Met welke waarden voor t en N kun je c berekenen?
- Bereken exact de waarde van c en van a .
- Welke waarde heeft N bij $t = 17$? Rond je antwoord af op een geheel getal.

- 7 Als l recht evenredig is met k , dan geldt $l = a \cdot k$.

- De bijbehorende grafiek gaat door het punt $(k, l) = (10, 25)$. Bereken a .
- Als k vier keer zo groot wordt, wat weet je dan over l ?

Als p recht evenredig is met q^2 , dan geldt $p = b \cdot q^2$.

- De grafiek gaat door $(q, p) = (5, 100)$. Bereken b .
- Als q vier keer zo groot wordt, wat gebeurt er dan met p ?

Theorie

Als voor twee variabelen P en Q geldt dat Q evenredig is met P^a , dan is er een machtsverband tussen P en Q van de vorm $Q = c \cdot P^a$. Er geldt: als de variabele P een factor k keer zo groot wordt, dan wordt de variabele Q een factor k^a keer zo groot. Bij gegeven waarden van P en Q kun je de waarde van a en van de evenredigheidsconstante c berekenen.

Voorbeeld

De grafiek van een machtsverband $y = c \cdot x^a$ gaat door de punten $(2, 40)$ en $(3, 135)$. Bereken a en c .

Oplossing

$x = 2$ en $y = 40$ geeft $40 = c \cdot 2^a$.

$x = 3$ en $y = 135$ geeft $135 = c \cdot 3^a$.

Delen geeft $\frac{40}{135} = \frac{c \cdot 2^a}{c \cdot 3^a}$ en uit

$$\frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^a \text{ volgt } a = 3.$$

Punt $(2, 40)$ invullen in $y = c \cdot x^3$ geeft $40 = c \cdot 2^3$ en dus $c = 5$.

- p is evenredig met k^3 . Bij $k = 2$ is $p = 12$.
Stel een formule op voor het verband tussen p en k .
- De grafiek van een machtsverband $y = c \cdot x^a$ gaat door de punten $(2, 48)$ en $(4, 768)$.
Bereken a en c .

- 9 Bij experimenten met het opwekken van elektriciteit door middel van windmolens is onderzocht hoe het door de windmolens geleverde vermogen P afhangt van de lengte L van de wieken en van de windsnelheid v (bij gelijke luchtdichtheid).
Bij een bepaald type windmolens bleek het opgewekte vermogen P (in W) evenredig te zijn met het kwadraat van de lengte van de wieken L (in m) en met de derdemacht van de windsnelheid v (in m/s).

- Stel voor een windmolen die $P = 6 \cdot 10^5$ W levert bij $L = 20$ m en $v = 12$ m/s een formule op.
- Bereken met hoeveel procent het geleverde vermogen van een windmolen afneemt als de windsnelheid afneemt met 20%.

Sinus- en cosinusregel

Theorie

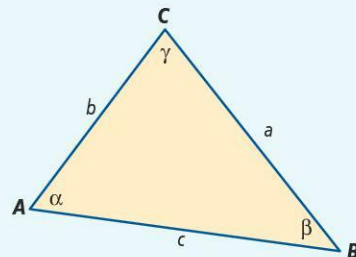
In een driehoek ABC met zijden a , b , en c en hoeken α , β en γ

gelden de sinusregel: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

en de cosinusregel: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$

of $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$

of $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$



Voorbeeld

In $\triangle ABC$ geldt $a=15$, $c=13$ en $\gamma=58^\circ$.

Bereken de overige zijde en hoeken in deze driehoek.

Oplossing

$\frac{15}{\sin(\alpha)} = \frac{13}{\sin(58^\circ)}$ geeft $\sin(\alpha) \approx 0,9785$ dus $\alpha \approx 78^\circ$ en $\beta \approx 180 - 58 - 78 = 44^\circ$.

$b^2 \approx 15^2 + 13^2 - 2 \cdot 15 \cdot 13 \cdot \cos(44^\circ) \approx 113,46$ dus $b \approx 10,7$.

10 Bereken in één decimaal de lengte van de onbekende zijde(n).

- a $\triangle ABC$ met $a=5$, $b=6$ en $\gamma=67^\circ$
- b $\triangle ABC$ met $b=10$, $c=13$ en $\alpha=22^\circ$
- c $\triangle ABC$ met $a=8$, $b=11$ en $\beta=56^\circ$
- d $\triangle ABC$ met $\beta=55^\circ$, $\gamma=61^\circ$ en $c=23$

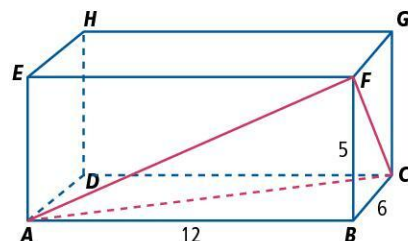
11 Bereken van elke driehoek de hoeken in hele graden.

- a $\triangle ABC$ met $a=10$, $b=13$ en $c=17$
- b $\triangle ABC$ met $a=33$, $b=65$ en $c=56$
- c $\triangle ABC$ met $a=7$, $b=9$ en $c=14$

12 Van de balk $ABCD.EFGH$ is gegeven: $AB=12$, $BC=6$ en $BF=5$.

Bereken de grootte van de hoeken van $\triangle ACF$.

13 Een vlieger $ABCD$ heeft twee zijden met lengte 13 en twee zijden met lengte 15. De lengte van één van de diagonalen is 24. De vlieger kan twee verschillende vormen hebben. Bereken voor beide vormen de lengte van de andere diagonaal.



Differentiëren

- 14** Differentieer.
- a** $f(x) = 5x^4 - 4x^5 + 20$ **e** $m(x) = 3x + e^{4x-x^2}$
- b** $g(x) = \frac{3}{x^2} + 4x\sqrt{x}$ **f** $n(x) = x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$
- c** $h(x) = (2 - 2x) \cdot \ln(2x)$ **g** $p(x) = \frac{1 - \sin(2x)}{1 + \sin(2x)}$
- d** $k(x) = \frac{2x^2 + 3x}{\frac{1}{2}x - 1}$ **h** $q(x) = \frac{2}{\cos(5x)}$
- 15** Bereken exact de extreme waarden. Vermeld ook eventuele randextremen.
- a** $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2 + 1$
- b** $g(x) = \frac{1-x}{3+x^2}$
- c** $h(x) = \sqrt{-x^4 + 4x^2 + 5}$
- d** $k(x) = 2\cos^3(x) - 3\cos(x)$ op het interval $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$.
- 16** Geef de extreme waarden.
- a** $f(x) = |-x^3 + 6x^2 - 9x|$
- b** $g(x) = |-6x + 2x\sqrt{x}|$
- 17** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2\ln(x) - 2}{x}$
- a** Plot en schets de grafiek van f .
- b** Bereken exact de x -coördinaat van het snijpunt van de grafiek van f met de x -as.
- c** Bereken exact de extreme waarde van f .
- d** Bereken exact de coördinaten van het buigpunt van de grafiek van f .
- 18** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - 9x$ en $g(x) = x^2 + 9x + p$.
- a** Neem $p = -5$ en stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van g in het punt met x -coördinaat -1 .
- b** Voor welke waarden van x geldt $f'(x) = g'(x)$?
- c** Voor welke waarden van p raken de grafieken van f en g elkaar?



Keuzeonderwerpen

SE

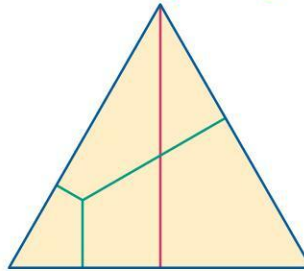
CE

K

Matrices 230

$$V \times A \quad \begin{pmatrix} 15\,000 & 7\,000 \\ 4\,000 & 2\,000 \\ 16\,000 & 6\,000 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0,01 & 0,48 & 0,80 \\ 0,10 & 0,00 & 0,18 \\ 0,89 & 0,52 & 0,02 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 14\,870 & \dots \\ \dots & 1\,780 \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Meetkundige bewijzen 244

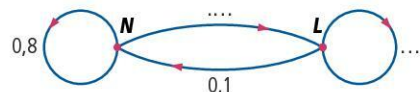


1 Matrices

- 1 Uit onderzoek van een frisdrankfabrikant blijkt dat 20% van de consumenten van normale frisdrank het volgende jaar is overgestapt op de lightversie en dat 80% nog steeds normale frisdrank drinkt. Bij de gebruikers van de lightversie is 10% het volgende jaar overgestapt op normale frisdrank en gebruikt 90% nog steeds de lightversie.

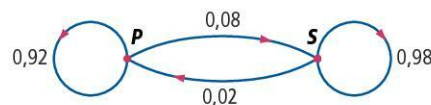
Deze gegevens kunnen overzichtelijk weergegeven worden in een tekening.

- Vul in de tekening de ontbrekende waarden in.
- Van de onderzoeksgroep drinken 400 consumenten de normale frisdrank en 100 de lightversie. Ga na dat een jaar later nog 330 consumenten de normale frisdrank drinken.
- Hoeveel consumenten drinken weer een jaar later de normale frisdrank?



- 2 Een onderzoeker heeft enkele jaren de gegevens over de migratie van het platteland P naar de stad S en omgekeerd verzameld. Hij komt tot het hiernaast getekende model voor de jaarlijkse migratie.

- De onderzoeker houdt in zijn model geen rekening met geboorte, sterfte, immigratie en emigratie. Waaraan zie je dat?
- In het begin van 2019 woonden er 60 000 mensen in de stad en 40 000 op het platteland. Bereken aan de hand van het model van de onderzoeker de verdeling van de mensen over de stad en het platteland een jaar later.
- Een dergelijk model kun je ook met een vierkant schema met getallen weergeven. Neem het schema over en vul de ontbrekende getallen in.



$$\begin{array}{c} \text{van} \\ P \quad S \\ \text{naar} \end{array} \begin{pmatrix} 0,92 & \dots \\ 0,08 & \dots \end{pmatrix}$$

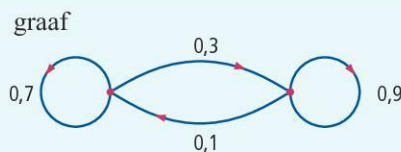
Theorie

Een tekening waarin de gegevens overzichtelijk worden weergegeven zoals bij de opdrachten 1 en 2 heet een **graaf**. Diezelfde gegevens kunnen ook worden weergegeven met behulp van een rechthoekig schema met getallen. Een dergelijk schema heet een **matrix**.

De getallen in een matrix zijn gerangschikt in rijen en kolommen. De **afmetingen** van een matrix geef je door eerst het aantal rijen en daarna het aantal kolommen te noemen.

Een **p bij q matrix** heeft p rijen en q kolommen.

Bij een vierkante matrix is het aantal rijen gelijk aan het aantal kolommen.



vierkante 2 bij 2 matrix

$$\begin{array}{c} \text{van} \\ A \quad B \\ \text{naar} \end{array} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 \\ 0,3 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{rij} \\ \uparrow \text{kolom} \end{array}$$

- 3** Een supermarktketen heeft van een bepaald product drie varianten in de stelling staan: het merkproduct (M), het huismerk (H) en het budgetmerk (B).
Klanten die de ene week het ene merk kopen kunnen de volgende week overgestapt zijn op één van de twee andere. Marktonderzoek heeft de matrix hiernaast opgeleverd. In deze matrix worden de wekelijkse overgangen van het ene merk naar het andere weergegeven.

		van		
		M	H	B
naar	M	0,85	0,10	0,05
	H	0,10	0,70	0,15
	B	0,05	0,20	0,80

- Hoeveel procent van de kopers van het budgetmerk is een week later overgestapt op het huismerk? En hoeveel procent heeft de omgekeerde overstap gemaakt?
- Teken de graaf bij deze matrix.
- Van 200 klanten kochten in een bepaalde week 60 mensen het merkproduct, 80 het huismerk en 60 het budgetmerk. Bereken met behulp van de matrix de verdeling van de 200 klanten over de drie producten een week later.

Theorie

Matrices zoals bij de opdrachten 2 en 3 worden **overgangsmatrices** genoemd. De getallen in een overgangsmatrix geven aan welk deel van een categorie na een bepaalde periode nog steeds in die categorie zit en welk deel is overgegaan naar een andere categorie.

Overgangsmatrices worden gebruikt om de verdeling van de populatie over de verschillende categorieën in een volgende periode te vinden.

- 4** Muskusratten worden niet ouder dan 3 jaar. Ze kunnen heel veel jongen voortbrengen. Gemiddeld krijgen 10 nuljarigen per jaar 6 jongen, 10 éénjarigen 35 jongen, 10 tweejarigen 24 jongen en 10 driejarigen 12 jongen. Slechts de helft van het aantal jongen is een jaar later nog in leven.

Van de één- en tweejarigen wordt 60% een jaar ouder.

- Verklaar de getallen 0,6 en 0,5 in de matrix.
- Vul de matrix verder in.
- Ga uit van 100 nuljarige ratten. Bereken hoeveel er drie jaar oud worden.

		van			
		0	1	2	3
naar	0	0,6	...	...	...
	1	0,5	0	0	0
	2	0	...	0	0
	3	0	0	...	0

- 5** Voor waterratten geldt een andere jaarlijkse overgangsmatrix. De rechter matrix geeft aan hoe de 1450 waterratten van de beginpopulatie over de verschillende leeftijdsklassen verdeeld zijn.

- De getallen van de bovenste rij van de overgangsmatrix worden vermenigvuldigd met de getallen uit de matrix van de beginpopulatie en de uitkomsten worden bij elkaar opgeteld.

Wat is de betekenis van het getal 1300?

- Welk getal krijg je als je de getallen van de tweede rij van de overgangsmatrix op dezelfde manier vermenigvuldigt met de rechter matrix? Wat is de betekenis van dit getal?
- Geef de verdeling van de populatie over de verschillende leeftijdsklassen één jaar later.

		0	1	2	3	
0	0,5	2	1,5	1	0	1000
1	0,3	0	0	0	1	300
2	0	0,4	0	0	2	100
3	0	0	0,2	0	3	50

$$0,5 \cdot 1000 + 2 \cdot 300 + 1,5 \cdot 100 + 1 \cdot 50 = 1300$$

2 Matrices vermenigvuldigen

- 6** Gebruik de overgangsmatrix M van opdracht 2.
In matrix B is de verdeling van de bevolking over de stad en het platteland aan het begin van 2019 weergegeven.

- a** Hoe kun je met behulp van matrix M en matrix B het aantal plattelandsbewoners aan het begin van 2020 berekenen?
- b** Bereken de verdeling van de bevolking over de stad en het platteland aan het begin van 2020. Noteer je antwoord in de vorm van matrix C .

$$\begin{array}{c} \text{van} \\ P \quad S \\ \text{naar} \end{array} \begin{pmatrix} 0,92 & 0,02 \\ 0,08 & 0,98 \end{pmatrix} = M \quad \begin{array}{c} 2019 \\ P \quad S \\ \begin{pmatrix} 40\,000 \\ 60\,000 \end{pmatrix} = B \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2020 \\ P \quad S \\ \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} = C \end{array}$$

Een berekening zoals bij opdracht 6b wordt de vermenigvuldiging van de matrices M en B genoemd. Je noteert deze vermenigvuldiging kort als $M \times B = C$.

7

$$\begin{array}{c} \text{van} \\ N9 \quad N99 \quad N250 \\ \text{naar} \end{array} \begin{pmatrix} 0,01 & 0,48 & 0,80 \\ 0,10 & 0,00 & 0,18 \\ 0,89 & 0,52 & 0,02 \end{pmatrix} = V \quad \begin{array}{c} \text{vr} \quad \text{za} \\ N9 \quad N99 \quad N250 \\ \begin{pmatrix} 15\,000 & 7\,000 \\ 4\,000 & 2\,000 \\ 16\,000 & 6\,000 \end{pmatrix} = A \end{array}$$

Bij een verkeersknooppunt komen drie wegen samen: de N9, de N99 en de N250. Matrix V geeft aan hoe de verkeersstromen zich over het knooppunt verdelen. Zo geeft het getal 0,80 rechtsboven in de matrix aan dat 80% van het verkeer dat via de N250 bij het knooppunt arriveert, het knooppunt via de N9 weer verlaat.

Matrix A geeft de aantallen voertuigen die in een bepaalde week op vrijdag en zaterdag bij het knooppunt aankwamen. Zo geeft het getal 7 000 in deze matrix aan dat er op zaterdag 7 000 voertuigen via de N9 aankwamen bij het knooppunt.

- a** Welke berekening levert het getal 14 870 op?
- b** Welke betekenis heeft het getal 14 870 hier?
- c** Wat is de betekenis van het getal 1780?
- d** Vul het schema verder in.

$$V \times A \quad \begin{pmatrix} 15\,000 & 7\,000 \\ 4\,000 & 2\,000 \\ 16\,000 & 6\,000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,01 & 0,48 & 0,80 \\ 0,10 & 0,00 & 0,18 \\ 0,89 & 0,52 & 0,02 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14\,870 & \dots \\ \dots & 1\,780 \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

- 8** Xavi heeft de matrices V en A in het schema verwisseld. Je zou dan de vermenigvuldiging $A \times V$ moeten krijgen.

- a** Leg uit waarom het nu niet mogelijk is om de getallen in een rij van de linker matrix te vermenigvuldigen met de overeenkomstige getallen in een kolom van de rechter matrix.
- b** Leg uit aan welke voorwaarde de matrices A en B moeten voldoen om de vermenigvuldiging $A \times B$ mogelijk te maken.
- c** En aan welke voorwaarde moeten de matrices A en B voldoen om de vermenigvuldiging $B \times A$ mogelijk te maken?

$$A \times V \quad \begin{pmatrix} 0,01 & 0,48 & 0,80 \\ 0,10 & 0,00 & 0,18 \\ 0,89 & 0,52 & 0,02 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 15\,000 & 7\,000 \\ 4\,000 & 2\,000 \\ 16\,000 & 6\,000 \end{pmatrix}$$

- 9 Gegeven zijn de matrices $A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$ en $C = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$.

- a Bereken $A \times B$, $B \times A$, $B \times C$ en $C \times B$.
 b Bij het vermenigvuldigen van getallen geldt de eigenschap dat $a \cdot b = b \cdot a$ voor elk paar getallen a en b .
 Geldt deze eigenschap ook bij een matrixvermenigvuldiging?

Theorie

Je kunt matrix A vermenigvuldigen met matrix B als het aantal kolommen van matrix A gelijk is aan het aantal rijen van matrix B .

Bij de **matrixvermenigvuldiging** $A \times B$ vermenigvuldig je telkens de getallen uit een rij van matrix A met de getallen uit een kolom van matrix B en tel je de uitkomsten bij elkaar op. In het algemeen geldt dat $A \times B \neq B \times A$.

matrix-
vermenigvuldiging

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A \times B$$

- 10 Bereken zo mogelijk. Gebruik een schema.

a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 200 \\ 400 \\ 100 \end{pmatrix}$ c $\begin{pmatrix} 200 \\ 400 \\ 100 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,5 \end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix} 0,7 & 0,6 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 \\ 0,8 & 0,5 \end{pmatrix}$ d $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 \\ 0,8 & 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,6 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$

- 11 Bereken de vermenigvuldigingen van opdracht 10 ook met je rekenmachine.

→ Instructie rekenmachine | Matrices vermenigvuldigen

- 12 Gegeven zijn de matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a Bereken $A \times B$, $B \times A$, $A \times C$ en $C \times A$.
 b Beschrijf voor elk product wat het verband is tussen de uitkomst van het product en matrix A .

3 Populatieontwikkelingen

- 13** Al tientallen jaren is Het Nieuwsblad (N) de lokale krant. Sinds een paar jaar is er een concurrent: De Koerier (K). Matrix M beschrijft de jaarlijkse overgang van abonnees van Het Nieuwsblad naar De Koerier en andersom. Matrix B geeft de aantallen abonnees op beide kranten op 1-1-2020.

$$M = \begin{matrix} & N & K \\ \begin{matrix} N \\ K \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} & 1-1-2020 \\ \begin{matrix} N \\ K \end{matrix} & \begin{pmatrix} 12\,000 \\ 3\,000 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- Hoe kun je aan matrix M zien dat het totaal aantal abonnees op beide kranten samen niet verandert?
 - Bereken met behulp van matrixvermenigvuldiging de verdeling van de abonnees over de twee kranten na 1, 2, 3 en 4 jaar.
 - Het aantal abonnees van De Koerier groeit. Is deze groei constant, toenemend of afnemend?
- 14**
- Ga uit van de matrix M van opdracht 13 en bereken M^2 en M^3 .
 - Bereken $M^2 \times B$, $M^3 \times B$ en vergelijk de uitkomsten met die van opdracht 13b.
 - Wat is blijikbaar de betekenis van matrices M^2 en M^3 ?

→ Instructie rekenmachine | Machten van matrices

Theorie

Als matrix M wordt gebruikt om de populatieverdeling in een volgende periode te vinden, dan kun je met matrix M^n de populatieverdeling na n perioden berekenen.

Voorbeeld

M en B zijn de matrices die gegeven zijn bij opdracht 13. Bereken $M^5 \times B$ en geef de betekenis van de uitkomst.

Oplossing

$$M^5 \times B \approx \begin{pmatrix} 8106 \\ 6894 \end{pmatrix}$$

Dat betekent dat na vijf jaar Het Nieuwsblad 8106 en De Koerier 6894 abonnees heeft.

- 15** Deze opdracht gaat weer over de matrices M en B van opdracht 13.
- Bereken $M^{10} \times B$, $M^{20} \times B$, $M^{30} \times B$ en $M^{40} \times B$.
 - Wat is de betekenis van de uitkomsten bij opdracht a?
 - Verwacht je dat De Koerier Het Nieuwsblad helemaal zal verdrijven?
 - Stel je voor dat op een bepaald moment de verdeling van de abonnees

wordt weergegeven door de matrix $C = \begin{pmatrix} 5\,000 \\ 10\,000 \end{pmatrix}$.

Bereken $M \times C$, $M^2 \times C$ en $M^{10} \times C$.

- Wat vertellen deze berekeningen over de verdeling van de abonnees vanaf het moment dat Het Nieuwsblad 5000 en De Koerier 10 000 abonnees heeft?

Theorie

Als de verdeling A van een populatie na vermenigvuldiging met de overgangsmatrix M niet meer verandert, dus als $M \times A = A$, dan heet de verdeling **stabiel**.

Voorbeeld

Gegeven is de overgangsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 \\ 0,3 & 0,9 \end{pmatrix} \quad \text{en de verdeling } V = \begin{pmatrix} 750 \\ 2250 \end{pmatrix}$$

Toon aan dat V een stabiele verdeling is.

Oplossing

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 \\ 0,3 & 0,9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 750 \\ 2250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 750 \\ 2250 \end{pmatrix},$$

dus verdeling V is stabiel.

- 16** Deze opdracht gaat over de matrix M en de verdeling V uit het voorbeeld.

a Reken met je rekenmachine na dat verdeling V inderdaad stabiel is.

b Stel er is nog een stabiele verdeling $W = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

Toon aan dat uit $M \times W = W$ de voorwaarde $q = 3p$ volgt.

c Controleer dat verdeling V aan deze voorwaarde voldoet.

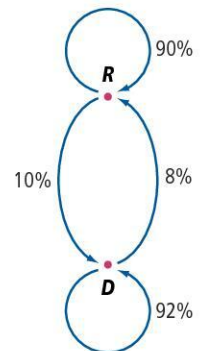
d Geef een voorbeeld van een andere stabiele verdeling bij matrix M .

- 17** Van een Amerikaans provincie stadje is het aantal kiesgerechtigden vrijwel constant gelijk aan 144 000. De lokale politicoloog heeft onderzoek gedaan naar het stemgedrag van de inwoners. De jaarlijkse overgangskansen voor de politieke voorkeur voor de republikeinse (R) of de democratische partij (D) zijn gegeven in de graaf. r_n en d_n zijn de aantallen republikeinen en democraten in jaar n .

a Leg uit dat $r_{n+1} = 0,08d_n + 0,9r_n$.

b Druk d_{n+1} uit in r_n en d_n .

c Ga ervan uit dat de aantallen republikeinen en democraten na n jaar stabiliseren tot r en d , dus $r_{n+1} = r_n = r$ en $d_{n+1} = d_n = d$. Er zijn in totaal 144 000 kiesgerechtigden. Bereken r en d .



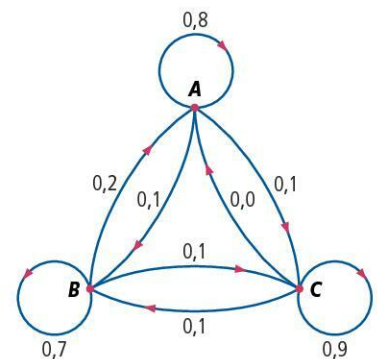
- 18** Op een eiland liggen drie dorpen A, B en C. In de graaf staan de migratiestromen tussen de dorpen. Men wil onderzoeken welke verdeling van de bevolking over de drie dorpen stabiel is.

a Stel de overgangsmatrix M op.

b Ga uit van de verdeling $S = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ en laat zien dat uit

$$M \times S = S \text{ volgt } b = a \text{ en } c = 2a.$$

c Geef de stabiele verdeling als de bevolking van het eiland uit 10 000 mensen bestaat.



- 19** Op een eiland komt een bepaald soort planteneter voor die niet ouder wordt dan 4 jaar. Een bioloog heeft begin 2012 en begin 2013 de aantallen dieren in de vier leeftijdsgroepen geteld. De dieren uit de vier leeftijdsgroepen van begin 2012 brachten in dat jaar respectievelijk 2500, 9600, 2200 en 450 jongen voort.
- Hoe is het aantal van 14 750 nuljarige dieren aan het begin van 2013 uit de aantallen jongen hierboven af te leiden?
 - Met behulp van welke gegevens is het getal 0,2 linksboven in matrix M te berekenen? Vul de rest van de getallen van de eerste rij van matrix M in.
 - Met behulp van welke gegevens is het getal 0,6 in de tweede rij van de matrix te berekenen? Vul matrix M verder in.

leeftijd	begin 2012	begin 2013
0	12500	14750
1	6400	7500
2	2750	3200
3	900	1100

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,2 & \dots & \dots & \dots \\ 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Theorie

Matrices waarin overleving en geboorte worden samengevat, worden **populatievoorspellingsmatrices** of **Lesliematrices** genoemd (naar de Britse zoöloog Patrick Leslie). In een Lesliematrix staan in de bovenste rij de geboortecijfers g_n per leeftijdsklasse. De getallen onder de hoofddiagonaal geven de overgangskansen o_n van de ene leeftijdsklasse naar de volgende.

$$L = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \dots & g_{n-1} & g_n \\ o_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & o_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & o_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

g = geboortecijfer
 o = overgangskans

- 20** Een diersoort wordt niet ouder dan 2 jaar. Met de Lesliematrix L is de verdeling van de dieren over de leeftijdsklassen voor het volgende jaar te berekenen. Begin 2020 zijn er 800 nuljarigen, 950 eenjarigen en 450 tweejarigen.
- Bereken met een matrixvermenigvuldiging de verdeling van de dieren over de leeftijdsklassen begin 2021.
 - Bereken het totaal aantal dieren begin 2023.

$$L = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,2 & 0,9 & 0,2 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- 21** Deze opdracht gaat over de diersoort en de Lesliematrix uit opdracht 20.
- Verklaar waarom je met $0,2 + 0,8 \times 0,9 + 0,8 \times 0,5 \times 0,2$ het gemiddeld aantal nakomelingen gedurende het leven per dier kunt berekenen en bereken de uitkomst.
 - Wat betekent dit gemiddelde aantal nakomelingen gedurende het leven per dier voor de ontwikkeling van de totale populatie?
 - De totale populatie van de diersoort bestaat uit 2200 dieren. Bereken met de matrix V hiernaast en $L \times V = V$ voor welke waarden van a , b en c de populatieverdeling stabiel is.

$$V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ met } a + b + c = 2200$$

- 22** In matrix L_1 is het geboortecijfer van de tweejarigen in matrix L uit opdracht 20 omlaag gegaan van 0,2 naar 0,1.
- Wat betekent dit voor het gemiddeld aantal nakomelingen gedurende het leven van één dier? En voor de ontwikkeling van de populatie?
 - Ga uit van een populatie van 2200 dieren: 1000 nuljarige, 800 eenjarige en 400 tweejarige en bereken de grootte van de totale populatie in de eerstvolgende vijf jaren.
 - Bereken de groeifactor voor de totale populatie per jaar.

$$L_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,2 & 0,9 & 0,1 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

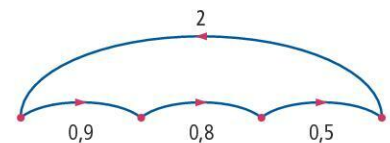
- 23** In matrix L_2 is het geboortecijfer van de tweejarigen van matrix L uit opdracht 20 gestegen naar 0,3.
- Bereken het gemiddelde aantal nakomelingen gedurende het leven per dier.
 - Ga weer uit van de beginpopulatie van opdracht 22b en bereken de grootte van de totale populatie de eerste vijf jaren.
 - De grootte van de totale populatie is te beschrijven met een formule van de vorm $V = b \cdot g^t$. Bereken b en g . Rond zo nodig af op twee decimalen.

$$L_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,2 & 0,9 & 0,3 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- 24**
- Onderzoek hoe volgens matrix L van opdracht 20 de grootte van de totale populatie zich de eerste vijf jaar ontwikkelt bij een beginpopulatie van 1000 nuljarige, 500 eenjarige en 100 tweejarige dieren.
 - Doe hetzelfde voor de matrices L_1 en L_2 van de opdrachten 22 en 23.

Als het gemiddeld aantal nakomelingen gedurende het leven per individu van de populatie gelijk is aan 1 dan is een stabiele verdeling van de populatie mogelijk. Afhankelijk van de beginverdeling van de populatie is de grootte van de totale populatie constant of slingert hij rond een constante waarde.

- 25** In de graaf staan het geboortecijfer en de overlevingskansen van een vogelpopulatie die in vier leeftijdsklassen is verdeeld.
- Stel een Lesliematrix L op voor deze populatie en leg uit dat deze populatie op den duur zal uitsterven.
 - Hoe groot moet het geboortecijfer minstens zijn, opdat de totale populatie niet uitsterft? Rond af op één decimaal.



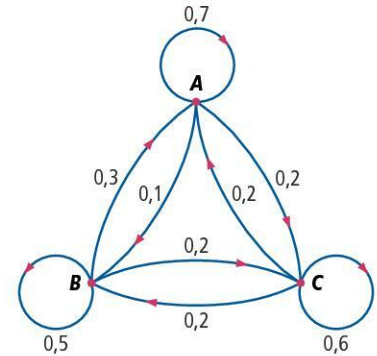
- 26** Gegeven is een populatievoorspellingsmatrix P . Verder is gegeven dat de populatiegrootte gelijk is aan 790 en dat de verdeling van de populatie over de drie leeftijdsgroepen stabiel is.
- Bereken het geboortecijfer p en de verdeling van de populatie over de drie leeftijdsgroepen.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}$$

5 Gemengde opdrachten

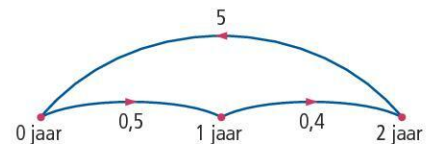
- 27** Het autoverhuurbedrijf Rent-a-Car heeft op een eiland op drie plaatsen auto's gestationeerd. Auto's die in één van die plaatsen worden gehuurd kunnen in elk van de drie plaatsen weer worden ingeleverd. In de graaf staan de overgangskansen.

- Stel de overgangsmatrix M op.
- Rent-a-Car heeft 90 auto's om te verhuren, in elke plaats 30. Op een dag worden alle auto's één keer verhuurd en 's avonds terugbezorgd. Welke verdeling over de plaatsen verwacht je aan het eind van de dag?
- Bereken ook de verdeling van de gehele aantallen auto's over de verschillende plaatsen na twee, drie, vier, vijf en zes dagen.
- Na hoeveel dagen verandert de verdeling over de verschillende plaatsen niet meer?



- 28** Van een diersoort zijn de overlevingskansen per leeftijdsgroep en het geboortecijfer weergegeven in de graaf. In een bepaald jaar zijn er 1200 nuljarige, 350 eenjarige en 150 tweejarige dieren.

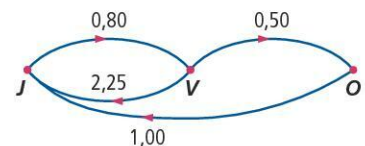
- Stel de Lesliematrix L op bij deze graaf.
- Hoe groot is het gemiddeld aantal nakomelingen per dier tijdens zijn leven?
- Teken een grafiek van het totale aantal dieren voor een periode van zes jaar.
- Bereken M^3 en verklaar daarmee dat elke populatieverdeling gelijk is aan die van drie jaar eerder.



- 29** Het geboortecijfer van de diersoort uit opdracht 28 verandert van 5 in 4.
- Hoe groot is in deze situatie het gemiddeld aantal nakomelingen per dier tijdens zijn leven?
 - Ga weer uit van de beginpopulatie uit opdracht 28 en teken de grafiek van het totale aantal dieren voor een periode van zes jaar.
 - Gebruik de derde macht van de bij deze opdracht behorende Lesliematrix om de ontwikkeling van de populatieverdeling in de loop van de tijd te beschrijven.
 - Beantwoord de opdrachten a, b en c ook voor het geboortecijfer 6.

- 30** Een diersoort is ingedeeld in drie leeftijdsklassen van vijf jaar. Geen enkel dier wordt ouder dan 15 jaar. De graaf beschrijft de populatieontwikkeling van deze diersoort.

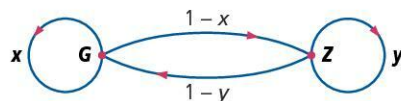
- Waarom zal deze populatie in aantal steeds meer toenemen?
- Door veranderingen in het milieu worden beide overlevingskansen met hetzelfde percentage verlaagd. De populatie stabiliseert daardoor op den duur. Bereken met welk percentage de overlevingskansen afnemen.



- 31** Een nieuw griepvirus grijpt razendsnel om zich heen. Van een onderzoeksgroep van 1000 mensen wordt wekelijks nagegaan of ze deze griep hebben of niet. De resultaten staan in de tabel.

	19 nov	26 nov	3 dec
gezond	804	782	769
ziek	196	218	231

Het onderzoeksteam veronderstelt dat de verdeling van het aantal gezonde en zieke mensen over de onderzoeksgroep te berekenen is met een graaf zoals die onder de tabel staat.



- Gebruik de onderzoeksgegevens om x en y te berekenen. Rond af op één decimaal.
- Onderzoek welke stabiele verdeling tussen gezonde en zieke mensen er op den duur in de onderzoeksgroep zal ontstaan.

- 32** Een bioloog heeft in een natuurgebied de populatie van een beschermde salamandersoort bestudeerd. Hij verdeelde de dieren in vier leeftijdsklassen van één jaar en stelde op grond van zijn ervaringen de Lesliematrix L op.

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Op 1 januari 2019 zijn in de vier leeftijdsklassen van jong naar oud de volgende aantallen geteld: 410, 160, 95 en 100.

- Bereken voor de volgende vier jaren het totale aantal dieren zoals dat zich volgens de Lesliematrix zal ontwikkelen.
- Bereken L^4 en gebruik het resultaat om onder woorden te brengen hoe de populatie zich zal ontwikkelen.
- Het totale aantal dieren N is een exponentiële functie van de tijd t in eenheden van vier jaar met $t = 0$ op 1 januari 2019. Geef een functievoorschrift van deze functie.

- 33** In een dierentuin wil men in een groot terrarium de salamandersoort uit opdracht 32 houden. Men wil niet veel meer dan 500 salamanders in het terrarium houden. Dat wil men bereiken door elk jaar een deel van de eieren te vernietigen. Verder wil men de populatie zo samenstellen dat de verdeling stabiel is.

- Hoeveel procent van de eieren zal jaarlijks vernietigd moeten worden?
- Uit hoeveel salamanders zal de hele populatie moeten bestaan en hoe moeten de salamanders over de verschillende leeftijdsklassen verdeeld zijn?



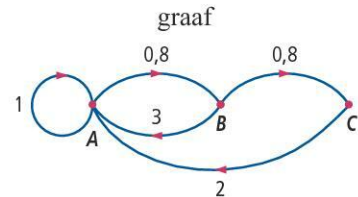
Matrix en overgangsmatrix

Een matrix is een rechthoekig schema met getallen tussen twee haken. Een p bij q matrix heeft p rijen en q kolommen. Een schematische tekening waarin diezelfde getallen worden weergegeven heet een graaf.

Matrices waarbij de getallen aangeven welk deel van de ene categorie van de populatie in een bepaalde periode overgaat in de andere categorie worden overgangsmatrices genoemd. Overgangsmatrices worden onder andere gebruikt om de populatieverdeling in een volgende periode te vinden.

3 bij 3 matrix

$$\begin{matrix} & A & B & C \\ A & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ B & \begin{pmatrix} 0,8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ C & \begin{pmatrix} 0 & 0,6 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{rij} \\ \leftarrow \text{kolom} \end{matrix}$$



Voorbeeld

De overgangsmatrix geeft aan dat een periode later $\frac{7}{10}$ deel van categorie A weer in categorie A zit, $\frac{2}{10}$ deel van categorie B in categorie A zit, $\frac{3}{10}$ deel van categorie A in categorie B zit en $\frac{8}{10}$ deel van categorie B weer in categorie B zit.

$$\begin{matrix} \text{van} \\ A & B \\ \text{naar} \end{matrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Machten van overgangsmatrices

Als matrix M wordt gebruikt om de populatieverdeling in een volgende periode te vinden, dan kan matrix M^n worden gebruikt om de populatieverdeling na n perioden te berekenen.

Voorbeeld

Een diersoort wordt niet ouder dan 3 jaar. Matrix B geeft de beginsituatie en matrix M is de overgangsmatrix per jaar.

$$\begin{matrix} 0-1 \\ 1-2 \\ 2-3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0,4 & 3,2 & 1,6 \\ 1,28 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,4 \end{pmatrix} \quad M^3 \times B = \begin{pmatrix} 720 \\ 316 \\ 160 \end{pmatrix}$$

Drie jaar later zijn er 720 nuljarige dieren, 316 eenjarige dieren en 160 tweejarige dieren.

Stabiele verdeling

Als de verdeling van een populatie na vermenigvuldiging met de overgangsmatrix M niet meer verandert, dan heet de verdeling stabiel.

Voorbeeld

Laat zien dat beginverdeling B onder invloed van overgangsmatrix M uiteindelijk convergeert naar een stabiele verdeling. Geef deze verdeling.

$$M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0,2 & 0,5 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix}$$

Oplossing

$$M^{50} \times B = \begin{pmatrix} 250 \\ 150 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad M \times \begin{pmatrix} 250 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 150 \end{pmatrix}, \quad \text{dus} \quad \begin{pmatrix} 250 \\ 150 \end{pmatrix} \text{ is een stabiele verdeling van de populatie.}$$

Populatievoorspellingsmatrix, Lesliematrix

Matrices waarin overleving en geboorte worden samengevat worden populatievoorspellingsmatrices of Lesliematrices genoemd. In de bovenste rij staan de geboortecijfers g_n per leeftijdsgroep en in de overige rijen de overgangskansen o_n van de ene leeftijdsgroep naar de volgende.

$$L = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 \\ o_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & o_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & o_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & o_4 & 0 \end{pmatrix}$$

Je kunt algebraïsch het product $A \times B$ van twee matrices A en B berekenen.

Vermenigvuldig de getallen in elke rij van matrix A met de overeenkomstige getallen in de kolommen van matrix B en tel op.

Voorbeeld

$$\begin{array}{l} A \times B \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 200 & 250 \\ 150 & 100 \end{array} \right) = B \\ \hline A = \left(\begin{array}{cc|cc} 0,8 & 0,5 \\ 0,2 & 0,5 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|cc} 235 & 250 \\ 115 & 100 \end{array} \right) = A \times B \\ 0,8 \cdot 200 + 0,5 \cdot 150 = 235 \end{array}$$

Je kunt met het gemiddeld aantal nakomelingen per individu een voorspelling doen over de ontwikkeling van de populatie op de lange duur.

Als het gemiddeld aantal nakomelingen gedurende het leven per individu van de populatie gelijk is aan 1 dan is de populatie stabiel, dan kan de populatie stabiel worden of dan is er sprake van periodiciteit.

Voorbeeld

De ontwikkeling van een populatie per jaar wordt beschreven door de Lesliematrix L . De populatie bestaat uit 560 nuljarigen, 1850 eenjarigen en 1200 tweejarigen.

Bereken de populatieverdeling een jaar later en onderzoek hoe de populatie zich op de lange duur zal ontwikkelen.

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 560 \\ 1850 \\ 1200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4900 \\ 224 \\ 370 \end{pmatrix}$$

Een jaar later zijn er 4900 nuljarigen, 224 eenjarigen en 370 tweejarigen.

Het gemiddeld aantal nakomelingen gedurende het leven per individu is gelijk aan $0,4 \cdot 2 + 0,4 \cdot 2 \cdot 1 = 0,88$.

Dit aantal is kleiner dan 1, dus de populatie zal op de lange duur uitsterven.

- T1** In een dorp zijn twee concurrerende tankstations. Het verloop tussen beide tankstations is nogal groot. Hiernaast is dat verloop beschreven. In het dorp maken 300 mensen gebruik van de 'Witte Pomp' en 300 van 'Quick Tank'.
- Maak een overgangsmatrix bij deze situatie.
 - Hoeveel mensen zullen er na 1 maand tanken bij de 'Witte Pomp'? En hoeveel na twee maanden?

Concurrentieslag

In ons dorp heerst een hevige concurrentiestrijd op het benzinefront. Aangelokt door stuntprijzen laat elke maand de helft van de klanten van Quick Tank de tank bij de Witte Pomp volgooien. Quick Tank voert een actie met spaarzegels waardoor ze elke maand 25% van de klanten van de Witte Pomp weet te krijgen.

- T2** Gegeven zijn de matrices K , L en M .

$$K = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,5 \\ 0,4 & 0,5 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,7 & 0,6 \end{pmatrix}$$

- Bereken $K \times L$, $L \times K$ en $K \times M$.
 - Waarom is de vermenigvuldiging $M \times K$ niet mogelijk?
 - Bereken K^2 en M^3 .
- T3** In een wildpark zijn in 2010 een aantal stinkdieren uitgezet. Stinkdieren kunnen maximaal 15 jaar oud worden. Een bioloog onderscheidt drie leeftijdsklassen van elk 5 jaar: jonge, volwassen en oude stinkdieren. De matrix S geeft de ontwikkeling van deze diersoort per 5 jaar weer. In 2020 heeft de bioloog het aantal stinkdieren in de drie leeftijdsklassen geteld. Het resultaat staat in de tabel.
- Bereken met behulp van matrix S de aantallen stinkdieren in de drie leeftijdsklassen in 2035.
 - Stel dat er in 2010 waren uitgezet:
 p jonge dieren, q volwassen dieren en r oude dieren.
 Bereken p , q en r .

$$S = \begin{matrix} & \begin{matrix} j & v & o \end{matrix} \\ \begin{matrix} j \\ v \\ o \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0,8 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

	2010	2015	2020	2035
j	...	...	61	...
v	...	...	30	...
o	...	...	30	...

- T4** Een populatie bestaat uit 740 dieren die verdeeld zijn over drie leeftijdsklassen. De jaarlijkse ontwikkeling van de populatie wordt gegeven door matrix M . Matrix B stelt een willekeurige verdeling van de populatie voor. Gebruik matrix B en bereken met behulp van de vermenigvuldiging $M \times B = B$ bij welke verdeling over de drie leeftijdsklassen er sprake is van een stabiele verdeling.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2,5 \\ 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ met } a + b + c = 740$$

T5 Gegeven zijn de matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ en $C = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$.

Er bestaat een matrix $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, zo dat $A \times B = C$.

Bereken de waarden van a , b , c en d .

T6 In de matrix M staan gegevens over de klanten van een drietal supermarkten. In verband met gewijzigde openingstijden, waarbij supermarkten ook 's avonds open kunnen zijn, is het voor een aantal klanten aantrekkelijk om van supermarkt te veranderen. In de matrix zie je bijvoorbeeld dat 7,3% van de klanten van supermarkt I een maand later klant is geworden van supermarkt II.

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,801 & 0,001 & 0,001 \\ 0,073 & 0,920 & 0,001 \\ 0,126 & 0,079 & 0,998 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- Verklaar met behulp van de matrix dat minder dan 20% van het totaal aantal klanten een maand later van supermarkt is veranderd, maar dat je niet kunt berekenen hoe groot dat percentage precies is.
- Voordat de winkeltijden werden veranderd, hadden supermarkt I, II en III respectievelijk 1000, 3000 en 12 200 klanten. Bereken het aantal klanten van elke supermarkt één maand later.
- Ontstaat er op de lange duur een stabiele verhouding in het aantal klanten van de drie supermarkten, als de gegevens van de matrix ook voor elke volgende maand kloppen? Zo ja, geef dan de stabiele verdeling van de klanten over de drie supermarkten.
- Is het waarschijnlijk deze stabiele verdeling bereikt zal worden? Motiveer je antwoord.



T7 Bij een diersoort worden drie leeftijdsklassen van één jaar onderscheiden: jong, volwassen en oud.

De kans dat een jong dier volwassen wordt, is $\frac{1}{2}$ en de kans dat een volwassen dier oud wordt, is $\frac{1}{4}$.

De volwassen dieren brengen per individu drie keer zoveel jongen voort als de jonge en de oude dieren brengen twee keer zoveel jongen voort als de jonge dieren.

- Stel dat het geboortecijfer voor de jonge dieren 0,3 is. Stel de bijbehorende Lesliematrix op en geef aan hoe de totale populatie zich in de loop van de tijd zal ontwikkelen.
- Beantwoord opdracht a ook voor een geboortecijfer 0,4 voor de jonge dieren.

In deze Verdieping komen enkele stellingen over hoogtelijn, zwaartelijn en bissectrice aan de orde. De bewijzen van deze stellingen geven je een beeld van de verschillende technieken die bij het opstellen van een bewijs gebruikt kunnen worden.

- 1
 - a Teken een vierkant $ABCD$ en kies een willekeurig punt P binnen dit vierkant.
Je kunt een stelling formuleren over het verband tussen de omtrek van het vierkant en de som van de afstanden van P tot de vier zijden van $ABCD$.
Formuleer en bewijs deze stelling.
 - b Geldt deze stelling ook voor een rechthoek? En voor een ruit?
- 2
 - a Teken een gelijkzijdige driehoek ABC met zijden van 10 cm.
 - b Bereken exact de hoogte van deze driehoek en geef vervolgens een benadering in één decimaal.
 - c Kies vier verschillende punten P , Q , R en S binnen de driehoek, meet de afstand van elk van deze punten tot de drie zijden en vul de tabel hiernaast in.
 - d Welk vermoeden volgt er uit de resultaten van de opdrachten b en c?

	P	Q	R	S
afstand tot AB				
afstand tot AC				
afstand tot BC				
totaal				

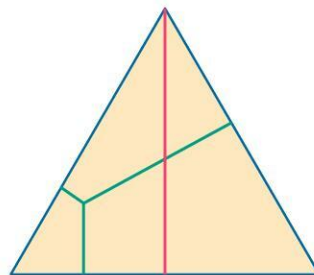
Theorie

Stelling van Viviani

In elke gelijkzijdige driehoek geldt het volgende:

De som van de kortste afstanden van een willekeurig punt binnen de driehoek tot de drie zijden is gelijk aan de hoogte van de driehoek.

Het bewijs van de stelling van Viviani is niet erg ingewikkeld en berust op het gebruik van oppervlakten.



- 3 a Kies een willekeurig punt P binnen een gelijkzijdige driehoek ABC en verdeel driehoek ABC in de driehoeken ABP , BCP en ACP .
- b Teken de projecties van P op de zijden AB , BC en AC en noem deze punten Q , R en S .
- c Leg uit dat geldt: $\text{oppervlakte } \triangle ABP = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PQ$.
- d Geef ook een formule voor de oppervlakte van $\triangle BCP$ en voor de oppervlakte van $\triangle ACP$.
- e De oppervlakte van de driehoeken ABP , BCP en ACP samen is gelijk aan de oppervlakte van $\triangle ABC$.
Toon aan dat hieruit volgt:
 $PQ + PR + PS = \text{hoogte van } \triangle ABC$.



Vincenzo Viviani (1622 – 1703) was een Italiaanse wis- en natuurkundige, die leefde en werkte in Florence. Hij was een leerling van Torricelli en Galilei. Hij deed onder andere experimenten om de snelheid van het geluid te meten.

Theorie

Een lijnstuk dat begint in een hoekpunt van een driehoek en eindigt op de tegenoverliggende zijde heet een **hoektransversaal**.

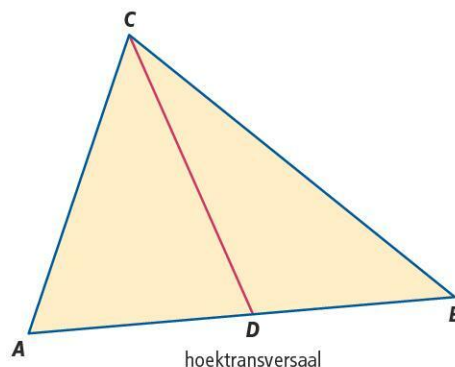
In de volgende opdrachten zal een formule worden afgeleid waarmee je de lengte van een hoektransversaal kunt berekenen. Voor het bewijs van die formule is de cosinusregel nodig.

Voor een willekeurige driehoek ABC geldt:

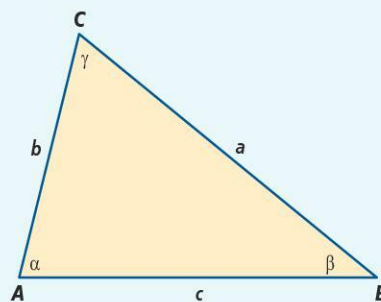
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$



- 4 a Van een driehoek ABC is gegeven $b = 4$, $c = 5$ en $\alpha = 42^\circ$.
Bereken met behulp van de cosinusregel a in één decimaal.
- b Maak opdracht a opnieuw, maar neem nu $b = 4$, $c = 5$ en $\alpha = 142^\circ$.
- 5 De cosinusregel kun je ook gebruiken om de hoeken van een driehoek te berekenen, als je de lengte van de drie zijden kent. Bereken de hoeken van een driehoek. Rond af op hele graden.
- a Een driehoek met zijden 6, 7 en 8.
- b Een driehoek met zijden 5, 17 en 18.
- c Een driehoek met zijden 10, 24 en 26.
- 6 De stelling van Pythagoras is te beschouwen als een bijzonder geval van de cosinusregel.
Leg dit uit.

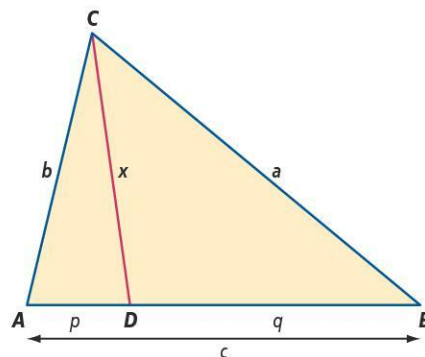


Theorie

Als in een driehoek ABC met zijden a , b en c de hoektransversaal CD wordt getekend en deze hoektransversaal verdeelt de zijde AB in stukken met lengte p en q , dan is de lengte x van deze hoektransversaal te berekenen met de formule $x^2c = a^2p + b^2q - cpq$.

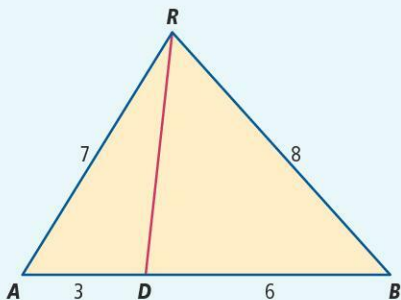
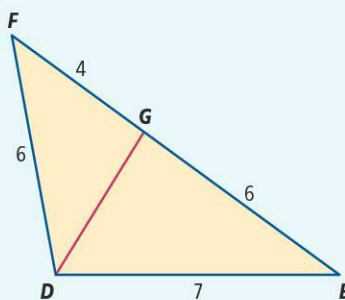
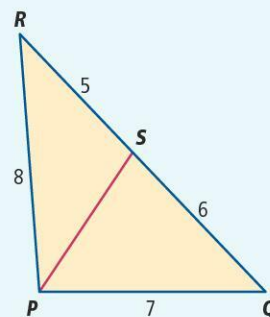
Deze regel staat bekend als de **stelling van Stewart**.

Voor het bewijs van de stelling van Stewart moet je de cosinusregel gebruiken.



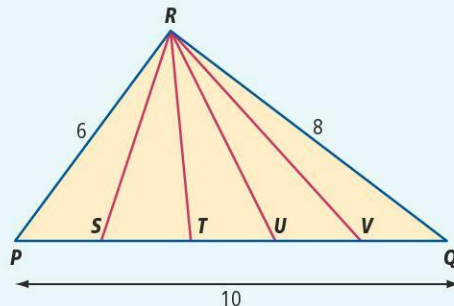
- 7**
- Druk met behulp van de cosinusregel x uit in b , p en $\cos(\alpha)$.
 - Pas de cosinusregel ook toe op driehoek ABC en druk $\cos(\alpha)$ uit in a , b en c .
 - Substitueer het resultaat van opdracht b in het resultaat van opdracht a.
 - Gebruik $p + q = c$ en voltooi het bewijs van de stelling van Stewart.

Matthew Stewart (1717– 1785) was de zoon van een Schotse predikant. Hij studeerde in Glasgow en bestudeerde met name de meetkunde uit de Griekse oudheid. Hij werd zelf ook predikant, maar werd later toch professor in de wiskunde aan de Universiteit van Edinburgh.



- 8** Bereken in elk van de driehoeken de lengte van de hoektransversaal.
- 9** Bereken de hoogte van een gelijkzijdige driehoek met zijde 2 door gebruik te maken van de stelling van Stewart.

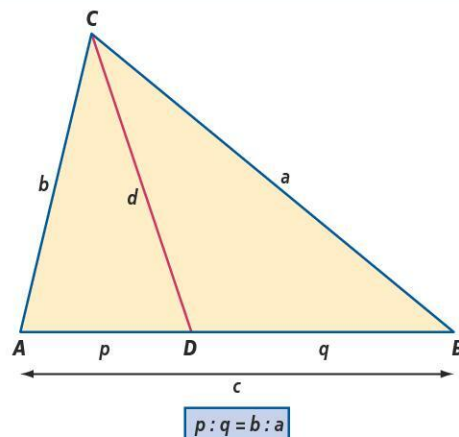
- 10** Voor een stalen dakconstructie is een rechthoekige driehoek PQR gemaakt met $\angle R = 90^\circ$, $PR = 6$ m en $QR = 8$ m. De punten S , T , U en V verdelen zijde PQ in gelijke afstanden. Om de constructie te verstevigen moeten er verbindingen worden gemaakt vanuit R naar de punten S , T , U en V . Bereken de totale lengte van deze vier verbindingen.



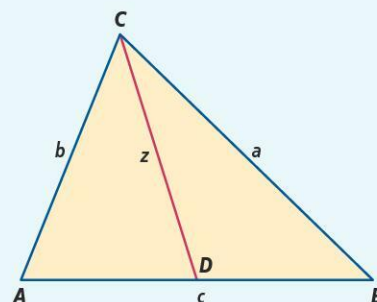
Theorie

De bissectriceregels:

Elke bissectrice in een driehoek verdeelt de tegenoverliggende zijde in stukken die zich verhouden als de aanliggende zijden. De bissectriceregels kun je bewijzen door op het verlengde van de bissectrice CD een punt E te kiezen, waarvoor geldt: $BE = BC = a$.



- 11
 - a Teken een driehoek ABC met de punten D en E .
 - b Welke driehoeken in de figuur zijn gelijkvormig? Bewijs deze gelijkvormigheid.
 - c Voltooi het bewijs van de bissectriceregels.
- 12 Gegeven $\triangle ABC$ met $AB = 6$, $AC = 7$ en $BC = 8$.
 - a De bissectrice vanuit C verdeelt zijde AB in twee stukken. Bereken de lengte van deze twee stukken.
 - b Bereken de lengte van lijnstuk CD .
- 13 Door de bissectriceregels toe te passen kun je een algemene regels opstellen voor de lengte van de bissectrice.
 - a Waarom volgt uit de bissectriceregels dat $ap = bq$?
 - b Als d_c de lengte van de bissectrice uit hoekpunt C is, dan luidt de Stelling van Stewart: $d_c^2 \cdot c = a^2p + b^2q - cpq$. Uit opdracht a volgt dat je ap kunt vervangen door bq en andersom. Doe dit en toon aan dat je de formule kunt herleiden tot $d_c^2 = ab - pq$.
- 14 Gegeven is $\triangle PQR$ met $PQ = 10$, $QR = 9$ en $PR = 8$. Bereken de lengte van de bissectrice uit hoekpunt P .
- 15 Als lijnstuk CD de zwaartelijns is in een driehoek ABC dan geldt: $p = q = \frac{1}{2}c$.
 - a Toon aan dat de lengte z_c van de zwaartelijns uit C kan worden berekend met de formule $z_c^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2$.
 - b Toon met de formule aan dat de kortste zwaartelijns altijd naar het midden van de langste zijde loopt.
- 16 Bereken de lengte van de drie zwaartelijnen in een driehoek met zijden 6, 7 en 9.



- A** afgeleide van $\cos(x)$ 170
afgeleide van de natuurlijke logaritme 57
afgeleide van een exponentiële functie 53
afgeleide van $\sin(x)$ 170
afgeleide van $\tan(x)$ 180
afmetingen van een matrix 230
afstand tussen een lijn en een cirkel 28
afstand tussen twee cirkels 27
afstand tussen twee punten 9
- B** bissectrice 32
bissectriceregels 247
- C** cosinusregel 93
- E** e 53
- F** frequentie 158
- G** gelijkvormig 87
getal van Euler 53
goniometrische formules 163
graaf 230
- H** harmonische trilling 158
hoektransversaal 245
hoofdstelling van de integraalrekening 195
- I** ingeschreven cirkel 32
inproduct 9
integreren 195
inverse functie 195
- K** kwadraatafsplitsen 12
- L** Lesliematrix 236
limieten 126
- M** matrix 230
matrixvermenigvuldiging 233
middelloodlijn 30
middelpuntsvergelijking 10
- N** natuurlijke logaritme 56
normaalvector 9
- O** omgeschreven cirkel 31
omwentelingslichaam 201
oppervlakte tussen grafieken 197
overgangsmatrix 231
- P** populatievoorspellingsmatrix 236
primitieve van $\cos(x)$ 174
primitieve van $\sin(x)$ 174
productfunctie 122
productregel 131
- Q** quotiëntfunctie 123
quotiëntregel 135
- R** raaklijn aan een cirkel 16
raaklijn opstellen 18
raaklijnstukken 100
raakpunt 16
rakende cirkels 23
rakende grafieken 136
- S** sinusregel 89
snijpunt van lijn en cirkel 14
snijpunten van twee cirkels 22
stabiele verdeling 235
standaardlimieten 127
stelling van Stewart 246
stelling van Thales 96
stelling van Viviani 244
- T** tangensfunctie 178
Thales, stelling van 96
trillingstijd 158
- V** vectorvoorstelling 9
- W** wentelen om de x -as 201
wentelen om de y -as 205

Ontwerp omslag G2K, Groningen/Amsterdam

Fotografie omslag Getty Images

Ontwerp binnenwerk Ebel Kuipers, Sappemeer

Illustraties Peter Fitzverploegh, Utrecht

Technisch tekenwerk Integra Software Services, India

Beeldresearch Daliz, Den Haag

Fotoverantwoording

iStockphoto/ Getty Images, Amsterdam: p. 6- 7, 78- 79, 147- 148, 203, 221, 222-223, 148- 247

Nasa, Washington: p. 44- 45

Shutterstock, New York: p. 46, 47, 50, 54, 62, 69, 122, 124, 160, 170, 172, 206, 210, 239, 243

Nasa/ Shutterstock.com: p. 56

Geertrui Schaberg, Mildam: p. 78b, p. 78m

Alamy/ Image Select, Wassenaar: p. 84- 85, 118- 119, 213, 222, 245

Linsie Spaans/ Daliz, Den Haag: p. 109

Dave de Bruin/ Daliz, Den Haag: p. 126

Siebe Swart/ Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 139

Ken Alder, The Measure of All Things, www.kenalder.com: p. 148m, 148r

US National Oceanic and Atmospheric Administration, Washington: p. 148m

Bastiaan Heus/ Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 154- 155

Nur Photo/ Getty Images, Amsterdam: p. 192- 193



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.

Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.

Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.

Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.



www.modernewiskunde.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-73612-5



9 789001 736125