UITWERKINGEN | WISKUNDE B | 12E EDITIE | VWO DEEL 4

MODERNE WISKUNDE B

Noordhoff

12e editie

Moderne Wiskunde

Uitwerkingen bij vwo B deel 4

Ontwerp omslag G2K Designers, Groningen/Amsterdam
Ontwerp binnenwerk Ebel Kuipers, Sappemeer
Technisch tekenwerk Integra Software services Pvt. Ltd., India

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontlenen.

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.

MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189

0 / 22

© 2022 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands.

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsenauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-89259-3

12e editie

Moderne Wiskunde

Uitwerkingen bij vwo B deel 4

Bert Boon
Wim Doekes
Arjan Eikelboom
Leo Ridderbos
Ron Sinkeldam
Carolijn Tacken

Noordhoff

Inhoud

H19 Bewegingsvergelijkingen 6
H20 Goniometrische formules 41

Vaardigheden 10 78

H21 Afsluiting analyse 89
H22 Afsluiting meetkunde 122

Vaardigheden 11 153

Examenvoorbereiding 161

Meer oefenen 216
Oefenproefwerken 224

© Noordhoff Uitgevers bv

19 Bewegingsvergelijkingen

Voorkennis

V1 **a** $f(x) = (3x^2 - 6) \cdot \sin(x)$

$f'(x) = 6x \cdot \sin(x) + (3x^2 - 6) \cdot \cos(x)$

b $g(x) = \sqrt{3x^2 + x}$

$g'(x) = \frac{1}{2}(3x^2 + x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (6x + 1)$

$g'(x) = \dfrac{6x + 1}{2\sqrt{3x^2 + x}}$

c $h(x) = \frac{1}{4}(2x - 1)^4$

$h'(x) = \frac{1}{4} \cdot 4(2x - 1)^3 \cdot 2$

$h'(x) = 2(2x - 1)^3$

d $k(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$

$k'(x) = \dfrac{1 \cdot (x^2 + 1) - (x + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$

$k'(x) = \dfrac{x^2 + 1 - (2x^2 + 2x)}{(x^2 + 1)^2}$

$k'(x) = \dfrac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}$

V2 **a** $f(x) = (4x - 3) \cdot \ln(x)$

$f'(x) = 4 \cdot \ln(x) + (4x - 3) \cdot \dfrac{1}{x}$

$f'(x) = 4\ln(x) + 4 - \dfrac{3}{x}$

b $g(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1}$

$g'(x) = \frac{1}{2}(4x^2 + x + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (8x + 1)$

$g'(x) = \dfrac{8x + 1}{2\sqrt{4x^2 + x + 1}}$

c $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{2x}$

$h'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot 2x - \ln(x) \cdot 2}{4x^2}$

$h'(x) = \dfrac{2 - 2\ln(x)}{4x^2}$

$h'(x) = \dfrac{1 - \ln(x)}{2x^2}$

d $k(x) = x^2 \cdot e^{2x}$

$k'(x) = 2x \cdot e^{2x} + x^2 \cdot e^{2x} \cdot 2$

$k'(x) = 2x \cdot e^{2x} + 2x^2 \cdot e^{2x}$

$k'(x) = (2x^2 + 2x) \cdot e^{2x}$

© Noordhoff Uitgevers bv

e $m(x) = \sqrt{4\cos^2(x) + 3}$

$m'(x) = \frac{1}{2}(4\cos^2(x) + 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 8\cos(x) \cdot -\sin(x)$

$m'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4\cos^2(x) + 3}} \cdot 8\cos(x) \cdot -\sin(x)$

$m'(x) = \frac{-4\cos(x)\sin(x)}{\sqrt{4\cos^2(x) + 3}}$

f $n(x) = (4x - 5)\sqrt{4x - 5}$

$n(x) = (4x - 5)^{1\frac{1}{2}}$

$n'(x) = 1\frac{1}{2}(4x - 5)^{\frac{1}{2}} \cdot 4$

$n'(x) = 6\sqrt{4x - 5}$

V3 **a** $f(x) = -4 + \sqrt{-x^2 + 6x + 8}$

$f'(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 6x + 8)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x + 6)$

$f'(x) = \frac{-x + 3}{\sqrt{-x^2 + 6x + 8}}$

$f'(x) = 0$ geeft $\frac{-x + 3}{\sqrt{-x^2 + 6x + 8}} = 0$

$-x + 3 = 0$ en $\sqrt{-x^2 + 6x + 8} \neq 0$

$x = 3$

Uit de plot blijkt dat f een maximum heeft

$f(3) = -4 + \sqrt{-9 + 18 + 8} = -4 + \sqrt{17}$

b In de snijpunten met de x-as geldt $-4 + \sqrt{-x^2 + 6x + 8} = 0$

$\sqrt{-x^2 + 6x + 8} = 4$

$-x^2 + 6x + 8 = 16$

$x^2 - 6x + 8 = 0$

$(x - 4)(x - 2) = 0$

$x = 4$ of $x = 2$ (beide oplossingen voldoen)

De snijpunten met de x-as zijn (4, 0) en (2, 0).

$f'(4) = -\frac{1}{4}$

$y = -\frac{1}{4}x + b$

Door (4, 0) geeft $0 = -1 + b$ ofwel $b = 1$.

De raaklijn in (4, 0) heeft als vergelijking $y = -\frac{1}{4}x + 1$.

$f'(2) = \frac{1}{4}$

$y = \frac{1}{4}x + b$

Door (2, 0) geeft $0 = \frac{1}{2} + b$ ofwel $b = -\frac{1}{2}$.

De raaklijn in (2, 0) heeft als vergelijking $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$.

V4 **a** $\lambda = 0$ geeft $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ dus punt (5, 1).

$\lambda = 1$ geeft $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ dus punt (7, 0).

$\lambda = -2$ geeft $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + -2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dus punt (1, 3).

© Noordhoff Uitgevers bv

b Een normaalvector van de lijn is $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Een vergelijking van de lijn is $x + 2y = c$.
(5, 1) invullen geeft $5 + 2 \cdot 1 = c$ dus $c = 7$.

Een vergelijking van deze lijn is $x + 2y = 7$ $\left(\text{of } y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}\right)$.

V5 **a** $l: \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}8\\-6\end{pmatrix}$ ofwel $l: \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$

b $4 - 3\lambda = 100$
$-3\lambda = 96$
$\lambda = -32$
$x = -3 + 4\lambda = -3 + 4 \cdot -32 = -131$
De x-coördinaat van P is -131.

c $x = y$ geeft $-3 + 4\lambda = 4 - 3\lambda$
$7\lambda = 7$
$\lambda = 1$
Dan is $x = -3 + 4 \cdot 1 = 1$ en dus ook $y = 1$.
De coördinaten van Q zijn (1, 1).

d De y-coördinaat is 70 groter dan de x-coördinaat dus $y = x + 70$.
$4 - 3\lambda = -3 + 4\lambda + 70$
$-7\lambda = 63$
$\lambda = -9$
$x = -3 + 4 \cdot -9 = -39$ en $y = -39 + 70 = 31$.
De coördinaten van R zijn $(-39, 31)$.

V6 **a** Het inproduct van de richtingsvectoren is $-1 \cdot 5 + 4 \cdot 3 = 7$.

$$\cos(\alpha) = \frac{7}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{34}} = 0{,}2911\ldots$$

$\alpha = 73{,}072\ldots°$, dus $\angle(l, m) \approx 73°$.

b Het inproduct van de richtingsvectoren is $-2 \cdot 3 + 3 \cdot -5 = -21$.

$$\cos(\alpha) = \frac{-21}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{34}} = -0{,}9988\ldots$$

$\alpha = 177{,}273\ldots°$, dus $\angle(l, m) = 180 - 177{,}273\ldots \approx 3°$.

V7 **a** Een richtingsvector van l is $\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ dus $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

Een vectorvoorstelling van l is $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

b Een richtingsvector van een lijn loodrecht op l is $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ immers

$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} = 3 \cdot -2 + 2 \cdot 3 = 0$.

Een vectorvoorstelling van m is $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\4\end{pmatrix}$, loodrecht daar op staat de vector $\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$.

Het midden van AC is $\left(\frac{4+-3}{2}, \frac{0+4}{2}\right)$ dus $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

Een vectorvoorstelling van de middelloodlijn van lijnstuk AC is
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$.

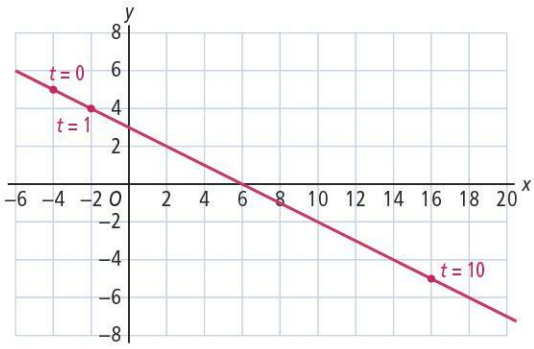
19.1 Bewegen langs een lijn of een cirkel

intro De boot drijft per uur 2 km naar het oosten af dus $x = 2t$.
De snelheid in noordelijke richting is 5 km/uur dus $y = 5t$.
Uit $x = 2t$ volgt $t = \frac{1}{2}x$.

Dit substitueren in $y = 5t$ geeft $y = 5 \cdot \frac{1}{2}x$ dus $y = 2\frac{1}{2}x$.

1 a $t = 0$ invullen geeft $x(0) = -4 + 2 \cdot 0 = -4$ en $y(0) = 5 - 0 = 5$.
$t = 1$ invullen geeft $x(1) = -4 + 2 \cdot 1 = -2$ en $y(1) = 5 - 1 = 4$.
$t = 10$ invullen geeft $x(10) = -4 + 2 \cdot 10 = 16$ en $y(10) = 5 - 10 = -15$.
Dus $t = 0$ geeft $(-4, 5)$, $t = 1$ geeft $(-2, 4)$ en $t = 10$ geeft $(16, -5)$.

b

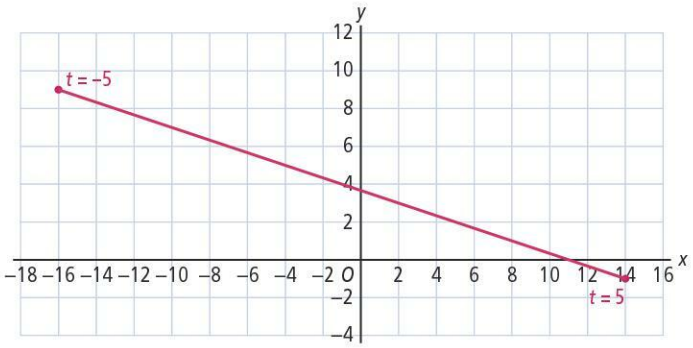


c De richtingscoëfficiënt is $\frac{4-5}{-2--4} = -\frac{1}{2}$.

Een vergelijking van de lijn is $y = -\frac{1}{2}x + b$.

$(-4, 5)$ invullen geeft $5 = -\frac{1}{2} \cdot -4 + b$ ofwel $b = 3$.
Een vergelijking voor de baan van P is $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

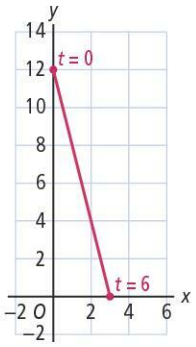
2 a $t = -5$ invullen geeft $x(-5) = -1 + 3 \cdot -5 = -16$ en $y(-5) = 4 - -5 = 9$.
$t = 0$ invullen geeft $x(0) = -1 + 3 \cdot 0 = -1$ en $y(0) = 4 - 0 = 4$.
$t = 5$ invullen geeft $x(5) = -1 + 3 \cdot 5 = 14$ en $y(5) = 4 - 5 = -1$.
De lijn heeft eindpunten $(-16, 9)$ en $(14, -1)$ en gaat door $(-1, 4)$



© Noordhoff Uitgevers bv

b Uit $y = 4 - t$ volgt $t = 4 - y$.
Substitueren van $t = 4 - y$ in $x = -1 + 3t$ geeft.
$x = -1 + 3(4 - y)$
$x = -1 + 12 - 3y$
$x + 3y = 11$
Een vergelijking van de baan van P is $x + 3y = 11$ of $y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{2}{3}$.

c $t = 0$ geeft (0, 12), $t = 3$ geeft $\left(1\frac{1}{2}, 6\right)$ en $t = 6$ geeft (3, 0).



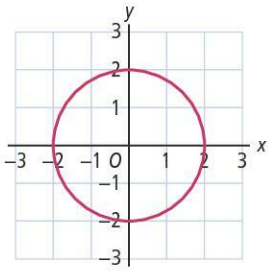
Uit $x = \frac{1}{2}t$ volgt $t = 2x$.
Substitueren van $t = 2x$ in $y = 12 - 2t$ geeft
$y = 12 - 2 \cdot 2x$
$y = 12 - 4x$
Een vergelijking van de baan van P is $y = -4x + 12$ of $4x + y = 12$.

3 **a** De steunvector is bij P en Q hetzelfde. De richtingsvector van Q wijst in dezelfde richting als die van P maar is twee keer zo lang.

b De snelheid van Q is twee keer zo groot als die van P omdat de richtingsvector twee keer zo lang is.
De verhouding van de snelheden van P en Q is dus 1 : 2.

c Als de kentallen van de richtingsvector twee keer zo groot worden gaat Q twee keer zo snel. De baan van Q blijft hetzelfde.

4 **a**



b $(x(t))^2 + (y(t))^2 =$
$(2\cos(t))^2 + (2\sin(t))^2 =$
$4\cos^2(t) + 4\sin^2(t) =$
$4(\cos^2(t) + \sin^2(t)) =$
$4 \cdot 1 = 4$

c De bewegingsvergelijkingen worden dan $\begin{cases} x(t) = 10\cos(t) \\ y(t) = 10\sin(t) \end{cases}$

d Dan worden de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = -2 + 7\cos(t) \\ y(t) = 5 + 7\sin(t) \end{cases}$

© Noordhoff Uitgevers bv

5 P en Q doorlopen beide een cirkel met middelpunt (5, 3) en straal 3, alleen is de beweging van Q twee keer zo snel als de beweging van P.

6 **a** De baan is een cirkel met middelpunt (4, −3) en straal 2.
Een vergelijking van de baan is $(x-4)^2+(y+3)^2=4$.

b De baan is een cirkel met middelpunt (0, 6) en straal 6.
Een vergelijking van de baan is $x^2+(y-6)^2=36$.

7 **a** $\begin{cases} x(t)=4+\cos(t) \\ y(t)=-1+\sin(t) \end{cases}$

b $\begin{cases} x(t)=-2+5\cos(t) \\ y(t)=-4+5\sin(t) \end{cases}$

8 **a** De ellips en de cirkel met middelpunt (3, 3) en straal 4 hebben hetzelfde middelpunt en de cirkel raakt de ellips in de uiteinden van de lange as.

b Dan worden de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t)=3+2\cos(t) \\ y(t)=3+4\sin(t) \end{cases}$

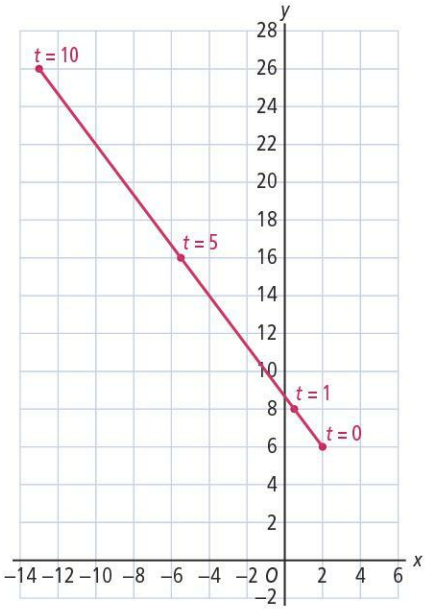
O2 **a** $t=0$ invullen geeft $x(0)=2-1\frac{1}{2}\cdot 0=2$ en $y(0)=6+2\cdot 0=6$.

$t=1$ invullen geeft $x(1)=2-1\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$ en $y(1)=6+2\cdot 1=8$.

$t=5$ invullen geeft $x(5)=2-1\frac{1}{2}\cdot 5=-5\frac{1}{2}$ en $y(5)=6+2\cdot 5=16$.

$t=10$ invullen geeft $x(10)=2-1\frac{1}{2}\cdot 10=-13$ en $y(10)=6+2\cdot 10=26$.

Dus $t=0$ geeft (2, 6), $t=1$ geeft $\left(\frac{1}{2}, 8\right)$, $t=5$ geeft $\left(-5\frac{1}{2}, 16\right)$ en $t=10$ geeft (−13, 26).



b $2t=y-6$

$t=\frac{1}{2}y-3$

$x=2-1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}y-3\right)$

$x=2-\frac{3}{4}y+4\frac{1}{2}$

© Noordhoff Uitgevers bv

c $x + \frac{3}{4}y = 6\frac{1}{2}$
$4x + 3y = 26$

d Uit $y = -3 + \frac{1}{2}t$ volgt $\frac{1}{2}t = y + 3$ ofwel $t = 2y + 6$.
Dit substitueren in $x = 3 - 2t$ geeft
$x = 3 - 2(2y + 6)$
$x = 3 - 4y - 12$
$x + 4y = -9$

U1 $x(0) = 0$ en $x(12) = 24$ dus $x(t) = \frac{24}{12}t$.

$y(0) = 2$ en $y(12) = 20$ dus $y(t) = 2 + \frac{18}{12}t$.

Dus een parametervoorstelling is $\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = 2 + 1\frac{1}{2}t \end{cases}$

U2 **a** Voor P geldt: $x = 10 - 2t$ ofwel $2t = -x + 10$ dus $t = -\frac{1}{2}x + 5$.
Dit substitueren in $y = 8 + t$ geeft

$y = 8 + -\frac{1}{2}x + 5$

$y = -\frac{1}{2}x + 13$

Voor Q geldt: $x = -30 + 8t$ ofwel $8t = x + 30$ dus $t = \frac{1}{8}x + \frac{15}{4}$.
Dit substitueren in $y = 28 - 4t$ geeft

$y = 28 - 4\left(\frac{1}{8}x + \frac{15}{4}\right)$

$y = 28 - \frac{1}{2}x - 15$

$y = -\frac{1}{2}x + 13$

P en Q doorlopen beide de lijn $y = -\frac{1}{2}x + 13$.
Of:
$t = 0$ geeft $P(10, 8)$ en $t = 5$ geeft $Q(10, 8)$.

$t = 2$ geeft $P(6, 10)$ en $t = 4\frac{1}{2}$ geeft $Q(6, 10)$.
De baan van zowel P als Q is een rechte lijn door de punten (10, 8) en (6, 10). P en Q doorlopen dus dezelfde rechte lijn.

b $10 - 2t = -30 + 8t$ en $8 + t = 28 - 4t$
$-10t = -40$ $5t = 20$
$t = 4$ $t = 4$
Voor $t = 4$ bevinden P en Q zich in hetzelfde punt.
De bijbehorende coördinaten zijn (2, 12).

19.2 Werken met bewegingsvergelijkingen

intro Het plaatje is hetzelfde, maar bij Kevin start de beweging op $t = 0$ rechts boven in het punt (6, 4) en gaat daarna via de punten (0, 0), (−6, −4) en (0, 0) weer terug naar (6, 4).
Bij Joost start de beweging in (0, 0) en gaat daarna via de punten (6, 4), (0, 0) en (−6, −4) weer terug naar (0, 0).
Het plaatje is dus hetzelfde, alleen wordt de lijn verschillend doorlopen.
Dit komt omdat cos(0) = 1 en sin(0) = 0.

© Noordhoff Uitgevers bv

9 **a** $x(t) = 0$ geeft

$-t^2 + 6t = 0$

$-t(t - 6) = 0$

$t = 0$ of $t = 6$

$y(t) = 0$ geeft

$-\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 = 0$

$t^2(t - 6) = 0$

$t = 0$ of $t = 6$

Voor $t = 0$ en $t = 6$ bevindt P zich in de oorsprong.

b x heeft een maximum als $x'(t) = 0$.

$x'(t) = -2t + 6$

$x'(t) = 0$ als $-2t + 6 = 0$ dus als $t = 3$.

$x(3) = 9$ en $y(3) = 9$ dus P bevindt zich dan in $(9, 9)$.

c $y'(t) = -t^2 + 4t$

$y'(t) = 0$ geeft $-t^2 + 4t = 0$

$-t(t - 4) = 0$

$t = 0$ of $t = 4$

Daarbij horen de punten $(0, 0)$ en $\left(8, 10\frac{2}{3}\right)$.

d De afstand tot de assen is gelijk als $y = x$ of als $y = -x$.

$y = x$ geeft $-\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 = -t^2 + 6t$

$-\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 6t = 0$

$t^3 - 9t^2 + 18t = 0$

$t(t^2 - 9t + 18) = 0$

$t(t - 6)(t - 3) = 0$

$t = 0$ of $t = 6$ of $t = 3$

$t = 0$ en $t = 6$ horen bij de oorsprong, $t = 3$ geeft het punt $(9, 9)$.

$y = -x$ geeft $-\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 = t^2 - 6t$

$-\frac{1}{3}t^3 + t^2 + 6t = 0$

$t^3 - 3t^2 - 18t = 0$

$t(t - 6)(t + 3) = 0$

$t = 0$ of $t = 6$ of $t = -3$

$t = 0$ en $t = 6$ horen bij de oorsprong, $t = -3$ geeft het punt $(-27, 27)$.

In de punten $(9, 9)$ en $(-27, 27)$ kan P zich dan bevinden.

10 **a** A ligt op de y-as, dus $x(t) = 0$.

$5t - \frac{1}{3}t^2 = 0$

$\frac{1}{3}t(15 - t) = 0$

$t = 0$ of $t = 15$

$y(0) = 12$ en $y(15) = -123$

Omdat A op de positieve y-as ligt volgt hieruit dat A het punt $(0, 12)$ is.

b B ligt op de x-as, dus $y(t) = 0$.

$6t + 12 - t^2 = 0$

$D = 36 - 4 \cdot -1 \cdot 12 = 84$

$t = \dfrac{-6 + \sqrt{84}}{-2}$ of $t = \dfrac{-6 - \sqrt{84}}{-2}$

$t = 3 - \sqrt{21} = -1{,}58\ldots$ of $t = 3 + \sqrt{21} = 7{,}58\ldots$

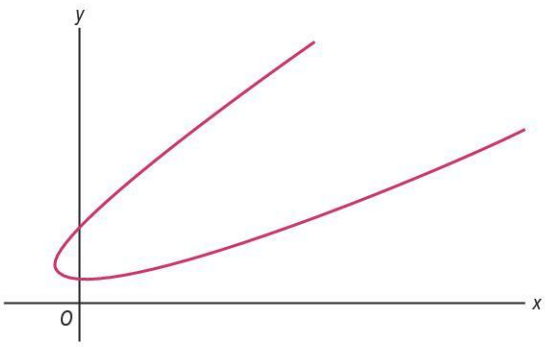
$x(-1{,}58\ldots) \approx -8{,}7$ en $x(7{,}58\ldots) \approx 18{,}7$

Hieruit volgt dat de x-coördinaat van B ongeveer 18,7 is.

© Noordhoff Uitgevers bv

c $x'(t) = 5 - \frac{2}{3}t$
$x'(t) = 0$ als $5 - \frac{2}{3}t = 0$ ofwel $\frac{2}{3}t = 5$ dus als $t = 7\frac{1}{2}$.
$y'(t) = 6 - 2t$
$y'(t) = 0$ als $6 - 2t = 0$ ofwel $2t = 6$ dus als $t = 3$.
De baan heeft een horizontale raaklijn als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$, dus als $t = 3$.
$x(3) = 12$ en $y(3) = 21$, dus in $(12, 21)$ is de raaklijn horizontaal.
De baan heeft een verticale raaklijn als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$, dus als $t = 7\frac{1}{2}$.
$x\left(7\frac{1}{2}\right) = 18\frac{3}{4}$ en $y\left(7\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, dus in $\left(18\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$ is de raaklijn verticaal.

11 a



b $x'(t) = 3 + 4t$ en $y'(t) = 2t$
$t = 2$ geeft $\frac{dx}{dt} = 3 + 4 \cdot 2 = 11$ en $\frac{dy}{dt} = 2 \cdot 2 = 4$.

c P beweegt zich in de positieve x-richting en in de positieve y-richting, dus naar rechts en omhoog.

d $(x - 2y)^2 + 4x - 17y = -13$
$(3t + 2t^2 - 2(1 + t^2))^2 + 4(3t + 2t^2) - 17(1 + t^2) = -13$
$(3t + 2t^2 - 2 - 2t^2)^2 + 12t + 8t^2 - 17 - 17t^2 = -13$
$(3t - 2)^2 + 12t - 9t^2 - 17 = -13$
$9t^2 - 12t + 4 + 12t - 9t^2 - 17 = -13$
$-13 = -13$
Dit klopt voor elke waarde van t, dus de punten van de baan van P voldoen aan de vergelijking $(x - 2y)^2 + 4x - 17y = -13$.

12 a $x'(t) = \frac{1}{2}(1 + t^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2t$

$$x'(t) = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$$

$x'(t) = 0$ geeft $t = 0$.

$y'(t) = \frac{1}{2}$ dus $y'(t) \neq 0$

$x(0) = \sqrt{1} = 1$ en $y(0) = -1$
De raaklijn aan de kromme is verticaal in het punt $(1, -1)$.

b $\frac{1}{2}t - 1 = -\sqrt{1 + t^2}$

$\frac{1}{4}t^2 - t + 1 = 1 + t^2$

$-\frac{3}{4}t^2 - t = 0$

$-\frac{3}{4}t\left(t + \frac{4}{3}\right) = 0$

$t = 0$ of $t = -\frac{4}{3}$ beide voldoen

Daarbij horen de snijpunten $(1, -1)$ en $\left(1\frac{2}{3}, -1\frac{2}{3}\right)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c $x = \sqrt{1+t^2}$ en $y = \frac{1}{2}t - 1$ invullen in $x^2 - 4y^2 - 8y = 5$ geeft

$\left(\sqrt{1+t^2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}t - 1\right)^2 - 8\left(\frac{1}{2}t - 1\right) = 5$

$1 + t^2 - 4\left(\frac{1}{4}t^2 - t + 1\right) - 4t + 8 = 5$

$1 + t^2 - t^2 + 4t - 4 - 4t + 8 = 5$

$5 = 5$

Dit klopt voor elke waarde van t dus de punten van de kromme voldoen aan de vergelijking $x^2 - 4y^2 - 8y = 5$.

13 $x'(t) = t^3 - t^2 - 2t$

$x'(t) = 0$ geeft $t^3 - t^2 - 2t = 0$

$t(t^2 - t - 2) = 0$

$t(t-2)(t+1) = 0$

$t = 0$ of $t = 2$ of $t = -1$

$y'(t) = t^2 - 9$

$y'(t) = 0$ geeft $t^2 - 9 = 0$ ofwel $t^2 = 9$

$t = 3$ of $t = -3$

Er is een horizontale raaklijn als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$.

Hieruit volgt $t = 3$ of $t = -3$.

Hierbij horen de punten $\left(2\frac{1}{4}, -18\right)$ en $\left(20\frac{1}{4}, 18\right)$.

Er is een verticale raaklijn als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$.

Hieruit volgt $t = 0$ of $t = 2$ of $t = -1$.

Hierbij horen de punten $(0, 0)$, $\left(-2\frac{2}{3}, -15\frac{1}{3}\right)$ en $\left(-\frac{5}{12}, 8\frac{2}{3}\right)$.

14 **a** De coördinaten van A zijn $\left(\frac{1}{2}a^2 - 6a, \frac{1}{2}a^2 - 18\right)$.

$x(6-a) = \frac{1}{2}(6-a)^2 - 6(6-a) = \frac{1}{2}(36 - 12a + a^2) - 36 + 6a = \frac{1}{2}a^2 - 18$

$y(6-a) = \frac{1}{2}(6-a)^2 - 18 = \frac{1}{2}(36 - 12a + a^2) - 18 = \frac{1}{2}a^2 - 6a$

De coördinaten van B zijn $\left(\frac{1}{2}a^2 - 18, \frac{1}{2}a^2 - 6a\right)$.

b De x-coördinaat van A is de y-coördinaat van B en omgekeerd. Hieruit volgt dat A en B elkaars spiegelbeeld zijn in de lijn $y = x$.

15 $t = a$ geeft het punt $A\left(\sqrt{a^2+1}, 4a - \frac{1}{6}a^3\right)$.

$t = -a$ geeft het punt $B\left(\sqrt{(-a)^2+1}, 4(-a) - \frac{1}{6}(-a)^3\right)$ ofwel

$B\left(\sqrt{a^2+1}, -4a + \frac{1}{6}a^3\right)$.

$x_B = x_A$ en $y_B = -y_A$ dus de punten A en B zijn elkaars spiegelbeeld in de x-as. Hieruit volgt dat de baan van P symmetrisch is in de x-as.

16 **a** $P(q^2,(q-1)^2)$

b $x(1-q) = (1-q)^2 = (q-1)^2$

$y(1-q) = (1-q-1)^2 = (-q)^2 = q^2$

De coördinaten van P zijn nu $((q-1)^2, q^2)$.

c De x- en y-coördinaten zijn verwisseld en hieruit volgt dat voor elk punt P het spiegelbeeld van P in de lijn $y = x$ ook op de baan ligt. De baan is dus symmetrisch in de lijn $y = x$.

© Noordhoff Uitgevers bv

O10 **a** $10 - 3t - t^2 = 0$
$t^2 + 3t - 10 = 0$
$(t + 5)(t - 2) = 0$
$t = -5$ of $t = 2$

b $t = -5$ geeft $y(-5) = \frac{1}{2} \cdot 5^2 - 3 \cdot -5 = 27\frac{1}{2}$ en $\left(0,\ 27\frac{1}{2}\right)$ hoort bij punt D.

$t = 2$ geeft $y(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 = -4$ en $(0, -4)$ hoort bij punt B.

c $\frac{1}{2}t^2 - 3t = 0$

$\frac{1}{2}t(t - 6) = 0$
$t = 0$ of $t = 6$
$t = 0$ geeft $x(0) = 10$ en $(10, 0)$ hoort bij punt C.
$t = 6$ geeft $x(6) = 10 - 3 \cdot 6 - 6^2 = -44$ en $(-44, 0)$ hoort bij punt A.

d $x'(t) = -3 - 2t$
$y'(t) = t - 3$

e

$x'(t) = 0$	$y'(t) = 0$
$-3 - 2t = 0$	$t - 3 = 0$
$-2t = 3$	$t = 3$
$t = -1\frac{1}{2}$	

f De raaklijn is horizontaal als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$, dus als $t = 3$.

$x(3) = -8$ en $y(3) = -4\frac{1}{2}$

De baan heeft een horizontale raaklijn in het punt $\left(-8, -4\frac{1}{2}\right)$.

De raaklijn is verticaal als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$, dus als $t = -1\frac{1}{2}$.

$x\left(-1\frac{1}{2}\right) = 12\frac{1}{4}$ en $y\left(-1\frac{1}{2}\right) = 5\frac{5}{8}$

De baan heeft een verticale raaklijn in het punt $\left(12\frac{1}{4},\ 5\frac{5}{8}\right)$.

O15 **a** $x(a) = a^3 - 3a$
$y(a) = 2a$
dus $A(a^3 - 3a, 2a)$

b $x(-a) = (-a)^3 - 3 \cdot -a = -a^3 + 3a$
$y(-a) = 2 \cdot -a = -2a$
dus $B(-a^3 + 3a, -2a)$

c Omdat $B(-a^3 + 3a, -2a)$ ofwel $B(-(a^3 - 3a), -2a)$ geldt
$x_B = -x_A$ en $y_B = -y_A$

d Uit opdracht c volgt dat A en B elkaars spiegelbeeld zijn in de oorsprong. Voor elk punt op de baan geldt dat het spiegelbeeld van dat punt in de oorsprong ook op de baan ligt. Hieruit volgt dat de baan symmetrisch is in de oorsprong.

U3 **a** $y(a) = y(b)$ geeft $1 - a^2 = 1 - b^2$
$a^2 = b^2$
$a = b$ of $a = -b$
Je zoekt twee verschillende tijdstippen, dus alleen $a = -b$ voldoet.

$x(a) = x(b)$ geeft $\frac{1}{3}a^3 - a^2 - 3a = \frac{1}{3}b^3 - b^2 - 3b$
Substitueren van $a = -b$ geeft

$\frac{1}{3}(-b)^3 - (-b)^2 - 3 \cdot -b = \frac{1}{3}b^3 - b^2 - 3b$

© Noordhoff Uitgevers bv

$-\frac{1}{3}b^3 - b^2 + 3b = \frac{1}{3}b^3 - b^2 - 3b$

$-\frac{2}{3}b^3 + 6b = 0$

$-\frac{2}{3}b(b^2 - 9) = 0$

$b = 0$ of $b = 3$ of $b = -3$

$b = 0$ geeft $a = 0$, de tijdstippen zijn gelijk en dat kan niet.

$b = 3$ geeft $a = -3$

$b = -3$ geeft $a = 3$

De tijdstippen waarop de kromme zichzelf snijdt zijn $t = 3$ en $t = -3$.

Voor zowel $t = 3$ als $t = -3$ gaat de kromme door $(-9, -8)$.

b $x(t) = \frac{1}{4}t^4 - 2t^2$ is symmetrisch in de y-as.

Hieruit volgt dat $x(a) = x(b)$ als $a = b$ of $a = -b$.

De tijdstippen moeten verschillend zijn dus $a = b$ vervalt.

$y(a) = y(b)$

$a^3 - 3a^2 + 4a = b^3 - 3b^2 + 4b$

Substitueren van $a = -b$ geeft

$(-b)^3 - 3(-b)^2 + 4 \cdot -b = b^3 - 3b^2 + 4b$

$-b^3 - 4b = b^3 + 4b$

$-2b^3 - 8b = 0$

$-2b(b^2 + 4) = 0$

$b = 0$ ($b^2 + 4 = 0$ heeft geen oplossing)

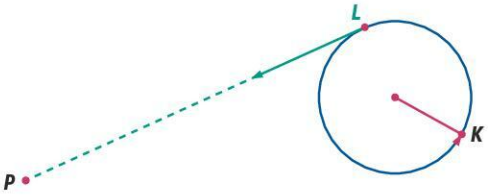
Uit $b = 0$ volgt $a = -b = 0$.

Er zijn geen verschillende getallen a en b waarvoor geldt $x(a) = x(b)$ en $y(a) = y(b)$ dus deze kromme snijdt zichzelf niet.

Er kan ook worden aangetoond $y(t)$ stijgend is omdat de afgeleide hiervan altijd positief is. Hierdoor zijn er dus geen twee getallen a en b met $y(a) = y(b)$.

19.3 Snelheid en raaklijn

intro De kogel moet worden losgelaten in punt L.



17 a $\begin{pmatrix} 60 - 30 \\ 20 - 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -60 \end{pmatrix}$

b $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ -60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -30 \end{pmatrix}$

c Op $t = 3$ is de bal in (45, 55).

De gemiddelde verplaatsing per seconde op het interval [2, 3] is $\begin{pmatrix} 15 \\ -25 \end{pmatrix}$.

Op $t = 2{,}1$ is de bal in (31,5; 77,95).

© Noordhoff Uitgevers bv

De gemiddelde verplaatsing per seconde op het interval [2; 2,1] is
$\frac{1}{0{,}1} \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -2{,}05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -20{,}5 \end{pmatrix}$.
Op $t = 2{,}01$ is de bal in (30,15; 79,7995).
De gemiddelde verplaatsing per seconde op het interval [2; 2,01] is

$\frac{1}{0{,}01} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}15 \\ -0{,}2005 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -20{,}05 \end{pmatrix}$.

d Deze kentallen zullen dan $\vec{v} = \begin{pmatrix} 15 \\ -20 \end{pmatrix}$ zijn.

e $|\vec{v}| = \sqrt{15^2 + (-20)^2} = \sqrt{625} = 25$

f De richtingscoëfficiënt is $\frac{-20}{15} = -\frac{4}{3}$.

18 **a** De verplaatsingsvector van P is $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$.

b De gemiddelde verplaatsing per tijdseenheid is $\begin{pmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} \end{pmatrix}$.

c Als $\Delta t \to 0$ dan nadert $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ naar $x'(t)$ en $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ naar $y'(t)$.

d $|\vec{v}| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$

19 **a** $y(t) = 0$ geeft $t^3 - 3t = 0$
$t(t^2 - 3) = 0$
$t = 0$ of $t^2 = 3$
$t = 0$ of $t = \sqrt{3}$ of $t = -\sqrt{3}$

b $x(0) = -1$ dus A is het punt $(-1, 0)$.
$x(\sqrt{3}) = x(-\sqrt{3}) = 3 - 1 = 2$ dus B is het punt $(2, 0)$.

c De snelheidsvector in A is $\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

De snelheidsvectoren in B zijn $\begin{pmatrix} x'(\sqrt{3}) \\ y'(\sqrt{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 6 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} x'(-\sqrt{3}) \\ y'(-\sqrt{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 6 \end{pmatrix}$.

d De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de baan op $t = \sqrt{3}$ is $\frac{6}{2\sqrt{3}}$

Uit $\tan(\alpha) = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ volgt $\alpha = 60°$.
De hoek tussen de snelheidsvector op $t = \sqrt{3}$ en de x-as is 60°.
Op $t = -\sqrt{3}$ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de baan $-\frac{6}{2\sqrt{3}}$.

Ook op $t = -\sqrt{3}$ is de hoek tussen de snelheidsvector en de x-as 60°.

e In de snijpunten met de y-as geldt $x(t) = 0$.
$t^2 - 1 = 0$
$t^2 = 1$
$t = 1$ of $t = -1$
Op $t = 1$ is $x'(1) = 2$ en $y'(1) = 0$ dus $v(1) = 2$.
Op $t = -1$ is $x'(-1) = -2$ en $y'(-1) = 0$ dus $v(-1) = -2$.

© Noordhoff Uitgevers bv

20 $x'(t) = 4t - 3$
$y'(t) = 2t$
De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is -1.
Hieruit volgt $\frac{2t}{4t-3} = -1$.
$4t - 3 = -2t$
$6t = 3$
$t = \frac{1}{2}$
$x\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} = -1$
$y\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}$
De coördinaten van A zijn $\left(-1, 1\frac{1}{4}\right)$.
De raaklijn in A is van de vorm $y = -x + b$.
Invullen van $\left(-1, 1\frac{1}{4}\right)$ geeft $1\frac{1}{4} = --1 + b$ dus $b = \frac{1}{4}$.
De raaklijn in A aan de baan van P is de lijn $y = -x + \frac{1}{4}$.

21 **a** De baan van P is een cirkel met middelpunt $(0, 0)$ en straal 4.
De baan van Q is een ellips.

b Voor punt P geldt:
$x'(t) = -4\sin(t)$
$y'(t) = 4\cos(t)$
De snelheid is $v(t) = \sqrt{16\sin^2(t) + 16\cos^2(t)}$.
$v(t) = \sqrt{16(\sin^2(t) + \cos^2(t))}$
$v(t) = \sqrt{16 \cdot 1}$
$v(t) = 4$
Hieruit volgt dat de snelheid van P constant is.

c Voor punt Q geldt:
$x'(t) = -4\sin(t)$
$y'(t) = 6\cos(t)$
De snelheid is $v(t) = \sqrt{(-4\sin(t))^2 + (6\cos(t))^2}$.
$v(t) = \sqrt{16\sin^2(t) + 36\cos^2(t)}$
$v(t) = \sqrt{16\sin^2(t) + 16\cos^2(t) + 20\cos^2(t)}$
$v(t) = \sqrt{16(\sin^2(t) + \cos^2(t)) + 20\cos^2(t)}$
$v(t) = \sqrt{16 \cdot 1 + 20\cos^2(t)}$
$v(t) = \sqrt{16 + 20\cos^2(t)}$
$\cos^2(t)$ is minimaal 0, dus de minimale snelheid is $v = \sqrt{16 + 0} = 4$.
$\cos^2(t)$ is maximaal 1, dus de maximale snelheid is $v = \sqrt{16 + 20} = 6$.

22 Voor de eerste kromme geldt:
$x(t) = 3$ geeft $t^2 - 6t + 8 = 3$
$t^2 - 6t + 5 = 0$
$(t - 5)(t - 1) = 0$
$t = 5$ of $t = 1$
$y(5) = 20 - 25 = -5$
$y(1) = 4 - 1 = 3$

© Noordhoff Uitgevers bv

Bij het punt (3, 3) hoort $t = 1$.
$x'(t) = 2t - 6$, dus $x'(1) = -4$.
$y'(t) = 4 - 2t$, dus $y'(1) = 2$.

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de baan in (3, 3) is $\frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$.
Voor de tweede kromme geldt:
$x(t) = 3$ geeft $-t^2 + 8t - 12 = 3$
$-t^2 + 8t - 15 = 0$
$t^2 - 8t + 15 = 0$
$(t - 5)(t - 3) = 0$
$t = 5$ of $t = 3$
$y(5) = 25 - 10 = 15$
$y(3) = 9 - 6 = 3$
Bij het punt (3, 3) hoort $t = 3$.
$x'(t) = -2t + 8$, dus $x'(3) = 2$.
$y'(t) = 2t - 2$, dus $y'(3) = 4$.

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de baan in (3, 3) is $\frac{4}{2} = 2$.

Het product van de richtingscoëfficiënten is $-\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$, dus de raaklijnen staan loodrecht op elkaar.
Hieruit volgt dat de krommen elkaar loodrecht snijden in (3, 3).

23 a $t = a$ geeft het punt $A(10 \ln (a^2 + 1), a^3 - 3a)$.
$t = -a$ geeft $x(-a) = 10 \ln ((-a)^2 + 1)$ ofwel $x(-a) = 10 \ln (a^2 + 1)$ en $y(-a) = (-a)^3 - 3 \cdot -a$ ofwel $y(-a) = -a^3 + 3a$.
Op de baan ligt het punt $B(10 \ln (a^2 + 1), -a^3 + 3a)$.
$x_B = x_A$ en $y_B = -y_A$ dus de punten A en B zijn elkaars spiegelbeeld in de x-as en de kromme is daarom symmetrisch in de x-as.

b $x(t) = 0$ geeft $10 \ln (t^2 + 1) = 0$
$\ln (t^2 + 1) = 0$
$t^2 + 1 = 1$
$t = 0$
$y(0) = 0$, dus het snijpunt met de y-as is (0, 0).
$y(t) = 0$ geeft $t^3 - 3t = 0$
$t(t^2 - 3) = 0$
$t = 0$ of $t^2 = 3$

$t = 0$ of $t = \sqrt{3}$ of $t = -\sqrt{3}$

$x(\sqrt{3}) = x(-\sqrt{3}) = 10 \ln (4)$
De snijpunten met de x-as zijn (0, 0) en $(10 \ln (4), 0)$.

c $x'(t) = \dfrac{10}{t^2 + 1} \cdot 2t = \dfrac{20t}{t^2 + 1}$

$x'(t) = 0$ als $t = 0$.
$y'(t) = 3t^2 - 3$
$y'(t) = 0$ geeft $3t^2 - 3 = 0$
$t^2 = 1$
$t = 1$ of $t = -1$
De raaklijn is verticaal als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$, dus als $t = 0$.
Bij $t = 0$ hoort het punt (0, 0).
De raaklijn is horizontaal als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$, dus als $t = 1$ of $t = -1$.
Bij $t = 1$ hoort het punt $(10 \ln (2), -2)$.
Bij $t = -1$ hoort het punt $(10 \ln (2), 2)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

O19 **a** A en B zijn de snijpunten met de x-as, dus $y(t) = 0$.
$9 - t^2 = 0$
$t^2 = 9$
$t = 3$ of $t = -3$
$x(3) = 3^3 - 4 \cdot 3 = 15$ en $x(-3) = (-3)^3 - 4 \cdot -3 = -15$
Hieruit volgt dat $t = 3$ bij B hoort en $t = -3$ bij A.

b C en D zijn de snijpunten met de y-as, dus $x(t) = 0$.
$t^3 - 4t = 0$
$t(t^2 - 4) = 0$
$t = 0$ of $t^2 = 4$
$t = 0$ of $t = 2$ of $t = -2$
$y(0) = 9$, $y(2) = 9 - 2^2 = 5$ en $y(-2) = 9 - (-2)^2 = 5$
Hieruit volgt dat $t = 0$ bij D hoort en $t = 2$ en $t = -2$ bij C hoort.

c $x'(t) = 3t^2 - 4$
$y'(t) = -2t$

d $t = -3$ geeft $x'(-3) = 3 \cdot (-3)^2 - 4 = 23$ en $y'(-3) = -2 \cdot -3 = 6$

De snelheidsvector in punt A is $\vec{v} = \begin{pmatrix} 23 \\ 6 \end{pmatrix}$.

e $x'(3) = 3 \cdot 3^2 - 4 = 23$ en $y'(3) = -2 \cdot 3 = -6$

De snelheidsvector in punt B is $\vec{v} = \begin{pmatrix} 23 \\ -6 \end{pmatrix}$.

f De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de baan in A is $\frac{6}{23}$.

Uit $\tan(\alpha) = \frac{6}{23}$ volgt $\alpha \approx 15°$. De raaklijn, en dus ook de snelheidsvector in punt A, maakt een hoek van 15° met de x-as.

g $x'(t) = 3t^2 - 4$
$y'(t) = -2t$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 - 4 \\ -2t \end{pmatrix}$

$|\vec{v}| = \sqrt{(3t^2 - 4)^2 + (-2t)^2} = \sqrt{9t^4 - 24t^2 + 16 + 4t^2} = \sqrt{9t^4 - 20t^2 + 16}$

h In punt A is de snelheid $v(-3) = \sqrt{9 \cdot (-3)^4 - 20 \cdot (-3)^2 + 16} = \sqrt{565}$.

In punt B is de snelheid $v(3) = \sqrt{9 \cdot 3^4 - 20 \cdot 3^2 + 16} = \sqrt{565}$.

i De snelheidsvector is evenwijdig met de y-as als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$.
$3t^2 - 4 = 0$.
$3t^2 = 4$

$t^2 = \frac{4}{3}$

$t = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ of $t = -\sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

U4 **a** $x'(t) = \frac{5}{t^2 + 1} \cdot 2t$ ofwel $x'(t) = \frac{10t}{t^2 + 1}$

$y'(t) = 3t^2 - 6t$
$y'(t) = 0$ geeft $3t^2 - 6t = 0$
$3t(t - 2) = 0$
$t = 0$ of $t = 2$
$x'(0) = 0$ en $x'(2) = 4 \neq 0$, dus de raaklijn is horizontaal als $t = 2$.
Bij $t = 2$ hoort het punt $(5 \ln(5), 0)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

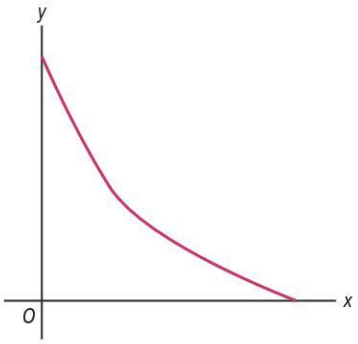
b $x'(t) = 0$ en $y'(t) = 0$ als $t = 0$, zie opdracht a.
Bij $t = 0$ hoort het punt $(0, 4)$.
De bijzonderheid is dat in $(0, 4)$ zowel x als y een extreme waarde heeft en dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn hier onbepaald is.

U5 **a** Uit $x(t) = \frac{1}{3}(2t - 1)\sqrt{2t - 1}$ volgt $t \geq \frac{1}{2}$.

Uit $y(t) = \frac{1}{3}(9 - 2t)\sqrt{9 - 2t}$ volgt $t \leq 4\frac{1}{2}$.

Voor $\frac{1}{2} \leq t \leq 4\frac{1}{2}$ zijn er punten van de baan gedefinieerd.

b



c $x(t) = \frac{1}{3}(2t - 1)^{1\frac{1}{2}}$ geeft $x'(t) = \frac{1}{2}(2t - 1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 = \sqrt{2t - 1}$

$y(t) = \frac{1}{3}(9 - 2t)^{1\frac{1}{2}}$ geeft $y'(t) = \frac{1}{2}(9 - 2t)^{\frac{1}{2}} \cdot -2 = -\sqrt{9 - 2t}$

$v(t) = \sqrt{\left(\sqrt{2t - 1}\right)^2 + \left(-\sqrt{9 - 2t}\right)^2} = \sqrt{2t - 1 + 9 - 2t} = \sqrt{8}$.
Hieruit volgt dat de snelheid constant is.

d $\sqrt[3]{9x^2} + \sqrt[3]{9y^2} =$

$\sqrt[3]{9 \cdot \left(\frac{1}{3}(2t - 1)^{1\frac{1}{2}}\right)^2} + \sqrt[3]{9 \cdot \left(\frac{1}{3}(9 - 2t)^{1\frac{1}{2}}\right)^2} =$

$\sqrt[3]{9 \cdot \frac{1}{9}(2t - 1)^3} + \sqrt[3]{9 \cdot \frac{1}{9}(9 - 2t)^3} =$

$\sqrt[3]{(2t - 1)^3} + \sqrt[3]{(9 - 2t)^3} =$

$2t - 1 + 9 - 2t = 8$

Dit klopt dus voor alle punten op de baan.

19.4 Versnelling

intro De snelheid is het grootst in het laagste punt boven de aarde, het perigeum en het kleinst in het hoogste punt boven de aarde, het apogeum.

24 a $x'(t) = 25$

$y'(t) = 15 - 10t$

$v(t) = \sqrt{25^2 + (15 - 10t)^2}$

$v(t) = \sqrt{625 + 225 - 300t + 100t^2}$

$v(t) = \sqrt{850 - 300t + 100t^2}$

© Noordhoff Uitgevers bv

b Het projectiel komt op de grond als $y(t) = 0$.

$30 + 15t - 5t^2 = 0$

$t^2 - 3t - 6 = 0$

$D = 9 - 4 \cdot 1 \cdot -6 = 33$

$t = \dfrac{3 + \sqrt{33}}{2} = 4{,}37\ldots$ of $t = \dfrac{3 - \sqrt{33}}{2} = -1{,}37\ldots$

Op $t = 4{,}37\ldots$ is de snelheid

$v\left(1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{33}\right) = \sqrt{850 - 300 \cdot \left(1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{33}\right) + 100 \cdot \left(1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{33}\right)^2} = \sqrt{1450} \approx 38$ m/s.

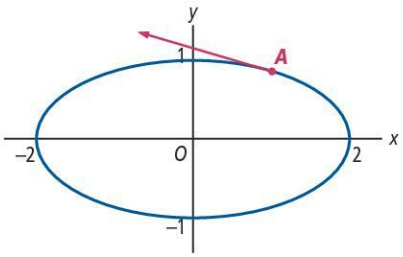
c $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2\sqrt{850 - 300t + 100t^2}} \cdot (-300 + 200t)$ ofwel

$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{-150 + 100t}{\sqrt{850 - 300t + 100t^2}}$

$t = 2$ geeft $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{-150 + 100 \cdot 2}{\sqrt{850 - 300 \cdot 2 + 100 \cdot 2^2}} \approx 1{,}96$ m/s^2

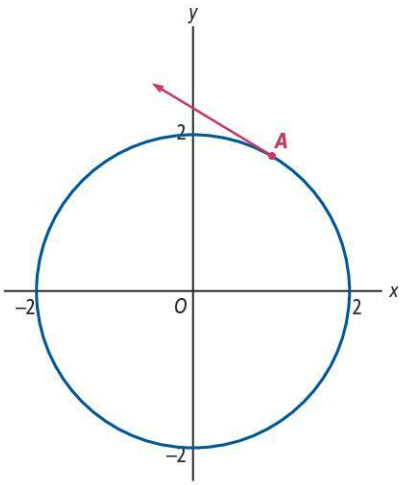
$t = 4$ geeft $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{-150 + 100 \cdot 4}{\sqrt{850 - 300 \cdot 4 + 100 \cdot 4^2}} \approx 7{,}07$ m/s^2

25 **a** De snelheidsvector op $t = \frac{1}{3}\pi$ is $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) \\ \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.



b $t = \frac{1}{3}\pi$ geeft $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{3\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)}{\sqrt{4\sin^2\left(\frac{1}{3}\pi\right) + \cos^2\left(\frac{1}{3}\pi\right)}} = \dfrac{\frac{3}{4}\sqrt{3}}{\sqrt{3\frac{1}{4}}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} = \frac{3}{26}\sqrt{39}$

c



$\vec{v} = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix}$

De snelheidsvector op $t = \frac{1}{3}\pi$ is $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) \\ 2\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

De snelheid is $v = \sqrt{4\sin^2(t) + 4\cos^2(t)}$.

$v = \sqrt{4(\sin^2(t) + \cos^2(t))}$

$v = \sqrt{4 \cdot 1} = 2$

De snelheid is constant, dus de baanversnelling $\frac{dv}{dt} = 0$.

26 **a** $y = x$ geeft $t^2 + 4t = 6 + 5t - t^2$

$2t^2 - t - 6 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot -6 = 49$

$t = \frac{1+7}{4} = 2$ of $t = \frac{1-7}{4} = -1\frac{1}{2}$

$t = 2$ geeft $x(2) = 6 + 10 - 4 = 12$ en dus $A(12, 12)$.

$t = -1\frac{1}{2}$ geeft $x\left(-1\frac{1}{2}\right) = 6 - 7\frac{1}{2} - 2\frac{1}{4} = -3\frac{3}{4}$ en dus $B\left(-3\frac{3}{4}, -3\frac{3}{4}\right)$.

b $x(t) = 0$ geeft $6 + 5t - t^2 = 0$ ofwel $t^2 - 5t - 6 = 0$

$(t - 6)(t + 1) = 0$

$t = 6$ of $t = -1$

$y(6) = 60$ en $y(-1) = -3$, hieruit volgt dat $t = -1$ hoort bij het snijpunt met de negatieve y-as.

$x'(t) = 5 - 2t$

$y'(t) = 2t + 4$

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $\frac{y'(-1)}{x'(-1)} = \frac{2 \cdot -1 + 4}{-2 \cdot -1 + 5} = \frac{2}{7}$

Hieruit volgt $y = \frac{2}{7}x + b$.

De raaklijn gaat door $(0, -3)$.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = \frac{2}{7}x - 3$.

c $v = \sqrt{(5 - 2t)^2 + (2t + 4)^2}$

$v = \sqrt{25 - 20t + 4t^2 + 4t^2 + 16t + 16}$

$v = \sqrt{8t^2 - 4t + 41}$

$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{8t^2 - 4t + 41}} \cdot (16t - 4)$ ofwel $\frac{dv}{dt} = \frac{8t - 2}{\sqrt{8t^2 - 4t + 41}}$

d De baansnelheid heeft een extreme waarde als $\frac{dv}{dt} = 0$, dus als $8t - 2 = 0$.

Dit geeft $t = \frac{1}{4}$.

$x\left(\frac{1}{4}\right) = 7\frac{3}{16}$ en $y\left(\frac{1}{4}\right) = 1\frac{1}{16}$

De baansnelheid heeft een extreme waarde in het punt $\left(7\frac{3}{16}, 1\frac{1}{16}\right)$.

27 **a** $y = x$ geeft $-\frac{1}{2}t^2 + 2 = -\frac{1}{2}t^2 + 2t$

$2 = 2t$

$t = 1$

$x(1) = 1\frac{1}{2}$ dus A is het punt $\left(1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$.

b $x'(t) = -t + 2$

$y'(t) = -t$

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in A is $\frac{y'(1)}{x'(1)} = \frac{-1}{-1+2} = \frac{-1}{1} = -1$.

Een lijn met richtingscoëfficiënt -1 staat inderdaad loodrecht op de lijn $y = x$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c $v = \sqrt{(-t+2)^2 + (-t)^2}$

$v = \sqrt{t^2 - 4t + 4 + t^2}$

$v = \sqrt{2t^2 - 4t + 4}$

$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{2t^2 - 4t + 4}} \cdot (4t - 4)$ ofwel $\frac{dv}{dt} = \frac{2t - 2}{\sqrt{2t^2 - 4t + 4}}$

$t = 1$ geeft $\frac{dv}{dt} = \frac{2 \cdot 1 - 2}{\sqrt{2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 4}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0.$

De baanversnelling in A is 0, en in dit geval is de snelheid in A minimaal.

28 **a** $y = x$ geeft $t + 1 = t - 2\sin(t)$

$1 = -2\sin(t)$

$\sin(t) = -\frac{1}{2}$

$t = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $t = 1\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

Op het interval $[-\pi, 1\frac{1}{2}\pi]$ zijn de oplossingen $t = -\frac{5}{6}\pi$, $t = -\frac{1}{6}\pi$ en $t = 1\frac{1}{6}\pi$

$y\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = 1 - \frac{5}{6}\pi$, $y\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = 1 - \frac{1}{6}\pi$ en $y\left(1\frac{1}{6}\pi\right) = 1 + 1\frac{1}{6}\pi$.

De snijpunten met m zijn $P\left(1 - \frac{5}{6}\pi, 1 - \frac{5}{6}\pi\right)$, $Q\left(1 - \frac{1}{6}\pi, 1 - \frac{1}{6}\pi\right)$ en $R\left(1 + 1\frac{1}{6}\pi, 1 + 1\frac{1}{6}\pi\right)$.

b $x'(t) = 1 - 2\cos(t)$

$y'(t) = 1$

De raaklijn aan de baan is verticaal als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$.

$1 - 2\cos(t) = 0$

$\cos(t) = \frac{1}{2}$

$t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $t = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

Op het interval $[-\pi, 1\frac{1}{2}\pi]$ zijn de oplossingen $t = -\frac{1}{3}\pi$ en $t = \frac{1}{3}\pi$.

$t = -\frac{1}{3}\pi$ geeft $B\left(-\frac{1}{3}\pi + \sqrt{3}, -\frac{1}{3}\pi + 1\right)$

$t = \frac{1}{3}\pi$ geeft $A\left(\frac{1}{3}\pi - \sqrt{3}, \frac{1}{3}\pi + 1\right)$

c $v = \sqrt{(1 - 2\cos(t))^2 + 1^2}$

$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{(1 - 2\cos(t))^2 + 1}} \cdot 2(1 - 2\cos(t)) \cdot 2\sin(t)$

$t = -\frac{1}{3}\pi$ geeft $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{0 + 1}} \cdot 2 \cdot 0 \cdot 2 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$

$t = \frac{1}{3}\pi$ geeft $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{0 + 1}} \cdot 2 \cdot 0 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$

29 **a** $x'(t) = -5\sin(t)$

$y'(t) = 2\cos(t)$

$v = \sqrt{25\sin^2(t) + 4\cos^2(t)}$

$v = \sqrt{4\sin^2(t) + 4\cos^2(t) + 21\sin^2(t)}$

$v = \sqrt{4(\sin^2(t) + \cos^2(t)) + 21\sin^2(t)}$

$v = \sqrt{4 + 21\sin^2(t)}$

© Noordhoff Uitgevers bv

b De baanversnelling is $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{4 + 21\sin^2(t)}} \cdot 42\sin(t)\cos(t)$.

$\frac{dv}{dt} = \frac{21\sin(t)\cos(t)}{\sqrt{4 + 21\sin^2(t)}}$

$\frac{dv}{dt} = 0$ geeft $21\sin(t)\cos(t) = 0$ (en $\sqrt{4 + 21\sin^2(t)} \neq 0$)

$\sin(t) = 0$ of $\cos(t) = 0$

$t = k \cdot \pi$ of $t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

Bij $t = k \cdot \pi$ horen de punten $(5, 0)$ en $(-5, 0)$.

Bij $t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ horen de punten $(0, 2)$ en $(0, -2)$.

c De snelheid $v = \sqrt{4 + 21\sin^2(t)}$ is maximaal als $\sin^2(t) = 1$.

$\sin(t) = 1$ of $\sin(t) = -1$

Hieruit volgt $t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

De snelheid is maximaal in de punten $(0, 2)$ en $(0, -2)$.

30 **a** $y(t) = 0$ geeft $2\sin(t) = 0$ dus $\sin(t) = 0$.

$t = k \cdot \pi$

Op het interval $\left[-\frac{1}{2}\pi, 3\frac{1}{2}\pi\right]$ zijn de oplossingen $t = 0$ of $t = \pi$ of $t = 2\pi$ of $t = 3\pi$.

Daarbij horen de punten $(2, 0)$, $(\pi - 2, 0)$, $(2\pi + 2, 0)$ en $(3\pi - 2, 0)$.

b $x'(t) = 1 - 2\sin(t)$

$y'(t) = 2\cos(t)$

De raaklijn is verticaal als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$.

$1 - 2\sin(t) = 0$

$\sin(t) = \frac{1}{2}$

$t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $t = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

Op het interval $\left[-\frac{1}{2}\pi, 3\frac{1}{2}\pi\right]$ zijn de oplossingen $t = \frac{1}{6}\pi$ of $t = \frac{5}{6}\pi$ of $t = 2\frac{1}{6}\pi$ of $t = 2\frac{5}{6}\pi$.

De raaklijn is verticaal in de punten $\left(\frac{1}{6}\pi + \sqrt{3}, 1\right)$, $\left(\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}, 1\right)$, $\left(2\frac{1}{6}\pi + \sqrt{3}, 1\right)$ en $\left(2\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}, 1\right)$.

c $v = \sqrt{(1 - 2\sin(t))^2 + (2\cos(t))^2}$

$v = \sqrt{1 - 4\sin(t) + 4\sin^2(t) + 4\cos^2(t)}$

$v = \sqrt{1 - 4\sin(t) + 4}$

$v = \sqrt{5 - 4\sin(t)}$

d De snelheid is maximaal $\sqrt{5 + 4} = 3$ als $\sin(t) = -1$.

Hieruit volgt $t = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$.

Op het interval $\left[-\frac{1}{2}\pi, 3\frac{1}{2}\pi\right]$ gaat het om $t = -\frac{1}{2}\pi$, $t = 1\frac{1}{2}\pi$ en $t = 3\frac{1}{2}\pi$.

De punten waarin de snelheid maximaal is zijn $\left(-\frac{1}{2}\pi, -2\right)$, $\left(1\frac{1}{2}\pi, -2\right)$ en $\left(3\frac{1}{2}\pi, -2\right)$.

De snelheid is minimaal $\sqrt{5 - 4} = 1$ als $\sin(t) = 1$.

Hieruit volgt $t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$.

Op het interval $\left[-\frac{1}{2}\pi, 3\frac{1}{2}\pi\right]$ gaat het om $t = \frac{1}{2}\pi$ en $t = 2\frac{1}{2}\pi$.

De punten waarin de snelheid minimaal is zijn $\left(\frac{1}{2}\pi, 2\right)$ en $\left(2\frac{1}{2}\pi, 2\right)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

e $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{5-4\sin(t)}} \cdot -4\cos(t)$ ofwel $\frac{dv}{dt} = \frac{-2\cos(t)}{\sqrt{5-4\sin(t)}}$

$t = \frac{1}{6}\pi$ geeft $\frac{dv}{dt} = \frac{-2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{5-4\cdot\frac{1}{2}}} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -1.$

O26 **a** $x'(t) = 2t$

$y'(t) = 2t - 6$

$v = \sqrt{(2t)^2 + (2t-6)^2}$

$v = \sqrt{4t^2 + 4t^2 - 24t + 36}$

$v = \sqrt{8t^2 - 24t + 36}$

b $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{8t^2-24t+36}} \cdot (16t - 24)$ ofwel $\frac{dv}{dt} = \frac{8t-12}{\sqrt{8t^2-24t+36}}$

c $8t - 12 = 0$ en $\sqrt{8t^2-24t+36} \neq 0$

$8t = 12$

$t = 1\frac{1}{2}$

d $x\left(1\frac{1}{2}\right) = \left(1\frac{1}{2}\right)^2 - 9 = 2\frac{1}{4} - 9 = -6\frac{3}{4}$

$y\left(1\frac{1}{2}\right) = \left(1\frac{1}{2}\right)^2 - 6 \cdot 1\frac{1}{2} = 2\frac{1}{4} - 9 = -6\frac{3}{4}$

Bij $t = 1\frac{1}{2}$ hoort het punt $\left(-6\frac{3}{4}, -6\frac{3}{4}\right)$.

e Onder het wortelteken staat een kwadratische functie waarvan de grafiek een dalparabool is. Deze functie heeft dus een minimum. Daaruit volgt dat v ook een minimum heeft. Dus op $t = 1\frac{1}{2}$ is de snelheid minimaal.

U6 **a** $x'(t) = \frac{3}{\sqrt{t}}$ geeft $x'(1) = \frac{3}{\sqrt{1}} = 3$

$y'(t) = 1 - \frac{3}{\sqrt{t}}$ geeft $y'(1) = 1 - \frac{3}{\sqrt{1}} = -2$

De baansnelheid van P op $t = 1$ is $v = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.

b Als $x \to 0$ dan wordt $\frac{3}{\sqrt{t}}$ heel groot, dus ook de baansnelheid $v = \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{t}}\right)^2 + \left(1 - \frac{3}{\sqrt{t}}\right)^2}$ wordt dan heel groot.

c $y(t) = 0$ geeft $t - 6\sqrt{t} = 0$

$t = 6\sqrt{t}$

$t^2 = 36t$

$t = 0$ of $t = 36$

De baan snijdt de x-as op $t = 36$.

$v = \sqrt{\frac{9}{t} + 1 - \frac{6}{\sqrt{t}} + \frac{9}{t}}$

$v = \sqrt{\frac{18}{t} + 1 - \frac{6}{\sqrt{t}}}$

$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{18}{t} + 1 - \frac{6}{\sqrt{t}}}} \cdot \left(-18t^{-2} + 3t^{-1\frac{1}{2}}\right)$

$t = 36$ geeft $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2} + 1 - 1}} \cdot \left(-\frac{1}{72} + \frac{1}{72}\right) = 0$

Hieruit volgt dat de snelheid minimaal is als de baan de x-as snijdt.

© Noordhoff Uitgevers bv

U7 **a** $x(t) = 0$ geeft $a(3t^2 - 1) = 0$
$3t^2 = 1$
$t^2 = \frac{1}{3}$
$t = \sqrt{\frac{1}{3}}$ of $t = -\sqrt{\frac{1}{3}}$
$y\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = a \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{3} - 3\right) \neq 0$ en ook $y\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = a \cdot -\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{3} - 3\right) \neq 0$
Voor elke waarde van $a \neq 0$ geldt dat er geen t-waarde is waarvoor zowel $x(t) = 0$ als $y(t) = 0$. Hieruit volgt dat de baan niet door de oorsprong gaat.

b $y(t) = 0$ als $t = 0$ of $t = \sqrt{3}$ of $t = -\sqrt{3}$.
$t = 0$ geeft het punt $A(-a, 0)$.
Bij $t = \sqrt{3}$ en $t = -\sqrt{3}$ hoort het punt $B(8a, 0)$.
De afstand van A tot de oorsprong is $|a|$, de afstand van B tot de oorsprong is $|8a|$. De verhouding van de afstanden is 1 : 8.

c $y(t) = at^3 - 3at$
$y'(t) = 3at^2 - 3a$
$y'(t) = 0$ geeft $3at^2 - 3a = 0$
$3a(t^2 - 1) = 0$
$t^2 - 1 = 0$
$t^2 = 1$ ofwel $t = 1$ of $t = -1$.
$x'(t) = 6at$
De raaklijn is horizontaal als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$, dus als $t = 1$ of $t = -1$.
$t = 1$ geeft het punt $(2a, -2a)$ dit punt ligt op de lijn $y = -x$.
$t = -1$ geeft het punt $(2a, 2a)$ dit punt ligt op de lijn $y = x$.

d $x'(\sqrt{3}) = 6a\sqrt{3}$

$y'(\sqrt{3}) = 9a - 3a = 6a$

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn op $t = \sqrt{3}$ is $\frac{6a}{6a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Uit $\tan(\alpha) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ volgt $\alpha = 30°$. Hieruit volgt dat de kromme de x-as snijdt onder een hoek van 30°.

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn op $t = -\sqrt{3}$ is $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$, dus de kromme snijdt de x-as dan ook onder een hoek van 30°.

e $x'(t) = 6t$
$y'(t) = 3t^2 - 3$
$v = \sqrt{36t^2 + (3t^2 - 3)^2}$
$v = \sqrt{36t^2 + 9t^4 - 18t^2 + 9}$
$v = \sqrt{9t^4 + 18t^2 + 9}$
$v = \sqrt{(3t^2 + 3)^2}$
$v = 3t^2 + 3$
$\frac{dv}{dt} = 6t$

© Noordhoff Uitgevers bv

19.5 Gemengde opdrachten

31 **a** $y(t) = 0$
$4 - t^2 = 0$
$t = 2$ of $t = -2$
$x(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$
$x(-2) = (-2)^2 - 4 \cdot -2 = 4 + 8 = 12$
De snijpunten met de x-as zijn $(-4, 0)$ en $(12, 0)$.
$x(t) = 0$
$t^2 - 4t = 0$
$t(t - 4) = 0$
$t = 0$ of $t = 4$
$y(0) = 4$
$y(4) = 4 - 4^2 = 4 - 16 = -12$
De snijpunten met de y-as zijn $(0, 4)$ en $(0, -12)$.

b $x'(t) = 2t - 4$
$x'(t) = 0$ als $t = 2$
$y'(t) = -2t$
$y'(t) = 0$ als $t = 0$
De raaklijn is horizontaal als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$, dus als $t = 0$.
Daarbij hoort het punt $(0, 4)$.
De raaklijn is verticaal als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$, dus als $t = 2$.
Daarbij hoort het punt $(-4, 0)$.

c De afstand d tussen $P(t^2 - 4t, 4 - t^2)$ en $A(0, -4)$ is

$$d = \sqrt{(t^2 - 4t)^2 + (4 - t^2 + 4)^2}$$

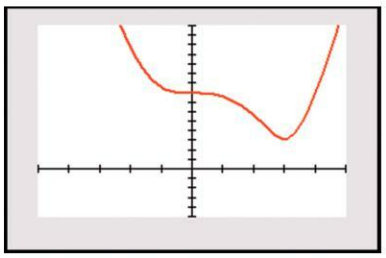
$$d = \sqrt{(t^2 - 4t)^2 + (8 - t^2)^2}$$

$$d = \sqrt{t^4 - 8t^3 + 16t^2 + 64 - 16t^2 + t^4}$$

$$d = \sqrt{2t^4 - 8t^3 + 64}$$

$$d' = \frac{1}{2\sqrt{2t^4 - 8t^3 + 64}} \cdot (8t^3 - 24t^2)$$

$d' = 0$ geeft $8t^3 - 24t^2 = 0$
$8t^2(t - 3) = 0$
$t = 0$ of $t = 3$
In de plot zie je dat de afstand minimaal is als $t = 3$.
Daarbij hoort het punt $(-3, -5)$.



d $(t^2 - 4t + 4 - t^2)^2 - 8(t^2 - 4t) + 8(4 - t^2) =$
$(-4t + 4)^2 - 8t^2 + 32t + 32 - 8t^2 =$
$16t^2 - 32t + 16 - 8t^2 + 32t + 32 - 8t^2 = 48$
Dit geldt voor elke waarde van t, dus de coördinaten van de punten van de baan voldoen aan de vergelijking $(x + y)^2 - 8x + 8y = 48$.

32 **a** $y(t) = 0$ geeft $7 + 6t - t^2 = 0$
$t^2 - 6t - 7 = 0$
$(t - 7)(t + 1) = 0$
$t = 7$ of $t = -1$

$$x(7) = \sqrt{7^2 + 4 \cdot 7 + 15} = \sqrt{92}$$

$$x(-1) = \sqrt{(-1)^2 + 4 \cdot -1 + 15} = \sqrt{12}$$

De snijpunten met de x-as zijn $(\sqrt{92}, 0)$ en $(\sqrt{12}, 0)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $x'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t^2+4t+15}} \cdot (2t+4)$ ofwel $x'(t) = \dfrac{t+2}{\sqrt{t^2+4t+15}}$

$y'(t) = 6 - 2t$

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $\dfrac{y'(-7)}{x'(-7)} = \dfrac{20}{-\frac{5}{6}} = -24$.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = -24x + b$.
$t = -7$ geeft het raakpunt $(6, -84)$.
Dit substitueren geeft $-84 = -24 \cdot 6 + b$ ofwel $b = 60$.
Een vergelijking van de raaklijn is $y = -24x + 60$.

c $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$ geeft $6 - 2t = 0$ dus $t = 3$.
$x(3) = 6$ en $y(3) = 16$
De raaklijn is evenwijdig met de x-as in het punt $(6, 16)$.

d $y(t) = 12$ geeft $7 + 6t - t^2 = 12$
$t^2 - 6t + 5 = 0$
$(t-5)(t-1) = 0$
$t = 5$ of $t = 1$
$x(5) = \sqrt{60}$ en $x(1) = \sqrt{20}$
De snijpunten zijn $(\sqrt{60}, 12)$ en $(\sqrt{20}, 12)$.

33 **a** Is de raaklijn evenwijdig aan de y-as, dan geldt $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$.
$x'(t) = 5\cos(t)$
$y'(t) = 2t$
$x'(t) = 0$ geeft $5\cos(t) = 0$ ofwel $\cos(t) = 0$

Op het interval $[-\pi, \pi]$ is de oplossing $t = -\frac{1}{2}\pi$ of $t = \frac{1}{2}\pi$.

$x\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = -5$ en $y\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{4}\pi^2$

$x\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 5$ en $y\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{4}\pi^2$

In de punten $\left(-5, \frac{1}{4}\pi^2\right)$ en $(5, \frac{1}{4}\pi^2)$ is de raaklijn verticaal.

b $t = a$ geeft het punt $B(5\sin(a), a^2)$
$t = -a$ geeft $x(-a) = 5\sin(-a) = -5\sin(a)$ en $y(-a) = (-a)^2 = a^2$
Op de baan ligt het punt $C(-5\sin(a), a^2)$.
$x_C = -x_B$ en $y_C = y_B$ dus C is het spiegelbeeld van B in de y-as.

c Deze richtingscoëfficiënt is $\dfrac{y'(-\pi)}{x'(-\pi)} = \dfrac{-2\pi}{5\cos(-\pi)} = \dfrac{-2\pi}{-5} = \dfrac{2}{5}\pi$.

d Deze richtingscoëfficiënt is $\dfrac{y'(\pi)}{x'(\pi)} = \dfrac{2\pi}{5\cos(\pi)} = \dfrac{2\pi}{-5} = -\dfrac{2}{5}\pi$.

Of: de baan is symmetrisch in de y-as. Hieruit volgt dat bij aankomst de richtingscoëfficiënt gelijk is aan $-\frac{2}{5}\pi$.

e Bij O hoort $t = 0$.

$\vec{v} = \sqrt{(x'(0))^2 + (y'(0))^2} = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$
De baansnelheid in O is 5.
Een formule voor de snelheid is $v = \sqrt{25\cos^2(t) + 4t^2}$.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{25\cos^2(t) + 4t^2}} \cdot (50\cos(t) \cdot -\sin(t) + 8t)$$

$t = 0$ geeft $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{2\sqrt{25}} \cdot 0 = 0$.

De baanversnelling in O is 0.

© Noordhoff Uitgevers bv

Onderzoeksopdrachten

34 **a** $y(t) = 0$ geeft $t \cdot \sin(t) = 0$
$t = 0$ of $\sin(t) = 0$
$t = 0$ of $t = k \cdot \pi$
De snijpunten zijn $(0, 0)$, $(-\pi, 0)$, $(2\pi, 0)$, $(-3\pi, 0)$, $(4\pi, 0)$ enz.
De opeenvolgende snijpunten met de positieve x-as zijn $(0, 0)$, $(2\pi, 0)$, $(4\pi, 0)$, $(6\pi, 0)$ enz.
De opeenvolgende snijpunten met de negatieve x-as zijn $(-\pi, 0)$, $(-3\pi, 0)$, $(-5\pi, 0)$ enz.
De opeenvolgende snijpunten met de x-as liggen met uitzondering van $(-\pi, 0)$ en $(0, 0)$ op afstand 2π van elkaar.
$x(t) = 0$ geeft $t \cdot \cos(t) = 0$
$t = 0$ of $\cos(t) = 0$

$t = 0$ of $t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

De snijpunten zijn $(0, 0)$, $\left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$, $\left(0, -1\frac{1}{2}\pi\right)$, $\left(0, 2\frac{1}{2}\pi\right)$, $\left(0, -3\frac{1}{2}\pi\right)$ enz.
Ook op de y-as liggen bijna alle opeenvolgende snijpunten op afstand 2π van elkaar.

b Je krijgt roosterpunten op de x-as als je x en y vermenigvuldigt met $\frac{1}{2\pi}$.

Dit geeft $\begin{cases} x(t) = \frac{t}{2\pi} \cdot \cos(t) \\ y(t) = \frac{t}{2\pi} \cdot \sin(t) \end{cases}$

c $x'(t) = \cos(t) + t \cdot -\sin(t)$
$y'(t) = \sin(t) + t \cdot \cos(t)$

$v = \sqrt{(\cos(t) - t\sin(t))^2 + (\sin(t) + t\cos(t))^2}$

$v = \sqrt{\cos^2(t) - 2t\sin(t)\cos(t) + t^2\sin^2(t) + \sin^2(t) + 2t\sin(t)\cos(t) + t^2\cos^2(t)}$

$v = \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t) + t^2(\sin^2(t) + \cos^2(t))}$

$v = \sqrt{1 + t^2}$

d $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{1 + t^2}} \cdot 2t = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$

e $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} e^{0,1t} \cdot \cos(t) \\ e^{0,1t} \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1e^{0,1t}\cos(t) - e^{0,1t}\sin(t) \\ 0{,}1e^{0,1t}\sin(t) + e^{0,1t}\cos(t) \end{pmatrix}$

De hoek tussen $\overrightarrow{OP}$ en $\vec{v}$ is hetzelfde als de hoek α tussen $\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0{,}1\cos(t) - \sin(t) \\ 0{,}1\sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix}$.

$\cos(\alpha) = \dfrac{\cos(t)(0{,}1\cos(t) - \sin(t)) + \sin(t)(0{,}1\sin(t) + \cos(t))}{1 \cdot \sqrt{(0{,}1\cos(t) - \sin(t))^2 + (0{,}1\sin(t) + \cos(t))^2}}$

$\cos(\alpha) = \dfrac{0{,}1\cos^2(t) - \cos(t)\sin(t) + 0{,}1\sin^2(t) + \sin(t)\cos(t)}{\sqrt{0{,}01\cos^2(t) - 0{,}2\cos(t)\sin(t) + \sin^2(t) + 0{,}01\sin^2(t) + 0{,}2\sin(t)\cos(t) + \cos^2(t)}} = \dfrac{0{,}1}{\sqrt{1{,}01}}$

$\cos(\alpha)$ is constant dus ook α is constant.

© Noordhoff Uitgevers bv

f b bepaalt hoe ver de omwentelingen uit elkaar liggen.
$b = 0$ levert een cirkel op met straal 1.
$b > 0$ levert een spiraal naar buiten op.
$b < 0$ levert een spiraal naar binnen op met als limietpunt (0, 0).

Samenvatting

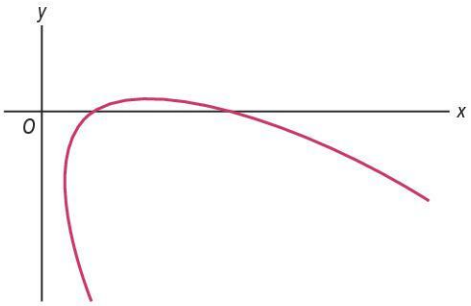
S1 **a** $t = 0$ geeft $P(4, 0)$
$t = -2$ geeft $P(2, -8)$
$t = 4$ geeft $P(32, -8)$

b Bij $x(t)$ hoort een dalparabool.

$x'(t) = 2t + 3$ dus de x-coördinaat van de top is $-1\frac{1}{2}$.

$x\left(-1\frac{1}{2}\right) = 1\frac{3}{4}$, hieruit volgt dat $x(t) \geq 1\frac{3}{4}$ voor alle waarden van t en dus ligt de baan van P rechts van de y-as.

c



S2

A: geen van beide
B: cirkel
C: lijn
D: geen van beide

S3 **a** De baan van P is een cirkel met middelpunt $(7, -5)$ en straal 3.
Een vergelijking van de cirkel is $(x - 7)^2 + (y + 5)^2 = 9$.

b Uit $x = -3 - t$ volgt $t = -3 - x$.
Substitutie in $y = 2t + 4$ geeft
$y = 2(-3 - x) + 4$ ofwel $y = -2x - 2$.
Een vergelijking van de lijn is $y = -2x - 2$.

S4 $t = a$ geeft het punt $A(a^3 - 2a, a^2 + \sqrt{a^2 + 9})$.
$t = -a$ geeft het punt $B((-a)^3 - 2 \cdot -a, (-a)^2 + \sqrt{(-a)^2 + 9})$ ofwel

$B(-a^3 + 2a, a^2 + \sqrt{a^2 + 9})$ ofwel $B(-(a^3 - 2a), a^2 + \sqrt{a^2 + 9})$.
$x_B = -x_A$ en $y_B = y_A$ dus B is het spiegelbeeld van A in de y-as en de baan is daarom symmetrisch in de y-as.

S5 $x'(t) = t^2 - 2t - 3$
$x'(t) = 0$ geeft $t^2 - 2t - 3 = 0$
$(t - 3)(t + 1) = 0$
$t = 3$ of $t = -1$
$y'(t) = -2t$
$y'(t) = 0$ geeft $t = 0$
Er is een horizontale raaklijn als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$, dus als $t = 0$.
Er is een verticale raaklijn als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$, dus als $t = 3$ of $t = -1$.
Er is een horizontale raaklijn in $(0, 9)$ en een verticale raaklijn in $(-9, 0)$ en $\left(1\frac{2}{3}, 8\right)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

S6 $x'(t) = 1 + \frac{4}{2\sqrt{t}}$ ofwel $x'(t) = 1 + \frac{2}{\sqrt{t}}$

$y'(t) = 1 - \frac{4}{2\sqrt{t}}$ ofwel $y'(t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{t}}$

$x'(9) = 1 + \frac{2}{\sqrt{9}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ en $y'(9) = 1 - \frac{2}{\sqrt{9}} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$v = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{26}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{26}$

S7 **a** $x'(t) = -4\sin(t)$

$y'(t) = 3\cos(t)$

$|\vec{v}| = \sqrt{(-4\sin(t))^2 + (3\cos(t))^2}$

$|\vec{v}| = \sqrt{16\sin^2(t) + 9\cos^2(t)}$

$|\vec{v}| = \sqrt{9\sin^2(t) + 9\cos^2(t) + 7\sin^2(t)}$

$|\vec{v}| = \sqrt{9 + 7\sin^2(t)}$

b $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{9 + 7\sin^2(t)}} \cdot 14\sin(t)\cos(t)$ ofwel $\frac{dv}{dt} = \frac{7\sin(t)\cos(t)}{\sqrt{9 + 7\sin^2(t)}}$

$t = \frac{1}{4}\pi$ geeft $\frac{dv}{dt} = \frac{7 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{9 + 7 \cdot \frac{1}{2}}} = \frac{3\frac{1}{2}}{\sqrt{12\frac{1}{2}}} = \frac{7}{2\sqrt{12\frac{1}{2}}}$

Test jezelf

T1 **a** $y(t) = 0$ geeft $6t - t^2 = 0$

$t(6 - t) = 0$

$t = 0$ of $t = 6$

De snijpunten met de x-as zijn (0, 0) en (18, 0).

$x(t) = 0$ geeft $t^2 - 3t = 0$

$t(t - 3) = 0$

$t = 0$ of $t = 3$

De snijpunten met de y-as zijn (0, 0) en (0, 9).

b $x'(t) = 2t - 3$

$y'(t) = 6 - 2t$

$t = -2$ geeft $v = \sqrt{(x'(-2))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{(-7)^2 + 10^2} = \sqrt{149} \approx 12{,}2.$

$v = \sqrt{(2t - 3)^2 + (6 - 2t)^2}$

$v = \sqrt{4t^2 - 12t + 9 + 36 - 24t + 4t^2}$

$v = \sqrt{8t^2 - 36t + 45}$

$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{8t^2 - 36t + 45}} \cdot (16t - 36)$ ofwel $\frac{dv}{dt} = \frac{8t - 18}{\sqrt{8t^2 - 36t + 45}}$

$t = -2$ geeft $\frac{dv}{dt} = \frac{-34}{\sqrt{149}} \approx 2{,}8$

© Noordhoff Uitgevers bv

c De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $\frac{y'(t)}{x'(t)} = 1$.

$\frac{6-2t}{2t-3} = 1$

$6 - 2t = 2t - 3$
$-4t = -9$

$t = 2\frac{1}{4}$

Hierbij hoort het punt $\left(-1\frac{11}{16}, 8\frac{7}{16}\right)$.
Een vergelijking van deze raaklijn is van de vorm $y = x + b$.

Invullen van $x = -1\frac{11}{16}$ en $y = 8\frac{7}{16}$ geeft $8\frac{7}{16} = -1\frac{11}{16} + b$ dus $b = 10\frac{1}{8}$.

Een vergelijking van deze raaklijn is $y = x + 10\frac{1}{8}$.

d $x = t^2 - 3t$ en $y = 6t - t^2$ substitueren geeft
$(t^2 - 3t + 6t - t^2)^2 = 18(t^2 - 3t) + 9(6t - t^2)$
$9t^2 = 18t^2 - 54t + 54t - 9t^2$
$9t^2 = 9t^2$
Dit klopt voor elke waarde van t, dus de punten van de baan voldoen aan de gegeven vergelijking.

T2 **a** Een vectorvoorstelling is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Een normaalvector van de lijn is $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Een vergelijking van de lijn is van de vorm $2x + 3y = c$.
(4, 6) invullen geeft $2x + 3y = 26$.

b Uit $x = 4 + 3\sin(t)$ volgt $3\sin(t) = x - 4$ ofwel $\sin(t) = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$.

Dit substitueren in $y = 6 - 2\sin(t)$ geeft $y = 6 - 2\left(\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}\right)$.
$y = 6 - \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$
$\frac{2}{3}x + y = 8\frac{2}{3}$
$2x + 3y = 26$
Hieruit volgt dat de baan van Q een deel van de baan van P is. Voor $x = 4 + 3\sin(t)$ geldt $1 \le x \le 7$, daarom is het een *deel* van de baan.

c Voor de eindpunten geldt $x = 1$ als $\sin(t) = -1$ en $x = 7$ als $\sin(t) = 1$.
Hieruit volgen de punten (1, 8) en (7, 4).

T3 **a** Bij $t = \frac{1}{6}\pi$ hoort het punt $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ en bij $t = 1\frac{1}{6}\pi$ hoort $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

De lengte van de korte as in de tekening is $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Bij $t = \frac{2}{3}\pi$ hoort $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ en bij $t = 1\frac{2}{3}\pi$ hoort $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.

De lengte van de lange as in de tekening is $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $x'(t) = \cos(t)$

$y'(t) = \cos\left(t - \frac{1}{3}\pi\right)$

$v = \sqrt{\cos^2(t) + \cos^2\left(t - \frac{1}{3}\pi\right)}$

$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{\cos^2(t) + \cos^2\left(t - \frac{1}{3}\pi\right)}} \cdot \left(2\cos(t) \cdot -\sin(t) + 2\cos\left(t - \frac{1}{3}\pi\right) \cdot -\sin\left(t - \frac{1}{3}\pi\right)\right)$

$\frac{dv}{dt} = \frac{-\cos(t)\sin(t) - \cos\left(t - \frac{1}{3}\pi\right)\sin\left(t - \frac{1}{3}\pi\right)}{\sqrt{\cos^2(t) + \cos^2\left(t - \frac{1}{3}\pi\right)}}$

$t = \frac{1}{6}\pi$ geeft $\frac{dv}{dt} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot -\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{3}{4}}} = 0$

$t = 1\frac{1}{6}\pi$ geeft $\frac{dv}{dt} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{3}{4}}} = 0$

$t = \frac{2}{3}\pi$ geeft $\frac{dv}{dt} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}} = 0$

$t = 1\frac{2}{3}\pi$ geeft $\frac{dv}{dt} = \frac{-\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}} = 0$

c $t = \frac{1}{6}\pi$ geeft $v = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$t = \frac{2}{3}\pi$ geeft $v = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$t = 1\frac{1}{6}\pi$ geeft $v = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$t = 1\frac{2}{3}\pi$ geeft $v = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

d Voor de snijpunten met de x-as geldt $y(t) = 0$ dus $\sin\left(t - \frac{1}{3}\pi\right) = 0$.

$t - \frac{1}{3}\pi = k\pi$

$t = \frac{1}{3}\pi + k\pi$

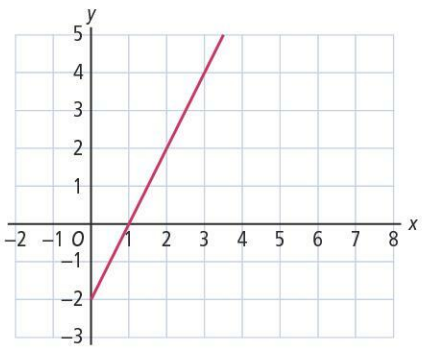
De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de baan is

$\frac{y'\left(\frac{1}{3}\pi\right)}{x'\left(\frac{1}{3}\pi\right)} = \frac{\cos\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{3}\pi\right)}{\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Uit $\tan(\alpha) = 2$ volgt $\alpha = 63{,}434\ldots$

De hoek waaronder de ellips de x-as snijdt is ongeveer 63°.

T4 a



b $t = 0$ geeft het punt $(1, 0)$.
$t = 1$ geeft het punt $(0, -2)$.
De richtingscoëfficiënt is 2, dus een vergelijking van de lijn is $y = 2x - 2$.
Substitutie van $x(t) = (t - 1)^2$ en $y(t) = 2t^2 - 4t$ geeft
$2t^2 - 4t = 2(t - 1)^2 - 2$
$2t^2 - 4t = 2(t^2 - 2t + 1) - 2$
$2t^2 - 4t = 2t^2 - 4t + 2 - 2$
Dit klopt voor alle waarden van t dus de punten van de baan voldoen aan de vergelijking $y = 2x - 2$.

c $x'(t) = 2(t - 1) = 2t - 2$
$y'(t) = 4t - 4$
De snelheid is 0 als $x'(t) = 0$ en $y'(t) = 0$, dus als $t = 1$.

T5 **a** $y(t) = 0$ geeft $\ln(t^2 + 4t + 5) = 0$
$t^2 + 4t + 5 = 1$
$t^2 + 4t + 4 = 0$
$(t + 2)(t + 2) = 0$
$t = -2$
Het gemeenschappelijke punt met de x-as is $(0, 0)$.
$x(t) = 0$ geeft $t^2 - 5t - 14 = 0$
$(t - 7)(t + 2) = 0$
$t = 7$ of $t = -2$
De gemeenschappelijke punten met de y-as zijn $(0, \ln(82))$ en $(0, 0)$.

b $x'(t) = 2t - 5$ en $y'(t) = \dfrac{1}{t^2 + 4t + 5} \cdot (2t + 4)$ ofwel $y'(t) = \dfrac{2t + 4}{t^2 + 4t + 5}$

Er is een verticale raaklijn als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$, dus als $t = 2\frac{1}{2}$.
Er is een horizontale raaklijn als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$, dus als $t = -2$.

In $\left(-20\frac{1}{4}, \ln\left(21\frac{1}{4}\right)\right)$ is de raaklijn verticaal en in $(0, 0)$ horizontaal.

c $x'(-3) = -11$ en $y'(-3) = \frac{1}{2} \cdot -2 = -1$

De baansnelheid $v = \sqrt{(-11)^2 + (-1)^2} = \sqrt{122}$.

T6 **a** Uit $x = 12 - 3t$ volgt $3t = 12 - x$ ofwel $t = 4 - \frac{1}{3}x$.

Substitutie in $y = 7 + 4t$ geeft $y = 7 + 4\left(4 - \frac{1}{3}x\right)$ ofwel $y = 23 - \frac{4}{3}x$.

Hieruit volgt $\frac{4}{3}x + y = 23$ ofwel $4x + 3y = 69$.

b De baan van punt Q is een cirkel met middelpunt $(12, c)$ en straal 13.
Een vergelijking van de cirkel is $(x - 12)^2 + (y - c)^2 = 169$.
$(0, 0)$ ligt op de cirkel, dit substitueren geeft
$(0 - 12) + (0 - c)^2 = 169$
$144 + (-c)^2 = 169$
$c^2 = 25$
$c = 5$ of $c = -5$
Vergelijkingen van de twee mogelijke cirkels zijn $(x - 12)^2 + (y - 5)^2 = 169$ en $(x - 12)^2 + (y + 5)^2 = 169$.

© Noordhoff Uitgevers bv

T7 **a** $\sqrt{t^2+6t+21} = \sqrt{4t^2+4t+16}$

$t^2+6t+21 = 4t^2+4t+16$

$3t^2-2t-5=0$

$D = 4-4\cdot 3\cdot -5 = 64$

$t = \dfrac{2+8}{6} = 1\frac{2}{3}$ of $t = \dfrac{2-8}{6} = -1$ beide voldoen

De snijpunten zijn $\left(\sqrt{33\frac{7}{9}}, \sqrt{33\frac{7}{9}}\right)$ en (4, 4).

b $x'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t^2+6t+21}}\cdot(2t+6)$ ofwel $x'(t) = \dfrac{t+3}{\sqrt{t^2+6t+21}}$

$y'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{4t^2+4t+16}}\cdot(8t+4)$ ofwel $y'(t) = \dfrac{4t+2}{\sqrt{4t^2+4t+16}}$

Er is een horizontale raaklijn als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$, dus als $t = -\frac{1}{2}$.
Er is een verticale raaklijn als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$, dus als $t = -3$.

In $\left(\sqrt{18\frac{1}{4}}, \sqrt{15}\right)$ is de raaklijn horizontaal en in $(\sqrt{12}, \sqrt{40})$ verticaal.

c $\sqrt{4t^2+4t+16} = 2\sqrt{t^2+6t+21}$

$4t^2+4t+16 = 4(t^2+6t+21)$

$4t^2+4t+16 = 4t^2+24t+84$

$-20t = 68$

$t = -\frac{68}{20} = -3\frac{2}{5}$

d $x'(-1) = \dfrac{2}{\sqrt{16}} = \frac{1}{2}$

$y'(-1) = \dfrac{-2}{\sqrt{16}} = -\frac{1}{2}$

De richtingscoëfficiënt is $\dfrac{y'(-1)}{x'(-1)} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1$.

Extra oefening

E1 **a** Uit $x = 13-4t$ volgt $4t = 13-x$ ofwel $t = \frac{13}{4} - \frac{1}{4}x$.

Substitutie in $y = -1+5t$ geeft $y = -1+5\left(\frac{13}{4} - \frac{1}{4}x\right)$ ofwel $y = 15\frac{1}{4} - 1\frac{1}{4}x$.
$1\frac{1}{4}x + y = 15\frac{1}{4}$
$5x+4y = 61$

b De baan van Q is een cirkel met middelpunt $(-5, 3)$ en straal 7.
Een vergelijking is $(x+5)^2+(y-3)^2 = 49$.

E2 $x'(t) = 4t^3-12t^2$

$x'(t) = 0$ geeft $4t^3-12t^2 = 0$

$4t^2(t-3) = 0$

$t = 0$ of $t = 3$

$y'(t) = 3t^2+6t-9$

$y'(t) = 0$ geeft $3t^2+6t-9 = 0$

$t^2+2t-3 = 0$

$(t+3)(t-1) = 0$

$t = -3$ of $t = 1$

© Noordhoff Uitgevers bv

Er zijn toppen als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$, dus als $t = 0$ en als $t = 3$.
Er zijn ook toppen als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$, dus als $t = -3$ en als $t = 1$.
De toppen zijn $(3, 0)$, $(-24, 27)$, $(192, 27)$ en $(0, -5)$.

E3 $t = a$ geeft het punt $A\left(\frac{1}{2}a^4 - 2a^2 - 1, a^3 + 5a\right)$.

$t = -a$ geeft het punt $B\left(\frac{1}{2}(-a)^4 - 2(-a)^2 - 1, (-a)^3 + 5(-a)\right)$ ofwel

$B\left(\frac{1}{2}a^4 - 2a^2 - 1, -a^3 - 5a\right)$ ofwel $B\left(\frac{1}{2}a^4 - 2a^2 - 1, -(a^3 + 5a)\right)$
$x_B = x_A$ en $y_B = -y_A$ dus B is het spiegelbeeld van A in de x-as.

E4 **a** $y(t) = 3$ geeft $t^3 - 2t^2 + 3 = 3$
$t^3 - 2t^2 = 0$
$t^2(t - 2) = 0$
$t = 0$ of $t = 2$
$x(0) = 0$ dus $t = 0$ hoort bij P.
$x'(t) = 3t^2 + 6t - 9$ geeft $x'(0) = -9$
$y'(t) = 3t^2 - 4t$ geeft $y'(0) = 0$

De baansnelheid in dit punt is $v = \sqrt{(-9)^2 + 0^2} = 9$.

b $x'(2) = 15$
$y'(2) = 4$

De baansnelheid in dit punt is $v = \sqrt{15^2 + 4^2} = \sqrt{241}$.

E5 **a** $x'(t) = -2t + 3$
$y'(t) = 2t - 2$
$|\vec{v}| = \sqrt{(-2t + 3)^2 + (2t - 2)^2}$
$|\vec{v}| = \sqrt{4t^2 - 12t + 9 + 4t^2 - 8t + 4}$
$|\vec{v}| = \sqrt{8t^2 - 20t + 13}$

b $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{8t^2 - 20t + 13}} \cdot (16t - 20)$ ofwel $\frac{dv}{dt} = \frac{8t - 10}{\sqrt{8t^2 - 20t + 13}}$

c $t = 2$ geeft $\frac{dv}{dt} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6}{5}\sqrt{5}$

d $\frac{dv}{dt} = 0$ geeft $8t - 10 = 0$ ofwel $t = \frac{5}{4}$

De minimale baansnelheid is $v = \sqrt{8 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 20 \cdot \frac{5}{4} + 13} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

E6 **a** $y(t) = 0$ geeft $-t^2 + 5t + 24 = 0$
$t^2 - 5t - 24 = 0$
$(t - 8)(t + 3) = 0$
$t = 8$ of $t = -3$

De snijpunten met de x-as zijn $(8, 0)$ en $\left(13\frac{1}{2}, 0\right)$.
$x(t) = 0$ geeft $\frac{1}{2}t^2 - 3t = 0$

$\frac{1}{2}t(t - 6) = 0$
$t = 0$ of $t = 6$
De snijpunten met de y-as zijn $(0, 24)$ en $(0, 18)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $x'(t) = t - 3$
$x'(t) = 0$ geeft $t = 3$
$y'(t) = -2t + 5$
$y'(t) = 0$ geeft $t = 2\frac{1}{2}$

Er is een horizontale raaklijn als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$, dus als $t = 2\frac{1}{2}$.
Er is een verticale raaklijn als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$, dus als $t = 3$.
De raaklijn is horizontaal in het punt $\left(-4\frac{3}{8}, 30\frac{1}{4}\right)$ en verticaal in $\left(-4\frac{1}{2}, 30\right)$.

c $v = \sqrt{(t-3)^2 + (-2t+5)^2}$

$v = \sqrt{t^2 - 6t + 9 + 4t^2 - 20t + 25}$

$v = \sqrt{5t^2 - 26t + 34}$

$t = 1$ geeft als de baansnelheid $v = \sqrt{5 - 26 + 34} = \sqrt{13}$.

$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{5t^2 - 26t + 34}} \cdot (10t - 26)$ ofwel $\frac{dv}{dt} = \frac{5t - 13}{\sqrt{5t^2 - 26t + 34}}$

$t = 1$ geeft als de baanversnelling $\frac{dv}{dt} = \frac{-8}{\sqrt{13}} = -\frac{8}{13}\sqrt{13}$.

d De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is -3 dus $\frac{y'(t)}{x'(t)} = -3$.

$\frac{-2t + 5}{t - 3} = -3$
$-2t + 5 = -3t + 9$
$t = 4$
De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is -3 in het punt $(-4, 28)$.

E7 **a** $y(t) = 0$ geeft $2t^2 - 2t = 0$
$2t(t - 1) = 0$
$t = 0$ of $t = 1$
De snijpunten met de x-as zijn $(0, 0)$ en $(-6, 0)$.
$x(t) = 0$ geeft $t^3 - 3t^2 - 4t = 0$
$t(t^2 - 3t - 4) = 0$
$t(t - 4)(t + 1) = 0$
$t = 0$ of $t = 4$ of $t = -1$
De snijpunten met de y-as zijn $(0, 0)$, $(0, 24)$ en $(0, 4)$.

b $x'(t) = 3t^2 - 6t - 4$
$y'(t) = 4t - 2$
$y'(t) = 0$ geeft $t = \frac{1}{2}$ en $x'\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$

De raaklijn is evenwijdig met de x-as als $t = \frac{1}{2}$.

Daarbij hoort het punt $\left(-2\frac{5}{8}, -\frac{1}{2}\right)$.

c $y(t) = 12$ geeft $2t^2 - 2t = 12$
$2t^2 - 2t - 12 = 0$
$t^2 - t - 6 = 0$
$(t - 3)(t + 2) = 0$
$t = 3$ of $t = -2$
$x(3) = x(-2) = -12$

$t = 3$ geeft $\frac{y'(3)}{x'(3)} = \frac{10}{5} = 2$

$t = -2$ geeft $\frac{y'(-2)}{x'(-2)} = \frac{-10}{20} = -\frac{1}{2}$

© Noordhoff Uitgevers bv

De richtingscoëfficiënten van de raaklijnen in $(-12, 12)$ zijn 2 en $-\frac{1}{2}$.

$2 \cdot -\frac{1}{2} = -1$ dus hieruit volgt dat de raaklijnen loodrecht op elkaar staan.

d $\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{1}{2}$

$\frac{4t-2}{3t^2-6t-4} = \frac{1}{2}$

$3t^2 - 6t - 4 = 8t - 4$

$3t^2 - 14t = 0$

$t(3t - 14) = 0$

$t = 0$ of $t = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$

E8 **a** De grafiek van $y = t^2 - 6t + 10$ is een dalparabool.
$t^2 - 6t + 10 = 0$ geeft $D = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -4$ dus deze dalparabool heeft geen snijpunten met de horizontale as.
Voor elk waarde van t geldt dan dat $t^2 - 6t + 10$ positief is.

$x(t) = \sqrt{t^2 - 6t + 10}$ heeft dus voor elke waarde van t een uitkomst.
$t^2 + 6t + 10 = 0$ geeft $D = -4$ dus ook $t^2 + 6t + 10$ is voor elke waarde van t positief.
Hieruit volgt dat $x(t)$ en $y(t)$ voor elke waarde van t bestaan.

b $x'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t^2 - 6t + 10}} \cdot (2t - 6)$ ofwel $x'(t) = \frac{t-3}{\sqrt{t^2 - 6t + 10}}$

$x'(t) = 0$ geeft $t = 3$

$y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t^2 + 6t + 10}} \cdot (2t + 6)$ ofwel $y'(t) = \frac{t+3}{\sqrt{t^2 + 6t + 10}}$

$y'(t) = 0$ geeft $t = -3$
De raaklijn is horizontaal als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$, dus als $t = -3$.
De raaklijn is verticaal als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$, dus als $t = 3$.

In $(\sqrt{37}, 1)$ is de raaklijn horizontaal en in $(1, \sqrt{37})$ verticaal.

c $t = a$ geeft het punt $A(\sqrt{a^2 - 6a + 10}, \sqrt{a^2 + 6a + 10})$

$t = -a$ geeft het punt $B(\sqrt{(-a)^2 - 6 \cdot -6a + 10}, \sqrt{(-a)^2 + 6 \cdot -a + 10})$ ofwel $B(\sqrt{a^2 + 6a + 10}, \sqrt{a^2 - 6a + 10})$
$x_B = y_A$ en $y_B = x_A$ dus B is het spiegelbeeld van A in de lijn $y = x$.

d $y = x$ geeft

$\sqrt{t^2 - 6t + 10} = \sqrt{t^2 + 6t + 10}$

$t^2 - 6t + 10 = t^2 + 6t + 10$

$-12t = 0$

$t = 0$ geeft het punt $(\sqrt{10}, \sqrt{10})$.
De baan snijdt de lijn $y = x$ op $t = 0$.

$x'(0) = \frac{-3}{\sqrt{10}}$ en $y'(0) = \frac{3}{\sqrt{10}}$

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn op $t = 0$ is $\frac{y'(0)}{x'(0)} = -1$.

$1 \cdot -1 = -1$
Hieruit volgt dat de raaklijn loodrecht staat op de lijn $y = x$.

© Noordhoff Uitgevers bv

20 Goniometrische formules

Voorkennis

V1 **a** $f(x) = \sin(7\pi + x) = \sin(\pi + x) = -\sin(x)$

b $g(x) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) = \cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) = \sin(x)$

c $h(x) = \sin\left(x + 3\frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) = -\cos(x)$

d $k(x) = \cos(-x - 23\pi) = \cos(-x - \pi) = \cos(x + \pi) = -\cos(x)$

V2 **a** $\cos\left(\frac{1}{3}\pi + x\right) = \sin\left(\frac{1}{3}\pi + x + \frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(x + \frac{5}{6}\pi\right)$

b $\sin\left(x - 2\frac{1}{4}\pi\right) = \sin\left(x + 1\frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(x + 1\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi\right)$

ofwel $\cos\left(x + 1\frac{1}{4}\pi\right)$

c $-\sin\left(-\frac{1}{3}\pi + 2x\right) = \sin\left(-2x + \frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(-2x + \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(-2x - \frac{1}{6}\pi\right)$

ofwel $\cos\left(-2x + 1\frac{5}{6}\pi\right)$

V3 **a** $\cos(2x) = \frac{1}{2}$

$2x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$ of $x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$

b $\sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

$x - \frac{1}{4}\pi = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x - \frac{1}{4}\pi = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = 1\frac{5}{12}\pi + k \cdot 2\pi$

c $\tan\left(\frac{1}{2}x\right) = -\sqrt{3}$

$\frac{1}{2}x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi$

$x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

d $2\sin\left(3x - \frac{1}{6}\pi\right) = -1$

$\sin\left(3x - \frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

$3x - \frac{1}{6}\pi = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3x - \frac{1}{6}\pi = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$3x = 0 + k \cdot 2\pi$ of $3x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = 0 + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $x = \frac{4}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

V4 **a** $\cos(\pi - x) = \cos(2x)$

$\pi - x = 2x + k \cdot 2\pi$ of $\pi - x = -2x + k \cdot 2\pi$

$-3x = -\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = -\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $x = \pi + k \cdot 2\pi$

b $\sin(2x) = \sin\left(\frac{3}{4}\pi - x\right)$

$2x = \frac{3}{4}\pi - x + k \cdot 2\pi$ of $2x = \pi - \left(\frac{3}{4}\pi - x\right) + k \cdot 2\pi$

$3x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

dus $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

© Noordhoff Uitgevers bv

c $\cos(4x) = \cos\left(3\left(\frac{1}{2}\pi + x\right)\right)$

$4x = 3\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) + k \cdot 2\pi$ of $4x = -3\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) + k \cdot 2\pi$

$4x = 1\frac{1}{2}\pi + 3x + k \cdot 2\pi$ of $4x = -1\frac{1}{2}\pi - 3x + k \cdot 2\pi$

$x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $7x = -1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = -\frac{3}{14}\pi + k \cdot \frac{2}{7}\pi$

dus $x = \frac{1}{14}\pi + k \cdot \frac{2}{7}\pi$

d $\tan(4x) = \tan\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right)$

$4x = 2x + \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$

$2x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$

$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

V5 **a** $f(x) = \cos(x^2)$

$f'(x) = -\sin(x^2) \cdot 2x$

$f'(x) = -2x\sin(x^2)$

b $g(x) = 2\cos^3(x)$

$g'(x) = 2 \cdot 3\cos^2(x) \cdot -\sin(x)$

$g'(x) = -6\sin(x) \cdot \cos^2(x)$

c $h(x) = \dfrac{\sin(x)}{2x}$

$h'(x) = \dfrac{\cos(x) \cdot 2x - \sin(x) \cdot 2}{(2x)^2}$

$h'(x) = \dfrac{2x\cos(x) - 2\sin(x)}{4x^2}$

$h'(x) = \dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{2x^2}$

d $k(x) = \sqrt{1 + \sin(4x)}$

$k'(x) = \dfrac{4\cos(4x)}{2\sqrt{1 + \sin(4x)}}$

$k'(x) = \dfrac{2\cos(4x)}{\sqrt{1 + \sin(4x)}}$

e $m(x) = \ln(\sin(x))$

$m'(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

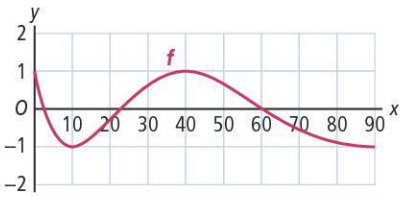
f $n(x) = \dfrac{\sin(2x)}{1 + \cos(x)}$

$n'(x) = \dfrac{2\cos(2x)(1 + \cos(x)) - \sin(2x) \cdot -\sin(x)}{(1 + \cos(x))^2}$

$n'(x) = \dfrac{2\cos(2x) + 2\cos(2x) \cdot \cos(x)) + \sin(2x) \cdot \sin(x)}{(1 + \cos(x))^2}$

© Noordhoff Uitgevers bv

V6 **a**



b Voor de nulpunten geldt $f(x) = 0$.

$\cos(\sqrt{x}) = 0$

$\sqrt{x} = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

$x = \left(\frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi\right)^2$

De oplossingen op $[0, 9\pi^2]$ zijn $x = \left(\frac{1}{2}\pi\right)^2 = \frac{1}{4}\pi^2$, $x = \left(1\frac{1}{2}\pi\right)^2 = 2\frac{1}{4}\pi^2$ en $x = \left(2\frac{1}{2}\pi\right)^2 = 6\frac{1}{4}\pi^2$.

c De extreme waarden zijn $\cos(\sqrt{x}) = 1$ en $\cos(\sqrt{x}) = -1$.
Er is een maximum als $\sqrt{x} = 0 + k \cdot 2\pi$, dus $x = 0$ of $x = 4\pi^2$.
Er is een minimum als $\sqrt{x} = \pi + k \cdot 2\pi$, dus $x = \pi^2$ en $x = 9\pi^2$.
De extreme waarden van f zijn:
Randmaximum $f(0) = 1$, minimum $f(\pi^2) = -1$,
maximum $f(4\pi^2) = 1$ en randminimum $f(9\pi^2) = -1$.

20.1 Somformules

intro Stel M is het midden van zijde CP, dan is $\triangle APM$ een rechthoekige driehoek en $\angle MAP = \frac{1}{2}\angle CAP = \alpha$.
$BC^2 + 1^2 = 4^2$, dus $BC^2 = 15$ en $BC = \sqrt{15}$.
$CP^2 = 3^2 + (\sqrt{15})^2 = 24$, dus $CP = \sqrt{24}$ en $CM = \frac{1}{2}\sqrt{24} = \sqrt{6}$.
$AM^2 + (\sqrt{6})^2 = 4^2$, dus $AM^2 = 10$ en $AM = \sqrt{10}$.
$\sin(\alpha) = \dfrac{CM}{AC} = \frac{1}{4}\sqrt{6}$ en $\cos(\alpha) = \dfrac{AM}{AC} = \frac{1}{4}\sqrt{10}$
Deze constructie kan alleen worden gebruikt als $0° < 2\alpha < 180°$, dus als $0° < \alpha < 90°$.

1 a $A\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right), \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)$ ofwel $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$
$B\left(\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right), \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right)$ ofwel $B\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

b $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{6} \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Er geldt $\cos\left(\frac{5}{12}\pi\right) = \dfrac{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}}{1 \cdot 1} = -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6}$.

c $A(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ en $B(\cos(\beta), \sin(\beta))$

d $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix}$

$\cos(\alpha - \beta) = \dfrac{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)}{1 \cdot 1} = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

© Noordhoff Uitgevers bv

e $\sin(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - (\beta + \frac{1}{2}\pi))$

$\sin(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta + \frac{1}{2}\pi) + \sin(\alpha)\sin(\beta + \frac{1}{2}\pi)$
$\sin(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot -\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)$
$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$

2 **a** $\sin(\frac{5}{12}\pi) = \sin(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{6}\pi) =$

$\sin(\frac{1}{4}\pi) \cdot \cos(\frac{1}{6}\pi) + \cos(\frac{1}{4}\pi) \cdot \sin(\frac{1}{6}\pi) =$
$\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} =$
$\frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$

b $\cos(\frac{11}{12}\pi) = \cos(\frac{1}{4}\pi + \frac{2}{3}\pi) =$

$\cos(\frac{1}{4}\pi) \cdot \cos(\frac{2}{3}\pi) - \sin(\frac{1}{4}\pi) \cdot \sin(\frac{2}{3}\pi) =$
$\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} =$
$-\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6}$

3 Als $\sin(t) = \frac{3}{5}$ dan is $\cos^2(t) = 1 - (\frac{3}{5})^2 = \frac{16}{25}$ en omdat $0 < t < \frac{1}{2}\pi$ is $\cos(t) = \frac{4}{5}$.

Als $\sin(u) = \frac{7}{25}$ dan is $\cos^2(u) = 1 - (\frac{7}{25})^2 = \frac{576}{625}$ en omdat $\frac{1}{2}\pi < u < \pi$ is $\cos(u) = -\frac{24}{25}$.
$\sin(t + u) = \sin(t) \cdot \cos(u) + \cos(t) \cdot \sin(u)$
$\sin(t + u) = \frac{3}{5} \cdot -\frac{24}{25} + \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{25}$
$\sin(t + u) = \frac{-72}{125} + \frac{28}{125} = -\frac{44}{125}$
$\cos(t - u) = \cos(t) \cdot \cos(u) + \sin(t) \cdot \sin(u)$
$\cos(t - u) = \frac{4}{5} \cdot -\frac{24}{25} + \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{25}$
$\cos(t - u) = \frac{-96}{125} + \frac{21}{125} = -\frac{75}{125} = -\frac{3}{5}$

4 **a** $\sin(2t) = \sin(t + t) = \sin(t)\cos(t) + \cos(t)\sin(t)$
dus $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$

b $\cos(2t) = \cos(t + t) = \cos(t)\cos(t) - \sin(t)\sin(t)$
dus $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$

5 $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ dus $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$.
Vervang $\sin^2(t)$ in de formule $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$ door $1 - \cos^2(t)$.
$\cos(2t) = \cos^2(t) - (1 - \cos^2(t)) = \cos^2(t) - 1 + \cos^2(t)$
dus $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$.
$\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ dus $\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$.
Vervang $\cos^2(t)$ in de formule $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$ door $1 - \sin^2(t)$.
$\cos(2t) = 1 - \sin^2(t) - \sin^2(t)$
dus $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$.

6 **a** $\cos(\frac{1}{4}\pi) = 1 - 2\sin^2(\frac{1}{8}\pi)$

$2\sin^2(\frac{1}{8}\pi) = 1 - \cos(\frac{1}{4}\pi)$
$2\sin^2(\frac{1}{8}\pi) = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\sin^2(\frac{1}{8}\pi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$
$\sin(\frac{1}{8}\pi) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}}$ want $\sin(\frac{1}{8}\pi)$ is positief.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$

$\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 2\cos^2\left(\frac{1}{8}\pi\right) - 1$

$2\cos^2\left(\frac{1}{8}\pi\right) = 1 + \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)$

$2\cos^2\left(\frac{1}{8}\pi\right) = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\cos^2\left(\frac{1}{8}\pi\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$

$\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}}$ want $\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right)$ is positief.

7 **a** $\tan(t+u) = \dfrac{\sin(t+u)}{\cos(t+u)} = \dfrac{\sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u)}{\cos(t)\cos(u) - \sin(t)\sin(u)}$

De teller en de noemer delen door $\cos(t)\cos(u)$ geeft

$$\tan(t+u) = \frac{\dfrac{\sin(t)\cos(u)}{\cos(t)\cos(u)} + \dfrac{\cos(t)\sin(u)}{\cos(t)\cos(u)}}{\dfrac{\cos(t)\cos(u)}{\cos(t)\cos(u)} - \dfrac{\sin(t)\sin(u)}{\cos(t)\cos(u)}}$$

$$\tan(t+u) = \frac{\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)} + \dfrac{\sin(u)}{\cos(u)}}{1 - \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)} \cdot \dfrac{\sin(u)}{\cos(u)}} \text{ dus } \tan(t+u) = \frac{\tan(t) + \tan(u)}{1 - \tan(t)\tan(u)}$$

b Vervang u door $-u$ in de formule van opdracht a en gebruik dat $\tan(-u) = -\tan(u)$.

Dit geeft:

$$\tan(t-u) = \frac{\tan(t) + \tan(-u)}{1 - \tan(t)\tan(-u)}$$

$$\tan(t-u) = \frac{\tan(t) - \tan(u)}{1 + \tan(t)\tan(u)}$$

c $\tan(2t) = \tan(t+t)$ en met de formule van opdracht a geeft dat

$$\tan(2t) = \tan(t+t) = \frac{\tan(t) + \tan(t)}{1 - \tan(t)\tan(t)} = \frac{2\tan(t)}{1 - \tan^2(t)}$$

8 **a** $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$

$2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$

$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$

b Een primitieve van $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$ is $F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)$.

De oppervlakte van G is gelijk aan

$$\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\pi} = \tfrac{1}{2}\pi - 0 - (0 - 0) = \tfrac{1}{2}\pi.$$

c $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$

$2\cos^2(x) = \cos(2x) + 1$

$\cos^2(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}$

Een primitieve van $g(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}$ is $G(x) = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{2}x$.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\tfrac{1}{2}\cos(2x) + \tfrac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{4}\sin(2x) + \tfrac{1}{2}x\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4} \cdot 0 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\pi - (0 + 0) = \tfrac{1}{4}\pi$$

© Noordhoff Uitgevers bv

9 **a** $f(x) = 6\sin(x)\cos(x)$
$f(x) = 3 \cdot 2\sin(x)\cos(x) = 3 \cdot \sin(2x)$
$f(x) = 3 \cdot \sin(2x)$
$F(x) = -1\frac{1}{2}\cos(2x)$

b $g(x) = \frac{1}{2}\cos^2(3x)$
$g(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos(6x) + \frac{1}{2}\right)$
$g(x) = \frac{1}{4}\cos(6x) + \frac{1}{4}$
$G(x) = \frac{1}{24}\sin(6x) + \frac{1}{4}x$

c $h(x) = 3\sin^2(4x) - 3\cos^2(4x)$
$h(x) = -3(\cos^2(4x) - \sin^2(4x))$
$h(x) = -3\cos(8x)$
$H(x) = -\frac{3}{8}\sin(8x)$

d $k(x) = 3\sin^2(4x) + 3\cos^2(4x)$
$k(x) = 3(\sin^2(4x) + \cos^2(4x))$
$k(x) = 3 \cdot 1 = 3$
$K(x) = 3x$

10 **a** $\int_{-\frac{1}{8}\pi}^{\frac{1}{8}\pi}(\cos^2(2x) - \sin^2(2x))\,dx =$
$\int_{-\frac{1}{8}\pi}^{\frac{1}{8}\pi}\cos(4x)\,dx = \left[\frac{1}{4}\sin(4x)\right]_{-\frac{1}{8}\pi}^{\frac{1}{8}\pi} =$
$\frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot -1 = \frac{1}{2}$

b $\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} 4\sin\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x\right)dx =$
$\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} 2\sin(x)\,dx = \left[-2\cos(x)\right]_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} =$
$-2 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{2} - -2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

c $\int_0^{\pi}\sin^2\left(\frac{1}{3}x\right)dx =$
$\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2}{3}x\right)\right)dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\sin\left(\frac{2}{3}x\right)\right]_0^{\pi} =$
$\frac{1}{2}\pi - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - (0 - 0) = \frac{1}{2}\pi - \frac{3}{8}\sqrt{3}$

11 **a** $\sin(t + u) = \sin(t) \cdot \cos(u) + \cos(t) \cdot \sin(u)$
$\sin(t - u) = \sin(t) \cdot \cos(u) - \cos(t) \cdot \sin(u)$
Dit beide invullen in $\sin(t + u) + \sin(t - u)$ geeft
$\sin(t + u) + \sin(t - u) = \sin(t) \cdot \cos(u) + \cos(t) \cdot \sin(u) + \sin(t) \cdot \cos(u) - \cos(t) \cdot \sin(u)$
$\sin(t + u) + \sin(t - u) = 2\sin(t) \cdot \cos(u)$

b Stel $t = 3x$ en $u = x$, dan geldt
$\int_0^{\frac{1}{3}\pi} 2\sin(3x)\cos(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{3}\pi}(\sin(3x + x) + \sin(3x - x)\,dx =$
$\int_0^{\frac{1}{3}\pi}(\sin(4x) + \sin(2x)\,dx = \left[-\frac{1}{4}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\frac{1}{3}\pi} =$
$\left(-\frac{1}{4} \cdot -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1\right) =$
$\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = 1\frac{1}{8}$

© Noordhoff Uitgevers bv

O9 **a** $F(x) = -\cos(x)$ en $G(x) = \sin(x)$

b $H(x) = \frac{1}{4}\cos(4x)$

c Eén van de verdubbelingsformules is $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ dus $\sin(6x) = 2\sin(3x)\cos(3x)$.
Daarom is $k(x) = \sin(3x)\cos(3x)$ gelijk aan $k(x) = \frac{1}{2}\sin(6x)$.

d Een primitieve van $k(x) = \frac{1}{2}\sin(6x)$ is $K(x) = -\frac{1}{12}\cos(6x)$.

e Eén van de verdubbelingsformules is $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ dus $\cos(6x) = \cos^2(3x) - \sin^2(3x)$.
$m(x) = 4\cos^2(3x) - 4\sin^2(3x)$
$m(x) = 4(\cos^2(3x) - \sin^2(3x))$
$m(x) = 4\cos(6x)$

f Een primitieve van $m(x) = 4\cos(6x)$ is $M(x) = \frac{4}{6}\sin(6x) = \frac{2}{3}\sin(6x)$.

U1 **a** $\sinh(x + y) = \frac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-x-y})$
$\sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y) =$
$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \cdot \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \cdot \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) =$
$\frac{1}{4}e^{x+y} + \frac{1}{4}e^{x-y} - \frac{1}{4}e^{-x+y} - \frac{1}{4}e^{-x-y} + \frac{1}{4}e^{x+y} - \frac{1}{4}e^{x-y} + \frac{1}{4}e^{-x+y} - \frac{1}{4}e^{-x-y} =$
$\frac{1}{2}e^{x+y} - \frac{1}{2}e^{-x-y} =$
$\frac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-x-y})$
dus $\sinh(x + y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$

b $\cosh(x + y) = \frac{1}{2}(e^{x+y} + e^{-x-y})$
$\cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) =$
$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \cdot \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) + \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \cdot \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) =$
$\frac{1}{4}e^{x+y} + \frac{1}{4}e^{x-y} + \frac{1}{4}e^{-x+y} + \frac{1}{4}e^{-x-y} + \frac{1}{4}e^{x+y} - \frac{1}{4}e^{x-y} - \frac{1}{4}e^{-x+y} + \frac{1}{4}e^{-x-y} =$
$\frac{1}{2}e^{x+y} + \frac{1}{2}e^{-x-y} =$
$\frac{1}{2}(e^{x+y} + e^{-x-y})$
dus $\cosh(x + y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$

c $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, dus $f'(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} = \sinh(x)$
$g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, dus $g'(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \cosh(x)$

d Een primitieve van $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ is $F(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} = \sinh(x)$
Een primitieve van $g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ is $G(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \cosh(x)$

20.2 Vergelijkingen

intro Van de eerste kolom zijn de eerste en laatste exact op te lossen.
Van de tweede kolom zijn ze allemaal exact op te lossen.

12 Voor de snijpunten geldt $f(x) = g(x)$.
$\cos\left(\frac{1}{4}x\right) = \cos\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)\right)$
$\frac{1}{4}x = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) + k \cdot 2\pi$ of $\frac{1}{4}x = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) + k \cdot 2\pi$
$\frac{1}{4}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\frac{1}{4}x = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
$-\frac{1}{4}x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\frac{3}{4}x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{2}{3}\pi - k \cdot 8\pi$ of $x = \frac{2}{9}\pi + k \cdot \frac{8}{3}\pi$
De oplossingen op $[-4\pi, 4\pi]$ zijn $x = -2\frac{4}{9}\pi$, $x = \frac{2}{3}\pi$, $x = \frac{2}{9}\pi$ en $x = 2\frac{8}{9}\pi$.

© Noordhoff Uitgevers bv

13 Voor de snijpunten geldt $f(x) = g(x)$.

$\sin(2x) = \sin\left(3x - \frac{1}{6}\pi\right)$

$2x = 3x - \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x = \pi - \left(3x - \frac{1}{6}\pi\right) + k \cdot 2\pi$

$-x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $5x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{6}\pi - k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{7}{30}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$

De oplossingen op $[0, 2\pi]$ zijn

$x = \frac{1}{6}\pi$, $x = \frac{7}{30}\pi$, $x = \frac{19}{30}\pi$, $x = 1\frac{1}{30}\pi$, $x = 1\frac{13}{30}\pi$ en $x = 1\frac{5}{6}\pi$.

14 **a** $\sqrt{3}\sin(x) = \cos(x)$

$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$\tan(x) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$

b $\sin(3x) = -\cos(3x)$

$\frac{\sin(3x)}{\cos(3x)} = -1$

$\tan(3x) = -1$

$3x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$

$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$

c $2\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = -2\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$

$\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = -\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$

$\frac{\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)}{\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)} = -1$

$\tan\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = -1$

$x - \frac{1}{3}\pi = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$

$x = 1\frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi$

15 **a** Dat kan niet omdat $2x$ en $3x$ verschillend zijn.

b Omdat $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$ geldt ook $\sin(2x) = \cos\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right)$.

$\sin(2x) = \cos(3x)$

$\cos\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(3x)$

$2x - \frac{1}{2}\pi = 3x + k \cdot 2\pi$ of $2x - \frac{1}{2}\pi = -3x + k \cdot 2\pi$

$-x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $5x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{1}{2}\pi - k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{1}{10}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$

16 **a** $\sin\left(\frac{1}{4}\pi - x\right) = \cos(2x)$

$\cos\left(\frac{1}{4}\pi - x - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(2x)$

$\cos\left(-\frac{1}{4}\pi - x\right) = \cos(2x)$

$-\frac{1}{4}\pi - x = 2x + k \cdot 2\pi$ of $-\frac{1}{4}\pi - x = -2x + k \cdot 2\pi$

$-3x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{1}{12}\pi - k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

© Noordhoff Uitgevers bv

b $\cos(x+\pi) = -\sin\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right)$

$\sin\left(x + \pi + \frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(-2x + \frac{1}{2}\pi\right)$

$\sin\left(x + 1\frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(-2x + \frac{1}{2}\pi\right)$

$x + 1\frac{1}{2}\pi = -2x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x + 1\frac{1}{2}\pi = \pi - \left(-2x + \frac{1}{2}\pi\right) + k \cdot 2\pi$

$3x = -\pi + k \cdot 2\pi$ of $-x = -\pi + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $x = \pi - k \cdot 2\pi$

c $3 - 2\cos^2(x) = -5\cos(x)$

$2\cos^2(x) - 5\cos(x) - 3 = 0$

Stel $\cos(x) = p$, dit geeft

$2p^2 - 5p - 3 = 0$

$p = \frac{5 - \sqrt{49}}{4} = -\frac{1}{2}$ of $p = \frac{5 + \sqrt{49}}{4} = 3$

$\cos(x) = -\frac{1}{2}$ of $\cos(x) = 3$ (geen oplossingen)

$x = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

d $2\sin^2(x) + 5\cos(x) = 4$

$2(1 - \cos^2(x)) + 5\cos(x) = 4$

$2 - 2\cos^2(x)) + 5\cos(x) - 4 = 0$

$2\cos^2(x) - 5\cos(x) + 2 = 0$

Stel $\cos(x) = p$, dit geeft

$2p^2 - 5p + 2 = 0$

$p = \frac{5 - \sqrt{9}}{4} = \frac{1}{2}$ of $p = \frac{5 + \sqrt{9}}{4} = 2$

$\cos(x) = \frac{1}{2}$ of $\cos(x) = 2$ (geen oplossingen)

$x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

17 **a** $2\sin(x) \cdot \cos(x) = -\frac{1}{2}$

$\sin(2x) = -\frac{1}{2}$

$2x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi$ of $x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot \pi$

b $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \sin(x)$

$\cos(2x) = \sin(x)$

$\cos(2x) = \cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$

$2x = x - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x = -x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

c $\cos(2x) - 2\cos(x) + 1 = 0$

$2\cos^2(x) - 1 - 2\cos(x) + 1 = 0$

$2\cos^2(x) - 2\cos(x) = 0$

$\cos^2(x) - \cos(x) = 0$

$\cos(x)(\cos(x) - 1) = 0$

$\cos(x) = 0$ of $\cos(x) = 1$

$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ of $x = 0 + k \cdot 2\pi$

© Noordhoff Uitgevers bv

d $2\cos^2(2x) = \cos(2x) + 1$
$2\cos^2(2x) - \cos(2x) - 1 = 0$
Stel $\cos(2x) = p$, dit geeft
$2p^2 - p - 1 = 0$

$$p = \frac{1+\sqrt{9}}{4} = 1 \text{ of } p = \frac{1-\sqrt{9}}{4} = -\tfrac{1}{2}$$

$\cos(2x) = 1$ of $\cos(2x) = -\frac{1}{2}$

$2x = 0 + k \cdot 2\pi$ of $2x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = 0 + k \cdot \pi$ of $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$ of $x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

18 a $2\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = 1$

$\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$

$2x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x - \frac{1}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$ of $x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot \pi$

De oplossingen op $[0, 2\pi]$ zijn

$x = \frac{1}{4}\pi$, $x = \frac{7}{12}\pi$, $x = 1\frac{1}{4}\pi$ en $x = 1\frac{7}{12}\pi$.

b Zie de grafiek, de oplossing van $f(x) > 1$ is

$\frac{1}{4}\pi < x < \frac{7}{12}\pi$ of $1\frac{1}{4}\pi < x < 1\frac{7}{12}\pi$.

c Eerst de vergelijking $2\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = -\sqrt{2}$ oplossen.

$\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$2x - \frac{1}{3}\pi = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x - \frac{1}{3}\pi = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$2x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x = 1\frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{24}\pi + k \cdot \pi$ of $x = \frac{19}{24}\pi + k \cdot \pi$

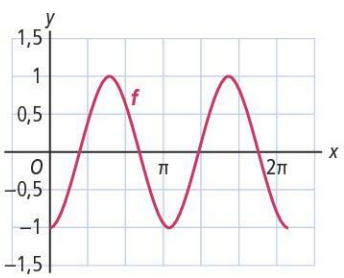
De oplossingen op $[0, 2\pi]$ zijn

$x = \frac{1}{24}\pi$, $x = \frac{19}{24}\pi$, $x = 1\frac{1}{24}\pi$ en $x = 1\frac{19}{24}\pi$.

Zie de grafiek, de oplossing van $f(x) \leq -\sqrt{2}$ is

$0 \leq x \leq \frac{1}{24}\pi$ of $\frac{19}{24}\pi \leq x \leq 1\frac{1}{24}\pi$ of $1\frac{19}{24}\pi \leq x \leq 2\pi$.

19 a



b $f(x) = \sin^2(x) - \cos^2(x)$
$f(x) = -(\cos^2(x) - \sin^2(x))$
$f(x) = -\cos(2x)$
$f'(x) = - \cdot -2\sin(2x) = 2\sin(2x)$

© Noordhoff Uitgevers bv

c Als de richtingscoëfficiënt van de raaklijn $\sqrt{3}$ is, dan is $f'(x) = \sqrt{3}$.
$2\sin(2x) = \sqrt{3}$
$\sin(2x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
$2x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$ of $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$
De punten op het interval $[0, 2\pi]$ zijn
$\left(\frac{1}{6}\pi, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\right)$, $\left(1\frac{1}{6}\pi, -\frac{1}{2}\right)$ en $\left(1\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\right)$.

d De grafiek snijdt de x-as als $-\cos(2x) = 0$.
$2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$
Op het interval $[0, 2\pi]$ zijn de nulpunten $x = \frac{1}{4}\pi$, $x = \frac{3}{4}\pi$, $x = \frac{5}{4}\pi$ en $x = \frac{7}{4}\pi$.
Op grond van symmetrie geldt dat de gevraagde oppervlakte gelijk is aan
$-4 \cdot \int_0^{\frac{1}{4}\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$.
$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} -\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{1}{4}\pi} = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) - 0 = -\frac{1}{2}$
De gevraagde oppervlakte is $-4 \cdot -\frac{1}{2} = 2$.

20 a Eerst oplossen $2\cos^2(x) - 2\sin(x) = \frac{1}{2}$
$2(1 - \sin^2(x)) - 2\sin(x) = \frac{1}{2}$
$2 - 2\sin^2(x) - 2\sin(x) - \frac{1}{2} = 0$
$-2\sin^2(x) - 2\sin(x) + 1\frac{1}{2} = 0$
Stel $\sin(x) = p$, dit geeft
$-2p^2 - 20 + 1\frac{1}{2} = 0$
$p = \frac{2 - \sqrt{16}}{-4} = \frac{1}{2}$ of $p = \frac{2 + \sqrt{16}}{-4} = -1\frac{1}{2}$
$\sin(x) = \frac{1}{2}$ of $\sin(x) = -1\frac{1}{2}$ (geen oplossingen)
$x = \frac{1}{6}\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi$ of $x = 2\frac{1}{6}\pi$ of $x = 2\frac{5}{6}\pi$
Zie de grafiek: de oplossing van $2\cos^2(x) - 2\sin(x) \geq \frac{1}{2}$ is
$0 \leq x \leq \frac{1}{6}\pi$ of $\frac{5}{6}\pi \leq x \leq 2\frac{1}{6}\pi$ of $2\frac{5}{6}\pi \leq x \leq 3\pi$.

b $\int_{\frac{5}{6}\pi}^{2\frac{1}{6}\pi} \left(f(x) - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \int_{\frac{5}{6}\pi}^{2\frac{1}{6}\pi} \left(2\cos^2(x) - 2\sin(x) - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x$
$2\cos^2(x) = \cos(2x) + 1$ dus
$\int_{\frac{5}{6}\pi}^{2\frac{1}{6}\pi} \left(2\cos^2(x) - 2\sin(x) - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \int_{\frac{5}{6}\pi}^{2\frac{1}{6}\pi} \left(\cos(2x) + 1 - 2\sin(x) - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x$
Een primitieve is $\frac{1}{2}\sin(2x) + x + 2\cos(x) - \frac{1}{2}x$.
$\left[\frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{2}x + 2\cos(x)\right]_{\frac{5}{6}\pi}^{2\frac{1}{6}\pi} =$
$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + 1\frac{1}{12}\pi + 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{12}\pi + 2 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 2\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi$.
Op soortgelijke manier is aan te tonen dat
$\int_0^{\frac{1}{6}\pi} \left(f(x) - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \int_{2\frac{5}{6}\pi}^{3\pi} \left(f(x) - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = 1\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{12} - 2$.
De totale oppervlakte is $1\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{12}\pi - 2 + 2\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi + 1\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{12}\pi - 2$ ofwel
$5\sqrt{3} + \frac{5}{6}\pi - 4$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c $f(x) = 2\cos^2(x) - 2\sin(x)$
$f'(x) = 4\cos(x) \cdot -\sin(x) - 2\cos(x)$
$f'(x) = -4\cos(x) \cdot \sin(x) - 2\cos(x)$
$f'(x) = -2\cos(x) \cdot (2\sin(x) + 1)$
Voor de toppen geldt $f'(x) = 0$ dus $\cos(x) = 0$ of $\sin(x) = -\frac{1}{2}$
De oplossingen op $[0, 3\pi]$ zijn
$x = \frac{1}{2}\pi$ of $x = 1\frac{1}{2}\pi$ of $x = 2\frac{1}{2}\pi$ of $x = 1\frac{1}{6}\pi$ of $x = 1\frac{5}{6}\pi$.
De toppen zijn $\left(\frac{1}{2}\pi, -2\right)$, $\left(1\frac{1}{6}\pi, 2\frac{1}{2}\right)$, $\left(1\frac{1}{2}\pi, 2\right)$, $\left(1\frac{5}{6}\pi, 2\frac{1}{2}\right)$ en $\left(2\frac{1}{2}\pi, -2\right)$.

d Het bereik is $[-2, 2\frac{1}{2}]$.

016 **a** In stap 1 is gebruik gemaakt van $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$.

b De formule $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$.

c $\cos\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(x + \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi\right)$
$\cos\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$

d $2x - \frac{1}{3}\pi = x + \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x - \frac{1}{3}\pi = -x - \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{1}{36}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

e $\cos\left(x - \frac{1}{6}\pi\right) = -\cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$
$\cos\left(x - \frac{1}{6}\pi\right) = \cos\left(x + 1\frac{1}{2}\pi\right)$
$x - \frac{1}{6}\pi = x + 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x - \frac{1}{6}\pi = -x - 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
$-\frac{1}{6}\pi = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ (geen oplossingen) of $2x = -1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi$

f $\cos^2(x) + 3\sin(x) = 3$
$1 - \sin^2(x) + 3\sin(x) = 3$
$\sin^2(x) - 3\sin(x) + 2 = 0$
$(\sin(x) - 2)(\sin(x) - 1) = 0$
$\sin(x) = 2$ (geen oplossingen) of $\sin(x) = 1$
$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

g $\sin\left(2x + \frac{1}{4}\right) = \cos\left(3x + \frac{1}{2}\pi\right)$
$\cos\left(2x + \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(3x + \frac{1}{2}\pi\right)$
$2x - \frac{1}{4}\pi = 3x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x - \frac{1}{4}\pi = -3x - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
$-x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $5x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = -\frac{3}{4}\pi - k \cdot 2\pi$ of $x = -\frac{1}{20}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$

h $6\sin^2(x) - 5\cos(x) = 2$
$6(1 - \cos^2(x)) - 5\cos(x) = 2$
$6 - 6\cos^2(x) - 5\cos(x) = 2$
$-6\cos^2(x) - 5\cos(x) + 4 = 0$
Stel $\cos(x) = p$, dit geeft
$-6p^2 - 5p + 4 = 0$
$p = \frac{5 + \sqrt{121}}{-12} = -1\frac{1}{3}$ of $p = \frac{5 - \sqrt{121}}{-12} = \frac{1}{2}$
$\cos(x) = -1\frac{1}{3}$ (geen oplossingen) of $\cos(x) = \frac{1}{2}$
$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

© Noordhoff Uitgevers bv

O17 **a** De verdubbelingsformule $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$

b $\sin(2x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$2x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$ of $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$

c Na het invullen van $1 - 2\sin^2(x)$ komt alleen $\sin(x)$ voor in de vergelijking.

d $\cos(2x) = 5\sin(x) - 2$

$1 - 2\sin^2(x) = 5\sin(x) - 2$

$-2\sin^2(x) - 5\sin(x) + 3 = 0$

Stel $\sin(x) = p$, dit geeft

$-2p^2 - 5p + 3 = 0$

$p = \dfrac{5 + \sqrt{49}}{-4} = -3$ of $p = \dfrac{5 - \sqrt{49}}{-4} = \frac{1}{2}$

$\sin(x) = -3$ (geen oplossingen) of $\sin(x) = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

U2 **a** $\sin(2x) = \tan(x)$

$2\sin(x)\cos(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$2\sin(x)\cos^2(x) - \sin(x) = 0$

$\sin(x) \cdot (2\cos^2(x) - 1) = 0$

$\sin(x) = 0$ of $2\cos^2(x) = 1$

$\sin(x) = 0$ of $\cos^2(x) = \frac{1}{2}$

$\sin(x) = 0$ of $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ of $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

De oplossingen op $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ zijn $x = 0$, $x = -\frac{1}{4}\pi$ en $x = \frac{1}{4}\pi$.

De snijpunten zijn $(0, 0)$, $\left(-\frac{1}{4}\pi, -1\right)$ en $\left(\frac{1}{4}\pi, 1\right)$.

b Op het interval $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ is $\cos(x) > 0$, dus $G(x) = -\ln(\cos(x))$

$G'(x) = -\dfrac{1}{\cos(x)} \cdot -\sin(x) = \tan(x)$

dus G is een primitieve van g.

c $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\sin(2x - \tan(x))\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(2x) - -\ln(\cos(x))\right]_0^{\frac{1}{4}\pi} =$

$0 + \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} + 0\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}$

d $\tan^2(x) + 1 - 1 = \dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \dfrac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} - 1 =$

$\tan^2(x) + 1 - 1 = \dfrac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} - 1 = \dfrac{1}{\cos^2(x)} - 1$

Een primitieve van $h(x) = \tan^2(x)$ is $H(x) = \tan(x) - x$.

e De inhoud is gelijk aan $\pi \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin^2(2x)\,dx - \pi \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tan^2(x)\,dx$.

$\cos(4x) = 1 - 2\sin^2(2x)$ dus $\sin^2(2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x)$

$\pi \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin^2(2x)\,dx = \pi \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin(4x)\right]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \frac{1}{8}\pi^2$

$\pi \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tan^2(x)\,dx = \pi \left[\tan x) - x\right]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \pi - \frac{1}{4}\pi^2$

De inhoud is $\frac{3}{8}\pi^2 - \pi$.

© Noordhoff Uitgevers bv

20.3 Goniometrische functies onderzoeken

intro Met de rekenmachine vind je een maximum 1,41 voor $x \approx 0{,}785$ dus vermoedelijk is het maximum $\sqrt{2}$ bij $x = \frac{1}{4}\pi$.
De periode is 2π en de evenwichtstand is $y = 0$.
Daaruit volgt $a = \sqrt{2}$, $b = 1$, $c = \frac{1}{4}\pi$ en $d = 0$.
$f(x) = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$ is te schrijven als

$f(x) = \sqrt{2}\left(\sin(x) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + \cos(x) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$.

Omdat $\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = 1$ volgt hieruit dat $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$.

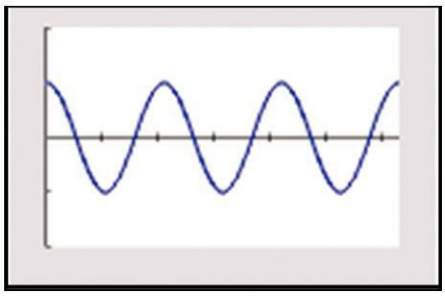
21 **a** Voor de nulpunten geldt $\cos^4(x) - \sin^4(x) = 0$.
$\cos^4(x) = \sin^4(x)$
$\sin(x) = \cos(x)$ of $\sin(x) = -\cos(x)$
$\tan(x) = 1$ of $\tan(x) = -1$
De oplossingen op $[0, 2\pi]$ zijn $x = \frac{1}{4}\pi$, $x = \frac{3}{4}\pi$, $x = 1\frac{1}{4}\pi$ en $x = 1\frac{3}{4}\pi$.

b Voor de toppen geldt $f'(x) = 0$.
$f'(x) = 4\cos^3(x) \cdot -\sin(x) - 4\sin^3(x) \cdot \cos(x)$
$f'(x) = -4\cos(x)\sin(x)(\cos^2(x) + \sin^2(x))$
$f'(x) = -4\cos(x)\sin(x)$
$-4\cos(x) \cdot \sin(x) = 0$
$\cos(x) = 0$ of $\sin(x) = 0$
$x = 0 + k \cdot \frac{1}{2}\pi$
De toppen op $[0, 2\pi]$ zijn $(0, 1)$, $\left(\frac{1}{2}\pi, -1\right)$, $(\pi, 1)$, $\left(1\frac{1}{2}\pi, -1\right)$ en $(2\pi, 1)$.

c $a = 1$, de periode is π dus $b = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2$, $c = 0$ en $d = 0$.
De functie is $g(x) = \cos(2x)$.

d $f(x) = \cos^4(x) - \sin^4(x) = 0$
$f(x) = (\cos^2(x) - \sin^2(x))(\cos^2(x) + \sin^2(x))$
$f(x) = (\cos^2(x) - \sin^2(x)) \cdot 1$
$f(x) = \cos(2x)$

22 **a**



Ja, de grafieken vallen samen.

b $\cos(3x) = \cos(2x + x)$
$= \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)$

c $\cos(3x) = (2\cos^2(x) - 1))\cos(x) - 2\sin(x)\cos(x)\sin(x)$
$= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x)$
$= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2(1 - \cos^2(x))\cos(x)$
$= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\cos(x) + 2\cos^3(x)$
$= 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$

© Noordhoff Uitgevers bv

23 **a** $f(x) = 1 + \cos(x) + \cos^2(x)$
$f'(x) = -\sin(x) + 2\cos(x) \cdot -\sin(x)$
Voor de toppen geldt $f'(x) = 0$ dus
$-\sin(x) + 2\cos(x) \cdot -\sin(x) = 0$
$-\sin(x) \cdot (2\cos(x) + 1) = 0$
$\sin(x) = 0$ of $\cos(x) = -\frac{1}{2}$

$x = 0 + k \cdot \pi$ of $x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
De toppen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn

$(0, 3)$, $\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\right)$, $(\pi, 1)$, $\left(1\frac{1}{3}\pi, \frac{3}{4}\right)$ en $(2\pi, 3)$.

b $p(x) = (1 + \cos(x) + \cos^2(x))(1 - \cos(x))$
$p(x) = 1 - \cos(x) + \cos(x) - \cos^2(x) + \cos^2(x) - \cos^3(x)$
$p(x) = 1 - \cos^3(x)$

c $-1 \le \cos(x) \le 1$ dus ook $-1 \le \cos^3(x) \le 1$.
Daaruit volgt $0 \le 1 - \cos^3(x) \le 2$.
De grafiek van p ligt dus geheel boven de x-as, behalve in het punt waarvoor $\cos(x) = 1$ en daarom raakt de grafiek de x-as.

24 **a** $\sin^2(x) + \sin(x) = \sin^2(x) + \cos(x)$
$\sin(x) = \cos(x)$
$\tan(x) = 1$
$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$
De snijpunten op het interval $[-\pi, 3\pi]$ zijn $\left(-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$, $\left(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$,
$\left(1\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ en $\left(2\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$.

b Als de grafiek van f de x-as raakt, dan moeten er toppen op de x-as zijn.
$f(x) = \sin^2(x) + \sin(x)$
$f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) + \cos(x)$
$f'(x) = \cos(x)(2\sin(x) + 1)$
$f'(x) = 0$ als $\cos(x) = 0$ of $\sin(x) = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ of $x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

Als $f\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = 1 - 1 = 0$ en $f\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = 1 - 1 = 0$,

dus de grafiek van f raakt de x-as bij $x = -\frac{1}{2}\pi$ en bij $x = 1\frac{1}{2}\pi$.

c Voor symmetrie in de y-as moet gelden $g(-a) = g(a)$ voor elke waarde van a.
$g(-a) = \sin^2(-a) + \cos(-a)$
$g(-a) = (\sin(-a))^2 + \cos(-a)$
$g(-a) = (-\sin(a))^2 + \cos(a)$
$g(-a) = \ = (\sin(a))^2 + \cos(a) = g(a)$
Dus de grafiek van g is symmetrisch in de y-as.

d Verschuiving $\frac{1}{2}\pi$ naar rechts, daarna spiegelen in de x-as en tenslotte een verschuiving van 1 omhoog.
$g(x) = -\left(\sin^2\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) + \sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right) + 1$

e $\sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) = -\cos(x)$ substitueren in

$g(x) = -\left(\sin^2\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) + \sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right) + 1$ geeft

$g(x) = -((-\cos(x))^2 + \ -\cos(x)) + 1$
$g(x) = 1 - \cos^2(x) + \cos(x)$
$g(x) = \sin^2(x) + \cos(x)$

© Noordhoff Uitgevers bv

25 **a** Stel $v(x) = \sin^3(x) - \sin^4(x)$
$v'(x) = 3\sin^2(x)\cos(x) - 4\sin^3(x)\cos(x)$
$v'(x) = \sin^2(x)\cos(x)(3 - 4\sin(x))$
$v'(x) = 0$ als $\sin(x) = 0$ of $\cos(x) = 0$ of $\sin(x) = \frac{3}{4}$.
Op het interval $[0, \pi]$ zijn er twee waarden x waarvoor $\sin(x) = \frac{3}{4}$ en voor die waarden is het verschil maximaal.

b $g'(x) = 4\sin^3(x)\cos(x)$
$g''(x) = 12\sin^2(x)\cos(x) \cdot \cos(x) + 4\sin^3(x) \cdot -\sin(x)$
$g''(x) = 4\sin^2(x)(3\cos^2(x) - \sin^2(x))$
$g''(x) = 4\sin^2(x)(3 - 3\sin^2(x) - \sin^2(x))$
$g''(x) = 4\sin^2(x)(3 - 4\sin^2(x))$
$\sin(x) = 0$ of $\sin^2(x) = \frac{3}{4}$

$\sin(x) = 0$ of $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ of $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
De oplossingen op het interval $[0, \pi]$ zijn $x = 0$, $x = \frac{1}{3}\pi$ en $x = \frac{2}{3}\pi$.

Uit de grafiek blijkt dat de buigpunten $\left(\frac{1}{3}\pi, \frac{9}{16}\right)$ en $\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{9}{16}\right)$ zijn.

c $F(x) = a\cos^3(x) + b\cos(x)$
$F'(x) = 3a\cos^2(x) \cdot -\sin(x) - b\sin(x)$
$F'(x) = -3a\cos^2(x) \cdot \sin(x) - b\sin(x)$
$F'(x) = -3a(1 - \sin^2(x)) \cdot \sin(x) - b\sin(x)$
$F'(x) = -3a\sin(x) + 3a\sin^3(x) - b\sin(x)$
$F'(x) = 3a\sin^3(x) + (-3a - b)\sin(x)$ en $f(x) = \sin^3(x)$
dus $3a = 1$ en $-3a - b = 0$ ofwel
$a = \frac{1}{3}$ en $-3 \cdot \frac{1}{3} - b = 0$ dus $b = -1$

d $\int_0^{\pi} \sin^3(x)\,dx = \left[\frac{1}{3}\cos^3(x) - 1 \cdot \cos(x)\right]_0^{\pi} =$
$\left(\frac{1}{3} \cdot \cos^3(\pi) - \cos(\pi)\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot \cos^3(0) - \cos(0)\right) =$
$\left(-\frac{1}{3} + 1\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = 1\frac{1}{3}$

26 **a** Voor de nulpunten geldt $f(x) = 0$, dus

$\frac{1}{2} + \cos(x) = 0$

$\cos(x) = -\frac{1}{2}$

De oplossingen op het interval $[-2\pi, 2\pi]$ zijn $x = -1\frac{1}{3}\pi$, $x = -\frac{2}{3}\pi$, $x = \frac{2}{3}\pi$ en

$x = 1\frac{1}{3}\pi$.

b $f'(x) = \dfrac{-\sin(x)\left(1 + \cos(x)\right) - \left(\frac{1}{2} + \cos(x)\right) \cdot -\sin(x)}{(1 + \cos(x))^2}$

$f'(x) = \dfrac{-\frac{1}{2}\sin(x)}{(1 + \cos(x))^2}$
$f'(x) = 0$ als $x = 0 + k \cdot \pi$
De extreme waarden op het interval $[-2\pi, 2\pi]$ zijn een randmaximum

$f(-2\pi) = \frac{3}{4}$, maximum $f(0) = \frac{3}{4}$ en randmaximum $f(2\pi) = \frac{3}{4}$.

c Verticale asymptoten als $1 + \cos(x) = 0$ en $\frac{1}{2} + \cos(x) \neq 0$.
$\cos(x) = -1$
Op het interval $[-2\pi, 2\pi]$ zijn de verticale asymptoten $x = -\pi$ en $x = \pi$.

© Noordhoff Uitgevers bv

d In het punt $(-\frac{2}{3}\pi,\ 0)$ is $f'\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \dfrac{-\frac{1}{2}\cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$

$\tan(\alpha) = \sqrt{3}$ geeft een hoek van 60°.

In het punt $\left(\frac{2}{3}\pi,\ 0\right)$ is $\tan(\alpha) = -\sqrt{3}$ dus de hoek is daar −60°.

27 **a** $f(x) = \sqrt{6\sin(x)}$ bestaat als $\sin(x) \geq 0$.
Op het interval $[0, 4\pi]$ is het domein $[0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi]$.

b $\sqrt{6\sin(x)} = -2\cos(x)$
$6\sin(x) = 4\cos^2(x)$
$6\sin(x) = 4 - 4\sin^2(x)$
$2\sin^2(x) + 3\sin(x) - 2 = 0$
Stel $\sin(x) = p$, dat geeft
$2p^2 + 3p - 2 = 0$
$p^2 + 1\frac{1}{2}p - 1 = 0$

$\left(p - \frac{1}{2}\right)(p + 2) = 0$

$p = \frac{1}{2}$ of $p = -2$

$\sin(x) = \frac{1}{2}$ of $\sin(x) = -2$ (geen oplossingen)

$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

Op het interval $[0, 4\pi]$ zijn dat $x = \frac{1}{6}\pi$, $x = \frac{5}{6}\pi$, $x = 2\frac{1}{6}\pi$ en $x = 2\frac{5}{6}\pi$.

Echter alleen $x = \frac{5}{6}\pi$ en $x = 2\frac{5}{6}\pi$ voldoen (want bij de andere oplossingen is

$-2\cos(x) = -\sqrt{3}$).

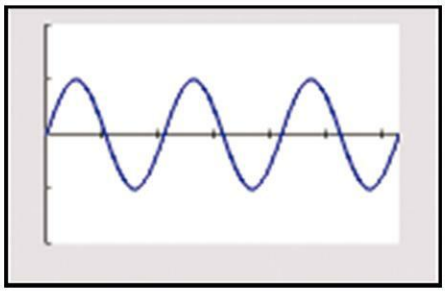
De snijpunten zijn $\left(\frac{5}{6}\pi,\ \sqrt{3}\right)$ en $\left(2\frac{5}{6}\pi,\ \sqrt{3}\right)$.

c $f'(x) = \dfrac{6\cos(x)}{2\sqrt{6\sin(x)}} = \dfrac{3\cos(x)}{\sqrt{6\sin(x)}}$ en $g'(x) = 2\sin(x)$

$f'\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \dfrac{3 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{6 \cdot \frac{1}{2}}} = \dfrac{-1\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -1\frac{1}{2}$ en $g'\left(\frac{5}{6}\pi\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

$-1\frac{1}{2} \cdot 1 \neq -1$, dus de grafieken van f en g snijden elkaar niet loodrecht.

022 **a**



Ja, de grafieken vallen samen.

b De somformule voor de sinus is toegepast.

c $f(x) = 2\sin(x)\cos(x) \cdot \cos(x) + (\ \ldots\ ) \cdot \sin(x)$

d Gebruik $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$
$f(x) = 2\sin(x) \cdot \cos^2(x) + (1 - 2\sin^2(x)) \cdot \sin(x)$
$f(x) = 2\sin(x) \cdot \cos^2(x) + \sin(x) - 2\sin^3(x)$

© Noordhoff Uitgevers bv

e Gebruik nu $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$

f $f(x) = 2\sin(x)(1 - \sin^2(x)) + \sin(x) - 2\sin^3(x)$
$f(x) = 2\sin(x) - 2\sin^3(x) + \sin(x) - 2\sin^3(x)$
$f(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$
dus $f(x)$ en $g(x)$ zijn hetzelfde.

U3 **a** $g(x) = \sin\left(x + \frac{3}{4}\pi\right) + \cos\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)$

b Er moet aangetoond worden dat $g(-a) = -g(a)$ ofwel $g(-a) + g(a) = 0$

$\sin\left(-a + \frac{3}{4}\pi\right) + \cos\left(-a + \frac{3}{4}\pi\right) + \sin\left(a + \frac{3}{4}\pi\right) + \cos\left(a + \frac{3}{4}\pi\right) = 0$

Er geldt: $\sin(\alpha) = -\cos\left(\alpha - 1\frac{1}{2}\pi\right)$ en $\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha - 1\frac{1}{2}\pi\right)$.

$-\cos\left(-a + \frac{3}{4}\pi - 1\frac{1}{2}\pi\right) + \sin\left(-a + \frac{3}{4}\pi - 1\frac{1}{2}\pi\right) + \sin\left(a + \frac{3}{4}\pi\right) + \cos\left(a + \frac{3}{4}\pi\right) = 0$

$-\cos\left(-\left(a + \frac{3}{4}\pi\right)\right) + \sin\left(-\left(a + \frac{3}{4}\pi\right)\right) + \sin\left(a + \frac{3}{4}\pi\right) + \cos\left(a + \frac{3}{4}\pi\right)\right) = 0$

$-\cos\left(a + \frac{3}{4}\pi\right) + -\sin\left(a + \frac{3}{4}\pi\right) + \sin\left(a + \frac{3}{4}\pi\right) + \cos\left(a + \frac{3}{4}\pi\right) = 0$, klopt.

Hieruit volgt dat de grafiek van g puntsymmetrisch is in de oorsprong.

c Door verschuiven blijft de grafiek symmetrisch en het beeld van $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$ na de verschuiving is $(0, 0)$.

d $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$
$f(x) = -\sqrt{2}\left(\sin(x) \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \cos(x) \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$
$f(x) = -\sqrt{2}\left(\sin(x) \cdot \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) - \cos(x) \cdot \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)$
$f(x) = -\sqrt{2} \cdot \sin\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)$

e De grafiek van een functie $h(x) = a \cdot \sin(x)$ is puntsymmetrisch in de oorsprong.
De grafiek van f is $\frac{3}{4}\pi$ naar rechts verschoven, dus deze grafiek is puntsymmetrisch in het punt $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$.

20.4 Parametervoorstellingen

intro Met zo klein mogelijke positieve getallen voor a en b:
A: $a = 3$ en $b = 1$
B: $a = 1$ en $b = 2$
C: $a = 3$ en $b = 4$
D: $a = 1$ en $b = 3$
E: $a = 1$ en $b = 4$
F: $a = 3$ en $b = 2$

28 **a** $-1 \le x(t) \le 1$ en $-1 \le y(t) \le 1$

b De periode van x is $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}\pi} = 6$.

De periode van y is $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi} = 3$.

c De gemeenschappelijke periode is 6.
Na 6 seconden heeft P de baan één keer doorlopen.

© Noordhoff Uitgevers bv

29 **a** De periode van x is $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}\pi} = 8$ en de periode van y is $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}\pi} = 6$.

De periode van de beweging is het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van 8 en 6 en dat is 24.

b Als de raaklijn evenwijdig is aan de y-as, dan geldt $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$.

$x'(t) = -\frac{3}{4}\pi \sin\left(\frac{1}{4}\pi t\right) = 0$

$\frac{1}{4}\pi t = 0 + k \cdot \pi$
$t = 0 + k \cdot 4$ (voor deze waarden is $y'(t) \neq 0$)
De punten zijn $(3, 0)$, $(-3, \sqrt{3})$, $(3, \sqrt{3})$, $(-3, 0)$, $(3, -\sqrt{3})$ en $(-3, \sqrt{3})$.

30 **a** De periode van zowel $x(t)$ als $y(t)$ is 2π, dus de periode van de beweging is 2π.

b $x'(t) = 2\cos(t) + 2\cos(2t)$
$x'(t) = 0$ als $\cos(2t) = -\cos(t)$
$\cos(2t) = \cos(t + \pi)$
$2t = t + \pi + k \cdot 2\pi$ of $2t = -t - \pi + k \cdot 2\pi$
$t = \pi + k \cdot 2\pi$ of $3t = -\pi + k \cdot 2\pi$
$t = \pi + k \cdot 2\pi$ of $t = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
De oplossingen op $[0, 2\pi]$ zijn $t = \frac{1}{3}\pi$, $t = \pi$ en $t = 1\frac{2}{3}\pi$.

De bijbehorende waarden van x zijn $1\frac{1}{2}\sqrt{3}$, 0 en $-1\frac{1}{2}\sqrt{3}$, dus $-1\frac{1}{2}\sqrt{3} \leq x \leq 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$.
$y'(t) = 2\sin(t) + 2\sin(2t)$
$y'(t) = 0$ als $2\sin(t) + 2\sin(2t) = 0$
$\sin(2t) = -\sin(t)$
$\sin(2t) = \sin(\pi + t)$
$2t = \pi + t + k \cdot 2\pi$ of $2t = \pi - (\pi + t) + k \cdot 2\pi$
$t = \pi + k \cdot 2\pi$ of $3t = 0 + k \cdot 2\pi$
$t = \pi + k \cdot 2\pi$ of $t = 0 + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
De oplossingen op $[0, 2\pi]$ zijn $t = 0$, $t = \frac{2}{3}\pi$, $t = \pi$, $t = 1\frac{1}{3}\pi$ en $t = 2\pi$.

De bijbehorende waarden van y zijn -3, $1\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, en -3, dus $-3 \leq y \leq 1\frac{1}{2}$.

c A is het snijpunt met de positieve y-as, dus $x(t) = 0$.
$2\sin(t) + \sin(2t) = 0$
$2\sin(t) + 2\sin(t) \cdot \cos(t) = 0$
$\sin(t) \cdot (1 + \cos(t)) = 0$

$\sin(t) = 0$ of $\cos(t) = -1$
$t = 0 + k \cdot \pi$ of $t = \pi + k \cdot 2\pi$
$t = \pi$ levert het punt $A(0, 1)$ op.

d $x'(\pi) = 0$ en $y'(\pi) = 0$ dus $v = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$.

e De coördinaten van B zijn $(2, 1)$.

De richtingscoëfficiënt van deze raaklijn is $\frac{y'\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{x'\left(\frac{1}{2}\pi\right)} = \frac{2}{-2} = -1$

De vergelijking is van de vorm $y = -x + b$.
De coördinaten van B zijn $(2, 1)$ invullen geeft $1 = -2 + b$ dus $b = 3$.
De vergelijking van de raaklijn in B is $y = -x + 3$.

© Noordhoff Uitgevers bv

31 **a** $t = 0$ invullen geeft $A(1, 1)$ en $t = \pi$ invullen geeft $D(1, -1)$.

b Voor de snijpunten met de x-as geldt $y(t) = 0$.

$\cos(3t) = 0$

$3t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

$t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$

De oplossingen op $[0, \pi]$ zijn $t = \frac{1}{6}\pi$ of $t = \frac{1}{2}\pi$ of $t = \frac{5}{6}\pi$.

De snijpunten met de x-as zijn $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ en $C(-1, 0)$ $\left($en nogmaals $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right)$.

Voor de snijpunten met de y-as geldt $x(t) = 0$.

$\cos(2t) = 0$

$2t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

$t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

De oplossingen op $[0, \pi]$ zijn $t = \frac{1}{4}\pi$ of $t = \frac{3}{4}\pi$.

De snijpunten met de y-as zijn $\left(0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ en $\left(0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$.

c $x'(t) = -2\sin(2t)$ en $y'(t) = -3\sin(3t)$

Voor een raaklijn evenwijdig aan de x-as geldt $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$.

$-\sin(3t) = 0$

$3t = 0 + k \cdot \pi$

$t = 0 + k \cdot \frac{1}{3}\pi$

De oplossingen op $[0, \pi]$ zijn $t = 0$ of $t = \frac{1}{3}\pi$ of $t = \frac{2}{3}\pi$ of $t = \pi$.

Voor $t = 0$ en $t = \pi$ geldt $x'(t) = 0$ dus deze voldoen niet.

De raaklijn is evenwijdig aan de x-as in de punten $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ en $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

Voor een raaklijn evenwijdig aan de y-as geldt $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$.

$-2\sin(2t) = 0$

$\sin(2t) = 0$

$2t = 0 + k \cdot \pi$

$t = 0 + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

De oplossingen op $[0, \pi]$ zijn $t = 0$ of $t = \frac{1}{2}\pi$ of $t = \pi$.

Voor $t = 0$ en $t = \pi$ geldt $y'(t) = 0$ dus deze voldoen niet.

De raaklijn is evenwijdig aan de y-as in het punt $C(-1, 0)$.

d $t = a$ geeft $P(\cos(2a), \cos(3a))$.

$t = \pi - a$ geeft $Q(\cos(2(\pi - a)), \cos(3(\pi - a)))$

$x_Q = \cos(2(\pi - a)) = \cos(2\pi - 2a) = \cos(2a - 2\pi) = \cos(2a)$

$y_Q = \cos(3(\pi - a)) = \cos(3\pi - 3a) = \cos(3a - 3\pi) = \cos(3a + \pi) = -\cos(3a)$

$x_P = x_Q$ en $y_P = -y_Q$, dus de baan is symmetrisch in de x-as.

e Voor de baansnelheid geldt $v = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ dus

$v = \sqrt{4\sin^2(2t) + 9\sin^2(3t)}$

$B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ dan $t = \frac{1}{6}\pi$ of $t = \frac{5}{6}\pi$.

$v\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \sqrt{4 \cdot \frac{3}{4} + 9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ en ook $v\left(\frac{5}{6}\pi\right) = 2\sqrt{3}$.

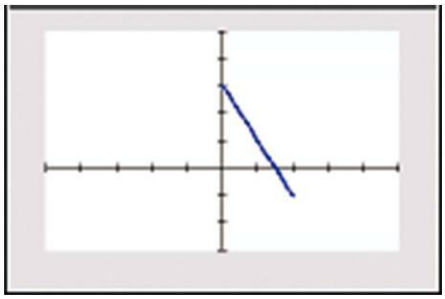
$C(-1, 0)$ dan $t = \frac{1}{2}\pi$.

$v\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \sqrt{0 + 9} = \sqrt{9} = 3$

De baansnelheid in B is groter dan de baansnelheid in C.

© Noordhoff Uitgevers bv

32 **a**

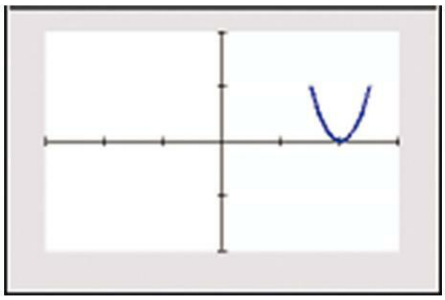


De grafiek loopt van (0, 3) naar (2, −1).
Een vergelijking is $y = -2x + 3$.

b $y(t) = 1 - 2\cos(2t)$
$y(t) = 1 - 2(2\cos^2(x) - 1)$
$y(t) = 1 - 4\cos^2(x) + 2$
$y(t) = -4\cos^2(t) + 3$
$y(t) = -2(2\cos^2(t)) + 3$
$y(t) = -2 \cdot x(t) + 3$
dus de punten voldoen aan de vergelijking $y = -2x + 3$.

c Voor $0 \le x \le 2$ valt de baan van P samen met de lijn.

33 **a**



$4\sin^2(t) \cdot \cos^2(t) = 0$
$\sin(t) = 0$ of $\cos(t) = 0$
$t = 0 + k \cdot \frac{1}{2}\pi$
Deze waarden van t leveren het punt (2, 0) op.

b $x(t) = 2 + \frac{1}{2}\sin(2t)$ dus $\frac{1}{2}\sin(2t) = x(t) - 2$
$\sin(2t) = 2x(t) - 4$
$y(t) = 4\sin^2(t) \cdot \cos^2(t) = (2\sin(t)\cos(t))^2 = (\sin(2t))^2$
dus $y(t) = (2x(t) - 4))^2$ ofwel $y = 4x^2 - 16x + 16$.

c $x(t) = 2 + \frac{1}{2}\sin(2t)$ en aangezien $-1 \le \sin(2t) \le 1$ geldt $1\frac{1}{2} \le 2 + \frac{1}{2}\sin(2t) \le 2\frac{1}{2}$.
Het domein is $\left[1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right]$.

34 **a** Voor de y-as geldt $x(t) = 0$ dus $5\cos(t) = 0$ ofwel $\cos(t) = 0$.
$t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
$x'(t) = -5\sin(t)$ en $y'(t) = 10\cos\left(2t - \frac{2}{3}\pi\right)$
Als $t = \frac{1}{2}\pi$ dan is $x'\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -5 \cdot 1 = -5$ en $y'\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$.
De baansnelheid is $v = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $x(t) = 2\frac{1}{2}$ dus $5\cos(t) = 2\frac{1}{2}$ ofwel $\cos(t) = \frac{1}{2}$

$t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $t = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$t = \frac{1}{3}\pi$ geeft het punt $A\left(2\frac{1}{2}, 0\right)$ en $t = 1\frac{2}{3}\pi$ geeft het punt $B\left(2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.

De helling in A is $\dfrac{y'\left(\frac{1}{3}\pi\right)}{x'\left(\frac{1}{3}\pi\right)} = \dfrac{10}{-2\frac{1}{2}\sqrt{3}} = -\dfrac{4}{\sqrt{3}} = -\frac{4}{3}\sqrt{3}$ en de helling in B is

$\dfrac{y'\left(1\frac{2}{3}\pi\right)}{x'\left(1\frac{2}{3}\pi\right)} = \dfrac{-5}{2\frac{1}{2}\sqrt{3}} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

De helling in A is twee keer zo groot als de helling in B.

O33 **a** $y = 3 - \frac{2}{3}x^2$

$3\sin(2t) = 3 - \frac{2}{3}\left(3\cos\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)\right)^2$

b $3\sin(2t) = 3 - \frac{2}{3} \cdot 9\left(\cos\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)\right)^2$

$3\sin(2t) = 3 - 6\left(\cos\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)\right)^2$

$\sin(2t) = 1 - 2\left(\cos\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)\right)^2$

$\sin(2t) = 1 - 2\cos^2\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)$

c $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ ofwel $1 - 2\cos^2(t) = \cos(2t)$

d $\sin(2t) = -\cos\left(2\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)\right)$

$\sin(2t) = -\cos\left(2t + \frac{1}{2}\pi\right)$

e $\cos(t + \pi) = -\cos(t)$ dus
$\sin(2t) = \cos\left(2t + \frac{1}{2}\pi + \pi\right)$
ofwel $\sin(2t) = \cos\left(2t + 1\frac{1}{2}\pi\right)$

f $\cos(t) = \sin\left(t + \frac{1}{2}\pi\right)$ dus

$\sin(2t) = \sin\left(2t + 1\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\right)$
$\sin(2t) = \sin(2t + 2\pi)$
dus $\sin(2t) = \sin(2t)$

g $-3 \le 3\cos\left(t + \frac{1}{4}\pi\right) \le 3$, dus voor $-3 \le x \le 3$ valt de parabool samen met de baan van P.

U4 **a** $4(\sin(t))^2 + 4\left(\sin\left(t - \frac{1}{3}\pi\right)\right)^2 - 4\sin(t) \cdot \sin\left(t - \frac{1}{3}\pi\right) =$

$4(\sin(t))^2 + 4\left(\sin(t) \cdot \frac{1}{2} - \cos(x) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 - 4\sin(t) \cdot \left(\sin(t) \cdot \frac{1}{2} - \cos(x) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) =$

$4\sin^2(t) + 4\left(\frac{1}{4}\sin^2(t) - \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin(t)\cos(t) + \frac{3}{4}\cos^2(t)\right) - 2\sin^2(t) + 2\sqrt{3}\sin(t)\cos(t) =$

$4\sin^2(t) + \sin^2(t) - 2\sqrt{3}\sin(t)\cos(t) + 3\cos^2(t) - 2\sin^2(t) + 2\sqrt{3}\sin(t)\cos(t) =$
$4\sin^2(t) + \sin^2(t) + 3\cos^2(t) - 2\sin^2(t) =$
$3(\sin^2(t) + \cos^2(t)) = 3 \cdot 1 = 3$

b Bereken de snijpunten met de lijn $y = x$.
$4x^2 = 3$, dus $x^2 = \frac{3}{4}$
De snijpunten zijn $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ en $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.

De lengte van de lange as is $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{6}$.
Bereken de snijpunten met de lijn $y = -x$.
$12x^2 = 3$, dus $x^2 = \frac{1}{4}$

De snijpunten zijn $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

De lengte van de korte as is $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c De oppervlakte van de ellips is $\pi \cdot \frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\pi\sqrt{12} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{3}$.
De oppervlakte van de eenheidscirkel is $\pi \cdot 1^2 = \pi$.

$\frac{1}{2}\sqrt{3} < 1$, dus de oppervlakte van de ellips is kleiner dan de oppervlakte van de cirkel.

20.5 Gemengde opdrachten

35 **a** $-1 \le \cos(t) \le 1$ en $-1 \le \sin(t) \le 1$
$-1 \le \cos^3(t) \le 1$ en $-1 \le \sin^3(t) \le 1$
$-4 \le 4\cos^3(t) \le 4$ en $-4 \le \sin^3(t) \le 4$ dus
$-4 \le x \le 4$ en $-4 \le y \le 4$

b De periode van x en van y zijn beide 2π dus legt P de baan één keer af in 2π seconden.

c $4\cos^3(t) = 4\sin^3(t)$
$\sin(t) = \cos(t)$
$\tan(t) = 1$
$t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$
De snijpunten op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ en $B(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

d $x'(t) = -12\cos^2(t)\sin(t)$ en $y'(t) = 12\sin^2(t)\cos(t)$

Als $t = \frac{1}{4}\pi$ dan geldt $\dfrac{y'\left(\frac{1}{4}\pi\right)}{x'\left(\frac{1}{4}\pi\right)} = \dfrac{12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}}{-12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{-3\sqrt{2}} = -1$.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = -x + b$.
Invullen van $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ geeft $\sqrt{2} = -\sqrt{2} + b$ dus $b = 2\sqrt{2}$.
Een vergelijking van de raaklijn is $y = -x + 2\sqrt{2}$.

e $v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} =$

$v(t) = \sqrt{(-12\cos^2(t)\sin(t))^2 + (12\sin^2(t)\cos(t))^2} =$

$\sqrt{144\cos^4(t)\sin^2(t) + 144\sin^4(t)\cos^2(t)} =$

$\sqrt{144\sin^2(t)\cos^2(t)} \cdot \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} =$

$6 \cdot |2\sin(t)\cos(t)| \cdot 1 = 6 \cdot |\sin(2t)|$

f De maximale waarde van v is 6, als $\sin(2t) = 1$.
$2t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$, dus $t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$.
Als $t = \frac{1}{4}\pi$ bevindt P zich in A.

36 **a** $2 + \cos(x) - \cos^2(x) = 2$
$\cos(x)(1 - \cos(x)) = 0$
$\cos(x) = 0$ of $\cos(x) = 1$
op het interval $[0, 2\pi]$: $x = \frac{1}{2}\pi$ of $x = 1\frac{1}{2}\pi$ of $x = 0$ of $x = 2\pi$

b $f(x) = 2 + \cos(x) - \cos^2(x)$
$f'(x) = -\sin(x) + 2\sin(x)\cos(x)$
$f'(x) = 0$ als $\sin(x) \cdot (-1 + 2\cos(x)) = 0$
$\sin(x) = 0$ of $\cos(x) = \frac{1}{2}$
$x = 0$ of $x = \frac{1}{3}\pi$ of $x = \pi$ of $x = 1\frac{2}{3}\pi$ of $x = 2\pi$

randminimum $f(0) = 2$, maximum $f\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 2\frac{1}{4}$,

minimum $f(\pi) = 0$, maximum $f\left(1\frac{2}{3}\pi\right) = 2\frac{1}{4}$, randminimum $f(2\pi) = 2$

© Noordhoff Uitgevers bv

c $\int_0^{\pi}(2+\cos(x)-\cos^2(x))\,dx = \int_0^{\pi}\left(2+\cos(x)-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)dx =$

$\left[1\frac{1}{2}x+\sin(x)-\frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\pi} =$

$\left(1\frac{1}{2}\pi+0-0\right)-0=1\frac{1}{2}\pi$

37 **a** Als $a=2$ dan geldt $y(t)=4\sin^3(t)-2\sin(t)$.
Op de x-as geldt dat $y(t)=0$, dus
$4\sin^3(t)-2\sin(t)=0$
$2\sin(t)(2\sin^2(t)-1)=0$
$\sin(t)=0$ of $\sin^2(t)=\frac{1}{2}$
$\sin(t)=0$ of $\sin(t)=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ of $\sin(t)=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$t=0$ of $t=\frac{1}{4}\pi$ of $t=\frac{3}{4}\pi$ of $t=\pi$ of $t=1\frac{1}{4}\pi$ of $t=1\frac{3}{4}\pi$ of $t=2\pi$

De bijbehorende punten zijn
$(2, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$, $(-2, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$ en $(2, 0)$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{12\sin^2(t)\cos(t)-2\cos(t)}{-2\sin(t)}$$

Als $t=\frac{1}{4}\pi$ geldt $\frac{dy}{dx}=\frac{12\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}}{-2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}}=-2$

Als $t=1\frac{3}{4}\pi$ geldt $\frac{dy}{dx}=\frac{12\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}}{-2\cdot-\frac{1}{2}\sqrt{2}}=2$

De raaklijnen maken elk een hoek α met de x-as waarvoor $\tan(\alpha)=2$.
$\alpha = 63{,}4349\ldots°$
De hoek tussen de raaklijn is $180-2\alpha\approx 53°$.

b $4\sin^3(t)-a\sin(t)=0$
$4\sin(t)\left(\sin^2(t)-\frac{1}{4}a\right)=0$

$\sin(t)=0$ of $\sin(t)=\sqrt{\frac{1}{4}a}$ of $\sin(t)=-\sqrt{\frac{1}{4}a}$
$\sin(t)=0$ geeft $t=0$ of $t=\pi$, de punten op de x-as zijn $(2, 0)$ en $(-2, 0)$.

De vergelijkingen $\sin(t)=\sqrt{\frac{1}{4}a}$ en $\sin(t)=-\sqrt{\frac{1}{4}a}$ moeten oplossingen hebben,

dat is het geval als $0\le\frac{1}{4}a\le 1$ ofwel $0\le a\le 4$.
$a=0$ voldoet niet, want dan vallen er oplossingen samen.

$a=4$ voldoet niet, want dan krijg je $t=\frac{1}{2}\pi$ en $t=1\frac{1}{2}\pi$ en die geven beide het punt $(0, 0)$.
Het antwoord is $0<a<4$.

38 **a** $6\cos(x)+2\cos^2(x)-1-2\frac{1}{2}=0$

$2\cos^2(x)+6\cos(x)-3\frac{1}{2}=0$
Stel $\cos(x)=p$, dat geeft

$2p^2+6p-3\frac{1}{2}=0$

$p=\frac{-6+\sqrt{64}}{4}=\frac{1}{2}$ of $p=\frac{-6-\sqrt{64}}{4}=-3\frac{1}{2}$

$\cos(x)=\frac{1}{2}$ of $\cos(x)=-3\frac{1}{2}$ (geen oplossingen)

$x=\frac{1}{3}\pi$ of $x=1\frac{2}{3}\pi$

De snijpunten zijn $\left(\frac{1}{3}\pi, 0\right)$ en $\left(1\frac{2}{3}\pi, 0\right)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b Voor de toppen geldt $f'(x) = 0$.
$f'(x) = -6\sin(x) - 2\sin(2x)$
$-6\sin(x) - 4\sin(x)\cos(x) = 0$
$-2\sin(x)(3 + 2\cos(x)) = 0$
$\sin(x) = 0$ of $\cos(x) = -1\frac{1}{2}$ (geen oplossingen)
$x = 0$ of $x = \pi$ of $x = 2\pi$
De toppen zijn $\left(0, 4\frac{1}{2}\right)$, $\left(\pi, -7\frac{1}{2}\right)$ en $\left(2\pi, 4\frac{1}{2}\right)$.

c $\int_{\frac{1}{3}\pi}^{1\frac{2}{3}\pi} \left(6\cos(x) + \cos(2x) - 2\frac{1}{2}\right) dx =$
$\left[6\sin(x) + \frac{1}{2}\sin(2x) - 2\frac{1}{2}x\right]_{\frac{1}{3}\pi}^{1\frac{2}{3}\pi} =$
$\left(6 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} - 4\frac{1}{6}\pi\right) - \left(6 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{5}{6}\pi\right) =$
$6\frac{1}{2}\sqrt{3} - 3\frac{1}{3}\pi$

Onderzoeksopdrachten

39 **a** M doorloopt een cirkel met middelpunt (0, 0) en straal $r + 1$ en

$\begin{cases} x(t) = (r + 1)\cos(t) \\ y(t) = (r + 1)\sin(t) \end{cases}$ is een parametervoorstelling van een cirkel met de oorsprong als middelpunt en straal $r + 1$.

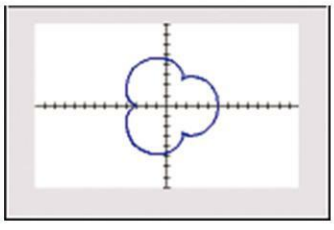
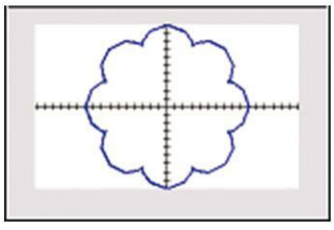
b De omtrek van de groene cirkel $2\pi \cdot 1 = 2\pi$.
Als $r = 2$ dan is de omtrek van de rode cirkel $2\pi \cdot 2 = 4\pi$.
M doorloopt een cirkel met straal 3 en de omtrek van deze baan is $2\pi \cdot 3 = 6\pi$
Dan is de groene cirkel dus $\frac{6\pi}{2\pi} = 3$ keer rond gedraaid.
Als $r = 2$ dan is P dus 3 keer om M gedraaid.
Als $r = 4$ dan is de omtrek van de rode cirkel $2\pi \cdot 4 = 8\pi$.
M doorloopt nu een cirkel met straal 5 en de omtrek van deze baan is $2\pi \cdot 5 = 10\pi$.
Dan is de groene cirkel dus $\frac{10\pi}{2\pi} = 5$ keer rond gedraaid.
Als $r = 4$ dan is P dus 5 keer om M gedraaid.

c De 'omlooptijd' van P om M is $\frac{2\pi}{r+1}$, dus $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \cos((r + 1)t) \\ 1 \cdot \sin((r + 1)t) \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} (r + 1)\cos(t) \\ (r + 1)\sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos((r + 1)t) \\ \sin((r + 1)t) \end{pmatrix}$

dus $\begin{cases} x(t) = (r + 1)\cos(t) + \cos((r + 1)t) \\ y(t) = (r + 1)\sin(t) + \sin((r + 1)t) \end{cases}$

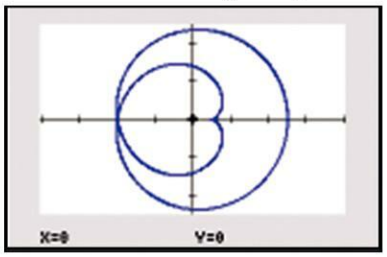
d Bijvoorbeeld $r = 3$ en $r = 8$:

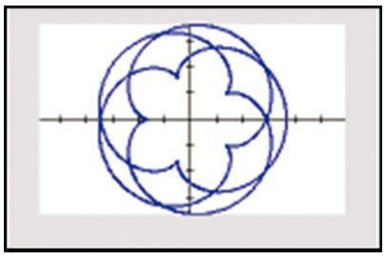
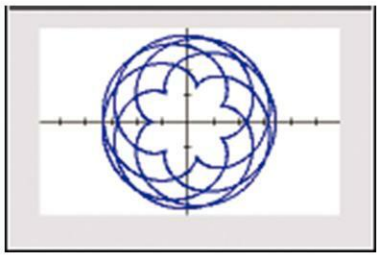



Het aantal hoekpunten (knikken) in de baan is gelijk aan r.

© Noordhoff Uitgevers bv

e Afgebeeld zijn $r = \frac{1}{2}$, $r = \frac{5}{3}$ en $r = \frac{7}{5}$



Om een gesloten kromme te krijgen moet je een groter interval voor t nemen.
Het aantal hoekpunten is gelijk aan de teller van de breuk.

f Je krijgt een astroïde zoals in opdracht 35 als $r = 4$.

Samenvatting

S1 Uit $\sin(t) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ met $\frac{1}{2}\pi < t < \pi$ volgt $t = \frac{3}{4}\pi$.

$\cos\left(t - \frac{1}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{6}\pi\right)$

$\cos\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) + \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)$

$\cos\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$

S2 **a** $\sin(3x) = -\sin(2x)$

$\sin(3x) = \sin(-2x)$

$3x = -2x + k \cdot 2\pi$ of $3x = \pi + 2x + k \cdot 2\pi$

$5x = k \cdot 2\pi$ of $x = \pi + k \cdot 2\pi$

$x = k \cdot \frac{2}{5}\pi$ of $x = \pi + k \cdot 2\pi$

b $\sin\left(x - \frac{1}{6}\pi\right) = -\cos\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right)$

$\cos\left(x - \frac{1}{6}\pi - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(2x - \frac{1}{3}\pi + \pi\right)$

$\cos\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(2x + \frac{2}{3}\pi\right)$

$x - \frac{2}{3}\pi = 2x + \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x - \frac{2}{3}\pi = -2x - \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$-x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3x = 0 + k \cdot 2\pi$

$x = -1\frac{1}{3}\pi - k \cdot 2\pi$ of $x = 0 - k \cdot \frac{2}{3}\pi$

$x = 0 + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

c $\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

$\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) - \cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 0$

$\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\left(\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - 1\right) = 0$

$\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 0$ of $\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 1$

$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ of $\frac{1}{2}x = 0 + k \cdot 2\pi$

$x = \pi + k \cdot 2\pi$ of $x = 0 + k \cdot 4\pi$

© Noordhoff Uitgevers bv

d $3\cos(2x - \pi) = \sqrt{3}\sin(2x)$
$-3\cos(2x) = \sqrt{3}\sin(2x)$
$-3 = \sqrt{3}\tan(2x)$
$\tan(2x) = -\sqrt{3}$
$2x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$
$x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

e $2\cos^2\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = 4 + 7\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$

$2\cos^2\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) - 7\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) - 4 = 0$

Stel $\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = p$, dat geeft
$2p^2 - 7p - 4 = 0$

$p = \frac{7 - \sqrt{81}}{4} = -\frac{1}{2}$ of $p = \frac{7 + \sqrt{81}}{4} = 4$

$\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$ of $\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = 4$ (geen oplossingen)

$x - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x - \frac{1}{3}\pi = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \pi + k \cdot 2\pi$ of $x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

S3 **a** Voor de nulpunten geldt $f(x) = 0$.
$1 - 3\cos(x) - \sin^2(x) = 0$
$1 - 3\cos(x) - (1 - \cos^2(x)) = 0$
$\cos^2(x) - 3\cos(x) = 0$
$\cos(x)(\cos(x) - 3) = 0$
$\cos(x) = 0$ of $\cos(x) = 3$ (geen oplossing)
De oplossingen op het interval $[-\pi, \pi]$ zijn $x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = -\frac{1}{2}\pi$.

b $f'(x) = 3\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x)$
$f'(x) = 0$ als $3\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x) = 0$
$\sin(x)(3 - 2\cos(x)) = 0$
$\sin(x) = 0$ of $3 - 2\cos(x) = 0$
$\sin(x) = 0$ of $\cos(x) = 1\frac{1}{2}$ (geen oplossing)
De oplossingen op het interval $[-\pi, \pi]$ zijn $x = -\pi$ en $x = 0$ en $x = \pi$.
randmaximum $f(-\pi) = 4$, minimum $f(0) = -2$ en randmaximum $f(\pi) = 4$
Het bereik is $[-2, 4]$.

c De oppervlakte is gelijk aan het tegengestelde van $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} f(x)\,dx$.

$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}(1 - 3\cos(x) - \sin^2(x))\,dx = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}(1 - 3\cos(x) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\right)\,dx =$

$\left[\frac{1}{2}x - 3\sin(x) + \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} =$

$\left(\frac{1}{4}\pi - 3 + 0\right) - \left(-\frac{1}{4}\pi + 3 + 0\right) = \frac{1}{2}\pi - 6$

De gevraagde oppervlakte is $6 - \frac{1}{2}\pi$.

S4 De periode van $x(t) = 2\sin\left(\frac{1}{3}t\right)$ is $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$ en

de periode van $y(t) = 2\cos\left(\frac{1}{2}t\right)$ is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

Het kleinste gemeenschappelijke veelvoud is 12π.
De periode van de beweging van P is 12π.

© Noordhoff Uitgevers bv

S5 **a** $x(t) = \cos(t) + \cos(2t)$ en $y(t) = \sin(t) + \sin(2t)$
$x'(t) = -\sin(t) - 2\sin(2t)$ en $y'(t) = \cos(t) + 2\cos(2t)$
Als de raaklijn verticaal is, dan moet gelden $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$.
$-\sin(t) - 2\sin(2t) = 0$
$-\sin(t) - 4\sin(t)\cos(t) = 0$
$-\sin(t)(1 + 4\cos(t)) = 0$
$\sin(t) = 0$ of $1 + 4\cos(t) = 0$
$\sin(t) = 0$ of $\cos(t) = -\frac{1}{4}$
Bij $\sin(t) = 0$ horen de punten $(2, 0)$ en $(0, 0)$.
Als $\cos(t) = -\frac{1}{4}$, dan is $\sin^2(t) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$ en dus
$\sin(t) = \frac{1}{4}\sqrt{15}$ of $\sin(t) = -\frac{1}{4}\sqrt{15}$

$\sin(2t) = 2 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{15} \cdot -\frac{1}{4} = -\frac{1}{8}\sqrt{15}$ of $\sin(2t) = 2 \cdot -\frac{1}{4}\sqrt{15} \cdot -\frac{1}{4} = \frac{1}{8}\sqrt{15}$

$\cos(2t) = 2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{8}$

De bijbehorende punten zijn $\left(-1\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\sqrt{15}\right)$ en $\left(-1\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\sqrt{15}\right)$.

b Op de x-as geldt $y(t) = 0$.
$\sin(t) + \sin(2t) = 0$
$\sin(2t) = -\sin(t)$
$\sin(2t) = \sin(-t)$
$2t = -t + k \cdot 2\pi$ of $2t = \pi + t + k \cdot 2\pi$
$3t = 0 + k \cdot 2\pi$ of $t = \pi + k \cdot 2\pi$
$t = 0 + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $t = \pi + k \cdot 2\pi$
De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $t = 0$ of $t = \frac{2}{3}\pi$ of $t = \pi$ of $t = 1\frac{1}{3}\pi$ of $t = 2\pi$.
De kromme snijdt zichzelf in $(-1, 0)$ als $t = \frac{2}{3}\pi$ of $t = 1\frac{1}{3}\pi$.
Als $t = \frac{2}{3}\pi$ dan geldt $\dfrac{y'\left(\frac{2}{3}\pi\right)}{x'\left(\frac{2}{3}\pi\right)} = \dfrac{-\frac{1}{2} + 2 \cdot -\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}\sqrt{3} - 2 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \dfrac{-1\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$.
Als $t = 1\frac{1}{3}\pi$ dan geldt $\dfrac{y'\left(1\frac{1}{3}\pi\right)}{x'\left(1\frac{1}{3}\pi\right)} = \dfrac{-\frac{1}{2} + 2 \cdot -\frac{1}{2}}{--\frac{1}{2}\sqrt{3} - 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}} = \dfrac{-1\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.
$\tan(60°) = \sqrt{3}$, dus beide raaklijnen maken een hoek van 60° met de x-as en de hoek waaronder de baan zichzelf snijdt is $180° - 2 \cdot 60° = 60°$.

Test jezelf

T1 **a** $f(x) = \cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) + \sin\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)$
$f(x) = \cos(x)\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) - \sin(x)\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) + \sin(x)\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) - \cos(x)\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)$
$f(x) = \cos(x) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} - \sin(x) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sin(x) \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \cos(x) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$
$f(x) = -\sqrt{2}\sin(x)$

b $\cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) + \sin\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) = \sin(2x)$
$-\sqrt{2}\sin(x) = \sin(2x)$
$-\sqrt{2}\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)$
$-\sqrt{2}\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x) = 0$
$-2\sin(x)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \cos(x)\right) = 0$
$\sin(x) = 0$ of $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $x = 0$ of $x = \pi$ of $x = 2\pi$ of $x = \frac{3}{4}\pi$ of $x = 1\frac{1}{4}\pi$.

© Noordhoff Uitgevers bv

T2 **a** $\sin\left(2x - \frac{1}{4}\pi\right) = \cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$

$\cos\left(2x - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$

$2x - \frac{3}{4}\pi = x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x - \frac{3}{4}\pi = -x - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $x = \frac{1}{12}\pi$ of $x = \frac{3}{4}\pi$ of $x = 1\frac{1}{4}\pi$ of $x = 1\frac{5}{12}\pi$.

b $\cos(2x) - 2\sin^2(x) = 0$

$1 - 2\sin^2(x) - 2\sin^2(x) = 0$

$4\sin^2(x) = 1$

$\sin^2(x) = \frac{1}{4}$

$\sin(x) = \frac{1}{2}$ of $\sin(x) = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi$

De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $x = \frac{1}{6}\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi$ of $x = 1\frac{1}{6}\pi$ of $x = 1\frac{5}{6}\pi$.

c $6 \cdot \sin\left(1\frac{1}{2}\pi + x\right) = 2\sqrt{3} \cdot \cos\left(1\frac{1}{2}\pi + x\right)$

$\frac{\sin\left(1\frac{1}{2}\pi + x\right)}{\cos\left(1\frac{1}{2}\pi + x\right)} = \frac{2\sqrt{3}}{6}$

$\tan\left(1\frac{1}{2}\pi + x\right) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$1\frac{1}{2}\pi + x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$

$x = -1\frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$

De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $x = \frac{2}{3}\pi$ of $x = 1\frac{2}{3}\pi$.

d $\frac{1}{2}\sin(3x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

$\frac{1}{2}\sin(3x) = \frac{1}{2}\sin(x)$

$3x = x + k \cdot 2\pi$ of $3x = \pi - x + k \cdot 2\pi$

$2x = 0 + k \cdot 2\pi$ of $4x = \pi + k \cdot 2\pi$

$x = 0 + k \cdot \pi$ of $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $x = 0$ of $x = \frac{1}{4}\pi$ of $x = \frac{3}{4}\pi$ of $x = \pi$ of $x = 1\frac{1}{4}\pi$ of $x = 1\frac{3}{4}\pi$ of $x = 2\pi$.

T3 **a** $g(x) = 2\cos^2\left(x + 1\frac{1}{2}\pi\right) - \sin\left(x + 1\frac{1}{2}\pi\right)$

b Symmetrisch in de y-as, dan moet gelden $g(a) = g(-a)$ voor elke waarde van a.

$g(a) = 2\cos^2\left(a - \frac{1}{2}\pi\right) - \sin\left(a - \frac{1}{2}\pi\right)$

$g(a) = 2\sin^2(a) + \sin\left(a + \frac{1}{2}\pi\right)$

$g(a) = 2\sin^2(a) + \cos(a)$

$g(-a) = 2(\sin(-a))^2 + \cos(-a)$

$g(-a) = 2(-\sin(a))^2 + \cos(a)$

$g(-a) = 2\sin^2(a) + \cos(a)$

$g(a) = g(-a)$, dus de grafiek van g is symmetrisch in de y-as.

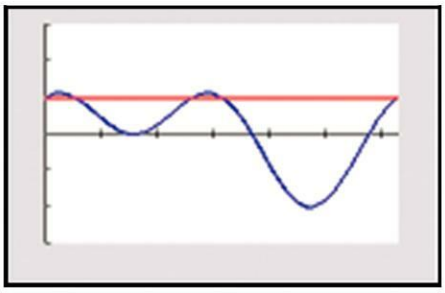
c De grafiek van g is symmetrisch in de y-as. Door de grafiek van g $1\frac{1}{2}\pi$ naar rechts te verschuiven ontstaat de grafiek van f. Hierdoor wordt de lijn $x = 1\frac{1}{2}\pi$ de symmetrie-as van f.

© Noordhoff Uitgevers bv

T4 **a** $\sin(x) + \cos(2x) = 1$
$\sin(x) + 1 - 2\sin^2(x) = 1$
$\sin(x) - 2\sin^2(x) = 0$
$\sin(x)(1 - 2\sin(x)) = 0$
$\sin(x) = 0$ of $\sin(x) = \frac{1}{2}$
De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn

$x = 0$ of $x = \pi$ of $x = 2\pi$ of $x = \frac{1}{6}\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi$
Zie de plot hiernaast: de oplossing van

$f(x) > 1$ is $\langle 0, \frac{1}{6}\pi\rangle \cup \langle \frac{5}{6}\pi, \pi\rangle$.



b Voor de nulpunten geldt $\sin(x) + \cos(2x) = 0$.

$\cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) = -\cos(2x)$

$\cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(2x + \pi)$

$x - \frac{1}{2}\pi = 2x + \pi + k \cdot 2\pi$ of $x - \frac{1}{2}\pi = -2x - \pi + k \cdot 2\pi$

$-x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = -1\frac{1}{2}\pi - k \cdot 2\pi$ of $x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = 1\frac{1}{6}\pi$ en $x = 1\frac{5}{6}\pi$.

c De gevraagde oppervlakte is gelijk aan $-\int_{1\frac{1}{6}\pi}^{1\frac{5}{6}\pi} (\sin(x) + \cos(2x))\,dx$.

$-\int_{1\frac{1}{6}\pi}^{1\frac{5}{6}\pi} (\sin(x) + \cos(2x))\,dx = -\left[-\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_{1\frac{1}{6}\pi}^{1\frac{5}{6}\pi} =$

$-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) =$

$-\left(-\frac{3}{4}\sqrt{3} - \frac{3}{4}\sqrt{3}\right) = \ --1\frac{1}{2}\sqrt{3}$

De oppervlakte is $1\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

d $f'(x) = \cos(x) - 2\sin(2x)$
Voor de toppen geldt $\cos(x) - 2\sin(2x) = 0$
$\cos(x) - 4\sin(x)\cos(x) = 0$
$\cos(x)(1 - 4\sin(x)) = 0$
$\cos(x) = 0$ of $4\sin(x) = 1$

$\cos(x) = 0$ of $\sin(x) = \frac{1}{4}$

$\cos(x) = 0$ geeft de toppen $\left(\frac{1}{2}\pi, 0\right)$ en $\left(1\frac{1}{2}\pi, -2\right)$.

$\sin(x) = \frac{1}{4}$ dan is $\cos(2x) = 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{8}$

De y-coördinaat van de bijbehorende toppen is $\frac{1}{4} + \frac{7}{8} = 1\frac{1}{8}$.

De y-coördinaten van de toppen zijn 0, -2 en $1\frac{1}{8}$.

T5 **a** Voor de extreme waarden geldt $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \frac{\cos(x)(2 + \cos(x)) - \sin(x) \cdot -\sin(x)}{(2 + \cos(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{2\cos(x) + \cos^2(x) + \sin^2(x)}{(2 + \cos(x))^2}$$

© Noordhoff Uitgevers bv

$$f'(x) = \frac{2\cos(x) + 1}{(2 + \cos(x))^2}$$

$f'(x) = 0$ als $2\cos(x) + 1 = 0$ dus als $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ en $(2 + \cos(x))^2 \neq 0$.

De oplossingen op het interval $\left[-\frac{1}{2}\pi, 2\frac{1}{2}\pi\right]$ zijn $x = \frac{2}{3}\pi$ en $x = 1\frac{1}{3}\pi$.

De extreme waarden zijn: een randminimum $f\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = -\frac{1}{2}$, een maximum $f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ een minimum $f\left(1\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$ en een randmaximum $f\left(2\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{2}$.

b $$f'(x) = \frac{2\cos(x) + 1}{(2 + \cos(x))^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2\sin(x)(2 + \cos(x))^2 - (2\cos(x) + 1) \cdot 2(2 + \cos(x)) \cdot -\sin(x)}{(2 + \cos(x))^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2\sin(x)(2 + \cos(x)) - (2\cos(x) + 1) \cdot 2 \cdot -\sin(x)}{(2 + \cos(x))^3}$$

$$f''(x) = \frac{-4\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x) + 4\sin(x)\cos(x) + 2\sin(x)}{(2 + \cos(x))^3}$$

$$f''(x) = \frac{-2\sin(x) + 2\sin(x)\cos(x)}{(2 + \cos(x))^3}$$

$$f''(x) = \frac{-2\sin(x) + \sin(2x)}{(2 + \cos(x))^3}$$

c Voor de buigpunten geldt $f''(x) = 0$.

$$\frac{-2\sin(x) + \sin(2x)}{(2 + \cos(x))^3} = 0$$

$-2\sin(x) + \sin(2x) = 0$ en $(2 + \cos(x))^3 \neq 0$
$-2\sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) = 0$
$2\sin(x)(-1 + \cos(x)) = 0$
$\sin(x) = 0$ of $\cos(x) = 1$
De buigpunten op het interval $\left[-\frac{1}{2}\pi, 2\frac{1}{2}\pi\right]$ zijn $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ en $(2\pi, 0)$ en deze liggen allen op de x-as.

T6 **a** $f_a(x) = a \cdot \cos^2(x) - \sin^2(x)$
$f_a'(x) = 2a \cdot \cos(x) \cdot -\sin(x) - 2 \cdot \sin(x)\cos(x)$
$f_a'(x) = -2a \cdot \cos(x) \cdot \sin(x) - 2 \cdot \sin(x)\cos(x)$
$f_a'(x) = (-2a - 2) \cdot \cos(x) \cdot \sin(x)$
$f_a'(x) = 0$ als $(-2a - 2) \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = 0$
omdat $a \neq -1$ geldt $-2a - 2 \neq 0$ dus
$\sin(x) = 0$ of $\cos(x) = 0$ en de oplossingen hiervan zijn onafhankelijk van a.

b $f_3(x) = 3 \cdot \cos^2(x) - \sin^2(x)$
$f_3(x) = 3 \cdot \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x))$
$f_3(x) = 4\cos^2(x) - 1$
$f_3(x) = 2(\cos(2x) + 1) - 1$
$f_3(x) = 2\cos(2x) + 2 - 1$
$f_3(x) = 2\cos(2x) + 1$

© Noordhoff Uitgevers bv

c $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} (3\cos^2(x) - \sin^2(x))\,dx = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (2\cos(2x) + 1)\,dx =$

$\left[\sin(2x) + x\right]_0^{\frac{1}{4}\pi} =$

$\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) + \frac{1}{4}\pi - 0 = 1 + \frac{1}{4}\pi$

T7 Vul $x(t) = \cos(t)$ en $y(t) = \sin(2t)$ in bij $y^2 = 4x^2 - 4x^4$. Dit geeft
$(\sin(2t))^2 = 4 \cdot (\cos(t))^2 - 4 \cdot (\cos(t))^4$
$(2\sin(t)\cos(t))^2 = 4\cos^2(t)(1 - \cos^2(t))$
$4\sin^2(t)\cos^2(t) = 4\cos^2(t)\sin^2(t)$
Dit geldt voor alle waarden van t, dus alle punten van de baan van punt P liggen op de kromme met vergelijking $y^2 = 4x^2 - 4x^4$.

T8 **a** $x(t) = 3\sin(t) - \sin(3t)$ en $y(t) = 3\cos(t) - \cos(3t)$
$x'(t) = 3\cos(t) - 3\cos(3t)$ en $y'(t) = -3\sin(t) + 3\sin(3t)$
Als $t = 0$ dan is $x'(0) = 3 - 3 = 0$ en $y'(0) = 0 + 0 = 0$.

Hieruit volgt de baansnelheid $v(0) = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$.

Als $t = \frac{1}{2}\pi$ dan is $x'\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0 - 0 = 0$ en $y'\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -3 \cdot 1 + 3 \cdot -1 = -6$.

Hieruit volgt de baansnelheid $v\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \sqrt{0^2 + (-6)^2} = \sqrt{36} = 6$.

b $v(t) = \sqrt{(3\cos(t) - 3\cos(3t))^2 + (-3\sin(t) + 3\sin(3t))^2} =$

$\sqrt{9\cos^2(t) - 18\cos(t)\cos(3t) + 9\cos^2(3t) + 9\sin^2(t) - 18\sin(t)\sin(3t) + 9\sin^2(3t)} =$

$\sqrt{9(\cos^2(t) + \sin^2(t)) + 9(\cos^2(3t) + \sin^2(3t)) - 18(\cos(3t)\cos(t) - \sin(3t)\sin(t))} =$

$\sqrt{9 \cdot 1 + 9 \cdot 1 - 18\cos(3t - t)} = \sqrt{18 - 18\cos(2t)} =$

$\sqrt{18 - 18(1 - 2\sin^2(t))} = \sqrt{36\sin^2(t)} = |6\sin(t)|$

c $v = |6\sin(t)|$ is maximaal als $\sin(t) = 1$ of als $\sin(t) = -1$
De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $t = \frac{1}{2}\pi$ of $t = 1\frac{1}{2}\pi$.
De punten zijn $(4, 0)$ en $(-4, 0)$.

Extra oefening

E1 **a** $\sin(t)\cos(t) = \frac{1}{4}$

$2\sin(t)\cos(t) = \frac{1}{2}$

$\sin(2t) = \frac{1}{2}$

$2t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2t = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $t = \frac{1}{12}\pi$, $t = \frac{5}{12}\pi$, $t = 1\frac{1}{12}\pi$ en $t = 1\frac{5}{12}\pi$.

b $2\cos^2(t) - 2\sin^2(t) = 1$
$2(\cos^2(t) - \sin^2(t)) = 1$
$2\cos(2t) = 1$
$\cos(2t) = \frac{1}{2}$
$2t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2t = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
$t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$ of $t = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi$
De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $t = \frac{1}{6}\pi$, $t = \frac{5}{6}\pi$, $t = 1\frac{1}{6}\pi$ en $t = 1\frac{5}{6}\pi$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c $\sin\left(1\frac{1}{2}\pi + t\right) = \cos(3t)$

$\cos\left(1\frac{1}{2}\pi + t - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(3t)$
$\pi + t = 3t + k \cdot 2\pi$ of $\pi + t = -3t + k \cdot 2\pi$
$-2t = -\pi + k \cdot 2\pi$ of $4t = -\pi + k \cdot 2\pi$
$t = \frac{1}{2}\pi - k \cdot \pi$ of $t = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$
De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $t = \frac{1}{4}\pi$, $t = \frac{1}{2}\pi$, $t = \frac{3}{4}\pi$, $t = 1\frac{1}{4}\pi$, $t = 1\frac{1}{2}\pi$ en $t = 1\frac{3}{4}\pi$.

E2 **a** Symmetrisch in de y-as, dan moet gelden $f(a) = f(-a)$ voor elke waarde van a.

$f(-a) = \dfrac{2\cos(-a)}{3 + 2\cos(-a)} = \dfrac{2\cos(a)}{3 + 2\cos(a)} = f(a)$, dit geldt voor elke waarde van a, dus de grafiek van f symmetrisch is in de y-as.

b Eerst $f(x) = 0$ oplossen.

$$\frac{2\cos(x)}{3 + 2\cos(x)} = 0$$

$2\cos(x) = 0$ en $3 + 2\cos(x) \neq 0$
$\cos(x) = 0$
$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
De oplossingen op het interval $[-1\frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi]$ zijn $x = -1\frac{1}{2}\pi$ of $x = -\frac{1}{2}\pi$ of $x = \frac{1}{2}\pi$ of $x = 1\frac{1}{2}\pi$.
Zie de schets: de oplossing van $f(x) < 0$ is $\langle -1\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi\rangle \cup \langle \frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi\rangle$.

c $f'(x) = \dfrac{-2\sin(x)(3 + 2\cos(x)) - 2\cos(x) \cdot -2\sin(x)}{(3 + 2\cos(x))^2} = \dfrac{-6\sin(x)}{(3 + 2\cos(x))^2}$

$f'(x) = 0$ als $\sin(x) = 0$ en $(3 + 2\cos(x))^2 \neq 0$.

De oplossingen op het interval $[-1\frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi]$ zijn $x = -\pi$, $x = 0$ en $x = \pi$.

De extreme waarden zijn: een randmaximum $f\left(-1\frac{1}{2}\pi\right) = 0$ een minimum $f(-\pi) = -2$ een maximum $f(0) = \frac{2}{5}$ een minimum $f(\pi) = -2$ en een randmaximum $f\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = 0$.

E3 De periode van $x(t) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi t\right)$ is $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 4$.

De periode van $y(t) = \sin\left(\frac{1}{a}\pi t\right)$ is $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{a}\pi} = 2a$.

Als $a = 1$ is de periode van $y(t) = 2$, dus de gemeenschappelijke periode 4.
Als $a = 2$ is de periode van $y(t) = 4$, dus de gemeenschappelijke periode 4.
Als $a = 3$ is de periode van $y(t) = 6$, dus de gemeenschappelijke periode 12.
Als $a = 4$ is de periode van $y(t) = 8$, dus de gemeenschappelijke periode 8.

© Noordhoff Uitgevers bv

E4 **a** Voor de snijpunten met de x-as geldt $y(t) = 0$.
$4\cos(2t) = 0$

$2t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

$t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $t = \frac{1}{4}\pi$, $t = \frac{3}{4}\pi$, $t = 1\frac{1}{4}\pi$ en $t = 1\frac{3}{4}\pi$.

$t = \frac{1}{4}\pi$ geeft $x\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 4\sin\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{6}\pi\right)$ ofwel $x\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 4\sin\left(\frac{5}{12}\pi\right)$.

$t = \frac{3}{4}\pi$ geeft $x\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 4\sin\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{6}\pi\right)$ ofwel $x\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 4\sin\left(\frac{11}{12}\pi\right)$.

$t = 1\frac{1}{4}\pi$ geeft $x\left(1\frac{1}{4}\pi\right) = 4\sin\left(1\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{6}\pi\right)$ ofwel $x\left(1\frac{1}{4}\pi\right) = 4\sin\left(1\frac{5}{12}\pi\right)$.

$t = 1\frac{3}{4}\pi$ geeft $x\left(1\frac{3}{4}\pi\right) = 4\sin\left(1\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{6}\pi\right)$ ofwel $x\left(1\frac{3}{4}\pi\right) = 4\sin\left(1\frac{11}{12}\pi\right)$.
De coördinaten zijn

$\left(4\sin\left(\frac{5}{12}\pi\right), 0\right)$, $\left(4\sin\left(\frac{11}{12}\pi\right), 0\right)$, $\left(4\sin\left(1\frac{5}{12}\pi\right), 0\right)$ en $\left(4\sin\left(1\frac{11}{12}\pi\right), 0\right)$.

b $y = x$ dus $4\cos(2t) = 4\sin\left(t + \frac{1}{6}\pi\right)$

$\cos(2t) = \sin\left(t + \frac{1}{6}\pi\right)$

$\cos(2t) = \cos\left(t + \frac{1}{6}\pi - \frac{1}{2}\pi\right)$

$2t = t - \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2t = -t + \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$t = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$t = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $t = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $t = \frac{1}{9}\pi$, $t = \frac{7}{9}\pi$, $t = 1\frac{4}{9}\pi$ en $t = 1\frac{2}{3}\pi$.

c $x'(t) = 4\cos\left(t + \frac{1}{6}\pi\right)$ en $y'(t) = -8\sin(2t)$

Er is een verticale raaklijn als $\cos\left(t + \frac{1}{6}\pi\right) = 0$ en $-8\sin(2t) \neq 0$.

$t + \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

$t = \frac{1}{3}\pi$ of $t = 1\frac{1}{3}\pi$
De toppen zijn $(4, -2)$ en $(-4, -2)$.

Er is een horizontale raaklijn als $\sin(2t) = 0$ en $4\cos\left(t + \frac{1}{6}\pi\right) \neq 0$.
$2t = 0 + k \cdot \pi$

$t = 0 + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

$t = 0$ of $t = \frac{1}{2}\pi$ of $t = \pi$ of $t = 1\frac{1}{2}\pi$ of $t = 2\pi$.
De toppen zijn $(2, 4)$, $(2\sqrt{3}, -4)$, $(-2, 4)$ en $(-2\sqrt{3}, -4)$.

d Voor een punt op de y-as geldt $4\sin\left(t + \frac{1}{6}\pi\right) = 0$.

$t + \frac{1}{6}\pi = 0 + k \cdot 2\pi$

$t = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $t = \frac{5}{6}\pi$ en $t = 1\frac{5}{6}\pi$.

$t = \frac{5}{6}\pi$ geeft $\frac{y'\left(\frac{5}{6}\pi\right)}{x'\left(\frac{5}{6}\pi\right)} = \frac{-8 \cdot \sin\left(\frac{10}{6}\pi\right)}{4 \cdot \cos(\pi)} = = \frac{-8 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}}{4 \cdot -1} = -\sqrt{3}$ en

$t = 1\frac{5}{6}\pi$ geeft $\frac{y'\left(1\frac{5}{6}\pi\right)}{x'\left(1\frac{5}{6}\pi\right)} = \frac{-8 \cdot \sin\left(\frac{22}{6}\pi\right)}{4 \cdot \cos(2\pi)} = = \frac{-8 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}}{4 \cdot 1} = \sqrt{3}$ en

Omdat $\tan(60°) = \sqrt{3}$ maken beide raaklijnen een hoek van 60° met de x-as en dus ook een hoek van $180° - 120° = 60°$ met elkaar.

© Noordhoff Uitgevers bv

E5 **a** Vul $x(t) = 2\sin(t)$ en $y(t) = \cos(2t)$ in bij $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$.

$\cos(2t) = 1 - \frac{1}{2}(2\sin(t))^2$

$\cos(2t) = 1 - \frac{1}{2} \cdot 4\sin^2(t)$

$\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$

Deze formule is juist voor elke waarde van t.

b $x'(t) = 2\cos(t)$ en $y'(t) = -2\sin(2t)$

$x'\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \sqrt{3}$ en $y'\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\sqrt{3}$

$v(t) = \sqrt{4\cos^2(t) + 4\sin^2(2t)}$

$$a(t) = v'(t) = \frac{-8\cos(t)\sin(t) + 8\sin(2t) \cdot 2\cos(2t)}{2\sqrt{4\cos^2(t) + 4\sin^2(2t)}}$$

$$a(t) = \frac{-4\cos(t)\sin(t) + 8\sin(2t)\cos(2t)}{\sqrt{4\cos^2(t) + 4\sin^2(2t)}}$$

De baansnelheid voor $t = \frac{1}{6}\pi$ is $v\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{3+3} = \sqrt{6}$.

De baanversnelling is $a\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{-4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{4 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{3}{4}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

E6 **a** $y(t) = 4\cos^2(t)\sin(t) - 4\cos(t) + 1$

$y(t) = 4 \cdot \left(\cos^2(t)\sin(t) - \cos(t) + \frac{1}{4}\right)$

$y(t) = 4 \cdot \left(\cos(t) - \frac{1}{2}\right)^2$

De kleinste waarde voor $y(t)$ is de waarde nul, dus de baan van P zal nooit onder de x-as komen, maar alleen raken als $y(t) = 0$.

$4 \cdot \left(\cos(t) - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$

$\cos(t) - \frac{1}{2} = 0$

$\cos(t) = \frac{1}{2}$

De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $t = \frac{1}{3}\pi$ en $t = 1\frac{2}{3}\pi$.

$x\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \sqrt{3}$ en $x\left(1\frac{2}{3}\pi\right) = -\sqrt{3}$

De baan van P raakt de x-as in de punten $(\sqrt{3}, 0)$ en $(-\sqrt{3}, 0)$.

b Voor de snijpunten met de y-as geldt $x(t) = 0$.

$2\sin(t) = 0$

$t = 0 + k \cdot \pi$

De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $t = 0$ of $t = \pi$ of $t = 2\pi$.

$t = 0$ en $t = 2\pi$ geven beide het punt $(0, 1)$ en $t = \pi$ het punt $(0, 9)$.

In het punt $(0, 1)$ is $y'(0) = 0$ en $x'(0) = 2 \neq 0$ dus de baan snijdt de y-as hier loodrecht.

In het punt $(0, 9)$ is $y'(\pi) = 0$ en $x'(\pi) = -2 \neq 0$ dus de baan snijdt de y-as ook hier loodrecht.

© Noordhoff Uitgevers bv

c Invullen in $y = x^2 + 1$ geeft
$4\cos^2(t) - 4\cos(t) + 1 = (2\sin(t))^2 + 1$
$4\cos^2(t) - 4\cos(t) + 1 = 4\sin^2(t) + 1$
$4\cos^2(t) - 4\cos(t) + 1 = 4(1 - \cos^2(t)) + 1$
$8\cos^2(t) - 4\cos(t) - 4 = 0$
$2\cos^2(t) - \cos(t) - 1 = 0$
Stel $\cos(x) = p$, dit geeft
$2p^2 - p - 1 = 0$

$p = \frac{1 + \sqrt{9}}{4} = 1$ of $p = \frac{1 - \sqrt{9}}{4} = -\frac{1}{2}$

$\cos(t) = 1$ of $\cos(t) = -\frac{1}{2}$

De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $t = 0$, $t = 2\pi$, $t = \frac{2}{3}\pi$ en $t = 1\frac{1}{3}\pi$.

De snijpunten zijn $(0, 1)$, $(\sqrt{3}, 4)$ en $(-\sqrt{3}, 4)$.

E7 **a** $f\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) = \left(\sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)\right)^4 + \left(\cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)\right)^4$
$f\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) = (\cos(x))^4 + (-\sin(x))^4$
$f\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) = \cos^4(x) + \sin^4(x) = f(x)$

Dus f is periodiek met periode $\frac{1}{2}\pi$.

b Voor de toppen geldt $f'(x) = 0$.
$f'(x) = 4\sin^3(x) \cdot \cos(x) + 4\cos^3(x) \cdot -\sin(x)$
$4\sin^3(x) \cdot \cos(x) + 4\cos^3(x) \cdot -\sin(x) = 0$
$4\sin(x)\cos(x)(\sin^2(x) - \cos^2(x)) = 0$
$\sin(x) = 0$ of $\cos(x) = 0$ of $\sin(x) = \cos(x)$ of $\sin(x) = -\cos(x)$
De oplossingen op het interval $[0, \pi]$ zijn $x = 0$, $x = \frac{1}{4}\pi$, $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = \frac{3}{4}\pi$ en $x = \pi$
De toppen zijn $(0, 1)$, $\left(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\pi, 1\right)$, $\left(\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{2}\right)$ en $(\pi, 1)$.

c De evenwichtsstand is $y = \frac{3}{4}$, de amplitude is $\frac{1}{4}$ en de periode is $\frac{1}{2}\pi$.

Een functievoorschrift is $g(x) = \frac{1}{4}\cos(4x) + \frac{3}{4}$.

d $f(x) = \sin^4(x) + \cos^4(x)$
$f(x) = (\sin^2(x))^2 + (\cos^2(x))^2$
$f(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)\right)^2$
$f(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x) + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$
$f(x) = \frac{1}{2}\cos^2(2x) + \frac{1}{2}$
$f(x) = \frac{1}{4}\left(2\cos^2(2x) - 1\right) + \frac{3}{4}$
$f(x) = \frac{1}{4}\cos(4x) + \frac{3}{4}$
dus $f(x) = g(x)$.

e $\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{4}\cos(4x) + \frac{3}{4}\right) dx =$
$\left[\frac{1}{16}\sin(4x) + \frac{3}{4}x\right]_0^{\pi}$
$\left(\frac{3}{4}\pi + 0\right) - 0 = \frac{3}{4}\pi$

© Noordhoff Uitgevers bv

E8 **a** De lengten van de rechthoekszijden van elke rechthoekige driehoek zijn $4\cos(t)$ en $4\sin(t)$, dus de oppervlakte van elke driehoek is $\frac{1}{2} \cdot 4\cos(t) \cdot 4\sin(t) = 8\sin(t)\cos(t)$ en dat is gelijk aan $4 \cdot 2\sin(t)\cos(t) = 4\sin(2t)$.
De oppervlakte van zes driehoeken samen is $6 \cdot 4\sin(2t) = 24\sin(2t)$.
De oppervlakte van de twee cirkelsectoren is $\frac{2t}{2\pi}$ deel van de oppervlakte van de cirkel, dus gelijk aan $\frac{2t}{2\pi} \cdot \pi \cdot 4^2 = 16t$.
De oppervlakte van het gebied is gelijk aan $O(t) = 16t + 24\sin(2t)$.

b Voor de maximale oppervlakte geldt $O'(t) = 0$.
$16 + 48\cos(2t) = 0$
$48\cos(2t) = -16$
$\cos(2t) = -\frac{1}{3}$
$1 - 2\sin^2(t) = -\frac{1}{3}$
$2\sin^2(t) = 1\frac{1}{3}$
$\sin^2(t) = \frac{2}{3}$
$\sin(t) = \sqrt{\frac{2}{3}}$ (omdat $0 < t < \frac{1}{2}\pi$)
De hoogte is $2 \cdot 4 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 8\sqrt{\frac{2}{3}} \left(= 2\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheden 10

1 **a** $y = x^2 - 12x - 4$
$y = x^2 - 12x + 36 - 36 - 4$
$y = (x - 6)^2 - 40$

b $y = 2x^2 + 4x + 3$
$y = 2(x^2 + 2x) + 3$
$y = 2(x^2 + 2x + 1 - 1) + 3$
$y = 2(x + 1)^2 - 2 \cdot 1 + 3$
$y = 2(x + 1)^2 + 1$

c $y = 3x^2 - 6x$
$y = 3(x^2 - 2x)$
$y = 3(x^2 - 2x + 1 - 1)$
$y = 3(x - 1)^2 - 3 \cdot 1$
$y = 3(x - 1)^2 - 3$

d $y = 1\frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$
$y = 1\frac{1}{2}(x^2 - 4x) + 3$
$y = 1\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4 - 4) + 3$
$y = 1\frac{1}{2}(x - 2)^2 - 1\frac{1}{2} \cdot 4 + 3$
$y = 1\frac{1}{2}(x - 2)^2 - 3$

2 **a** $f(x) = 3x^2 - 6x - 24$
$f(x) = 3(x^2 - 2x - 8)$
$f(x) = 3(x + 2)(x - 4)$

$f(x) = 3x^2 - 6x - 24$
$f(x) = 3(x^2 - 2x) - 24$
$f(x) = 3(x^2 - 2x + 1 - 1) - 24$
$f(x) = 3(x - 1)^2 - 27$

b Met $f(x) = 3(x - 1)^2 - 27$, de top is $(1, -27)$.

c Met $f(x) = 3(x + 2)(x - 4)$, de snijpunten met de x-as zijn $(-2, 0)$ en $(4, 0)$.

d Met $f(x) = 3x^2 - 6x - 24$ kun je handig het snijpunt met de y-as berekenen, deze is $(0, -24)$.

3 **a** $f(x) = 0$ geeft $x = 6$ of $x = -12$.
De snijpunten met de x-as zijn $(-12, 0)$ en $(6, 0)$.
$x_{top} = \frac{1}{2}(6 + -12) = -3$ en $y_{top} = f(-3) = \ = -6 \cdot -9 \cdot 9 = 486$
De coördinaten van de top zijn $(-3, 486)$.

b De coördinaten van de top zijn $(-1, -18)$.
$g(x) = 0$ geeft $2(x + 1)^2 - 18 = 0$ ofwel $2(x + 1)^2 = 18$.
$(x + 1)^2 = 9$
$x + 1 = -3$ of $x + 1 = 3$
$x = 2$ of $x = -4$
De snijpunten met de x-as zijn $(-4, 0)$ en $(2, 0)$.

c $h(x) = x^2 + 4x - 12$
$h(x) = (x + 6)(x - 2)$
$h(x) = 0$ geeft $x = -6$ of $x = 2$.
De snijpunten met de x-as zijn $(-6, 0)$ en $(2, 0)$.
$x_{top} = \frac{1}{2}(-6 + 2) = -2$ en $y_{top} = h(-2) = (-2 + 6)(-2 - 2) = 4 \cdot -4 = -16$
De coördinaten van de top zijn $(-2, -16)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

4 De coördinaten van de top zijn (2, −3) dus
$f(x) = a(x-2)^2 - 3$.
De grafiek gaat door het punt (5,6), dus $f(5) = 6$.
$f(5) = a(5-2)^2 - 3 = 6$
$9a - 3 = 6$
$9a = 9$, dus $a = 1$
Het functievoorschrift is $f(x) = (x-2)^2 - 3$.
$f(0) = (0-2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$

5 **a** $y = (2^t + 1)^2$
$y = (2^t)^2 + 2 \cdot 2^t + 1$
$y = 2^{2t} + 2^{t+1} + 1$

b $y = (3^{2x} - 4)(3^{-2x} + 2)$
$y = 3^0 + 3^{2x} \cdot 2 - 4 \cdot 3^{-2x} - 8$
$y = 2 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^{-2x} - 7$

c $y = 4^{2p}(4^{\frac{1}{3}p} - 4^{-3p})$
$y = 4^{2\frac{1}{3}p} - 4^{-p}$

d $y = (7^{2p} + p)(7^{3p} - 6)$
$y = 7^{5p} - 6 \cdot 7^{2p} + p \cdot 7^{3p} - 6p$

6 **a** $y = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \cdot 3\sqrt{x}$
$y = x^{-\frac{1}{4}} \cdot 3x^{\frac{1}{2}}$
$y = 3 \cdot x^{\frac{1}{4}}$

b $y = (-2x)^3 \cdot (\sqrt[3]{x^4})^3$
$y = (-2)^3 \cdot x^3 \cdot (x^{\frac{4}{3}})^3$
$y = -8 \cdot x^3 \cdot x^4$
$y = -8 \cdot x^7$

c $y = \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^3}{4\sqrt[3]{x}}$
$y = \frac{\frac{1}{8}x^3}{4x^{\frac{1}{3}}}$
$y = \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{8}x^3$
$y = \frac{1}{32} \cdot x^{2\frac{2}{3}}$

d $y = \frac{4}{\sqrt[5]{x}} \cdot x^3 \cdot \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}$
$y = 4 \cdot x^{-\frac{1}{5}} \cdot x^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{3}}$
$y = 2 \cdot x^{2\frac{7}{15}}$

e $y = \left(\frac{x}{\sqrt[3]{2x}}\right)^3$
$y = \left(\frac{x}{(2x)^{\frac{1}{3}}}\right)^3$
$y = = \frac{x^3}{2x}$
$y = \frac{1}{2}x^2$

f $y = (\sqrt{5x})^4 \cdot (-2x)^{-3}$
$y = \left((5x)^{\frac{1}{2}}\right)^4 \cdot (-2)^{-3} \cdot x^{-3}$
$y = (5x)^2 \cdot -\frac{1}{8} \cdot x^{-3}$
$y = 25 \cdot x^2 \cdot -\frac{1}{8} \cdot x^{-3}$
$y = -3\frac{1}{8} \cdot x^{-1}$

7 **a** $f(x) = 2 \cdot {}^3\log(x) + {}^3\log(3x)$
$f(x) = {}^3\log(x^2) + {}^3\log(3x)$
$f(x) = {}^3\log(x^2 \cdot 3x)$
$f(x) = {}^3\log(3x^3)$

b $f(x) = {}^7\log(x-3) + 2 \cdot {}^7\log(x) - 2$
$f(x) = {}^7\log(x-3) + {}^7\log(x^2) - {}^7\log(49)$
$f(x) = {}^7\log((x-3) \cdot x^2 : 49)$
$f(x) = {}^7\log\left(\frac{1}{49}x^2(x-3)\right)$
$f(x) = {}^7\log\left(\frac{1}{49}x^3 - \frac{3}{49}x^2\right)$

c $f(x) = 5 \cdot \log(x) + 2 \cdot \log(3x) - \frac{1}{2} \cdot \log(x^4)$

$f(x) = \log(x^5) + \log((3x)^2) - \log\left((x^4)^{\frac{1}{2}}\right)$

$f(x) = \log(x^5) + \log(9x^2) - \log(x^2)$

$f(x) = \log\left(\frac{x^5 \cdot 9x^2}{x^2}\right)$

$f(x) = \log(9x^5)$

d $f(x) = 3 \cdot \log(2x) + 2 \cdot \log(4 + x) - 1$

$f(x) = \log((2x)^3) + \log((4 + x)^2) - \log(10)$

$f(x) = \log\left(\frac{1}{10} \cdot 8x^3 \cdot (4 + x)^2\right)$

$f(x) = \log\left(\frac{4}{5}x^3 \cdot (4 + x)^2\right)$

8 $f(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x}$

$f(x) = \frac{2x}{x(x-1)} + \frac{3(x-1)}{x(x-1)}$

$f(x) = \frac{2x}{x(x-1)} + \frac{3x-3}{x(x-1)}$

$f(x) = \frac{5x-3}{x(x-1)}$

9 a $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+3}$

$f(x) = \frac{1 \cdot (x+3)}{x(x+3)} - \frac{2x}{x(x+3)}$

$f(x) = \frac{-x+3}{x(x+3)}$

b $g(x) = \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{x+3}$

$g(x) = \frac{2(x+3)}{3x^2(x+3)} - \frac{3x^2}{3x^2(x+3)}$

$g(x) = \frac{2x+6-3x^2}{3x^2(x+3)}$

c $h(x) = \frac{\sin(x)}{x} - \frac{2x}{\cos(x)}$

$h(x) = \frac{\sin(x)\cos(x)}{x\cos(x)} - \frac{2x^2}{x\cos(x)}$

$h(x) = \frac{\sin(x)\cos(x) - 2x^2}{x\cos(x)}$

d $k(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x} - \frac{3}{x\sqrt{x}}$

$k(x) = \frac{x}{x\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} - \frac{3}{x\sqrt{x}}$

$k(x) = \frac{x + 2\sqrt{x} - 3}{x\sqrt{x}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

10 **a** $y = \sqrt{\frac{1}{9}x} + \sqrt{121x} = \frac{1}{3}\sqrt{x} + 11\sqrt{x} = 11\frac{1}{3}\sqrt{x}$

b $y = \sqrt{27x} - \sqrt{75x} = 3\sqrt{3x} - 5\sqrt{3x} = -2\sqrt{3x}$

c $y = 2\sqrt{18x} + \frac{1}{2}\sqrt{288x} = 6\sqrt{2x} + \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{2x} = 12\sqrt{2x}$

11 **a** $2pq = p + q$

$2pq - p = q$

$p(2q - 1) = q$

$p = \dfrac{q}{2q - 1}$

b $\sqrt{p} + q = 4$

$\sqrt{p} = 4 - q$

$p = (4 - q)^2$

c $4p^3 = q - 6$

$p^3 = \frac{1}{4}q - 1\frac{1}{2}$

$p = \sqrt[3]{\frac{1}{4}q - 1\frac{1}{2}}$

d $e^p = \sqrt{q}$

$p = \ln(\sqrt{q})$

$p = \frac{1}{2}\ln(q)$

12 **a** Bij spiegelen in de lijn $y = x$ verwissel je y en x.
De formule $y = x^2 - 2x$ wordt dan $x = y^2 - 2y$.
Nu kwadraat afsplitsen, dit geeft $x = y^2 - 2y + 1 - 1 = (y - 1)^2 - 1$.

b Uit $x = (y - 1)^2 - 1$ volgt $(y - 1)^2 = x + 1$ en hieruit volgt

$y - 1 = -\sqrt{x + 1}$ of $y - 1 = \sqrt{x + 1}$

$y = 1 - \sqrt{x + 1}$ of $y = 1 + \sqrt{x + 1}$.
Dit is niet de grafiek van een functie, want bij sommige x-waarden zijn er twee y-waarden.

13 **a** Dit is het geval bij C: $x - 3 = y^2 - 4y + 4$ want
$x - 3 = (y - 2)^2$

$y - 2 = -\sqrt{x - 3}$ of $y - 2 = \sqrt{x - 3}$.
Bij sommige waarden van x zijn er twee waarden van y.

b A $\sqrt{xy} = x$ geeft $xy = x^2$ dus $y = x$ (mits $x \geq 0$)

B $x + 1 = \dfrac{2}{y(x - 1)}$ geeft $y = \dfrac{2}{(x + 1)(x - 1)} = \dfrac{2}{x^2 - 1}$

D $x = {}^3\log\left(\dfrac{y - 2}{7}\right)$ geeft $\dfrac{y - 2}{7} = 3^x$ dus $y = 2 + 7 \cdot 3^x$

14 **a** $p = \dfrac{t + 4}{t + 3} = \dfrac{t + 3 + 1}{t + 3} = 1 + \dfrac{1}{t + 3}$ dus $p - 1 = \dfrac{1}{t + 3}$

b $t = 2 - \frac{1}{2}s$ invullen in $p - 1 = \dfrac{1}{t + 3}$ geeft $p - 1 = \dfrac{1}{2 - \frac{1}{2}s + 3}$

$p - 1 = \dfrac{1}{5 - \frac{1}{2}s}$

$5 - \frac{1}{2}s = \dfrac{1}{p - 1}$

$\frac{1}{2}s = 5 - \dfrac{1}{p - 1}$ dus $s = 10 - \dfrac{2}{p - 1}$

© Noordhoff Uitgevers bv

c $t = 2 - \frac{1}{2}s$ geeft $\frac{1}{2}s = 2 - t$ ofwel $s = 4 - 2t$.

$s = 3$ invullen in $s = 4 - 2t$ geeft $3 = 4 - 2t$ dus $t = \frac{1}{2}$.

Dit laatste invullen in $p = \dfrac{t+4}{t+3}$ geeft $p = \dfrac{\frac{1}{2}+4}{\frac{1}{2}+3} = \dfrac{4\frac{1}{2}}{3\frac{1}{2}} = \dfrac{9}{7} = 1\frac{2}{7}$

15 **a** $12 - 2(3q - 4) = 4$
$12 - 6q + 8 = 4$
$-6q = -16$
$q = 2\frac{2}{3}$

b $4 - 3(k - 2) = 3 - 5k$
$4 - 3k + 6 = 3 - 5k$
$2k = -7$
$k = -3\frac{1}{2}$

c $3p + 5(6 - 1{,}2p) = 0$
$3p + 30 - 6p = 0$
$-3p = -30$
$p = 10$

d $2{,}3y - 5(5{,}3 - 2y) = 1{,}7y$
$2{,}3y - 26{,}5 + 10y = 1{,}7y$
$10{,}6y = 26{,}5$
$y = 2{,}5$

16 **a** $\begin{cases} 3a + 2b = 14 \\ -2a + b = 5 \end{cases}$
Uit de onderste vergelijking volgt $b = 2a + 5$.
Dit substitueren in de bovenste vergelijking geeft
$3a + 2(2a + 5) = 14$
$3a + 4a + 10 = 14$
$7a = 4$
De oplossing is: $a = \frac{4}{7}$ en $b = 2 \cdot \frac{4}{7} + 5 = 6\frac{1}{7}$

b $\begin{cases} 0{,}1p - 1{,}3q = 2{,}4 \\ 0{,}4p + 2q = 2{,}4 \end{cases}$ vermenigvuldigen met 10 geeft

$\begin{cases} p - 13q = 24 \\ 4p + 20q = 24 \end{cases}$

Uit de bovenste vergelijking volgt $p = 13q + 24$.
Dit substitueren in de onderste vergelijking geeft
$4(13q + 24) + 20q = 24$
$52q + 96 + 20q = 24$
$72q = -72$
De oplossing is: $q = -1$ en $p = 13 \cdot -1 + 24 = 11$.

c $\begin{cases} x^2 + y = 5 \\ 5x + 3y - 7 = 0 \end{cases}$
Uit de bovenste vergelijking volgt $y = 5 - x^2$.
Dit substitueren in de onderste vergelijking geeft
$5x + 3(5 - x^2) - 7 = 0$
$5x + 15 - 3x^2 - 7 = 0$
$-3x^2 + 5x + 8 = 0$
$D = 25 - 4 \cdot -3 \cdot 8 = 121$
$x = \dfrac{-5 - 11}{-6} = 2\frac{2}{3}$ of $x = \dfrac{-5 + 11}{-6} = -1$
De oplossingen zijn: $x = 2\frac{2}{3}$ en $y = -2\frac{1}{9}$ of $x = -1$ en $y = 4$.

© Noordhoff Uitgevers bv

d $\begin{cases} x^2 + 5y + 4 = 0 \\ 3x^2 + 2y^2 = 80 \end{cases}$

Uit de bovenste vergelijking volgt $x^2 = -5y - 4$.

Dit substitueren in de onderste vergelijking geeft

$3(-5y - 4) + 2y^2 = 80$

$2y^2 - 15y - 92 = 0$

$D = 15^2 - 4 \cdot 2 \cdot -92 = 961$

$y = \frac{15 - 31}{4} = -4$ of $y = \frac{15 + 31}{4} = 11\frac{1}{2}$ (voldoet niet)

$y = -4$ geeft $x^2 = 16$, dus $x = 4$ of $x = -4$.

De oplossingen zijn: $x = -4$ en $y = -4$ of $x = 4$ en $y = -4$.

17 **a** $4 \cdot 3^{2x} = 24$

$3^{2x} = 6$

$2x = {}^3\log(6)$

$x = \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(6)$

b $12 \cdot 2^{3-5x} + 8 = 32$

$12 \cdot 2^{3-5x} = 24$

$2^{3-5x} = 2$

$3 - 5x = 1$

$x = \frac{2}{5}$

c $5 \cdot 4^{-x+1} - 35 = 0$

$5 \cdot 4^{-x+1} = 35$

$4^{-x+1} = 7$

$-x + 1 = {}^4\log(7)$

$x = 1 - {}^4\log(7)$

d $3x^{-5} = 96$

$x^{-5} = 32$

$x^{-5} = 2^5$

$x = \frac{1}{2}$

e $10 - \left(\frac{1}{2}x\right)^5 = -34$

$\left(\frac{1}{2}x\right)^5 = 44$

$\frac{1}{2}x = \sqrt[5]{44}$

$x = 2\sqrt[5]{44}$

f $\frac{1}{2}x^8 + 12 = 15$

$\frac{1}{2}x^8 = 3$

$x^8 = 6$

$x = -\sqrt[8]{6}$ en $x = \sqrt[8]{6}$

18 **a** ${}^3\log(x) + {}^3\log(7) = 2$

${}^3\log(7x) = 2$

$7x = 9$

$x = 1\frac{2}{7}$

b ${}^{\frac{1}{2}}\log(x + 4) - {}^{\frac{1}{2}}\log(2x) = -1$

${}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{x + 4}{2x}\right) = -1$

$\frac{x + 4}{2x} = 2$

$x + 4 = 4x$

$4 = 3x$

$x = 1\frac{1}{3}$

c $6 - {}^3\log(x + 5) = 4$

${}^3\log(x + 5) = 2$

$x + 5 = 9$

$x = 4$

d ${}^4\log(2x + 1) + 2 \cdot {}^4\log(3) = 1\frac{1}{2} + {}^4\log(9x)$

${}^4\log(2x + 1) + {}^4\log(9) = {}^4\log(8) + {}^4\log(9x)$

$9(2x + 1) = 8 \cdot 9x$

$2x + 1 = 8x$

$1 = 6x$

$x = \frac{1}{6}$

© Noordhoff Uitgevers bv

19 **a** $x^2(2^x - 1) = 36(2^x - 1)$
$x^2 = 36$ of $2^x - 1 = 0$
$x^2 = 36$ of $2^x = 1$
$x = -6$ of $x = 6$ of $x = 0$

b $({}^3\log(4x - 1) + 2)^2 = 16$
${}^3\log(4x - 1) + 2 = 4$ of ${}^3\log(4x - 1) + 2 = -4$
${}^3\log(4x - 1) = 2$ of ${}^3\log(4x - 1) = -6$
$4x - 1 = 9$ of $4x - 1 = 3^{-6}$
$4x = 10$ of $4x = 1 + 3^{-6}$
$x = 2\frac{1}{2}$ of $x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 729} = \frac{730}{2916} = \frac{365}{1458}$

c $(x^3 + 2)^2 = (3 - 2x^3)^2$
$x^3 + 2 = 3 - 2x^3$ of $x^3 + 2 = -3 + 2x^3$
$3x^3 = 1$ of $-x^3 = -5$
$x^3 = \frac{1}{3}$ of $x^3 = 5$
$x = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ of $x = \sqrt[3]{5}$

d $(\ln(x) + 5)^2(x - 1) = 16(x - 1)$
$x - 1 = 0$ of $(\ln(x) + 5)^2 = 16$
$x = 1$ of $\ln(x) + 5 = -4$ of $\ln(x) + 5 = 4$
$x = 1$ of $\ln(x) = -9$ of $\ln(x) = -1$
$x = 1$ of $x = \dfrac{1}{e^9}$ of $x = \dfrac{1}{e}$

20 **a** $5 + \sqrt{3x - 10} = 8$
$\sqrt{3x - 10} = 3$
$3x - 10 = 9$
$3x = 19$
$x = 6\frac{1}{3}$

b $4x + \sqrt{x} = 2x + 6$
$\sqrt{x} = -2x + 6$
$x = 4x^2 - 24x + 36$
$4x^2 - 25x + 36 = 0$
$D = 625 - 4 \cdot 4 \cdot 36 = 49$
$x = \dfrac{25 - 7}{8} = 2\frac{1}{4}$ of $x = \dfrac{25 + 7}{8} = 4$ (voldoet niet)
Oplossing: $x = 2\frac{1}{4}$

c $\sqrt{8 - 4x} = 4x + 4$
$8 - 4x = (4x + 4)^2$
$8 - 4x = 16x^2 + 32x + 16$
$16x^2 + 36x + 8 = 0$
$4x^2 + 9x + 2 = 0$
$D = 81 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 49$
$x = \dfrac{-9 - 7}{8} = -2$ (voldoet niet) of $x = \dfrac{-9 + 7}{8} = -\frac{1}{4}$
Oplossing: $x = -\frac{1}{4}$

© Noordhoff Uitgevers bv

d $4x - 3\sqrt{6+x} = 2x - 7$

$3\sqrt{6+x} = 2x + 7$

$9(6+x) = (2x+7)^2$

$54 + 9x = 4x^2 + 28x + 49$

$4x^2 + 19x - 5 = 0$

$D = 19^2 - 4 \cdot 4 \cdot -5 = 441$

$x = \frac{-19-21}{8} = -5$ (voldoet niet) of $x = \frac{-19+21}{8} = \frac{1}{4}$

Oplossing: $x = \frac{1}{4}$

21 **a** $\frac{-27}{x-4} = 9x$

$-27 = 9x(x-4)$

$9x^2 - 36x + 27 = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x-3)(x-1) = 0$

$x = 3$ of $x = 1$

b $\frac{5}{2-3^x} = \frac{6}{3^x}$

$5 \cdot 3^x = 12 - 6 \cdot 3^x$

$11 \cdot 3^x = 12$

$3^x = \frac{12}{11}$

$x = {}^3\log(\frac{12}{11})$

c $1 + \frac{3}{x^4+1} = x^4$

$\frac{3}{x^4+1} = x^4 - 1$

$(x^4+1)(x^4-1) = 3$

$x^8 - 1 = 3$

$x^8 = 4$

$x^4 = 2$

$x = -\sqrt[4]{2}$ of $x = \sqrt[4]{2}$

d $\frac{x}{x+5} = \frac{4}{x} - 3$

$\frac{x}{x+5} = \frac{4-3x}{x}$

$x^2 = (x+5)(4-3x)$

$x^2 = 4x - 3x^2 + 20 - 15x$

$4x^2 + 11x - 20 = 0$

$D = 121 - 4 \cdot 4 \cdot -20 = 441$

$x = \frac{-11-21}{8}$ of $x = \frac{-11+21}{8}$

$x = -4$ of $x = 1\frac{1}{4}$

22 **a** $4^x - 2^x - 12 = 0$

$(2^x)^2 - 2^x - 12 = 0$ substitutie van $2^x = t$ geeft

$t^2 - t - 12 = 0$

b $t^2 - t - 12 = 0$

$(t-4)(t+3) = 0$

$t = 4$ of $t = -3$

c $t = 4$ of $t = -3$ substitutie van $t = 2^x$ geeft

$2^x = 4$ of $2^x = -3$

$x = 2$ ($2^x = -3$ heeft geen oplossing)

d $9^x - 3^{x+1} = 18$

$(3^x)^2 - 3^{x+1} = 18$

$(3^x)^2 - 3^1 \cdot 3^x - 18 = 0$ substitutie van $3^x = t$ geeft

$t^2 - 3t - 18 = 0$

$(t-6)(t+3) = 0$

$t = 6$ of $t = -3$ substitutie van $t = 3^x$ geeft

$3^x = 6$ of $3^x = -3$ (geen oplossing)

$x = {}^3\log(6)$

© Noordhoff Uitgevers bv

23 **a** $\frac{2}{{}^3\log(x)} + 1 = {}^3\log(x)$ substitutie van ${}^3\log(x) = t$ geeft

$\frac{2}{t} + 1 = t$

$\frac{2+t}{t} = t$

$2 + t = t^2$

$t^2 - t - 2 = 0$

$(t-2)(t+1) = 0$

$t = 2$ of $t = -1$ substitutie van $t = {}^3\log(x)$ geeft

${}^3\log(x) = 2$ of ${}^3\log(x) = -1$

$x = 3^2 = 9$ of $x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

b $\left(\frac{2a-1}{a+1}\right)^2 = \frac{2a-1}{a+1} + 2$ substitutie van $\frac{2a-1}{a+1} = t$ geeft

$t^2 = t + 2$

$t^2 - t - 2 = 0$

$(t-2)(t+1) = 0$

$t = 2$ of $t = -1$ substitutie van $t = \frac{2a-1}{a+1}$ geeft

$\frac{2a-1}{a+1} = 2$ of $\frac{2a-1}{a+1} = -1$

$2a - 1 = 2a + 2$ (geen oplossing) of $2a - 1 = -a - 1$ dus $a = 0$

c $4(4^x + 1)^2 + 25 = 25(4^x + 1)$ substitutie van $4^x + 1 = t$ geeft

$4t^2 + 25 = 25t$

$4t^2 - 25t + 25 = 0$

$D = 625 - 4 \cdot 4 \cdot 25 = 225$

$x = \frac{25-15}{8} = 1\frac{1}{4}$ of $x = \frac{25+15}{8} = 5$ substitutie van $t = 4^x + 1$ geeft

$4^x + 1 = 1\frac{1}{4}$ of $4^x + 1 = 5$

$4^x = \frac{1}{4}$ of $4^x = 4$

$x = -1$ of $x = 1$

d $2 \cdot \frac{e^x - 1}{e^x - e} = \left(\frac{e^x - 1}{e^x - e}\right)^2$ substitutie van $\frac{e^x - 1}{e^x - e} = t$ geeft

$2t = t^2$

$t^2 - 2t = 0$

$t(t-2) = 0$

$t = 0$ of $t = 2$ substitutie van $t = \frac{e^x - 1}{e^x - e}$ geeft

$\frac{e^x - 1}{e^x - e} = 0$ of $\frac{e^x - 1}{e^x - e} = 2$

$e^x - 1 = 0$ of $e^x - 1 = 2e^x - 2e$

$e^x = 1$ of $e^x = 2e - 1$

$x = 0$ of $x = \ln(2e - 1)$

24 **a** $4^{2x} + 4^{x+2} + 4 = 516$

$(4^x)^2 + 4^x \cdot 4^2 + 4 = 516$ substitutie van $4^x = t$ geeft

$t^2 + 16t - 512 = 0$

$(t-16)(t+32) = 0$

$t = 16$ of $t = -32$ substitutie van $t = 4^x$ geeft

$4^x = 16$ of $4^x = -32$

$x = 2$ ($4^x = -32$ heeft geen oplossing)

© Noordhoff Uitgevers bv

b $\lim_{x \to -\infty} (4^{2x} + 4^{x+2} + 4) = 0 + 0 + 4$

$\lim_{x \to \infty} (4^{2x} + 4^{x+2} + 4) = \infty$

Het bereik van f is $\langle 4, \to \rangle$.

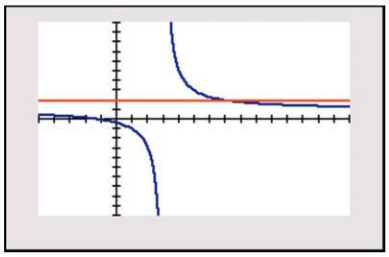
25 **a** voorwaarde: $x \neq 3$

$\frac{x+1}{x-3} = 2$

$x + 1 = 2x - 6$

$x = 7$

Zie de plot hiernaast: de oplossing van $\frac{x+1}{x-3} < 2$ is $x < 3$ of $x > 7$.



b voorwaarde: $x^2 - 1 > 0$

dus $x < -1$ of $x > 1$

${}^4\log(x^2 - 1) = 1\frac{1}{2}$

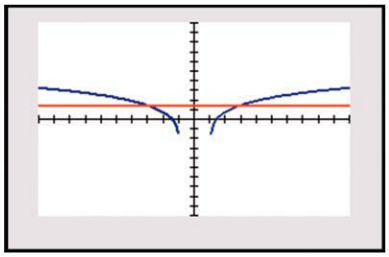
$x^2 - 1 = 4^{1\frac{1}{2}}$

$x^2 - 1 = 8$

$x^2 = 9$

$x = -3$ of $x = 3$

Zie de plot hiernaast: de oplossing van ${}^4\log(x^2 - 1) < 1\frac{1}{2}$ is $-3 < x < -1$ of $1 < x < 3$.



c voorwaarde: $2x + 4 > 0$

dus $x > -2$

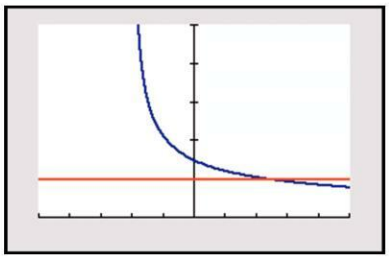
$\frac{3}{\sqrt{2x+4}} = 1$

$\sqrt{2x+4} = 3$

$2x + 4 = 9$

$x = 2\frac{1}{2}$

Zie de plot hiernaast: de oplossing van $\frac{3}{\sqrt{2x+4}} > 1$ is $-2 < x < 2\frac{1}{2}$.



d voorwaarde: $x > 0$ èn $x + 2 > 0$

dus $x > 0$

${}^2\log(x) + {}^2\log(x + 2) = 3$

${}^2\log(x^2 + 2x) = 3$

$x^2 + 2x = 2^3$

$x^2 + 2x = 8$

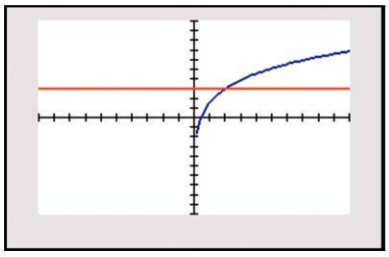
$x^2 + 2x - 8 = 0$

$(x + 4)(x - 2) = 0$

$x = -4$ of $x = 2$

alleen $x = 2$ voldoet

Zie de plot hiernaast: de oplossing van ${}^2\log(x) + {}^2\log(x + 2) \leq 3$ is $0 < x \leq 2$.



© Noordhoff Uitgevers bv

26 **a** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x+3}{1-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7+\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}-1}=\dfrac{7+0}{0-1}=-7$

b $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^3+4x^2-1}{2x^3+x^4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^4}}{\frac{2}{x}+1}=\dfrac{0+0-0}{0+1}=0$

c $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x(3x^2-4x+1)}{8x^3+x\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-8x+2}{8x^2+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6-\frac{8}{x}+\frac{2}{x^2}}{8+\frac{\sqrt{x}}{x^2}}=\dfrac{6-0+0}{8+0}=\frac{3}{4}$

d $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x^2+6)(x^2-3)}{x^2(8-5x^2)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(1+\frac{6}{x^2}\right)\left(1-\frac{3}{x^2}\right)}{1\cdot\left(\frac{8}{x^2}-5\right)}=\dfrac{(1+0)(1-0)}{1\cdot(0-5)}=-\frac{1}{5}$

e $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{\sqrt{x}+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{3}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}=\dfrac{0}{1+0}=0$

f $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2(8-2x)^2}{9x-2x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{448x^2-224x^3+28x^4}{9x-2x^4}=$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{448}{x^2}-\frac{224}{x}+28}{\frac{9}{x^3}-2}=\dfrac{0-0+28}{0-2}=-14$

27 **a** Voor de nulpunten geldt $3x^2-81=0$.
$3x^2=81$
$x^2=27$
$x=\sqrt{27}$ of $x=-\sqrt{27}$
$x=3\sqrt{3}$ of $x=-3\sqrt{3}$

b Voor de verticale asymptoten geldt $x^2-16=0$ en $3x^2-81\neq 0$.
$x^2=16$
$x=4$ of $x=-4$
De verticale asymptoten hebben vergelijking $x=4$ en $x=-4$.

c $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-81}{x^2-16}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-\frac{81}{x^2}}{1-\frac{16}{x^2}}=3$ en ook $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=3$.

Een vergelijking van de horizontale asymptoot is $y=3$.

28 **a** Voor het nulpunt van g geldt $2e^x-e^{-x}=0$ en $e^x-1\neq 0$.
Vermenigvuldiging met e^x geeft $2e^{2x}-1=0$.
$2e^{2x}=1$
$e^{2x}=\frac{1}{2}$
$2x=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$
Het nulpunt van g is $x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

b Voor de verticale asymptoot geldt $e^x-1=0$ en $2e^x-e^{-x}\neq 0$.
$e^x=1$
$x=0$
Een vergelijking van de verticale asymptoot is $x=0$.

c $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2e^x-e^{-x}}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-e^{-2x}}{1-e^{-x}}=\dfrac{2-0}{1-0}=2$

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2e^x-e^{-x}}{e^x-1}=\dfrac{0-\infty}{0-1}=\infty$

d Een vergelijking van de horizontale asymptoot is $y=2$ (naar rechts).

© Noordhoff Uitgevers bv

21 Afsluiting analyse

Voorkennis

V1 **a** $3x - 1 \neq 0$ dus $x \neq \frac{1}{3}$. Het domein is $\langle \leftarrow, \frac{1}{3}\rangle \cup \langle \frac{1}{3}, \rightarrow\rangle$.

Voor het nulpunt geldt $2x + 7 = 0$, dus $x = -3\frac{1}{2}$.

b $2x \neq 0$ dus $x \neq 0$. Het domein is $\langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$.
Voor het nulpunt geldt $3x - 4 = 0$, dus $x = 1\frac{1}{3}$.

c $2x - x^2 \neq 0$ geeft $x(2 - x) \neq 0$, dus $x \neq 0$ of $x \neq 2$.
Het domein is $\langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, 2\rangle \cup \langle 2, \rightarrow\rangle$.
Voor de nulpunten geldt $1 - x^2 = 0$, dus $x = -1$ of $x = 1$.

d De noemer is altijd positief, dus het domein is $\mathbb{R}$.
Het nulpunt is $x = 0$.

e $7 - x^2 \neq 0$ geeft $x^2 \neq 7$. Het domein is $\langle \leftarrow, -\sqrt{7}\rangle \cup \langle -\sqrt{7}, \sqrt{7}\rangle \cup \langle \sqrt{7}, \rightarrow\rangle$.
Het nulpunt is $x = 2$.

f $3 - \sqrt{x} \neq 0$ geeft $x \neq 9$. Het domein is $[0, 9\rangle \cup \langle 9, \rightarrow\rangle$.
Er is geen nulpunt, want $1 + \sqrt{x}$ is altijd positief.

V2 **a** $$\lim_{x\to\infty} \frac{12 - 3x}{x^2 - 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{12}{x^2} - \frac{3}{x}}{1 - \frac{5}{x^2}} = \frac{0 - 0}{1 - 0} = 0$$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 0$.
De noemer is nul als $x^2 - 5 = 0$, dus als $x = -\sqrt{5}$ of $x = \sqrt{5}$.
De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = -\sqrt{5}$ en $x = \sqrt{5}$.

b $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 + 6x - 8} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}}{2 + \frac{6}{x} - \frac{8}{x^2}} = \frac{1 - 0 - 0}{2 + 0 - 0} = \frac{1}{2}$$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = \frac{1}{2}$.
De noemer is nul als $2x^2 + 6x - 8 = 0$.
$x^2 + 3x - 4 = 0$ geeft $(x + 4)(x - 1) = 0$.
De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = -4$ en $x = 1$.

c $$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x - 1)^2}{2x^2 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x^2}} = \frac{4 - 0 + 0}{2 - 0} = 2$$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 2$.
De noemer is nul als $2x^2 - 1 = 0$, dus als $x^2 = \frac{1}{2}$.
De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ en $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

d $$\lim_{x\to\infty} \frac{x(3x - 2)}{(x - 1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3 - \frac{2}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{3 - 0}{1 - 0 + 0} = 3$$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 3$.
De noemer is nul als $(x - 1)^2 = 0$, dus de verticale asymptoot is de lijn $x = 1$.

© Noordhoff Uitgevers bv

V3 **a** De noemer is nul als $x^2 - 4 = 0$, dus als $x = -2$ of $x = 2$.
De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = 2$ en $x = -2$.

b $f(x) = -3 + \dfrac{2 - x^2}{x^2 - 4}$

$f(x) = \dfrac{-3(x^2 - 4)}{x^2 - 4} + \dfrac{2 - x^2}{x^2 - 4}$

$f(x) = \dfrac{-3x^2 + 12}{x^2 - 4} + \dfrac{2 - x^2}{x^2 - 4}$

$f(x) = \dfrac{-4x^2 + 14}{x^2 - 4}$

c $f(x) = 0$ als $-4x^2 + 14 = 0$.
Dit geeft de nulpunten $x = -\sqrt{3\frac{1}{2}}$ en $x = \sqrt{3\frac{1}{2}}$.

d $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-4x^2 + 14}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-4 + \frac{14}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \dfrac{-4 + 0}{1 - 0} = -4$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = -4$.

V4 **a** $\lim\limits_{x \to -\infty} 2e^{3x-1} = 0$, dus de lijn $y = 0$ is een horizontale asymptoot (naar links).

b $10 - 4x = 0$ heeft als oplossing $x = 2\frac{1}{2}$, dus de lijn $x = 2\frac{1}{2}$ is een verticale asymptoot.

c $2^{-x} - 1 = 0$ geeft $2^{-x} = 1$ ofwel $x = 0$, dus de lijn $x = 0$ is een verticale asymptoot.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{2^{-x} - 1} = \dfrac{1}{0 - 1} = -1$, dus de lijn $y = -1$ is een horizontale asymptoot (naar rechts).

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{2^{-x} - 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2^x}{1 - 2^x} = \dfrac{0}{1 - 0} = 0$, dus de lijn $y = 0$ is een horizontale asymptoot (naar links).

d De grafiek van $q(x) = \tan\left(2x - \frac{1}{4}\pi\right)$ heeft verticale asymptoten als $2x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$, dus als $x = \frac{3}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$.
Op het interval $\langle -\pi, \pi \rangle$ zijn de verticale asymptoten de lijnen $x = -\frac{5}{8}\pi$, $x = -\frac{1}{8}\pi$, $x = \frac{3}{8}\pi$ en $x = \frac{7}{8}\pi$.

V5 **a** $15 - 2x - x^2 > 0$
$x^2 + 2x - 15 < 0$ (de vraag is waar deze dalparabool onder de x-as ligt)
$x^2 + 2x - 15 = 0$
$(x + 5)(x - 3) = 0$
$x = -5$ of $x = 3$
Het domein van deze functie is het interval $\langle -5, 3 \rangle$.

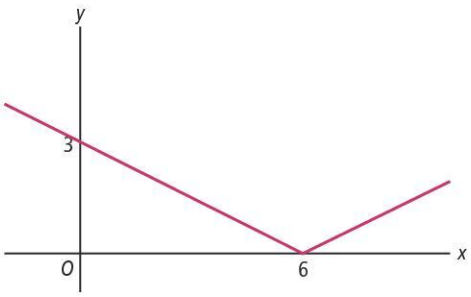
b De grafiek heeft een verticale asymptoot als $15 - 2x - x^2 = 0$.
Dat is het geval voor $x = -5$ en $x = 3$.

c $f'(x) = \dfrac{-2 - 2x}{(15 - 2x - x^2) \cdot \ln(2)}$
$f'(x) = 0$ geeft $-2 - 2x = 0$ ofwel $x = -1$.
Het maximum $f(-1) = {}^2\log(16) = 4$.

d Het bereik van f is $\langle \leftarrow, 4]$.

© Noordhoff Uitgevers bv

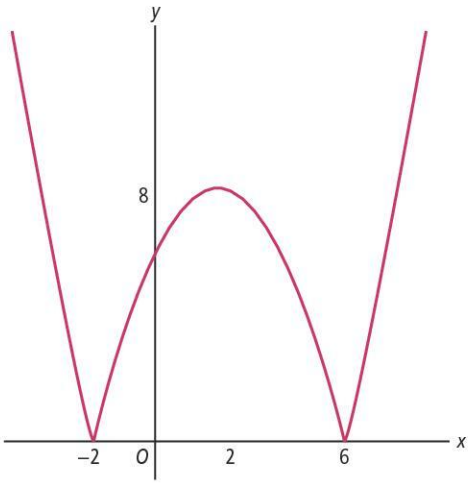
V6 **a**



b Voor $\frac{1}{2}x - 3 \geq 0$, dus voor $x \geq 6$.

c Voor $x < 6$ is het functievoorschrift $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$.

V7 **a**



b $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 \geq 0$
$x^2 - 4x - 12 \geq 0$
$(x - 6)(x + 2) \geq 0$ geeft $x \leq -2$ of $x \geq 6$.

c Maximum bij $x = \dfrac{-2 + 6}{2} = 2$ en deze is $g(2) = \left|\frac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 6\right| = 8$.

d Minimum $g(-2) = g(6) = 0$.

21.1 Limieten en perforaties

intro $x^2 - 4x - 5 = 0$ geeft $(x + 1)(x - 5) = 0$, dus $x = -1$ of $x = 5$.
Voor die waarden van x is er geen functiewaarde.
Voor $-1 < x < 5$ is $x^2 - 4x - 5 < 0$, dus $f(x) = -1$.
Voor $x < -1$ of $x > 5$ is $x^2 - 4x - 5 > 0$, dus $f(x) = 1$.

1 **a** Dan wordt $f(x)$ steeds kleiner of ook $f(x) \to -\infty$.
Dan wordt $f(x)$ steeds groter of ook $f(x) \to \infty$.

b De grafiek heeft een verticale asymptoot $x = -3$.

c $g(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3} = \dfrac{(x + 3)(x - 3)}{x + 3}$
Voor $x \neq -3$ is $g(x) = x - 3$.

d $g(x)$ nadert in beide gevallen tot $-3 - 3 = -6$.

e De grafiek van g is een rechte lijn met een gaatje in het punt $(-3, -6)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

2 **a** Als $x > -3$ is $h(x) = \dfrac{x+3}{x+3} = 1$ en als $x < -3$ is $h(x) = \dfrac{-(x+3)}{x+3} = -1$.

b Als x van de rechterkant naar -3 nadert, nadert $h(x)$ tot 1 en als x van de linkerkant naar -3 nadert, nadert $h(x)$ tot -1.

c De grafiek van h vertoont een sprong bij $x = -3$.

3 **a** $x^2 - 25 > 0$ als $x < -5$ of $x > 5$, dus dan is $|x^2 - 25| = x^2 - 25$.
$x^2 - 25 < 0$ als $-5 < x < 5$, dus dan is $|x^2 - 25| = -(x^2 - 25)$.

$$\lim_{x \uparrow 5} f(x) = \lim_{x \uparrow 5} \frac{|x^2-25|}{x-5} = \lim_{x \uparrow 5} \frac{-(x-5)(x+5)}{x-5} = \lim_{x \uparrow 5} (-(x+5)) = -10$$

$$\lim_{x \downarrow 5} f(x) = \lim_{x \downarrow 5} \frac{|x^2-25|}{x-5} = \lim_{x \downarrow 5} \frac{(x-5)(x+5)}{x-5} = \lim_{x \downarrow 5} (x+5) = 10$$

b $$\lim_{x \uparrow 5} g(x) = \lim_{x \uparrow 5} \frac{x^2-4x-5}{x-5} = \lim_{x \uparrow 5} \frac{(x+1)(x-5)}{x-5} = \lim_{x \uparrow 5} (x+1) = 6$$

$$\lim_{x \downarrow 5} g(x) = \lim_{x \downarrow 5} \frac{(x+1)(x-5)}{x-5} = \lim_{x \downarrow 5} (x+1) = 6$$

c De grafiek van f heeft bij $x = 5$ een sprong en de grafiek van g heeft bij $x = 5$ een perforatie.

4 **a** $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{(x-3)^2} = \dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-3)^2}$

Als $x \neq 3$ is $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$

De grafiek van f heeft een verticale asymptoot $x = 3$.

b $g(x) = \dfrac{2x-1}{4x^2-2x} = \dfrac{2x-1}{2x(2x-1)}$

Als $x \neq \frac{1}{2}$ is $g(x) = \dfrac{1}{2x}$

$$\lim_{x \uparrow \frac{1}{2}} \frac{1}{2x} = \lim_{x \downarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{2x} = \frac{1}{1} = 1$$

De grafiek van g heeft een perforatie bij het punt $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.
De grafiek heeft een verticale asymptoot $x = 0$.

c $h(x) = \dfrac{2x^2-8x}{|x-4|} = \dfrac{2x(x-4)}{|x-4|}$

Als $x > 4$ is $h(x) = \dfrac{2x(x-4)}{x-4} = 2x$ en als $x < 4$ is $h(x) = \dfrac{2x(x-4)}{-(x-4)} = -2x$.

$\lim\limits_{x \downarrow 4} k(x) = 8$ en $\lim\limits_{x \uparrow 4} k(x) = -8$

De grafiek van h heeft een sprong bij $x = 4$.

d $k(x)\dfrac{x^2-3x-4}{2x^2-2} = \dfrac{(x-4)(x+1)}{2(x^2-1)} = \dfrac{(x-4)(x+1)}{2(x-1)(x+1)}$

Als $x \neq -1$ is $k(x) = \dfrac{x-4}{2(x-1)}$

$$\lim_{x \uparrow -1} \frac{x-4}{2(x-1)} = \lim_{x \downarrow -1} \frac{x-4}{2(x-1)} = \frac{-1-4}{2(-1-1)} = \frac{5}{4}$$

De grafiek van k heeft een perforatie bij het punt $\left(-1, 1\frac{1}{4}\right)$.
De grafiek van k heeft een verticale asymptoot als $2(x-1) = 0$.
De verticale asymptoot heeft vergelijking $x = 1$.

© Noordhoff Uitgevers bv

5 **a** $f(x) = \dfrac{3x + 18}{x^2 - 3x - 54} = \dfrac{3(x + 6)}{(x - 9)(x + 6)}$

Als $x \neq -6$ is $f(x) = \dfrac{3}{x - 9}$

$\lim\limits_{x \uparrow -6} \dfrac{3}{x - 9} = \lim\limits_{x \downarrow -6} \dfrac{3}{x - 9} = \dfrac{3}{-15} = -\frac{1}{5}$

De grafiek van f heeft een perforatie bij het punt $\left(-6, -\frac{1}{5}\right)$.

b $g(x) = \dfrac{e^{2x} - 3e^x + 2}{e^x - 2} = \dfrac{(e^x - 1)(e^x - 2)}{e^x - 2}$

Als $x \neq \ln(2)$ is $g(x) = e^x - 1$

$\lim\limits_{x \uparrow \ln(2)} (e^x - 1) = \lim\limits_{x \downarrow \ln(2)} (e^x - 1) = 1$

De grafiek van g heeft een perforatie bij het punt $(\ln(2), 1)$.

c $h(x) = \dfrac{2x^2 + 2x - 12}{3x - 6} = \dfrac{2(x + 3)(x - 2)}{3(x - 2)}$

Als $x \neq 2$ is $h(x) = \frac{2}{3}(x + 3)$.

$\lim\limits_{x \uparrow 2} \frac{2}{3}(x + 3) = \lim\limits_{x \downarrow 2} \frac{2}{3}(x + 3) = 3\frac{1}{3}$

De grafiek van h heeft een perforatie bij het punt $\left(2, 3\frac{1}{3}\right)$.

d $k(x) = \cos(x) \cdot \tan(x) = \cos(x) \cdot \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Als $x \neq \frac{1}{2}\pi$ of $x \neq -\frac{1}{2}\pi$ is $k(x) = \sin(x)$.

$\lim\limits_{x \uparrow -\frac{1}{2}\pi} \sin(x) = \lim\limits_{x \downarrow -\frac{1}{2}\pi} \sin(x) = -1$ en $\lim\limits_{x \uparrow \frac{1}{2}\pi} \sin(x) = \lim\limits_{x \downarrow \frac{1}{2}\pi} \sin(x) = 1$

De grafiek van k heeft perforaties bij de punten $\left(-\frac{1}{2}\pi, -1\right)$ en $\left(\frac{1}{2}\pi, 1\right)$.

6 $\lim\limits_{x \uparrow 1} 2e^{\frac{1}{x-1}} = 2 \cdot e^{-\infty} = 0$ en $\lim\limits_{x \downarrow 1} 2e^{\frac{1}{x-1}} = 2 \cdot e^{\infty} = \infty$

De grafiek heeft een perforatie bij het punt $(1, 0)$ en een verticale asymptoot $x = 1$.

X1 **a** $f_3(x) = \dfrac{9 - x^2}{3x^2 - x^3} = \dfrac{(3 + x)(3 - x)}{x^2(3 - x)}$

Als $x \neq 3$ is $f_3(x) = \dfrac{3 + x}{x^2}$

$\lim\limits_{x \uparrow 3} \dfrac{3 + x}{x^2} = \lim\limits_{x \downarrow 3} \dfrac{3 + x}{x^2} = \frac{2}{3}$

De grafiek heeft een perforatie bij het punt $\left(3, \frac{2}{3}\right)$.

Voor het snijpunt met de x-as geldt $f_3(x) = 0$, dit geeft $x = -3$.

$f_3(x) = \dfrac{3 + x}{x^2} = \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{x}$ ofwel $f_3(x) = 3x^{-2} + x^{-1}$

$f'_3(x) = -\dfrac{6}{x^3} - \dfrac{1}{x^2}$

$f'_3(-3) = -\frac{6}{-27} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$

Een vergelijking van de raaklijn in $(-3, 0)$ is $y = \frac{1}{9}x + \frac{1}{3}$.

Invullen van de coördinaten van de perforatie geeft $\frac{2}{3} = \frac{1}{9} \cdot 3 + \frac{1}{3}$ klopt.

Deze raaklijn gaat dus door de perforatie.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $f_a(x) = \dfrac{9 - x^2}{ax^2 - x^3} = \dfrac{(3 + x)(3 - x)}{x^2(a - x)}$

Er is ook een perforatie als $a = -3$; $f_{-3}(x) = \dfrac{3 - x}{-x^2} = \dfrac{x - 3}{x^2}$

$\lim\limits_{x\uparrow -3} \dfrac{x - 3}{x^2} = \lim\limits_{x\downarrow -3} \dfrac{x - 3}{x^2} = -\frac{2}{3}$

De grafiek heeft een perforatie bij het punt $\left(-3, -\frac{2}{3}\right)$.

X**2** **a** $g(x) = \dfrac{\cos(2x) - 1}{\sin(2x)} + 1 = \dfrac{-2\sin^2(x)}{2\sin(x)\cos(x)} + 1$

Voor $\sin(x) \neq 0$ is $g(x) = -\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} + 1 = -\tan(x) + 1$.

Er zijn asymptoten als $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

Asymptoten op het interval $\left[-\frac{1}{2}\pi, 2\frac{1}{2}\pi\right]$ zijn de lijnen $x = -\frac{1}{2}\pi$, $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = 1\frac{1}{2}\pi$ en $x = 2\frac{1}{2}\pi$.

b De perforaties doen zich voor als $\sin(x) = 0$, dus bij $x = 0$, $x = \pi$ en $x = 2\pi$.

$\lim\limits_{x\uparrow 0}(\tan(x) + 1) = \lim\limits_{x\downarrow 0}(\tan(x) + 1) = 1$, $\lim\limits_{x\uparrow \pi}(\tan(x) + 1) = \lim\limits_{x\downarrow \pi}(\tan(x) + 1) = 1$ en

$\lim\limits_{x\uparrow 2\pi}(\tan(x) + 1) = \lim\limits_{x\downarrow 2\pi}(\tan(x) + 1) = 1$

De grafiek van g heeft perforaties bij de punten $(0, 1)$, $(\pi, 1)$ en $(2\pi, 1)$.

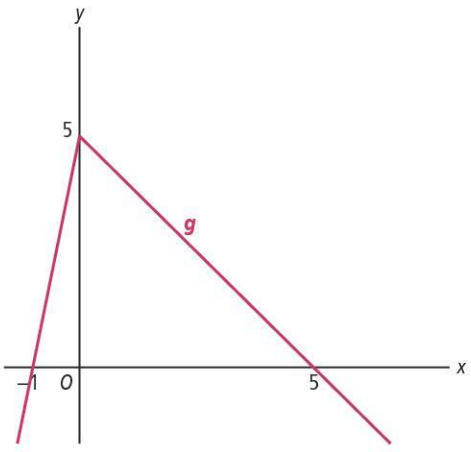
21.2 Functies met absolute waarden

intro Met behulp van je GR vind je $g(x) = |x^3| - |9x|$.

7 **a** Als $x \geq 0$, dan is $g(x) = 2x - 3x + 5$ ofwel $g(x) = -x + 5$.

b Als $x < 0$, dan is $g(x) = 2x + 3x + 5$ ofwel $g(x) = 5x + 5$.

c



d De richtingscoëfficiënt van het deel van de grafiek links van de knik is 5 en de richtingscoëfficiënt van het deel rechts van de knik is -1.

e Maximum $g(0) = 5$.

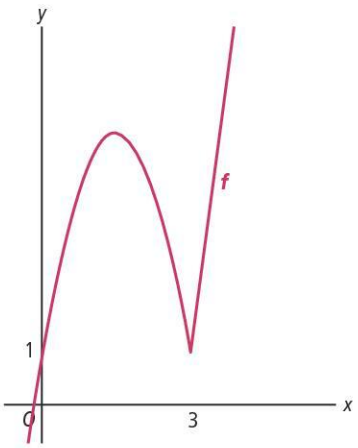
8 **a** $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 7x$ als $\frac{1}{2}x^2 - 4x \geq 0$ ofwel als $x(x - 8) \geq 0$.

Dit is het geval als $x \leq 0$ of $x \geq 8$.

b $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$ als $0 < x < 8$.

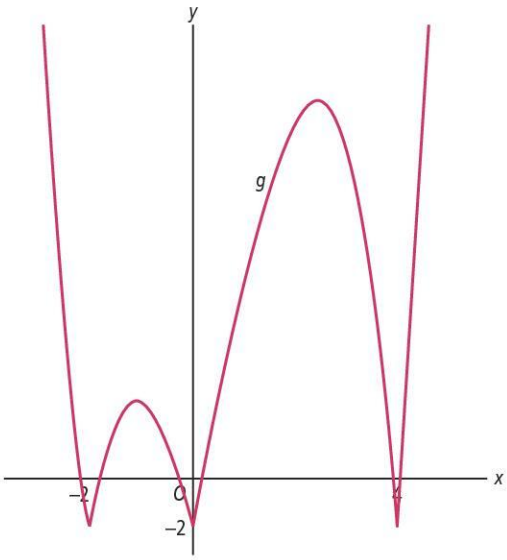
© Noordhoff Uitgevers bv

9 a

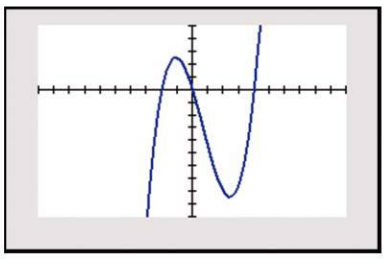


b Als $x \geq 3$, dan is $f(x) = 2x(x-3) + 1$ of ook $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$.
Als $x < 3$, dan is $f(x) = 2x \cdot -(x-3) + 1$ of ook $f(x) = -2x^2 + 6x + 1$.

c



$x^3 - 2x^2 - 8x = 0$
$x(x+2)(x-4) = 0$
Plot $y = x^3 - 2x^2 - 8x$.



Uit de plot blijkt dat $x^3 - 2x^2 - 8x \geq 0$ als $-2 \leq x \leq 0$ of $x \geq 4$ en
$x^3 - 2x^2 - 8x < 0$ als $x < -2$ of $0 < x < 4$.
Voor $-2 \leq x \leq 0$ of $x \geq 4$ geldt $g(x) = x^3 - 2x^2 - 8x - 2$.
Voor $x < -2$ of $0 < x < 4$ geldt $g(x) = -x^3 + 2x^2 + 8x - 2$.

10 a $f(x) = \dfrac{x-4}{\sqrt{x}}$ als $x \geq 4$ en $f(x) = \dfrac{-x+4}{\sqrt{x}}$ als $0 < x < 4$.

b Het minimum is $f(4) = 0$.

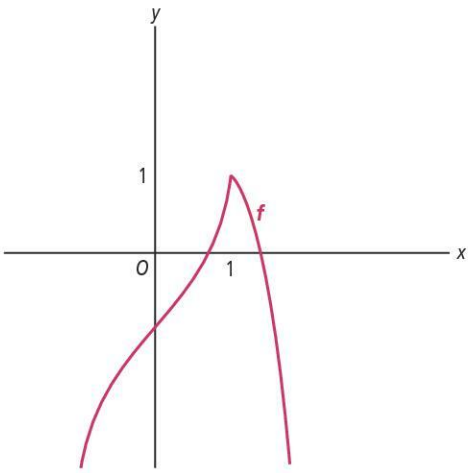
© Noordhoff Uitgevers bv

c Voor $x > 4$ geldt $f'(x) = \dfrac{1 \times \sqrt{x} - \dfrac{x-4}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{2x - (x-4)}{2x\sqrt{x}} = \dfrac{x+4}{2x\sqrt{x}}$

Voor $0 < x < 4$ geldt $f'(x) = -\dfrac{x+4}{2x\sqrt{x}}$

d $\lim\limits_{x \uparrow 4} f'(x) = \lim\limits_{x \uparrow 4} -\dfrac{x+4}{2x\sqrt{x}} = -\dfrac{8}{16} = -\frac{1}{2}$ en $\lim\limits_{x \downarrow 4} f'(x) = \lim\limits_{x \downarrow 4} \dfrac{x+4}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$

11 a



b De extreme waarde is een maximum $f(1) = 1$.

12 a $1\frac{1}{3}x^2 - 4x = 0$
$4x^2 - 12x = 0$
$x^2 - 3x = 0$
$x(x-3) = 0$
De grafiek van $y = x^2 - 3x$ is een dalparabool die de x-as snijdt in de punten $(0, 0)$ en $(3, 0)$.
$1\frac{1}{3}x^2 - 4x \geq 0$ voor $x \leq 0$ of $x \geq 3$ en $1\frac{1}{3}x^2 - 4x < 0$ voor $0 < x < 3$.

Voor $x \leq 0$ of $x \geq 3$ geldt $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{3}x^2 + 4x$ en $f'(x) = x^2 - 2\frac{2}{3}x + 4$.

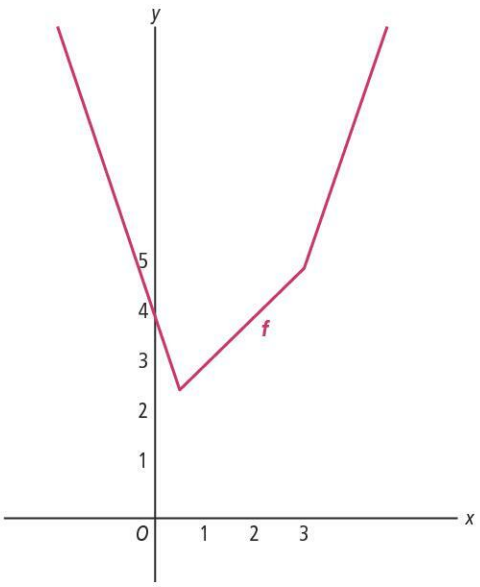
Voor $0 < x < 3$ geldt $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1\frac{1}{3}x^2 - 4x$ en $f'(x) = x^2 + 2\frac{2}{3}x - 4$.

$\lim\limits_{x \uparrow 0} f'(x) = \lim\limits_{x \uparrow 0}\left(x^2 - 2\frac{2}{3}x + 4\right) = 4$ en $\lim\limits_{x \downarrow 0} f'(x) = \lim\limits_{x \downarrow 0}\left(x^2 + 2\frac{2}{3}x - 4\right) = -4$
De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan het linker deel van de grafiek in P is -4 en de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan het rechter deel van de grafiek in P is 4.

b De x-coördinaat van Q is 3. $f(3) = \frac{1}{3} \cdot 27 = 9$, dus $Q(3, 9)$.
$\lim\limits_{x \uparrow 3} f'(x) = \lim\limits_{x \uparrow 3}\left(x^2 + 2\frac{2}{3}x - 4\right) = 13$ en $\lim\limits_{x \downarrow 3} f'(x) = \lim\limits_{x \downarrow 3}\left(x^2 - 2\frac{2}{3}x + 4\right) = 5$
Vergelijkingen van de raaklijnen in Q zijn $y = 13x + b$ en $y = 5x + c$.
Invullen van de coördinaten van Q geeft $9 = 13 \cdot 3 + b$ en $9 = 5 \cdot 3 + c$.
Dus $b = -30$ en $c = -6$.
Vergelijkingen van de raaklijnen in Q zijn $y = 13x - 30$ (linker deel) en $y = 5x - 6$ (rechter deel).

© Noordhoff Uitgevers bv

13 **a**



b De figuur heeft een knik als $2x - 1 = 0$ of $x - 3 = 0$, dus bij $x = \frac{1}{2}$ en $x = 3$.
$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{2}$ en $f(3) = 5$
In de punten $\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$ en $(3, 5)$ heeft de grafiek van f een knik.

c Als $x \geq 3$ geldt $f(x) = 2x - 1 + x - 3$ ofwel $f(x) = 3x - 4$.
Als $\frac{1}{2} \leq x < 3$ geldt $f(x) = 2x - 1 - x + 3$ ofwel $f(x) = x + 2$.
Als $x < \frac{1}{2}$ geldt $f(x) = -2x + 1 - x + 3$ ofwel $f(x) = -3x + 4$.

d De extreme waarde is een minimum $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{2}$.

14 $f(0) = 2$ geeft $|b| + |-b| = 2|b| = 2$, dus $b = 1$.
Omdat a en b positief zijn hoort het knikpunt $(2, 2)$ bij $ax - b = 0$.
$2a - 1 = 0$ geeft $2a = 1$ ofwel $a = \frac{1}{2}$.

X**3** **a** Als $x < a$, dan is $x - a < 0$ en is $|x - a| = a - x$.
Dus geldt $f_a(x) = \dfrac{x - |x - a|}{x + |x - a|} = \dfrac{x - (a - x)}{x + (a - x)} = \dfrac{2x - a}{a} = \frac{2}{a}x - 1$.
f_a is dan een lineaire functie en de grafiek een rechte lijn.

b De grafiek heeft een verticale asymptoot als $x + |x - a| = 0$.
$|x - a| = -x$
$x - a = x$ of $x - a = -x$
$x = \frac{1}{2}a$

c De knik doet zich voor als $|x - a| = 0$ dus als $x = a$.
$f_a(a) = \dfrac{a - |a - a|}{a + |a - a|} = \dfrac{a - 0}{a + 0} = 1$
De grafiek heeft een knik in het punt $(a, 1)$.

d $f_a(p) = q$, dus $q = \dfrac{p - |p - a|}{p + |p - a|}$
Omdat $p > 0$ is de noemer positief.
Dan is $q = \dfrac{p - |p - a|}{p + |p - a|} \leq \dfrac{p + |p - a|}{p + |p - a|} = 1$ dus $q \leq 1$.

© Noordhoff Uitgevers bv

X**4** **a** Voor A geldt $|\frac{1}{2}x - 4| = 0$, dus $x = 8$.
$f(8) = 5$, dus $A(8, 5)$.
Voor het rechterdeel geldt $x \geq 8$, dus $f(x) = 5 + \left(\frac{1}{2}x - 4\right)(2 - x)$.
$f(x) = 5 + x - \frac{1}{2}x^2 - 8 + 4x$ of ook $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - 3$.
$f'(x) = -x + 5$ en $f'(8) = -3$
Een vergelijking van de raaklijn l is $y = -3x + b$.
Invullen van de coördinaten van $A(8, 5)$ geeft $5 = -3 \cdot 8 + b$, dus $b = 29$.
Een vergelijking van de raaklijn l is $y = -3x + 29$.

b Het tweede snijpunt ligt op de linker tak: $f(x) = 5 + \left(-\frac{1}{2}x + 4\right)(2 - x)$.
$f(x) = 5 - x + \frac{1}{2}x^2 + 8 - 4x$ of ook $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 13$.
$\frac{1}{2}x^2 - 5x + 13 = -3x + 29$
$\frac{1}{2}x^2 - 2x - 16 = 0$
$x^2 - 4x - 32 = 0$
$(x + 4)(x - 8) = 0$
$x = -4$ of $x = 8$
Voor het tweede snijpunt geldt $x = -4$.
$f(-4) = \frac{1}{2} \cdot 16 - 5 \cdot -4 + 13 = 41$
Het tweede snijpunt is $(-4, 41)$.

21.3 Extreme waarden en buigpunten

intro Voor drie waarden van x.
f heeft twee maxima en twee minima.
Dat geldt voor $x = 3$.

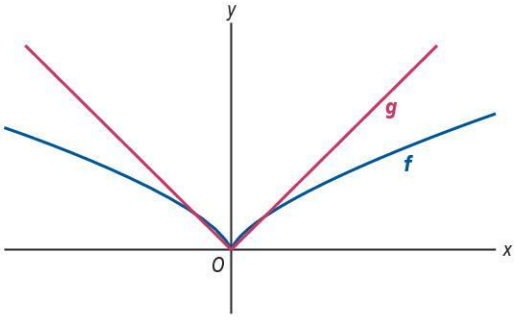
15 **a** $f(x) = x^3 \cdot e^x$
$f'(x) = 3x^2 \cdot e^x + x^3 \cdot e^x$
$x^2 \cdot e^x(3 + x) = 0$
$x^2 = 0$ of $3 + x = 0$ ($e^x = 0$ heeft geen oplossing)
$x = 0$ of $x = -3$

b Bij $x = 0$ heeft f geen extreme waarde.

c $f''(x) = 6x \cdot e^x + 3x^2 \cdot e^x + 3x^2 \cdot e^x + x^3 \cdot e^x$
$f''(x) = x^3 \cdot e^x + 6x^2 \cdot e^x + 6x \cdot e^x$
$f''(x) = 0$ geeft $x^3 + 6x^2 + 6x = 0$ ofwel $x(x^2 + 6x + 6) = 0$.
$x = 0$ of $x^2 + 6x + 6 = 0$
$x = 0$ of $x = -3 - \sqrt{3}$ of $-3 + \sqrt{3}$

d Voor deze waarden van x heeft de grafiek buigpunten.

16 **a**



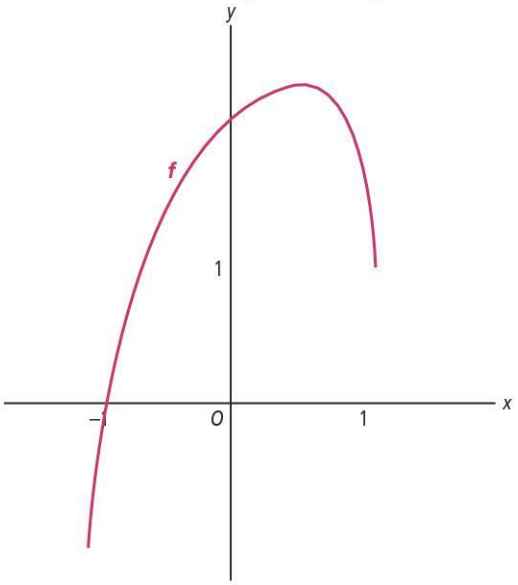
© Noordhoff Uitgevers bv

b $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, dus $f'(0)$ bestaat niet en ook $g'(0)$ niet.
In de grafieken van f en g zit een knik bij $x = 0$.

c f en g hebben beide een minimum 0 voor $x = 0$.

17 **a** $5 - 4x^2 \geq 0$, dus $4x^2 \leq 5$ ofwel $x^2 \leq \frac{5}{4}$.
Het domein van f is $\left[-\frac{1}{2}\sqrt{5}, \frac{1}{2}\sqrt{5}\right]$.

b



c $f'(x) = 1 + \dfrac{-8x}{2\sqrt{5 - 4x^2}}$ ofwel $f'(x) = 1 - \dfrac{4x}{\sqrt{5 - 4x^2}}$

d $f'(x) = 0$ geeft $4x = \sqrt{5 - 4x^2}$.
$16x^2 = 5 - 4x^2$
$20x^2 = 5$
$x^2 = \frac{1}{4}$, dus $x = \frac{1}{2}$ of $x = -\frac{1}{2}$ (voldoet niet).
f heeft een randminimum $f\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{5}$,
f heeft een maximum $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{2}$ en een randminimum $f\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

18 **a** Voor het domein moet gelden $x > 0$ en $\ln(x) \neq 1$, dus $x \neq e$.
Het domein is $\langle 0, e\rangle \cup \langle e, \rightarrow\rangle$.

b $\lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{\ln(x)}{1 - \ln(x)} = \lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{1}{\frac{1}{\ln(x)} - 1} = \dfrac{1}{0 - 1} = -1$ (de grafiek nadert naar $(0, -1)$).

c $1 - \ln(x) = 0$ geeft een verticale asymptoot $x = e$.
$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(x)}{1 - \ln(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{\frac{1}{\ln(x)} - 1} = \dfrac{1}{0 - 1} = -1$
De lijn $y = -1$ is een horizontale asymptoot.

© Noordhoff Uitgevers bv

d $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot (1 - \ln(x)) - \ln(x) \cdot -\frac{1}{x}}{(1 - \ln(x))^2}$

$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}}{(1 - \ln(x))^2} = \dfrac{1}{x(1 - \ln(x))^2}$

Als $x > 0$ en $x \neq e$ dan is $f'(x) = \dfrac{1}{x(1 - \ln(x))^2} > 0$

De afgeleide zal nooit nul zijn, dus heeft f geen extreme waarden.

19 **a** $f(x) = \frac{1}{6}x^6 - 5x^4$

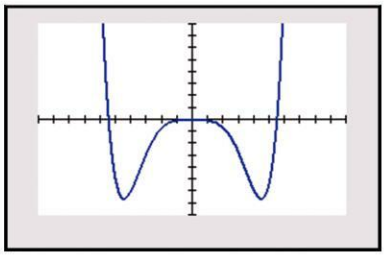
$f'(x) = x^5 - 20x^3$

$f''(x) = 5x^4 - 60x^2$

$f''(x) = 0$ geeft $5x^2(x^2 - 12) = 0$.

$x = 0$ of $x = \sqrt{12}\,(=2\sqrt{3})$ of $x = -\sqrt{12}\,(=-2\sqrt{3})$

b



Uit de plot blijkt dat de grafiek geen buigpunt heeft als $x = 0$.

c $f(\sqrt{12}) = \frac{1}{6} \cdot 12^3 - 5 \cdot 12^2 = -432$ en ook $f(-\sqrt{12}) = -432$.

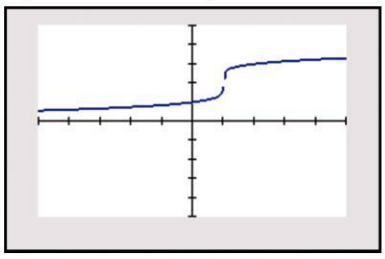
De buigpunten zijn $(-2\sqrt{3}, -432)$ en $(2\sqrt{3}, -432)$.

20 **a** $g'(x) = \frac{1}{5}(x - 1)^{-\frac{4}{5}} = \dfrac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{(x-1)^4}}$

$g''(x) = \frac{1}{5} \cdot -\frac{4}{5} \cdot (x - 1)^{-1\frac{4}{5}} = \dfrac{-4}{25 \cdot \sqrt[5]{(x-1)^9}}$

$g''(x) = 0$ heeft geen oplossing.

$\lim\limits_{x \uparrow 1} g'(x) = \infty$ en $\lim\limits_{x \downarrow 1} g'(x) = \infty$, dus de raaklijn in het punt $(1, 2)$ is verticaal,



De grafiek heeft een buigpunt $(1, 2)$.

b Een vergelijking van de buigraaklijn is $x = 1$.

21 **a** $f(x) = x^5 - 5x^4$

$f'(x) = 5x^4 - 20x^3$

$5x^4 - 20x^3 = 0$

$5x^3(x - 4) = 0$

$x = 0$ of $x = 4$

Er is een maximum $f(0) = 0$ en een minimum $f(4) = -256$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $f''(x) = 20x^3 - 60x^2$

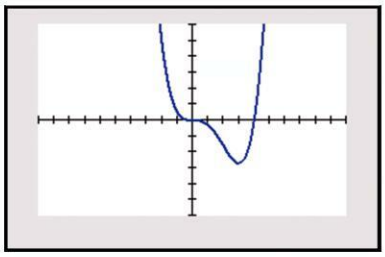
$20x^3 - 60x^2 = 0$

$x^3 - 3x^2 = 0$

$x^2(x - 3) = 0$

$x = 0$ of $x = 3$

c



f' heeft geen extreme waarde voor $x = 0$, dus is er alleen een buigpunt als $x = 3$. (Vensterinstelling $-10 \le x \le 10$ en $-300 \le y \le 300$.)

22 a $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$

$f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot -x = -x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$

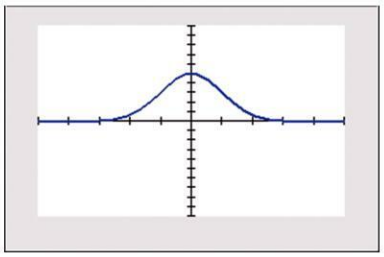
$f''(x) = -1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + -x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot -x$

$f''(x) = -1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + x^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$

$f''(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}(-1 + x^2)$

$f''(x) = 0$ geeft $x^2 = 1$.

$x = 1$ of $x = -1$



De buigpunten zijn $\left(-1, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ en $\left(1, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

b $f'(-1) = e^{-\frac{1}{2}}$ en $f'(1) = -e^{-\frac{1}{2}}$

Vergelijkingen van de buigraaklijnen zijn

$y = e^{-\frac{1}{2}} \cdot x + b$ en $y = -e^{-\frac{1}{2}} \cdot x + c$.

Invullen van de coördinaten van de buigpunten geeft

$e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} \cdot -1 + b$, dus $b = 2e^{-\frac{1}{2}}$ en $e^{-\frac{1}{2}} = -e^{-\frac{1}{2}} + c$, dus $c = 2e^{-\frac{1}{2}}$.

De vergelijkingen van de buigraaklijnen zijn $y = e^{-\frac{1}{2}} \cdot x + 2e^{-\frac{1}{2}}$ en $y = -e^{-\frac{1}{2}} \cdot x + 2e^{-\frac{1}{2}}$ $\left(\text{of ook } y = \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot x + \frac{2}{\sqrt{e}} \text{ en } y = -\frac{1}{\sqrt{e}} \cdot x + \frac{2}{\sqrt{e}}\right)$.

X5 a Er moet gelden $f_a(0) = 0$ en $f'_a(0) = 0$.

$f_a(0) = 0 \cdot e^0 = 0$

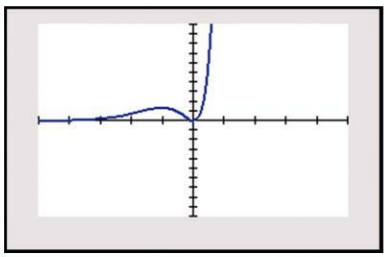
$f'_a(x) = 2x e^{ax} + x^2 \cdot e^{ax} \cdot a$

$f'_a(x) = x e^{ax}(2 + ax)$ en $f'_a(0) = 0$

Dus voor elke waarde van a raakt de grafiek de x-as in $(0, 0)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $f_2(x) = x^2e^{2x}$
$f'_2(x) = xe^{2x}(2 + 2x)$
$f'_2(x) = 0$ als $x = 0$ of $x = -1$



Met een plot: maximum $f_2(-1) = \frac{1}{e^2}$ en minimum $f_2(0) = 0$.

c $f'_a(x) = xe^{ax}(2 + ax)$

$f'_a(x) = 0$ geeft $x = 0$ of $x = -\frac{2}{a}$

$f_a(-\frac{2}{a}) = \frac{4}{a^2}e^{-2}$

$x_{top} = -\frac{2}{a}$ en $y_{top} = \frac{4}{a^2}e^{-2} = x_{top}^2 \cdot e^{-2} = x_{top}^2 \cdot \frac{1}{e^2}$

De top ligt dus op de parabool $y = \frac{1}{e^2}x^2$.

d $g'_a(x) = 1 \cdot e^{ax} + x \cdot ae^{ax}$ ofwel $g'_a(x) = (ax + 1) \cdot e^{ax}$
$g''_a(x) = a \cdot e^{ax} + (ax + 1) \cdot ae^{ax}$
$g''_a(x) = a \cdot e^{ax} + (a^2x + a) \cdot e^{ax}$ ofwel $g''_a(x) = (a^2x + 2a) \cdot e^{ax}$
Voor buigpunten geldt $g''_a(x) = 0$.
$a^2x + 2a = 0$ of $e^{ax} = 0$ (geen oplossing)
$ax = -2$
$x = \frac{-2}{a}$

$g_a(\frac{-2}{a}) = \frac{-2}{a} \cdot e^{a \cdot \frac{-2}{a}} = \frac{-2}{a} \cdot e^{-2}$ Het buigpunt is $(\frac{-2}{a}, \frac{-2}{a} \cdot e^{-2})$.

De buigpunten liggen op de lijn $y = e^{-2} \cdot x$.

X6 $2\sin(x) \geq 0$ op $[0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi]$ en $2\sin(x) < 0$ op $\langle \pi, 2\pi \rangle$ en $\langle 3\pi, 3\frac{1}{2}\pi \rangle$.

$2\sin(x) \geq 0$	$2\sin(x) < 0$
$f(x) = x + 2\sin(x)$	$f(x) = x - 2\sin(x)$
$f'(x) = 1 + 2\cos(x)$	$f'(x) = 1 - 2\cos(x)$
$f'(x) = 0$ geeft $\cos(x) = -\frac{1}{2}$	$f'(x) = 0$ geeft $\cos(x) = \frac{1}{2}$
$x = \frac{2}{3}\pi$ of $x = 2\frac{2}{3}\pi$	$x = 1\frac{2}{3}\pi$

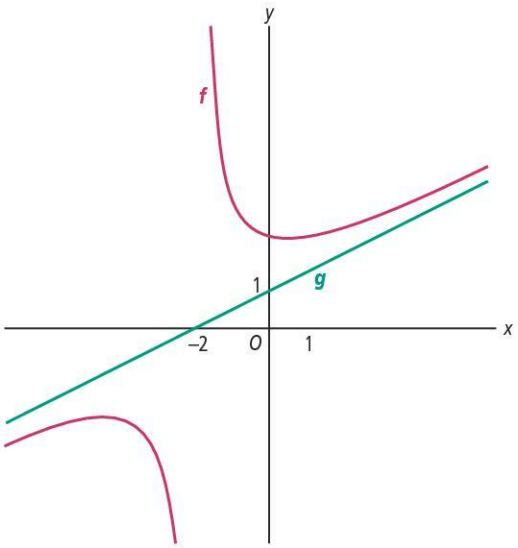
Maxima $f(\frac{2}{3}\pi) = \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$ en $f(1\frac{2}{3}\pi) = 1\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$ en $f(2\frac{2}{3}\pi) = 2\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$.
Randminimum $f(0) = 0$ en randmaximum $f(3\frac{1}{2}\pi) = 3\frac{1}{2}\pi - 2$.
Minima treden op waar de grafiek een knik heeft, dus als $2\sin(x) = 0$.
Minima $f(\pi) = \pi$ en $f(2\pi) = 2\pi$ en $f(3\pi) = 3\pi$.

© Noordhoff Uitgevers bv

21.4 Scheve asymptoten

intro De lijnen met vergelijking $y = x$ en $y = -x$.

23 **a**



b $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3}{x+2} = 0$ en $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{x+2} = 0$, dus voor hele grote of hele kleine waarden van x komt de grafiek van f steeds dichter bij die van $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

24 $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$, dus voor grote waarden van x komt de grafiek van f steeds dichter bij de lijn $y = 6x - 5$.

25 **a** $f(x) = x + 3 + \frac{4}{x+2}$

$f(x) = \frac{(x+3)(x+2)}{x+2} + \frac{4}{x+2}$

$f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x+2} + \frac{4}{x+2}$

$f(x) = \frac{x^2+5x+10}{x+2}$

b $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(x + 3 + \frac{4}{x+2} - (x+3)\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4}{x+2} = 0$ en

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4}{x+2} = 0$

c Dat is de lijn $y = x + 3$.

26 **a** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x+1} = 0$, dus de lijn met vergelijking $y = 8 - 12x$ is een scheve asymptoot van de grafiek van f.

b $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{4x^3-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{4 - \frac{1}{x^3}} = \frac{0}{4-0} = 0$; net zo is $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{4x^3-1} = 0$.

De lijn $y = 9x$ is een scheve asymptoot van de grafiek van f.

© Noordhoff Uitgevers bv

27 **a** $f(x) - (3x - 16) = \dfrac{3x^2 - 7x + 11}{x + 3} - (3x - 16)$

$= \dfrac{3x^2 - 7x + 11}{x + 3} - \dfrac{(3x - 16)(x + 3)}{x + 3}$

$= \dfrac{3x^2 - 7x + 11}{x + 3} - \dfrac{3x^2 - 7x - 48}{x + 3} = \dfrac{59}{x + 3}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{59}{x + 3} = 0 \left(\text{en } \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{59}{x + 3} = 0 \right)$, dus de lijn $y = 3x - 16$ is een scheve asymptoot van de grafiek van f.

b $g(x) - \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) = \dfrac{15 - x^2}{2x + 3} - \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)$

$= \dfrac{15 - x^2}{2x + 3} - \dfrac{\left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)(2x + 3)}{2x + 3}$

$= \dfrac{15 - x^2}{2x + 3} - \dfrac{-x^2 + 2\frac{1}{4}}{2x + 3} = \dfrac{12\frac{3}{4}}{2x + 3}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{12\frac{3}{4}}{2x + 3} = 0 \left(\text{en } \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{12\frac{3}{4}}{2x + 3} = 0 \right)$, dus de lijn met vergelijking $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ is een scheve asymptoot van de grafiek van g.

28 **a** $2x^2$ is vervangen door $2x(x + 4) = 2x^2 + 8x$.
Daarvoor moet gecorrigeerd worden door er $8x$ af te trekken.

b $\dfrac{2x(x + 4) - 8x + 11x - 5}{x + 4} =$

$\dfrac{2x(x + 4)}{x + 4} + \dfrac{3x - 5}{x + 4} =$

$2x + \dfrac{3x - 5}{x + 4}$

c Op de puntjes moet 12 staan.

d $2x + \dfrac{3(x + 4) - 12 - 5}{x + 4} =$

$2x + 3 - \dfrac{17}{x + 4}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{17}{x + 4} = 0 \left(\text{en ook } \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{17}{x + 4} = 0 \right)$.

e De scheve asymptoot van de grafiek van f is de lijn $y = 2x + 3$.

29 **a** $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x - 3}{x + 4} = \dfrac{x(x + 4) - 4x + 5x - 3}{x + 4}$

$f(x) = x + \dfrac{x - 3}{x + 4}$ ofwel $f(x) = x + \dfrac{x + 4 - 4 - 3}{x + 4}$

$f(x) = x + 1 - \dfrac{7}{x + 4}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7}{x + 4} = 0 \left(\text{en ook } \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{7}{x + 4} = 0 \right)$

De scheve asymptoot heeft vergelijking $y = x + 1$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 2} = \dfrac{x(x-2) + 2x - 3x}{x - 2}$

$g(x) = x - \dfrac{x}{x-2}$ ofwel $g(x) = x - \dfrac{x - 2 + 2}{x - 2}$

$g(x) = x - 1 - \dfrac{2}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{x-2} = 0 \left(\text{en ook } \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x-2} = 0\right)$

De scheve asymptoot heeft vergelijking $y = x - 1$.

c $h(x) = \dfrac{x^2}{2x-1} = \dfrac{\frac{1}{2}x(2x-1) + \frac{1}{2}x}{2x-1}$

$h(x) = \frac{1}{2}x + \dfrac{\frac{1}{2}x}{2x-1}$ ofwel $h(x) = \frac{1}{2}x + \dfrac{\frac{1}{4}(2x-1) + \frac{1}{4}}{2x-1}$

$h(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \dfrac{\frac{1}{4}}{2x-1}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{4}}{2x-1} = 0 \left(\text{en ook } \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{1}{4}}{2x-1} = 0\right)$

De scheve asymptoot heeft vergelijking $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

d $k(x) = \dfrac{4x^3 - 2x}{2x^2 + 1} = \dfrac{2x(2x^2+1) - 2x - 2x}{2x^2+1}$ ofwel

$k(x) = 2x - \dfrac{4x}{2x^2+1}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x}{2x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{4}{x}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \dfrac{0}{2+0} = 0 \left(\text{en ook } \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x}{2x^2+1} = 0\right)$.

De scheve asymptoot heeft vergelijking $y = 2x$.

30 **a** Als een grafiek een scheve asymptoot heeft, nadert de helling van de grafiek tot de helling van de asymptoot.

b $f'(x) = \dfrac{6x(x+1) - 3x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{3x^2 + 6x}{x^2 + 2x + 1}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 + 6x}{x^2 + 2x + 1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3 + \frac{6}{x}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \dfrac{3+0}{1+0+0} = 3$ dus $a = 3$.

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x^2}{x+1} - 3x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 3x(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-3x}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-3x}{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-3}{1 + \frac{1}{x}} = \dfrac{-3}{1+0} = -3$

Dat is gelijk aan b, omdat dan $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax - b) = 0$.

© Noordhoff Uitgevers bv

31 **a** $f'(x) = 2 - \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2 - 0 = 2$

b $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - 2x) = \lim\limits_{x\to\infty}(2x - \ln(x) - 2x) = \lim\limits_{x\to\infty}(-\ln(x)) = -\infty$.

Er is geen scheve asymptoot.

X7 **a** $f'(x) = \frac{1}{2} + e^{2-\frac{1}{2}x} \cdot -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2-\frac{1}{2}x}$

$f'(x) = 0$ geeft $e^{2-\frac{1}{2}x} = 1$.

$2 - \frac{1}{2}x = 0$, dus $x = 4$.

Het minimum is $f(4) = 2 + 1 - 1 = 2$

b $f(x) = \frac{1}{2}x - 1 + e^{2-\frac{1}{2}x}$ en $\lim\limits_{x\to\infty} e^{2-\frac{1}{2}x} = 0$.

De scheve asymptoot heeft vergelijking $y = \frac{1}{2}x - 1$.

c Voor $a > 0$ is $\lim\limits_{x\to\infty} e^{2-ax} = 0$ en voor $a < 0$ is $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2-ax} = 0$.

De scheve asymptoot heeft daarom als vergelijking $y = ax - 3$.

De asymptoot snijdt de verticale as onder een hoek van 30°, dus de x-as onder een hoek van 60° en $\tan(60°) = \sqrt{3}$.

Hieruit volgt dat $a = \sqrt{3}$ of $a = -\sqrt{3}$.

X8 **a** De grafiek van f_2 heeft een verticale asymptoot als $2x + 4 = 0$ (en $3x^2 - 2x - 14 \neq 0$).

Een vergelijking van de verticale asymptoot is $x = -2$.

$f_2(x) = \frac{3x^2 - 2x - 14}{2x + 4}$

$f_2(x) = \frac{1\frac{1}{2}x(2x + 4) - 6x - 2x - 14}{2x + 4}$ ofwel $f_2(x) = 1\frac{1}{2}x - \frac{8x + 14}{2x + 4}$

$f_2(x) = 1\frac{1}{2}x - \frac{4(2x + 4) - 16 + 14}{2x + 4}$ dus $f_2(x) = 1\frac{1}{2}x - 4 + \frac{2}{2x + 4}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{2x + 4} = 0$ $\left(\text{en ook } \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{2x + 4} = 0\right)$

Een vergelijking van de scheve asymptoot is $y = 1\frac{1}{2}x - 4$.

Voor de hoek α tussen de scheve asymptoot en de x-as geldt: $\tan(\alpha) = 1\frac{1}{2}$.

$\alpha = 56{,}309\ldots°$.

De hoek met de verticale asymptoot $x = -2$ is dan $90° - 56{,}309\ldots° \approx 34°$.

b $f_{-3}(x) = \frac{3x^2 - 2x - 14}{-3x + 4}$

$f_{-3}(x) = \frac{-x(-3x + 4) + 4x - 2x - 14}{-3x + 4}$ ofwel $f_{-3}(x) = -x + \frac{2x - 14}{-3x + 4}$

$f_{-3}(x) = -x + \frac{-\frac{2}{3}(-3x + 4) + 2\frac{2}{3} - 14}{-3x + 4}$ dus $f_{-3}(x) = \ = -x - \frac{2}{3} + \frac{-11\frac{1}{3}}{-3x + 4}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-11\frac{1}{3}}{-3x + 4} = 0$ en $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-11\frac{1}{3}}{-3x + 4} = 0$

Een vergelijking van de scheve asymptoot is $y = -x - \frac{2}{3}$.

Deze snijdt de y-as in het punt $\left(0, -\frac{2}{3}\right)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c $f_p(x) = \dfrac{3x^2 - 2x - 14}{px + 4} = \dfrac{\frac{3x}{p}(px + 4) - \frac{12x}{p} - 2x - 14}{px + 4} = \dfrac{3}{p}x + \dfrac{-\frac{12x}{p} - 2x - 14}{px + 4} =$

De scheve asymptoot gaat door de oorsprong als $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f_p(x) - \frac{3}{p}x\right) = 0$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{12x}{p} - 2x - 14}{px + 4} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(-\frac{12}{p} - 2\right)x - 14}{px + 4}$$

Deze limiet is 0 als $-\dfrac{12}{p} - 2 = 0$, dus als $p = -6$.

21.5 Functies onderzoeken

intro Functie: domein en bereik, nulpunten en extremen, stijgen en dalen, even en oneven, periodiciteit.
Grafiek: toppen, buigpunten, asymptoten, knik, perforatie en symmetrie.

32 a $f(x) = \dfrac{1 - e^x}{1 + e^x}$

$$f'(x) = \frac{-e^x \cdot (1 + e^x) - (1 - e^x) \cdot e^x}{(1 + e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2e^x}{(1 + e^x)^2}$$

Omdat $-2e^x \neq 0$ heeft $f'(x) = 0$ geen oplossing, dus er zijn geen extreme waarden.

b $f''(x) = \dfrac{-2e^x(1 + e^x)^2 - -2e^x \cdot 2(1 + e^x) \cdot e^x}{(1 + e^x)^4}$

Teller en noemer delen door $1 + e^x$ geeft

$$f''(x) = \frac{-2e^x(1 + e^x) - -2e^x \cdot 2e^x}{(1 + e^x)^3} = \frac{2e^{2x} - 2e^x}{(1 + e^x)^3}$$

$f''(x) = 0$ geeft $2e^{2x} - 2e^x = 0$ (en $(1 + e^x)^3 \neq 0$)

$2e^x(e^x - 1) = 0$

$e^x = 1$ dus $x = 0$

$f(0) = \dfrac{1 - 1}{1 + 1} = 0$, dus het buigpunt is $(0, 0)$.

c $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1 - e^x}{1 + e^x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1} = \dfrac{0 - 1}{0 + 1} = -1$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1 - e^x}{1 + e^x} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

Dus een horizontale asymptoot $y = -1$ naar rechts en een horizontale asymptoot $y = 1$ naar links.

d $f(-a) = \dfrac{1 - e^{-a}}{1 + e^{-a}}$

Teller en noemer vermenigvuldigen met e^a geeft $f(-a) = \dfrac{e^a - 1}{e^a + 1}$

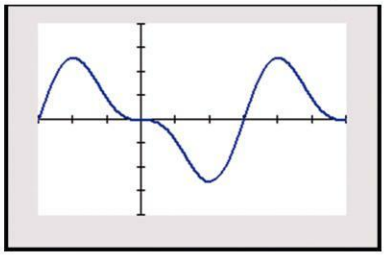
$$f(-a) = -\frac{1 - e^a}{1 + e^a} = -f(a).$$

Dit betekent dat de grafiek puntsymmetrisch is in $(0, 0)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

33 **a** $\sin(2x) - 2\sin(x) = 0$
$2\sin(x)\cos(x) - 2\sin(x) = 0$
$2\sin(x) \cdot (\cos(x) - 1) = 0$
$\sin(x) = 0$ of $\cos(x) = 1$
$x = 0 + k \cdot \pi$ of $x = 0 + k \cdot 2\pi$
De nulpunten van f op het interval $[-\pi, 2\pi]$ zijn $x = -\pi$, $x = 0$, $x = \pi$ en $x = 2\pi$.

b $f(x) = \sin(2x) - 2\sin(x)$
$f'(x) = 2\cos(2x) - 2\cos(x)$
$f'(x) = 0$ geeft $2\cos(2x) - 2\cos(x) = 0$
$2\cos(2x) = 2\cos(x)$
$\cos(2x) = \cos(x)$
$2x = x + k \cdot 2\pi$ of $2x = -x + k \cdot 2\pi$
$x = 0 + k \cdot 2\pi$ of $3x = 0 + k \cdot 2\pi$
$x = 0 + k \cdot 2\pi$ of $x = 0 + k \cdot \frac{2}{3}\pi$



Op het interval $[-\pi, 2\pi]$ is er een minimum $f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -1\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en twee maxima $f\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $f\left(1\frac{1}{3}\pi\right) = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

c $f(-x) = \sin(-2x) - 2\sin(-x)$
$f(-x) = -\sin(2x) - -2\sin(x)$
$f(-x) = -(\sin(2x) - 2\sin(x)) = -f(x)$ voor elke waarde van x.

34 **a** Het domein is $\mathbb{R}$, want een derdemachtswortel bestaat voor elk getal.

b $f(x) = \sqrt[3]{4x - x^2} = (4x - x^2)^{\frac{1}{3}}$
$f'(x) = \frac{1}{3}(4x - x^2)^{-\frac{2}{3}}(4 - 2x) = \dfrac{4 - 2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(4x - x^2)^2}}$
$f'(x) = 0$ geeft $4 - 2x = 0$ ofwel $x = 2$.
$f(2) = \sqrt[3]{4}$, dus de top is het punt $(2, \sqrt[3]{4})$.

c $f(x) = 0$ geeft $x(4 - x) = 0$, dus $x = 0$ of $x = 4$.
$\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4 - 2x}{3\sqrt[3]{(4x - x^2)^2}} = \infty$ en $\lim\limits_{x \to 4} f'(x) = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{4 - 2x}{3\sqrt[3]{(4x - x^2)^2}} = -\infty$
De raaklijnen zijn verticaal: $x = 0$ en $x = 4$.

d $f(2 - p) = \sqrt[3]{4(2 - p) - (2 - p)^2}$
$= \sqrt[3]{8 - 4p - (4 - 4p + p^2)} = \sqrt[3]{4 - p^2}$
$f(2 + p) = \sqrt[3]{4(2 + p) - (2 + p)^2}$
$= \sqrt[3]{8 + 4p - (4 + 4p + p^2)} = \sqrt[3]{4 - p^2}$

e De grafiek van f is symmetrisch in de lijn $x = 2$.

35 **a** $f_p'(x) = p \cdot e^x - 1$
$f_p'(x) = 0$ geeft $p \cdot e^x - 1 = 0$ dus $e^x = \dfrac{1}{p}$
Er zijn geen oplossingen als $p < 0$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b Er moet gelden $f_p(x) = 0$ én $f_p'(x) = 0$.
$p \cdot e^x - x - 1 = 0$ én $p \cdot e^x - 1 = 0$.
Aftrekken van de vergelijkingen geeft $x = 0$.
Daaruit volgt dat $p \cdot e^0 - 1 = 0$, dus $p = 1$.

c $\lim\limits_{x \to -\infty} p \cdot e^x = 0$, dus voor elke waarde van p is de lijn $y = -x - 1$ de scheve asymptoot van de grafiek van f_p.

d $f_p'(x) = p \cdot e^x - 1$
$f_p''(x) = p \cdot e^x$
$f_p''(x) = 0$ heeft geen oplossing voor $p \neq 0$.
Er zijn dus geen buigpunten.

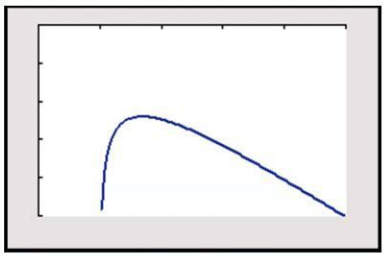
36 **a** Dan moet gelden $e^x - p > 0$ ofwel $e^x > p$ voor elke waarde van x.
Dat is het geval als $p \leq 0$.

b $f_e(x) = -2x + \ln(e^x - e)$

$$f_e'(x) = -2 + \frac{e^x}{e^x - e}$$

$$f_e'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{e^x}{e^x - e} = 2$$

$e^x = 2(e^x - e)$
$e^x = 2e^x - 2e$
$e^x = 2e$
$x = \ln(2e) = 1 + \ln(2)$



Uit de plot blijkt dat f_e bij deze waarde van x een maximum heeft.

c $f_0(x) = -2x + \ln(e^x) = -2x + x = -x$. Het is de rechte lijn $y = -x$.

d $\lim\limits_{x \to \infty}(f_p(x) - -x) = \lim\limits_{x \to \infty}(-x + \ln(e^x - p))$
Vervang x door $\ln(e^x)$.

$$\lim_{x \to \infty}(\ln(e^x - p) - \ln(e^x)) = \lim_{x \to \infty} \ln\left(\frac{e^x - p}{e^x}\right) = \lim_{x \to \infty} \ln\left(1 - \frac{p}{e^x}\right) = \ln(1 - 0) = 0.$$

Dus voor elke waarde van $p \neq 0$ is de lijn $y = -x$ een scheve asymptoot van de grafiek van f_p.

37 De grafiek van $f(x) = |x|(x - 3)$ heeft voor elke waarde van p altijd het punt $(0, 0)$ gemeenschappelijk met de lijn $y = px$.
Als $x \geq 0$ geldt $f(x) = x(x - 3) = x^2 - 3x$ en $\lim\limits_{x \downarrow 0} f'(x) = \lim\limits_{x \downarrow 0}(2x - 3) = -3$.
Als $x < 0$ geldt $f(x) = -x(x - 3) = -x^2 + 3x$ en $\lim\limits_{x \downarrow 0} f'(x) = \lim\limits_{x \downarrow 0}(-2x + 3) = 3$.
De hellingen van de linker en rechter raaklijnen zijn 3 respectievelijk -3.
Als $p = 0$ dan is naast $(0, 0)$ ook $(3, 0)$ een snijpunt.
Als $0 < p \leq 3$ is er nog een tweede gemeenschappelijk punt in het eerste kwadrant.
Als $p > 3$, dan is er ook nog een derde gemeenschappelijk punt in het derde kwadrant.
Als $-3 < p < 0$ dan is er een tweede snijpunt in het vierde kwadrant.

© Noordhoff Uitgevers bv

Als $p \le -3$ dan is (0, 0) het enige snijpunt.
Conclusie: voor $p \le -3$ is er één gemeenschappelijk punt en voor $-3 < p \le 3$ zijn er twee gemeenschappelijke punten.

X9 **a** $f'_p(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot px - p\ln(x)}{(px)^2} = \dfrac{p - p\ln(x)}{(px)^2}$

$f'(x) = 0$ geeft $\ln(x) = 1$, dus $x = e$.

$f(e) = \dfrac{\ln(e)}{pe} = \dfrac{1}{pe}$

De maximale y-coördinaat is 2 als $\dfrac{1}{pe} = 2$ dus als $p = \dfrac{1}{2e}$.

b $f_p(x) = 0$ geeft $x = 1$.

$f'(1) = \dfrac{p - p \cdot 0}{p^2} = \dfrac{1}{p}$

De richtingscoëfficiënt is $\tan(60°) = \sqrt{3}$ of $\tan(120°) = -\sqrt{3}$.

$\dfrac{1}{p} = \sqrt{3}$ geeft $p = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ en $\dfrac{1}{p} = -\sqrt{3}$ geeft $p = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

c $f_{-2}(x) = \dfrac{\ln(x)}{-2x}$

$\dfrac{\ln(x)}{-2x} = a$ geeft snijpunt $B\left(x_B, -\dfrac{\ln(x_B)}{2x_B}\right)$ en $C\left(x_C, -\dfrac{\ln(x_C)}{2x_C}\right)$ met $x_C = 3x_B$.

$\dfrac{\ln(x_B)}{2x_B} = \dfrac{\ln(x_C)}{2x_C}$ geeft $\dfrac{\ln(x_B)}{2x_B} = \dfrac{\ln(3x_B)}{2 \cdot 3x_B}$

$\dfrac{\ln(x_B)}{x_B} = \dfrac{\ln(3) + \ln(x_B)}{3x_B}$

$3\ln(x_B) = \ln(3) + \ln(x_B)$

$2\ln(x_B) = \ln(3)$

$\ln(x_B) = \frac{1}{2}\ln(3) = \ln(\sqrt{3})$, dus $x_B = \sqrt{3}$.

$a = -\dfrac{\ln(x_B)}{2x_B} = -\dfrac{\ln(\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}$

X10 **a** Zowel de teller als de noemer zijn voor elke waarde van x positief.

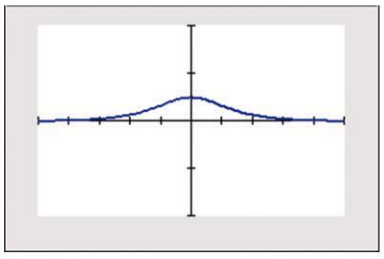
b $g'(x) = \dfrac{e^x(1 + e^{2x}) - e^x \cdot 2e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2} = \dfrac{e^x + e^{3x} - 2e^{3x}}{(1 + e^{2x})^2} = \dfrac{e^x - e^{3x}}{(1 + e^{2x})^2}$

$g'(x) = 0$ geeft $e^x - e^{3x} = 0$.

$e^x = e^{3x}$

$x = 3x$

$x = 0$



Uit de plot blijkt dat het maximum $g(0) = \dfrac{e^0}{1 + e^0} = \dfrac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c Aangetoond moet worden dat $g(-x) = g(x)$ voor elke waarde van x.

$g(-x) = \dfrac{e^{-x}}{1 + e^{-2x}}$

Teller en noemer vermenigvuldigen met e^{2x} geeft $g(-x) = \dfrac{e^{x}}{e^{2x} + 1} = g(x)$.

d $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{-x} - \dfrac{e^{x}}{1 + e^{2x}}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{e^{x}} - \dfrac{e^{x}}{1 + e^{2x}}\right)$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1 + e^{2x}}{e^{x}(1 + e^{2x})} - \dfrac{e^{x} \cdot e^{x}}{e^{x}(1 + e^{2x})}\right)$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{e^{x}(1 + e^{2x})}\right) = 0$

21.6 Gemengde opdrachten

38 **a** $f_a'(x) = e^{x} - a$

$f_a'(x) = 0$ geeft $e^{x} - a = 0$ ofwel $e^{x} = a$.

Hieruit volgt dat $x = \ln(a)$ en dan moet $a > 0$.

De coördinaten van de top zijn $(\ln(a), a - a\ln(a))$.

b $x = 0$ geeft $\ln(a) = 0$, dus $a = 1$.

c Als f_a de x-as raakt, dan moet gelden $f_a(x) = 0$ én $f_a'(x) = 0$.

$e^{x} - ax = 0$ en $e^{x} - a = 0$

$e^{x} = ax$ en $e^{x} = a$

$ax = a$, dus $x = 1$ en $a = e$.

39 **a** $f_0(x) = \dfrac{(x - 0)(x - 0)}{x} = \dfrac{x^2}{x}$

Voor $x \neq 0$ is $f_0(x) = x$.

$\lim\limits_{x\uparrow 0}\dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\uparrow 0} x = 0$ en ook $\lim\limits_{x\downarrow 0}\dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\downarrow 0} x = 0$,

De grafiek is de lijn $y = x$ met een perforatie bij $(0, 0)$.

b $f_a(x) = \dfrac{(x - a)(x - 9a)}{x - 10a} = \dfrac{x^2 - 10ax + 9a^2}{x - 10a}$

$f_a'(x) = \dfrac{(2x - 10a)(x - 10a) - (x^2 - 10ax + 9a^2) \cdot 1}{(x - 10a)^2}$

$= \dfrac{2x^2 - 30ax + 100a^2 - x^2 + 10ax - 9a^2}{(x - 10a)^2}$

$= \dfrac{x^2 - 20ax + 91a^2}{(x - 10a)^2} = \dfrac{(x - 7a)(x - 13a)}{(x - 10a)^2}$

$f_a(x) = 0$ geeft $x = 7a$ of $x = 13a$

$f_a(7a) = \dfrac{(7a - a)(7a - 9a)}{7a - 10a} = \dfrac{6a \cdot -2a}{-3a} = 4a$

$f_a(13a) = \dfrac{(13a - a)(13a - 9a)}{13a - 10a} = \dfrac{12a \cdot 4a}{3a} = 16a$

De toppen zijn $(7a, 4a)$ en $(13a, 16a)$.

c Voor de toppen $(7a, 4a)$ geldt $x = 7a$ en $y = 4a = 4 \cdot \dfrac{x}{7} = \frac{4}{7}x$.

Voor de toppen $(13a, 16a)$ geldt $x = 13a$ en $y = 16a = 16 \cdot \dfrac{x}{13} = \frac{16}{13}x$.

De toppen liggen op de lijnen $y = \frac{4}{7}x$ en $y = \frac{16}{13}x$.

© Noordhoff Uitgevers bv

40 **a** In het raakpunt moet gelden $f(x) = 0$ en $f'(x) = 0$.
$f(x) = 0$ geeft $4(x^2 - 2x + 1) = 0$ ofwel $(x - 1)^2 = 0$, dus $x = 1$.

$$f'(x) = \frac{(8x - 8)(2x - 3) - 2(4x^2 - 8x + 4)}{(2x - 3)^2}$$

$$= \frac{16x^2 - 40x + 24 - 8x^2 + 16x - 8}{(2x - 3)^2}$$

$$= \frac{8x^2 - 24x + 16}{(2x - 3)^2} = \frac{8(x^2 - 3x + 2)}{(2x - 3)^2}$$

$f'(x) = 0$ geeft $(x - 1)(x - 2) = 0$, dus $x = 1$ of $x = 2$.
De grafiek raakt de x-as in het punt $(1, 0)$.

b Voor een verticale asymptoot moet gelden $2x - 3 = 0$.
De verticale asymptoot heeft als vergelijking $x = 1\frac{1}{2}$.
De vergelijking van de scheve asymptoot vind je met uitdelen:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 8x + 4}{2x - 3}$$

$$f(x) = \frac{2x(2x - 3) + 6x - 8x + 4}{2x - 3}$$

$$f(x) = 2x - \frac{2x - 4}{2x - 3} \text{ ofwel } f(x) = 2x - \frac{2x - 3 - 1}{2x - 3}$$

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{2x - 3}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{2x - 3} = 0 \left(\text{en ook } \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2x - 3} = 0 \right)$$

De scheve asymptoot heeft als vergelijking $y = 2x - 1$.

c De oppervlakte is

$$-\int_0^1 f(x)\,dx = -\int_0^1 \left(2x - 1 + \frac{1}{2x - 3}\right) dx = -\left[x^2 - x + \tfrac{1}{2}\ln(|2x - 3|)\right]_0^1$$

$$= -(1 - 1 + \tfrac{1}{2}\ln(1)) + (0 - 0 + \tfrac{1}{2}\ln(3)) = \tfrac{1}{2}\ln(3) \text{ (of } \ln(\sqrt{3})).$$

d Er is een perforatie als teller en noemer beide 0 zijn.
De teller is 0 als $x = 1$ (zie a) en de noemer is 0 voor $x = \frac{1}{2}a$.
Voor $a = 2$ heeft de grafiek een perforatie.

41 **a** $f(x) = x^3 - 3x^2 - 18x$
$f'(x) = 3x^2 - 6x - 18$
$f''(x) = 6x - 6$
$f''(x) = 0$ als $6x - 6 = 0$, dit geeft $x = 1$.
$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 = -20$
De coördinaten van het buigpunt zijn $(1, -20)$.

b Door de grafiek 20 omhoog en 1 naar links te verschuiven ontstaat de grafiek van een functie g met het buigpunt in $(0, 0)$.
Dan moet bewezen worden dat de grafiek van g symmetrisch is in $(0, 0)$ door aan te tonen dat g een oneven functie is.
$g(x) = f(x + 1) + 20$
$g(x) = (x + 1)^3 - 3(x + 1)^2 - 18(x + 1) + 20$
$g(x) = (x + 1)((x + 1)^2 - 3(x + 1) - 18) + 20$
$g(x) = (x + 1)(x^2 + 2x + 1 - 3x - 3 - 18) + 20$
$g(x) = (x + 1)(x^2 - x - 20) + 20$
$g(x) = x^3 - x^2 - 20x + x^2 - x - 20 + 20$
$g(x) = x^3 - 21x$
$g(x)$ is een oneven functie, dus symmetrisch in $(0, 0)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c $f(x) = x^3 - 3x^2 - 18x$
$f(x) = x(x^2 - 3x - 18)$
$f(x) = x(x + 3)(x - 6)$
$f(x) = 0$ geeft $x = -3$ of $x = 0$ of $x = 6$.
$A(-3, 0)$, $O(0, 0)$ en $B(6, 0)$
De middelloodlijn van lijnstuk OA heeft vergelijking $x = -1\frac{1}{2}$.
$f\left(-1\frac{1}{2}\right) = -1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} \cdot -7\frac{1}{2} = 16\frac{7}{8}$, dus $C\left(-1\frac{1}{2}, 16\frac{7}{8}\right)$.
$f'(x) = 3x^2 - 6x - 18$
De raaklijn in C heeft richtingscoëfficiënt
$f'\left(-1\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \left(-1\frac{1}{2}\right)^2 - 6 \cdot -1\frac{1}{2} - 18 = -2\frac{1}{4}$.
De lijn BC heeft richtingscoëfficiënt $\frac{y_c - y_B}{x_C - x_B} = \frac{16\frac{7}{8} - 0}{-1\frac{1}{2} - 6} = -2\frac{1}{4}$, dus de raaklijn gaat door B.

Onderzoeksopdrachten

42 **a** f_a is niet gedefinieerd als $a + \sin(x) \leq 0$ voor elke waarde van x.
Omdat voor elke waarde van x geldt dat $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, is dat het geval als $a \leq -1$.

b Er moet dan gelden $f_a(x) = 0$ en $f_a'(x) = 0$.
$f_a(x) = 0$ geeft $f_a(x) = \ln(a + \sin(x)) = 0$.

$a + \sin(x) = 1$
$f_a'(x) = \frac{\cos(x)}{a + \sin(x)}$
$f_a'(x) = 0$ geeft $\cos(x) = 0$, dus $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.
Voor deze waarden van x is $\sin(x) = -1$ of $\sin(x) = 1$.
Dan moet $a + 1 = 1$ of $a - 1 = 1$.
Dit geeft $a = 0$ of $a = 2$.

c *Buigpunten*
Er zijn buigpunten als $f''(x) = 0$.
$f_a''(x) = \frac{-\sin(x)(a + \sin(x)) - \cos(x) \cdot \cos(x)}{(a + \sin(x))^2} = \frac{-a\sin(x) - 1}{(a + \sin(x))^2}$
$f''_a(x) = 0$ geeft $\sin(x) = -\frac{1}{a}$ mits $\sin(x) \neq -a$.
Er zijn oplossingen als $-1 < -\frac{1}{a} < 1$ of ook $-1 < \frac{1}{a} < 1$.
(voor $-\frac{1}{a} = 1$ (dus $a = -1$) en $-\frac{1}{a} = -1$ (dus $a = 1$) zijn teller en noemer van $f''_a(x)$ beide 0).
Dus $a < -1$ of $a > 1$.
Voor $a \leq -1$ is de functie niet gedefinieerd.
Conclusie: als $a > 1$ heeft de grafiek van f_a buigpunten.
Verticale asymptoten
Er zijn verticale asymptoten als de noemer nul is, dus als de vergelijking $a + \sin(x) = 0$ oplossingen heeft.
$\sin(x) = -a$
$-1 \leq a \leq 1$ ($a = -1$ voldoet niet, want dan is f_a niet gedefinieerd)
Conclusie: als $-1 < a \leq 1$ heeft de grafiek van f_a verticale asymptoten.

© Noordhoff Uitgevers bv

43 $f_a(x) = \dfrac{x^2 - 6x - 7}{x - a} = \dfrac{(x + 1)(x - 7)}{x - a}$

Verticale asymptoot

Er is een verticale asymptoot als $x - a = 0$ en $x^2 - 6x - 7 \neq 0$.

$x^2 - 6x - 7 = 0$

$(x - 7)(x + 1) = 0$

$x = 7$ of $x = -1$

Conclusie: er is een verticale asymptoot voor $a \neq -1$ en $a \neq 7$.

Scheve asymptoot

Er is een scheve asymptoot met vergelijking $y = mx + n$ als $\lim\limits_{x \to \infty}(f_a(x) - (mx + n)) = 0$ en $a \neq -1$ en $a \neq 7$.

$f_a(x) = \dfrac{x^2 - 6x - 7}{x - a}$ ofwel $f_a(x) = \dfrac{x^2 - ax + ax - 6x - 7}{x - a}$

$f_a(x) = \dfrac{x(x - a) + ax - 6x - 7}{x - a}$

$f_a(x) = x + \dfrac{ax - 6x - 7}{x - a}$

$f_a(x) = x + \dfrac{(a - 6)x - (a - 6)a + (a - 6)a - 7}{x - a}$

$f_a(x) = x + a - 6 + \dfrac{(a - 6)a - 7}{x - a}$

$f_a(x) = x + a - 6 + \dfrac{a^2 - 6a - 7}{x - a}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a^2 - 6a - 7}{x - a} = 0$

Conclusie: er is een scheve asymptoot met vergelijking $y = x + a - 6$ voor $a \neq -1$ en $a \neq 7$.

Perforatie

Voor $a = -1$ en $a = 7$ is de grafiek een rechte lijn met een perforatie.

Voor $a = -1$ is dat de lijn $y = x - 7$ met een perforatie in het punt $(-1, -8)$.

Voor $a = 7$ is dat de lijn $y = x + 1$ met een perforatie in het punt $(7, 8)$.

Samenvatting

S1 a $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 4} = \dfrac{x(x^2 + x - 2)}{(x + 2)(x - 2)} = \dfrac{x(x + 2)(x - 1)}{(x + 2)(x - 2)}$

$\lim\limits_{x \uparrow -2} \dfrac{x(x + 2)(x - 1)}{(x + 2)(x - 2)} = \lim\limits_{x \uparrow -2} \dfrac{x(x - 1)}{x - 2} = \dfrac{-2 \cdot -3}{-4} = 1\frac{1}{2}$ en ook

$\lim\limits_{x \downarrow -2} \dfrac{x(x + 2)(x - 1)}{(x + 2)(x - 2)} = 1\frac{1}{2}$, dus een perforatie in $\left(-2, 1\frac{1}{2}\right)$.

b Voor $x \geq \frac{1}{2}$ geldt $g(x) = \dfrac{2x - 1}{2 - 4x} = -\dfrac{2x - 1}{2(2x - 1)}$ en voor $x < \frac{1}{2}$ geldt

$g(x) = \dfrac{-(2x - 1)}{2 - 4x} = \dfrac{2x - 1}{2(2x - 1)}$

$\lim\limits_{x \uparrow \frac{1}{2}} g(x) = \lim\limits_{x \uparrow \frac{1}{2}} \dfrac{2x - 1}{2(2x - 1)} = \lim\limits_{x \uparrow \frac{1}{2}} \dfrac{1}{2} = \frac{1}{2}$ en $\lim\limits_{x \downarrow \frac{1}{2}} g(x) = \lim\limits_{x \downarrow \frac{1}{2}} -\dfrac{2x - 1}{2(2x - 1)} = \lim\limits_{x \downarrow \frac{1}{2}} -\dfrac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

De grafiek van g heeft een sprong bij $x = \frac{1}{2}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

S2 $|x+3| = x+3$ voor $x \geq -3$ en $|x+3| = -x-3$ voor $x < -3$.
$2 - 4x \geq 0$ geeft $-4x \geq -2$, dus $x \leq \frac{1}{2}$.
$|2-4x| = 2-4x$ voor $x \leq \frac{1}{2}$ en $|2-4x| = -2+4x$ voor $x > \frac{1}{2}$.
Voor $x < -3$ geldt $f(x) = -x-3-(2-4x)$ ofwel $f(x) = -x-3-2+4x$,
dus $f(x) = 3x-5$.
Voor $-3 \leq x \leq \frac{1}{2}$ geldt $f(x) = x+3-(2-4x)$ ofwel $f(x) = x+3-2+4x$, dus
$f(x) = 5x+1$.
Voor $x > \frac{1}{2}$ geldt $f(x) = x+3-(-2+4x)$ ofwel $f(x) = x+3+2-4x$, dus
$f(x) = -3x+5$.

S3 $f(x) = x|x^2-x-2| = x|(x+1)(x-2)|$
$y = (x+1)(x-2)$ is de vergelijking van een dalparabool.
Voor $-1 < x < 2$ is $(x+1)(x-2) < 0$ en voor $x \leq -1$ of $x \geq 2$ is
$(x+1)(x-2) \geq 0$.
$f(x) = -x(x^2-x-2)$ voor $-1 < x < 2$ en
$f(x) = x(x^2-x-2)$ voor $x \leq -1$ of $x \geq 2$
Er is een knik in de punten $(-1, 0)$ en $(2, 0)$.
$\lim\limits_{x \uparrow -1} f'(x) = \lim\limits_{x \uparrow -1} (3x^2-2x-2) = 3 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot -1 - 2 = 3$
$\lim\limits_{x \downarrow -1} f'(x) = \lim\limits_{x \downarrow -1} (-3x^2+2x+2) = -3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot -1 + 2 = -3$
$\lim\limits_{x \uparrow 2} f'(x) = \lim\limits_{x \uparrow 2} (-3x^2+2x+2) = -3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 2 = -6$
$\lim\limits_{x \downarrow 2} f'(x) = \lim\limits_{x \downarrow 2} (3x^2-2x-2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 2 = 6$
De richtingscoëfficiënten zijn 3 en -3 in het punt $(-1, 0)$ en
6 en -6 in het punt $(2, 0)$.

S4 $f(x) = x\sqrt{x+6}$ voor $x \geq 0$ en $f(x) = -x\sqrt{x+6}$ voor $-6 \leq x < 0$.
$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{x+6} + x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x+6}} = \dfrac{2(x+6)+x}{2\sqrt{x+6}} = \dfrac{3x+12}{2\sqrt{x+6}}$ voor $x \geq 0$.
$f'(x) = -\dfrac{3x+12}{2\sqrt{x+6}}$ voor $-6 \leq x < 0$.
$f'(x) = 0$ geeft $3x+12 = 0$, dus $x = -4$.
Uit de figuur naast de vaardigheid boven S4 blijkt dat er een randminimum
$f(-6) = 0$, een maximum $f(-4) = --4\sqrt{-4+6} = 4\sqrt{2}$ en een minimum
$f(0) = 0$ is.

S5 $f(x) = (x+1)(x-3)(x+5)$
$f(x) = (x+1)(x^2+2x-15)$
$f(x) = x^3+2x^2-15x+x^2+2x-15$
$f(x) = x^3+3x^2-13x-15$
$f'(x) = 3x^2+6x-13$
$f''(x) = 6x+6$
$f''(x) = 0$ geeft $6x+6 = 0$ dus $x = -1$.
Uit een plot blijkt dat dit een buigpunt is.
$f(-1) = 0$, dus het buigpunt heeft coördinaten $(-1, 0)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

S6 Er moet dan worden aangetoond dat $\lim_{x\to\infty}(f(x)-(1-2x))=0$ of dat $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(1-2x))=0$.

$$f(x)-(1-2x)=\frac{-2x^3+x^2+x-1}{x^2-1}-(1-2x)$$

$$f(x)-(1-2x)=\frac{-2x^3+x^2+x-1}{x^2-1}-\frac{(1-2x)(x^2-1)}{x^2-1}$$

$$f(x)-(1-2x)=\frac{-2x^3+x^2+x-1-(x^2-1-2x^3+2x)}{x^2-1}$$

$$f(x)-(1-2x)=\frac{-2x^3+x^2+x-1-x^2+1+2x^3-2x)}{x^2-1}$$

$$f(x)-(1-2x)=\frac{-x}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{1-0}=0\left(\text{en ook }\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x^2-1}=0\right)$$

Een vergelijking van de scheve asymptoot is daarom $y=1-2x$.

S7 $f(x)=\frac{4x^3+5x-1}{7-2x^2}$ ofwel $f(x)=-\frac{4x^3+5x-1}{2x^2-7}$

$$f(x)=-\frac{2x(2x^2-7)+14x+5x-1}{2x^2-7}$$

$$f(x)=-2x-\frac{19x-1}{2x^2-7}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{19x-1}{2x^2-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{19}{x}-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{7}{x^2}}=\frac{0-0}{2-0}=0$$

Een vergelijking van de scheve asymptoot is $y=-2x$.

S8 **a** $f(x)=g(x)$ geeft $(x^2-4)(3-x)=4x-12$

$3x^2-x^3-12+4x=4x-12$

$3x^2-x^3=0$

$x^2(3-x)=0$

$x=0$ of $x=3$

$f'(x)=6x-3x^2+4$ en $g'(x)=4$

$f(0)=-12$ en $g(0)=-12$; ook is $f'(0)=4=g'(0)$,

dus de grafieken raken elkaar in $A(0,-12)$.

b Voor punt B geldt $x=3$.

$f'(3)=6\cdot3-3\cdot3^2+4=-5$ en $g'(3)=4$

$\tan(\alpha)=5$ geeft $\alpha\approx78{,}7°$ en $\tan(\beta)=4$ geeft $\beta\approx76{,}0°$.

De hoek tussen de raaklijnen in B is $180°-(78{,}7°+76{,}0°)\approx25°$.

c Voor de extreme waarden geldt $f'(x)=0$

$6x-3x^2+4=0$

$-3x^2+6x+4=0$

$x=\frac{-6-\sqrt{84}}{-6}=2{,}527\ldots$ of $x=\frac{-6+\sqrt{84}}{-6}=-0{,}527\ldots$

$f(2{,}527\ldots)\approx1{,}13$ en $f(-0{,}527\ldots)\approx-13{,}13$

maximum $f(2{,}53)=1{,}13$ en minimum $f(-0{,}53)=-13{,}13$

© Noordhoff Uitgevers bv

d $f'(x) = 6x - 3x^2 + 4$
$f''(x) = 6 - 6x$
$f''(x) = 0$ geeft $6 - 6x = 0$ dus $x = 1$.
$f(1) = -3 \cdot 2 = -6$ dus de coördinaten van het buigpunt zijn $(1, -6)$.

e Verschuif de grafiek van f 1 naar links en 6 naar boven en bewijs dat de beeldgrafiek symmetrisch is in $O(0, 0)$.
De beeldgrafiek is de grafiek van $k(x) = f(x + 1) + 6$
$k(x) = ((x + 1)^2 - 4)(3 - (x + 1)) + 6$
$k(x) = (x^2 + 2x - 3)(2 - x) + 6$
$k(x) = 2x^2 + 4x - 6 - x^3 - 2x^2 + 3x + 6$
$k(x) = -x^3 + 7x$
k is een oneven functie, dus puntsymmetrisch in O.

f $h(x) = \dfrac{4(x-3)}{(x^2-4)(3-x)}$ ofwel $h(x) = \dfrac{-4}{x^2-4}$ voor $x \neq 3$

$\lim\limits_{x \uparrow 3} \dfrac{-4}{x^2-4} = \lim\limits_{x \downarrow 3} \dfrac{-4}{x^2-4} = -\frac{4}{5}$

$h\left(-\frac{4}{5}\right) = \dfrac{-4}{\left(-\frac{5}{4}\right)^2 - 4} = \frac{64}{39}$

De grafiek heeft een perforatie in $\left(3, -\frac{4}{5}\right)$.

g De grafiek heeft verticale asymptoten als $x^2 - 4 = 0$.
De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = -2$ en $x = 2$.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-4}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-4}{x^2-4} = 0$ dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 0$.

Test jezelf

T1 **a** De grafiek heeft een knik als $x + 2 = 0$, dus als $x = -2$.
$f(-2) = 0$, dus A is het punt $(-2, 0)$.

b $f(x) = (x + 2)\sqrt{x^2 + 1}$ als $x \geq -2$ en $f(x) = -(x + 2)\sqrt{x^2 + 1}$ als $x < -2$.
Als $x > -2$ geldt $f'(x) = 1 \cdot \sqrt{x^2 + 1} + (x + 2) \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \sqrt{x^2 + 1} + \dfrac{x(x+2)}{\sqrt{x^2 + 1}}$

en als $x < -2$ geldt $f'(x) = -\sqrt{x^2 + 1} - \dfrac{x(x+2)}{\sqrt{x^2 + 1}}$

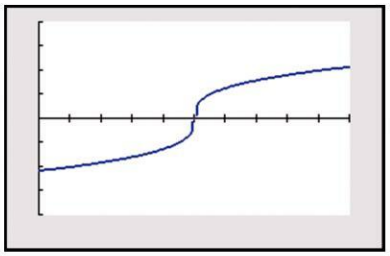
De richtingscoëfficiënten zijn: $\lim\limits_{x \downarrow -2} f'(x) = \sqrt{5}$ en $\lim\limits_{x \uparrow -2} f'(x) = -\sqrt{5}$.

T2 **a** $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 6x + 9} = \sqrt[3]{(x-3)^2}$
Omdat $(x - 3)^2 \geq 0$ is de kleinste waarde van $f(3) = \sqrt[3]{0} = 0$.
Het minimum is $f(3) = 0$.

b $g(x) = \sqrt[3]{2x - 10} = (2x - 10)^{\frac{1}{3}}$
$g'(x) = \frac{1}{3}(2x - 10)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 = \dfrac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{(2x-10)^2}}$
Bij $x = 5$ is $g(5) = 0$ en $\lim\limits_{x \uparrow 5} \dfrac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{(2x-10)^2}} = -\infty$.

Er is sprake van een verticale raaklijn in het punt $(5, 0)$.

© Noordhoff Uitgevers bv



Een plot van g laat zien dat de functie daar overgaat van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.

c Het buigpunt is (5, 0) en de buigraaklijn heeft vergelijking $x = 5$.

T3 **a** Er moet worden aangetoond dat $\lim_{x\to\infty}\left(f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{4}\right)\right) = 0$ of dat $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{4}\right)\right) = 0$.

$$f(x) - \left(-\tfrac{1}{2}x + 2\tfrac{1}{4}\right) = \frac{-x^2 + 5x - 6}{2x - 1} - \left(-\tfrac{1}{2}x + 2\tfrac{1}{4}\right)$$

$$f(x) - \left(-\tfrac{1}{2}x + 2\tfrac{1}{4}\right) = \frac{-x^2 + 5x - 6}{2x - 1} - \frac{\left(-\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{4}\right)(2x - 1)}{2x - 1}$$

$$f(x) - \left(-\tfrac{1}{2}x + 2\tfrac{1}{4}\right) = \frac{-x^2 + 5x - 6}{2x - 1} - \frac{-x^2 + 5x - 2\frac{1}{4}}{2x - 1}$$

$$f(x) - \left(-\tfrac{1}{2}x + 2\tfrac{1}{4}\right) = \frac{-3\frac{3}{4}}{2x - 1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x) - \left(-\tfrac{1}{2}x + 2\tfrac{1}{4}\right)\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{-3\frac{3}{4}}{2x - 1} = 0$$

Dus de lijn met vergelijking $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{4}$ is een scheve asymptoot van de grafiek van f.

b $g(x) = \dfrac{1 - 3x + x^2}{x + 5}$ ofwel $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x + 5}$

$$g(x) = \frac{x^2 + 5x - 5x - 3x + 1}{x + 5}$$

$$g(x) = \frac{x(x + 5) - 8x + 1}{x + 5} \text{ dus } g(x) = x + \frac{-8x + 1}{x + 5}$$

$$g(x) = x + \frac{-8x - 40 + 40 + 1}{x + 5} \text{ dus } g(x) = x + \frac{-8(x + 5) + 40 + 1}{x + 5}$$

$$g(x) = x - 8 + \frac{41}{x + 5}$$

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{41}{x + 5} = 0$, dus de scheve asymptoot heeft vergelijking $y = x - 8$.

T4 $$f(x) = \frac{x|x + 3|}{2x^2 - 18} = \frac{x|x + 3|}{2(x^2 - 9)} = \frac{x|x + 3|}{2(x + 3)(x - 3)}$$

$$f(x) = \frac{x(x + 3)}{2(x + 3)(x - 3)} = \frac{x}{2(x - 3)} \text{ als } x > -3 \text{ en } f(x) = \frac{-x}{2(x - 3)} \text{ als } x < -3$$

De grafiek van f heeft een verticale asymptoot $x = 3$.
Bij $x = -3$ kan er een perforatie of een sprong zijn.
$\lim_{x\uparrow-3} f(x) = -\frac{1}{4}$ en $\lim_{x\downarrow-3} f(x) = \frac{1}{4}$ dus er is een sprong bij $x = -3$.

© Noordhoff Uitgevers bv

T5 **a** $f(x) = 0$ geeft $x^2 + 8x + 12 = 0$
$(x + 2)(x + 6) = 0$
$x = -2$ en $x = -6$

b Voor het domein geldt: $x^2 + 8x + 12 \geq 0$ ofwel $(x + 2)(x + 6) \geq 0$.
De grafiek van $y = (x + 2)(x + 6)$ is een dalparabool dus het domein is $\langle \leftarrow, -6] \cup [-2, \rightarrow \rangle$.

c $g(x) = f(x - 4)$
$g(x) = \sqrt{(x - 4)^2 + 8(x - 4) + 12}$
$g(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 16 + 8x - 32 + 12}$
$g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

d De grafiek van g heeft symmetrie in de y-as.

e De grafiek van f heeft symmetrie in de lijn $x = -4$.

T6 **a** $f(x) = 4x + 1 + \dfrac{12}{e^x + 1}$ ofwel $f(x) = 4x + 1 + 12(e^x + 1)^{-1}$
$f'(x) = 4 - 12(e^x + 1)^{-2} \cdot e^x$
$f'(x) = 4 - \dfrac{12e^x}{(e^x + 1)^2}$
$f'(x) = 0$ geeft $\dfrac{12e^x}{(e^x + 1)^2} = 4$ ofwel $\dfrac{3e^x}{(e^x + 1)^2} = 1$.
Stel $e^x = t$ dan wordt de vergelijking $\dfrac{3t}{(t + 1)^2} = 1$.
$(t + 1)^2 = 3t$
$t^2 + 2t + 1 = 3t$
$t^2 - t + 1 = 0$
$D = 1 - 4 = -3$
$D < 0$, dus deze vergelijking heeft geen oplossingen.
Er zijn geen extreme waarden omdat de afgeleide voor geen enkele waarde van x nul is.

b $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{12}{e^x + 1} \right) = 0$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{12}{e^x + 1} \right) = \dfrac{12}{0 + 1} = 12$
De lijn met vergelijking $y = 4x + 1$ is een scheve asymptoot (naar rechts) en de lijn met vergelijking $y = 4x + 1 + 12$ ofwel $y = 4x + 13$ is een scheve asymptoot (naar links).

T7 **a** $f_1(x) = (x^2 - x) \cdot e^x$
$f_1'(x) = (2x - 1) \cdot e^x + (x^2 - x) \cdot e^x$
$f_1'(x) = (x^2 + x - 1) \cdot e^x$
$f_1'(x) = 0$ geeft $x^2 + x - 1 = 0$
$x = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ of $x = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$
De x-coördinaten van de toppen zijn $x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ en $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

b $f_1'(x) = (x^2 + x - 1) \cdot e^x$
$f_1''(x) = (2x + 1) \cdot e^x + (x^2 + x - 1) \cdot e^x$
$f_1''(x) = (x^2 + 3x) \cdot e^x$
$f_1''(x) = 0$ geeft $x^2 + 3x = 0$
$x(x + 3) = 0$
$x = 0$ en $x = -3$
$f(0) = 0 \cdot e^0 = 0$ en $f(-3) = (9 - -3) \cdot e^{-3} = \dfrac{12}{e^3}$
De buigpunten zijn $(0, 0)$ en $\left(-3, \dfrac{12}{e^3}\right)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c Een extreme waarde voor $x = 1$ betekent $f_p'(1) = 0$.
$f_p'(x) = (2x - p) \cdot e^x + (x^2 - px) \cdot e^x$
$f_p'(x) = (x^2 + 2x - px - p) \cdot e^x$
$f_p'(1) = (1 + 2 - p - p) \cdot e^1 = (3 - 2p) \cdot e$
$f_p'(1) = 0$ geeft $3 - 2p = 0$, dus $p = 1\frac{1}{2}$.

d $f_p''(x) = (2x + 2 - p) \cdot e^x + (x^2 + 2x - px - p) \cdot e^x$
$f_p''(x) = (x^2 + 4x - px + 2 - 2p) \cdot e^x$
$f_p''(x) = 0$ geeft $x^2 + (4 - p)x + 2 - 2p = 0$.
$D = (4 - p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2 - 2p)$
$D = 16 - 8p + p^2 - 8 + 8p$
$D = p^2 + 8$
$D > 0$ voor elke waarde van p, dus er zijn altijd twee oplossingen voor $f_p''(x) = 0$ en daarmee zijn er altijd twee buigpunten.

T8 **a** Voor het domein moet gelden $\frac{x}{x-1} > 0$.
Dit is het geval als $x > 0$ en $x - 1 > 0$ of als $x < 0$ en $x - 1 < 0$.
Dus $x > 1$ of $x < 0$. Het domein is $\langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 1, \rightarrow\rangle$.

b $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0$ geeft $\frac{x}{x-1} = 1$ ofwel $x = x - 1$ en deze vergelijking heeft geen oplossing.

c $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ ofwel $f(x) = \ln(x) - \ln(x - 1)$.
$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$
$f'(x) = \frac{x-1}{x(x-1)} - \frac{x}{x(x-1)}$
$f'(x) = \frac{-1}{x(x-1)}$
$f'(x) = 0$ heeft geen oplossing, dus er zijn geen extreme waarden.

d $\lim\limits_{x \uparrow 0} \frac{x}{x-1} = 0$, dus $\lim\limits_{x \uparrow 0} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = \lim\limits_{x \uparrow 0} \ln\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{x}}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x \downarrow 1} \frac{x}{x-1} = \infty$, dus $\lim\limits_{x \downarrow 1} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{x}}\right) = \infty$

e Uit opdracht d volgt dat er een verticale asymptoot is met vergelijking $x = 0$ en een verticale asymptoot is met vergelijking $x = 1$.
$\lim\limits_{x \to \infty} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \ln\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{x}}\right) = \ln(1) = 0$, dus de lijn $y = 0$ is een horizontale asymptoot van de grafiek.

© Noordhoff Uitgevers bv

T**9** **a** $f(x) - x = \sqrt{x^2 + 5} - x$

$$f(x) - x = \frac{\left(\sqrt{x^2 + 5} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + 5} + x\right)}{\sqrt{x^2 + 5} + x}$$

$$f(x) - x = \frac{x^2 + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 + 5} + x}$$

$$f(x) - x = \frac{5}{\sqrt{x^2 + 5} + x}$$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5}{\sqrt{x^2 + 5} + x} = 0$, dus de lijn $y = x$ is een scheve asymptoot van de grafiek.

b $f(x) - (-x) = \sqrt{x^2 + 5} + x$

$$f(x) - (-x) = \frac{(\sqrt{x^2 + 5} + x)(\sqrt{x^2 + 5} - x)}{\sqrt{x^2 + 5} - x}$$

$$f(x) - (-x) = \frac{x^2 + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 + 5} - x}$$

$$f(x) - (-x) = \frac{5}{\sqrt{x^2 + 5} - x}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5}{\sqrt{x^2 + 5} + x} = 0$, dus de lijn $y = -x$ is ook een scheve asymptoot van de grafiek.

© Noordhoff Uitgevers bv

22 Afsluiting meetkunde

Voorkennis

V1 **a** Vierhoek $AFDE$ is een parallellogram, omdat overstaande zijden evenwijdig zijn. Hieruit volgt $ED = AF = 3$.
Omdat $\triangle EDC \sim \triangle ABC$ geldt de verhoudingstabel:

$\triangle EDC$	$ED = 3$	$EC = \ldots$	$DC = \ldots$
$\triangle ABC$	$AB = 9$	$AC = 7$	$BC = 8$

$EC = \frac{3 \times 7}{9} = \frac{21}{9} = 2\frac{1}{3}$ en $DC = \frac{3 \times 8}{9} = \frac{24}{9} = 2\frac{2}{3}$

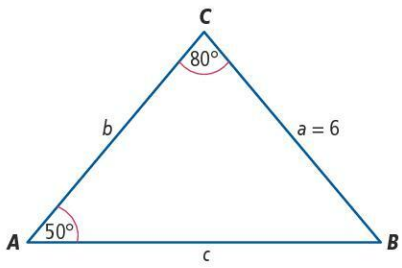
b Uit $AB = 9$ en $FB = 6$ volgt de vergrotingsfactor is $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

V2 Stel de tophoek van beide driehoeken is γ.
Dan zijn elk van de basishoeken $\frac{1}{2}(180° - \gamma) = 90° - \frac{1}{2}\gamma$.
Van beide driehoeken zijn de overeenkomstige hoeken gelijk.
Hieruit volgt: de driehoeken zijn gelijkvormig.

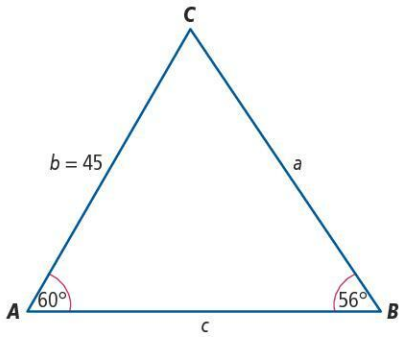
V3 **a** $MA = \frac{1}{2}AD = 5$
De stelling van Pythagoras in $\triangle ABM$ geeft $BM = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$.
Uit $\angle AMS = \angle CBS$ (Z-hoeken) en $\angle MAS = \angle BCS$ (Z-hoeken) volgt $\triangle AMS \sim \triangle CBS$.
De vergrotingsfactor is $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.
Lijnstuk BM wordt verdeeld in $BS : MS = 2 : 1$.
Dan is $BS = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3} \cdot 13 = 8\frac{2}{3}$.

b De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft $AC = \sqrt{12^2 + 10^2} = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}$.
Uit $\angle TAB = \angle TCN$ (Z-hoeken) en $\angle ABT = \angle CNT$ (Z-hoeken) volgt $\triangle ABT \sim \triangle CNT$.
De vergrotingsfactor is $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.
Diagonaal AC wordt verdeeld in $AT : CT = 3 : 1$.
Dan is $AT = \frac{3}{4}AC = 1\frac{1}{2}\sqrt{61}$.

V4 **a** $\beta = 180° - 50° - 80° = 50°$, dus driehoek ABC is gelijkbenig.
Hieruit volgt $b = 6$.
Sinusregel geeft $\frac{c}{\sin(80°)} = \frac{6}{\sin(50°)}$, dus $c = \frac{6 \cdot \sin(80°)}{\sin(50°)} \approx 7{,}7$.

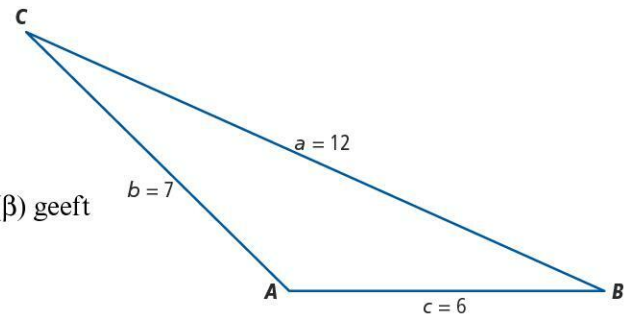


b $\gamma = 180° - 60° - 56° = 64°$
Uit $\frac{a}{\sin(60°)} = \frac{45}{\sin(56°)}$ volgt $a = \frac{45 \cdot \sin(60°)}{\sin(56°)} \approx 47{,}0$.
Uit $\frac{c}{\sin(64°)} = \frac{45}{\sin(56°)}$ volgt $c = \frac{45 \cdot \sin(64°)}{\sin(56°)} \approx 48{,}8$.

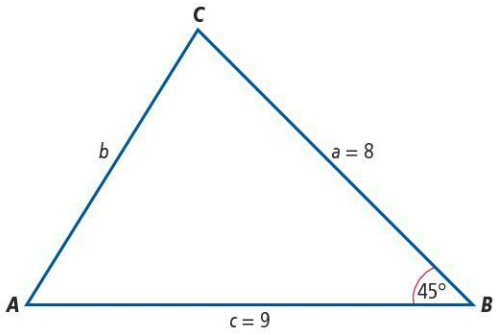


© Noordhoff Uitgevers bv

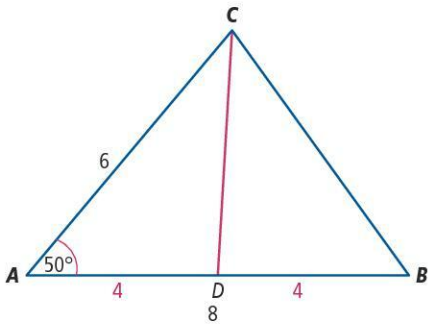
c Cosinusregel $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$ geeft
$12^2 = 7^2 + 6^2 - 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cos(\alpha)$.
$144 = 49 + 36 - 84 \cdot \cos(\alpha)$
$\cos(\alpha) = \dfrac{144 - 49 - 36}{-84} = -0{,}702\ldots$ dus is $\alpha \approx 135°$.
Nogmaals de cosinusregel $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$ geeft
$7^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \cos(\beta)$.
$49 = 144 + 36 - 144 \cdot \cos(\beta)$
$\cos(\beta) = \dfrac{49 - 144 - 36}{-144} = 0{,}909\ldots$ dus is $\beta \approx 25°$.
$\gamma = 180° - 134{,}6° - 24{,}5° \approx 21°$



d Cosinusregel $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$ geeft
$b^2 = 8^2 + 9^2 - 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \cos(45°)$.
$b^2 = 64 + 81 - 144 \cdot \cos(45°)$
$b^2 = 145 - 72\sqrt{2} = 43{,}176\ldots$ dus $b = \sqrt{43{,}176\ldots} \approx 6{,}6$.
Nogmaals de cosinusregel $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$ geeft
$64 = 43{,}176\ldots + 81 - 2 \cdot 6{,}570\ldots \cdot 9 \cdot \cos(\alpha)$
$\cos(\alpha) \approx \dfrac{60{,}1766}{118{,}2761}$ dus is $\alpha \approx 59°$.
$\gamma = 180° - 59{,}4° - 45° \approx 76°$



V5 **a** Cosinusregel $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\angle A)$ geeft
$BC^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \cos(50°)$
$BC^2 = 100 - 96 \cdot \cos(50°) = 38{,}292\ldots$
$BC = \sqrt{38{,}292\ldots} \approx 6{,}19$
Cosinusregel $CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2 \cdot AD \cdot AC \cdot \cos(\angle A)$ geeft
$CD^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos(50°)$
$CD^2 = 16 + 36 - 48 \cdot \cos(50°) = 21{,}146\ldots$
$CD = \sqrt{21{,}146\ldots} \approx 4{,}60$



b Uit $\dfrac{6{,}188\ldots}{\sin(50°)} = \dfrac{6}{\sin(\angle B)}$ volgt $\sin(\angle B) = \dfrac{6 \cdot \sin(50°)}{6{,}188\ldots} = 0{,}742\ldots$,
dus $\angle B \approx 48°$.
Uit $\dfrac{4{,}598\ldots}{\sin(50°)} = \dfrac{4}{\sin(\angle ACD)}$ volgt $\sin(\angle ACD) = \dfrac{4 \cdot \sin(50°)}{4{,}598\ldots} = 0{,}666\ldots$,
dus $\angle ACD \approx 42°$.

V6 **a** De richtingsvectoren van l en m zijn $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\vec{r}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
$\cos(\angle(\vec{r}_l, \vec{r}_m)) = \dfrac{3 \cdot 1 + -2 \cdot 2}{\sqrt{9+4} \cdot \sqrt{1+4}} = \dfrac{-1}{\sqrt{65}}$ geeft $\angle(\vec{r}_l, \vec{r}_m) \approx 97°$, dus
$\angle(l, m) \approx 180° - 97° = 83°$.

b De richtingsvectoren van l en m zijn $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\vec{r}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.
$\cos(\angle(\vec{r}_l, \vec{r}_m)) = \dfrac{1 \cdot 1 + 4 \cdot -3}{\sqrt{1+16} \cdot \sqrt{1+9}} = \dfrac{-11}{\sqrt{170}}$ geeft $\angle(\vec{r}_l, \vec{r}_m) \approx 148°$, dus
$\angle(l, m) \approx 180° - 148° = 32°$.

c De richtingsvectoren van l en m zijn $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{r}_m = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
$\cos(\angle(\vec{r}_l, \vec{r}_m)) = \dfrac{3 \cdot 2 + 2 \cdot -1}{\sqrt{9+4} \cdot \sqrt{4+1}} = \dfrac{4}{\sqrt{65}}$ geeft $\angle(\vec{r}_l, \vec{r}_m) \approx 60°$, dus
$\angle(l, m) \approx 60°$.

© Noordhoff Uitgevers bv

d $l: \frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$ herleid je tot $5x + 4y = 20$.

$m: \frac{x}{3} - \frac{y}{12} = 1$ herleid je tot $4x - y = 12$.

De richtingsvectoren van l en m zijn $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ en $\vec{r}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$\cos(\angle(\vec{r}_l, \vec{r}_m)) = \frac{4 \cdot 1 + -5 \cdot 4}{\sqrt{16 + 25} \cdot \sqrt{1 + 16}} = \frac{-16}{\sqrt{697}}$ geeft $\angle(\vec{r}_l, \vec{r}_m) \approx 127°$, dus

$\angle(l, m) \approx 180° - 127° = 53°$.

V7 **a** Het snijpunt van l met y-as berekenen, dus $x = 0$.

$3 + 3\lambda = 0$

$\lambda = -1$

$y = 1 + -1 \cdot 4 = -3$

Het snijpunt van lijn l met de y-as is $(0, -3)$.

$x = 0$ invullen in de vectorvoorstelling van m geeft $-2 - \mu = 0$.

$\mu = -2$

$y = 1 + -2 \cdot 2 = -3$

Het snijpunt van lijn m met de y-as is ook $(0, -3)$.

Hieruit volgt dat het snijpunt van l en m op de y-as ligt.

b De richtingsvectoren van l en m zijn $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\vec{r}_m = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\cos(\angle(\vec{r}_l, \vec{r}_m)) = \frac{3 \cdot -1 + 4 \cdot 2}{\sqrt{9 + 16} \cdot \sqrt{1 + 4}} = \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ geeft $\angle(\vec{r}_l, \vec{r}_m) \approx 63°$, dus

$\angle(l, m) \approx 63°$.

22.1 Lijnen en cirkels

intro Voor elk raakpunt R geldt $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{MR}$ (een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt), dus elk raakpunt ligt op de cirkel met middellijn MP (stelling van Thales).

1 $3(4 + \lambda) + 4(2 - 3\lambda) = 38$

$12 + 3\lambda + 8 - 12\lambda = 38$

$-9\lambda = 18$

$\lambda = -2$

Dit substitueren in de vergelijking van m geeft $x = 4 + -2 = 2$ en

$y = 2 - 3 \cdot -2 = 8$.

Het snijpunt heeft coördinaten $S(2, 8)$.

2 $x = -1 + \lambda$ en $y = 2 - 3\lambda$ substitueren in de vergelijking van c geeft

$(-1 + \lambda)^2 + (2 - 3\lambda)^2 - 4(-1 + \lambda) - 6(2 - 3\lambda) = 7$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 + 9\lambda^2 - 12\lambda + 4 + 4 - 4\lambda - 12 + 18\lambda = 7$

$10\lambda^2 = 10$

$\lambda^2 = 1$

$\lambda = -1$ of $\lambda = 1$

De snijpunten zijn $(-2, 5)$ en $(0, -1)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

3 Het middelpunt van c is $M(3, -1)$ en $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.

Een normaalvector van de raaklijn is $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ dus een vergelijking van de raaklijn is $4x + 2y = b$.

$x = 7$ en $y = 1$ invullen geeft $4 \cdot 7 + 2 \cdot 1 = b$ dus $b = 30$.

Een vergelijking van de raaklijn is $4x + 2y = 30$ ofwel $y = -2x + 15$.

4 a De lijn gaat door $P(15, 5)$ dus een steunvector is $\begin{pmatrix}15\\5\end{pmatrix}$.

De richtingscoëfficiënt is m, dus een richtingsvector is $\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$.

b $x = 15 + \lambda$ en $y = 5 + \lambda m$

c $x = 15 + \lambda$ en $y = 5 + \lambda m$ substitueren in de vergelijking van c geeft

$(15 + \lambda)^2 + (5 + \lambda m)^2 = 50$

$225 + 30\lambda + \lambda^2 + 25 + 10\lambda m + \lambda^2 m^2 = 50$

$(m^2 + 1)\lambda^2 + (30 + 10m)\lambda + 200 = 0$

$D = 0$ geeft $(30 + 10m)^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 200 = 0$.

$900 + 600m + 100m^2 - 800m^2 - 800 = 0$

$-700m^2 + 600m + 100 = 0$

$7m^2 - 6m - 1 = 0$

$D = 36 - 4 \cdot 7 \cdot -1 = 64$

$m = \frac{6 + \sqrt{64}}{14} = 1$ of $m = \frac{6 - \sqrt{64}}{14} = -\frac{2}{14} = -\frac{1}{7}$

De raaklijnen zijn $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\5\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\5\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix}$.

d 1e raakpunt

$(15 + \lambda)^2 + (5 + \lambda)^2 = 50$

$225 + 30\lambda + \lambda^2 + 25 + 10\lambda + \lambda^2 = 50$

$2\lambda^2 + 40\lambda + 200 = 0$

$\lambda^2 + 20\lambda + 100 = 0$

$(\lambda + 10)^2 = 0$

$\lambda = -10$ geeft $(5, -5)$.

2e raakpunt

$(15 + 7\lambda)^2 + (5 - \lambda)^2 = 50$

$225 + 210\lambda + 49\lambda^2 + 25 - 10\lambda + \lambda^2 = 50$

$50\lambda^2 + 200\lambda + 200 = 0$

$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

$(\lambda + 2)^2 = 0$

$\lambda = -2$ geeft $(1, 7)$.

De raakpunten zijn $A(1, 7)$ en $B(5, -5)$.

5 a $x^2 + y^2 = 13$

$x^2 + y^2 - 10x - 10y = 3$ $-$

$10x + 10y = 10$

Een vergelijking van l is $10x + 10y = 10$ ofwel $y = 1 - x$.

b $y = 1 - x$ substitueren in de vergelijking van c_1 geeft

$x^2 + (1 - x)^2 = 13$.

$x^2 + 1 - 2x + x^2 = 13$

$2x^2 - 2x - 12 = 0$

$x^2 - x - 6 = 0$

$(x - 3)(x + 2) = 0$

$x = 3$ of $x = -2$

© Noordhoff Uitgevers bv

$x = 3$ geeft $y = 1 - 3 = -2$.
$x = -2$ geeft $y = 1 - -2 = 3$.
De snijpunten zijn $(3, -2)$ en $(-2, 3)$.

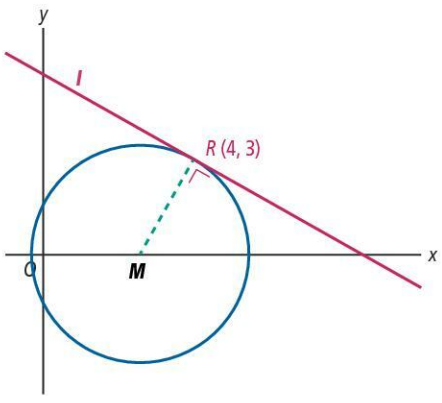
6 a Een raaklijn staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.

b $OP = \sqrt{15^2 + 5^2} = \sqrt{250}$

$OA = \sqrt{50}$ (straal van de cirkel)
De stelling van Pythagoras toepassen in driehoek OAP geeft
$PA = \sqrt{OP^2 - OA^2} = \sqrt{250 - 50} = \sqrt{200}$.
Een vergelijking van c_2 is $(x - 15)^2 + (y - 5)^2 = 200$.

c $(x - 15)^2 + (y - 5)^2 = 200$ herleiden geeft
$x^2 - 30x + 225 + y^2 - 10y + 25 = 200$.
$x^2 + y^2 - 30x - 10y = -50$
De vergelijkingen van de cirkels van elkaar aftrekken:
$x^2 + y^2 = 50$
$x^2 + y^2 - 30x - 10y = -50$ $-$
$30x + 10y = 100$
$y = 10 - 3x$
dit substitueren in de vergelijking van c_1 geeft
$x^2 + (10 - 3x)^2 = 50$.
$x^2 + 100 - 60x + 9x^2 = 50$
$10x^2 - 60x + 50 = 0$
$x^2 - 6x + 5 = 0$
$(x - 1)(x - 5) = 0$
$x = 1$ of $x = 5$
$x = 1$ geeft $y = 10 - 3 = 7$.
$x = 5$ geeft $y = 10 - 15 = -5$.
De snijpunten zijn $A(1, 7)$ en $B(5, -5)$.

7 a



b De loodlijn op l, door R snijden met de x-as geeft het middelpunt M van de cirkel.
Een richtingsvector van de loodlijn is de normaalvector van l, dus $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Een steunvector is $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Een vectorvoorstelling van de loodlijn is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Deze loodlijn snijden met de x-as geeft $3 + 3\lambda = 0$ ofwel $\lambda = -1$.
De x-coördinaat van het middelpunt is $4 + 2 \cdot -1 = 2$.
Het middelpunt van de cirkel is $M(2, 0)$.
$r = MR = \sqrt{(4 - 2)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{13}$
De middelpuntsvergelijking van c is $(x - 2)^2 + y^2 = 13$.

© Noordhoff Uitgevers bv

8 Het middelpunt van cirkel c_1 is $M_1(0, 0)$ en de straal is 4.
Een vergelijking van cirkel c_1 is $x^2 + y^2 = 16$.
Het middelpunt van c_2 is $M_2\left(-4\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}\right)$ en de straal is
$AM_2 = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(4\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{20\frac{1}{2}}$.
Een vergelijking van cirkel c_2 is $\left(x + 4\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - 4\frac{1}{2}\right)^2 = 20\frac{1}{2}$ ofwel
$x^2 + 9x + 20\frac{1}{4} + y^2 - 9y + 20\frac{1}{4} = 20\frac{1}{2}$ dus $x^2 + y^2 + 9x - 9y = -20$.
De vergelijkingen van de cirkels van elkaar aftrekken:
$x^2 + y^2 = 16$
$x^2 + y^2 + 9x + -9y = -20 \ -$
$-9x + 9y = 36$
$y = x + 4$
Dit substitueren in de vergelijking van c_1 geeft
$x^2 + (x + 4)^2 = 16$
$x^2 + x^2 + 8x + 16 = 16$
$2x^2 + 8x = 0$
$2x(x + 4) = 0$
$x = 0$ of $x = -4$
De snijpunten zijn $A(-4, 0)$ en $D(0, 4)$.
De lijn door B en C heeft richtingscoëfficiënt $\frac{9 - 0}{-5 - 4} = -1$.
$x = 4$ en $y = 0$ invullen bij $y = -x + b$ geeft $b = 4$.
Een vergelijking van de lijn BC is $y = -x + 4$.
Het punt $D(0, 4)$ ligt op de lijn BC.
Alternatieve oplossing:
Punt D ligt op de cirkel met middellijn AB dus $\angle ADB = 90°$ (*Thales*).
Punt D ligt op de cirkel met middellijn AC dus $\angle ADC = 90°$ (*Thales*).
Dus $\angle CDB = 90° + 90° = 180°$ en dus liggen B, C en D op één lijn.

9 a $c_1 : x^2 + y^2 - 6x + 18y + 72 = 0$
$c_1 : x^2 - 6x + y^2 + 18y + 72 = 0$
$c_1 : (x - 3)^2 - 9 + (y + 9)^2 - 81 + 72 = 0$
$c_1 : (x - 3)^2 + (y + 9)^2 = 18$
Het middelpunt van c_1 is $M_1(3, -9)$ en de straal is $r_1 = \sqrt{18}$ $(=3\sqrt{2})$.
$c_2 : x^2 + y^2 + 12x - 6y + 36 = 0$
$c_2 : x^2 + 12x + y^2 - 6y + 36 = 0$
$c_2 : (x + 6)^2 - 36 + (y - 3)^2 - 9 + 36 = 0$
$c_2 : (x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 9$
Het middelpunt van c_2 is $M_2(-6, 3)$ en de straal is $r_2 = 3$.

b $M_1P = \sqrt{(p - 3)^2 + 9^2}$
$R_1P = \sqrt{M_1P^2 - r_1^2} = \sqrt{(p - 3)^2 + 9^2 - 18} = \sqrt{(p - 3)^2 + 63}$
$M_2P = \sqrt{(p + 6)^2 + 3^2}$
$R_2P = \sqrt{M_2P^2 - r_2^2} = \sqrt{(p + 6)^2 + 3^2 - 9} = \sqrt{(p + 6)^2}$
$R_2P = R_2P$ geeft $\sqrt{(p - 3)^2 + 63} = \sqrt{(p + 6)^2}$.
$(p - 3)^2 + 63 = (p + 6)^2$
$p^2 - 6p + 9 + 63 = p^2 + 12p + 36$
$-18p = -36$ dus $p = 2$

© Noordhoff Uitgevers bv

X1 De lijn $y = x$ snijden met c_1 geeft $x^2 + x^2 = 50$.
$2x^2 = 50$
$x^2 = 25$
$x = -5$ of $x = 5$
De snijpunten zijn $A(-5, -5)$ en $(5, 5)$.
De lijn $y = x$ snijden met c_2 geeft $(x - 12)^2 + (x - 12)^2 = 128$.
$2(x - 12)^2 = 128$
$(x - 12)^2 = 64$
$x - 12 = -8$ of $x - 12 = 8$
$x = 4$ of $x = 20$
De snijpunten zijn $(4, 4)$ en $B(20, 20)$.
Het middelpunt van c_3 is het midden van lijnstuk AB met $A(-5, -5)$ en $B(20, 20)$, dus het punt $\left(7\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}\right)$.
De straal is $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{25^2 + 25^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1250}$.
Een vergelijking van c_3 is $\left(x - 7\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - 7\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{1250}\right)^2$ ofwel
$\left(x - 7\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - 7\frac{1}{2}\right)^2 = 312\frac{1}{2}$.

X2 **a** Van cirkel c_1 is het middelpunt $O(0, 0)$ en de straal $OA = 5$.
Van cirkel c_2 is het middelpunt $M(12, 0)$ en de straal $MB = 3$.
$\angle OAP = \angle MBP = 90°$ (*raaklijnstelling*) dus
$\angle APO = \angle BPM$
Dit geeft $\triangle OAP \sim \triangle MBP$ met factor $\frac{5}{3}$.
$OP : MP = 5 : 3$ en dus $OM : MP = 2 : 3$
$OM = 12$ geeft $MP = \frac{3}{2} \times 12 = 18$.
$OP = 12 + 18 = 30$ en dus $P(30, 0)$.

b $AP = \sqrt{OP^2 - OA^2} = \sqrt{30^2 - 5^2} = \sqrt{875} = 5\sqrt{35}$
$BP = \sqrt{MP^2 - MB^2} = \sqrt{18^2 - 3^2} = \sqrt{315} = 3\sqrt{35}$
$AB = AP - BP = 5\sqrt{35} - 3\sqrt{35} = 2\sqrt{35}$

c $OC = 5$ en $MD = 3$
$O(0, 0)$ en $M(12, 0)$
$\angle OCQ = \angle MDQ = 90°$ (*raaklijnstelling*)
$\angle CQO = \angle DQM$ (*overstaande hoeken*)
Dit geeft $\triangle OCQ \sim \triangle MDQ$ met factor $\frac{5}{3}$.
$OQ : MQ = 5 : 3$ geeft $OQ = \frac{5}{8} \times 12 = 7\frac{1}{2}$.
$Q\left(7\frac{1}{2}, 0\right)$.

d $QC = \sqrt{OQ^2 - OC^2} = \sqrt{7\frac{1}{2}^2 - 5^2} = \sqrt{31\frac{1}{4}} = 2\frac{1}{2}\sqrt{5}$
$DQ = \sqrt{MQ^2 - MD^2} = \sqrt{4\frac{1}{2}^2 - 3^2} = \sqrt{11\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{5}$
$CD = CQ + DQ = 2\frac{1}{2}\sqrt{5} + 1\frac{1}{2}\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

© Noordhoff Uitgevers bv

22.2 Afstanden en hoeken

intro Dat zijn de roosterpunten F2, H3, D3, J6 en B6.

10 a Uit $\cos(\angle APQ) = \frac{PQ}{PA}$ volgt $PQ = PA \cdot \cos(\angle APQ)$.

b Uit $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$ met $\vec{a} = \overrightarrow{PA}$ en $\vec{b} = \overrightarrow{PQ}$ volgt $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PA} = |\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{PA}| \cdot \cos(\angle APQ)$.

$\cos(\angle APQ) = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{PA}|}$

$\overrightarrow{PQ}$ is een veelvoud van de richtingsvector van l.

De richting van $\overrightarrow{PQ}$ is in dit geval tegengesteld aan die van de normaalvector van l, $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Door $\overrightarrow{PQ}$ te vervangen door $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ wordt de uitkomst van $\frac{\vec{n}_l \cdot \overrightarrow{PA}}{|\vec{n}_l| \cdot |\overrightarrow{PA}|}$ tegengesteld aan die van $\frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{PA}|}$ en wordt de uitkomst van $\cos(\angle APQ)$ negatief (en dus $\angle APQ$ stomp in plaats van scherp).

Door absolute waarde-strepen om de teller te zetten, voorkom je dat $\cos(\angle APQ)$ negatief wordt.

Verder is $|\overrightarrow{PA}| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$ en $|\vec{n}_l| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

Dus is $\cos(\angle APQ) = \frac{|\vec{n}_l \cdot \overrightarrow{PA}|}{|\vec{n}_l| \cdot |\overrightarrow{PA}|} = \frac{|\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n}_l|}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{13}}$

c $\cos(\angle APQ) = \frac{\left|\begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{13}} = \frac{|-17|}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{13}} = \frac{17}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{13}}$

$PQ = PA \cdot \cos(\angle APQ)$ geeft $\mathrm{d}(P, l) = PQ = \sqrt{50} \cdot \frac{17}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{13}} = \frac{17}{\sqrt{13}}$, klopt.

11 a $A(r, s)$ en $P(p, q)$ geeft $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} p - r \\ q - s \end{pmatrix}$.

Een richtingsvector van de lijn PA is $\begin{pmatrix} p - r \\ q - s \end{pmatrix}$ $\left(\text{of } \begin{pmatrix} r - p \\ s - q \end{pmatrix}\right)$.

Een richtingsvector van de lijn PQ is de normaalvector van lijn l, dus $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

b $\mathrm{d}(P, l) = PQ = PA \cdot \cos(\angle APQ)$ en $\cos(\angle APQ) = \frac{\left|\begin{pmatrix} p - r \\ q - s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right|}{|\overrightarrow{AP}| \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}$

Dus $\mathrm{d}(P, l) = PQ = PA \cdot \frac{|a(p - r) + b(q - s)|}{PA \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}$ ofwel

$\mathrm{d}(P, l) = PQ = \frac{|ap - ar + bq - bs|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

c Uit $ar + bs + c = 0$ volgt $-ar - bs = c$.

$\mathrm{d}(P, l) = PQ = \frac{|ap + bq - ar - bs|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ geeft dan $\mathrm{d}(P, l) = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

12 **a** $P(7, -3)$ en $2x - y - 4 = 0$ invullen in $d(P, l) = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ geeft

$d(P, l) = \frac{|2 \cdot 7 - (-3) - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{13}{\sqrt{5}}$.

b $\frac{x}{5} + \frac{y}{12} = 1$ herleid je tot $12x + 5y = 60$ ofwel $12x + 5y - 60 = 0$.

$P(0, 0)$ en $12x + 5y - 60 = 0$ invullen in $d(P, l) = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ geeft

$d(P, l) = \frac{|0 + 0 - 60|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{60}{\sqrt{169}} = \frac{60}{13} = 4\frac{8}{13}$.

c $P(-1, 6)$ en $x + y - 5 = 0$ invullen in $d(P, l) = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ geeft

$d(P, l) = \frac{|-1 + 6 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0$.

Controle: $-1 + 6 - 5 = 0$ klopt, dus punt P ligt op lijn l.

d $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ herleid je tot $x - 3y + 6 = 0$.

$P(-4, 2)$ en $x - 3y + 6 = 0$ invullen in $d(P, l) = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ geeft

$d(P, l) = \frac{|-4 - 3 \cdot 2 + 6|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$.

13 **a** $P(p, q)$ en $4x - 3y + 12 = 0$ invullen in $d(P, l) = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ geeft

$d(P, l) = \frac{|4p - 3q + 12|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|4p - 3q + 12|}{5}$

b $P(p, q)$ en $5x + 12y - 60 = 0$ invullen in $d(P, m) = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ geeft

$d(P, m) = \frac{|5p + 12q - 60|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|5p + 12q - 60|}{13}$

c $\frac{|4p - 3q + 12|}{5} = \frac{|5p + 12q - 60|}{13}$

1e oplossing:

$13(4p - 3q + 12) = 5(5p + 12q - 60)$

$52p - 39q + 156 = 25p + 60q - 300$

$27p - 99q = 456$

$9p - 33q = 152$

2e oplossing:

$13(4p - 3q + 12) = -5(5p + 12q - 60)$

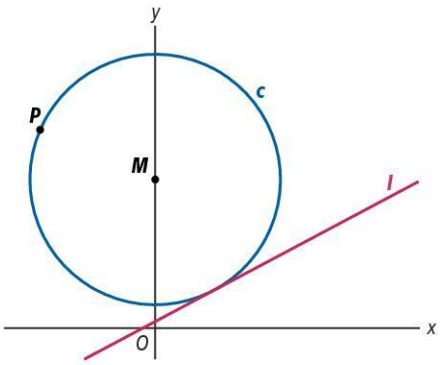
$52p - 39q + 156 = -25p - 60q + 300$

$77p + 21q = 144$

De vergelijkingen van de beide bissectrices zijn $9x - 33y = 152$ en $77x + 21y = 144$.

© Noordhoff Uitgevers bv

14 a



b Voor het middelpunt $M(0, b)$ moet gelden $MP = \text{d}(M, l)$.

$MP = \sqrt{8^2 + (b - 14)^2} = \sqrt{64 + b^2 - 28b + 196}$ ofwel $MP = \sqrt{b^2 - 28b + 260}$

$\text{d}(M, l) = \dfrac{|0 - 2b|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \dfrac{|2b|}{\sqrt{5}}$

Uit $MP = \text{d}(M, l)$ volgt $\sqrt{b^2 - 28b + 260} = \dfrac{|2b|}{\sqrt{5}}$

$\sqrt{5} \cdot \sqrt{b^2 - 28b + 260} = |2b|$

$5(b^2 - 28b + 260) = 4b^2$

$5b^2 - 140b + 1300 = 4b^2$

$b^2 - 140b + 1300 = 0$

$(b - 10)(b - 130) = 0$

$b = 10$ of $b = 130$

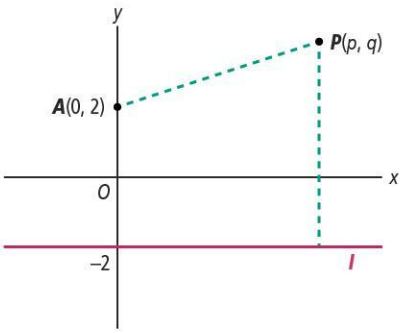
Als $b = 10$ dan is $M(0, 10)$ en $r = \dfrac{2 \cdot 10}{\sqrt{5}} = \dfrac{20}{\sqrt{5}}$ en $r^2 = \left(\dfrac{20}{\sqrt{5}}\right)^2 = 80$.

Een vergelijking van de cirkel is $x^2 + (y - 10)^2 = 80$.

Als $b = 130$ dan is $M(0, 130)$ en $r = \dfrac{2 \cdot 130}{\sqrt{5}} = \dfrac{260}{\sqrt{5}}$ en $r^2 = \left(\dfrac{260}{\sqrt{5}}\right)^2 = 13\,520$.

Een vergelijking van deze cirkel is $x^2 + (y - 130)^2 = 13\,520$.

15



Stel $P(p, q)$ met $\text{d}(P, l) = AP$.

$AP = \sqrt{p^2 + (q - 2)^2}$ en $\text{d}(P, l) = q + 2$

Uit $\text{d}(P, l) = AP$ volgt $\sqrt{p^2 + (q - 2)^2} = q + 2$.

$p^2 + (q - 2)^2 = (q + 2)^2$

$p^2 + q^2 - 4q + 4 = q^2 + 4q + 4$

$p^2 = 8q$

$q = \frac{1}{8}p^2$

De coördinaten p en q voldoen aan de vergelijking $y = \frac{1}{8}x^2$, dus punt P ligt op de parabool.

© Noordhoff Uitgevers bv

16 **a** De richtingscoëfficiënt van de lijn AB is $\frac{-6--2}{2--4} = -\frac{2}{3}$.

De richtingscoëfficiënt van de lijn BC is $\frac{2--6}{6-2} = 2$.

$\tan(\alpha) = \frac{2}{3}$ geeft $\alpha = 33{,}690\ldots°$.
$\tan(\beta) = 2$ geeft $\beta = 63{,}434\ldots°$.
$\alpha + \beta = 33{,}690\ldots° + 63{,}434\ldots° = 97{,}125\ldots°$
$\angle(AB, BC) = 180° - 97{,}125\ldots° \approx 83°$

b $\angle(BC, AC) = \angle(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$
$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix}-4\\-8\end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix}-10\\-4\end{pmatrix}$

$$\cos(\angle(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})) = \frac{-4 \cdot -10 + -8 \cdot -4}{\sqrt{(-4)^2 + (-8)^2} \cdot \sqrt{(-10)^2 + (-4)^2}} = \frac{72}{\sqrt{80} \cdot \sqrt{116}}$$

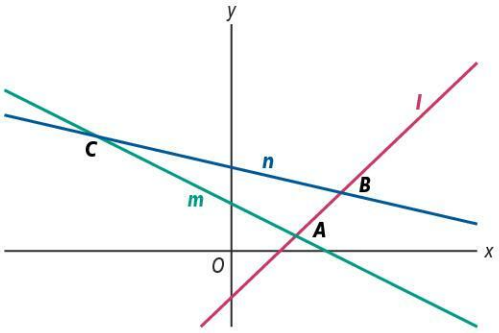
$\angle(BC, AC) = \angle(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) \approx 42°$

c $\angle(AB, AC) = \angle BAC$
$AB = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$, $AC = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116}$ en $BC = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80}$
cosinusregel: $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos(\angle BAC)$
$80 = 116 + 52 - 2 \cdot \sqrt{116} \cdot \sqrt{52} \cdot \cos(\angle BAC)$

$$\cos(\angle BAC) = \frac{80 - 116 - 52}{-2 \cdot \sqrt{116} \cdot \sqrt{52}} = 0{,}566\ldots$$

$\angle(AB, AC) = \angle BAC \approx 55°$

17 schets:



$\vec{n}_l = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ dus $\vec{r}_l = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
$\vec{n}_m = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ dus $\vec{r}_m = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$
$\vec{n}_n = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ dus $\vec{r}_n = \begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$

$$\cos(\angle(\vec{r}_l, \vec{r}_m)) = \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot -1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ dus } \angle(\vec{r}_l, \vec{r}_m) \approx 72° \text{ en}$$

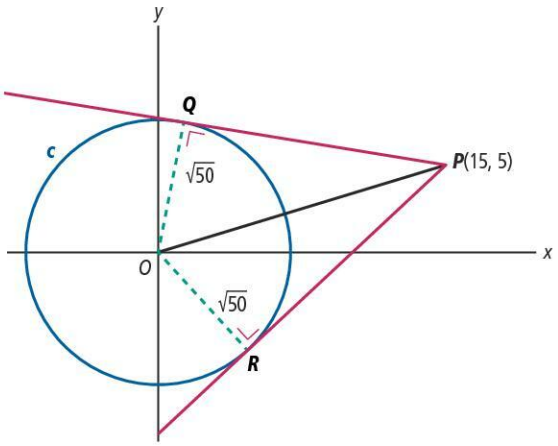
$\angle A \approx 180° - 72° = 108°$ (zie schets, je hebt de stompe hoek bij A nodig).

$$\cos(\angle(\vec{r}_l, \vec{r}_n)) = \frac{1 \cdot 5 + 1 \cdot -1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{26}} = \frac{4}{\sqrt{52}} \text{ dus } \angle(\vec{r}_l, \vec{r}_n) \approx 56° \text{ en } \angle B \approx 56°$$

$$\cos(\angle(\vec{r}_m, \vec{r}_n)) = \frac{2 \cdot 5 + -1 \cdot -1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{26}} = \frac{11}{\sqrt{130}} \text{ dus } \angle(\vec{r}_m, \vec{r}_n) \approx 15° \text{ en } \angle C \approx 15°$$

© Noordhoff Uitgevers bv

18 schets:



$OP = \sqrt{15^2 + 5^2} = \sqrt{250}$
$OQ = r = \sqrt{50}$
$\angle OQP = 90°$ (*raaklijnstelling*)
$\sin(\angle QPO) = \dfrac{OQ}{OP} = \dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{250}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ geeft $\angle OPQ = 26{,}565\ldots°$
De hoek tussen de raaklijnen is $2 \times 26{,}565\ldots° \approx 53°$.

19 Invullen van de gegevens in $\cos(\phi) = \dfrac{\vec{r_l} \cdot \vec{r_m}}{|\vec{r_l}| \cdot |\vec{r_m}|}$ levert

$\cos(45°) = \dfrac{2 \cdot 1 + 1 \cdot a}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + a^2}}$ ofwel $\frac{1}{2}\sqrt{2} = \dfrac{2 + a}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{1 + a^2}}$
$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{1 + a^2} = 2 + a$
$\frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 5 \cdot (1 + a^2) = (2 + a)^2$
$2\frac{1}{2} \cdot (1 + a^2) = 4 + 4a + a^2$
$5 + 5a^2 = 8 + 8a + 2a^2$
$3a^2 - 8a - 3 = 0$
$D = 64 - 4 \cdot 3 \cdot -3 = 100$
$a = \dfrac{8 + \sqrt{100}}{6} = 3$ of $a = \dfrac{8 - \sqrt{100}}{6} = -\frac{1}{3}$

X3 **a** $M(-5, -1)$ en $r_1 = \sqrt{4} = 2$
$N(3, 5)$ en $r_2 = \sqrt{25} = 5$
$MN = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$
$d(c_1, c_2) = MN - r_1 - r_2 = 10 - 2 - 5 = 3$

b $\angle PAM = \angle PBN = 90°$ (*raaklijnstelling*) en $\angle APM = \angle BPN$ dus $\triangle APM \sim \triangle BPN$.
$AM : BN = 2 : 5$ dus ook $PM : PN = 2 : 5$ en $PM : MN = 2 : 3$
$PM = \frac{2}{3} MN = \frac{2}{3} \cdot 10 = 6\frac{2}{3}$
$\sin(\angle APM) = \dfrac{AM}{PM} = \dfrac{2}{6\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{10}$ geeft $\angle APM = 17{,}457\ldots°$.
$\angle(l, m) = 2 \times 17{,}457\ldots° \approx 35°$

c $\overrightarrow{NM} = \frac{3}{5} \cdot \overrightarrow{NP}$ ofwel $\overrightarrow{NP} = \frac{5}{3} \cdot \overrightarrow{NM} = \frac{5}{3} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13\frac{1}{3} \\ -10 \end{pmatrix}$
Dan is $P\left(3 - 13\frac{1}{3}, 5 - 10\right)$ ofwel $P\left(-10\frac{1}{3}, -5\right)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

X4 De lijn BC heeft richtingscoëfficiënt $\frac{20-0}{0-15} = -\frac{4}{3}$.
Een vergelijking van lijn BC is $y = -\frac{4}{3}x + 20$.
De hoogtelijn AD staat loodrecht op zijde BC en heeft dus richtingscoëfficiënt $\frac{3}{4}$.
$x = -15$ en $y = 0$ invullen bij $y = \frac{3}{4}x + b$ geeft $0 = \frac{3}{4} \cdot -15 + b$ ofwel $b = 11\frac{1}{4}$.
Een vergelijking van de hoogtelijn AD is $y = \frac{3}{4}x + 11\frac{1}{4}$.
De lijnen BC en AD snijden geeft $-\frac{4}{3}x + 20 = \frac{3}{4}x + 11\frac{1}{4}$.
$-16x + 240 = 9x + 135$
$-25x = -105$
$x = 4\frac{1}{5}$ en $y = \frac{3}{4} \cdot 4\frac{1}{5} + 11\frac{1}{4} = 14\frac{2}{5}$ dus $D\left(4\frac{1}{5}, 14\frac{2}{5}\right)$
$OD = \sqrt{\left(4\frac{1}{5}\right)^2 + \left(14\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{225} = 15$ en dus is $OD = OA$ en is $\angle DAO = \angle ODA$ (basishoeken).
Vanwege de symmetrie is $ED // AB$ en is dus $\angle EDA = \angle DAO$ (Z-hoeken).
Conclusie: $\angle DAO = \angle EDA$ en dus is hoogtelijn AD tevens bissectrice van hoek EDO. Het bewijs dat hoogtelijn BE ook bissectrice is van hoek DEO verloopt analoog.
Vanwege de symmetrie van de figuur is het volstrekt helder dat hoogtelijn CO ook bissectrice is van hoek EOD.

22.3 Zwaartepunten

intro Als ze de taart vanuit een hoekpunt naar het midden van de overstaande zijde doorsnijden (dus volgens een zwaartelijn), krijgen ze ieder precies de helft.

20 $m = 3 + 6 + 9 = 18$
Invullen van de gegevens in de formule $\vec{z} = \frac{m_1}{m} \cdot \overrightarrow{a_1} + \frac{m_2}{m} \cdot \overrightarrow{a_2} + \frac{m_3}{m} \cdot \overrightarrow{a_3}$ geeft
$\vec{z} = \frac{3}{18} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{6}{18} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{9}{18} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\frac{1}{3} \\ 5\frac{1}{3} \end{pmatrix}$
Het zwaartepunt van de massa's in A, B en C is $\left(7\frac{1}{3}, 5\frac{1}{3}\right)$.

21 a $m = 1 + 4 + 2 = 7$
Invullen van de gegevens in de formule $\vec{z} = \frac{m_1}{m} \cdot \overrightarrow{a_1} + \frac{m_2}{m} \cdot \overrightarrow{a_2} + \frac{m_3}{m} \cdot \overrightarrow{a_3}$ geeft
$\vec{z} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{4}{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1\frac{3}{7} \end{pmatrix}$
Het zwaartepunt van de massa's in A, B en C is $\left(2, 1\frac{3}{7}\right)$.

b $m = 1 + 4 + 2 + 3 = 10$
$\vec{z} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{4}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{10} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{10} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$-\frac{2}{10} + \frac{4}{10} + \frac{12}{10} + \frac{3}{10}p = 2$	en	$-\frac{2}{10} + \frac{12}{10} + 0 + \frac{3}{10}q = 1$
$\frac{14}{10} + \frac{3}{10}p = 2$	en	$1 + \frac{3}{10}q = 1$
$\frac{3}{10}p = \frac{6}{10}$	en	$\frac{3}{10}q = 0$
$p = 2$	en	$q = 0$

© Noordhoff Uitgevers bv

22 **a** De massa's in A en B zijn gelijk, dus het zwaartepunt D is het midden van A en B. Dit geeft $D\left(5, 4\frac{1}{2}\right)$.

b $m = 2 + 2 + 4 = 8$

Invullen van de gegevens in de formule $\vec{z} = \frac{m_1}{m} \cdot \overrightarrow{a_1} + \frac{m_2}{m} \cdot \overrightarrow{a_2} + \frac{m_3}{m} \cdot \overrightarrow{a_3}$ geeft

$\vec{z} = \frac{2}{8}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \frac{2}{8}\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix} + \frac{4}{8}\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\frac{1}{4}\end{pmatrix}$

Het zwaartepunt van de massa's in A, B en C is $E(5, 2\frac{1}{4})$.

c De massa in D is 4. De massa in C is ook 4. Het zwaartepunt van de massa's in D en C is dan het midden van lijnstuk CD en dus $E\left(5, 2\frac{1}{4}\right)$.

d Lijn AC: richtingscoëfficiënt is $\frac{5-2}{0-3} = -1$.

$x = 2$ en $y = 3$ invullen in $y = -x + b$ geeft $3 = -2 + b$ dus $b = 5$.

Een vergelijking van lijn AC is $y = -x + 5$.

Lijn BE: richtingscoëfficiënt is $\frac{2\frac{1}{4} - 6}{5 - 8} = 1\frac{1}{4}$.

$x = 8$ en $y = 6$ invullen in $y = 1\frac{1}{4}x + b$ geeft $6 = 1\frac{1}{4} \cdot 8 + b$ dus $b = -4$.

Een vergelijking van lijn BE is $y = 1\frac{1}{4}x - 4$.

Gelijkstellen geeft $1\frac{1}{4}x - 4 = -x + 5$.

$2\frac{1}{4}x = 9$ dus $x = 4$ en $y = 1$

De coördinaten zijn $F(4, 1)$.

e F is het zwaartepunt van de massa's in A en C.

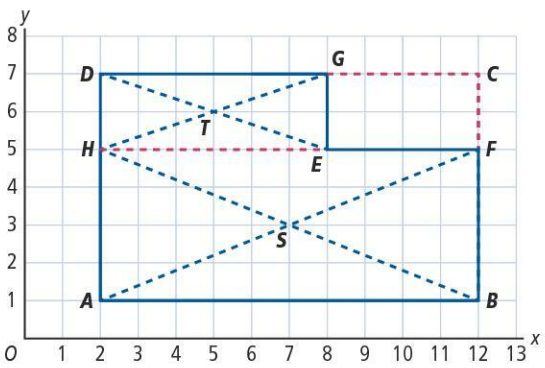
Immers: $m = 2 + 4 = 6$

Invullen van de gegevens in de formule $\vec{z} = \frac{m_1}{m} \cdot \overrightarrow{a_1} + \frac{m_2}{m} \cdot \overrightarrow{a_2}$ geeft

$\vec{z} = \frac{2}{6}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \frac{4}{6}\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

Het zwaartepunt van de massa's in A en C is $F(4, 1)$.

23 **a**



Je kunt bijvoorbeeld de veelhoek verdelen volgens lijn EH met $H(2, 5)$.

Het snijpunt van de diagonalen van een rechthoek deelt de diagonalen middendoor.

Het midden van $A(2, 1)$ en $F(12, 5)$ is $S(7, 3)$.

Het midden van $H(2, 5)$ en $G(8, 7)$ is $T(5, 6)$.

Hieruit volgt dat de zwaartepunten van $ABFH$ en $HEGD$ de punten $S(7, 3)$ en $T(5, 6)$ zijn.

b $opp\ ABFH = AB \cdot BF = 10 \cdot 4 = 40$

$opp\ HEGD = HE \cdot EG = 6 \cdot 2 = 12$

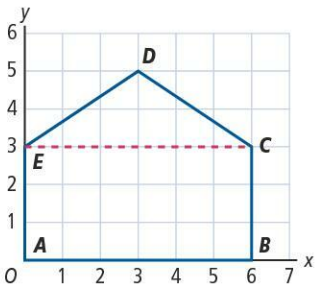
c $m = m_1 + m_2 = 40 + 12 = 52$

$\vec{z} = \frac{40}{52} \cdot \vec{s} + \frac{12}{52} \cdot \vec{t} = \frac{10}{13} \cdot \begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix} + \frac{3}{13} \cdot \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}85\\48\end{pmatrix}$

Dus het zwaartepunt is $Z\left(\frac{85}{13}, \frac{48}{13}\right)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

24 a



De oppervlakte van rechthoek $ABCE$ is $6 \cdot 3 = 18$ en het zwaartepunt is het snijpunt van de diagonalen, dus $Z_1\left(3, 1\frac{1}{2}\right)$.

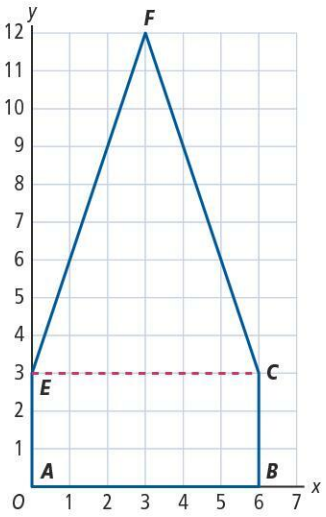
De oppervlakte van driehoek ECD is $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 6$.

$x_z = \frac{1}{3}(0 + 3 + 6) = 3$ en $y_z = \frac{1}{3}(3 + 3 + 5) = 3\frac{2}{3}$, dit zwaartepunt is $Z_2\left(3, 3\frac{2}{3}\right)$.
$m = m_1 + m_2 = 18 + 6 = 24$

$\vec{z} = \frac{18}{24} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{6}{24} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2\frac{1}{24} \end{pmatrix}$

Dus het zwaartepunt van vijfhoek $ABCDE$ is $Z\left(3, 2\frac{1}{24}\right)$.

b



De oppervlakte van rechthoek $ABCE$ is $6 \cdot 3 = 18$ en het zwaartepunt is het snijpunt van de diagonalen, dus $Z_1\left(3, 1\frac{1}{2}\right)$.

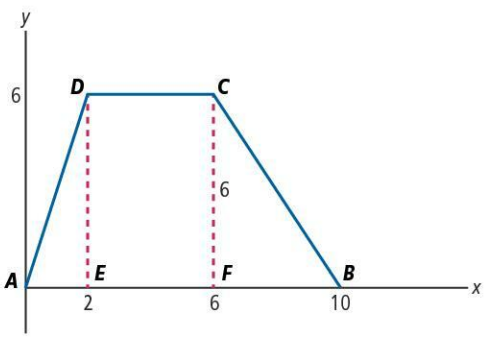
De oppervlakte van driehoek ECF is $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 = 27$.

$x_z = \frac{1}{3}(0 + 3 + 6) = 3$ en $y_z = \frac{1}{3}(3 + 12 + 3) = 6$, het zwaartepunt is $Z_2(3, 6)$.
$m = m_1 + m_2 = 18 + 27 = 45$

$\vec{z} = \frac{18}{45} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{27}{45} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4\frac{1}{5} \end{pmatrix}$

Dus het zwaartepunt van vijfhoek $ABCFE$ is $Z\left(3, 4\frac{1}{5}\right)$.

25 a

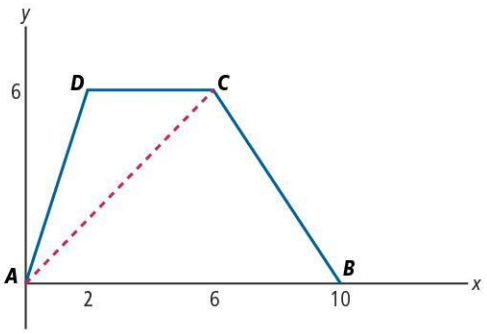


© Noordhoff Uitgevers bv

$A(0, 0)$, $B(10, 0)$, $C(6, 6)$, $D(2, 6)$, $E(2, 0)$ en $F(6, 0)$
De oppervlakte van driehoek AED is $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6$.
$x_z = \frac{1}{3}(0 + 2 + 2) = 1\frac{1}{3}$ en $y_z = \frac{1}{3}(0 + 0 + 6) = 2$, het zwaartepunt is $Z_1\left(1\frac{1}{3}, 2\right)$.
De oppervlakte van rechthoek $EFCD$ is $4 \cdot 6 = 24$ en het zwaartepunt is het snijpunt van de diagonalen, dus $Z_2(4, 3)$.

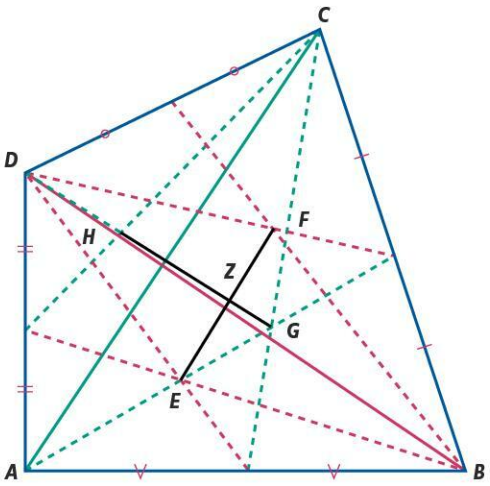
De oppervlakte van driehoek FBC is $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12$.
$x_z = \frac{1}{3}(6 + 10 + 6) = 7\frac{1}{3}$ en $y_z = \frac{1}{3}(0 + 0 + 6) = 2$, het zwaartepunt is $Z_3\left(7\frac{1}{3}, 2\right)$.
$m = m_1 + m_2 + m_3 = 6 + 24 + 12 = 42$
$\vec{z} = \frac{6}{42} \cdot \begin{pmatrix} 1\frac{1}{3} \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{24}{42} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{12}{42} \cdot \begin{pmatrix} 7\frac{1}{3} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\frac{4}{7} \\ 2\frac{4}{7} \end{pmatrix}$
Dus het zwaartepunt van trapezium $ABCD$ is $Z\left(4\frac{4}{7}, 2\frac{4}{7}\right)$.

b



De oppervlakte van driehoek ABC is $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 = 30$.
$x_z = \frac{1}{3}(0 + 10 + 6) = 5\frac{1}{3}$ en $y_z = \frac{1}{3}(0 + 0 + 6) = 2$, het zwaartepunt is $Z_1\left(5\frac{1}{3}, 2\right)$.
De oppervlakte van driehoek ACD is $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12$.
$x_z = \frac{1}{3}(0 + 6 + 2) = 2\frac{2}{3}$ en $y_z = \frac{1}{3}(0 + 6 + 6) = 4$, het zwaartepunt is $Z_2\left(2\frac{2}{3}, 4\right)$.
$m = m_1 + m_2 = 30 + 12 = 42$
$\vec{z} = \frac{30}{42} \cdot \begin{pmatrix} 5\frac{1}{3} \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{12}{42} \cdot \begin{pmatrix} 2\frac{2}{3} \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\frac{4}{7} \\ 2\frac{4}{7} \end{pmatrix}$
Dus het zwaartepunt van trapezium $ABCD$ is ook nu $Z\left(4\frac{4}{7}, 2\frac{4}{7}\right)$.

26 a



b De coördinaten van Z zijn het gewogen gemiddelde van die van E en F. Dus ligt Z ergens op het lijnstuk EF.

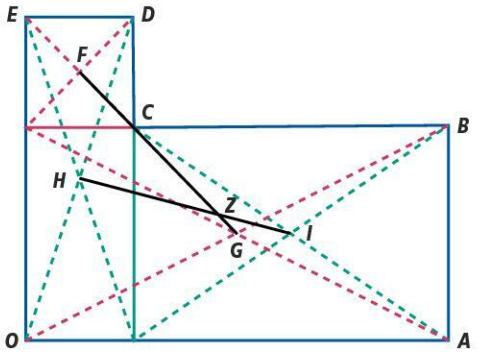
c Zie de tekening bij opdracht a.

d Z is het snijpunt van de lijnen EF en GH.

e Zie de tekening bij opdracht a.

© Noordhoff Uitgevers bv

27 **a** De zwaartepunten zijn de punten F en G.

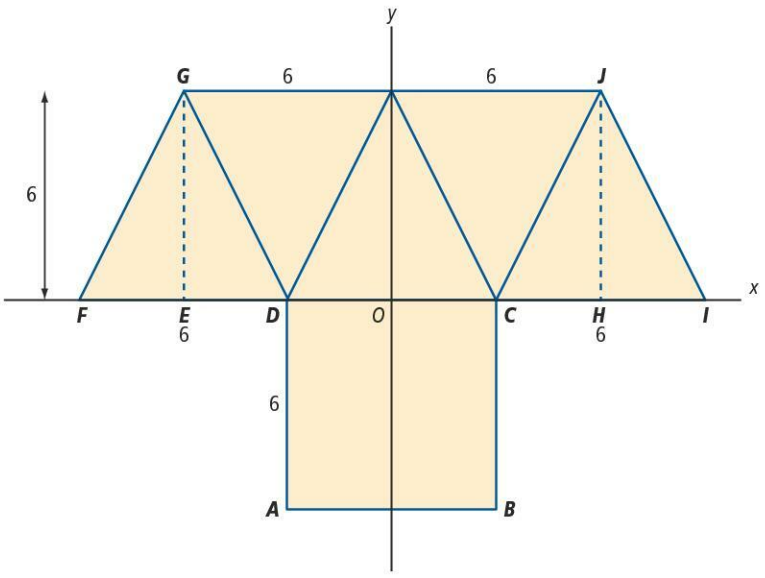


b Zie de tekening bij opdracht a, de zwaartepunten zijn de punten H en I.

c Z is het snijpunt van de lijnen FG en HI, zie de tekening bij opdracht a.

d Noem P het snijpunt van lijn BC met lijn OE. Dan is $P(0, 6)$.
De oppervlakte van vierkant $CDEP$ is $3 \cdot 3 = 9$ en het zwaartepunt is $Z_1\left(1\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}\right)$.
De oppervlakte van rechthoek $OABP$ is $12 \cdot 6 = 72$ en het zwaartepunt is $Z_2(6, 3)$.
$m = m_1 + m_2 = 9 + 72 = 81$
$\vec{z} = \frac{9}{81} \cdot \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ 7\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{72}{81} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\frac{1}{2} \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
Dus het zwaartepunt van de zeshoek is $Z\left(5\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$.

X5 **a**



Neem $F(-9, 0)$, $E(-6, 0)$, $G(-6, 6)$, $H(6, 0)$, $I(9, 0)$ en $J(6, 6)$.
De oppervlakte van driehoek FEG is $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9$.
$x_z = \frac{1}{3}(-9 + -6 + -6) = -7$ en $y_z = \frac{1}{3}(0 + 0 + 6) = 2$, het zwaartepunt is $Z_1(-7, 2)$.
De oppervlakte van rechthoek $EHJG$ is $12 \cdot 6 = 72$ en het zwaartepunt is $Z_2(0, 3)$.
De oppervlakte van driehoek HIJ is $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9$.
$x_z = \frac{1}{3}(6 + 9 + 6) = 7$ en $y_z = \frac{1}{3}(0 + 0 + 6) = 2$, het zwaartepunt is $Z_3(7, 2)$.
$m = m_1 + m_2 + m_3 = 9 + 72 + 9 = 90$
$\vec{z} = \frac{9}{90} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{72}{90} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{9}{90} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\frac{4}{5} \end{pmatrix}$
Dus het zwaartepunt van het trapezium is $Z\left(0, 2\frac{4}{5}\right)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b Neem $A(-3, -6)$, $B(3, -6)$, $C(3, 0)$ en $D(-3, 0)$.
De oppervlakte van vierkant $ABCD$ is $6 \cdot 6 = 36$ en het zwaartepunt is $Z_4(0, -3)$.
$m = m_{123} + m_4 = 90 + 36 = 126$
$\vec{z} = \frac{90}{126} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2\frac{4}{5} \end{pmatrix} + \frac{36}{126} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1\frac{1}{7} \end{pmatrix}$
Het zwaartepunt van de hele figuur is $Z\left(0, 1\frac{1}{7}\right)$.

c Het zwaartepunt van het trapezium is $Z_1\left(0, 2\frac{4}{5}\right)$ en de oppervlakte is 90.
Het zwaartepunt van de rechthoek is $Z_2\left(0, -\frac{1}{2}p\right)$ en de oppervlakte is $6p$.
$m = m_1 + m_2 = 90 + 6p$
$\vec{z} = \frac{90}{90 + 6p} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2\frac{4}{5} \end{pmatrix} + \frac{6p}{90 + 6p} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}p \end{pmatrix}$
Als het zwaartepunt van de figuur in $(0, 0)$ ligt, dan geldt
$\frac{90}{90 + 6p} \cdot 2\frac{4}{5} + \frac{6p}{90 + 6p} \cdot -\frac{1}{2}p = 0$
$90 \cdot 2\frac{4}{5} + 6p \cdot -\frac{1}{2}p = 0$
$252 - 3p^2 = 0$
$3p^2 = 252$
$p^2 = 84$
$p = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$ ($p = -\sqrt{84}$ voldoet niet)

22.4 Redeneren en rekenen

intro Je kunt de lengten van de zijden van $\triangle ABC$ berekenen door gelijkvormigheid te gebruiken. De driehoeken ABC en MBP zijn gelijkvormig.
$MB = 6$, $PM = 2$ en $BP = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32}$
$AB = 12$ en dus $AB : MB = 2 : 1$.
Dan is $AC = 2 \cdot MP = 2 \cdot 2 = 4$ en $BC = 2 \cdot BP = 2\sqrt{32}$
Je gebruikt de stelling van Thales om aan te tonen dat $\angle ACB = 90°$.
Je gebruikt de raaklijnstelling om aan te tonen dat $\angle MPB = 90°$.
En omdat $\angle ACB = \angle MPB$ en $\angle CBA = \angle PBM$ zijn de driehoeken ABC en MBP gelijkvormig.

28 a $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(4, 4)$ en $D(0, 4)$
Een vergelijking van de cirkel c is $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.
Een vectorvoorstelling van de raaklijn uit D is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.
Deze raaklijn snijden met de cirkel c geeft
$(\lambda - 2)^2 + (4 + \lambda m)^2 = 4$
$\lambda^2 - 4\lambda + 4 + 16 + 8\lambda m + m^2\lambda^2 = 4$
$(m^2 + 1)\lambda^2 + (8m - 4)\lambda + 16 = 0$
$D = (8m - 4)^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 16$
$D = 64m^2 - 64m + 16 - 64m^2 - 64$
$D = -64m - 48$
$D = 0$ geeft $-64m - 48 = 0$.
$-64m = 48$
$m = -\frac{48}{64} = -\frac{3}{4}$

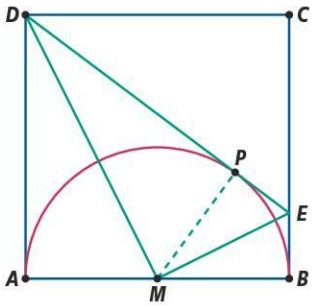
© Noordhoff Uitgevers bv

$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$ of $\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ en dus is de normaalvector $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Een vergelijking van lijn DE is $3x + 4y = c$.
$x = 0$ en $y = 4$ invullen geeft $c = 16$
De vergelijking van lijn DE is $3x + 4y = 16$.

b Voor E geldt $x = 4$ en dus $3 \cdot 4 + 4y = 16$.
$4y = 4$
$y = 1$ dus $E(1, 4)$

c $CE = 4 - 1 = 3$ en de oppervlakte van $\triangle ECD$ is $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$.

d $PM \perp DE$ (*raaklijnstelling*)
Omdat $DP = DA$ (*raaklijnstukken*) en $AM = PM$ (*straal*), is
$\angle DMA = \angle DMP$.
Evenzo is $\angle PME = \angle BME$.
$\angle DMA + \angle DMP + \angle PME + \angle BME = 180°$
$\angle DMP + \angle PME = 180° : 2 = 90°$



e $\angle A = \angle B = 90°$
$\angle ADM + \angle DMA = 90°$ en ook $\angle BME + \angle DMA = 90°$, dus
$\angle ADM = \angle BME$.
Dus is $\triangle DAM \sim \triangle MBE$.

f $BE : AM = BM : AD$ geeft $BE : 2 = 2 : 4$ dus $BE = 1$.
Dan is $CE = 4 - 1 = 3$ en is de oppervlakte van $\triangle ECD$ gelijk aan $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$.

g $BE = x$, $PE = x$ (*raaklijnstukken*) en $CE = 4 - x$
$DP = AD = 4$ (*raaklijnstukken*)
De stelling van Pythagoras in $\triangle ECD$ geeft $4^2 + (4 - x)^2 = (4 + x)^2$.
$16 + 16 - 8x + x^2 = 16 + 8x + x^2$
$-16x = -16$ ofwel $x = 1$

h $BE = x = 1$ geeft $CE = 4 - 1 = 3$.
De oppervlakte van $\triangle ECD$ is $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$.

29 $\tan(\angle CAB) = \dfrac{BC}{AB}$ geeft $BC = AB \cdot \tan(60°) = 6\sqrt{3}$.
$AC = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 + 6^2} = \sqrt{108 + 36} = \sqrt{144} = 12$
$\cos(\angle DAB) = \dfrac{AD}{AB}$ geeft $AD = 6 \cdot \cos(60°) = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$ en dus is
$CD = 12 - 3 = 9$.
$\tan(\angle EAB) = \dfrac{EB}{AB}$ geeft $EB = 6 \cdot \tan(30°) = 6 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ en dus is
$EC = 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.
$DB = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$
De hoogtelijn uit E op zijde CD snijdt zijde CD in punt F.
$\triangle DBC \sim \triangle FEC$ (want $\angle CDE = \angle CFE$ en $\angle DCE = \angle ECF$)
$EF : DB = EC : BC$ geeft $EF = \dfrac{EC \cdot DB}{BC} = \dfrac{4\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$
De oppervlakte van $\triangle ABC$ is $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$.
De oppervlakte van $\triangle DEC = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$.
Dus de oppervlakte van $\triangle DEC$ is de helft van die van $\triangle ABC$.

© Noordhoff Uitgevers bv

30 **a** $CA = \sqrt{MA^2 + MC^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128}$
$CB = \sqrt{MC^2 + MB^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128}$
$\angle NPC = 90°$ (*raaklijnstelling*) dus $CP = \sqrt{CN^2 - PN^2} = \sqrt{12^2 - 4^2} = \sqrt{128}$
Hieruit volgt $CA = CB = CP$.

b $\angle ACB = 90°$ (*Thales*)
$\angle CAP = \angle CPA$ (basishoeken in een gelijkbenige driehoek)
$\angle CPB = \angle CBP$ (basishoeken in een gelijkbenige driehoek)
Hieruit volgt $\angle APB = \angle CAP + \angle CBP$.
$\angle ACB + \angle CAP + \angle APB + \angle CBP = 360°$ (hoekensom vierhoek)
$90° + 2 \cdot \angle APB = 360°$
$2 \cdot \angle APB = 270°$
$\angle APB = 135°$

31 Noem het middelpunt M, dan moet gelden $AM = BM = \text{d}(M, l)$.
Uit $AM = BM$ volgt dat M op de middelloodlijn van lijnstuk AB moet liggen.
Het midden van lijnstuk AB is $(3, -1)$.
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ -18 \end{pmatrix}$ dus een richtingsvector van de middelloodlijn is $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Middelloodlijn: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ of korter: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.
M op de middelloodlijn, dus $M(3\lambda, -\lambda)$.
$AM = \sqrt{(6 - 3\lambda)^2 + (8 + \lambda)^2} = \sqrt{36 - 36\lambda + 9\lambda^2 + 64 + 16\lambda + \lambda^2}$
$AM = \sqrt{10\lambda^2 - 20\lambda + 100}$
$\text{d}(M, l) = \dfrac{|3 \cdot 3\lambda + 4 \cdot -\lambda - 60|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{|5\lambda - 60|}{5} = |\lambda - 12|$
Uit $AM = \text{d}(M, l)$ volgt $\sqrt{10\lambda^2 - 20\lambda + 100} = |\lambda - 12|$.
$10\lambda^2 - 20\lambda + 100 = (\lambda - 12)^2$
$10\lambda^2 - 20\lambda + 100 = \lambda^2 - 24\lambda + 144$
$9\lambda^2 + 4\lambda - 44 = 0$
$D = 16 - 4 \cdot 9 \cdot -44 = 1600$
$\lambda = \dfrac{-4 + 40}{18} = 2$ of $\lambda = \dfrac{-4 - 44}{18} = -2\frac{2}{3}$
$\lambda = 2$ geeft $M(6, -2)$ en $r = |2 - 12| = 10$.
$\lambda = -2\frac{2}{3}$ geeft $M\left(-8, 2\frac{2}{3}\right)$ en $r = |-2\frac{2}{3} - 12| = 14\frac{2}{3}$.
De cirkels zijn $(x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 100$ en
$(x + 8)^2 + \left(y - 2\frac{2}{3}\right)^2 = \left(14\frac{2}{3}\right)^2 = 215\frac{1}{9}$.

32 **a** $\text{d}(M, \textit{lijn } AB) = MQ = 4$
Lijn AC: de richtingscoëfficiënt is $\dfrac{6 - 2}{1 - -2} = \dfrac{4}{3}$
$x = -2$ en $y = 2$ invullen bij $y = \frac{4}{3}x + b$ geeft $2 = \frac{4}{3} \cdot -2 + b$ dus $b = 4\frac{2}{3}$.
Een vergelijking van lijn AC is $y = \frac{4}{3}x + 4\frac{2}{3}$ ofwel $4x - 3y + 14 = 0$.
$\text{d}(M, \textit{lijn } AC) = \dfrac{|4 \cdot 6 - 3 \cdot 6 + 14|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \dfrac{20}{5} = 4$
Lijn BC: de richtingscoëfficiënt is $\dfrac{6 - 2}{1 - 4} = -\dfrac{4}{3}$
$x = 4$ en $y = 2$ invullen bij $y = -\frac{4}{3}x + b$ geeft $2 = -\frac{4}{3} \cdot 4 + b$ dus $b = 7\frac{1}{3}$.
Een vergelijking van lijn BC is $y = -\frac{4}{3}x + 7\frac{1}{3}$ ofwel $4x + 3y - 22 = 0$.
$\text{d}(M, \textit{lijn } BC) = \dfrac{|4 \cdot 6 + 3 \cdot 6 - 22|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \dfrac{20}{5} = 4$

© Noordhoff Uitgevers bv

d(M, *lijn* AB) = d(M, *lijn* BC) dus M ligt op de bissectrice van hoek CBQ.
d(M, *lijn* AC) = d(M, *lijn* BC) dus M ligt op de bissectrice van hoek PCB.
En dus is M het snijpunt van deze bissectrices.

b d(M, *lijn* AB) = d(M, *lijn* AC) dus M ligt op de bissectrice van hoek CAB.

c Het middelpunt is $M(6, 6)$ en de straal is $MQ = 4$.
Een vergelijking van de cirkel is $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 16$.

33 a $\vec{e} = \frac{1}{3} \cdot \vec{a} + \frac{1}{3} \cdot \vec{b} + \frac{1}{3} \cdot \vec{s}$
$\vec{f} = \frac{1}{3} \cdot \vec{b} + \frac{1}{3} \cdot \vec{c} + \frac{1}{3} \cdot \vec{s}$
$\vec{g} = \frac{1}{3} \cdot \vec{c} + \frac{1}{3} \cdot \vec{d} + \frac{1}{3} \cdot \vec{s}$
$\vec{h} = \frac{1}{3} \cdot \vec{a} + \frac{1}{3} \cdot \vec{d} + \frac{1}{3} \cdot \vec{s}$

b $\overrightarrow{EF} = \vec{f} - \vec{e} = \frac{1}{3} \cdot \vec{b} + \frac{1}{3} \cdot \vec{c} + \frac{1}{3} \cdot \vec{s} - \left(\frac{1}{3} \cdot \vec{a} + \frac{1}{3} \cdot \vec{b} + \frac{1}{3} \cdot \vec{s}\right) = \frac{1}{3} \cdot \vec{c} - \frac{1}{3} \cdot \vec{a} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{c} - \vec{a})$
$\overrightarrow{HG} = \vec{g} - \vec{h} = \frac{1}{3} \cdot \vec{c} + \frac{1}{3} \cdot \vec{d} + \frac{1}{3} \cdot \vec{s} - \left(\frac{1}{3} \cdot \vec{a} + \frac{1}{3} \cdot \vec{d} + \frac{1}{3} \cdot \vec{s}\right) = \frac{1}{3} \cdot \vec{c} - \frac{1}{3} \cdot \vec{a} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{c} - \vec{a})$
De overstaande zijden van vierhoek $EFGH$ zijn evenwijdig en even lang, dus is $EFGH$ een parallellogram.

c Uit $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a}$ volgt dat $EF \,//\, AC$ en $HG \,//\, AC$.
Uit $\overrightarrow{BD} = \vec{d} - \vec{b}$ volgt dat $EH \,//\, BD$ en $FG \,//\, BD$.

d Zwaartelijn SE snijdt zijde AB in punt T met $SE = \frac{2}{3} \cdot ST$.
Noem P het snijpunt van lijn AS met lijn HE en Q het snijpunt van lijn BS met lijn EF.
$\triangle PQS \sim \triangle ABS$ met $SP = \frac{1}{3} \cdot AS$ en $opp\ \triangle PQS = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot opp\ \triangle ABS$.
$opp\ \triangle PQS = opp\ \triangle PQE$ (half parallellogram),
dus $opp\ EQSP = \frac{2}{9} \cdot opp\ \triangle ABS$.
Zo ook voor de andere driehoeken, dus is $opp\ EFGH : opp\ ABCD = 2 : 9$.

34 a $\vec{b} = \vec{s} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ p \end{pmatrix}$ en $|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + p^2}$

$|\vec{b}| = 5$ geeft $\sqrt{9 + p^2} = 5$.
$9 + p^2 = 25$
$p^2 = 16$
$p = -4$ of $p = 4$

b $\sqrt{9 + p^2} = 7$ geeft $9 + p^2 = 49$.
$p^2 = 40$
$p = -\sqrt{40}\ (= -2\sqrt{10})$ of $p = \sqrt{40}\ (= 2\sqrt{10})$

35 a Stel $P(x, y)$ is een punt van een bissectrice, dus geldt d(P, l) = d(P, m).

$$\text{d}(P, l) = \frac{|1 \cdot x - 3 \cdot y + 16|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{|x - 3y + 16|}{\sqrt{10}}$$

$$\text{d}(P, m) = \frac{|3 \cdot x - 1 \cdot y - 8|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|3x - y - 8|}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{|x - 3y + 16|}{\sqrt{10}} = \frac{|3x - y - 8|}{\sqrt{10}}$$

$x - 3y + 16 = 3x - y - 8$ of $x - 3y + 16 = -(3x - y - 8)$
$-2x - 2y = -24$ of $4x - 4y = -8$
De gevraagde bissectrices zijn $x + y = 12$ en $x - y = -2$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b Vanwege de ligging van punt A ligt middelpunt M op de bissectrice met vergelijking $y = x + 2$.
Stel $M(u, u + 2)$ en de straal r.
De cirkel raakt lijn m, dus $d(M, m) = r$.
$d(M, m) = \dfrac{|3 \cdot u - 1 \cdot (u + 2) - 8|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \dfrac{|2u - 10|}{\sqrt{10}}$
De cirkel gaat door punt $A(1, -1)$, dus $MA = r$.
$MA = \sqrt{(1 - u)^2 + (-1 - (u + 2))^2} = \sqrt{(1 - u)^2 + (-3 - u)^2}$ ofwel
$MA = \sqrt{2u^2 + 4u + 10}$
$d(M, m) = MA$ geeft $\dfrac{|2u - 10|}{\sqrt{10}} = \sqrt{2u^2 + 4u + 10}$
$\dfrac{(2u - 10)^2}{10} = 2u^2 + 4u + 10$
$4u^2 - 40u + 100 = 20u^2 + 40u + 100$
$16u^2 + 80u = 0$ ofwel $16u(u + 5) = 0$
$u = 0$ of $u = -5$
$M_1(0, 2)$ of $M_2(-5, -3)$ en $r_1 = \sqrt{10}$ of $r_2 = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
De gevraagde middelpuntsvergelijkingen zijn $x^2 + (y - 2)^2 = 10$ en $(x + 5)^2 + (y + 3)^2 = 40$.

36 **a** $AP = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$
$BP = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ dus $AP = 2 \cdot BP$.

b $AP = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$ en $BP = \sqrt{(x - 7)^2 + y^2}$
Uit $AP = 2 \cdot BP$ volgt $\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = 2 \cdot \sqrt{(x - 7)^2 + y^2}$.
$(x - 1)^2 + y^2 = 4((x - 7)^2 + y^2)$
$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4x^2 - 56x + 196 + 4y^2$
$3x^2 - 54x + 3y^2 + 195 = 0$
$x^2 + y^2 - 18x + 65 = 0$
$(x - 9)^2 - 81 + y^2 + 65 = 0$
$(x - 9)^2 + y^2 = 16$
Dit is de middelpuntsvergelijking van een cirkel, dus de punten P liggen op een cirkel.

X6 **a** Een vergelijking van de lijn OB is $y = 3x$.
Hoogtelijn AC staat loodrecht op lijn OB en heeft richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{3}$.
$x = 5$ en $y = 0$ invullen bij $y = -\frac{1}{3}x + b$ geeft $0 = -\frac{1}{3} \cdot 5 + b$ dus $b = 1\frac{2}{3}$.
Een vergelijking van hoogtelijn AC is $y = -\frac{1}{3}x + 1\frac{2}{3}$.
Voor punt C geldt $3x = -\frac{1}{3}x + 1\frac{2}{3}$.
$3\frac{1}{3}x = 1\frac{2}{3}$
$x = \frac{1}{2}$ en $y = 1\frac{1}{2}$ dus $C\left(\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$.
Punt Q is het midden van lijnstuk CD dus $Q\left(1\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$.
Punt P is het midden van lijnstuk AB dus $P\left(3\frac{1}{2}, 3\right)$.
$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2} \\ 0 - 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ -1\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{4} - 3\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\frac{1}{4} \\ -2\frac{1}{4} \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{PQ} = 1\frac{1}{2} \cdot -2\frac{1}{4} + -1\frac{1}{2} \cdot -2\frac{1}{4} = 0$ dus $PQ \perp CD$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b S ligt op de cirkel met middellijn ML en dus middelpunt V (*Thales*).
T ligt ook op de cirkel met middellijn ML en dus middelpunt V (*Thales*).
Omdat S en T beide op de cirkel liggen met middelpunt V geldt $SV = TV$.
$\triangle STV$ is gelijkbenig. In een gelijkbenige driehoek valt de zwaartelijn uit de top samen met de hoogtelijn uit de top. Dus is lijnstuk VW ook een hoogtelijn. En daarom geldt $VW \perp ST$.

22.5 Gemengde opdrachten

37 $c_1 : M_1(-5, 5)$ en $r_1 = 5$
$c_2 : M_2(5, 5)$ en $r_2 = 5$
Vanwege de symmetrie ligt met middelpunt van c_3 op de y-as.
Stel $M_3(0, p)$ dan is $r_3 = p + 1$.
Omdat c_3 raakt aan c_1 geldt $M_1M_3 + r_1 = r_3$.
$M_1M_3 = \sqrt{(0 - -5)^2 + (p - 5)^2} = \sqrt{25 + (p - 5)^2}$
Uit $M_1M_3 + r_1 = r_3$ volgt $\sqrt{25 + (p - 5)^2} + 5 = p + 1$.
$\sqrt{p^2 - 10p + 50} = p - 4$
$p^2 - 10p + 50 = p^2 - 8p + 16$
$-2p = -34$ dus $p = 17$
$M(0, 17)$ en $r = 17 + 1 = 18$

38 **a** $\angle BAC = 90°$ want $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (*Pythagoras*).
Dan ligt A op de cirkel met middellijn BC en middelpunt M (*Thales*).
En dus is $MB = MA = MC$.
Omdat $MA = MC$ is $\triangle AMC$ gelijkbenig.

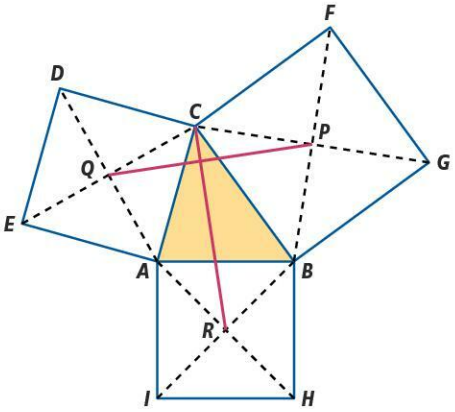
b De loodlijn uit M op zijde AC snijdt zijde AC in punt N.
Omdat $MA = MC$, is N het midden van zijde AC.
$AM = 5$, $AN = 4$ dus $MN = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.
De oppervlakte van $\triangle MNA$ is $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$.
$\triangle MNA \sim \triangle FMA$ (want $\angle MNA = \angle FMA = 90°$ en $\angle MAN = \angle FAM$)
$MF : MN = MA : NA$ geeft $MF : 3 = 5 : 4$ en dus $MF = \dfrac{5 \cdot 3}{4} = 3\frac{3}{4}$.
De oppervlakte van $\triangle FMA$ is $\frac{1}{2} \cdot MF \cdot MA = \frac{1}{2} \cdot 3\frac{3}{4} \cdot 5 = 9\frac{3}{8}$.
De oppervlakte van vierhoek $AFDE$ is $5^2 - 9\frac{3}{8} = 15\frac{5}{8}$.

39 $\angle CAB + \angle CBA = 180° - 90° = 90°$
$\angle SAB + \angle SBA = \frac{1}{2} \cdot 90° = 45°$
$\angle ASB = 180° - 45° = 135°$
Dan is $\angle ESA = 180° - 135° = 45°$.

© Noordhoff Uitgevers bv

40 $A(0, 0)$, $B(8, 0)$ en $C(2, 8)$

Zie de tekening voor de punten D tot en met I.



$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$ dan is $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix}-8\\2\end{pmatrix}$ en $E(-8, 2)$.

Q is het midden van lijnstuk EC dus $Q(-3, 5)$.

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix}$ dan is $\overrightarrow{BG} = \begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}$ en $G(16, 6)$.

P is het midden van lijnstuk CG dus $P(9, 7)$.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}$ dan is $\overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix}0\\-8\end{pmatrix}$ en $H(8, -8)$.

R is het midden van lijnstuk AH dus $R(4, -4)$.

$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}-12\\-2\end{pmatrix}$ en $PQ = \sqrt{(-12)^2 + (-2)^2} = \sqrt{148}$

$\overrightarrow{CR} = \begin{pmatrix}2\\-12\end{pmatrix}$ en $CR = \sqrt{2^2 + (-12)^2} = \sqrt{148}$ dus $PQ = CR$.

$\begin{pmatrix}-12\\-2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\-12\end{pmatrix} = -12 \cdot 2 + -2 \cdot -12 = 0$ dus $PQ = CR$ en $PQ \perp CR$.

Onderzoeksopdrachten

41 **a** $c_1 : x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25$ ofwel $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$

$c_2 : x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 10$ ofwel $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$

De vergelijkingen van elkaar aftrekken geeft $12x - 6y = 0$ ofwel $y = 2x$.

De snijpunten van de twee cirkels liggen op lijn l.

b $MP = \sqrt{(4 - -3)^2 + (8 - 4)^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}$

$NP = \sqrt{(4 - 3)^2 + (8 - 1)^2} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50}$

De driehoeken MAP en NBP zijn rechthoekig. (*raaklijnstelling*)

$AP^2 = MP^2 - MA^2$ geeft $AP = \sqrt{65 - 25} = \sqrt{40}$

$BP^2 = NP^2 - NB^2$ geeft $BP = \sqrt{50 - 10} = \sqrt{40}$ dus $AP = BP$.

c P op l dus voor P geldt $P(x, 2x)$.

$MP = \sqrt{(x - -3)^2 + (2x - 4)^2} = \sqrt{x^2 + 6x + 9 + 4x^2 - 16x + 16}$ ofwel

$MP = \sqrt{5x^2 - 10x + 25}$

$NP = \sqrt{(x - 3)^2 + (2x - 1)^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + 4x^2 - 4x + 1}$

$NP = \sqrt{5x^2 - 10x + 10}$

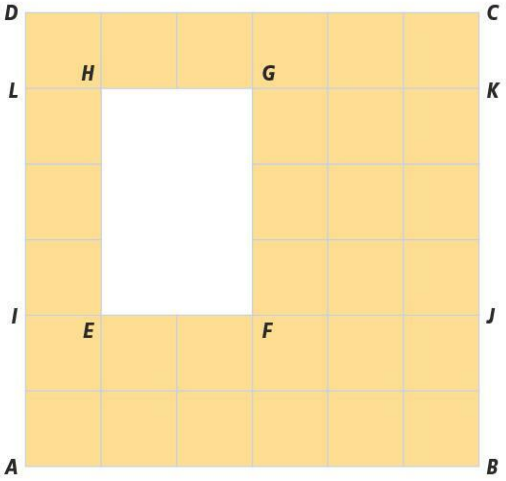
$AP^2 = MP^2 - MA^2$ geeft $AP = \sqrt{5x^2 - 10x + 25 - 25} = \sqrt{5x^2 - 10x}$

$BP^2 = NP^2 - NB^2$ geeft $BP = \sqrt{5x^2 - 10x + 10 - 10} = \sqrt{5x^2 - 10x}$ dus

$AP = BP$ geldt voor elk punt P op l dat buiten de cirkels ligt.

© Noordhoff Uitgevers bv

42 **a** $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(6, 6)$, $D(0, 6)$, $E(1, 2)$, $F(3, 2)$, $G(3, 5)$ en $H(1, 5)$
Zie de tekening voor de punten $I(0, 2)$, $J(6, 2)$, $K(6, 5)$ en $L(0, 5)$.



Van rechthoek $ABJI$ is het zwaartepunt $Z_1(3, 1)$ en de oppervlakte $6 \cdot 2 = 12$.
Van rechthoek $FJKG$ is het zwaartepunt $Z_2\left(4\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$ en de oppervlakte $3 \cdot 3 = 9$.
Van rechthoek $LKCD$ is het zwaartepunt $Z_3\left(3, 5\frac{1}{2}\right)$ en de oppervlakte $6 \cdot 1 = 6$.
Van rechthoek $IEHL$ is het zwaartepunt $Z_4\left(\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$ en de oppervlakte $3 \cdot 1 = 3$.
$m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 12 + 9 + 6 + 3 = 30$

$$\vec{z} = \tfrac{12}{30} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \tfrac{9}{30} \cdot \begin{pmatrix} 4\frac{1}{2} \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \tfrac{6}{30} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \tfrac{3}{30} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{5} \\ 2\frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

Het zwaartepunt is $Z\left(3\frac{1}{5}, 2\frac{9}{10}\right)$.

b Noem $Z_1(3, 3)$ het zwaartepunt van vierkant $ABCD$ (met oppervlakte 36).
Noem $Z_2\left(2, 3\frac{1}{2}\right)$ het zwaartepunt van rechthoek $EFGH$ (met oppervlakte 6).
Noem Z_3 het zwaartepunt van de ontstane figuur (met oppervlakte 30).
Dan geldt $\vec{z}_1 = \frac{6}{36} \cdot \vec{z}_2 + \frac{30}{36} \cdot \vec{z}_3$.

Ofwel $\frac{30}{36} \cdot \vec{z}_3 = \vec{z}_1 - \frac{6}{36} \cdot \vec{z}_2$

$\vec{z}_3 = \frac{36}{30} \cdot \vec{z}_1 - \frac{6}{30} \cdot \vec{z}_2$

$$\vec{z_3} = \tfrac{36}{30} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \tfrac{6}{30} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{5} \\ 2\frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

Samenvatting

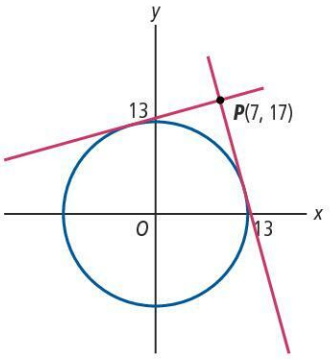
S1 $x = 5 + 3\lambda$ en $y = \lambda$ invullen bij de vergelijking van c geeft $(5 + 3\lambda)^2 + \lambda^2 = 65$
$25 + 30\lambda + 9\lambda^2 + \lambda^2 = 65$
$10\lambda^2 + 30\lambda - 40 = 0$
$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$
$(\lambda - 1)(\lambda + 4) = 0$
$\lambda = 1$ of $\lambda = -4$
De snijpunten zijn $(8, 1)$ en $(-7, -4)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

S2 $c_1 : x^2 + y^2 - 2y + 1 = 4$ ofwel $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$
$c_2 : x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 17$ ofwel $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 7 = 0$
De vergelijkingen van elkaar aftrekken:
$x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$
$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 7 = 0$ $-$
$2x + 4y + 4 = 0$
$2x = -4y - 4$
$x = -2y - 2$
Dit resultaat invullen in de vergelijking van c_1 geeft
$(-2y - 2)^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$
$4y^2 + 8y + 4 + y^2 - 2y - 3 = 0$
$5y^2 + 6y + 1 = 0$
$y = \frac{-6 + \sqrt{16}}{10} = -\frac{1}{5}$ of $y = \frac{-6 - \sqrt{16}}{10} = -1$
$x = -2 \cdot -\frac{1}{5} - 2 = -1\frac{3}{5}$ of $x = -2 \cdot -1 - 2 = 0$
De snijpunten zijn $\left(-1\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ en $(0, -1)$.

S3 Het middelpunt van de cirkel is $M(1, -2)$.
Als $P(5, 5)$, dan is $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ een normaalvector van de raaklijn in P.
Een vergelijking van de raaklijn is dan $4x + 7y = c$.
$x = 5$ en $y = 5$ invullen geeft $4 \cdot 5 + 7 \cdot 5 = c$ dus $c = 55$.
Een vergelijking van de raaklijn is $4x + 7y = 55$.

S4 Uit een schets blijkt dat geen van de raaklijnen verticaal is.



Voor de raaklijnen geldt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.
$x = 7 + \lambda$ en $y = 17 + \lambda m$ invullen in de vergelijking van c geeft
$(7 + \lambda)^2 + (17 + \lambda m)^2 = 169$
$49 + 14\lambda + \lambda^2 + 289 + 34\lambda m + \lambda^2 m^2 = 169$
$(m^2 + 1)\lambda^2 + (14 + 34m)\lambda + 169 = 0$
$D = (14 + 34m)^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 169$
$D = 196 + 952m + 1156m^2 - 676 - 676m^2$
$D = 480m^2 + 952m - 480$
$D = 0$ geeft $480m^2 + 952m - 480 = 0$.
$60m^2 + 119m - 60 = 0$
$D = 119^2 - 4 \cdot 60 \cdot -60 = 28\,561$
$m = \frac{-119 + \sqrt{28\,561}}{120} = \frac{5}{12}$ of $m = \frac{-119 - \sqrt{28\,561}}{120} = \frac{-288}{120} = -\frac{12}{5}$
De vectorvoorstellingen van de raaklijnen zijn
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

S5 $l: 8x + 15y = 1$ ofwel $8x + 15y - 1 = 0$

$$d(P, l) = \frac{|8 \cdot -6 + 15 \cdot -16 - 1|}{\sqrt{8^2 + 15^2}} = \frac{289}{17} = 17$$

S6 $l: 3x + 4y = 26$ ofwel $l: y = -\frac{3}{4}x + 6\frac{1}{2}$

$m: 5x - 2y = 26$ ofwel $m: y = 2\frac{1}{2}x - 13$

De richtingscoëfficiënt van l is $-\frac{3}{4}$ en de richtingscoëfficiënt van m is $2\frac{1}{2}$.

$\tan(\alpha) = \frac{3}{4}$ geeft $\alpha = 36{,}896\ldots°$

$\tan(\beta) = 2\frac{1}{2}$ geeft $\beta = 68{,}198\ldots°$

$\alpha + \beta = 36{,}896\ldots° + 68{,}198\ldots° = 105{,}068\ldots°$

$\angle(l, m) = 180° - 105{,}068\ldots° \approx 75°$

S7 Elk vierkant heeft oppervlakte 4.

De zwaartepunten van de zes vierkanten zijn (3, 1), (1, 3), (3, 3), (5, 3), (7, 3) en (3, 5).

$$\vec{z} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{2}{3} \\ 3 \end{pmatrix}$$

Het zwaartepunt is $\left(3\frac{2}{3}, 3\right)$.

S8 **a** Neem $M(0, 0)$, dan is $A(-r, 0)$ en $B(r, 0)$.

Noem p de x-coördinaat van P, met $p > 0$. Dan is $Q(p, 0)$.

$AQ = r + p$

$BQ = r - p$

$PQ = \sqrt{PM^2 - MQ^2} = \sqrt{r^2 - p^2}$

$PQ^2 = r^2 - p^2$

$AQ \cdot BQ = (r + p)(r - p) = r^2 - p^2$

Dus is $PQ^2 = AQ \cdot BQ$.

b $\angle APB = 90°$ (*Thales*)

$\angle PAQ + \angle APQ = 90°$ (want $\angle AQP = 90°$)

$\angle APQ = 90° - \angle BPQ$

dus $\angle PAQ + 90° - \angle BPQ = 90°$ ofwel $\angle PAQ = \angle BPQ$

$$\tan(\angle PAQ) = \frac{PQ}{AQ}$$

$$\tan(\angle BPQ) = \frac{BQ}{PQ}$$

Omdat $\angle PAQ = \angle BPQ$ is $\frac{PQ}{AQ} = \frac{BQ}{PQ}$ en dus $PQ^2 = AQ \cdot BQ$.

Test jezelf

T1 De cirkel gaat door O en A, dus ligt het middelpunt op de middelloodlijn van lijnstuk OA. Verder ligt het middelpunt ook op de lijn door A, loodrecht op de raaklijn in A.

Het midden van lijnstuk OA is (1, 1).

$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ dus een richtingsvector van de middelloodlijn is $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Voor de middelloodlijn geldt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

$c : x^2 - 2x + y^2 - 10y + 16 = 0$
$c : (x-1)^2 - 1 + (y-5)^2 - 25 + 16 = 0$
$c : (x-1)^2 + (y-5)^2 = 10$
Het middelpunt M van c is $M(1, 5)$.
Een normaalvector van de raaklijn in A is $\vec{n} = \overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ dus een vergelijking van de raaklijn is $x - 3y = b$.
$x = 2$ en $y = 2$ invullen geeft $2 - 3 \cdot 2 = b$ ofwel $b = -4$.
De raaklijn is de lijn $x - 3y = -4$.
De middelloodlijn snijden met deze raaklijn geeft
$1 + \lambda - 3(1 - \lambda) = -4$
$4\lambda - 2 = -4$
$4\lambda = -2$
$\lambda = -\frac{1}{2}$ dus het middelpunt van de gevraagde cirkel is $\left(\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$ en de straal is
$r = \sqrt{\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 - 1\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2\frac{1}{2}}$
Een vergelijking van de cirkel is $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - 1\frac{1}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{2}$.

T2 Een vectorvoorstelling van de raaklijn is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.
$x = 20 + \lambda$ en $y = 20 + \lambda m$ invullen bij de vergelijking van de cirkel geeft
$(20 + \lambda + 6)^2 + (20 + \lambda m - 7)^2 = 260$
$(\lambda + 26)^2 + (\lambda m + 13)^2 = 260$
$\lambda^2 + 52\lambda + 676 + \lambda^2 m^2 + 26\lambda m + 169 = 260$
$(m^2 + 1)\lambda^2 + (26m + 52)\lambda + 585 = 0$
$D = (26m + 52)^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 585$
$D = 676m^2 + 2704m + 2704 - 2340 - 2340m^2$
$D = -1664m^2 + 2704m + 364$
$D = 0$ geeft $-1664m^2 + 2704m + 364 = 0$.
$416m^2 - 676m - 91 = 0$
$D = (-676)^2 - 4 \cdot 416 \cdot -91 = 608\,400$ $(=780^2)$
$m = \frac{676 + 780}{832} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$ of $m = \frac{676 - 780}{832} = -\frac{1}{8}$
$x = 20$ en $y = 20$ invullen bij $y = 1\frac{3}{4}x + b$ geeft $20 = 1\frac{3}{4} \cdot 20 + b$ dus $b = -15$.
$x = 20$ en $y = 20$ invullen bij $y = -\frac{1}{8}x + b$ geeft $20 = -\frac{1}{8} \cdot 20 + b$ dus $b = 22\frac{1}{2}$.
Vergelijkingen van de raaklijnen zijn $y = 1\frac{3}{4}x - 15$ en $y = -\frac{1}{8}x + 22\frac{1}{2}$.

T3 Voor het middelpunt M van de gevraagde cirkels geldt:
M ligt op de lijn m door P, loodrecht op l én $MP = \text{d}(M, x\text{-as})$.
De richtingsvector $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ van l is een normaalvector van m, dus een vergelijking van m is $3x + 4y = c$.
$x = 1$ en $y = 1$ invullen geeft $3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = c$ dus $c = 7$.
Een vergelijking van m is $3x + 4y = 7$ ofwel $y = -\frac{3}{4}x + 1\frac{3}{4}$.
M ligt op m dus de coördinaten van M zijn te schrijven als $M\left(a, -\frac{3}{4}a + 1\frac{3}{4}\right)$.
$MP = \sqrt{(a-1)^2 + \left(-\frac{3}{4}a + \frac{3}{4}\right)^2}$
$\text{d}(M, x\text{-as}) = \left|-\frac{3}{4}a + 1\frac{3}{4}\right|$
Uit $MP = \text{d}(M, x\text{-as})$ volgt $\sqrt{(a-1)^2 + \left(-\frac{3}{4}a + \frac{3}{4}\right)^2} = \left|-\frac{3}{4}a + 1\frac{3}{4}\right|$.
$(a-1)^2 + \left(-\frac{3}{4}a + \frac{3}{4}\right)^2 = \left(-\frac{3}{4}a + 1\frac{3}{4}\right)^2$
$a^2 - 2a + 1 + \frac{9}{16}a^2 - \frac{9}{8}a + \frac{9}{16} = \frac{9}{16}a^2 - \frac{21}{8}a + \frac{49}{16}$

© Noordhoff Uitgevers bv

$a^2 - \frac{1}{2}a - 1\frac{1}{2} = 0$
$\left(a - 1\frac{1}{2}\right)(a + 1) = 0$
$a = 1\frac{1}{2}$ of $a = -1$
$a = 1\frac{1}{2}$ geeft $M\left(1\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right)$ en $r = y_M = \frac{5}{8}$.
$a = -1$ geeft $M\left(-1, 2\frac{1}{2}\right)$ en $r = 2\frac{1}{2}$.
$c_1 : \left(x - 1\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{8}\right)^2 = \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64}$
$c_2 : (x + 1)^2 + \left(y - 2\frac{1}{2}\right)^2 = \left(2\frac{1}{2}\right)^2 = 6\frac{1}{4}$

T4 $c : (x - 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 = 3$ ofwel $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$
Het middelpunt M van c is $M(2, 3)$ en de straal is 4.

$$d(M, l) = \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 - 72|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{55}{5} = 11$$

$\mathrm{d}(c, l) = \mathrm{d}(M, l) - r = 11 - 4 = 7$

T5 $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ dus een vergelijking van de raaklijn l is $5x + 12y = c$.
$x = 5$ en $y = 12$ invullen geeft $5 \cdot 5 + 12 \cdot 12 = c$ dus $c = 169$.
Een vergelijking van l is $5x + 12y = 169$.
Voor punt C geldt $AC = \mathrm{d}(C, l)$.
$A(13, 0)$ en $C(p, 0)$ met $p > 13$.
$AC = p - 13$

$$d(C, l) = \frac{|5 \cdot p + 12 \cdot 0 - 169|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|5p - 169|}{13}$$

Uit $AC = \mathrm{d}(C, l)$ volgt $\frac{|5p - 169|}{13} = p - 13$.
$|5p - 169| = 13p - 169$
$5p - 169 = 13p - 169$ of $5p - 169 = -13p + 169$
$-8p = 0$ of $18p = 338$
$p = 0$ (vervalt) of $p = \frac{338}{18} = 18\frac{7}{9}$
De coördinaten van C zijn $\left(18\frac{7}{9}, 0\right)$.

T6 a Noem het snijpunt van l met de x-as punt S.
Dan is $\triangle OSP \sim \triangle MSQ$ (want $\angle OPS = \angle MQS = 90°$ (*raaklijnstelling*) en $\angle OSP = \angle MSQ$).
Stel $MS = x$ dan is $OS = x + 10$.

$OP = 5$	$OS = x + 10$
$MQ = 2$	$MS = x$

$5x = 3(x + 10)$
$2x = 30$
$x = 15$
De coördinaten van het snijpunt zijn (25, 0).

b Een vectorvoorstelling van l is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.
Een vergelijking van c_1 is $x^2 + y^2 = 25$.
l snijden met c_1 geeft $(25 + \lambda)^2 + (\lambda m)^2 = 25$.
$625 + 50\lambda + \lambda^2 + \lambda^2 m^2 = 25$
$(m^2 + 1)\lambda^2 + 50\lambda + 600 = 0$

© Noordhoff Uitgevers bv

$D = 50^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 600 = 2500 - 2400m^2 - 2400$
$D = -2400m^2 + 100$
$D = 0$ geeft $-2400m^2 + 100 = 0$.
$2400m^2 = 100$
$m^2 = \frac{1}{24}$
$m = -\sqrt{\frac{1}{24}}$ of $m = \sqrt{\frac{1}{24}}$
De richtingscoëfficiënt van l is $-\sqrt{\frac{1}{24}}$.

c Het middelpunt van c ligt op de middelloodlijn van lijnstuk PQ.
De lijn OP staat loodrecht op l en heeft dus richtingscoëfficiënt $\sqrt{24}$.
Een vergelijking van de lijn OP is $y = \sqrt{24}x$.
Deze snijden met c_1 geeft $x^2 + (\sqrt{24}x)^2 = 25$.
$x^2 + 24x^2 = 25$
$25x^2 = 25$
$x^2 = 1$
$x = -1$ of $x = 1$ dus $P(1, \sqrt{24})$.
Noem $P'(1, 0)$ en $Q'(10 + q, 0)$, dan is $\triangle OP'P \sim \triangle MQ'Q$.

$OP = 5$	$OP' = 1$	$P'P = \sqrt{24}$
$MQ = 3$	$MQ' = p$	$Q'Q$

$5p = 3$
$p = \frac{3}{5}$
$5 \cdot Q'Q = 3 \cdot \sqrt{24}$
$Q'Q = \frac{3}{5}\sqrt{24}$ dus $Q\left(10\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\sqrt{24}\right)$
Het midden van lijnstuk PQ is $\left(5\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\sqrt{24}\right)$.
De middelloodlijn van lijnstuk PQ staat loodrecht op l en heeft dus richtingscoëfficiënt $\sqrt{24}$.
$x = 5\frac{4}{5}$ en $y = \frac{4}{5}\sqrt{24}$ invullen bij $y = \sqrt{24}x + b$ geeft $\frac{4}{5}\sqrt{24} = \sqrt{24} \cdot 5\frac{4}{5} + b$ dus $b = -5\sqrt{24}$.
Een vergelijking van de middelloodlijn is $y = \sqrt{24}x - 5\sqrt{24}$.
Deze middelloodlijn snijden met de lijn $x = 10$ geeft $y = 10\sqrt{24} - 5\sqrt{24} = 5\sqrt{24}$ dus het middelpunt van c is $M(10, 5\sqrt{24})$.
De straal is $PM = \sqrt{(10 - 1)^2 + (5\sqrt{24} - \sqrt{24})^2} = \sqrt{81 + 384} = \sqrt{465}$.
Een vergelijking van c is $(x - 10)^2 + (y - 5\sqrt{24})^2 = 465$.

T7 a Omdat de oppervlakten van de driehoek en het vierkant gelijk zijn, ligt het zwaartepunt van de figuur precies midden tussen de zwaartepunten van de driehoek en het vierkant.
Het zwaartepunt van het vierkant ligt precies midden in het vierkant, dus op hoogte 3.
Het zwaartepunt van de driehoek ligt op $\frac{1}{3}$ deel van de hoogte van de driehoek (de zwaartelijnen van een driehoek snijden elkaar in het zwaartepunt en verdelen elke zwaartelijn in twee stukken in verhouding 1 : 2.). Het zwaartepunt van de driehoek ligt dus op hoogte 4 vanaf de basis van de driehoek.
Het midden tussen de twee zwaartepunten ligt dus $\frac{1}{2}$ boven de basis van de driehoek.

© Noordhoff Uitgevers bv

b Neem als oorsprong het midden van het vierkant.
Dan is het zwaartepunt van het vierkant $Z_1(0, 0)$ en de oppervlakte is 36.
Noem de hoogte van de driehoek p.

Dan is het zwaartepunt van de driehoek $Z_2\left(0, 3 + \frac{1}{3}p\right)$ en de oppervlakte is

$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot p = 3p$.
$m_1 + m_2 = 36 + 3p$
$\vec{z} = \frac{36}{36 + 3p} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3p}{36 + 3p} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 + \frac{1}{3}p \end{pmatrix}$
Het zwaartepunt ligt op het midden van de gemeenschappelijke zijde als de y-coördinaat gelijk is aan 3.

$y_z = \frac{36 \cdot 0 + 3p \cdot (3 + \frac{1}{3}p)}{36 + 3p}$

$y_z = 3$ geeft $\frac{36 \cdot 0 + 3p \cdot \left(3 + \frac{1}{3}p\right)}{36 + 3p} = 3$.
$9p + p^2 = 3(36 + 3p)$
$9p + p^2 = 108 + 9p$
$p^2 = 108$
$p = \sqrt{108}$
De hoogte van de driehoek is in dat geval $\sqrt{108}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

1 **a** $f: y = \dfrac{2}{3x-6}$ dus

$f^{inv}: x = \dfrac{2}{3y-6}$

$x(3y-6) = 2$

$3xy - 6x = 2$

$3xy = 6x + 2$

$y = 2 + \dfrac{2}{3x}$

$f^{inv}(x) = 2 + \dfrac{2}{3x}$

b $f: y = 2^{3x+2}$ dus

$f^{inv}: x = 2^{3y+2}$

$3y + 2 = {}^2\log(x)$

$3y = {}^2\log(x) - 2$

$y = \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(x) - \frac{2}{3}$

$f^{inv}(x) = \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(x) - \frac{2}{3}$

c $f: y = {}^2\log(2 + 3x^3)$ dus

$f^{inv}: x = {}^2\log(2 + 3y^3)$

$2 + 3y^3 = 2^x$

$3y^3 = 2^x - 2$

$y^3 = \frac{1}{3} \cdot 2^x - \frac{2}{3}$

$y = \sqrt[3]{\frac{1}{3} \cdot 2^x - \frac{2}{3}}$

$f^{inv}(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{3} \cdot 2^x - \frac{2}{3}}$

d $f: y = \dfrac{4}{\ln(2x+4)} + 3$ dus

$f^{inv}: x = \dfrac{4}{\ln(2y+4)} + 3$

$x - 3 = \dfrac{4}{\ln(2y+4)}$

$\ln(2y+4) = \dfrac{4}{x-3}$

$2y + 4 = e^{\frac{4}{x-3}}$

$y = -2 + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{4}{x-3}}$

$f^{inv}(x) = -2 + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{4}{x-3}}$

e $f: y = e^{2x+4}$ dus

$f^{inv}: x = e^{2y+4}$

$2y + 4 = \ln(x)$

$2y = -4 + \ln(x)$

$y = -2 + \frac{1}{2}\ln(x)$

$f^{inv}(x) = -2 + \frac{1}{2}\ln(x)$

f $f: y = \sqrt{x^2+4} - x$ dus

$f^{inv}: x = \sqrt{y^2+4} - y$

$\sqrt{y^2+4} = x + y$

$y^2 + 4 = x^2 + 2xy + y^2$

$2xy = -x^2 + 4$

$y = \dfrac{-x^2+4}{2x}$

$f^{inv}(x) = \dfrac{4-x^2}{2x}$

2 **a** Uit $f: y = x^2$ volgt $f^{inv}: x = y^2$ dus $y = -\sqrt{x}$ of $y = \sqrt{x}$.
Dus zijn er bij sommige x-waarden twee y-waarden mogelijk.
Dit kan niet bij een functie.

b Tot $x = -1$ is de grafiek van g stijgend, tussen $x = -1$ en $x = 1$ is de grafiek van g dalend en vanaf $x = 1$ is de grafiek van g weer stijgend.
Een horizontale lijn kan de grafiek van g in drie punten snijden.
Het spiegelbeeld van de grafiek van g in $y = x$ kan dan door een verticale lijn in drie punten worden gesneden. Dus zouden er bij sommige x-waarden (de x-waarden tussen -1 en 1) maar liefst drie functiewaarden zijn.
Dat kan niet bij een functie.

3 **a** $f(x) = 8x^2 \cdot x^{\frac{1}{5}} = 8x^{2\frac{1}{5}}$

$f'(x) = 8 \cdot 2\frac{1}{5} \cdot x^{1\frac{1}{5}} = 17\frac{3}{5}x\sqrt[5]{x}$

b $f(x) = 6x^{-3} + 5$

$f'(x) = -18x^{-4} = -\dfrac{18}{x^4}$

c $f(x) = 5 - 3\cos(x)$

$f'(x) = -3 \cdot -\sin(x) = 3\sin(x)$

d $f(x) = 8e^x + e$

$f'(x) = 8e^x$

e $f(x) = 4 \cdot {}^2\log(x)$

$f'(x) = 4 \cdot \dfrac{1}{x \cdot \ln(2)} = \dfrac{4}{x \cdot \ln(2)}$

f $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot 0{,}3^x$

$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot 0{,}3^x \cdot \ln(0{,}3)$

© Noordhoff Uitgevers bv

4 **a** $g'(x) = 2x \cdot \tan(3x) + x^2 \cdot \frac{1}{\cos^2(3x)} \cdot 3$

$g'(x) = 2x \cdot \tan(3x) + \frac{3x^2}{\cos^2(3x)}$

b $g'(x) = \ln(5x) + x \cdot \frac{1}{5x} \cdot 5 + 1$

$g'(x) = \ln(5x) + 2$

c $g'(x) = \frac{3(x^2 - 4) - (3x + 1) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2}$

$g'(x) = -\frac{3x^2 + 2x + 12}{(x^2 - 4)^2}$

d $g'(x) = 2x \cdot {}^4\log(3x + 6) + x^2 \cdot \frac{1}{(3x + 6) \cdot \ln(4)} \cdot 3$

$g'(x) = 2x \cdot {}^4\log(3x + 6) + \frac{3x^2}{(3x + 6) \cdot \ln(4)}$

e $g'(x) = \frac{1}{3}(10x^2 + 7)^{-\frac{2}{3}} \cdot 20x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$g'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{20x}{\sqrt[3]{10x^2 + 7}} - \frac{1}{4\sqrt{x}}$

$g'(x) = \frac{20x}{3\sqrt[3]{10x^2 + 7}} - \frac{1}{4\sqrt{x}}$

f $g'(x) = \frac{\cos(4x) \cdot 4 \cdot (1 + \cos(4x)) - \sin(4x) \cdot -\sin(4x) \cdot 4}{(1 + \cos(4x))^2}$

$g'(x) = \frac{4\cos(4x) + 4\cos^2(4x) + 4\sin^2(4x)}{(1 + \cos(4x))^2}$

$g'(x) = \frac{4(1 + \cos(4x))}{(1 + \cos(4x))^2}$

$g'(x) = \frac{4}{1 + \cos(4x)}$

5 **a** Voor de nulpunten geldt $f(x) = 0$.

$x^3(3x^2 - 20) = 0$

$x^3 = 0$ of $3x^2 = 20$

$x = 0$ of $x = -\sqrt{\frac{20}{3}}$ of $x = \sqrt{\frac{20}{3}}$

b Voor de toppen geldt $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 15x^4 - 60x^2$

$f'(x) = 15x^2(x^2 - 4)$

$f'(x) = 15x^2(x + 2)(x - 2)$

$f'(x) = 0$ geeft $x = 0$ of $x = -2$ of $x = 2$

Uit de grafiek blijkt dat er geen top is voor $x = 0$.

$f(-2) = 64$ en $f(2) = -64$

De toppen zijn de punten $(-2, 64)$ en $(2, -64)$.

c Voor de buigpunten geldt $f''(x) = 0$.

$f''(x) = 60x^3 - 120x$

$f''(x) = 60x(x^2 - 2)$

$f''(x) = 0$ geeft $x = 0$ of $x = -\sqrt{2}$ of $x = \sqrt{2}$.

$f(\sqrt{2}) = 3(\sqrt{2})^5 - 20(\sqrt{2})^3 =$

$f(\sqrt{2}) = 12\sqrt{2} - 40\sqrt{2} = -28\sqrt{2}$

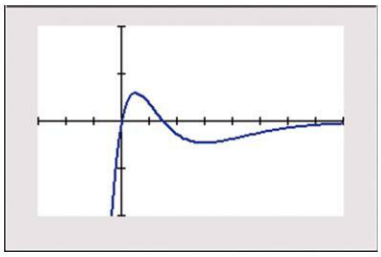
d $f(0) = 0$ en $f(-\sqrt{2}) = 28\sqrt{2}$

De twee andere buigpunten zijn $(0, 0)$ en $(-\sqrt{2}, 28\sqrt{2})$.

© Noordhoff Uitgevers bv

6 **a** Voor de nulpunten geldt $h(x) = 0$.
$(3x - 2x^2) \cdot e^{-x} = 0$
$x(3 - 2x) = 0$
$x = 0$ en $x = 1\frac{1}{2}$

b Voor de extreme waarden geldt $h'(x) = 0$.
$h'(x) = (3 - 4x) \cdot e^{-x} + (3x - 2x^2) \cdot e^{-x} \cdot -1$
$h'(x) = e^{-x}(2x^2 - 7x + 3)$
$h'(x) = 0$ geeft $2x^2 - 7x + 3 = 0$
$x = \frac{7 - \sqrt{25}}{4} = \frac{1}{2}$ of $x = \frac{7 + \sqrt{25}}{4} = 3$
$h\left(\frac{1}{2}\right) = \left(3 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{4}\right)e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}$ en $h(3) = (3 \cdot 3 - 2 \cdot 9)e^{-\frac{1}{2}} = -9e^{-3}$



Uit de plot blijkt dat er een maximum $h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}$ is en een minimum
$h(3) = -\frac{9}{e^3}$

c Voor de buigpunten geldt $h''(x) = 0$.
$h''(x) = (-7 + 4x) \cdot e^{-x} - (3 - 7x + 2x^2) \cdot e^{-x}$
$h''(x) = -(2x^2 - 11x + 10) \cdot e^{-x}$
$h''(x) = 0$ geeft $2x^2 - 11x + 10 = 0$
$x = \frac{11 - \sqrt{41}}{4} = 2\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{41} \approx 1{,}15$ of $x = \frac{11 + \sqrt{41}}{4} = 2\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{41} \approx 4{,}35$
$h(1{,}15) \approx 0{,}26$ en $h(4{,}35) \approx -0{,}32$
De buigpunten zijn (1,15; 0,26) en (4,35, −0,32).

d $h'(0) = (3) \cdot e^{-0} = 3$ dus $\tan(\alpha) = 3$ en $\alpha \approx 72°$.

7 **a** $f(x) = 0$ geeft $\sin(2x) - 2\sin(x) = 0$ ofwel $\sin(2x) = 2\sin(x)$.
$2\sin(x) \cdot \cos(x) = 2\sin(x)$
$\sin(x) = 0$ of $\cos(x) = 1$
$x = k \cdot \pi$ of $x = k \cdot 2\pi$, dus $x = k \cdot \pi$.
Op het interval $[-\pi, 3\pi]$ zijn de oplossingen $x = -\pi$, $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$ en $x = 3\pi$.

b Voor een horizontale raaklijn moet $f'(x) = 0$.
$f'(x) = 2\cos(2x) - 2\cos(x)$
$f'(x) = 0$ geeft $2\cos(2x) - 2\cos(x) = 0$
$\cos(2x) = \cos(x)$
$2x = x + k \cdot 2\pi$ of $2x = -x + k \cdot 2\pi$
$x = k \cdot 2\pi$ of $3x = k \cdot 2\pi$
$x = k \cdot 2\pi$ of $x = k \cdot \frac{2}{3}\pi$
Op het interval $[-\pi, 3\pi]$ zijn de oplossingen $x = -\frac{2}{3}\pi$, $x = 0$, $x = \frac{2}{3}\pi$, $x = \frac{4}{3}\pi$, $x = 2\pi$ en $x = 2\frac{2}{3}\pi$.
$f(0) = f(2\pi) = 0$
$f\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \sin\left(-\frac{4}{3}\pi\right) - 2\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \sqrt{3} = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = f\left(2\frac{2}{3}\pi\right) = -1\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $f\left(\frac{4}{3}\pi\right) = f\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$

© Noordhoff Uitgevers bv

De punten met een horizontale raaklijn zijn
$\left(-\frac{2}{3}\pi,\ 1\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, $(0, 0)$, $\left(\frac{2}{3}\pi,\ -1\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, $\left(\frac{4}{3}\pi,\ 1\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, $(2\pi,\ 0)$ en $\left(2\frac{2}{3}\pi,\ -1\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

c $f'(\pi) = 2\cos(2\pi) - 2\cos(\pi) = 2 \cdot 1 - 2 \cdot -1 = 4$
Een vergelijking van de raaklijn is van de vorm $y = 4x + b$.
Invullen van $(\pi, 0)$ geeft $b = -4\pi$.
Een vergelijking van de raaklijn is $y = 4x - 4\pi$.

8 **a** $F(x) = -15 \cdot \ln(|5x + 7|) \cdot \frac{1}{5}$
$F(x) = -3 \cdot \ln(|5x + 7|)$

b $F(x) = 6\text{e}x - 2\text{e}^{2x-13} \cdot \frac{1}{2}$
$F(x) = 6\text{e}x - \text{e}^{2x-13}$

c $F(x) = -5\cos\left(3\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)\right) \cdot \frac{1}{3}$
$F(x) = -1\frac{2}{3}\cos\left(3\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)\right)$

d $f(x) = 28(4x - 8)^{-3}$
$F(x) = 28 \cdot \frac{1}{-2}(4x - 8)^{-2} \cdot \frac{1}{4}$
$F(x) = -\dfrac{7}{2(4x - 8)^2}$

e $F(x) = 25 \cdot 2^{3x-1} \cdot \dfrac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{3}$
$F(x) = \dfrac{25 \cdot 2^{3x-1}}{3\ln(2)}$

f $f(x) = 3 + 2\frac{1}{2}x^{-1} - 1\frac{1}{2}x^{-2}$
$F(x) = 3x + 2\frac{1}{2}\ln(|x|) + 1\frac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x}$
$F(x) = 3x + 2\frac{1}{2}\ln(|x|) + \dfrac{3}{2x}$

9 **a** $\int_0^{\frac{1}{6}\pi} 2\sin(3x)\,\text{d}x =$
$\left[-\frac{2}{3}\cos(3x)\right]_0^{\frac{1}{6}\pi} =$
$0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

b $\int_{\text{e}}^{\text{e}^2} \left(\dfrac{4}{x} + x\right)\text{d}x =$
$\left[4\ln(|x|) + \frac{1}{2}x^2\right]_{\text{e}}^{\text{e}^2}$
$\left(4 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \text{e}^4\right) - \left(4 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \text{e}^2\right) =$
$4 + \frac{1}{2} \cdot \text{e}^4 - \frac{1}{2} \cdot \text{e}^2$

c $\int_0^2 \sqrt[3]{13x + 1}\,\text{d}x =$
$\left[\dfrac{1}{1\frac{1}{3}}(13x + 1)^{1\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{13}\right]_0^2$
$\left(\frac{3}{52} \cdot 27 \cdot 3\right) - \left(\frac{3}{52} \cdot \frac{1}{13} \cdot 1\right) =$
$\frac{243}{52} - \frac{3}{52} = \frac{240}{52} = 4\frac{8}{13}$

d $\int_1^{\text{e}} \left(\dfrac{6x^3 + 4x^2 + 3x - 1}{x^2}\right)\text{d}x =$
$\int_1^{\text{e}} \left(6x + 4 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)\text{d}x =$
$\left[3x^2 + 4x + 3\ln(|x|) + \dfrac{1}{x}\right]_1^{\text{e}} =$
$\left(3\text{e}^2 + 4\text{e} + 3 + \frac{1}{\text{e}}\right) - (3 + 4 + 0 + 1) =$
$3\text{e}^2 + 4\text{e} + \frac{1}{\text{e}} - 5$

10 **a** $f(0) = 3^0 = 1$ en $g(0) = 4\sqrt{0} + 1 = 1$
$f(2) = 3^2 = 9$ en $g(2) = 4\sqrt{4} + 1 = 8 + 1 = 9$
Dus de grafieken snijden elkaar in $(0, 1)$ en $(2, 9)$.

b $\int_0^2 (g(x) - f(x))\,\text{d}x =$
$\int_0^2 (4\sqrt{2x} + 1 - 3^x)\,\text{d}x =$
$\left[4 \cdot \frac{2}{3} \cdot (2x)^{1\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} + x - 3^x \cdot \dfrac{1}{\ln(3)}\right]_0^2 =$
$\left[\frac{4}{3} \cdot (2x)^{1\frac{1}{2}} + x - 3^x \cdot \dfrac{1}{\ln(3)}\right]_0^2 =$
$\left(\frac{4}{3} \cdot 8 + 2 - \dfrac{9}{\ln(3)}\right) - \left(0 + 0 - \dfrac{1}{\ln(3)}\right) = 12\frac{2}{3} - \dfrac{8}{\ln(3)}$

© Noordhoff Uitgevers bv

c $\pi \cdot \int_0^2 \left(g^2(x) - f^2(x)\right) \mathrm{d}x =$

$\pi \cdot \int_0^2 (32x + 8\sqrt{2x} + 1 - 3^{2x}) \mathrm{d}x =$

$\pi \cdot \left[16x^2 + \frac{8}{3}(2x)^{1\frac{1}{2}} + x - \frac{3^{2x}}{2\ln(3)}\right]_0^2 =$

$\pi \cdot \left(16 \cdot 4 + \frac{8}{3} \cdot 8 + 2 - \frac{3^4}{2\ln(3)}\right) - \pi \cdot \left(0 + 0 + 0 - \frac{1}{2\ln(3)}\right) =$

$\pi \cdot \left(66 + 21\frac{1}{3} - \frac{80}{2\ln(3)}\right) \approx 159{,}98$

11 **a** $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \tan^3(x) \mathrm{d}x \approx 0{,}78$

b $\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x^2 + 3) \mathrm{d}x \approx 3{,}20$

12 **a** De grafiek van $y = \ln(x)$ spiegelen in de lijn $y = x$ geeft $x = \ln(y)$ ofwel $y = \mathrm{e}^x$.
Het functievoorschrift is dan $g(x) = \mathrm{e}^x$.

b De oppervlakte van het rode vlakdeel is $\int_0^1 (\mathrm{e} - \mathrm{e}^x) \mathrm{d}x$.

c $\int_0^1 (\mathrm{e} - \mathrm{e}^x) \mathrm{d}x =$

$[\mathrm{e}x - \mathrm{e}^x]_0^1 =$

$(\mathrm{e} \cdot 1 - \mathrm{e}^1) - (\mathrm{e} \cdot 0 - \mathrm{e}^0) =$

$0 - -1 = 1$

d De exacte waarde van $\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x) \mathrm{d}x = 1$.

13 **a** $F'(x) = 2 \cdot \ln(x) + 2x \cdot \frac{1}{x} - 2 = 2\ln(x) + 2 - 2 = 2\ln(x) = f(x)$

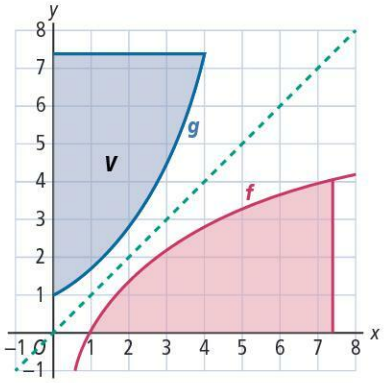
b $\int_1^{\mathrm{e}^2} 2\ln(x) \mathrm{d}x =$

$\left[2x\ln(x) - 2x\right]_1^{\mathrm{e}^2} =$

$(2 \cdot \mathrm{e}^2 \cdot 2 - 2\mathrm{e}^2) - (0 - 2) =$

$2\mathrm{e}^2 + 2$

c Spiegel de grafiek van f in de lijn $y = x$
Bij het spiegelbeeld hoort de vergelijking $x = 2\ln(y)$.
$\ln(y) = \frac{1}{2}x$, dus $y = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$. De inverse functie is $g(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$.
Wentel het gebied V om de x-as.



© Noordhoff Uitgevers bv

De inhoud I van het omwentelingslichaam is gelijk aan de inhoud van de cilinder met hoogte 4 en straal grondvlak e^2 minus $\pi \int_0^4 (e^{\frac{1}{2}x})^2 \, dx$, dus

$I = \pi(e^2)^2 \cdot 4 - \pi \int_0^4 e^x \, dx = 4\pi e^4 - \pi[e^x]_0^4 = 4\pi e^4 - \pi e^4 + \pi$

$I = \pi(4e^4 - e^4 + 1) = \pi(3e^4 + 1) \; (\approx 518)$

d $\int_1^p (2\ln(x)) \, dx =$

$\left[2x\ln(x) - 2x\right]_1^p =$

$2p\ln(p) - 2p + 2$

De vergelijking $2p\ln(p) - 2p + 2 = 100$ moet worden opgelost.

Invoer: $y_1 = 2x\ln(x) - 2x + 2$ en $y_2 = 100$

Optie: snijpunt

Dit geeft $x = 22{,}9628\ldots$

Dus $h(p) = 100$ voor $p \approx 22{,}96$.

14 **a** $f(x) = x^3 - 2x$

Een translatie 3 naar links geeft $y = (x + 3)^3 - 2(x + 3)$.

Een vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met factor 2 geeft $y = 2(x + 3)^3 - 4(x + 3)$.

Een vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met factor 4 geeft $g(x) = 2\left(\left(\frac{1}{4}x + 3\right)^3 - 4\left(\frac{1}{4}x + 3\right)\right.$ ofwel

$g(x) = 2\left(\left(\frac{1}{4}x + 3\right)^3 - x - 12\right.$

b $f(x) = {}^2\log(x)$

Een vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met factor 4 geeft $y = {}^2\log\left(\frac{1}{4}x\right)$.

Een translatie 3 naar links geeft $y = {}^2\log\left(\frac{1}{4}\left(x + 3\right)\right)$ ofwel $y = {}^2\log\left(\frac{x+3}{4}\right)$.

Een vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met factor 2 geeft

$g(x) = 2 \cdot {}^2\log\left(\frac{x+3}{4}\right)$ ofwel $g(x) = 2 \cdot {}^2\log\left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}\right)$.

15 De grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{x}$ is puntsymmetrisch in (0, 0) immers $f(p) + f(-p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{-p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} = 0$ voor elke waarde van p.

Door de translaties 3 naar rechts en 2 omlaag verschuift (0, 0) naar het punt (3, −2) en daarom is de grafiek van g puntsymmetrisch in (3, −2).

16 **a** Ga uit van de grafiek van $f(x) = 3^x$.

Een vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met factor 2 geeft de grafiek van $y = 3^{\frac{1}{2}x}$.

Een vermenigvuldiging met factor 4 ten opzichte van de x-as geeft de grafiek van $g(x) = 4 \cdot 3^{\frac{1}{2}x}$ (deze volgorde mag ook andersom).

b Ga uit van de grafiek van $f(x) = {}^4\log(x)$.

Een translatie 4 naar links geeft de grafiek van $y = {}^4\log(x + 4)$.

Spiegelen in de y-as geeft de grafiek van $y = {}^4\log(-x + 4)$.

Een translatie 6 omhoog geeft de grafiek van $g(x) = 6 + {}^4\log(4 - x)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c Bedenk dat $g(x) = \dfrac{3}{12+4x} = \dfrac{3}{4(x+3)} = \dfrac{\frac{3}{4}}{x+3}$

Ga uit van de grafiek van $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Een translatie 3 naar links geeft de grafiek van $y = \dfrac{1}{x+3}$

Een vermenigvuldiging met factor $\frac{3}{4}$ ten opzichte van de x-as geeft de grafiek van $g(x) = \frac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{\frac{3}{4}}{x+3}$ ofwel $g(x) = \dfrac{3}{12+4x}$

d Ga uit van de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$.
Spiegelen in x-as geeft $y = -\sqrt{x}$.
Een vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{5}$ ten opzichte van de y-as geeft $y = -\sqrt{5x}$.
Een translatie 4 naar rechts en 6 omhoog geeft $g(x) = -\sqrt{5(x-4)} + 6$ ofwel $g(x) = -\sqrt{5x-20} + 6$.

17 **a** De noemer is $x^2 - 8x + 16$ ofwel $(x-4)^2$.
Voor $x = 4$ is de noemer 0 en de teller ongelijk aan 0.
Dus heeft de grafiek een verticale asymptoot $x = 4$.

b Dan moet de grafiek 4 naar links worden verschoven.
Dit geeft de grafiek van $g(x) = 2 + \dfrac{3}{(x+4-4)^2}$ ofwel $g(x) = 2 + \dfrac{3}{x^2}$

c $g(-x) = 2 + \dfrac{3}{(-x)^2} = 2 + \dfrac{3}{x^2} = g(x)$, dus de grafiek is symmetrisch in de y-as.

d De grafiek van f is symmetrisch in de lijn $x = 4$.

18 Een translatie 2 naar rechts geeft de grafiek van
$y = (x+2-2)^4 - (x+2-2)^2 + 6$ ofwel $y = x^4 - x^2 + 6$.
$g(x) = x^4 - x^2 + 6$ is een even functie, dus deze grafiek is symmetrisch in de y-as. De grafiek van f is daarom symmetrisch in de lijn $x = -2$.

19 **a** $2x + 8 = 0$ geeft een verticale asymptoot $x = -4$.
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x-3}{2x+8} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6-\frac{3}{x}}{2+\frac{8}{x}} = \dfrac{6-0}{2+0} = 3$
De grafiek heeft een horizontale asymptoot $y = 3$.

b Het snijpunt van de asymptoten is het punt $(-4, 3)$.
Door verschuiving 4 naar rechts en 3 naar beneden van de grafiek van f komt het snijpunt van de asymptoten van de beeldgrafiek in de oorsprong.
Nu moet aangetoond worden dat de beeldgrafiek symmetrisch is in O.

$y = \dfrac{6(x-4)-3}{2(x-4)+8} - 3$

$y = \dfrac{6x-27}{2x} - 3$

$y = \dfrac{6x-27}{2x} - \dfrac{6x}{2x}$

$y = -\dfrac{27}{2x}$

$g(x) = -\dfrac{27}{2x}$ is een oneven functie, dus de grafiek is symmetrisch in O.

© Noordhoff Uitgevers bv

20 **a** De grafiek heeft een verticale asymptoot als $x - 3 = 0$ en $x^2 + 5x + 1 \neq 0$.
De verticale asymptoot is $x = 3$.

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x - 1}{x - 3}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 8x - 1}{x - 3}$$

$$f(x) = \frac{x(x - 3) + 8x - 1}{x - 3}$$

$$f(x) = x + \frac{8(x - 3) + 24 - 1}{x - 3}$$

$$f(x) = x + 8 + \frac{23}{x - 3}$$

$\lim_{x \to \infty}(f(x) - (x + 8)) = \lim_{x \to \infty} \frac{23}{x - 3} = 0$, dus de grafiek heeft een scheve asymptoot $y = x + 8$.

b Het snijpunt van de asymptoten is (3, 11).
Door verschuiving 3 naar links en 11 omlaag van de grafiek van f komt het snijpunt van de asymptoten van de beeldgrafiek in de oorsprong.
Nu moet aangetoond worden dat de beeldgrafiek symmetrisch is in O.

$$y = \frac{(x + 3)^2 + 5(x + 3) - 1}{(x + 3) - 3} - 11$$

$$y = \frac{x^2 + 6x + 9 + 5x + 15 - 1}{x} - 11$$

$$y = \frac{x^2 + 11x + 23}{x} - \frac{11x}{x}$$

$$y = \frac{x^2 + 23}{x}$$

$g(x) = \frac{x^2 + 23}{x}$ en $g(-x) = \frac{(-x)^2 + 23}{-x} = -\frac{x^2 + 23}{x} = -g(x)$

De grafiek van g is dus symmetrisch in O en daarmee is de grafiek van f symmetrisch in (3, 11).

© Noordhoff Uitgevers bv

Functies, grafieken en vergelijkingen

1 **a** Uit $6x - 4 \geq 0$ volgt $6x \geq 4$ dus $x \geq \frac{2}{3}$.

Omdat $\sqrt{6x-4} \geq 0$ is $10 + \sqrt{6x-4} \geq 10$.

Dit geeft $D_f = [\frac{2}{3}, \rightarrow\rangle$ en $B_f = [10, \rightarrow\rangle$.

b $D_g = \langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$ en met $(x-3)^2 \geq 0$ is het $B_g = [-8, \rightarrow\rangle$.

c Uit $9 - x^2 > 0$ volgt $-3 < x < 3$.
Omdat ${}^3\log(9 - x^2) \leq 2$ is $4 + {}^3\log(9 - x^2) \leq 6$.
Dit geeft $D_h = \langle -3, 3\rangle$ en $B_h = \langle \leftarrow, 6]$.

d Er moet gelden $x^2 - 2x - 3 \neq 0$, ofwel $(x-3)(x+1) \neq 0$.

Omdat $\dfrac{5}{x^2 - 2x - 3} \neq 0$ is $k(x) \neq -1$. Verder is $x^2 - 2x - 3 \geq -4$.

Dus voor $-1 < x < 3$ geldt $-1 + \dfrac{5}{x^2 - 2x - 3} \leq -2{,}25$.

Dit geeft $D_k = \langle \leftarrow, -1\rangle \cup \langle -1, 3\rangle \cup \langle 3, \rightarrow\rangle$ en $B_k = \langle \leftarrow; -2{,}25\rangle \cup \langle -1, \rightarrow\rangle$

2 **a** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{12x-7}{4-8x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{12 - \frac{7}{x}}{\frac{4}{x} - 8} = \dfrac{12-0}{0-8} = -1\frac{1}{2}$

b $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{8x^4 - 3x^2 + 2}{6x^3 - x^4} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{8 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^4}}{\frac{6}{x} - 1} = \dfrac{8-0+0}{0-1} = -8$

c $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x(4x^2 + x - 10)}{5x^4 + 2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{12x^3 + 3x^2 - 30x}{5x^4 + 2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{12}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{30}{x^3}}{5 + \frac{2}{x^3}} = \dfrac{0}{5} = 0$

d $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(2x+3)(3x^2+5)}{x^2(1-3x)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6x^3 + 10x + 9x^2 + 15}{x^2 - 3x^3} =$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6 + \frac{10}{x^2} + \frac{9}{x} + \frac{15}{x^3}}{\frac{1}{x} - 3} = \dfrac{6}{-3} = -2$

e $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x}{2x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{4}{x}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \dfrac{0}{2} = 0$

f $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(3x^2+4x)^2}{12x - 3x^4} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{9x^4 + 24x^3 + 16x^2}{12x - 3x^4} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{9 + \frac{24}{x} + \frac{16}{x^2}}{\frac{12}{x^3} - 3} = \dfrac{9}{-3} = -3$

© Noordhoff Uitgevers bv

3 **a** Deze grafiek heeft geen asymptoten.

b Uit $g(x) = \dfrac{5x^2 + 1}{3x^2 - 6x} = \dfrac{5 + \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{6}{x}}$ volgt dat de grafiek van g de lijn $y = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$ als horizontale asymptoot heeft.
Met $3x^2 - 6x = 0$ ofwel $3x(x - 2) = 0$ vind je de verticale asymptoten $x = 0$ en $x = 2$.

c Als $x \to \infty$ dan $h(x) \to 25 + 0 = 25$ dus de horizontale asymptoot is $y = 25$.
Er is geen verticale asymptoot.

d Er is alleen de horizontale asymptoot $y = 0$.

4 **a** De scheve asymptoot is de lijn $y = 3x + 1$.

b $g(x) = \dfrac{2x^2 + 5x - 1}{x + 4}$

$g(x) = \dfrac{2x^2 + 8x - 3x - 1}{x + 4}$

$g(x) = \dfrac{2x(x + 4) - 3(x + 4) + 11}{x + 4}$

$g(x) = 2x - 3 + \dfrac{11}{x + 4}$

De scheve asymptoot is de lijn $y = 2x - 3$

5 **a** $f(x) = \dfrac{5x - 20}{x^2 - 3x - 4} = \dfrac{5(x - 4)}{(x - 4)(x + 1)} = \dfrac{5}{(x + 1)}$ mits $x \neq 4$.

De perforatie is het punt $\left(4, \dfrac{5}{4 + 1}\right) = (4, 1)$.

b $h(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 + 6x + 8} = \dfrac{x(x^2 + x - 2)}{x^2 + 6x + 8} = \dfrac{x(x + 2)(x - 1)}{(x + 2)(x + 4)} = \dfrac{x(x - 1)}{x + 4}$ mits $x \neq -2$.

De perforatie is het punt $\left(-2, \dfrac{-2(-2 - 1)}{-2 + 4}\right) = (-2, 3)$.

c $k(x) = \dfrac{e^{2x} - 5e^x + 4}{e^x - 1} = \dfrac{(e^x - 1)(e^x - 4)}{e^x - 1} = e^x - 4$ mits $x \neq 0$.

De perforatie is het punt $(0, e^0 - 4) = (0, -3)$.

d $m(x) = \dfrac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^3 - 9x} = \dfrac{x(x^2 + 6x + 9)}{x(x^2 - 9)} = \dfrac{(x + 3)(x + 3)}{(x + 3)(x - 3)} = \dfrac{x + 3}{x - 3}$ mits $x \neq 0$ en $x \neq -3$.
De perforaties zijn de punten $(0, -1)$ en $(-3, 0)$.

6 **a** $g(x) = f(2x) + 4$
$g(x) = (2x)^2 + 6(2x) + 1 + 4$
$g(x) = 4x^2 + 12x + 5$

b $g(x) = -4 \cdot f(x - 3)$
$g(x) = -4((x - 3)^2 + 6(x - 3) + 1)$
$g(x) = -4(x^2 - 6x + 9 + 6x - 18 + 1)$
$g(x) = -4x^2 + 32$

© Noordhoff Uitgevers bv

7 **a** Er moet worden aangetoond dat $f(p) = f(-p)$.

$f(-p) = (-p)^4 + \dfrac{3}{8 - 6 \cdot (-p)^2}$

$f(-p) = p^4 + \dfrac{3}{8 - 6p^2}$

De grafiek van f is symmetrisch in de y-as omdat $f(p) = f(-p)$ voor elke p.

b De grafiek van g over een afstand 2 naar links verschuiven geeft
$h(x) = (x + 2)^3 - 6(x + 2)^2 + 12(x + 2) - 8$
$h(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 6x^2 - 24x - 24 + 12x + 24 - 8$
$h(x) = x^3$

c Er is puntsymmetrie in de oorsprong als voor de functie h geldt:
$h(-p) = -h(p)$.
$h(-p) = (-p)^3 = -p^3 = -h(p)$ dus is de grafiek van h is puntsymmetrisch in (0, 0) en daarmee is de grafiek van g puntsymmetrisch in (2, 0).

8 **a** $f(x) = x^2 + 8x - 17$
$f(x) = (x + 4)^2 - 16 - 17$
$f(x) = (x + 4)^2 - 33$

b $f(x) = 3x^2 + 12x + 20$
$f(x) = 3(x^2 + 4x + 4) + 8$
$f(x) = 3(x + 2)^2 + 8$

c $f(x) = -x^2 - 15x + 18$
$f(x) = -(x^2 + 15x - 18)$
$f(x) = -\left(x + 7\frac{1}{2}\right)^2 + 56\frac{1}{4} + 18$
$f(x) = -\left(x + 7\frac{1}{2}\right)^2 + 74\frac{1}{4}$

d $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 24$
$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1) - \frac{1}{2} - 24$
$f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - 24\frac{1}{2}$

9 **a** De grafiek van $f(x) = 2(x - 8)(x - 2)$ heeft als snijpunten met de x-as (8, 0) en (−2, 0).

De top is $\left(\dfrac{8 + -2}{2}, f(3)\right) = (3, -50)$.

Het snijpunt met de y-as is $(0, f(0)) = (0, -32)$.

b De grafiek van $g(x) = -3(x + 4)^2 + 15$ heeft als top (−4,15).
Uit $-3(x + 4)^2 + 15 = 0$ volgt $(x + 4)^2 = 5$ dus de snijpunten met de x-as zijn $(-4 + \sqrt{5}, 0)$ en $(-4 - \sqrt{5}, 0)$.
Het snijpunt met de y-as is (0, −33).

c De grafiek van $h(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 12$ snijdt de y-as in (0, 12).
Uit $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 12 = 0$ volgt $x^2 - 2x - 48 = 0$ ofwel $(x + 6)(x - 8) = 0$.
De snijpunten met de x-as zijn (−6, 0) en (8, 0).

De top is $\left(\dfrac{-6 + 8}{2}, h(1)\right) = \left(1, 12\frac{1}{4}\right)$.

10 **a** Uit $3x - 8 \geq 0$ volgt $x \geq \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ dus $D_g = [2\frac{2}{3}, \rightarrow\rangle$.

b Uit $x^2 - 15 \geq 0$ volgt $x \leq -\sqrt{15}$ of $x \geq \sqrt{15}$ dus
$D_h = \langle\leftarrow, -\sqrt{15}] \cup [\sqrt{15}, \rightarrow\rangle$.

Omdat $x^2 + 15 > 0$ voor elke waarde van x is $D_k = \langle\leftarrow, \rightarrow\rangle$ of ook $D_k = \mathbb{R}$.

11 **a** $1 + x^2 \geq 1$, dus $0 < \dfrac{10}{1 + x^2} \leq 10$. Dit geeft $B_m = \langle 0, 10]$.

b Omdat $n(x) = 2\sqrt{x^2 + 5} \geq 2\sqrt{5}$ is $B_n = [2\sqrt{5}, \rightarrow\rangle$.

Omdat $p(x) = 30 - 6\sqrt{4 - 9x} \leq 30$ is $B_p = \langle\leftarrow, 30]$.

© Noordhoff Uitgevers bv

12 De coördinaten van beide punten invullen geeft
$a \cdot 2^b = 96$ en $a \cdot (-1)^b = -3$.
Hieruit volgt $\frac{96}{-3} = \frac{a \cdot 2^b}{a \cdot (-1)^b}$ dus $-32 = \frac{a \cdot 2^b}{a \cdot (-1)^b}$
$-32 = (-2)^b$
$(-2)^5 = (-2)^b$
$b = 5$
Dan is $a \cdot 2^5 = 96$ ofwel $a \cdot 32 = 96$ dus $a = 3$.

13 **a** Uit de gegevens volgt $p = c \cdot r^2\sqrt{q}$.
De gegeven waarden invullen geeft $16 = c \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\sqrt{64}$.
Uit $16 = c \cdot \frac{1}{4} \cdot 8$ volgt $c = 8$.
De gevraagde formule is $p = 8r^2\sqrt{q}$.

b Uit de gegevens volgt $m = c \cdot \frac{t^3}{w^2}$

De gegeven waarden invullen geeft $20 = c \cdot \frac{10^3}{5^2}$

Uit $20 = c \cdot \frac{1000}{25}$ volgt $c = \frac{1}{2}$.

De gevraagde formule is $m = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^3}{w^2}$

14 **a** $4x^3 - 7x^2 = -3x$
$4x^3 - 7x^2 + 3x = 0$
$x(4x^2 - 7x + 3) = 0$
$x = 0$ of $4x^2 - 7x + 3 = 0$

$x = 0$ of $x = \frac{7 + \sqrt{49 - 48}}{8} = 1$ of $x = \frac{7 - \sqrt{49 - 48}}{8} = \frac{3}{4}$

b $(-3x + 5)^2 = 16x^2$
$-3x + 5 = 4x$ of $-3x + 5 = -4x$
$-7x = -5$ of $x = -5$
$x = \frac{5}{7}$ of $x = -5$

c $\frac{12}{x+1} - \frac{2x}{x-3} = -3$
$\frac{12}{x+1} = \frac{2x}{x-3} - \frac{3(x-3)}{x-3}$
$\frac{12}{x+1} = \frac{-x+9}{x-3}$
$12(x - 3) = (x + 1)(-x + 9)$
$12x - 36 = -x^2 + 8x + 9$
$x^2 + 4x - 45 = 0$
$(x + 9)(x - 5) = 0$
$x = -9$ of $x = 5$

d $\frac{1}{2}x^4 + x = 0$
$\frac{1}{2}x(x^3 + 2) = 0$
$x = 0$ of $x = \sqrt[3]{-2}$

© Noordhoff Uitgevers bv

15 **a** $4 + \sqrt{1 - 2x} = 7$

$\sqrt{1 - 2x} = 3$
$1 - 2x = 9$
$-2x = 8$
$x = -4$, voldoet

b $4x + \sqrt{1 - 2x} = 1$

$\sqrt{1 - 2x} = -4x + 1$

$1 - 2x = 16x^2 - 8x + 1$

$0 = 16x^2 - 6x$

$16x\left(x - \frac{3}{8}\right) = 0$

$x = 0$ of $x = \frac{3}{8}$
Alleen $x = 0$ voldoet.

c $-1\sqrt{x^2 + 7} = x$

$\sqrt{x^2 + 7} = x + 1$
$x^2 + 7 = x^2 + 2x + 1$

$-2x = -6$

$x = 3$, voldoet

d $-x + \sqrt{x^2 - 3} = 3$

$\sqrt{x^2 - 3} = x + 3$
$x^2 - 3 = x^2 + 6x + 9$
$-12 = 6x$
$x = -2$, voldoet

e $6 - \sqrt{x} = \sqrt{x + 6}$

$(6 - \sqrt{x})^2 = x + 6$

$36 - 12\sqrt{x} + x = x + 6$

$-12\sqrt{x} = -30$

$\sqrt{x} = 2\frac{1}{2}$

$x = 6\frac{1}{4}$, voldoet

f $\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{7x - x^2}$

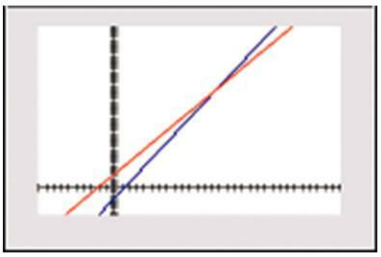
$x^2 - 4 = 7x - x^2$
$2x^2 - 7x - 4 = 0$

$x = \frac{7 + \sqrt{81}}{4} = 4$ of $x = \frac{7 - \sqrt{81}}{4} = -\frac{1}{2}$

alleen $x = 4$ voldoet

16 **a** $3x - 4 = 2\frac{1}{3}x + 5$
$\frac{2}{3}x - 4 = 5$

$\frac{2}{3}x = 9$
$x = 13\frac{1}{2}$
Zie de plot hiernaast.
De oplossing van $3x - 4 \le 2\frac{1}{3}x + 5$ is $\langle \leftarrow, 13\frac{1}{2}]$.



b De snijpunten voor $x \le 0$ of $x \ge 5$ volgen uit $x^2 - 5x = \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$

$x^2 - 5\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2} = 0$

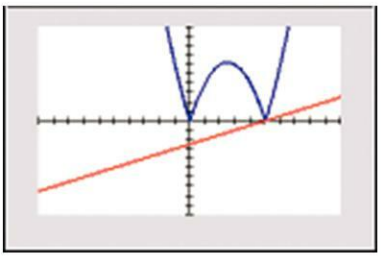
$(x - 5)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

$x = 5$ of $x = \frac{1}{2}$ (voldoet niet)

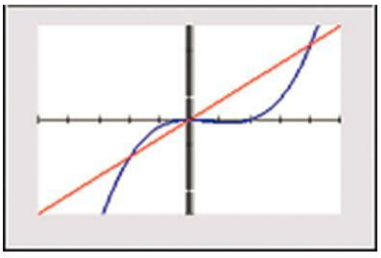
De snijpunten voor $0 < x < 5$ volgen uit $-x^2 + 5x = \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$

$x^2 - 4\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2} = 0$

$(x - 5)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$
$x = 5$ of $x = -\frac{1}{2}$ (voldoen beide niet)
Er is alleen een snijpunt bij $x = 5$.
Zie de plot hiernaast.
De oplossing van de ongelijkheid is $\langle \leftarrow, 5\rangle \cup \langle 5, \rightarrow\rangle$.



c $x^3 - 2x^2 = 8x$
$x^3 - 2x^2 - 8x = 0$
$x(x^2 - 2x - 8) = 0$
$x(x - 4)(x + 2) = 0$
$x = 0$ of $x = 4$ of $x = -2$
Zie de plot hiernaast.
De oplossing van $x^3 - 2x^2 \ge 8x$ is $[-2, 0] \cup [4, \rightarrow\rangle$.



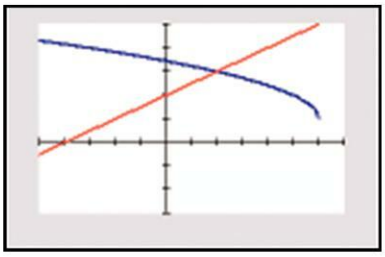
© Noordhoff Uitgevers bv

d $1 + \sqrt{6 - x} = \frac{1}{2}x + 2$

$\sqrt{6 - x} = \frac{1}{2}x + 1$

$6 - x = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$

$\frac{1}{4}x^2 + 2x - 5 = 0$
$x^2 + 8x - 20 = 0$
$(x + 10)(x - 2) = 0$
$x = -10$ of $x = 2$
Alleen $x = 2$ voldoet.
Zie de plot hiernaast.
De oplossing van $1 + \sqrt{6 - x} < \frac{1}{2}x + 2$ is $\langle 2, 6]$.



17 **a** $q = -0{,}2p + 1{,}3$
$0{,}2p = -q + 1{,}3$
$p = -5q + 6{,}5$

b $3p + 12q = 16 - p$
$4p = 16 - 12q$
$p = 4 - 3q$

c $\frac{2p - 3}{8p} = \frac{4q + 5}{7}$
$7(2p - 3) = 8p(4q + 5)$
$14p - 21 = 32pq + 40p$
$-32pq - 26p = 21$
$p(-32q - 26) = 21$
$p = \frac{-21}{32p + 26}$

d $13p - 4(q + 2) = pq$
$13p - 4q - 8 = pq$
$13p - pq = 4q + 8$
$p(13 - q) = 4q + 8$
$p = \frac{4q + 8}{13 - q}$

e $0{,}3q + 1{,}2pq - 4{,}5 = 0$
$1{,}2pq = 4{,}5 - 0{,}3q$
$p = \frac{4{,}5 - 0{,}3q}{1{,}2q}$
$p = \frac{15 - q}{4q}$

f $\frac{7q - 3p}{p + 8} = \frac{4}{3}$
$3(7q - 3p) = 4(p + 8)$
$21q - 9p = 4p + 32$
$-13p = -21q + 32$
$p = \frac{21q - 32}{13}$

18 **a** $a + 3(8 - 2p) = 6$
$a + 24 - 6p = 6$
$a = 6p - 18$

b $\frac{a}{5p + 1} = 10 + 3(5p + 1)$
$a = 10(5p + 1) + 3(5p + 1)^2$
$a = 75p^2 + 80p + 13$

c $2(6p) + 3a(6p) = 20$
$6p + 9ap = 10$
$a = \frac{10 - 6p}{9p}$

d $a = b - b^2 = p - 1 - (p - 1)^2$
$a = (p - 1) - (p^2 - 2p + 1)$
$a = p - 1 - p^2 + 2p - 1$
$a = -p^2 + 3p - 2$

© Noordhoff Uitgevers bv

19 **a** $y = -2 + 4x$

$x = -2 + 4y$

$4y = x + 2$

$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

$f^{inv}(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

b $y = \dfrac{12}{3x - 2}$

$x = \dfrac{12}{3y - 2}$

$3y - 2 = \dfrac{12}{x}$

$3y = 2 + \dfrac{12}{x}$

$y = \frac{2}{3} + \dfrac{4}{x}$

$g^{inv}(x) = \frac{2}{3} + \dfrac{4}{x}$

c $y = 2 + \sqrt[3]{4 - x}$

$x = 2 + \sqrt[3]{4 - y}$

$\sqrt[3]{4 - y} = x - 2$

$4 - y = (x - 2)^3$

$y = 4 - (x - 2)^3$

$h^{inv}(x) = 4 - (x - 2)^3$

d $y = \dfrac{5x - 1}{2x + 3}$

$x = \dfrac{5y - 1}{2y + 3}$

$2xy + 3x = 5y - 1$

$2xy - 5y = -3x - 1$

$y(2x - 5) = -3x - 1$

$y = \dfrac{-3x - 1}{2x - 5}$

$k^{inv}(x) = \dfrac{-3x - 1}{2x - 5}$

20 **a** $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = 25$

$\sqrt[3]{b} = -\sqrt[3]{a} + 25$

$b = (-\sqrt[3]{a} + 25)^3$

b $2ab^3 + 1 = 5$

$2ab^3 = 4$

$b^3 = \dfrac{2}{a}$

$b = \sqrt[3]{\dfrac{2}{a}}$

c $a + 4 = 0{,}4b^2 \cdot b^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{1}{3}}$

$0{,}4b^2 \cdot b^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{1}{3}} = a + 4$

$0{,}4b^{2\frac{1}{2}} = a + 4$

$b^{2\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}a + 10$

$b = \sqrt[5]{\left(2\frac{1}{2}a + 10\right)^2}$

d $3\sqrt{a} + \sqrt{16a} - 2b = 0$

$3\sqrt{a} + 4\sqrt{a} = 2b$

$2b = 7\sqrt{a}$

$b = 3\frac{1}{2}\sqrt{a}$

21 **a** $(4q - 3)^{1\frac{1}{2}} = p$

$4q - 3 = p^{\frac{2}{3}}$

$4q = 3 + \sqrt[3]{p^2}$

$q = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt[3]{p^2}$

b $(q - 6) \cdot \sqrt[5]{2p} = 1$

$\sqrt[5]{2p} = \dfrac{1}{q - 6}$

$2p = \dfrac{1}{(q - 6)^5}$

$p = \dfrac{1}{2(q - 6)^5}$

© Noordhoff Uitgevers bv

22 **a** $9^a \cdot (\sqrt{3})^b = \frac{1}{3}$

$(3^2)^a \cdot \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^b = 3^{-1}$

$3^{2a} \cdot 3^{\frac{1}{2}b} = 3^{-1}$

$2a + \frac{1}{2}b = -1$

$\frac{1}{2}b = -2a - 1$

$b = -4a - 2$

b $2^a \cdot 8 = \left(\frac{1}{2}\right)^b \cdot 4^a$

$2^a \cdot 2^3 = (2^{-1})^b \cdot (2^2)^a$

$2^{a+3} = 2^{-b+2a}$

$a + 3 = -b + 2a$

$b = a - 3$

c $\frac{1}{2}\sqrt{b} - \sqrt{a+3} = 0$

$\sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{b} = \sqrt{a+3}$

$\frac{1}{4}b = a + 3$

$b = 4a + 12$

d $\sqrt{3a} - 2\sqrt{b} = 0$

$2\sqrt{b} = \sqrt{3a}$

$4b = 3a$

$b = \frac{3}{4}a$

23 De grafiek van $f_p(x) = \dfrac{px^2 + 4px + 6}{(x^2+1)(x-2)}$ heeft een perforatie als

$px^2 + 4px + 6 = 0$ en $(x^2 + 1)(x - 2) = 0$.

De laatste vergelijking heeft één oplossing, namelijk $x = 2$.

Deze oplossing invullen in de teller geeft

$p \cdot 2^2 + 4p \cdot 2 + 6 = 0$

$12p + 6 = 0$

$12p = -6$

$p = -\frac{1}{2}$

$f_{-\frac{1}{2}}(x) = \dfrac{-\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6}{(x^2+1)(x-2)}$ ofwel $f_{-\frac{1}{2}}(x) = \dfrac{(-\frac{1}{2}x - 3)(x-2)}{(x^2+1)(x-2)}$

Dus $f_{-\frac{1}{2}}(x) = \dfrac{-\frac{1}{2}x - 3}{x^2 + 1}$ voor $x \neq 2$.

$\lim\limits_{x \to 2} f_{-\frac{1}{2}}(x) = \dfrac{-\frac{1}{2} \cdot 2 - 3}{2^2 + 1} = \dfrac{-4}{5}$

De coördinaten van de perforatie zijn $\left(2, -\frac{4}{5}\right)$.

24 Stel de zijde van het vierkant heeft lengte a.

Het hoekpunt rechtsonder heeft dan coördinaten $(1 + a, 0)$ en het hoekpunt rechtsboven $\left(1 + a, \dfrac{1}{1+a}\right)$.

Omdat alle zijden even lang zijn moet gelden $a = \dfrac{1}{1+a}$

$a^2 + a = 1$

$a^2 + a - 1 = 0$

$a = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ of $a = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

$a = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ of $a = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$

De tweede oplossing is negatief, dus alleen de eerste oplossing voldoet.

De lengte van de zijde van het vierkant is $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

25 $f(x) = 4 - \dfrac{4}{x+1}$

Dan geldt voor f^{inv}: $x = 4 - \dfrac{4}{y+1}$ ofwel

$\dfrac{4}{y+1} = 4 - x$

$y + 1 = \dfrac{4}{4-x}$

$y = \dfrac{4}{4-x} - 1$

$y = \dfrac{4}{4-x} - \dfrac{4-x}{4-x} = \dfrac{x}{4-x} = g(x)$, dus $g(x) = f^{inv}(x)$.

26 Uit $f(x) = 0$ volgt $87x - 3x^2 - 2x^3 = 0$

$x(87 - 3x - 2x^2) = 0$

$x = 0$ of $87 - 3x - 2x^2 = 0$

$x = 0$ of $x = \dfrac{3 - \sqrt{705}}{-4}$ of $x = \dfrac{3 + \sqrt{705}}{-4}$

$x = 0$ of $x \approx 5{,}89$ of $x \approx -7{,}39$.

De lengte van het ei is ongeveer 5,89 cm.

27 Als de lengte van het verticale verbindingslijnstuk $\frac{1}{6}$ is, dan moet gelden

$f(a) - g(a) = \frac{1}{6}$

$\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{6}$

$6a - 6 = a^2$ (links en rechts $\times 6a^2$)

$a^2 - 6a + 6 = 0$

$a = \dfrac{6 + \sqrt{12}}{2}$ of $a = \dfrac{6 - \sqrt{12}}{2}$

$a = 3 - \sqrt{3}$ of $a = 3 + \sqrt{3}$

28 a Dan moet gelden $a^7 = 0{,}2$ dus $a = 0{,}2^{\frac{1}{7}} \approx 0{,}79$.

b $2 \cdot \sqrt{\dfrac{h_1}{4{,}9}} = 1{,}11 \Rightarrow h_1 = \dfrac{4{,}9 \cdot 1{,}11^2}{2^2} = 1{,}509\ldots$

$2 \cdot \sqrt{\dfrac{h_4}{4{,}9}} = 0{,}68 \Rightarrow h_4 = \dfrac{4{,}9 \cdot 0{,}68^2}{2^2} = 0{,}56644$

h_n neemt exponentieel af met factor a dus $a^3 = \dfrac{0{,}56644}{1{,}509\ldots}$

Dit geeft $a = \left(\dfrac{0{,}56644}{1{,}509\ldots}\right)^{\frac{1}{3}} = 0{,}721\ldots$

Dan is $h_0 = \dfrac{h_1}{a} = \dfrac{1{,}509\ldots}{0{,}721\ldots} \approx 2{,}1$ meter of 21 decimeter.

© Noordhoff Uitgevers bv

29 **a** De vergelijking $p + \sqrt{x - p} = x + \frac{1}{4}$ mag voor elke waarde van p slechts één oplossing hebben.
Herleiden en kwadrateren geeft

$\sqrt{x - p} = x + \frac{1}{4} - p$

$x - p = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} - 2px - \frac{1}{2}p + p^2$

$0 = x^2 + \left(-2p - \frac{1}{2}\right)x + \left(p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{16}\right)$

$D = \left(-2p - \frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{16}\right)$

$D = 4p^2 + 2p + \frac{1}{4} - 4p^2 - 2p - \frac{1}{4}$
$D = 0$ voor elke waarde van p.
Dus er is altijd maar één oplossing.

b Het randpunt van de grafiek van $f_p(x) = p + \sqrt{x - p}$ wordt gevonden uit $x - p = 0$, dus $x = p$.

$f_p(p) = p + \sqrt{p - p} = p$, dus het randpunt is (p, p).

$f_{p-1}(x) = p - 1 + \sqrt{x - (p - 1)}$

$f_{p-1}(p) = p - 1 + \sqrt{p - (p - 1)}$

$f_{p-1}(p) = p - 1 + \sqrt{p - p + 1}$
$f_{p-1}(p) = p - 1 + 1$
$f_{p-1}(p) = p$
Dus voor elke waarde van $p \geq 1$ ligt het punt (p, p) op de grafiek van f_{p-1}.

Differentiëren

30 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1{,}001) - f(1)}{1{,}001 - 1} = \frac{3{,}002386775\ldots\ldots - 3}{0{,}001} = \frac{0{,}002386775\ldots\ldots}{0{,}001} \approx 2{,}39$

31 **a** $f(x) = 2x^2 - 8 \cdot x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = 4x - 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

$f'(x) = 4x - \frac{4}{\sqrt{x}}$

b $g(x) = -5 \cdot \frac{1}{3}x^{-4}$

$g'(x) = -\frac{5}{3} \cdot -4x^{-5}$

$g'(x) = \frac{20}{3x^5}$

c $h(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^{-3}$

$h'(x) = 1\frac{1}{2}x^2 + 6x^{-4}$

$h'(x) = 1\frac{1}{2}x^2 + \frac{6}{x^4}$

d $k'(x) = \frac{4x(x^2 + 3)(x - 1) - (x^2 + 3)^2}{(x - 1)^2}$

© Noordhoff Uitgevers bv

e $m'(x) = -1 + 6x^2$

f $n'(x) = 4 \cdot -\frac{1}{2}x^{-1\frac{1}{2}} - 6 \cdot -2x^{-3} - \frac{1}{2} \cdot -3 \cdot x^{-4}$

$n'(x) = \dfrac{-2}{x\sqrt{x}} + \dfrac{12}{x^3} + \dfrac{3}{2x^4}$

g $p(x) = 2x^{-2} - 3x^{-3} + x^{-4}$
$p'(x) = -4x^{-3} + 9x^{-4} - 4x^{-5}$
$p'(x) = -\dfrac{4}{x^3} + \dfrac{9}{x^4} - \dfrac{4}{x^5}$

h $q'(x) = 5(x-2)^4 \cdot \sqrt{x^2 - 5x} + (x-2)^5 \cdot \dfrac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x}}$

32 a Een grafiek is toenemend stijgend als geldt $f'(x) > 0$ en $f''(x) > 0$.

$f'(x) = (2x-2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + (x^2 - 2x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot -\frac{1}{2}$

$f'(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

$f'(x) = 0$ als $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2 = 0$.

$x = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{-1} = 3 - \sqrt{5}$ of $x = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{-1} = 3 + \sqrt{5}$

Met een plot vind je dat de grafiek van f stijgend is op het interval

$\langle 3 - \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5} \rangle$.

$f''(x) = (-x+3) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot -\frac{1}{2}$

$f''(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 - 2\frac{1}{2}x + 4\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

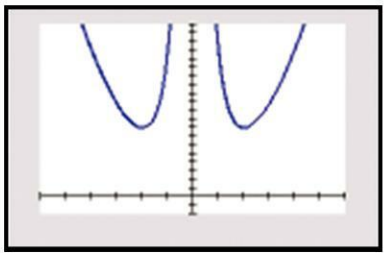
$f''(x) = 0$ als $\frac{1}{4}x^2 - 2\frac{1}{2}x + 4 = 0$
$x^2 - 10x + 16 = 0$
$(x-2)(x-8) = 0$

Met een plot vind je dat de grafiek van f' stijgend is op het interval
$\langle \leftarrow, 2 \rangle \cup \langle 8, \rightarrow \rangle$.

Conclusie: de grafiek van f is toenemend stijgend op $\langle 3 - \sqrt{5}, 2 \rangle$.

b Buigpunten zijn er als $f''(x) = 0$ dus bij $x = 2$ en $x = 8$.
De buigpunten zijn:
$(2, f(2)) = (2, 0)$ en $(8, f(8)) = (8, 48e^{-4})$.

33 a



$x^2 + \dfrac{16}{x^2} = 0$
$x^4 + 16 = 0$
$x^4 = -16$

Deze vergelijking heeft geen oplossing, dus g heeft geen nulpunten.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $g(x) = x^2 + \frac{16}{x^2} = x^2 + 16x^{-2}$

$g'(x) = 2x - 32x^{-3}$

$g'(4) = 8 - 32 \cdot 4^{-3} = 7\frac{1}{2}$

Een vergelijking van de raaklijn is $y = 7\frac{1}{2}x + b$.

De coördinaten van P invullen geeft $17 = 7\frac{1}{2} \cdot 4 + b$, dus $b = -13$.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = 7\frac{1}{2}x - 13$.

c Als de raaklijn horizontaal loopt, dan moet gelden $g'(x) = 0$.

$2x - 32x^{-3} = 0$

$2x = 32x^{-3}$

$2x^4 = 32$

$x^4 = 16$

$x = 2$ of $x = -2$

De punten met een horizontale raaklijn zijn $(-2,\ 8)$ en $(2,\ 8)$.

34 Er moet gelden $x + 6\sqrt{2x + a} = 3x + 19$.

Er moet ook gelden $f'(x) = 3$.

Dit laatste geeft $1 + 6 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x + a}} \cdot 2 = 3$.

$6 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x + a}} \cdot 2 = 2$

$\frac{1}{2\sqrt{2x + a}} = \frac{1}{6}$

$\sqrt{2x + a} = 3$

Dit invullen in $x + 6 \cdot \sqrt{2x + a} = 3x + 19$ geeft

$x + 6 \cdot 3 = 3x + 19$

$-2x = 1$ dus $x = -\frac{1}{2}$

Dan is $\sqrt{2 \cdot -\frac{1}{2} + a} = 3$, dus $-1 + a = 9$.

Dit geeft $a = 10$.

35 Er moet gelden $f_a(x) = 18$ en $f_a'(x) = 0$.

De tweede vergelijking geeft $3 + a \cdot -\frac{1}{x^2} = 0$

$-\frac{a}{x^2} = -3$

$a = 3x^2$

Dit invullen in de eerste vergelijking geeft:

$3x + \frac{3x^2}{x} = 18$

$6x = 18$

$x = 3$

Dit geeft $a = 3 \cdot 3^2 = 27$.

© Noordhoff Uitgevers bv

36 $f(x) = (x - 2) \cdot (\frac{1}{2}x + 2) + 1$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 3$ als $x \geq 2$ en

$f(x) = (-x + 2) \cdot (\frac{1}{2}x + 2) + 1$

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 5$ als $x < 2$

De knik zit bij $x = 2$, dus $A(2, 1)$.
Voor het linker gedeelte van de grafiek geldt $f'(x) = -x - 1$
dus de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in A is -3.
Een vergelijking van de raaklijn is $y = -3x + b$.
Invullen van $(2, 1)$ geeft $1 = -3 \cdot 2 + b$, dus $b = 7$.
Een vergelijking van de raaklijn l is $y = -3x + 7$.

37 Uit $f_p(x) = 2x^2 - px^4$ volgt $f'_p(x) = 4x - 4px^3$.
$4x - 4px^3 = 0$
$x - px^3 = 0$
$x(1 - px^2) = 0$

$x = 0$ (voldoet niet) of $x^2 = \dfrac{1}{p}$

$x = \dfrac{1}{\sqrt{p}}$ of $x = -\dfrac{1}{\sqrt{p}}$

Dus geldt $x_A = \dfrac{1}{\sqrt{p}}$

Dan is $y_A = f_p\left(\dfrac{1}{\sqrt{p}}\right) = \dfrac{2}{p} - p \cdot \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1}{p}$

Uit $OA = BA$ en de symmetrie in de y-as volgt dat driehoek OAB een gelijkzijdige driehoek is.
Dan maakt OA een hoek van 60° met de positieve x-as,

dus $\dfrac{y_A}{x_A} = \tan(60°) = \sqrt{3}$ en $\dfrac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{\sqrt{p}}} = \sqrt{3}$.

Dan is $\dfrac{\frac{1}{p^2}}{\frac{1}{p}} = 3$ ofwel $\dfrac{\frac{1}{p^2} \cdot p}{\frac{1}{p} \cdot p} = 3$ dus $\dfrac{1}{p} = 3$.

Conclusie: $p = \frac{1}{3}$.

38 a Vermenigvuldigen teller en noemer met $1 + \sqrt{x + 1}$ geeft

$$f(x) = \frac{-2 + 2\sqrt{x + 1}}{x} \cdot \frac{1 + \sqrt{x + 1}}{1 + \sqrt{x + 1}}$$

$$f(x) = \frac{-2 - 2\sqrt{x + 1} + 2\sqrt{x + 1} + 2(x + 1)}{x(1 + \sqrt{x + 1})}$$

$$f(x) = \frac{-2 + 2x + 2}{x(1 + \sqrt{x + 1})}$$

$$f(x) = \frac{2x}{x(1 + \sqrt{x + 1})}$$

$f(x) = \dfrac{2}{1 + \sqrt{x + 1}}$ en dus gelijk aan $h(x)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $g(x) = \dfrac{4x^2 + x}{x}$

$g(x) = \dfrac{x(4x + 1)}{x}$

$g(x) = 4x + 1$ mits $x \neq 0$, dus $k(x) = 4x + 1$.

$h(x) = 2 \cdot (1 + \sqrt{x + 1})^{-1}$

$h'(x) = -2(1 + \sqrt{x + 1})^{-2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x + 1}}$

$h'(0) = -2(1 + 1)^{-2} \cdot \dfrac{1}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{4}$ en $k'(0) = 4$

De grafieken van h en k staan in punt P loodrecht op elkaar want
$4 \cdot -\frac{1}{4} = -1$.
Dus staan ook de grafieken van f en g in punt P loodrecht op elkaar.

39 $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^3 + 2x^2}$

$f(x) = \dfrac{(x - 2)(x + 2)}{x^2(x + 2)}$

$f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2}$ mits $x \neq -2$

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \dfrac{-2 - 2}{(-2)^2} = \dfrac{-4}{4} = -1$

De perforatie is het punt $(-2, -1)$.

Het snijpunt met de x-as berekenen geeft $\dfrac{x^2 - 4}{x^3 + 2x^2} = 0$.

$x^2 - 4 = 0$
$(x + 2)(x - 2) = 0$
$x = -2$ (voldoet niet) of $x = 2$
Het snijpunt met de x-as is $(2, 0)$.

$f'(x) = \dfrac{1 \cdot x^2 - (x - 2) \cdot 2x}{x^4}$ dus $f'(2) = \dfrac{4 - 0}{2^4} = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$

De raaklijn heeft vergelijking $y = \frac{1}{4}(x - 2)$.

Invullen van de perforatie $(-2, -1)$ in de vergelijking $y = \frac{1}{4}(x - 2)$ geeft

$-1 = \frac{1}{4}(-2 - 2)$

$-1 = \frac{1}{4} \cdot -4$
Dit klopt, dus de raaklijn in $(2, 0)$ gaat door de perforatie.

40 Voor de lengte van de rechthoek geldt $x_Q - x_P = 1 - p^2 - p$.
En voor de breedte van de rechthoek geldt $y_P = p$.
De oppervlakte van de rechthoek is
$O(p) = y_P \cdot (x_Q - x_P) = p(1 - p^2 - p) = p - p^3 - p^2$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Deze oppervlakte heeft een uiterste waarde als $O'(p) = 0$.
$O'(p) = 1 - 3p^2 - 2p$
$1 - 3p^2 - 2p = 0$
$3p^2 + 2p - 1 = 0$

$p = \frac{-2 + \sqrt{16}}{6} = \frac{1}{3}$ of $p = \frac{-2 - \sqrt{16}}{6} = -1$

Alleen $p = \frac{1}{3}$ voldoet.

41 Voor de lengte l van het verbindingslijnstuk geldt $l(b) = \frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{b} = b^{-\frac{1}{2}} - b^{-1}$.

Om de maximale lengte te berekenen moet de afgeleide hiervan nul zijn.

$l'(b) = -\frac{1}{2} \cdot b^{-1\frac{1}{2}} - -b^{-2} = \frac{-1}{2b\sqrt{b}} + \frac{1}{b^2}$.

Oplossen van $l'(b) = 0$ geeft

$\frac{1}{2b\sqrt{b}} = \frac{1}{b^2}$

$2b\sqrt{b} = b^2$

$2 = \frac{b^2}{b\sqrt{b}} = \sqrt{b}$, dus $b = 4$

De maximale lengte is $l(4) = \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Integreren

42 **a** $F(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + 2\frac{1}{2}x^2 - x$

b $G(x) = 2 \cdot \frac{2}{3}x^{1\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}x\sqrt{x}$

c $H(x) = -x^{-1} - 2x^{-2} = -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$

d $K(x) = \frac{1}{6} \cdot (7x + 1)^6 \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{42}(7x + 1)^6$

e $M(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{6}x^3(x^3 - 2)$

f $N(x) = -2x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2} = \frac{-2}{x} - \frac{1}{2x^2}$

43 **a** Uit $F(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{1\frac{1}{2}}$ volgt

$F'(x) = 1\frac{1}{2}(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x$

$F'(x) = 3x \cdot (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$

$F'(x) = 3x\sqrt{x^2 + 1}$

$F'(x) = f(x)$, dus F is een primitieve van f.

b Uit $F(x) = \frac{-1}{8(x^2 - 1)^4} = -\frac{1}{8} \cdot (x^2 - 1)^{-4}$ volgt

$F'(x) = -\frac{1}{8} \cdot -4(x^2 - 1)^{-5} \cdot 2x$

$F'(x) = \frac{x}{(x^2 - 1)^5}$

$F'(x) = f(x)$, dus F is een primitieve van f.

© Noordhoff Uitgevers bv

c Uit $G(x) = a \cdot (x^2 + 6x + 1)^4$ volgt
$G'(x) = a \cdot 4(x^2 + 6x + 1)^3 \cdot (2x + 6)$
$G'(x) = a \cdot 4(x^2 + 6x + 1)^3 \cdot 2(x + 3)$.
Dus moet gelden $a \cdot 4 \cdot 2 = 1$ ofwel $a = \frac{1}{8}$.

44 a De oppervlakte van dit gebied is

$$\int_2^8 \tfrac{1}{4}x^3\,dx = \left[\tfrac{1}{16}x^4\right]_2^8 = \tfrac{1}{16} \cdot 8^4 - \tfrac{1}{16} \cdot 2^4 = 256 - 1 = 255$$

b Voor de snijpunten van de grafiek van h met de x-as geldt $h(x) = 0$.

$4x - 1\frac{1}{2}x^2 = 0$

$x\left(4 - 1\frac{1}{2}x\right) = 0$

$x = 0$ of $x = 2\frac{2}{3}$
De oppervlakte van het gevraagde gebied is

$$\int_0^{2\frac{2}{3}} \left(4x - 1\tfrac{1}{2}x^2\right)dx = \left[2x^2 - \tfrac{1}{2}x^3\right]_0^{2\frac{2}{3}} = \left(2 \cdot \left(\tfrac{8}{3}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{8}{3}\right)^3\right) - (0) = \tfrac{128}{27} = 4\tfrac{20}{27}$$

c Voor de snijpunten van de grafieken van f en h geldt $f(x) = h(x)$ ofwel

$\frac{1}{4}x^3 = 4x - 1\frac{1}{2}x^2$

$\frac{1}{4}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 - 4x = 0$

$\frac{1}{4}x(x^2 + 6x - 16x) = 0$

$\frac{1}{4}x = 0$ of $x^2 + 6x - 16 = 0$
$x = 0$ of $(x + 8)(x - 2) = 0$
De snijpunten zijn bij $x = -8$, $x = 0$ en $x = 2$.
De gevraagde oppervlakte van het linker gebied is:

$$\int_{-8}^{0} \tfrac{1}{4}x^3 - \left(4x - 1\tfrac{1}{2}x^2\right)dx = \left[\tfrac{1}{16}x^4 - 2x^2 + \tfrac{1}{2}x^3\right]_{-8}^{0} =$$

$$0 - \left(\tfrac{1}{16} \cdot (-8)^4 - 2 \cdot (-8)^2 + \tfrac{1}{2} \cdot (-8)^3\right) = 128$$

en de gevraagde oppervlakte van het rechter gebied is:

$$\int_0^2 4x - 1\tfrac{1}{2}x^2 - \left(\tfrac{1}{4}x^3\right)dx = \left[2x^2 - \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{16}x^4\right]_0^2 =$$

$$\left(2 \cdot 2^2 - \tfrac{1}{2} \cdot 2^3 - \tfrac{1}{16} \cdot 2^4\right) - 0 = 3$$

45 a Voor de snijpunten van de grafieken van f en g geldt $f(x) = g(x)$ ofwel

$2\sqrt{x} = \frac{1}{4}x^2$

$8\sqrt{x} = x^2$
$64x = x^4$
$x(64 - x^3) = 0$
$x = 0$ of $x^3 = 64$
$x = 0$ of $x = 4$
De snijpunten zijn (0, 0) en (4, 4).

b De oppervlakte van V is $\int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{1}{4}x^2\right)dx =$

$\left[\frac{4}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{12}x^3\right]_0^4 =$

$\left(\frac{4}{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{4} - \frac{1}{12} \cdot (4)^3\right) - 0 =$

$\frac{32}{3} - \frac{64}{12} = \frac{128}{12} - \frac{64}{12} = \frac{64}{12} = 5\frac{1}{3}$

© Noordhoff Uitgevers bv

46 **a** $f(x) = g(x)$

$\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x + 16 = \frac{1}{3}x^3$

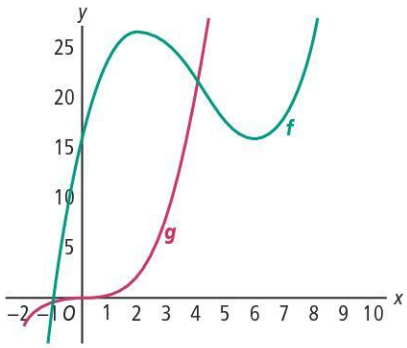
$-4x^2 + 12x + 16 = 0$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x - 4)(x + 1) = 0$

$x = -1$ of $x = 4$

De snijpunten zijn $(-1, -1)$ en $(4, 21\frac{1}{3})$.



b $\int_0^4 \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x + 16 - \frac{1}{3}x^3\right) dx = \int_0^4 (-4x^2 + 12x + 16)\,dx =$

$\left[-\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 + 16x\right]_0^4 =$

$\left(-\frac{4}{3} \cdot 4^3 + 6 \cdot 4^2 + 16 \cdot 4\right) - (0) = 74\frac{2}{3}$

c $OQ = p$ en $PQ = f(p) = \frac{1}{3}p^3 - 4p^2 + 12p + 16$

De oppervlakte is van driehoek OPQ is

$\frac{1}{2} \cdot OQ \cdot PQ = \frac{1}{2}p \cdot \left(\frac{1}{3}p^3 - 4p^2 + 12p + 16\right)$.

d Als de oppervlakten I en II gelijk zijn, dan moet gelden

$\int_0^p f(x)\,dx = 2 \cdot$ oppervlakte ΔOPQ

$\int_0^p \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x + 16\right) dx = p \cdot \left(\frac{1}{3}p^3 - 4p^2 + 12p + 16\right)$

$\left[\frac{1}{12}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 6x^2 + 16x\right]_0^p = \frac{1}{3}p^4 - 4p^3 + 12p^2 + 16p$

$\frac{1}{12}p^4 - \frac{4}{3}p^3 + 6p^2 + 16p = \frac{1}{3}p^4 - 4p^3 + 12p^2 + 16p$

$\frac{1}{4}p^4 - 2\frac{2}{3}p^3 + 6p^2 = 0$

$p^2\left(\frac{1}{4}p^2 - 2\frac{2}{3}p + 6\right) = 0$

$p = 0$ of $\frac{1}{4}p^2 - \frac{8}{3}p + 6 = 0$

$p = 0$ of $3p^2 - 32p + 72 = 0$

$p = 0$ of $p = \frac{32 + \sqrt{160}}{6}$ of $p = \frac{32 - \sqrt{160}}{6}$

De oplossing $p = \frac{32 + \sqrt{160}}{6} = 5\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{10}$ voldoet.

47 **a** Uit $F(x) = \frac{-10}{x^2 + 4} = -10(x^2 + 4)^{-1}$ volgt

$F'(x) = -10 \cdot -1(x^2 + 4)^{-2} \cdot 2x$

$F'(x) = \frac{20x}{(x^2 + 4)^2}$

dus F is een primitieve van f.

b $A(4) = \int_1^4 \frac{20x}{(x^2 + 4)^2}\,dx = \left[\frac{-10}{x^2 + 4}\right]_1^4 = \frac{-10}{16 + 4} - \frac{-10}{1 + 4} = -\frac{1}{2} + 2 = 1\frac{1}{2}$

© Noordhoff Uitgevers bv

c $A(p) = \int_1^p \frac{20x}{(x^2+4)^2}\,dx = \left[\frac{-10}{x^2+4}\right]_1^p$

$A(p) = \frac{-10}{p^2+4} - \frac{-10}{1+4}$

$A(p) = -\frac{10}{p^2+4} + 2$

Als $A(p) = 1\frac{9}{10}$ dan is

$-\frac{10}{p^2+4} + 2 = 1\frac{9}{10}$

$\frac{10}{p^2+4} = \frac{1}{10}$

$p^2 + 4 = 100$

$p^2 = 96$

Gegeven is dat $p > 1$ dus voldoet alleen $p = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$.

d De oppervlakte van het gebied tussen 1 en p en onder de grafiek van f neemt toe als p toeneemt.
Dus is de grafiek van A stijgend.

48 De nulpunten zijn $x = 0$ en $x = 30$.
Voor de inhoud van dit lichaam geldt

$$\int_0^{30} \pi \cdot \left(0{,}564 \cdot \sqrt{x(30-x)}\right)^2 = \int_0^{30} \pi \cdot 0{,}564^2 \cdot x(30-x)\,dx =$$

$$0{,}564^2\pi \cdot \int_0^{30} (30x - x^2)\,dx =$$

$0{,}564^2\pi \left[15x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^{30} = 0{,}564^2\pi\,(13\,500 - 9000 - 0) \approx 4497$
De inhoud is 4497 cm^3.

49 **a** Voor de inhoud van R geldt

$\pi \int_0^4 \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2 dx = \pi \int_0^4 x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^4 =$

$\pi\left(\left(\frac{1}{4} \cdot 4^4\right) - (0)\right) = 64\pi$

Voor de inhoud van G geldt: stel eerst het functievoorschrift van f^{inv} op.

$x = y^{\frac{3}{2}}$ dus $y = x^{\frac{2}{3}}$ en $f^{inv}(x) = x^{\frac{2}{3}}$.

$\pi \int_0^8 \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^2 dx = \pi \int_0^8 x^{\frac{4}{3}}\,dx = \pi\left[\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}\right]_0^8 =$

$\pi \cdot \frac{3}{7} \cdot 8^{\frac{7}{3}} - 0 = \pi \cdot \frac{3}{7} \cdot 2^7 = 54\frac{6}{7}\pi$

b Inhoud A vind je door eerst de beide gebieden samen te wentelen om de x-as en deze inhoud te verminderen met inhoud G.
Gebruik de inhoudsformule voor een cilinder.
inhoud $A = \pi \cdot 8^2 \cdot 4 -$ inhoud $G = 256\pi - 64\pi = 192\pi$
Inhoud B vind je op een vergelijkbare manier.
inhoud $B = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 -$ inhoud $R = 128\pi - 54\frac{6}{7}\pi = 73\frac{1}{7}\pi$
Het verschil in inhoud tussen A en B is $192\pi - 73\frac{1}{7}\pi = 118\frac{6}{7}\pi$.

50 **a** $f(x) = g(x)$ geeft $x^3 + 1 = x^2 + 1$

$x^3 - x^2 = 0$

$x^2(x-1) = 0$

$x = 0$ of $x = 1$

De snijpunten zijn (0, 1) en (1, 2).

© Noordhoff Uitgevers bv

b De inhoud is gelijk aan $\pi \int_0^1 g^2(x)\,dx - \pi \int_0^1 f^2(x)\,dx$

$\pi \int_0^1 g^2(x)\,dx = \pi \int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1)\,dx =$

$\pi \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1\right) = 1\frac{13}{15}\pi$

$\pi \int_0^1 f^2(x)\,dx = \pi \int_0^1 (x^6 + 2x^3 + 1)\,dx =$

$\pi \left[\frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^4 + x\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{2} + 1\right) = 1\frac{9}{14}\pi$

De inhoud van V is $1\frac{13}{15}\pi - 1\frac{9}{14}\pi = \frac{47}{210}\pi$.

51 $f'(x) = 2x$ dus $f'(p) = 2p$

Een vergelijking van de raaklijn in P is $y = 2px + b$.

Invullen van $P(p, p^2)$ geeft $p^2 = 2p \cdot p + b$, dus $b = -p^2$.

Een vergelijking van deze raaklijn is $y = 2px - p^2$.

Om het snijpunt van deze raaklijn met de x-as te vinden moet de vergelijking $2px - p^2 = 0$ worden opgelost.

$p(2x - p) = 0$ geeft $x = \frac{1}{2}p$, dus de raaklijn snijdt de x-as in $A\left(\frac{1}{2}p, 0\right)$.

De oppervlakte van $\triangle OAP$ is $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}p \cdot p^2 = \frac{1}{4}p^3$.

Een vergelijking van de lijn OP is $y = px$.

De oppervlakte van V is $\int_0^p (px - x^2)\,dx = \left[\frac{1}{2}px^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^p =$

$\frac{1}{2}p^3 - \frac{1}{3}p^3 = \frac{1}{6}p^3$.

$\frac{1}{4}p^3 = 1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}p^3$, dus de oppervlakte van driehoek OAP is anderhalf maal de oppervlakte van V.

52 **a** $\frac{5}{4x - 6} = x - 3\frac{1}{2}$

$(4x - 6)\left(x - 3\frac{1}{2}\right) = 5$

$4x^2 - 14x - 6x + 21 = 5$

$4x^2 - 20x + 16 = 0$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$(x - 1)(x - 4) = 0$

$x = 1$ of $x = 4$, dus de coördinaten van B zijn $\left(4, \frac{1}{2}\right)$.

b Lijn k snijdt de x-as in $\left(3\frac{1}{2}, 0\right)$.

De inhoud van het omwentelingslichaam is gelijk aan

$\pi \int_0^1 \left(\frac{5}{4x - 6}\right)^2 dx + \pi \int_1^{3\frac{1}{2}} \left(x - 3\frac{1}{2}\right)^2 dx =$

$\pi \int_0^1 \frac{25}{(4x - 6)^2}\,dx + \pi \int_1^{3\frac{1}{2}} \left(x - 3\frac{1}{2}\right)^2 dx =$

$\pi \left[\frac{-25}{4(4x - 6)}\right]_0^1 + \pi \left[\frac{1}{3}\left(x - 3\frac{1}{2}\right)^3\right]_1^{3\frac{1}{2}} =$

$\pi\left(\frac{-25}{-8} - \frac{-25}{-24}\right) + \pi\left(0 - \frac{1}{3} \cdot -\frac{125}{8}\right) = \pi\left(\frac{75}{24} - \frac{25}{24} + \frac{125}{24}\right) = \frac{175}{24}\pi$ of $7\frac{7}{24}\pi$.

© Noordhoff Uitgevers bv

53 Voor de inhoud van de omwentelingslichamen samen wentel je de gebieden V en W om de y-as.
Gebruik de inverse van $y = x^2$, dat is $y = \sqrt{x}$.

$\pi \int_0^r (\sqrt{x})^2 \, dx = \pi\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^r = \frac{1}{2}\pi r^2$

Het omwentelingslichaam dat ontstaat door W om de y-as te wentelen is een halve bol met staal r, dus met een inhoud $\frac{2}{3}\pi r^3$.
Als de inhouden van de twee omwentelingslichamen gelijk zijn, moet gelden

$\frac{1}{2}\pi r^2 = 2 \cdot \frac{2}{3}\pi r^3$

$\frac{1}{2}r^2 - \frac{4}{3}r^3 = 0$

$r^2\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3}r\right) = 0$

$r = 0$ (voldoet niet) of $\frac{4}{3}r = \frac{1}{2}$, dus $r = \frac{3}{8}$.

54 Deze vlakdelen hebben gelijke oppervlakte als geldt

$\int_0^a \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x}\right) dx = \int_a^4 \frac{1}{2}\sqrt{x}\, dx$

$\int_0^a \frac{1}{2}\sqrt{x}\, dx = \int_a^4 \frac{1}{2}\sqrt{x}\, dx$

$\left[\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a = \left[\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_a^4$

$\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}$

$a^{\frac{3}{2}} = 4$

$a = 4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{16}$

Exponentiële en logaritmische functies

55 **a** ${}^2\log(36) - {}^2\log(9) + {}^2\log(5) =$
${}^2\log(36 : 9 \times 5) = {}^2\log(20)$

b $\frac{1}{2} \cdot {}^5\log(49) + 2 \cdot {}^5\log(3) =$

${}^5\log(\sqrt{49}) + {}^5\log(3^2) =$
${}^5\log(7 \cdot 9) = {}^5\log(63)$

c $2 + {}^6\log(x) =$
${}^6\log(36) + {}^6\log(x) = {}^6\log(36x)$

d $-3 + {}^4\log((9p)^2) =$
${}^4\log(4^{-3}) + {}^4\log(81p^2) =$
${}^4\log\left(\frac{1}{64}\right) + {}^4\log(81p^2) = {}^4\log\left(\frac{81}{64}p^2\right)$

e ${}^8\log(2a) + {}^8\log(a + 3) =$
${}^8\log(2a(a + 3)) = {}^8\log(2a^2 + 6a)$

f $4 \cdot {}^{0{,}1}\log(x) - {}^{0{,}1}\log(x^2) =$
${}^{0{,}1}\log(x^4) - {}^{0{,}1}\log(x^2) = {}^{0{,}1}\log(x^2)$

56 **a** ${}^2\log(a) + {}^2\log(b) = 3$
${}^2\log(ab) = {}^2\log(8)$

$ab = 8$

$b = \frac{8}{a}$

c $a + 4 = 2b^2\sqrt{b}$
$b^{2\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}a + 2$

$b = \left(\frac{1}{2}a + 2\right)^{\frac{2}{5}}$

$b = \sqrt[5]{(\frac{1}{2}a + 2)^2}$

© Noordhoff Uitgevers bv

b $a + \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(b) = 5$

${}^3\log(b) = 10 - 2a$

$b = 3^{10-2a}$

d $3\sqrt{a} + \sqrt{16a} - 2b = 0$

$2b = 3\sqrt{a} + 4\sqrt{a} = 7\sqrt{a}$

$b = 3\frac{1}{2}\sqrt{a}$

57 **a** Voor de inverse functie geldt $x = {}^2\log(18 - 3y)$.

$18 - 3y = 2^x$

$-3y = 2^x - 18$

$y = 6 - \frac{1}{3} \cdot 2^x$

De inverse functie is $f^{inv}(x) = 6 - \frac{1}{3} \cdot 2^x$.

b Voor de inverse functie geldt $x = -2 + {}^3\log(2y - 1)$.

${}^3\log(2y - 1) = x + 2$

$2y - 1 = 3^{x+2}$

$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3^{x+2}$

De inverse functie is $g^{inv}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3^{x+2}$.

c Voor de inverse functie geldt $x = 2 \cdot 3^{5-y}$.

$3^{5-y} = \frac{1}{2}x$

$5 - y = {}^3\log\left(\frac{1}{2}x\right)$

$y = 5 - {}^3\log\left(\frac{1}{2}x\right)$

De inverse functie is $h^{inv}(x) = 5 - {}^3\log\left(\frac{1}{2}x\right)$.

d Voor de inverse functie geldt $x = 10 - \left(\frac{1}{2}\right)^{y-1}$.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{y-1} = 10 - x$

$y - 1 = {}^{\frac{1}{2}}\log(10 - x)$

$y = 1 + {}^{\frac{1}{2}}\log(10 - x)$

De inverse functie is $k^{inv}(x) = 1 + {}^{\frac{1}{2}}\log(10 - x)$.

58 **a** $8 \cdot 4^{x+2} = 1$

$2^3 \cdot (2^2)^{x+2} = 2^0$

$3 + 2x + 4 = 0$

$2x = -7$

$x = -3\frac{1}{2}$

b $\frac{1}{25} \cdot 5^{x+3} = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x$

$5^{-2} \cdot 5^{x+3} = 5 \cdot 5^{-x}$

$-2 + x + 3 = 1 - x$

$2x = 0$

$x = 0$

c $3^{2x+1} = 7$

$2x + 1 = {}^3\log(7)$

$2x = -1 + {}^3\log(7)$

$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(7)$

d $2 + 5 \cdot 7^{4x} = 17$

$2x = {}^3\log(7) - 1$

$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(7)$

$5 \cdot 7^{4x} = 15$

$7^{4x} = 3$

$4x = {}^7\log(3)$

$x = \frac{1}{4} \cdot {}^7\log(3)$

e $6 - {}^3\log(x + 4) = 5\frac{1}{2}$

${}^3\log(x + 4) = \frac{1}{2}$

$x + 4 = 3^{\frac{1}{2}}$

$x = 3^{\frac{1}{2}} - 4 = \sqrt{3} - 4$

f $3 \cdot {}^4\log(x - 4) = 6$

${}^4\log(x - 4) = 2$

$x - 4 = 4^2$

$x = 20$

59 **a** $\ln(2x - 1) = 3$

$2x - 1 = e^3$

$2x = 1 + e^3$

$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^3$

c $\sqrt{\ln(x)} = 1\frac{1}{2}$

$\ln(x) = \left(1\frac{1}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{4}$

$x = e^{2\frac{1}{4}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

b $2e^{5-x} = 3$

$e^{5-x} = 1\frac{1}{2}$

$5 - x = \ln\left(1\frac{1}{2}\right)$

$x = 5 - \ln\left(1\frac{1}{2}\right)$

d $e^{2-x^3} = 4$

$2 - x^3 = \ln(4)$

$x^3 = 2 - \ln(4)$

$x = \sqrt[3]{2 - \ln(4)}$

60 **a** $b = 3e^{2a-1}$

$\frac{1}{3}b = e^{2a-1}$

$2a - 1 = \ln\left(\frac{1}{3}b\right)$

$2a = 1 + \ln\left(\frac{1}{3}b\right)$

$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1}{3}b\right)$

c $b = \ln(2a) + \ln(3a)$

$b = \ln(6a^2)$

$6a^2 = e^b$

$a^2 = \frac{1}{6}e^b$

$a = \sqrt{\frac{1}{6}e^b}$ of $a = -\sqrt{\frac{1}{6}e^b}$

alleen $a = \sqrt{\frac{1}{6}e^b}$ voldoet.

b $b = 2\ln(a - 5)$

$\frac{1}{2}b = \ln(a - 5)$

$a - 5 = e^{\frac{1}{2}b}$

$a = 5 + e^{\frac{1}{2}b}$

d $b = e^{3a+1}$

$3a + 1 = \ln(b)$

$3a = \ln(b) - 1$

$a = \frac{1}{3}\ln(b) - \frac{1}{3}$

61 **a** $f'(x) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{3x + 5} \cdot 3$

$f'(x) = \frac{3}{(3x + 5) \cdot \ln(2)}$

b $g'(t) = 1500 \cdot 0{,}94^t \cdot \ln(0{,}94)$

c $s'(u) = -2(1 - \ln(u))^{-2} \cdot \frac{-1}{u}$

$s'(u) = \frac{2}{u(1 - \ln(u))^2}$

d $h'(x) = 1 \cdot \ln^2(x) + 2x \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x}$

$h'(x) = \ln^2(x) + 2\ln(x)$

e $k'(x) = 3^{x^2+1} \cdot \ln(3) \cdot 2x$

f $j(t) = 250 \cdot (1 + 15 \cdot e^{-0{,}18t})^{-1}$

$j'(t) = -250 \cdot (1 + 15 \cdot e^{-0{,}18t})^{-2} \cdot 15 \cdot e^{-0{,}18t} \cdot -0{,}18$

$j'(t) = \frac{675}{e^{0{,}18t} \cdot (1 + 15 \cdot e^{-0{,}18t})^2}$

62 **a** $F(x) = 5e^{3x+2} \cdot \frac{1}{3}$

$F(x) = 1\frac{2}{3}e^{3x+2}$

b $g(x) = \frac{2x - 1}{x^2} = \frac{2}{x} - x^{-2}$

$G(x) = 2\ln|x| + x^{-1}$

$G(x) = 2\ln|x| + \frac{1}{x}$

© Noordhoff Uitgevers bv

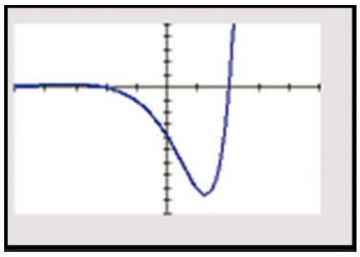
c $H(x) = 1\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{\ln(3)} \cdot 3^{5-x}$

$H(x) = -\cdot \frac{3 \cdot 3^{5-x}}{2\ln(3)}$

$H(x) = -\frac{3^{6-x}}{2\ln(3)}$

d $K(x) = 4\ln|3x - 5|$

63 a



b Voor de nulpunten geldt $f(x) = 0$, dus
$x^2 - 4 = 0$
$x = 2$ of $x = -2$

c $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ dus er is een horizontale asymptoot is $y = 0$.

d $f'(x) = 2x \cdot e^x + (x^2 - 4) \cdot e^x$
$2x \cdot e^x + (x^2 - 4) \cdot e^x = 0$
$(x^2 + 2x - 4) \cdot e^x = 0$
$x^2 + 2x - 4 = 0$

$x = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2}$ of $x = \frac{-2 - \sqrt{20}}{2}$

$x = -1 - \sqrt{5}$ of $x = -1 + \sqrt{5}$

e Zie de plot:
Het maximum is $f(-1 - \sqrt{5}) = ((-1 - \sqrt{5})^2 - 4) \cdot e^{-1-\sqrt{5}} \approx 0{,}25$.
Het minimum is $f(-1 + \sqrt{5}) = ((-1 + \sqrt{5})^2 - 4) \cdot e^{-1+\sqrt{5}} \approx -8{,}51$.

f Er moet gelden $F'(x) = f(x)$
$F'(x) = (2x + b) \cdot e^x + (x^2 + bx + c) \cdot e^x$
$F'(x) = (x^2 + 2x + bx + b + c) \cdot e^x$
Als $(x^2 + 2x + bx + b + c) \cdot e^x = (x^2 - 4) \cdot e^x$ voor alle waarden van x
dan moet gelden $2 + b = 0$ en $b + c = -4$.
Dus is $b = -2$ en is $c = -2$.

g De grafiek van f ligt dan onder de x-as, dus is de oppervlakte
$-\int_{-2}^{2} (x^2 - 4) \cdot e^x \, dx = \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4) \cdot e^x \, dx =$
$[(-x^2 + 2x + 2) \cdot e^x]_{-2}^{2} =$
$(-4 + 4 + 2) \cdot e^2 - (-4 - 4 + 2) \cdot e^{-2} =$
$2e^2 + 6e^{-2}$ ofwel $2e^2 + \frac{6}{e^2}$

64 a $C'(t) = 160(e^{-0{,}2t} \cdot -0{,}2 - e^{-t} \cdot -1)$
$C'(t) = -160(0{,}2e^{-0{,}2t} - e^{-t})$
$C'(0) = -160(0{,}2e^0 - e^0) = -160 \cdot -0{,}8 = 128 > 0$
Dus de concentratie van het medicijn gaat direct na het injecteren stijgen.

© Noordhoff Uitgevers bv

b Voor de maximale concentratie moet gelden $C'(t) = 0$.
$-160(0{,}2e^{-0{,}2t} - e^{-t}) = 0$
$0{,}2e^{-0{,}2t} - e^{-t} = 0$
$0{,}2e^{-0{,}2t} = e^{-t}$
$e^{-0{,}2t} = 5e^{-t}$
$e^{0{,}8t} = 5$
$0{,}8t = \ln(5)$

$t_{max} = 1\frac{1}{4} \cdot \ln(5)$

65 De verticale asymptoot volgt uit $e^x - 10 = 0$ ofwel $e^x = 10$.
De verticale asymptoot is $x = \ln(10)$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{0 - 1000}{0 - 10} = 100$, de horizontale asymptoot is $y = 100$.
Dus $A(0, 100)$ en $B(\ln(10), 100)$.

$\dfrac{e^{2x} - 1000}{e^x - 10} = 100$
$e^{2x} - 1000 = 100(e^x - 10)$
$e^{2x} - 1000 = 100e^x - 1000$
$e^{2x} - 100e^x = 0$
$e^x(e^x - 100) = 0$
$e^x = 100$, dus $x = \ln(100) = 2\ln(10)$.
De coördinaten van C zijn $(2\ln(10), 100)$.
Dus B ligt midden tussen A en C.

66 a $g(x) = f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \dfrac{1}{x} - 1$
$g(x) = \ln(x) + 1 - 1$
$g(x) = \ln(x)$
Voor de snijpunten geldt $f(x) = g(x)$ dus
$x\ln(x) - x + 1 = \ln(x)$
$x\ln(x) - \ln(x) = x - 1$
$(x - 1)\ln(x) = x - 1$
$x - 1 = 0$ of $\ln(x) = 1$
$x = 1$ of $x = e$

b f is een primitieve van g, dus

$\int_p^{2p} g(x)\,dx = [f(x)]_p^{2p} =$

$2p\ln(2p) - 2p + 1 - (p\ln(p) - p + 1) = 0$
$p(2\ln(2p) - 2 - \ln(p) + 1) = 0$
$p \neq 0$ dus $2\ln(2p) - \ln(p) - 1 = 0$
$\ln(4p^2) - \ln(p) = 1$
$\ln(4p) = 1$
$4p = e$
$p = \frac{1}{4}e$

© Noordhoff Uitgevers bv

67 **a** Voor de top geldt dat de afgeleide nul is

$f_a'(x) = e^{ax} + axe^{ax} = 0$

$e^{ax}(1 + ax) = 0$

$ax = -1$

$x = -\frac{1}{a}$

$f_a\left(-\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a}e^{a\cdot-\frac{1}{a}} = -\frac{1}{a}e^{-1}$

De coördinaten van de toppen zijn $\left(-\frac{1}{a}, -\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{e}\right)$.

Dus voor alle toppen geldt $y = \frac{1}{e}\cdot x$.

b $F_a'(x) = \frac{1}{a}e^{ax} + \frac{1}{a}\cdot x\cdot e^{ax}\cdot a - \frac{1}{a^2}e^{ax}\cdot a$

$F_a'(x) = \frac{1}{a}e^{ax} + \frac{1}{a}\cdot x\cdot e^{ax}\cdot a - \frac{1}{a}e^{ax}$

$F_a'(x) = xe^{ax}$

dus F_a is een primitieve van f_a.

c $f_1(x) = xe^x$, dus $F_1(x) = xe^x - e^x$.

Nu de snijpunten berekenen van f_1 met l.

$xe^x = \frac{1}{e}x$

$xe^x = xe^{-1}$

$x = 0$ of $x = -1$

De oppervlakte van het grijze vlakdeel is gelijk aan

$$\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{e}x - xe^x\right)dx = \left[\tfrac{1}{e}x^2 - xe^x + e^x\right]_{-1}^{0} =$$

$(0 - 0 + 1) - \left(\frac{1}{2e} + \frac{1}{e} + \frac{1}{e}\right) = 1 - \frac{5}{2e}$

68 **a** Voor het minimum geldt dat de afgeleide $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 2^x\ln(2) + 2^{-2x}\cdot -2\ln(2)$

$2^x\ln(2) - 2\cdot 2^{-2x}\ln(2) = 0$

$2^x\ln(2) = 2\cdot 2^{-2x}\ln(2)$

$2^x = 2^{-2x+1}$

$3x = 1$

$x = \frac{1}{3}$

b $$\int_{-1}^{1}(2^x + 2^{-2x})dx = \left[\frac{2^x}{\ln(2)} - \frac{2^{-2x}}{2\ln(2)}\right]_{-1}^{1} =$$

$$\frac{2}{\ln(2)} - \frac{\frac{1}{4}}{2\ln(2)} - \frac{\frac{1}{2}}{\ln(2)} + \frac{4}{2\ln(2)} = \frac{3\frac{3}{8}}{\ln(2)}$$

De oppervlakte van de rechthoek in figuur 3 is $2k$.

Als de oppervlakte van het grijze gebied uit figuur 2 en 3 gelijk zijn dan geldt

$$2k = \frac{3\frac{3}{8}}{\ln(2)}$$

$$k = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{3\frac{3}{8}}{\ln(2)} \approx 2{,}43$$

© Noordhoff Uitgevers bv

c Voor de coördinaten van P geldt $P(p, 2^p + 2^{-2p})$.

$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} p-1 \\ 2^p + 2^{-2p} - 2\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1\frac{13}{16} \end{pmatrix}$

Als de vectoren $\overrightarrow{AP}$ en $\overrightarrow{AQ}$ loodrecht op elkaar staan, dan is $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0$.

$p - 1 + \left(2^p + 2^{-2p} - 2\frac{1}{4}\right) \cdot 1\frac{13}{16} = 0$
Invoer: $y_1 = 1 - x$ en $y_2 = 0{,}8125(2^x + 2^{-2x} - 2{,}25)$
Optie: snijpunt geeft $x = -0{,}67448\ldots$
De x-coördinaat van P is ongeveer $-0{,}67$.

Goniometrie

69 **a** $\sin\left(23\frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = -1$

b $\cos\left(3\frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

c $\tan\left(-2\frac{3}{4}\pi\right) = \tan\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 1$

d $\sin\left(1\frac{2}{3}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

e $\cos\left(7\frac{1}{6}\pi\right) = \cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

f $\cos\left(-3\frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$

70 **a** $2\sin(x) = -\sqrt{3}$
$\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$x = 1\frac{1}{3}\pi$ of $x = 1\frac{2}{3}\pi$

b $\sin(x) + \cos(x) = 0$
$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + 1 = 0$
$\tan(x) = -1$
$x = \frac{3}{4}\pi$ of $x = 1\frac{3}{4}\pi$

c $1 + 2\sin(x) = 0$
$\sin(x) = -\frac{1}{2}$
$x = 1\frac{1}{6}\pi$ of $x = 1\frac{5}{6}\pi$

d $\cos^2(x) = \frac{3}{4}$
$\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ of $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
$x = \frac{1}{6}\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi$ of $x = 1\frac{1}{6}\pi$ of $x = 1\frac{5}{6}\pi$

71 **a** Voor de evenwichtsstand geldt: $y = \frac{16 + 8}{2} = 12$.
De periode is $13 - 5 = 8$ en de amplitude is 4.
De verschuiving is $\frac{5 + 9}{2} = 7$.
Dit geeft $s(x) = 12 + 4\sin\left(\frac{2\pi}{8}(x - 7)\right)$ ofwel
$s(x) = 12 + 4\sin\left(\frac{1}{4}\pi(x - 7)\right)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b De horizontale verschuiving is nu 9. De overige parameters blijven gelijk.

$c(x) = 12 + 4\cos\left(\frac{2\pi}{8}(x - 9)\right)$ ofwel

$c(x) = 12 + 4\cos\left(\frac{1}{4}\pi(x - 9)\right)$.

72 **a** $2\cos(3x) = 1$

$\cos(3x) = \frac{1}{2}$

$3x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $x = -\frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

Binnen het interval $[0, 2\pi]$ zijn de oplossingen:

$x = \frac{1}{9}\pi$ of $x = \frac{5}{9}\pi$ of $x = \frac{7}{9}\pi$ of $x = 1\frac{2}{9}\pi$ of $x = 1\frac{4}{9}\pi$ of $x = 1\frac{8}{9}\pi$.

b $\sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) = \cos(3x)$

$\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \left(x + \frac{1}{4}\pi\right)\right) = \cos(3x)$

$\cos\left(\frac{1}{4}\pi - x\right) = \cos(3x)$

$3x = \frac{1}{4}\pi - x + k \cdot 2\pi$ of $3x = -\frac{1}{4}\pi + x + k \cdot 2\pi$

$4x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{16}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$ of $x = -\frac{1}{8}\pi + k \cdot \pi$

Binnen het interval $[0, 2\pi]$ zijn de oplossingen:

$x = \frac{1}{16}\pi$ of $x = \frac{9}{16}\pi$ of $x = \frac{17}{16}\pi$ of $x = 1\frac{9}{16}\pi$ of $x = \frac{7}{8}\pi$ of $x = 1\frac{7}{8}\pi$.

c $2\sin^2(x) = 1$

$\sin^2(x) = \frac{1}{2}$

$\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ of $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Binnen het interval $[0, 2\pi]$ zijn de oplossingen:

$x = \frac{1}{4}\pi$ of $x = \frac{3}{4}\pi$ of $x = 1\frac{1}{4}\pi$ of $x = 1\frac{3}{4}\pi$.

d $2\cos^2(x) - \sin(x) = 1$

$2(1 - \sin^2(x)) - \sin(x) - 1 = 0$

$2\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$

$\sin^2(x) + \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2} = 0$

$(\sin(x) + 1)\left(\sin(x) - \frac{1}{2}\right) = 0$

$\sin(x) + 1 = 0$ of $\sin(x) - \frac{1}{2} = 0$

$\sin(x) = -1$ of $\sin(x) = \frac{1}{2}$

$x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

Binnen het interval $[0, 2\pi]$ zijn de oplossingen:

$x = 1\frac{1}{2}\pi$ of $x = \frac{1}{6}\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi$

e $\tan(2x) = \tan\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$

$2x = x - \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$

$x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$

Binnen het interval $[0, 2\pi]$ zijn de oplossingen:

$x = \frac{2}{3}\pi$ of $x = 1\frac{2}{3}\pi$.

f $\sqrt{3} \cdot \sin(2x) = 3 \cdot \cos(2x)$

$\sin(2x) = \sqrt{3} \cdot \cos(2x)$

$\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \sqrt{3}$

$\tan(2x) = \sqrt{3}$

$2x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$

$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

© Noordhoff Uitgevers bv

Binnen het interval $[0, 2\pi]$ zijn de oplossingen:

$x = \frac{1}{6}\pi$ of $x = \frac{2}{3}\pi$ of $x = 1\frac{1}{6}\pi$ of $x = 1\frac{2}{3}\pi$.

73 **a** $f'(x) = 3\cos(2x) \cdot 2$

$f'(x) = 6\cos(2x)$

b $g'(x) = 3 \cdot 2\cos(x) \cdot -\sin(x)$

$g'(x) = -6\sin(x)\cos(x)$

c $h'(x) = \dfrac{\cos(x) \cdot (1 + \sin(x)) - \sin(x)\cos(x)}{(1 + \sin(x))^2}$

$h'(x) = \dfrac{\cos(x)}{(1 + \sin(x))^2}$

d $k'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(3x^2 + 2)} \cdot 6x$

$k'(x) = \dfrac{6x}{\cos^2(3x^2 + 2)}$

e $m'(x) = \dfrac{1}{2 + \sin(4x)} \cdot \cos(4x) \cdot 4$

$m'(x) = \dfrac{4\cos(4x)}{2 + \sin(4x)}$

f $n'(x) = \dfrac{-2\sin^2(2x) - \cos(2x) \cdot \cos(2x) \cdot 2}{(\sin(2x))^2}$

$n'(x) = \dfrac{-2(\sin^2(2x) + \cos^2(2x))}{(\sin(2x))^2}$

$n'(x) = \dfrac{-2}{(\sin(2x))^2}$

74 **a** $F(x) = -3 \cdot \frac{1}{2}\cos(2x)$

$F(x) = -1\frac{1}{2}\cos(2x)$

b $G(x) = -3\sin\left(\frac{1}{3}\pi - x\right)$

c $H(x) = 4x - 6\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

d $K(x) = x^2 - \frac{5}{3}\cos(6 - 3x)$

75 **a** $\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = \sin(x) \cdot \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) - \cos(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) =$

$\frac{1}{2} \cdot \sin(x) - \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \cos(x)$

b $\cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) = \cos(x) \cdot \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) - \sin(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) =$

$\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(x) - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(x)$

c $\cos\left(1\frac{1}{2}\pi - x\right) = \cos\left(1\frac{1}{2}\pi\right) \cdot \cos(x) + \sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right) \cdot \sin(x) =$

$0 \cdot \cos(x) + -1 \cdot \sin(x) = -\sin(x)$

d $\sin\left(x + 1\frac{1}{4}\pi\right) = \sin(x) \cdot \cos\left(1\frac{1}{4}\pi\right) + \cos(x) \cdot \sin\left(1\frac{1}{4}\pi\right) =$

$-\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos(x)$

76 **a** $f(x) = 4\sin(x) \cdot \cos^3(x) - 4\sin^3(x) \cdot \cos(x)$

$f(x) = 2 \cdot 2\sin(x)\cos(x)(\cos^2(x) - \sin^2(x))$

$f(x) = 2\sin(2x)\cos(2x)$

b $f(x) = 2\sin(2x)\cos(2x)$

$f(x) = \sin(2 \cdot 2x) = \sin(4x)$

© Noordhoff Uitgevers bv

c $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{5}{8}\pi} \sin(4x)\,dx = \left[-\frac{1}{4}\cos(4x)\right]_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{5}{8}\pi} =$

$\left(-\frac{1}{4}\cos\left(2\frac{1}{2}\pi\right)\right) - \left(-\frac{1}{4}\cos(2\pi)\right) =$

$0 - \left(-\frac{1}{4} \cdot 1\right) = \frac{1}{4}$

77 **a** Los op $\frac{\cos(x)}{-\sin^2(x)} = \sqrt{2}$

$\cos(x) = -\sqrt{2} \cdot \sin^2(x)$

$\cos(x) = -\sqrt{2}(1 - \cos^2(x))$

$\cos(x) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\cos^2(x)$

$\sqrt{2} \cdot \cos^2(x) - \cos(x) - \sqrt{2} = 0$

$\cos(x) = \frac{1 + \sqrt{9}}{2\sqrt{2}}$ of $\cos(x) = \frac{1 - \sqrt{9}}{2\sqrt{2}}$

$\cos(x) = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ of $\cos(x) = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

De eerste vergelijking heeft geen oplossing, de twee oplossingen van de tweede vergelijking met de kleinste x-coördinaten zijn $x = \frac{3}{4}\pi$ en $x = 1\frac{1}{4}\pi$. Dat zijn de x-coördinaten van A respectievelijk B.

b Als de grafiek van $f_p(x) = \frac{\cos(x)}{p - \sin^2(x)}$ perforaties heeft, zijn er waarden van x waarvoor $\cos(x) = 0$ en $p - \sin^2(x) = 0$.

$\cos(x) = 0$ als $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ en voor deze waarden van x is $\sin(x) = 1$ of $\sin(x) = -1$, dus $p - \sin^2(x) = 0$ geeft $p = 1$.

$f_1(x) = \frac{\cos(x)}{1 - \sin^2(x)} = \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$ als $\cos(x) \neq 0$

Hieruit blijkt dat de functie verticale asymptoten heeft en geen perforaties.

c $f(0) = \frac{1}{p}$, $f(\pi) = \frac{-1}{p}$ en $f(2\pi) = \frac{1}{p}$, dus

$P\left(0, \frac{1}{p}\right)$, $Q\left(\pi, \frac{-1}{p}\right)$ en $R\left(2\pi, \frac{1}{p}\right)$.

$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{-2}{p} \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{2}{p} \end{pmatrix}$

Als $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{QR}$ dan moet het inproduct nul zijn, dus

$\pi^2 - \frac{4}{p^2} = 0$

$p^2\pi^2 = 4$

$p^2 = \frac{4}{\pi^2}$

$p = \frac{2}{\pi}$ of $p = \frac{-2}{\pi}$

© Noordhoff Uitgevers bv

78 **a** $f(x) = 6\sin(x) - \cos(2x)$
Voor de toppen geldt dat de afgeleide nul moet zijn
$f'(x) = 6\cos(x) + 2\sin(2x)$
$6\cos(x) + 2\sin(2x) = 0$
$6\cos(x) + 2 \cdot 2\sin(x)\cos(x) = 0$
$2\cos(x)(3 + 2\sin(x)) = 0$
$\cos(x) = 0$ of $\sin(x) = -1\frac{1}{2}$ (geen oplossingen)
$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ (k geheel) zijn de x-coördinaten van alle toppen.

b De x-coördinaten van de eindpunten van het lijnstuk zijn $1\frac{1}{2}\pi - 1$ en $1\frac{1}{2}\pi + 1$.

$f\left(1\frac{1}{2}\pi - 1\right) = 6\sin\left(1\frac{1}{2}\pi - 1\right) - \cos(3\pi - 2) = -3{,}65796\ldots$
De afstand is $-3{,}65796\ldots - -5 \approx 1{,}34$.

79 Er is een perforatie als de teller en noemer van $\dfrac{1 + \cos(2x)}{\cos(x)}$ beide gelijk zijn aan nul en de functie voor die waarde van x een limiet heeft.

$1 + \cos(2x) = 0$ $\qquad$ $\cos(x) = 0$
$\cos(2x) = -1$ $\qquad$ $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
$2x = \pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
De enige waarden op het interval $[0, 2\pi]$ die in aanmerking komen zijn $x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = 1\frac{1}{2}\pi$.

$$f(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{\cos(x)} + 1$$

$$f(x) = \frac{1 + 2\cos^2(x) - 1}{\cos(x)} + 1$$

$f(x) = 2\cos(x) + 1$ als $\cos(x) \neq 0$
$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} f(x) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ en $\lim\limits_{x \to 1\frac{1}{2}\pi} f(x) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$,
De perforaties zijn de punten $\left(\frac{1}{2}\pi, 1\right)$ en $\left(1\frac{1}{2}\pi, 1\right)$.

80 **a** $\sin(x) + \sin(2x) = 0$
$\sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) = 0$
$\sin(x) \cdot (1 + 2\cos(x)) = 0$
$\sin(x) = 0$ of $\cos(x) = -\frac{1}{2}$
De x-coördinaat van B is een oplossing van $\cos(x) = -\frac{1}{2}$, dus $x_B = \frac{2}{3}\pi$.

b Er moet gelden $f_a'\left(\frac{5}{6}\pi\right) = 0$.
$f_a'(x) = \cos(x) + 2a \cdot \cos(2x)$

$\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + 2a \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{5}{6}\pi\right) = 0$

$-\frac{1}{2}\sqrt{3} + 2a \cdot \frac{1}{2} = 0$

$a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Invoer: $y_1 = \sin(x) + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sin(2x)$
Venster: $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq 2$
Optie: maximum geeft $x \approx 0{,}96$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c Voor deze oppervlakte geldt

$\int_0^{\pi} (\sin(x) + a \cdot \sin(2x))\,\mathrm{d}x =$

$\left[-\cos(x) - \frac{1}{2}a\cos(2x)\right]_0^{\pi} =$

$\left(--1 - \frac{1}{2}a \cdot 1\right) - \left(-1 - \frac{1}{2}a \cdot 1\right) =$

$1 - \frac{1}{2}a + 1 + \frac{1}{2}a = 2$

De uitkomst is altijd 2 en onafhankelijk van de waarde van a.

Meetkunde en vectoren

81 $\angle DAF = 90° - 70° = 20°$

$\angle EAF = \angle AEF = \angle AFE = 60°$

$\angle BAE = 90° - 20° - 60° = 10°$

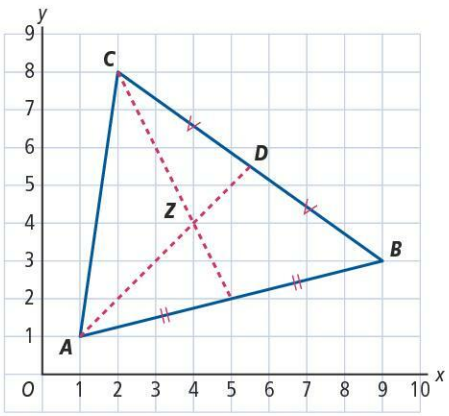
$\angle AEB = 90° - 10° = 80°$

$\angle CEF = 180° - 80° - 60° = 40°$

$\angle EFC = 180° - 90° - 60° = 30°$

$\angle FCE = 180° - 30° - 40° = 110°$

82 a

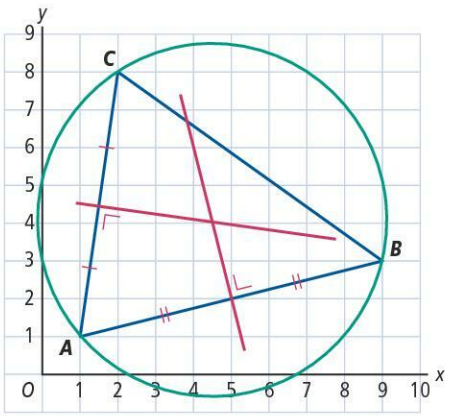


b Het midden van zijde BC is het punt $D\left(5\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}\right)$.

De lengte van zwaartelijn AD is $z_A = \sqrt{\left(5\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(5\frac{1}{2} - 1\right)^2} = 4\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

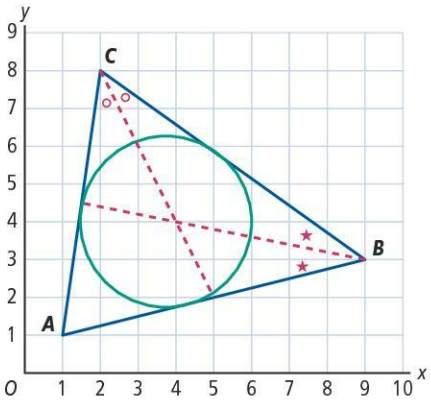
Dan is $AZ = \frac{2}{3} \cdot 4\frac{1}{2}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

c Het middelpunt van de omgeschreven cirkel is het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden van de driehoek.



© Noordhoff Uitgevers bv

d Het middelpunt van de ingeschreven cirkel is het snijpunt van de deellijnen van de hoeken van de driehoek.

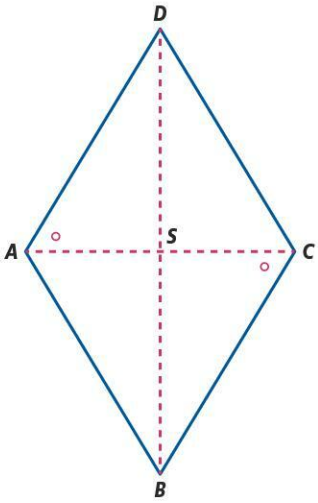


83 **a** Elke ruit is een vlieger: klopt, want de diagonalen zijn de symmetrieassen.
Niet elke vlieger is een ruit klopt ook, want de zijden hoeven niet even lang te zijn.
Conclusie: deze bewering is waar.

b Deze bewering is waar, want de overstaande zijden van een rechthoek zijn evenwijdig en alle hoeken zijn even groot.

c Deze bewering is waar, van een ruit zijn alle zijden even lang en als bovendien de hoeken recht zijn, dan is er sprake van een vierkant.

d



In de figuur is een vlieger getekend waarvan de zijden AD en BC evenwijdig zijn.
Dan geldt $\angle BCA = \angle DAC$ (Z-hoeken) en vanwege de symmetrie in de lijn BD is $\angle DCA = \angle DAC$.
Dus is driehoek SCD het spiegelbeeld van driehoek SCB en is $BC = CD$.
Dan zijn alle zijden even lang en daarom is $ABCD$ een ruit.
Deze bewering is waar.

84 **a** De driehoeken ASB en CSD zijn gelijkvormig.

$AC = \sqrt{6^2 + 3^3} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
Dus is $AS : SC = 6 : 4$
$AS = \frac{6}{10}\, AC = \frac{6}{10} \cdot 3\sqrt{5} = 1\frac{4}{5}\sqrt{5}$

b $CS = \frac{4}{10} \cdot 3\sqrt{5} = 1\frac{1}{5}\sqrt{5}$

c $\angle DBA = \angle BDC$ (Z-hoeken)

$\tan(\angle BDC) = \frac{3}{4}$ geeft $\angle DBC = 36{,}869\ldots°$ dus $\angle DBA \approx 37°$.

© Noordhoff Uitgevers bv

d $\tan(\angle BAS) = \frac{3}{6}$ geeft $\angle BAS = 26{,}565\ldots°$
$\angle ABS = \angle DBA = 36{,}869\ldots°$
$\angle BAS + \angle ABS = 26{,}565\ldots° + 36{,}869\ldots° = 63{,}434\ldots°$
$\angle ASB = 180° - 63{,}434\ldots° = 116{,}565\ldots°$
$\angle BSC = 180° - \angle ASB$ (gestrekte hoek)
$\angle BSC = 180° - 116{,}565\ldots° \approx 63°$

85 **a** $BP = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

b $AP = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61}$

c De driehoeken ABS en CPS zijn gelijkvormig met verhouding 3 : 8.

$AS = \frac{8}{11} \cdot AC = \frac{8}{11} \cdot \sqrt{8^2 + 6^2} = \frac{8}{11} \cdot 10 = 7\frac{3}{11}$

d $\sin(\angle DAQ) = \dfrac{DQ}{AD}$ en $\sin(\angle DAP) = \dfrac{DP}{AP}$

Omdat $\angle DAQ = \angle DAP$ is $\dfrac{DQ}{AD} = \dfrac{DP}{AP}$ ofwel

$DQ \cdot AP = AD \cdot DP$

$DQ \cdot \sqrt{61} = 6 \cdot 5$

$DQ = \dfrac{6 \cdot 5}{\sqrt{61}} = \dfrac{30}{\sqrt{61}}$

e Uit $\tan(\angle PAD) = \frac{5}{6}$ volgt $\angle PAD \approx 40°$.

f Uit $\tan(\angle DPQ) = \frac{6}{5}$ volgt $\angle DPQ \approx 50°$.

g $\tan(\angle BAC) = \frac{6}{8}$ geeft $\angle BAC = 36{,}869\ldots°$
$\angle APB = \angle BPC$ (Z-hoeken)
$\tan(\angle BPC) = \frac{6}{3} = 2$ geeft $\angle BPC = 63{,}434\ldots°$ dus $\angle ABP = 63{,}434\ldots°$
$\angle BAC + \angle ABP = 36{,}869\ldots° + 63{,}434\ldots° = 100{,}304\ldots°$
$\angle ASB = 180° - 100{,}304\ldots° = 79{,}695\ldots°$
$\angle ASP = 180° - \angle ASB$ (gestrekte hoek)
$\angle ASP = 180° - 79{,}695\ldots° \approx 100°$

86 **a** $\beta = 180° - 60° - 75° = 45°$

$\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)} = \dfrac{c}{\sin(\gamma)}$

$\dfrac{a}{\sin(60°)} = \dfrac{b}{\sin(45°)} = \dfrac{8{,}2}{\sin(75°)}$

$a = \dfrac{8{,}2 \cdot \sin(60°)}{\sin(75°)} \approx 7{,}4$ en $b = \dfrac{8{,}2 \cdot \sin(45°)}{\sin(75°)} \approx 6{,}0$

b $\dfrac{15}{\sin(45°)} = \dfrac{18{,}3}{\sin(\beta)} = \dfrac{c}{\sin(\gamma)}$

$\sin(\beta) = \dfrac{18{,}3 \cdot \sin(45°)}{15}$ geeft $\beta \approx 60°$

$\gamma \approx 180° - 45° - 60° = 75°$

$c = \dfrac{15 \cdot \sin(75°)}{\sin(45°)} \approx 20{,}5$

© Noordhoff Uitgevers bv

c $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$
$b^2 = 9{,}3^2 + 5{,}7^2 - 2 \cdot 9{,}3 \cdot 5{,}7 \cdot \cos(30°)$
$b^2 = 27{,}1639\ldots$ geeft $b = \sqrt{27{,}1639\ldots} = 5{,}211\ldots$ dus $b \approx 5{,}2$.
$9{,}3^2 = 5{,}211\ldots^2 + 5{,}7^2 - 2 \cdot 5{,}211\ldots \cdot 5{,}7 \cdot \cos(\alpha)$

$$\cos(\alpha) = \frac{9{,}3^2 - 5{,}211\ldots^2 - 5{,}7^2}{-2 \cdot 5{,}211\ldots \cdot 5{,}7} \text{ geeft } \alpha \approx 117°.$$

$\gamma \approx 180° - 30° - 117° = 33°$

d $\beta = 180° - 35° - 100° = 45°$

$$\frac{a}{\sin(35°)} = \frac{12{,}5}{\sin(45°)} = \frac{c}{\sin(100°)}$$

$$a = \frac{12{,}5 \cdot \sin(35°)}{\sin(45°)} \approx 10{,}1 \text{ en } c = \frac{12{,}5 \cdot \sin(100°)}{\sin(45°)} \approx 17{,}4$$

e $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos(\angle A)$
$BC^2 = 4{,}1^2 + 8{,}3^2 - 2 \cdot 4{,}1 \cdot 8{,}3 \cdot \cos(120°)$
$BC = 10{,}942\ldots$ ofwel $BC \approx 10{,}9$

$$\frac{10{,}942\ldots}{\sin(120°)} = \frac{8{,}3}{\sin(\angle B)} = \frac{4{,}1}{\sin(\angle C)}$$

$$\sin(\angle B) = \frac{8{,}3 \cdot \sin(120°)}{10{,}942\ldots} \text{ dus } \angle B \approx 41°$$

$\angle C \approx 180° - 120° - 41° = 19°$

f $\frac{8{,}3}{\sin(120°)} = \frac{4{,}1}{\sin(\angle C)}$ geeft $\sin(\angle C) = \frac{4{,}1 \cdot \sin(120°)}{8{,}3}$ dus $\angle C = 25{,}327\ldots°$
$\angle C \approx 25°$
$\angle B = 180° - 120° - 25{,}327\ldots° = 34{,}672\ldots° \approx 35°$

$$\frac{8{,}3}{\sin(120°)} = \frac{AC}{\sin(34{,}672\ldots°)}$$

$$AC = \frac{8{,}3 \cdot \sin(34{,}672\ldots°)}{\sin(120°)} \approx 5{,}5.$$

87 De straal van de cirkel is 4 cm.
De oppervlakte van de cirkel is $\pi \cdot 4^2 = 16\pi$ cm^2.
De hoogte van een gelijkzijdige driehoek met zijde 4 cm is
$\sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ cm.
De oppervlakte van de gelijkzijdige driehoeken samen is
$6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$ cm^2.

Uit $\frac{24\sqrt{3}}{16\pi} = 0{,}82699\ldots$ volgt dat ongeveer 82,7% van de oppervlakte van de cirkel wordt bedekt door de zeshoek.

88 **a** De oppervlakte van vierhoek $ABCP$ is $3 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 18 + 15 = 33$.
b De oppervlakte van driehoek APC is $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9$.
c De driehoeken ABS en CPS zijn gelijkvormig met verhouding 3 : 8.
De hoogte van driehoek ABS is $\frac{8}{11} \cdot 6 = \frac{48}{11}$.
De oppervlakte driehoek ABS is $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{48}{11} = \frac{192}{11} = 17\frac{5}{11}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

d De oppervlakte van $ASPD$ is gelijk aan de oppervlakte van driehoek ACD min de oppervlakte van driehoek CPS.
De oppervlakte van driehoek ACD is $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$.

De hoogte van driehoek CPS is $\frac{3}{11} \cdot 6 = \frac{18}{11}$.

De oppervlakte van driehoek CPS is $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{18}{11} = \frac{27}{11} = 2\frac{5}{11}$.

De oppervlakte van vierhoek $ASPD$ is $24 - 2\frac{5}{11} = 21\frac{6}{11}$.

89 **a** De straal van de cirkels is $\frac{1}{2} \cdot (10 - 6) = 2$.
De omtrek van $ABCDEF$ is
$10 + 3 + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 + 6 + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 + 3 = 22 + 2\pi \approx 28{,}3$ cm.

b De oppervlakte van $ABCDEF$ is $10 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 = 42 + 2\pi \approx 48$ cm^2.

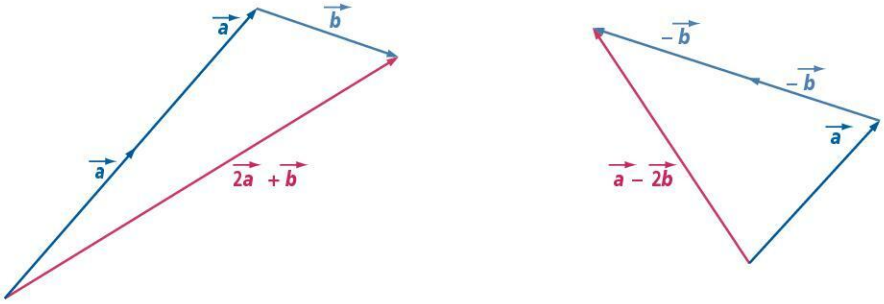
90 De stralen MR en MQ staan loodrecht op de raaklijnen. (*raaklijnstelling*)
De punten R en Q liggen op de cirkel met middellijn PM. (*Thales*)

91 Noem het raakpunt op de linker cirkel S en die op de rechter cirkel T.
Dan zijn de driehoeken MSQ en NTQ gelijkvormig (overstaande hoeken bij Q en rechte hoeken bij de raakpunten) met verhouding 8 : 3.
Dan geldt $MQ : QN = 8 : 3$. Dus geldt $(PQ + 8) : (QR + 3) = 8 : 3$.
Stel $PQ = x$ dan is $QR = 22 - x$.
$(x + 8) : (22 - x + 3) = 8 : 3$

$$\frac{x + 8}{25 - x} = \frac{8}{3}$$

$3x + 24 = 200 - 8x$
$11x = 176$
$x = 16$
Conclusie: $PQ = 16$ en $QR = 6$.

92



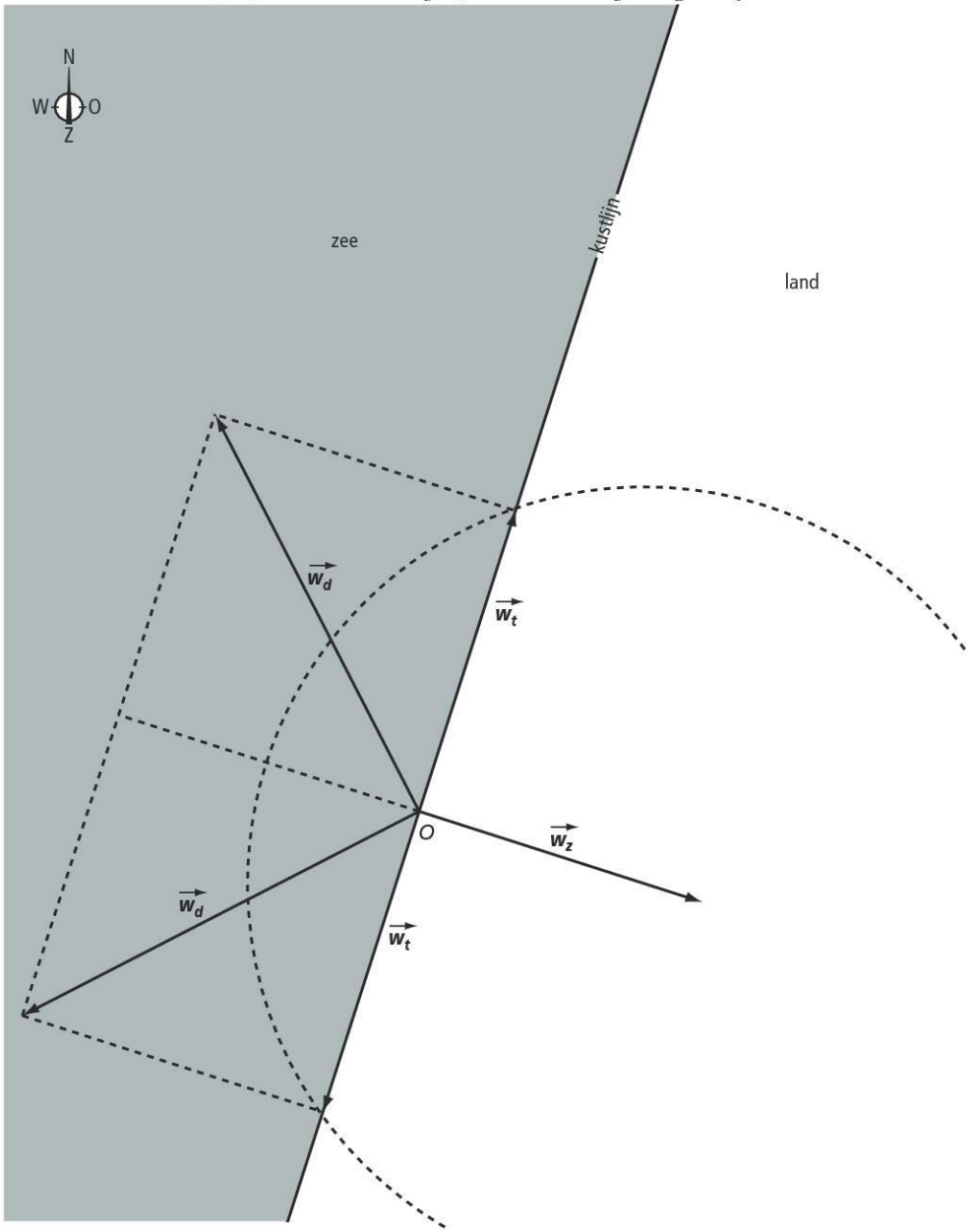
93 $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 13 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\cos\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ -3 \end{pmatrix}}{\sqrt{64 + 36} \cdot \sqrt{169 + 9}} = \frac{122}{10 \cdot \sqrt{178}} = 0{,}914\ldots$$

$\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 23{,}387\ldots°$ dus $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \approx 24°$.

© Noordhoff Uitgevers bv

94 **a** Teken een cirkel met straal 6 cm en als middelpunt het eindpunt van de vector $\vec{w}_z$. Teken de snijpunten van deze cirkel met de kustlijn. Deze snijpunten zijn de eindpunten van de twee mogelijke vectoren $\vec{w}_r$.
Er geldt $\vec{w}_r = \vec{w}_z + \vec{w}_d$, dus $\vec{w}_d = \vec{w}_z - \vec{w}_r$.
Teken de twee mogelijke vectoren $\vec{w}_d$ op basis van $\vec{w}_d = \vec{w}_z - \vec{w}_r$.



b Omdat $\vec{w}_z$ loodrecht staat op de kustlijn, is de hoek van $\vec{w}_z$ met de lijn oost-west ook 30°.

$$\vec{w}_z = \begin{pmatrix} 3\cos(30°) \\ -3\sin(30°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}598\ldots \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_d = \begin{pmatrix} -5\cos(45°) \\ -5\sin(45°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3{,}535\ldots \\ -3{,}535\ldots \end{pmatrix}$$

$\vec{w}_r = \vec{w}_z + \vec{w}_d$ geeft $\vec{w}_r = \begin{pmatrix} -0{,}937\ldots \\ -5{,}035\ldots \end{pmatrix}$

$|\vec{w}_r| = \sqrt{(-0{,}937\ldots)^2 + (-5{,}035\ldots)^2} = \sqrt{26{,}235\ldots}$

De snelheid van de resulterende wind is ongeveer 5,1 m/s.

© Noordhoff Uitgevers bv

95 **a** De straal van de cirkel is $MA = \sqrt{(3-4)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}$.
Een vergelijking van de cirkel is $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$.
Van de lijn AC is de richtingscoëfficiënt $\frac{0-4}{4-0} = -1$ en het startgetal 4.
Een vergelijking van de lijn AC is $y = 4 - x$.
Deze vergelijking invullen in de vergelijking van de cirkel geeft
$(x-3)^2 + (4-x-2)^2 = 5$
$(x-3)^2 + (2-x)^2 = 5$
$x^2 - 6x + 9 + x^2 - 4x + 4 = 5$
$2x^2 - 10x + 8 = 0$
$x^2 - 5x + 4 = 0$
$(x-1)(x-4) = 0$
$x = 1$ of $x = 4$
Bij punt F hoort $x = 1$ en dus $y = 4 - 1 = 3$ ofwel $F(1, 3)$.
Omdat $C(0, 4)$ en $S(2, 2)$ is het midden van lijnstuk CS het punt $(1, 3)$.
Conclusie: F is het midden van lijnstuk CS.

b $\overrightarrow{MF} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 0$ dus $\angle(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MB}) = 90°$.
De cirkelsector BMF is een kwart cirkel.
Punt G is het midden van lijnstuk OS, dus $G(1, 1)$.
$\overrightarrow{MG} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \cdot -1 + 1 \cdot -2 = 0$ dus $\angle(\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{MA}) = 90°$.
De cirkelsector GMA is ook een kwart cirkel.
De oppervlakte van de twee cirkelsectoren BMF en GMA samen is dus gelijk aan de helft van de oppervlakte van de cirkel.

96 **a** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-p \\ 0-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-p \\ -q \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$ en $AD = AB$
Dan is $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} q \\ 2-p \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q \\ 2-p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+q \\ 2-p+q \end{pmatrix}$

b $B(2, 0)$ dus $M(1, 0)$
$\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} p-1 \\ q-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-1 \\ q \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} p+q \\ 2-p+q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p-q \\ p+q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2q \\ 2-2p \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} p-1 \\ q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2q \\ 2-2p \end{pmatrix} = (p-1) \cdot 2q + q \cdot (2-2p)$
$= 2pq - 2q + 2q - 2pq = 0$
Hieruit volgt $MA \perp ED$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Lijnen en cirkels

97 **a** k: $10x - 5y = 7$
$5y = 10x - 7$
$y = 2x - 1\frac{2}{5}$

r: $3x + 6y = -5$
$6y = -3x - 5$
$y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{6}$

b l: $y = -3x + 5$

$3x + y = 5$

$\frac{3x}{5} + \frac{y}{5} = 1$

$\frac{x}{\frac{5}{3}} + \frac{y}{5} = 1$

s: $3x + y = 10$

$\frac{3x}{10} + \frac{y}{10} = 1$

$\frac{x}{3\frac{1}{3}} + \frac{y}{10} = 1$

c De richtingscoëfficiënt van l is -3, van k is 2, van r is $-\frac{1}{2}$ en van s is -3.
De lijnen k en r staan loodrecht op elkaar want $2 \cdot -\frac{1}{2} = -1$.

98 **a** Uit $8x - 4y = 7$ volgt $-4y = -8x + 7$ dus $y = 2x - 1\frac{3}{4}$.
De richtingscoëfficiënt van l is 2.

Een loodlijn hierop heeft richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{2}$.

b Invullen van $x = 4$ en $y = -3$ in $y = -\frac{1}{2}x + b$ geeft $-3 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + b$ ofwel $b = -1$.
Een vergelijking van de loodlijn uit P op l is $y = -\frac{1}{2}x - 1$.

99 **a** De richtingsvector van m is $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ dus een normaalvector is $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.
$x = -3$ en $y = 2$ invullen bij $5x + 4y = c$ geeft $c = -7$.
Een vergelijking van m is $5x + 4y = -7$.

b $y = 0$ geeft $2 - 5\lambda = 0$ dus $\lambda = \frac{2}{5}$.
Voor de x-coördinaat geldt dan $x = -3 + \frac{2}{5} \cdot 4 = -1\frac{2}{5}$.
Het snijpunt met de x-as is $\left(-1\frac{2}{5}, 0\right)$.

100 **a** $\mathrm{d}(P, l) = \dfrac{|2 \cdot 0 - 3 \cdot 9 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \dfrac{26}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13}$

b Kies op één van de lijnen een punt. Bijvoorbeeld $P(1, 1)$ op m.
n: $3x - y + 2 = 0$
$\mathrm{d}(P, n) = \dfrac{|3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{10}} = \frac{2}{5}\sqrt{10}$ dus $\mathrm{d}(m, n) = \frac{2}{5}\sqrt{10}$

101 **a** Oplossen met elimineren van $\begin{cases} 8x - y = 34 \\ 4x + 7y = 2 \end{cases}$ geeft $\begin{cases} 56x - 7y = 238 \\ 4x + 7y = 2 \end{cases}$

Deze twee vergelijkingen optellen geeft $60x = 240$ ofwel $x = 4$.
Dit invullen in $8x - y = 34$ geeft
$8 \cdot 4 - y = 34$
$32 - y = 34$
$y = -2$
Het snijpunt van l en m is het punt $(4, -2)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $P(p, q)$ invullen in de afstandsformule $d(P, l) = \dfrac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ voor de lijnen

$8x - y = 34$ en $4x + 7y = 2$ geeft $\dfrac{|8 \cdot p - 1 \cdot q - 34|}{\sqrt{8^2 + (-1)^2}} = \dfrac{|4 \cdot p + 7q - 2|}{\sqrt{4^2 + 7^2}} =$

$\dfrac{|8p - q - 34|}{\sqrt{65}} = \dfrac{|4p + 7q - 2|}{\sqrt{65}}$ dus $|8p - q - 34| = |4p + 7q - 2|$.

c Deze lijnen zijn de bissectrices van de hoeken gevormd door de lijnen l en m.

d $8p - q - 34 = 4p + 7q - 2$ of $8p - q - 34 = -(4p + 7q - 2)$
$4p - 8q - 32 = 0$ of $12p + 6q - 36 = 0$
$p - 2q - 8 = 0$ of $2p + q - 6 = 0$
Vergelijkingen van de bissectrices zijn $x - 2y = 8$ en $2x + y = 6$.

Deze zijn ook te schrijven als $y = \frac{1}{2}x - 4$ en $y = -2x + 6$.

Omdat $\frac{1}{2} \cdot -2 = -1$ staan deze bissectrices loodrecht op elkaar.

102 **a** De richtingsvectoren zijn $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\cos(\alpha) = \dfrac{|2 \cdot 1 + 5 \cdot 3|}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{10}} = \dfrac{17}{\sqrt{290}}$ geeft $\alpha \approx 3°$.

b Een normaalvector van de lijn $6y + x = 1$ is $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, dus een richtingsvector is $\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$. De richtingsvectoren zijn $\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\cos(\alpha) = \dfrac{|6 \cdot 7 + -1 \cdot 2|}{\sqrt{37} \cdot \sqrt{53}} = \dfrac{40}{\sqrt{37} \cdot \sqrt{53}}$ geeft $\alpha \approx 25°$.

c De richtingsvectoren zijn $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Omdat $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ snijden de lijnen elkaar loodrecht en is de hoek 90°.

103 **a** $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 9x - 2y = 13 \end{cases}$ geeft $\begin{cases} 9x + 3y = 3 \\ 9x - 2y = 13 \end{cases}$
Deze vergelijkingen van elkaar aftrekken geeft $5y = -10$ dus $y = -2$
Dan is $3x + -2 = 1$ ofwel $x = 1$.
De oplossing is $x = 1$ en $y = -2$.

b $\begin{cases} 7a + 3b = -10 \\ a = \frac{1}{2}b - 7 \end{cases}$

De onderste vergelijking substitueren in de bovenste geeft

$7 \cdot \left(\frac{1}{2}b - 7\right) + 3b = -10$

$3\frac{1}{2}b - 49 + 3b = -10$

$6\frac{1}{2}b = 39$
$b = 6$ en $a = \frac{1}{2} \cdot 6 - 7 = -4$
De oplossing is $a = -4$ en $b = 6$.

© Noordhoff Uitgevers bv

104 **a** $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 5(x - 1) = 2(x - y) \end{cases}$ geeft $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 5x - 5 = 2x - 2y \end{cases}$ ofwel $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

Deze vergelijkingen van elkaar aftrekken geeft $0 = 2$.
Dit stelsel is strijdig, dus zijn er geen oplossingen.

b $\begin{cases} y = 1\frac{3}{4}x - 7 \\ x = \frac{4}{7}y + 4 \end{cases}$ geeft $\begin{cases} 4y = 7x - 28 \\ 7x = 4y + 28 \end{cases}$ dus $\begin{cases} -7x + 4y = -28 \\ 7x - 4y = 28 \end{cases}$

Deze vergelijkingen optellen geeft $0 = 0$.
Dit stelsel is afhankelijk, dus zijn er oneindig veel oplossingen.

c $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases}$

Deze vergelijkingen optellen geeft $2x = 6$ dus $x = 3$ en $y = 0$.
Dit stelsel heeft één oplossing.

d $\begin{cases} 4x - 2y = 5 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$ geeft $\begin{cases} y = 2x - 2\frac{1}{2} \\ y = 2x + 2 \end{cases}$

Deze vergelijkingen van elkaar aftrekken geeft $0 = -4\frac{1}{2}$.
Dit stelsel is strijdig, dus zijn er geen oplossingen.

105 **a** Het stelsel $\begin{cases} 3x - y + 5 = 0 \\ 5x + py + q = 0 \end{cases}$ is te herleiden tot $\begin{cases} 15x - 5y + 25 = 0 \\ 15x + 3py + 3q = 0 \end{cases}$

Dit zijn twee evenwijdige of samenvallende lijnen als $-5 = 3p$.
Dus als $p = -1\frac{2}{3}$.

$p = -1\frac{2}{3}$ invullen in het stelsel $\begin{cases} 15x - 5y + 25 = 0 \\ 15x + 3py + 3q = 0 \end{cases}$ geeft $\begin{cases} 15x - 5y + 25 = 0 \\ 15x - 5y + 3q = 0 \end{cases}$

Als $3q = 25$ ofwel $q = 8\frac{1}{3}$, dan is het stelsel afhankelijk.

b Voor $p = -1\frac{2}{3}$ en $q \neq 8\frac{1}{3}$ is het stelsel strijdig.

106 **a** $(x + 4)^2 + y^2 = 25$
Middelpunt $(-4, 0)$ en straal $r = 5$.

b $(x - 12)^2 + y^2 - 8y = 0$
$(x - 12)^2 + (y - 4)^2 - 16 = 0$
$(x - 12)^2 + (y - 4)^2 = 16$
Middelpunt $(12, 4)$ en straal $r = 4$.

c $x^2 + y^2 + 10x + 4y = 1$
$x^2 + 10x + y^2 + 4y = 1$
$(x + 5)^2 - 25 + (y + 2)^2 - 4 = 1$
$(x + 5)^2 + (y + 2)^2 = 30$

Middelpunt $(-5, -2)$ en straal $r = \sqrt{30}$.

d $x^2 + y^2 - 5x - 7y = 10$
$x^2 - 5x + y^2 - 7y = 10$
$\left(x - 2\frac{1}{2}\right)^2 - 6\frac{1}{4} + \left(y - 3\frac{1}{2}\right)^2 - 12\frac{1}{4} = 10$
$\left(x - 2\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - 3\frac{1}{2}\right)^2 = 28\frac{1}{2}$.
Middelpunt $\left(2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$ en straal $r = \sqrt{28\frac{1}{2}}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

e $x^2 + y^2 + 5x - 6y + 16 = 0$

$x^2 + 5x + y^2 - 6y + 16 = 0$

$\left(x + 2\frac{1}{2}\right)^2 - 6\frac{1}{4} + (y - 3)^2 - 9 + 16 = 0$

$\left(x + 2\frac{1}{2}\right)^2 + (y - 3)^2 = -\frac{3}{4}$

Omdat $-\frac{3}{4} < 0$ stelt de vergelijking geen cirkel voor.

107 **a** Invullen van $x = -3$ in $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 40$ geeft
$(-3 + 1)^2 + (y - 4)^2 = 40$
$(y - 4)^2 = 36$
$y - 4 = -6$ of $y - 4 = 6$
$y = -2$ of $y = 10$
De snijpunten zijn $(-3, -2)$ en $(-3, 10)$.

b Invullen van $x = 1 - 5y$ in $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 13$ geeft
$(1 - 5y - 4)^2 + (y - 2)^2 = 13$
$(5y + 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$
$25y^2 + 30y + 9 + y^2 - 4y + 4 = 13$
$26y^2 + 26y = 0$
$26y(y + 1) = 0$
$y = 0$ of $y = -1$
$x = 1$ of $x = 6$
De snijpunten zijn $(1, 0)$ en $(6, -1)$.

c $y = x + 3$ invullen in $x^2 + y^2 = 9$ geeft
$x^2 + (x + 3)^2 = 9$
$x^2 + x^2 + 6x + 9 = 9$
$2x^2 + 6x = 0$
$2x(x + 3) = 0$
$x = 0$ of $x = -3$
$y = 3$ of $y = 0$
De snijpunten zijn $(0, 3)$ en $(-3, 0)$.

108 $y = 2x + 3$ invullen in $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$ geeft
$x^2 + (2x + 3)^2 - 6x - 7 = 0$
$x^2 + 4x^2 + 12x + 9 - 6x - 7 = 0$
$5x^2 + 6x + 2 = 0$
$D = 6^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = -4$
Omdat $D < 0$ heeft de laatste vergelijking geen oplossing en dus zijn er geen gemeenschappelijke punten.

109 **a** De vergelijkingen van elkaar aftrekken geeft $6x - 36y - 30 = 0$.
$x - 6y - 5 = 0$
$x = 6y + 5$
Dit laatste invullen in de vergelijking van cirkel c_1 geeft
$(6y + 5)^2 - 8(6y + 5) + y^2 - 12y - 22 = 0$
$36y^2 + 60y + 25 - 48y - 40 + y^2 - 12y - 22 = 0$
$37y^2 - 37 = 0$
$y^2 = 1$
$y = -1$ of $y = 1$
$x = 6 \cdot -1 + 5 = -1$ of $x = 6 \cdot 1 + 5 = 11$
De snijpunten zijn $(-1, -1)$ en $(11, 1)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $c_1 : x^2 + 6x + 9 + y^2 - 24y + 144 = 100$
$c_1 : x^2 + y^2 + 6x - 24y + 53 = 0$
$c_2 : x^2 - 2x + 1 + y^2 = 20$
$c_2 : x^2 + y^2 - 2x - 19 = 0$
De vergelijkingen van elkaar aftrekken geeft $8x - 24y + 72 = 0$.
$8x = 24y - 72$
$x = 3y - 9$
Dit laatste invullen in de vergelijking van cirkel c_2 geeft
$(3y - 9 - 1)^2 + y^2 = 20$
$(3y - 10)^2 + y^2 = 20$
$9y^2 - 60y + 100 + y^2 = 20$
$10y^2 - 60y + 80 = 0$
$y^2 - 6y + 8 = 0$
$(y - 4)(y - 2) = 0$
$y = 4$ of $y = 2$
$x = 3 \cdot 4 - 9 = 3$ of $x = 3 \cdot 2 - 9 = -3$
De snijpunten zijn $(3, 4)$ en $(-3, 2)$.

110 **a** Het middelpunt M van c: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$ is $M(2, 1)$.
De lijn MP heeft richtingscoëfficiënt $\frac{2 - 1}{-1 - 2} = -\frac{1}{3}$.
De raaklijn heeft richtingscoëfficiënt 3.
$x = -1$ en $y = 2$ invullen bij $y = 3x + b$ geeft $2 = 3 \cdot -1 + b$ dus $b = 5$.
Een vergelijking van de raaklijn is $y = 3x + 5$.

b $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 20 = 0$
$x^2 - 10x + y^2 - 4y + 20 = 0$
$(x - 5)^2 - 25 + (y - 2)^2 - 4 + 20 = 0$
$(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 9$
Het middelpunt M van c is $M(5, 2)$.
De lijn MP loopt verticaal, dus de raaklijn in P loopt horizontaal.
Een vergelijking van de raaklijn is $y = 5$.

111 $y = ax$ invullen in $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 20$ geeft
$(x - 2)^2 + (ax - 6)^2 = 20$
$x^2 - 4x + 4 + a^2x^2 - 12ax + 36 = 20$
$(a^2 + 1)x^2 + (-4 - 12a)x + 20 = 0$
$D = (-4 - 12a)^2 - 4 \cdot (a^2 + 1) \cdot 20$
$D = 144a^2 + 96a + 16 - 80a^2 - 80$
$D = 64a^2 + 96a - 64$
$D = 0$ geeft $64a^2 + 96a - 64 = 0$

$a^2 + 1\frac{1}{2}a - 1 = 0$

$(a + 2)\left(a - \frac{1}{2}\right) = 0$

$a = -2$ of $a = \frac{1}{2}$
Voor $a = -2$ en $a = \frac{1}{2}$ raakt lijn l cirkel c.

112 Het middelpunt van cirkel c: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$ is $M(1, 1)$ en de straal is 5.
De afstand van $M(1, 1)$ tot lijn l met vergelijking $3x + 2y = 23$ is
$\frac{|3 + 2 - 23|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{18}{\sqrt{13}} \approx 4{,}9923 < 5$.
Conclusie: lijn l snijdt cirkel c in twee punten.

© Noordhoff Uitgevers bv

113 De vergrote cirkel raakt lijn k als de straal van de vergrote cirkel gelijk is aan de afstand van het middelpunt M tot lijn k.

De afstand van $M(1, 1)$ tot k: $x - y = 8$ is $\frac{|1 - 1 - 8|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$.

De straal van de vergrote cirkel is $4\sqrt{2}$.

114 **a** $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 52$

b Omdat $\angle MAP = \angle MBP = 90°$ (*Thales*)

c Het middelpunt van c_2 is het midden van MP, dus $(0, 2)$.

De straal is $\frac{1}{2} MP = \frac{1}{2}\sqrt{10^2 + 2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{104} = \sqrt{26}$.
Een vergelijking van c_2 is $x^2 + (y - 2)^2 = 26$.

d c_1: $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 52$
$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 6y + 9 = 52$
$x^2 + y^2 - 10x - 6y - 18 = 0$
c_2: $x^2 + (y - 2)^2 = 26$
$x^2 + y^2 - 4y + 4 = 26$
$x^2 + y^2 - 4y - 22 = 0$
De vergelijkingen van elkaar aftrekken geeft $-10x - 2y + 4 = 0$.
$10x + 2y = 4$
$5x + y = 2$
$y = 2 - 5x$
Invullen in $x^2 + (y - 2)^2 = 26$ geeft $x^2 + (-5x)^2 = 26$.
$26x^2 = 26$
$x^2 = 1$
$x = -1$ of $x = 1$
$y = 7$ of $y = -3$
De raakpunten zijn $A(-1, 7)$ en $B(1, -3)$.

De raaklijn AP heeft richtingscoëfficiënt $\frac{7 - 1}{-1 - -5} = 1\frac{1}{2}$.

$x = -1$ en $y = 7$ invullen in $y = 1\frac{1}{2}x + b$ geeft $7 = 1\frac{1}{2} \cdot -1 + b$ dus $b = 8\frac{1}{2}$.

Een vergelijking van raaklijn AP is $y = 1\frac{1}{2}x + 8\frac{1}{2}$.

De raaklijn BP heeft richtingscoëfficiënt $\frac{-3 - 1}{1 - -5} = -\frac{2}{3}$.

$x = 1$ en $y = -3$ invullen in $y = -\frac{2}{3}x + b$ geeft $-3 = -\frac{2}{3} \cdot 1 + b$ dus $b = -2\frac{1}{3}$.

Een vergelijking van raaklijn BP is $y = -\frac{2}{3}x - 2\frac{1}{3}$.

115 **a** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$

Invullen in c: $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 10$ geeft $(\lambda - 5)^2 + (m\lambda - 5)^2 = 10$.
$\lambda^2 - 10\lambda + 25 + m^2\lambda^2 - 10m\lambda + 25 = 10$
$(m^2 + 1)\lambda^2 + (-10m - 10)\lambda + 40 = 0$
$D = (-10m - 10)^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 40$
$D = 100m^2 + 200m + 100 - 160m^2 - 160$
$D = -60m^2 + 200m - 60$
$D = 0$ geeft $-60m^2 + 200m - 60 = 0$.
$3m^2 - 10m + 3 = 0$

© Noordhoff Uitgevers bv

$D = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 64$

$m = \frac{10+8}{6} = 3$ of $m = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3}$

De vergelijkingen van de raaklijnen zijn $y = 3x$ en $y = \frac{1}{3}x$.

b $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$

Invullen in c: $(x-1)^2 + y^2 = 25$ geeft $(11+\lambda)^2 + (m\lambda - 2)^2 = 25$.

$\lambda^2 + 22\lambda + 121 + m^2\lambda^2 - 4m\lambda + 4 = 25$

$(m^2+1)\lambda^2 + (22-4m)\lambda + 100 = 0$

$D = (22-4m)^2 - 4 \cdot (m^2+1) \cdot 100$

$D = 16m^2 - 176m + 484 - 400m^2 - 400$

$D = -384m^2 - 176m + 84$

$D = 0$ geeft $-384m^2 - 176m + 84 = 0$.

$96m^2 + 44m - 21 = 0$

$D = 44^2 - 4 \cdot 96 \cdot -21 = 10\,000$

$m = \frac{-44+100}{192} = \frac{7}{24}$ of $m = \frac{-44-100}{192} = -\frac{3}{4}$

$m = \frac{7}{24}$ geeft $y = \frac{7}{24}x + b$

$x = 12$ en $y = -2$ invullen geeft $-2 = \frac{7}{24} \cdot 12 + b$ dus $b = -5\frac{1}{2}$.

$m = -\frac{3}{4}$ geeft $y = -\frac{3}{4}x + b$

$x = 12$ en $y = -2$ invullen geeft $-2 = -\frac{3}{4} \cdot 12 + b$ dus $b = 7$.

Vergelijkingen van de raaklijnen zijn $y = \frac{7}{24}x - 5\frac{1}{2}$ en $y = -\frac{3}{4}x + 7$.

116 **a** Cirkel c: $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 20$ heeft middelpunt $M(5, 4)$ en straal $r = \sqrt{20}$.

$MQ = \sqrt{(5-2)^2 + (4-10)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$

Dan is $d(Q, c) = \sqrt{45} - \sqrt{20} = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$.

b Cirkel c: $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 12 = 0$ ofwel $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 5$.

Het middelpunt is $M(1, 4)$ en de straal is $\sqrt{5}$.

$MQ = \sqrt{(1-9)^2 + (4-8)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$

Dan is $d(Q, c) = \sqrt{80} - \sqrt{5} = 4\sqrt{5} - \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$.

117 Uit $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ volgt $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$.

Dus c_1 heeft middelpunt $(-1, 1)$ en straal $r = \sqrt{2}$.

Cirkel c_2: $(x-4)^2 + (y-6)^2 = 8$ heeft middelpunt $(4, 6)$ en straal $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

De afstand tussen de middelpunten is $\sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

De afstand tussen de cirkels c_1 en c_2 is $5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

118 **a** Cirkel c: $x^2 + y^2 = 20$ heeft middelpunt $(0, 0)$ en straal $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

De afstand van het middelpunt $(0, 0)$ tot de lijn l: $x + 2y = 15$ is

$\frac{|1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 15|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$.

De afstand van cirkel c tot lijn l is $3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b l: $y = \frac{1}{2}x - 7\frac{1}{2}$ geeft $x - 2y - 15 = 0$

Het middelpunt van de cirkel is $M(-2, 4)$ en de straal is $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

$$d(M, l) = \frac{|-2 - 2 \cdot 4 - 15|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{25}{\sqrt{5}} = 5\sqrt{5}.$$

De afstand van cirkel c tot lijn l is $5\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$.

119 **a** $x^2 + 6x + y^2 - 8y - 75 = 0$
$(x + 3)^2 - 9 + (y - 4)^2 - 16 - 75 = 0$
$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 100$
Cirkel c heeft middelpunt $M(-3, 4)$ en straal $r = 10$.
$x = -3$ en $y = 4$ invullen in $y = 2x + p$ geeft $4 = 2 \cdot -3 + p$.
Dus $p = 10$.

b $y = 2x + p$ geeft $-2x + y - p = 0$.
$d(c, l_p) = 5$ geeft $d(M, l_p) = 10 + 5 = 15$

$$\frac{|-2 \cdot -3 + 1 \cdot 4 - p|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = 15$$

$$\frac{|10 - p|}{\sqrt{5}} = 15 \text{ ofwel } |10 - p| = 15\sqrt{5}.$$

$10 - p = -15\sqrt{5}$ of $10 - p = 15\sqrt{5}$

$p = 10 + 15\sqrt{5}$ of $p = 10 - 15\sqrt{5}$

120 **a** Bedenk dat $\angle ACB = 90°$ (*Thales*)
De driehoeken ABC en ACD zijn gelijkvormig.
Immers $\angle BAC = \angle CAD$ en $\angle ACB = \angle ADC$ (90°).

b Omdat de driehoeken ABC en ACD gelijkvormig zijn, geldt
$\frac{AB}{AC} = \frac{BC}{CD} = \frac{AC}{AD}$ dus $AC^2 = AB \cdot AD$.

121 **a** Een vergelijking van de cirkel is $x^2 + y^2 = r^2$.
Als $C(p, q)$ op de cirkel ligt, geldt dus $p^2 + q^2 = r^2$.

b $AB = 2r$, $AD = p + r$ en $AC = \sqrt{(p + r)^2 + q^2}$.

c $AC^2 = \left(\sqrt{(p + r)^2 + q^2}\right)^2$ geeft $AC^2 = (p + r)^2 + q^2$.
$AC^2 = p^2 + 2pr + r^2 + q^2$
$AC^2 = 2pr + 2r^2$
$AB \cdot AD = 2r \cdot (p + r)$
$AB \cdot AD = 2pr + 2r^2$
Dus geldt $AC^2 = AB \cdot AD$.

122 **a** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ dus is $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Dan is $C(5 + 2, 1 + 4)$ en $D(1 + 2, 3 + 4)$ ofwel $C(7, 5)$ en $D(3, 7)$.

b Uit $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$ en $m_4 = 6$ volgt $m = 12$.
$\vec{z} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{12}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{12}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{6}{12}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{OZ} = \frac{1}{12}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 \\ 42 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 50 \\ 62 \end{pmatrix}$
De coördinaten van het zwaartepunt zijn $Z\left(4\frac{1}{6}, 5\frac{1}{6}\right)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c Dan is $m = 3 + m_4$ en geldt

$\vec{z} = \frac{1}{3+m_4}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{3+m_4}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3+m_4}\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix} + \frac{m_4}{3+m_4}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\frac{1}{2}\\5\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\frac{1}{3+m_4}\begin{pmatrix}1+5+7+3m_4\\3+1+5+7m_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\frac{1}{2}\\5\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\frac{1}{3+m_4}\begin{pmatrix}13+3m_4\\9+7m_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\frac{1}{2}\\5\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$13 + 3m_4 = 3\frac{1}{2}(3 + m_4)$ en $9 + 7m_4 = 5\frac{1}{2}(3 + m_4)$

$13 + 3m_4 = 10\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}m_4$ en $9 + 7m_4 = 16\frac{1}{2} + 5\frac{1}{2}m_4$

$\frac{1}{2}m_4 = 2\frac{1}{2}$ en $1\frac{1}{2}m_4 = 7\frac{1}{2}$

$m_4 = 5$

123 **a** $x_Z = \frac{1}{3}(5 + 8 + 11) = 8$ en $y_Z = \frac{1}{3}(2 + -2 + 9) = 3$

De coördinaten van het zwaartepunt zijn $Z(8, 3)$.

b Punt S is het midden van zijde AB. Dus $S\left(6\frac{1}{2}, 0\right)$.

$CS = \sqrt{\left(4\frac{1}{2}\right)^2 + 9^2} = \sqrt{101\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{405} = 4\frac{1}{2}\sqrt{5}$

Het zwaartepunt verdeelt de zwaartelijn in twee delen in verhouding 1 : 2.

Dus $CZ = \frac{2}{3} \cdot 4\frac{1}{2}\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$.

124 **a** $x_Z = \frac{1}{3}(0 + 4 + p) = 1\frac{1}{3} + \frac{1}{3}p$ en $y_Z = \frac{1}{3}(6 + 0 + 9) = 5$

Alle punten Z hebben dezelfde y-coördinaat en liggen dus op een horizontale lijn. Een vergelijking van die lijn is $y = 5$.

b $C(p, 9)$ en $Z\left(1\frac{1}{3} + \frac{1}{3}p, 5\right)$ geeft $CZ = \sqrt{\left(p - 1\frac{1}{3} - \frac{1}{3}p\right)^2 + (9 - 5)^2}$.

Uit $CZ = 6\frac{2}{3}$ volgt: $\sqrt{\left(\frac{2}{3}p - 1\frac{1}{3}\right)^2 + 16} = 6\frac{2}{3}$.

$\left(\frac{2}{3}p - 1\frac{1}{3}\right)^2 + 16 = \left(\frac{20}{3}\right)^2$

$\frac{4}{9}p^2 - \frac{16}{9}p + \frac{16}{9} + 16 = \frac{400}{9}$

$4p^2 - 16p + 16 + 144 = 400$

$p^2 - 4p - 60 = 0$

$(p + 6)(p - 10) = 0$

$p = -6$ of $p = 10$

125 **a** Als $\triangle ABC$ een rechthoekige driehoek is, dan is één van de zijden een middellijn van de cirkel (*Thales*).

Zijde AB kan niet een middellijn zijn.

Als zijde BC een middellijn is, dan is C het punt $(0, 8)$.

Als zijde AC een middellijn is, dan is C het punt $(-4, 6)$. Spiegel daartoe punt $A(4, 0)$ in het middelpunt $(0, 3)$ van de cirkel.

b Omdat $AB = AC$, ligt punt C ook op de cirkel met middelpunt $A(4, 0)$ en straal $AB = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$.

Een vergelijking van deze cirkel is $(x - 4)^2 + y^2 = 20$.

$x^2 + (y - 3)^2 = 25$ herleid je tot $x^2 + y^2 - 6y + 9 = 25$ of ook $x^2 + y^2 - 6y = 16$.

$(x - 4)^2 + y^2 = 20$ herleid je tot $x^2 - 8x + 16 + y^2 = 20$ of ook $x^2 + y^2 - 8x = 4$.

De vergelijkingen van elkaar aftrekken geeft $8x - 6y = 12$ ofwel $8x = 6y + 12$

dus $x = \frac{3}{4}y + 1\frac{1}{2}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Invullen bij $(x-4)^2+y^2=20$ geeft $\left(\frac{3}{4}y+1\frac{1}{2}-4\right)^2+y^2=20$.

$\left(\frac{3}{4}y-2\frac{1}{2}\right)^2+y^2=20$

$\frac{9}{16}y^2-3\frac{3}{4}y+6\frac{1}{4}+y^2=20$

$1\frac{9}{16}y^2-3\frac{3}{4}y-13\frac{3}{4}=0$

$25y^2-60y-220=0$

$5y^2-12y-44=0$

$D=(-12)^2-4\cdot5\cdot-44=1024$

$y=\frac{12+32}{10}=4\frac{2}{5}$ of $y=\frac{12-32}{10}=-2$

$y=-2$ levert punt B op.

$y=4\frac{2}{5}$ geeft $x=\frac{3}{4}\cdot4\frac{2}{5}+1\frac{1}{2}=4\frac{4}{5}$

De coördinaten van C zijn $\left(4\frac{4}{5}, 4\frac{2}{5}\right)$.

126 Een vergelijking van c is $(x-1)^2+(y-7)^2=25$.
$x=t$ en $y=2t$ invullen geeft $(t-1)^2+(2t-7)^2=25$.
$t^2-2t+1+4t^2-28t+49=25$
$5t^2-30t+25=0$
$t^2-6t+5=0$
$(t-1)(t-5)=0$
$t=1$ of $t=5$
De snijpunten zijn (1, 2) en (5, 10).

127 **a** Als P op lijn k ligt, dan zijn A, B en P niet de hoekpunten van een driehoek.
In dat geval is P het snijpunt van de lijnen k en m.

De richtingscoëfficiënt van lijn k is $\frac{0-10}{40-0}=-\frac{1}{4}$.

Een vergelijking van k is $y=-\frac{1}{4}x+10$.

Snijden met m geeft $30-3t=-\frac{1}{4}(18+5t)+10$.

$30-3t=-4\frac{1}{2}-1\frac{1}{4}t+10$

$-1\frac{3}{4}t=-24\frac{1}{2}$
$t=14$
De coördinaten van P zijn $(18+5\cdot14,\ 30-3\cdot14)$ ofwel $(88, -12)$.

b Als $\angle APB=90°$ dan is $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$.
$\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}18+5t\\20-3t\end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{BP}=\begin{pmatrix}-22+5t\\30-3t\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}18+5t\\20-3t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-22+5t\\30-3t\end{pmatrix}=0$

$(18+5t)(-22+5t)+(20-3t)(30-3t)=0$
$-396+90t-110t+25t^2+600-60t-90t+9t^2=0$
$34t^2-170t+204=0$
$t^2-5t+6=0$
$(t-3)(t-2)=0$
$t=3$ of $t=2$
$t=2$ geeft $P(28, 24)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

$AP = \sqrt{28^2 + 14^2} = \sqrt{980}$ en $BP = \sqrt{12^2 + 24^2} = \sqrt{720}$
Als $t = 2$, dan is $\triangle ABP$ wel rechthoekig, maar niet gelijkbenig.
$t = 3$ geeft $P(33, 21)$.

$AP = \sqrt{33^2 + 11^2} = \sqrt{1210}$ en $BP = \sqrt{7^2 + 21^2} = \sqrt{490}$
Als $t = 3$, dan is $\triangle ABP$ wel rechthoekig, maar niet gelijkbenig.
Conclusie: er is geen punt P zó dat $\triangle ABP$ een rechte hoek heeft bij P én gelijkbenig is.

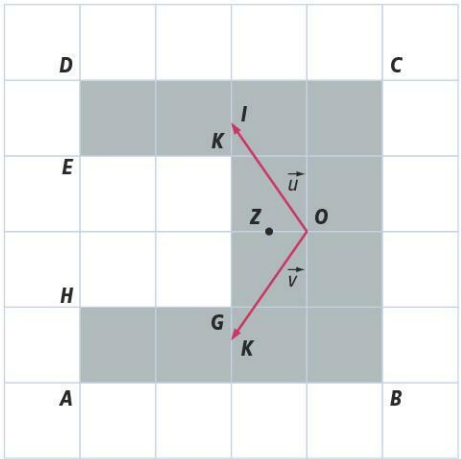
128 **a** Een vergelijking van c is $(x - 14)^2 + (y - 8)^2 = 100$.
Snijden met de x-as geeft $(x - 14)^2 + (0 - 8)^2 = 100$.
$(x - 14)^2 + 64 = 100$
$(x - 14)^2 = 36$
$x - 14 = -6$ of $x - 14 = 6$
$x = 8$ of $x = 20$
De snijpunten zijn $A(8, 0)$ en $B(20, 0)$.
$m = m_1 + m_2 = 3 + 1 + 2 = 6$

$$\vec{z} = \tfrac{3}{6} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{2}{6} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

De coördinaten van het zwaartepunt zijn $(12, 2\frac{2}{3})$.

b Noem P de projectie van M op de x-as, dan is $P(14, 0)$.
Noem r de straal van cirkel d, dan geldt:
$NP = 14 - r$
$PM = 8$
$NM = r + 10$ (*rakende cirkels*)
Verder is $\triangle NPM$ rechthoekig, dus geldt
$PN^2 + PM^2 = NM^2$ (*Pythagoras*)
$(14 - r)^2 + 8^2 = (r + 10)^2$
$196 - 28r + r^2 + 64 = r^2 + 20r + 100$
$-48r = -160$
$r = 3\frac{1}{3}$
De straal van cirkel d is $3\frac{1}{3}$.

129 Verdeel de figuur in drie rechthoeken elk met oppervlakte 4.
De punten K, O en I zijn de snijpunten van de diagonalen in de respectievelijke rechthoeken.
Dan geldt $\vec{z} = \frac{4}{12} \cdot \overrightarrow{OO} + \frac{4}{12} \cdot \overrightarrow{OI} + \frac{4}{12} \cdot \overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v})$.



© Noordhoff Uitgevers bv

130 **a** De raaklijn voldoet aan de vergelijking $y = ax + 4$ ofwel $ax - y + 4 = 0$.

Dan $d(M, k) = \dfrac{|2a - 0 + 4|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2$.

$|2a + 4| = 2\sqrt{a^2 + 1}$

$4a^2 + 16a + 16 = 4a^2 + 4$
$16a = -12$
$a = -\frac{3}{4}$

De vergelijking van lijn k is $k: y = -\frac{3}{4}x + 4$.

Lijn k snijden met de x-as geeft $-\frac{3}{4}x + 4 = 0$.

$-\frac{3}{4}x = -4$ geeft $x = 5\frac{1}{3}$.

De x-coördinaat van S is $5\frac{1}{3}$.

b Het punt A heeft coördinaten (a, pa).
Omdat A op de gegeven cirkel $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ ligt moet gelden
$(a - 2)^2 + (pa)^2 = 4$.
Omdat $OA = 3$ moet gelden $a^2 + (pa)^2 = 9$.
$(pa)^2 = 9 - a^2$ substitueren in $(a - 2)^2 + (pa)^2 = 4$ geeft
$(a - 2)^2 + 9 - a^2 = 4$
$a^2 - 4a + 4 + 9 - a^2 = 4$
$-4a = -9$
$a = \frac{9}{4}$
Dit laatste invullen in $a^2 + (pa)^2 = 9$ geeft $\frac{81}{16} + \frac{81}{16}p^2 = 9$.
$81 + 81p^2 = 144$
$81p^2 = 63$
$p^2 = \frac{63}{81} = \frac{7}{9}$

$p = \frac{1}{3}\sqrt{7}$ $(p > 0)$

131 **a** Er geldt $c_3: x^2 + (y - m)^2 = r^2$ (middelpunt $(m, 0)$ en straal r)
c_3 raakt c_1 dus $m = r + 3$ ofwel $r = m - 3$.

c_3 raakt c_2 dus $m^2 + 15^2 = (r + 12)^2$ ofwel $r = \sqrt{m^2 + 225} - 12$.

Uit $\sqrt{m^2 + 225} - 12 = m - 3$ volgt $\sqrt{m^2 + 225} = m + 9$.
$m^2 + 225 = m^2 + 18m + 81$
$18m = 144$
$m = 8$
$r = m - 3$ dus $r = 5$ en $c_3: x^2 + (y - 8)^2 = 25$.

b De verticale (inwendige) raaklijn heeft vergelijking $x = 3$.
De andere (uitwendige) raaklijnen voldoen aan de vergelijking $l: y = ax + b$
ofwel $ax - y + b = 0$.
Er geldt $d((0, 0), l) = 3$ en $d((15, 0), l) = 12$.
Dat geeft $\dfrac{|a \cdot 0 - 0 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 3$ en $\dfrac{|a \cdot 15 - 0 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 12$.

$|b| = 3\sqrt{a^2 + 1}$ en $|15a + b| = 12\sqrt{a^2 + 1}$

$4 \cdot |b| = 12\sqrt{a^2 + 1}$ substitueren bij $|15a + b| = 12\sqrt{a^2 + 1}$ geeft $4|b| = |15a + b|$.

$4b = 15a + b$ of $4b = -15a - b$
$3b = 15a$ of $5b = -15a$
$b = 5a$ of $b = -3a$

© Noordhoff Uitgevers bv

Invullen van $b = -3a$ in $|b| = 3\sqrt{a^2 + 1}$ geeft $|-3a| = 3\sqrt{a^2 + 1}$.

$9a^2 = 9(a^2 + 1)$ dus $a^2 = a^2 + 1$. Dit heeft geen oplossing.

Invullen van $b = 5a$ in $|b| = 3\sqrt{a^2 + 1}$ geeft $|5a| = 3\sqrt{a^2 + 1}$.

$25a^2 = 9(a^2 + 1)$ dus $25a^2 = 9a^2 + 9$.
$16a^2 = 9$

$a^2 = \frac{9}{16}$ |

$a = \frac{3}{4}$ of $a = -\frac{3}{4}$

$a = \frac{3}{4}$ geeft $b = 5 \cdot \frac{3}{4} = 3\frac{3}{4}$

$a = -\frac{3}{4}$ geeft $b = 5 \cdot -\frac{3}{4} = -3\frac{3}{4}$

Vergelijkingen van de raaklijnen zijn $x = 3$, $y = \frac{3}{4}x + 3\frac{3}{4}$ en $y = -\frac{3}{4}x - 3\frac{3}{4}$.

Bewegingsvergelijkingen

132 Bijvoorbeeld $\begin{cases} x(t) = -3 + 4\cos(t) \\ y(t) = 5 + 4\sin(t) \end{cases}$

In het algemeen geldt $\begin{cases} x(t) = -3 + 4\cos(pt) \\ y(t) = 5 + 4\sin(pt) \end{cases}$ voor elke $p \neq 0$.

De waarde van p bepaalt de snelheid en de richting waarmee een punt de cirkel doorloopt.

133 **a** Uit $\frac{1}{2}t \cdot \sin(t) = 0$ volgt $t = k \cdot \pi$ met k geheel.

Dan geldt $x(k\pi) = k \cdot \frac{1}{2}\pi\cos(k\pi)$.
Merk op dat de even waarden van k bij de snijpunten met de positieve x-as horen: $x(2) = \pi \cdot \cos(2\pi) = \pi$, $x(4) = 2\pi \cdot \cos(4\pi) = 2\pi$, $x(6) = 3\pi \cdot \cos(6\pi) = 3\pi$ etc.
Twee opeenvolgende even getallen kun je schrijven als $2p$ en $2p + 2$ met p een geheel getal. De afstand tussen twee opeenvolgende snijpunten met de positieve x-as is
$x((2p + 2)\pi) - x(2p\pi) = (2p + 2) \cdot \frac{1}{2}\pi\cos((2p + 2)\pi) - 2p \cdot \frac{1}{2}\pi\cos(2p\pi) =$
$(p + 1) \cdot \pi\cos((2p + 2)\pi) - p \cdot \pi\cos(2k\pi) = (p + 1) \cdot \pi \cdot 1 - p \cdot \pi \cdot 1 = \pi$.
De afstand tussen twee opeenvolgende snijpunten met de positieve x-as is dus steeds gelijk aan π.

b Dan geldt: $(x(t))^2 + (y(t))^2 = 10^2$ dus $\left(\frac{1}{2}t \cdot \cos(t)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}t \cdot \sin(t)\right)^2 = 100$.

$\frac{1}{4}t^2 \cdot \cos^2(t) + \frac{1}{4}t^2 \cdot \sin^2(t) = 100$

$\frac{1}{4}t^2 \cdot (\cos^2(t) + \sin^2(t)) = 100$

$\frac{1}{4}t^2 \cdot 1 = 100$
$t^2 = 400$
$t = -20$ of $t = 20$
Alleen $t = 20$ voldoet.

© Noordhoff Uitgevers bv

134 **a** Uit $3\cos(3t) = 0$ volgt $3t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ dus $t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$.

$t = \frac{1}{6}\pi$ geeft $y\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -3\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -3 \cdot \frac{1}{2} = -1\frac{1}{2}$. Dus punt $\left(0, -1\frac{1}{2}\right)$.

$t = \frac{1}{2}\pi$ geeft $y\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -3\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -3 \cdot 1 = -3$. Dus punt $(0, -3)$.

$t = \frac{5}{6}\pi$ geeft $y\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -3\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -3 \cdot \frac{1}{2} = -1\frac{1}{2}$. Dus punt $\left(0, -1\frac{1}{2}\right)$.

$t = 1\frac{1}{6}\pi$ geeft $y\left(1\frac{1}{6}\pi\right) = -3\sin\left(1\frac{1}{6}\pi\right) = -3 \cdot -\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$. Dus punt $\left(0, 1\frac{1}{2}\right)$.

$t = 1\frac{1}{2}\pi$ geeft $y\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = -3\sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = -3 \cdot -1 = 3$. Dus punt $(0, 3)$.

$t = 1\frac{5}{6}\pi$ geeft $y\left(1\frac{5}{6}\pi\right) = -3\sin\left(1\frac{5}{6}\pi\right) = -3 \cdot -\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$. Dus punt $\left(0, 1\frac{1}{2}\right)$.

b $\frac{dx}{dt} = -9\sin(3t)$ en $\frac{dy}{dt} = -3\cos(t)$

In een punt met een verticale raaklijn geldt $\frac{dx}{dt} = 0$ en $\frac{dy}{dt} \neq 0$.

$-9\sin(3t) = 0$ geeft $3t = k \cdot \pi$ ofwel $t = k \cdot \frac{1}{3}\pi$.

Voor deze waarden van t geldt $\frac{dy}{dt} \neq 0$.

Het punt in het eerste kwadrant met een verticale raaklijn hoort bij $t = 1\frac{1}{3}\pi$.
Dus is het gezochte punt
$\left(3\cos\left(3 \cdot 1\frac{1}{3}\pi\right), -3\sin\left(1\frac{1}{3}\pi\right)\right) = (3\cos(4\pi), -3\sin\left(1\frac{1}{3}\pi\right) = \left(3, 1\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

c Uit $3\cos(3t) = -3\sin(t)$ volgt $\cos(3t) = -\sin(t)$.
$\cos(3t) = \sin(-t)$

$\cos(3t) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - -t\right)$

$\cos(3t) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi + t\right)$

$3t = \frac{1}{2}\pi + t + k \cdot 2\pi$ of $3t = -\frac{1}{2}\pi - t + k \cdot 2\pi$

$2t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $4t = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$ of $t = -\frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

De gezochte waarden van t zijn $t = \frac{1}{4}\pi$, $t = 1\frac{1}{4}\pi$, $t = \frac{3}{8}\pi$, $t = \frac{7}{8}\pi$, $t = 1\frac{3}{8}\pi$ en $t = 1\frac{7}{8}\pi$.

135 De snelheidsvector is $\vec{v} = \begin{pmatrix} t^2 - 2t \\ 2t - 2 \end{pmatrix}$.

Als $t = 3$ dan is de snelheidsvector $\overrightarrow{v(3)} = \begin{pmatrix} 3^2 - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

De baansnelheid op $t = 3$ is $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

De baansnelheid is $|\vec{v}| = \sqrt{(t^2 - 2t)^2 + (2t - 2)^2}$.

$|\vec{v}| = \sqrt{t^4 - 4t^3 + 4t^2 + 4t^2 - 8t + 4}$.

$|\vec{v}| = \sqrt{t^4 - 4t^3 + 8t^2 - 8t + 4}$

De baanversnelling is $v'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t^4 - 4t^3 + 8t^2 - 8t + 4}} \cdot (4t^3 - 12t^2 + 16t - 8)$.

$v'(t) = \frac{2t^3 - 6t^2 + 8t - 4}{\sqrt{t^4 - 4t^3 + 8t^2 - 8t + 4}}$

Als $t = 3$ dan is de baanversnelling $v'(3) = \frac{2 \cdot 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 - 4}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$.

© Noordhoff Uitgevers bv

136 **a** Uit $2\cos(t) = 0$ volgt $t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

Bij het snijpunt met de positieve y-as hoort $t = 1\frac{1}{2}\pi$.

De snelheidsvector is $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ -\sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right) \end{pmatrix}$.

Bij $t = 1\frac{1}{2}\pi$ hoort de snelheidsvector

$\begin{pmatrix} -2\sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right) \\ -\sin\left(1\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{4}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right) \\ -\sin\left(1\frac{3}{4}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Bij $t = 1\frac{1}{2}\pi$ is de baansnelheid $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

b De baansnelheid is $|\vec{v}| = \sqrt{(-2\sin(t))^2 + \left(-\sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)\right)^2}$.

$|\vec{v}| = \sqrt{4\sin^2(t) + \sin^2\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)}$

De baanversnelling is

$v'(t) = \frac{1}{2\sqrt{4\sin^2(t) + \sin^2\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)}} \cdot \left(8\sin(t)\cos(t) + 2\sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)\cos\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)\right)$

$v'(t) = \frac{4\sin(t)\cos(t) + \sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)\cos\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)}{\sqrt{4\sin^2(t) + \sin^2\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)}}$.

Bij $t = \pi$ is de baanversnelling

$\frac{4\sin(\pi)\cos(\pi) + \sin\left(1\frac{1}{4}\pi\right)\cos\left(1\frac{1}{4}\pi\right)}{\sqrt{4\sin^2(\pi) + \sin^2\left(1\frac{1}{4}\pi\right)}} = \frac{0 + -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{0 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

137 **a** De snelheidsvector is $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3\sin(t) \\ 4cos(t) \end{pmatrix}$.

Op $t = \frac{1}{6}\pi$ is de snelheidsvector $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) \\ 4cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\frac{1}{2} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

De richtingscoëfficiënt van de snelheidsvector is $\frac{2\sqrt{3}}{-1\frac{1}{2}} = -\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

$\tan(\alpha) = \frac{4}{3}\sqrt{3}$ geeft $\alpha = 66{,}586\ldots°$

De snelheidsvector maakt op het tijdstip $t = \frac{1}{6}\pi$ een hoek van ongeveer 67° met de positieve x-as.

b De baansnelheid is $|\vec{v}| = \sqrt{(-3\sin(t))^2 + (4cos(t))^2} = \sqrt{9\sin^2(t) + 16\cos^2(t)}$.

De baansnelheid op $t = \frac{1}{6}\pi$ is

$|\vec{v}| = \sqrt{9\sin^2\left(\frac{1}{6}\pi\right) + 16\cos^2\left(\frac{1}{6}\pi\right)} = \sqrt{9 \cdot \frac{1}{4} + 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{2\frac{1}{4} + 12} = \sqrt{14\frac{1}{4}}$.

De baanversnelling is $v'(t) = \frac{18\sin(t)\cos(t) - 32\cos(t) \cdot \sin(t)}{2\sqrt{9\sin^2(t) + 16\cos^2(t)}}$ ofwel

$v'(t) = \frac{-7\cos(t) \cdot \sin(t)}{\sqrt{9\sin^2(t) + 16\cos^2(t)}}$

De baanversnelling bij $t = \frac{1}{6}\pi$ is

$v'\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{-7\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)}{\sqrt{9\sin^2\left(\frac{1}{6}\pi\right) + 16\cos^2\left(\frac{1}{6}\pi\right)}} = \frac{-7 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{9 \cdot \frac{1}{4} + 16 \cdot \frac{3}{4}}} = -\frac{7\sqrt{3}}{4\sqrt{\frac{57}{4}}} = -\frac{7\sqrt{3}}{2\sqrt{57}} = -\frac{7}{2\sqrt{19}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

c Als de baanversnelling 0 is dan heeft de baansnelheid een uiterste waarde.

$\frac{-7\cos(t) \cdot \sin(t)}{\sqrt{9\sin^2(t) + 16\cos^2(t)}} = 0$ geeft $\sin(t) = 0$ of $\cos(t) = 0$.

Voor $0 \le t \le 2\pi$ geeft dit $t = 0$ of $t = \frac{1}{2}\pi$ of $t = \pi$ of $t = 1\frac{1}{2}\pi$ of $t = 2\pi$.

Voor $t = 0$, π en 2π is de baansnelheid $\sqrt{9\sin^2(0) + 16\cos^2(0)} = \sqrt{0 + 16} = 4$.

Voor $t = \frac{1}{2}\pi$ en $1\frac{1}{2}\pi$ is de baansnelheid $\sqrt{9\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\right) + 16\cos^2\left(\frac{1}{2}\pi\right)} = \sqrt{9 + 0} = 3$.
Conclusie: de maximale baansnelheid is 4.

d $OP = \sqrt{9\cos^2(t) + 16\sin^2(t)}$

$OP = 12\frac{1}{2}$ geeft $9\cos^2(t) + 16\sin^2(t) = 12\frac{1}{2}$.

$9\cos^2(t) + 9\sin^2(t) + 7\sin^2(t) = 12\frac{1}{2}$

$9 + 7\sin^2(t) = 12\frac{1}{2}$

$7\sin^2(t) = 3\frac{1}{2}$

$\sin^2(t) = \frac{1}{2}$

$\sin(t) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ of $\sin(t) = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Voor $0 \le t \le 2\pi$ geeft dit $t = \frac{1}{4}\pi$ of $t = \frac{3}{4}\pi$ of $t = 1\frac{1}{4}\pi$ of $t = 1\frac{3}{4}\pi$.

138 **a** Snijden met de x-as geeft $y = 0$ dus $\sin(2t) - \sin(t) = 0$.
$\sin(2t) = \sin(t)$
$2t = t + k \cdot 2\pi$ of $2t = \pi - t + k \cdot 2\pi$
$t = k \cdot 2\pi$ of $3t = \pi + k \cdot 2\pi$
$t = k \cdot 2\pi$ of $t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
Voor $0 \le t \le 2\pi$ geeft dit $t = 0$ of $t = \frac{1}{3}\pi$ of $t = \pi$ of $t = 1\frac{2}{3}\pi$ of $t = 2\pi$.
Op $t = \frac{1}{3}\pi$ ligt P links van de y-as.

De x-coördinaat van P is dan $x\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) - \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

b $x'(t) = -2\sin(2t) - 2\cos(2t)$
$y'(t) = 2\cos(2t) - \cos(t)$

De snelheidsvector op $t = 0$ is $\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De snelheidsvector op $t = \pi$ is $\begin{pmatrix} x'(\pi) \\ y'(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Noem φ de hoek tussen deze twee snelheidsvectoren, dan geldt

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{65}}$$

$\varphi = 29{,}744\ldots°$
De hoek tussen deze snelheidsvectoren is ongeveer 29,7°.

© Noordhoff Uitgevers bv

139 **a** $x'(t) = 6t + 1$
$y'(t) = 6t - 1$

$v(t) = \sqrt{(6t + 1)^2 + (6t - 1)^2}$

$v(t) = \sqrt{36t^2 + 12t + 1 + 36t^2 - 12t + 1}$

$v(t) = \sqrt{72t^2 + 2}$

$v'(t) = \dfrac{144t}{2\sqrt{72t^2 + 2}} = \dfrac{72t}{\sqrt{72t^2 + 2}}$

$v'(t) = 0$ geeft $t = 0$.

De minimale snelheid is $v(0) = \sqrt{72 \cdot 0^2 + 2} = \sqrt{2}$.

b $y(t) = 0$ geeft $at^2 - t + 1 = 0$.
Deze vergelijking moet één oplossing hebben, dus $D = 0$.
$D = (-1)^2 - 4 \cdot a \cdot 1 = 1 - 4a$
$D = 0$ geeft $1 - 4a = 0$.

$a = \frac{1}{4}$

140 **a** In punt A geldt $1 - t^2 = 0$.
$t^2 = 1$
$t = -1$ of $t = 1$
$t = -1$ geeft punt $(0, 0)$.
$t = 1$ geeft punt $A(0, 4)$.
$x'(t) = -2t$ en $y'(t) = 2(1 + t)$
$x'(1) = -2 \cdot 1 = -2$ en $y'(1) = 2(1 + 1) = 4$

De snelheid in A is $\sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20}\ (=2\sqrt{5})$.

b $x = 1 - t^2$ en $y = (1 + t)^2$ invullen in $(x + y)^2 = 4y$ geeft
$(1 - t^2 + (1 + t)^2)^2 = 4(1 + t)^2$
$(1 - t^2 + 1 + 2t + t^2)^2 = 4(1 + 2t + t^2)$
$(2 + 2t)^2 = 4 + 8t + 4t^2$ en dat klopt voor iedere waarde van t, dus voor iedere waarde van t ligt P op de kromme met vergelijking $(x + y)^2 = 4y$.

141 **a** $x'(t) = -\sin(t) + 2\cos(2t)$
$y'(t) = -2\sin(t)$

$v(t) = \sqrt{(-\sin(t) + 2\cos(2t))^2 + (-2\sin(t))^2}$
Het maximum van v berekenen met de rekenmachine:

Invoer: $y_1 = \sqrt{(-\sin(x) + 2\cos(2x))^2 + (-2\sin(x))^2}$
Venster: $0 \le x \le 2\pi$, $0 \le y \le 5$
Optie: maximum geeft $x \approx 1{,}571$ en $y \approx 3{,}606$.
De maximale snelheid van P is ongeveer 3,6 meter per seconde.

b Voor de punten O, A en B geldt $y = x$ dus $\cos(t) + \sin(2t) = 2\cos(t)$.
$\cos(t) + 2\sin(t)\cos(t) = 2\cos(t)$
$-\cos(t) + 2\sin(t)\cos(t) = 0$
$\cos(t)(2\sin(t) - 1) = 0$
$\cos(t) = 0$ of $2\sin(t) = 1$
$\cos(t) = 0$ of $\sin(t) = \frac{1}{2}$
$\cos(t) = 0$ geeft $x = 0$ en $y = 0$, dus punt O.
$\sin(t) = \frac{1}{2}$ geeft $t = \frac{1}{6}\pi$ of $t = \frac{5}{6}\pi$.
De beweging van A naar B duurt $\frac{5}{6}\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{4}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi$ seconden.

© Noordhoff Uitgevers bv

c De helling van lijnstuk PQ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos(t+\pi) - 2\cos(t)}{\cos(t+\pi) + \sin(2(t+\pi)) - (\cos(t) + \sin(2t))}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos(t+\pi) - 2\cos(t)}{\cos(t+\pi) + \sin(2t+2\pi) - \cos(t) - \sin(2t)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos(t+\pi) - 2\cos(t)}{\cos(t+\pi) + \sin(2t) - \cos(t) - \sin(2t)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2(\cos(t+\pi) - \cos(t))}{\cos(t+\pi) - \cos(t)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \text{ (voor elke waarde van } t \text{ met } \cos(t) \neq 0)$$

Dus de helling van lijnstuk PQ is onafhankelijk van t.

© Noordhoff Uitgevers bv

19 Bewegingsvergelijkingen

2 **a** Beginpunt $t = -10$ geeft:
$x(-10) = -12 + 1\frac{1}{2} \cdot -10 = -27$ en $y(-10) = 6 + 2\frac{1}{2} \cdot -10 = -19$
Het beginpunt is het punt $(-27, -19)$.
Eindpunt $t = 10$ geeft:
$x(10) = -12 + 1\frac{1}{2} \cdot 10 = 3$ en $y(10) = 6 + 2\frac{1}{2} \cdot 10 = 31$
Het eindpunt is het punt $(3, 31)$.

b $y = 6 + 2\frac{1}{2}t$ geeft $2\frac{1}{2}t = y - 6$ dus $t = \frac{2}{5}y - 2\frac{2}{5}$.
Dit substitueren in $x = -12 + 1\frac{1}{2}t$ geeft
$x = -12 + 1\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}y - 2\frac{2}{5}\right)$

c $x = -12 + \frac{3}{5}y - 3\frac{3}{5}$
$x - \frac{3}{5}y = -15\frac{3}{5}$
$5x - 3y = -78$

6 **a** $(x + 10)^2 + (y - 7)^2 = 64$

b $(x - 1)^2 + (y - 6)^2 = 25$

c $(x + 5)^2 + (y + 12)^2 = 169$

10 **a** $x(t) = 0$ geeft $\sqrt{t^2 + 4t} = 0$
$t^2 + 4t = 0$
$t(t + 4) = 0$
$t = 0$ of $t = -4$
$t = 0$ geeft het punt $(0, -36)$ en $t = -4$ het punt $(0, -112)$.
Bij A hoort het punt $(0, -36)$.
$y(t) = 0$ geeft $-t^2 + 15t - 36 = 0$
$t^2 - 15t + 36 = 0$
$(t - 3)(t - 12) = 0$
$t = 3$ of $t = 12$
$t = 3$ geeft het punt $(\sqrt{21}, 0)$ en $t = 12$ het punt $(\sqrt{192}, 0)$.
Bij B hoort het punt $(\sqrt{192}, 0)$.

b $x'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t^2 + 4t}} \cdot (2t + 4)$ ofwel $x'(t) = \dfrac{t + 2}{\sqrt{t^2 + 4t}}$
$x'(t) = 0$ geeft $t = -2$ (voldoet niet omdat $0 \le t \le 12$)
$y'(t) = -2t + 15$
$y'(t) = 0$ geeft $t = 7\frac{1}{2}$
De raaklijn is horizontaal als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$, dus als $t = 7\frac{1}{2}$.
Daarbij hoort het punt $\left(\sqrt{86\frac{1}{4}}, 20\frac{1}{4}\right)$.
De raaklijn is verticaal als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$, dus als $t = -2$.
Voor $t = -2$ is de kromme niet gedefinieerd, dus is er geen verticale raaklijn.

15 $t = a$ geeft het punt $A\left(a^2 + \cos(a), -\frac{1}{2}a^3 + 6a\right)$.
$t = -a$ geeft het punt $B\left((-a)^2 + \cos(-a), -\frac{1}{2}(-a)^3 + 6 \cdot -a\right)$ ofwel
$B\left(a^2 + \cos(a), \frac{1}{2}a^3 - 6a\right)$ ofwel $B\left(a^2 + \cos(a), -\left(-\frac{1}{2}a^3 + 6a\right)\right)$.
$x_B = x_A$ en $y_B = -y_A$ dus B is het spiegelbeeld van A in de x-as en daarom is de baan van P symmetrisch in de x-as.

© Noordhoff Uitgevers bv

19 **a** $y(t) = 0$ geeft $\frac{1}{2}t^3 - 2t = 0$

$\frac{1}{2}t(t^2 - 4) = 0$

$\frac{1}{2}t = 0$ of $t^2 - 4 = 0$

$t = 0$ of $t = 2$ of $t = -2$

$x(0) = 9$ en $x(2) = x(-2) = 5$

$t = 0$ geeft het punt $(9, 0)$, dit is punt B

$t = 2$ en $t = -2$ geven het punt $(5, 0)$, dit is punt A.

b $x(t) = 0$ geeft $9 - t^2 = 0$

$t^2 = 9$

$t = 3$ of $t = -3$

$y(3) = 7\frac{1}{2}$ en $y(-3) = -7\frac{1}{2}$

Dus $C\left(0, 7\frac{1}{2}\right)$ en $D\left(0, -7\frac{1}{2}\right)$.

c $x'(t) = -2t$

$y'(t) = 1\frac{1}{2}t^2 - 2$

De snelheidsvector in punt A op $t = 2$ geeft $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ en op $t = -2$ geeft $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

De snelheidsvector in punt B op $t = 0$ geeft $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

d $\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ dus de hoek tussen de snelheidsvectoren is 90° en de hoek die ze met de x-as maken is daarom 45°.

e $t = 0$ geeft $|\vec{v}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$.

$t = 2$ geeft $|\vec{v}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

Ook op $t = -2$ geldt $|\vec{v}| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

22 Voor de eerste kromme geldt:

$x(t) = 2$ geeft $-t^2 + 4t + 2 = 2$

$-t^2 + 4t = 0$

$-t(t - 4) = 0$

$t = 0$ of $t = 4$

$y(0) = 5$ en $y(4) = -3$

Dus $t = 4$ hoort bij het punt $(2, -3)$.

$x'(t) = -2t + 4$

$y'(t) = 2t - 6$

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in $(2, -3)$ is $\frac{y'(4)}{x'(4)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$

Voor de tweede kromme geldt:

$x(t) = 2$ geeft $t^2 - 2t + 2 = 2$

$t^2 - 2t = 0$

$t(t - 2) = 0$

$t = 0$ of $t = 2$

$y(0) = -15$ en $y(2) = -3$

Dus $t = 2$ hoort bij het punt $(2, -3)$.

$x'(t) = 2t - 2$

$y'(t) = -2t + 8$

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in $(2, -3)$ is $\frac{y'(2)}{x'(2)} = \frac{4}{2} = 2$.

Het product van de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen is $-\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$, dus deze krommen snijden elkaar loodrecht in $(2, -3)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Dan nog het punt (5, 0).
Voor de eerste kromme geldt:
$x(t) = 5$ geeft $-t^2 + 4t + 2 = 5$
$-t^2 + 4t - 3 = 0$
$t^2 - 4t + 3 = 0$
$(t - 3)(t - 1) = 0$
$t = 3$ of $t = 1$
$y(3) = -4$ en $y(1) = 0$
Dus $t = 1$ hoort bij het punt (5, 0).
De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in (5, 0) is $\frac{y'(1)}{x'(1)} = \frac{-4}{2} = -2$

Voor de tweede kromme geldt:
$x(t) = 5$ geeft $t^2 - 2t + 2 = 5$
$t^2 - 2t - 3 = 0$
$(t - 3)(t + 1) = 0$
$t = 3$ of $t = -1$
$y(3) = 0$ en $y(-1) = -24$
Dus $t = 3$ hoort bij het punt (5, 0).
De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in (5, 0) is $\frac{y'(3)}{x'(3)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
Het product van de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen is $-2 \cdot \frac{1}{2} = -1$, dus ook in (5, 0) snijden deze krommen elkaar loodrecht.

26 **a** $x(t) = 0$ geeft $t^2 - t = 0$
$t(t - 1) = 0$
$t = 0$ of $t = 1$
$y(t) = 0$ geeft $t^3 - 3t^2 = 0$
$t^2(t - 3) = 0$
$t = 0$ of $t = 3$
De baan snijdt de assen op $t = 0$, $t = 1$ en $t = 3$.

b $x'(t) = 2t - 1$
$x'(t) = 0$ geeft $2t - 1 = 0$ dus $t = \frac{1}{2}$.
$y'(t) = 3t^2 - 6t$
De raaklijn is evenwijdig met de y-as als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$, dus als $t = \frac{1}{2}$ en $t = \frac{1}{2}$ geeft het punt $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{5}{8}\right)$

c $x(t) = 2$ geeft $t^2 - t = 2$
$t^2 - t - 2 = 0$
$(t - 2)(t + 1) = 0$
$t = 2$ of $t = -1$
$y(2) = -4$ en $y(-1) = -4$
Op $t = 2$ en op $t = -1$ passeert punt P het punt A.

d De baansnelheid is
$v = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$
$v = \sqrt{(2t - 1)^2 + (3t^2 - 6t)^2}$
$v = \sqrt{4t^2 - 4t + 1 + 9t^4 - 36t^3 + 36t^2}$
$v = \sqrt{9t^4 - 36t^3 + 40t^2 - 4t + 1}$
De baanversnelling is
$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{9t^4 - 36t^3 + 40t^2 - 4t + 1}} \cdot (36t^3 - 108t^2 + 80t - 4)$ ofwel
$\frac{dv}{dt} = \frac{18t^3 - 54t^2 + 40t - 2}{\sqrt{9t^4 - 36t^3 + 40t^2 - 4t + 1}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

e $t = 2$ geeft $v = \sqrt{144 - 288 + 160 - 8 + 1} = \sqrt{9} = 3$
$t = -1$ geeft $v = \sqrt{9 + 36 + 40 + 4 + 1} = \sqrt{90}$

f Voer in $y_1 = \sqrt{(2x - 1)^2 + (3x^2 - 6x)^2}$ met standaardvenster.
Optie minimum geeft $x = 0{,}05384\ldots$
Optie maximum geeft $x = 1{,}14693\ldots$
Optie minimum geeft $x = 1{,}79921\ldots$
De baansnelheid heeft een extreme waarde als $t \approx 0{,}05$, als $t \approx 1{,}15$ en als $t \approx 1{,}80$.
Dit levert de punten $(-0{,}051;\ -0{,}009)$, $(0{,}169;\ -2{,}438)$ en $(1{,}438;\ -3{,}887)$ op.

g Op $t = 2$ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn $\frac{y'(2)}{x'(2)} = \frac{0}{3} = 0$.
Op $t = -1$ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn $\frac{y'(-1)}{x'(-1)} = \frac{9}{-3} = -3$.
Uit $\tan(\alpha) = 3$ volgt $\alpha \approx 72°$.
De hoek tussen de raaklijnen is 72°.

29 **a** $x'(t) = 12\cos(t)$
$y'(t) = -5\sin(t)$
$v = \sqrt{(12\cos(t))^2 + (-5\sin(t))^2}$
$v = \sqrt{144\cos^2(t) + 25\sin^2(t)}$
$v = \sqrt{25\cos^2(t) + 25\sin^2(t) + 119\cos^2(t)}$
$v = \sqrt{25 + 119\cos^2(t)}$

b $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{25 + 119\cos^2(t)}} \cdot 238\cos(t) \cdot -\sin(t)$ ofwel
$\frac{dv}{dt} = \frac{-119\cos(t) \cdot \sin(t)}{\sqrt{25 + 119\cos^2(t)}}$
$\frac{dv}{dt} = 0$ als $-119\cos(t) \cdot \sin(t) = 0$ en $2\sqrt{25 + 119\cos^2(t)} \neq 0$
$\cos(t) = 0$ of $\sin(t) = 0$
$t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ of $t = k \cdot \pi$
Daarbij horen de punten $(12, 0)$, $(-12, 0)$, $(0, 5)$ en $(0, -5)$.

c De snelheid $v = \sqrt{25 + 119\cos^2(t)}$ is minimaal als $\cos(t) = 0$, dus als $t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.
Dat is in de punten $(12, 0)$ en $(-12, 0)$.

20 Goniometrische formules

2 **a** $\sin\left(\frac{1}{12}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{6}\pi\right) =$
$\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) - \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) =$
$\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} =$
$\frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$

b $\cos\left(-\frac{5}{12}\pi\right) = \cos\left(\frac{5}{12}\pi\right) = \cos\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{3}\pi\right) =$
$\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) + \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) =$
$-\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} =$
$-\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6}$

© Noordhoff Uitgevers bv

8 **a** $\cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1$
$\frac{1}{2}\cos(4x) = \cos^2(2x) - \frac{1}{2}$
dus $\cos^2(2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4x)$

b $f(x) = \cos^2(2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4x)$
Een primitieve is $F(X) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin(4x)$.

c $\int_0^{\pi} \cos^2(2x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin(4x)\right]_0^{\pi} =$
$\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{8}\cdot\sin(4\pi)\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{8}\cdot\sin(0)\right) =$
$\left(\frac{1}{2}\pi + 0\right) - (0 + 0) = \frac{1}{2}\pi$

16 **a** $\cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) = -\sin\left(2x + \frac{1}{2}\pi\right)$
$\cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) = \sin\left(-2x - \frac{1}{2}\pi\right)$
$\cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) = \cos\left(-2x - \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi\right)$
$x + \frac{1}{4}\pi = -2x - \pi + k\cdot 2\pi$ of $x + \frac{1}{4}\pi = 2x + \pi + k\cdot 2\pi$
$3x = -1\frac{1}{4}\pi + k\cdot 2\pi$ of $-x = \frac{3}{4}\pi + k\cdot 2\pi$
$x = -\frac{5}{12}\pi + k\cdot\frac{2}{3}\pi$ of $x = -\frac{3}{4}\pi - k\cdot 2\pi$

b $\sin\left(\frac{1}{4}x\right) = \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$
$\cos\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(x - \frac{1}{4}\pi)$
$\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\pi = x - \frac{1}{4}\pi + k\cdot 2\pi$ of $\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\pi = -x + \frac{1}{4}\pi + k\cdot 2\pi$
$-\frac{3}{4}x = \frac{1}{4}\pi + k\cdot 2\pi$ of $1\frac{1}{4}x = \frac{3}{4}\pi + k\cdot 2\pi$
$x = -\frac{1}{3}\pi + k\cdot 2\frac{2}{3}\pi$ of $x = \frac{3}{5}\pi + k\cdot 1\frac{3}{5}\pi$

c $\sin\left(2x - \frac{1}{4}\pi\right) = -\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$
$\cos\left(2x - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(x + \frac{2}{3}\pi\right)$
$2x - \frac{3}{4}\pi = x + \frac{2}{3}\pi + k\cdot 2\pi$ of $2x - \frac{3}{4}\pi = -x - \frac{2}{3}\pi + k\cdot 2\pi$
$x = 1\frac{5}{12}\pi + k\cdot 2\pi$ of $3x = \frac{1}{12}\pi + k\cdot 2\pi$
$x = 1\frac{5}{12}\pi + k\cdot 2\pi$ of $x = \frac{1}{36}\pi + k\cdot\frac{2}{3}\pi$

d $2\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right) = 3\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$
$2\left(1 - \cos^2\left(\frac{1}{2}x\right)\right) = 3\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$
$0 = 2\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) + 3\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - 2$
Stel $\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = p$, dit geeft
$2p^2 + 3p - 2 = 0$
$p = \frac{-3 + \sqrt{25}}{4} = \frac{1}{2}$ of $p = \frac{-3 - \sqrt{25}}{4} = -2$
$\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}$ of $\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = -2$ (geen oplossingen)
$\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}\pi + k\cdot 2\pi$ of $\frac{1}{2}x = -\frac{1}{3}\pi + k\cdot 2\pi$
$x = \frac{2}{3}\pi + k\cdot 4\pi$ of $x = -\frac{2}{3}\pi + k\cdot 4\pi$

e $-\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = \cos(3x)$
$\sin(-x + \frac{1}{3}\pi) = \cos(3x)$
$\cos\left(-x + \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(3x)$
$-x - \frac{1}{6}\pi = 3x + k\cdot 2\pi$ of $-x - \frac{1}{6}\pi = -3x + k\cdot 2\pi$
$-4x = \frac{1}{6}\pi + k\cdot 2\pi$ of $2x = \frac{1}{6}\pi + k\cdot 2\pi$
$x = -\frac{1}{24}\pi - k\cdot\frac{1}{2}\pi$ of $x = \frac{1}{12}\pi + k\cdot\pi$

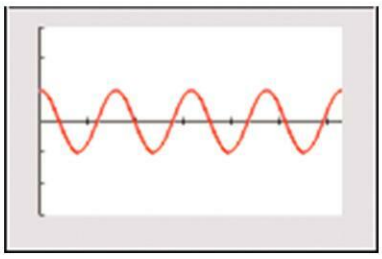
© Noordhoff Uitgevers bv

f $2\cos^2(x) + 7\sin(x) = 5$
$2(1 - \sin^2(x)) + 7\sin(x) = 5$
$0 = 2\sin^2(x) - 7\sin(x) + 3$
Stel $\sin(x) = p$, dit geeft
$2p^2 - 7p + 3 = 0$
$p = \frac{7 - \sqrt{25}}{4} = \frac{1}{2}$ of $p = \frac{7 + \sqrt{25}}{4} = 3$
$\sin(x) = \frac{1}{2}$ of $\sin(x) = 3$ (geen oplossingen)
$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

18 **a** $3\cos\left(2x - \frac{1}{4}\pi\right) = 1\frac{1}{2}$
$\cos\left(2x - \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}$
$2x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x - \frac{1}{4}\pi = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
$2x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{7}{24}\pi + k \cdot \pi$ of $x = -\frac{1}{24}\pi + k \cdot \pi$
De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $x = \frac{7}{24}\pi$, $x = 1\frac{7}{24}\pi$, $x = \frac{23}{24}\pi$ en $x = 1\frac{23}{24}\pi$.

b Zie de schets: de oplossing van $f(x) > 1\frac{1}{2}$ is
$\left[0, \frac{7}{24}\pi\right\rangle \cup \left\langle\frac{23}{24}\pi, 1\frac{7}{24}\pi\right\rangle \cup \left\langle 1\frac{23}{24}\pi, 2\pi\right]$.

c Eerst oplossen $f(x) = -1\frac{1}{2}\sqrt{3}$.
$3\cos\left(2x - \frac{1}{4}\pi\right) = -1\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\cos\left(2x - \frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$2x - \frac{1}{4}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x - \frac{1}{4}\pi = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
$2x = 1\frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x = 1\frac{5}{12}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{13}{24}\pi + k \cdot \pi$ of $x = \frac{17}{24}\pi + k \cdot \pi$
De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $x = \frac{13}{24}\pi$, $x = 1\frac{13}{24}\pi$, $x = \frac{17}{24}\pi$ en $x = 1\frac{17}{24}\pi$.
Zie de schets: de oplossing van $f(x) \leq -1\frac{1}{2}\sqrt{3}$ is $\left[\frac{13}{24}\pi, \frac{17}{24}\pi\right] \cup \left[1\frac{13}{24}\pi, 1\frac{17}{24}\pi\right]$.

22 **a**

Ja, de grafieken vallen samen.

b $f(x) = \cos(4x)$
$f(x) = \cos(2 \cdot 2x)$
$f(x) = 2\cos^2(2x) - 1$
$f(x) = 2(2\cos^2(x) - 1))^2 - 1$
$f(x) = 2(4\cos^4(x) - 4\cos^2(x) + 1) - 1$
$f(x) = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1 = g(x)$

© Noordhoff Uitgevers bv

26 **a** $f(x) = \tan(x) + \dfrac{1}{\sin(2x)}$

$f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} + \dfrac{1}{\sin(2x)}$

Er zijn verticale asymptoten als:

$\cos(x) = 0$ én $\sin(x) \neq 0$ of als $\sin(2x) = 0$.

$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ of $2x = 0 + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ of $x = 0 + k \cdot \pi$

$x = 0 + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

De verticale asymptoten op het interval $\langle 0, \pi\rangle$ zijn $x = 0$, $x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = \pi$.

De grafiek van g heeft dezelfde verticale asymptoten.

b $\tan(x) - \dfrac{1}{\sin(2x)} = 0$

$\tan(x) = \dfrac{1}{\sin(2x)}$

$\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \dfrac{1}{2\sin(x)\cos(x)}$

$2\sin^2(x)\cos(x) = \cos(x)$

$\cos(x) = 0$ of $2\sin^2(x) = 1$

$\cos(x) = 0$ of $\sin^2(x) = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2}\pi$ (voldoet niet) of $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ of $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

De oplossingen op het interval $\langle 0, \pi\rangle$ zijn $x = \frac{1}{4}\pi$ en $x = \frac{3}{4}\pi$.

c Voor de toppen van de grafiek geldt $f'(x) = 0$.

$f(x) = \tan(x) + \dfrac{1}{\sin(2x)}$

$f(x) = \tan(x) + (\sin(2x))^{-1}$

$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} + -1 \cdot (\sin(2x))^{-2} \cdot \cos(2x) \cdot 2$

$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} + \dfrac{-2\cos(2x)}{\sin^2(2x)}$

$f'(x) = 0$ als $\dfrac{1}{\cos^2(x)} = \dfrac{2\cos(2x)}{\sin^2(2x)}$

$\cos^2(x) \cdot 2\cos(2x) = \sin^2(2x)$

$\cos^2(x) \cdot 2\cos(2x) = 4\sin^2(x)\cos^2(x)$

$\cos^2(x) = 0$ (voldoet niet) of $2\cos(2x) = 4\sin^2(x)$

$2(1 - 2\sin^2(x)) = 4\sin^2(x)$

$2 - 4\sin^2(x) = 4\sin^2(x)$

$\sin^2(x) = \frac{1}{4}$

$\sin(x) = \frac{1}{2}$ of $\sin(x) = -\frac{1}{2}$

De oplossingen op het interval $\langle 0, \pi\rangle$ zijn $x = \frac{1}{6}\pi$ en $x = \frac{5}{6}\pi$.

$f\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{3}\sqrt{3} + \dfrac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{3} = \sqrt{3}$

De toppen zijn $\left(\frac{1}{6}\pi, \sqrt{3}\right)$ en $\left(\frac{5}{6}\pi, -\sqrt{3}\right)$.

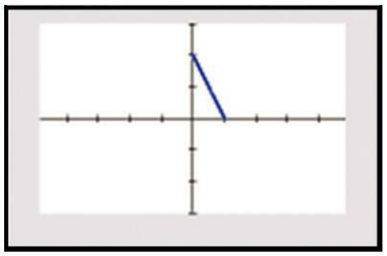
d $g'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} - \dfrac{-2\cos(2x)}{\sin^2(2x)}$

$g'\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} - \dfrac{-2 \cdot 0}{1^2} = 2$

Voor de hoek α geldt $\tan(\alpha) = 2$, dus $\alpha \approx 63°$.

© Noordhoff Uitgevers bv

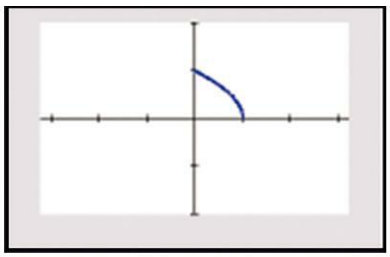
32 **a**



De eindpunten zijn (0, 2) en (1, 0). Een vergelijking is $y = -2x + 2$.
Bewijs: $x(t) = \sin^2(t)$ en $y(t) = \cos(2x) + 1$ invullen geeft
$\cos(2t) + 1 = -2\sin^2(t) + 2$
$1 - 2\sin^2(t) + 1 = -2\sin^2(t) + 2$, dit geldt voor alle waarden van t dus de punten van de baan liggen op deze lijn.

b $x(t) = \sin^2(t)$ dus $0 \le x \le 1$.

33 **a**



Voor de snijpunten met de x-as geldt $y(t) = 0$, dus
$\cos(t) = 0$
De oplossing op het interval $\left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$ is $t = \frac{1}{2}\pi$.
Het snijpunt met de x-as is (1, 0).
Voor de snijpunten met de y-as geldt $x(t) = 0$, dus
$-\frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2} = 0$
$\cos(2t) = 1$
$2t = 0 + k \cdot 2\pi$
$t = 0 + k \cdot \pi$
De oplossing op het interval $\left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$ is $t = 0$.
Het snijpunt met de y-as is (0, 1).

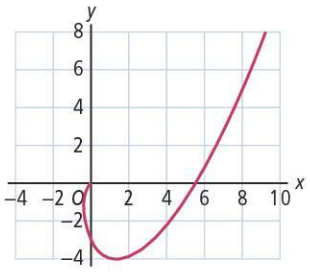
b $\cos(t) = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}\right)}$
$\cos(t) = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}(2\cos^2(t) - 1)) + \frac{1}{2}\right)}$
$\cos(t) = \sqrt{1 + \cos^2(t) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \sqrt{\cos^2(t)}$
Dit klopt voor elke waarde van t uit het interval $\left\langle 0, \frac{1}{2}\pi \right\rangle$.

c Het domein [0, 1].

© Noordhoff Uitgevers bv

19 Bewegingsvergelijkingen

1 a



b Snijpunt met de x-as dan $t^2 - 4t = 0$
$t(t-4) = 0$
$t = 0$ of $t - 4 = 0$
$t = 0$ (voldoet niet) of $t = 4$
Het snijpunt met de x-as is $A(4\ln(4), 0)$.
Snijpunt met de y-as dan $t\ln(t) = 0$
$t = 0$ of $\ln(t) = 0$
$t = 0$ (voldoet niet) of $t = 1$
Het snijpunt met de y-as is $B(0, -3)$.

c $\frac{dx}{dt} = 1 \cdot \ln(t) + t \cdot \frac{1}{t} = \ln(t) + 1$ en $\frac{dy}{dt} = 2t - 4$
Voor de richtingscoëfficiënt in punt A geldt $\frac{y'(4)}{x'(4)} = \frac{4}{\ln(4)+1} = 1{,}6762\ldots$
$\tan(\alpha) = 1{,}6762\ldots$ dus $\alpha \approx 59°$.

2 a Het middelpunt is $(-2, 3)$ en de straal is 4.
Een vergelijking van c is $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$.

b Uit $x = -2 + 3t$ volgt $3t = x + 2$.
Dit invullen in $y = -7 + 3t$ geeft $y = -7 + x + 2$.
Een vergelijking is $y = x - 5$.

c $x'(t) = -4\sin(t)$
$y'(t) = 4\cos(t)$
$v = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$
$v = \sqrt{(-4\sin(t))^2 + (4\cos(t))^2}$
$v = \sqrt{16\sin^2(t) + 16\cos^2(t)}$
$v = \sqrt{16(\sin^2(t) + \cos^2(t))} = \sqrt{16 \cdot 1} = 4$
De baansnelheid is constant en gelijk aan 4.

d $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3t - 4\cos(t) \\ -10 + 3t - 4\sin(t) \end{pmatrix}$ en de richtingsvector van m is $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{PQ} \perp m$, dus $3t - 4\cos(t) + -10 + 3t - 4\sin(t) = 0$
ofwel $6t - 10 = 4\cos(t) + 4\sin(t)$.
Voer in op de rekenmachine $y_1 = 6x - 10$ en $y_2 = 4\cos(x) + 4\sin(x)$.
De optie snijpunt geeft $x = 1{,}9975\ldots$
De waarde van t waarvoor PQ loodrecht op m staat is $t \approx 2{,}00$.

© Noordhoff Uitgevers bv

3 **a** Voor de snijpunten met de y-as geldt $x(t) = 0$.
$\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t = 0$
$\frac{1}{3}t(t^2 - 9t + 15) = 0$
$t = 0$ of $t^2 - 9t + 15 = 0$
$t = 0$ of $t = \dfrac{9 + \sqrt{81 - 60}}{2}$ of $t = \dfrac{9 - \sqrt{81 - 60}}{2}$
$t = 0$ of $t = 4\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21}$ of $t = 4\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{21}$

b $x'(t) = t^2 - 6t + 5$
$y'(t) = -2t$
$x'(t) = 0$ als $t^2 - 6t + 5 = 0$
$(t - 1)(t - 5) = 0$
$t = 1$ of $t = 5$
$y'(t) = 0$ als $-2t = 0$
$t = 0$
Er is een horizontale raaklijn als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$ dus als $t = 0$.
$t = 0$ geeft het punt $(0, 4)$.
Er is een verticale raaklijn als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$ dus als $t = 1$ of $t = 5$.
$t = 1$ geeft het punt $\left(2\frac{1}{3}, 3\right)$ en $t = 5$ geeft het punt $\left(-8\frac{1}{3}, -21\right)$.

4 **a** Snijpunten met de x-as dan $\frac{1}{2}t^2 + 3t - 3\frac{1}{2} = 0$
$t^2 + 6t - 7 = 0$
$(t + 7)(t - 1) = 0$
$t = -7$ of $t = 1$
De snijpunten zijn $(42, 0)$ en $(-6, 0)$.
Snijpunten met de y-as dan $\frac{1}{2}t^2 - 3t - 3\frac{1}{2} = 0$
$t^2 - 6t - 7 = 0$
$(t + 7)(t - 1) = 0$
$t = 7$ of $t = -1$
De snijpunten zijn $(0, 42)$ en $(0, -6)$.

b $x'(t) = t - 3$
$y'(t) = t + 3$
Er is een horizontale raaklijn als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$ dus als $t = -3$.
$t = -3$ geeft het punt $(10, -8)$.
Er is een verticale raaklijn als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$ dus als $t = 3$.
$t = 3$ geeft het punt $(-8, 10)$.

c Het snijpunt met de positieve x-as is in het punt $(42, 0)$ dus als $t = -7$.
$x'(-7) = -7 - 3 = -10$ en $y'(-7) = -7 + 3 = -4$
De snelheid in dit punt is $v = \sqrt{(-10)^2 + (-4)^2} = \sqrt{116}$.

d $v = \sqrt{(x'(t))^2 + (y(t))^2}$
$v = \sqrt{(t - 3)^2 + (t + 3)^2}$
$v = \sqrt{t^2 - 6t + 9 + t^2 + 6t + 9}$
$v = \sqrt{2t^2 + 18}$

e $t = a$ invullen geeft het punt $A\left(\frac{1}{2}a^2 - 3a - 3\frac{1}{2}, \frac{1}{2}a^2 + 3a - 3\frac{1}{2}\right)$.
$t = -a$ invullen geeft het punt $B\left(\frac{1}{2}(-a)^2 - 3 \cdot -a - 3\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(-a)^2 + 3 \cdot -a - 3\frac{1}{2}\right)$
ofwel $B\left(\frac{1}{2}a^2 + 3a - 3\frac{1}{2}, \frac{1}{2}a^2 - 3a - 3\frac{1}{2}\right)$.
$x_B = y_A$ en $y_B = x_A$ dus A en B zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$, en de baan is daarmee symmetrisch in de lijn $y = x$.

© Noordhoff Uitgevers bv

f Vul $x(t)$ en $y(t)$ in bij de formule $(x - y)^2 = 36x + 36y + 252$.

$\left(\left(\frac{1}{2}t^2 - 3t - 3\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}t^2 + 3t - 3\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 36\left(\frac{1}{2}t^2 - 3t - 3\frac{1}{2}\right) + 36\left(\frac{1}{2}t^2 + 3t - 3\frac{1}{2}\right) + 252$

$(-6t)^2 = 18t^2 - 108t - 126 + 18t^2 + 108t - 126 + 252$

$(-6t)^2 = 36t^2$

De punten van de baan voldoen aan deze vergelijking voor alle t-waarden.

5 **a** Voor de snijpunten met de x-as geldt $t^2 - 1 = 0$.

$t^2 = 1$

$t = -1$ of $t = 1$

$t = -1$ geeft $(3, 0)$ en $t = 1$ geeft $(-1, 0)$.

Voor de snijpunten met de y-as geldt $t^2 - 2t = 0$.

$t(t - 2) = 0$

$t = 0$ of $t = 2$

$t = 0$ geeft $(0, -1)$ en $t = 2$ geeft $(0, 3)$.

b $x'(t) = 2t - 2$

$y'(t) = 2t$

Evenwijdig aan de x-as als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$ dus als $2t = 0$.

$t = 0$

$t = 0$ geeft het punt $(0, -1)$.

Evenwijdig aan de y-as als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$ dus als $2t - 2 = 0$.

$t = 1$

$t = 1$ geeft het punt $(-1, 0)$.

c Als P zich op de positieve y-as bevind, dan is dat in het punt $(0, 3)$ en is $t = 2$.

Als $t = 2$ dan is $x'(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 2$ en $y'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ en is de snelheid $v(2) = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

d Voor het snijpunt met de lijn $y = x$ geldt

$t^2 - 2t = t^2 - 1$

$-2t = -1$

$t = \frac{1}{2}$

$t = \frac{1}{2}$ geeft het snijpunt $S\left(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right)$.

e $v = \sqrt{(x'(t))^2 + (y(t))^2}$

$v = \sqrt{(2t - 2)^2 + 4t^2}$

$v = \sqrt{4t^2 - 8t + 4 + 4t^2}$

$v = \sqrt{8t^2 - 8t + 4}$

De baanversnelling is $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{16t - 8}{2\sqrt{8t^2 - 8t + 4}}$

Voor $t = \frac{1}{2}$ is de baanversnelling 0.

f Je moet aantonen dat $x_Q = y_P$ en $y_Q = x_P$.

$x_Q = x(1 - a)$

$x_Q = (1 - a)^2 - 2(1 - a)$

$x_Q = 1 - 2a + a^2 - 2 + 2a$

$x_Q = a^2 - 1$ en dit is gelijk aan $y_P = y(a) = a^2 - 1$.

$y_Q = y(1 - a)$

$y_Q = (1 - a)^2 - 1$

$y_Q = 1 - 2a + a^2 - 1$

$y_Q = a^2 - 2a$ en dit is gelijk aan $x_P = x(a) = a^2 - 2a$.

g Je hebt in opdracht f aangetoond dat P en Q elkaars spiegelbeeld zijn in de lijn $y = x$, dus de baan is symmetrisch in de lijn $y = x$.

© Noordhoff Uitgevers bv

6 a $x = \frac{2}{3}t\sqrt{t}$ en $y = 18 - \frac{2}{3}t\sqrt{t}$,
dus de vergelijking is $y = 18 - x$.
Dit is een *deel* van een rechte lijn, omdat $t \geq 0$ moet zijn en daardoor $x \geq 0$ moet zijn. Het is een halve dalende lijn met startpunt (0, 18).

b $x = \frac{2}{3}t\sqrt{t} = \frac{2}{3}t^{1\frac{1}{2}}$
$x'(t) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{t} = \sqrt{t}$
$y = 18 - \frac{2}{3}t\sqrt{t} = 18 - \frac{2}{3}t^{1\frac{1}{2}}$
$y'(t) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{t} = -\sqrt{t}$
De baansnelheid is $v = \sqrt{(\sqrt{t})^2 + (-\sqrt{t})^2} = \sqrt{t + t} = \sqrt{2t}$.

c De baanversnelling is $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{2\sqrt{2t}} = \frac{1}{\sqrt{2t}}$
In het snijpunt met de x-as geldt: $y(t) = 0$
$18 - \frac{2}{3}t\sqrt{t} = 0$
$\frac{2}{3}t^{1\frac{1}{2}} = 18$
$t^{1\frac{1}{2}} = 27$
$t^3 = 729$
$t = \sqrt[3]{729} = 9$
Als $t = 9$ dan is de baanversnelling $\frac{1}{\sqrt{2 \cdot 9}} = \frac{1}{\sqrt{18}} = \frac{1}{18}\sqrt{18}$.

20 Goniometrische formules

1 a $\sin\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\pi\right)$
$2x + \frac{1}{3}\pi = 1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x + \frac{1}{3}\pi = \pi - \left(1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\pi\right) + k \cdot 2\pi$
$\frac{1}{2}x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3\frac{1}{2}x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 4\pi$ of $x = \frac{1}{21}\pi + k \cdot \frac{4}{7}\pi$
De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $x = \frac{1}{3}\pi$, $x = \frac{1}{21}\pi$, $x = \frac{13}{21}\pi$, $x = 1\frac{4}{21}\pi$ en $x = 1\frac{16}{21}\pi$.

b $\sin\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$
$\sin\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi + x - \frac{1}{4}\pi\right)$
$2x + \frac{1}{3}\pi = x + \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x + \frac{1}{3}\pi = \pi - \left(x + \frac{1}{4}\pi\right) + k \cdot 2\pi$
$x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{5}{36}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn
$x = 1\frac{11}{12}\pi$, $x = \frac{5}{36}\pi$, $x = \frac{29}{36}\pi$ en $x = 1\frac{17}{36}\pi$.

2 a Eerst oplossen $f(x) = 0$.
$2\cos^2(x) + \sin(2x) = 0$
$2\cos^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) = 0$
$2\cos(x)(\cos(x) + \sin(x)) = 0$
$\cos(x) = 0$ of $\sin(x) = -\cos(x)$
$\cos(x) = 0$ of $\tan(x) = -1$
$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ of $x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$
De oplossingen op $\left[\frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi\right]$ zijn $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = \frac{3}{4}\pi$ en $x = 1\frac{1}{2}\pi$.
Met een plot vind je de oplossingen van $f(x) > 0$: $\left\langle\frac{3}{4}\pi, 1\frac{1}{2}\pi\right\rangle$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b Omdat $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ geldt $2\cos^2(x) = \cos(2x) + 1$ dus
$f(x) = \cos(2x) + 1 + \sin(2x)$ ofwel $f(x) = \sin(2x) + \cos(2x) + 1$
$a = b = c = 1$ en $p = 2$

c $f(x) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{4}\pi - 2x\right) + 1$
$f(x) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)\cos(2x) + \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\sin(2x)\right) + 1$
$f(x) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(2x)\right) + 1$ en omdat $\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = 1$ volgt hieruit $f(x) = \cos(2x) + \sin(2x) + 1$ (zie opdracht b)

d Het bereik van f is $[-\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} + 1]$.

3 **a** $\tan(\alpha) + \tan(\beta) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} + \dfrac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} = \dfrac{\sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}$
De teller van de laatste breuk is gelijk aan $\sin(\alpha + \beta)$ dus
$\tan(\alpha) + \tan(\beta) = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)}$

b $\tan(\alpha) - \tan(\beta) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \dfrac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} = \dfrac{\sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}$
De teller van de laatste breuk is gelijk aan $\sin(\alpha - \beta)$ dus
$\tan(\alpha) - \tan(\beta) = \dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)}$

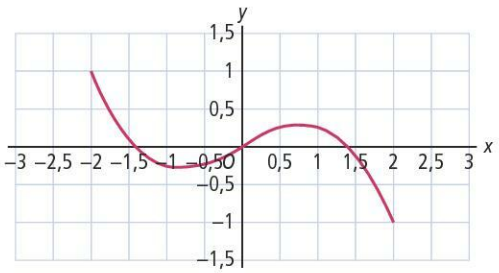
4 **a** $x(t) = 0$ als $\cos(3t) = 0$ dus $3t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ en
$t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
De oplossingen binnen één periode zijn
$t = \frac{1}{6}\pi$, $t = \frac{1}{2}\pi$, $t = \frac{5}{6}\pi$, $t = 1\frac{1}{6}\pi$, $t = 1\frac{1}{2}\pi$ en $t = 1\frac{5}{6}\pi$.
De bijbehorende waarden van y zijn
$y = -1$, $y = -2$, $y = -1$, $y = 1$, $y = 2$ en $y = 1$.
Dus de kromme gaat voor twee waarden van t door $(0, 1)$ en voor twee waarden door $(0, -1)$.

b Er is een verticale raaklijn als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$.
$x'(t) = -9\sin(3t)$ en $y'(t) = -2\cos(t)$.
$x'(t) = 0$ als $\sin(3t) = 0$ dus $3t = 0 + k \cdot \pi$ ofwel $t = 0 + k \cdot \frac{1}{3}\pi$.
De oplossingen binnen één periode zijn
$t = 0$, $t = \frac{1}{3}\pi$, $t = \frac{2}{3}\pi$, $t = \pi$, $t = 1\frac{1}{3}\pi$, $t = 1\frac{2}{3}\pi$(en $t = 2\pi$).
De bijbehorende punten zijn $(3, 0)$, $(-3, -\sqrt{3})$, $(3, -\sqrt{3})$, $(-3, 0)$, $(3, \sqrt{3})$, $(-3, \sqrt{3})$ en opnieuw $(3, 0)$.

c Het punt $(0, 1)$ hoort bij de waarden $t = 1\frac{1}{6}\pi$ en $t = 1\frac{5}{6}\pi$.
$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2\cos(t)}{-9\sin(3t)}$
Als $t = 1\frac{1}{6}\pi$ dan is $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}}{-9 \cdot -1} = \frac{1}{9}\sqrt{3}$ en de hoek met de x-as 10,9°.
Als $t = 1\frac{5}{6}\pi$ dan is $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}}{-9 \cdot -1} = -\frac{1}{9}\sqrt{3}$ en de hoek met de x-as −10,9°.
De hoek tussen de raaklijnen is afgerond 22°.

© Noordhoff Uitgevers bv

5 a



De eindpunten worden bereikt voor $2\sin(t) = -2$ en $2\sin(t) = 2$.
$\sin(t) = -1$ en $\sin(t) = 1$ dus als $t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.
De eindpunten worden bereikt voor $t = \frac{1}{2}\pi$ en $t = 1\frac{1}{2}\pi$ en zijn $(2, -1)$ en $(-2, 1)$.

b De periode van de beweging is 2π.
Kies bijvoorbeeld het interval $[-\pi, \pi]$ en vul in $t = a$ en $t = -a$:
Bij $t = a$ hoort het punt $P(2\sin(a), \sin(a)\cos(2a))$.
Bij $t = -a$ hoort het punt $Q(2\sin(-a), \sin(-a)\cos(-2a))$.
Omdat $\cos(-2a) = \cos(2a)$ geldt $x_Q = -x_p$ en $y_q = -y_P$ dus het spiegelbeeld van elk punt op de baan in $(0, 0)$ ligt zelf ook op de baan.

c $x(t) = 2\sin(t)$ dus $\sin(t) = \frac{1}{2}x$
$y(t) = \sin(t)\cos(2t) = \sin(t)(1 - 2\sin^2(t)) = \sin(t) - 2\sin^3(t)$
Daaruit volgt $y = \frac{1}{2}x - 2\left(\frac{1}{2}x\right)^3$ dus $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^3$.

6 a De oppervlakte is gelijk aan
$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{1\frac{1}{2}\pi} \left(\tfrac{1}{2} - \cos(x)\right) \mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}x - \sin(x)\right]_{\frac{1}{2}\pi}^{1\frac{1}{2}\pi} = \tfrac{3}{4}\pi - -1 - \left(\tfrac{1}{4}\pi - 1\right) = \tfrac{1}{2}\pi + 2.$$

b $g(x) = \left(\frac{1}{2} - \cos(x)\right)^2 = \frac{1}{4} - \cos(x) + \cos^2(x)$
Uit $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ volgt $\cos^2(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}$ dus
$g(x) = \frac{3}{4} - \cos(x) + \frac{1}{2}\cos(2x)$.

c De inhoud is $\pi \int_{\frac{1}{2}\pi}^{1\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{1}{2} - \cos(x)\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_{\frac{1}{2}\pi}^{1\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{3}{4} - \cos(x) + \frac{1}{2}\cos(2x)\right) \mathrm{d}x$.
De integraal is gelijk aan
$$\left[\tfrac{3}{4}x - \sin(x) + \tfrac{1}{4}\sin(2x)\right]_{\frac{1}{2}\pi}^{1\frac{1}{2}\pi} = \pi\left(1\tfrac{1}{8}\pi - -1 + 0\right) - \pi\left(\tfrac{3}{8}\pi - 1 + 0\right) = \tfrac{3}{4}\pi^2 + 2\pi.$$

7 a $\sqrt{1 - \sin(x)} = \sin(x) + \cos(x)$
Kwadrateren geeft
$1 - \sin(x) = \sin^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x) = 1 + 2\sin(x)\cos(x)$.
$-\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)$
$\sin(x) = 0$ of $\cos(x) = -\frac{1}{2}$
Oplossingen: $x = \pi$ (voldoet niet) of $x = \frac{2}{3}\pi$ of $x = 1\frac{1}{3}\pi$ (voldoet niet)

b $f'(x) = \dfrac{-\cos(x)}{2\sqrt{1 - \sin(x)}}$
De gevraagde helling is $f'\left(1\frac{1}{6}\pi\right) = \dfrac{--\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2\sqrt{1 - -\frac{1}{2}}} = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2\sqrt{1\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$.

c $f'(p) = \dfrac{-\cos(p)}{2\sqrt{1 - \sin(p)}}$ dus de richtingscoëfficiënt van PA is $\dfrac{2\sqrt{1 - \sin(p)}}{\cos(p)}$
(deze uitdrukking heeft een negatieve waarde, want $\cos(p) < 0$)
$\dfrac{PB}{AB} = -\dfrac{2\sqrt{1 - \sin(p)}}{\cos(p)}$ en $PB = \sqrt{1 - \sin(p)}$ dus $AB = -\frac{1}{2}\cos(p)$ en omdat $x_B = p$ volgt hieruit dat $x_A = p - \frac{1}{2}\cos(p)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

d $O(p) = \frac{1}{2} \cdot PB \cdot AB = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \sin(p)} \cdot -\frac{1}{2}\cos(p) = -\frac{1}{4}\cos(p)\sqrt{1 - \sin(p)}$

$$\frac{dO}{dp} = \frac{1}{4}\sin(p)\sqrt{1 - \sin(p)} - \frac{1}{4}\cos(p) \cdot \frac{-\cos(p)}{2\sqrt{1 - \sin(p)}}$$

$$\frac{dO}{dp} = \frac{1}{4}\left(\frac{2\sin(p)(1 - \sin(p)) + \cos^2(p)}{2\sqrt{1 - \sin(p)}}\right) = \frac{2\sin(p) - 2\sin^2(p) + 1 - \sin^2(p)}{8\sqrt{1 - \sin(p)}}$$

$$\frac{dO}{dp} = \frac{1 + 2\sin(p) - 3\sin^2(p)}{8\sqrt{1 - \sin(p)}}$$

e $\frac{dO}{dp} = 0$ als $1 + 2\sin(p) - 3\sin^2(p) = 0$

Stel $\sin(p) = q$ en los op $-3q^2 + 2q + 1 = 0$

$q = \frac{-2 + \sqrt{16}}{-6} = -\frac{1}{3}$ of $q = \frac{-2 - \sqrt{16}}{-6} = 1$

dus $\sin(p) = 1$ (voldoet niet) of $\sin(p) = -\frac{1}{3}$

f Uit $\sin(p) = -\frac{1}{3}$ volgt $\cos(p) = \pm\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{8}{9}}$ waarvan alleen de negatieve waarde voldoet. De maximale oppervlakte is

$O(p) = -\frac{1}{4}\sqrt{1 - -\frac{1}{3}} \cdot -\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{32}{27}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{96}{81}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{16}{81}}\sqrt{6} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9}\sqrt{6} = \frac{1}{9}\sqrt{6}$.

21 Afsluiting analyse

1 **a** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{2 + x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{2}{x} + 1} = \frac{1}{0 + 1} = 1$ dus $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = e^1 = e$

Voor $x \to -\infty$ krijg je dezelfde limiet.

b $\lim\limits_{x\uparrow -2} \frac{x}{2 + x} = \infty$ dus $\lim\limits_{x\uparrow -2} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x\downarrow -2} \frac{x}{2 + x} = -\infty$ dus $\lim\limits_{x\downarrow -2} f(x) = 0$

c $f'(x) = e^{\frac{x}{2+x}} \cdot \frac{1 \cdot (2 + x) - x \cdot 1}{(2 + x)^2} = e^{\frac{x}{2+x}} \cdot \frac{2}{(2 + x)^2}$

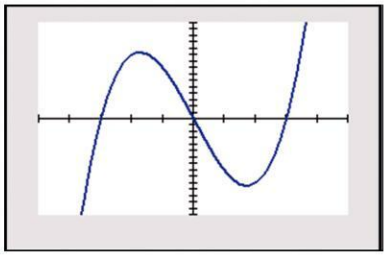
Deze afgeleide is voor geen enkele waarde van x gelijk aan 0, er zijn daarom geen extreme waarden.

2 **a** Voor het domein moet gelden $x^3 - 9x \geq 0$.

$x^3 - 9x = 0$

$x(x^2 - 9) = 0$

$x = 0$ of $x = -3$ of $x = 3$



In een plot zie dat $x^3 - 9x \geq 0$ als $-3 \leq x \leq 0$ of $x \geq 3$.

Het domein is $[-3, 0] \cup [3, \to\rangle$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $g'(x) = \dfrac{3x^2 - 9}{2\sqrt{x^3 - 9x}}$

$g'(x) = 0$ als $x^2 = 3$, dus $x = -\sqrt{3}$ of $x = \sqrt{3}$ (voldoet niet)

Het maximum is $g(-\sqrt{3}) = \sqrt{6\sqrt{3}}$.

De randminima zijn $g(-3) = 0$, $g(0) = 0$ en $g(3) = 0$.

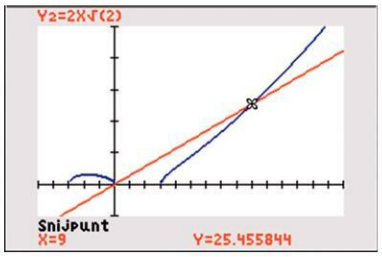
c $\sqrt{x^3 - 9x} = 2x\sqrt{2}$

Kwadrateren geeft $x^3 - 9x = 8x^2$ ofwel $x^3 - 8x^2 - 9x = 0$

$x(x^2 - 8x - 9) = 0$

$x(x - 9)(x + 1) = 0$

$x = 0$, $x = 9$ of $x = -1$ (voldoet niet)



In een plot lees je de oplossing van $g(x) \geq 2x\sqrt{2}$ af.

Deze oplossing is $-3 \leq x \leq 0$ of $x \geq 9$.

3 a $f_{-1}(x) = \dfrac{2x^2 - 4x - x + 2 - 3}{x - 2}$

$f_{-1}(x) = \dfrac{2x(x - 2) - 1(x - 2) - 3}{x - 2}$

$f_{-1}(x) = 2x - 1 - \dfrac{3}{x - 2}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3}{x - 2} = 0$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{x - 2} = 0$ dus de scheve asymptoot is $y = 2x - 1$.

b De noemer is gelijk aan 0 als $x - 2 = 0$, dus als $x = 2$.

Als de teller ook gelijk is aan 0 voor $x = 2$ dan moet gelden

$2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + p = 0$

$8 - 10 + p = 0$

$p = 2$

c $f_p(x) = \dfrac{2x^2 - 4x - x + 2 - 2 + p}{x - 2}$

$f_p(x) = \dfrac{2x(x - 2) - 1(x - 2) - 2 + p}{x - 2}$

$f_p(x) = 2x - 1 + \dfrac{p - 2}{x - 2}$

Omdat $p - 2$ een constante is geldt $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{p - 2}{x - 2} = 0$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{p - 2}{x - 2} = 0$.

Dus voor elke waarde van p met $p \neq 2$ is de scheve asymptoot $y = 2x - 1$.

4 a Voor het domein moet gelden $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$.

Als $x \geq 0$ geldt $\sqrt{x^2 + 1} \geq 1$ en x is positief, dus $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$.

Als $x < 0$ dan is $\sqrt{x^2 + 1} \geq \sqrt{x^2} = -x$, dus $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$.

Het domein van f is dus $\mathbb{R}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

$f'(x) = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}\right)$

$f'(x) = \dfrac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$, teller en noemer maal $\sqrt{x^2 + 1}$ geeft

$f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)\sqrt{x^2 + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

c $f'(x) = (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$

$f''(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1\frac{1}{2}} \cdot 2x = \dfrac{-x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$

De tweede afgeleide is 0 als $x = 0$; links van $x = 0$ is f'' positief en rechts negatief, dus het punt (0, 0) is een buigpunt.

d f is symmetrisch in de oorsprong als $f(-a) = -f(a)$ ofwel $f(-a) + f(a) = 0$.

$f(-a) = \ln\left(-a + \sqrt{(-a)^2 + 1}\right)$ en $f(a) = \ln\left(a + \sqrt{a^2 + 1}\right)$

$f(-a) + f(a) = \ln\left(\left(-a + \sqrt{(-a)^2 + 1}\right)\left(a + \sqrt{a^2 + 1}\right)\right)$

$f(-a) + f(a) = \ln(-a^2 + a^2 + 1) = \ln(1) = 0$ voor elke waarde van a.

5 **a** $|x^2 - 3x| = x^2 - 3x$ als $x^2 - 3x \geq 0$, dus als $x \leq 0$ of $x \geq 3$.

$|x^2 - 3x| = -x^2 + 3x$ als $x^2 - 3x < 0$, dus als $0 < x < 3$.

$f(x) = x^2 - x - 6$ als $x \leq 0$ of $x \geq 3$ en $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ als $0 < x < 3$.

b Extreme waarden zijn er als $f'(x) = 0$.

Als $x \leq 0$ of $x \geq 3$ dan geldt $f'(x) = 2x - 1$

$2x - 1 = 0$ als $x = \frac{1}{2}$, voldoet niet.

Op dit interval zijn er geen extreme waarden.

Als $0 < x < 3$ dan geldt $f'(x) = -2x + 5$

$-2x + 5 = 0$ als $x = 2\frac{1}{2}$.

Zie de schets: er is een maximum $f\left(2\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Er zijn twee minima: $f(0) = -6$ en $f(3) = 0$.

c Los op $x^2 - x - 6 = x + 9$ of $-x^2 + 5x - 6 = x + 9$

$x^2 - x - 6 = x + 9$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$(x - 5)(x + 3) = 0$

$x = 5$ of $x = -3$

$-x^2 + 5x - 6 = x + 9$

$0 = x^2 - 4x + 15$

$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = -44$, deze vergelijking heeft geen oplossing

De snijpunten zijn (5, 14) en (−3, 6).

d De richtingscoëfficiënt van de lijn $y = x + b$ is 1.

$f'(x) = 1$ moet worden opgelost.

Als $x \leq 0$ of $x \geq 3$ is $f'(x) = 2x - 1$ en $2x - 1 = 1$ geeft $x = 1$ (voldoet niet)

Als $0 < x < 3$ is $f'(x) = -2x + 5$ en $-2x + 5 = 1$ geeft $-2x = -4$ dus $x = 2$.

Een lijn $y = x + b$ raakt de grafiek van f in het punt (2, 0) dus $b = -2$.

De lijnen door de punten (3, 0) en (0, −6) zijn $y = x - 3$ en $y = x - 6$.

Uit de grafiek is nu de tabel in te vullen:

aantal gemeenschappelijke punten	0	1	2	3	4
waarden van b	$b < -6$	$b = -6$	$-6 < b < -3$ of $b > -2$	$b = -3$ of $b = -2$	$-3 < b < -2$

© Noordhoff Uitgevers bv

e Voor de eerste raaklijn geldt $f'(x) = \lim\limits_{x \uparrow 3} (-2x + 5) = -2 \cdot 3 + 5 = -1$

$y = -x + b$ door $(3, 0)$ geeft $y = -x + 3$.

Voor de tweede raaklijn geldt $f'(x) = \lim\limits_{x \downarrow 3} (2x - 1) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$

$y = 5x + b$ door $(3, 0)$ geeft $y = 5x - 15$.

De eerste raaklijn $y = -x + 3$ snijden met de grafiek geeft

$-x + 3 = x^2 - x - 6$ $\qquad$ $-x + 3 = -x^2 + 5x - 6$

$0 = x^2 - 9$ $\qquad$ $x^2 - 6x + 9 = 0$

$x = -3$ of $x = 3$ $\qquad$ $(x - 3)^2 = 0$ geeft $x = 3$

Deze raaklijn snijdt de grafiek ook nog in het punt $(-3, 6)$.

De tweede raaklijn $y = 5x - 15$ snijden met de grafiek geeft

$5x - 15 = x^2 - x - 6$ $\qquad$ $5x - 15 = -x^2 + 5x - 6$

$x = 3$ $\qquad$ $x = 3$

Deze raaklijn snijdt de grafiek alleen in het punt $(3, 0)$.

6 a $f_3(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

Voor het domein moet gelden $x^2 - 4x + 3 \geq 0$.

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x - 3)(x - 1) = 0$

$x = 1$ of $x = 3$

De grafiek van $y = x^2 - 4x + 3$ is een dalparabool, dus $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ als $x \leq 1$ of $x \geq 3$.

Het domein van f_3 is $\langle \leftarrow, 1] \cup [3, \rightarrow \rangle$.

b $f_3'(x) = \dfrac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$

De afgeleide is 0 als $2x - 4 = 0$ dus als $x = 2$, maar deze waarde valt buiten het domein.

Er zijn wel twee randminima: $f(1) = 0$ en $f(3) = 0$.

c $(|x - 2|)^2 = x^2 - 4x + 4$ dus $f_p(x) = g(x)$ als $p = 4$.

d $g_p(x) = f_p(x + 2) = \sqrt{(x + 2)^2 - 4(x + 2) + p}$

$g_p(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4 - 4x - 8) + p}$

$g_p(x) = \sqrt{x^2 + p - 4}$

$g_p(-a) = \sqrt{(-a)^2 + p - 4} = \sqrt{a^2 + p - 4}$

en $g_p(a) = \sqrt{a^2 + p - 4}$ dus de grafiek van g_p is symmetrisch in de y-as.

Daaruit volgt dat de grafiek van f_p symmetrisch is in de lijn $x = 2$.

7 a $2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x^2 - 1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1)$

Dit betekent dat $|2x^2 - 3x + 1| = -2x^2 + 3x - 1$ als $\frac{1}{2} < x < 1$ en

$|2x^2 - 3x + 1| = 2x^2 - 3x + 1$ als $x \leq \frac{1}{2}$ of $x \geq 1$.

$$\lim_{x \uparrow 1} f(x) = \lim_{x \uparrow 1} \frac{-2x^2 + 3x - 1}{x - 1} = \lim_{x \uparrow 1} \frac{-2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \uparrow 1} \left(-2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) = -1 \text{ en}$$

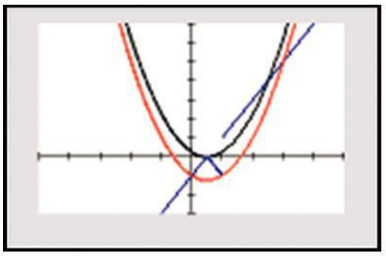
$$\lim_{x \downarrow 1} f(x) = \lim_{x \downarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1} = \lim_{x \downarrow 1} \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \downarrow 1} \left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) = 1$$

Dus de grafiek heeft een sprong bij $x = 1$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b Als ze elkaar raken, dan moet $f'(x) = g_p'(x)$ en $f(x) = g_p(x)$.
Als $x \leq \frac{1}{2}$ en $x \geq 1$ dan is $f(x) = 2x - 1$ dus $f'(x) = 2$.
Als $\frac{1}{2} < x < 1$ dan is $f(x) = -2x + 1$ dus $f'(x) = -2$.
$f'(x) = g_p'(x)$ geeft $2 = 2x - 1$ of $-2 = 2x - 1$
en daaruit volgt $x = 1\frac{1}{2}$ of $x = -\frac{1}{2}$ (voldoet niet)
Uit $f\left(1\frac{1}{2}\right) = g_p\left(1\frac{1}{2}\right)$ volgt $2 = \left(1\frac{1}{2}\right)^2 - 1\frac{1}{2} + p$ dus $p = 1\frac{1}{4}$.

c Drie gemeenschappelijk punten is alleen mogelijk als de grafiek van g_p de grafiek van f snijdt ergens tussen de punten $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ en $(1, -1)$.
De grafiek van g_p gaat door $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ als $p = \frac{1}{4}$, dan zijn er twee gemeenschappelijke punten.
De grafiek van g_p gaat door $(1, -1)$ als $p = -1$, dan zijn er drie gemeenschappelijke punten.
De oplossing is $-1 \leq p < \frac{1}{4}$.



22 Afsluiting meetkunde

1 Punt A ligt op de cirkel met middellijn BC. (*stelling van Thales*)
Het middelpunt is het midden van lijnstuk BC en dat is het punt $M(3, 6)$.
De straal is $CM = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53}$ dus $r^2 = 53$.
De middelpuntsvergelijking van de cirkel is $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 53$.
Deze cirkel snijden met de lijn $x = 1$ geeft
$(1 - 3)^2 + (y - 6)^2 = 53$
$4 + (y - 6)^2 = 53$
$(y - 6)^2 = 49$
$y - 6 = 7$ of $y - 6 = -7$
$y = -1$ of $y = 13$
Dus zijn er twee mogelijkheden: $A(1, -1)$ of $A(1, 13)$.

2 **a** Schrijf de vergelijking van l als $5x - y + 15 = 0$.

$$\text{d}(P, l) = \frac{|5 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 15|}{\sqrt{5^2 + (-1)^2}} = \frac{|10 + 1 + 15|}{\sqrt{25 + 1}} = \sqrt{26}$$

b Schrijf de vergelijking van m als $x - 2y - 8 = 0$.

$$\text{d}(Q, m) = \frac{|0 - 2q - 8|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-2q - 8|}{\sqrt{1 + 4}} = 5\sqrt{5}$$

$$\frac{|-2q - 8|}{\sqrt{5}} = 5\sqrt{5}$$

$|-2q - 8| = 25$
$-2q - 8 = 25$ of $-2q - 8 = -25$
$-2q = 33$ of $-2q = -17$
$q = -16\frac{1}{2}$ of $q = 8\frac{1}{2}$

© Noordhoff Uitgevers bv

c Schrijf de vergelijking van n als $x + y - 2 = 0$.
Stel de coördinaten van R zijn $(a, a - 1)$ dan geldt $d(R, n) = 4$, dus
$\frac{|a + a - 1 - 2|}{\sqrt{1 + 1}} = 4$
$\frac{|2a - 3|}{\sqrt{2}} = 4$
$|2a - 3| = 4\sqrt{2}$

$2a - 3 = 4\sqrt{2}$ of $2a - 3 = -4\sqrt{2}$

$2a = 3 + 4\sqrt{2}$ of $2a = 3 - 4\sqrt{2}$

$a = 1\frac{1}{2} + 2\sqrt{2}$ of $a = 1\frac{1}{2} - 2\sqrt{2}$
Dus zijn er twee mogelijkheden voor punt R:
$R\left(1\frac{1}{2} + 2\sqrt{2}, \frac{1}{2} + 2\sqrt{2}\right)$ of $R\left(1\frac{1}{2} - 2\sqrt{2}, \frac{1}{2} - 2\sqrt{2}\right)$.

3 **a** $C(a, -a)$, $D(0, -a)$, $E(-b, b)$ en $F(-b, 0)$.

b $T(-b, -a)$

c $\overrightarrow{TA} = \begin{pmatrix} a - -b \\ 0 - -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ a \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} a - 0 \\ -a - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -(a + b) \end{pmatrix}$
Het inproduct is $a^2 + ab - a^2 - ab = 0$.
Het inproduct is 0, dus hieruit volgt $\overrightarrow{TA} \perp \overrightarrow{BC}$.
$\overrightarrow{TB} = \begin{pmatrix} 0 - -b \\ b - -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a + b \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -b - a \\ b - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(a + b) \\ b \end{pmatrix}$
Het inproduct is $-ab - b^2 + ab + b^2 = 0$.
Het inproduct is 0, dus hieruit volgt dat ook $\overrightarrow{TB} \perp \overrightarrow{AE}$.

d Omdat $BC \perp TA$ en $AE \perp TB$ zijn BC en AE hoogtelijnen in driehoek TAB, met snijpunt S.
De derde hoogtelijn gaat dan ook door S.
TS is de derde hoogtelijn en dat betekent dat $TS \perp AB$.

e Je moet nog onderzoeken of $O(0, 0)$ op lijn TS ligt.
Een vectorvoorstelling van TS is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ -a \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ want TS gaat door T en staat loodrecht op AB.
$\lambda = 1$ geeft $(0, 0)$, dus O ligt op TS en daarom geldt $OS \perp AB$.

4 **a** $c_1 : x^2 + y^2 = 8x - 2y$
$c_1 : x^2 - 8x + y^2 + 2y = 0$
$c_1 : (x - 4)^2 - 16 + (y + 1)^2 - 1 = 0$
$c_1 : (x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 17$

b $y = x - 2$ substitueren in de vergelijking van $c_1 : x^2 + y^2 = 8x - 2y$ geeft
$x^2 + (x - 2)^2 = 8x - 2(x - 2)$
$x^2 + x^2 - 4x + 4 = 8x - 2x + 4$
$2x^2 - 10x = 0$
$2x(x - 5) = 0$
$x = 0$ of $x = 5$
De snijpunten zijn $(0, -2)$ en $(5, 3)$.

c Het middelpunt van c_2 is $N(14, -6)$ en de straal is $\sqrt{17}$.
$d(O, c_2) = ON - \sqrt{17}$
$d(O, c_2) = \sqrt{14^2 + 6^2} - \sqrt{17} = \sqrt{232} - \sqrt{17}$

d Het middelpunt van c_1 is $M(4, -1)$ en de straal is $\sqrt{17}$.
$MN = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125}$ en dat is groter dan $2\sqrt{17}$, dus de cirkels liggen buiten elkaar.
$d(c_1, c_2) = MN - \sqrt{17} - \sqrt{17} = \sqrt{100 + 25} - 2\sqrt{17} = 5\sqrt{5} - 2\sqrt{17}$

© Noordhoff Uitgevers bv

e $d(P, c_1) = PM - \sqrt{17} = \sqrt{(\lambda - 4)^2 + 6^2} - \sqrt{17}$

$d(P, c_2) = PN - \sqrt{17} = \sqrt{(\lambda - 14)^2 + 11^2} - \sqrt{17}$

$\sqrt{(\lambda - 4)^2 + 36} - \sqrt{17} = \sqrt{(\lambda - 14)^2 + 121} - \sqrt{17}$

$\lambda^2 - 8\lambda + 16 + 36 = \lambda^2 - 28\lambda + 196 + 121$

$20\lambda = 265$

$\lambda = 13\frac{1}{4}$

5 Stel $C(0, q)$. Het midden van zijde AB is $D(6, -4)$.

Een richtingsvector van CD is $\begin{pmatrix} 6 \\ -4 - q \end{pmatrix}$.

Het midden van zijde BC is $E\left(5, -2 + \frac{1}{2}q\right)$.

Een richtingsvector van AE is $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 + \frac{1}{2}q \end{pmatrix}$.

Uit $CD \perp AE$ volgt $18 + (-4 - q)\left(2 + \frac{1}{2}q\right) = 0$.

$18 - 8 - 2q - 2q - \frac{1}{2}q^2 = 0$

$\frac{1}{2}q^2 + 4q - 10 = 0$

$q^2 + 8q - 20 = 0$

$(q + 10)(q - 2) = 0$

$q = -10$ of $q = 2$

De gezochte punten zijn $C(0, -10)$ of $C(0, 2)$.

6 Het middelpunt van een cirkel door de punten A en B ligt op de middelloodlijn van lijnstuk AB.

De richtingscoëfficiënt van AB is $\frac{-10 - 8}{0 - 6} = \frac{18}{-6} = 3$.

Een vergelijking van de middelloodlijn van lijnstuk AB is $y = -\frac{1}{3}x + b$.

De middelloodlijn van lijnstuk AB gaat door $(3, -1)$, dus $-1 = -\frac{1}{3} \cdot 3 + b$.

Dit geeft $b = 0$.

Een vergelijking van de middelloodlijn is $y = -\frac{1}{3}x$ ofwel $x = -3y$.

De middelpunten M van de gezochte cirkels hebben de coördinaten $M(-3p, p)$.

$\mathrm{d}(M, l) = \frac{|3 \cdot -3p + 4 \cdot p - 60|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-5p - 60|}{5} = |-p - 12|$ ofwel $|p + 12|$.

$\mathrm{d}(M, B) = \sqrt{(-3p - 0)^2 + (p - -10)^2} = \sqrt{9p^2 + p^2 + 20p + 100}$

Uit $\mathrm{d}(M, l) = \mathrm{d}(M, B)$ volgt $\sqrt{10p^2 + 20p + 100} = |p + 12|$.

$10p^2 + 20p + 100 = p^2 + 24p + 144$

$9p^2 - 4p - 44 = 0$

$p = \frac{4 + \sqrt{16 + 9 \cdot 4 \cdot 44}}{18} = \frac{44}{18} = 2\frac{4}{9}$ of $p = \frac{4 + \sqrt{16 + 9 \cdot 4 \cdot 44}}{18} = \frac{-36}{18} = -2$

De gezochte middelpunten zijn $\left(-7\frac{1}{3}, 2\frac{4}{9}\right)$ en $(6, -2)$.

7 a De massa's zijn dan samen $2 + 3 + 1 + 4 = 10$.

Voor het zwaartepunt Z geldt

$\overrightarrow{OZ} = \frac{2}{10}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{3}{10}\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4}{10}\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OZ} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 55 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

Het zwaartepunt is $Z\left(5\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b De totale massa is dan $2 + 3 + 1 + k = 6 + k$.
Voor het zwaartepunt Z geldt nu

$$\overrightarrow{OZ} = \tfrac{2}{6+k}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} + \tfrac{3}{6+k}\begin{pmatrix}10\\6\end{pmatrix} + \tfrac{1}{6+k}\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} + \tfrac{k}{6+k}\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OZ} = \tfrac{1}{6+k}\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix} + \tfrac{1}{6+k}\begin{pmatrix}30\\18\end{pmatrix} + \tfrac{1}{6+k}\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} + \tfrac{1}{6+k}\begin{pmatrix}4k\\-6k\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OZ} = \tfrac{1}{6+k}\begin{pmatrix}39+4k\\26-6k\end{pmatrix}$$

Als Z op de x-as ligt is $26 - 6k = 0$ dus $k = 4\frac{1}{3}$.

8 **a** Het zwaartepunt wordt gevonden met

$$\tfrac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix} + \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$$

dus $G(4, 2)$ is het zwaartepunt van $\triangle OEF$.

b Stel het zwaartepunt van $\triangle OAB$ is H.

$$\overrightarrow{OH} = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} + \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \text{ dus } H(2, -1).$$

Het zwaartepunt van rechthoek $BCDE$ is het snijpunt van de diagonalen, dat is $K(7, -2)$.
De oppervlakte van $\triangle OAB$ is $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$.
De oppervlakte van $\triangle OEF$ is $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 = 30$.
De oppervlakte van rechthoek $BCDE$ is $6 \cdot 4 = 24$.
De totale oppervlakte van veelhoek $OABCDEF$ is $6 + 30 + 24 = 60$.
Voor het zwaartepunt Z geldt

$$\overrightarrow{OZ} = \tfrac{6}{60}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \tfrac{30}{60}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} + \tfrac{24}{60}\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OZ} = \tfrac{1}{60}\begin{pmatrix}12\\-6\end{pmatrix} + \tfrac{1}{60}\begin{pmatrix}120\\60\end{pmatrix} + \tfrac{1}{60}\begin{pmatrix}168\\-48\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OZ} = \tfrac{1}{60}\begin{pmatrix}300\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\\frac{1}{10}\end{pmatrix}$$

Het zwaartepunt is het punt $Z\left(5, \frac{1}{10}\right)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

UITWERKINGEN

WISKUNDE B

12E EDITIE

VWO DEEL 4

Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.
Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.
Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.

Noordhoff

MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189

www.modernewiskunde.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-89259-3