LEERBOEK

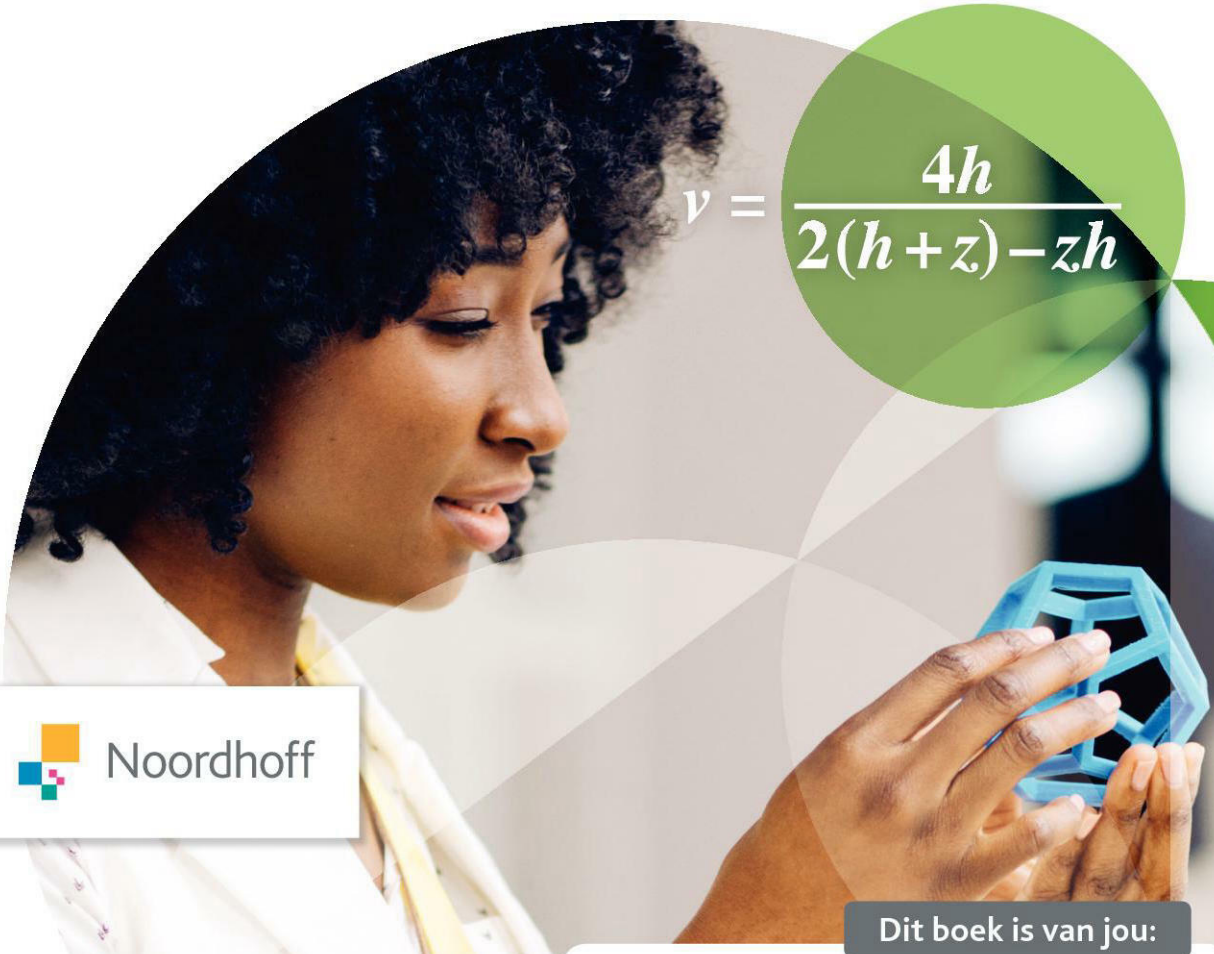
FLEX

WISKUNDE C

VWO DEEL 3

MODERNE WISKUNDE C

$$v = \frac{4h}{2(h+z)-zh}$$



Noordhoff

Dit boek is van jou:

NAAM

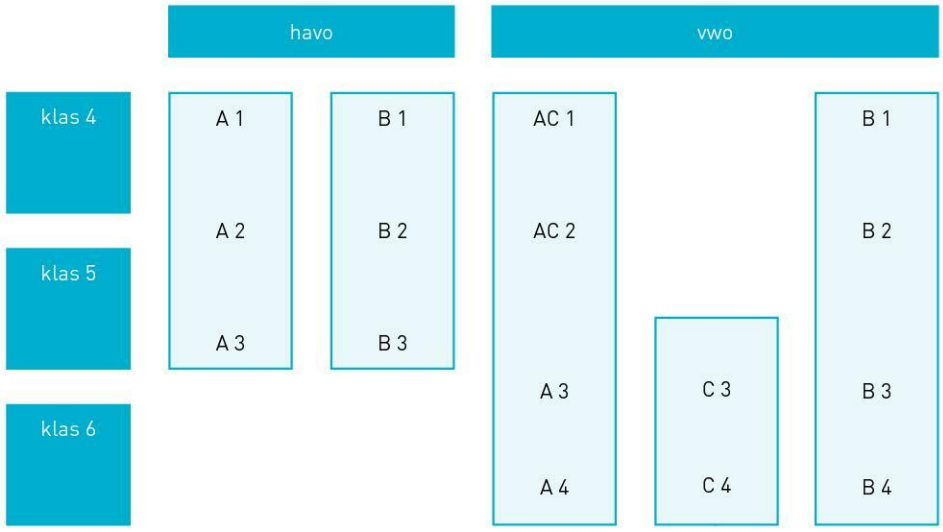
KLAS

12e editie

Moderne Wiskunde

vwo C deel 3

Serieoverzicht Tweede Fase



Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontlenen.

Klimaatneutraal
Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.

MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189

0 / 21

© 2021 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsenauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication

ISBN 978-90-01-89201-2

© Noordhoff Uitgevers bv

12e editie

Moderne Wiskunde

vwo C deel 3

Jeroen van den Boom
Bert Boon
Ferdi Doddema
Wim Doekes
Ilse de Jong
Gerard van Proosdij
Colin Roll
Geertrui Schaberg
Ron Sinkeldam
Carolijn Tacken

Inhoud

12 Logaritmen 6

Voorkennis 8
12.1 Logaritmen 10
12.2 Verdubbelingstijd en halveringstijd 14
12.3 Grafieken van logaritmische functies 18
12.4 Formules met logaritmen 22
12.5 Logaritmische schalen 26
12.6 Gemengde opdrachten 30
Onderzoeksopdrachten 31
Samenvatting 32
Test jezelf 36
Extra oefening 38

Vaardigheden 6 40
Vergelijkingen en ongelijkheden 42
Groeifactoren en percentages 43
Substitueren en herleiden 44
Gebroken formules 44

13 Binomiale verdelingen 46

Voorkennis 48
13.1 De binomiale verdeling 50
13.2 Werken met binomiale verdelingen 54
13.3 Cumulatieve kansen 58
13.4 Verwachtingswaarde en standaardafwijking 62
13.6 Gemengde opdrachten 66
Onderzoeksopdrachten 67
Samenvatting 68
Test jezelf 72
Extra oefening 74

14 Rijen 76

Voorkennis 78
14.1 Recursieve formules 80
14.2 Rijen weergeven 84
14.3 Directe formules 88
14.4 Rijen bij een lineair verband 92
14.5 Rijen bij een exponentieel verband 96
14.6 Gemengde opdrachten 100
Onderzoeksopdrachten 101
Samenvatting 102
Test jezelf 106
Extra oefening 108

Vaardigheden 7 110
Functies met machten 112
Redeneren met formules 113
Hellingen 114
Systematisch tellen 115

15 Normale verdelingen 116

Voorkennis 118
15.1 Percentage berekenen 120
15.2 Grenswaarde berekenen 124
15.3 Gemiddelde en standaard-afwijking berekenen 128
15.4 Normale verdeling met discrete waarden 132
15.5 Gemengde opdrachten 136
Onderzoeksopdrachten 137
Samenvatting 138
Test jezelf 142
Extra oefening 144

© Noordhoff Uitgevers bv

16 Perspectief 146

Voorkennis 148
16.1 Centrale projectie 150
16.2 Perspectief 154
16.3 Eenpuntsperspectief 158
16.4 Tekenen in eenpuntsperspectief 162
16.5 Gemengde opdrachten 166
Onderzoeksopdrachten 167
Samenvatting 168
Test jezelf 172
Extra oefening 174

Vaardigheden 8 176
Rijen 178
Rekenmachine 179
Logaritmische schalen 180
Systematisch tellen 181

Keuzeonderwerpen 182

Muziek 184
Vlakvulling 188

Extra 192

Meer oefenen 194
Oefenproefwerken 204

Werkbladen 214
Trefwoorden 216

Moderne Wiskunde

vwo C deel 3

© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

Logaritmen 12

In dit hoofdstuk

In hoofdstuk 5 heb je geleerd wat exponentiële functies zijn. Je hebt ook geleerd hoe je exponentiële vergelijkingen met je rekenmachine kunt oplossen.

In dit hoofdstuk leer je hoe je exponentiële vergelijkingen zonder je rekenmachine kunt oplossen. Hiervoor heb je logaritmen nodig. Je leert wat logaritmen zijn en waarvoor je ze kunt gebruiken. Je kunt exponentiële formules herleiden tot logaritmische formules. Verder leer je wat een logaritmische schaalverdeling is en waar je deze voor kunt gebruiken.

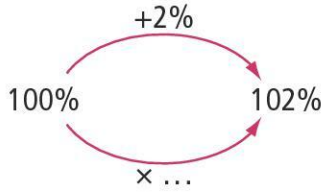
Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk:

- *Logisch redeneren en bewijzen* opdracht 16
- *Formules manipuleren* opdracht 29
- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 46

© Noordhoff Uitgevers bv

V1 Het aantal inwoners van een stad groeit gedurende lange tijd jaarlijks met 2%. In 2015 had de stad 125 300 inwoners.

a Bereken het aantal inwoners van de stad in 2016.
b Welke groeifactor hoort bij een groei van 2%?
c Bereken het aantal inwoners van de stad in 2022.
d Van een dorp neemt het aantal inwoners jaarlijks af met 3,5%. Welke groeifactor hoort bij een afname van 3,5%?



V2 Bereken de groeifactor bij de gegeven toenamen en afnamen.

a toename is 12,35%.
b afname is 0,2%
c afname is 45%.
d toename is 100%.

V3 Bereken bij de groeifactoren g de toename of afname in procenten.

a $g = 1{,}09$
b $g = 2{,}34$
c $g = 0{,}016$
d $g = 0{,}9207$

Theorie

Als g de groeifactor per tijdseenheid is, dan is de groeifactor per n tijdseenheden g^n.
De groeifactor voor een n-de deel van de tijdseenheid is $g^{\frac{1}{n}}$ ofwel $\sqrt[n]{g}$.

Voorbeeld 1

De groeifactor per jaar is gelijk aan 4.
Bereken de groeifactor per drie jaar, per half jaar en per maand.

Oplossing

De groeifactor per drie jaar is $4^3 = 64$.

De groeifactor per half jaar is $4^{\frac{1}{2}} = 2$.

De groeifactor per maand is $4^{\frac{1}{12}} \approx 1{,}1225$.

Voorbeeld 2

Een hoeveelheid neemt in een week exponentieel af van 512 naar 408.
Met hoeveel procent neemt de hoeveelheid per dag af?

Oplossing

De groeifactor per week is $408 : 512 = 0{,}7968\ldots$.

De groeifactor per dag is $0{,}7968\ldots^{\frac{1}{7}} \approx 0{,}968$.

Per dag is er een afname van 3,2%.

V4 Bereken de procentuele toe- of afname per uur. Rond zo nodig af op één decimaal.

a De toename is 34% per drie uur.
b De toename is 1,07% per minuut.
c De toename is 28% per etmaal.
d De afname is 0,04% per seconde.
e In vier uur neemt de hoeveelheid toe van 520 tot 632.
f In een half uur neemt de hoeveelheid af van 840 tot 711.

© Noordhoff Uitgevers bv

V5 Een insectenpopulatie neemt toe met 6,3% per dag.
Op 1 februari is het aantal insecten 14 800.
Bij dit groeiproces hoort de formule $N = 14\,800 \cdot 1{,}063^t$
met t in dagen en $t = 0$ op 1 februari.

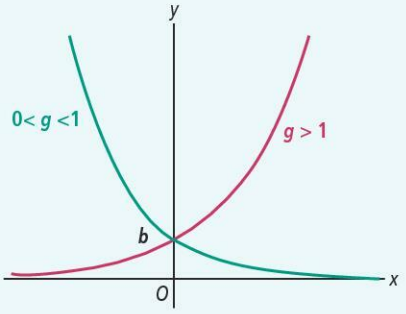
a Bereken het aantal insecten op 2 februari.
b Bereken het aantal insecten op 29 januari.
c Met hoeveel procent neemt het aantal insecten per week toe?
d Bereken de procentuele toename per acht uur.
e Bereken na hoeveel dagen het aantal insecten gegroeid is tot 50 000.

V6 Stel bij elke situatie met t in jaren het bijbehorende functievoorschrift op.

a Bij een groeiproces is de hoeveelheid op tijdstip $t = 0$ gelijk aan 1720 en deze hoeveelheid neemt jaarlijks toe met groeifactor 1,057.
b Bij een groeiproces met groeifactor 0,76 per kwartaal is de hoeveelheid op tijdstip $t = 1$ gelijk aan 152.
c Bij een exponentieel groeiproces, met op $t = 0$ een aantal van 69, neemt het aantal met 15% per maand toe.
d Een hoeveelheid neemt wekelijks af met 0,5%. Op $t = 0$ is de hoeveelheid 37 980.

Theorie

De grafiek van een exponentiële functie $f(x) = b \cdot g^x$ is stijgend als $g > 1$ en dalend als $0 < g < 1$.
Omdat $f(0) = b$, gaat de grafiek van f door $(0, b)$ op de verticale as.
De grafiek van de functie f heeft de x-as als horizontale asymptoot.



V7 Gegeven zijn de functies $f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $g(x) = 2 \cdot 1{,}7^x$,
$h(x) = 5 \cdot x^{1{,}7}$, $i(x) = 17 \cdot x^{\frac{1}{2}}$ en $j(x) = 7 \cdot 1{,}0001^x$.

a Welke van deze functies zijn exponentiële functies?
b Bij welke van deze exponentiële functies is de grafiek stijgend? Waarom?
c Geef bij elke exponentiële functie de coördinaten van het punt waarin de grafiek de y-as snijdt.

© Noordhoff Uitgevers bv

12.1 Logaritmen

Je leert
- wat een logaritme is
- hoe je logaritmen met je rekenmachine berekent

Leerroutes
- ondersteunend: 1—2—3—04—5—6—7—08—8
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7—8—9
- uitdagend: 1—2—3—4—6—7—8—9—U1

Het aantal bacteriën in een petrischaal kan zich elk uur vertienvoudigen.
Het aantal bacteriën A kan worden berekend met de formule $A = 10^t$ met t de tijd in uren.
- Leg uit waarom je wel makkelijk kunt berekenen na hoeveel uren er 1000 bacteriën zijn, maar niet na hoeveel uren er 2000 bacteriën zijn.

1 Tijdens een griepgolf verdubbelt het aantal griepgevallen zich elke week. Aan het begin waren er 150 griepgevallen.

a Wat betekent de oplossing van de vergelijking $150 \cdot 2^t = 1200$ voor het aantal griepgevallen en de tijd t?

b Laat zien dat je de vergelijking van opdracht a kunt schrijven als $2^t = 8$.

c Welke oplossing heeft de vergelijking $2^t = 8$?

d Met de vergelijking $150 \cdot 2^t = 1650$ kun je berekenen na hoeveel weken er 1650 griepgevallen zijn.
Laat zien dat je deze vergelijking kunt schrijven als $2^t = 11$.

e Waarom kun je de vergelijking $2^t = 11$ niet zonder rekenmachine oplossen?

f Bereken met je rekenmachine de oplossing van de vergelijking $2^t = 11$.

2 **a** Leg uit dat $x = 3$ de oplossing is van de vergelijking $5^x = 125$.

b Welke oplossing heeft de vergelijking $5^x = 625$?

c Waarom ligt de oplossing van de vergelijking $5^x = 500$ tussen 3 en 4?

d Tussen welke twee gehele waarden ligt de oplossing van de vergelijking $5^x = 100$?

e Welke van de vergelijkingen kun je zonder rekenmachine oplossen? Los deze vergelijkingen op.

A $3^x = 9$ C $3^x = 27$

B $3^x = 20$ D $3^x = 81$

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

De oplossing van de vergelijking $g^t = a$ heet de **logaritme** van a met **grondtal** g. Je noteert deze oplossing als $t = {}^g\log(a)$. Je spreekt dit uit als 'g log a'.
De basisregel voor logaritmen luidt als volgt:

Uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$ en omgekeerd:

uit ${}^g\log(a) = t$ volgt $a = g^t$.

Hierbij is $a > 0$, $g > 0$ en $g \neq 1$.

Voorbeeld 1

Los op: $3^x = 20$

Oplossing
$3^x = 20$ dus $x = {}^3\log(20)$

Voorbeeld 2

Los op: $4^t = 60$

Oplossing
$4^t = 60$ dus $t = {}^4\log(60)$

3 Schrijf de oplossingen van de vergelijkingen als een logaritme.

H

a $7^x = 4$ **c** $5^x = 20$

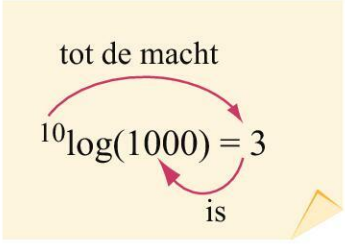
b $7^x = 10$ **d** $10^x = 14$

Ondersteunende route → maak opdracht 04

4 Gegeven zijn oplossingen van exponentiële vergelijkingen. Schrijf bij elke oplossing de bijbehorende exponentiële vergelijking op.

a $x = {}^3\log(5)$ **c** $x = {}^2\log(100)$

b $x = {}^7\log\left(\frac{1}{2}\right)$ **d** $x = {}^3\log(81)$



5 **a** Zoek de log-toets op je rekenmachine en bereken log(5), log(10), log(50), log(100) en log(1000).
b Waaruit blijkt dat 10 het grondtal van de log-toets op je rekenmachine is?
c Voor welke waarde van x is $\log(x) = 5$?
d Bereken log(0,0001) en verklaar de uitkomst.

6 Logaritmen met een grondtal dat niet gelijk is aan 10, kun je met je rekenmachine berekenen.

a Vul in: ${}^2\log(8) = 3$ want $2^{\cdots} = \ldots$.

b Bereken log(8) en log(2). Ga na dat ${}^2\log(8) = \dfrac{\log(8)}{\log(2)}$

c Controleer op dezelfde manier dat ${}^3\log(81) = \dfrac{\log(81)}{\log(3)}$

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Op rekenmachines zit een log-toets. Op de meeste rekenmachines wordt daarbij het grondtal niet vermeld. Het grondtal bij deze logaritme is 10. Als ergens log(…) staat, wordt ${}^{10}\log(\ldots)$ bedoeld.

Je kunt met behulp van de rekenregel ${}^{g}\log(a) = \dfrac{\log(a)}{\log(g)}$ elke logaritme met je rekenmachine berekenen.

Voorbeeld

Bereken ${}^{7}\log(20)$ en ${}^{\frac{1}{2}}\log(0{,}7)$.

Oplossing

${}^{7}\log(20) = \dfrac{\log(20)}{\log(7)} \approx 1{,}54$

${}^{\frac{1}{2}}\log(0{,}7) = \dfrac{\log(0{,}7)}{\log(\frac{1}{2})} \approx 0{,}51$

→ Instructie rekenmachine | Logaritmen

7 H

Bereken de logaritmen. Rond af op twee decimalen.

a ${}^{9}\log(35)$

b ${}^{\frac{1}{3}}\log(128)$

c ${}^{5}\log(10)$

d ${}^{4}\log\left(\frac{1}{13}\right)$

e $\log(450)$

f ${}^{250}\log(45)$

Ondersteunende route → maak opdracht O8

8 H

a De oplossing van de vergelijking $1{,}54^t = 6{,}72$ is $t = {}^{1{,}54}\log(6{,}72)$.
Bereken met je rekenmachine de waarde van t in twee decimalen.

b Laat zien dat je de vergelijking $5 \cdot 2{,}7^t = 150$ kunt herleiden tot $2{,}7^t = 30$.

c Los de vergelijking $2{,}7^t = 30$ op. Schrijf het antwoord als logaritme en rond vervolgens af op twee decimalen.

d Los op, schrijf het antwoord als een logaritme en rond weer af op twee decimalen.

A $120 \cdot 3^t = 600$

B $1{,}02^t + 14 = 17{,}5$

C $1500 \cdot 0{,}35^t = 300$

D $0{,}78 \cdot 1{,}56^t + 3{,}05 = 5$

9

De temperatuur van een voorwerp neemt elke minuut met 2,5% af. Om 09.00 uur is de temperatuur 75 °C.
Bereken met behulp van logaritmen op welk tijdstip de temperatuur gedaald is tot 40 °C.

Uitdagende route → maak opdracht U1

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

04 **a** Je ziet vier exponentiële vergelijkingen en vier oplossingen.
Geef aan welke oplossing bij welke vergelijking hoort.

1	$3^x = 10$	A	$x = {}^8\log(500)$
2	$3^x = 5$	B	$x = {}^3\log(10)$
3	$5^x = 3$	C	$x = {}^5\log(3)$
4	$8^x = 500$	D	$x = {}^3\log(5)$

b Vul in.
De oplossing van de vergelijking $3^x = 17$ is $x = \cdots\log(\ldots)$.

De oplossing van de vergelijking $5^t = 67$ is $t = \cdots\log(\ldots)$.

c Vul in.
$x = {}^2\log(7)$ is de oplossing van de vergelijking $2^x = \ldots$

$x = {}^5\log(60)$ is de oplossing van de vergelijking $\ldots^x = 60$.

Schrijf bij elke oplossing een exponentiële vergelijking op.

d $x = {}^3\log(35)$ **f** $x = {}^2\log(88)$

e $x = {}^6\log\left(5\frac{1}{2}\right)$ **g** $x = {}^5\log(25)$

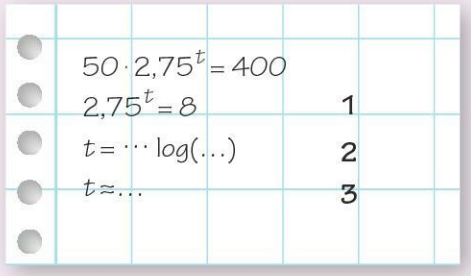
08 Op het blaadje is een begin gemaakt met het oplossen van de vergelijking $50 \cdot 2{,}75^t = 400$.

a Welke bewerking is bij stap 1 uitgevoerd?

b Maak de berekening op het blaadje verder af en bereken t in twee decimalen.

c Gegeven is de vergelijking $4 \cdot 7^p - 21 = 78$.
Laat zien dat je deze vergelijking kunt herleiden tot $7^p = 24{,}75$.

d Bereken p in twee decimalen.



Uitdagende opdrachten

U1 De oppervlakte van waterplanten op een meer groeit exponentieel. Aan het begin is er 1 m^2 aan waterplanten. Per week verdubbelt de oppervlakte zich.

a Geef de exacte oplossing van $2^t = 9$.

b Wat betekent de oplossing van opdracht a voor de oppervlakte van de waterplanten?

c Waarom duurt het één week langer om 18 m^2 waterplanten te krijgen?

d Hoe kun je het antwoord van opdracht c gebruiken om te berekenen na hoeveel weken er 144 m^2 aan waterplanten op het meertje groeit?

© Noordhoff Uitgevers bv

12.2 Verdubbelingstijd en halveringstijd

Je leert
- hoe je de verdubbelingstijd en de halveringstijd met logaritmen berekent

Leerroutes
- ondersteunend: 10—O11—11—12—O13—14—15—17
- doorlopend: 10—11—12—13—14—15—16—17
- uitdagend: 10—12—14—15—16—17—U2—U3

Internet of Things (IoT) apparaten zijn apparaten die verbinding kunnen maken met het internet. Het aantal Internet of Things apparaten in 2018 was 7,11 miljard. De verwachting is dat dit aantal tot 2025 met ongeveer 0,486% per week zal stijgen.
- Zal het aantal apparaten voor 2025 zijn verdubbeld?

10 Op 1 januari 1998 hadden 200 van de 6000 studenten op een hbo-opleiding een mobiele telefoon. Het aantal studenten met een mobiele telefoon nam exponentieel toe met groeifactor 1,3 per jaar.
Het totaal aantal studenten op de hbo-opleiding veranderde gedurende de jaren niet.

a Geef een formule waarmee je het aantal gebruikers A van de mobiele telefoon t jaar na 1998 kunt berekenen.
b Plot en schets de grafiek bij de formule voor $0 \le t \le 10$.
c Wanneer hadden 3000 studenten een mobiele telefoon?
d In welke maand van welk jaar had 40% van de studenten een mobiele telefoon?
e Leg uit dat je de tijd, nodig om het aantal gebruikers van een mobiele telefoon te verdubbelen, kunt vinden door de vergelijking $200 \cdot 1{,}3^t = 400$ op te lossen.
f Waarom mag je de vergelijking $200 \cdot 1{,}3^t = 400$ vereenvoudigen tot $1{,}3^t = 2$?
g Geef de oplossing van de vergelijking van opdracht f als logaritme.
h In welk jaar is het aantal gebruikers van een mobiele telefoon verdubbeld?

Theorie

Bij een exponentieel groeiproces met groeifactor g is de **verdubbelingstijd** de tijd die nodig is om een hoeveelheid te verdubbelen. Deze tijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = 2$. De verdubbelingstijd is dus $t = {}^g\log(2)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld 1

De visstand in een meer neemt toe met 3% per jaar. Na hoeveel jaar is het aantal vissen verdubbeld?

Oplossing

De toename is 3%, de groeifactor is 1,03.

$1{,}03^t = 2$ geeft $t = {}^{1{,}03}\log(2) = \dfrac{\log(2)}{\log(1{,}03)} \approx 23{,}4$.

Na ruim 23 jaar is het aantal vissen verdubbeld.

Voorbeeld 2

Het aantal algen A na t dagen kun je berekenen met de formule $A = 3500 \cdot 1{,}18^t$.
Na hoeveel dagen is het aantal verdubbeld?

Oplossing

$3500 \cdot 1{,}18^t = 7000$ ofwel $1{,}18^t = 2$

$t = {}^{1{,}18}\log(2) = \dfrac{\log(2)}{\log(1{,}18)} \approx 4{,}19$

Na ruim 4 dagen is het aantal algen verdubbeld.

Ondersteunende route → maak opdracht 011

11 H

a Het volume van de stam van een spar neemt per jaar toe met 5%.
Stel een vergelijking op waarmee je de verdubbelingstijd voor het volume kunt vinden.

b Bereken de verdubbelingstijd van opdracht a. Rond af op hele jaren.

12 Medicijnen worden in het lichaam opgenomen en daar afgebroken. Meestal neemt de werkzame hoeveelheid van zo'n middel exponentieel af. Van het slaapmddel Temazepam is bekend dat elk uur 20% van de werkzame hoeveelheid afgebroken wordt.

a Hoe groot is de groeifactor per uur die hoort bij de hoeveelheid Z die nog in het lichaam aanwezig is?

b Geef een formule voor Z. Ga uit van een beginhoeveelheid van 50 mg.

c Hoeveel mg is er nog over na 12 uur?

d Onderzoek hoelang het duurt tot de helft van het medicijn nog in het lichaam aanwezig is. Geef het antwoord in minuten nauwkeurig.

Theorie

De halveringstijd is de tijd die nodig is om een hoeveelheid te halveren. Deze tijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = \frac{1}{2}$.

De halveringstijd is dus $t = {}^g\log\left(\frac{1}{2}\right)$.

Voorbeeld

Bereken de halveringstijd bij een afname van 8% per dag.

Oplossing

De afname is 8%, de groeifactor is 0,92.

$0{,}92^t = \frac{1}{2}$

$t = {}^{0{,}92}\log\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(0{,}92)} \approx 8{,}31$

De halveringstijd is 8,31 dagen.

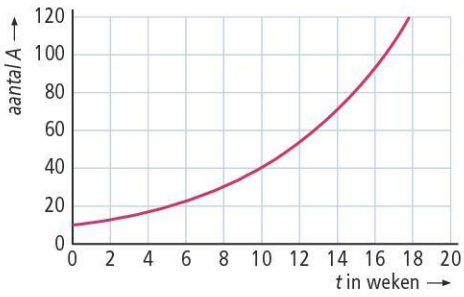
© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O13

13 H
a Bereken de halveringstijd bij een groeifactor 0,25 per uur.
b Bereken de halveringstijd bij een groeifactor 0,9 per maand.
c Bereken de halveringstijd bij een afname met 5% per jaar.

14 In een land aan de Middellandse Zee is de inflatie 11% per jaar. Een inwoner, Petros, heeft geen vertrouwen in de plaatselijke bank en stopt zijn geld in plaatselijke valuta ter waarde van € 25.000,- onder zijn matras. Door de inflatie zal dit geld dan minder waard worden.
a Na hoeveel tijd is de waarde van dit bedrag gehalveerd?
b Hoe groot is de waarde van dit bedrag na drie keer de halveringstijd?

15 In de grafiek zie je het aantal muizen A na het aantal weken t. Op tijdstip $t = 0$ zijn er 10 muizen.
a Lees uit de grafiek af hoe groot de verdubbelingstijd is.
b Na hoeveel weken zijn er 40 muizen?
c Verklaar het antwoord van opdracht b met behulp van de verdubbelingstijd.
d Na hoeveel weken zijn er 80 muizen?
e Op welk tijdstip t is $A = 160$?



16 De halfwaardetijd van een radioactieve stof is de tijd waarna van een oorspronkelijke hoeveelheid stof nog precies de helft over is. De stof Radium-228 heeft een halfwaardetijd van 6,6 jaar.
a Leg uit dat de groeifactor van de hoeveelheid straling per 6,6 jaar gelijk is aan 0,5.
b Hoe groot is de groeifactor per jaar?
c Bereken na hoeveel jaar de straling met 90% is afgenomen. Rond af op één decimaal.

17 Wanneer je een camera richt op een monitor en het opgenomen beeld afbeeldt op dezelfde monitor, krijg je het resultaat dat je op de foto ziet. Er is hier sprake van het Droste-effect, vernoemd naar een pakje cacao van het merk Droste.
De monitor hiernaast heeft een diameter van 48 cm. Van elke volgende monitor op het scherm is de diameter de helft kleiner.
a Bereken de diameter van de vijfde monitor in de rij.
b Bereken van welke monitor in de rij de diameter voor het eerst kleiner is dan 1 mm.

Uitdagende route → maak opdracht U2 en U3

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

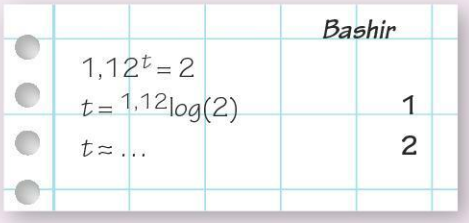
O11 De hoeveelheid algen neemt met 12% per week toe.

a Laat zien dat de groeifactor 1,12 is.

b Op het blaadje is Bashir begonnen met het berekenen van de verdubbelingstijd.
Waarom schrijft hij de vergelijking $1{,}12^t = 2$ op?

c Leg uit wat er in stap 1 is gebeurd.

d Gebruik in stap 2 de regel ${}^g\log(a) = \dfrac{\log(a)}{\log(g)}$ om de berekening van Bashir af te maken.



O13 De hoeveelheid koolwitjes neemt met 24% per week af.

a Laat zien dat de groeifactor 0,76 is.

b Op het blaadje is Merel begonnen met het berekenen van de halveringstijd.
Waarom schrijft ze de vergelijking $0{,}76^t = \frac{1}{2}$ op?

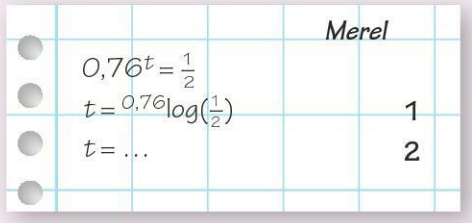
c Leg uit wat er in stap 1 is gebeurd.

d Gebruik in stap 2 de regel ${}^g\log(a) = \dfrac{\log(a)}{\log(g)}$ om de berekening van Merel af te maken.

e Bereken de halveringstijd bij een groeifactor 0,35 per dag.

f Bereken de halveringstijd bij groeifactor 0,89 per week.

g Bereken de halveringstijd bij een afname met 7% per jaar.



Uitdagende opdrachten

U2 Het aantal insecten neemt elke week met een vast percentage toe. Na drie weken waren er 8000 insecten. Na tien weken waren er 11 000 insecten.
Bereken de verdubbelingstijd van het aantal insecten in weken. Rond af op één decimaal.

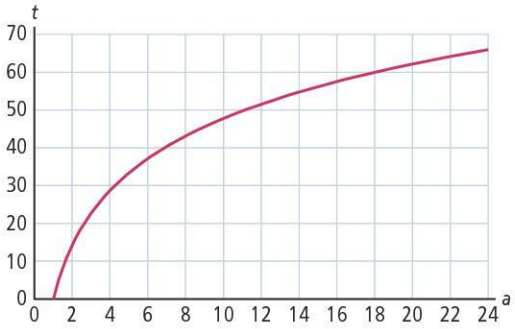
U3 Van twee bacteriesoorten wordt het aantal bacteriën vergeleken.
Van soort A neemt het aantal bacteriën elk uur met p% af.
Van soort B neemt het aantal bacteriën elk uur met p% toe.
De halveringstijd van het aantal bacteriën van soort A gelijk is aan 6,52 uur.
Bereken de verdubbelingstijd in uren van het aantal bacteriën van soort B. Rond af op twee decimalen.

© Noordhoff Uitgevers bv

12.3 Grafieken van logaritmische functies

Je leert
- wat de kenmerken van de grafiek van de logaritmische functie $f(x) = {}^{9}\log(x)$ zijn

Leerroutes
- ondersteunend: 18—19—020—21—22—23—024—25
- doorlopend: 18—19—20—21—22—23—24—25
- uitdagend: 18—19—20—22—23—24—25—U4



In de grafiek is het verband weergegeven tussen het aantal deelnemers a aan een mars in duizendtallen en de tijd t in minuten.
- Dion beweert dat het aantal deelnemers steeds minder snel groeit. Ben je het met Dion eens?

18 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x$ en $g(x) = {}^{2}\log(x)$.

a Vul de tabel in.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	…	…	…	…	…	…

b Vul de tabel in.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$g(x)$	…	…	…	…	…	…

c Teken de grafieken van f en g in één figuur.

d Teken ook de lijn $y = x$ in je figuur. Wat valt je op?

De functie $g(x) = {}^{2}\log(x)$ kun je invoeren op je rekenmachine door gebruik te maken van de rekenregel

$${}^{g}\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$$

Je voert dan $y = \log(x) / \log(2)$ in.

19 Gegeven zijn de functies $f(x) = 5^x$ en $k(x) = {}^{5}\log(x)$.

a Plot de grafieken van f en k.

b Geef de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y-as.

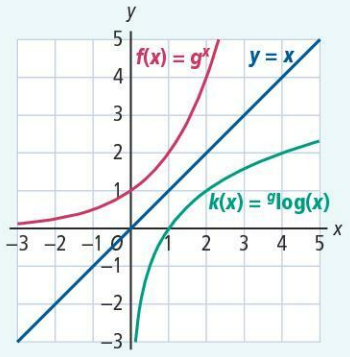
c Geef de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van k met de x-as.

d Elk van deze grafieken heeft een asymptoot. Geef een vergelijking van de asymptoten.

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

De grafieken van $f(x) = g^x$ en $k(x) = {}^g\log(x)$ zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.
De grafiek van f snijdt de y-as in het punt $(0, 1)$, want $g^0 = 1$.
De grafiek van k snijdt de x-as in het punt $(1, 0)$, want ${}^g\log(1) = 0$.
Bij beide functies geldt dat het grondtal g positief is, maar niet gelijk aan 1.



Ondersteunende route → maak opdracht O20

20 H

Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^{1,2}\log(x)$ en $g(x) = {}^{0,8}\log(x)$.

a Plot de grafieken van f en g.

b Geef de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g met de horizontale as.

c De grafiek van h is het spiegelbeeld van de grafiek van f in de lijn $y = x$.
Geef het functievoorschrift van h.

d Geef de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van h met de verticale as.

21

De formule $t = {}^{11}\log(A)$ hoort bij de groei van een hoeveelheid bacteriën A. Hierbij is t de tijd in uren na het begin van het experiment.

a Plot de grafiek van t.

b Geef de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de horizontale as en leg uit wat dit betekent voor het aantal bacteriën.

c Is de grafiek van t afnemend of toenemend stijgend?

d Wat betekent je antwoord van opdracht c voor de toename van het aantal bacteriën?

22

Het aantal inwoners in een dorp neemt elk jaar met een vast percentage af. Bij het aantal inwoners A in tienduizendtallen hoort de formule $t = {}^{0,97}\log(A)$. Hierin is t de tijd in jaren na 1 januari 2005.

a Plot de grafiek van t.

b Op wat voor manier stijgt of daalt de grafiek van t?

c Wat betekent het snijpunt van de grafiek met de horizontale as voor het aantal inwoners?

d In welk jaar heeft het dorp nog maar 8000 inwoners?

© Noordhoff Uitgevers bv

23 H

Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^3\log(x)$ en $g(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log(x)$.

a Plot de grafieken van f en g.

b Welke grafiek is afnemend stijgend?

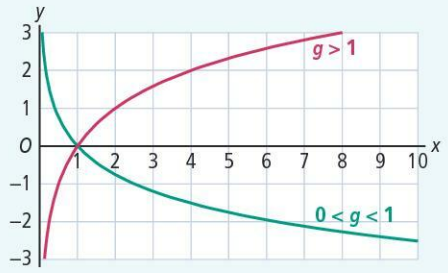
c Op wat voor manier stijgt of daalt de andere grafiek?

d Hoe ontstaat de grafiek van de functie $h(x) = 4 + {}^3\log(x)$ uit de grafiek van f?

e Hoe ontstaat de grafiek van $j(x) = -3 + {}^{\frac{1}{3}}\log(x)$ uit de grafiek van g?

Theorie

De grafiek van een logaritmische functie $f(x) = {}^g\log(x)$ is afnemend dalend voor $0 < g < 1$ en de grafiek is afnemend stijgend voor $g > 1$.
De grafiek van $h(x) = a + {}^g\log(x)$ ontstaat door de grafiek van $f(x) = {}^g\log(x)$, a eenheden omhoog te verschuiven.



Ondersteunende route → maak opdracht O24

24 H

Vier functies en vier grafieken zijn gegeven.

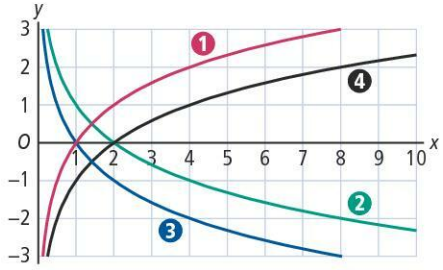
$f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(x) + 1$

$g(x) = {}^2\log(x)$

$h(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$

$i(x) = {}^2\log(x) - 1$

Welke grafiek hoort bij welke functie?



25

De volumeknop van een versterker kan gedraaid worden vanuit stand 0 naar stand 18. In stand 0 geeft de versterker geen geluid. In stand 18 geeft de versterker het maximale geluidsniveau. Er geldt de formule $P = a \cdot \log(s + 1)$. Hierin is s de stand van de volumeknop, P het percentage van het maximale geluidsniveau en a een constante.

a Toon aan dat $a = 78{,}2$.

b Plot de grafiek van P. Op wat voor manier stijgt of daalt de grafiek van P?

c Wat is de praktische betekenis van deze stijging of daling?

d In welk punt snijdt de grafiek de horizontale as? Wat is de praktische betekenis van dit snijpunt?

e Bij welke standen van de volumeknop geldt $P > 50$?

Uitdagende route → maak opdracht U4

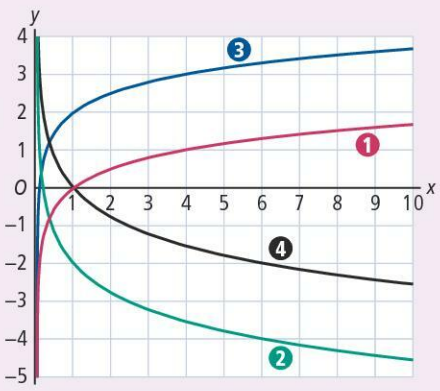
© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O20 Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^{0,75}\log(x)$ en $g(x) = {}^{1,25}\log(x)$.

- **a** Plot de grafieken van f en g.
- **b** Laat zien dat het punt (1, 0) zowel op de grafiek van f als de grafiek van g ligt.
- **c** Waarom ligt dit punt op de horizontale as?
- **d** Vul in: het spiegelbeeld van de grafiek van $g(x) = {}^{1,25}\log(x)$ in de lijn $y = x$ is de grafiek van $h(x) = \ldots^{x}$.
- **e** Vul in: de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van h met de verticale as zijn (0, …).

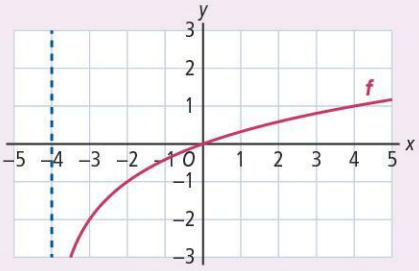
O24 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 + {}^{4}\log(x)$, $g(x) = {}^{0,4}\log(x)$, $h(x) = {}^{4}\log(x)$ en $i(x) = -2 + {}^{0,4}\log(x)$.
De bijbehorende grafieken zijn in een assenstelsel getekend.



- **a** Vul in: de grafiek van f is afnemend … omdat het grondtal groter is dan ….
- **b** Waarom is de grafiek van g afnemend dalend?
- **c** Geef van de grafieken van h en i aan of ze afnemend stijgend of afnemend dalend zijn.
- **d** De grafieken van f en h hebben hetzelfde grondtal. Vul in: de grafiek van f ontstaat door elke punt op de grafiek van h … omhoog te verschuiven.
- **e** Hoe ontstaat de grafiek van i uit de grafiek van g?
- **f** Welke grafiek hoort bij welke functie?

Uitdagende opdrachten

U4 Gegeven is de grafiek van een functie $f(x) = p + {}^{2}\log(x + 4)$.
De grafiek van f gaat door de oorsprong.
Onderzoek met behulp van een berekening of het punt (12, 2) op de grafiek van f ligt.



© Noordhoff Uitgevers bv

12.4 Formules met logaritmen

Je leert
- hoe je een exponentiële formule herleidt tot een logaritmische formule

Leerroutes
- ondersteunend: 26—27—028—029—29—30—31—32—33
- doorlopend: 26—27—28—29—30—31—32—33—34
- uitdagend: 26—27—29—30—31—32—33—34—U5

Een bepaalde heteluchtballon kan bij een buitentemperatuur van 0 °C ongeveer 334 kg tillen. Bij elke temperatuurstijging van 10 °C, wordt dit gewicht 12% minder. Er bestaat een verband tussen het gewicht G in kg en de temperatuur t in °C.
- Hoe kun je aan de hand van het gewicht dat de ballon kan tillen de buitentemperatuur bepalen?

26 Uit $5^a = 7$ volgt $a = {}^5\log(7)$. Zo kun je de formule $5^a = b$ herschrijven tot $a = {}^5\log(b)$.
Herschrijf op dezelfde manier tot een formule met een logaritme.

a $8^a = b$

b $0{,}5^k = n$

c $A = 1{,}3^n$

d $p = 3^q$

Uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$ en omgekeerd.

27 Op het blaadje herschrijft Corinne de formule $y = 4^x + 6$.
a Leg uit wat er in stap 1 en stap 2 is gebeurd.
b Welke regel gebruikt Corinne in stap 3?
c Maak stap 3 af.

	Corinne	
$4^x + 6 = y$		1
$4^x = y - 6$		2
$x = \cdots\log(\ldots)$		3

Theorie

Een exponentiële formule kun je herleiden tot een logaritmische formule.
Je gebruikt de basisregel: uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$.
Zo kun je de formule $p = 3^q$ herleiden tot $q = {}^3\log(p)$.
In de formule $p = 3^q$ is p **uitgedrukt** in q, in de formule $q = {}^3\log(p)$ is q uitgedrukt in p.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $A = 0{,}1 \cdot 1{,}6^p$.
Druk p uit in A.

Oplossing

$0{,}1 \cdot 1{,}6^p = A$	links en rechts verwisseld
$1{,}6^p = 10A$	links en rechts $\times$ 10
$p = {}^{1{,}6}\log(10A)$	$g^t = a$ dus $t = {}^g\log(a)$

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $R = 3 + 5^{2t}$.
Druk t uit in R.

Oplossing

$3 + 5^{2t} = R$	links en rechts verwisseld
$5^{2t} = R - 3$	links en rechts $-$ 3
$2t = {}^5\log(R - 3)$	$g^t = a$ dus $t = {}^g\log(a)$
$t = \frac{1}{2} \cdot {}^5\log(R - 3)$	links en rechts $\times \frac{1}{2}$

Ondersteunende route → maak opdracht O28

28 Druk p uit in q.

H

a $q = 14^p$
b $q = 9 + 2^p$
c $q = 9 \cdot 10^p$
d $q = 5 \cdot 3^p$
e $q = 8^p - 5$
f $q = 3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^p$

Ondersteunende route → maak opdracht O29

29 Druk t uit in N.

H

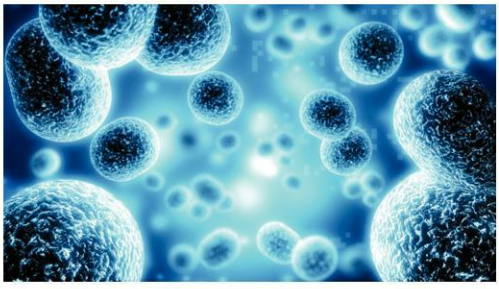
a $N = 3 \cdot 4^{0{,}2t}$
b $N = -16 + 4 \cdot 5^t$
c $6 \cdot 10^{2t} + 2 = 8N$
d $3N - 2 = \frac{1}{12} \cdot 4^t$
e $15N \cdot 6^t = 5$
f $4N + 2 \cdot 2^t = 16$

30 Een batterij verliest bij gebruik 4% van zijn lading per uur, en is onbruikbaar als er minder dan 20% van de lading over is.

a Leg uit dat je het percentage P van de lading na t uren gebruik kunt berekenen met de formule $P = 100 \cdot 0{,}96^t$.
b Herleid de formule waarbij je t uitdrukt in P.
c Gebruik je formule van opdracht b om te berekenen na hoeveel uur de batterij onbruikbaar is geworden.

31 Een aantal bacteriën verdubbelt zich per dag. Op het tijdstip $t = 0$ is het aantal bacteriën gelijk aan 600.

a Geef een formule N die bij dit groeiproces hoort. Neem de tijd t in dagen.
b Geef een formule waarbij t is uitgedrukt in N.
c Na hoeveel dagen zijn er 30 000 bacteriën? Geef eerst de exacte waarde en daarna een benadering in twee decimalen.



© Noordhoff Uitgevers bv

32 In de tabel staat voor een aantal jaren het aantal knaagdieren in een natuurgebied op 1 januari.

jaartal	2018	2019	2020	2021	2022
aantal knaagdieren	8000	7600	7220	6859	6516

a Laat zien dat het aantal knaagdieren exponentieel afneemt met 5% per jaar.
b Geef een formule waarmee je het aantal knaagdieren K kunt berekenen na t jaren met $t = 0$ op 1 januari 2018.
c Bereken de halveringstijd van het aantal knaagdieren.
d Druk t uit in K.
e Controleer je antwoord van opdracht c met behulp van de formule van opdracht d.

33 Een kop thee wordt ingeschonken. De temperatuur T in °C van de thee in het kopje is te berekenen met de formule $T = 21 + 66 \cdot 0{,}9^t$. Hierbij is t de tijd in minuten met $t = 0$ op het moment van inschenken.

a Hoeveel graden was de temperatuur van de thee toen hij ingeschonken werd?
b Hoeveel graden is de omgevingstemperatuur?
c De tijd t kun je uitdrukken in de temperatuur T.

Toon aan dat je de formule $t = {}^{0{,}9}\log\left(\frac{T-21}{66}\right)$ krijgt.

d Thee is goed drinkbaar als de temperatuur tussen 35 °C en 60 °C ligt.
Bereken hoeveel minuten de thee goed drinkbaar is. Rond je antwoord af op één decimaal.

34 Voor het verband tussen de variabelen R en S geldt de formule $R = b \cdot 2{,}3^S$.

a Herleid de formule waarbij je S uitdrukt in R.
b Bij $R = 10$ geldt $S = 2{,}5$.
Bereken de waarde van b. Rond af op twee decimalen.

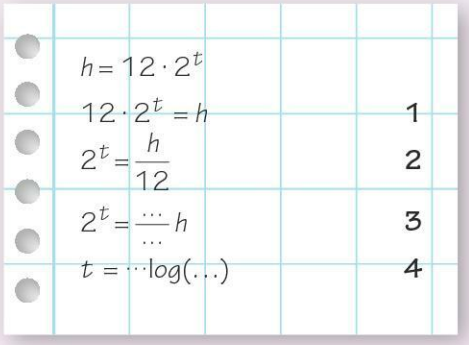
Uitdagende route → maak opdracht U5

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O28 Gegeven is de formule $h = 12 \cdot 2^t$.
Je gaat t uitdrukken in h, waarvoor je gebruikmaakt van de basisregel 'Uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$'. Om deze te kunnen gebruiken moet je de formule eerst herleiden tot de vorm $g^t = a$. Op het blaadje is dit uitgewerkt.

a Schrijf op wat er in de stappen 1, 2 en 3 is gebeurd.
b Van welke regel wordt in stap 4 gebruikgemaakt?
c Vul op het blaadje de ontbrekende getallen in.

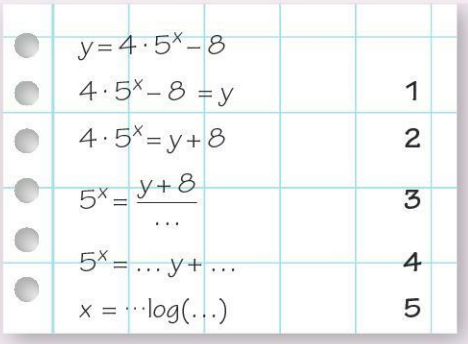


Druk t uit in h.

d $h = 9^t$
e $h = \frac{1}{10} \cdot 3^t$
f $h = 12^t + 8$
g $h = 5 + 6^t$
h $h = 2 \cdot 10^t$
i $h = 7 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^t$

O29 Gegeven is de formule $y = 4 \cdot 5^x - 8$.
Je gaat x uitdrukken in y. Op het blaadje zie je hoe de formule herschreven wordt waarbij x uitgedrukt is in y.

a Wat is er in de stappen 1 en 2 gebeurd?
b Welk getal hoort op de puntjes te staan bij stap 3? Waarom?
c Wat is er in stap 4 gebeurd?
d Vul op het blaadje de ontbrekende getallen in.
e Laat op dezelfde manier zien dat als je $y = 2 \cdot 5^x + 4$ herleidt tot een formule waarin je x uitdrukt in y, je de formule $x = {}^5\log\left(\frac{1}{2}y - 2\right)$ krijgt.



Uitdagende opdrachten

U5 Druk p uit in q.

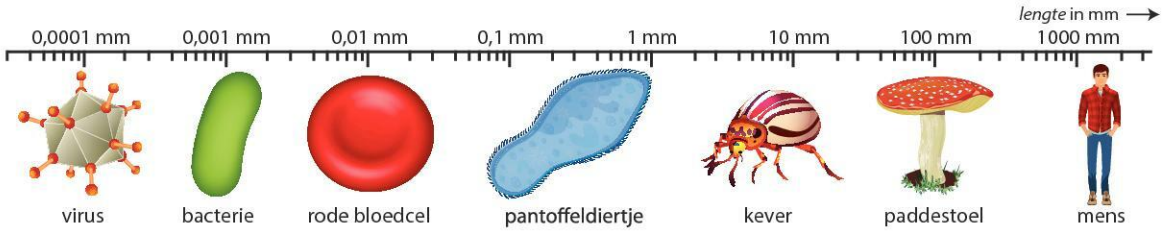
a $2(4p - 3) \cdot 3^q = 32$
b $10^p - 3 \cdot 10^p = 10q$
c $7 \cdot 3^{2p+2} - 14q = 0$
d $q = 2(3 - 5^{3p+4})$
e $7^{p \cdot q} = 10$
f $3^{2p-6} = 9^q$

© Noordhoff Uitgevers bv

12.5 Logaritmische schalen

Je leert
- wat een logaritmische schaalverdeling is
- hoe je een logaritmische schaalverdeling gebruikt

Leerroutes
- ondersteunend: 35—36—037—38—39—40
- doorlopend: 35—36—37—38—39—40
- uitdagend: 36—37—38—39—40—U6



Langs een horizontale as is een aantal afbeeldingen geplaatst.
- Hoeveel keer zo groot is een bacterie als een virus? En hoeveel keer zo groot is een rode bloedcel als een bacterie?
- Wat valt je op als je naar de schaalverdeling kijkt?

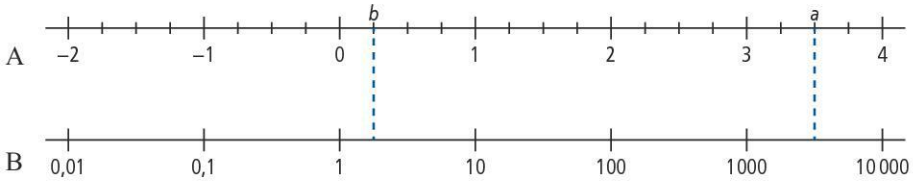
35 Van een aantal visjes is de lengte en het gewicht gemeten. De resultaten staan in de tabel.

lengte in mm	*gewicht* in mg
10	12
20	53
30	233
40	1029
50	4539

a Laat zien dat er een exponentieel verband bestaat tussen de lengte en het gewicht van de visjes.

b Teken een grafiek bij deze tabel. Neem op de horizontale as de lengte van een visje met een stapgrootte van 5 mm.

c Waarom is het lastig een goede schaalverdeling voor de verticale as te bedenken?



36 H Gegeven zijn twee schaalverdelingen A en B. Op de schaalverdeling B zijn machten van 10 weergegeven.

a Welke getallen horen er bij a en b op de schaalverdeling A?

b Schrijf de getallen van de schaalverdeling B als machten van 10.

c Welke machten van 10 horen er bij a en b op de schaalverdeling B?

d Geef de waarden die bij a en b horen op de schaalverdeling B. Schrijf de waarden als decimale getallen en rond daarbij af op twee decimalen.

e Iemand geeft het getal 550 aan op de schaalverdeling B. Welke getal hoort hierbij op de schaalverdeling A?

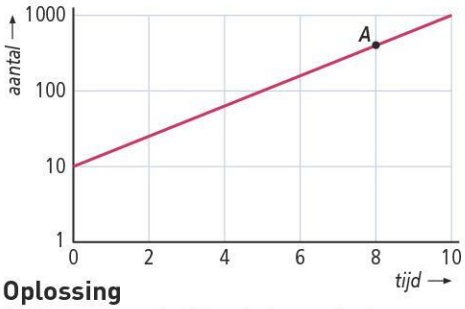
© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Bij een lineaire schaalverdeling wordt bij gelijke stappen telkens hetzelfde getal opgeteld.
Een schaalverdeling waar bij gelijke stappen telkens met dezelfde factor wordt vermenigvuldigd, heet een **logaritmische schaalverdeling** of kortweg **log-schaal**.
Je gebruikt een log-schaal als je zowel erg grote als erg kleine waarden in één grafiek moet verwerken.

Voorbeeld 1

Lees af wat het aantal is in punt A.

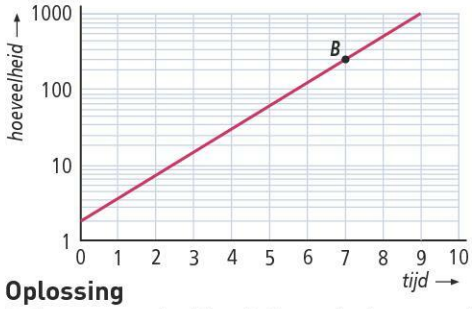


Oplossing

In het assenstelsel heeft de verticale as een logschaal.
Bij A ligt het aantal tussen $100 = 10^2$ en $1000 = 10^3$.
A ligt op $\frac{3}{5}$ deel van de stap tussen 10^2 en 10^3 dus het aantal is $10^{2\frac{3}{5}} = 10^{2,6}$ dus ongeveer 398.

Voorbeeld 2

Lees af wat de hoeveelheid is in punt B.



Oplossing

In het assenstelsel heeft de verticale as een logschaal.
De afstand van 10 tot 100 is even groot als die van 100 tot 1000. Tussen de getallen 100 en 1000 op de verticale as geven de horizontale lijnen de waarden 200, 300, 400 tot en met 900 weer.
De hoeveelheid in punt B is dus 300.

Ondersteunende route → maak opdracht 037

37 Gegeven is de exponentiële formule $y = 2 \cdot 10^x$.

a Vul de tabel in.

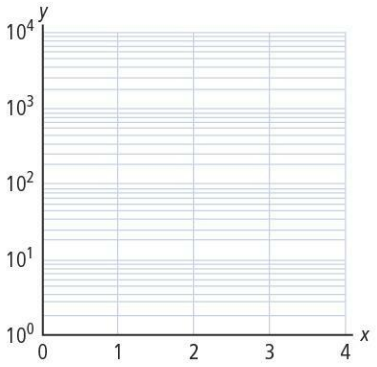
x	0	1	2	3	4
y	…	…	…	…	…

b Hoe kun je zien dat in het assenstelsel de verticale as een log-schaal heeft?

c Teken in het assenstelsel de grafiek bij de formule.

d Teken in hetzelfde assenstelsel de grafiek bij de exponentiële formule $y = 8000 \cdot 0{,}5^x$.

e Welke vorm hebben de grafieken?

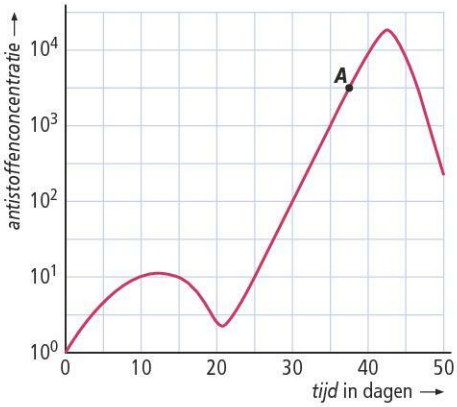


© Noordhoff Uitgevers bv

In een assenstelsel met op de verticale as een logaritmische schaalverdeling is de grafiek bij een exponentieel verband een rechte lijn.

38 H

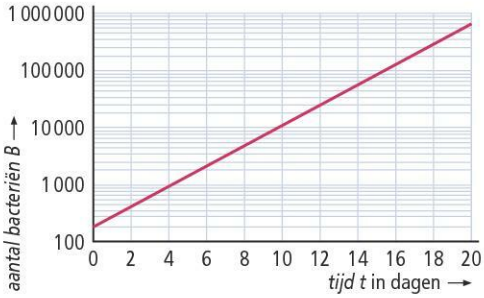
Als een lichaamsvreemde stof het lichaam van een zoogdier binnendringt, worden er antistoffen aangemaakt. In de grafiek zie je hoe het lichaam reageert als dit besmet wordt met een lichaamsvreemde stof. Het lichaam maakt eerst een hoeveelheid antistoffen aan, die daarna grotendeels weer verloren gaan. Bij een volgende besmetting maakt het lichaam snel een nog grotere hoeveelheid antistoffen aan.



a Lees af wanneer de concentratie 10, 100 en 1000 is.
b Leg uit dat de concentratie in punt A ongeveer 3162 is.
c De grafiek is tussen 25 en 40 dagen bij benadering een rechte lijn.
Lees de concentratie af bij 25 dagen en bij 40 dagen.
d Bereken de groeifactor per dag bij dit deel van de grafiek.
e Stel een formule op die bij dit deel van de grafiek hoort.

39

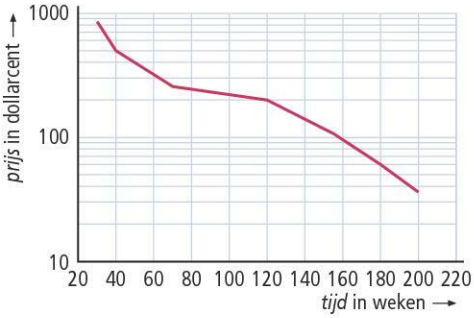
Voor een proef werd een kip bewaard in de koelkast die op 0 °C is ingesteld en een andere kip in een koelkast die op 6 °C is ingesteld. De beginhoeveelheid bacteriën was bij beide kippen even groot. In de figuur staat hoe het aantal bacteriën in de kip zich ontwikkelde bij de kip in de koelkast van 0 °C.



a Leg uit dat het aantal bacteriën exponentieel toenam.
b Stel een exponentiële formule op bij de grafiek.
c Welke verdubbelingstijd hoort er bij de grafiek?
d Bij de kip in de koelkast van 6 °C was het aantal bacteriën na 10 dagen 100 keer zo groot als het aantal bacteriën bij de kip in de koelkast van 0 °C op datzelfde moment.
Teken de grafiek van het aantal bacteriën in deze koelkast.
e Stel ook een formule op bij deze grafiek.

40

Het verband tussen de prijs van een cryptomunt en de tijd in weken na het begin van de verkoop is in een grafiek verwerkt.



a Welke prijs had de cryptomunt na 120 weken?
b Waarom mag je ervan uitgaan dat het verband tussen de prijs P van de cryptomunt en de tijd in weken t vrijwel exponentieel zal zijn?
c Teken een lijn die dit verband zo goed mogelijk weergeeft.
d Stel een formule op bij de lijn die je getekend hebt.
e Hoeveel zal de cryptomunt volgens je formule waard zijn na 250 weken?

Uitdagende route → maak opdracht U6

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O37 Bij het assenstelsel staan langs de verticale as machten van 10.

a Ga na dat $10^0 = 1$ en bereken ook de andere machten.

b Hoe kun je zien dat in het assenstelsel de verticale as een log-schaal heeft?

c Pijltje A staat bij een lijn tussen 10^2 en 10^3.
Ga na dat bij pijltje A de waarde 300 aangeeft.

d Welke waarde hoort bij de lijn van pijltje B?

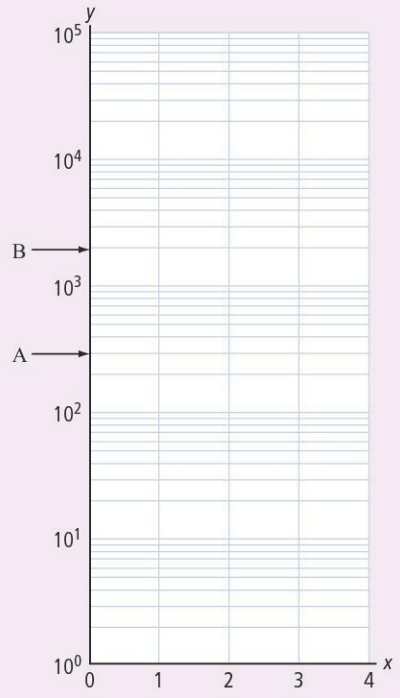
e Gegeven is de exponentiële formule $y = 3 \cdot 10^x$.
Vul de tabel verder in.

x	0	1	2	3	4
y	3	…	…	…	…

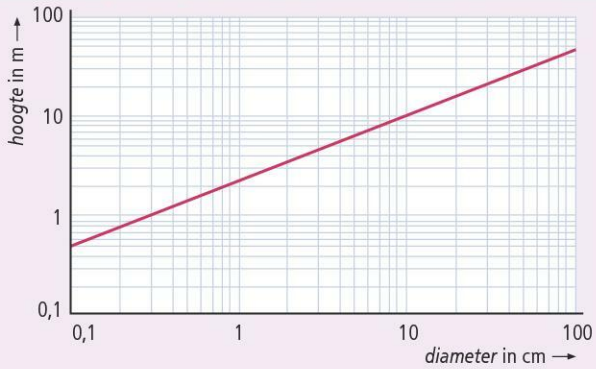
f Teken de punten uit de tabel in het assenstelsel en teken een vloeiende lijn door deze punten.

g Teken ook de grafiek bij de exponentiële formule $y = 800 \cdot 0{,}5^x$ in het assenstelsel.

h Welke vorm hebben de grafieken?



Uitdagende opdrachten



U6 In het assenstelsel zie je voor een bepaalde boomsoort het verband tussen de diameter van de stam in centimeters en de hoogte in meters. Bij het verband hoort een formule van de vorm $H = c \cdot d^a$.
Hierin is H de hoogte in meters en d de diameter in meters.
Leg uit hoe uit de grafiek volgt dat $c = 40$ en bereken de waarde van a. Rond de waarde van a af op twee decimalen.

© Noordhoff Uitgevers bv

41 Herleid de formules zo dat t wordt uitgedrukt in P.

a $P = 3^{2t+5}$

b $2P - 4 \cdot 6^t = 12$

c $P = 7(1 - 2^t)$

d $P = 2 \cdot 1{,}3^{2t} - 5$

42 Sinds het begin van deze eeuw wordt het totale energieverbruik E op aarde bijgehouden. Die gegevens vind je in de tabel.
De eenheid van het energieverbruik E is de energie die vrijkomt bij de verbranding van 1 ton olie.

jaar	E
2002	45 843
2003	47 126
2004	48 446
2005	49 802
2006	51 197
2007	52 630

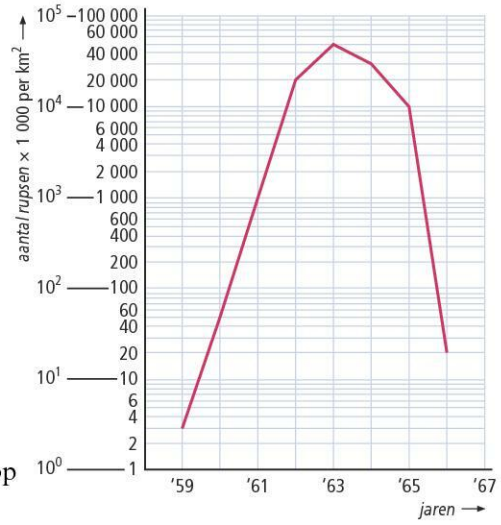
a Laat zien dat er sprake is van exponentiële groei van E en bereken de groeifactor per jaar voor het energieverbruik E. Rond je antwoord af op drie decimalen.

b Stel een formule op voor E. Kies $t = 0$ in het jaar 2002.

c Bereken de verdubbelingstijd bij deze exponentiële groei.

d Gebruik de formule van opdracht b om een voorspelling te doen over het energiegebruik in 2025.

43 In de periode van 1959 tot en met 1966 registreerde een bioloog in de Alpen het verloop van een rupsenplaag door telkens op 1 juli het aantal rupsen per km^2 vast te stellen.
In de grafiek is aangegeven hoe dit verloop is geweest.



a Van welke soort groei is er sprake tussen 1959 en 1962? Leg uit hoe je aan je antwoord komt.

b Bereken voor de periode 1959-1962 de groeifactor per jaar en de jaarlijkse procentuele toename.

c In hoeveel dagen verdubbelde het aantal rupsen per km^2 in de periode 1959-1962?

d Vul in: van 1 juli … tot 1 juli … was de jaarlijkse absolute toename van het aantal rupsen het grootst.

e Neem aan dat het aantal rupsen in de periode 1965-1966 exponentieel afnam.
Stel voor deze periode een formule op voor het aantal rupsen A per km^2. Neem voor t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 juli 1965.

44 Een patiënt krijgt 100 mg geneesmiddel toegediend door inspuiting in het bloed. Per dag wordt door het lichaam 25% van de aanwezige hoeveelheid afgebroken.

a Stel het functievoorschrift op waarmee de nog aanwezige hoeveelheid geneesmiddel g in mg na t dagen berekend kan worden.

b Bereken na hoeveel tijd er nog 15 mg geneesmiddel in het bloed zit. Geef je antwoord in uren nauwkeurig.

c Schrijf de halveringstijd van dit afbraakproces als een logaritme.

d Benader deze halveringstijd in uren nauwkeurig.

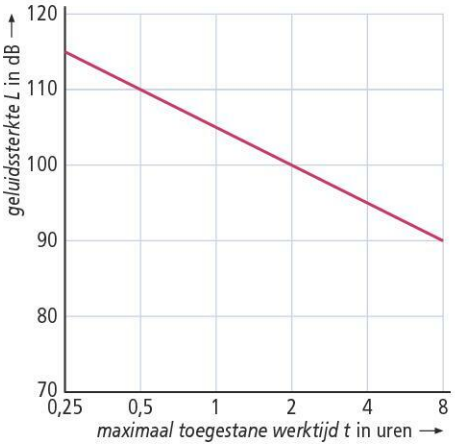
© Noordhoff Uitgevers bv

45 Van de radioactieve stof Jodium-131 is na 14 dagen 70% afgebroken. Van de radioactieve stof Cesium-137 is na 15 jaar 30% afgebroken.
Hoeveel keer langer is de halfwaardetijd van Cesium-137 dan die van Jodium-131?

46 In de Verenigde Staten heeft men rond 1990 vastgesteld dat geluidssterktes van meer dan 90 dB (decibel) waaraan iemand langer dan 8 uur per dag wordt blootgesteld, gehoorschade kunnen opleveren. Ter bescherming van de werknemers is daarom de volgende norm ingevoerd:
- bij een voortdurende geluidssterkte van 90 dB bedraagt de maximale werktijd 8 uur;
- bij elke toename van de geluidssterkte met 5 dB moet de maximale werktijd gehalveerd worden.

In het assenstelsel is een lijn getekend die het verband weergeeft tussen de geluidssterkte L in dB en de maximale toegestane werktijd t in uren zoals die gebruikt wordt in de VS.
De bijbehorende formule is $L = -16{,}6 \cdot \log(t) + 105$.
De Europese norm is strenger dan de norm van de VS:
- bij een voortdurende geluidssterkte van 80 dB bedraagt de maximale werktijd 8 uur;
- bij elke toename van de geluidssterkte met 3 dB moet de maximale werktijd gehalveerd worden.

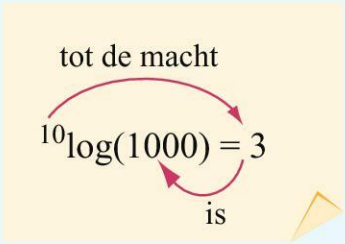
De geluidssterkte in twee fabrieken in de VS en in Europa is voor de werknemers hetzelfde. In de Amerikaanse fabriek mag je vanwege de geluidssterkte maximaal 6 uur per dag werken.
Onderzoek hoeveel tijd per dag men in de Europese fabriek maximaal zou mogen werken.
(*Ontleend aan het examen havo wiskunde B1 2001 tijdvak 1*)



Theorie

Logaritme en grondtal

De exacte oplossing van de vergelijking $g^t = a$ heet de logaritme van a met grondtal g. Je noteert deze oplossing als $t = {}^g\log(a)$. Je spreekt dit uit als 'g log a'.
De basisregel voor logaritmen luidt als volgt:
Uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$ en omgekeerd:
uit $t = {}^g\log(a)$ volgt $g^t = a$.
Hierbij is $a > 0$, $g > 0$ en $g \neq 1$.



Voorbeeld 1

Geef de oplossing van de vergelijking $12^t = 146$.

Oplossing
$12^t = 146$
$t = {}^{12}\log(146)$

Voorbeeld 2

Geef de oplossing van de vergelijking $0{,}5^t = 3$.

Oplossing
$0{,}5^t = 3$
$t = {}^{0{,}5}\log(3)$

S1 Los op. Schrijf het antwoord als een logaritme.

a $8^t = 3$

b $10^t = 50$

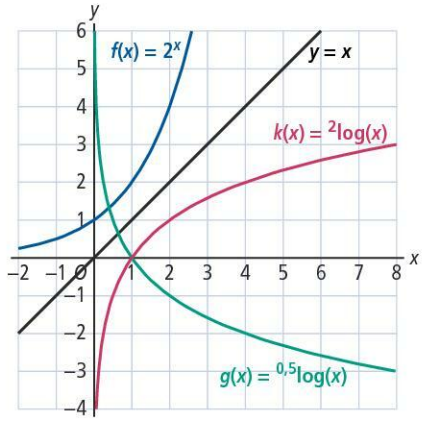
c $0{,}5^t = 0{,}1$

d $3^t = 24$

Theorie

Kenmerken van de grafiek van de logaritmische functie $f(x) = {}^g\log(x)$.

De grafieken van $f(x) = g^x$ en $k(x) = {}^g\log(x)$ zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.
De grafiek van f snijdt de y-as in het punt $(0, 1)$, want $g^0 = 1$.
De grafiek van k snijdt de x-as in het punt $(1, 0)$, want ${}^g\log(1) = 0$. Bij beide functies geldt dat het grondtal g positief is, maar niet gelijk aan 1.
Voor $0 < g < 1$ is de grafiek van een logaritmische functie $f(x) = {}^g\log(x)$ afnemend dalend en voor $g > 1$ afnemend stijgend.
De grafiek van $h(x) = a + {}^g\log(x)$ ontstaat door de grafiek van $f(x) = {}^g\log(x)$, a eenheden omhoog te verschuiven.



© Noordhoff Uitgevers bv

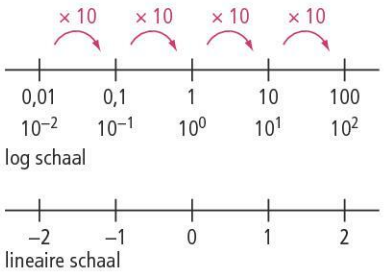
S2 **a** Op welke manier stijgt of daalt de grafiek van $f(x) = {}^{0,99}\log(x)$?

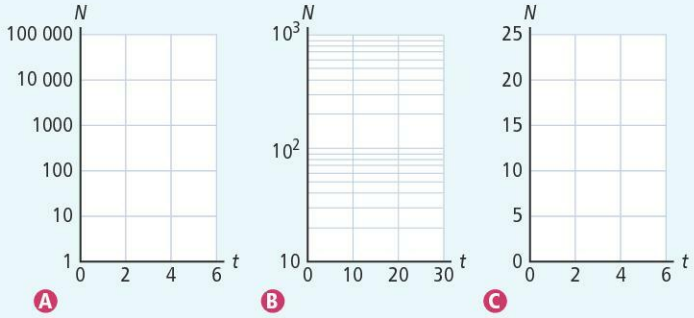
b Hoe ontstaat de grafiek van $g(x) = 7 + {}^{0,99}\log(x)$ uit de grafiek van f?

Theorie

Logaritmische schaalverdeling

Bij een lineaire schaalverdeling wordt bij gelijke stappen telkens hetzelfde getal opgeteld. Een schaalverdeling waar bij gelijke stappen telkens met dezelfde factor wordt vermenigvuldigd, heet een logaritmische schaalverdeling of kortweg log-schaal.





S3 Bij welke assenstelsels heeft de verticale as een logaritmische schaalverdeling? Leg uit hoe je dit kunt zien.

Vaardigheid

Je kunt logaritmen met je rekenmachine berekenen.

Je kunt met behulp van de rekenregel ${}^{g}\log(a) = \dfrac{\log(a)}{\log(g)}$ elke logaritme met je rekenmachine berekenen.

Voorbeeld 1

Los op: $1{,}5^t = 30$

Oplossing

$1{,}5^t = 30$

$t = {}^{1,5}\log(30)$

$t = \dfrac{\log(30)}{\log(1{,}5)} \approx 8{,}39$

S4 Los de vergelijking op. Schrijf je antwoord als logaritme en geef ook een benadering in twee decimalen.

a $4^x = 7$

b $2 \cdot 9^x = 14$

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheid

Je kunt de verdubbelingstijd en de halveringstijd met logaritmen berekenen.

Bij een exponentieel groeiproces met groeifactor g is de verdubbelingstijd de tijd die nodig is om een hoeveelheid te verdubbelen. Deze tijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = 2$. De verdubbelingstijd is dus $t = {}^g\log(2)$.
De halveringstijd is de tijd die nodig is om een hoeveelheid te halveren. Deze tijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = \frac{1}{2}$. De halveringstijd is dus $t = {}^g\log\left(\frac{1}{2}\right)$.

Voorbeeld

De export van uien neemt met 20% per jaar toe.
Bereken de verdubbelingstijd.

Oplossing

De groeifactor is 1,20 per jaar.
De verdubbelingstijd t bij een groeiproces met groeifactor 1,20 is $t = {}^{1,2}\log(2) \approx 3{,}802$ jaar.

S5

a Bereken de halveringstijd bij een groeifactor 0,8 per jaar.
b Bereken de verdubbelingstijd bij een groeifactor 1,8 per uur.
c Een hoeveelheid neemt in een week toe van 166 naar 221. Bereken de verdubbelingstijd. Geef je antwoord in dagen.

Vaardigheid

Je kunt een exponentiële formule herleiden tot een logaritmische formule.

Een exponentiële formule kun je herleiden tot een logaritmische formule.
Je gebruikt de basisregel: uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $r = 4 \cdot 1{,}5^s$.
Druk s uit in r.

Oplossing

$4 \cdot 1{,}5^s = r$
$1{,}5^s = \frac{1}{4}r$
$s = {}^{1,5}\log(\frac{1}{4}r)$

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $r = 8 + 0{,}95^s$.
Druk s uit in r.

Oplossing

$8 + 0{,}95^s = r$
$0{,}95^s = r - 8$
$s = {}^{0,95}\log(r - 8)$

© Noordhoff Uitgevers bv

S6 Druk q uit in p.

a $p = 2{,}3^q$

b $p = 5 + 2 \cdot 3^q$

c $p = 6^q - 3$

d $p = 0{,}25 \cdot 7^{5q}$

Vaardigheid

Je kunt een logaritmische schaalverdeling gebruiken.

Je gebruikt een logaritmische schaalverdeling als je zowel erg grote als erg kleine waarden in één grafiek moet verwerken. In een assenstelsel met op de verticale as een logaritmische schaalverdeling is de grafiek bij een exponentieel verband een rechte lijn.

Voorbeeld

Geef de waarde van het getal bij a op de getallenlijn.

Oplossing

Bij de schaal horen de machten 10^0, 10^1, 10^2 en 10^3.

a ligt tussen 10^1 en 10^2; $a = 10^{1\frac{1}{4}} = 10^{1{,}25}$

$a \approx 17{,}78$

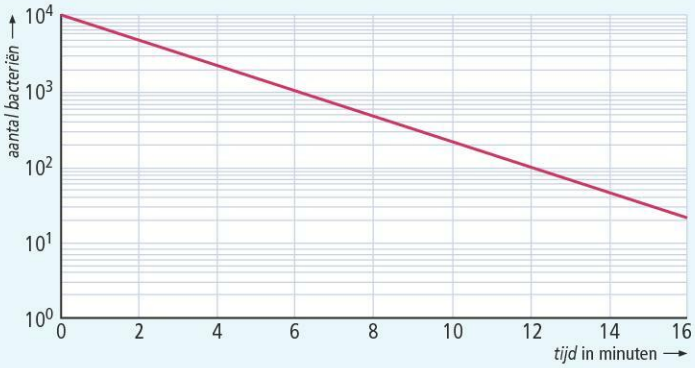
S7

a Bereken de waarde van het getal b in het voorbeeld.

b In de grafiek zie je het aantal bacteriën tijdens een experiment.
Hoeveel bacteriën waren er in het begin van het experiment?

c En hoeveel bacteriën waren er nog na 10 minuten?

d In een andere situatie groeit het aantal bacteriën exponentieel. Het aantal neemt tussen $t = 0$ en $t = 12$ toe van 50 naar 3000.
Teken de grafiek bij deze groei.



© Noordhoff Uitgevers bv

T1 Los op. Schrijf je antwoord als logaritme en geef een benadering in twee decimalen.

a $8^t = 5$

b $3^t + 1 = 14$

c $10^t = 19$

d $4^t - 2 = 12$

e $6 + 9^t = 23$

f $8 + 3 \cdot 5^t = 29$

T2 In een gebied op Antarctica leven 600 pinguïns. Hun aantal neemt elk jaar met 20% af.

a Na hoeveel jaar is het aantal pinguïns gehalveerd?

b Op een bepaald moment zijn er 100 pinguïns. Bereken hoeveel jaar het vanaf dan duurt totdat het aantal pinguïns is afgenomen tot 50.

c In hetzelfde gebied komen ook veel zeevogels en zeehonden voor. Het aantal zeevogels neemt elk jaar met 5,4% toe. Het aantal zeehonden neemt elk jaar met 1,8% af. Bereken het verschil tussen de verdubbelingstijd van het aantal zeevogels en de halveringstijd van het aantal zeehonden. Rond je antwoord af op hele jaren.

T3 Bij een groeiproces hoort de formule $A = 200 \cdot 1{,}07^t$ met t in jaren.

a Na hoeveel jaar is de beginhoeveelheid verdubbeld?

b Op een bepaald moment is de hoeveelheid gelijk aan 250. Bereken hoeveel jaar het duurt totdat die hoeveelheid is toegenomen tot 2000.

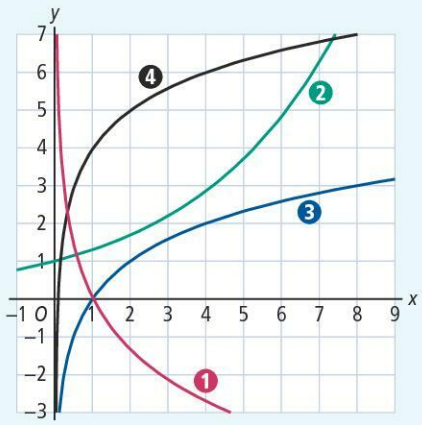
T4 In het assenstelsel zijn grafieken bij een aantal logaritmische en exponentiële functies getekend.

a Grafiek 1 hoort bij een logaritmische functie f. Wat weet je van het grondtal van deze functie?

b Grafiek 2 hoort bij een exponentiële functie g. Wat weet je van het grondtal van deze functie?

c Grafiek 3 hoort bij de functie $h(x) = {}^2\log(x)$. De grafiek wordt gespiegeld in de lijn $y = x$. Geef een functievoorschrift $i(x)$ van de grafiek die zo ontstaat.

d Grafiek 4 krijg je door grafiek 3 omhoog te verschuiven. Geef een functievoorschrift $j(x)$ van grafiek 4.



© Noordhoff Uitgevers bv

T5 De grafiek beschrijft de groei van de oppervlakte van waterplanten in een groot meer. De oppervlakte A is jaarlijks gemeten.

a Vul de tabel in.

t in jaren	0	1	2	3	4	5	6	7	8
A in km^2	…	…	…	…	…	…	…	…	…

b Controleer met behulp van de tabel dat de groei eerst vrijwel exponentieel verloopt en daarna wordt afgeremd.

c Hoe is in de grafiek te zien dat de groei eerst vrijwel exponentieel verloopt?

d Stel een functievoorschrift op voor de groei in de eerste vijf jaar.

e Na een aantal jaar is de oppervlakte van het meer helemaal bedekt met de waterplanten.
Bepaal de grootte van het meer in km^2.

T6 Druk t uit in N.

a $N = 6^t$

b $N = 3 \cdot 4^t$

c $N = 12 + 3^t$

d $N = -16 + 4 \cdot 5^t$

e $N + 4 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$

f $5N - 2 = \frac{1}{2} \cdot 4^t$

T7 Een ballon die is gevuld met helium loopt langzaam leeg. Per dag verdwijnt 8% van de nog aanwezige hoeveelheid helium.

a Bereken hoelang het duurt voordat er nog maar de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid helium in de ballon zit.

b Na hoeveel uur is er nog maar 25% van de oorspronkelijke hoeveelheid helium in de ballon?

© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt logaritmen met je rekenmachine berekenen.

E1 Bereken in drie decimalen.

a $^{100}\log(175)$ **c** $^{0{,}3}\log(23{,}78)$

b $^{1{,}5}\log(75)$ **d** $^{\frac{1}{4}}\log(15)$

E2 Los de vergelijking op. Schrijf je antwoord als logaritme en geef een benadering in twee decimalen.

a $15^t = 30$ **c** $6 \cdot 6^t = 18$

b $3 + 5^t = 40$ **d** $3 \cdot 8^t - 13 = 5$

Je kunt de verdubbelingstijd en de halveringstijd met logaritmen berekenen.

E3 **a** Het aantal algen neemt met 3,2% toe per week. Bereken de verdubbelingstijd in hele weken.

b Het aantal m^2 gras in een stad neemt met 1,65% af per jaar. Bereken de halveringstijd. Rond af op hele jaren.

Je kunt een exponentiële formule herleiden tot een logaritmische formule.

E4 Druk t uit in P.

a $P = 4^t - 3$ **d** $P - 5^t = 0$

b $P = 9^{t-1}$ **e** $15P \cdot 3^t = 45$

c $P = 3 \cdot 2^t$ **f** $5 \cdot 6^t - 15P = 30$

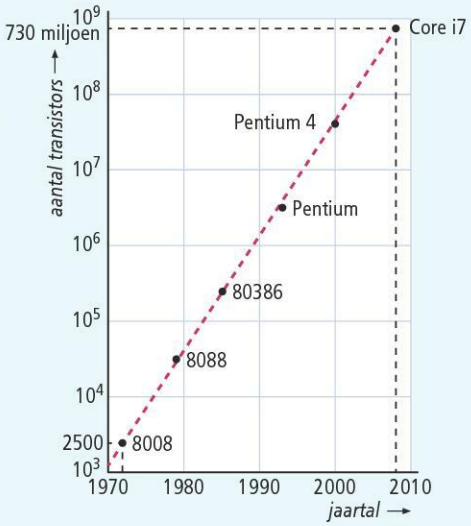
Je kunt een logaritmische schaalverdeling aflezen.

E5 Volgens de wet van Moore neemt het aantal transistors in de processor van een computer exponentieel toe. Deze wet is met een stippellijn in de figuur aangegeven.
In 1972 had de 8008 processor ongeveer 2500 transistors en in 2008 waren dat er bij de Core i7 processor 730 miljoen.

a In het jaar 2000 kwam de Pentium 4 processor uit. Schat aan de hand van de figuur hoeveel transistors er in een Pentium 4 processor zaten.

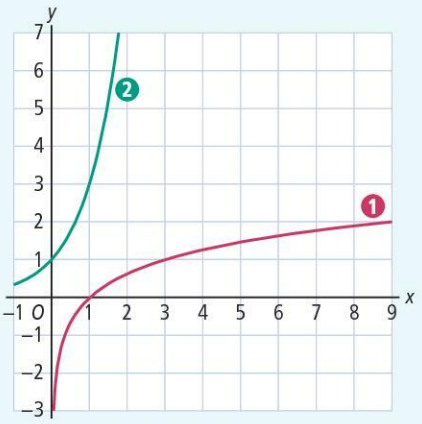
b Stel een formule op bij dit groeimodel. Neem T voor het aantal transistors en t voor de tijd in jaren met $t = 0$ in 1972. Rond de groeifactor af op vier decimalen.

c Bereken de verdubbelingstijd van dit groeimodel.



© Noordhoff Uitgevers bv

E6 In het assenstelsel zijn twee grafieken getekend.



a Vul in: de grafieken zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn …

b De functie $f(x) = {}^{3}\log(x)$ hoort bij grafiek 1.
Geef een functievoorschrift van de functie die bij grafiek 2 hoort.

c Grafiek 1 wordt zeven eenheden omlaag verschoven.
Geef een functievoorschrift van de functie die bij de zo ontstane grafiek hoort.

d Iemand wil de grafiek van de functie $j(x) = 2 + {}^{0{,}95}\log(x)$ in hetzelfde assenstelsel tekenen.
Welke vorm heeft de grafiek van j?

E7 Het aantal kakkerlakken in een natte schuur neemt elke week met 4,8% toe. Op 1 februari waren er 80 kakkerlakken.

a Stel een formule op waarmee je het aantal kakkerlakken K kunt berekenen t weken na 1 februari.

b Bereken de verdubbelingstijd van het aantal kakkerlakken.

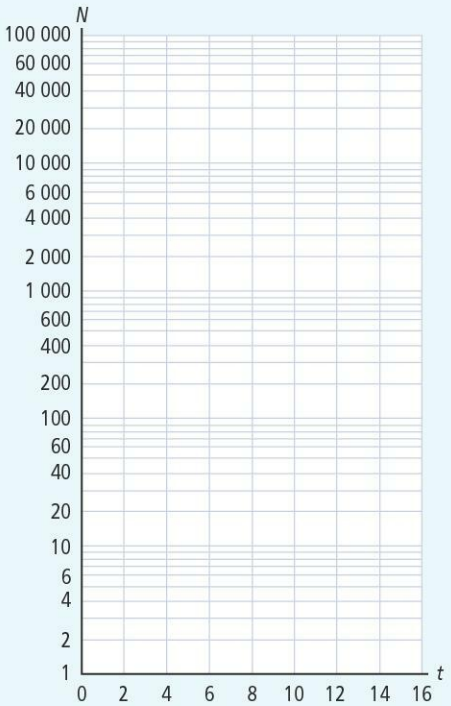
c Druk t uit in K.

d Na hoeveel weken waren er 1000 kakkerlakken? Rond je antwoord af op een geheel aantal weken.

E8 Bij het kweken van een alg zijn op verschillende momenten tellingen uitgevoerd. In de tabel zie je de resultaten.

t	0	4	8	12	16
N	20	150	1100	8100	60 000

Hierin is N het aantal getelde algen en t de tijd in dagen.



a Maak bij de tabel een grafiek in een assenstelsel met op de verticale as een logaritmische schaalverdeling. Trek door deze punten zo goed mogelijk een rechte lijn.

b Lees uit je grafiek bij opdracht a af hoeveel algen er (ongeveer) waren op $t = 10$.

c Controleer dat de waarden in de tabel bij benadering voldoen aan de formule $N = 20 \cdot 1{,}65^{t}$.

d Bereken de waarde van t waarvoor $N = 25\,000$. Rond af op twee decimalen.

e Druk t uit in N en controleer daarmee je antwoord van opdracht d.

© Noordhoff Uitgevers bv

Al-Khwarizmi

Bij het algebraïsch oplossen van vergelijkingen heb je vaak gebruik gemaakt van de bordjes- en de balansmethode. Al in 830 gebruikte een Perzische wiskundige, Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi deze middelen bij het oplossen van vergelijkingen. Ter ere van hem werd in 1983 in de voormalige Sovjet-Unie een postzegel uitgebracht.

Het ging al-Khwarizmi om het oplossen van allerlei dagelijkse problemen zoals hij die tegenkwam bij de handel en bij het verdelen van erfenissen. Hij beschreef zijn methoden in een boek, Hisab al-jabr al-muqabala. Dit werk is één van de eerste boeken over Algebra. Latere West-Europese vertalers wisten zich geen raad met het woord al-jabr en maakten daar algebra van.

In zijn boek behandelt hij alleen lineaire en kwadratische vergelijkingen met één variabele. De notatie van variabelen was in die tijd niet bekend, dus werden de oplossingen met woorden omschreven.

Hij maakte onderscheid in zes verschillende soorten vergelijkingen. Je ziet voorbeelden van deze zes vergelijkingen in onze notatie.

$4x^2 = 3x$	$3x^2 = 5$
$x = 25$	$x^2 + 10x = 39$
$x^2 + 21 = 10x$	$4x + 12 = x^2$

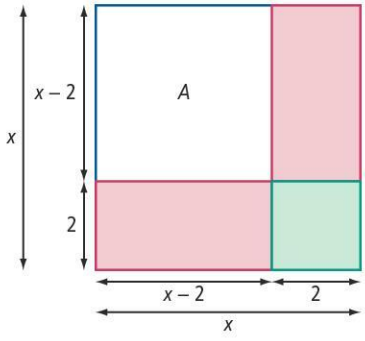
Het oplossen van deze vergelijkingen beschreef Al-Khwarizmi in woorden, waardoor het lastig is om zijn berekeningen te doorgronden. Gelukkig lichtte hij zijn berekeningen toe met meetkunde.

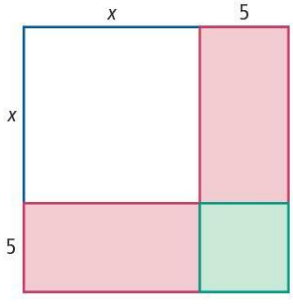
Opdracht

Je gaat deze meetkundige methode gebruiken voor het oplossen van $4x + 12 = x^2$.

De oppervlakte van het vierkant is x^2 en de oppervlakte van het witte vierkant is A.

- Laat zien dat de oppervlakte van het gekleurde deel te schrijven is als $4x - 4$.
- Dit levert $4x - 4 + A = x^2$.
  De oorspronkelijke vergelijking is $4x + 12 = x^2$.
  Dus A moet dan gelijk aan 16 zijn.
  Ook geldt $A = (x - 2)^2$.
  Controleer dat de positieve oplossing $x = 6$ is.
- Los met behulp van de tekening hiernaast op: $x^2 + 10x = 39$
  Merk op dat A nu de oppervlakte van het hele vierkant is.





© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheden 6

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Vergelijkingen en ongelijkheden
- Groeifactoren en percentages
- Substitueren en herleiden
- Gebroken formules

© Noordhoff Uitgevers bv

Vergelijkingen en ongelijkheden

1 Los op.

a $3x + 1 = -3x + 6$

b $7 - 3k = 2(k + 5)$

c $3(2r - 7) = 33$

d $4(b - 10) = 8(b + 4)$

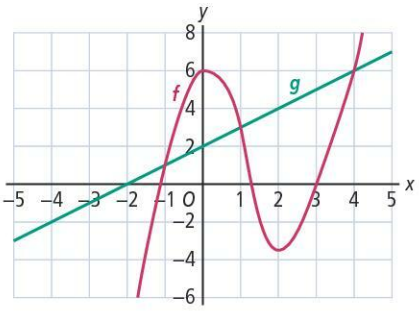
e $13 + 8g = 15 - 2g$

f $45 + h = 3(h + 1)$

2 **a** Lees uit de grafieken af welke van de volgende beweringen waar is: $f(2) > g(2)$ of $f(2) < g(2)$.

b Is $f(0) > g(0)$ of is $f(0) < g(0)$?

c Lees uit de grafieken de oplossing af van de ongelijkheden $f(x) > g(x)$ en $f(x) \leq g(x)$.



Theorie

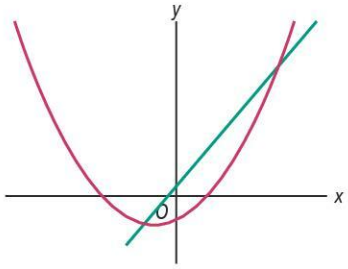
De oplossing van een ongelijkheid is meestal één of meer intervallen. Als de oplossing tussen 1 en 4 ligt kun je dat noteren als $1 < x < 4$ of in de intervalnotatie $\langle 1, 4 \rangle$
Voor alle waarden x groter of gelijk aan 4 noteer je $x \geq 4$ of in de intervalnotatie $[4, \rightarrow\rangle$.

3 Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ en $g(x) = 7x + 1$.

a Bereken met je rekenmachine de x-coördinaten van de snijpunten.

b Voor welke waarden van x ligt de grafiek van f boven de grafiek van g?

c Welke ongelijkheid hoort bij opdracht b?
$2x^2 + 3x - 5 < 7x + 1$ of $2x^2 + 3x - 5 > 7x + 1$



4 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^3 - 9x$ en $g(x) = -5x$.

a Plot en schets de grafieken van f en g.

b Los met je rekenmachine de vergelijking $f(x) = g(x)$ op.

c Lees uit de schets van de grafieken de oplossing van de ongelijkheid $x^3 - 9x < -5x$ af.

5 Los op.

a $x + 5 \geq 0$

b $2x + 3 < 9$

c $5 - 3x > 6 - 2x$

d $3(x + 2) + 11x + 10 > 0$

e $-3x^2 + 8x > 11 - 6x$

f $0{,}0343 \cdot x^{1{,}083} > 350$

© Noordhoff Uitgevers bv

Groeifactoren en percentages

Theorie

Als g de groeifactor per tijdseenheid is, dan is de groeifactor per n tijdseenheden g^n.

De groeifactor voor een n-de deel van de tijdseenheid is $g^{\frac{1}{n}}$ ofwel $\sqrt[n]{g}$.

Voorbeeld

Als de groeifactor per jaar gelijk is aan 3, dan is:
de groeifactor per 4 jaar $3^4 = 81$.
de groeifactor per half jaar
$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \approx 1{,}732$.
de groeifactor per kwartaal
$3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3} \approx 1{,}316$.

6 Bij een groeiproces is de groeifactor 1,2 per uur.
- **a** Bereken de groeifactor per half uur in drie decimalen.
- **b** Bereken de groeifactor per minuut in vijf decimalen.
- **c** Bereken de groeifactor per dag in één decimaal.

Theorie

Een toename van 100% per tijdseenheid komt overeen met de groeifactor 2, want 100% + 100% = 200% en dat is 2 × 100%.

Bij een afname van 8% per tijdseenheid is de groeifactor 0,92 want 100% − 8% = 92% dat is 0,92 × 100%.

Een groeifactor van 1,05 komt overeen met een toename van 5% want 1,05 × 100% = 105% en dat is een toename van 5%.

Voorbeeld

Bereken het groeipercentage per week bij een groeipercentage per dag van 2,3%.

Oplossing

Bij een groeipercentage van 2,3% per dag hoort een groeifactor van 1,023 per dag. Dit geeft een groeifactor van $1{,}023^7 \approx 1{,}1725$ per week, dus een groeipercentage van 17,3% per week.

7 Bereken het groeipercentage per dag.
- **a** Een afname van 1,7% per halve dag.
- **b** Een toename van 3% per uur.
- **c** Een afname van 8,7% per week.
- **d** Een afname van 0,02% per 10 minuten.
- **e** Een toename van 0,7% per uur.

8 Iemand zet € 800,- op zijn spaarrekening tegen een rente van 1,5% per jaar.
- **a** Geef een formule waarmee je het bedrag B na t jaar kunt berekenen.
- **b** Bereken hoe groot het bedrag na 15 jaar is.

$N = b \cdot g^t$ is de algemene vorm voor exponentiële groei. Hierin is b de beginhoeveelheid op tijdstip $t = 0$ en g de groeifactor.

9 Bij een exponentieel groeiproces is de beginwaarde 45 en de verdubbelingstijd is 3,5 uur.
Stel de bijbehorende formule op met de tijd t in uren.

© Noordhoff Uitgevers bv

Substitueren en herleiden

Theorie

In een formule als $y = -2t + 8$ zeg je dat de variabele y is uitgedrukt in de variabele t. Je kunt ook zeggen y is geschreven als functie van t.
In een formule kun je een variabele vervangen door een getal of door een andere formule. Je noemt dit substitueren.
Het vereenvoudigen of herschrijven van een formule noem je het herleiden van de formule.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $y = -2t + 8$.
Substitueer hierin de formule $t = -3x + 5$ en druk y uit in x.

Oplossing

$y = -2(-3x + 5) + 8$
$y = 6x - 10 + 8$
$y = 6x - 2$

10 Substitueer formule A in formule B, druk q uit in p en herleid het resultaat zoveel mogelijk.

a A: $t = p + 2$ B: $q = 2t - 5$

b A: $x = p - 1$ B: $q = x^2 - 2x + 8$

c A: $k = 3 - 2p$ B: $q = 2k^2 - k + 7$

11 Gegeven is de formule $N = (1 - M)(0{,}5t + 2)$.

a Substitueer $M = 9$ en laat zien dat $N = -4t - 16$.

b Toon aan dat de formule $N = -4t - 16$ te herleiden is tot $t = -\frac{1}{4}N - 4$.

12 Gegeven zijn de formules $y \cdot (3t - 7) = -12$ en $t + 2x = 1$.

a Herleid de formule $t + 2x = 1$ tot een vorm waarbij t wordt uitgedrukt in x.

b Substitueer het antwoord van opdracht a in de formule $y \cdot (3t - 7) = -12$ en herleid deze tot een vorm waarbij y wordt uitgedrukt in x.

Gebroken formules

Theorie

Breuken vermenigvuldig je met elkaar door de tellers met elkaar te vermenigvuldigen en de noemers met elkaar te vermenigvuldigen. Breuken kun je vereenvoudigen door de teller en de noemer door hetzelfde getal te delen of met hetzelfde getal te vermenigvuldigen.

Voorbeeld

$$\frac{3p}{q} \cdot \frac{7q^2}{2p^3} = \frac{3p \cdot 7 \cdot q \cdot q}{q \cdot 2 \cdot p \cdot p \cdot p} = \frac{21q}{2p^2}$$

$$5 \cdot \frac{7}{10} = \frac{5}{1} \cdot \frac{7}{10} = \frac{5 \cdot 7}{1 \cdot 10} = \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 5} = \frac{7}{2} = 3\tfrac{1}{2}$$

13 Vermenigvuldig en vereenvoudig het antwoord.

a $3 \cdot \frac{5}{18}$

b $\frac{-12a^2}{b^3} \cdot \frac{7b}{6a}$

c $\frac{8}{p^2} \cdot \frac{3p}{4} \cdot \frac{-6p^3}{15p} \cdot p$

d $3q^7 \cdot \frac{2}{q^2} \cdot \frac{1}{12q^3}$

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Bij het herleiden van formules kun je gebruikmaken van de balansmethode.
Daarnaast gelden bij gebroken formules de volgende regels:

- uit $\frac{A}{B} = C$ volgt $A = B \cdot C$.
- uit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ volgt $A \cdot D = B \cdot C$.

Voorbeeld 1

Herleid de formule $\frac{P-4}{8} = Q + 2$ tot een formule waarbij P wordt uitgedrukt in Q en vereenvoudig je antwoord.

Oplossing

$P - 4 = 8 \cdot (Q + 2)$	$\frac{A}{B} = C$ dus $A = B \cdot C$
$P = 4 + 8 \cdot (Q + 2)$	links en rechts + 4
$P = 4 + 8Q + 16$	haakjes weggewerkt
$P = 20 + 8Q$	vereenvoudigd

Voorbeeld 2

Herleid de formule $\frac{5}{B} = \frac{A}{7-A}$ tot een formule waarbij B wordt uitgedrukt in A. Vereenvoudig je antwoord.

Oplossing

$B \cdot A = 5 \cdot (7 - A)$	$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ dus $A \cdot D = B \cdot C$
$B = \frac{5 \cdot (7 - A)}{A}$	links en rechts : A
$B = \frac{35 - 5A}{A}$	haakjes weggewerkt

14 In de formule $t = \frac{8}{p-1}$ is t uitgedrukt in p.

Laat zien dat de formule te herleiden is tot $p = \frac{8}{t} + 1$.

15 Druk P uit in T.

a $T = 6 + \frac{1}{P}$

b $T = \frac{-8}{0{,}5P}$

c $T = \frac{-3}{4P + 8}$

d $T \cdot (P + 3) = 11$

e $6 = \frac{T}{\sqrt{P}}$

f $T = 4 - \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{P}}$

16 Gegeven zijn de formules $L \cdot B = 30$ en

$K = \frac{18547}{L} + 56{,}6L + \frac{5280}{B} + 90{,}8B.$

Druk K uit in L en herleid deze tot de vorm $K = a \cdot L + \frac{b}{L}$

© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

Binomiale verdelingen 13

SE CE K

In dit hoofdstuk

In hoofdstuk 7 heb je geleerd hoe je in verschillende situaties de kans op een gebeurtenis kunt berekenen.

Bij veel kansexperimenten zijn telkens twee uitkomsten mogelijk waarbij bij iedere herhaling de kans op succes gelijk blijft. In dit hoofdstuk leer je hoe je bij een dergelijk kansexperiment de kans op een gebeurtenis met een formule of met je rekenmachine berekent.
Ook leer je hoe je bij deze kansexperimenten de verwachtingswaarde en de bijbehorende standaardafwijking kunt berekenen.

In hoofdstuk 17 gebruik je deze kennis om een uitspraak te doen over de betrouwbaarheid van een resultaat waarbij toeval een rol speelt.

Voorbeelden van WDA in dit hoofdstuk

- Probleem oplossen en analytisch denken opdracht 29
- Logisch redeneren en bewijzen opdracht 27
- Modelleren en algebraïseren opdracht 32

© Noordhoff Uitgevers bv

V1 De twee tolletjes hebben vier gelijke delen. Elk tolletje wordt één keer gedraaid. De uitkomst S is de som van de getallen op de tolletjes.

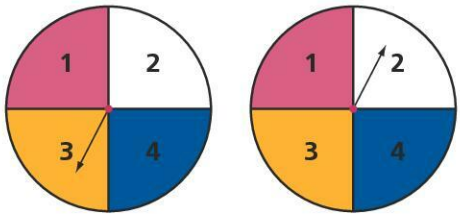
a In het schema zie je de uitkomsten op de tolletjes. Vul het schema verder in.

b Hoe groot is de kans dat $S = 2$?

c Hoe groot is de kans op uitkomst 5?

d Waarom is $P(S = 4)$ groter dan $P(S = 2)$?

e Bereken $P(S \geq 5)$.



+	1	2	3	4
1	…	3	…	…
2	…	…	5	…
3	…	…	6	…
4	…	…	…	…

V2 Je gooit met vier geldstukken. De uitkomst U is het aantal keren kop.

a Leg uit dat $P(U = 4) = \frac{1}{16}$.

b Hoe groot is de kans dat je met de eerste drie geldstukken kop en met het vierde geldstuk munt gooit?

c Hoeveel verschillende rijtjes zijn er met drie keer kop en één keer munt?

d Bereken $P(U = 3)$.

Theorie

Een variabele waarvan de waarde afhangt van het toeval heet **toevalsvariabele** of **stochast**. De uitkomst van een stovchast is altijd een getal. Met $P(X = 2)$ wordt bedoeld de kans dat stochast X de waarde 2 aanneemt. Een overzicht van de mogelijke waarden van X met de bijbehorende kansen heet de **kansverdeling** van stochast X.
Bij een kansverdeling is de som van de kansen gelijk aan 1.
De **verwachtingswaarde** van stochast X is de gemiddelde waarde van X die je mag verwachten bij een groot aantal herhalingen van het experiment. De notatie van de verwachtingswaarde van X is $E(X)$.

Voorbeeld

Je gooit met drie dobbelstenen.
Stochast X is het aantal vieren.
Geef de kansverdeling van X.

Oplossing

X kan de waarden 0, 1, 2 en 3 aannemen.

$P(X = 1) = 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{75}{216}$

u	0	1	2	3
$P(X = u)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

De som van de kansen is 1.

$E(X) = 0 \times \frac{125}{216} + 1 \times \frac{75}{216} + 2 \times \frac{15}{216} + 3 \times \frac{1}{216} = \frac{1}{2}$

V3 In het voorbeeld zie je dat $P(X = 2) = \frac{15}{216}$.

Laat met een berekening zien dat deze kans klopt.

V4 In een vaas zitten vier rode en zes blauwe balletjes.

a Simone trekt met terugleggen drie balletjes uit de vaas. Stochast B is het aantal blauwe balletjes. Geef de kansverdeling van B en bereken $E(B)$.

b Sahid trekt drie balletjes uit de vaas zonder terugleggen. Hoe groot is de kans dat hij twee blauwe balletjes trekt?

© Noordhoff Uitgevers bv

V5 Een vaas bevat twaalf rode en acht witte knikkers. Je trekt met terugleggen vijf knikkers uit de vaas.

a Veronderstel dat je het rijtje *WRWRW* hebt getrokken, in deze volgorde. Laat met een berekening zien dat de kans op deze gebeurtenis gelijk is aan ongeveer 0,0230.

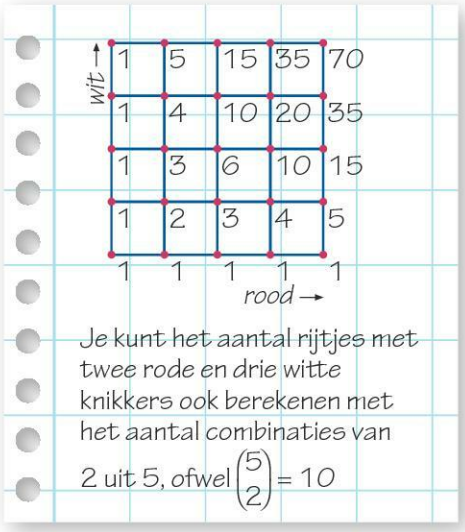
b Hoe groot is de kans op het rijtje *WWWRR*?

c Leg uit hoe je in het rooster kunt zien dat er 10 rijtjes zijn met twee rode en drie witte knikkers.

d Leg zonder berekening uit waarom $\binom{5}{2}$ gelijk is aan $\binom{5}{3}$.

e Bereken de kans op twee rode en drie witte knikkers in willekeurige volgorde.

f Hoe groot is de kans op drie rode en twee witte knikkers?



V6 Je trekt vijf keer met terugleggen een knikker uit de vaas van opdracht V5. Stochast X is het aantal rode knikkers in de trekking.

a Bereken $P(X = 4)$ in vier decimalen.

b Hoe groot is de kans op hoogstens vier rode knikkers?

Theorie

Bij vragen over 'minstens', 'hoogstens', 'meer dan' en 'minder dan' is het soms handiger om eerst de complementaire kans te berekenen, dat is de kans op 'de rest'.

Voorbeeld

Je gooit met twee dobbelstenen en je let op de som van de aantallen ogen.
Bereken P (*hoogstens 10 ogen*).

Oplossing

Er zijn in totaal $6 \times 6 = 36$ verschillende worpen.
Met de worpen (5, 6), (6, 5) en (6, 6) gooi je meer dan 10 ogen.

$P(\textit{meer dan 10 ogen}) = \frac{3}{36}$

$P(\textit{hoogstens 10 ogen}) = 1 - \frac{3}{36} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$

V7 In een vogelkwartetspel zitten 48 kaarten waarvan vier mezen. Levi pakt willekeurig vier van de 48 kaarten.

a Leg uit dat de kans dat Levi geen enkele mees pakt gelijk is aan $\frac{44}{48} \times \frac{43}{47} \times \frac{42}{46} \times \frac{41}{45}$.

b Bereken in vier decimalen de kans dat Levi geen enkele mees pakt.

c Bereken de kans dat Levi minstens één mees pakt.

d Bereken de kans dat Levi hoogstens drie mezen pakt.

© Noordhoff Uitgevers bv

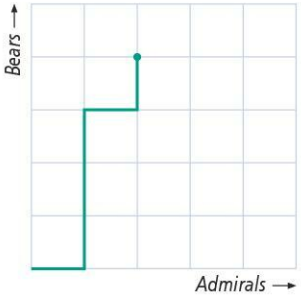
13.1 De binomiale verdeling

Je leert
- wat een binomiale verdeling is
- wat de parameters van een binomiale verdeling zijn

Leerroutes
- ondersteunend: 1—2—3—04—5—6—7
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7
- uitdagend: 1—2—3—4—6—7—U1

Bij een loterij zijn er 10 000 loten verkocht. Er zijn 100 prijzen. Guus heeft drie loten gekocht. Hij zegt dat de kans dat hij drie prijzen wint $0{,}01^3$ is.
- Ben je het met Guus eens? Verklaar je antwoord.

1 In het rooster is een serie van zes wedstrijden tussen twee honkbalteams, de Admirals en de Bears, weergegeven. Bij elke wedstrijd is er een winnaar; gelijkspel is niet mogelijk. Als de teams even sterk zijn, dan is de kans dat een team een wedstrijd wint, gelijk aan 0,5. De kans op de serie *ABBBAB* is dan gelijk aan $0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}5^6$.



a Bereken de kans op de serie *BBABAB*.

b Neem nu aan dat de kans dat de Admirals een wedstrijd winnen gelijk is aan 0,6 en de kans dat de Bears winnen dus 0,4.
Hoe groot is dan de kans op de serie *BBABAB*? En op de serie *ABBBAB*?

c Op hoeveel manieren kan de eindstand 3-3 bereikt worden?

d Hoe groot is de kans op deze eindstand als de kans dat de Admirals winnen 0,6 is en dat de Bears winnen 0,4 is?

2 Johan gooit vijf maal met een dobbelsteen. Hij telt daarbij het aantal keer dat hij een zes gooit.

a Hoe groot is de kans dat Johan de eerste twee keer wel en de laatste drie keer géén zes gooit?

b Hoeveel uitkomsten zijn er waarbij je twee keer een zes gooit en drie keer géén zes?

c Bereken de kans dat Johan bij de vijf worpen met de dobbelsteen precies twee keer een zes gooit.

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Een kansexperiment met maar twee mogelijke uitkomsten heet een Bernoulli-experiment. De twee mogelijke uitkomsten noem je succes (s) en mislukking (m).
Veel kansexperimenten kun je opvatten als het herhaald uitvoeren van hetzelfde Bernoulli-experiment. Je krijgt dan als uitkomst een rij van de vorm $s, m, m, m, s, s, \ldots m$.
De kans op een succes blijft bij iedere trekking gelijk.
Stochast X telt het aantal successen. Bij n experimenten kan X de waarden 0, 1, 2, …., n aannemen.
De kansverdeling van stochast X heet een **binomiale verdeling**. De kansverdeling van een binomiaal verdeelde stochast X is vastgelegd door het aantal herhalingen van het experiment n en de kans p op succes van het experiment. Hierbij heten n en p de **parameters** van de binomiale verdeling.

Voorbeeld

Ga bij de kansexperimenten na of er een binomiale verdeling bij kan horen.
A: Tien keer werpen met een geldstuk waarbij je let op het aantal keren munt.
B: Het trekken zonder terugleggen van vier kaarten uit een kaartspel waarbij je let op het aantal hartenkaarten.

Oplossing

A: Hier wordt een kansexperiment 10 keer herhaald met twee mogelijke uitkomsten, kop of munt. De kans op succes bij de herhalingen is steeds gelijk. Hierbij hoort een binomiale verdeling. X is het aantal keren kop, $n = 10$ en $p = 0{,}5$.
B: Hierbij hoort geen binomiale verdeling. De kans op een hartenkaart verandert na elke trekking.

3 H

Ga van elk experiment na of er een binomiale verdeling bij kan horen. Leg uit waarom niet. Formuleer in de gevallen dat de verdeling binomiaal is stochast X en geef de bijbehorende waarden van n en p.

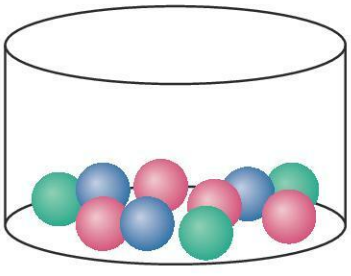
- **a** Het maken van een driekeuzetoets Russisch, bestaande uit twintig vragen, door een kandidaat die deze taal totaal niet kent. Waarbij je let op het aantal goede antwoorden.
- **b** Het kiezen van zes leerlingen uit een klas met tien meisjes en twaalf jongens waarbij je let op het aantal jongens.
- **c** Het gooien van vijf dobbelstenen waarbij je per dobbelsteen let op het aantal ogen.
- **d** Het gooien van vijf dobbelstenen waarbij je let op het aantal tweeën.
- **e** Het aantal rode knikkers bij zes keer trekken zonder teruglegging uit een vaas met vijf rode en vijftien blauwe knikkers.

Ondersteunende route → maak opdracht 04

4 H

Lucas haalt met terugleggen vijf keer een knikker uit een vaas met drie blauwe, drie groene en vier rode knikkers. Stochast X is het aantal rode knikkers dat hij trekt.

- **a** Waarom is de kansverdeling van X een binomiale verdeling?
- **b** Hoe groot is de kans dat hij drie van de vijf keer een rode knikker trekt?



© Noordhoff Uitgevers bv

5 In een vaas liggen 5 blauwe en 20 rode knikkers. Je haalt in één keer vijf knikkers uit de vaas. Stochast Y is het aantal getrokken rode knikkers.

a Leg uit waarom Y niet binomiaal verdeeld is.

b Bereken $P(Y = 5)$.

c Bereken $P(Y < 4)$.

6 Uit de vazen A, B en C met rode en witte ballen worden drie ballen genomen. Eén keer met terugleggen en één keer zonder terugleggen. De aantallen rode en witte ballen in de vazen zijn verschillend, maar de verhouding van de aantallen rode en witte ballen is steeds hetzelfde.
Stochast X is het aantal rode ballen in de steekproef.

vaas	*aantal ballen*		$P(X = 2)$	
	rood	*wit*	*met terugleggen*	*zonder terugleggen*
A	4	6	…	…
B	40	60	…	…
C	400	600	…	…

a Bereken in elk van de gevallen de kans op twee rode ballen. Rond je antwoorden af op vier decimalen.

b Vergelijk de resultaten.
Welke conclusie kun je nu trekken?

Bij een grote populatie verandert de samenstelling van de populatie nauwelijks als er een kleine steekproef uit getrokken wordt. Je mag de trekking dan opvatten als een trekking met terugleggen.
Als het in de steekproef bovendien gaat om twee mogelijke uitkomsten (succes of mislukking), is de bijbehorende kansverdeling binomiaal.

7 H In een doos zitten 50 chocoladetoffees en 150 droptoffees. Sanne pakt in één keer drie toffees uit de doos. Stochast X is het aantal droptoffees dat ze pakt.

a Waarom is X niet binomiaal verdeeld?

b Verklaar waarom je de verdeling van X goed kunt benaderen met een binomiale verdeling.

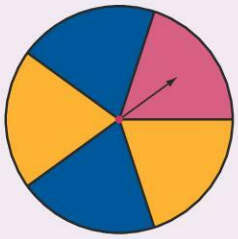
c Geef de kansverdeling van X.

Uitdagende route → maak opdracht U1

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O4 De tol is verdeeld in vijf even grote sectoren.



a Hoe groot is de kans dat de pijl op rood komt? En hoe groot is de kans dat de pijl niet op rood komt?

b Willem draait tien keer met de tol. Stochast R is het aantal keren dat de tol op rood komt.
Waarom is de kansverdeling van R een binomiale verdeling?

c Op het blaadje zie je hoe Willem de kans op vier keer rood berekent.

Welke betekenis heeft de uitkomst van $\binom{10}{4}$?

Willem

De kans op vier keer rood is

$\binom{10}{4} \times 0{,}2^4 \times 0{,}8^6 = \ldots$

d Verklaar de factoren $0{,}2^4$ en $0{,}8^6$.

e Maak de berekening van Willem verder af. Rond je antwoord af op vier decimalen.

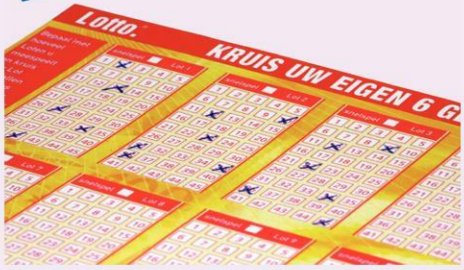
f Else draait 12 keer met de tol. Stochast B is het aantal keren dat ze blauw draait.
Leg uit dat de kansverdeling van B een binomiale verdeling is. Geef de bijbehorende waarden voor n en p.

g Bereken de kans dat Else zeven keer blauw draait.

Uitdagende opdrachten

U1 De lotto is een kansspel. Van de nummers 1 tot en met 45 moet je er zes aankruisen en verder moet je kiezen uit een van de zes kleuren. Je wint een prijs als je twee of meer getallen goed hebt. De prijzen variëren van een gratis spel tot de Jackpot van 7,5 miljoen euro.

Jackpot: 1 op 49 miljoen



a Voor de Jackpot van 7,5 miljoen euro moet je alle zes de getallen en de kleur goed hebben.
Ga na of de kans op de Jackpot inderdaad 1 op 49 miljoen is.

b De kans op een prijs is 17,5%.
Johan heeft tien formulieren ingevuld.
Bereken de kans dat hij ten minste één keer een prijs heeft.

© Noordhoff Uitgevers bv

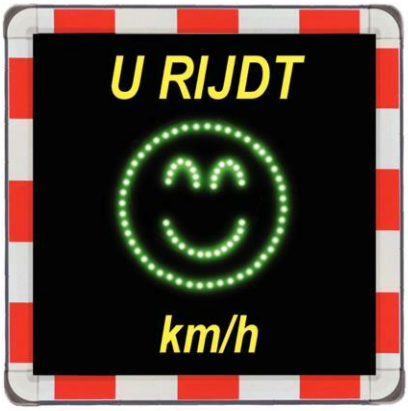
13.2 Werken met binomiale verdelingen

Je leert
- hoe je een binomiale kans berekent

Leerroutes
- ondersteunend: 8—O9—9—10—11—12
- doorlopend: 8—9—10—11—12—13
- uitdagend: 8—10—12—13—U2—U3

Cathrien gooit acht keer met een geldstuk. Ze telt het aantal keren kop.
- Hoeveel keer zo groot is de kans op drie keer kop als de kans op één keer kop?

8 Uit verkeerstellingen op een weg door een dorp blijkt dat 75% van de automobilisten zich aan de maximumsnelheid houdt. Op een dag wordt de snelheid van 20 automobilisten gemeten. De stochast X is het aantal mensen dat zich aan de maximumsnelheid houdt.



a Leg uit dat X een binomiaal verdeelde stochast is en geef de parameters n en p.

b Bereken de kans dat geen enkele automobilist te hard rijdt.

c Bereken $P(X = 15)$.

d De kans dat er precies 16 mensen zijn die zich aan de maximumsnelheid houden, kun je noteren als

$$P(X = 16) = \binom{20}{16} \cdot 0{,}75^{16} \cdot 0{,}25^{4}$$

Leg de notatie uit en bereken de kans.

Theorie

Als stochast X binomiaal verdeeld is, noteer je dat als X is $\text{Bin}(n; p)$ -verdeeld. Hierin is n het aantal herhalingen en is p de kans op succes.
$P(X = k)$ is de kans op de gebeurtenis van k successen.
Deze gebeurtenis kan op $\binom{n}{k}$ verschillende volgorden plaatsvinden.

De kans op precies k successen en $n - k$ mislukkingen is

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}.$$

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld 1

Je vult dertig vierkeuzevragen op de gok in.
Bereken de kans op tien goede antwoorden.

Oplossing

Stochast X is het aantal goede antwoorden.
X is Bin(30; 0,25)-verdeeld.

$$P(X = 10) = \binom{30}{10} \cdot 0{,}25^{10} \cdot 0{,}75^{20} \approx 0{,}0909$$

Voorbeeld 2

Thijs gooit acht keer met een dobbelsteen.
Bereken de kans dat hij drie keer een 6 gooit.

Oplossing

Stochast D is het aantal keer dat Thijs een 6 gooit.
D is Bin $(8; \frac{1}{6})$-verdeeld.

$$P(D = 3) = \binom{8}{3} \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^5 \approx 0{,}1042$$

Ondersteunende route → maak opdracht 09

9 In de scheikundeles worden 15 experimenten gedaan. Een experiment kan slagen maar ook mislukken. Bij elk experiment is de succeskans 0,85. Stochast X is het aantal geslaagde experimenten.

a Bereken $P(X = 12)$.

b Bereken de kans dat alle experimenten slagen.

10 H Je gooit vijf keer met een dobbelsteen. Stochast X is het aantal keren dat je een 2 gooit.

a Leg uit dat de kansverdeling van X binomiaal is.

b Geef de waarden van n en p die bij de kansverdeling van X horen.

c Hoe groot is $P(X = 4)$?

d Bereken $P(X = 2)$ en $P(X = 3)$.

Theorie

Op je rekenmachine zit een optie waarmee je de kansen bij een binomiale kansverdeling in één keer kunt berekenen. Daarbij is het van belang dat je de waarden in de juiste volgorde invoert op je rekenmachine.

Voorbeeld

Janna gooit acht keer met een dobbelsteen.
Bereken de kans dat ze drie keer een 6 gooit.

Oplossing

Optie: binomiaal
Invoer: $n = 8$, $p = \frac{1}{6}$ en $x = 3$
Dit geeft $P(X = 3) \approx 0{,}1042$.

→ Instructie rekenmachine | Binomiale kansen

11 H Stochast X is Bin(13; 0, 65) -verdeeld.

a Bereken $P(X = 5)$ en $P(X = 13)$ met behulp van de formule $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$.

b Controleer je antwoorden van opdracht a door de parameters n en p en het aantal successen in te voeren in je rekenmachine.

© Noordhoff Uitgevers bv

12 H

Tess gooit vijf keer met een viervlaksdobbelsteen. Stochast X is het aantal keren dat 4 bovenkomt.

a Geef de parameters van de kansverdeling van X.

b Bereken de kans dat de 4 drie keer bovenkomt.

c Maak op je rekenmachine een tabel met de kansen van stochast X en vul de tabel in.

$x = u$	0	1	2	3	4	5
$P(X = u)$	…	…	…	…	…	…

13

De Oosterscheldedam is een pijlerdam die bestaat uit een serie van 62 gigantische schuiven, die bij zware storm worden neergelaten. Als de schuiven zijn neergelaten, fungeert deze dam als stormvloedkering. Normaal staan de schuiven open zodat de getijdebeweging op de Oosterschelde blijft bestaan. Elk van de schuiven wordt, onafhankelijk van de andere schuiven, door een computer bestuurd. De stormvloedkering werkt alleen als alle 62 schuiven zijn neergelaten. Neem aan dat een schuif één op de honderd keer weigert en vat het neerlaten van de 62 schuiven op als een toevalsexperiment.

a Formuleer een binomiaal verdeelde stochast X en geef de parameters n en p.

b Bereken de kans dat geen enkele schuif weigert.

c De bouwers gaan ervan uit dat de schuif 1 op de 10 000 keer weigert.
Hoe groot is de kans dat geen van de 62 schuiven weigert?

d Hoe groot is de kans op twee weigerende schuiven als de bouwers gelijk hebben?

e Is het voor de berekening van de kansen van belang dat de schuiven onafhankelijk bestuurd worden? Verklaar je antwoord.

Uitdagende route → maak opdracht U2 en U3

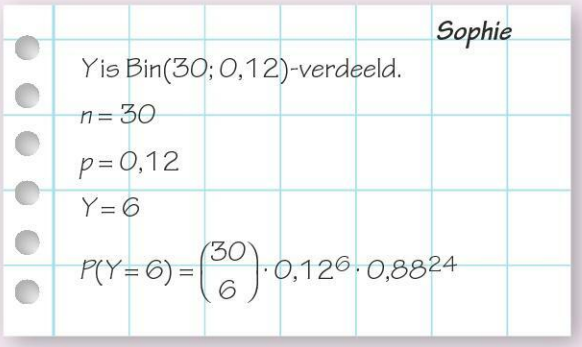
© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O9 Van de 26 900 studenten in Leiden heeft 12% groene ogen.
Stochast Y is het aantal studenten met groene ogen in een groep van 30 willekeurig aangewezen studenten.

a Waarom is Y binomiaal verdeeld?

b Sophie berekent de kans dat er zes studenten in de groep zitten met groene ogen.
Leg uit hoe Sophie aan de getallen 0,88 en 24 komt.



c Maak de berekening van Sophie verder af.

d Joost wil weten hoe groot de kans op vijf studenten met groene ogen in een groep van 25 studenten is. Stochast X is het aantal studenten met groene ogen in deze groep.
Hoe groot zijn in dat geval n en p?

e Hoe groot is de kans op vijf studenten met groene ogen in een groep van 25?

Uitdagende opdrachten

U2 Stochast X is Bin(10; 0, 8)-verdeeld.
Bereken bij welke waarden van a geldt $P(X = a) \geq 0{,}2$.

U3 Gegeven is een kansexperiment met drie mogelijke uitkomsten 1, 2 en 3 die optreden met respectievelijke kansen p_1, p_2 en p_3. Stochast X_1 is het aantal keren met uitkomst 1 en stochast X_2 is het aantal keren met uitkomst 2.
Er worden n onafhankelijke uitvoeringen van het kansexperiment gedaan.

a Wat kun je concluderen over de som $p_1 + p_2 + p_3$?

b Toon aan dat

$$P(X_1 = k \text{ en } X_2 = l) = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{l} \cdot p_1^k \cdot p_2^l \cdot p_3^{n-k-l}.$$

© Noordhoff Uitgevers bv

13.3 Cumulatieve kansen

Je leert
- hoe je een cumulatieve kans berekent bij een binomiale verdeling

Leerroutes
- ondersteunend: 14—15—16—O17—18—O19—19—20
- doorlopend: 14—15—16—17—18—19—20—21
- uitdagend: 14—15—16—17—18—19—21—U4

Chantal heeft tien dobbelstenen met op iedere dobbelsteen de kleuren groen, geel, blauw, paars, oranje en rood. Ze werpt met deze dobbelstenen.
- Wat is groter, de kans dat geel twee keer bovenkomt of de kans dat geel ten minste twee keer bovenkomt?

14 Lois neemt bij handballen vaak de strafworpen. De kans dat ze scoort is 0,9. Bij een training neemt ze acht strafworpen.
Stochast X is het aantal strafworpen waarmee ze scoort.

a Bereken $P(X = 8)$ en $P(X = 7)$.

b Hoe groot is de kans dat ze één of meer keer mist?

c Hoe groot is de kans dat ze hoogstens zes keer scoort?

Theorie

Als X Bin(n,p)-verdeeld is, dan is

$P(X \leq k) = P(X = 0) + P(X = 1) + \ldots + P(X = k)$.

$P(X \leq k)$ noem je een **cumulatieve kans**.

Voorbeeld

Aaf gooit zes keer met een geldstuk.
Bereken de kans dat ze hoogstens twee keer kop gooit.

Oplossing

Stochast K is het aantal keer dat Aaf kop gooit.
K is Bin(6; 0,5)-verdeeld.
De kans op hoogstens twee keer kop is
$P(K \leq 2) = P(K = 0) + P(K = 1) + P(K = 2) \approx 0{,}3438$.

15 **a** Bereken bij het voorbeeld $P(K \leq 3)$.

b Op je rekenmachine zit een optie om $P(K \leq 3)$ in één keer te berekenen.
Zoek uit hoe dat op jouw rekenmachine moet en controleer je antwoord van opdracht a.

→ Instructie rekenmachine | Binomiale kansen

© Noordhoff Uitgevers bv

16 Jente maakt een meerkeuze toets. Bij elke vraag moet ze kiezen uit drie mogelijke antwoorden. Acht vragen weet ze niet en gokt ze het antwoord. Stochast X is het aantal vragen dat ze goed gokt.

a Leg uit dat X Bin(8, $\frac{1}{3}$)-verdeeld is.

b Bereken de kans dat ze hoogstens drie vragen goed gokt.

c De groene punten op de getallenlijn horen bij de gebeurtenissen hoogstens drie vragen goed.
Welke gebeurtenis hoort bij de rode punten op de getallenlijn?

d Vul in: de kans bij de rode punten is P($X \geq \ldots$)

e Hoe kun je met behulp van het antwoord van opdracht b de kans van opdracht d berekenen? Bereken deze kans.

f Om een voldoende te halen moet Jente ten minste vijf van de acht vragen goed gokken.
Bereken de kans dat Jente een voldoende haalt.

Met je rekenmachine kun je bij een binomiale verdeling cumulatieve kansen van de vorm P($X \leq k$) berekenen.
Soms moet je de gevraagde cumulatieve kans eerst omwerken naar de vorm P($X \leq k$) voordat je de rekenmachine kunt gebruiken.
Op de getallenlijn zie je dat P($X \geq 6$) = 1 − P($X \leq 5$).

Ondersteunende route → maak opdracht O17

17 Stochast X is Bin(14; 0,35)-verdeeld.

a Bereken P($X \leq 6$).

b En hoe groot is P($X \geq 7$)?

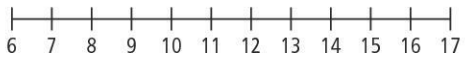
c Bereken P($X \geq 9$).

18 Ga ervan uit dat er gemiddeld evenveel meisjes als jongens worden geboren. Gedurende een etmaal worden er in een ziekenhuis twintig kinderen geboren. Stochast Y is het aantal jongens.

a Geef de parameters n en p van de kansverdeling van Y.

b Bereken de kans dat er meer jongens dan meisjes geboren worden.

c Geef op de getallenlijn de gebeurtenissen aan dat er minder dan 15 jongens maar meer dan 8 jongens geboren worden.



d Vul in: de kans op minder dan 15 maar meer dan 8 jongens is P($Y \leq \ldots$) − P($Y \leq \ldots$).

e Bereken de kans van opdracht d.

© Noordhoff Uitgevers bv

Aanpak

Hoe bereken je een cumulatieve kans bij een binomiale verdeling?

1 Formuleer stochast X en stel de parameters n en p vast.
2 Schrijf de gevraagde kans zo nodig als verschil van cumulatieve binomiale kansen.
3 Voer op je rekenmachine de cumulatieve binomiale kans(en) in, met de parameters n en p en het aantal successen en bereken de gevraagde kans.

Voorbeeld

Tim gooit 15 keer met een dobbelsteen. Bereken de kans dat hij meer dan twee keer, maar minder dan zeven keer 6 gooit.

Oplossing

1 Stochast D is het aantal keer dat Tim 6 gooit. D is Bin$\left(15; \frac{1}{6}\right)$-verdeeld.

2

3 $P(D \leq 6) - P(D \leq 2) =$
$0{,}9934\ldots - 0{,}5322\ldots \approx 0{,}4612$

Ondersteunende route → maak opdracht O19

19 H Stochast X is Bin(30; 0,7)-verdeeld. Bereken de kansen.

a $P(X < 12)$
b $P(X \geq 23)$
c $P(17 < X < 25)$
d $P(9 \leq X \leq 19)$
e $P(X > 21)$
f $P(7 \leq X < 25)$

20 H Vijftig personen nemen deel aan een cursus 'Stoppen met roken'. Gemiddeld is 30% van de deelnemers aan die cursus succesvol. Dit houdt in dat ze na de cursus minstens een jaar niet roken.

a Hoe groot is de kans dat meer dan de helft van het aantal deelnemers succesvol is?
b Bereken de kans dat meer dan 12 maar minder dan 18 deelnemers succesvol zijn.

21 Een bloembollenhandelaar biedt een partij van 2000 tulpenbollen aan. Van de aangeboden tulpenbollen is 18% rot. Aiden koopt 20 tulpenbollen. X is het aantal rotte tulpenbollen.

a Leg uit waarom X niet binomiaal verdeeld is.
b Waarom kun je de kansverdeling van X wel benaderen met een binomiale verdeling? Geef de bijbehorende parameters.
c Hoe groot is de kans dat Aiden meer dan twee rotte tulpenbollen aantreft?
d Bereken de kans dat het aantal rotte tulpenbollen tussen twee en zes ligt.
e Bereken de kans dat de eerste 12 tulpenbollen die Aiden plant niet rot zijn en dat er in totaal minstens twee tulpenbollen rot zijn.

Uitdagende route → maak opdracht U4

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

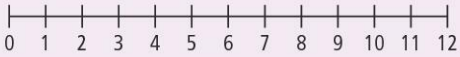
O17 Stochast X is Bin(12; 0,42)-verdeeld.

a De kans $P(X \leq 5)$ kun je met je rekenmachine berekenen. Welke waarden moet je voor n, p en X invoeren in je rekenmachine?

b Bereken $P(X \leq 5)$.

c Bereken $P(X \leq 6)$.

d Geef op de getallenlijn de gebeurtenissen $X \geq 4$ aan.



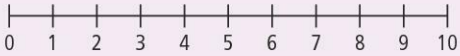
e Vul in: $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq \ldots)$.

f Bereken $P(X \geq 4)$.

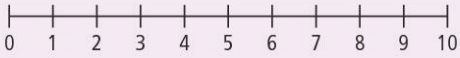
g Bereken $P(X \geq 9)$ en $P(X \geq 6)$.

O19 Stochast A is Bin(10; 0,3)-verdeeld.

a Geef op de getallenlijn aan welke gebeurtenissen horen bij $2 \leq A \leq 7$.



b Vul in: $P(2 \leq A \leq 7) = P(A \leq \ldots) - P(A \leq \ldots)$.



c Bereken $P(2 \leq A \leq 7)$.

d Geef op de getallenlijn de gebeurtenissen $3 \leq A < 7$ aan.

e Vul in: $P(3 \leq A < 7) = P(A \leq \ldots) - P(A \leq \ldots)$.

f Bereken $P(3 \leq A < 7)$.

Uitdagende opdrachten

U4 Jeroen koopt drie doosjes met schroeven. Volgens de verkoper zit in 90% van de doosjes 25 of meer schroeven.

a Jeroen merkt dat er in twee van de drie doosjes minder dan 25 schroeven zitten.
Stel dat de bewering van de verkoper klopt.
Hoe groot is de kans dat er in twee van de drie doosjes minder dan 25 schroeven zitten?

b De fabrikant van de schroeven wil niet dat er te veel geklaagd wordt. Hij wil dat de kans dat er van de 20 doosjes meer dan 2 doosjes zijn met te weinig schroeven, kleiner is dan 0,01.
Hoeveel procent van de doosjes mag te weinig schroeven bevatten? Geef je antwoord in één decimaal.

© Noordhoff Uitgevers bv

13.4 Verwachtingswaarde en standaardafwijking

Je leert
- hoe je de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van een binomiaal verdeelde stochast berekent

Leerroutes
- ondersteunend: 22—23—024—25—26—27
- doorlopend: 22—23—24—25—26—27
- uitdagend: 22—23—24—25—27—U5

Als je in de binnenstad van Haarlem een half uur fout parkeert, is de kans op een parkeerbon 20%.
- Hoeveel parkeerbonnen kun je na vijf keer een half uur fout parkeren verwachten? En na 50 keer verkeerd parkeren?
- Wanneer zal het werkelijke aantal meer afwijken van het verwachte aantal, na vijf keer of na 50 keer fout parkeren?

22 Je trekt één kaart uit een volledig kaartspel. Stochast X is het aantal getrokken hartenkaarten.

a Leg uit dat X de waarden 0 en 1 kan aannemen en dat $E(X) = 0{,}25$.

b Je trekt nu zes keer met terugleggen een kaart uit een volledig spel kaarten. Stochast T is het aantal getrokken hartenkaarten. In de tabel zie je de kansverdeling van T.

u	0	1	2	3	4	5	6
$P(T = u)$	0,178	0,356	0,2966	0,1318	0,033	0,0044	0,0002

Bereken $E(T)$ met behulp van de tabel.

c De verwachtingswaarde van het totaal aantal hartenkaarten na zes keer trekken kun je ook berekenen met het antwoord van opdracht a en de somregel voor stochasten.
Bereken $E(T)$ met de somregel.

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

23 Je gooit drie keer met een geldstuk. Stochast M is het aantal keren dat je munt gooit.

a Geef de kansverdeling van M.

b Voer de kansverdelingstabel in op je rekenmachine en bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van M.

c Laat zien dat je dezelfde antwoorden krijgt met de formule voor de verwachtingswaarde: $E(M) = n \cdot p$ en de formule voor de standaardafwijking: $\sigma(M) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$.

d Je gooit vijf keer met een dobbelsteen en telt het aantal enen. Bepaal op de manier van opdracht b de verwachtingswaarde en de standaardafwijking en controleer ook hier of de regels van opdracht c kloppen.

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Als een stochast X binomiaal verdeeld is met parameters n en p dan is de verwachtingswaarde $E(X) = n \cdot p$ en is de standaardafwijking $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$.

Voorbeeld 1

Je gooit dertig keer met een geldstuk.
Stochast M is het aantal keer dat je munt gooit.
Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van M.

Oplossing

M is Bin (30; 0,5)-verdeeld.

Het verwachte aantal keer munt is $30 \times 0{,}5 = 15$.

De standaardafwijking is $\sqrt{30 \times 0{,}5 \times (1-0{,}5)} \approx 2{,}74$.

Voorbeeld 2

Je vult achttien vierkeuzevragen op de gok in.
Stochast X is het aantal goed beantwoorde vragen.
Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.

Oplossing

X is Bin (18; 0,25)-verdeeld.

$E(X) = 18 \times 0{,}25 = 4{,}5$

$\sigma(X) = \sqrt{18 \times 0{,}25 \times (1-0{,}25)} \approx 1{,}84$

Ondersteunende route → maak opdracht 024

24 H

Gemiddeld haalt 58% van de eerstejaarsstudenten aan een hbo-opleiding het eerste jaar binnen één jaar. In een groep aan deze hbo-opleiding zitten vijftig eerstejaarsstudenten.
Stochast X is het aantal studenten dat het eerste jaar binnen één jaar haalt.

a Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.

b In een andere groep zitten 70 eerstejaarsstudenten. Bereken van deze groep de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het aantal geslaagden.

25 H

Van de reizigers die dagelijks vertrekken van het station in Utrecht maakt 6% gebruik van de fietsenstalling. Bij een onderzoek naar het gebruiksgemak worden 250 reizigers die vertrekken van het station ondervraagd.
Stochast X is het aantal van deze reizigers dat gebruikmaakt van de fietsenstalling.

a Hoeveel van deze reizigers zullen er naar verwachting gebruikmaken van de fietsenstalling? En hoe groot is de standaardafwijking?

b Bereken de kans dat X minder dan één keer de standaardafwijking afwijkt van het verwachte aantal.

© Noordhoff Uitgevers bv

26 Bij de productie van DAB+-radio's is de kans op een defecte radio 4%. Een groothandel bestelt 500 radio's. Er heeft geen controle op de radio's plaatsgevonden, dus ook defecte radio's verlaten de fabriek.

a Hoeveel defecte radio's verwacht je dat de er bij de groothandel terechtkomen?

b Bereken de standaardafwijking van het aantal defecte radio's in de bestelling van de groothandel.

c Bereken de kans dat het aantal defecte radio's in de bestelling meer is dan het verwachte aantal plus één keer de standaardafwijking.

27 De minister beweert dat slechts 15% van de wiskundedocenten tegen het verplicht stellen van het vak wiskunde is. De vakbond denkt dat dit percentage veel hoger is. In een bliksemonderzoek wordt een aselecte steekproef van vijftig wiskundedocenten genomen.

a Waarom mag je hier gebruikmaken van een binomiale verdeling?

b Neem aan dat de minister gelijk heeft.
Hoeveel tegenstanders van verplichting verwacht je dan?
En hoe groot is de standaardafwijking?

c De vakbond besluit een grootschalig onderzoek in te stellen als de steekproef van vijftig docenten te veel tegenstanders bevat.
Bereken de kans op minstens acht tegenstanders in de steekproef in het geval de minister gelijk heeft.

d Zou jij bij acht tegenstanders in de steekproef de minister gelijk geven? Licht je antwoord toe.

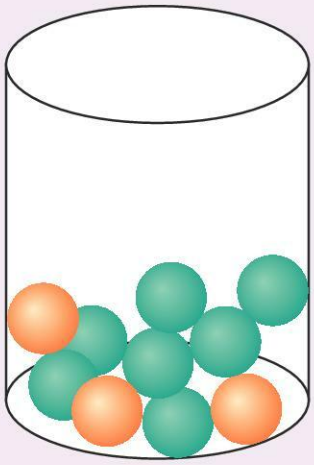
e De vakbond wil een grootschalig onderzoek starten als het aantal tegenstanders in de steekproef duidelijk groter is dan door de minister verwacht wordt.
Stochast X is het aantal tegenstanders in de steekproef. Het aantal tegenstanders a in de steekproef moet zo groot zijn dat de kans dat er minstens a tegenstanders in de steekproef voorkomen kleiner is dan 10%. Hierbij wordt er van uit gegaan dat de minister gelijk heeft.
Onderzoek bij welke aantallen tegenstanders de vakbond een grootschalig onderzoek start.

Uitdagende route → maak opdracht U5

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O24 In een vaas zitten zeven groene en drie oranje knikkers. Je trekt n keer met terugleggen een knikker uit de vaas. Stochast X is het aantal oranje knikkers.



a Leg uit dat X binomiaal verdeeld is.

b Hoe groot is de kans p dat je een oranje knikker trekt?

c Nienke trekt tien keer met terugleggen een knikker. Welke waarden hebben de parameters n en p bij het kansexperiment van Nienke?

d Met welke formule kun je het verwachte aantal oranje knikkers berekenen met behulp van de parameters n en p?

e Bereken deze verwachtingswaarde.

f Met welke formule kun je de standaardafwijking van het aantal verwachte oranje knikkers berekenen?

g Bereken deze standaardafwijking.

h Joost trekt zes keer met terugleggen een knikker uit de vaas. Stochast G is het aantal groene knikkers dat hij trekt. Bereken $E(G)$ en $\sigma(G)$.

Uitdagende opdrachten

U5 In een suikerfabriek worden machinaal kilopakken suiker gevuld. Het minimaal toegestane gewicht van een pak suiker is 980 gram. Lichtere pakken worden machinaal verwijderd. Door een wat onzuivere afstelling van de sorteermachine wordt af en toe een te licht pak doorgelaten. Hierdoor heeft 0,5% van de pakken een lager gewicht dan toegestaan is.
De pakken suiker worden verpakt in dozen van vijftig stuks. Als een keuringsdienst in een doos een te licht pak aantreft, wordt de gehele doos afgekeurd.
Op een dag worden van twintig dozen alle pakken suiker gecontroleerd.
Van hoeveel dozen kun je verwachten dat ze worden afgekeurd?

© Noordhoff Uitgevers bv

28 Bij een loterij worden wekelijks honderd loten verkocht. De loten kosten twee euro per stuk. Er is een eerste prijs van vijftig euro en er zijn twee tweede prijzen van vijftien euro te winnen. Per lot kun je maar één prijs winnen.

a Janneke koopt vijf weken lang elke week een lot. Bereken de kans dat ze twee keer een prijs wint.

b Hoe groot is de kans dat Janneke na vijf weken winst heeft gemaakt?

29 Rechtshandige softbalspelers dragen een linkerhandschoen. Zo kunnen ze met hun linkerhand een bal vangen en met hun rechterhand gooien. Bij linkshandige spelers is dit andersom. Ongeveer 10% van de Nederlandse bevolking is linkshandig en heeft dus een rechterhandschoen nodig bij softbal.
Een docent lichamelijke opvoeding heeft twee rechterhandschoenen en achttien linkerhandschoenen.

a Een brugklas van twintig leerlingen krijgt softballes. Elke leerling heeft dan een handschoen nodig. Hoe groot is de kans dat de docent te weinig rechterhandschoenen heeft?

b Bereken de kans dat minstens één leerling uit een klas van twintig leerlingen met een verkeerde handschoen moet softballen.

c Neem aan dat de klassen op de school van deze docent bestaan uit twintig leerlingen. De docent geeft op een dag aan acht klassen les.
Hoe vaak kan hij een tekort aan een bepaalde soort handschoen verwachten?

30 **a** Ard beweert dat 75% van de Nederlanders kan fietsen. Stel dat Ard gelijk heeft.
Hoeveel personen kunnen naar verwachting fietsen bij een aselecte steekproef van twintig personen? En hoe groot is de standaardafwijking?

b Gert beweert dat slechts 40% van de Nederlanders kan fietsen. Stel dat Gert gelijk heeft.
Bereken de kans dat er minstens acht en hoogstens veertien personen uit een aselecte steekproef van twintig kunnen fietsen.

c Ard en Gert willen door een aselecte steekproef van twintig personen uitmaken wie gelijk heeft. De afspraak is dat bij minder dan 12 fietsers Gert gelijk krijgt, anders krijgt Ard gelijk. Stel dat Ard gelijk heeft.
Hoe groot is de kans dat Gert gelijk krijgt?

d Bereken de kans dat Ard ten onrechte gelijk krijgt.

© Noordhoff Uitgevers bv

31 Een supermarkt heeft een weggeefactie. Voor elke twintig euro die je besteedt, ontvang je een enveloppe. De helft van alle enveloppen bevat een waardebon. Bij inlevering van vijf waardebonnen, ontvang je een cadeaubon van € 10,-.
De vraag is hoeveel je moet besteden, zodat de kans op minstens vijf waardebonnen groter dan 0,95 wordt.
Kies als stochast X het aantal bonnen en neem $p = 0{,}5$.
Onderzoek hoeveel enveloppen je minstens moet hebben en welk bedrag je dus minstens moet besteden.

32 Het bestuur van de stichting van vrienden van een Nederlands beroepsorkest organiseert jaarlijks een concert voor de vrienden. In de concertzaal is plaats voor 900 bezoekers. Het bestuur zit met een dilemma: hoeveel vrienden kunnen ze uitnodigen, in de wetenschap dat niet iedereen op een uitnodiging zal ingaan? Enerzijds is het inefficiënt als er veel stoelen leeg blijven, anderzijds is het vervelend als er meer vrienden komen dan er stoelen zijn. Het is bekend dat de respons op een uitnodiging 60% is. Het bestuur besluit om precies zoveel mensen uit te nodigen dat de kans dat er meer mensen komen dan er plaatsen zijn, kleiner is dan één procent.

a Bereken het maximaal aantal mensen dat het bestuur kan uitnodigen voor het concert.

b Hoeveel stoelen zullen er naar verwachting leeg blijven bij dat aantal uitnodigingen?

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Binomiale verdeling en parameters

Een kansexperiment met maar twee mogelijke uitkomsten heet een Bernoulli-experiment. Veel kansexperimenten kun je opvatten als het herhaald uitvoeren van hetzelfde Bernoulli-experiment.
De kans op een succes blijft bij iedere trekking gelijk.
Stochast X telt het aantal successen. Bij n experimenten kan X de waarden 0, 1, 2, …., n aannemen.
De kansverdeling van stochast X heet een binomiale verdeling.
De kansverdeling van een binomiaal verdeelde stochast X is vastgelegd door het aantal herhalingen van het experiment n en de kans p op succes van het experiment. Hierbij heten n en p de parameters van de binomiale verdeling.

Voorbeeld

Ga bij de volgende kansexperimenten na of er een binomiale verdeling bij kan horen.
A: In één keer vijf zuurtjes pakken uit een trommel met tien gele en tien rode zuurtjes waarbij je let op het aantal gele zuurtjes.
B: Het gokken van vijf driekeuzevragen bij een toets Duits waarbij je let op het aantal goede antwoorden.

Oplossing

A: Hierbij hoort geen binomiale verdeling. De kans op een geel zuurtje blijft niet gelijk.
B: Het antwoord is goed of fout. De kans op een goed antwoord blijft bij de vijf vragen hetzelfde. Hierbij hoort dus een binomiale verdeling.
X is het aantal goed beantwoorde vragen, $n = 5$ en $p = \frac{1}{3}$.

S1 Geef bij deze kansexperimenten aan of er een binomiale verdeling bij kan horen. Geef in die gevallen de waarden van de parameters n en p.

- **a** Twaalf keer werpen met een dobbelsteen waarbij je let op het aantal uitkomsten groter dan vier.
- **b** Het in één keer trekken van vier kaarten uit een volledig kaartspel waarbij je let op het aantal schoppen.
- **c** Het trekken met terugleggen van 20 knikkers uit een vaas met 60 witte knikkers en 40 zwarte knikkers, waarbij je let op het aantal witte knikkers.
- **d** Het trekken zonder terugleggen van 20 knikkers uit een vaas met 3000 witte knikkers en 2000 zwarte knikkers, waarbij je let op het aantal witte knikkers.

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheid

Je kunt een binomiale kans berekenen.

Als stochast X binomiaal verdeeld is, noteer je dat als X is Bin(n; p)-verdeeld. Hierin is n is het aantal herhalingen en is p de kans op succes.
$P(X = k)$ is de kans op de gebeurtenis van k successen.
Deze gebeurtenis kan op $\binom{n}{k}$ verschillende volgorden plaatsvinden.
De kans op precies k successen en $n - k$ mislukkingen is
$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

Deze kans kun je ook met je rekenmachine berekenen.

Voorbeeld

Barend heeft bij boogschieten een kans van 0,6 om raak te schieten.
Hoe groot is de kans dat hij bij tien keer schieten acht keer raak schiet?

Oplossing

Stochast X is het aantal keren raak.
X is Bin(10; 0,6)-verdeeld.
$P(X = 8) = \binom{10}{8} \cdot 0{,}6^8 \cdot 0{,}4^2 \approx 0{,}1209$
of met de rekenmachine:
Optie: binomiaal
Invoer: $n = 10$, $p = 0{,}6$ en $x = 8$
Dit geeft $P(X = 8) \approx 0{,}1209$.

S2 Bij het trainen op strafschoppen heeft Hakim een kans van 0,85 om te scoren.

a Bereken de kans dat hij van de 20 keer precies 16 keer scoort.

b Bereken de kans dat Hakim van de tien keer precies zeven keer scoort.

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheid

Je kunt een cumulatieve kans berekenen bij een binomiale verdeling.

1. Formuleer stochast X en stel de parameters n en p vast.
2. Schrijf de gevraagde kans zo nodig als verschil van cumulatieve binomiale kansen.
3. Voer op je rekenmachine de cumulatieve binomiale kans(en) in, met de parameters n en p en het aantal successen en bereken de gevraagde kans.

Voorbeeld 1

Gerrit heeft 15% kans om bij bowlen een strike te gooien.
Bereken de kans dat hij hoogstens twee van de vijf keer een strike gooit.

Oplossing

1. Stochast X is het aantal keren strike.
   X is Bin(5; 0,15)-verdeeld.
2. $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$
3. Met de rekenmachine:
   Optie: binomiaal cumulatief
   Invoer: $n = 5$, $p = 0{,}15$ en $X = 2$
   Dit geeft $P(X \leq 2) \approx 0{,}9734$.

Voorbeeld 2

Margje heeft 35% kans om bij bowlen een strike te gooien.
Bereken de kans dat zij van de acht keer meer dan twee maar minder dan zes keer een strike gooit.

Oplossing

1. Stochast X is het aantal keren strike.
   X is Bin(8; 0,35)-verdeeld.
2.

3. $P(2 < X < 6) = P(X \leq 5) - P(X \leq 2)$
   $P(X \leq 5) - P(X \leq 2) =$
   $0{,}9746\ldots - 0{,}4278\ldots \approx 0{,}5469$

S3 Stochast A is Bin(12; 0,42)-verdeeld.
Bereken de volgende kansen.

a $P(A \leq 4)$
b $P(A \geq 6)$
c $P(3 < A \leq 8)$
d $P(A > 10)$

S4 De kans dat een willekeurige deelnemer slaagt bij het praktijkexamen voor het brommerrijbewijs is 85%. Op een dag zijn er 30 deelnemers.

a Bereken de kans dat er meer dan 25 deelnemers slagen voor het praktijkexamen.
b Bereken de kans dat meer dan 20 maar minder dan 25 deelnemers slagen voor het praktijkexamen.

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheid

Je kunt de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van een binomiaal verdeelde stochast berekenen.

Als een stochast X binomiaal verdeeld is met parameters n en p dan is de verwachtingswaarde $E(X) = n \cdot p$ en is de standaardafwijking $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$.

Voorbeeld

Van een grote partij krokusbolletjes is bekend dat 30% van de bolletjes een gele bloem geeft en 70% een blauwe bloem. Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het aantal bolletjes met gele bloemen als je 40 van deze bolletjes plant.

Oplossing

Stochast X is het aantal van de 40 bolletjes met gele bloemen.
$n = 40$ en $p = 0{,}3$
$E(X) = 40 \times 0{,}3 = 12$
$\sigma(X) = \sqrt{40 \times 0{,}3 \times 0{,}7} \approx 2{,}90$

S5 Van een partij smarties is gegeven dat 15% rood is.

a Henry koopt een doosje met 36 smarties.
Hoeveel smarties zullen naar verwachting rood zijn en hoe groot is de standaardafwijking?

b Iris koopt een verpakking met 400 smarties.
Hoeveel smarties zullen er naar verwachting rood zijn en hoe groot is de standaardafwijking in dit geval?

© Noordhoff Uitgevers bv

T1 Bij de productie van monitoren is de kans 8% dat er defecte pixels zijn. Er worden 15 monitoren gecontroleerd.
Stochast X is het aantal monitoren met defecte pixels.

a Bereken de kans dat er drie monitoren zijn met defecte pixels.

b Hoe groot is de kans dat er meer dan twee monitoren zijn met defecte pixels?

c Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.

d Het aantal defecte monitoren is a.
Bij welke waarden van a is $P(X \geq a) \leq 0{,}01$?

T2 Stochast Y is $\text{Bin}\left(25, \frac{1}{3}\right)$-verdeeld.
Bereken de kansen.

a $P(Y \leq 8)$

b $P(Y < 5)$

c $P(Y \geq 15)$

d $P(5 < Y \leq 14)$

e $P(Y > 10)$

f $P(7 \leq Y < 9)$

T3 Tim gooit vijf keer met een geldstuk en noteert het aantal keren kop. Het is een bijzonder geldstuk, want er geldt $P(\textit{munt}) = 0{,}45$. De stochast K is het aantal keren kop.

a Waarom hoort bij K een binomiale kansverdeling?

b Geef de kansverdeling van K.

c Bereken $P(K \leq 2)$.

d Bereken de kans dat Tim meer dan drie keer munt gooit.

T4 Tom en Harry spelen een spel. Volgens de spelregels moeten ze 25 keer achter elkaar met een dobbelsteen gooien. Bij elke worp met een even aantal ogen krijgt Tom een punt, bij een oneven aantal ogen krijgt Harry een punt. Wie na afloop de meeste punten heeft, wint de pot. In de pot zit 30 euro.

a Bereken de kans dat, na 12 keer gooien, Tom acht punten heeft en Harry vier.

b Nadat ze 12 keer gegooid hebben, besluiten ze om te stoppen en de pot te verdelen. Op dat moment heeft Tom acht punten en Harry vier. Tom stelt voor de pot te verdelen in de verhouding van het aantal punten dat ieder heeft behaald.
Hoeveel euro krijgt elk dan?

c Hoeveel euro zou ieder krijgen als ze de pot verdelen in de verhouding van de kans die elk heeft om te winnen?

© Noordhoff Uitgevers bv

T5 Een lerares biologie geeft een multiplechoiceproefwerk met twintig vierkeuzevragen. Ze besluit dat er voor elke fout een halve punt van 10 afgaat.
Stochast X is het aantal goed beantwoorde vragen.

a Bereken de kans dat een leerling die alle vragen gokt precies een zes haalt.

b Bereken de kans dat iemand die alle vragen gokt, minstens een zes haalt.

c De toets wordt door 124 leerlingen gemaakt. Alle leerlingen gokken bij elke vraag het antwoord.
Hoe groot is de verwachtingswaarde van het aantal leerlingen dat een zes of meer scoort?

d Bereken $E(X)$ voor iemand die alle vragen gokt.

e Hoe groot is de kans voor iemand die alle vragen gokt, dat het aantal goed beantwoorde vragen niet meer dan één keer de standaardafwijking afwijkt van de verwachtingswaarde?

f Welk cijfer mag je verwachten als je vier vragen zeker weet en de rest gokt?

g Judith heeft haar proefwerk niet geleerd, maar weet nog zoveel, dat ze bij elke vraag slechts tussen twee mogelijkheden hoeft te gokken.
Hoe groot is de kans dat Judith minstens een zes haalt?

T6 Een leliekweker biedt bollen van leliesoort Lilium Rubrum aan. De bollen worden verpakt in dozen van 50 en van 100 stuks. Volgens de leliekweker heeft elke bol een kans van 0,90 om te gaan bloeien. Ga ervan uit dat de bloeikans inderdaad 0,90 is.

a Bereken de kans dat van een doos van 50 bollen precies 45 bollen gaan bloeien.

b Een bedrijf koopt een doos met 50 en een doos met 100 bollen.
Bij welke van de twee dozen is de kans dat minstens 90% van de bollen gaat bloeien het grootst?

c Een ander bedrijf koopt vijf dozen met 50 bollen.
Bereken de kans dat er van vier van de vijf dozen minstens 45 bollen tot bloei komen.

T7 Een sportarts beweert dat 12% van de gewichtsheffers die deelnemen aan een internationale wedstrijd gebruikmaakt van verboden stimulerende middelen.
Na afloop van elke wedstrijd worden tien, door loting aangewezen, gewichtsheffers gecontroleerd.

a Hoe groot is de kans dat geen van deze tien gewichtsheffers stimulerende middelen heeft gebruikt als deze sportarts gelijk heeft?

b Er worden vijf internationale wedstrijden gehouden.
Hoe groot is de kans dat bij geen van deze wedstrijden een gewichtsheffer op het gebruik van stimulerende middelen wordt betrapt?

© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt een binomiale kans berekenen.

E1 De kans dat een basketballer een vrije worp mist, is elke keer 25%. Deze speler mag tijdens een wedstrijd tien vrije worpen nemen. Stochast X is het aantal keer dat de speler een vrije worp mist.

a Geef de parameters die bij de kansverdeling van X horen.
b Bereken de kans dat de speler drie keer mist.
c Bereken de kans dat hij acht keer scoort.

E2 Bij een tuinwinkel waar de producten uitsluitend verkocht worden via het internet, betaalt 58% van de klanten met iDEAL.

a Op een dag worden er acht bestellingen gedaan. Bereken de kans dat vijf klanten met iDEAL betalen.
b Hoe groot is de kans dat van de acht klanten precies de helft met iDEAL betaalt?

Je kunt een cumulatieve kans berekenen bij een binomiale verdeling.

E3 De stochast X is Bin(13; 0,6)-verdeeld.
Bereken de kansen.

a $P(X > 4)$
b $P(X \geq 6)$
c $P(4 < X < 8)$
d $P(2 \leq X < 7)$
e $P(X < 10)$
f $P(X > 0)$

E4 Je gooit met 15 dobbelstenen en je let op het aantal zessen dat je gooit.

a Bereken de kans op geen enkele zes.
b Bereken de kans op hoogstens drie zessen.
c Bereken de kans op meer dan drie zessen.
d Bereken de kans op meer dan twee maar minder dan zeven zessen.

Je kunt de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van een binomiaal verdeelde stochast berekenen.

E5 Volgens de politie heeft 85% van de fietsers verlichting op de fiets. Op een winterochtend wordt de verlichting van de fietsen van 20 personen gecontroleerd. Stochast X is het aantal personen dat bij deze controle geen licht heeft op de fiets.

a Geef de parameters die bij de kansverdeling van X horen.
b Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

E6 Tijdens de uitverkoop heeft een winkelier rode en zwarte paraplu's in de aanbieding. Uit ervaring weet de winkelier dat gemiddeld 45% van de kopers een rode paraplu neemt, de rest kiest een zwarte.
Op een regenachtige dag worden er 100 kopers van een paraplu verwacht.

a Hoeveel rode paraplu's zullen er naar verwachting op deze dag worden verkocht?
b Hoe groot is de kans dat er precies 45 klanten een rode paraplu willen?
c Bereken de kans dat er meer zwarte dan rode paraplu's worden verkocht.
d Bereken de kans dat er meer rode dan zwarte paraplu's worden verkocht.

E7 In een vaas liggen 10 witte en 15 rode knikkers. Je haalt in één keer vijf knikkers uit de vaas.
Stochast Y is het aantal getrokken rode knikkers.
a Leg uit waarom de stochast Y niet binomiaal verdeeld is.
b Bereken $P(Y = 5)$.

In een andere vaas liggen 500 witte en 750 rode knikkers. Je haalt weer in één keer vijf knikkers uit de vaas.
Stochast X is het aantal getrokken rode knikkers.
c Waarom kun je de kansverdeling van X benaderen met een binomiale verdeling?
d Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.
e Bereken de kans dat je meer dan twee, maar hoogstens vier witte knikkers trekt.

E8 Neem aan dat 19% van de vrouwen in Nederland rookt. Aan 40 willekeurige vrouwen wordt gevraagd of ze roken.
a Formuleer een stochast X en geef de bijbehorende parameters.
b Bereken de kans dat er minder dan acht vrouwen uit deze groep roken.
c Bereken de kans dat er meer dan vijf vrouwen uit deze groep roken.
d Hoe groot is de kans dat het percentage rokende vrouwen in deze groep ligt tussen de 15% en 25%?

© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

Rijen 14

In dit hoofdstuk

Je hebt al veel geleerd over lineaire en exponentiële formules. Deze kennis ga je in dit hoofdstuk gebruiken bij het rekenen aan rijen.

Bij een rij getallen kun je soms de volgende waarde berekenen met de voorafgaande waarden. Dit heet recursie. De bijbehorende formule heet een recursieve formule.
Er zijn rijen waarbij de volgende term wordt berekend door steeds met een vast getal te vermenigvuldigen of steeds een vast getal bij op te tellen. Bij deze rijen leer je hoe je met een formule de som van een aantal termen kunt berekenen.

Na dit hoofdstuk weet je alles wat je over rijen en recursie moet weten voor het centraal examen.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk:

- Abstraheren opdracht 27
- Modelleren en algebraïseren opdracht 36
- Probleem oplossen en analytisch denken opdracht 42

© Noordhoff Uitgevers bv

V1 **a** Hoe zie je aan de tabel dat deze bij een lineair verband hoort?

x	2	3	4	5	6	7	8
y	19	23	27	31	35	39	43

b Waarom heb je de bijbehorende lineaire formule niet nodig om de waarde van y bij $x = 10$ te berekenen?
c Welke waarde heeft y bij $x = 10$?
d Waarom is het wel handig om de lineaire formule te hebben als je de waarde van y wilt berekenen bij $x = 82{,}7$?
e Stel een lineaire formule op bij de tabel.
f Bereken de waarde van y bij $x = 20$ en bij $x = 82{,}7$.

Theorie

Een verband tussen x en y is een lineair verband als het volgende geldt: als de waarde van x met een vast getal toeneemt, dan neemt de waarde van y ook met een vast getal toe. De toename van y kan positief of negatief zijn.
Bij een lineair verband tussen de variabelen x en y hoort de formule $y = ax + b$. Hierin is a de richtingscoëfficiënt en is b het startgetal. Het startgetal is de waarde van y bij $x = 0$.

Voorbeeld

Gegeven is de tabel.

x	2	6	10	14	18
y	15	13	11	9	7

Stel een formule op bij de tabel en bereken de waarde van y bij $x = 36$.

Oplossing

Als in de tabel x met 4 toeneemt, neemt y met 2 af.
Dus als x met 1 toeneemt, neemt y met $\frac{1}{2}$ af.

De richtingscoëfficiënt is dus $-\frac{1}{2}$.

Bij $x = 0$ is $y = 15 - 2 \times -\frac{1}{2} = 16$.

Een formule bij de tabel is $y = -\frac{1}{2}x + 16$.

Bij $x = 36$ is $y = -\frac{1}{2} \times 36 + 16 = -2$.

V2 Stel bij elke tabel een formule op en bereken bij elke tabel de waarde van p bij $t = 20$.

A

t	7	8	9	10	11
p	9	11	13	15	17

B

t	2	4	6	8	10
p	120	115	110	105	100

C

t	3	4	5	6	7
p	4,8	5,1	5,4	5,7	6,0

© Noordhoff Uitgevers bv

V3 **a** Ga na dat de tabel bij een exponentieel verband hoort.
b Waarom heb je de formule niet nodig om de waarde van y bij $x = 8$ te berekenen?
c Welke waarde heeft y bij $x = 8$?
d Waarom is het wel handig om de formule te hebben als je de waarde van y wilt berekenen bij $x = 25$?
e Stel een exponentiële formule op bij de tabel.

x	3	4	5	6	7
y	64	80	100	125	156,25

Theorie

Een verband tussen x en y is een **exponentieel verband** als geldt: als de waarde van x met een vast getal toeneemt, dan wordt de waarde van y steeds met hetzelfde getal vermenigvuldigd.
Bij een exponentieel verband tussen de variabelen x en y hoort de formule $y = b \cdot g^x$. Hierin is g de **groeifactor** en b de **beginhoeveelheid**. De beginhoeveelheid is de waarde van y bij $x = 0$.

Voorbeeld

Gegeven is de tabel.

x	3	4	5	6	7
y	27,65	33,18	39,81	47,78	57,33

Stel een formule op bij de tabel en bereken de waarde van y bij $x = 35$.

Oplossing

$33{,}18 : 27{,}65 = 1{,}2$; $39{,}81 : 33{,}18 \approx 1{,}2$;
$47{,}78 : 39{,}81 \approx 1{,}2$; $57{,}33 : 47{,}78 \approx 1{,}2$
Als in de tabel x met 1 toeneemt, wordt y steeds met 1,2 vermenigvuldigd. De groeifactor is dus 1,2.

Bij $x = 0$ is $y = 27{,}65 : 1{,}2^3 \approx 16$.
Een formule bij de tabel is $y = 16 \cdot 1{,}2^x$.
Bij $x = 35$ is $y = 16 \cdot 1{,}2^{35} \approx 9450{,}69$.

V4 De drie tabellen horen elk bij een exponentieel verband. Stel bij elke tabel een formule op en bereken bij elke tabel de waarde van p bij $t = 15$.

A

t	0	1	2	3	4
p	10	11	12,1	13,31	14,641

B

t	7	8	9	10	11
p	48	96	192	384	768

C

t	6	7	8	9	10
p	1024	256	64	16	4

V5 **a** Ga bij elk van de drie tabellen na of er sprake kan zijn van een lineair verband, een exponentieel verband of geen van beide.
b Geef bij elke tabel de waarde van y bij $x = 12$.

A

x	2	3	4	5	6
y	90	81	72,9	65,61	59,05

B

x	3	4	5	6	7	8	9	10
y	3	1	0	0	1	3	6	10

C

x	5	6	7	8	9
y	−1,5	1	3,5	6	8,5

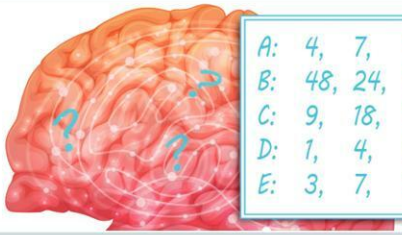
© Noordhoff Uitgevers bv

14.1 Recursieve formules

Je leert
- wat een rij, een term en een recursieve formule is
- hoe je een recursieve formule bij een rij opstelt

Leerroutes
- ondersteunend: 1—2—3—04—5—6—07—8
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7—8
- uitdagend: 1—2—3—4—5—7—8—U1

Bij een IQ-test is het de bedoeling om het volgende getal in een rij getallen op te schrijven.
- Geef van elke rij het volgende getal.



A: 4, 7, 10, 13, 16, ⋯
B: 48, 24, 12, 6, 3, ⋯
C: 9, 18, 15, 30, 27, ⋯
D: 1, 4, 9, 16, 25, ⋯
E: 3, 7, 15, 31, 63, ⋯

1 Gegeven zijn twee rijen getallen.
- **a** Welke regelmaat zie je in rij A?
- **b** Schrijf de volgende drie getallen van rij A op.
- **c** Ga na dat je in rij B het volgende getal kunt berekenen door het voorafgaande getal in de rij met 3 te vermenigvuldigen en van het resultaat 7 af te trekken.
- **d** Bereken van rij B de volgende drie getallen.
- **e** Vul in: bij rij B hoort de woordformule
  nieuwe waarde = … · *oude waarde* − …

A: 3, 4, 6, 9, 13, …, …, …
B: 4, 5, 8, 17, …, …, …

Theorie

Een opeenvolging van getallen heet een rij en de getallen in de rij heten de termen. Als er in een rij een regelmaat zit, kun je deze regelmaat vaak met een formule beschrijven. In zo'n formule noem je de volgende term de nieuwe waarde en de voorafgaande term de oude waarde.

Voorbeeld

Gegeven is de rij 2, 9, 37, 149, 597.
De termen zijn 2, 9, 37, 149 en 597.
Bij de rij hoort de formule
nieuwe waarde = 4 · *oude waarde* + 1.

2 Je ziet drie rijen op het blaadje.
- **a** Een formule die past bij rij A is
  nieuwe waarde = 2 · *oude waarde* + 1.
  Met deze formule kun je stap voor stap de volgende term berekenen.
  Vul in: de vijfde term is 2 × 23 + 1 = … en de zesde term is 2 × … + 1 = …
- **b** Geef bij rij B een formule en bereken daarmee de vijfde en de zesde term van de rij.
- **c** Geef ook een formule bij rij C en bereken daarmee de vijfde en zesde term van de rij.

A: 2, 5, 11, 23, …, …
B: 800, 400, 200, 100, …, …
C: 3, 7, 19, 55, …, …

© Noordhoff Uitgevers bv

3 De rij getallen 46, 54, 66, 84, … is gegeven.

a Laat zien dat bij deze rij de formule *nieuwe waarde* = 1,5 · (*oude waarde* − 10) hoort.

b Bereken de volgende twee termen van de rij.

c Laat zien dat de rij 74; 96; 129; 178,5 ook bij de formule van opdracht a hoort.

d Maak zelf een rij getallen bij de formule met als eerste term 34.

Theorie

Bij veel getallenrijen kun je de volgende term berekenen uit de voorafgaande term(en) met een formule. Dit heet recursie en de bijbehorende formule heet een recursieve formule.
De termen van een rij noteer je met de indexnotatie zoals u_0, u_1 en u_n, of met de functienotatie $u(0)$, $u(1)$ en $u(n)$.
De getallen 0, 1, 2, 3, …, $n-1$, n, $n+1$ zijn de rangnummers van de rij.
De eerste term van een rij heet de beginterm, dit kan $u(0)$ of $u(1)$ zijn. Om een rij vast te leggen, heb je één term nodig. Meestal kies je daarvoor de beginterm.

Voorbeeld 1

De rij 3, −6, 12, −24, 48, … heeft beginterm $u(0)$. Bereken de volgende twee termen van deze rij en geef een recursieve formule voor deze rij u.

Oplossing

n	0	1	2	3	4	5	6
$u(n)$	3	−6	12	−24	48	…	…

Je ziet dat je de volgende term kunt berekenen door de voorafgaande term met −2 te vermenigvuldigen.
$u(5) = -2 \cdot 48 = -96$ en $u(6) = -2 \cdot -96 = 192$
Een recursieve formule in woorden is
nieuwe waarde = −2 · *oude waarde*, met $u(0) = 3$.

Voorbeeld 2

De rij 24, 21, 18, 15, 12, … heeft beginterm v_1. Bereken de volgende twee termen van deze rij en geef een recursieve formule voor de rij v.

Oplossing

n	1	2	3	4	5	6	7
v_n	24	21	18	15	12	…	…

Je ziet dat je de volgende term kunt berekenen door 3 af te trekken van de voorafgaande term.
$v_6 = 12 - 3 = 9$ en $v_7 = 9 - 3 = 6$
Een recursieve formule in woorden is
nieuwe waarde = *oude waarde* − 3, met $v_1 = 24$.

Ondersteunende route → maak opdracht 04

4 H Gegeven is de rij 3, 7, 11, 15, 19, …

a Vul de tabel verder in.

n	0	1	2	3	4	5	6
$u(n)$	3	7	11	…	…	…	…

b Geef een recursieve formule bij deze rij.

c Geef ook een recursieformule bij de rij 5, 20, 80, 320 met de beginterm $w_1 = 5$.

© Noordhoff Uitgevers bv

5 Bij een rij hoort de recursieve formule
nieuwe waarde = 2 · *oude waarde* + 1 met beginterm $u(1) = 4$.

a Bereken $u(2)$, $u(3)$, $u(4)$ en $u(5)$.

b Leg uit dat je de recursieve formule ook kunt schrijven als $u(n + 1) = 2 \cdot u(n) + 1$.

Theorie

Als in een recursieve formule de oude waarde gelijk is aan $u(n)$, dan is de nieuwe waarde gelijk aan $u(n + 1)$.
De recursieve formule *nieuwe waarde* = 3 · *oude waarde* kun je schrijven als $u(n + 1) = 3 \cdot u(n)$ met bijvoorbeeld $u(0) = 7$.

Voorbeeld

Een rij is gedefinieerd door $u_{n+1} = 3 \cdot u_n - 5$ met beginterm $u_0 = 4$.
Bereken de termen u_1, u_2 en u_3.

Oplossing
Een bijbehorende woordformule is
nieuwe waarde = 3 · *oude waarde* − 5.
$u_0 = 4$
$u_1 = 3 \cdot u_0 - 5 = 3 \cdot 4 - 5 = 12 - 5 = 7$
$u_2 = 3 \cdot u_1 - 5 = 3 \cdot 7 - 5 = 21 - 5 = 16$
$u_3 = 3 \cdot u_2 - 5 = 3 \cdot 16 - 5 = 48 - 5 = 43$

6 Schrijf de formule *nieuwe waarde* = 1,4 · *oude waarde* − 5 in de vorm $u(n + 1) = \ldots$.

Ondersteunende opdrachten → maak opdracht O7

7 Schrijf de eerste vier termen op van deze rijen.

H

a $u(n + 1) = 10 \cdot u(n) + 4$ met beginterm $u(1) = 2$

b $u(n + 1) = \frac{1}{2} \cdot u(n)$ met beginterm $u(0) = 34$

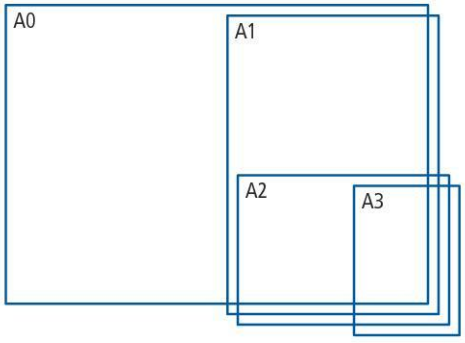
c $u_{n+1} = 2 \cdot u_n + 3$ met beginterm $u_0 = -\frac{1}{2}$

8 De oppervlakte van een vel A0 is 1 m^2. De oppervlakte van elk volgend vel is de helft van de voorgaande. Zo is de oppervlakte van een vel A1 de helft van A0 en van een vel A2 de helft van A1.

a Bereken de oppervlakte van een vel A1, A2 en A3.

b Geef een recursieve formule voor de oppervlakte $A(n)$.

c Bereken de oppervlakte van een vel A6.



Uitdagende route → maak opdracht U1

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

04 Het begin van de rij −1, 2, 5, 8, … is in een tabel gezet. De beginterm van de rij is $u(0)$.

n	0	1	2	3	4	5
$u(n)$	−1	2	…	…	…	…

a Vul de gegeven termen van de rij in de tabel in.
b Welke regelmaat zie je in de tabel?
c Vul de tabel verder in door gebruik te maken van je antwoord van opdracht b.
d Vul in: de recursieve formule bij deze rij is *nieuwe waarde* = *oude waarde* + … met beginterm $u(\dots) = \dots$.
e De rij 240, 120, 60, 30, 15, … is gegeven. De beginterm van de rij is $w_1 = 240$.
Maak een tabel bij deze rij en bereken w_6 en w_7.
f Welke regelmaat zie je in de tabel?
g Vul in: de recursieve formule bij deze rij is *nieuwe waarde* = … · *oude waarde* met beginterm $w_{\dots} = \dots$.

07 Gegeven is de rij $u(n + 1) = 3 \cdot u(n) - 2$ met beginterm $u(1) = 4$.

a Vul in: als $u(1)$ de oude waarde is, dan is $u(\dots)$ de nieuwe waarde.
b Laat zien dat $u(2) = 10$.
c Vul in het blaadje verder in.

Schrijf de eerste vier termen op van de volgende rijen.
d $u_{n+1} = 7 \cdot u_n + 1$ met beginterm $u_1 = 0$
e $u(n + 1) = 6 \cdot u(n) + 1$ met beginterm $u(0) = 0{,}5$

nieuwe waarde =
3 × oude waarde – 2
$u(1) = 4$
$u(2) = 3 \times 4 - 2 = \dots$
$u(3) = 3 \times \dots - 2 = \dots$
$u(4) = \dots \times \dots - \dots = \dots$
$u(5) = \dots \times \dots - \dots = \dots$

Uitdagende opdrachten

U1 Er bestaan ook rijen met meer dan één beginterm. Het begin van een dergelijke rij u is in een tabel gezet. De begintermen zijn $u(0) = 2$ en $u(1) = 3$.

n	0	1	2	3	4
$u(n)$	2	3	6	18	108

Geef een recursieve formule bij deze rij u.

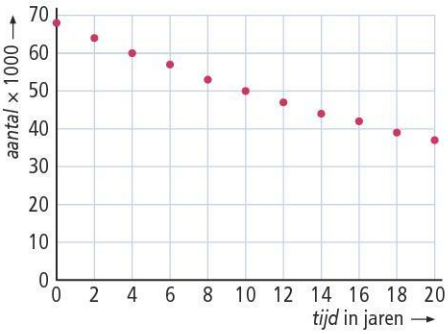
© Noordhoff Uitgevers bv

14.2 Rijen weergeven

Je leert
- hoe je met je rekenmachine een rij weergeeft

Leerroutes
- ondersteunend: 9—10—O11—12—13—O14—15—16
- doorlopend: 9—10—11—12—13—14—15—16
- uitdagend: 9—10—11—12—13—15—16—U2

Het aantal grutto's neemt in Nederland de laatste jaren af. In de grafiek zie je de schatting van het aantal broedparen met $t = 0$ in het jaar 2000.
- Waarom is er geen vloeiende lijn door de punten getekend?
- Stel een recursieve formule op bij de grafiek.



9 Gegeven is de recursieve formule $u(n + 1) = 4 \cdot u(n) + 7$ met beginterm $u(1) = 0$.
- **a** Vul in: $u(2) = 4 \cdot u(\ldots) + 7 = 4 \cdot \ldots + 7 = \ldots$.
- **b** Vul de tabel verder in.

n	1	2	3	4	5
$u(n)$	0	…	…	…	…

10 De recursieve formule $u(n) = 2 \cdot u(n - 1) - 4$ met beginterm $u(0) = 5$ is gegeven.
- **a** Laat zien dat $u(1) = 6$.
- **b** Vul de tabel verder in.
- **c** Teken een assenstelsel. Zet n langs de horizontale as en $u(n)$ langs de verticale as. Neem de horizontale as van 0 tot en met 5 en de verticale as van 0 tot en met 40 en teken de punten uit de tabel in het assenstelsel.
- **d** Waarom mag je de punten niet verbinden met een vloeiende lijn?

n	0	1	2	3	4	5
$u(n)$	5	6	…	…	…	…

Theorie

Een ontwikkeling in de tijd die door een rij wordt beschreven, kun je weergeven in een grafiek of in een tabel. Hierin wordt het verband tussen de tijd en de bijbehorende waarde van de rij weergegeven. De grafiek bestaat uit losse punten omdat de rangnummers van de rij gehele getallen zijn.

© Noordhoff Uitgevers bv

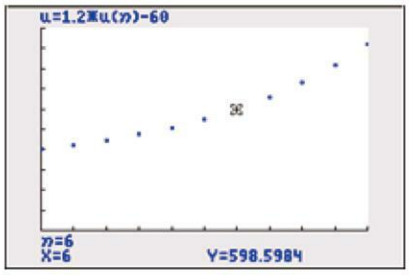
Voorbeeld

De recursieve formule $A(t + 1) = 1{,}2 \cdot A(t) - 60$ met $A(0) = 400$ beschrijft het aantal herten A in een natuurgebied na t jaar.
Vanaf welk tijdstip zijn er meer dan 550 herten?

Oplossing

Voer de formule in op je rekenmachine en maak een tabel of een grafiek.
Vanaf $t = 6$ is het aantal herten groter dan 550.

n	$u(n)$
0	400
1	420
2	444
3	472,8
4	507,36
5	548,83
6	598,6



→ Instructie rekenmachine | Rijen en recursie

Ondersteunende route → maak opdracht O11

11 Gegeven is de recursieve formule $u(n + 1) = 2 \cdot u(n) + 24$ met $u(0) = 10$.

a Ga met behulp van je rekenmachine na vanaf welk rangnummer de bijbehorende term groter is dan 100 000.

b Beantwoord dezelfde vraag voor de rij met de recursieve formule $t(n + 1) = 1{,}5 \cdot (t(n))^2 - 10$ met $t(1) = 3$.

12 H Gegeven is de recursieve formule $P(t + 1) = 1{,}4 \cdot P(t) + 2$ met $P(1) = 5$.

a Plot de bijbehorende grafiek.

b Vanaf welk rangnummer is $P(t) > 100$?

13 Gegeven is de recursieve formule $u(n + 1) = 3 \cdot u(n) + 10$ met beginterm $u(1) = 0$.

a Bereken $u(2)$ tot en met $u(5)$.

b Lot schrijft de recursieve formule in de vorm $u(n) = 3 \cdot u(n - 1) + 10$ met $u(1) = 0$.
Laat zien dat je met deze formule dezelfde antwoorden krijgt als in opdracht a.

c Vul in: de recursieve formule $a(n + 1) = a(n) - 5$ kun je ook schrijven als $a(n) = a(\ldots) - \ldots$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Een recursieve formule kan beginnen met $u(n + 1)$, maar ook met $u(n)$.
Als je in de woordformule *nieuwe waarde* = 1,3 · *oude waarde* voor de nieuwe waarde $u(n + 1)$ neemt, dan hoort bij de oude waarde $u(n)$.
Neem je $u(n)$ voor de nieuwe waarde, dan hoort bij de oude waarde $u(n - 1)$.

Ondersteunende route → maak opdracht O14

14 De recursieve formule $a(t) = 0{,}9 \cdot a(t - 1) + 2000$ met beginterm $a(0) = 40\,000$ is een benadering van het gemiddelde aantal bezoekers per dag van een dierenpark in een jaar. Hierbij is t de tijd in jaren na 2011.

a Vul de tabel verder in.

b In welk jaar zijn er voor het eerst gemiddeld minder dan 25 000 bezoekers per dag?

t	0	1	2	3	4
$a(t)$	40 000	38 000	…	…	…

15 H In een vijver zijn 10 000 vissen. Door natuurlijke aanwas neemt het aantal vissen elk jaar met 1,2% toe. Aan het einde van elk jaar worden er 500 vissen gevangen. Bij deze situatie hoort de recursieve formule $V(t) = a \cdot V(t - 1) - b$ met $V(0) = 10\,000$.

a Leg uit dat $a = 1{,}012$ en geef de waarde van b en de recursieve formule bij het aantal vissen.

b Voer de recursieve formule in op je rekenmachine. Hoeveel vissen zijn er na 10 jaar?

c Hoeveel vissen zullen er op den duur in de vijver zijn?

d Beredeneer dat het aantal vissen toeneemt als elk jaar 100 in plaats van 500 vissen worden gevangen.

16 In een productiebos staan 12 000 bomen. Elk jaar worden er bomen gekapt en nieuwe bomen bij geplant. Het aantal bomen B na t jaren wordt beschreven door de recursieve formule $B(t + 1) = 0{,}8 \cdot B(t) + 3000$ met $B(0) = 12\,000$.

a Geef de betekenis van de getallen 3000 en 0,8.

b Plot de grafiek en beschrijf de ontwikkeling van het aantal bomen in de komende 50 jaar.

c Als er niet 3000 maar 3500 bomen per jaar worden bij geplant, hoeveel bomen staan er op den duur in het bos?

Uitdagende route → maak opdracht U2

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O11 Gegeven is de recursieve formule $N_{t+1} = 2 \cdot N_t - 3$ met beginterm $N_0 = 8$.

a Waarom bestaat de grafiek bij de formule uit losse punten?

b Voer de formule in op je rekenmachine en vul de tabel verder in.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
N_t	8	13	23	…	…	…	…	…	…

c Teken een grafiek bij de tabel.

d Je wilt weten vanaf welk rangnummer $N_t > 100$.
Leg uit waarom $t = 5$ de oplossing van de ongelijkheid is.

e Gegeven is de recursieve formule $u(n + 1) = 3 \cdot u(n) - 5$ met $u(0) = 20$.
Ga met behulp van je rekenmachine na vanaf welk rangnummer de bijbehorende term groter is dan 300 000.

O14 Het totaal aantal grieppatiënten in een dorp na t weken voldoet aan de recursieve formule $a(t + 1) = 1{,}6 \cdot a(t) + 2$. Hierbij is de beginterm $a(0) = 10$.

a Vul in: *nieuwe waarde* = … × *oude waarde* + …

b Hoe is de nieuwe waarde in de formule $a(t + 1) = 1{,}6 \cdot a(t) + 2$ geschreven?

c En hoe is de oude waarde geschreven?

d Je kunt de formule ook schrijven als $a(t) = 1{,}6 \cdot a(\ldots) + 2$.
De nieuwe waarde is nu $a(t)$.
Hoe wordt de oude waarde dan geschreven?

e Een huisarts wil weten wanneer er in totaal meer dan 100 grieppatiënten zullen zijn.
Bereken na hoeveel weken dat zal zijn door gebruik te maken van een tabel of van een grafiek op je rekenmachine.

Uitdagende opdrachten

U2 Twee populaties dieren die in hetzelfde gebied leven, beïnvloeden elkaar. De recursieve formules op het blaadje laten zien hoe je met het aantal dieren in jaar t, de aantallen in het jaar $t + 1$ kunt berekenen.

$a_{t+1} = 0{,}8 \cdot a_t - 1{,}4 \cdot b_t + 1000$
$b_{t+1} = 0{,}6 \cdot a_t - 0{,}2 \cdot b_t - 500$
met $a_0 = 2000$ en $b_0 = 525$

a Plot een grafiek van beide populaties voor de eerste dertig jaren.

b Beschrijf de ontwikkeling van de grootte van de twee populaties.

© Noordhoff Uitgevers bv

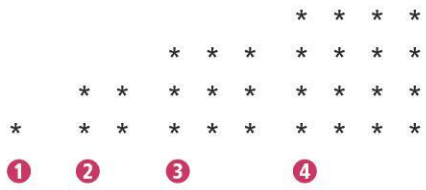
14.3 Directe formules

Je leert
- wat een directe formule is

Leerroutes
- ondersteunend: 17—18—019—20—21
- doorlopend: 17—18—19—20—21
- uitdagend: 17—19—20—21—U3

Het aantal vissen in een vijver t jaren na 1 juli 2020 is te berekenen met de formule $v_t = 1{,}06 \cdot v_{t-1} + 10$ met $v_0 = 600$ maar ook met de formule $v(t) = 500 + 100 \cdot 1{,}06^t$. Je wilt berekenen hoeveel vissen er na 40 jaren in de vijver zwemmen.
- Welke formule kun je daarbij het beste gebruiken? Leg uit waarom.

17 Van een rij figuren zijn de eerste vier figuren getekend.



n	1	2	3	4	5
$a(n)$	1	…	…	…	…

a Hoeveel sterren zal het figuur met rangnummer 5 hebben?
b Vul de tabel verder in.
c Laat zien dat de recursieve formule $a(n) = a(n-1) + 2n - 1$ bij de aantallen sterren van de rij figuren hoort.
d Welke figuur heeft voor het eerst meer dan 50 sterren?
e Ga na dat het aantal sterren te berekenen is met de formule $a(n) = n^2$.
f Controleer je antwoord van opdracht c met behulp van de formule van opdracht e.
g Welke formule vind je makkelijker om $a(30)$ mee uit te rekenen; de recursieve formule of de formule van opdracht e? Leg uit waarom je dit vindt.

18 Gegeven zijn de formules A, B, C en D.

A $u(n) = 5 + 6 \cdot u(n-1)$ met $u(0) = 2$

B $u(n) = n^3 - 9$ met $u(1) = -8$

C $u(n) = n - 1$ met $u(0) = -1$

D $u(n+1) = -u(n)$ met $u(1) = -1$

a Welke twee formules zijn recursief?
b Waarom zijn de twee andere formules niet recursief?

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Bij sommige rijen kun je de waarde van een term $u(n)$ berekenen zonder gebruik te maken van voorafgaande termen. Je gebruikt dan een directe formule. Bij een directe formule is $u(n)$ uitgedrukt in het rangnummer n.

Voorbeeld

De termen van de rij 2, 5, 10, 17, 26, … met beginterm $u(1) = 2$ kun je berekenen met de directe formule $u(n) = n^2 + 1$.

$u(1) = 1^2 + 1 = 2$
$u(2) = 2^2 + 1 = 5$
$u(3) = 3^2 + 1 = 10$
$u(4) = 4^2 + 1 = 17$
$u(5) = 5^2 + 1 = 26$

Ondersteunende route → maak opdracht 019

19 H

Bereken van de rijen bij deze formules de waarde van de term met $n = 6$ en de waarde van de term met $n = 10$.

a $u(n) = \frac{1}{2}(n - 3) + 2$

b $t_n = \frac{n}{7} + 1$

c $p_n = (n + 2)^2 - 5$

d $v_n = \frac{-4 + 2n}{n}$

20

Een van de bekendste rijen in de wiskunde is de rij van Fibonacci. Deze rij werd als eerst beschreven door de Italiaanse wiskundige Leonardo van Pisa (1170 – 1250). Hij is bekend onder de naam Fibonacci.
Deze rij van Fibonacci heeft twee begintermen; de eerste en tweede term zijn beide gelijk aan 1. Vervolgens is elke volgende term de som van de twee voorafgaande termen. De eerste zes termen van de rij zijn 1, 1, 2, 3, 5, 8.

a Geef de zevende tot en met de tiende term van de rij van Fibonacci.

b Leg uit dat bij deze rij de recursieve formule $u(n) = u(n - 1) + u(n - 2)$ met $u(1) = 1$ en $u(2) = 1$ hoort.

c De directe formule die bij deze rij hoort, is

$$u(n) = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{\sqrt{5} \cdot 2^n}$$

Maak met je rekenmachine een tabel bij deze formule en ga na dat deze past bij de rij van Fibonacci.

d Bij welke waarden van n zijn de termen in de rij van Fibonacci groter dan 1 miljoen?

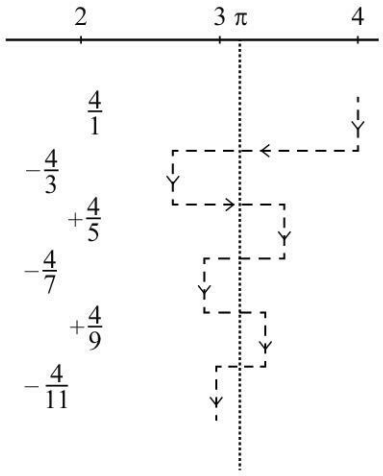
© Noordhoff Uitgevers bv

21 Indiase wiskundigen hebben in de loop van de geschiedenis een grote bijdrage geleverd aan de wiskunde. Ze hebben onder andere onderzocht hoe je het getal π kunt benaderen. In de 14e eeuw ontdekte de Indiase wiskundige Madhava een manier om de waarde van π te benaderen met behulp van een rij.

Hij begon met 4. Dat is groter dan π. Hij telde hier $-\frac{4}{3}$ bij op.

Het resultaat $2\frac{2}{3}$ is nu kleiner dan π. Vervolgens telde hij bij het antwoord $\frac{4}{5}$ op. Het resultaat $3\frac{7}{15}$ is nu weer groter dan π.

Hij ging zo verder, dus: $\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \ldots$



Na elke nieuwe term die hij erbij optelde, kwam hij steeds dichter bij het getal π, zie de figuur. Madhava kon bewijzen dat hij op deze manier inderdaad steeds dichter bij de werkelijke waarde van π kwam. Nadeel van deze manier is echter wel dat je veel termen nodig hebt voor een redelijke benadering van π. Het resultaat na drie termen, $3\frac{7}{15}$, verschilt behoorlijk van π.

a Bereken hoeveel termen je minimaal nodig hebt om te zorgen dat het verschil met π kleiner is dan 0,1.

b Madhava telde voor zijn benadering van π de termen van een rij bij elkaar op, namelijk de termen van de volgende rij: $\frac{4}{1}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{5}, -\frac{4}{7}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{11}, \ldots$

Hieronder staan twee mogelijke formules voor deze rij. Van deze formules is er één juist en de andere niet.

A: $u_n = \dfrac{4 \cdot (-1)^{n-1}}{2n-1}$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$

B: $u_n = \dfrac{(-4)^{n-1}}{2n-1}$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$

Onderzoek welke van de twee formules de juiste is.

c Madhava gaf ook een andere rij, die sneller tot een goede benadering van π leidde. De formule voor deze rij luidt:

$$v_n = \sqrt{12} \cdot \frac{(-1)^n}{(2n+1) \cdot 3^n} \text{ met } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Hiermee kon hij op soortgelijke wijze als hiervoor beschreven een benadering van π vinden die steeds nauwkeuriger wordt naarmate meer termen gebruikt worden.

Geef een benadering van π door de eerste drie termen van deze rij bij elkaar op te tellen en bereken het verschil met de werkelijke waarde van π in twee decimalen nauwkeurig.

(*Ontleend aan pilotexamen vwo wiskunde C 2017, tijdvak 1*)

Uitdagende route → maak opdracht U3

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O19 Een rij is gegeven door de formule $u(n) = 4(n + 2) - 5$. De eerste term heeft rangnummer 1.

a Leg uit waarom de gegeven formule een directe formule is.

b Vul in: de eerste term van de rij is gelijk aan $u(1) = 4(1 + 2) - 5 = \ldots$ en de tweede term van de rij is gelijk aan $u(2) = 4(\ldots + 2) - 5 = \ldots$.

c Bereken ook $u(3)$, $u(4)$ en $u(5)$.

d Bereken van de rijen bij deze formules de waarde van de term met $n = 6$ en de waarde van de term met $n = 10$.

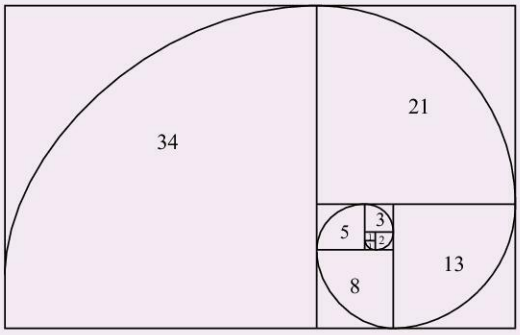
A $t_n = \frac{600}{n} - 5$

B $p_n = (n - 2)^3$

C $u(n) = -3n(n - 4)$

D $v_n = \frac{8n}{n - 3}$

Uitdagende opdrachten



U3 **a** De rij van Fibonacci zie je veel terug in natuurlijke vormen. Hoe zie je in de spiraalvorm de rij van Fibonacci terug?

b Gegeven is een deel van de rij van Fibonacci:
…, 46 368, 75 025, 121 393, 196 418, …
Bereken de twee termen voorafgaand aan 46 368.

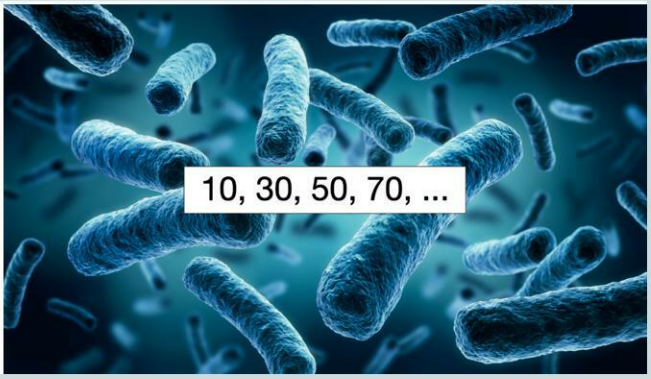
© Noordhoff Uitgevers bv

14.4 Rijen bij een lineair verband

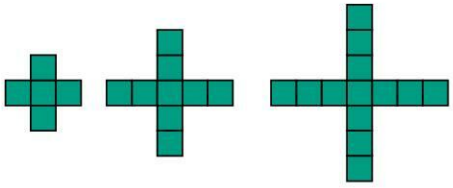
Je leert
- hoe je bij een rij bij een lineair verband een formule opstelt

Leerroutes
- ondersteunend: 22—023—24—25—026—27—28
- doorlopend: 22—23—24—25—26—27—28
- uitdagend: 22—23—25—26—27—28—U4

Elk uur is gemeten hoeveel bacteriën er in een petrischaal aanwezig zijn. De getallen in de rij zijn de aantallen gemeten bacteriën.
- Hoe kun je snel de 50e term van de rij berekenen?



22 Van een rij figuren zijn er drie gegeven. Elke figuur bevat een aantal vierkantjes.



a Teken de vierde figuur van deze rij.

b De aantallen vierkantjes van de figuren vormen een rij getallen $u(n)$.
Vul de tabel verder in.

n	1	2	3	4	5	6
$u(n)$	5	…	…	…	…	…

c Geef een recursieve formule bij deze rij.

d Leg uit waarom het verband tussen $u(n)$ en n een lineair verband is.

e Hoeveel vierkantjes heeft de figuur met $n = 0$?

f Leg uit dat voor het aantal vierkantjes $u(n)$ de directe formule $u(n) = 1 + 4 \cdot n$ geldt.

g Bereken het aantal vierkantjes van de 50e figuur.

Theorie

Een rij waarvan je een term vindt door bij de voorafgaande term een constante a op te tellen, heet een **rij bij een lineair verband**.
Een recursieve formule van een dergelijke rij is van de vorm $u(n + 1) = u(n) + a$ met beginterm $u(0) = b$.
De directe formule is $u(n) = b + a \cdot n$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld 1

De eerste vier termen van een rij u die bij een lineair verband hoort, zijn 23, 20, 17, 14 met $u(0) = 23$.
Stel een recursieve en een directe formule op bij de rij u.

Oplossing

n	0	1	2	3
$u(n)$	23	20	17	14

Je kunt de volgende term berekenen door van de voorafgaande term 3 af te trekken.
De toename is dus -3. De recursieve formule is $u(n + 1) = u(n) - 3$ met $u(0) = 23$.
De directe formule is $u(n) = 23 - 3n$.

Voorbeeld 2

Rij v hoort bij een lineair verband. In de tabel zijn de eerste vier termen gegeven.

n	1	2	3	4
v_n	55	59,5	64	68,5

Stel een recursieve en een directe formule op bij de rij v.

Oplossing

Je kunt de volgende term berekenen door bij de voorafgaande term 4,5 op te tellen. De toename is 4,5.
De recursieve formule is $v_{n+1} = v_n + 4{,}5$ met $v_1 = 55$.
$v_0 = v_1 - 4{,}5 = 55 - 4{,}5 = 50{,}5$.
De directe formule is $v_n = 50{,}5 + 4{,}5n$.

Ondersteunende route → maak opdracht O23

23 H De rijen u, v en w horen bij rijen bij een lineair verband.

n	0	1	2	3	4
u_n	12	17	22	27	32

n	1	2	3	4	5
v_n	20	17	14	11	8

n	1	2	3	4	5
w_n	2	$-\frac{1}{2}$	-3	$-5\frac{1}{2}$	-8

a Stel bij elke rij een recursieve formule op.
b Stel ook bij elke rij een directe formule op.
c Bereken van elke rij de term bij $n = 10$.

24 H Stel een directe formule op bij de rijen.

a $u_{n+1} = u_n + 4$ met $u_0 = -7$
b $v(n) = v(n - 1) - 0{,}5$ met $v(1) = 3$
c w: $-5, -7, -9, -11, \ldots$ met $w_1 = -5$
d z: 16; 21,5; 27; 32,5; … met $z(0) = 16$

25 Gegeven zijn de directe formules van de rijen u, v en w.
Stel bij elke rij een recursieve formule op. Geef ook steeds een beginterm.

a $u_n = 4n$
b $v(n) = -3n + 5$
c $w_n = 19 - 2\frac{1}{2}n$

© Noordhoff Uitgevers bv

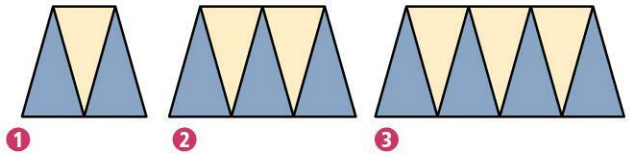
Ondersteunende route → maak opdracht O26

26 Van een rij $v(n)$ bij een lineair verband is gegeven dat $v(7) = 72$ en $v(10) = 243$.

a Hoe groot is de toename van $v(n)$ als het rangnummer één hoger wordt?

b Bereken $v(0)$ en stel een directe formule op bij rij v.

27 Je ziet drie figuren. De aantallen driehoeken van de opvolgende figuren vormen een rij u.



a Teken de figuur met nummer vier. Hoeveel driehoeken heeft de figuur?

b Uit hoeveel driehoeken zou de figuur met rangnummer 0 moeten bestaan?

c Geef de waarden van $u(1)$ tot en met $u(6)$.

d Leg uit waarom de rij u een rij bij een lineair verband is.

e Stel een recursieve en een directe formule op bij rij u.

f Vanaf welk rangnummer heeft de figuur meer dan 160 driehoeken?

g De aantallen gele driehoeken vormen een rij v.
Stel een recursieve en een directe formule op bij rij v.

28 De secretaris van kunstrijvereniging Amaranth houdt elk jaar bij hoeveel leden de vereniging op 1 augustus telt. Deze aantallen L staan in de tabel met $t = 0$ op 1 augustus 2017.

t	0	1	2	3	4
L_t	75	87	99	111	123

a Stel een recursieve formule bij de tabel op.

b Stel een directe formule voor L_t op.

c Het aantal jongens op de vereniging is te berekenen met $J_t = J_{t-1} + 4$, met weer $t = 0$ op 1 augustus 2017. De beginterm is $J_0 = 15$.
Bereken het percentage jongens van de leden van de vereniging op 1 augustus 2021.

Uitdagende route → maak opdracht U4

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O23 De rij u is een rij bij een lineair verband.

n	1	2	3	4	5
$u(n)$	40	45	50	55	60

a Hoe groot is de toename van rij u?
b Vul in: $u(0) = 40 - \ldots = \ldots$.
c Vul het blaadje bij rij u in.
d Bereken de tiende term van de rij u door $n = 10$ in de directe formule in te vullen.
e De rijen v en w horen bij een lineair verband.
Stel bij elke rij een recursieve formule en een directe formule op.

Een recursieve formule is:
$u(n+1) = u(n) + \ldots$ met
$u(0) = \ldots$
Een directe formule is:
$u(n) = u(0) + \ldots \cdot n$
dus $u(n) = \ldots + \ldots \cdot n$

n	0	1	2	3	4
v_n	8	6	4	2	0

n	1	2	3	4	5
w_n	16	$19\frac{1}{2}$	23	$26\frac{1}{2}$	30

f Bereken van beide rijen uit opdracht e de term bij $n = 15$.

O26 Van een rij v bij een lineair verband is gegeven dat $v(4) = 76$ en $v(8) = 88$.
a Vul in: $v(8) - v(4) = \ldots - \ldots = \ldots$
b Hoe groot is de toename van $v(n)$ als het rangnummer één hoger wordt?
c Om $v(0)$ te berekenen, moet je vanaf de term $v(4) = 76$ vier termen terug rekenen.
Vul in: $v(0) = 76 - 4 \cdot \ldots = \ldots$
d Stel een directe formule op bij rij v.
e Van een rij w bij een lineair verband is gegeven dat $w(5) = 100$ en $w(8) = 82$.
Stel een directe formule op bij rij w.

Uitdagende opdrachten

U4 Gegeven zijn de rijen $u_{n+1} = u_n + 10$ met $u_0 = 8$ en $z_{n+1} = z_n - 6$ met $z_0 = 53$.

Bij de rij v hoort de formule $v_n = u_n - z_n$.

Stel een directe formule op bij de rij v_n.

© Noordhoff Uitgevers bv

14.5 Rijen bij een exponentieel verband

Je leert · hoe je bij een rij bij een exponentieel verband een formule opstelt

Leerroutes
· ondersteunend: 29—30—031—32—33—34—035—36—37
· doorlopend: 29—30—31—32—33—34—35—36—37
· uitdagend: 29—30—31—33—34—35—36—37—U5

Alissa wil tweewekelijks geld in een spaarpot doen. Op 1 januari doet ze € 0,05 in de spaarpot, twee weken later € 0,10 en weer twee weken later € 0,20. Op die manier wil ze doorgaan met elke twee weken het bedrag te verdubbelen tot het weer 1 januari is.
· Hoeveel geld moet Alissa dan de laatste keer in haar spaarpot doen?

29 In de figuur zijn groene en gele vierkanten op elkaar gelegd. Het kleinste groene vierkant heeft oppervlakte 4. De oppervlakten van de vierkanten, van klein naar groot, vormen een rij getallen $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$, $u(3)$, …

a Leg uit dat de oppervlakte van het kleinste gele vierkant twee keer zo groot is als die van het kleinste groene vierkant.
b Geef de eerste vijf termen van de rij u.
c Stel een recursieve formule op waarmee je een volgende term uit de rij kunt berekenen.

30 Een term uit de rij die hoort bij de oppervlakten van de vierkanten in opdracht 29 kun je sneller berekenen dan met de recursieve formule.
a Leg uit dat $u(3) = 4 \cdot 2^3$.
b Bereken op dezelfde manier $u(10)$.
c Leg uit dat voor de oppervlakte van het vierkant met nummer n geldt: $u(n) = 4 \cdot 2^n$

Theorie

Een rij waarvan je een term vindt door de voorafgaande term met een constant getal g te vermenigvuldigen, heet een **rij bij een exponentieel verband**.
De recursieve formule is van de vorm $u(n + 1) = g \cdot u(n)$ met beginterm $u(0) = b$ en groeifactor g.
De bijbehorende directe formule is $u(n) = b \cdot g^n$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld 1

De eerste vier termen van een rij u die bij een exponentieel verband hoort, zijn 1600, 400, 100, 25, met $u(0) = 1600$.
Stel een recursieve en een directe formule op bij de rij u.

Oplossing

n	0	1	2	3
$u(n)$	1600	400	100	25

Je kunt de volgende term berekenen door de voorafgaande term met $\frac{1}{4}$ te vermenigvuldigen, dus $g = \frac{1}{4}$.
De recursieve formule is $u(n+1) = \frac{1}{4} \cdot u(n)$ met $u(0) = 1600$.
De directe formule is $u(n) = 1600 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Voorbeeld 2

Rij v hoort bij een exponentieel verband. In de tabel zijn de eerste vier termen gegeven.

n	1	2	3	4
v_n	4	12	36	108

Stel een recursieve en een directe formule op bij de rij v.

Oplossing

Je kunt de volgende term berekenen door de voorafgaande term met 3 te vermenigvuldigen, dus $g = 3$.
De recursieve formule is $v_{n+1} = 3 \cdot v_n$ met $v_1 = 4$.
$v_0 = 4 : 3 = 1\frac{1}{3}$
De directe formule is $v_n = 1\frac{1}{3} \cdot 3^n$.

Ondersteunende route → maak opdracht 031

31 H

De rijen u, v en w horen bij een exponentieel verband.

n	0	1	2	3	4
$u(n)$	20	30	45	$67\frac{1}{2}$	$101\frac{1}{4}$

n	1	2	3	4	5
v_n	6	12	24	48	96

n	1	2	3	4	5
w_n	−162	54	−18	6	−2

a Stel bij elke rij een recursieve formule op.
b Stel ook bij elke rij een directe formule op.
c Bereken van elke rij de tiende term.

32 H

Stel steeds een directe formule op.

a $u_{n+1} = 4 \cdot u_n$ met $u_0 = 13$

b $v(n) = \dfrac{v(n-1)}{3}$ met $v(1) = 56$

c w: −8, 16, −32, 64 met $w_1 = -8$

D z: 18 000, 9000, 4500, 2250 met $z(0) = 18\,000$

33

Gegeven zijn de directe formules van de rijen u, v en w.
Stel bij elke rij een recursieve formule op. Geef ook steeds een beginterm.

a $u_n = 16 \cdot 5^n$

b $v(n) = -23 \cdot (-1)^n$

c $w_n = \dfrac{5^n}{4}$

© Noordhoff Uitgevers bv

34 Gegeven is de rij u waar de directe formule $u(n) = 20 \cdot 1{,}1^n$ bij hoort.

a Geef de groeifactor van deze rij.

b Bereken $u(5)$.

c Vanaf welke waarde van n is $u(n) > 1000$?

d Stel een recursieve formule op bij deze rij.

Ondersteunende route → maak opdracht O35

35 Van een rij z bij een exponentieel verband is gegeven dat $z(4) = 12$ en $z(6) = 75$.

a Hoeveel keer zo groot is $z(6)$ als $z(4)$?

b Bereken de groeifactor.

c Bereken $z(0)$ en stel een directe formule op bij de rij z.

36 H Bij de geboorte van Jasper openden zijn opa en oma een spaarrekening voor hem. Ze zetten er € 500,- op. Jasper krijgt het eindbedrag op zijn achttiende verjaardag. De bank geeft een vaste rente van 1,3% per jaar. De bedragen die na n jaar sparen op de rekening staan, vormen een rij B.

a Stel de recursieve formule op bij deze rij.

b Stel ook de directe formule op bij rij B.

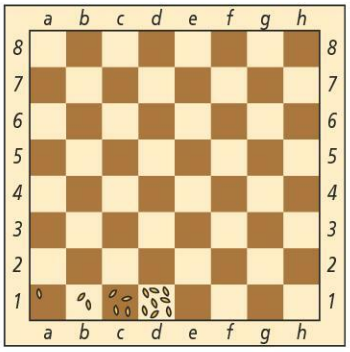
c Hoeveel geld krijgt Jasper op zijn achttiende verjaardag?

37 Volgens een legende mocht de bedenker van het schaakspel, Sissa ben Dahir, een beloning kiezen van de Indiase koning Shirham. Hij vroeg om graankorrels op zijn schaakbord te leggen: één op het eerste veld, twee op het tweede, vier op het derde, acht op het vierde, enzovoort.

a Leg uit dat de aantallen graankorrels op elk van de velden een rij bij een exponentieel verband vormen.

b Noem deze rij u en stel een directe formule op bij rij u.

c Bereken het aantal korrels op het 64e veld.



Uitdagende route → maak opdracht U5

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O31 Het verband tussen n en $u(n)$ is exponentieel.

n	1	2	3	4	5
$u(n)$	200	100	50	25	12,5

a Met welk getal wordt $u(n)$ vermenigvuldigd als het rangnummer 1 hoger wordt?
b Vul in: $u(0) = 200 : \ldots = \ldots$.
c Vul in: de recursieve formule bij de rij u is $u(n + 1) = u(n) \cdot \ldots$ met $u(0) = \ldots$.
d Stel ook de directe formule op bij rij u.
e Bereken de tiende term van de rij u door $n = 10$ in de directe formule in te vullen.
f De rijen v en w horen bij een exponentieel verband. Stel bij elke rij een recursieve en een directe formule op.
g Bereken bij de rijen de vijftiende term.

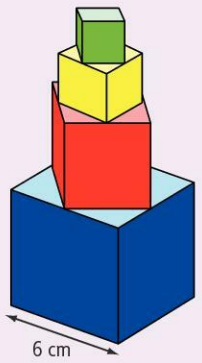
n	0	1	2	3	4
v_n	5	15	45	135	405

n	1	2	3	4	5
w_n	−21	42	−84	168	−336

O35 Van een rij v bij een exponentieel verband is gegeven dat $v(2) = 25$ en $v(7) = 800$.
a Ga na dat $v(7) : v(2) = 32$.
b Hoe groot is het verschil in rangnummer tussen $v(2)$ en $v(7)$?
c Vul in: de groeifactor is $32^{\frac{1}{\ldots}} = \ldots$
d Om $v(0)$ te berekenen, moet je vanaf term $v(2) = 25$ twee termen terugrekenen.
Vul in: $v(0) = 25 : \ldots^{2} = \ldots$
e Stel een directe formule op bij rij v.
f Van een rij w bij een exponentieel verband is gegeven dat $w(3) = 135$ en $w(7) = 10\,935$.
Stel een directe formule op bij rij w.

Uitdagende opdrachten

U5 Bovenop een blauwe kubus met ribbe 6 cm is een rode kubus geplaatst zodat de hoekpunten van het grondvlak samenvallen met de middens van de ribben van het bovenvlak van de blauwe kubus. Op dezelfde manier is de gele kubus geplaatst op de rode en de groene op de gele. De rij kubussen kun je op deze manier eindeloos voortzetten.
Bij de rij getallen die gevormd wordt door de opvolgende inhouden van de kubussen van groot naar klein hoort een exponentieel verband.
Stel een directe formule op van deze rij.



© Noordhoff Uitgevers bv

38 Ga na of de rijen bij een lineair verband of bij een exponentieel verband kunnen horen. Stel bij elke rij een recursieve formule en een directe formule op en bereken steeds de term bij $n = 10$.

a t: 1, 4, 7, 10, … met $t_0 = 1$

b u: 0,3; 0,33; 0,363; 0,3993; … met $u(0) = 0{,}3$

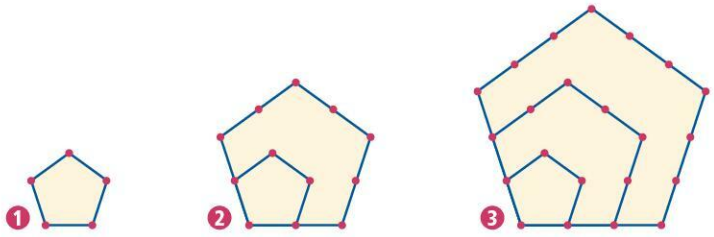
c v: 9; 7,5; 6; 4,5; … met $v(1) = 9$

d w: −1, 1, −1, 1, −1, … met $w_1 = -1$

39 Joris is een fanatieke hardloper. Hij heeft een schema gemaakt voor een sponsorloop waarbij hij ervan uitgaat dat hij rustig begint en elke ronde steeds 2 seconden sneller loopt dan de voorafgaande ronde. De eerste ronde loopt hij in 150 seconden; over de tweede ronde doet hij dus 148 seconden; enzovoort. De rondetijden vormen een rij t waar de formule $t(n) = 152 - 2n$ bij hoort. Hierin is $t(n)$ de tijd in seconden voor ronde n.

a Welke ronde loopt hij in precies 1,5 minuut?

b Voor de totale tijd $T(n)$ in seconden die Joris over n ronden doet, geldt de formule $T(n) = \frac{1}{2}n(t(1) + t(n))$.
De sponsorloop duurt 30 minuten.
Bereken hoeveel volledige ronden Joris in die tijd kan afleggen.



40 Je ziet de eerste drie figuren bij de zogeheten vijfhoeksgetallen. De aantallen punten in de opeenvolgende figuren vormen een rij u.

a Uit hoeveel punten bestaat figuur met nummer 4?

b Uit hoeveel punten zou de figuur met nummer 0 moeten bestaan?

c Schrijf de eerste zes vijfhoeksgetallen op.

d Een directe formule bij de rij u is $u(n) = 1{,}5n^2 + 2{,}5n + 1$.
Controleer je antwoorden bij opdracht c met deze formule.

e Welke nummer heeft het eerste figuur dat uit meer dan 1000 punten bestaat?

© Noordhoff Uitgevers bv

41 Meneer Koop heeft op 1 januari 2020 € 4.000,- op een spaarrekening gezet. De jaarlijkse rente op zijn spaarrekening is 0,8%.
Vanaf 1 januari 2021 haalt hij, nadat de rente is bijgeschreven, € 300,- van zijn spaarrekening. De recursieve formule, die bij deze situatie hoort is $K_{t+1} = a \cdot K_t - b$ met $K_0 = 4000$.
Onderzoek in welk jaar hij op 1 januari geen € 300,- meer van zijn spaarrekening kan halen.

42 De verkoop van cd's is de laatste jaren sterk aan het dalen. Een belangrijke reden van deze terugloop is de mogelijkheid om muziek te downloaden van het internet.
We zoeken een model waarmee we de toekomstige downloadverkoop kunnen beschrijven. Een model dat redelijk past bij de gegevens tot nu toe wordt gegeven door de formule $D(n) = \frac{19{,}0}{1 + 26{,}14 \cdot 0{,}73^n}$. Hierin is $D(n)$ het aantal downloadverkopen in miljoenen in jaar n, met $n = 0$ is het jaar 2008. Een model dat de toekomstige cd-verkoop beschrijft is $C(n) = 0{,}91 \cdot C(n - 1)$ met $C(0) = 18{,}0$. Hierbij is $C(n)$ het aantal verkochte cd's in miljoenen in jaar n, met $n = 1$ het jaar 2009. Er zijn dus 18 miljoen cd's verkocht in 2008.
Onderzoek in welk jaar het aantal verkochte cd's voor het eerst kleiner is dan het aantal downloadverkopen.
(*Ontleend aan pilotexamen vwo wiskunde A 2014 tijdvak 2*)

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Rij, term, recursie, recursieve formule, rangnummers en beginterm

Een opeenvolging van getallen heet een rij en de getallen in de rij heten de termen.
Bij veel getallenrijen kun je de volgende term berekenen uit de voorafgaande term(en) met een formule. Dit heet recursie en de bijbehorende formule heet een recursieve formule.
De termen van een rij noteer je met de indexnotatie zoals u_0, u_1 en u_n, of met de functienotatie $u(0)$, $u(1)$ en $u(n)$.
De getallen 0, 1, 2, 3, …, $n-1$, n, $n+1$ zijn de rangnummers van de rij.
De eerste term van een rij heet de beginterm, dit kan $u(0)$ of $u(1)$ zijn. Om een rij vast te leggen, heb je één term nodig. Meestal kies je daarvoor de beginterm.

Voorbeeld

De eerste vijf termen van een rij zijn 5, 9, 13, 17, 21.
De term met rangnummer 6 is gelijk aan $21 + 4 = 25$.
De term met rangnummer 7 is gelijk aan $25 + 4 = 29$.
Bij deze rij hoort de recursieve formule:

nieuwe waarde = *oude waarde* + 4

Met de functienotatie:
$u(n+1) = u(n) + 4$ met $u(1) = 5$
Met de indexnotatie:
$u_{n+1} = u_n + 4$ met $u_1 = 5$

S1 Gegeven is de recursieve formule
nieuwe waarde = (*oude waarde*)^2 + 1. De beginterm $u(1) = -2$.
Bereken de tweede en de derde term van deze rij.

S2 Gegeven is de rij $a_{n+1} = \frac{2}{a_n} - 5$ met beginterm $a_1 = 1$.

a Is hier de indexnotatie of de functienotatie gebruikt?

b Bereken a_2 en a_3.

Theorie

Directe formule

Bij sommige rijen kun je de waarde van een term $u(n)$ direct berekenen zonder gebruik te maken van voorafgaande termen of een recursieve formule.
Je gebruikt dan een directe formule. Bij een directe formule is $u(n)$ uitgedrukt in het rangnummer n.

Voorbeeld

De termen van de rij 100, 99, 92, 73, … met beginterm $u(0) = 100$ kun je berekenen met de directe formule $u(n) = 100 - n^3$.

$u(0) = 100 - 0^3 = 100$
$u(1) = 100 - 1^3 = 99$
$u(2) = 100 - 2^3 = 92$

S3 Gegeven is de rij u met directe formule $u(n) = 4 \cdot (-1)^n$.

a Bereken achtereenvolgens $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$ en $u(3)$.

b Beantwoord opdracht a ook voor de rij $u(n) = \frac{160}{n+6}$

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheid

Je kunt een recursieve formule bij een rij opstellen.

Als in een recursieve formule de oude waarde gelijk is aan $u(n)$, dan is de nieuwe waarde gelijk aan $u(n + 1)$. Als de oude waarde gelijk is aan $u(n - 1)$, dan is de nieuwe waarde gelijk aan $u(n)$.

Voorbeeld

Gegeven is de rij u: 9, 5, 1, −3, −7, met beginterm $u(0) = 9$.
Bereken de volgende twee termen van deze rij en stel een recursieve formule bij de rij u.

Oplossing

n	0	1	2	3	4	5	6
$u(n)$	9	5	1	−3	−7	…	…

$u(5) = -7 - 4 = -11$ en $u(6) = -11 - 4 = -15$

Een recursieve formule is $u(n + 1) = u(n) - 4$ met $u(0) = 9$.

S4 Stel een recursieve formule op bij de rij −108, −72, −48, −32, … met beginterm $u(0) = -108$.

Theorie

Je kunt met je rekenmachine een rij weergeven.

Een ontwikkeling in de tijd die door een rij wordt beschreven, kun je weergeven in een grafiek of in een tabel. Hierin wordt het verband tussen de tijd en de bijbehorende waarde van de rij weergegeven. De grafiek bestaat uit losse punten omdat de rangnummers van de rij gehele getallen zijn.

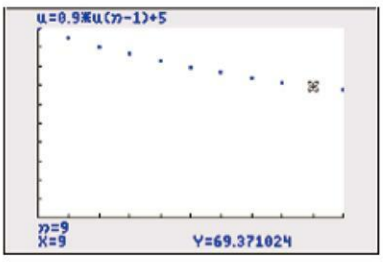
Voorbeeld

De recursieve formule $N_t = 0{,}9 \cdot N_{t-1} + 5$ met $N_0 = 100$ is gegeven.
Ga na vanaf welk rangnummer er geldt dat $N_t < 70$.

Oplossing

Voor de formule in op je rekenmachine en maak een tabel of een grafiek.
Vanaf $t = 9$ geldt $N_t < 70$.

t	N_t
0	100
1	95
2	90,5
…	…
7	73,9
8	71,5
9	69,4



© Noordhoff Uitgevers bv

S5 Gegeven is de formule $A(t + 1) = 1{,}4 \cdot A(t) + t$ met $A(0) = 2$.

Ga na vanaf welke waarde van t geldt $A(t) > 3000$.

Vaardigheid

Je kunt bij een rij bij een lineair verband een formule opstellen.

Een rij waarvan je een term vindt door bij de voorafgaande term een constante a op te tellen, heet een rij bij een lineair verband.

Een recursieve formule van een dergelijke rij is van de vorm $u(n + 1) = u(n) + a$ met beginterm $u(0) = b$. De directe formule is $u(n) = b = a \cdot n$.

Voorbeeld 1

De eerste vier termen van een rij u die bij een lineair verband hoort, zijn 206; 209,5; 213; 216,5 met $u_1 = 206$.

Stel een recursieve en een directe formule op bij de rij u.

Oplossing

n	1	2	3	4
u_n	206	209,5	213	216,5

Je kunt de volgende term berekenen door bij de voorafgaande term 3,5 op te tellen.

De toename is dus 3,5.

De recursieve formule is $u_n = u_{n-1} + 3{,}5$ met $u_n = 206$.

$u_0 = 206 - 3{,}5 = 202{,}5$

De directe formule is $u_n = 202{,}5 + 3{,}5n$.

Voorbeeld 2

Rij v hoort bij een lineair verband. In de tabel zijn de eerste vier termen gegeven.

n	0	1	2	3
$v(n)$	−8	−19	−30	−41

Stel een recursieve en een directe formule op bij de rij v.

Oplossing

Je kunt de volgende term berekenen door van de voorafgaande term 11 af te trekken.

De toename is dus −11.

De recursieve formule is $v(n) = v(n - 1) - 11$ met $v(0) = -8$.

De directe formule is $v(n) = -8 - 11n$.

S6 De aantallen stippen in de rij figuren vormen een rij z.

a Het aantal stippen dat bij figuur 1 hoort is $z(1)$.
Stel een recursieve en een directe formule op bij rij z.

b Hoeveel stippen heeft de vijfentwintigste figuur?

c Vanaf welke waarde van n bestaat de figuur uit meer dan 100 stippen?

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheid

Je kunt bij een rij bij een exponentieel verband een formule opstellen.

Een rij waarvan je een term vindt door de voorafgaande term met een constant getal g te vermenigvuldigen, heet een rij bij een exponentieel verband.
De recursieve formule is van de vorm $u(n+1) = g \cdot u(n)$ met beginterm $u(0) = b$ en groeifactor g.
De bijbehorende directe formule is $u(n) = b \cdot g^n$.

Voorbeeld 1

De eerste vier termen van een rij u die bij een exponentieel verband hoort, zijn 111, 222, 444, 888 met $u_1 = 111$.
Stel een recursieve en een directe formule op bij rij u.

Oplossing

Je kunt de volgende term berekenen door de voorafgaande term te vermeningvuldigen met 2.
De recursieve formule is $u_n = 2 \cdot u_{n-1}$ met $u_1 = 111$.
$u_0 = 111 : 2 = 55{,}5$
De directe formule is $u_n = 55{,}5 \cdot 2^n$.

Voorbeeld 2

Rij v hoort bij een exponentieel verband. In de tabel zijn de eerste vier termen gegeven.

n	0	1	2	3
$v(n)$	2700	900	300	100

Stel een recursieve en een directe formule op bij rij v.

Oplossing

Je kunt de volgende term berekenen door de voorafgaande term met $\frac{1}{3}$ te vermenigvuldigen.
De recursieve formule is $v(n) = \frac{1}{3} \cdot v(n-1)$ met $v(0) = 2700$.
De directe formule is $v(n) = 2700 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

S7 In de tabel staan de eerste vier termen van een rij u.

n	1	2	3	4
$u(n)$	15	$22\frac{1}{2}$	$33\frac{3}{4}$	$50\frac{5}{8}$

a Waarom hoort de rij u bij een exponentieel verband?
b Stel een directe en een recursieve formule op bij rij u.

© Noordhoff Uitgevers bv

T1 Gegeven zijn de drie rijen u, v en w waarbij de beginterm steeds rangnummer 0 heeft.
u: 200, 202, 204, 206, …
v: 200, 300, 450, 675, …
w: 200, 100, 50, 25, …
Stel bij elk van de drie rijen getallen een recursieve formule en een directe formule op.

T2 In een fietstunnel in Leeuwarden is door kunstenaar Jan van der Ploeg een wandtableau aangebracht. Op de foto is te zien hoe hij met witte en blauwe tegels een patroon heeft aangebracht.

a De aantallen aaneengesloten blauwe tegels vormen, van klein naar groot de rij t: 15, 30, 45, 60, … .
Stel een directe formule op bij rij t.

b Ook de aantallen witte aaneengesloten tegels vormen van klein naar groot een rij getallen.
Het kleinste aantal aangesloten witte tegels in de rechter bovenhoek is 6.
Ga met behulp van de foto na dat je de volgende twee aantallen witte tegels kunt berekenen met respectievelijk $4 \times 3 + 1 \times 7$ en $6 \times 3 + 2 \times 7$.

c Bereken op dezelfde manier het volgende aantal witte tegels.

d Leg uit dat bij deze rij van aantallen witte tegels de directe formule $u(n) = 2n \cdot 3 + 7 \cdot (n - 1)$ met $n \geq 1$ hoort.

T3 In 2001 bevonden zich in de Barentszzee 760 zeerobben. Door geboorte bedraagt de jaarlijkse groei van dat aantal 12%. Met recursie kun je nu voorspellen wat de invloed van de jacht op de grootte van de populatie is.
Stel dat men elk jaar 110 zeerobben vangt.

a Bereken het aantal zeerobben in 2002 en 2003.

b Geef een recursieve formule van deze groei en laat met behulp van een grafiek of een tabel zien dat het aantal zeerobben voortdurend afneemt.

c Wil men de populatie behouden, dan moet een vangstquotum worden ingesteld. Dat wil zeggen een maximum aantal zeerobben dat jaarlijks gevangen mag worden.
Onderzoek de groei van de populatie als er jaarlijks 80 zeerobben gevangen worden.

d Is er een toegestane vangstgrootte waarbij het aantal zeerobben constant of nog net groeiend is? Zo ja, hoe groot is dat vangstquotum?

© Noordhoff Uitgevers bv

T4 Gegeven de rij 0,3; 1,2; 2,1; 3,0; … met $z(1) = 0{,}3$.

a Laat zien dat deze rij een rij bij een lineair verband is.

b Stel bij deze rij een recursieve en een directe formule op.

c Vanaf welk rangnummer zijn de termen in deze rij groter dan 1 miljoen?

d Leg uit waarom de rij met recursieve formule $u_{n+1} = \frac{u_n}{-5}$ en beginterm $u_1 = 40$ bij een exponentieel verband hoort.

e Stel een directe formule op bij rij u.

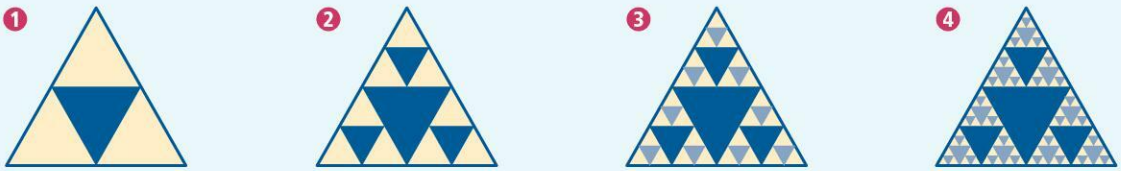
T5 In een visvijver groeit het aantal vissen door de natuurlijke aanwas jaarlijks met 10%. Door de sportvissers worden er jaarlijks 75 vissen gevangen.
Op 1 januari 2021 werden er 450 vissen geteld in deze vijver.

a Een recursieformule voor het aantal vissen A na t jaren is $A(n + 1) = a \cdot A(n) + b$.
Bereken de waarden van a en b in deze formule.

b Bereken het aantal vissen na drie jaar.

c Elk jaar wordt op 1 januari het aantal vissen geteld. Als er minder dan 200 vissen wordt er een visverbod ingesteld.
Ga na in welk jaar het visverbod ingesteld wordt.

T6



De rij figuren bestaat uit gelijkzijdige driehoeken. De driehoeken met de punt omhoog zijn geel, de andere zijn blauw. Figuur 0, die niet is afgebeeld, is een gele gelijkzijdige driehoek. Figuur 1 ontstaat uit figuur 0 door de middens van de zijden met elkaar te verbinden en de hierdoor ontstane driehoek blauw te maken. Door in figuur 1 hetzelfde te doen bij de drie gele driehoeken, ontstaat figuur 2. Op dezelfde manier is figuur 3 ontstaan uit figuur 2 enzovoort.

a De lengten van de zijden van figuur 0 zijn gelijk aan 1.
De lengten van de zijden van de gele driehoekjes in de opeenvolgende figuren vormen een rij v.
Stel een directe formule op bij rij v.

b De aantallen gele driehoekjes in de opeenvolgende figuren vormen een rij w.
Stel ook een directe formule op bij rij w.

© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt een recursieve formule bij een rij opstellen.

E1 **a** Geef een recursieve formule bij de rij

$u(0) = 96$, $u(1) = 72$, $u(2) = 54$, $u(3) = 40\frac{1}{2}$, … .

b Geef een recursieve formule bij de rij

$v_0 = 12$, $v_1 = 5$, $v_2 = -2$, $v_3 = -9$, …

Je kunt met je rekenmachine een rij weergeven.

E2 Gegeven is de recursieve formule $B(t) = 1{,}6 \cdot B(t-1) + 5$ met $B(0) = 2$.

a Maak een tabel bij de rij. Neem voor t de waarden 0 tot en met 5.

b Plot de bijbehorende grafiek.

c Vanaf welk rangnummer is $B(t) > 300$?

Je kunt een formule bij een rij bij een lineair verband opstellen.

E3 Stel steeds een directe formule op.

a $u_{n+1} = -8 + u_n$ met $u_1 = 15$

b $v(n) = 3 + v(n-1)$ met $v(0) = -53$

c w: 56, 52, 48, 44, … met $w_1 = 56$

d z: −158; −150,5; −143; −135,5, … met $z(0) = -158$

Je kunt een formule bij een rij bij een exponentieel verband opstellen.

E4 Stel steeds een directe formule op.

a $u_{n+1} = 0{,}8 \cdot u_n$ met $u_0 = 500$.

b $v(n) = 7\frac{1}{2} \cdot v(n-1)$ met $v(1) = 15$

c w: 90 000, 30 000, 10 000, $3333\frac{1}{3}$, … met $w_1 = 90\,000$

d z: 16, 20, 25, $31\frac{1}{4}$, … met $z(0) = 16$

E5 Gegeven een aantal rijen.

t: 72, 24, 8, …

u: 111, 114, 117, 120,

v: 1; 0,98; 0,9 604; 0,941 192; …

w: 23, 14, 5, −4, …

Stel bij deze rijen een recursieve formule en een directe formule op en bereken de waarde van de 10e term.

© Noordhoff Uitgevers bv

E6 Gegeven is rij w met recursieve formule $w_n = 4 \cdot \frac{w_{n-1}}{3}$ en beginterm $w_1 = 80$.

a Stel een directe formule op bij rij w.

b Bereken voor welke waarden van n geldt dat w_n groter is dan één miljard.

E7 Naast de veelgebruikte A*n*-papierformaten zijn er ook de *n*Z-formaten. Deze zijn bedoeld voor technisch tekenwerk. Het 1Z-formaat is gelijk aan het A4-formaat. Vanaf 2Z blijft de breedte gelijk aan de lengte van A4, terwijl de lengte verandert zoals in de tabel te zien is.
De lengtes $l(n)$ vormen een rij bij een lineair verband.
Stel een directe formule op bij rij l.

naam	*afmetingen* in mm
1Z	210 × 297
2Z	297 × 390
3Z	297 × 570
4Z	297 × 750
5Z	297 × 930
7Z	297 × 1290
9Z	297 × 1650

E8 Gegeven is de rij v met recursieve formule $v(n+1) = \frac{8 - v(n)}{3}$ en beginterm $v(1) = 2$.

a Plot de bijbehorende grafiek.

b Waarom liggen de punten op een horizontale lijn?

E9 In de Japanse Zee wordt op walvissen gejaagd. De populatie neemt daardoor af, maar aan de andere kant neemt de populatie weer toe omdat er jongen worden geboren.
Het aantal walvissen A na t jaar wordt beschreven door $A(t+1) = 1{,}1 \cdot A(t) - 30$ met $A(0) = 230$.
De tellingen vinden één keer per jaar plaats. Het aantal walvissen is een geheel getal.

a Geef de betekenis van de getallen 30, 230 en 1,1 voor de walvispopulatie.

b Plot en schets een grafiek van het voorspelde aantal walvissen voor de eerstkomende 15 jaar.

c Schets de grafiek die ontstaat als er per jaar 20 walvissen zouden worden gevangen.

d Onderzoek bij welk jaarlijkse vangstquotum de walvispopulatie stabiel blijft.

© Noordhoff Uitgevers bv

Fibonacci

Leonardo van Pisa, beter bekend als Fibonacci, werd in 1170 geboren in Pisa. Fibonacci komt van 'filius Bonacci', wat 'zoon van Bonacci' betekende. Zijn vader was Guilielmo Bonacci. Leonardo groeide op in Bugia (Noord-Afrika) waar zijn vader diplomaat was.

Hij leerde wiskunde in Bugia en reisde veel rond met zijn vader waarbij hij de wiskundige kennis van landen zoals Egypte, Syrië, Griekenland, Sicilië en de Provence (Frankrijk) bestudeerde. Hij leerde onder andere werken met de Indische symbolen voor getallen: 0, 1, 2, …, 9 en hun positiestelsel.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩

Fibonacci realiseerde zich dat het rekenen met de Indische cijfers veel sneller gaat dan met getallen in Romeinse cijfers, waarvoor vrijwel altijd een abacus (= telraam) werd gebruikt.

Omstreeks 1200 keerde Fibonacci terug naar Pisa, daar schreef hij een aantal boeken over wiskunde. Zijn belangrijkste werk was de Liber Abaci (1202), een leerboek over het rekenen met Indische cijfers.

Fibonacci getallen en Pythagoreïsche drietallen

Fibonacci is beroemd geworden door de naar hem genoemde rij: 1, 1, 2, 3, 5, … waarbij je de volgende term vindt door de twee voorafgaande op te tellen.
Drie getallen a, b en c waarvoor geldt dat $a^2 + b^2 = c^2$ vormen samen een Pythagoreïsch drietal (a, b, c).
Er bestaat een manier om zo'n drietal te vormen uitgaande van vier opeenvolgende getallen van een Fibonacci-rij, bijvoorbeeld: 2, 3, 5, 8, …
Bereken voor het getal a het dubbele product van de twee binnenste getallen, dus $a = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.
Voor het getal b neem je het product van de twee buitenste getallen, dus $b = 2 \cdot 8 = 16$.
Het getal c vind je als som van de kwadraten van de binnenste getallen: $c = 3^2 + 5^2 = 34$.

Opdracht

- Controleer dat geldt $30^2 + 16^2 = 34^2$.
- Welk Pythagoreïsch drietal hoort bij de Fibonacci-getallen 3, 5, 8, 13?

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheden 7

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Functies met machten
- Redeneren met formules
- Hellingen
- Systematisch tellen

© Noordhoff Uitgevers bv

Functies met machten

1 Vul in.

a $3^2 \cdot 3^4 = 3^{\cdots}$

b $\frac{7^5}{7^2} = 7^{\cdots}$

c $(3^{12})^4 = 3^{\cdots}$

d $g^4 \cdot g^5 = \ldots$.

e $\frac{g^7}{g^5} = \ldots$.

f $(g^5)^3 = \ldots$

2 Sommige van de volgende functies kun je schrijven als een machtsfunctie $N(t) = t^m$. Zoek uit welke dat zijn en geef in die gevallen de waarde van de exponent m.

a $N(t) = t^2 \cdot t^3$

b $N(t) = t^{1,3} \cdot t^{2,5} \cdot t$

c $N(t) = \frac{t^{12}}{t^3}$

d $N(t) = t^4 + t^6$

e $N(t) = (t^3)^{2,6}$

f $N(t) = \frac{(t^{1,5})^4}{t^2 \cdot t}$

Theorie

Bij het rekenen met machten gelden de volgende rekenregels.

1 $g^0 = 1$

2 $g^1 = g$

3 $g^{\frac{1}{2}} = \sqrt{g}$

4 $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$

5 $g^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{g}$

6 $g^p \cdot g^q = g^{p+q}$

7 $\frac{g^p}{g^q} = g^{p-q}$

8 $(g^p)^q = g^{p \cdot q}$

Voorbeeld 1

Schrijf als een macht van x.

$x^3 \cdot x^2 \cdot x^9 = x^{14}$

$x \cdot x^{3,2} \cdot x^{-2} = x^{2,2}$

$x^{6,4} \cdot \sqrt{x} = x^{6,9}$

Voorbeeld 2

Schrijf als een macht van q.

$\frac{q^4 \cdot q^5}{q^3} = \frac{q^9}{q^3} = q^6$

$q^{-0,2} \cdot \left(q^{4,2}\right)^{0,5} = q^{-0,2} \cdot q^{2,1} = q^{1,9}$

Voorbeeld 3

Schrijf als een som van machten van t.

$\frac{2t^4 - 6t^{3,8} + 8t^{1,5}}{4t^2} =$

$\frac{2t^4}{4t^2} - \frac{6t^{3,8}}{4t^2} + \frac{8t^{1,5}}{4t^2} = \frac{1}{2}t^2 - 1\frac{1}{2}t^{1,8} + 2t^{-0,5}$

3 Vereenvoudig zoals in de voorbeelden.

a $f(v) = v^3 \cdot v^{6,5} + 4v^{10} \cdot v^{-0,5}$

b $H(p) = 2p \cdot p^2 - 6p^3$

c $h(a) = \frac{a^2 \cdot 9a^3}{a^{6,4}}$

d $m(t) = 3t \cdot (t^{1,6})^2 - 7{,}8t^{3,1} \cdot t$

e $N(d) = 15d^3 \cdot 2d^{1,5} \cdot 4\sqrt{d}$

f $K(q) = \frac{18q^{3,2} + 7q^{4,9} - 6{,}4q}{q}$

© Noordhoff Uitgevers bv

Redeneren met formules

Theorie

Door na te gaan hoe een formule is opgebouwd, kun je beredeneren hoe de uitkomst van een formule verandert. Je kunt bijvoorbeeld gebruik maken van de volgende eigenschappen.

- g^t is stijgend als $g > 1$
- g^t is dalend als $0 < g < 1$
- bij een vaste positieve waarde van c en positieve waarde van n wordt de breuk $\frac{c}{n}$ kleiner als n groter wordt.

Voorbeeld

Voor $t \geq 0$ is gegeven $P = \frac{2}{4 + 6 \cdot 0{,}7^t}$

Beredeneer naar welke grenswaarde P nadert.

Oplossing

Bij $t = 0$ is $P = \frac{2}{4 + 6 \cdot 0{,}7^0} = \frac{2}{10} = 0{,}2$.

Als t heel groot wordt, nadert $6 \cdot 0{,}7^t$ naar nul. Dus $4 + 6 \cdot 0{,}7^t$ nadert naar 4.

Als t groot wordt, nadert P naar $\frac{2}{4} = 0{,}5$.

De waarden van P naderen naar 0,5.

4 In de formules stelt t de tijd voor en P een hoeveelheid. Beredeneer met de formule naar welke waarde P op den duur nadert.

a $P = 40 + 10 \cdot 0{,}5^t$

b $P = 560 - 13 \cdot 0{,}95^t$

c $P = 200 - \frac{10}{5 + 0{,}3^t}$

d $P = 250(2 - 65 \cdot 1{,}5^{-t})$

e $P = 750 + 8(5 \cdot 0{,}2^t - 7)$

f $P = 1000 - \frac{235}{3{,}5 + 1{,}2^t}$

5 Een slager haalt een stuk vlees uit de vriescel en legt het in de koelcel. De temperatuur T in graden Celsius van het vlees t uur nadat het vlees in de koelcel is gelegd is te berekenen met de formule $T = 6 - \frac{24}{\sqrt{3t + 1}}$

a Welke temperatuur had het vlees op het moment dat het in de koelcel werd gelegd?

b Leg uit dat de temperatuur T bij toenemende waarden van t zal blijven stijgen.

c Leg uit hoe je aan de formule kunt zien dat de temperatuur van de koelcel 6 °C is.

6 Een kippenboer mest haantjes van een bepaald ras voor de slacht. Voor de gewichtstoename van haantjes van dat ras geldt de formule $G = \frac{10\,000}{4 + 200 \cdot 0{,}4^t}$. Hierbij is G het gewicht in grammen en t de tijd in weken.

a Leg uit hoe je uit de formule kunt afleiden dat de grafiek van G stijgend is bij toenemende t.

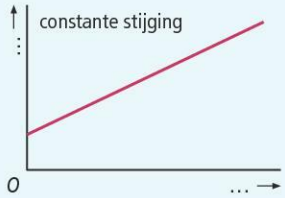
b Als de boer doorgaat met mesten, dan zullen de kippen niet onbegrensd in gewicht blijven toenemen.
Welke grenswaarde is er voor het gewicht van de kippen van dit ras? Leg uit hoe je aan je antwoord gekomen bent.

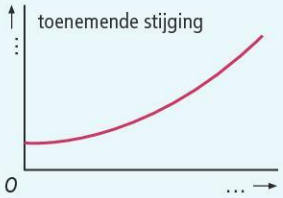
© Noordhoff Uitgevers bv

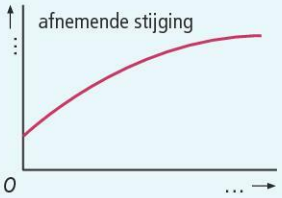
Hellingen

Theorie

Een grafiek kan op verschillende manieren stijgen of dalen: constante stijging of daling, toenemende stijging of daling en afnemende stijging of daling.







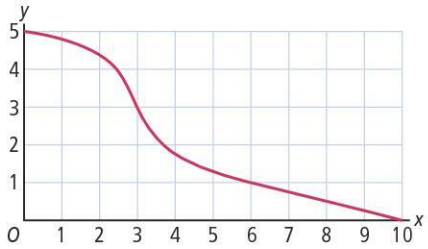
7 In de grafiek zie je verschillende vormen van dalen.

a Hoe noem je de daling op het interval [6, 10]?

b Op welk interval is de grafiek toenemend dalend?

c En op welk interval afnemend dalend?

d Benader grafisch de helling van de grafiek in het punt (3, 3).



8 De producent van frisdrank Bubbels heeft onderzoek gedaan naar het effect van televisiespotjes. Er blijkt dat er een verband is tussen het percentage jongeren P dat kiest voor Bubbels en het aantal keer x dat een spotje wordt uitgezonden. Dit verband wordt beschreven door de formule $P = 10 + 15 \cdot \log(x + 1)$.

a Plot en schets de grafiek van de formule.

b Het rendement van een uitzending is de toename van het percentage jongeren dat kiest voor Bubbels.
Ga met de grafiek na of het rendement van de uitzendingen steeds groter of juist kleiner wordt.

9 Een groeimodel dat de groei van de courgette bij benadering weergeeft is $G = \dfrac{1900}{1 + 58 \cdot 0{,}68^t}$. Hierin is G het gewicht in grammen en t de tijd in weken.

a Op welke manier neemt het gewicht van een courgette toe tussen $t = 0$ en $t = 20$?

b Beredeneer met de formule welk gewicht de courgette uiteindelijk zal hebben.

10 Gegeven is de functie $A(p) = 6\sqrt{p} - 2p - 1$.

a Bereken de gemiddelde toename van A over het interval [1, 9].

b Bereken het differentiequotiënt van A over het interval [0, 4].

© Noordhoff Uitgevers bv

Systematisch tellen

Theorie

Het oplossen van een telprobleem vereist een systematische aanpak. Dat kan met behulp van een boomdiagram, een wegendiagram, een rooster of door de mogelijkheden op een overzichtelijke manier weer te geven.

11

a Een rode bal, een blauwe bal en een gele bal worden op een rijtje op tafel gelegd.
Bereken het aantal verschillende rijtjes dat je op deze manier op tafel kunt leggen.

b In een bak zitten vijf zwarte en vijf witte ballen. Uit de bak worden drie ballen gehaald die op een rij op tafel worden gelegd.
Bereken het aantal verschillende rijtjes dat je op deze manier op tafel kunt leggen.

12 Uit de bak met vijf rode, vijf blauwe en vijf gele ballen worden drie ballen getrokken en naast elkaar op een rijtje gelegd.

a Hoeveel verschillende rijtjes zijn er in totaal mogelijk?

b Hoeveel rijtjes zijn er mogelijk met twee rode ballen?

c Leg uit dat er twaalf verschillende rijtjes mogelijk zijn waarin één rode bal voorkomt.

d Gebruik de antwoorden op opdracht 12b en c om het aantal verschillende rijtjes te berekenen waarin minstens één rode bal voorkomt.

13 Deze opdracht gaat over de bak met ballen van opdracht 12. Er worden weer drie ballen op een rijtje gelegd.

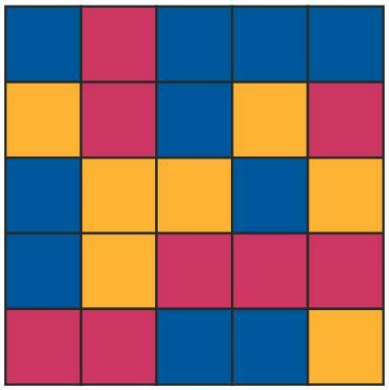
a Hoeveel verschillende rijtjes zijn er mogelijk als er in het rijtje alleen gele of blauwe ballen voor mogen komen?

b Verklaar dat je het antwoord op opdracht 12d ook had kunnen vinden door van het antwoord op opdracht 12a het antwoord op opdracht 13a af te trekken.

14 De 25 leerlingen van een brugklas gaan een kunstwerk maken. Iedere leerling verft een vierkant bordje in de kleur rood, geel of blauw. Daarna worden de bordjes samengevoegd tot één groot vierkant.

a Hoeveel verschillende kunstwerken kunnen de leerlingen maken?

b Door de leerlingen zijn acht rode bordjes gemaakt, zeven gele en tien blauwe. Daarvan kun je een kunstwerk maken zoals hiernaast.
Hoeveel verschillende kunstwerken zijn er mogelijk met deze aantallen rode, gele en blauwe bordjes?



© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

Normale verdelingen 15

SE CE K

In dit hoofdstuk

In de hoofdstukken 10 en 11 heb je al kennisgemaakt met de normale verdeling. Met behulp van de vuistregels van de normale verdeling rekende je bijvoorbeeld een percentage, een kans of een grenswaarde uit.

In dit hoofdstuk leer je hoe je deze berekeningen met de rekenmachine kunt doen, want niet alle vraagstukken zijn bij de normale verdeling met de vuistregels op te lossen. Aan het eind van het hoofdstuk leer je hoe je de normale verdeling kunt gebruiken bij het berekenen van kansen bij discrete stochasten.

Het werken met de normale verdeling speelt een belangrijke rol in hoofdstuk 17.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk:

- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 13
- *Abstraheren* opdracht 30
- *Logisch redeneren en bewijzen* opdracht 25

© Noordhoff Uitgevers bv

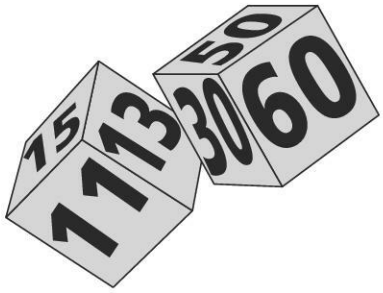
V1 Op een dobbelsteen staan de getallen 1 tot en met 6. Stochast X is het getal dat boven komt bij een worp met de dobbelsteen.

a Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.

b Op een tweede dobbelsteen staan de getallen 11, 12, …, 16. Bij een worp met deze dobbelsteen hoort stochast Y. Bereken $E(Y)$ en $\sigma(Y)$.

c Op een derde dobbelsteen staan de getallen 10, 20, …, 60. De bijbehorende stochast is Z. Bereken $E(Z)$ en $\sigma(Z)$.

d Wat valt je op als je de uitkomsten van de opdrachten a, b en c vergelijkt?



Theorie

Een variabele waarvan de waarde afhangt van het toeval heet een **stochast**. De waarde van een stochast is een getal. De waarde van een stochast X kan met een constante c worden verhoogd of met een constante c worden vermenigvuldigd. De **verwachtingswaarde** en de verwachte **standaardafwijking** wijzigen dan als volgt:

$E(X + c) = E(X) + c$ $\quad E(c \cdot X) = c \cdot E(X)$

$\sigma(X + c) = \sigma(X)$ $\quad \sigma(c \cdot X) = c \cdot \sigma(X)$ $\quad (c > 0)$

Voor de stochasten X en Y geldt:

$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Als X en Y onafhankelijk stochasten zijn dan geldt:

$\sigma(X + Y) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2}$.

Voorbeeld

Van de stochast X is bekend dat $E(X) = 9{,}7$ en $\sigma(X) = 2{,}1$.
De stochasten Y en Z worden gegeven door $Y = X + 4{,}1$ en $Z = 10 \cdot X$.
Bereken verwachtingswaarde en standaardafwijking van Y en van Z.

Oplossing

$E(Y) = E(X + 4{,}1) = E(X) + 4{,}1 = 13{,}8$

$\sigma(Y) = \sigma(X + 4{,}1) = \sigma(X) = 2{,}1$

$E(Z) = E(10 \cdot X) = 10 \cdot E(X) = 97$

$\sigma(Z) = \sigma(10 \cdot X) = 10 \cdot \sigma(X) = 21$

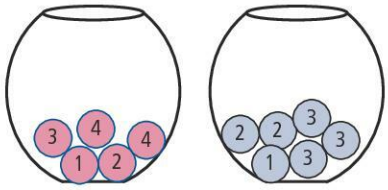
V2 De maximumdagtemperatuur in graden Fahrenheit in New York op een willekeurige dag in augustus is stochast F met $E(F) = 77$ en $\sigma(F) = 4{,}2$.
De temperatuur in graden Celsius is stochast C. Het verband tussen C en F is $C = 0{,}56 \cdot F - 17{,}78$.
Bereken $E(C)$ en $\sigma(C)$.

V3 Uit elke vaas wordt één balletje getrokken. Stochast X is het getal op het balletje uit vaas 1 en stochast Y is het getal op het balletje uit vaas 2.

a Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.

b Bereken $E(Y)$ en $\sigma(Y)$.

c Stochast Z is de som van de twee getrokken getallen. Bereken $E(Z)$ en $\sigma(Z)$.



vaas 1 vaas 2

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Zijn $X_1, X_2, \ldots, X_n$ onafhankelijke stochasten, elk met dezelfde kansverdeling als X, dan geldt de $\sqrt{n}$ – wet.

- Voor de som $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ van de uitkomsten geldt: $E(S) = n \cdot E(X)$ en $\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$.
- Voor het gemiddelde $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ van de uitkomsten geldt: $E(\overline{X}) = E(X)$ en $\sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Voorbeeld

Een kansexperiment met uitkomst stochast X wordt 25 keer herhaald.
Er geldt $E(X) = 6$ en $\sigma(X) = 3$.
S is de som van de uitkomsten en $\overline{X}$ is het gemiddelde van de uitkomsten.
Bereken $E(S)$, $\sigma(S)$, $E(\overline{X})$ en $\sigma(\overline{X})$.

Oplossing

$E(S) = n \cdot E(X) = 25 \cdot 6 = 150$

$\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X) = \sqrt{25} \cdot 3 = 15$

$E(\overline{X}) = E(X) = 6$

$\sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}} = \dfrac{3}{\sqrt{25}} = 0{,}6$

V4 Uit vaas 1 van opdracht V3 wordt 10 keer met terugleggen een balletje getrokken.

a Stochast S is de som van de getrokken getallen.
Bereken $E(S)$ en $\sigma(S)$.

b Stochast $\overline{X}$ is het gemiddelde van de getrokken getallen.
Bereken $E(\overline{X})$ en $\sigma(\overline{X})$.

V5 Een fabrikant verpakt 100 koekjes in een blik. Het gewicht van een willekeurig koekje uit de partij is een stochast Z met $E(Z) = 12$ gram en $\sigma(Z) = 0{,}3$ gram. Het gewicht van een leeg blik is een stochast D met $E(D) = 46$ gram en $\sigma(D) = 1{,}2$ gram.

a Stochast $\overline{Z}$ is het gemiddelde gewicht van de 100 koekjes.
Bereken $E(\overline{Z})$ en $\sigma(\overline{Z})$.

b Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het totale gewicht van een blik met 100 koekjes.

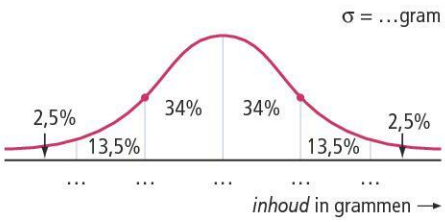
V6 De inhoud X in grammen van blikjes kattenvoer is normaal verdeeld met een gemiddelde $\mu = 405{,}4$ gram en een standaardafwijking $\sigma = 7{,}4$ gram. Dat noteer je als Norm(405,4; 7,4)-verdeeld.

a Vul bij de schets op de puntjes de juiste waarden in.

b Bereken $P(X < 398)$.

c Bereken $P(398 \leq X \leq 420{,}2)$.

d Hoeveel gram kattenvoer bevatten de 2,5% blikjes met de meeste inhoud minimaal?



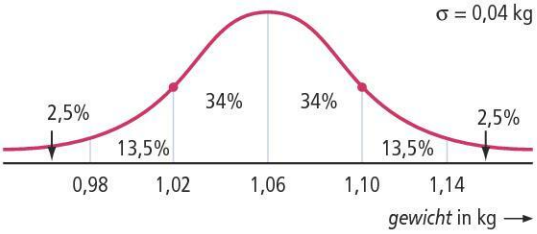
© Noordhoff Uitgevers bv

15.1 Percentage berekenen

Je leert
- hoe je een percentage of een kans bij een normaal verdeelde stochast berekent

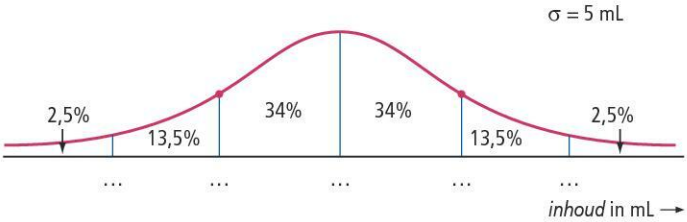
Leerroutes
- ondersteunend: 1—2—3—4—O5—O6
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6
- uitdagend: 1—2—3—5—6—U1

Van een partij galiameloenen is het gewicht normaal verdeeld met een gemiddelde van 1,06 kg en een standaardafwijking van 0,04 kg.



- Hoeveel procent van de galiameloenen weegt meer dan 1 kg?

1 Afwasmiddel wordt verkocht in flesjes met een netto-inhoud van 450 mL. De machine die de flesjes vult, doet echter niet steeds precies 450 mL in het flesje. De ene keer wat meer, de andere keer wat minder. Er is vastgesteld dat de inhoud in mL Norm(450, 5)-verdeeld is.



a Vul bij de schets op de puntjes de juiste waarden in.

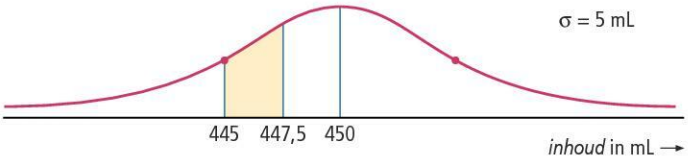
b Hoeveel procent van de flesjes bevat meer dan 460 mL afwasmiddel?

c Hoe groot is de kans dat een willekeurig flesje minder dan 445 mL afwasmiddel bevat?

d 34% van de flesjes bevat tussen de tussen 445 mL en 450 mL afwasmiddel.
Zal het percentage van de flesjes dat tussen de 445 mL en 447,5 mL afwasmiddel bevat minder, ongeveer of meer dan 17% zijn?

© Noordhoff Uitgevers bv

2 Je gaat met de rekenmachine het percentage flesjes berekenen dat tussen de 445 mL en 447,5 mL afwasmiddel bevat.



a Bereken met je rekenmachine, in vier decimalen, de kans dat een willekeurig flesje tussen de 445 mL en 447,5 mL afwasmiddel bevat. Hoeveel procent van de flesjes bevat dus tussen de 445 mL en 447,5 mL afwasmiddel

b Komt je antwoord bij 2a overeen met je antwoord van opdracht 1d?

→ Instructie rekenmachine | Normale verdeling

Aanpak

Hoe bereken je bij een normaal verdeelde stochast een percentage of een kans?

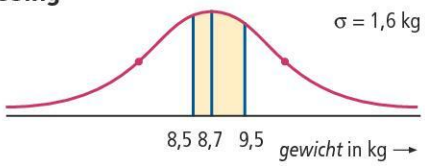
1 Teken zo nodig een klokvorm en geef daarin de bekende waarden aan.
2 Geef de grenzen aan en arceer het bedoelde gebied.
3 Bereken met je rekenmachine de gevraagde kans.

Voorbeeld

Het gewicht in kg van zakken tuinaarde is Norm(8,7; 1,6)-verdeeld.
Hoeveel procent van de zakken tuinaarde heeft een gewicht tussen de 8,5 kg en 9,5 kg?

Oplossing

1
2



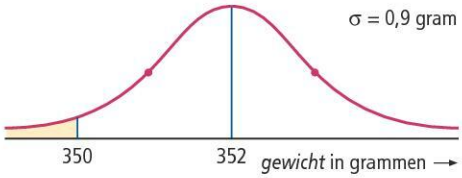
3 Optie: normaal cumulatief
ondergrens = 8,5, bovengrens = 9,5, $\mu = 8{,}7$ en $\sigma = 1{,}6$
Dit geeft 0,2412…
Ongeveer 24% van de zakken tuinaarde heeft een gewicht tussen 8,5 kg en 9,5 kg.

3 **a** Hoeveel procent van de zakken tuinaarde uit het voorbeeld heeft een gewicht tussen 8,0 kg en 9,0 kg?

b Hoe groot is de kans dat een willekeurig zak tuinaarde een gewicht heeft tussen de 7,0 kg en 8,5 kg?

© Noordhoff Uitgevers bv

4 Het gewicht in grammen van potten pindakaas is Norm(352; 0,9)-verdeeld. Je gaat berekenen hoeveel procent van de potten een gewicht heeft van minder dan 350 gram.



a Leg uit dat het aangegeven gebied geen linkergrens heeft.

b Gebruik een voldoende klein getal als linkergrens (bijvoorbeeld -10^{99}) en bereken het gevraagde percentage.

> Als een gebied onder de klokvorm geen linkergrens heeft, dan voer je als linkergrens het getal -10^{99} in. Heeft een gebied geen rechtergrens, dan neem je 10^{99} als rechtergrens.

Ondersteunende route → maak opdracht O5

5 H Bij het jaarlijkse onderzoek onder tweedeklassers constateert de schoolarts dat de lengte in cm van de 14-jarige jongens Norm(164; 7,2)-verdeeld is.

a Bereken de kans dat een willekeurige jongen kleiner is dan 168,5 cm.

b Hoeveel procent van de jongens is langer dan 180 cm?

c Bereken de kans dat twee willekeurige jongens beiden langer zijn dan 175 cm.

d De school heeft 292 jongens met een leeftijd van 14 jaar. Hoeveel jongens zijn naar verwachting langer dan 175 cm?

Ondersteunende route → maak opdracht O6

6 Ilona bakt pannenkoeken waarvan het gewicht in grammen Norm(78; 5,7)-verdeeld is.

a Bereken de kans dat een willekeurige pannenkoek meer dan 80 gram weegt.

b Je wilt de kans berekenen dat vier willekeurige pannenkoeken samen meer dan 320 gram wegen. Waarom moet je hier de $\sqrt{n}$-wet gebruiken?

c Bereken de kans van opdracht b.

d Ilona heeft borden waarvan het gewicht in grammen Norm(170, 25)-verdeeld is. Bereken de kans dat een willekeurig bord met één willekeurige pannenkoek erop tussen de 250 gram en 300 gram weegt.

Uitdagende route → maak opdracht U1

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O5 De lengte in cm van de 14-jarige meisjes op een school is Norm(171; 6,3)-verdeeld.

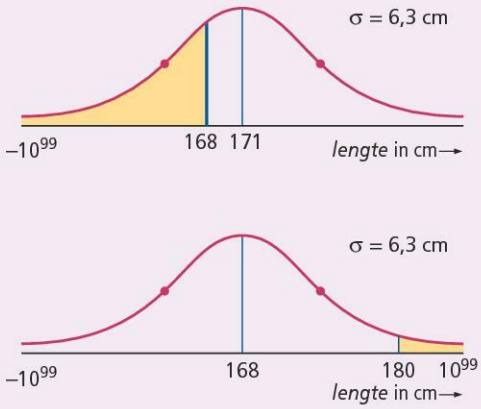
a Bereken de kans dat een willekeurig meisje kleiner is dan 168 cm. Neem als linkergrens -10^{99}.

b Welk getal vul je als rechtergrens in als je wilt berekenen hoe groot de kans is dat een willekeurig meisje langer dan 180 cm is? Bereken deze kans.

c Vul in: de kans dat twee willekeurige meisjes beiden langer zijn dan 180 cm is … · … ≈ ….

d Bereken de kans dat twee willekeurige meisjes beiden kleiner zijn dan 165 cm.

e De school heeft 198 meisjes van 14 jaar. Hoeveel meisjes zijn naar verwachting langer dan 180 cm?



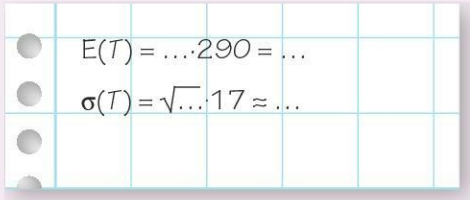
O6 Karen maakt kaarsen van bijenwas. Het gewicht in grammen van de kaarsen is Norm(290, 17)-verdeeld.

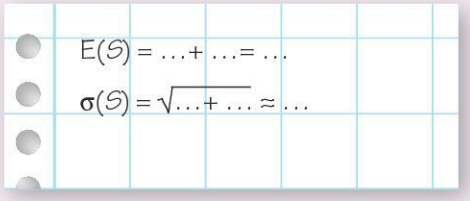
a Bereken de kans dat een willekeurige kaars meer dan 300 gram weegt.

b De stochast T is het gewicht van de zes willekeurige kaarsen samen. Je gaat de kans berekenen dat zes willekeurige kaarsen samen meer dan 1800 gram wegen. Daarbij heb je de $\sqrt{n}$-wet nodig.
Vul op het bovenste blaadje de ontbrekende getallen in.

c Bereken de gevraagde kans van opdracht b.

d Bo maakt kaarsenstandaards van ruw hout. Het gewicht in grammen van deze standaards is Norm(185, 25)-verdeeld.
S is het gewicht van een kaarsenstandaard met één kaars.
Vul op het onderste blaadje de ontbrekende getallen in en bereken de kans dat een kaarsenstandaard met één willekeurige kaars tussen de 450 gram en 500 gram weegt.





Uitdagende opdrachten

U1 Het nettogewicht in grammen van puddingpoeder in pakjes puddingpoeder is Norm(100, 5)-verdeeld. Het tarragewicht (het gewicht van een leeg pakje) is Norm(6; 1,5)-verdeeld. Het brutogewicht is het nettogewicht plus het tarragewicht.

a Bereken de kans dat een willekeurig pakje puddingpoeder bruto meer dan 110 gram weegt.

b De pakjes met puddingpoeder worden in dozen van 200 stuks verpakt. Het gewicht in grammen van een lege doos is Norm(950, 90)-verdeeld.
Hoe groot is de kans dat een volle doos meer dan 22,5 kg weegt?

© Noordhoff Uitgevers bv

15.2 Grenswaarde berekenen

Je leert
- hoe je een grenswaarde berekent bij een gegeven kans van een normaal verdeelde stochast

Leerroutes
- ondersteunend: 7—8—09—10—011—11—12
- doorlopend: 7—8—9—10—11—12—13
- uitdagend: 7—8—9—11—12—13—U2

Van een bepaald ras van konijnen is het gewicht van volwassen dieren normaal verdeeld met een gemiddelde van 2,05 kg en een standaardafwijking van 0,35 kg. Flip is een van deze konijnen en behoort tot de 10 procent zwaarste konijnen.
- Is het gewicht van Flip meer of minder dan 2,5 kg?

7 Het gewicht G in grammen van honing in potten is Norm(354,2; 3,8)-verdeeld.

a Ga na dat de kans dat een willekeurig gekozen pot hoogstens 350 gram honing bevat ongeveer gelijk is aan 0,1345.

b Vul de tabel verder in.

g in grammen	350	351	352	353	354
$P(G \leq g)$	0,1345	…	…	…	…

c Henk wil weten hoeveel gram honing er maximaal zit in de 25% lichtste potten.
Leg met behulp van de tabel uit tussen welke twee gehele getallen dit gewicht ligt.

d Maak met je rekenmachine een tabel en zoek uit hoeveel gram honing er maximaal zit in de 25% lichtste potten.
Geef je antwoord in één decimaal.

→ **Instructie rekenmachine | Normale verdeling**

8 Deze opdracht gaat over de potten met honing van opdracht 7. Je gaat met de rekenmachine berekenen hoeveel gram honing de 10% lichtste potten bevatten. Noem deze waarde g.

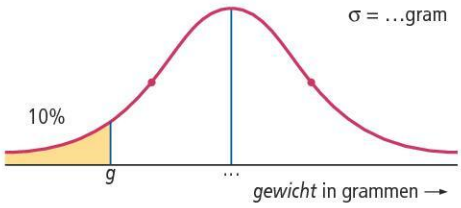
a Vul bij de schets op de puntjes de juiste waarden in.

b Waarom is het lijntje bij g links van het gemiddelde getekend?

c Bereken $\mu - \sigma$ en $\mu - 2 \cdot \sigma$.

d Leg uit dat g tussen 346,6 en 350,4 ligt.

e Bereken met je rekenmachine hoeveel gram honing de 10% lichtste potten maximaal bevatten.



© Noordhoff Uitgevers bv

Aanpak

Hoe bereken je een grenswaarde bij een gegeven kans van een normaal verdeelde stochast?

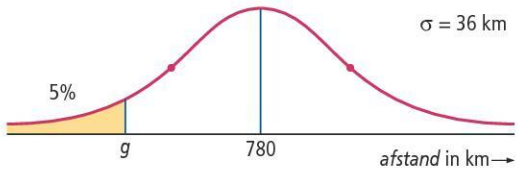
1 Teken zo nodig een klokvorm en geef daarin het gemiddelde en de standaardafwijking aan.
2 Arceer het gegeven gebied en geef de kans die bij het gebied hoort.
3 Bereken met je rekenmachine de gevraagde grenswaarde.

Voorbeeld

De afstand in km die een bepaald type auto op een volle tank met een constante snelheid kan rijden, is Norm (780, 36) -verdeeld. Een auto behoort tot de 5% van de auto's die het minst ver kan rijden op een volle tank.
Hoeveel km kan deze auto maximaal rijden?

Oplossing

1
2



3 Invoer: y_1 = normaal cum. $(-10^{99}, x, 780, 36)$
$y_2 = 0{,}05$
Venster: $700 \leq x \leq 780$, $0 \leq y \leq 0{,}1$
Optie: snijpunten
De coördinaten van het snijpunt zijn (720,79; 0,05).
De auto kan maximaal 720 km rijden.

Ondersteunende route → maak opdracht 09

9 Van 2000 batterijen wordt de levensduur in uren gemeten. Deze blijkt Norm(52, 9)-verdeeld te zijn.
a Hoe groot is de levensduur minimaal van de batterij die behoort tot de 8% batterijen met de grootste levensduur?
b En hoe groot is de levensduur maximaal van een batterij die behoort tot de groep van 10 batterijen met de kortste levensduur?

10 H Tot 1996 moesten jongens nog in militaire dienst. De lengte in cm van de dienstplichtigen in 1987 is Norm(181,3; 7)-verdeeld.
a Welke lengte hadden in 1987 de 4% kleinste dienstplichtigen maximaal? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.
b En welke lengte hadden de 4% langste dienstplichtigen minimaal?
c Zowel de 5% kleinste als de 5% grootste dienstplichtigen werden op basis van hun lengte afgekeurd.
Welke lengte hadden deze afgekeurde dienstplichtigen?

© Noordhoff Uitgevers bv

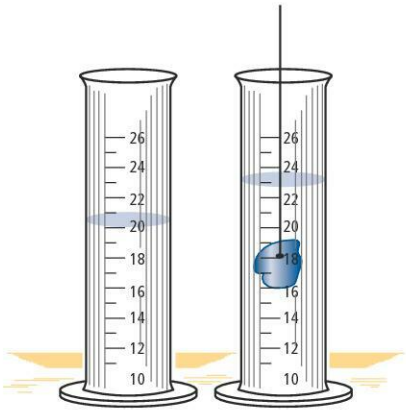
Ondersteunende route → maak opdracht O11

11 Elk jaar bepalen leerlingen het volume in cm^3 van een steentje met de onderdompelingsmethode. De resultaten zijn bij benadering normaal verdeeld met een gemiddelde van 64,3 cm^3 en een standaardafwijking van 2,6 cm^3.

a Hoeveel procent van de leerlingen vinden naar verwachting een volume tussen 63 cm^3 en 65 cm^3?

b Tussen welke grenzen ligt het gemeten volume van het steentje bij de 40% leerlingen die het dichtst bij het gemiddelde zitten?

c De 20% leerlingen waarbij het gemeten volume het meest van het gemiddelde afwijkt, moeten de proef opnieuw doen. Welke volume hebben deze leerlingen bij de eerste proef gemeten?



12 H Een fabrikant levert pakken volle melk waarvan het vetgehalte in procenten Norm(3,50; 0,02)-verdeeld is.

a Bereken het minimale vetgehalte van de 13% pakken volle melk met het hoogste vetgehalte.

b Tussen welke grenzen ligt het vetgehalte van de middelste 80% pakken?

c Joris koopt drie willekeurige pakken volle melk. Bereken de kans dat alle drie de pakken een vetgehalte hebben van meer dan 3,51%.

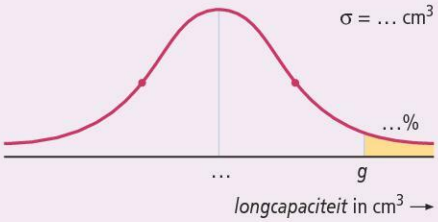
13 Bij een sportactiviteit tijdens Koningsdag doen alle leerlingen van groep 6 van de basisscholen van een stad mee. Er worden vijf groepen gemaakt waarbij de leerlingen op basis van hun lengte worden ingedeeld. De lengte in cm van deze leerlingen is Norm(132,4; 8,6)-verdeeld. De organisator maakt een klassenindeling bij de lengte waarbij in elk van de vijf klassen evenveel leerlingen komen.
Bereken van alle klassen de klassengrenzen.

Uitdagende route → maak opdracht U2

© Noordhoff Uitgevers bv

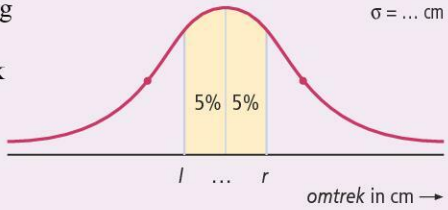
Ondersteunende opdrachten

O9 Van 1600 mannelijke studenten is de longcapaciteit gemeten. Deze blijkt normaal verdeeld te zijn met een gemiddelde van 4100 cm^3 en een standaardafwijking van 400 cm^3.



- **a** Vul bij de schets op de puntjes de juiste waarden in.
- **b** Je gaat de minimale longcapaciteit van een student berekenen die behoort tot de 4% studenten met de grootste longcapaciteit. Noem deze waarde g.
  Waarom is het lijntje bij g rechts van het gemiddelde getekend?
- **c** Bereken $\mu + \sigma$ en $\mu + 2 \cdot \sigma$.
- **d** Leg uit dat g tussen 4500 en 4900 ligt.
- **e** Bereken de linkergrens van het getekende gebied.
- **f** Welke longcapaciteit hebben deze studenten minimaal?
- **g** Je gaat nu de maximale longcapaciteit berekenen van een student die behoort tot de groep van 240 studenten met de kleinste longcapaciteit.
  Welk percentage hoort bij 240 van de 1600 studenten?
- **h** Bereken de maximale longcapaciteit van deze studenten.

O11 Al jarenlang laat een docent zijn tweede klas leerlingen de omtrek van een blikje meten. De resultaten zijn normaal verdeeld met een gemiddelde van 19,15 cm en een standaardafwijking van 1,06 cm.



- **a** Hoeveel procent van de leerlingen vinden naar verwachting een omtrek tussen 19,0 cm en 19,5 cm?
- **b** Je gaat berekenen tussen welke grenzen de gemeten omtrek ligt bij de 10% leerlingen die het dichtst bij de gemiddelde omtrek zitten.
  Waarom staat er in de schets twee keer 5%?
- **c** Vul bij de schets op de puntjes de juiste waarden in.
- **d** Van de leerlingen heeft 5% een omtrek gemeten tussen l cm en 19,15 cm.
  Bereken met je rekenmachine l.
- **e** Bereken met je rekenmachine r.
- **f** Tussen welke grenzen ligt de gemeten omtrek bij deze leerlingen?

Uitdagende opdrachten

U2 De stochast X is Norm(230,2; 17,1)-verdeeld.
Voor de getallen p en q geldt $P(p \leq X \leq q) = 0{,}11$.

- **a** Bereken p als $q = 219{,}4$.
- **b** Bereken q als $p = 219{,}4$.
- **c** Bereken p als geldt $q = p + 10$.

© Noordhoff Uitgevers bv

15.3 Gemiddelde en standaardafwijking berekenen

Je leert
- hoe je een gemiddelde of een standaardafwijking berekent van een normaal verdeelde stochast

Leerroutes
- ondersteunend: 14—15—16—O17—O18—19
- doorlopend: 14—15—16—17—18—19
- uitdagend: 14—15—17—18—19—U3

Op consultatiebureaus in Nederland worden drie maanden oude baby's gecontroleerd op hun ontwikkeling. Daarbij wordt onder andere de lengte in cm gemeten. De lengte van baby's was in 2020 normaal verdeeld met een standaardafwijking van 4,0 cm. Zo'n 8 % van de baby's was kleiner dan 54,4 cm.
Joop vraagt zich af hoeveel cm de gemiddelde lengte van de baby's was. Hij gokt dat de gemiddelde lengte minder 58 cm was.
- Onderzoek of Joop gelijk heeft.

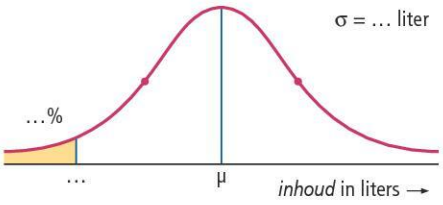
14 Een machine vult flessen motorolie. De inhoud V in liters is Norm(4,3; 0,2)-verdeeld. De flessen worden gecontroleerd voordat ze de fabriek verlaten. Flessen die minder dan 4 liter motorolie bevatten, worden opnieuw gevuld.

a Hoeveel procent van de flessen wordt naar verwachting opnieuw gevuld?

b De fabrikant besluit de machine op een ander gemiddelde in te stellen zodat slechts 1% van de flessen opnieuw gevuld wordt. Daarbij verandert de standaardafwijking niet.
Is het nieuwe gemiddelde hoger of lager dan 4,3 liter?

c Wordt aan de eis voldaan als de machine wordt ingesteld op een gemiddelde inhoud van 4,5 liter?

15 Je gaat met de rekenmachine berekenen op welk gemiddelde μ je de machine van opdracht 14 moet instellen zodat slechts 1% van de flessen opnieuw gevuld wordt.



a Vul bij de schets op de puntjes de juiste waarden in.

b Leg uit dat het gemiddelde meer dan 4,4 liter moet zijn.

c Bereken met je rekenmachine de waarde van μ. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

d Op welk gemiddelde wordt de machine ingesteld als aan de eis wordt voldaan?

→ **Instructie rekenmachine | Normale verdeling**

© Noordhoff Uitgevers bv

Aanpak

Hoe bereken je een gemiddelde of standaardafwijking bij een gegeven kans van een normaal verdeelde stochast?

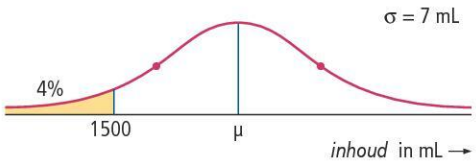
1. Teken zo nodig een klokvorm en geef daarin de bekende waarden aan.
2. Arceer het gegeven gebied en geef de kans die bij het gebied hoort.
3. Voer de gegevens in je rekenmachine in en bereken het gemiddelde of de standaardafwijking.

Voorbeeld 1

De inhoud van pakken melk is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 7 mL.
Zo'n 4% van de pakken bevat minder dan 1500 mL.
Bereken het gemiddelde.

Oplossing

1 2



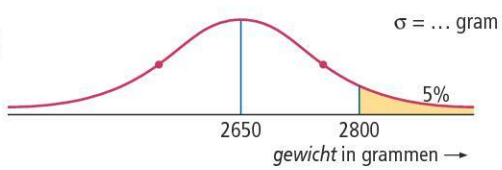
3 Invoer: y_1 = normal cum. $(-10^{99}, 1500, x, 7)$
$y_2 = 0{,}04$
Venster: $1500 \leq x \leq 1515$, $0 \leq y \leq 0{,}1$
Optie: snijpunt
De coördinaten van het snijpunt zijn (1512,25; 0,04).
Het gemiddelde is ongeveer 1512 mL.

Voorbeeld 2

Het gewicht van aardappelen is normaal verdeeld met een gemiddelde van 2650 gram. Zo'n 5% van de zakken bevat meer dan 2800 gram.
Bereken de standaardafwijking.

Oplossing

1 2



3 Invoer: y_1 = normal cum. $(2800, 10^{99}, 2650, x)$
$y_2 = 0{,}05$
Venster: $50 \leq x \leq 150$, $0 \leq y \leq 0{,}1$
Optie: snijpunt
De coördinaten van het snijpunt zijn (91,19; 0,05).
De standaardafwijking is ongeveer 91,2 gram.

16 **a** Bereken de gemiddelde inhoud van een pak melk uit voorbeeld 1 als niet 4% maar 2% van de pakken minder dan 1500 mL bevat.

b Bereken de standaardafwijking van het gewicht van de zakken aardappelen uit voorbeeld 2 als niet 5% maar 8% van de zakken meer dan 2800 gram aardappelen bevat.

Ondersteunende route → maak opdracht O17

17 H Een machine vult pakken houtskool. Het gewicht van de pakken is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 80 gram. De fabrikant wil dat 2% van de pakken een gewicht heeft van minder dan de 2,5 kg die op het pak staat vermeld.

a Bereken het gemiddelde waarop de machine moet worden ingesteld om aan de 2%-eis te voldoen.

b Bij een andere nauwkeurige machine wordt aan de eis voldaan als het gemiddelde ingesteld wordt op 2520 gram. Bereken de standaardafwijking van deze machine.

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O18

18 H

In een bouwmarkt liggen in twee bakken schroeven. De lengte van de schroeven is in beide bakken normaal verdeeld.

a In bak A liggen 1000 schroeven. De gemiddelde lengte van deze schroeven 4,03 cm. Slechts 50 schroeven zijn korter dan 4 cm.
Bereken, in twee decimalen, de standaardafwijking van de schroeven in deze bak.

b In bak B liggen 800 schroeven. De standaardafwijking van de lengte van de schroeven is 0,07 cm. In deze bak zijn 12 schroeven langer dan 5,2 cm.
Bereken de gemiddelde lengte in cm van de schroeven in deze bak. Rond af op twee decimalen.

19

IJsproducent Pinguïn produceert 2,94 miljoen bekertjes roomijs. De hoeveelheid ijs die in de bekertjes gedaan wordt, is bij benadering normaal verdeeld. Op zo'n bekertje staat dat het 125 mL ijs bevat. Pinguïn stelt het gemiddelde van de vulmachine in op 129,8 mL, zodat er gemiddeld 129,8 mL ijs in de bekertjes terechtkomt. De standaardafwijking van de hoeveelheid ijs die in de bekertjes terechtkomt, is 2,2 mL.

a Bereken hoeveel bekertjes er naar verwachting tussen 124 mL en 126 mL ijs bevatten. Geef je antwoord in duizenden bekertjes nauwkeurig.

b De overheid eist dat hooguit 5% van de bekertjes minder dan 125 mL ijs bevat.
Toon aan dat Pinguïn met zijn instelling van de vulmachine aan de eis van de overheid voldoet.

c Pinguïn kan zijn gemiddelde lager instellen en toch aan de eis van de overheid blijven voldoen. Bij elk lager gemiddelde blijft de standaardafwijking 2,2 mL. Het instellen van zo'n lager gemiddelde levert bij 2,94 miljoen bekertjes een aardige besparing op aan de hoeveelheid roomijs die men moet produceren. De productiekosten van het roomijs bedragen 0,73 euro per liter.
Bereken hoeveel euro Pinguïn maximaal kan besparen.

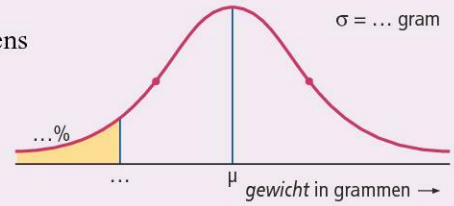
(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2005, tijdvak 2)

Uitdagende route → maak opdracht U3

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O17 Een machine vult pakken waspoeder. De hoeveelheid poeder per pak in grammen is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 8 gram. De fabrikant wil dat hoogstens 5% van de pakken een vulgewicht heeft van minder dan de 1000 gram die op het etiket staat vermeld.



a Vul bij de schets op de puntjes de juiste waarden in.

b Waarom is het gemiddelde meer dan 1008 gram maar minder dan 1016 gram?

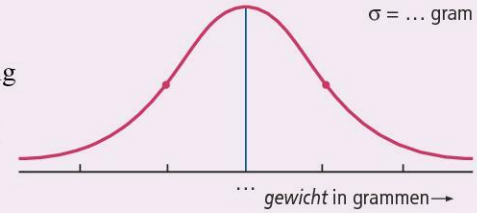
c Bereken het gemiddelde gewicht waarop de machine moet worden ingesteld om aan de 5%-eis te voldoen.

d Een andere machine vult de pakken nauwkeuriger. Bij deze machine wordt aan de 5%-eis voldaan als het gemiddelde ingesteld wordt op 1007 gram.
Maak een nieuwe schets en zet de gegeven waarden er in.

e Waarom zal de standaardafwijking bij deze machine kleiner dan 8 gram zijn?

f Bereken de standaardafwijking van deze machine.

O18 Van een kastanjeboom zijn de kastanjes gewogen. Het gewicht van de kastanjes in grammen is normaal verdeeld met een gemiddelde van 18,6 gram. Van de 80 kastanjes zijn er 6 zwaarder dan 22,2 gram.



a Hoeveel procent is 6 van de 80 kastanjes?

b Breng in de schets de gegeven waarden aan.

c Beredeneer met de schets waarom de standaardafwijking kleiner is dan 3,6 gram.

d Bereken in één decimaal de standaardafwijking van het gewicht van de kastanjes.

e Van een perenboom worden 120 peren gewogen.
Het gewicht in grammen is normaal verdeeld en heeft een standaardafwijking van 9,2 gram. Drie peren wegen meer dan 240 gram.
Bereken het gemiddelde gewicht van de peren. Rond je antwoord af op hele grammen.

Uitdagende opdrachten

U3 In een bak liggen 500 tennisballen. Het gewicht van de tennisballen is normaal verdeeld. Van de 500 tennisballen hebben er 450 een gewicht tussen 50 gram en 60 gram. De standaardafwijking van het gewicht van de tennisballen is 2,6 gram.
Welke waarden kan het gemiddelde gewicht van de tennisballen in de bak hebben?

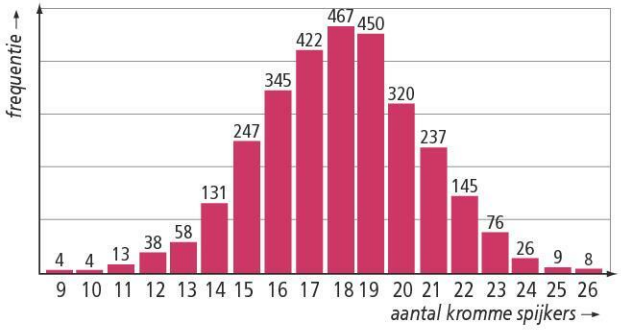
© Noordhoff Uitgevers bv

15.4 Normale verdeling met discrete waarden

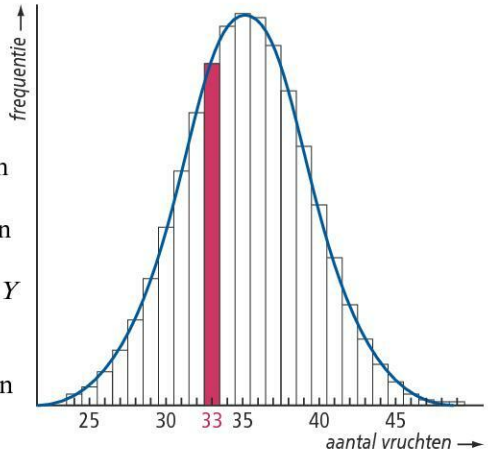
Je leert
- hoe je de normale verdeling gebruikt om een discrete stochast te benaderen

Leerroutes
- ondersteunend: 20—21—022—22—23—024—25
- doorlopend: 20—21—22—23—24—25—26
- uitdagend: 20—21—22—24—25—26—U4

In een doosje zitten precies 1000 spijkers. Bij een controle van 3000 doosjes is het aantal kromme spijkers geteld. Het gemiddelde aantal kromme spijkers per doosje is 18 spijkers met een standaardafwijking van 2,6 spijkers.
Bridget wil weten in hoeveel procent van de doosjes het aantal kromme spijkers minder dan 20 is.
- Hoe kan zij dit percentage berekenen?
- Kun je dit percentage met een normale verdeling benaderen?



20 Van de planten in een kas met kerstomaten wordt het aantal vruchten geteld. De relatieve frequenties van het aantal kerstomaten per plant zijn in het staafdiagram weergegeven. De stochast X is het aantal vruchten aan een plant.



a Leg uit dat X een discrete stochast is.

b Waarom kan de verdeling van X worden benaderd met een normale verdeling?

c Het gemiddelde van de stochast X is 35,2 vruchten met een standaardafwijking van 4,1 vruchten.
In de figuur is ook de klokvorm van de continue stochast Y getekend die Norm(35,2; 4,1)-verdeeld is. Het gekleurde staafje geeft de kans aan dat een plant 33 vruchten heeft.
Leg uit dat, als je deze kans wilt benaderen met behulp van de stochast Y, dat je dan moet kiezen voor het gebied $[32{,}5;\ 33{,}5\rangle$ onder de klokvorm.

d Bereken met behulp van de stochast Y de kans $P(X = 33)$.

e Leg met behulp van de figuur uit waarom het antwoord van opdracht d een benadering is.

21 Kijk nog eens naar de figuur van opdracht 20.

a Welke getallen zijn afgerond op helen kleiner dan 38?

b Leg uit dat als $P(X < 38)$ wilt benaderen met de normale verdeling, je $P(Y < 37{,}5)$ moet gebruiken.

c Welke getallen zijn afgerond op helen kleiner of gelijk aan 34?

d Leg uit dat als $P(X \leq 34)$ wilt benaderen met de normale verdeling, je $P(Y < 34{,}5)$ moet gebruiken.

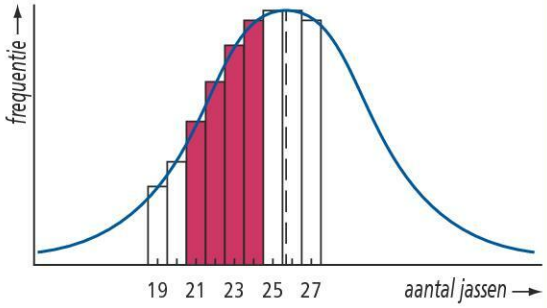
© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

Als de verdeling van een discrete stochast X klokvormig is, dan kan de verdeling van X worden benaderd door de verdeling van de continue stochast Y die normaal verdeeld is met hetzelfde gemiddelde en dezelfde standaardafwijking als X.
Bij de berekening van kansen pas je de grenswaarden van Y zo aan, dat het gebied past bij de bedoelde waarden van X.
Deze aanpassing heet **continuïteitscorrectie**.

Voorbeeld

Het aantal jassen dat in een winkel per dag wordt verkocht, is bij benadering Norm(25,8; 4,7)-verdeeld.
Bereken de kans dat op een willekeurige dag in de winkel meer dan 20 jassen maar ten hoogste 24 jassen worden verkocht.



Oplossing

Het aantal jassen X is een discrete stochast die benaderd kan worden door de continue stochast Y die Norm (25,8; 4,7)- verdeeld is.
De gevraagde kans is $P(20 < X \leq 24)$ en benader je met $P(20{,}5 \leq Y < 24{,}5)$.
Invoeren in de rekenmachine geeft $P(20{,}5 \leq Y < 24{,}5) \approx 0{,}2613$.
De gevraagde kans is ongeveer 0,2613.

Ondersteunende route → maak opdracht 022

22 H

Het aantal dropjes X in een zak is bij benadering Norm(62,1; 4,9)-verdeeld.
Bereken in vier decimalen.

a $P(X \geq 65)$
b $P(X < 60)$
c $P(X \leq 66)$
d $P(X = 58)$
e $P(59 < X < 63)$
f $P(62 \leq X \leq 64)$

23

Bij een controle van een groot aantal pakken printpapier blijkt dat niet elk pak 500 vellen papier bevat. Het aantal vellen papier in een pak is bij benadering normaal verdeeld met een gemiddelde van 503 vellen en een standaardafwijking van 2 vellen.
Bereken het percentage pakken met minder dan 500 vellen.

© Noordhoff Uitgevers bv

24 Het aantal broodjes dat in de kantine van een school per dag wordt verkocht, is bij benadering Norm(56,2; 4,9)-verdeeld. Hoe groot is de kans dat op een willekeurige dag de volgende aantallen broodjes worden verkocht?

a minimaal 52 broodjes
b precies 52 broodjes
c maximaal 67 broodjes
d tussen de 55 broodjes en 60 broodjes

Ondersteunende route → maak opdracht O25

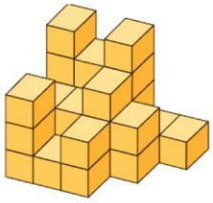
25 H In een restaurant is het aantal gasten op een zaterdagavond bij benadering Norm(29,8; 5,4)-verdeeld.

a Bereken de kans dat er op een willekeurige zaterdagavond 35 gasten zijn.
b Hoeveel zaterdagavonden met tussen de 20 gasten en 30 gasten zijn er naar verwachting over een periode van 10 weken?
c En hoeveel zaterdagavonden met meer dan 30 gasten zijn er naar verwachting over een periode van 52 weken?
d De stochast T is het totaal aantal gasten op de zaterdagavonden over een periode van 52 weken. Bereken $E(T)$ en $\sigma(T)$.
e Bereken de kans dat het totaal aantal gasten op de zaterdagavonden over een periode van 52 weken meer dan 1500 is.

26 Bij een onderzoek naar het ruimtelijk inzicht van leerlingen in leerjaar 2, moeten zij 30 vragen van oplopende moeilijkheidsgraad oplossen. Voor vwo-leerlingen is het aantal correct beantwoorde vragen bij benadering normaal verdeeld met een gemiddelde van 19,3 vragen goed en een standaardafwijking van 2,7 vragen goed.

a Hoeveel procent van de leerlingen beantwoordt meer dan de helft van de vragen goed?
b Govert behoort tot de 10% best scorende leerlingen. Hoeveel vragen heeft hij minstens goed?
c In klas V2c zitten 25 leerlingen. Bereken de kans dat al deze leerlingen meer dan de helft van de vragen goed heeft.
d Hoe groot is de kans dat het gemiddeld aantal goed beantwoorde vragen van de leerlingen uit V2c groter is dan 20?

Vraag 3
Het bouwwerk hieronder is gemaakt door kubussen te stapelen.
Uit hoeveel kubussen bestaat het bouwwerk?



Uitdagende route → maak opdracht U4

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

O22 Het aantal zilveruitjes X in een pot is bij benadering Norm(75,3; 6,8)-verdeeld. Je gaat kansen berekenen door de discrete stochast X te benaderen door de continue stochast Y.

a Welke getallen zijn afgerond op helen groter dan 73?

b Vul in: $P(X > 73) \approx P(Y \geq \ldots)$.

c Bereken $P(X > 73)$.

d Welke getallen zijn afgerond op helen kleiner of gelijk aan 76?

e Vul in: $P(X \leq 76) \approx P(Y < \ldots)$.

f Bereken $P(X \leq 76)$.

g Vul in: $P(74 \leq X < 77) \approx P(\ldots \leq Y < \ldots)$.

h Bereken $P(74 \leq X < 77)$.

O25 Bij een bepaalde ranonkelsoort varieert het aantal kelkbladeren. Dit aantal A is bij benadering Norm(4,99; 0,55)-verdeeld.

a Bereken de kans dat een willekeurige ranonkel hoogstens vier kelkbladeren heeft.

b Een tuinderij neemt een aselecte steekproef van 150 exemplaren.
Hoeveel ranonkels met zes kelkbladeren zijn er naar verwachting in de steekproef?

c De ranonkels worden verkocht in boeketten van 16 stuks. De stochast T is het totaal aantal kelkbladeren van de bloemen in het boeket.
Vul in: $E(T) = \ldots \cdot 4{,}99 = \ldots$ en $\sigma(T) = \sqrt{\ldots} \cdot 0{,}55 = \ldots$.

d Bereken de kans dat het totaal aantal kelkbladeren van de bloemen in een boeket precies 75 is.

Uitdagende opdrachten

U4 In een grote verkeerscontrole onder 800 fietsers controleert de politie of de fietsers wel met verlichting fietsen. Uit eerdere controles blijkt dat 14% van de fietsers zonder verlichting fietst. Stochast X is het aantal fietsers dat zonder verlichting fietst.

a Bereken de kans op maximaal 100 fietsers die zonder verlichting fietsen met de binomiale verdeling.

b Benader dezelfde kans met de normale verdeling.

c Welke manier heeft je voorkeur en waarom?

Als stochast X binomiaal verdeeld is geldt:
$E(X) = n \cdot p$

$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$

© Noordhoff Uitgevers bv

27 Op een dag maakt bakker Klomp 400 broden. Het gewicht van de broden in grammen is Norm(805, 30)-verdeeld.

a Bereken hoeveel broden meer dan 850 gram zullen wegen.

b Hoeveel gram maximaal wegen de 15% lichtste broden?

c Bereken het gewicht van de 30% broden waarvan het gewicht het dichtst bij het gemiddelde zit.

d Op welk gemiddelde gewicht moet de bakker zijn machine instellen om het voor elkaar te krijgen dat 5% van de lichtste broden maximaal dan 780 gram wegen?

e Op een andere dag is het gemiddelde gewicht van de broden 850 gram. Van zo'n 12% van de broden is het gewicht maximaal 780 gram.
Hoeveel gram is op deze dag de standaardafwijking?

28 Philip teelt diverse vruchten en maakt hier jam van. De potjes jam verkoopt hij in een stalletje aan de weg. Omdat Philip de jam in kleine hoeveelheden produceert, is er een vrij grote spreiding in het percentage vruchten. Het percentage vruchten in de aardbeienjam is normaal verdeeld met een gemiddelde van 38,7 en een standaardafwijking van 3,2.
Jam mag volgens de Warenwet pas jam heten, als het voor minstens 35% uit vruchten bestaat.

a Bereken hoeveel procent van de potjes aardbeienjam eigenlijk geen jam mogen heten.

b Als er minstens 45% vruchten in een potje zit, dan mag je het 'extra jam' noemen.
Hoeveel procent van de potjes aardbeienjam zou Philip kunnen verkopen als 'extra jam'?

c Het percentage vruchten in de kruisbessenjam is normaal verdeeld met een gemiddelde van 37,3 procent. Zo'n 9% van de potjes bevat minder dan het voorgeschreven minimaal percentage vruchten.
Bereken de standaardafwijking.

29 Het aantal paperclips in doosjes is bij benadering Norm(202,3; 1,4)-verdeeld.

a Hoe groot is de kans dat een willekeurige doosje de volgende aantallen paperclips bevat?
A minimaal 200 paperclips
B precies 200 paperclips
C tussen 199 paperclips en 205 paperclips

b De fabrikant neemt een steekproef van 16 doosjes.
Hoe groot is de kans dat alle doosjes tussen 199 paperclips en 205 paperclips bevatten?

c Bereken de kans dat in de 16 doosjes gemiddeld minimaal 202 paperclips zitten.

© Noordhoff Uitgevers bv

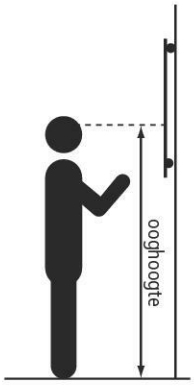
30 De firma RAB verhuurt fietsen. Het verhuurbedrijf is elke dag open. De huurprijs is € 11,- per fiets per dag. Elke fiets, verhuurd of niet, kost de RAB € 2,- per dag aan vaste kosten. Als een fiets verhuurd wordt, komt daar per dag € 1,- aan kosten voor onderhoud en reparatie bij. RAB beschikt over 195 fietsen. Uit de administratie blijkt dat de vraag naar fietsen normaal verdeeld is met gemiddeld 186 fietsen per dag en een standaardafwijking van 37 fietsen per dag.

a Toon aan dat op ongeveer 40% van de dagen ten minste één klant teleurgesteld moest worden omdat alle fietsen verhuurd zijn.

b Als RAB één fiets meer zou hebben, dan zou dus op 40% van de dagen € 8,- meer winst behaald zijn en op 60% van de dagen € 2,- minder winst.
Onderzoek hoeveel euro extra winst RAB met deze 196e fiets dit jaar zou hebben gehaald. Ga uit van 365 dagen in een jaar.

31 In een katoenfabriek wikkelen twee machines steeds linnen op een rol. Op een rol moet 400 meter linnen komen. Bij beide machines wordt een steekproef genomen.
Bij machine A bevat 7% van de rollen minder dan 400 meter linnen en is de standaardafwijking is 1,3 meter.
Bij machine B bevat 6% van de rollen minder dan 400 meter linnen en is het gemiddelde is 400,2 meter.
Onderzoek of de machine die gemiddeld het minste linnen op een rol wikkelt ook de machine is die het nauwkeurigst is.

32 Om goed in de spiegel te kunnen kijken, moet de spiegel zo zijn opgehangen dat de onderkant minstens 12 cm beneden de ooghoogte en de bovenkant minstens 12 cm boven de ooghoogte zit. De ooghoogte van volwassen mensen in Nederland is normaal verdeeld met een gemiddelde van 159,4 cm en een standaardafwijking van 9,0 cm.
Onderzoek hoe hoog een spiegel minstens moet zijn zodat deze zo opgehangen kan worden dat hij voor de middelste 90% van de volwassen Nederlanders goed hangt.



© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheid

Je kunt bij een normaal verdeelde stochast een percentage of een kans berekenen.

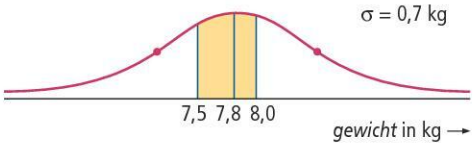
1. Teken zo nodig een klokvorm en geef daarin de bekende waarden aan.
2. Geef de grenzen aan en arceer het bedoelde gebied. Als een gebied onder de klokvorm geen linkergrens heeft, dan voer je als linkergrens het getal -10^{99} in. Heeft een gebied geen rechtergrens, dan neem je 10^{99} als rechtergrens.
3. Bereken met je rekenmachine de gevraagde kans.

Voorbeeld 1

Het gewicht in kg van zakken cementpoeder is Norm(7,8; 0,7)-verdeeld.
Hoe groot is de kans dat een willekeurige zak cementpoeder tussen de 7,5 en 8 kg weegt?

Oplossing

1
2



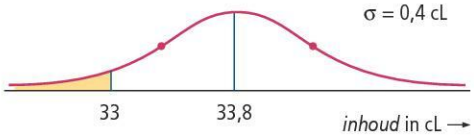
3 Optie: normaal cumulatief
ondergrens = 7,5
bovengrens = 8,0
$\mu = 7{,}8$
$\sigma = 0{,}7$
De kans is ongeveer 0,2783.

Voorbeeld 2

De inhoud in cL van een blikje fris is Norm(33,8; 0,4)-verdeeld.
Hoe groot is de kans dat een willekeurig blikje minder dan 33 cL bevat?

Oplossing

1
2



3 Optie: normaal cumulatief
ondergrens = -10^{99}
bovengrens = 33
$\mu = 33{,}8$
$\sigma = 0{,}4$
De kans is ongeveer 0,0228.

S1 De jaarlijkse hoeveelheid neerslag in mm in een polder is Norm(830, 60)-verdeeld.

- **a** Bereken in hoeveel procent van de jaren tussen de 800 mm en 915 mm neerslag valt.
- **b** Hoe groot is de kans dat in een willekeurig jaar meer dan 850 mm neerslag valt?
- **c** Bereken de kans dat in een willekeurig jaar minder dan 800 mm neerslag valt.
- **d** Bereken de kans dat in twee willekeurige jaren na elkaar in beide jaren minder dan 800 mm neerslag valt.

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheid

Je kunt een grenswaarde berekenen bij een gegeven kans van een normaal verdeelde stochast.

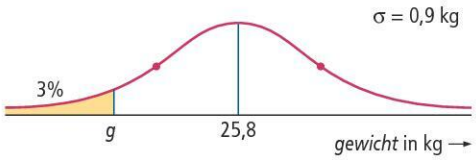
1 Teken zo nodig een klokvorm en geef daarin het gemiddelde en de standaardafwijking aan.
2 Arceer het gegeven gebied en geef de kans die bij het gebied hoort.
3 Bereken met je rekenmachine de gevraagde grenswaarde.

Voorbeeld 1

Het gewicht in kg van zakken split is Norm(25,8; 0,9)-verdeeld.
Hoeveel kg split zit er maximaal in de 3% minst gevulde zakken?

Oplossing

1
2



3 Invoer: y_1 = normaal cum. $(-10^{99}, x; 25{,}8; 0{,}9)$
$y_2 = 0{,}03$
Venster: $23 \leq x \leq 26$, $0 \leq y \leq 0{,}06$
Optie: snijpunt
De coördinaten van het snijpunt zijn (24,11; 0,03).
In deze zakken split zit maximaal 24,1 kg.

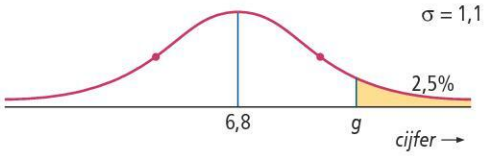
Voorbeeld 2

Het cijfer voor een examen Duits is Norm(6,8; 1,1)-verdeeld. Het examen is door 120 leerlingen gemaakt.
Welk cijfer halen de beste drie leerlingen minstens voor dit examen?

Oplossing

1 3 van de 120 is $3 : 120 \cdot 100\% = 2{,}5\%$.

2



3 Invoer: y_1 = normaal cum. $(x; 10^{99}; 6{,}8; 1{,}1)$
$y_2 = 0{,}025$
Venster: $7 \leq x \leq 9$, $0 \leq y \leq 0{,}1$
Optie: snijpunt
De coördinaten van het snijpunt zijn (8,96; 0,025).
Deze leerlingen haalden minstens een 9,0.

S2 Het gewicht in grammen van 800 potten appelmoes is Norm(284,6; 2,8)-verdeeld.
a Hoeveel gram wegen de zwaarste 4% potten appelmoes?
b En hoeveel gram wegen de lichtste 20 potten appelmoes?
c Tussen welke grenzen ligt het gewicht van de middelste 6% potten appelmoes?

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheid

Je kunt een gemiddelde of standaardafwijking berekenen bij een gegeven kans van een normaal verdeelde stochast.

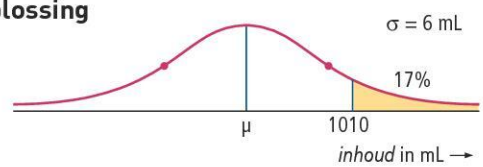
1 Teken zo nodig een klokvorm en geef daarin de bekende waarden aan.
2 Arceer het gegeven gebied en geef de kans die bij het gebied hoort.
3 Voer de gegevens in je rekenmachine in en bereken het gemiddelde of de standaardafwijking.

Voorbeeld 1

De inhoud van pakken vla is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 6 mL.
17% van de pakken bevat meer dan 1010 mL.
Bereken het gemiddelde.

Oplossing

1
2



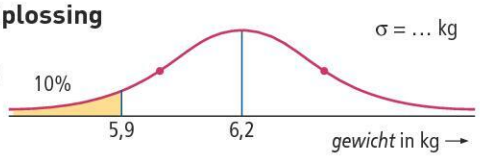
3 Invoer: y_1 = normaal cum. (1010, 10^{99}, x, 6)
$y_2 = 0{,}17$
Venster: $1000 \leq x \leq 1010$, $0 \leq y \leq 0{,}2$
Optie: snijpunt
De coördinaten van het snijpunt zijn (1004,3; 0,17).
Het gemiddelde is ongeveer 1004,3 mL.

Voorbeeld 2

Het gewicht van een bepaald type terrastegel is normaal vedeeld met een gemiddelde van 6,2 kg.
10% van de tegels is lichter dan 5,9 kg.
Bereken de standaardafwijking.

Oplossing

1
2



3 Invoer: y_1 = normaal cum. (10^{99}, 5,9; 6,2; x)
$y_2 = 0{,}1$
Venster: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 0{,}2$
Optie: snijpunt
De coördinaten van het snijpunt zijn (0,234; 0,1).
De standaarafwijking is ongeveer 0,23 kg.

S3 Van twee merken suiker is het gewicht van een pak in grammen van elk merk normaal verdeeld.

a Van merk A is het gemiddelde gewicht van de pakken 1002,7 gram en is slechts 8% van de pakken lichter dan 1000 gram.
Bereken de standaardafwijking van de pakken suiker van merk A.

b Van merk B is de standaardafwijking van het gewicht van de pakken suiker 1,3 gram. Van dit merk zijn 120 van de 500 pakken zwaarder dan 1005 gram.
Bereken het gemiddelde gewicht van de pakken suiker van merk B.

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheid

Je kunt de normale verdeling gebruiken om een discrete stochast te benaderen.

Als de verdeling van een discrete stochast X klokvormig is, dan kan de verdeling van X worden benaderd door de verdeling van de continue stochast Y die normaal verdeeld is met hetzelfde gemiddelde en dezelfde standaardafwijking als X.

Voorbeeld 1

Het aantal bloemkolen dat een groenteman per dag verkoopt, is bij benadering Norm(21,3; 5,7)-verdeeld.
Bereken de kans dat hij op een willekeurige dag meer dan 20 maar maximaal 25 bloemkolen verkoopt.

Oplossing

Het aantal bloemkolen X is een discrete stochast die benaderd kan worden door een continue stochast Y die Norm(21,3; 5,7)-verdeeld is.
De gevraagde kans is $P(20 < X \leq 25)$ en benader je met $P(20{,}5 \leq Y < 25{,}5)$.
Invoeren in de rekenmachine geeft
$P(20{,}5 \leq Y < 25{,}5) \approx 0{,}3252$.
De gevraagde kans is ongeveer 0,3252.

Voorbeeld 2

Het aantal behaalde punten op een examen is bij benadering Norm (43,6; 10,7)-verdeeld
Bereken de kans dat een willekeurige leerling minstens 50 punten haalt.

Oplossing

Het aantal behaalde punten X is een discrete stochast die benaderd kan worden door de continue stochast Y die Norm(43,6; 10,7)-verdeeld is.
De gevraagde kans is $P(X \geq 50)$ en benader je met $P(Y \geq 49{,}5)$.
Invoeren in de rekenmachine geeft
$P(Y \geq 49{,}5) \approx 0{,}2907$.
De gevraagde kans is ongeveer 0,2907.

S4 Het aantal snoepjes in de zakken is bij benadering Norm(83,6; 2,4)-verdeeld.
Hoe groot is de kans dat in een willekeurige zak de volgende aantallen snoepjes zitten?

a maximaal 85 snoepjes
b minimaal 82 snoepjes
c precies 85 snoepjes
d minstens 83 snoepjes maar niet meer dan 86 snoepjes

© Noordhoff Uitgevers bv

T1 De zuurgraad van vloeistoffen wordt aangegeven met de pH-waarde. Bij mensen is de pH-waarde van het bloed Norm(7,4; 0,15)-verdeeld.

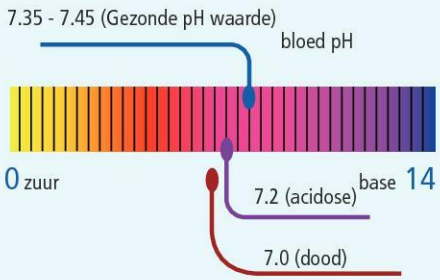
a Bereken het percentage mensen met een gezonde pH-waarde van het bloed, dus tussen 7,35 en 7,45.

b Bij hoeveel procent van de mensen zal het bloed een pH-waarde hebben van meer dan 7,35?

c Welke maximale pH-waarde hebben de 6% mensen met de laagste pH waarde?

d En welke pH-waarde kunnen de mensen hebben die behoren bij de 3% mensen met de hoogste pH-waarde?

e Een groep van 67 mensen ondergaat een medische keuring. Hoeveel van deze mensen hebben naar verwachting een pH-waarde kleiner dan 7,25?



T2 Blikken limonadesiroop worden gevuld door een machine. Het volume van de siroop is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 4,3 mL.

a Bereken bij welk gemiddeld volume geldt dat 8% van de blikken minder dan 750 mL bevat.

b Bereken de waarden van het gemiddelde waarbij het volume van de siroop in 90% van de blikken tussen 745 mL en 760 mL ligt.

c Neem aan dat het gemiddelde wordt ingesteld op 750 mL en dat door betere afstelling de vulmachine nauwkeuriger kan werken.
Bereken bij welke standaardafwijking geldt dat het volume van de siroop in 90% van de blikken tussen 745 mL en 760 mL ligt.

T3 Het gewicht in grammen van pennywafels is Norm(16,1; 0,8)-verdeeld.

a Bereken de kans dat een willekeurige pennywafel meer dan 15 gram weegt.

b Bereken de kans dat twee willekeurige pennywafels elk meer dan 15 gram wegen.

c Pennywafels worden verkocht in pakjes van acht stuks. Op de verpakking staat dat de inhoud 125 gram is.
Bereken de kans dat een willekeurig gekozen pakje met acht wafels minder dan de vermelde 125 gram weegt.

d Het gewicht in grammen van spritsen is Norm(21,7; 1,1)-verdeeld. Sonja neemt elke dag één pennywafel en twee spritsen mee naar school.
Bereken de kans dat ze op een willekeurige dag minstens 60 gram aan koekjes bij zich heeft.

© Noordhoff Uitgevers bv

T4 Op kilopakken suiker treft men op het etiket de tekst '1000g e' aan. Deze e (van estimate) betekent dat de fabrikant zich bij het vullen van het pak onder andere heeft gehouden aan de volgende EU-norm: ten hoogste 2% van de kilopakken mag een ondergewicht hebben van meer dan 15 gram. Een fabrikant heeft een machine die pakken suiker vult met een gemiddelde van 1003 gram en een standaardafwijking van 12 gram. Het gewicht van de pakken suiker is normaal verdeeld.

a Voldoet deze fabrikant aan de EU-norm?

b De fabrikant wil weten op welk gemiddelde hij zijn machine minimaal moet instellen om aan de norm te voldoen.
Bereken dat gemiddelde.

c De fabrikant van de pakken suiker besluit een nieuwe machine aan te schaffen die nauwkeuriger vult. Hij wil een zodanige standaardafwijking dat hij de machine kan instellen op een gemiddelde van 1003 gram om aan de EU-norm te voldoen.
Bereken waaraan de standaardafwijking van de nieuwe machine moet voldoen.

T5 De spiegelkarper heeft een erfelijk schubbenpatroon met schubben van verschillende grootte. Het aantal schubben is bij benadering Norm(82, 4)-verdeeld.

a Bereken de kans dat een willekeurig exemplaar minder dan 75 schubben heeft.

b Bereken de kans dat een willekeurig exemplaar tussen de 80 en 85 schubben heeft.

c Tussen welke aantallen ligt het aantal schubben van de middelste 90% van de populatie?

d Hoe groot is de kans dat tien willekeurige spiegelkarpers samen minder dan 800 schubben hebben?

T6 Een machine kan worden gebruikt om verpakkingen van verschillend volume te vullen. Het blijkt dat de standaardafwijking niet constant is, maar afhangt van het ingestelde vulgewicht volgens de formule $\sigma = 1{,}21 + 0{,}04 \cdot \mu$. De inhoud van de verpakking is bij elk ingesteld vulgewicht normaal verdeeld.

a De machine wordt ingesteld op 103 gram.
Bereken hoeveel procent van de verpakkingen minder dan 100 gram bevat.

b Er moeten verpakkingen van 350 gram worden gevuld.
Bereken het ingestelde vulgewicht waarvoor geldt dat 2% van de verpakkingen minder dan 350 gram bevat.

© Noordhoff Uitgevers bv

Je kunt bij een normaal verdeelde stochast een percentage of een kans berekenen.

E1 De lengte in centimeters van volwassen Nederlandse mannen is Norm(180,7; 7,1)-verdeeld.

a Hoeveel procent van de volwassen Nederlandse mannen heeft een lengte tussen 180 cm en 190 cm?

b Een gangbare hoogte voor deuropeningen in Nederland is 203 cm.
In Nederland wonen ruim 6,5 miljoen volwassen mannen.
Hoeveel mannen moeten naar verwachting bukken als ze door zo'n deur gaan? Rond je antwoord af op duizendtallen.

Je kunt een grenswaarde berekenen bij een gegeven kans van een normaal verdeelde stochast.

E2 De lengte in centimeters van volwassen Nederlandse vrouwen is Norm(167,6; 6,5)-verdeeld.

a Bereken de minimale lengte van de 25% langste vrouwen van Nederland. Rond je antwoord af op hele centimeters.

b Welke lengte kunnen de 7% kleinste vrouwen van Nederland hebben?

Je kunt een gemiddelde of standaardafwijking berekenen bij een gegeven kans van een normaal verdeelde stochast.

E3 **a** Het gewicht van broden is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 30 gram. De kans dat een willekeurig brood zwaarder is dan 850 gram, mag niet meer dan 1% zijn.
Bereken het maximale gemiddelde gewicht van deze broden.

b De dikte van de pennen die een machine produceert, is normaal verdeeld met een gemiddelde van 6 mm. Pennen die dunner zijn dan 5,90 mm en pennen die dikker zijn dan 6,05 mm zijn onbruikbaar.
De fabriek wil dat hoogstens 1% van de pennen onbruikbaar is.
Bereken de maximaal toegestane waarde van de standaardafwijking.

Je kunt de normale verdeling gebruiken om een discrete stochast te benaderen.

E4 Het aantal dropjes in zakjes Simpsonsdrop is bij benadering Norm(47,2; 3,7)-verdeeld.

a Bereken de kans dat in een willekeurig zakje 52 dropjes zitten.

b Bereken de kans dat in een willekeurig zakje minstens 50 dropjes zitten.

c Liza koopt vijf willekeurige zakjes Simpsonsdrop.
Bereken de kans dat zij in totaal minstens 250 dropjes heeft.

© Noordhoff Uitgevers bv

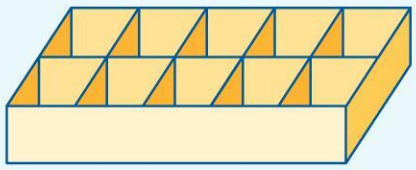
E5 In een ziekenhuis is het duur om elke lamp die defect is direct te vervangen. Het blijkt in de praktijk goedkoper te zijn om op een bepaald moment alle lampen, ook die het nog doen, tegelijk te vervangen. De plafondlampen in de gangen van het ziekenhuis hebben een gemiddelde levensduur van 3500 uur met een standaardafwijking van 400 uur. De levensduur is normaal verdeeld.

a Hoe groot is de kans dat een willekeurige lamp na 3000 uur defect is?

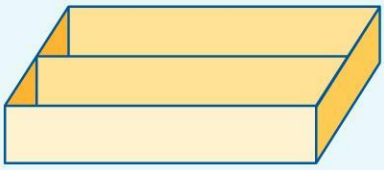
b De technische dienst wil de lampen gaan vervangen als 15% defect is.
Bereken om de hoeveel tijd de lampen moeten worden vervangen.

c De directie overweegt om over te stappen op LED-lampen. Deze lampen zijn veel duurder, maar ze hebben een levensduur van gemiddeld 30 000 uur met een standaardafwijking van 2500 uur. Vervanging is nodig als 10% van de lampen defect is.
Bereken hoeveel keer zo duur een LED-lamp mag zijn zodat de vervangingskosten even hoog zijn als bij traditionele lampen.

E6 Een bollenkweker heeft een grote partij bijzondere bollen die hij wil verpakken in rechthoekige dozen. De bollen zijn nagenoeg bolvormig. De diameter in cm van de bollen is Norm(10; 0,8)-verdeeld.
Er zijn twee typen dozen om de bollen in te verpakken.
Doos 1 is 60 cm bij 24 cm bij 12 cm en is verdeeld in tien kubusvormige vakjes. Doos 2 is 55 cm bij 24 bij 12 cm en is verdeeld in twee langwerpige vakken.



1



2

a Bereken de kans dat een willekeurig gekozen bloembol een diameter heeft die groter is dan 12 cm. Rond je antwoord af op vier decimalen.

b Bereken de kans dat een willekeurig tiental bollen in doos 1 past.

c In doos 2 moeten in beide vakjes telkens 5 bollen op een rij komen. Als je alleen let op de lengte van de rij, hoe groot is dan de kans dat een willekeurig vijftal bollen in een vakje van doos 2 past?

d De bollenkweker wil dat de afmetingen van doos 2 vrijwel geen belemmering vormen bij het verpakken van de bollen. Onderzoek wat meer zin heeft om te vergroten, de lengte of de breedte van de doos.

© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

Perspectief 16

SE CE K

In dit hoofdstuk

In hoofdstuk 8C heb je naar aanzichten, symmetrie en inhouden van ruimtelijke objecten gekeken.

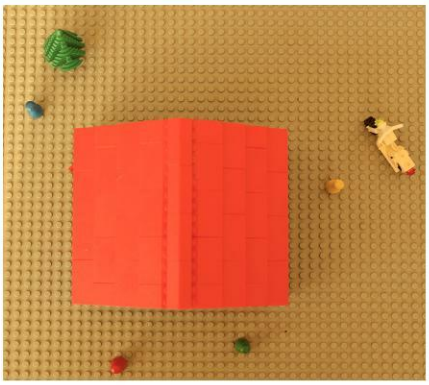
In dit hoofdstuk ga je objecten tekenen. Je leert eerst wat centrale projectie en wat een tafereel is. Bij het tekenen op een tafereel maak je een perspectieftekening. Hiervoor gebruik je een verdwijnpunt. Dit punt ligt op de horizon. Je leert hoe je een eenpuntsperspectieftekening maakt. Veel kunstenaars maken hiervan gebruik.

In deel 4 leer je meer over perspectief. Daar leer je ook hoe je een object in tweepuntsperspectief tekent.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk:

- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 16
- *Abstraheren* opdracht 20
- *Logisch redeneren en bewijzen* opdracht 24

© Noordhoff Uitgevers bv



V1 Op de foto's zie je een viertal pionnetjes rondom een legohuisje. De pionnetjes stellen personen voor.

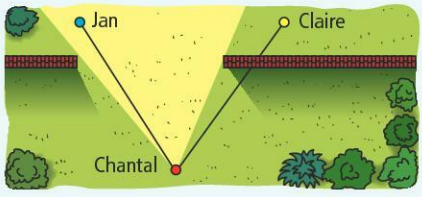
a Of de gele en groene persoon elkaar kunnen zien, kun je op grond van de linkerfoto niet met zekerheid concluderen. De rechterfoto, die van boven is genomen, verschaft meer duidelijkheid.
Ga na of de gele en groene persoon elkaar kunnen zien.

b Kunnen de rode en blauwe persoon elkaar zien?

c Door wie kan de motor geheel of gedeeltelijk gezien worden?

Theorie

Een **kijklijn** is een lijn waarlangs je kijkt. Om vast te stellen of iemand een object kan zien, kun je in een bovenaanzicht een lijn trekken van die persoon naar het object. In de tekening zie je dat Chantal Jan wel kan zien. Omdat de kijklijn van Chantal naar Claire wordt onderbroken door een muur, kan Chantal Claire niet zien. Met behulp van kijklijnen kun je een gebied aangeven dat je kunt zien. Het gele gebied in de tekening is het gebied dat Chantal tussen de muurtjes door kan zien.



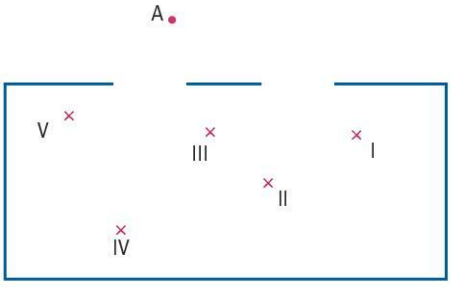
V2 W Persoon A staat voor een gebouw met twee ramen. In het gebouw staan de objecten I tot en met V.

a Kan persoon A object I zien?

b Welke objecten ziet A niet?

c Arceer het gebied binnen het gebouw dat A kan zien.

d Arceer het gebied buiten het gebouw waar A zou kunnen staan om zowel object I als II te kunnen zien.



© Noordhoff Uitgevers bv

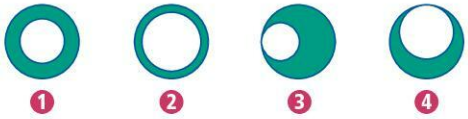
V3 **a** Op de hoogte van welke traptrede bevond zich de lens, ook wel het oog van de camera genoemd, bij het maken van de foto? Licht je antwoord toe.

b Maak een schatting van de hoogte van de lens van de camera ten opzichte van de grond bij deze foto. Leg uit hoe je aan je antwoord komt.

V4 Op de foto zie je een aantal ronde buizen.

a Waar ongeveer bevond zich de lens van de camera? Licht je antwoord toe.

b Je kunt de lichtopening aan het eind van de buis op verschillende manieren ten opzichte van de voorkant zien. Je ziet in een viertal situaties vier manieren.



In welk van de situaties 1 en 2 bevindt het oog zich op grotere afstand van de opening?

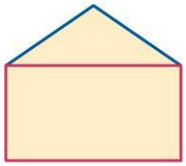
c Beschrijf waar in situatie 3 het oog zich bevindt ten opzichte van de buis.

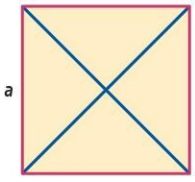
d En waar in situatie 4?

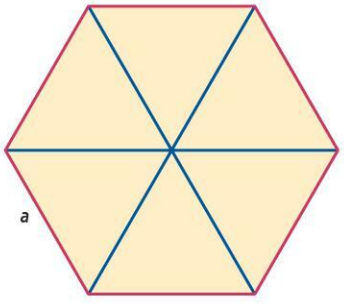
V5 In de linkerfiguur staat een zijaanzicht van een tuinhuisje. Aan dit zijaanzicht kun je niet zien of het tuinhuisje vierhoekig of zeshoekig is. In de middelste figuur zie je het bovenaanzicht van een vierhoekig tuinhuisje. In de rechterfiguur zie je het bovenaanzicht van een zeshoekig tuinhuisje.

a Arceer in de middelste figuur het gebied waar een fotograaf moet staan om op een foto alleen muur *a* te zien.

b Doe hetzelfde in de rechterfiguur.







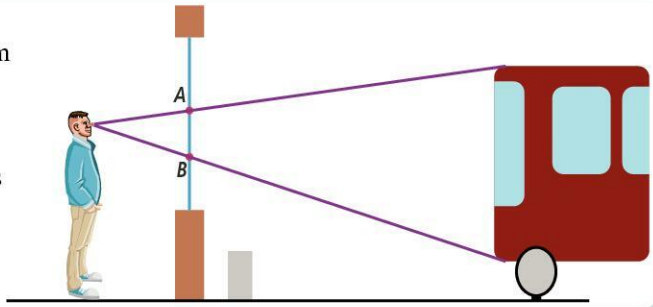
© Noordhoff Uitgevers bv

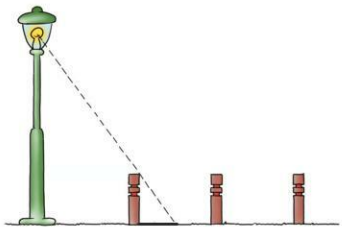
16.1 Centrale projectie

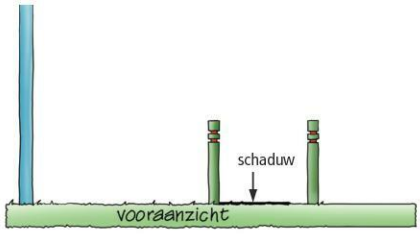
Je leert
- wat centrale projectie is

Leerroutes
- ondersteunend: 1—2—3—4—O5—6—7
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7
- uitdagend: 1—2—4—5—6—7—U1

Nico kijkt door een raam naar buiten. Hij ziet een bus naar hem toe rijden die net voor het raam wil parkeren. Nico's kijklijnen naar de onder- en bovenkant van de bus snijden als het ware het raam in de punten A en B.
- Wat gebeurt er met de afstand tussen A en B als de bus nog dichter bij het raam komt?




schaduw



1 Drie even hoge paaltjes worden 's nachts door een lantaarn beschenen. In de linkertekening is in een vooraanzicht het schaduwbeeld van één paaltje getekend.

a Teken in dit vooraanzicht het schaduwbeeld van de andere twee paaltjes.

b Zijn de schaduwen van alle drie de paaltjes even lang?

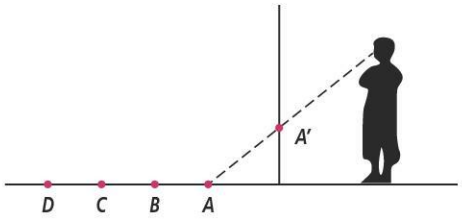
c In de rechtertekening zie je een schijnwerper in de buurt van twee palen. In het vooraanzicht is het schaduwbeeld van de linkerpaal getekend.
Teken in het vooraanzicht de lamp op de juiste hoogte.

d Teken ook het schaduwbeeld van de rechterpaal.

e Een derde paal wordt halverwege de lamp en de eerste paal geplaatst. Deze paal is niet even lang als de andere twee. De schaduw van deze paal is wel net zo lang als de schaduw van de linkerpaal.
Teken de derde paal met de juiste hoogte.

© Noordhoff Uitgevers bv

2 Johan staat voor een raam en kijkt naar een viertal stenen die op gelijke afstand van elkaar liggen. Piet tekent met een viltstift op het raam zoals Johan de stenen ziet.
In het zijaanzicht van de situatie zijn de stenen aangegeven door de punten A, B, C en D.



a De plek van steen A op het raam is punt A'.
Teken de plek van de stenen B, C en D op het raam.

b A, B, C en D liggen op gelijke afstanden van elkaar.
Hoe zit dat met de punten A', B', C' en D'?

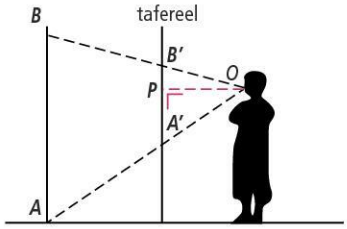
c Teken de lijn vanuit het oog van Johan loodrecht op het raam. Het snijpunt van deze lijn met het raam is punt P.
Leg uit dat, hoever een steen ook ligt, Johan deze altijd lager dan het punt P ziet.

Theorie

Het schaduwbeeld bij lamplicht en het tekenen van een voorwerp op een glasplaat zoals dat in opdracht 2 gebeurt, zijn voorbeelden van **centrale projectie**.
De lamp is het **centrale punt** of het **oog**.
De glasplaat staat tussen het oog en het voorwerp en wordt het **tafereel** of **tekenvlak** genoemd. De loodrechte projectie van het oog op het tafereel heet het **oogpunt**. De tekening die op het tafereel ontstaat, heet het **beeld**. Het beeld is hoe het oog het voorwerp waarneemt.

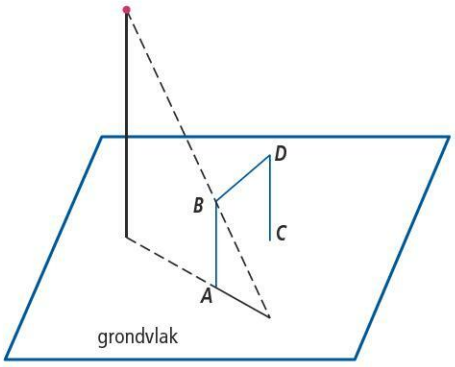
Voorbeeld

In de tekening is punt O het centrale punt. Het tafereel is tussen de persoon en de paal getekend. Het oogpunt is punt P.
Het beeld van AB op het tafereel is $A'B'$.



3 Wordt het beeld $A'B'$ in het voorbeeld twee keer zo groot als de afstand van het oog tot het tafereel twee keer zo groot wordt? Leg je antwoord uit met een tekening.

4 H Een hekje staat in de buurt van een lantaarn. De twee staanders AB en CD van het hekje zijn even lang en staan verticaal.
In de tekening van de situatie is het schaduwbeeld van staander AB al getekend.



a Beschrijf hoe het schaduwbeeld van punt B is bepaald.

b Teken op dezelfde manier de schaduw van staander CD.

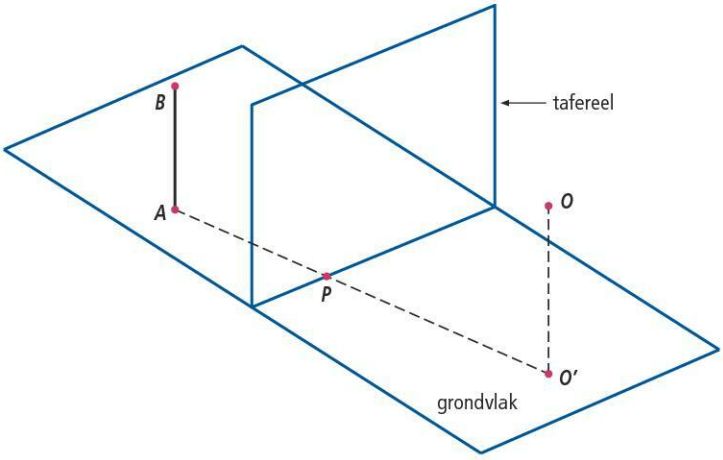
c Teken ook het schaduwbeeld van BD.

d Zijn BD en zijn schaduwbeeld even lang?

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende route → maak opdracht O5

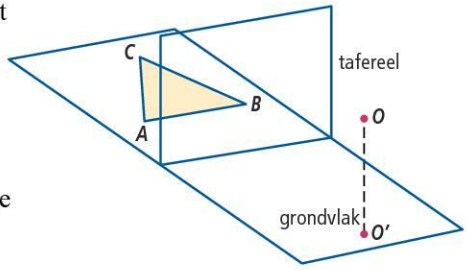
5 Een tafereel staat loodrecht op het grondvlak. Punt O is het oog en het punt O' is het punt op de grond zodat OO' evenwijdig is met lijnstuk AB en met het tafereel. Het snijpunt van de zogeheten grondlijn $O'A$ met het tafereel is het punt P. In deze opdracht ga je het beeld van lijnstuk AB op het tafereel tekenen.



a Het punt A', het beeld van A, ligt ook op de kijklijn OA. Waarom ligt het beeld van A ook op de lijn door P, loodrecht op het grondvlak?

b Teken nu de punten A', B' en het beeld van lijnstuk AB.

6 H W Gegeven is het driehoekige bord ABC waarvan het beeld op het tafereel moet worden getekend. De drie punten A, B en C liggen in het grondvlak.
Teken het beeld van de driehoek ABC op het tafereel.



7 W Deze opdracht gaat ook over het driehoekige bord ABC.
Nu liggen de punten A en B in het grondvlak en het driehoekige bord ABC is evenwijdig met het tafereel.

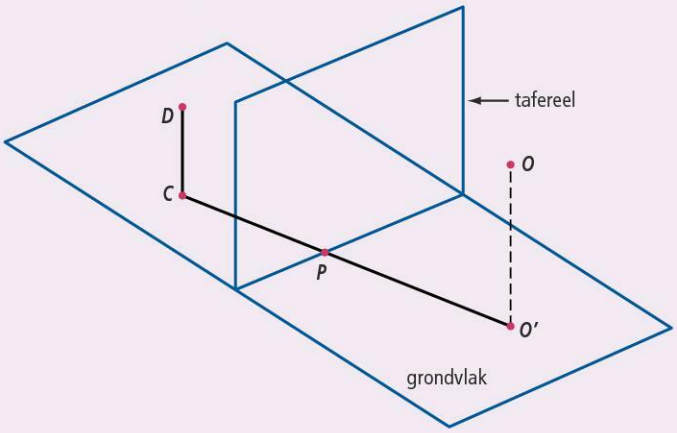
a Teken het beeld $A'B'C'$ van driehoek ABC op het tafereel.

b Welke zijden van driehoek $A'B'C'$ zijn evenwijdig met een zijde van driehoek ABC?

Uitdagende route → maak opdracht U1

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten



O5 Een tafereel staat loodrecht op het grondvlak. Lijnstuk CD staat ook loodrecht op het grondvlak. Punt O is het oog en punt O' is het punt op de grond zodat OO' evenwijdig is met lijnstuk CD en met het tafereel. Hierdoor staat OO' ook loodrecht op het grondvlak. In deze opdracht ga je het beeld van lijnstuk CD op het tafereel tekenen.

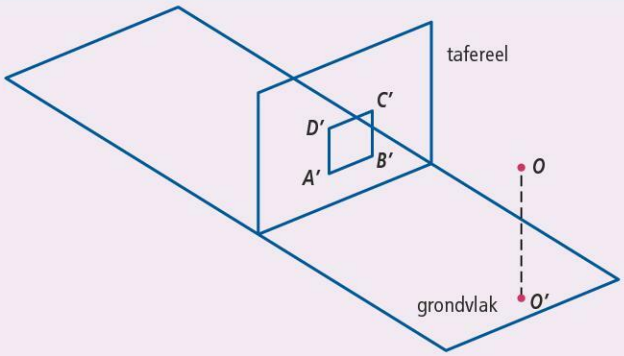
a Het snijpunt van de grondlijn $O'C$ met het tafereel is het punt P.
Teken een lijn door P, evenwijdig aan lijnstuk OO'.

b Het snijpunt van de kijklijn vanuit het oog naar punt D met de lijn die je in opdracht a hebt getekend, is het beeld D' van punt D op het tafereel.
Teken het beeld D'.

c Teken op dezelfde manier het beeld C' van punt C en teken het beeld $C'D'$.

Uitdagende opdrachten

U1 W Iemand ziet op het tafereel het beeld van een vierhoek $ABCD$ als een rechthoek $A'B'C'D'$. Vierhoek $ABCD$ ligt met de hoekpunten A en B in het grondvlak en is evenwijdig aan het tafereel.
Teken vierhoek $ABCD$.



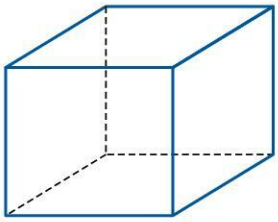
© Noordhoff Uitgevers bv

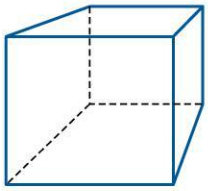
16.2 Perspectief

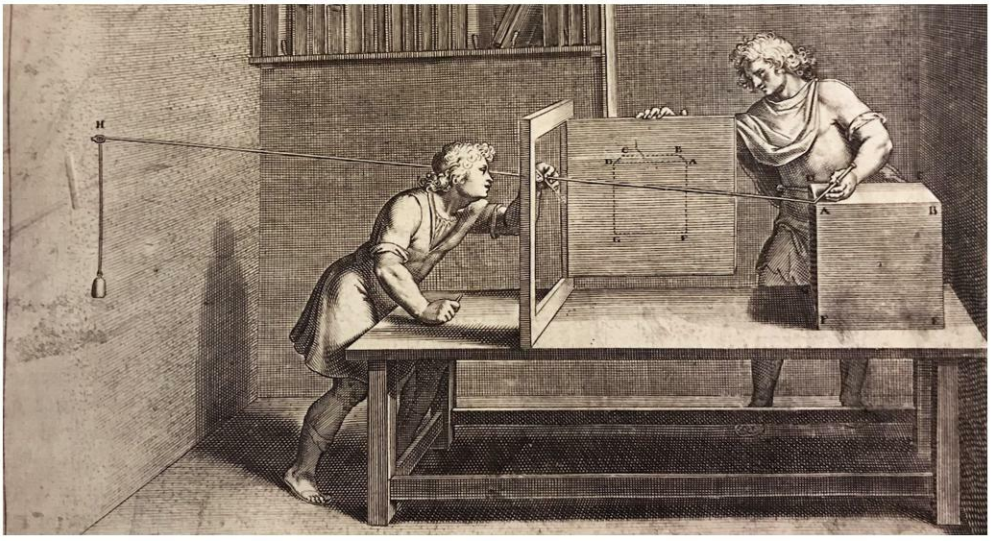
Je leert
- wat een perspectieftekening is
- wat een verdwijnpunt is

Leerroutes
- ondersteunend: 8—9—10—O11—12
- doorlopend: 8—9—10—11—12
- uitdagend: 8—9—11—12—U2

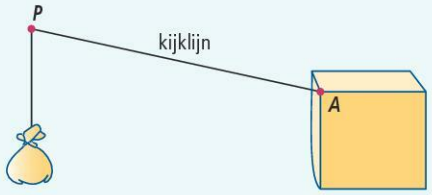
Van een balk zijn twee tekeningen gemaakt.
- Welke verschillen zijn er tussen de twee tekeningen?







In de prent van Simon de Caes (1576-1626) zie je hoe een kubus op een tafereel getekend wordt. Er is een touw gespannen van een punt P aan de muur naar een hoekpunt van de kubus. Dit punt P is het centrale punt van waaruit de kubus wordt bekeken. Wordt het touw met punt A verbonden, dan is het touw als het ware de kijklijn van punt P naar punt A. De man links legt vast waar het punt A van de kubus op het tafereel komt. Na het terugdraaien van het tafereel kan het punt worden ingetekend.



© Noordhoff Uitgevers bv

8 In de prent van Simon de Caes is een gedeelte van de kubus al op het tafereel getekend. Dit gedeelte is nogmaals getekend.

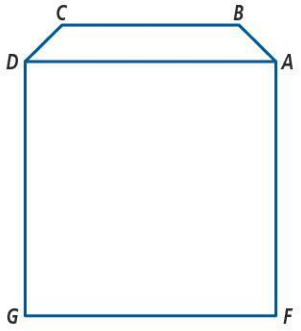
a Ga na dat de letters in de tekening overeenkomen met de letters bij de hoekpunten van de kubus op de prent.

b De voorkant $AFGD$ van de kubus is op het tafereel ook weer een vierkant omdat het vlak $AFGD$ evenwijdig is met het tafereel.
Waarom is de achterkant $BCHE$ ook evenwijdig aan het tafereel en wat is dus de vorm hiervan in de tekening?

c Teken nu met stippellijnen de achterkant $BCHE$.

d Verleng met dun getekende lijnen de ribben DC en AB tot ze elkaar snijden. Noem dit snijpunt V.

e Verleng de ribben GH en FE.
Controleer dat die ook door het punt V gaan.



Theorie

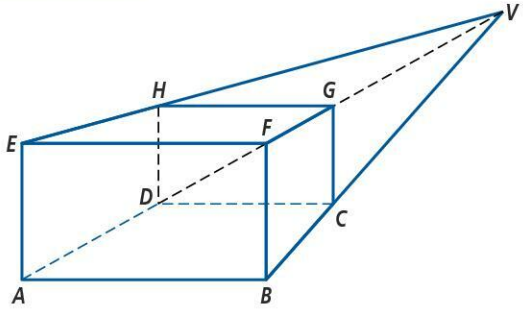
Een tekening zoals die in de prent van Simon de Caes wordt gemaakt, heet een perspectieftekening.
Een perspectieftekening is een manier om een ruimtelijk object te tekenen zoals je het in werkelijkheid ook ziet. Foto's zijn altijd in perspectief en de lens van de camera is het oog.

- In een perspectieftekening worden objecten die in werkelijkheid even groot zijn maar zich op ongelijke afstand van het oog bevinden, niet even groot afgebeeld. Het object dat verder weg ligt, wordt kleiner afgebeeld.
- Vlakdelen die evenwijdig zijn aan het tafereel, hebben in de tekening dezelfde vorm als in werkelijkheid.
- Lijnen die in werkelijkheid evenwijdig zijn, maar niet evenwijdig zijn aan het tafereel, snijden in een perspectieftekening elkaar in een zogeheten verdwijnpunt.

Voorbeeld 1

De spoorrails, die in werkelijkheid evenwijdig lopen, snijden elkaar op de foto in één punt, het verdwijnpunt.

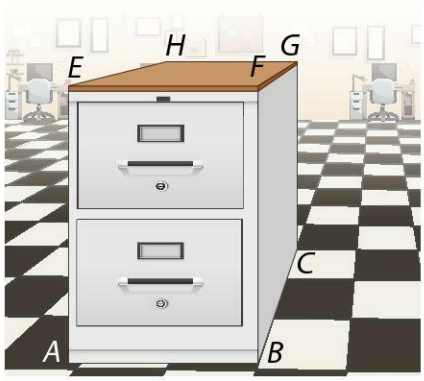
Voorbeeld 2



$ABFE$ en $DCGH$ zijn evenwijdig aan het tafereel en hebben dezelfde vorm als in werkelijkheid.
In de balk $ABCDE.EFGH$ zijn ribben AD, BC, FG en EH evenwijdig aan elkaar. In de perspectieftekening snijden ze elkaar in één punt, het verdwijnpunt V.

© Noordhoff Uitgevers bv

9 Op de tekening zie je een archiefkast. De archiefkast heeft de vorm van een balk. Bij de zichtbare hoekpunten zijn letters geplaatst.



a De voorkant van de archiefkast in de tekening heeft dezelfde vorm als in werkelijkheid.
Geldt dat ook voor de bovenkant?

b Walt valt je op als je naar de vloertegels kijkt die in werkelijkheid allemaal even grote vierkanten zijn?

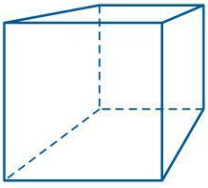
c De lijnen EH en FG zijn in werkelijkheid evenwijdig maar in de tekening niet.
Verleng EH en FG en teken hun snijpunt V.

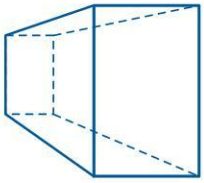
d Ga na dat BC na verlenging ook door punt V gaat.

10 De breedte van de archiefkast uit opdracht 9 is op de tekening groter dan de diepte van de archiefkast.
Hoe kan je aan de tegels zien dat in werkelijkheid de breedte juist kleiner is dan de diepte?

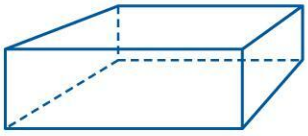
Ondersteunende route → maak opdracht O11

11 H Teken in de perspectieftekeningen van de balken het verdwijnpunt.





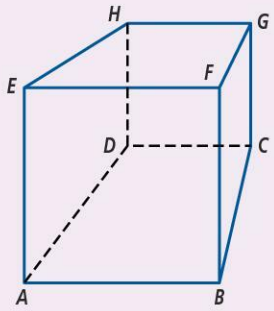
12 De tekening van de balk lijkt een perspectieftekening.
Laat zien dat dit niet het geval is.

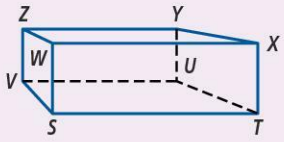


Uitdagende route → maak opdracht U2

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten





O11 Van twee balken waarvan de voorvlakken evenwijdig aan het tafereel zijn, is een perspectieftekening gemaakt.
Je wilt van beide balken het verdwijnpunt tekenen.

a Waarom zijn de ribben AD en BC in werkelijkheid evenwijdig?

b Omdat de lijnen AD en BC in werkelijkheid evenwijdig zijn, snijden elkaar in de perspectieftekening in het verdwijnpunt. Teken het verdwijnpunt P.

c Er zijn nog twee ribben die evenwijdig zijn aan de ribben AD en BC.
Laat zien dat als je deze ribben verlengt, ze ook door P gaan.

d Waarom snijden de lijnen EF en GH elkaar niet in de perspectieftekening?

e Vul in: bij balk $STUV.WXYZ$ zijn in werkelijkheid de ribben WX, …, … en … evenwijdig aan elkaar.

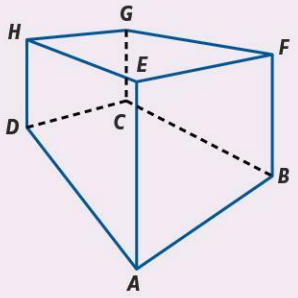
f Gebruik ribbe WZ om het verdwijnpunt van deze balk te tekenen.

Uitdagende opdrachten

U2 Van de balk $ABCD.EFGH$ is een perspectieftekening gemaakt waarbij er nu twee verdwijnpunten zijn.

a Teken deze verdwijnpunten.

b Waarom krijg je nu twee in plaats van één verdwijnpunt?



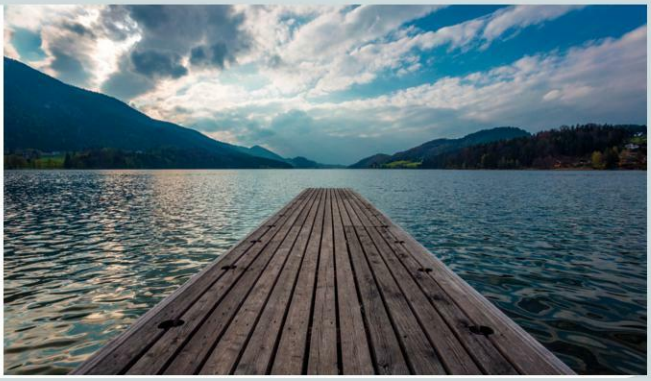
© Noordhoff Uitgevers bv

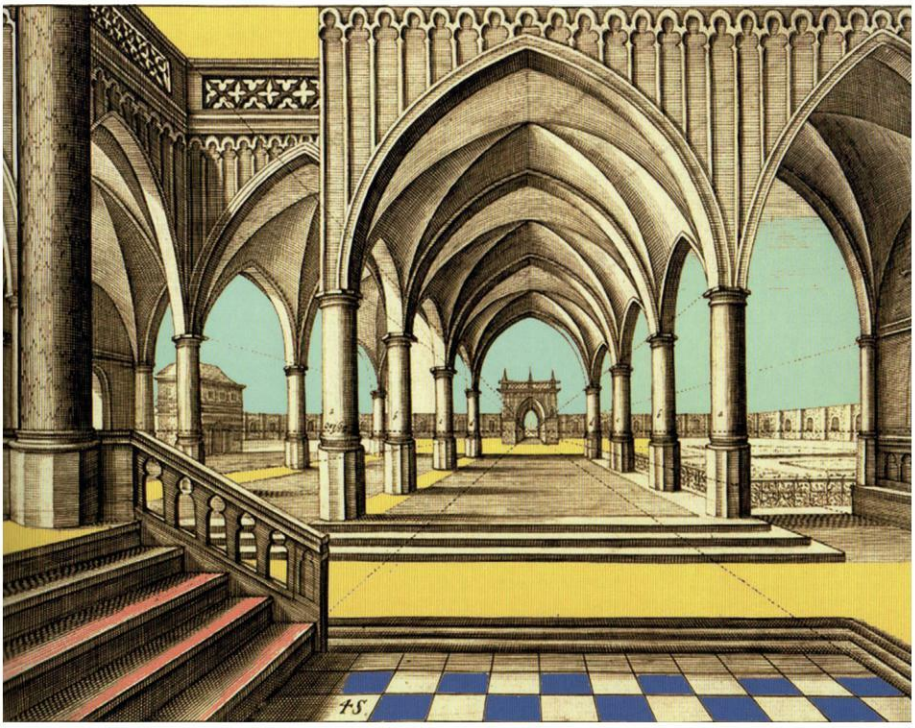
16.3 Eenpuntsperspectief

Je leert
- wat eenpuntsperspectief is

Leerroutes
- ondersteunend: 13—14—015—16—17
- doorlopend: 13—14—15—16—17
- uitdagend: 14—15—16—17—U3

Er is een foto van een houten steiger gemaakt. Op de foto is duidelijk de horizon te zien. De zijkanten van de houten planken lopen in de verte naar elkaar toe.
- Waar ligt het verdwijnpunt van de lijnen tussen de houten planken?



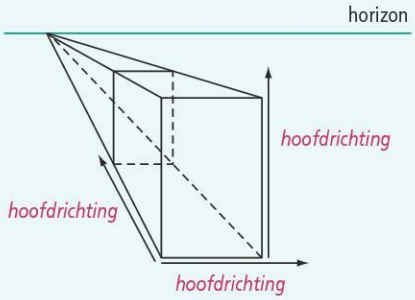


13 De perspectieftekening is van de Nederlandse architect en ingenieur Hans Vredeman de Vries (1527-1607). Iemand heeft hierin een aantal stippellijnen getekend met hetzelfde verdwijnpunt.
Teken nog twee stippellijnen met hetzelfde verdwijnpunt.

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie

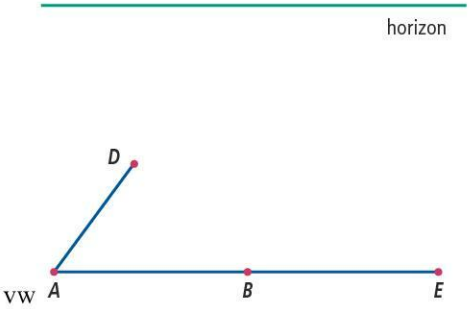
De tekening bij opdracht 13 is een tekening in **eenpuntsperspectief**. Veel schilders uit de 15e eeuw hebben dit in hun schilderijen toegepast.
De breedte, hoogte en diepte van een object heten de **hoofdrichtingen** van het object. Bij eenpuntsperspectief zijn twee hoofdrichtingen evenwijdig aan het tafereel, de andere hoofdrichting staat loodrecht op het tafereel. Alle lijnen loodrecht op het tafereel hebben hetzelfde verdwijnpunt.
De horizontale lijn door het verdwijnpunt heet de **horizon**.

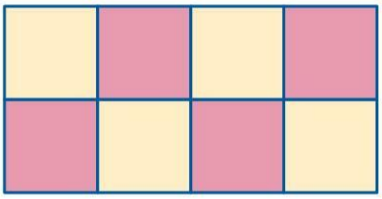


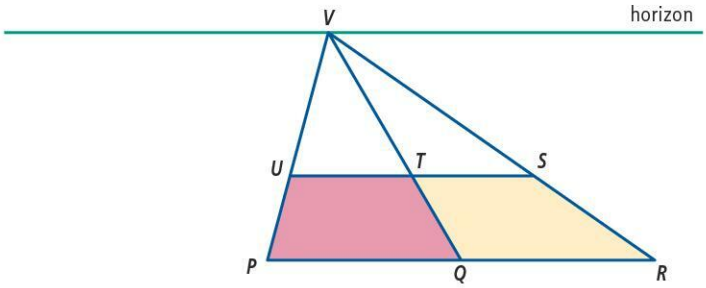
14 **a** Is in de tekening van Hans Vredeman de Vries de horizon al getekend?
b Geef van elk van de drie hoofdrichtingen in deze tekening twee voorbeelden.

Ondersteunende route → maak opdracht O15

15 H Hieronder is een begin gemaakt met een tekening in eenpuntsperspectief van een tweetal gelijke, naast elkaar liggende, rechthoekige vloertegels. Van de linker tegel met hoekpunten A, B, C en D zijn drie hoekpunten gegeven. Van de rechter tegel met hoekpunten B, E, F en C zijn de hoekpunten B en E gegeven.
a Teken met behulp van de lijn door de punten A en D het verdwijnpunt V.
b Waarom gaan de lijnen BC en EF ook door V?
c Welke zijden van de tegels zijn evenwijdig aan de horizon?
d Teken de lijnen BC en EF en de zijden van de tegels evenwijdig aan de horizon om de tekening af te maken.
e Teken een derde, even grote tegel, er aan de rechterkant bij.







16 In elke rij van een schaakbord staan acht even grote vierkante vakken naast elkaar. Een deel van het bovenaanzicht van een schaakbord is in de linkerfiguur getekend. Matty heeft in de rechterfiguur twee vakken van een schaakbord in perspectief getekend.

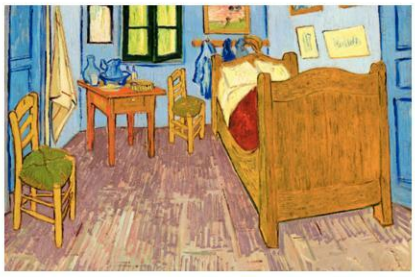
a Hoe is in werkelijkheid de onderlinge ligging van de diagonalen PT en SQ?

b Deze diagonalen zijn geen hoofdrichting.
Teken deze diagonalen, verleng ze en ga na dat ze elkaar op de horizon snijden.

c Waarom snijden de diagonalen QU en RT elkaar na verlenging ook op de horizon?

d Teken een vak van het schaakbord er aan de linkerkant bij.

e Teken de volgende rij van drie vakken van het schaakbord dichterbij de horizon. Maak daarbij gebruik van de eigenschap van de diagonalen.

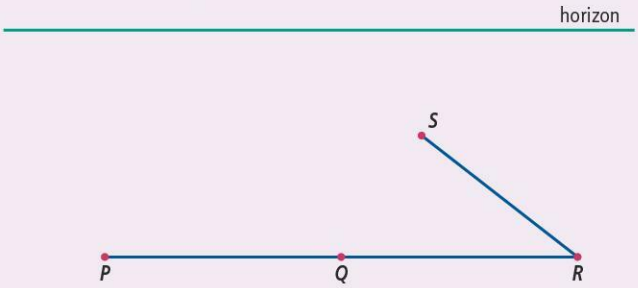


17 H Links zie je twee kindertekeningen en rechts een schilderij van Vincent van Gogh.
Ga na of de regels voor het eenpuntsperspectief correct zijn toegepast. Geef aan waarom wel of waarom niet.

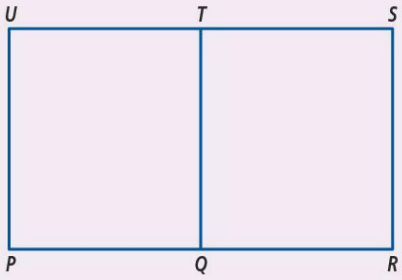
Uitdagende route → maak opdracht U3

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten



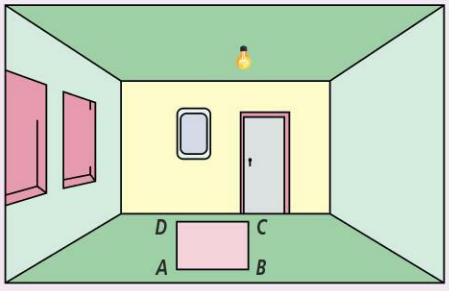
O15 Twee gelijke rechthoekige tegels liggen naast elkaar. Van de tegels wordt een tekening gemaakt in eenpuntsperspectief. Hierboven zie je een begin van die tekening. Van de rechter tegel met hoekpunten Q, R, S en T zijn drie hoekpunten gegeven. Van de linker tegel met hoekpunten P, Q, T en U zijn de hoekpunten P en Q gegeven.



- **a** Teken met behulp van de lijn door de punten R en S het verdwijnpunt V.
- **b** Vul in: in de rechthoekige vloertegel $QRST$ is zijde RS evenwijdig met zijde …
- **c** Het verlengde van welke andere zijde van $QRST$ gaat dus ook door V?
- **d** Waarom gaat het verlengde van zijde PU ook door V?
- **e** Zijde PR is evenwijdig aan de horizon.
  Welke zijde is ook evenwijdig aan de horizon?
- **f** Gebruik het voorgaande om de tekening van deze twee tegels af te maken.
- **g** Je wilt er een derde, even grote tegel, aan de rechterkant bijtekenen.
  Verleng lijnstuk PR naar rechts en teken punt M op lijn PR zó dat $QR = RM$.
- **h** Waarom mag je lijn MV tekenen?
- **i** Maak tegel $RMNS$ af.

Uitdagende opdrachten

U3 Gegeven is een eenpuntsperspectieftekening van een kamer. Er is ook een rechthoek $ABCD$ getekend.



- **a** Teken de horizon.
- **b** Rechthoek $ABCD$ stelt de lijst van een schilderij voor en is evenwijdig aan het tafereel, met zijde AB op de grond. De lijst wordt tegen de achterste wand gezet waar je een raam en een deur ziet.
  De deur is in werkelijkheid twee meter hoog.
  Schat hoe hoog de lijst is in cm. Leg je antwoord uit.

© Noordhoff Uitgevers bv

16.4 Tekenen in eenpuntsperspectief

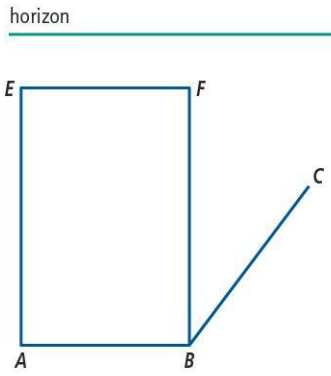
Je leert
- hoe je een eenpuntsperspectieftekening maakt
- hoe je in een perspectieftekening het midden van een lijnstuk bepaalt

Leerroutes
- ondersteunend: 18—O19—20—21—22
- doorlopend: 18—19—20—21—22
- uitdagend: 18—19—21—22—U4

Melissa wil een nieuwe keuken. Een architect heeft een keuken voor haar ontworpen.
- Is de hele keuken in eenpuntsperspectief getekend?

18 Gegeven is een deel van een eenpuntsperspectieftekening van een balk $ABCD.EFGH$. Het voorvlak $ABFE$ is evenwijdig aan het tafereel.
In deze opdracht ga je deze perspectieftekening afmaken.

a Teken het verdwijnpunt V van zijde BC.
b Punt V is ook het verdwijnpunt van de zijden die evenwijdig zijn aan zijde BC: de zijden AD, FG en EH. Teken met dunne lijntjes FV, AV en EV.
c Zijde CG is evenwijdig met zijde BF. Teken punt G.
d Zijde CD is evenwijdig met zijde AB. Teken punt D.
e Maak de perspectieftekening van de balk af.



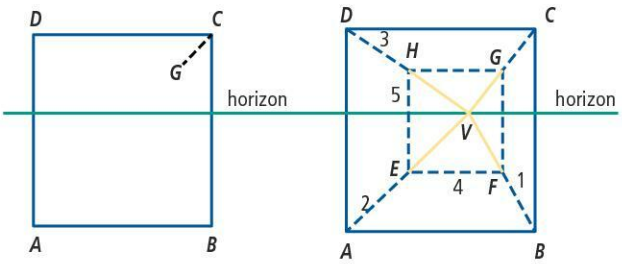
Aanpak

Hoe maak je een eenpuntsperspectieftekening?
1. Teken het verdwijnpunt V.
2. Verbind de overige gegeven hoekpunten met V.
3. Gebruik evenwijdigheid van ribben met het (verticale) tafereel om de positie van de ontbrekende hoekpunten te bepalen.
4. Teken de nog ontbrekende lijnstukken om de perspectieftekening af te maken.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Maak de eenpuntsperspectieftekening van de balk *ABCD.EFGH* af.



Oplossing

1. Verleng *CG* tot aan de horizon. Het snijpunt is *V*.
2. Teken de lijnen 1, 2 en 3.
3. Teken de lijn door *G* evenwijdig aan *BC*. Het snijpunt met *BV* is punt *F*. Teken ten slotte lijn 4 om het punt *E* te bepalen en lijn 5 om punt *H* te bepalen.
4. Maak de perspectieftekening af met het tekenen van de achterkant *EFGH* en de lijnstukken *BE*, *DH* en *HG*.

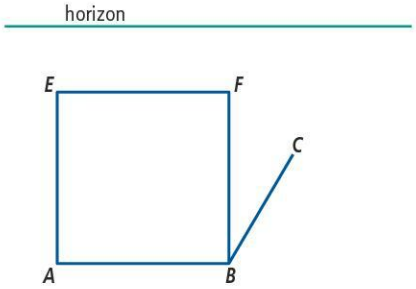
Ondersteunende route → maak opdracht O19

19 H

Van een kubus *ABCD.EFGH* wordt een eenpuntsperspectieftekening gemaakt. Je ziet een begin van de tekening.

a Maak deze tekening af.

b Teken een even grote kubus erbovenop.



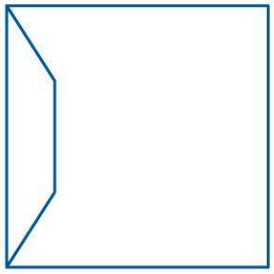
20

Van een balk met een vierkant voorvlak wordt een eenpuntsperspectieftekening gemaakt. Je ziet het begin van de tekening.

a Maak deze tekening af.

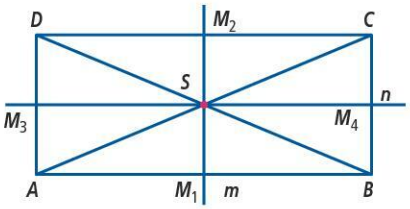
b Teken de horizon.

c Teken in de eenpuntsperspectieftekening een even grote balk links tegen de gegeven balk aan.



© Noordhoff Uitgevers bv

21 Gegeven is een bovenaanzicht van rechthoek $ABCD$ en een tekening van de rechthoek in eenpuntsperspectief. Punt V is het verdwijnpunt. De diagonalen AC en BD hebben snijpunt S. In het bovenaanzicht is lijn m de lijn door S die evenwijdig loopt met de zijden AD en BC. Deze lijn snijdt de zijden AB en CD in de middens M_1 en M_2.



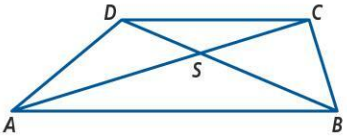
a Leg uit waarom lijn m in de perspectieftekening door S en V gaat.

b Teken met behulp van lijn m in de perspectieftekening de punten M_1 en M_2.

c Controleer met behulp van meten dat in de perspectieftekening $AM_1 = BM_1$ en dat $DM_2 = CM_2$.

d Lijn n is de lijn door S die evenwijdig loopt met AB en CD. Hij snijdt de zijden AD en BC in de middens M_3 en M_4. Teken lijn n en ook M_3 en M_4 in de perspectieftekening.

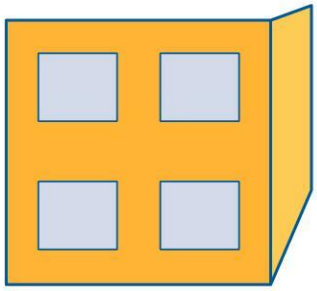
e Controleer met behulp van meten dat in de perspectieftekening AM_3 en DM_3 niet even lang zijn.



Theorie

Middens van lijnstukken die loodrecht op het tafereel staan, bepaal je met behulp van diagonalen en een lijn evenwijdig aan de horizon die door het snijpunt van de diagonalen gaat. Middens van lijnstukken die evenwijdig lopen met het tafereel zijn in een perspectieftekening ook weer echte middens. Je mag ze daarom ook vinden met behulp van opmeten, of door het snijpunt van de diagonalen te tekenen.

22 H Je ziet een deel van een eenpuntsperspectieftekening van een flat van twee verdiepingen hoog en twee appartementen breed. Alle appartementen zijn even groot met even grote ramen.



a Teken het dak van deze flat.

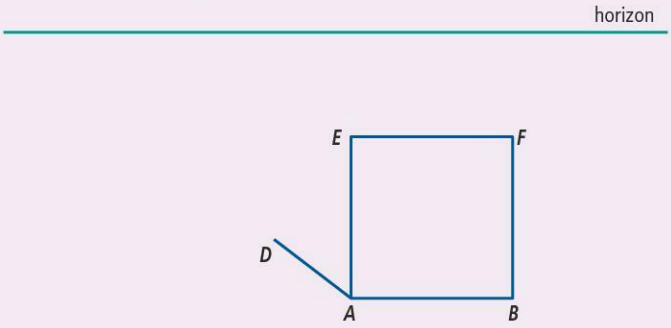
b Op de voorgevel komt midden tussen de appartementen een horizontale sierstrip en een verticale regenpijp. Teken de regenpijp en de sierstrip.

c De horizontale sierstrip loopt door over de rechterzijgevel. Op het midden van de zijgevel komt ook een regenpijp. Teken de regenpijp en de sierstrip.

Uitdagende route → maak opdracht U4

© Noordhoff Uitgevers bv

Ondersteunende opdrachten

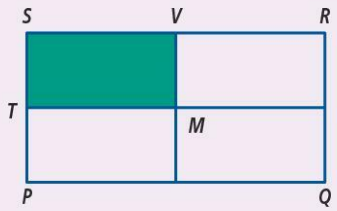


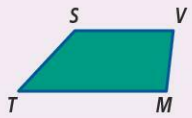
O19 Van een kubus $ABCD.EFGH$ wordt een eenpuntsperspectieftekening gemaakt. Je ziet een begin van de tekening.

- **a** Teken het verdwijnpunt V van lijn AD op de horizon.
- **b** Vul in: de zijden $B\ldots$, $E\ldots$ en $F\ldots$ zijn evenwijdig aan zijde AD.
- **c** Teken vanuit B, E en F lijnen naar punt V.
- **d** Vul in: de zijde $D\ldots$ is evenwijdig aan de zijden AE en BF.
- **e** Teken een verticale lijn door D die de lijn snijdt die je vanuit E hebt getekend bij opdracht c. Welke letter moet er bij het snijpunt van deze lijnen staan?
- **f** Maak nu de tekening af door gebruik te maken van evenwijdige lijnen.
- **g** Je gaat nu een even grote kubus tekenen, tegen de getekende kubus, aan de rechterkant. Teken rechts naast vierkant $ABFE$ een vierkant $BTUF$.
- **h** Maak van het vierkant van opdracht g een kubus door gebruik te maken van verdwijnpunt V en evenwijdigheid.

Uitdagende opdrachten

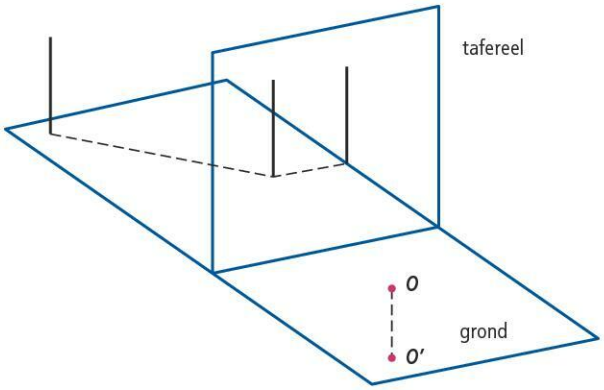
U4 Gegeven is een patroon van vier gelijke rechthoeken. Van rechthoek $TMVS$ is een eenpuntsperspectieftekening gemaakt. Teken de andere rechthoeken in deze tekening erbij.





© Noordhoff Uitgevers bv

23 In de figuur staan op de grond drie even hoge paaltjes.
Theo staat voor een glazen plaat en kijkt naar de paaltjes. In de tekening is O het oog van Theo en is O' de loodrechte projectie van O op het grondvlak.
Teken op de glazen plaat het beeld van de paaltjes zoals Theo ze ziet.

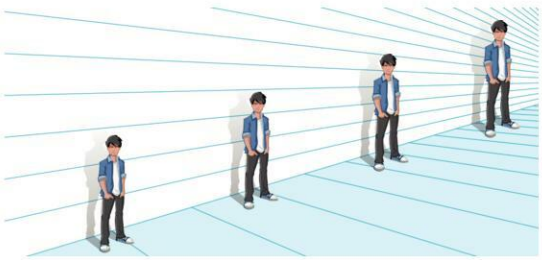


24 De lijnen op de wand in de perspectieftekening zijn in werkelijkheid evenwijdig.

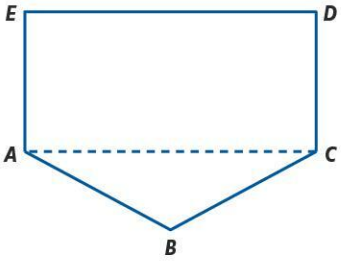
a De meest rechtse man lijkt groter dan de meest linkse. Meet dat na. Wat is de oorzaak van de vertekening?

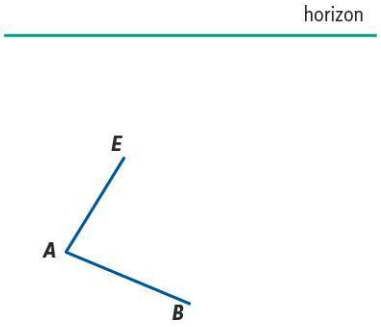
b Stel dat de twee genoemde mannen in werkelijkheid even groot zijn.
Hoeveel mm zou de rechterfiguur op de tekening dan moeten zijn?

c Stel dat de twee linkermannen op de juiste grootte getekend zijn. De meest linkse man is ongeveer 1,65 m.
Bereken de lengte van de tweede man.



25 Gegeven is een vijfhoek $ABCDE$. Het deel $ACDE$ is een rechthoek en driehoek ABC is gelijkbenig met $BA = BC$.
Naast de vijfhoek is een begin gemaakt met een eenpuntsperspectieftekening. De zijde ED en de diagonaal AC lopen evenwijdig aan de horizon.
De zijden AE en CD staan loodrecht op de horizon.

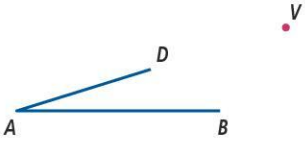


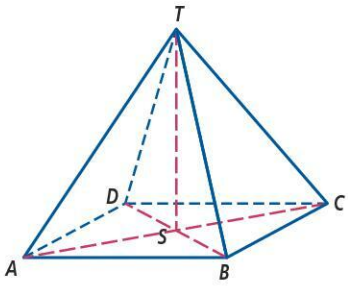


a Maak deze perspectieftekening af.

b Teken in de perspectieftekening het midden van zijde AE.

© Noordhoff Uitgevers bv





26 Gegeven is een piramide $T.ABCD$ met een vierkant grondvlak $ABCD$. De top T ligt recht boven het punt S waarbij S het snijpunt is van de diagonalen AC en BD. Verder is gegeven dat $TS = AB$.
Je ziet een begin van een eenpuntsperspectieftekening van de piramide $T.ABCD$ met verdwijnpunt V.
Onderzoek waar de top T in de perspectieftekening van piramide $T.ABCD$ komt te liggen.

27 De werken van Tommaso Masaccio behoren tot de vroege renaissance. Zijn werk zou later dat van latere kunstenaars zoals Sandro Botticelli en Michelangelo beïnvloeden.
Masaccio wordt beschouwd als de eerste belangrijke Italiaanse meester van de 15e eeuw, van belang vanwege de manier waarop hij de personages in zijn schilderingen afbeeldde, en vanwege het gebruik van het licht in zijn werken. Het meeste belang wordt echter gehecht aan het gebruik van het perspectief, waarmee hij een radicale ommezwaai in de Florentijnse schilderkunst teweegbracht.
Op het fresco van de *De Heilige Drie-eenheid* in de Santa Maria Novella in Florence (geschilderd tussen 1425 en 1428) zijn de Vader, de Zoon en de Heilige Geest afgebeeld onder een zogeheten tongewelf met Maria en Johannes onder het kruis. De gehele opbouw van het werk geeft een illusie van ruimtelijkheid waarvoor de schilder een perspectiefsysteem met slechts één verdwijnpunt heeft gebruikt.

a Noem een aantal elementen in de opbouw van het schilderij dat de ruimtelijkheid versterkt.

b Volgens sommige wetenschappers maakte Masaccio foutief gebruik van het eenpuntsperspectief.
Onderzoek of deze wetenschappers wel of geen gelijk hebben.

© Noordhoff Uitgevers bv

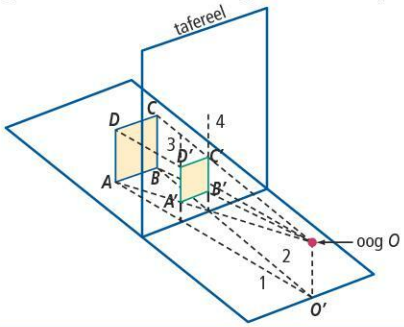
Theorie

Centrale projectie, centrale punt, oog, tafereel, tekenvlak, oogpunt, beeld

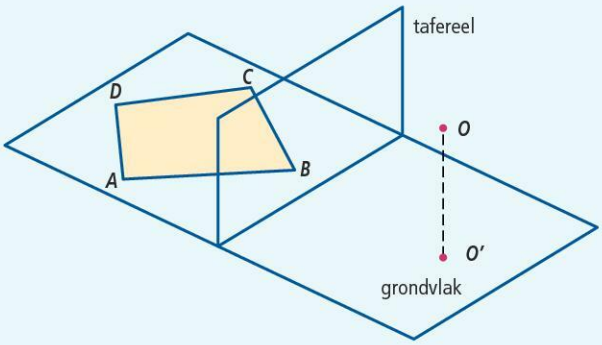
Het schaduwbeeld bij lamplicht en het tekenen van een voorwerp op een glasplaat zijn voorbeelden van centrale projectie.
De lamp is het centrale punt of het oog.
De glasplaat tussen het oog en het voorwerp wordt het tafereel of tekenvlak genoemd. De loodrechte projectie van het oog op het tafereel heet het oogpunt. De tekening die op het tafereel ontstaat, heet het beeld. Het beeld is hoe het oog het voorwerp waarneemt.

Voorbeeld

Je ziet hoe een rechthoek $ABCD$, evenwijdig aan het tafereel, door het oog op het tafereel wordt gezien. De nummering van de hulplijnen geeft aan in welke volgorde deze zijn getekend.



S1 Vierhoek $ABCD$ ligt in zijn geheel in het grondvlak. Olga kijkt naar de vierhoek. In de tekening is O de oog van Olga en O' is de loodrechte projectie hiervan op het grondvlak. Teken op het tafereel hoe Olga de vierhoek ziet.



Theorie

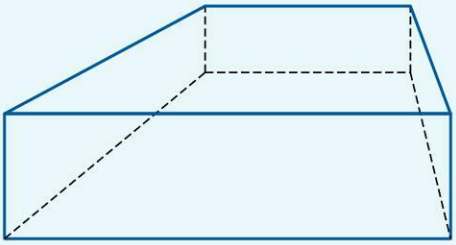
Perspectieftekening, verdwijnpunt

Een perspectieftekening is een manier om een ruimtelijk object te tekenen zoals je het in werkelijkheid ook ziet. Foto's zijn altijd in perspectief en de lens van de camera is het oog.

- In een perspectieftekening worden objecten die in werkelijkheid even groot zijn maar zich op ongelijke afstand van het oog bevinden, niet even groot afgebeeld. Het object dat verder weg ligt, wordt kleiner afgebeeld.
- Vlakdelen die evenwijdig zijn aan het tafereel, hebben in de tekening dezelfde vorm als in werkelijkheid.
- Lijnen die in werkelijkheid evenwijdig zijn, maar niet evenwijdig zijn aan het tekenvlak, snijden in een perspectieftekening elkaar in een zogeheten verdwijnpunt.

In werkelijkheid lopen de spoorrails evenwijdig aan elkaar. In de foto snijden ze elkaar in één punt: het verdwijnpunt.

© Noordhoff Uitgevers bv



S2 Teken het verdwijnpunt in de perspectieftekening.

Theorie

Eenpuntsperspectief, hoofdrichtingen, horizon

Het schilderij *De geseling van Christus* van Piero della Francesca (ca. 1460), is gemaakt in eenpuntsperspectief. De breedte, hoogte en diepte van een object heten de hoofdrichtingen van het object. In het schilderij zijn de twee hoofdrichtingen aangegeven die evenwijdig aan het tafereel zijn. De andere hoofdrichting staat loodrecht op het tafereel. Twee lijnen die evenwijdig zijn aan deze derde hoofdrichting zijn in het schilderij aangegeven. Het snijpunt van deze lijnen is het verdwijnpunt. De horizontale lijn door het verdwijnpunt heet de horizon en is in het schilderij eveneens aangegeven.

S3 Hieronder zie je twee schilderijen.

a Het linkerschilderij is *De aankondiging* van Sandro Botticelli (rond 1445-1510). Hierin is gebruikgemaakt van eenpuntsperspectief.
Geef in het schilderij de horizon aan en de twee hoofdrichtingen die evenwijdig zijn aan het tafereel.

b Het rechterschilderij is *East River* van Samuel Halpert (1884-1930).
Ga na of in het schilderij de regels voor het tekenen in eenpuntsperspectief correct zijn toegepast.

© Noordhoff Uitgevers bv

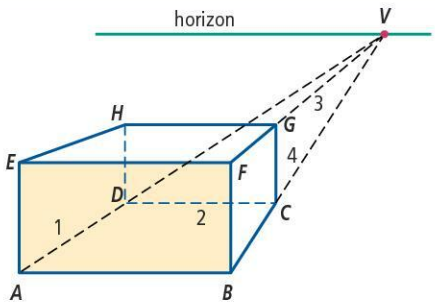
Vaardigheid

Je kunt een eenpuntsperspectieftekening maken.

1 Teken het verdwijnpunt V.
2 Verbind de overige gegeven hoekpunten met V.
3 Gebruik evenwijdigheid van ribben met het (verticale) tafereel om de positie van de ontbrekende hoekpunten te bepalen.
4 Teken de nog ontbrekende lijnstukken om de perspectieftekening af te maken.

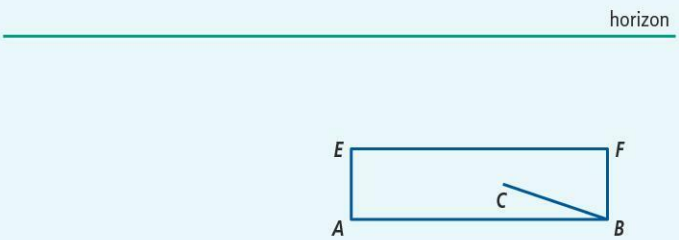
Voorbeeld

Van een eenpuntsperspectieftekening van de balk $ABCD.EFGH$ zijn de zijden AB, BC, en BF gegeven. Maak deze tekening af.



Oplossing

Verleng zijde BC tot de horizon; dit geeft het verdwijnpunt V.
De rechthoek $ABFE$ zie je in de tekening als een rechthoek. De punten A, B en F zijn gegeven, dus kun je punt E tekenen.
Door achtereenvolgens de stippellijnen 1 tot en met 4 te tekenen, ontstaan de punten D en G.
De rechthoek $DCGH$ zie je in deze tekening weer als een rechthoek, dus kun je het punt H tekenen.
Door de ontbrekende ribben te tekenen, maak je de perspectieftekening af.



S4 Een deel van een perspectieftekening van balk $ABCD.EFGH$ is al getekend.
Maak de perspectieftekening van de balk af.

© Noordhoff Uitgevers bv

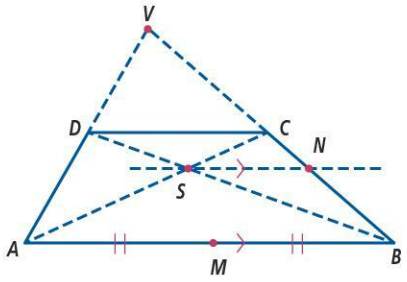
Vaardigheid

Je kunt in een perspectieftekening het midden van een lijnstuk bepalen.

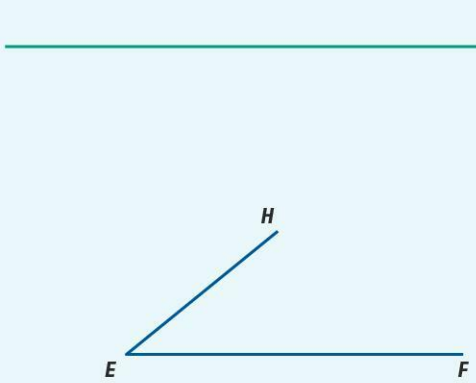
Middens van lijnstukken die loodrecht op het tafereel staan, bepaal je met behulp van diagonalen en een lijn evenwijdig aan de horizon die door het snijpunt van de diagonalen gaat.
Middens van lijnstukken die evenwijdig lopen met het tafereel zijn in een perspectieftekening ook weer echte middens. Je mag ze daarom ook vinden met behulp van opmeten, of door het snijpunt van de diagonalen te tekenen.

Voorbeeld

Gegeven is een eenpuntsperspectieftekening van een rechthoek $ABCD$.
Omdat AB evenwijdig is aan het tafereel, kun je het midden M van AB via meten bepalen; $AM = BM$.
Zijde BC is niet evenwijdig aan het tafereel.
Teken de diagonalen AC en BD en hun snijpunt S.
De lijn door S evenwijdig aan AB snijdt BC in N.
Punt N is het midden van BC.



S5 Gegeven is een deel van een eenpuntsperspectieftekening van een rechthoek $EFGH$.
Verdeel rechthoek $EFGH$ in vier gelijke delen.



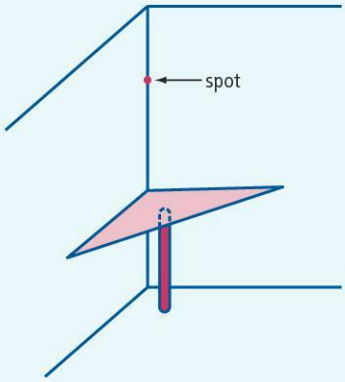
© Noordhoff Uitgevers bv

T1 In de hoek van een kamer staat een bijzettafeltje. Het blad hiervan heeft de vorm van een rechthoekige, gelijkbenige driehoek. In de hoek is een spot opgehangen. Deze spot geeft een schaduw van het tafelblad op de vloer.

a Teken deze schaduw op de vloer.

b Als de spot lager wordt opgehangen, wat is dan het gevolg voor de schaduw?

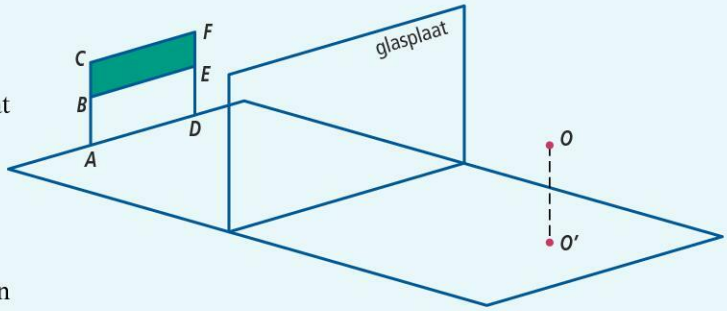
c Onderzoek in de tekening van opdracht a of de spot op een hoogte kan worden gehangen zodat de afmetingen van de schaduw het $\frac{2}{3}$ deel zijn van die in opdracht a. Leg je antwoord uit.



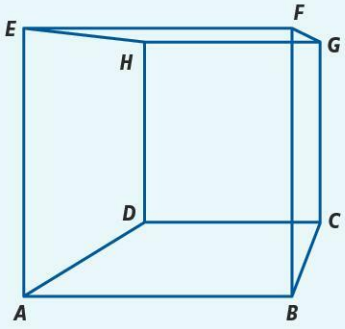
T2 In de tekening kijk je met je oog in O door een glasplaat naar een spandoek, aangegeven met $BCFE$. Het spandoek staat evenwijdig aan de verticale glasplaat en is bevestigd aan twee palen, in de tekening aangegeven met AC en DF.

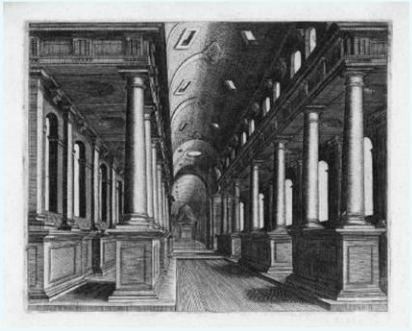
a Teken het beeld van het spandoek op de glasplaat.

b Hoe verandert het beeld op de glasplaat als het spandoek verder van de glasplaat wordt geplaatst?



T3 Links zie je een eenpuntsperspectieftekening van een draadmodel van kubus $ABCD.EFGH$.
Teken het verdwijnpunt en de horizon.



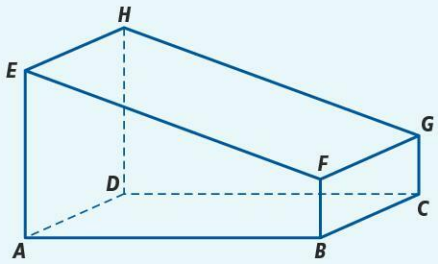


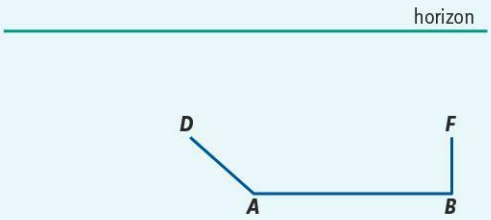
T4 Rechts zie je een tekening van Hans Vredeman de Vries.

a Teken van elk van de drie hoofdrichtingen twee lijnen.

b Ga na of de regels van het eenpuntsperspectief correct zijn toegepast.

© Noordhoff Uitgevers bv





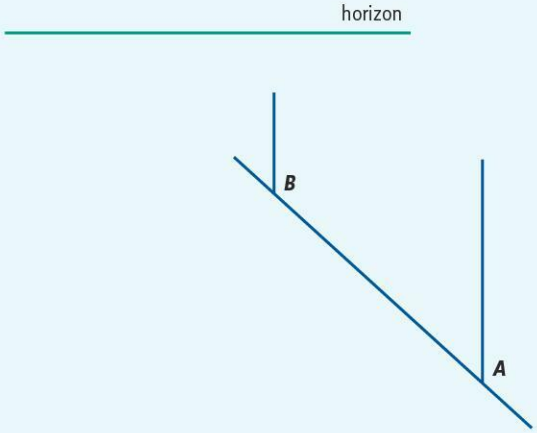
T5 Gegeven is een scheef afgeknotte balk $ABCD.EFGH$.
Zijde AE is drie keer zo lang als zijde BF.
In de tekening rechts is een begin gemaakt met een eenpuntsperspectieftekening van de gegeven afgeknotte balk.

a Maak deze tekening af.

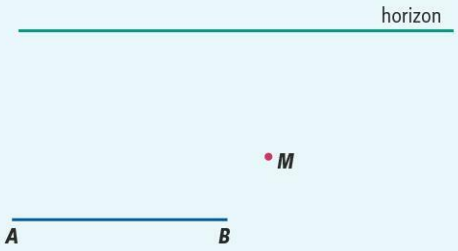
b Teken het midden M van zijde EF en het midden N van zijde AD.

c Teken in de figuur van opdracht a een balk $BPQC.FRSG$ waarvan geldt dat zijde BF even lang is als zijde BP.

T6 Langs een weg staan twee palen A en B. Tussen de palen A en B worden er nog drie palen geplaatst. De afstand tussen de vijf palen is overal gelijk.
Teken deze drie palen in de perspectieftekening van de gegeven situatie erbij.



T7 Van een eenpuntsperspectieftekening van een rechthoek $ABCD$ is zijde AB gegeven en het midden M van zijde BC.
Maak deze perspectieftekening af.



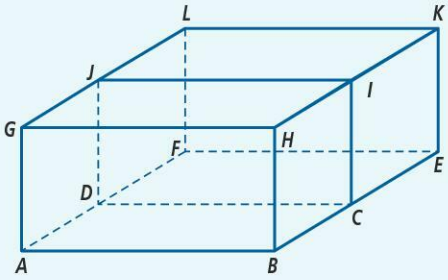
© Noordhoff Uitgevers bv

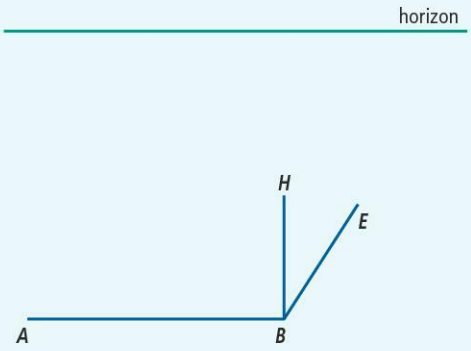
Je kunt een eenpuntsperspectieftekening maken.

E1 Een begin is gemaakt met een eenpuntsperspectieftekening van een balk.
Maak de tekening verder af.

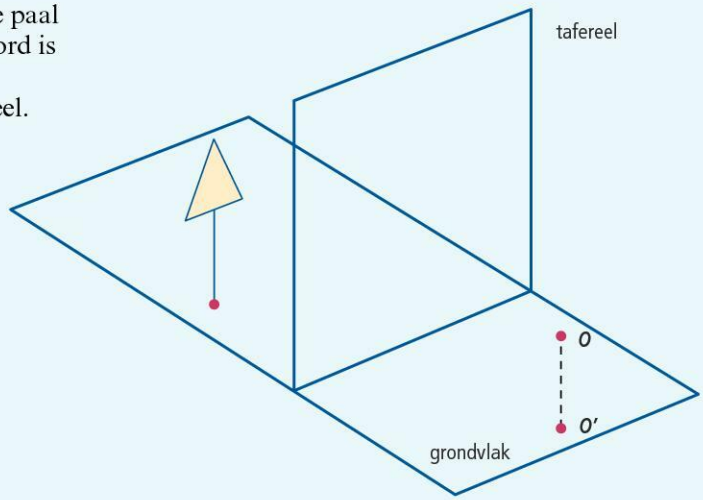
Je kunt in een perspectieftekening het midden van een lijnstuk bepalen.

E2 Gegeven zijn twee gelijke, aan elkaar vastzittende balken. In de figuur rechts is een begin gemaakt van een eenpuntsperspectieftekening ervan.
Maak deze perspectieftekening af en zet de overeenkomstige letters erbij.



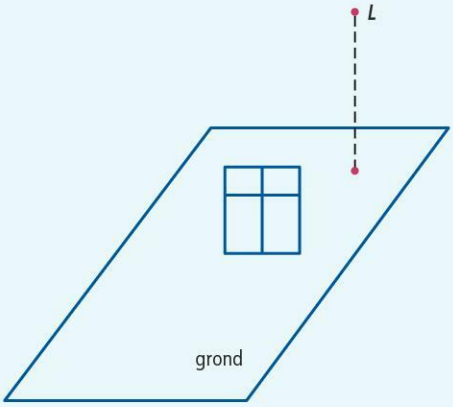


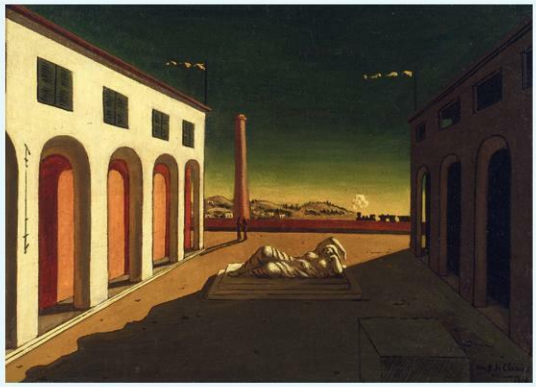
E3 Een driehoekig bord staat op een paal. De paal staat loodrecht op het grondvlak en het bord is evenwijdig aan het tafereel.
Teken het beeld van het bord op het tafereel.



© Noordhoff Uitgevers bv

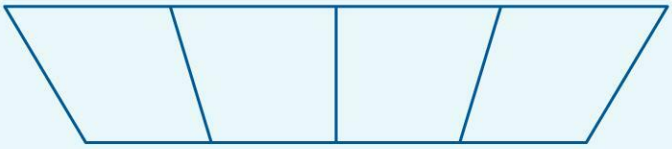
E4 In de tekening links zie je een hekje op de grond dat in de buurt van een lantaarn staat. L is de lamp van de lantaarn. Het licht van de lamp geeft een schaduw van het hekje op de grond.
Teken deze schaduw.





E5 Het schilderij rechts is van de Italiaanse kunstenaar Giorgio de Chirico (1888-1978).
Ga na of hij de regels van het eenpuntsperspectief correct heeft toegepast. Licht je antwoord toe.

E6 W Rechts zie je een van de 75 panelen over het leven van Jezus en Maria die Duccio di Buoninsega (1255-1319) gemaakt heeft voor de kathedraal van Siena.
Ga ervan uit dat het plafond is opgebouwd uit 12 even grote vierkante vlakken. In de tekening hieronder is alleen de middelste rij vierkanten getekend.
Maak de perspectieftekening van het plafond af.
(*Ontleend aan de wiskunde C syllabus CE 2018 (CvTE)*)



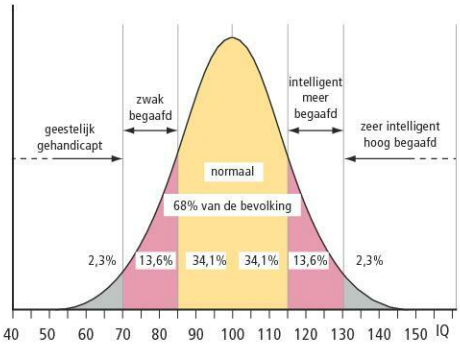
© Noordhoff Uitgevers bv

Intelligentiequotiënt

In 1904 kreeg de psycholoog Alfred Binet (1857-1911) een aanstelling van de Franse overheid om onderzoek te doen naar leerlingen die op school slecht presteerden. Binet maakte een test die hij bij Parijse scholieren afnam en die model staat voor hedendaagse intelligentietesten.
De Amerikaanse psycholoog Lewis Madison Terman (1877-1956) vervolmaakte deze test. Hij verbond er een score aan die de naam intelligentiequotiënt (IQ) kreeg.

$$IQ = \frac{\textit{verstandelijke leeftijd}}{\textit{werkelijke leeftijd}} \times 100$$

Bij een gemiddelde begaafdheid hoort $IQ = 100$.
Voor volwassenen ging die berekening niet op, omdat intelligentie niet meer toeneemt vanaf het 18e levensjaar. Nieuwe testen waren nodig. David Wechsler (1896-1981) ontwikkelde voor de leeftijden van 16 tot 85 de Wechsler Adult Intelligence Scale (WAIS) en voor de leeftijden van 6 tot 16 de Wechsler Intelligence Scale for Children (WISC). De vernieuwde versies van deze testen worden nog steeds gebruikt.
Bij deze testen worden aan goede antwoorden, punten toegekend. De behaalde score wordt vergeleken met die van mensen van dezelfde leeftijd, de zogenaamde normgroep. De gemiddelde score van deze groep wordt gelijk gesteld aan een IQ van 100. De huidige IQ testen meten dus eigenlijk de verhouding van het IQ van één persoon en het gemiddelde IQ van personen met dezelfde leeftijd. Het IQ is in iedere normgroep (leeftijdsgroep) normaal verdeeld met een gemiddelde van 100 en een standaarddeviatie van 15.
Een IQ test is een momentopname: als een deelnemer slecht geslapen heeft of last heeft van faalangst, kan zijn score wel 10% lager uitvallen.



Opdracht

- Welke van de volgende beweringen is waar?
  - Er zijn ongeveer evenveel mensen met een IQ van 80 als met een IQ van 120.
  - Iemand met een IQ van 150 is niet tweemaal zo slim als iemand met een IQ van 75.
  - Er zijn ongeveer 40 keer zoveel mensen met een IQ lager dan 130, dan mensen met een IQ hoger dan 130.
- Er wordt algemeen aangenomen dat iemand met een universitaire opleiding behoort tot de 5% slimste mensen. Geef een schatting voor het IQ van de groep van de 5% intelligentste mensen.

© Noordhoff Uitgevers bv

Vaardigheden 8

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Rijen
- Rekenmachine
- Logaritmische schalen
- Systematisch tellen

© Noordhoff Uitgevers bv

Rijen

1 In de gegeven rij getallen zit een regelmaat.

7 8 10 13 17 22 … … …

a Welke regelmaat zie je?

b Schrijf de volgende drie getallen op van deze rij.

c Controleer dat de rij vastgelegd is met de formule $u_{n+1} = u_n + n$ en $u_1 = 7$.

d Een andere rij is vastgelegd met de formule $v(n + 1) = 2v(n) + 1$ en $v(0) = -3$.
Schrijf de volgende vijf getallen van de rij op.

Theorie

Als je bij een rij de volgende term kunt berekenen uit de voorafgaande term(en), dan spreek je van recursie. De bijbehorende formule heet een recursieve formule.
Bij sommige rijen kun je de term $u(n)$ direct berekenen met het rangnummer n. Je gebruikt dan een directe formule.

- Een rij waarvan je een term vindt door bij de voorafgaande term een constante a op te tellen is een rij bij een lineair verband. De constante is de toename.
- Een rij waarvan je een term vindt door de voorgaande term met een constante te vermenigvuldigen is een rij bij een exponentieel verband. De constante is de groeifactor.

Directe formule bij een lineair verband: $u(n) = b + a \cdot n$.
Directe formule bij een exponentieel verband: $u(n) = b \cdot r^n$.
In beide gevallen geldt: $b = u(0)$.

Voorbeeld 1

Geef een directe formule bij de rij:
$u(1) = 299$, $u(2) = 286$, $u(3) = 273$,……

Oplossing
u is een rij bij een lineair verband,
de toename is -13.
$u(0) = 299 + 13 = 312$
$u(n) = 312 - 13n$

Voorbeeld 2

Geef een directe formule bij de rij:
$K_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot K_n$ en $K_4 = 10$

Oplossing
K is een rij bij een exponentieel verband, de groeifactor is $\frac{1}{2}$.
$K_0 = \frac{10}{(\frac{1}{2})^4} = 160$ dus $K_n = 160 \cdot (\frac{1}{2})^n$

2 Schrijf van elke rij de eerste vier termen op.

a $u(n + 1) = 3 \cdot u(n) - 2$ met beginterm $u(0) = 2$

b $v_{n+1} = 1{,}5 \cdot v_n$ met beginterm v_1 en met $v_2 = 24$

3 Geef van elk van de rijen A, B, C, D en E een recursieve formule.

A: 12, 18, 24, 30, ……
B: 3, 6, 12, 24, ……
C: 12, 25, 51, 103, ……
D: 320, −160, 80, −40, ……
E: 3, −4, −11, −18, ……

4 **a** Welke rijen van opdracht 3 hebben een lineair verband? En welke een exponentieel verband?

b Bepaal bij elk van deze rijen een directe formule.

© Noordhoff Uitgevers bv

5 In januari 2017 krijgt Janneke 12 euro zakgeld per maand en elke volgende maand krijgt zij er 35 cent bij.

a Leg uit dat Janneke n maanden na januari 2017 als zakgeld $B_n = 12 + 0{,}35n$ euro per maand krijgt en geef ook een recursieve formule voor B_n

b Na hoeveel maanden zal het zakgeld voor het eerst boven de 30 euro uitkomen?

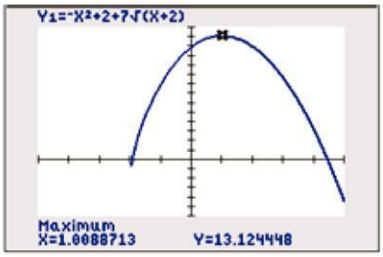
Rekenmachine

Theorie

Je kunt met je rekenmachine toppen bepalen en de coördinaten van snijpunten berekenen. Als je de rekenmachine gebruikt, geef je aan hoe je de rekenmachine hebt gebruikt. Daarbij neem je de volgende onderdelen op: de invoer, de vensterinstelling en de gebruikte opties.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 2 + 7\sqrt{x+2}$.
Bereken de coördinaten van de top van de grafiek en bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek met de lijn $y = 4$.
Rond je antwoorden af op twee decimalen.



Oplossing

Invoer: $y_1 = -x^2 + 2 + 7\sqrt{x+2}$ en $y_2 = 4$.
Venster: $-5 \le x \le 5$, $-6 \le y \le 14$
Optie: maximum. De top is (1,01; 13,12).
Optie: snijpunten.
De snijpunten zijn (−1,58; 4) en (3,87; 4).

6 Gegeven is de functie $A(p) = (2p - 75)(3p + 81)$.

a Bereken de coördinaten van de snijpunten met de p-as.

b Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van A.

c Bereken de p-coördinaten van de snijpunten van de grafiek van A met de lijn $A(p) = 1000$. Rond je antwoord af op één decimaal.

7 Los op. Rond zo nodig af op twee decimalen.

a $3\sqrt{4x-1} = 5$

b $\dfrac{12}{\sqrt{7-2x}} = 4$

c $p - 4 = p^3 - 3p$

d $\dfrac{2x}{x^2+5} = \dfrac{1}{3}$

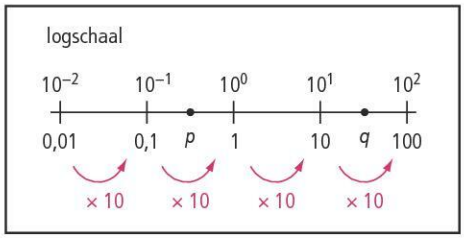
© Noordhoff Uitgevers bv

Logaritmische schalen

8 Je ziet een logaritmische schaalverdeling.
p is het getal precies midden tussen 0,1 en 1.
q is het getal precies tussen 10 en 100.

a Bereken in twee decimalen de waarden van p en q.

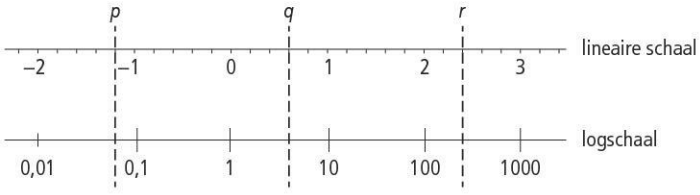
b Hoe kun je het getal q uit p afleiden?



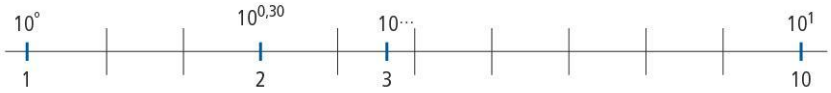
Theorie

Bij een lineaire schaalverdeling wordt bij gelijke stappen een vast getal opgeteld. Bij een logaritmische schaalverdeling of logschaal wordt bij gelijke stappen met een vast getal vermenigvuldigd.

9 Gegeven is een lineaire schaal en een logschaal.
Bereken de getallen die horen bij p, q en r bij zowel de lineaire als de logschaal. Rond indien nodig af op twee decimalen.



10 Op onderstaande logschaal zijn de getallen 1, 2, 3 en 10 weergegeven.



a Leg uit hoe de plaats van het getal 2 is gevonden.

b Bereken welk getal er op de puntjes moet staan en controleer of het getal 3 op de juiste plek staat.

c Zet de getallen 4 tot en met 9 op de juiste plaats op de logschaal.

11 Gegeven is de grafiek bij het verband tussen t en y in een assenstelsel, waarvan de y-as een logschaal is. De grafiek gaat door de punten $P(1, 9600)$ en $Q(3, 6144)$.

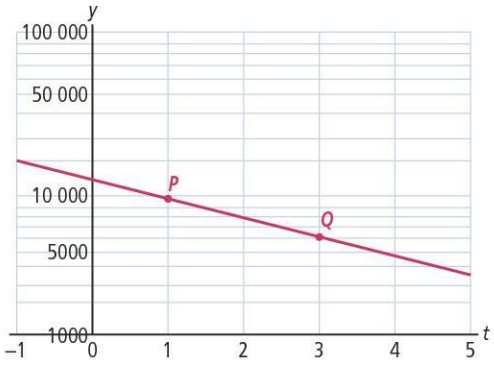
a Waarom is dit de grafiek van een exponentieel verband?

b Bereken de groeifactor die hoort bij dit exponentiële verband.

c Stel een formule op bij het verband tussen t en y.

d De grafiek van een andere formule gaat door (1, 50000) en is evenwijdig aan de grafiek door de punten P en Q. Wat zegt dat over de groeifactor?

e Geef een formule bij deze grafiek.



© Noordhoff Uitgevers bv

Systematisch tellen

12 Een stapeltje kaarten bestaat uit ruiten twee tot en met ruiten zeven. Een tweede stapeltje bestaat uit harten twee tot en met harten zeven.

a Van elk stapeltje wordt één kaart afgenomen.
Hoeveel verschillende tweetallen kaarten kun je op die manier krijgen?

b De getallen op de twee kaarten worden bij elkaar opgeteld.
Om de uitkomsten te noteren kun je gebruik maken van een schema.
Hoe vaak komt de uitkomst 8 voor?

c Bij hoeveel tweetallen is de som van de getallen op de twee kaarten groter dan negen?

d Je kunt ook op het verschil van de twee getallen op de kaarten letten.
Welk verschil komt het meeste voor? Hoe vaak is dat?

♥ \ ♦	2	3	4	5	…
2	4	5	…	…	…
3	5	…	…	…	…
4	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…

13 Je gooit één keer met een rode, een blauwe en een gele dobbelsteen. De som van de aantallen ogen is 6.
Op hoeveel verschillende manieren kun je een totaal aantal ogen 6 krijgen?

14 Acht vrienden, Johan, Siebren, Mohammed, Peter, Igor, Herman, Gerrit en Amir gaan een dag op stap. Ze hebben een Volkswagenbusje gehuurd waar precies acht personen in mogen. Alle acht zijn ze in bezit van een rijbewijs.

a Op hoeveel manieren kunnen ze plaatsnemen in de bus?

b Uit hun midden kiezen ze een chauffeur, iemand die de pot beheert en een woordvoerder. Hiervoor zijn drie verschillende personen nodig.
Op hoeveel manieren kunnen zij zo'n drietal samenstellen?

15 Op de foto zie je een stad van keramiek gemaakt door de kunstenares Elly van de Merwe.
De huisjes zijn in 3 rijen geplaatst. Er zijn 13 huisjes in het kunstwerk zelf en er is nog 1 reservehuisje.
De voorste rij heeft 4 posities om huisjes te plaatsen, de middelste rij heeft 5 posities en de achterste weer 4 posities.
De opstelling van de huisjes kan veranderd worden. Je kunt daarbij de huisjes op de voorste rij en de huisjes op de middelste rij willekeurig verwisselen.
De huisjes op de achterste rij kunnen alleen onderling verwisseld worden. Het reservehuisje past alleen op de voorste twee rijen.
Bereken hoeveel opstellingen er mogelijk zijn met de 14 verschillende huisjes.
(*Ontleend aan CE wiskunde vwo A -pilot 2014, tijdvak 1*)

© Noordhoff Uitgevers bv

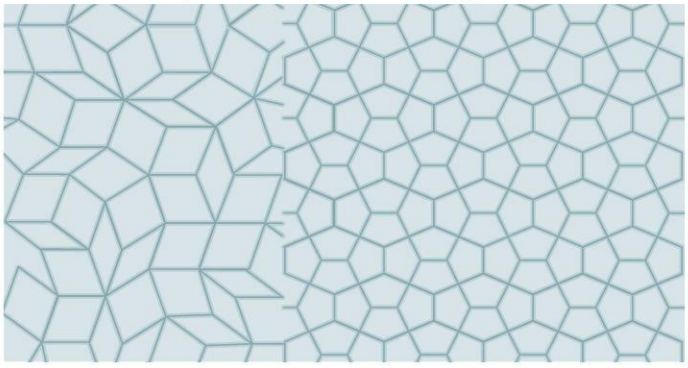
© Noordhoff Uitgevers bv

Keuzeonderwerpen

SE CE K

Praktische opdracht | Muziek 184

Praktische opdracht | Vlakvullingen 188



© Noordhoff Uitgevers bv

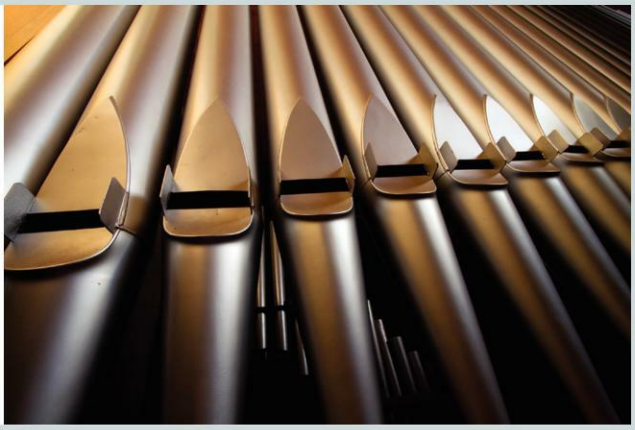
Benodigdheden
- Acht lege glazen (melk)flessen
- Een gitaar

Opbouw
1 Probleemstelling
2 Probleem verkennen
3 Plan maken
4 Plan uitvoeren
5 Conclusie

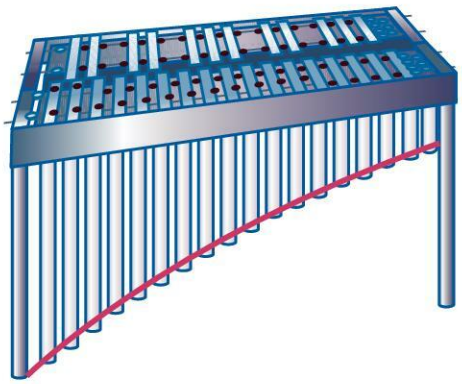
Probleemstelling

Een flessenorgel bestaat uit een aantal flessen die voor een deel met water gevuld zijn. Door de hoeveelheid water per fles te variëren, kun je elke fles een andere toon laten voortbrengen en op het flessenorgel een melodie spelen. Om op een flessenorgel een melodie te kunnen spelen, moeten die tonen een toonladder vormen.

- Wat is een toonladder? En hoe zorg je ervoor dat een flessenorgel de tonen van zo'n toonladder voortbrengt?



1 In het plaatje van de xylofoon is een grafiek getekend. De vorm van de grafiek lijkt op de grafiek van een exponentiële functie. Ook bij het pijporgel op de foto hierboven zie je het exponentiële verband in de vorm van het instrument terug. Verzamel afbeeldingen van een aantal muziekinstrumenten. Geef aan hoe je in de vorm van het instrument het exponentiële verband ziet.



Probleem verkennen

Om een flessenorgel te maken, moet je iets afweten van geluidsgolven en muziek. Je zult ontdekken dat muziek alles te maken heeft met exponentiële verbanden.

© Noordhoff Uitgevers bv

2 Als je een snaar laat trillen, dan produceert deze een toon. De hoogte van die toon hangt af van de lengte van de snaar. Op de gitaar zijn de zogeheten fretjes aangegeven. De plaats waar de snaren vast zitten aan de klankkast heet de kam. Een gitarist drukt bij het spelen de snaren bij de fretjes in. Hierdoor verandert hij de snaarlengte en daarmee de hoogte van de toon.

a Meet bij een gitaar van elk fretje de afstand d tot de kam. Neem d in millimeters nauwkeurig.

b Voer de gevonden resultaten in op je rekenmachine of in een grafiekenprogramma. Zet het fretnummer n langs de horizontale en de gemeten afstand d langs de verticale as. Teken een grafiek.

c De getekende grafiek is de grafiek van een exponentieel verband.
Bereken de groeifactor.

d Geef een formule waarbij je d uitdrukt in n.

Bij instrumenten als een piano of een gitaar laat je snaren trillen. Deze trillende snaren brengen de lucht in trilling. Deze trillingen ervaar je als geluidstonen. De hoogte van een geluidstoon hangt af van de frequentie, het aantal trillingen van de lucht per seconde. De eenheid hiervoor is Hertz (Hz). Hoe groter de frequentie is, des te hoger is de toon.

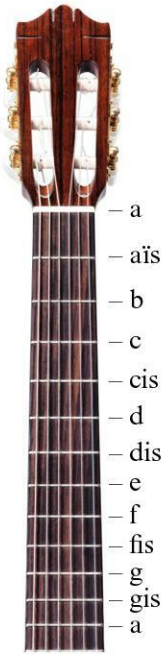
3 De frequentie van de trilling van een snaar is omgekeerd evenredig met de lengte van de snaar. De frequentie verdubbelt als de snaarlengte wordt gehalveerd.
Bij welk fretje moet je een gitaarsnaar indrukken om de lengte te halveren?

© Noordhoff Uitgevers bv

4 Als je bij een gitaar de tweede snaar aanslaat, hoor je de toon die a genoemd wordt. De frequentie van deze toon is 440 Hz. Als je de snaar bij het eerste fretje indrukt, dan krijg je een aïs. Hiernaast kun je voor deze snaar zien welke toon bij elk fretje hoort.

a Welke toon hoort bij een frequentie van 880 Hz?

b Als je de *a*-snaar bij het derde fretje indrukt, krijg je een *c*. Bij welk fretje moet je deze snaar indrukken zodat je weer een *c* krijgt?



5 **a** Neem aan dat de verhouding tussen de frequenties van twee opeenvolgende toonhoogten constant is.

Dus: $\frac{\text{frequentie } ais}{\text{frequentie } a} = \frac{\text{frequentie } b}{\text{frequentie } ais} \approx g$

Leg uit dat $g = 2^{\frac{1}{12}}$.

b Welk verband is er tussen g en de groeifactor uit opdracht 2c?

c De frequentie van een *a* is 440 Hz.
Bereken drie frequenties van drie tonen *c*.

6 Een toonladder bestaat uit een serie van acht tonen. In de toonladder die begint met een c zitten de volgende acht tonen: c d e f g a b en daarna weer een c. Het verschil tussen de eerste en de laatste toon van een toonladder noem je een octaaf.
Het verschil tussen twee opeenvolgende tonen is een hele of een halve toonafstand. Op het klavier kun je zien dat er tussen bijvoorbeeld e en f, f en fis en b en c een halve toonafstand zit. Tussen c en d zit een hele toonafstand.

a Geef van elk tweetal opeenvolgende tonen van deze toonladder aan of het verschil een hele of een halve toonafstand is.

b Het patroon dat je bij opdracht a hebt gezien, vind je bij elke toonladder. Schrijf de acht noten op die horen bij de toonladder die met een *g* begint.

Plan maken en plan uitvoeren

Als je een fles voor een deel met water vult en er tegen tikt, gaat de lucht boven het water trillen en hoor je een geluidstoon. De hoogte van die toon hangt af van de hoeveelheid water in de fles.
Een flessenorgel moet een toonladder voortbrengen, dus moeten de verhoudingen tussen de acht verschillende luchthoogten kloppen.
Met acht flessen kun je een redelijk klinkende melodie spelen. Door de flessen op te hangen, klinken ze mooier.
Je kunt ook tonen voortbrengen door te blazen op de flessen.

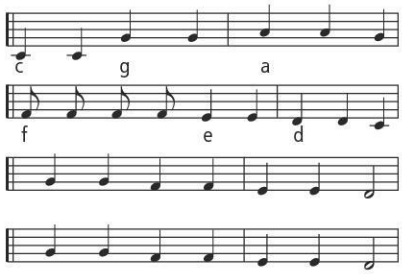
© Noordhoff Uitgevers bv

7 **a** De afbeelding toont een zogenaamd flessenorgel.
Neem twee lege flessen en vul ze met water. Zorg ervoor dat in de ene fles de hoogte van de luchtkolom twee keer zo groot is als in de andere. Door op de flessen te tikken of op de fles te blazen kun je tonen laten klinken, die precies een octaaf verschillen.

b Het verband tussen de toonhoogte en de hoogte van de luchtkolom is ook exponentieel met als groeifactor $2^{\frac{1}{12}}$.
Ga uit van de twee tonen die de flessen van opdracht a voortbrengen. Die tonen kun je opvatten als de eerste en de laatste toon van een toonladder.
Bereken de waterhoogtes die horen bij de overige tonen van deze toonladder.

c Neem nog zes flessen en vul die tot de hoogtes die je bij b hebt berekend. Je hebt nu een flessenorgel waarop je de noten van een toonladder kunt spelen. Doordat de flessen iets van vorm kunnen verschillen, kan het zijn dat de toonladder niet helemaal zuiver klinkt. Je kunt de toon bijstellen door de waterhoogtes iets te veranderen.

8 Een melodie is weergegeven in het schrift. De toonladder die bij deze melodie hoort begint met een c.
Dan komt de vijfde toon, de g, dan de zesde toon enzovoort.
Nummer de flessen van opdracht 7c van 1 tot en met 8.
Speel de melodie op je flessenorgel.



Suggesties voor vervolg

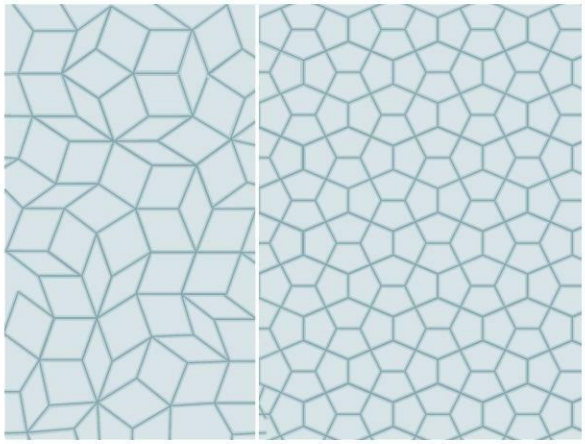
Je kunt het flessenorgel compleet maken door nog vijf flessen te gebruiken om de ontbrekende halve tonen te laten klinken. Je kunt ze, ter onderscheid, iets hoger hangen. Ook kun je eventueel naar links en naar rechts uitbreiden. Het te spelen repertoire zal hierdoor toenemen.
Je kunt ook onderzoeken wat het effect is als je de flessen afsluit.

© Noordhoff Uitgevers bv

Benodigdheden Geen bijzondere
Opbouw
1 Probleemstelling
2 Probleem verkennen
3 Plan maken
4 Plan uitvoeren
5 Conclusie

Probleemstelling

Je kunt een vloer met rechthoekige tegels betegelen zonder dat er tussenruimtes overblijven. Met ronde tegels lukt dat niet.
Een betegeling van een vlak zonder tussen ruimtes heet een *vlakvulling*.
In het zogenaamde tegelpatroon van Cairo, zie rechts, vormen de vijfhoekige tegels tegelijkertijd een patroon van staande en liggende zeshoeken. Er zijn ook vlakvullingen die bestaan uit herhalingen van twee verschillende basisfiguren. Vrijwel altijd zijn deze basisfiguren regelmatig. Een uitzondering vormt het patroon van Penrose (zie links), dat in 1996 de kranten gehaald heeft. Je kunt je afvragen aan welke eigenschappen een basisfiguur moet voldoen om er een vlakvulling mee te kunnen maken. Dat is de onderzoeksvraag.



Probleem verkennen

De vorm van de basisfiguur speelt natuurlijk een rol. Maar welke aspecten zijn belangrijk?
De zijden moeten 'passen'.
De hoeken moeten 'passen'.
Wat betekent dat in een concreet geval?
Zoek het eerst uit voor regelmatige basisfiguren.

Wiskundige woest over wc-papier

Sir Roger Penrose, een van de grondleggers van de theorie over zwarte gaten, hoogleraar in de wiskunde te Oxford en auteur van spraakmakende boeken over het menselijk bewustzijn, is boos op Kleenex. De fabrikant van tissues en andere huishoudelijke papierwaren bedrukt een merk toiletpapier met een patroon waarop de wiskundige de rechten meent te hebben. Mevrouw Penrose ontdekte de misstand in haar plaatselijke supermarkt.

Bron: de Volkskrant 14/12/96

© Noordhoff Uitgevers bv

1 **a** Teken op ruitjespapier minimaal vijf verschillende patronen voor vlakvullingen die je met rechthoekige tegels van 3 bij 6 hokjes kunt maken.
b Waarom zijn er met tegels van 3 bij 5 hokjes minder patronen mogelijk?

2 Je kunt vlakvullingen maken met gelijkzijdige driehoeken en met vierkanten: in elk hoekpunt passen precies zes driehoeken of vier vierkanten bij elkaar. Met andere regelmatige veelhoeken lukt dat niet altijd.
a Onderzoek met welke andere regelmatige veelhoeken een vlakvulling wel mogelijk is.
b De basisfiguur van het patroon van Cairo rechtsboven op de vorige bladzijde is geen regelmatige vijfhoek, want twee van de hoeken zijn 90°.
Hoe groot zijn de andere drie hoeken?

Een regelmatige veelhoek heeft gelijke hoeken en gelijke zijden.

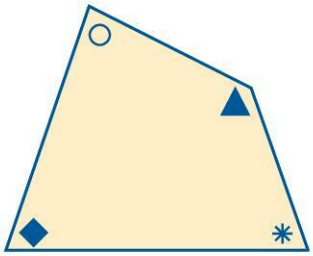
Plan maken

Of een regelmatige veelhoek geschikt is als basisfiguur voor een vlakvulling, hangt af van de hoeken van de veelhoek. Bij onregelmatige veelhoeken moet je niet alleen op de grootte van de hoeken letten, maar ook op de lengte van de zijden.
Let bij het maken van een plan op de volgende zaken:
- Ga je uit van regelmatige of onregelmatige basisfiguren?
- Wat voor aanpak kies je? Een 'theoretische' redenering of een praktische aanpak?
- Heb je extra materialen nodig?

Plan uitvoeren

Maak de nodige berekeningen en/of tekeningen.

3 **a** Onderzoek of je met een willekeurige driehoek als basisfiguur een vlak kunt vullen.
b Onderzoek of de vierhoek hiernaast geschikt is als basisfiguur voor een vlakvulling.
c Is *elke* vierhoek geschikt als basisfiguur voor een vlakvulling? Geef óf een 'waterdichte' redenering óf een tegenvoorbeeld.



Conclusie

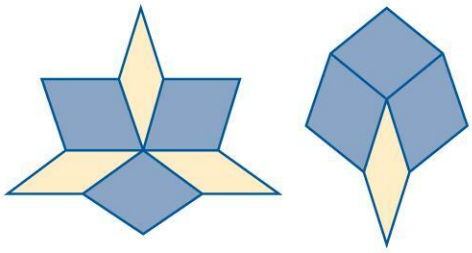
4 **a** Van welke figuren weet je nu dat ze als basisfiguur voor een vlakvulling gebruikt kunnen worden?
b Op welke aspecten moet je letten als je wilt beoordelen of een figuur kan dienen als basisfiguur voor een vlakvulling?

© Noordhoff Uitgevers bv

Suggesties voor vervolg

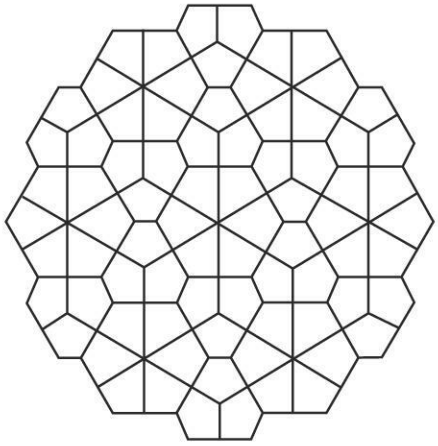
Hieronder en op de volgende bladzijde staan enkele onderzoeksopdrachten over vlakvullingen en ruimtevullingen. Bij deze opdrachten over vlakvullingen kun je met redeneren en berekenen een heel eind komen.

5 Bij de twee figuren zijn dezelfde basisfiguren gebruikt, een smalle en een brede ruit.
Alle zijden van deze ruiten zijn even lang.



- **a** Bereken van elke ruit hoe groot de hoeken zijn.
- **b** Zoek uit of het mogelijk is een vlakvulling te maken
  - met alleen de smalle ruiten.
  - met alleen de brede ruiten.
  - met als basisfiguur een ster die opgebouwd is uit smalle en brede ruiten.
- **c** Zoek uit welke samenhang bestaat tussen deze ruiten en het patroon van Penrose op bladzijde 188.

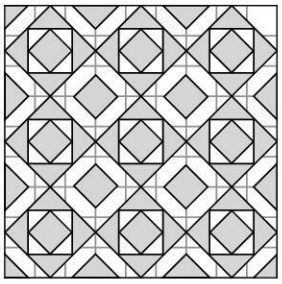
6 Deze opdracht gaat over vlakvullingen waarbij meerdere basisfiguren gebruikt worden. Deze basisfiguren kunnen verschillen in vorm of in grootte.

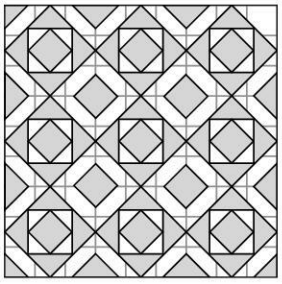


- **a** Je kunt zo'n vlakvulling maken met gelijkzijdige driehoeken en vierkanten. Geef hiervoor een duidelijke redenering en teken een gedeelte van zo'n patroon. Er zijn meer mogelijkheden!
- **b** Is het mogelijk met regelmatige driehoeken, vierhoeken en zeshoeken een vlakvulling te maken? Teken een gedeelte van het patroon of geef een redenering dat het niet kan.
- **c** In de islamitische kunst worden vaak patronen gebruikt die je ook kunt opvatten als vlakverdelingen. Vaak kun je zo'n patroon op verschillende manieren interpreteren. Het patroon hiernaast heeft als basisfiguren een vlieger en een vijfhoek.
  De vijfhoek is dezelfde als bij het patroon van Cairo op bladzijde 188 rechtsboven.
  Je kunt echter ook ruiten en zeshoeken herkennen.
  Breid de figuur uit met een extra strook.
- **d** Bedenk zelf enkele patronen voor vlakvullingen. De basisfiguren hoeven geen regelmatige veelhoeken te zijn.

© Noordhoff Uitgevers bv

7 Ongeveer 300 jaar geleden verscheen van de Franse pater Dominique Douat een boek over tegelpatronen.
Hij gebruikte als basis voor zijn patronen een vierkante tegel die hij aan weerszijden van een diagonaal verschillend kleurde. Hij gebruikte twee kleuren. Voor één tegel zijn er dan vier mogelijkheden.





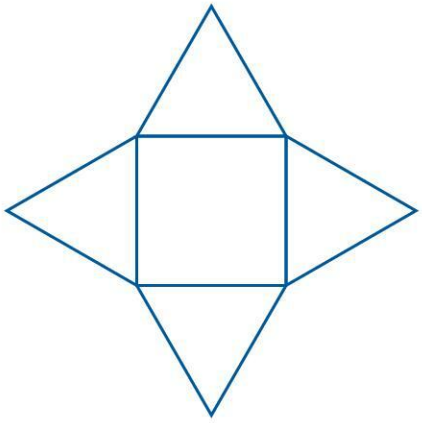
Hiernaast staan twee voorbeelden uit het boek van Douat.

a Om met zulke tegels een 2 bij 2 tegeltableau te maken bestaan er 256 verschillende mogelijkheden.
Leg dit uit.

b Hoeveel verschillende 3 bij 3 tableaus zijn er mogelijk?

c Ontwerp enkele 4 bij 4 tableaus met tegels van Douat:
A: zonder symmetrie.
B: met één symmetrieas.
C: met twee symmetrieassen.
D: met vier symmetrieassen.

8 Deze opdracht gaat om de vraag of de ruimte met een bepaalde basisvorm gevuld kan worden. Gegeven is de uitslag van een regelmatige piramide. Het grondvlak is een vierkant met zijde 4, de driehoekige zijvlakken hebben hoogte $\sqrt{8}$.



a Schets een zijaanzicht van de piramide en toon aan dat de hoogte van de piramide 2 is.

b Bereken de inhoud van deze piramide.

c Is het mogelijk met zulke piramiden een ruimtevulling te maken?
Je kunt een antwoord op deze vraag vinden door:
- van de uitslag bouwplaten te maken en te gaan stapelen, of
- een redenering te bedenken (hint: met kubussen is een ruimtevulling zeker mogelijk).

© Noordhoff Uitgevers bv

© Noordhoff Uitgevers bv

Meer oefenen 194

In ieder hoofdstuk wordt bij enkele opdrachten extra oefening aangeboden. In de extra oefeningen wordt in het algemeen hetzelfde type opdracht gegeven maar met andere getallen.

Oefenproefwerken 204

Bij ieder hoofdstuk vind je hier een oefenproefwerk. Dit oefenproefwerk kun je gebruiken om je voor te bereiden op het echte proefwerk. De oefenproefwerken zijn in het algemeen wat langer dan een proefwerk dat je in een les van 45 of 50 minuten moet maken.

In een proefwerk komen verschillende soorten opdrachten voor:

- opdrachten voor waarmee getoetst wordt of je de vaardigheden van het hoofdstuk beheerst;
- opdrachten waarmee getoetst wordt of je de vaardigheden kunt toepassen binnen een grotere wiskundige opdracht of binnen een context of binnen een situatie die meer denkstappen vraagt en dus meer inzicht.

© Noordhoff Uitgevers bv

3 Schrijf de oplossing van de vergelijkingen als een logaritme.

a $2^x = 190$ **c** $6^x = 539$

b $3^x = 12$ **d** $0{,}9^x = 2$

7 Bereken de logaritmen. Rond af op twee decimalen.

a ${}^{0{,}3}\log(245)$ **d** ${}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{50}\right)$

b ${}^{4}\log(75{,}2)$ **e** ${}^{56}\log(106\,789)$

c $\log(1056)$ **f** ${}^{1{,}67}\log(14{,}735)$

8 Los op, schrijf het antwoord als een logaritme en rond af op twee decimalen.

a $50 \cdot 0{,}8^x = 12$ **c** $4{,}2 \cdot 1{,}13^x + 1{,}47 = 10{,}29$

b $5{,}4 \cdot 4{,}2^x = 351$ **d** $1250 \cdot 1{,}0078^x = 10\,000$

11 Door de rente op een spaarrekening neemt het saldo op de rekening jaarlijks toe met 1,3%.

a Stel een vergelijking op waarmee je de verdubbelingstijd voor het saldo kunt berekenen.

b Bereken deze verdubbelingstijd. Rond af op hele jaren.

c Bij een andere spaarrekening neemt het saldo elk jaar met 1,5% toe.
Na hoeveel jaar is het saldo op deze rekening twee keer zo groot geworden? En na hoeveel jaar acht keer?

13 **a** Bereken de halveringstijd bij een jaarlijkse afname van 45%.

b Bereken de halveringstijd bij een groeifactor 0,6 per maand.

c Bereken de halveringstijd bij een afname met 7,3% per jaar.

20 Gegeven is de functie $f(x) = {}^{4{,}5}\log(x)$.

a Is de grafiek van f stijgend of dalend? Leg uit.

b In welk punt snijdt de grafiek de x-as?

c De grafiek van h is het spiegelbeeld van de grafiek van f in de lijn $y = x$.
Geef het functievoorschrift van h.

d Geef de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van h met de verticale as.

e Is de grafiek van $g(x) = {}^{0{,}9}\log(x)$ stijgend of dalend?

© Noordhoff Uitgevers bv

23 Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^{0,3}\log(x)$ en $g(x) = {}^{6}\log(x)$.

a Plot de grafieken van f en g.

b Welke grafiek is afnemend stijgend?

c Op wat voor manier stijgt of daalt de andere grafiek?

d Hoe ontstaat de grafiek van de functie $h(x) = {}^{0,3}\log(x) - 1$ uit de grafiek van f?

24 Vier functies en vier grafieken zijn gegeven.

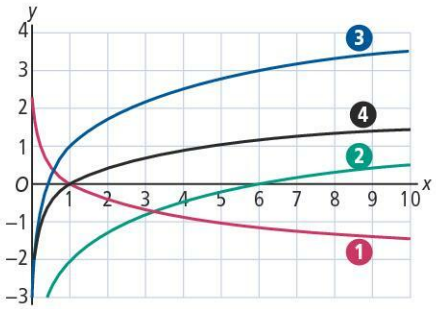
$f(x) = {}^{2\frac{1}{2}}\log(x) + 1$

$g(x) = {}^{5}\log(x)$

$h(x) = {}^{\frac{1}{5}}\log(x)$

$i(x) = {}^{2\frac{1}{2}}\log(x) - 2$

Welke grafiek hoort bij welke functie?



28 Druk x uit in y.

a $y = 4 \cdot 3^x$

b $y = 2^x + 7$

c $y = 7^{2x}$

d $y = 5 \cdot 2^x$

29 Druk q uit in p.

a $p = 2 \cdot 5^q - 1$

b $p = 20 + \left(\frac{1}{2}\right)^q$

c $p = 5 \cdot 4^{0,2q}$

d $p + 3^q = 18$

e $p + 4 \cdot 9^q = 16$

f $8p + 6 = \frac{1}{2} \cdot 2^q$

36 **a** Welke machten van 10 horen er bij de getallen op de getallenlijn?

b Bereken de waarde van het getal a.

c Welk getal ligt op deze getallenlijn precies tussen 10 en 100? En halverwege tussen 0,01 en 0,1?

d Geef het getal 32 aan op de getallenlijn.

38 Biologen hebben in het voorjaar een aantal weken lang de slakken geteld in een bepaald gebied. Het resultaat is in een grafiek verwerkt.

a Hoe kun je aan de grafiek zien dat het aantal slakken zich exponentieel ontwikkelde?

b De grafiek gaat door de punten (1, 100) en (7, 1000). Stel bij de grafiek een formule op van de vorm $N = b \cdot g^t$. Rond b af op een geheel getal en g op twee decimalen.

c Na hoeveel weken waren er ongeveer 2000 slakken? Rond je antwoord af op één decimaal.

© Noordhoff Uitgevers bv

3 Ga van elk experiment na of er een binomiale verdeling bij kan horen. Leg uit waarom niet. Formuleer in de gevallen dat de verdeling binomiaal is stochast X en geef de bijbehorende waarden van n en p.

a Vijf keer werpen met een euro; je telt het aantal keer munt.
b Je gooit een dobbelsteen net zo lang tot je een zes gegooid hebt. Je telt het aantal worpen.
c Het trekken met terugleggen van zes knikkers uit een vaas met vijf rode, vijftien blauwe en tien gele knikkers, waarbij je het aantal rode knikkers telt.
d Dezelfde situatie als bij opdracht c, maar nu trek je zonder terugleggen.

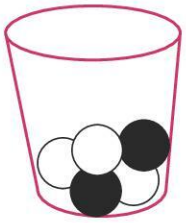
4 Ries doet mee aan wedstrijden kleiduivenschieten. Hij weet uit ervaring dat hij een kans heeft van 0,7 om raak te schieten. In elke ronde wordt tien keer geschoten.
Stochast X is het aantal keren dat Ries raak schiet.

a Waarom is de kansverdeling van X binomiaal?
b Bereken de kans dat Ries in een ronde vijf keer raak schiet.
c Bereken de kans dat hij acht keer raak schiet.
d Ries heeft bij de eerste vijf pogingen vijf keer raak geschoten.
Hoe groot is de kans dat hij bij de laatste vijf pogingen twee keer raak schiet?

7 Ilse trekt zonder terugleggen vier knikkers uit een vaas met 400 witte en 200 rode knikkers.
Stochast R is het aantal rode knikkers dat ze trekt.

a Waarom is de kansverdeling van R geen binomiale verdeling?
b Waarom kun je de kansverdeling van R wel benaderen met een binomiale verdeling?
c Geef de kansverdeling van R.

10 Een vaas heeft twee zwarte en drie witte knikkers. Je trekt acht keer met terugleggen een knikker uit de vaas.
Stochast Z is het aantal zwarte knikkers dat je trekt.



a Leg uit dat de kansverdeling van Z binomiaal is.
b Geef de waarden van n en p van de kansverdeling van Z.
c Hoe groot is $P(Z = 2)$?
d Bereken $P(Z = 3)$ en $P(Z = 5)$.

11 Stochast X is Bin(24; 0,45)-verdeeld.

a Bereken $P(X = 10)$ en $P(X = 13)$ met behulp van de formule.
b Controleer je antwoorden van opdracht a door de parameters n en p en het aantal successen in te voeren in je rekenmachine.

© Noordhoff Uitgevers bv

12 Een conciërge weet uit ervaring dat in het algemeen 12% van de leerlingen, die in een pauze iets kopen, een koek neemt. Op een dag komen 250 leerlingen iets kopen. Stochast X is het aantal van de 250 leerlingen dat een koek neemt.

a Geef de parameters van de kansverdeling van X.

b Hoe groot is de kans dat die dag precies 12% van de kopers een koek neemt?

c Maak op je rekenmachine een tabel met de kansen van stochast X en controleer daarmee je antwoord bij opdracht c.

19 Stochast X is Bin(40; 0,85) -verdeeld.
Bereken de kansen.

a $P(X \leq 30)$

b $P(X \geq 32)$

c $P(30 < X < 35)$

d $P(25 \leq X \leq 32)$

e $P(X > 34)$

f $P(X = 30)$

20 Een machine produceert pakken koffie van 250 gram. Vijf procent van de pakken koffie heeft een gewicht van minder dan 250 gram. Op een dag wordt een steekproef genomen van 120 pakken koffie.

a Bereken de kans op minstens elf pakken koffie die lichter zijn dan 250 gram.

b Hoe groot is de kans op minstens 107 en hoogstens 118 pakken koffie met een gewicht van minstens 250 gram?

24 Een agent beweert dat van alle scooters in Nederland 40% is opgevoerd. Neem aan dat hij gelijk heeft.
De politie controleert op een middag 40 scooters.

a Van hoeveel scooters in deze steekproef verwacht je dat ze zijn opgevoerd? En hoe groot is de standaardafwijking?

b Op een andere dag worden 25 scooters gecontroleerd. Stochast X is het aantal opgevoerde scooters.
Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.

25 Van een grote partij mandarijnen is 9% beschimmeld. De mandarijnen worden machinaal in netjes van 20 stuks verpakt. Daarbij wordt niet op de kwaliteit van de mandarijnen gelet.

a Hoeveel beschimmelde mandarijnen kun je in een netje verwachten?

b En wat is de standaardafwijking?

c Bereken de kans op een netje met 20 goede mandarijnen.

d Bereken de kans op een netje waarvan het aantal beschimmelde mandarijnen niet meer dan één keer de standaardafwijking afwijkt van het verwachte aantal.

© Noordhoff Uitgevers bv

4 Gegeven is de rij 100, 97, 94, 91, 88, …

n	0	1	2	3	4	5	6
$u(n)$	100	97	…	…	…	…	…

a Vul de tabel verder in.
b Geef een recursieve formule bij deze rij.
c Geef ook een recursie formule bij de rij 2, 4, 10, 28, 82, … met beginterm $v(1) = 2$.

7 Schrijf de eerste vier termen op van deze rijen.
a $u(n + 1) = 3 \cdot u(n) - 4$ met beginterm $u(0) = 3$
b $u_{n+1} = -2 \cdot u_n$ met beginterm $u(0) = 1$
c $u(n + 1) = \dfrac{1}{1 - u(n)}$ met beginterm $u(0) = \frac{1}{3}$
d $u_{n+1} = (u_n + 1)^2$ met beginterm $u_0 = 0$

12 Gegeven is de recursieve formule $m(t + 1) = 1{,}9 \cdot m(t) - 8$ met $m(0) = 10$.
Vanaf welk rangnummer is $m(t) > 1000$?

15 Een aantal jaren geleden is een gebied dat eerst in gebruik was voor landbouw teruggegeven aan de natuur. Na enkele jaren begonnen zeldzame wilde planten zich daar te vestigen.
Een bioloog heeft onderzoek gedaan naar de verspreiding van wilde orchideeën. Uit de jaarlijkse tellingen stelde hij de volgende recursieve formule op
$u(n + 1) = 0{,}001 \cdot u(n) \cdot (1400 - u(n))$.
Hierin is $u(n)$ het aantal bloeiende orchideeën in het gebied met $n = 0$ in 2018 en $u(0) = 17$.

a Bereken $u(1)$, $u(2)$ en $u(3)$.
b Bereken het aantal orchideeën in het jaar 2035.
c Plot de grafiek bij de rij u en beschrijf met behulp van de grafiek de groei van het aantal orchideeën in het gebied.

19 Bereken van de rijen bij deze formules de waarde van de term met $n = 4$ en de waarde van de term met $n = 9$.
a $u(n) = 90 - 3{,}5n$
b $t_n = (10 - n)^3$
c $p_n = \dfrac{1}{n - 6} + 3$
d $v_n = 2^n$

© Noordhoff Uitgevers bv

23 De rijen u, v en w horen bij rijen bij een lineair verband.

n	0	1	2	3	4
$u(n)$	50	46	42	38	34

n	1	2	3	4	5
$v(n)$	0	1,5	3	4,5	6

n	1	2	3	4	5
$w(n)$	60	50	40	30	20

a Stel bij elke rij een recursieve formule op.
b Stel ook bij elke rij een directe formule op.
c Bereken van elke rij de term bij $n = 10$.

24 Stel steeds een directe formule op.
a $u_{n+1} = u_n - 7$ met $u_0 = 89$
b $v(n) = v(n-1) - 4\frac{1}{2}$ met $v(1) = -52$
c w: 152, 159, 166, 173, … met $w_1 = 152$
d z: −31, −27, −23, −19, … met $z(0) = -31$

31 De rijen u, v en w horen bij rijen bij een exponentieel verband.

n	0	1	2	3	4
u_n	88	44	22	11	5,5

n	1	2	3	4	5
v_n	1	3	9	27	81

n	1	2	3	4	5
w_n	−6	24	−96	384	−1536

a Stel bij elke rij een recursieve formule op.
b Stel ook bij elke rij een directe formule op.
c Bereken van elke rij de term bij $n = 10$.

32 Stel steeds een directe formule op.
a $u_{n+1} = u_n \cdot \frac{1}{3}$ met $u_0 = 60$
b $v(n) = -\frac{2}{3} \cdot v(n-1)$ met $v(1) = 518$
c w: 20, 30, 45, $67\frac{1}{2}$ met $w_1 = 20$
d z: 2000; 500; 125; 31,25 met $z(0) = 2000$

36 Meneer Bos wil deze zomer mee gaan lopen in de Vierdaagse van Nijmegen. Hij gaat van tevoren goed trainen.
In de eerste week van de training loopt hij in totaal tien kilometer. Elke volgende week loopt hij acht procent verder dan de week daarvoor.
a Leg uit dat de wekelijkse afstanden die meneer Bos loopt een rij vormen bij een exponentieel verband.
b De zestiende week is de laatste week waarin meneer Bos traint.
Bereken hoeveel km hij in deze week loopt.

© Noordhoff Uitgevers bv

5 Een bioloog heeft van 1000 wormen vastgesteld dat de lengte in cm Norm(6,1; 1,3)-verdeeld is.

- **a** Bereken hoeveel procent van de wormen een lengte heeft tussen de 5,0 cm en 6,0 cm.
- **b** Hoeveel procent van deze wormen is korter dan 6,5 cm?
- **c** Bereken de kans dat een willekeurige worm een lengte heeft van meer dan 6,0 cm.
- **d** De bioloog pakt willekeurig vier wormen. Bereken de kans dat deze vier wormen allemaal een lengte hebben van meer dan 6,0 cm.
- **e** Hoeveel wormen van de 1000 wormen hebben naar verwachting een lengte van meer dan 8,0 cm?

10 De duur in dagen van voldragen zwangerschappen is bij de mens Norm(280, 12)-verdeeld.

- **a** Bereken de kans dat een zwangerschap minstens 275 dagen duurt.
- **b** Hoelang kan een zwangerschap duren als zij behoort tot de 10% kortste voldragen zwangerschappen?
- **c** Hoelang duurt een zwangerschap minimaal als zij behoort tot de 15% langste zwangerschappen?

12 In een 10 km lange veldloop is de tijd van de deelnemers in minuten Norm(61,3; 9,7)-verdeeld.

- **a** Binnen hoeveel tijd finishten de 20% snelste deelnemers?
- **b** Hoeveel minuten zijn de 10% langzaamste deelnemers minimaal onderweg geweest?
- **c** Tussen welke tijdgrenzen zit de middelste 60% van de deelnemers?
- **d** Een verslaggever interviewt willekeurig vijf deelnemers. Bereken de kans dat elk van deze vijf deelnemers minder dan 65 minuten over de veldloop hebben gedaan.

17 De lengte van de songs in de popmuziek die in een jaar worden uitgebracht blijkt redelijk normaal verdeeld.

- **a** In 2000 was het gemiddelde 242 seconden. Bereken de standaardafwijking als je weet dat 22% van de songs minder dan 220 seconden duurden.
- **b** De lengte van de songs in 1992 had een groot gemiddelde en een grote spreiding. De standaardafwijking was 33 seconden en 67% van de songs duurde minstens vier minuten. Bereken de gemiddelde lengte van een song uit 1992.
- **c** In de jaren zestig waren de songs veel korter. De middelste 50% van de in 1965 uitgebrachte songs hadden een lengte tussen de 150 seconden en 172 seconden. Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van de lengte van de songs.

© Noordhoff Uitgevers bv

18 Elk jaar laat de natuurkundedocent een proef uitvoeren waarbij de vwo-leerlingen hun reactiesnelheid moeten meten. Elk jaar blijkt de reactietijd normaal verdeeld.

a In 2018 hadden 86 van de 113 leerlingen een reactietijd van minder dan 0,9 seconden. De gemiddelde reactietijd was 0,83 seconden.
Bereken de standaardafwijking van de reactietijd.

b In 2019 had 12% van de vwo-leerlingen een reactietijd van meer dan 1,0 seconden en was de standaardafwijking van de reactietijd 0,106 seconden.
Bereken de gemiddelde reactietijd.

22 Het aantal parkeerboetes dat in Zwolle per dag wordt uitgeschreven, is bij benadering Norm(41,8; 7,1)-verdeeld.
Bereken in vier decimalen.

a $P(35 < X < 50)$

b $P(X \leq 55)$

c $P(40 \leq X \leq 45)$

d $P(X \geq 42)$

e $P(X = 43)$

f $P(41 \leq X < 43)$

25 Een hobbywinkel verkoopt kraaltjes in doosjes. Het aantal kraaltjes in een doosje is normaal verdeeld. Een doosje bevat gemiddeld 26,1 kraaltjes met een standaardafwijking van 4,7 kraaltjes.

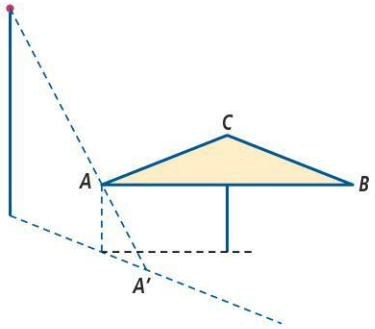
a Jo koopt een willekeurig doosje kraaltjes.
Bereken de kans dat Jo tussen de 25 kraaltjes en 35 kraaltjes heeft.

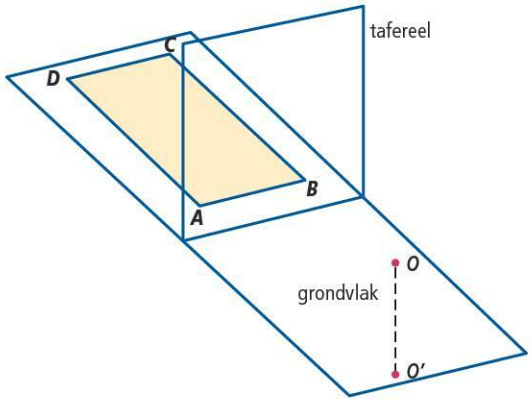
b Hoeveel doosjes met tussen de 25 kraaltjes en 35 kraaltjes heb je naar verwachting bij het kopen van 25 willekeurige doosjes?

c De stochast T is het totaal aantal kraaltjes bij het kopen van 25 willekeurige doosjes.
Bereken $E(T)$ en $\sigma(T)$

d Bereken de kans dat het totaal aantal kraaltjes in de 25 doosjes meer dan 600 is.

© Noordhoff Uitgevers bv





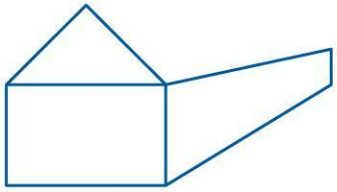
4 Links is een driehoekig bord op een paaltje getekend. Het bord staat in de buurt van een lantaarn. De lantaarn en het paaltje staan beide verticaal. Het schaduwbeeld van punt A is al getekend.

a Beschrijf hoe het schaduwbeeld A' van punt A is getekend.
b Teken op dezelfde manier de schaduw van punten B en C.
c Teken de schaduw van het bord en het paaltje.

6 Rechts zie je hoe een rechthoek $ABCD$ in het grondvlak ligt. Teken het beeld van deze rechthoek op het tafereel.

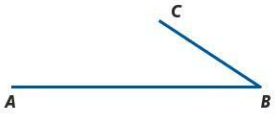
11 Van een huis wordt een eenpuntsperspectieftekening gemaakt. Je ziet het begin van de tekening.

a Teken het verdwijnpunt van het huis.
b De achtergevel van het huis is evenwijdig aan de voorgevel. Teken de nok van het huis en de zichtbare dakrand van de achtergevel erbij.



15 Je ziet een begin van een tekening in eenpuntsperspectief van drie gelijk, naast elkaar liggende rechthoekige vloertegels. Van de meest rechtse tegel met hoekpunten A, B, C en D zijn drie hoekpunten gegeven.

a Teken met behulp van de lijn door de punten B en C het verdwijnpunt V.
b Waarom gaat de lijn AD na verlenging ook door V?
c Maak de tekening van de meest rechtse tegel af.
d Teken de andere twee tegels er aan de linkerkant bij.



© Noordhoff Uitgevers bv

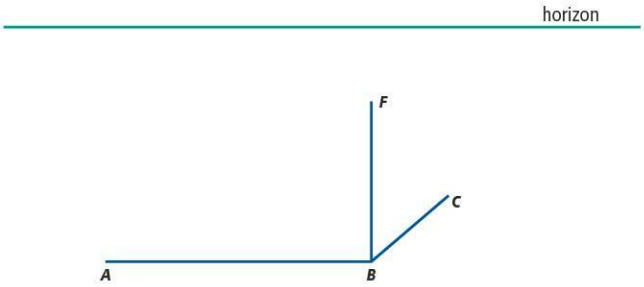
17 Sanne Vast heeft deze tekening gemaakt.
Ga na of de regels voor tekenen met eenpuntsperspectief correct zijn toegepast in de tekening.
Geef aan waarom wel of waarom niet.

19 Van de eenpuntsperspectieftekening van een balk *ABCD.EFGH* is een begin gemaakt.

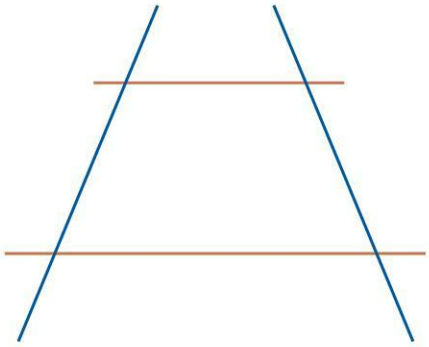
a Maak deze tekening af.

b Teken aan de linkerkant van de balk *ABCD.EFGH* een even grote balk.

c Teken bovenop de balk *ABCD.EFGH* een even grote balk.



22 Je ziet een eenpuntsperspectieftekening van een deel van een spoorrail met twee, in werkelijkheid even grote, bielzen. Een derde biels, gelijk aan de andere twee, ligt precies tussen de twee gegeven bielzen in.
Teken deze biels in de tekening erbij.



© Noordhoff Uitgevers bv

1 Leg bij elk van de logaritmen uit of je deze kunt berekenen zonder je rekenmachine te gebruiken. Licht je antwoorden toe.

a $^{2}\log(8)$

b $^{5}\log(625)$

c $^{6}\log(12)$

d $^{3}\log(1)$

2 Los op. Geef je antwoord met een logaritme en geef een benadering in drie decimalen.

a $4^{2x} = 7$

b $8 \cdot 0{,}6^{t+5} = 20$

3 Op een eiland leeft een populatie muizen. Voor een onderzoek schat men het aantal muizen elk jaar op 1 juli. Op basis van de schattingen stelt men vast dat de populatie met ongeveer 8% per jaar afneemt. In 2014 schatte men de populatie muizen op 1 juli op 35 000.

a Stel een formule op voor het verband tussen de grootte van de populatie muizen P en de tijd in jaren t. Neem $t = 0$ op 1 juli 2014.

b Bereken de halveringstijd van het aantal muizen op dit eiland. Rond je antwoord af op hele jaren.

c Bereken in welk jaar de populatie voor het eerst onder de 10 000 muizen bestaat.

d Op een ander eiland neemt het aantal muizen juist langzaam toe. Jaarlijks groeit die populatie met 1,5%.
Bereken hoelang het duurt voordat deze populatie in omvang verdubbeld is. Rond je antwoord af op hele jaren.

4 Kokend water heeft een temperatuur van 100° C. De tijd t in minuten die het water nodig heeft om af te koelen tot een temperatuur T in graden Celsius, is te berekenen met de formule $t = 217{,}5 - 113 \cdot \log(T - 16)$.

a Bereken na hoeveel minuten de temperatuur van het water gezakt is tot 50° C.

b Bereken de temperatuur van het water na anderhalf uur.

© Noordhoff Uitgevers bv

5 Druk t uit in N.

a $N = 5^{t+3}$

b $N = 16^{0{,}25t+2}$

c $N = 3 \cdot 2^{2t-1}$

d $N = 7^{t+6} - 10$

6 Bij een bank kun je in een deposito voor langere tijd een spaarbedrag vastzetten. Je kunt je spaargeld dan tussentijds niet opnemen. In ruil daarvoor krijg je van de bank een hogere spaarrente.
Iemand heeft op 1 januari 2003 in een deposito bij een bank € 1.000,- gezet. De bank betaalt daarover gedurende 30 jaar een vaste rente van 4,1% per jaar.

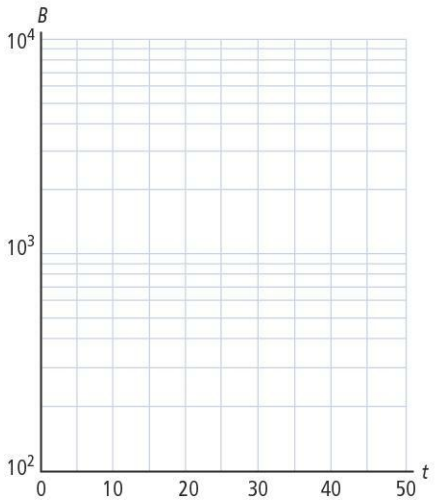
a Stel een formule op die het verband weergeeft tussen het spaarbedrag B in euro's en de tijd t in jaren.

b Vul de tabel verder in.

tijd t in jaren	0	10	20	30
spaarbedrag B in euro's	1000	.....	.....	.....

c Verwerk de gegevens uit de tabel van opdracht b in het assenstelsel.

d Lees uit de grafiek van opdracht c af hoelang het ongeveer duurt totdat het spaarbedrag is verdubbeld.

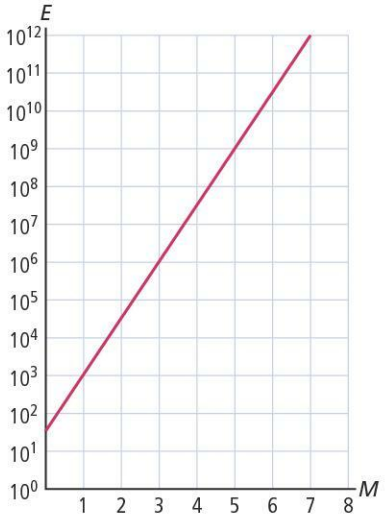


7 De sterkte van een aardbeving volgens de schaal van Richter, noemt men de magnitude M van een aardbeving. Deze magnitude is een maat voor de hoeveelheid energie die bij een aardbeving vrijkomt.
Het verband tussen de vrijkomende hoeveelheid energie E in kilojoules en de magnitude M volgens de schaal van Richter wordt gegeven door de formule $E = 25 \cdot 32^M$.

a Bereken hoeveel kilojoule energie vrijkwam bij een aardbeving in de buurt van Hellum (Noordoost-Groningen) in september 2015, die een magnitude had van $M = 3{,}1$.

b Bij de aardbeving in Japan van 2011 kwam $8{,}8 \cdot 10^{14}$ kilojoule aan energie vrij.
Bereken de magnitude M van deze aardbeving.

c De grafiek bij de gegeven formule heeft op de verticale as een logaritmische schaalverdeling.
Lees af bij welke magnitude er $6 \cdot 10^9$ kilojoule vrijkomt.
Leg uit hoe je dit doet.



© Noordhoff Uitgevers bv

1 In een grote partij USB-sticks is 3% onbruikbaar. Een handelaar neemt een steekproef ter grootte van tien. Stochast X is het aantal onbruikbare USB-sticks in de steekproef.

a Leg uit dat stochast X binomiaal verdeeld is en geef de waarden van n en p.

b Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat in de steekproef van tien USB-sticks er één of meer onbruikbaar zijn.

c Hoe groot is de kans dat in een partij van 100 USB-sticks er meer dan 10 onbruikbaar zijn? Rond je antwoord af op vier decimalen.

In een doos zitten 1000 USB-sticks.
Een bedrijf wil voor een reclameactie meerdere dozen inslaan. Ga ervan uit dat in elke doos met 1000 USB-sticks er 40 onbruikbaar zijn. Voor de controle of een doos goed genoeg is voor de reclameactie neemt het bedrijf bij iedere doos een steekproef ter grootte van 20. Als in deze steekproef drie of meer onbruikbaar zijn, dan wordt de hele doos met USB-sticks afgekeurd.
De kans dat een doos wordt afgekeurd is ongeveer 0,02.

d Bereken deze kans in vier decimalen.

e Het bedrijf bestelt 10 dozen.
Bereken de kans dat deze 10 dozen allemaal goedgekeurd worden. Geef je antwoord in hele procenten.

2 Lieke heeft een zak met 10 droptoffees en 10 karameltoffees. Ze neemt zonder terugleggen vier keer een toffee uit de zak.

a Leg uit of het aantal droptoffees dat ze pakt binomiaal verdeeld is.

b Bereken de kans op twee droptoffees.

c Amaya heeft een bak met 200 toffees, waarvan 10 droptoffees. Arie pakt willekeurig vier toffees.
Stochast X is het aantal droptoffees.
Leg uit dat je de kansverdeling van X goed kunt benaderen met een binomiale verdeling.

d Vul in de tabel de binomiale benadering van de kansen in.

u	0	1	2	3	4
$P(X = u)$	…	…	…	…	…

© Noordhoff Uitgevers bv

3 De stochast X is $\text{Bin}\left(100, \frac{2}{3}\right)$-verdeeld.
Bereken in vier decimalen.

a $P(X \leq 60)$

b $P(X > 60)$

c $P(50 \leq X < 70)$

d $P(X = 80)$

4 Mevrouw Huigenbosch, de docent van het vak M&O, geeft een multiplechoiceproefwerk met 10 vierkeuzevragen.

a Bereken de kans dat Phebe precies drie vragen goed heeft als ze alles gokt. Rond je antwoord af op vier decimalen.

b Bereken de kans dat Anne minstens zes vragen goed heeft als ze alles gokt. Rond je antwoord af op vier decimalen.

c Hoe groot is de verwachtingswaarde van het aantal goede antwoorden als je alle vragen gokt?

d Hoe groot is de standaardafwijking van het aantal goede antwoorden? Geef je antwoord in twee decimalen.

e Thom weet zeker dat hij de helft van alle vragen goed heeft. De andere helft gokt hij.
Bereken de kans dat Thom minstens zes vragen goed heeft. Rond je antwoord af op vier decimalen.

f Hoeveel van de tien vragen moet je zeker weten om te mogen verwachten dat je zeven vragen goed hebt?

5 In een suikerfabriek worden machinaal kilopakken suiker gevuld. Het minimaal toegestane gewicht van een pak suiker is 980 gram. Lichtere pakken worden machinaal verwijderd. Door een wat onzuivere afstelling van de sorteermachine wordt af en toe een te licht pak doorgelaten. Hierdoor heeft 0,5% van de pakken een lager gewicht dan toegestaan.
De pakken suiker worden verpakt in dozen van vijftig stuks.

a Hoe groot is de kans dat een doos geen enkel te licht pak bevat? Rond je antwoord af op vier decimalen.

b Hoeveel te lichte pakken verwacht je in een doos? En hoe groot is de standaardafwijking?

c Als een keuringsdienst in een doos een te licht pak aantreft, wordt de gehele doos afgekeurd. Op een dag worden van twintig dozen alle pakken gecontroleerd.
Van hoeveel dozen kun je verwachten dat ze worden afgekeurd?

© Noordhoff Uitgevers bv

1 Gegeven is de rij getallen $u(1) = 20$, $u(2) = 13\frac{1}{2}$, $u(3) = 7$ en $u(4) = \frac{1}{2}$.

- **a** Is dit een rij bij een lineair verband of een exponentieel verband?
- **b** Geef de termen van deze rij die horen bij $n = 5$ en $n = 6$.
- **c** Geef een recursieve formule die bij deze rij hoort.
- **d** Geef ook een directe formule bij deze rij.

2 Een stuiterbal wordt 100 cm boven de grond losgelaten. Na elke stuit verliest de bal 10% van zijn hoogte. De hoogtes in centimeter na elke stuit vormen een rij u.

- **a** Bereken de eerste vijf termen van deze rij.
- **b** Geef bij deze rij een recursieve en een directe formule met $u(0) = 100$.

3 Gegeven is de rij u met recursieve formule $u(n + 1) = 450 - 0{,}8 \cdot u(n)$ met $u(0) = 500$.

- **a** Bereken $u(1)$ tot en met $u(4)$.
- **b** Naar welke waarde nadert de waarde van $u(n)$ als n heel groot wordt? Licht je werkwijze toe.

4 Bij de geboorte van Daniël op 27 november besluiten zijn vader en moeder een spaarrekening voor hem te openen. Ze storten € 1000,- op deze spaarrekening met een rente van 1,2% per jaar. Ga ervan uit dat dit rente percentage ongewijzigd blijft en dat het rentebedrag elk jaar op 27 november wordt bijgeschreven. De jaarlijkse bedragen op de spaarrekening op 27 november vormen een rij getallen.

- **a** Geef een recursieve formule van deze rij.
- **b** Hoeveel geld staat op de spaarrekening als Daniel 18 jaar wordt?
- **c** De ouders van Daniël vinden het te verwachten bedrag op 18 jarige leeftijd te laag en besluiten om elk jaar op de verjaardag € 500 bij te storten op de spaarrekening tot en met de 18e verjaardag.
  Stel een recursieve formule op waarmee je het bedrag op de spaarrekening na t jaar kan berekenen.
- **d** Hoe groot is het bedrag dat Daniël nu op zijn spaarrekening kan verwachten op zijn 18e verjaardag?

© Noordhoff Uitgevers bv

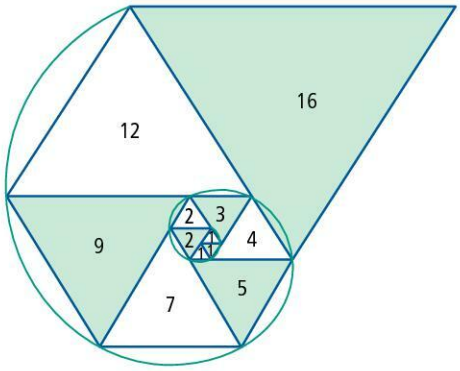
5 In de figuur zie je de eerste vier zogeheten vierkantsgetallen.

a Hoeveel stippen heeft het vierkantsgetal met rangnummer 5?

b Geef een directe formule van de rij vierkantsgetallen.

c Schrijf de eerste vijf termen op van de rij die de aantallen rode stippen in de vierkantsgetallen weergeeft en geef van deze rij een directe formule.

6 De figuur is opgebouwd uit gelijkzijdige driehoeken. Het getal in een driehoek geeft de lengte van de zijden aan.
Op deze manier ontstaat de rij P:
1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, … .



a Je kunt de figuur voortzetten.
Onderzoek welke getallen in de volgende twee driehoeken komen te staan.

b Leg uit dat je voor een recursieve formule de drie begintermen 1, 1, 1 nodig hebt.

c Geef een recursieve formule van deze rij getallen.

7 Aan de Friese Elfstedentocht op de fiets die elk jaar op tweede Pinksterdag wordt gehouden, kunnen sinds 1987 maximaal 15 000 fietsers deelnemen.
In 1987 zijn er 12 300 fietsers die willen deelnemen. Voor het aantal personen dat zich elk jaar inschrijft voor deelname geldt in de eerste jaren na 1987 de recursieve formule
$A(t + 1) = 1{,}09 \cdot A(t) - 512$ met $t = 0$ in 1987.

a Bereken in welk jaar voor het eerst op grond van deze formule verwacht mag worden dat het maximale aantal deelnemers bereikt wordt.

b Sinds 2000 zijn er elk jaar tussen 16 000 en 19 000 fietsers die willen deelnemen. In 2010 is dit aantal 18 049. Neem aan dat voor de jaren daarna de recursieve formule $A(t + 1) = a \cdot A(t) - 470$ geldt voor het aantal fietsers dat wil deelnemen, met $t = 0$ in 2010.
Onderzoek bij welke waarden van a geldt dat dit aantal in de jaren na 2010 zich niet groter wordt dan 19 000. Geef je antwoord in drie decimalen.

© Noordhoff Uitgevers bv

1 Een chocoladefabriek maakt pindarotsjes. Het gewicht van de geproduceerde pindarotsjes is normaal verdeeld met een gemiddelde van 20 gram en een standaardafwijking van 2,5 gram.
Alleen de rotsjes die een gewicht hebben tussen 18 gram en 22 gram zijn geschikt voor de verkoop. De rotsjes worden verpakt in doosjes van verschillende formaten. Zonder verdere maatregelen komen er rotsjes die ongeschikt zijn voor de verkoop in zo'n doos terecht.

a Bereken hoeveel procent van de pindarotsjes ten onrechte terechtkomt in een doos voor de verkoop.

b De fabriek heeft een sorteermachine aangeschaft met de bedoeling om te kleine en te grote pindarotsjes uit de productie te verwijderen. Het gemiddelde gewicht van de pindarotsjes dat wordt doorgelaten is 20 gram met een standaardafwijking van 1,5 gram.
Bereken de kans dat een doosje waarin tien pindarotsjes worden verpakt een vulgewicht heeft van minder dan 190 gram.

De chocoladefabriek krijgt ondanks het inzetten van de sorteermachine toch nog klachten van klanten. Deze klanten klagen over te veel kleine pindarotsjes in een doos.
De technische dienst van de chocoladefabriek besluit daarop het gemiddelde van de sorteermachine te verhogen. De standaardafwijking blijft 1,5 gram.

c Op welk gemiddelde moet de sorteermachine worden ingesteld zodat het percentage pindarotsjes dat eigenlijk te klein is, lager is dan 1%?

d De chocoladefabriek kan een betere sorteermachine kopen waarmee je een kleinere standaardafwijking krijgt. De chocoladefabriek wil beslist dat het gemiddelde van haar pindarotsjes op 20 gram blijft. Welke standaardafwijking moet zij vragen zodat minimaal 97% van de pindarotsjes een gewicht heeft van meer dan 18 gram?

2 De Maremmen Berghond van Marlies is zwanger. Het aantal puppy's dat bij een Maremmen Berghond geboren wordt, is Norm(6,6; 2,6) -verdeeld.

a Bereken de kans dat de hond van Marloes minder dan 4 puppy's krijgt.

b Bereken de kans dat deze hond minstens vier maar hoogstens acht puppy's krijgt.

c Bereken de kans op precies vijf puppy's.

© Noordhoff Uitgevers bv

3 De trainingstijden van John bij tien kilometer hardlopen zijn normaal verdeeld met een gemiddelde van 41 minuten en een standaardafwijking van 53 seconden.

- **a** Bereken hoeveel procent van de trainingstijden van John onder de 40 minuten ligt.
- **b** Binnen welke tijd liggen zijn 30% snelste trainingslopen?
- **c** Binnen welke grenzen liggen zijn middelste 60% trainingslopen?

4 In de koffiekamer van een bedrijf staat een automaat waaruit diverse warme dranken getapt kunnen worden. Voor elke soort drank geldt dat de geleverde hoeveelheid normaal verdeeld is, maar gemiddelde en standaardafwijking hangen af van de gekozen drank.

- **a** Voor espresso geldt dat de gemiddelde hoeveelheid 42 mL is met een standaardafwijking van 3,3 mL.
  Bereken de kans dat een kopje espresso tussen de 35 mL en 45 mL bevat.
- **b** De gemiddelde hoeveelheid koffie is 121 mL. De gebruikte kopjes hebben een inhoud van 135 mL. De leverancier van de automaat garandeert dat in minder dan 0,1% van de gevallen er zoveel koffie wordt geleverd dat het kopje overstroomt.
  Bereken hoe groot de standaardafwijking hoogstens is.
- **c** De automaat levert gemiddeld 119 mL chocolademelk met een standaardafwijking van 4,1 mL. Sjaak gebruikt altijd zijn eigen mok met een inhoud van 260 mL om chocolademelk te tappen. Omdat de mok groot genoeg is, tapt hij per keer twee porties.
  Bereken de kans dat Sjaak hoogstens 230 mL chocolademelk krijgt.

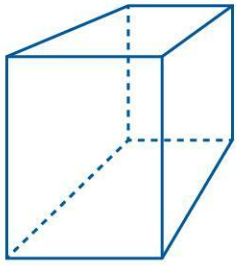
5 De inhoud van potjes jam is normaal verdeeld met een gemiddelde van 350 gram en een standaardafwijking van 20 gram. De potjes zelf hebben een gemiddeld gewicht van 240 gram met een standaardafwijking van 10 gram.

- **a** Bereken het gemiddelde gewicht van een potje met jam.
- **b** Bereken ook de bijbehorende standaardafwijking.
- **c** Bereken de kans dat een potje jam een totaal gewicht heeft van meer dan 600 gram.
- **d** Bereken de kans dat in een doos van 12 potjes jam geen enkel gevuld potje meer weegt dan 600 gram.
- **e** Bereken de kans dat alle 12 gevulde potjes samen meer wegen dan 7,3 kg.

© Noordhoff Uitgevers bv

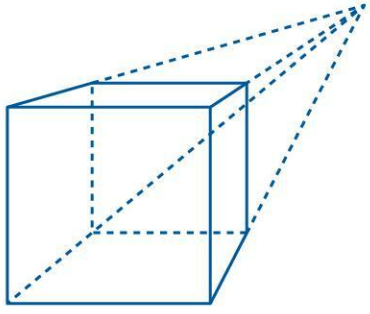
1 Hiernaast staat een schilderij van Dirk Bouts, Het Laatste Avondmaal (1465).

a Onderzoek of het schilderij in eenpuntsperspectief is getekend door te controleren of de regels voor tekenen in eenpuntsperspectief correct zijn toegepast.
b Geef van elk van de drie hoofdrichtingen twee voorbeelden.
c Teken het verdwijnpunt en de horizon.
d Er liggen vierkante tegels op de vloer.
Teken de verdwijnpunten van de diagonalen van de tegels.



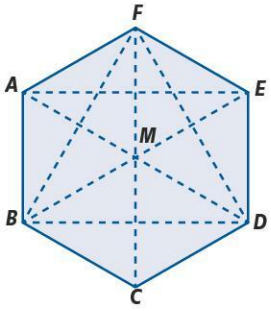
2 De balk is in eenpuntsperspectief getekend.
a Verdeel het rechterzijvlak in vier even grote rechthoeken.
b Teken links van de gegeven balk een even grote balk ertegenaan.

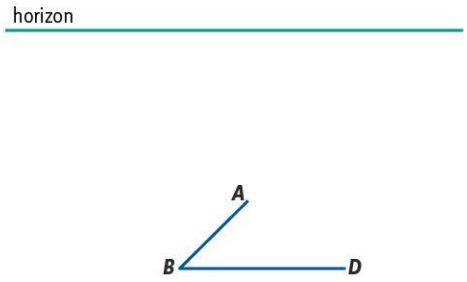
3 De kubus is in eenpuntsperspectief getekend.
Welke van de beweringen passen bij deze tekening? Verklaar je antwoord.



A Het oog van de tekenaar ligt hoger dan het horizontale vlak waar het bovenvlak van de kubus in ligt.
B Een vierkant is in een perspectief tekening niet altijd een vierkant.
C Een vierkant is in een perspectief tekening niet altijd een vierhoek.
D De tekenaar staat in het midden voor het voorvlak van de kubus.
E De tekenaar staat rechts van het verticale vlak waar het rechter zijvlak van de kubus in ligt.

© Noordhoff Uitgevers bv





4 In de regelmatige zeshoek zijn de diagonalen getekend.

a Naast de zeshoek is een begin gemaakt met een tekening in eenpuntsperspectief van de zeshoek.
Teken rechthoek $ABDE$ in perspectief.

b Welke zijden van de zeshoek zijn evenwijdig aan zijde AD?

c Maak de eenpuntsperspectieftekening van zeshoek $ABCDEF$ af.

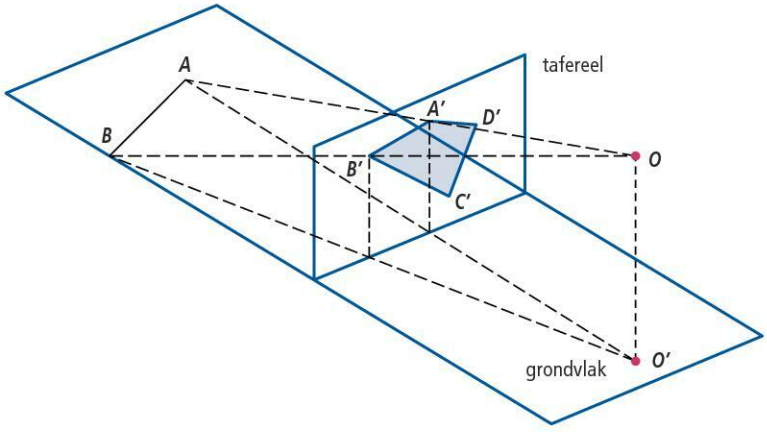
5 Op foto 1 zie je een zogenoemde anamorfose, getekend door een groepje leerlingen. De afbeelding is bedoeld om vanuit een bepaalde gezichtshoek te bekijken. Foto 2 is van dezelfde straattekening, maar is van de andere kant genomen.

a Om te doorgronden hoe je zo'n anamorfose kunt maken, gebruik je centrale projectie en een tafereel. Rechthoek $A'B'C'D'$ is getekend in het tafereel.
Teken de bijbehorende figuur $ABCD$ in het grondvlak.

b Om foto 1 te maken moet de fotograaf in punt O' van het grondvlak staan en heeft hij de lens op de hoogte van het oog O gehouden.
Bij het maken van foto 2 stond de fotograaf op een andere plaats.
Geef een mogelijke plaats van de fotograaf aan in je tekening van opdracht a.

1

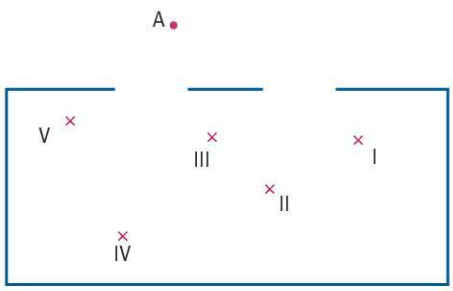
2



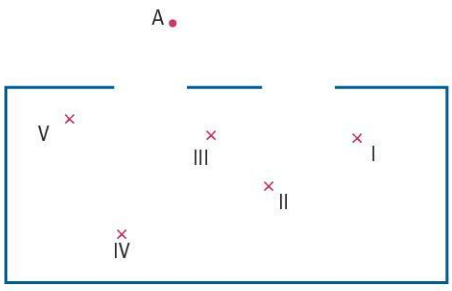
© Noordhoff Uitgevers bv

16 Perspectief

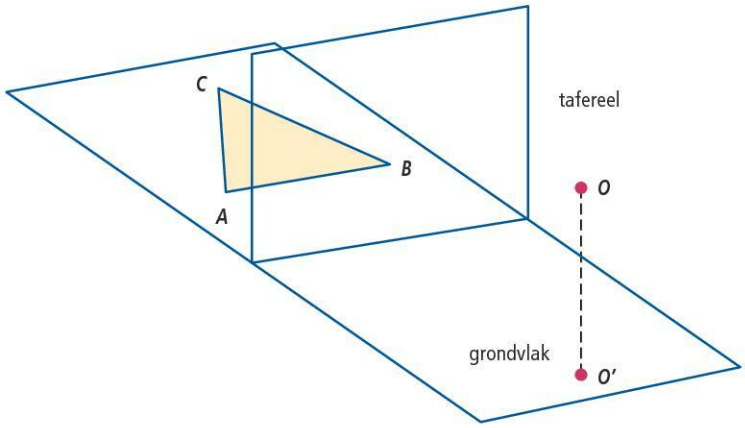
V2c



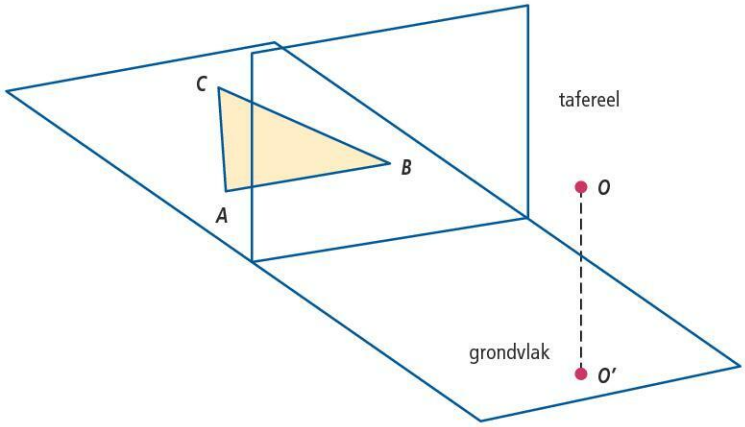
V2d



6

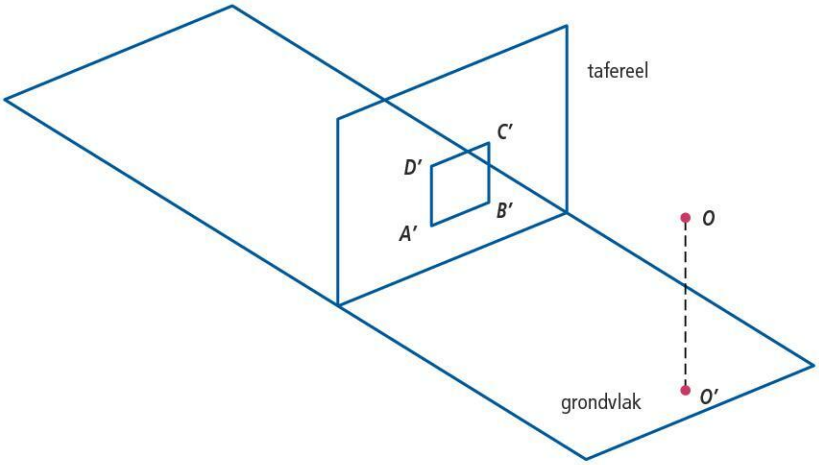


7



© Noordhoff Uitgevers bv

U**1**



E**6**

B
beeld 151
beginhoeveelheid 79
beginterm 81
binomiale verdeling 51

C
centrale projectie 151
centrale punt 151
continuïteitscorrectie 133
cumulatieve kans 58

D
directe formule 89

E
eenpuntsperspectief 159
exponentieel verband 79

G
gemiddelde berekenen bij normale verdeling 129
grafiek van een exponentiële functie 9
grafiek van een logaritmische functie 20
grenswaarde berekenen bij normale verdeling 125
groeifactor 80
groeifactor per tijdseenheid 8
grondtal 11

H
halveringstijd 15
hoofdrichtingen 159
horizon 159

K
kansverdeling 48
kijklijn 148

L
lineair verband 78
logaritme 11
logaritmische schaal 22
log-schaal 22

O
oog 151
oogpunt 151

P
parameters van een binomiale verdeling 51
percentage berekenen bij normale verdeling 121
perspectieftekening 155

R
rangnummer 81
recursie 81
recursieve formule 81
rekenregels voor stochasten 118
richtingscoëfficiënt 78
rij 80
rij bij een exponentieel verband 96
rij bij een lineair verband 92

S
startgetal 78
standaardafwijking berekenen bij normale verdeling 129
standaardafwijking van een binomiale verdeling 63
stochast 48

T
tafereel 151
tekening in eenpuntsperspectief 162
tekenvlak 151
termen 80
toevalsvariabele 48

U
uitdrukken in 22

V
verdubbelingstijd 14
verdwijnpunt 155
verwachtingswaarde 118
verwachtingswaarde van een binomiale verdeling 63

W
$\sqrt{n}$-wet 119

© Noordhoff Uitgevers bv

Ontwerp omslag G2K Creative Agency, Groningen/Amsterdam
Fotografie omslag Getty Images
Ontwerp binnenwerk Ebel Kuipers grafisch ontwerp, Sappemeer
(Paul Kooi en G2K Creative Agency, Groningen/Amsterdam)
Illustraties Peter Fitzverploegh, Utrecht
Technisch tekenwerk Integra Software Services, India
Beeldresearch Daliz, Den Haag

Fotoverantwoording
iStockphoto/ Getty Images, Amsterdam: p. 6-7, 10, 13, 40-41, 50, 64, 86, 110-111, 176-177, 183, 184, 194-195
Shutterstock, New York: p. 9, 14, 18, 22, 23, 24, 31, 36, 56, 60, 62, 65, 66, 68, 71, 73, 75, 84, 88, 91, 92, 94, 96, 101, 106o, 109, 116-117, 120, 122, 124, 128, 134, 135, 136, 143o, 155, 158b, 168, 169o, 185, 186, 200, 203, 208, 212, 213
123RF, San Francisco: p. 16
Wikimedia Commons: p. 40
Moment/ Getty Images, Amsterdam: p. 46-47
Dave de Bruin/ Daliz, Den Haag: p. 49, 54b, 56b, 142, 143b
Yvonne Smits/ Nationale Beeldbank, Den Haag: p. 53
Actime, Helmond: p. 54o
ANP/ Hans van Rhoon, Den Haag: p. 63
Julius Kielaitis/ Shutterstock.com: p. 67
TASS/ Getty Images, Amsterdam: p. 76-77
Alamy/ Image Select, Wassenaar: p. 89, 110, 146-147, 160r
Studio Jan van der Ploeg, Amsterdam: p. 106b
VanderWolf Images/ Shutterstock.com: p. 125
Examenblad.nl: p. 130
Karolis Kavolelis/ Shutterstock.com: p. 141
Hielke Peereboom, Nieuwehorne: p. 148, 149
Bénédicte Miyamoto/ Universiteit Parijs, Parijs: p. 154
Hans Vredeman de Vries/ Wikimedia Commons: p. 158o
www.ikkrijgthuisonderwijs.nl/perspectief-tekenen: p. 160l
Jacquelien Bredenoord/ www.beterbijleren.nl: p. 160m
AKG/ Image Select, Wassenaar: p. 167, 169b
Hans Vredeman de Vries/ Koninklijke Bibliotheek; Den Haag: p. 172
The Menil Collection, Houston Photo: Nidia Perez, Houston -
Artists Rights Society (ARS), New York/ SIAE, Rome: p. 175b
De Agostini Picture Library / Getty Images Plus, Getty Images, Amsterdam: p. 175o
US National Library of medicine, Bethesda: p. 176l
ANP/ Science Photo Library, Den Haag: p. 176r
Elly van de Merwe, Drijbe: p. 181
Cultura/ Getty Images, Amsterdam: p. 182-183
Pim Rusch, Leiden: p. 187
Sanne Vast, Delfzijl: p. 205
Artinflanders.be/ M Museum, Leuven: p. 214
Leon Keer/ Streetpaininting 3D/ Algomas Art Projects, Utrecht: p. 215

© Noordhoff Uitgevers bv

LEERBOEK

FLEX

WISKUNDE C

VWO DEEL 3

Met FLEX heb je:

Boeken die je mag houden

- elk schooljaar krijg je een nieuw boek
- dit boek mag je houden om in te markeren en te werken
- zo wordt je boek een effectief leermiddel

Een persoonlijke digitale leeromgeving

- waarin je wordt uitgedaagd om het beste uit jezelf te halen
- met oefentoetsen, interactieve opdrachten en feedback
- en met inzicht in je resultaten

+

Altijd actueel lesmateriaal

- actuele inhoud met opdrachten en toetsen
- zowel in je boek als digitaal
- aangevuld met nieuw lesmateriaal op basis van het nieuws en actualiteiten

Noordhoff

MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189

www.modernewiskunde.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-89201-2

9 789001 892012