

MODERNE WISKUNDE

C


$$W = \frac{L}{1 + (L - 1) \cdot g^t}$$



Noordhoff

Dit boek is van jou:

NAAM

KLAS

12e editie

Moderne Wiskunde

vwo C deel 4

Serieoverzicht Tweede Fase

	havo		vwo		
klas 4	A 1	B 1	AC 1		B 1
	A 2	B 2	AC 2		B 2
klas 5	A 3	B 3			
			A 3	C 3	B 3
klas 6			A 4	C 4	B 4

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleen.

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 22

© 2022 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands.

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsenauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-89202-9

12e editie

Moderne Wiskunde

vwo C deel 4

Jeroen van den Boom

Bert Boon

Ferdi Doddema

Wim Doekes

Colin Roll

Geertrui Schaberg

Ron Sinkeldam

Carolijn Tacken

Moderne Wiskunde

vwo C deel 4

17 Logisch redeneren 6

- Voorkennis 8
- 17.1 Beweringen 10
- 17.2 Uitgangspunten en conclusie 14
- 17.3 Implicatie en ontkenning 18
- 17.4 Of en En 22
- 17.5 Contradictie en paradox 26
- 17.6 Venndiagrammen 30
- 17.7 Gemengde opdrachten 34
 - Onderzoeksopdrachten 35
 - Samenvatting 36
 - Test jezelf 40
 - Extra oefening 42

18 Vorm en ruimte 44

- Voorkennis 46
 - 18.1 Aanzichten 48
 - 18.2 Eenpuntsperspectief 52
 - 18.3 Tweepuntsperspectief 56
 - 18.4 Ooghoogte 60
 - 18.5 Verhoudingen bij perspectief 64
 - 18.6 Gemengde opdrachten 68
 - Onderzoeksopdrachten 69
 - Samenvatting 70
 - Test jezelf 74
 - Extra oefening 76
 - Vaardigheden 9 78**
 - Rijen 80
 - Formules opstellen 81
 - Veranderingen 82
 - Logaritmische schalen 83
 - Vorm en ruimte 84
 - Systematisch tellen 85
-

19 Afsluiting formules en verbanden 86

Voorkennis 88

19.1 Lineair interpoleren en extrapoleren 90

19.2 Evenredig en omgekeerd evenredig 94

19.3 Periodieke verbanden 98

19.4 Exponentiële en logaritmische verbanden 102

19.5 Formules herleiden 106

19.6 Redeneren met formules 110

19.7 Gemengde opdrachten 114

Onderzoeksopdrachten 115

Samenvatting 116

Test jezelf 120

Vaardigheden 10 122

Veranderingen 124

Formules herleiden 126

Rijen 127

Systematisch tellen 128

Examenvoorbereiding 130

Rekenen 132

Formules en grafieken 136

Lineaire en gebroken formules 146

Machtsformules en kwadratische formules en wortelformules 154

Exponentiële en logaritmische formules 160

Veranderingen en rijen 171

Logisch redeneren 178

Vorm en ruimte 184

Combinatoriek 193

Hints bij de examenopdrachten 198

Examenwerkwoorden 202

Extra 204

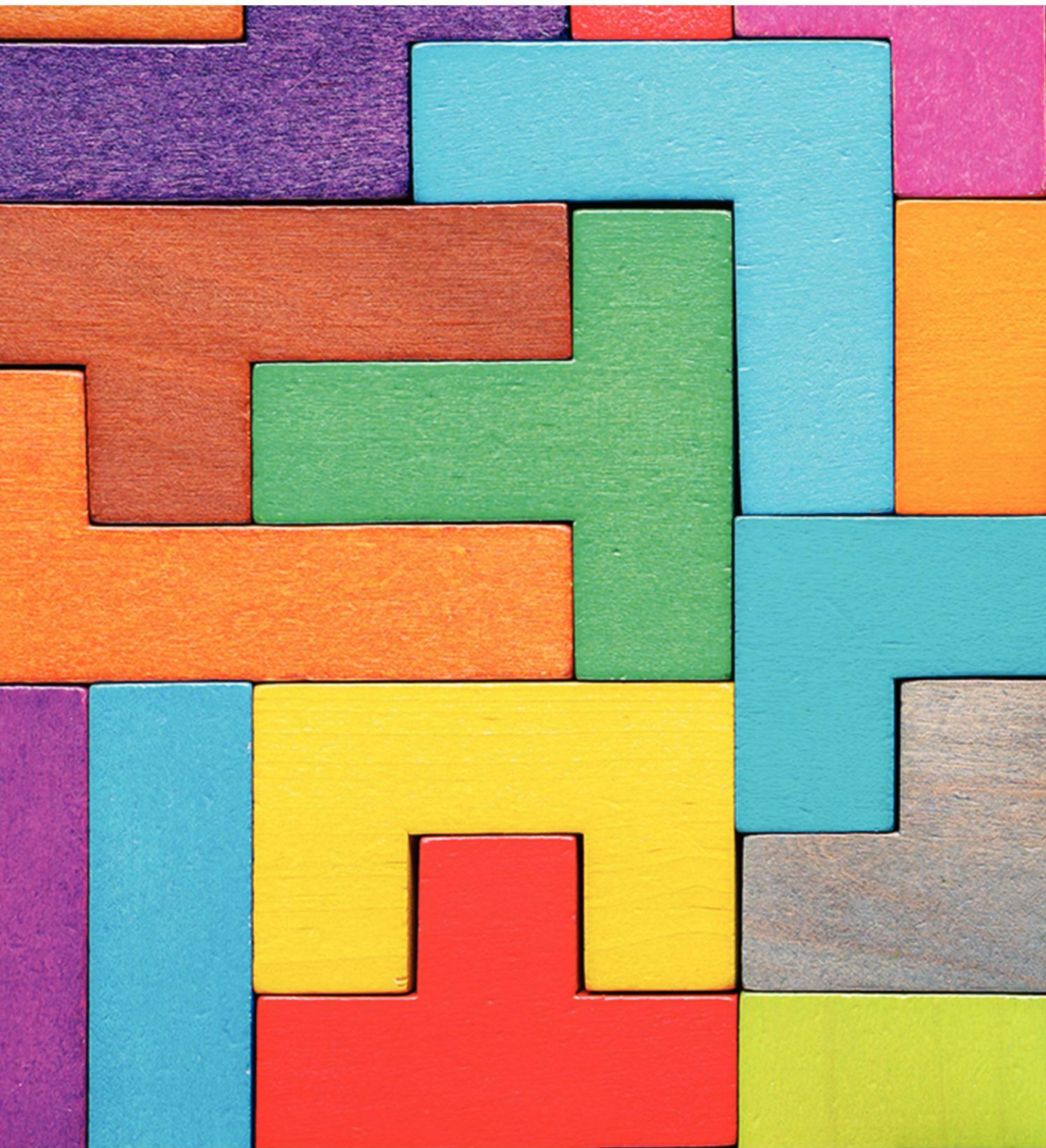
Meer oefenen 206

Oefenproefwerk 210

Werkbladen 216

Trefwoorden 224

Colofon 226



SE

CE

K

In dit hoofdstuk

Vrijwel iedereen krijgt dagelijks te maken met logisch redeneren. Bijvoorbeeld in gesprekken, bij het analyseren van teksten, bij argumentaties van personen in de media, bij het oplossen van puzzels en natuurlijk ook bij wiskunde.

Iedere logische redenering is opgebouwd uit beweringen. In dit hoofdstuk leer je wat een bewering is en hoe je een bewering korter kunt noteren met behulp van afkortingen en logische symbolen. Verder leer je wat een contradictie en een paradox zijn en hoe je met behulp van een Venndiagram kunt onderzoeken of een redenering juist is.

Na dit hoofdstuk weet je alles wat je over logica moet weten voor het centraal examen.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk:

- | | |
|--|-------------|
| • <i>Logisch redeneren en bewijzen</i> | opdracht 19 |
| • <i>Modelleren en algebraïseren</i> | opdracht 27 |
| • <i>Ordenen en structureren</i> | opdracht 45 |

Frenkie is de beste voetballer in het team, het is dus logisch dat hij de aanvoerder wordt.

Er gaan steeds meer winkels failliet, dat is het logische gevolg van het feit dat steeds meer mensen online shoppen.

Het is logisch dat Joke haar fiets niet op slot zet, haar fiets is namelijk nog nooit gestolen.

- V1** Je ziet drie teksten waar het woord logisch in voorkomt.
- Geef bij elk van de drie teksten aan waarom het woord logisch wordt gebruikt.
 - Ben jij het eens met de 'logica' die wordt gebruikt?
- V2** Hieronder staan twee redeneringen.
- Welke redenering is juist? Verklaar je antwoord.
- Marieke komt te laat op school als ze niet voor acht uur van huis vertrekt. Marieke is te laat, dus ze is na acht uur van huis vertrokken.
 - Cecile gaat met de bus naar school als het regent. Cecile is niet met de bus, dus het regent niet.
- V3** Je ziet een 4×4 sudoku. Deze puzzel bestaat uit vier blokken van twee bij twee vakjes. In de vakjes moeten de cijfers 1 tot en met 4 op zo'n manier worden ingevuld, dat in elke rij én in elke kolom én in elk van de vier blokken de cijfers 1 tot en met 4 precies één keer voorkomen.
- Waarom moet in vakje A een 1 komen?
 - Vul de sudoku verder in.
- V4** De 'Vader en zoon'-strip is getekend door de cartoonist Peter van Straaten.
- Welke conclusie kun je trekken over de levenshouding van de vader?

	2	4	
1			
4		A	2
	1	3	





parallellogram



ruit



rechthoek



vierkant

- V5** Welke van de volgende beweringen zijn waar?
Als een bewering niet waar is, leg dan uit waarom.
- Vierhoek $ABCD$ is een vierkant, dus de vier zijden van $ABCD$ zijn even lang.
 - De vier zijden van vierhoek $PQRS$ zijn even lang, dus $PQRS$ is een vierkant.
 - De tegenover elkaar liggende zijden van vierhoek $KLMN$ lopen evenwijdig, dus $KLMN$ is een rechthoek.
- V6** Een rechthoek is een vierhoek met vier rechte hoeken.
De omgekeerde bewering: 'Een vierhoek met vier rechte hoeken is een rechthoek.' is ook waar.
Formuleer bij de volgende beweringen de omgekeerde bewering en ga na of de omkering ook waar is. Zo niet, leg uit waarom niet.
- 'Een rechthoek is een vierhoek waarvan de overstaande zijden even lang zijn.'
 - 'Een parallellogram is een vierhoek waarvan de overstaande zijden evenwijdig lopen.'
- V7** Ali, Ben, Celine en Daantje hebben een cadeau voor hun vader gekocht. Een van de vier kinderen heeft het cadeau verstopt. Toen hun moeder vroeg wie dat had gedaan, antwoordden ze als volgt:
Ali: 'Ik was het niet.'
Ben: 'Ik was het niet.'
Celine: 'Daantje heeft het gedaan.'
Daantje: 'Ben heeft het gedaan.'
- De uitspraken van Celine en Daantje kunnen niet allebei tegelijk waar zijn.
Geef nog twee uitspraken van de kinderen die niet gelijktijdig waar kunnen zijn.
 - Stel dat precies een van de kinderen heeft gelogen.
Leg uit wie het cadeau dan heeft verstopt.



17.1 Beweringen

Je leert

- wat een bewering is
- hoe je kunt aangeven of een redenering correct is

Leerroutes

- ondersteunend: 1—2—3—4—05—5—6
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7
- uitdagend: 1—2—4—5—6—7—U1

Paul beweert dat alle leerlingen op zijn school een mobieltje hebben. Zijn klasgenoot Ron denkt dat deze bewering niet waar is.

- Wat is makkelijker: aantonen dat Paul gelijk heeft of aantonen dat Ron gelijk heeft?



- 1 Gegeven zijn de volgende zinnen:
- Een trein is een vervoersmiddel.
 - Neem je de sprinter of de intercity?
 - De trein van Utrecht naar Amsterdam rijdt altijd op tijd.
- a In twee van de drie zinnen wordt er iets beweerd. Welke zinnen zijn dat?
- b Van twee van de drie zinnen kun je zeggen of de zin waar of onwaar is. Welke zinnen zijn dat?
- c Hoe kun je aantonen dat de laatste zin niet waar is?



Theorie

Een uitspraak die waar of onwaar kan zijn, heet een **bewering** of **propositie**. Als een bewering onwaar is, kun je dit vaak met een voorbeeld aantonen. Dit heet een **tegenvoorbeeld**.

Voorbeeld

Elke vierhoek met vier rechte hoeken is een vierkant.
Waarom is deze bewering niet waar?

Oplossing

Een rechthoek is een tegenvoorbeeld bij de bewering.
Een rechthoek heeft ook vier rechte hoeken. De bewering is dus niet waar.

- 2 Geef van iedere zin aan of het een bewering is.
- a Het is koud vandaag.
 - b Ben je vrolijk?
 - c Trek je jas aan.
 - d Koen trekt zijn jas aan.

- 3** Janna beweert: ‘Het product van twee getallen is altijd groter dan de twee getallen zelf’. Als voorbeeld noemt ze: ‘Het product van 3 en 5 is 15 en 15 is groter dan 3 en 5’.
- H**
- a Geef nog een voorbeeld dat Janna’s bewering ondersteunt.
 - b Geef een tegenvoorbeeld bij de bewering.
 - c Wat betekent dit tegenvoorbeeld voor de bewering?



- 4** In de Alpen ligt de boomgrens op 2200 meter. Dit betekent dat boven de 2200 meter geen boomgroei mogelijk is.
- a Thijs wil een bergwandeling maken waarbij hij van 2300 meter hoogte naar 3100 meter hoogte wandelt. Hij redeneert: ‘Ik kom onderweg dus geen bomen tegen.’ Wat ontbreekt aan de redenering van Thijs?
 - b Bart maakt een bergwandeling door een gebied zonder bomen. Hij beweert: ‘Er zijn geen bomen, dus ik bevind mij hoger dan 2200 meter.’ Leg uit dat de bewering van Bart niet waar hoeft te zijn.

Theorie

Met behulp van beweringen kun je een redenering opbouwen. Een **correcte redenering** is **volledig**, dat wil zeggen dat de beweringen waaruit de redenering bestaat voldoende zijn om de conclusie te kunnen trekken.

Voorbeeld

Neem aan dat de volgende bewering waar is:
‘Personen die regelmatig sporten, zijn gelukkig.’

Geef aan of de volgende redeneringen correct zijn.

- 1 Job sport regelmatig, dus hij is gelukkig.
- 2 Melanie sport nooit, dus ze is niet gelukkig.

Oplossing

Redenering 1 is correct, want volgens de bewering ben je gelukkig als je regelmatig sport.

Redenering 2 is niet correct, want de bewering zegt niets over personen die nooit sporten.

Ondersteunende route → maak opdracht 05

- 5** Lees de tekst in het kader.
H Geef van de volgende redeneringen aan waarom ze niet waar hoeven te zijn.

- a Max slaapt vaak slecht, dus hij kijkt vaak naar een beeldscherm voordat hij gaat slapen.
- b Esra kijkt bijna nooit naar een beeldscherm voordat ze gaat slapen, dus ze heeft weinig slaapklachten.
- c Isabel heeft nooit slaapklachten, ze zal dus nooit naar een beeldscherm kijken voordat ze gaat slapen.

Veel personen die naar een beeldscherm kijken voordat ze gaan slapen, hebben last van slaapklachten. Ze vallen bijvoorbeeld later in slaap, worden 's nachts wakker en slapen korter. Ook overdag hebben ze vaker moeite om wakker te blijven, blijkt uit onderzoek van het RIVM.

- 6** Lieke heeft met twee dobbelstenen drie en vier ogen gegooit.
- a Welke van de beweringen zijn waar?
 - 1 De som van de ogen is 7.
 - 2 Lieke heeft een 3 gegooit.
 - 3 Lieke heeft een 5 gegooit.
 - 4 Het product van de ogen is 12.
 - b De som van de ogen op een dobbelsteen bij de tegenover elkaar liggende vlakken is altijd zeven. Lieke beweert dat op de onderkant van de gegooide dobbelstenen ook een drie en een vier staat. Leg uit dat de bewering van Lieke correct is.
 - c Isaiah heeft ook met de twee dobbelstenen gegooit. De som van de ogen is negen. Isaiah zegt: 'De som van de ogen is negen, dus op de onderkant van de dobbelstenen staan een twee en een drie'. Waarom is de redenering van Isaiah niet correct?
 - d Bij de worp van Tim is de som van de ogen elf. Beredeneer welke getallen op de onderkant van de dobbelstenen staan.



- 7** Priemgetallen zijn getallen die je alleen door 1 en zichzelf kunt delen (bijvoorbeeld: 2, 3, 5, 7, 11, ...). Het vermoeden van Goldbach is dat ieder even getal groter dan 2 te schrijven is als de som van twee priemgetallen.
- a Geef drie voorbeelden van dit vermoeden.
 - b Het vermoeden van Goldbach is nooit bewezen, maar er zijn ook nooit tegenvoorbeelden gevonden. Wat zou één tegenvoorbeeld betekenen voor dit vermoeden?

Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten



05

Gegeven is de bewering:

‘Een kwart van de Nederlanders kampt met gezondheidsklachten door slechte ventilatie in huizen.’

- a** Slechte ventilatie in huis kan er dus voor zorgen dat je ziek wordt.

Worden gezondheidsklachten altijd veroorzaakt door slechte ventilatie in huizen?

- b** Mag je concluderen dat iemand die ziek is, een slecht geventileerd huis heeft?

- c** Mag je concluderen dat iemand met een slecht geventileerd huis, vaak ziek is?

Geef van de volgende redeneringen aan waarom ze niet waar hoeven te zijn.

- d** Peter is vaak ziek. Hij zal dus wel een slecht geventileerd huis hebben.
- e** Quirine is nooit ziek. Ze zal dus wel een goed geventileerd huis hebben.
- f** Sarah heeft de ventilatie in haar huis verbeterd. Dat betekent dat ze minder vaak ziek zal zijn.

Uitdagende opdrachten

U1

De volgende beweringen zijn niet waar.

Geef bij iedere bewering een tegenvoorbeeld.

- a** Voor alle getallen a en b geldt: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.
- b** Het kwadraat van een getal is altijd groter dan het getal zelf.
- c** Als a^2 groter is dan 25, dan is a groter dan 5.

17.2 Uitgangspunten en conclusie

Je leert

- wat een uitgangspunt en een bewering zijn
- wat een samengestelde bewering is

Leerroutes

- ondersteunend: 8—9—10—11—12—13—014—15
- doorlopend: 8—9—10—11—12—13—14—15
- uitdagend: 8—10—11—12—13—14—15—U2

Je huisarts beweert: 'Als je het medicijn slikt, dan word je beter'. Een week later kom je de huisarts tegen in de supermarkt. De huisarts kijkt je aan en concludeert: 'Je ziet er goed uit. Je hebt dus mijn medicijn geslikt'.

- Geef commentaar op deze redenering.



- 8 De tekst stond op 14 mei 2016 in de krant Metro.
- a Hans Dorrestijn trekt de conclusie: 'de natuur is net als goud'.
Met welk argument komt hij tot deze conclusie?
- b De regel: 'De hoeveelheid natuur vermindert, daardoor stijgt de waarde.' kun je ook anders formuleren.
Vul in:
Als de hoeveelheid natuur vermindert, dan ...
- c Hans Dorrestijn komt tot nog een conclusie.
Tot welke andere conclusie komt hij en met welke argumenten komt hij tot deze conclusie?

Vogelaar al lang niet meer alleen bebaard en bejaard

Razend populair zijn ze: vogels. Hans Dorrestijn verklaart: 'De natuur is net als goud, iets wordt veel waard als er weinig van is. De hoeveelheid natuur vermindert, daardoor stijgt de waarde. En vogels kijken is een laagdrempelige hobby. Je hoeft er geen biologie voor gestudeerd te hebben. Je hoeft niet eens de lagere school afgemaakt te hebben.'

Theorie

Een redenering bestaat uit één of meerdere **uitgangspunten** en een **conclusie**. Het trekken van een conclusie is een **redeneerstap**.

uitgangspunt, uitgangspunt dus conclusie

Een redenering met één of meer uitgangspunten en een conclusie heet een **samengestelde bewering**.

Een **als-dan-bewering** is een voorbeeld van een samengestelde bewering.

Voorbeeld 1

Het regent hard en de afvoer is verstopt, waardoor er wateroverlast ontstaat.

Uitgangspunten: Het regent hard.
De afvoer is verstopt.

Conclusie: Er ontstaat overlast.

Voorbeeld 2

Een als-dan-bewering:

Als het weekend is, dan slaap ik altijd uit.

Uitgangspunt: Het is weekend.

Conclusie: Ik slaap uit.

- 9 Janine heeft geen jas aan, dus ze heeft het koud.
- H**
- Uit welke twee beweringen bestaat deze redenering?
 - Welke bewering is het uitgangspunt en welke is de conclusie?
 - Schrijf de zin als een als-dan-bewering.
- 10 Ik doe mijn jas aan, want het is koud en ik moet naar buiten.
- Wat zijn de twee uitgangspunten van deze redenering?
En wat is de conclusie?
 - Schrijf de zin in de vorm van een als-dan-bewering.



- 11 De strip is getekend door Pieter van Geenen en stond op 6 april 2016 in Trouw. De aanleiding voor deze strip was een referendum over afspraken tussen de Oekraïne en de EU.
- Geef van de redenering in de eerste twee plaatjes de uitgangspunten en de conclusie.
 - Leg uit of deze redenering correct is.
 - Welke conclusie wordt er getrokken in het derde plaatje?
- 12 Gegeven zijn de volgende twee redeneringen:
- Dafne heeft talent en ze traint hard, dus gaat ze sneller hardlopen.
 - Dafne gaat sneller hardlopen, dus ze wordt kampioen.
- Geef van beide redeneringen de uitgangspunten en de conclusies.
 - Formuleer beide redeneringen als een als-dan-bewering.
 - Neem de twee redeneringen samen tot één redenering met twee redeneerstappen.
- 13 De redenering van opdracht 12 kun je als volgt schrijven:
Dafne heeft talent en ze traint hard, dus ze gaat sneller hardlopen en dus wordt ze kampioen.
Je kunt deze redenering korter schrijven door gebruik te maken van de afkortingen hiernaast.
Vul de juiste letters in om de redenering compleet te maken:
... en ..., dus ... en dus ...

K: Dafne wordt kampioen.
T: Dafne heeft talent.
H: Dafne traint hard.
S: Dafne gaat sneller hardlopen.

Vaak worden de beweringen waaruit een redenering bestaat, afgekort met hoofdletters. Hierdoor kun je in één oogopslag zien wat de structuur van een redenering is.

Ondersteunende route → maak opdracht 014

- 14** Gegeven zijn de volgende beweringen:
B: Jens is op tijd naar bed gegaan.
O: Jens heeft voldoende geoefend.
T: Jens heeft de theorie doorgenomen.
S: Jens slaagt voor zijn rijexamen.
- a** Schrijf de volgende redeneringen korter met behulp van de letters *B*, *O*, *T* en *S*.
- 1 Jens is op tijd naar bed gegaan, dus hij slaagt voor zijn rijexamen.
 - 2 Jens is op tijd naar bed gegaan en heeft voldoende geoefend, dus hij slaagt voor zijn rijexamen.
- b** Schrijf de volgende redeneringen voluit:
- 1 *B* en *O* en *T*, dus *S*.
 - 2 niet *S*, dus niet *O* of niet *B*.



- 15** Het tekstfragment komt uit een artikel dat op 1 november 2020 in *de Volkskrant* stond.

Bij mentaal veeleisende arbeid schaadt thuiswerken de kwaliteit van het werk. Dat zeggen onderzoekers van de Universiteit Maastricht en de Erasmus Universiteit. Zij baseren zich op de prestaties van topschakers die zich door corona gedwongen zagen hun schaaktoernooien online te organiseren. Online maakten de schakers veel grotere fouten dan tijdens traditionele wedstrijden. Volgens de onderzoekers is schaken te vergelijken met het werk in de kennismaatschappij.

- a** Schrijf de eerste zin van het artikel in de vorm van een als-dan-bewering.
- b** Gebruik de volgende afkortingen om deze als-dan-bewering korter te schrijven:
M: Het werk is mentaal veeleisend.
T: Je werkt thuis.
K: De kwaliteit van het werk wordt geschaad.
- c** De eerste zin van het artikel is de conclusie van het tekstfragment.
 Op basis van welke twee uitgangspunten wordt deze conclusie getrokken?

Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

014

Gegeven zijn de volgende beweringen.

L : Freek heeft hard geleerd.

U : Freek is uitgerust.

S : Freek heeft een samenvatting gemaakt.

V : Freek haalt een voldoende voor het proefwerk.

- a** De redenering 'Freek heeft hard geleerd, dus hij haalt een voldoende voor het proefwerk' kun je korter schrijven met behulp van de afkortingen.

Vul de juiste letter in: ' L dus ...'.

- b** De redenering 'niet V , dus niet L ' kun je voluit schrijven. Maak de zin af:

'Freek heeft geen voldoende voor het proefwerk gehaald, dus ...'

- c** Schrijf de volgende redeneringen voluit:

1 L en U , dus V .

2 niet V , dus niet U of niet L .

- d** Schrijf de volgende redeneringen met behulp van de letters:

1 Freek is uitgerust en heeft een samenvatting gemaakt, dus hij haalt een voldoende voor het proefwerk.

2 Freek is niet uitgerust en heeft geen samenvatting gemaakt, dus hij haalt geen voldoende voor het proefwerk.



Uitdagende opdrachten

U2

Op een tafel liggen vier kaarten met een letter op de ene kant en een cijfer op de andere kant:



Gegeven is de als-dan-bewering:

'Als een kaart op de ene kant een klinker heeft staan, dan staat er een even getal op de andere kant'.

Welke kaart(en) moet je omdraaien om erachter te komen of deze bewering waar of niet waar is?

17.3 Implicatie en ontkenning

Je leert

- wat een implicatie en een ontkenning zijn
- wat het verschil is tussen een nodige en een voldoende voorwaarde

Leerroutes

- ondersteunend: 16—017—18—19—20—21—22
- doorlopend: 16—17—18—19—20—21—22
- uitdagend: 16—17—18—19—21—22—U3

De broers Melle en Jens willen graag naar het strand. Hun ouders beloven: 'Als het morgenochtend droog is, dan gaan we morgen naar het strand.' Als de broers de volgende dag wakker worden, regent het. Toch besluiten de ouders om met het gezin naar het strand te gaan.

- Klopt de bewering van de ouders?



- 16** Op de autosnelweg A1 staan om 8.00 uur altijd files.
We gebruiken de volgende afkortingen:
 T : Het is 8.00 uur.
 F : Op de A1 staan files.
Als T waar is, dan volgt daaruit dat F waar is.
- Leg uit dat als F waar is, dat T dan niet waar hoeft te zijn.
 - Leg uit dat als F niet waar is, dat daaruit volgt dat T ook niet waar is.

Theorie

Een bewering van de vorm 'als A dan B ' ofwel 'uit A volgt B ' heet een **implicatie**. Een implicatie kun je met behulp van het **implicatiesymbool** $\Rightarrow$ noteren als $A \Rightarrow B$.
Als $A \Rightarrow B$ waar is, dan hoeft $B \Rightarrow A$ niet waar te zijn.
De ontkenning van A kun je met het **ontkenningssymbool** $\neg$ noteren als $\neg A$.
Als $A \Rightarrow B$ waar is, dan is $\neg B \Rightarrow \neg A$ ook waar.
Het implicatiesymbool en het ontkenningssymbool zijn voorbeelden van logische symbolen.
Het noteren van beweringen met afkortingen en logische symbolen heet **modelleren**.

Voorbeeld

Z : Het is zaterdag.
 W : Het is weekend.

Als het zaterdag is, dan is het weekend.
Dit kun je noteren als $Z \Rightarrow W$.
De omkering $W \Rightarrow Z$ is niet waar, want als het weekend is, hoeft het geen zaterdag te zijn. Het kan ook zondag zijn.
 $\neg W \Rightarrow \neg Z$ is wel waar, want als het geen weekend is, dan is het ook geen zaterdag.

Ondersteunende route → maak opdracht 017

- 17**
- H**
- Modelleer de volgende beweringen.
 - Als Aisa naar het feestje komt, dan komt Bas ook.
 - Als Bas niet naar het feestje komt, dan komt Aisa ook niet.
 - Schrijf de bewering $A \Rightarrow \neg C$ als Nederlandse zin.

A : Aisa komt naar het feestje.
 B : Bas komt naar het feestje.
 C : Chermaine komt naar het feestje.

- 18** Bij bedrijfspanden die na maart 2020 worden gerenoveerd, is het verplicht om op de parkeerplaats laadpalen voor elektrische auto's te plaatsen.

H

Gegeven zijn de volgende beweringen:

R: Het bedrijfspand is na maart 2020 gerenoveerd.

L: Het bedrijfspand heeft op de parkeerplaats laadpalen voor elektrische auto's.

Geef van elk van de volgende implicaties aan of deze waar of niet waar is.

a $R \Rightarrow L$

c $L \Rightarrow R$

b $\neg L \Rightarrow \neg R$

d $\neg R \Rightarrow \neg L$

- 19** In een fruitschaal liggen mandarijnen, sinaasappels en appels. De mandarijnen en sinaasappels zijn oranje. De appels zijn groen. Je pakt een stuk fruit uit de fruitschaal. De volgende vijf beweringen zijn mogelijk:

S: Het is een sinaasappel. *O*: Het is oranje.

M: Het is een mandarijn. *G*: Het is groen.

A: Het is een appel.

- a** Welke van de volgende implicaties zijn waar?

1 $G \Rightarrow A$

4 $M \Rightarrow O$

2 $\neg A \Rightarrow \neg G$

5 $\neg O \Rightarrow A$

3 $S \Rightarrow O$

- b** Bij welke van de implicaties van opdracht a is ook de omkering waar?

- c** Als *O* waar is, is *S* dan ook altijd waar?

- d** Leg uit dat als *G* waar is *A* ook waar is.



Theorie

A is een **nodige voorwaarde** voor *B* als geldt dat *B* alleen maar waar kan zijn als *A* waar is.

A is een **voldoende voorwaarde** voor *B* als geldt dat *B* altijd waar is als *A* waar is.

Voorbeeld 1

Als er zuurstof is, kan er vuur ontstaan.

Z: Er is zuurstof.

V: Er kan vuur ontstaan.

Z is een nodige voorwaarde voor *V*, want er kan alleen maar vuur ontstaan als er zuurstof is.

Z is echter geen voldoende voorwaarde voor *V*, want voor vuur is meer nodig dan alleen zuurstof, namelijk een brandbare stof en voldoende warmte.

Voorbeeld 2

Als je voetbalt, dan doe je aan sport.

V: Je voetbalt.

S: Je sport.

V is een voldoende voorwaarde voor *S*, want je doet aan sport als je voetbalt.

V is echter geen nodige voorwaarde voor *S*, want je kunt ook aan een andere sport doen, bijvoorbeeld basketbal.

- 20** Als je in Spanje op school zit, dan krijg je Spaanse les.
Deze redenering bestaat uit twee beweringen:
S: Je zit in Spanje op school.
L: Je krijgt Spaanse les.
- Schrijf de redenering met behulp van de afkortingen en het implicatiesymbool $\Rightarrow$.
 - Als *S* waar is, dan is *L* ook waar.
Betekent dit dat *L* alleen maar waar kan zijn als *S* waar is?
 - Is *S* voldoende voorwaarde voor *L* of een nodige voorwaarde voor *L*?

- 21**
- Geef van de volgende redeneringen aan of er sprake is van een nodige voorwaarde of een voldoende voorwaarde.
 - Als het regent, dan wordt de stoep nat.
 - Alleen met vijf jaar werkervaring kom je in aanmerking voor de baan.
 - Leg uit dat 'Je bent een volwassen Nederlander' een nodige én voldoende voorwaarde is voor 'Je mag stemmen bij de Tweede Kamerverkiezingen'.

- 22** De politie heeft drie verdachten van de poging tot moord op buschauffeur Robert gearresteerd: Stolberg, Jones en Visser. Alle drie ontkennen ze de dader te zijn. Tijdens het verhoor beweert Stolberg dat Robert een vriend van Jones was en dat Visser Robert haatte. Jones beweert dat hij Robert helemaal niet kent, en dat hij bovendien helemaal niet in de stad was toen Robert daar neergestoken werd. Visser beweert dat hij zowel Stolberg als Jones samen met Robert in de stad gezien heeft toen Robert neergestoken werd en dat één van beiden Robert neergestoken moet hebben.

Neem aan dat slechts een van de drie schuldig is en dat de twee onschuldigen de waarheid spreken. Om uit te zoeken wie de dader is, bekijk je de volgende twee beweringen:

A: Jones spreekt de waarheid.

B: Visser spreekt de waarheid.

- Toon aan dat uit bovenstaande gegevens volgt dat:
 $A \Rightarrow \neg B$.
- Uit $A \Rightarrow \neg B$ volgt dat óf Jones óf Visser de dader is.
Leg uit wie de dader is.

(Ontleend aan *CE vwo wiskunde C-pilot 2013, tijdvak 1*)



Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

017

Gegeven zijn de beweringen:

- Als Dirk spaart, dan kan hij een tablet kopen.
- Als Dirk niet spaart, dan kan hij geen tablet kopen.
- a** Leg uit dat beide beweringen implicaties zijn.
- b** Met welk logisch symbool kun je een implicatie noteren?
- c** Schrijf de eerste bewering met behulp van de afkortingen hiernaast en het symbool van opdracht b.
- d** De ontkenning van 'Dirk spaart' is 'Dirk spaart niet'. Met welk logisch symbool kun je een ontkenning noteren?
- e** Vul in: De tweede bewering kun je modelleren als $\neg S \Rightarrow \dots$
- f** Gegeven zijn de volgende beweringen:
R: Het regent.
N: De stoep wordt nat.
Schrijf de implicaties $R \Rightarrow N$ en $\neg N \Rightarrow \neg R$ als Nederlandse zinnen.

S: Dirk spaart.

T: Dirk kan een tablet kopen.

Uitdagende opdrachten

U3

Lewis Carroll (1832 – 1898) was een Engelse wiskundige en schrijver van kinderboeken. Gedurende zijn leven heeft hij veel logische puzzels bedacht. Een van die puzzels gaat over de volgende drie uitspraken:

- Alle baby's zijn onlogisch.
- Niemand die een krokodil kan verslaan, wordt gehaat.
- Alle onlogische mensen worden gehaat.

De drie uitspraken zijn opgebouwd uit de volgende beweringen:

B: De persoon is een baby.

K: De persoon kan een krokodil verslaan.

L: De persoon is logisch.

H: De persoon wordt gehaat.

- a** Schrijf de drie uitspraken met behulp van de afkortingen en logische symbolen.
- b** Leg uit dat uit de uitspraken volgt dat baby's geen krokodillen kunnen verslaan.



Je leert

- wat het verschil is tussen de ‘inclusieve of’ en de ‘exclusieve of’
- wat de logische symbolen zijn voor ‘en’ en ‘of’

Leerroutes

- ondersteunend: 23—24—25—26—027—27—28—30
- doorlopend: 23—24—25—26—27—28—29—30
- uitdagend: 23—24—25—26—27—29—30—U4

Voor een gezondheidsonderzoek is een representatieve steekproef genomen van volwassen Nederlandse mannen. Je kiest een willekeurige persoon uit de steekproef.

- Wat is het meest waarschijnlijk?
 - De man heeft een leesbril.
 - De man heeft een leesbril en is ouder dan 55 jaar.



23 Lees de volgende twee zinnen:

- Stefan kan zich bij de politieagent identificeren met zijn paspoort of met zijn rijbewijs.
- De politieagent is met de auto of met de fiets.

Leg uit dat het woord *of* in de eerste zin iets anders betekent dan het woord *of* in de tweede zin.

Het woord *of* in de eerste zin van opdracht 23 wordt de ‘inclusieve of’ genoemd. Stefan kan ook het paspoort én het rijbewijs gebruiken.

Het woord *of* in de tweede zin van opdracht 23 heet een ‘exclusieve of’. De politieagent kan niet tegelijkertijd met de auto én met de fiets zijn.

24 Geef bij de volgende beweringen aan of er sprake is van de ‘inclusieve of’ of de ‘exclusieve of’.

- Je vader of moeder bestuurt de auto.
- Als je vader of moeder linkshandig is, dan is de kans groter dat jij dat ook bent.
- Je kunt het aan je docent vragen of opzoeken in het uitwerkingenboek.

25 In een bak zitten rode en groene blokjes en rode en groene knikkers. Je pakt een blokje of een knikker uit de bak.

a Vul in. Gebruik de beweringen hiernaast.

$$1 \quad Ken G \Rightarrow \dots$$

$$3 \quad \neg B \Rightarrow \dots$$

$$2 \quad G \Rightarrow B_G \text{ of } \dots$$

$$4 \quad Ken \dots \Rightarrow \neg K_G$$

b Gegeven is de implicatie $K \text{ of } R \Rightarrow K_R \text{ of } K_G \text{ of } B_R$.

Is de eerste *of* een ‘inclusieve of’ of ‘exclusieve of’?

B : Het is een blokje.

K : Het is een knikker.

R : De kleur is rood.

G : De kleur is groen.

B_R : Het is een rood blokje.

B_G : Het is een groen blokje.

K_R : Het is een rode knikker.

K_G : Het is een groene knikker.

Theorie

In beweringen wordt vaak gebruik gemaakt van de logische verbindingswoorden *en* en *of*.

Voor *en* gebruik je het **verbindingssymbool** $\wedge$.

Voor *of* gebruik je het **verbindingssymbool** $\vee$.

Met het symbool $\vee$ wordt de 'inclusieve of' bedoeld.

Voorbeeld

S : Nina doet suiker in haar koffie.

M : Nina doet melk in haar koffie.

De bewering $S \wedge M$ is waar als Nina suiker en melk in haar koffie doet.

De bewering $S \vee M$ is waar als Nina óf suiker óf melk óf allebei in haar koffie doet.

26

H

Gegeven zijn de volgende beweringen bij een worp met twee dobbelstenen.

A : De som van de ogen is 6.

B : Het product van de ogen is 8.

C : De worp is een 2 en een 4.

a Schrijf alle mogelijke worpen met twee dobbelstenen op die aan de bewering A voldoen.

b Doe hetzelfde voor bewering B .

c Schrijf de bewering $A \wedge B$ als Nederlandse zin.

d Leg uit dat de implicatie $A \wedge B \Rightarrow C$ waar is.

e Schrijf de bewering $A \vee B$ als Nederlandse zin.

f Leg met behulp van een tegenvoorbeeld uit dat de implicatie $A \vee B \Rightarrow C$ niet waar hoeft te zijn.

g Welke van de volgende implicaties zijn waar? Geef bij de implicaties die niet waar zijn een tegenvoorbeeld.

$$1 \quad \neg B \Rightarrow \neg A$$

$$3 \quad \neg C \Rightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$2 \quad A \wedge \neg B \Rightarrow \neg C$$

$$4 \quad \neg C \Rightarrow \neg A \vee \neg B$$



Ondersteunende route → maak opdracht 027

27

Bekijk de figuren. Gebruik de volgende afkortingen.

V : Het is een vierkant.

O : De kleur is oranje.

C : Het is een cirkel.

G : De kleur is grijs.

D : Het is een driehoek.

B : De kleur is blauw.

a Leg uit bij welke figuren de volgende beweringen horen.

$$1 \quad G \wedge \neg C$$

$$3 \quad C \wedge \neg O$$

$$2 \quad \neg G \wedge \neg O$$

$$4 \quad G \vee C$$

b Leg uit dat het oranje vierkant en de grijze driehoek bij de bewering $\neg(C \vee B)$ horen.

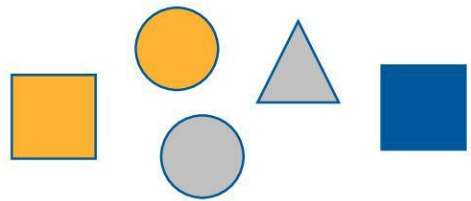
c Leg uit bij welke figuren de volgende beweringen horen.

$$1 \quad \neg(B \vee G) \wedge C$$

$$3 \quad \neg B \wedge (\neg O \vee C)$$

$$2 \quad (\neg B \wedge \neg O) \vee C$$

$$4 \quad (B \vee V \vee O) \wedge \neg C$$



Bij redeneringen wordt soms gebruik gemaakt van haakjes. Een bewering die tussen haakjes staat, is een samengestelde bewering.

- 28** Als Justin de ingrediënten in huis heeft en als het buiten vriest of als er voorspeld wordt dat het gaat vriezen, gaat hij erwtensoep maken.

H

Deze redenering bestaat uit vier beweringen:

E: Justin maakt erwtensoep.

I: Justin heeft de ingrediënten in huis.

V: Het vriest buiten.

G: Er wordt voorspeld dat het gaat vriezen.

- a Je kunt de redenering schrijven als: $I \wedge (V \vee G) \Rightarrow E$.
Waarom is het nodig om haakjes te zetten om $V \vee G$?
- b Kun je de redenering ook schrijven als: $(I \wedge V) \vee G \Rightarrow E$?
- c Formuleer een zin bij de redenering:
 $\neg I \vee (\neg V \wedge \neg G) \Rightarrow \neg E$

- 29** Als een kind vier jaar of ouder is óf jonger is dan vier maar een eigen zitplaats heeft, dan moet het kind een treinkaartje kopen.

Deze redenering bestaat uit drie beweringen:

O: Het kind is vier jaar of ouder.

Z: Het kind heeft een eigen zitplaats.

K: Het kind moet een treinkaartje kopen.

Schrijf de redenering met behulp van deze afkortingen en logische symbolen.

- 30** Als Anneke intelligent is en hard studeert, dan haalt zij goede cijfers. Als ze goede cijfers haalt, zal ze het diploma halen. Als Anneke hard studeert maar niet intelligent is, dan zal men waardering hebben voor haar inzet. Als haar inzet gewaardeerd wordt, zal zij het diploma halen. Als Anneke intelligent is, dan studeert ze hard.

Gebruik de volgende afkortingen:

I: Anneke is intelligent.

S: Anneke studeert hard.

G: Anneke haalt goede cijfers.

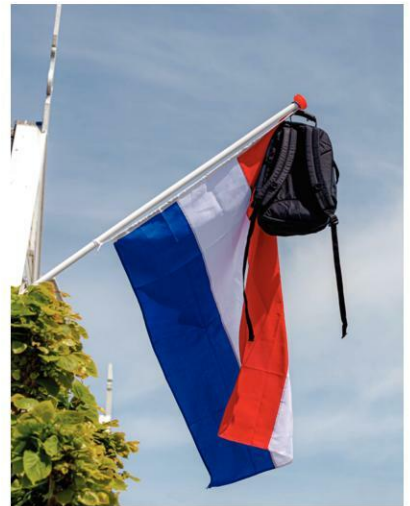
D: Anneke haalt diploma.

W: Anneke wordt gewaardeerd.

De redeneerstap in de eerste zin kan als volgt worden genoteerd: $I \wedge S \Rightarrow G$.

- a Noteer op dezelfde wijze als hierboven, de redeneerstappen in de andere zinnen.
- b Neem aan dat Anneke intelligent is.
Leg, op basis van deze uitspraken, uit of je kunt concluderen dat Anneke het diploma haalt.
- c Stel dat we weten dat Anneke niet slaagt.
Wat is nu, op basis van de gegevens, te concluderen over haar intelligentie en haar studeren?

(Ontleend aan syllabus wiskunde C 2018)



Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten

027

Anne, Burak en Chloe hebben een proefwerk gemaakt.

Gegeven zijn de volgende beweringen:

A : Anne heeft een voldoende gehaald.

B : Burak heeft een voldoende gehaald.

C : Chloe heeft een voldoende gehaald.

a Schrijf de bewering $B \vee C$ als Nederlandse zin.

b Als Burak een voldoende heeft en Chloe een onvoldoende, dan is de bewering $B \vee C$ waar.

In welke andere twee situaties is $B \vee C$ waar?

c In de bewering $A \wedge (B \vee C)$ staan haakjes. De bewering tussen haakjes beschouw je als één voorwaarde.

Vul in:

In woorden betekent $A \wedge (B \vee C)$: '... en ...'

d Er zijn drie situaties waarbij $A \wedge (B \vee C)$ waar is.

In de tabel is de eerste situatie genoteerd, hierbij staat 'v' voor voldoende en 'o' voor onvoldoende.

Vul de tabel verder in.

e Je kunt de haakjes in de bewering $A \wedge (B \vee C)$ ook op een andere plaats zetten: $(A \wedge B) \vee C$.

De bewering heeft dan een andere betekenis.

Vul in:

In woorden betekent $(A \wedge B) \vee C$: '... of ...'

f Er zijn vijf situaties waarbij $(A \wedge B) \vee C$ waar is.

Noteer deze situaties in een tabel zoals bij vraag d.

A	B	C
v	v	o

Uitdagende opdrachten

U4

Gegeven is de bewering:

'Óf Nederland óf Duitsland wint het kampioenschap'.

We voeren de volgende afkortingen in:

N : Nederland wint het kampioenschap.

D : Duitsland wint het kampioenschap.

Het woord of in de bewering is de 'exclusieve of'.

Om de bewering te modelleren, heb je de logische symbolen $\vee$, $\wedge$ en $\neg$ nodig.

Noteer de bewering met behulp van de ingevoerde afkortingen en deze logische symbolen.



17.5 Contradictie en paradox

Je leert • wat een contradictie en paradox zijn

Leerroutes • ondersteunend: 31—032—33—34—35—36—37
• doorlopend: 31—32—33—34—35—36—37
• uitdagend: 31—32—34—35—36—37—U5

In een dorp is het een wet dat alle mannen geschoren moeten zijn. De kapper in het dorp heeft een bord op zijn deur hangen met de volgende tekst: 'Ik scheer alle mannen uit het dorp die zichzelf niet scheren, en verder niemand.'

• Door wie wordt de kapper geschoren?



- 31** Gegeven zijn de volgende uitspraken.
- Een vierkante cirkel.
 - Schrijven is de kunst van het schrappen.
 - Vele eersten zullen de laatsten zijn.
- a** Geef bij elke uitspraak aan welke tegenspraak in de uitspraak zit.
- b** Welke uitspraken hoeven geen tegenspraak te zijn? Verklaar je antwoord.

Theorie

Een samengestelde bewering heet een **contradictie** of **tegenspraak** als twee beweringen in de samenstelling elkaar uitsluiten. Een contradictie kun je noteren als $A \wedge \neg A$. Soms lijkt een bewering een tegenspraak te bevatten, maar blijkt dat bij nader inzien niet het geval te zijn. Een dergelijke bewering heet een **schijncontradictie** of **paradox**. Een paradox gaat vaak in tegen je gevoel voor logica, je verwachting of je intuïtie.

Voorbeeld 1

E : Het getal is even.

De bewering $E \wedge \neg E$ is een contradictie, want een getal kan niet zowel even als niet even (oneven) zijn.

Voorbeeld 2

Een voorbeeld van een paradox is een zin van Ellen Warmond:

'Sinds je er bent, ben ik weer alleen.'

Dit lijkt een tegenspraak, want 'iemand bij je hebben' en 'alleen zijn' spreken elkaar tegen. De zin is een paradox, omdat je hem kunt opvatten als 'Met degene die bij me is, heb ik weinig en voel ik me nog meer alleen'.

Ondersteunende route → maak opdracht 032

32 Gegeven zijn de volgende beweringen.

H G : Het getal is groter dan nul.

O : Het getal is oneven.

Geef van elk van de volgende beweringen aan of het wel of geen contradictie is.

a $G \wedge \neg G$

c $(G \wedge O) \vee \neg G$

b $G \wedge O$

d $(G \wedge O) \wedge (\neg G \vee \neg O)$

33 Je ziet een foto van een 'blikje van plastic'.

H **a** Welke contradictie zit er in dit voorwerp?

b Waarom is hier sprake van een paradox?



34 Lees de volgende uitspraken.

- Want wat dood is is dood, maar wat vermoord is leeft voort.

(Martinus Nijhoff)

- Hoe langer je leeft, hoe korter het duurt. (Jules Deelder)

- Voetbal is simpel. Wat moeilijk is, is simpel voetballen.

(Johan Cruijff)

a Welke tegenspraak zit in de uitspraak van Martinus Nijhoff?

b Waarom kun je de uitspraak van Martinus Nijhoff een paradox noemen?

c Beantwoord vraag a en b ook voor de uitspraken van Jules Deelder en Johan Cruijff.

35 Bij de indeling van het dierenrijk kun je de volgende beweringen gebruiken.

- Zoogdieren zijn levendbarend.

- Zoogdieren zogen hun jongen.

- Vogels leggen eieren.

- Vogels hebben een snavel.

- Vogels hebben veren.

Een vogelbekdier is een dier dat alleen in Australië voorkomt. Het dier heeft een vacht, een snavel, legt eieren en zoogt haar jongen. Toen westerse onderzoekers als eerste een opgezet exemplaar in handen kregen, bracht het een forse discussie teweeg. Sommigen vermoedden dat lichaamsdelen van verscheidene diersoorten aan elkaar waren gehecht.

a Geef twee redenen waarom het vogelbekdier een vogel is.

b Geef een reden waarom het vogelbekdier geen vogel is.

c Waarom is hier sprake van een contradictie?

d De onderzoekers hebben besloten dat het vogelbekdier bij de zoogdieren hoort.

Welke van de gegeven beweringen moet worden aangepast?



- 36** In een klas, die iedere dag wiskunde heeft, vertelt de docent dat de leerlingen volgende week een toets moeten maken. Ze voegt eraan toe: 'Ik zeg niet op welke dag. De toets zal als een verrassing komen'.

Na schooltijd praten de leerlingen er samen over. Rachid maakt een slimme opmerking: 'De toets kan niet op vrijdag zijn, want dan zouden we op donderdagmiddag al weten dat de toets op vrijdag is en dan is het dus geen verrassing meer'.

Gegeven zijn de volgende beweringen:

K: De toets is komende week.

M: De toets is op maandag.

I: De toets is op dinsdag.

W: De toets is op woensdag.

O: De toets is op donderdag.

V: De toets is op vrijdag.

- a** Een deel van de redenering van Rachid kun je als volgt formuleren: 'Als de toets niet op maandag, dinsdag, woensdag of donderdag is, maar wel aankomende week, dan moet hij op vrijdag zijn'.

Schrijf dit deel van de redenering met behulp van de ingevoerde afkortingen en logische symbolen.

- b** Rachid concludeert dat de toets niet op vrijdag kan zijn, omdat het dan geen verrassing meer is. Hij redeneert verder: 'Oké, dan is de toets niet op vrijdag. Maar dat betekent dat de toets ook niet op donderdag kan zijn, want...'

Maak de redenering van Rachid af.

- c** Waarom kan de toets ook niet op woensdag, dinsdag of maandag zijn volgens deze logica?
- d** Leg uit waarom hier sprake is van een paradox.

- 37** Een paradox waar veel wiskundigen en filosofen zich mee bezig hebben gehouden is de leugenaarsparadox.

Deze paradox heeft betrekking op de volgende bewering: 'Deze zin is niet waar'.

- a** Stel dat de bewering waar is.
Wat is in dat geval de conclusie?
- b** Stel dat de bewering niet waar is.
Wat is dan de conclusie?



Op internet kun je verschillende oplossingen voor de leugenaarsparadox vinden.

Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

032

Gegeven zijn de volgende beweringen.

G : Het getal is groter dan nul.

E : Het getal is even.

- a Schrijf bij zowel bewering G als bewering $\neg G$ drie getallen op die aan de bewering voldoen.
- b Zijn er getallen die aan G én $\neg G$ voldoen?
- c Uit opdracht b volgt dat de bewering $G \wedge \neg G$ een tegenspraak is.
Hoe noem je een tegenspraak ook wel?
- d Schrijf drie getallen op die aan de bewering E voldoen.
- e Zijn er getallen die aan G én E voldoen?
- f Is $G \wedge E$ een contradictie?

Geef van elk van de volgende beweringen aan of het wel of geen contradictie is. Als de bewering geen contradictie is, schrijf dan een getal op dat aan de bewering voldoet.

g $G \wedge \neg E$

i $(G \vee \neg G) \wedge E$

h $E \vee \neg E$

j $(G \wedge E) \wedge (\neg G \vee \neg E)$

Uitdagende opdrachten

U5

Een bekende paradox uit de oudheid is die van de krokodil. Een krokodil ruikt een moeder haar baby uit handen, en zegt: 'Als je zult raden wat ik ga doen, krijg je je kind terug, anders eet ik het op.'

Radeloos roept de moeder 'O, je zult hem opeten!'.

'Tja', zegt de krokodil, 'nu kan ik hem helaas niet teruggeven, want dan zou je verkeerd geraden hebben en moet ik hem dus wel opeten.'.

'Nee', zegt de moeder, die nu weer tot bezinning komt, 'want als je mijn kind opeet, heb ik juist geraden, en moet je het dus teruggeven!'.

- a Hoe zou de krokodil hebben gereageerd als de moeder had geantwoord met: 'Je zult hem niet opeten.'?
- b Leg uit waarom hier sprake is van een paradox.

(Ontleend aan syllabus wiskunde C 2018)



17.6 Venndiagrammen

Je leert

- hoe je een Venndiagram gebruikt

Leerroutes

- ondersteunend: 38—39—040—40—41—42—44
- doorlopend: 38—39—40—41—42—43—44
- uitdagend: 38—40—41—42—43—44—U6

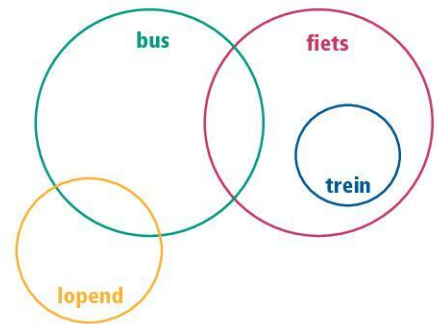
In een enquête is een van de vragen: ‘Welke sociale media gebruik je?’. Je kunt kiezen uit Facebook, Instagram of Snapchat. Je kunt meerdere sociale media aanvinken, maar je kunt ook niets aanvinken. Max heeft de enquête ingevuld. In het diagram zie je dat hij alleen maar Facebook gebruikt.

- Waar zit jij in het diagram?



- 38** Onder studenten in Leiden is onderzoek gedaan naar het vervoermiddel waarmee zij naar de colleges komen. In het diagram zie je het resultaat.
- Hoe kun je zien dat alle studenten die met de trein gaan, ook een fiets gebruiken?
 - Hoe zie je dat een gedeelte van de studenten die lopend gaan, ook de bus gebruiken?
 - Zijn er studenten die de trein en de bus gebruiken?
 - Gebruik de volgende afkortingen:
 L : lopend; F : fiets; B : bus; T : trein.
 Welke van de volgende beweringen zijn juist?

1 $T \Rightarrow F$	3 $\neg L \wedge \neg F \Rightarrow B$
2 $F \Rightarrow T$	4 $\neg F \Rightarrow \neg T$



Theorie

Het diagram van opdracht 38 heet een **Venndiagram**. Een Venndiagram is een grafische voorstelling van de logische relaties tussen meerdere groepen.

Voorbeeld

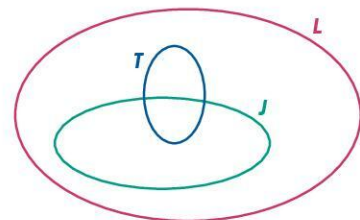
In het Venndiagram is de relatie tussen de leden van een korfbalclub weergegeven.

L : leden

J : jeugdleden

T : spelers in eerste team

Bij dit Venndiagram passen (onder andere) de volgende beweringen: $T \Rightarrow L$; $J \Rightarrow L$ en $\neg L \Rightarrow \neg J$.



- 39** Bekijk het Venndiagram in het voorbeeld.
- Hoe kun je zien dat er jeugdleden zijn die in het eerste team spelen?
 - Arceer het gebied waarvoor geldt: $(L \wedge T) \wedge \neg J$.

Ondersteunende route → maak opdracht 040

40

Bekijk het Venndiagram.

H

a Welke van de volgende beweringen zijn juist?

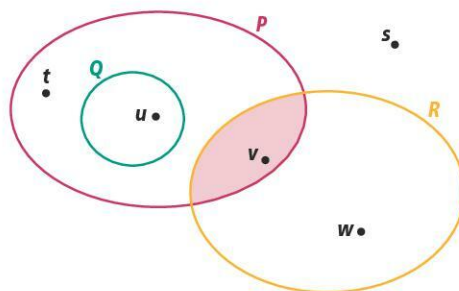
- | | |
|---------------------|-------------------------------|
| 1 $P \Rightarrow Q$ | 3 $\neg Q \Rightarrow \neg P$ |
| 2 $Q \Rightarrow P$ | 4 $\neg P \Rightarrow \neg Q$ |

b Welke van de volgende beweringen past bij het gekleurde gebied waarin punt v ligt?

- | | |
|---------------------|---------------------|
| 1 $R \wedge \neg P$ | 3 $\neg R \wedge P$ |
| 2 $R \wedge P$ | 4 $R \vee P$ |

c Geef met afkortingen en logische symbolen een beschrijving van het gebied met punt w .

d Hoe kun je met afkortingen en logische symbolen het gebied met punt t beschrijven? En het gebied met punt s ?



41

Gegeven zijn de beweringen A , B en C .

a Teken een Venndiagram met twee gebieden A en B die elkaar gedeeltelijk overlappen.

b Er geldt: $C \Rightarrow A$ en $\neg C \Rightarrow A \wedge \neg B$.
Teken gebied C .

c Arceer het gebied $A \wedge \neg C \wedge \neg B$.

42

a Gegeven is de redenering:

'Alle Nederlandse kinderen kunnen fietsen.

De meeste fietsers hebben een goede conditie.

Conclusie: Alle Nederlandse kinderen hebben een goede conditie.'

Je ziet een Venndiagram dat bij deze redenering is gemaakt met de afkortingen:

F : fietsers; N : Nederlandse kinderen; G : goede conditie.

Leg uit dat uit het Venndiagram volgt dat de redenering niet juist is.

b Onderzoek met een Venndiagram of de volgende redeneringen juist of onjuist zijn.

1 Alle katten houden van vis.

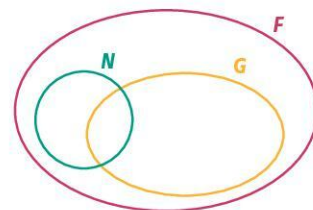
Rakker houdt niet van vis.

Conclusie: Rakker is geen kat.

2 Alle sporters zijn fit.

Sommige sporters zijn rijk.

Conclusie: Er zijn geen rijke mensen die niet fit zijn.



43

Een veelgemaakte redenering is de volgende:

90% van de longkankerpatiënten heeft gerookt.

Dus als je rookt, dan is de kans op longkanker 90%.

Laat met een Venndiagram zien dat deze omdraaiing niet zomaar is toegestaan.

- 44** In 2010 stond in NRC Handelsblad het artikel dat hiernaast is afgedrukt. In deze opgave bekijken we de discussie tussen de meisjes. Daarvoor modelleren we deze discussie:

Er zijn twee vriendinnen, vriendin 1 en vriendin 2, die de schrijfster van het artikel tegenkomen.

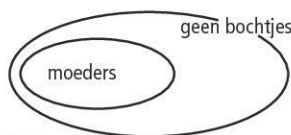
Citaat 1: vriendin 1 vraagt aan de schrijfster: 'Ben jij een moeder?'

Citaat 2: vriendin 2 zegt: 'Ze is een moeder omdat ze geen bochtjes kan.'

Citaat 3: vriendin 1 zegt: 'Dat kun je pas zeggen als je alle moeders kent en wanneer alle moeders geen bochtjes kunnen.'

Citaat 4: vriendin 1 zegt bovendien: 'Dat kun je niet zeggen want wij zijn meisjes en kunnen ook geen bochtjes.'

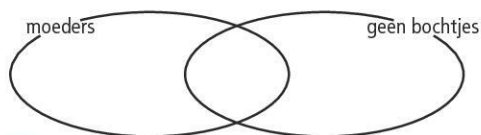
- Geef de redenering van citaat 2 in de vorm 'Als ... dan ...'
- Welke van de Venndiagrammen A, B of C past bij citaat 2? Licht je antwoord toe.



A



B



C

- In citaat 4 gaat vriendin 1 tegen de uitspraak van citaat 2 in.
Toon aan dat dit argument van citaat 4 voldoende is om de uitspraak van vriendin 2 in citaat 2 te weerleggen.
- We kijken nu naar citaat 3 van vriendin 1. Stel dat de volgende bewering geldt: 'Alle moeders kunnen geen bochtjes.'
Formuleer deze bewering weer in een 'Als ... dan ...'-vorm en onderzoek of deze bewering de uitspraak van citaat 2 bevestigt.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde C-pilot 2012, tijdvak 1)

Uitdagende route → maak opdracht U6

ik@nrc.nl

Schaatskunst

Het schaatsseizoen is weer begonnen.

Rechtuit gaat wel, bochtjes oefen ik ieder jaar alsof het voor het eerst is. Ik help een meisje met haar veters. Als we elkaar weer tegenkomen vraagt ze of ik een meisje ben of moeder. Haar vriendinnetje onderbreekt haar:

"Ze is een moeder. Ze kan wel schaatsen, maar geen bochtjes, net als mijn moeder." Het is even stil. Dan zegt de ander: "Dat kan je pas zeggen wanneer je alle moeders kent en wanneer alle moeders wel kunnen schaatsen, maar geen bochtjes. En trouwens, wij zijn meisjes en kunnen ook geen bochtjes."

Vriendinnetje zucht: "Jij maakt ook altijd alles ingewikkeld!"

MARGREET VAN SCHIE

Ondersteunende opdrachten

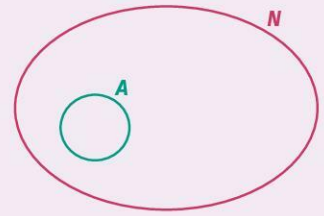
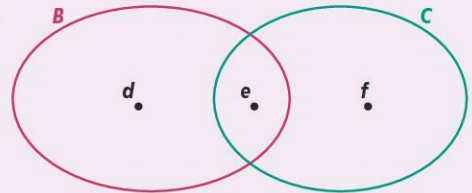
040

Gegeven zijn de beweringen:

A : Je woont in Amsterdam.

N : Je woont in Nederland.

- Leg uit waarom de bewering $A \Rightarrow N$ juist is, maar de bewering $N \Rightarrow A$ niet.
- Je ziet een Venndiagram dat bij deze beweringen is getekend.
Hoe zie je aan het diagram dat $A \Rightarrow N$ juist is?
- Leg met behulp van het Venndiagram uit dat de bewering $\neg N \Rightarrow \neg A$ juist is.
- Je ziet een tweede Venndiagram dat bij twee beweringen B en C is getekend.
Het punt d ligt in B , maar niet in C .
Vul in:
Bij het gebied met punt d past de bewering: $B \wedge \dots$
- Geef ook een beschrijving met afkortingen en logische symbolen van het gebied met punt e .
- Hoe kun je het gebied met punt f met afkortingen en logische symbolen beschrijven?
- Leg uit dat de punten d , e en f alle drie in het gebied liggen dat past bij de bewering $B \vee C$.



Uitdagende opdrachten

U6

Van een groep van honderd studenten is nagegaan wie Engels, wie Frans en wie Duits spreekt. Het resultaat:

- 2 studenten spreken geen van de drie talen;
 - 64 studenten spreken Engels;
 - 33 studenten spreken Duits;
 - 3 studenten spreken Engels en Frans;
 - 8 studenten spreken Engels en Duits;
 - 25 studenten spreken Duits, maar geen Frans;
 - 20 studenten spreken alléén Duits.
- Ga met een Venndiagram na hoeveel studenten Frans spreken.
 - Hoeveel studenten spreken alle drie de talen?



- 45** Lees de tekst over het slaapmiddel Temazepan.
Om de tekst te modelleren, gebruik je de volgende afkortingen:
 T : gebruik Temazepan.
 S : sufheid.
 G : geheugenverlies.
 V : spierverslapping.
 R : verminderd reactievermogen.
 L : verminderd functioneren van ledematen.
Modelleer de tekst met behulp van de symbolen $\wedge, \vee, \neg$ en $\Rightarrow$.

Het gebruik van het slaapmiddel Temazepan heeft de volgende bijwerkingen: sufheid, geheugenverlies en spierverslapping. Deze bijwerkingen verminderen het reactievermogen en het functioneren van ledematen.

- 46** Gegeven zijn de beweringen:
 V : De figuur is een vierhoek.
 Z : De figuur is een vierhoek waarvan de zijden even lang zijn.
 R : De figuur is een vierhoek waarvan alle hoeken 90° zijn.
a Teken een Venndiagram dat deze drie beweringen weergeeft.
b Arceer het gebied waarvoor geldt: $Z \wedge \neg R$.
c Teken een vierhoek waarvoor geldt: $V \wedge \neg(Z \vee R)$.

- 47** Vier vriendinnen, Julia, Lotte, Roos en Sofie, gaan een middagje shoppen. Aan het eind van de middag hebben ze alle vier twee verschillende aankopen gedaan. Sommige meisjes kochten een paar schoenen. Het volgende bleek waar te zijn:

‘Als een meisje geen schoenen kocht, dan had ze bruin haar.’
Deze zin kun je met symbolen weergeven als: $\neg P \Rightarrow Q$.

- a** Beschrijf de uitspraak $\neg Q \Rightarrow P$ in gewoon Nederlands en geef aan of deze uitspraak waar of onwaar is.
b Er zijn meer ware uitspraken over het middagje shoppen. Hieronder staan ze allemaal.
- 1 Drie van hen hebben een paar schoenen gekocht.
 - 2 Er is precies één meisje met bruin haar en zij kocht geen schoenen.
 - 3 Slechts één meisje kocht een jas.
 - 4 Twee meisjes kochten een rokje, één van hen had rood haar.
 - 5 De zwartharige Lotte en het blonde meisje kochten allebei een broek.
 - 6 Julia kocht niets dat Roos of het zwartharige meisje kocht.

We kunnen nu concluderen dat het meisje met het bruine haar Julia moet zijn.

Leg uit dat het meisje met het bruine haar Julia moet zijn.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde C-pilot 2014, tijdvak 2)



- 48** Het familiespel Tricoda bestaat uit 28 stenen. Het cijfer 1 komt één keer voor; het cijfer 2 twee keer; het cijfer 3 drie keer en zo verder tot en met het cijfer 7, dat zeven keer voorkomt. Elke speler krijgt drie stenen, die op een standaard worden geplaatst, waarbij de volgorde niet van belang is. De drie stenen vormen zo een cijfertrio. Iedere speler ziet zijn eigen cijfertrio niet, maar wel het cijfertrio van de andere spelers. Om het spel te winnen moet je, met behulp van vragenkaartjes, beredeneren welke drie getallen op je eigen standaard staan.



In iedere beurt pakt een speler een kaartje met een vraag van een stapel, leest deze voor en beantwoordt de vraag. In de tabel zie je een mogelijke spelsituatie. In het vervolg van de opgave bekijken we deze situatie nader.

Speler A pakt een kaart en leest voor: ‘Op hoeveel standaards is de som van de cijfers 12 of meer?’. Hij geeft als antwoord: ‘Op twee standaards (die ik zie)’.

Spelers B en C weten nu dat de som van hun cijfers 12 of hoger is en speler D weet dat de som van zijn cijfers lager dan 12 is.

- Toon aan dat dit juist is.
- Speler B pakt vervolgens een kaart en leest voor: ‘Op hoeveel standaards zie je alleen maar even cijfers of alleen maar oneven cijfers?’ Hij antwoordt: ‘Op één standaard.’ Onderzoek of speler D op basis van de informatie van speler A en speler B zeker kan weten dat al zijn cijfers oneven zijn.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde C-pilot 2013, tijdvak 2)

speler	cijfertrio	som
A	2 3 7	$2 + 3 + 7 = 12$
B	2 6 7	$2 + 6 + 7 = 15$
C	4 5 7	$4 + 5 + 7 = 16$
D	1 3 5	$1 + 3 + 5 = 9$

- 49** Amir en Bob hebben net Carina leren kennen en willen graag weten wanneer ze jarig is. Carina geeft ze een lijst met 10 mogelijke data:

september	20	21	24
oktober	22	23	
november	19	21	
december	19	20	22

Daarna vertelt Carina aan Amir in welke maand ze jarig is en vertelt ze Bob op welke dag van de maand ze jarig is. Amir zegt vervolgens: “Ik weet niet wanneer Carina jarig is, maar ik weet zeker dat Bob het op dit moment ook niet weet”. Bob reageert hierop: “Eerst wist ik inderdaad niet wanneer Carina jarig is, maar dankzij Amirs opmerking weet ik het nu wel”, waarop Amir concludeert: “O, maar dan weet ik het nu ook!”

Onderzoek op welke dag Carina jarig is.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde C 2019, tijdvak 2)



Theorie

Bewering, tegenvoorbeeld, redenering, uitgangspunt, conclusie, samengestelde bewering, als-dan-bewering

Een bewering of propositie is een uitspraak die waar of onwaar is. Als een bewering onwaar is, kun je dit met een tegenvoorbeeld aantonen.

Met behulp van beweringen kun je een redenering opbouwen.

Een redenering met één of meerdere uitgangspunten en een conclusie heet een samengestelde bewering. Het trekken van een conclusie is een redeneerstap.

uitgangspunt , uitgangspunt dus conclusie

Een als-dan-bewering is een voorbeeld van een samengestelde bewering.

Voorbeeld 1

Iedere vogel kan vliegen.

Deze bewering is niet waar. Een tegenvoorbeeld bij deze bewering is een pinguïn. Dit is een vogel die niet kan vliegen.

Voorbeeld 2

Als je in Haarlem woont, dan woon je in de provincie Noord-Holland.

Deze als-dan-bewering is waar, want de plaats Haarlem ligt in Noord-Holland.

- S1** Piotr beweert: 'De som van twee getallen is altijd groter dan de twee getallen zelf'.
- Geef een tegenvoorbeeld bij de bewering.
 - Wat betekent dit tegenvoorbeeld voor de bewering?
- S2** Vera loopt naar school, want haar fietsband is lek en ze heeft de bus gemist.
- Uit welke beweringen bestaat deze redenering?
 - Schrijf de zin in de vorm van een als-dan-bewering.

Theorie

Implicatie, ontkenning, nodige voorwaarde, voldoende voorwaarde

Een bewering van de vorm 'als A dan B ' ofwel 'uit A volgt B ' heet een implicatie. Je noteert dit als $A \Rightarrow B$.

Als $A \Rightarrow B$ waar is, dan hoeft $B \Rightarrow A$ niet waar te zijn.

Voor de ontkenning gebruik je het symbool $\neg$.

Als $A \Rightarrow B$ waar is, dan is $\neg B \Rightarrow \neg A$ ook waar.

A is een nodige voorwaarde voor B als geldt dat B alleen maar waar kan zijn als A waar is.

A is een voldoende voorwaarde voor B als geldt dat B altijd waar is als A waar is.

Voorbeeld

V : De vierhoek is een vierkant.

R : De vier hoeken van de vierhoek zijn 90° .

Als een vierhoek een vierkant is, dan zijn alle hoeken 90° . Dus $V \Rightarrow R$.

De omkering $R \Rightarrow V$ is niet waar, want een rechthoek heeft ook hoeken van 90° . Wel waar is: $\neg R \Rightarrow \neg V$.

Je ziet dat V wel een voldoende voorwaarde is voor R , maar geen nodige voorwaarde.

- S3** Als het een feestdag is, dan is de school gesloten.
Deze redenering bestaat uit twee beweringen:
 F : Het is een feestdag.
 G : De school is gesloten.
- Schrijf de redenering met behulp van de afkortingen en het symbool $\Rightarrow$.
 - Is F een voldoende voorwaarde voor G ?
 - Is F een nodige voorwaarde voor G ? Licht je antwoord toe.
 - Welke van de volgende implicaties volgen uit de redenering?

1 $G \Rightarrow F$	3 $\neg F \Rightarrow \neg G$
2 $\neg G \Rightarrow \neg F$	4 $G \Rightarrow \neg F$

Theorie

'En' en 'of', modelleren

In beweringen wordt vaak gebruik gemaakt van de logische verbindingswoorden *en* en *of*.

Voor *en* gebruik je het symbool $\wedge$.

Voor *of* gebruik je het symbool $\vee$.

Met het symbool $\vee$ wordt de 'inclusieve of' bedoeld.

Het noteren van redeneringen met afkortingen en logische symbolen heet modelleren.

Voorbeeld 1

Als in de maand januari de wind uit het oosten komt, dan gaat het vriezen.

Modelleer de zin met de volgende afkortingen:

J : Het is de maand januari.

W : De wind komt uit het oosten.

V : Het gaat vriezen.

Oplossing

$J \wedge W \Rightarrow V$.

Voorbeeld 2

Gegeven zijn de beweringen:

C : Thomas heeft een slechte conditie.

O : Thomas eet ongezond.

W : Thomas beweegt te weinig.

Schrijf $\neg C \Rightarrow \neg O \vee \neg W$ als Nederlandse zin.

Oplossing

Als Thomas een goede conditie heeft, dan eet hij gezond of beweegt hij voldoende.

- S4** **a** Modelleer de volgende beweringen met de afkortingen hiernaast en logische symbolen.
- Als Fenna heeft hardgelopen, dan is ze moe.
 - Als Fenna thuis is en niet moe is, dan is ze aan het studeren.
- b** Schrijf de bewering $\neg S \Rightarrow \neg T \vee M$ als Nederlandse zin.

H : Fenna heeft hardgelopen.

M : Fenna is moe.

T : Fenna is thuis.

S : Fenna is aan het studeren.

Theorie

Contradictie, paradox

Een bewering die nooit waar is, heet een contradictie.

Je kunt dit noteren als $A \wedge \neg A$.

Soms is een contradictie een schijncontradictie, dit heet een paradox. Een paradox is een uitspraak, die lijkt in te gaan tegen je gevoel voor logica, je verwachting of je intuïtie.

Voorbeeld 1

V : De vierhoek is een vierkant.

S : De vierhoek heeft een hoek die groter is dan 90° .

De bewering $V \wedge S$ is een contradictie, want een vierkant kan geen hoek hebben die groter is dan 90° .

Voorbeeld 2

Er is één constante in het leven: dat alles voortdurend verandert.

Het woord 'constante' lijkt in tegenspraak te zijn met 'voortdurend veranderen'. De zin is een paradox, omdat je die veranderingen kunt opvatten als iets onveranderlijks, iets dat altijd doorgaat.

- S5** Je gooit één keer met een dobbelsteen.
Welke van de volgende beweringen zijn contradicties?
- a $Z \wedge O$
 - b $(Z \vee \neg E) \wedge E$

E : Je gooit een even aantal ogen.
 O : Je gooit een oneven aantal ogen.
 Z : Je gooit zes ogen.

Vaardigheid

Je kunt aangeven of een redenering correct is.

Een correcte redenering is volledig. Dat betekent dat de uitgangspunten voldoende zijn om de conclusie te kunnen trekken.

Voorbeeld

Neem aan dat de volgende bewering waar is:
'Als je regelmatig naar de sportschool gaat, dan ben je gespierd.'

Geef aan of de volgende redeneringen correct zijn.

- 1 Ebru gaat regelmatig naar de sportschool, dus ze is gespierd.
- 2 Felix gaat nooit naar de sportschool, dus hij is niet gespierd.

Oplossing

Redenering 1 is correct, volgens de bewering ben je gespierd als je regelmatig naar de sportschool gaat.

Redenering 2 is niet correct. De bewering zegt niet dat je alleen gespierd kunt zijn als je regelmatig naar de sportschool gaat.

- S6** Neem aan dat de volgende bewering waar is:
 ‘Van te veel zout eten krijg je een hoge bloeddruk.’
 Leg van de volgende redeneringen uit of ze correct zijn.
- a** Sem eet te veel zout, hij krijgt dus een te hoge bloeddruk.
 - b** Lucas heeft een hoge bloeddruk, hij heeft dus te veel zout gegeten.
 - c** Noah heeft geen hoge bloeddruk, ze heeft dus weinig zout gegeten.

Vaardigheid

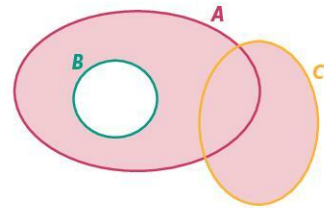
Je kunt een Venndiagram gebruiken.

In een Venndiagram worden de logische relaties tussen groepen zichtbaar. Bij ieder gebied in een Venndiagram hoort een bewering.

Met behulp van overlappingen en insluitingen van gebieden kun je hieruit (andere) beweringen aflezen en afleiden.

Voorbeeld

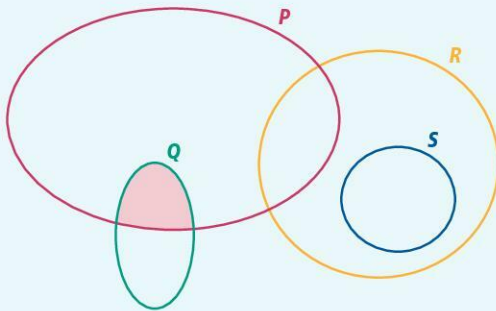
Geef twee implicaties die volgen uit het Venndiagram en geef een bewering die past bij het gekleurde gebied.



Oplossing

Twee implicaties zijn $B \Rightarrow A$ en $\neg A \Rightarrow \neg B$.
 Bij het gekleurde gebied hoort: $C \vee (A \wedge \neg B)$.

- S7** Bekijk het Venndiagram.

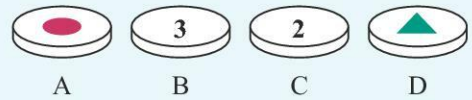


- a** Hoe volgt uit het Venndiagram dat $S \Rightarrow R$?
- b** Geef nog een implicatie die uit het diagram volgt.
- c** Geef een bewering die past bij het gekleurde gebied.
- d** Kleur het gebied dat hoort bij de bewering $R \wedge \neg(P \vee S)$.

T1 Op tafel liggen vier schijven. Op de ene kant staat altijd een figuur (cirkel, vierkant, rechthoek of driehoek) en op de andere kant een cijfer (1, 2, 3 of 4).

Als op de ene kant een cirkel staat, dan staat op de andere kant een 3. Een schijf met een 2 heeft op de andere kant altijd een vierkant staan.

- Welk cijfer staat er aan de andere kant van schijf A?
- Tom redeneert dat op de andere kant van schijf B een cirkel staat.
Waarom is de redenering van Tom niet correct?
- Leg uit waarom er minstens één schijf is met een vierkant.



T2 Xander en Yvette nemen beide een geheel getal in gedachten dat groter is dan 1, maar kleiner is dan 10.

Gegeven zijn de volgende beweringen:

A: Het getal van Xander is even.

B: Het getal van Yvette is oneven.

C: De som van de getallen van Xander en Yvette is even.

- Leg uit dat de bewering $A \wedge \neg A$ een contradictie is.
- Zoë beweert: 'Als zowel Xanders getal als Yvettes getal even is, dan is ook de som van hun getallen even.'
Modelleer de bewering van Zoë met behulp van de bovenstaande afkortingen en logische symbolen.
- Laat met een tegenvoorbeeld zien dat de omkering van de bewering van Zoë niet waar is.

T3 Alex verkoopt ijsjes als hij niet op vakantie is en er een hittegolf is of het druk op het strand is.

Deze redenering bestaat uit vier beweringen:

I: Alex verkoopt ijsjes.

V: Alex is op vakantie.

H: Er is een hittegolf.

D: Het is druk op het strand.

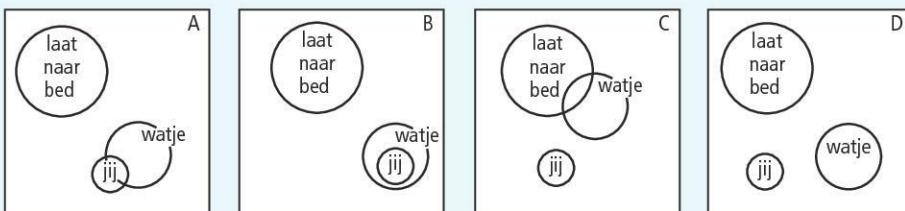
- Schrijf de redenering met behulp van de afkortingen en logische symbolen.
- Lees de volgende zin:
'Als Alex geen ijsjes verkoopt, dan is hij op vakantie of is er geen hittegolf en is het niet druk op het strand.'
Deze zin kun je twee manieren schrijven:
 $\neg I \Rightarrow (V \vee \neg H) \wedge \neg D$ of $\neg I \Rightarrow V \vee (\neg H \wedge \neg D)$
Welk van beide manieren komt het best overeen met de zin? Licht je antwoord toe.



- T4** Gegeven zijn drie beweringen:
- Alle inwoners van Engeland spreken Engels.
 - Sommige inwoners van Engeland spreken ook Frans.
 - Niet alle mensen die Frans spreken, spreken ook Engels.
- a** Teken een Venndiagram bij deze beweringen met daarin de groepen E : inwoners van Engeland; S_E : Engels sprekers en S_F : Frans sprekers.
- b** Leg met behulp van het Venndiagram uit of de volgende beweringen waar zijn.
- Alle inwoners van Engeland die Frans spreken, spreken ook Engels.
 - Mensen die geen Frans spreken, wonen in Engeland.



- T5** Bij een experiment onder eerstejaars rechtenstudenten moesten de studenten zich buigen over de volgende redenering:
- ‘Als je stoer bent, dan ga je laat naar bed.
Jij bent niet stoer, dus je gaat niet laat naar bed.’
- De bewering in de eerste zin kunnen we met symbolen als volgt weergeven: $S \Rightarrow L$.
- a** Geef de bewering in de tweede zin weer in logische symbolen en leg uit dat deze bewering niet volgt uit de bewering in de eerste zin.
- b** De studenten kregen ook de opdracht om bij de volgende redenering te onderzoeken of deze geldig of ongeldig was:
- ‘Als je een watje bent, dan ga je niet laat naar bed.
Jij gaat niet laat naar bed, dus jij bent een watje.’
- Een van de volgende Venndiagrammen is geschikt om te onderzoeken of deze redenering geldig is.
Welk Venndiagram is dat? Licht je antwoord toe.



- c** Nu bekijken we de volgende twee beweringen:
- Als je stoer bent, dan ga je laat naar bed.
 - Als je een watje bent, dan ga je niet laat naar bed.
- Leg uit of je uit deze twee beweringen de conclusie: ‘Als je een watje bent, dan ben je niet stoer’ kunt trekken.
(Ontleend aan CE vwo wiskunde C-pilot 2017, tijdvak 1)

Je kunt aangeven of een redenering correct is.

- E1** Gegeven zijn de beweringen.
- Aardbeien zijn rood.
 - Bessen zijn rood of blauw.
- Geef van de volgende redeneringen aan of ze correct zijn.
- a** Tim houdt van rood fruit, dus hij houdt van aardbeien.
 - b** Maxime houdt niet van rood fruit, dus ze houdt niet van bessen.
 - c** Een vrucht die niet rood is, is geen aardbei.

Je kunt een Venndiagram gebruiken.

- E2** Gegeven zijn de beweringen A , B en C .
- a** Teken een Venndiagram met twee gebieden A en B die elkaar gedeeltelijk overlappen.
 - b** Arceer het gebied $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$.
 - c** Voor bewering C geldt $C \Rightarrow \neg A \wedge B$.
Teken een mogelijk gebied C .
- E3** Ga bij de volgende redeneringen met een Venndiagram na of de redenering juist of onjuist is.
- a** Alle laptops die na 2018 zijn gemaakt, hebben een webcam.
De laptop van Anne heeft een webcam.
Conclusie: De laptop van Anne is na 2018 gemaakt.
 - b** Alle konijnen houden van wortels.
Alle dieren die van wortels houden, hebben goede ogen.
Conclusie: Alle konijnen hebben goede ogen.
 - c** Alle Spanjaarden tennissen op gravelbanen.
Op gravelbanen wordt vaak verdedigend gespeeld.
Conclusie: Alle Spanjaarden tennissen verdedigend.

- E4** Als de cake een half uur in de oven heeft gestaan of de bovenkant goudgeel is en de binnenkant niet meer vochtig, dan mag hij uit de oven.
- Deze redenering bestaat uit vier beweringen:
- H : De cake heeft een half uur in de oven gestaan.
 - G : De bovenkant van de cake is goudgeel.
 - V : De binnenkant van de cake is vochtig.
 - O : De cake mag uit de oven.
- a** Schrijf de redenering met behulp van deze afkortingen en logische symbolen.
 - b** Schrijf de bewering $\neg O \Rightarrow \neg H \wedge (\neg G \vee V)$ als Nederlandse zin.





E5 De ‘Sigmund’-strip is gemaakt door de cartoonist Peter de Wit. We kijken eerst alleen naar de eerste twee plaatjes. Om de discussie in deze plaatjes te modelleren, gebruiken we de volgende afkortingen:

H: iemand is hoogopgeleid.

O: iemand ‘wordt oud en blijft lang gezond’.

We nemen aan dat er in beide gevallen maar twee mogelijkheden zijn: iemand is hoogopgeleid of niet en iemand ‘wordt oud en blijft lang gezond’ of dat gebeurt niet.

De oude man zegt in het eerste plaatje: ‘Als iemand hoogopgeleid is, dan wordt hij oud en blijft hij lang gezond.’

Met behulp van bovenstaande afkortingen en met logische symbolen kunnen we dat schrijven als: $H \Rightarrow O$.

In het tweede plaatje zegt de oude man: ‘Ik ben niet hoogopgeleid en toch oud geworden en lang gezond gebleven.’

a Onderzoek of de uitspraak van de oude man in het tweede plaatje in tegenspraak is met de bewering $H \Rightarrow O$. Licht je antwoord toe.

b In het tweede plaatje gebruikt de oude man het woordje ‘toch’. Daaruit blijkt dat hij vindt dat er een tegenspraak is. De oude man onderscheidt kennelijk twee soorten mensen: hoogopgeleiden, die worden oud en blijven lang gezond en niet-hoogopgeleiden, waarvoor niet geldt dat ze oud worden en lang gezond blijven. Dit laatste kun je vertalen in: $\neg H \Rightarrow \neg O$.

Leg uit dat deze laatste bewering in tegenspraak is met de uitspraak van de oude man in het tweede plaatje.

c Sigmund trekt in het derde plaatje de volgende conclusie: De man is oud geworden en lang gezond gebleven, dus hij moet wel hoogopgeleid zijn, oftewel: $O \Rightarrow H$.

Onderzoek of de bewering $O \Rightarrow H$ in overeenstemming is met $H \Rightarrow O$ of met $\neg H \Rightarrow \neg O$. Licht je antwoord toe.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde C-pilot 2014, tijdvak 1)



SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In hoofdstuk 8C heb je naar aanzichten en symmetrie van ruimtelijke objecten gekeken. Ook heb je inhouden berekend.

In hoofdstuk 16 heb je geleerd wat eenpuntperspectief is en hoe je een eenpuntperspectieftekening maakt.

In dit hoofdstuk leer je hoe je met behulp van aanzichten kunt bepalen hoe een ruimtelijk object eruit ziet. Je leert hoe je een tweepuntperspectieftekening maakt en hoe je de hoogte kunt bepalen waarop de lens van een camera stond bij het maken van een foto. Ten slotte ga je lengten en afstanden berekenen in een perspectieftekening.

Na dit hoofdstuk weet je alles wat je over vorm en ruimte moet weten voor het centraal examen.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk:

• *Logisch redeneren en bewijzen*

• *Ordenen en structureren*

• *Probleem oplossen en analytisch denken*

opdracht 16

opdracht 25

opdracht 31

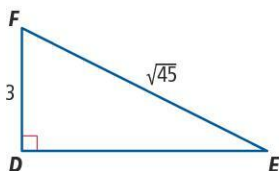


Theorie

In elke rechthoekige driehoek geldt **de stelling van Pythagoras**: $a^2 + b^2 = c^2$. Hierin zijn a en b de lengtes van de twee rechthoekszijden en is c de lengte van de langste zijde.

Voorbeeld

In $\triangle DEF$ is $DF = 3$, $EF = \sqrt{45}$ en $\angle D = 90^\circ$.



Bereken de lengte van DE .

Oplossing

zijde	kwadraat
$DF = 3$	9
$DE = \dots$	$\frac{36 +}{45}$
$EF = \sqrt{45}$	
$DE = \sqrt{36} = 6$	

- V1
- Teken $\triangle ABC$ met $AB = 2$ cm, $BC = 4$ cm en $\angle B = 90^\circ$.
 - Laat met behulp van de stelling van Pythagoras zien dat de lengte van AC ongeveer 4,47 cm is.
 - In $\triangle PQR$ is $PQ = 3$ cm, $QR = 7$ cm en $\angle P = 90^\circ$. Bereken in mm nauwkeurig de lengte van PR .

- V2
- Truffels kosten € 1,08 per 150 gram. Mason heeft truffels gekocht en moest daarvoor € 10,26 betalen. Je kunt het gewicht berekenen met een verhoudingstabel en kruisproducten.
- Vul de ontbrekende waarden in de verhoudingstabel in.
 - Hoeveel gram truffels heeft Mason gekocht?

gewicht in grammen	...	?
prijs in centen	...	1026

- V3
- De chihuahua is in het echt 25 cm lang. Dit is de horizontale afstand van haar tong tot het uiteinde van haar staart.

a Vul de verhoudingstabel in.

lengte in werkelijkheid in cm	25	...
lengte op de foto in cm	...	1

- Op welke schaal is de chihuahua hier afgebeeld?
- Hoe groot is de bal van de chihuahua in werkelijkheid?
- De chihuahua heeft een kauwbot die 12 cm lang is. Hoeveel cm lang zou dit kauwbot op de foto worden?



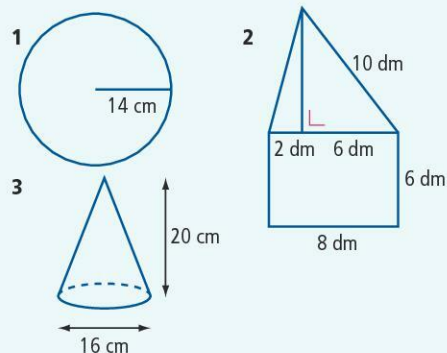
- V4
- Een wedstrijdformaat snookertafel is 177,8 cm breed. Van deze tafel is een model op schaal 1 : 16 gemaakt.

- Hoe breed is het model?
- Het model is 22,3 cm lang. Hoe lang is een wedstrijdformaat snookertafel?

Theorie

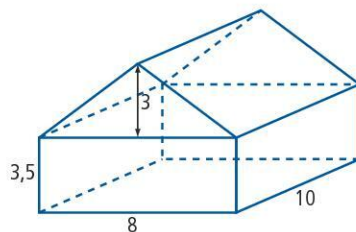
Bij het berekenen van **oppervlakten** en **inhouden** kun je gebruikmaken van de volgende formules:

- oppervlakte rechthoek = lengte $\times$ breedte
- oppervlakte driehoek = $\frac{1}{2} \times$ basis $\times$ hoogte
- oppervlakte cirkel = $\pi \times$ straal²
- inhoud balk, kubus, prisma en cilinder =
oppervlakte grondvlak $\times$ hoogte
- inhoud piramide en kegel =
 $\frac{1}{3} \times$ oppervlakte grondvlak $\times$ hoogte



- V5**
- Bereken de oppervlakte van figuur 1.
 - Bereken de oppervlakte van figuur 2.
 - Bereken de inhoud van figuur 3.
- V6** Sven heeft twee cilinders gemaakt. De tweede cilinder is een vergroting van de eerste cilinder. Het grondvlak van de eerste cilinder is een cirkel met een straal van 3 cm. Het grondvlak van de tweede cilinder is een cirkel met een straal van 12 cm.
- Bereken de vergrotingsfactor.
 - Bereken de oppervlaktes van beide cirkels.
 - Hoeveel keer zo groot is de oppervlakte van de tweede cirkel als die van de eerste cirkel?
 - De hoogte van de eerste cilinder is 10 cm. Hoe hoog is de tweede cilinder?
 - Hoeveel keer zo groot is de inhoud van de tweede cilinder als die van de eerste cilinder?
- V7** Bij de tekening van het huis staan enkele afmetingen.
- Wat is de wiskundige naam van dit ruimtelijk object?
 - Bereken de oppervlakte van de vloer en van de voorgevel.
 - Laat met een berekening zien dat de totale oppervlakte van de twee dakdelen samen 100 m² is.
 - Bereken de inhoud van het huis in m³.
 - De oppervlakte van de maquette is 10 000 keer zo klein. Bereken de hoogte en de inhoud van de maquette.
- V8** Bij het dorp Joure in Friesland staat een reusachtige vergroting van een Douwe Egberts koffiekop. De hoogte van een 'gewoon' kopje is ongeveer 6 cm en de diameter is ongeveer 8 cm. Er gaan ongeveer 170 000 'gewone' kopjes koffie in deze reusachtige vergroting. Bereken in gehele cm de hoogte en de diameter van deze vergroting van de Douwe Egberts koffiekop.

Zijn twee objecten gelijkvormig met een vergrotingsfactor k , dan geldt voor de oppervlakten van de twee objecten de vergrotingsfactor k^2 en voor de inhoud de vergrotingsfactor k^3 .



18.1 Aanzichten

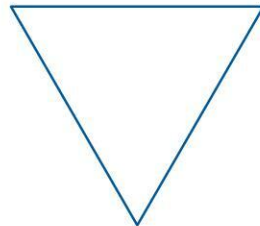
Je leert • hoe je aanzichten gebruikt bij het beschrijven van een ruimtelijk object

Leerroutes • ondersteunend: 1—2—3—04—4—5
• doorlopend: 1—2—3—4—5—6
• uitdagend: 1—2—3—4—5—U1

Van een ruimtelijk object zijn twee aanzichten getekend.

- Bij welke ruimtefiguren kunnen deze aanzichten passen?
- De zijaanzichten hebben allemaal de vorm van het vierkant. Het bovenaanzicht heeft de vorm van de driehoek.

Kun je nu weten hoe het ruimtelijk object eruitziet?

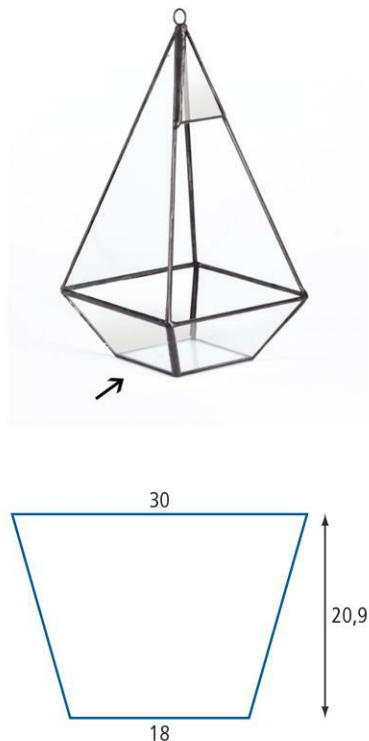


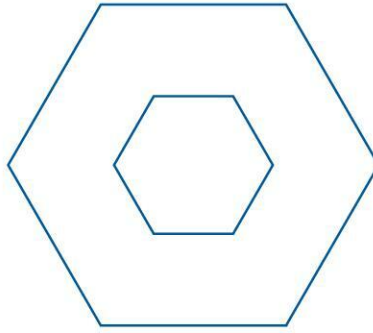
- 1** Het kunstobject hoort bij de kunststroming 'Dutch design'. De glazen wanden zitten vastgeklemd tussen staafjes van staal. Het onderste deel is geheel van glas, het bovenste deel is open zodat er iets in gezet kan worden.

Het grondvlak is een vierkant met zijden van 18 cm. Het tweede horizontale vlak bevindt zich 20 cm hoger en is ook een vierkant, met zijden van 30 cm. De totale hoogte van het object is 65 cm.

In deze opdracht kun je het glazen driehoekje dat je in een van de zijvlakken ziet, buiten beschouwing laten.

- a** De richting van het vooraanzicht is met een pijl aangegeven
Teken op schaal 1 : 10 het vooraanzicht en het bovenaanzicht van dit kunstobject.
- b** Bereken de inhoud van het bovenste deel van het object in gehele cm^3 .
- c** De vier opstaande glazen zijvlakken zijn identiek.
Je ziet de tekening van zo'n zijvlak waarbij er enkele afmetingen in cm zijn gegeven.
Waarom is de hoogte van deze vierhoek geen 20 cm?
- d** Bereken hoeveel cm^2 glas er in het object is verwerkt.
- e** Er is vraag naar zo'n kunstobject waarvan de afmetingen drie keer zo groot zijn.
Hoeveel cm^2 glas zit hier in verwerkt?





- 2** De vaas is van doorzichtig plexiglas. De bodem heeft de vorm van een regelmatige zeshoek met zijden van 15 cm. Deze zeshoekige vorm zie je op nog drie plaatsen in de vaas terugkomen. Van onder naar boven verhouden de lengten van de zijden van deze vier zeshoeken zich als 5 : 7 : 3 : 4.
- Bereken de lengten van de zijden van de andere zeshoeken.
 - Naast de vaas zijn de grootste en kleinste van de vier zeshoeken is getekend.
Op welke schaal is de tekening gemaakt?
 - Teken in de afbeelding het bovenaanzicht van de vaas.
 - De zeshoeken zitten achtereenvolgens op 10 cm, 40 cm en 50 cm boven de bodem.
Teken op schaal 1:10 het zijaanzicht waarbij de kijkrichting met een pijl is aangegeven.

Theorie

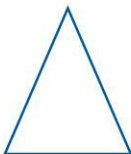
Om te verduidelijken hoe een ruimtelijk object eruitziet, kun je vanuit verschillende posities foto's of tekeningen maken. In de wiskunde heten dit **aanzichten**. Voorbeelden van aanzichten zijn het vooraanzicht, het bovenaanzicht en het zijaanzicht. Als de afmetingen van een object bekend zijn, dan kun je de aanzichten nauwkeurig, eventueel op schaal, tekenen. Vanuit gegeven aanzichten kun je ook vaak een goede voorstelling maken van hoe een ruimtelijk object eruitziet.

Voorbeeld

Gegeven zijn het boven-, het voor- en het rechter zijaanzicht van een object. Beschrijf dit object.



bovenaanzicht



vooraanzicht



rechter zijaanzicht

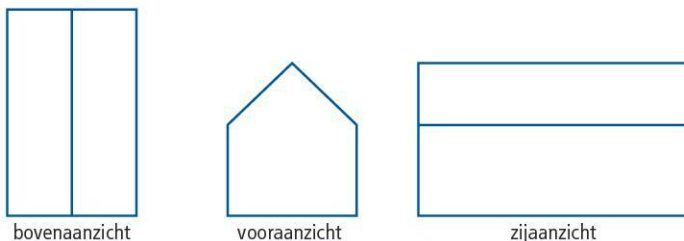
Oplossing

Het object is een piramide met een rechthoekig grondvlak. De top van de piramide bevindt zich recht boven het snijpunt van de diagonalen van het grondvlak.

- 3** Het bovenaanzicht van een ruimtelijk object is een cirkel.
- Hoe ziet het ruimtelijk object eruit als een van de zijaanzichten een rechthoek is? En hoe als een van de zijaanzichten een gelijkbenige driehoek is?
 - Hoe zien de zijaanzichten eruit als het object een bol is?

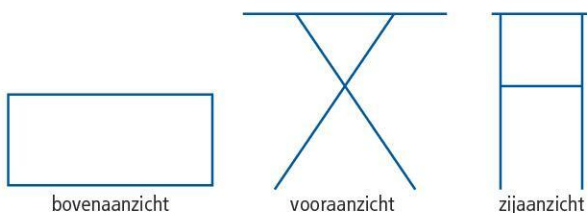
Ondersteunende route → maak opdracht 04

- 4** Gegeven zijn drie aanzichten van een ruimtelijk object.

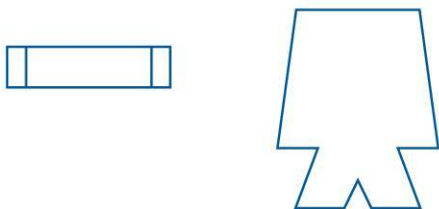


- Hoe noem je dit ruimtelijk object?
- Schets dit object.

- 5** Gegeven zijn, van links naar rechts, het boven-, voor- en zijaanzicht van een object.
H Beschrijf dit object.

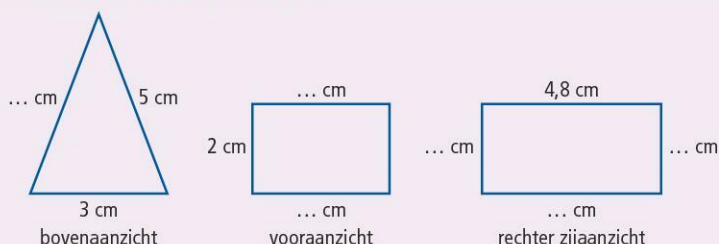


- 6** Je ziet een foto van een schemerlamp en twee tekeningen zoals je de lamp ziet vanuit twee verschillende kijkrichtingen.
- Vanuit welke richtingen zijn de twee tekeningen gemaakt?
 - Teken hoe je de lamp ziet als je er van rechts naar kijkt.

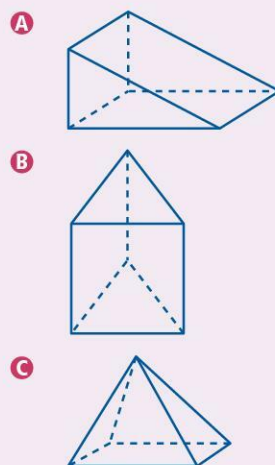


Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

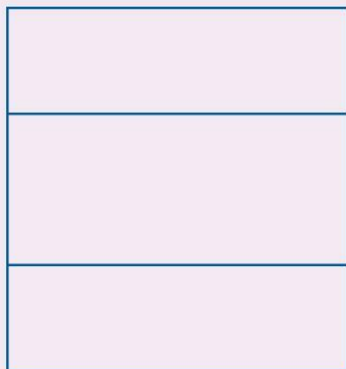


- 04** Gegeven zijn drie aanzichten van een ruimtelijk object. Het bovenaanzicht is een gelijkbenige driehoek. De andere gegeven aanzichten zijn rechthoeken
- Hoe weet je dat het object geen kubus is?
 - Het object is een prisma.
Welke vlakken zijn evenwijdig aan elkaar bij een prisma?
 - In de aanzichten zijn de lengtes van enkele zijden gegeven.
Waarom is lengte van het rechter zijaanzicht niet gelijk aan 5 cm?
 - Ga met de stelling van Pythagoras na dat de lengte van het rechter zijaanzicht inderdaad 4,8 cm is.
 - Vul de ontbrekende lengtes op de puntjes in.
 - Je ziet drie mogelijke ruimtelijke objecten die bij de aanzichten zouden kunnen horen.
Welk ruimtelijk object hoort bij de aanzichten?

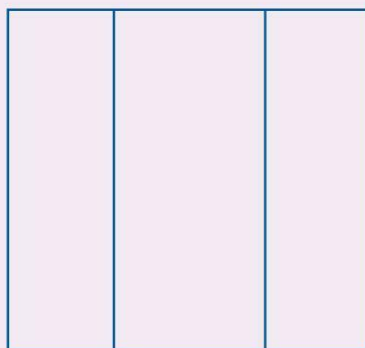


Uitdagende opdrachten

- U1** Het voor- en achteraanzicht van een ruimtelijk object is een regelmatige achthoek met zijden van 20 cm. Je ziet een zijaanzicht en een bovenaanzicht op schaal 1 : 10.



zijaanzicht



bovenaanzicht

- Geef de wiskundige naam van dit ruimtelijk object.
- Teken het vooraanzicht op schaal 1 : 5.
- Bereken de inhoud van dit ruimtelijk object.

18.2 Eenpuntperspectief

Je leert

- hoe je een eenpuntperspectieftekening maakt
- hoe je in een perspectieftekening het midden van een lijnstuk bepaalt

Leerroutes

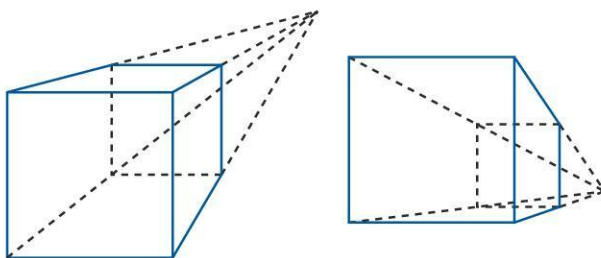
- ondersteunend: 7—8—09—10—11—12
- doorlopend: 7—8—9—10—11—12
- uitdagend: 7—8—9—11—12—U2

Kyra heeft een foto gemaakt van een Nederlands tulpenveld. Je ziet dat de tulpen in rijen zijn geplant.

- Zijn de rijen met tulpen in werkelijkheid evenwijdig aan elkaar? Leg je antwoord uit.



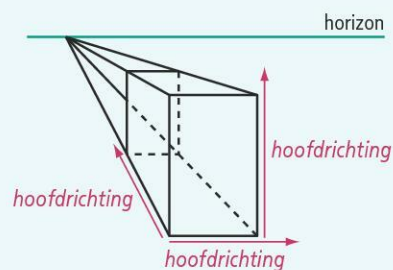
- 7** Dezelfde kubus is twee keer getekend. In beide tekeningen zijn het voor- en achtervlak evenwijdig en als vierkant getekend. Bij elke kubus zijn de naar achter lopende ribben van de zijvlakken verlengd. Ze blijken elkaar in één punt te snijden.
- a Beschrijf bij elke tekening waar het oog zich ongeveer bevindt om de kubus te kunnen zien zoals in de tekening.
 - b Teken de horizon in beide tekeningen.



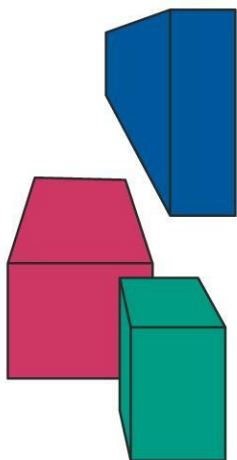
Theorie

Een perspectieftekening is een manier om een ruimtelijk object te tekenen zoals je het in werkelijkheid ook kunt zien. Foto's zijn altijd in perspectief, waarbij de lens van de camera het oog is. De tekeningen bij opdracht 7 zijn voorbeelden van tekeningen in **eenpuntperspectief**.

De breedte, hoogte en diepte van een object heten de **hoofdrichtingen** van het object. Bij eenpuntperspectief zijn twee hoofdrichtingen evenwijdig aan het tafereel, de andere hoofdrichting staat loodrecht op het tafereel. Alle lijnen loodrecht op het tafereel hebben hetzelfde **verdwijnpunt**. De horizontale lijn door het verdwijnpunt heet de **horizon**.



- 8 Drie balken hebben evenwijdige voorvlakken.
Controleer of de tekening in eenpuntperspectief is.
Teken, als dat het geval is, het verdwijnpunt en de horizon.

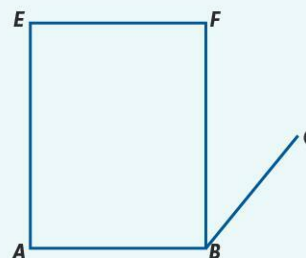


Aanpak

Hoe maak je een eenpuntperspectieftekening?

- 1 Teken het verdwijnpunt V .
- 2 Verbind de overige gegeven hoekpunten met V .
- 3 Gebruik evenwijdigheid van ribben met het (verticale) tafereel om de positie van de ontbrekende hoekpunten te bepalen.
- 4 Teken de nog ontbrekende lijnstukken om de perspectieftekening af te maken.

horizon



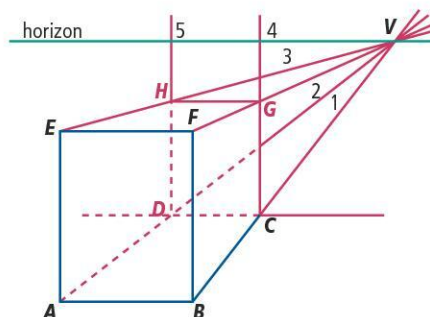
Voorbeeld

Van de balk $ABCD.EFGH$ is het voorvlak $ABFE$ evenwijdig aan het tafereel. In blauw is een begin gemaakt met een eenpuntperspectieftekening van de balk. Maak deze tekening af.

Oplossing

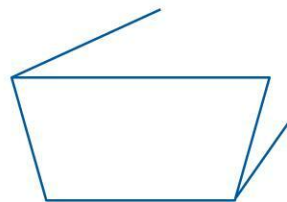
- 1 Verleng BC tot aan de horizon. Het snijpunt is V .
- 2 Verbind de hoekpunten A , F en E met V (lijn 1, 2 en 3).
- 3 Teken de lijn door C evenwijdig aan AB . Het snijpunt met AV is punt D .
- 4 Teken lijn 4 om het punt G te bepalen en lijn 5 om het punt H te bepalen.

Maak de perspectieftekening af met het tekenen van het achtervlak $DCGH$ en de lijnstukken AD , FG en EH .

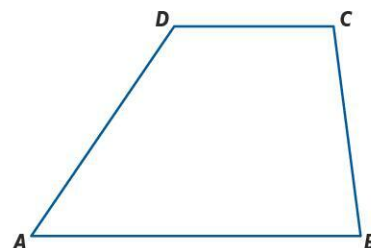


Ondersteunende route → maak opdracht 09

- 9 Je ziet een aantal ribben van een eenpuntperspectieftekening van het onderste deel van het designobject uit opdracht 1. Maak deze tekening af.



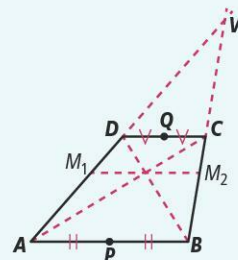
- 10 Je ziet een eenpuntperspectieftekening van rechthoek $ABCD$. De lijnstukken AB en CD zijn evenwijdig aan de horizon.
- Waarom kun je door meten het midden van lijnstuk AB bepalen?
 - Waarom kun je het midden van rechthoek $ABCD$ niet door meten bepalen?
 - Teken lijnstuk AC en lijnstuk BD . Noem het snijpunt S .
 - Waarom is punt S het midden van rechthoek $ABCD$?



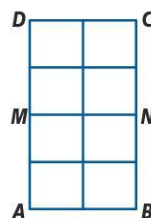
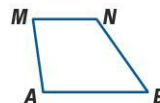
Theorie

In de figuur staan de lijnstukken AD en BC loodrecht op het tafereel. De middens van deze lijnstukken bepaal je met behulp van diagonalen en een lijn evenwijdig aan de horizon die door het snijpunt van de diagonalen gaat.

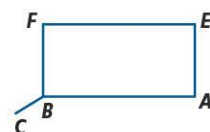
In de figuur lopen de lijnstukken AB en CD evenwijdig aan het tafereel. De middens van lijnstukken die evenwijdig lopen met het tafereel zijn in een perspectieftekening ook weer echte middens. Je mag ze daarom ook vinden met behulp van opmeten, of door het snijpunt van de diagonalen te tekenen.



- 11 Je ziet een rechthoek $ABCD$ die verdeeld is in acht identieke rechthoekjes en een begin van een tekening in eenpuntperspectief ervan. Maak deze tekening af.

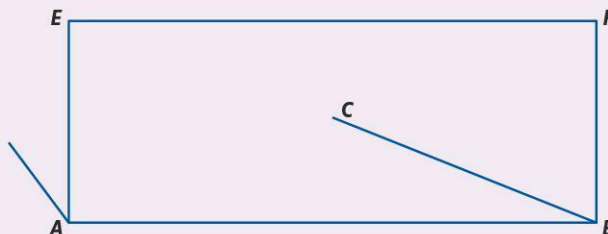


- 12 Een begin is gemaakt met een eenpuntperspectieftekening van een balk $ABCD.EFGH$. De horizon ligt hier niet achter de balk maar voor de balk.
- Maak de eenpuntperspectieftekening af.
 - Teken de middens van de vlakken $ABCD$ en $BCGF$.



horizon

Uitdagende route → maak opdracht U2

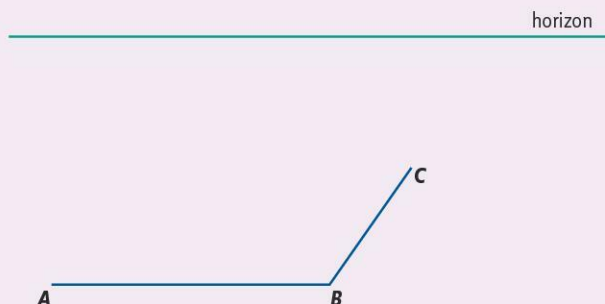


- 09** Je ziet een begin van een eenpuntperspectieftekening van balk $ABCD.EFGH$. Punt D is nog niet getekend.
- Waarom is het snijpunt van de lijnen AD en BC het verdwijnpunt?
 - Teken het verdwijnpunt V .
 - De horizon is een horizontale lijn door het verdwijnpunt V . Teken de horizon.
 - Vul in: CD is evenwijdig aan lijn ...
 - Teken punt D .
 - Teken de lijnen EV en FV .
 - Welke drie lijnstukken zijn evenwijdig aan AE ?
 - Gebruik deze lijnstukken om de punten G en H te tekenen.
 - Maak de perspectieftekening van balk $ABCD.EFGH$ af door de nog ontbrekende lijnstukken te tekenen. Teken de lijnstukken die je niet ziet met stippellijnen.

Uitdagende opdrachten

- U2** De piramide $T.ABCD$ heeft een vierkant grondvlak $ABCD$. De top T ligt recht boven het middelpunt van het grondvlak. De hoogte van de piramide is gelijk aan de lengte van ribbe AB . Een begin is gemaakt met een perspectieftekening van de piramide.

- Maak de perspectieftekening af.
- Een lint wordt om de piramide gehangen, evenwijdig aan de ribben van het grondvlak. Het lint komt halverwege de hoogte van de piramide te hangen. Teken het lint.



18.3 Tweepuntsperspectief

Je leert

- wat tweepuntsperspectief is
- hoe je een tweepuntsperspectieftekening maakt

Leerroutes

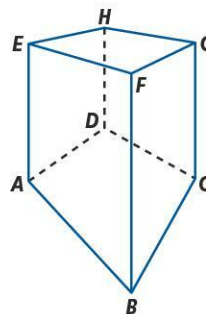
- ondersteunend: 13—14—015—16
- doorlopend: 13—14—15—16
- uitdagend: 13—14—16—U3

Een architect heeft een huis ontworpen.

- Waarom heeft de architect het huis niet in eenpuntperspectief weergegeven?



- 13 Je ziet een perspectieftekening van balk $ABCD.EFGH$.
- Welke ribben zijn zowel in werkelijkheid als in de tekening evenwijdig?
 - Welke ribben zijn in werkelijkheid evenwijdig aan ribbe AB ?
 - De ribben uit opdracht b zijn in de tekening niet evenwijdig. Verleng deze ribben en ga na dat ze elkaar in één punt snijden.
 - Welke ribben zijn in werkelijkheid evenwijdig aan ribbe BC ?
 - Onderzoek of de ribben uit opdracht d na verlenging ook door één punt gaan.
 - Leg uit waarom deze tekening geen eenpuntperspectieftekening is.

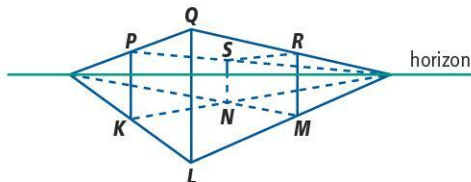


Theorie

Bij een **tweepuntsperspectieftekening** van een ruimtelijk object is slechts één hoofdrichting evenwijdig aan het tafereel. Dit is meestal de hoogte zoals in opdracht 13 de richting van BF . De andere hoofdrichtingen hebben elk een verdwijnpunt. De horizon is de (horizontale) lijn door deze twee verdwijnpunten.

Voorbeeld

Balk $KLMN.PQRS$ is in tweepuntsperspectief getekend. Ribbe LQ is evenwijdig aan het tafereel getekend. De andere hoofdrichtingen LK en LM hebben elk een verdwijnpunt. De horizon gaat door deze twee verdwijnpunten.



- 14 Het gebouw op de foto is de kaasfabriek van de coöperatie CONO in Noord-Holland.
Teken de horizon in de foto.



Aanpak

Hoe maak je een tweepuntsperspectieftekening?

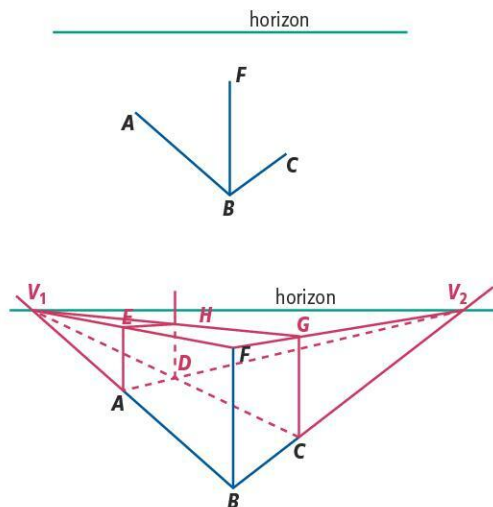
- 1 Teken de twee verdwijnpunten V_1 en V_2 .
- 2 Verbind de overige gegeven hoekpunten met V_1 en V_2 .
- 3 Gebruik verticale ribben om de positie van de ontbrekende hoekpunten te bepalen.
- 4 Teken, zo nodig gestippeld, de nog ontbrekende lijnstukken om de perspectieftekening af te maken.

Voorbeeld

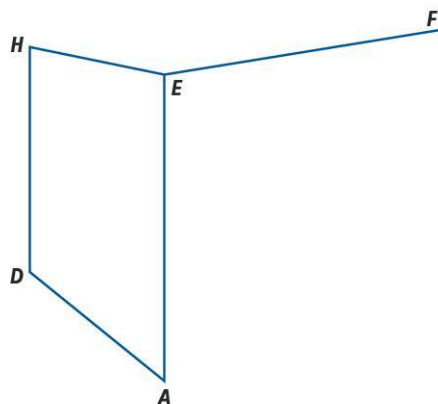
Er is een begin gemaakt met een tweepuntsperspectieftekening van de balk $ABCD.EFGH$ rechtsboven.
Maak deze tekening af.

Oplossing

- 1 Verleng BA en BC tot aan de horizon.
De snijpunten zijn V_1 en V_2 .
- 2 Teken de lijnen CV_1 , AV_2 , FV_1 en FV_2 .
Het snijpunt van CV_1 en AV_2 is het punt D .
- 3 Teken door A en C lijnen evenwijdig aan BF .
De snijpunten met achtereenvolgens FV_1 en FV_2 zijn E en G .
Teken de lijn door D evenwijdig aan BF .
Het snijpunt van deze lijn met GV_1 (of EV_2) is H .
- 4 Maak de perspectieftekening af met het tekenen van lijnstuk EH .



Ondersteunende route → maak opdracht 015

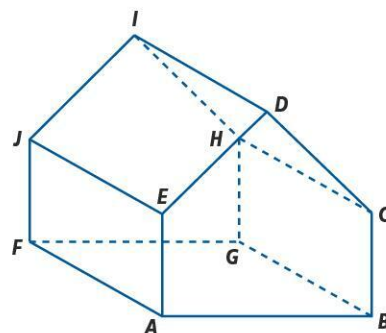


- 15** In de figuur is een begin gemaakt met een tweepuntsperspectieftekening van een balk $ABCD.EFGH$. Ribbe AE loopt evenwijdig met het tafereel. Teken een verdwijnpunt, de horizon en maak de tekening af.

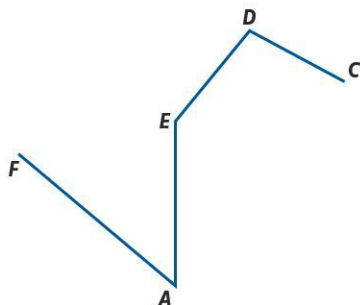
- 16** Een huis heeft de vorm van prisma $ABCDE.FGHIJ$, waarbij $ABCE.FGHJ$ een balk is. Er is een begin gemaakt met een tweepuntsperspectieftekening van dit huis.

H

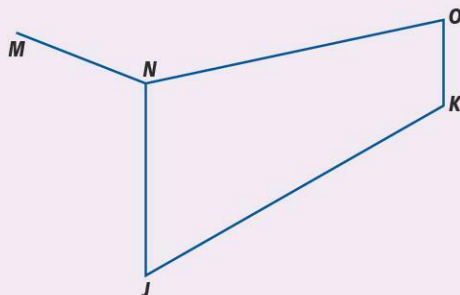
- a** Maak deze tekening af.
b Er worden op het zijvlak $AEJF$ drie verticale sierstrepen aangebracht. Deze sierstrepen delen het zijvlak in vier gelijke delen.
 Teken de sierstrepen in de perspectieftekening.



horizon



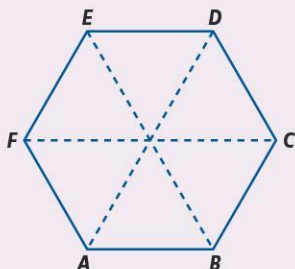
Uitdagende route → maak opdracht U3



- 015** Er is een begin gemaakt met een tweepuntsperspectieftekening van een balk $IJKL.MNOP$.
- Waarom snijden JK en NO elkaar op de horizon?
 - Teken het snijpunt van JK en NO . Noem dit punt V_1 .
 - De horizon is een lijn door V_1 , loodrecht op ribbe JN . Teken de horizon.
 - Teken verdwijnpunt V_2 door MN te laten snijden met de horizon.
 - Leg uit waarom je J met V_2 moet verbinden en teken JV_2 .
 - Teken een verticale lijn vanaf M die lijn JV_2 snijdt. Welk punt van de balk is dit snijpunt?
 - Vul in: het snijpunt van IV_1 en KV_2 is punt ...
 - Maak de tweepuntsperspectieftekening van balk $IJKL.MNOP$ af.

Uitdagende opdrachten

- U3** Gegeven is een regelmatige zeshoek $ABCDEF$ met enkele diagonalen. Daarnaast zie je het begin van een tweepuntsperspectieftekening ervan. Maak deze tekening af.



18.4 Ooghoogte

Je leert

- hoe je de hoogte van het oog in een perspectieftekening bepaalt

Leerroutes

- ondersteunend: 17—18—19—O20—20—22
- doorlopend: 17—18—19—20—21—22
- uitdagend: 17—18—20—21—22—U4

Een docent geeft online les in zijn lokaal. Hij wordt gefilmd door een camera die op de achterste muur is opgehangen. De tafels staan recht achter elkaar.

- Is de camera op meer of minder dan twee meter hoogte boven de grond opgehangen?



- 17** De drie foto's hierboven zijn op verschillende hoogten genomen. Je ziet dat het perspectief van het gebouw verandert. Bij welke foto stond de camera het hoogst? En op welke foto het laagst?

De lens van een camera in een foto of het oog van een tekenaar in een perspectieftekening, ligt altijd ter hoogte van de horizon.

- 18** Je gaat de hoogte van de lens van de camera in de linker foto van opdracht 17 bepalen. Het gebouw is 2,55 meter hoog tot aan de dakrand. Er is een lijn AC getekend die de hoogte van het gebouw weergeeft.

- Teken het snijpunt B van AC met de lijn die de horizon voorstelt.
- Meet AC en BC .
- Vul de lengtes van AC en BC in de verhoudingstabel in.

hoogte in werkelijkheid in cm	255	lenshoogte
hoogte op de foto in cm	$AC = \dots$	$BC = \dots$

- Bereken de hoogte van de lens met behulp van de verhoudingstabel.



Aanpak

Hoe bepaal je de hoogte van het oog of de cameralens in een perspectieftekening of foto?

- 1 Teken de horizon.
- 2 Meet de hoogte van een object waarvan de hoogte bekend is.
- 3 Meet de hoogte van de horizon (= ooghoogte) ten opzichte van de onderkant van het gemeten object.
- 4 Zet de gemeten hoogtes en de gegeven werkelijke hoogte van het object in een verhoudingstabel en bereken de ooghoogte.

Voorbeeld

Het tuinhuisje is in werkelijkheid 230 cm hoog. Bepaal op welke hoogte de cameralens zich bevond bij het maken van de foto.



Oplossing

- 1 Teken met behulp van een verdwijnpunt de horizon.
- 2 Meet op een bepaalde plek de hoogte AC van het tuinhuisje. Dit geeft $AC = 2,7$ cm.
- 3 Meet de hoogte BC van de horizon. Dit geeft $BC = 0,8$ cm.
- 4 De verhoudingstabel wordt dan

0,8	<i>lenshoogte</i>
2,7	230

Hieruit volgt dat de lens van de camera zich op

$$\frac{0,8 \times 230}{2,7} \approx 68 \text{ cm bevond.}$$

- 19 Bij het maken van de middelste foto van opdracht 17 bevond de lens van de camera zich hoger dan bij het maken van de linker foto.
Bereken hoeveel centimeter hoger.

Ondersteunende route → maak opdracht 020

- 20 De schuur is in werkelijkheid 2,5 meter hoog.
Bepaal op welke hoogte de foto genomen is.

H





- 21** De fotograaf stond rechtop toen hij de foto maakte. Onderzoek of de fotograaf kleiner, groter of even groot is als de persoon op de foto.

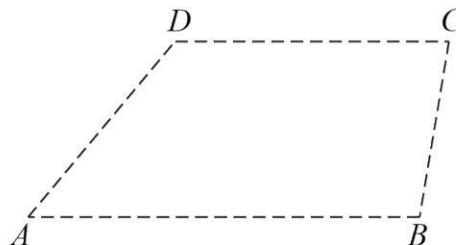
- 22** Op de foto zie je een kunstwerk bestaande uit een zuil, een kubus en een plaat. Het heet ‘Drie gelijke volumes’, omdat de drie objecten dezelfde inhoud hebben. De lengte, hoogte en breedte van de kubus zijn 1 m. De zuil is 4 m hoog en de lengte en breedte van de zuil zijn gelijk aan elkaar.

W

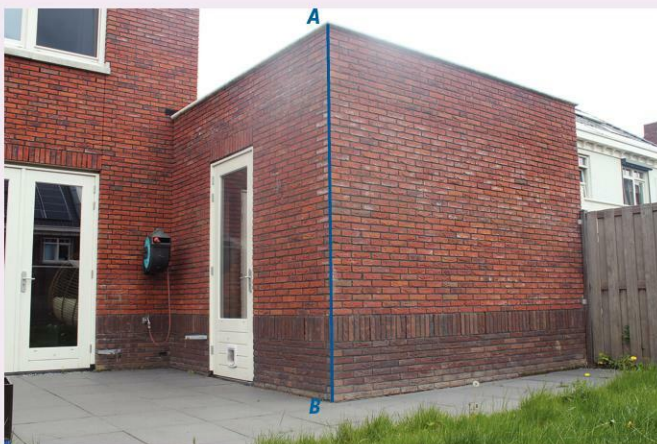
- Geef in de foto op de zuil aan op welke hoogte de foto genomen werd.
- Bereken deze hoogte. Rond je antwoord af op gehele dm.
- Bereken de lengte en de breedte van de zuil.
- De afmetingen van de plaat zijn 200 bij 200 bij 25 cm. Er is een begin gemaakt met een perspectieftekening van de plaat. Dit begin is een deel van de onderkant van de plaat en wel een vierkant $ABCD$ van 100 bij 100 cm. Punt C is het hoekpunt van de onderkant van de plaat, dat rechtsachter ligt. Maak de perspectieftekening van de hele plaat af.

(Ontleend aan *CE vwo wiskunde C pilot 2013, tijdvak 1*)

Uitdagende route → maak opdracht U4



Ondersteunende opdrachten



020

Ilona heeft een foto van haar garage genomen. De werkelijke hoogte van de garage is 2,60 meter.

- Gebruik de boven- en onderkant van de muur van de garage om een verdwijnpunt te tekenen.
- Gebruik het verdwijnpunt om de horizon te tekenen.
- Wat weet je van de hoogte van de lens van de camera ten opzichte van de horizon?
- Lijnstuk AB geeft de hoogte van de garage weer. Meet de lengte van AB .
- Noem het snijpunt van de horizon met lijn AB het punt C en meet de lengte van BC .
- Vul de lengte van AB , BC en de werkelijke hoogte van de garage op de juiste plaats in de verhoudingstabel in.

<i>hoogte in werkelijkheid in cm</i>	...	<i>lenshoogte</i>
<i>hoogte op de foto in cm</i>	$AB = \dots$	$BC = \dots$

- Bereken op welke hoogte de foto genomen is.

Uitdagende opdrachten

U4

Op de foto zie je een deel van het museum Belvédère in Oranjewoud, vlakbij Heerenveen. De hoogte van de lens van de camera was bij deze foto 2,65 m. Bereken de hoogte van het museum in dm.



18.5 Verhoudingen bij perspectief

Je leert

- hoe je met verhoudingen lengten en afstanden berekent in een perspectieftekening

Leerroutes

- ondersteunend: 23—24—25—026—27
- doorlopend: 23—24—25—26—27
- uitdagend: 23—25—26—27—U5

Je ziet een foto van een kerkdienst.

- Waarom weet je zeker dat de man met de donkerblauwe jas langer is dan de vrouw met de gestreepte jas?
- Voor de man met de donkerblauwe jas zie je een man met een wit overhemd staan. Hoe kun je nagaan welke van de twee mannen langer is?

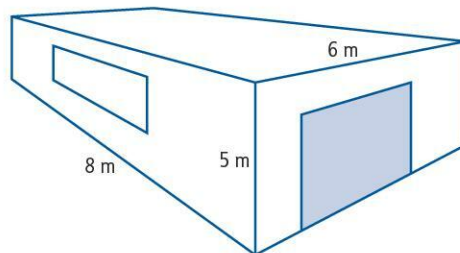


23 De lengte van de muren van een balkvormig gebouw zijn 8 meter en 6 meter. De hoogte van het gebouw is 5 meter. In deze opdracht ga je de hoogte van de deur berekenen.

- Teken een verticale lijn door de linkerkant van de deur en meet, in mm nauwkeurig, langs die lijn in de tekening de hoogte van de muur en de hoogte van de deur.
- Vul de verhoudingstabel in.

	muur	deur
hoogte in werkelijkheid in m	5	...
hoogte op de tekening in mm	...	...

- Bereken de hoogte van de deur met behulp van de tabel.



Theorie

Met behulp van meten, één of meer gegeven afmetingen en een verhoudingstabel, kun je in een perspectieftekening lengten en afstanden berekenen.

Voorbeeld

Bereken de hoogte van de deur in de schuur.

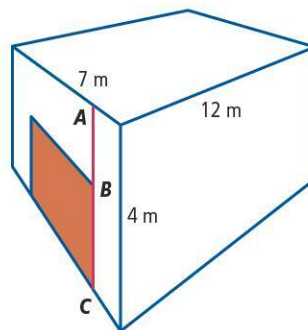
Oplossing

De hoogte van de schuur is in werkelijkheid 4 m.

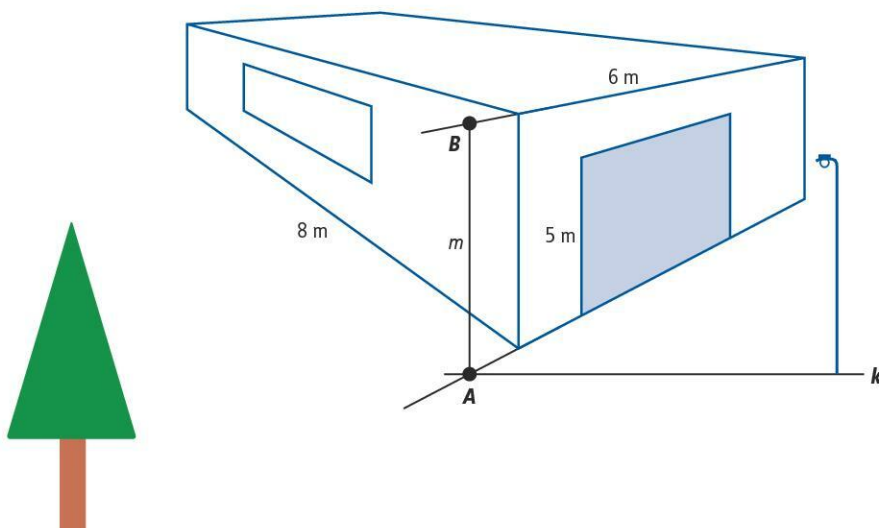
In de tekening is dit $AC = 24$ mm. De hoogte van de deur is $BC = 14$ mm.

	schuur	deur
hoogte in werkelijkheid in m	4	h
hoogte op de tekening in mm	24	14

De hoogte van de deur is $h = \frac{4 \times 14}{24} \approx 2,33$ m.



- 24**
- Ga na dat als je in opdracht 23 langs een verticale lijn aan de rechterkant van de deur de hoogte van de muur en de deur meet, je dezelfde hoogte van de deur vindt.
 - Op de zijgevel van het gebouw bevindt zich een raam. Bereken de hoogte van dit raam.
- 25** Bij het gebouw uit opdracht 23 staan zowel een lantaarnpaal als een boom. In deze opdracht ga je de hoogte van de lantaarnpaal en de boom berekenen.



- Om de hoogte van de lantaarnpaal te berekenen, is lijn k getekend. Deze gaat door de onderkant van de lantaarnpaal en is evenwijdig aan de horizon. De onderkant van de muur met de deur is verlengd totdat die lijn k snijdt in punt A . Er is daarna een verticale lijn m getekend door punt A . Leg uit dat alle punten op lijn k in hetzelfde vlak liggen als de lantaarnpaal.
- Vervolgens is de bovenkant van de muur verlengd totdat die lijn m snijdt in punt B . Waarom is de werkelijke lengte van lijnstuk AB gelijk aan 5 meter?
- Hoe kun je zien dat de lantaarnpaal lager dan de garage is?
- Meet de lengte van AB en van de lantaarnpaal en zet deze met de werkelijke hoogte van de muur in een verhoudingstabel.
- Bereken de hoogte van de lantaarnpaal in meters. Rond je antwoord af op één decimaal.
- Bereken op dezelfde manier de hoogte van de boom.

Ondersteunende route → maak opdracht 026



- 26** **W** Siëna en Zoë staan in een lokaal waarin de tafels recht achter elkaar staan. Siëna staat dichterbij de lens van de camera dan Zoë. De tafels zijn allemaal 70 cm hoog. Hoe lang zijn beide meisjes?



- 27** **W** In de Franse plaats Metz staat het tentoonstellingsgebouw Centre Pompidou Metz. Vanuit een van de tentoonstellingsruimtes is de foto hierboven genomen. Daarop is in de verte de kathedraal van Metz te zien. Deze staat evenwijdig aan de gevel van de tentoonstellingsruimte. De lengte van de kathedraal is met een pijl aangegeven. Deze kathedraal is 136 meter lang. Bij het maken van deze foto stond de fotograaf op 10 meter van het raam, precies recht voor het midden van de getekende pijl. De afstand tussen twee opeenvolgende verticale spijlen van het raam is precies 2 meter.
- Bereken de lengte van de dubbele pijl, gemeten op het raam.
 - Door te werken met verhoudingen kun je berekenen dat de afstand tussen de kathedraal en de fotograaf ongeveer 1 km is. Geef een dergelijke berekening. Licht je werkwijze toe, bijvoorbeeld met een bovenaanzicht.
(Ontleend aan CE vwo wiskunde C, pilot 2014, tijdvak 2)

Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

026

W

Een hoge kamer is in perspectief getekend. Jona staat in de kamer. Hij is in werkelijkheid 1,90 m lang. Er staat ook een kast in de kamer.

- Hoe kun je zien dat de ogen van de tekenaar zich hoger bevonden dan de ogen van Jona?
- Om erachter te komen hoe hoog de kast is, wordt een vlak getekend waarin je zowel de lengte van Jona als de hoogte van de kast kunt meten.
Teken een lijn k , evenwijdig aan de horizon, door de voeten van Jona. Noem het snijpunt van lijn k met de onderkant van de linkermuur punt A .
- Teken een verticale lijn m door punt A .
- Teken vanaf de bovenkant van Jona een horizontale lijn naar de linkermuur. Noem het snijpunt met lijn m , punt B .
- Teken het verdwijnpunt V van de tekening.
- In het bovenzvlak van de kast is punt G het punt linksboven dat tegen de muur zit.
Teken lijn VG . Het snijpunt van VG met lijn m is punt S .
- Hoe zie je aan lijnstukken AB en AS dat Jona kleiner is dan de kast?
- Je hebt nu een vlak getekend waarin zowel de kast als Jona staan. Hierin stelt lijnstuk AS de hoogte van de kast voor.
Vul de verhoudingstabel verder in.
- Gebruik de verhoudingstabel om de hoogte van de kast te berekenen. Geef je antwoord in hele cm.



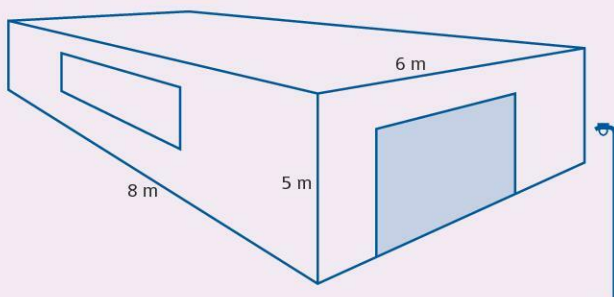
	Jona	kast
hoogte in werkelijkheid in cm	190	...
hoogte op de tekening in mm	...	...

Uitdagende opdrachten

U5

In opdracht 25 heb je een verticaal vlak evenwijdig aan het tafereel getekend door de lantaarnpaal. Je kunt ook een verticaal vlak aanbrengen in het verlengde van de muur met het raam erin.

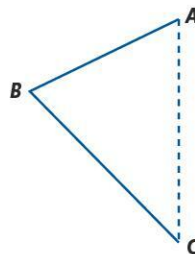
Teken dit vlak en ga met een berekening na dat je dezelfde hoogte van de lantaarnpaal krijgt.



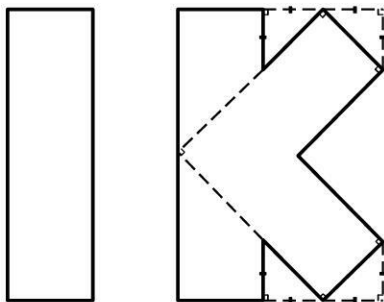
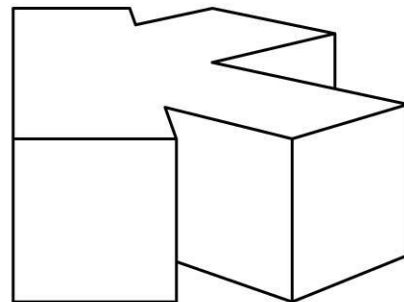
- 28** In de figuur is een begin gemaakt met een tweepuntsperspectieftekening van een rechthoek $ABCD$ waarvan de diagonaal AC evenwijdig is met de horizon.

- Maak deze tekening af.
- De gegeven rechthoek is een tegel van een tegelpatroon van allemaal identieke tegels. Teken de tegel die aan zijde AB en de tegel die aan zijde CD grenzen in de figuur erbij.

horizon



- 29** Hieronder zie je het bovenaanzicht van een kunstwerk van Jan van Munster in de vorm van de letters I en K. De letter K is ernaast in eenpuntperspectief getekend. De letters zijn even hoog. Teken de letter I op de juiste plaats erbij in deze tekening. (Ontleend aan CE vwo wiskunde C pilot 2017, tijdvak 1)



- 30** De foto is van een tentoonstellingspaviljoen dat is ontworpen door de kunstenaar Stanley Brouwn in 2004. Het bestaat uit twee blokken. De blokken zijn 21 vierkanten lang, 3 vierkanten breed en 3 vierkanten hoog. Elk vierkant is 5×5 SB-voet. Eén SB-voet is 26 cm in het eigen maatsysteem van Stanley Brouwn. Onderzoek met behulp van de foto, zonder een horizon te tekenen, op welke hoogte deze foto genomen is. Rond je antwoord af op hele dm. (Ontleend aan CE vwo wiskunde C pilot 2017, tijdvak 2)

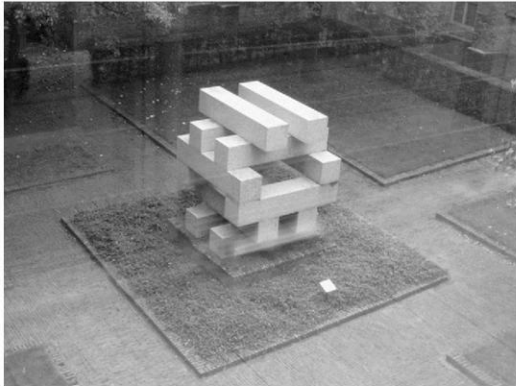
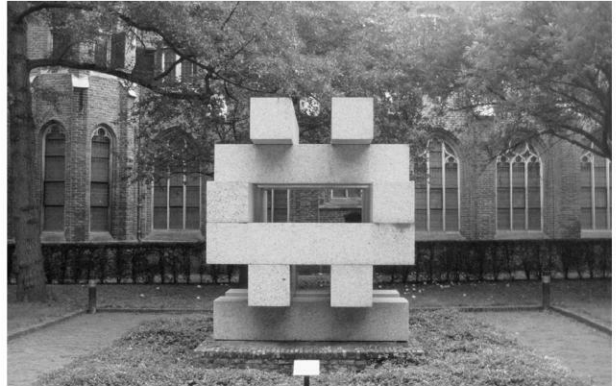


31

W

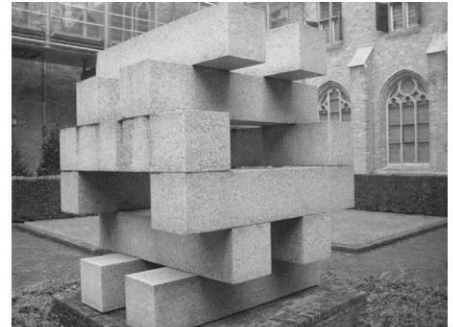
Op de binnenplaats van het museum Catharijneconvent in Utrecht staat een kunstwerk van Max Bill. Het kunstwerk is opgebouwd uit 12 balken. Deze balken hebben alle dezelfde afmetingen: 42 bij 42 bij 210 cm. Elke laag van het kunstwerk bestaat uit twee horizontale, evenwijdig geplaatste balken.

Op de foto's zie je dit kunstwerk en het vooraanzicht van het kunstwerk.



- a Teken een zijaanzicht en het bovenaanzicht van dit kunstwerk.
- b Het kunstwerk past precies in een doos van 210 bij 210 bij 252 cm.
Bereken welk percentage van de inhoud van zo'n doos ingenomen wordt door de 12 balken.
- c Het kunstwerk is geplaatst op een verhoging van 20 cm.
In de linker foto zie je dat de foto van bovenaf is genomen. De foto hiernaast is van een andere hoogte genomen.

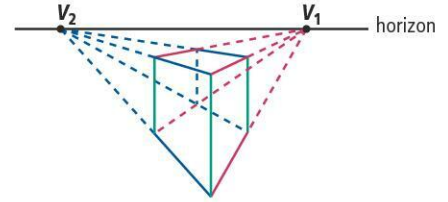
Onderzoek op welke hoogte in cm de foto is genomen.
(Ontleend aan CE vwo wiskunde C pilot 2013, tijdvak 2)



Theorie

Tweepuntsperspectief

Bij een tweepuntsperspectieftekening van een ruimtelijk object is slechts één hoofdrichting evenwijdig aan het tafereel. Dit is meestal de hoogte. De andere hoofdrichtingen hebben elk een verdwijnpunt. De horizon is de (horizontale) lijn door deze twee verdwijnpunten.



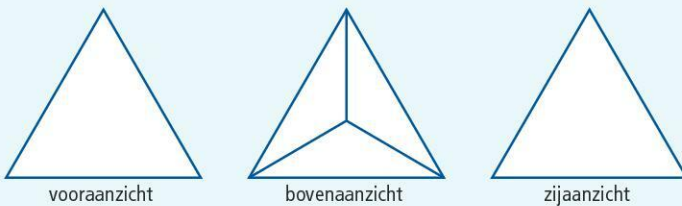
- S1 a Hoeveel hoofdrichtingen zijn evenwijdig aan het tafereel in de foto?
- b Teken de horizon in de foto van het gebouw.

Vaardigheid

Je kunt aanzichten gebruiken bij het beschrijven van een ruimtelijk object.

Om te verduidelijken hoe een ruimtelijk object eruitziet, kun je vanuit verschillende posities foto's of tekeningen maken. In de wiskunde heten dit aanzichten. Voorbeelden van aanzichten zijn het vooraanzicht, het bovenaanzicht en het zijaanzicht. Als de afmetingen van een object bekend zijn, dan kun je de aanzichten nauwkeurig, eventueel op schaal, tekenen.

Vanuit gegeven aanzichten kun je ook vaak een goede voorstelling maken van hoe een ruimtelijk object eruitziet.



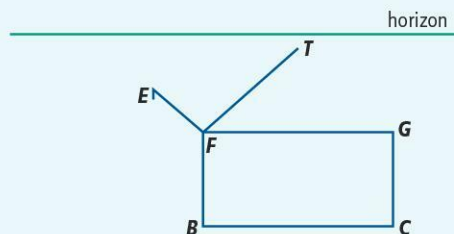
- S2 Er zijn drie aanzichten getekend van een ruimtelijk object.
- a Beschrijf dit object.
- b Wat is de wiskundige naam van dit ruimtelijk object?

Vaardigheid

Je kunt een eenpuntperspectieftekening maken.

- 1 Teken het verdwijnpunt V .
- 2 Verbind de overige gegeven hoekpunten met V .
- 3 Gebruik evenwijdigheid van ribben met het (verticale) tafereel om de positie van de ontbrekende hoekpunten te bepalen.
- 4 Teken de nog ontbrekende lijnstukken om de perspectieftekening af te maken.

- S3** Er is een begin gemaakt met een eenpuntperspectieftekening van een balk $ABCD.EFGH$ waar een piramide op staat. De top van de piramide is punt T . Verder zijn BC en CG de hoofdrichtingen. Maak deze tekening af.

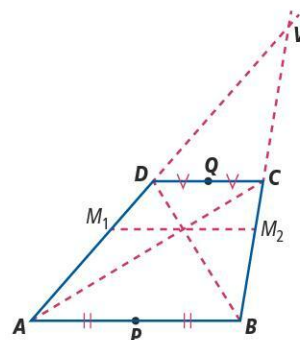


Vaardigheid

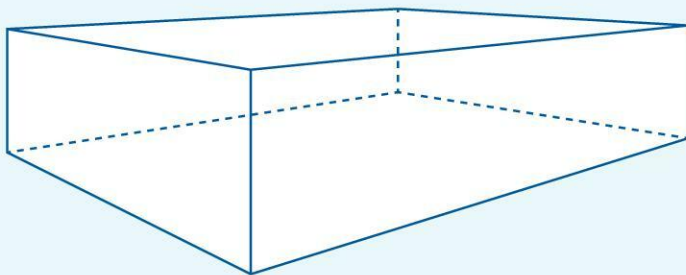
Je kunt in een perspectieftekening het midden van een lijnstuk bepalen.

In de figuur staan de lijnstukken AD en BC loodrecht op het tafereel. De middens van deze lijnstukken bepaal je met behulp van diagonalen en een lijn evenwijdig aan de horizon die door het snijpunt van de diagonalen gaat.

In de figuur lopen de lijnstukken AB en CD evenwijdig aan het tafereel. De middens van lijnstukken die evenwijdig lopen met het tafereel zijn in een perspectieftekening ook weer echte middens. Je mag ze daarom ook vinden met behulp van opmeten, of door het snijpunt van de diagonalen te tekenen.



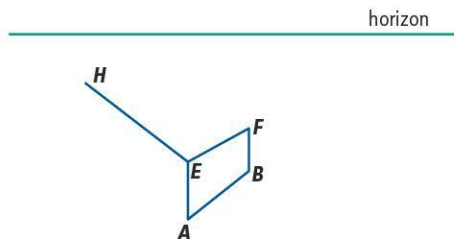
- S4** Er is een tweepuntperspectieftekening van een balk gemaakt. Geef het midden van het bovenvlak en van het linkerzijvlak van de balk aan.



Vaardigheid

Je kunt een tweepuntsperspectieftekening maken.

- 1 Teken de twee verdwijnpunten V_1 en V_2 .
- 2 Verbind de overige gegeven hoekpunten met V_1 en V_2 .
- 3 Gebruik verticale ribben om de positie van de ontbrekende hoekpunten te bepalen.
- 4 Teken, zo nodig gestippeld, de nog ontbrekende lijnstukken om de perspectieftekening af te maken.

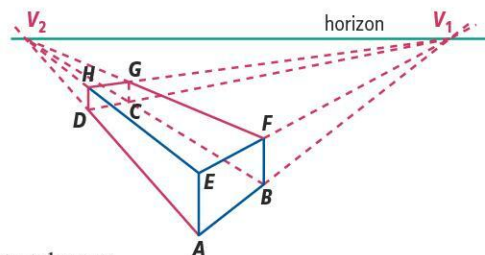


Voorbeeld

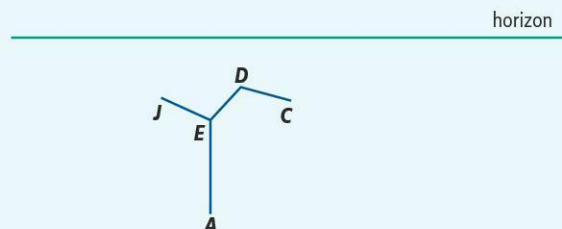
Gegeven is een begin van een tweepuntsperspectieftekening van balk $ABCD.EFGH$.
Maak deze tekening af.

Oplossing

- 1 Verleng AB en EF tot ze elkaar snijden in het verdwijnpunt V_1 . Teken de horizontale lijn door V_1 . Dit is de horizon. Lijn EH snijdt de horizon in verdwijnpunt V_2 .
- 2 Teken AV_2 .
- 3 Teken door H een lijn evenwijdig aan AE . Het snijpunt met AV_2 is het punt D . Teken BV_2 , HV_1 en DV_1 om C en G te vinden.
- 4 Maak de perspectieftekening af door de ontbrekende ribben te tekenen.



- S5** Er is een begin gemaakt met een tekening van een prisma $ABCDE.FGHIJ$ in tweepuntsperspectief. Hierbij is AB evenwijdig aan CE .
Maak deze tekening af.



Vaardigheid

Je kunt de hoogte van het oog of de cameralens in een perspectieftekening of foto bepalen.

- 1 Teken de horizon.
- 2 Meet de hoogte van een object waarvan de hoogte bekend is.
- 3 Meet de hoogte van de horizon (= ooghoogte) ten opzichte van de onderkant van het gemeten object.
- 4 Zet de gemeten hoogtes en de gegeven werkelijke hoogte van het object in een verhoudingstabel en bereken de ooghoogte.

Voorbeeld

De rij bomen heeft een hoogte van 4,1 meter.
Bereken de hoogte van de lens van de camera.

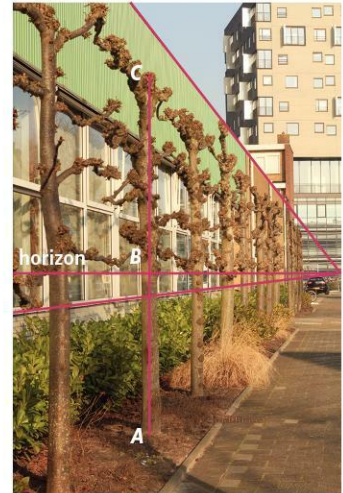
Oplossing

- 1 Teken met behulp van een verdwijnpunt de horizon.
- 2 Meet de hoogte van bijvoorbeeld de tweede boom vanaf de grond, dat is lijnstuk $AC = 5,0$ cm.
- 3 Meet hier ook de hoogte van de horizon vanaf de grond, dit is lijnstuk $AB = 2,2$ cm.
- 4 De verhoudingstabel wordt dan

2,2 cm	h
5,0 cm	4,1 m

Hieruit volgt dat de lens van de camera zich op

$$\frac{2,2 \times 4,1}{5,0} \approx 1,8 \text{ meter hoogte bevond.}$$



- S6** De brug op de foto is 4,60 m hoog.
Vanaf welke hoogte is de foto van de brug genomen?



Vaardigheid

Je kunt met verhoudingen lengten en afstanden berekenen in een perspectieftekening.

Met behulp van meten, één of meer gegeven afmetingen en een verhoudingstabel, kun je in een perspectieftekening lengten en afstanden berekenen.

- S7** Bereken hoe hoog het gele bordje links op de foto van opdracht S6 is.

- T1** Je ziet drie aanzichten van een ruimtelijk object. Het vooraanzicht is een rechthoek met daarbovenop een halve cirkel.



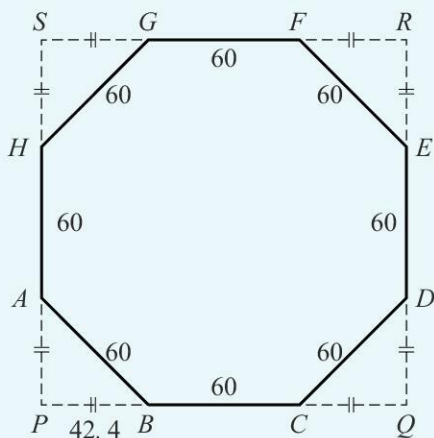
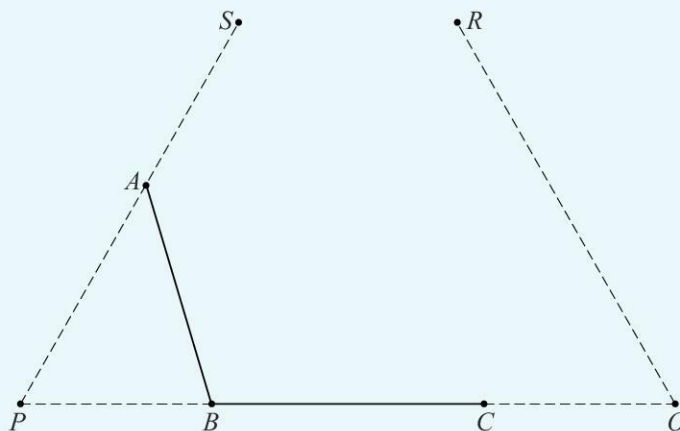
- Beschrijf dit object.
- Bereken de inhoud van dit ruimtelijk object.

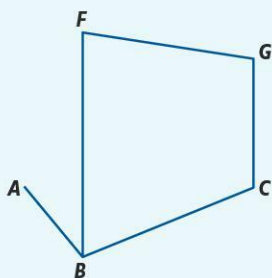
- T2** De plantenbakken op de foto zijn naast elkaar gezet met een aflopende hoogte. De vorm van de plantenbakken is een prisma met een regelmatig achthoekig grondvlak. De zijden van de achthoek zijn 60 cm. In de figuur linksonder is het vierkant $PQRS$ dat er precies omheen past, getekend. Om de oppervlakte van het achthoekige grondvlak $ABCDEFGH$ te berekenen, is het handig om de lengte PB in de gelijkbenige driehoek PBA te gebruiken. Deze lengte is 42,4 cm. De houten plankjes zijn 20 cm hoog. De dikte van de bodem en van de houten plankjes mag je hier verwaarlozen. Een hovenier komt met zijn vrachtwagen met 3 m^3 potgrond om de plantenbakken te vullen.



- Bereken of 3 m^3 voldoende is voor de drie plantenbakken.
- Naast de zeshoek is een begin gemaakt met een perspectieftekening van het achthoekige grondvlak $ABCDEFGH$. De zijden AB , BC en het vierkant $PQRS$ zijn al getekend. Maak de perspectieftekening af.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde C pilot 2016, tijdvak 1)





T3 Je ziet een deel van een tweepuntsperspectieftekening van de kubus $ABCD.EFGH$.
Maak deze tekening af.

T4 Het markante gebouw de Stadshaard in Enschede is een warmtekrachtcentrale van Essent. Het gebouw is een echte blikvanger door de schoorsteen van 40 meter hoog. Het gebouw zelf is 10 meter hoog.
De gevels zijn opgebouwd uit panelen van 1 meter bij 1 meter met sprekende motieven en figuratieve afbeeldingen. Ze doen denken aan een bekleding met Delfts Blauwe tegels.

a Is het gele busje hoger, lager of even hoog als de zwarte onderrand van het gebouw? Leg je antwoord uit.

b Bereken de hoogte van de lantaarnpaal naast het busje.



T5 In Utrecht bij de Hogeschool voor de Kunsten stond een kunstwerk in de vorm van een kubus waarvan één hoekpunt is afgezaagd. Op de linker foto lijkt het kunstwerk ongeveer even hoog als de deur er achter. De foto is op ongeveer 150 cm hoogte genomen. De hoogte van de deur is in werkelijkheid 230 cm.

a Leg uit dat het kunstwerk in werkelijkheid lager is dan de witte deur er achter.

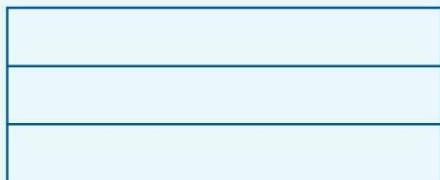
b De rechter foto is vanaf een andere positie genomen. Geef op de deur aan op welke hoogte de foto is genomen en bereken de hoogte waarop de foto is genomen in hele dm nauwkeurig.

(Ontleend aan *CE vwo wiskunde C pilot 2014, tijdvak 1*)

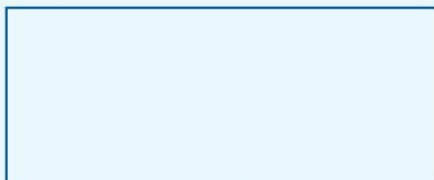


Je kunt aanzichten gebruiken bij het beschrijven van een ruimtelijk object.

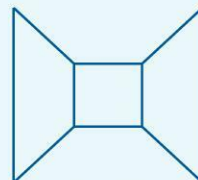
- E1** Gegeven zijn drie aanzichten van een ruimtelijk object. Het is opgebouwd uit meerdere ruimtefiguren. Welke ruimtefiguren herken je hierin?



bovenaanzicht



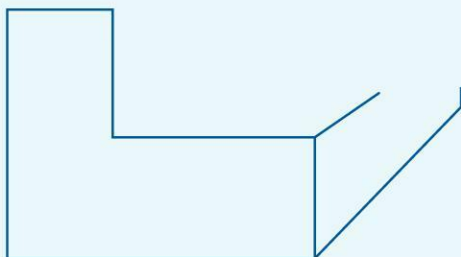
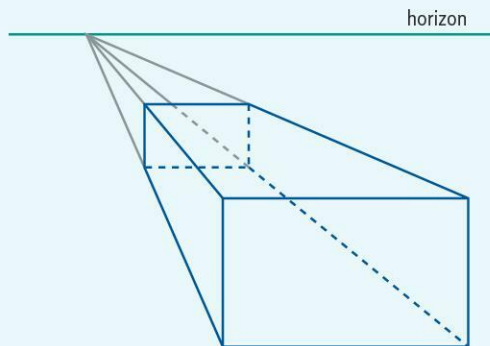
vooraanzicht



zijaanzicht

Je kunt een eenpuntperspectieftekening maken.

- E2** Er is linksonder een begin gemaakt met een eenpuntperspectieftekening van een prisma. Maak deze tekening af.

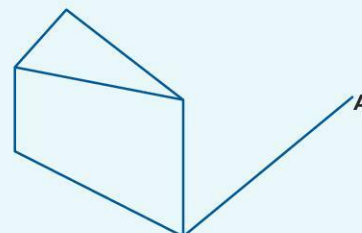


Je kunt in een perspectieftekening het midden van een lijnstuk bepalen.

- E3** De balk rechtsboven is in eenpuntperspectief getekend.
- a** Verdeel het linkerzijvlak in twee gelijke verticale stroken.
 - b** Verdeel het bovenvlak in vier gelijke stroken evenwijdig aan de horizon.

Je kunt een tweepuntperspectieftekening maken.

- E4** Een begin is gemaakt met een tekening van een huis in tweepuntperspectief. Het punt *A* geeft aan waar de rechtermuur eindigt. Maak deze tekening af.



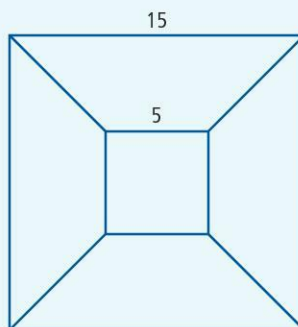
Je kunt de hoogte van het oog in een perspectieftekening bepalen.

- E5** De tafel op de foto is in werkelijkheid 85 cm hoog. De tafel staat evenwijdig aan de horizon.
W Hoe hoog stond de lens van de camera?



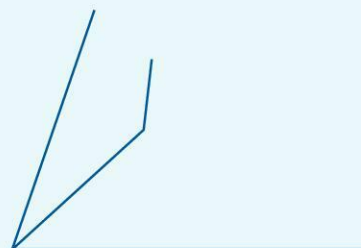
Je kunt met verhoudingen lengten en afstanden berekenen in een perspectieftekening.

- E6** Bekijk weer de foto van opdracht E5.
W Hoe hoog is de kast die achterin tegen de muur staat?



- E7** Op de foto zie je een patroon van tegels op de gevels van een huis in Portugal. De tegels zijn vierkant met zijden van 15 cm. Naast de foto zie je een tekening van één zo'n tegel.

- De lens van de camera bevond zich bij het maken van de foto op een hoogte van 160 cm.
Bepaal de hoogte van de deur in cm.
- Eén tegel is opgedeeld in een vierkantje en vier identieke vierhoeken.
Bereken de oppervlakte van zo'n vierhoek.
- Een dergelijke vierhoek heeft twee evenwijdige zijden van 5 cm en 15 cm.
Bereken de lengte van de andere zijden in hele mm.
- De vloer van de badkamer in het huis is eveneens betegeld met deze tegels. Er is een begin gemaakt met een eenpuntperspectieftekening van zo'n tegel.
Maak deze tekening af.



Aristoteles

Aristoteles (384 v.Chr. – 322 v.Chr.) was een Griekse filosoof die met Socrates en Plato wordt beschouwd als een van de invloedrijkste klassieke filosofen in de westerse wetenschap.

Aristoteles was bekwaam in alle toen bekende wetenschappen (filosofie, psychologie, politieke en sociale wetenschappen, wiskunde en natuurwetenschappen, taal- en letterkunde). Hij voerde de logica en de methodologie in als manier om wetenschap en filosofie te bedrijven. De afbeelding is een detail uit de fresco 'De Atheense school' van Rafaël (1483 - 1520), met Aristoteles (rechts) en Plato (links).

Aristoteles' werken worden meestal met de Latijnse titel aangeduid, omdat ze in het Westen enkel bekend waren in een Latijnse vertaling van een Arabische vertaling uit het Grieks. Aristoteles schreef diverse boeken over logica. Volgens hem is het meest algemene kenmerk van alle dingen het zijn, maar dat kan zeer uiteenlopende betekenissen aannemen.

De meeste oorspronkelijke geschriften van Aristoteles zijn in de eerste eeuwen na zijn dood verloren gegaan, maar veel van zijn werk was in het Arabisch vertaald. De bekendste boeken zijn: *Ethica*, *Politica*, *Rhetorica*, *Physica* en *Metafysica*.

Met een boek als de *Ethica* toont Aristoteles feilloos aan dat zijn filosofie de meest vooruitstrevende inzichten bezat. Inzichten die niet alleen van toepassing zijn op de huidige tijd, maar, net als zijn karakter, universeel en tijdloos zijn.



Bekende citaten van Aristoteles

- 1 Goed begin is het halve werk.
- 2 Het geheim van humor is verrassing.
- 3 Wat men moet leren doen, leert men door het te doen.
- 4 Het geheel is meer dan de som van delen.
- 5 Elke schurk is geen dief, maar elke dief is wel een schurk.
- 6 Eén zwaluw maakt nog geen zomer.
- 7 Het enige wat je met liegen bereikt is niet geloofd worden als je de waarheid spreekt.
- 8 Vriendschap is één ziel in twee lichamen.
- 9 Steeds beminde de kunst de welvaart, de welvaart de kunst.
- 10 De wortels van onderwijs zijn bitter, maar de vrucht is zoet.

Opdracht

- Welke van bovenstaande citaten is een paradox?
- En van welke citaten is de omgekeerde bewering ook waar?

SE

CE

K

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Rijen
- Formules opstellen
- Veranderingen
- Logaritmische schalen
- Vorm en ruimte
- Systematisch tellen



Rijen

Theorie

Bij getallenrijen kun je soms de volgende term berekenen met behulp van de voorafgaande term(en). Dit heet recursie en de bijbehorende formule heet een recursieve formule. De eerste term van een rij heet de beginterm, in functienotatie kan dit $u(0)$ of $u(1)$ zijn. Of in indexnotatie u_0 of u_1 .

- 1 Gegeven is de rij 3, 6, 9, 12, 15, ...
 - a Bereken de volgende twee termen van de rij.
 - b Geef een recursieve formule bij deze rij.
- 2 Bereken $u(1)$ tot en met $u(4)$.
 - a $u(n+1) = 3 \cdot u(n) - 2$ met beginterm $u(0) = 2$.
 - b $u(n+1) = \frac{1}{u(n)} + 3$ met beginterm $u(0) = -\frac{1}{2}$.

Voorbeeld

Gegeven is de rij u met $u_0 = 2, u_1 = 5, u_2 = 11, u_3 = 23, \dots$. Bereken de volgende twee termen van de rij en geef een recursieve formule voor de rij u .

Oplossing

Je krijgt de volgende term door de voorafgaande term met 2 te vermenigvuldigen en er dan 1 bij op te tellen.

$$u_4 = 2 \cdot u_3 + 1 = 2 \cdot 23 + 1 = 47$$

$$u_5 = 2 \cdot u_4 + 1 = 2 \cdot 47 + 1 = 95$$

Een recursieve formule is

$$u_{n+1} = 2 \cdot u_n + 1 \text{ met } u_0 = 2$$

Theorie

Bij sommige rijen kun je de waarde van een term $u(n)$ direct berekenen met het rangnummer n , zonder gebruik te maken van voorafgaande termen. Je gebruikt dan een directe formule.

- 3 Geef van de volgende rijen een directe formule.
 - a $u(n+1) = u(n) + 4$ met $u(0) = 7$
 - b $u_{n+1} = u_n - 5$ met $u_1 = 200$
 - c $u_{n+1} = 4 \cdot u_n$ met $u_0 = \frac{1}{2}$
- 4 Een medicijnkuur werkt als volgt: na inname van een dosis van 60 mg neem je om de 12 uur een vaste dosis. Elke 12 uur verdwijnt vervolgens een bepaald percentage van het medicijn uit het lichaam. De hoeveelheid medicijn in het lichaam wordt beschreven door de recursieve formule $M(t+1) = 120 + 0,7 \cdot M(t)$ met $M(0) = 60$.
 - a Plot een grafiek en beschrijf de ontwikkeling van de hoeveelheid medicijn in het lichaam in de eerste 10 dagen.
 - b Het medicijn is pas goed werkzaam als er 350 mg in het lichaam zit. Na hoeveel dagen is dat zo?

Voorbeeld

Gegeven is de rij v met recursieve formule $v(n+1) = v(n) + 3$ met beginterm $v(1) = -7$. Geef een directe formule bij deze rij.

Oplossing

Je vindt elke volgende term door bij de voorafgaande 3 op te tellen.

Als $v(1) = -7$ dan is de voorafgaande term $v(0) = v(1) - 3 = -7 - 3 = -10$.

De directe formule is $v(n) = -10 + 3n$.

Formules opstellen

Theorie

Formules van de vorm $y = a \cdot x + b$ horen bij een lineair verband. Per eenheid is sprake van een constante toename of constante afname.

Formules van de vorm $y = b \cdot g^x$ horen bij een exponentieel verband. Bij een exponentieel verband tussen twee variabelen wordt per (tijds)eenheid telkens met hetzelfde getal vermenigvuldigd.

- 5** a Op het schriftblaadje is een begin gemaakt met het opstellen van een vergelijking van lijn m . Bereken b en geef een formule van lijn m .
 b Stel een formule op van de lijn door de volgende tweetallen punten.
 A (3,0) en (0,9) C (2,5) en (4,9)
 B (1,6) en (0,5) D ($1\frac{1}{2}$, 3) en (3,9)

- ☐ Lijn m gaat door de punten (1, 0) en (3, 6).
- ☐ De richtingscoëfficiënt is $\frac{6-0}{3-1} = 3$.
- ☐ De formule heeft de vorm $y = a \cdot x + b$.
- ☐ $a = 3$ dus $y = 3x + b$
- ☐ Lijn m gaat door (1, 0) dus $0 = 3 \cdot 1 + b$.
- ☐ $b = \dots$

- 6** Vitens is een bedrijf dat drinkwater levert aan huishoudens.
 In het jaar 2021 gebruikte Vitens de volgende tarieven:
- Elke m^3 water kost € 0,70.
 - Het vastrecht per jaar bedraagt € 45,78.
 - Over elke m^3 water betaalt de afnemer € 0,39 aan waterbelasting. Dit geldt alleen voor de eerste 300 m^3 water. Het verbruik boven de 300 m^3 is vrijgesteld van waterbelasting.
 - Over het totaal van deze bedragen betaalt de afnemer 9% btw.
- a Stel een formule op voor het bedrag in euro's dat betaald moet worden bij een jaarlijks verbruik van ten hoogste 300 m^3 .
 b Stel een formule op voor het bedrag dat betaald moet worden bij een jaarlijks verbruik van meer dan 300 m^3 .

- 7** Een wetenschapper heeft de metingen in de tabel hiernaast gedaan. Hij vermoedt dat er een exponentieel verband tussen t en C bestaat van de vorm $C = b \cdot g^t$.

t	0	0,03	0,17	1,2	7,3	19,7	37,6
C	2,49	2,51	2,58	3,19	11,29	147,00	5979

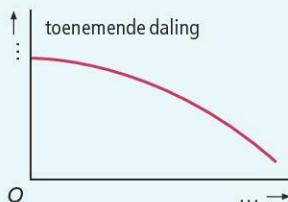
- a Bereken de groeifactor per tijdseenheid door gebruik te maken van de eerste en laatste waarde in de tabel.
 b Stel een formule op bij de tabel.
 c Ga met behulp van de formule na dat de tabel inderdaad bij een exponentieel verband hoort.
- 8** Stel in de volgende gevallen een formule op voor het verband tussen het aantal N en de tijd t in jaren met $t = 0$ in 2014.
- a Het aantal banen in een sector groeit tussen 1 januari 2014 en 1 januari 2017 exponentieel van 15 000 naar 60 000.
 b Op 1 januari 2014 waren er in een land 4,25 miljoen krantenlezers. Dit aantal nam elke maand met 0,13% af.

Veranderingen

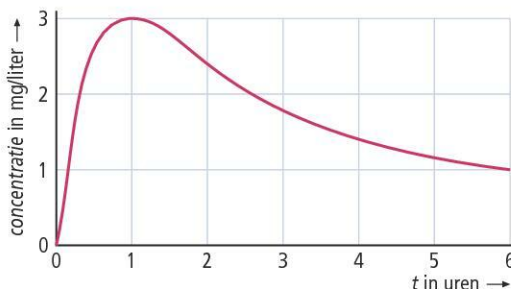
Theorie

Een grafiek kan op verschillende manieren stijgen of dalen: constante stijging of daling, toenemende stijging of daling en afnemende stijging of daling.

Hieronder zie je ze weergegeven.



- 9 In de grafiek hiernaast zie je het verloop van de concentratie C in mg/liter van een pijnstiller, die met een injectie in het bloed van een patiënt is gebracht. Op de horizontale as is de tijd t in uren uitgezet. Het tijdstip $t = 0$ is het tijdstip waarop de injectie is gegeven.



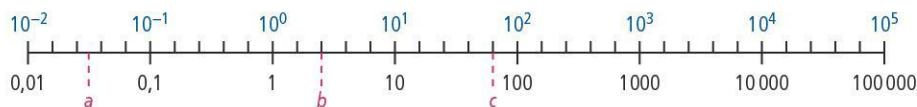
- De grafiek van C is deels stijgend en deels dalend. Beschrijf de manier waarop de grafiek stijgt en daalt.
- Vanaf welk tijdstip, ongeveer, is de grafiek afnemend dalend?

- 10 Gegeven is de formule $y = 2x^3 - 16x^2 + 22x$.
- Plot de grafiek bij deze formule. Neem x van -5 tot 15 en de y van -50 tot 10 .
 - Op welk interval is de grafiek afnemend stijgend?
 - Op welk interval, ongeveer, is de grafiek afnemend dalend?

- 11 Een groeimodel dat de groei van een courgette bij benadering weergeeft is $G = \frac{1900}{1 + 57,4 \cdot 0,68^t}$. Hierin is G het gewicht in grammen en is t de tijd in weken.

- Plot de grafiek en onderzoek na hoeveel weken, ongeveer, het gewicht van de courgette overgaat van toenemend stijgend in afnemend stijgend.
- Beredeneer met de formule welk gewicht de courgette uiteindelijk zal hebben.

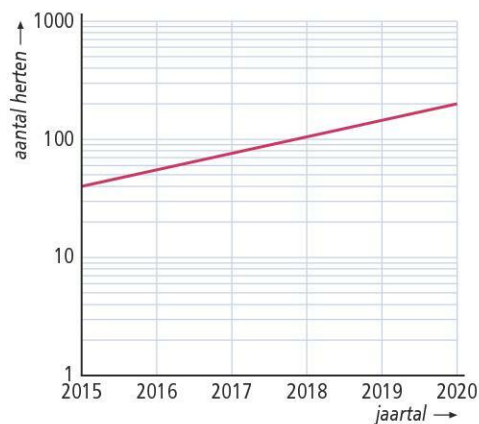
Logaritmische schalen



- 12**
- Hoe kun je zien dat er op de getallenlijn een logaritmische schaalverdeling is gebruikt?
 - Het getal a ligt precies in het midden tussen 10^{-2} en 10^{-1} , dus a is $10^{-1,5}$.
Bereken a in drie decimalen nauwkeurig.
 - Vul in: $b = 10^{\dots}$ en laat zien dat b afgerond op één decimaal gelijk is aan 2,5.
 - Bereken de waarde van c .

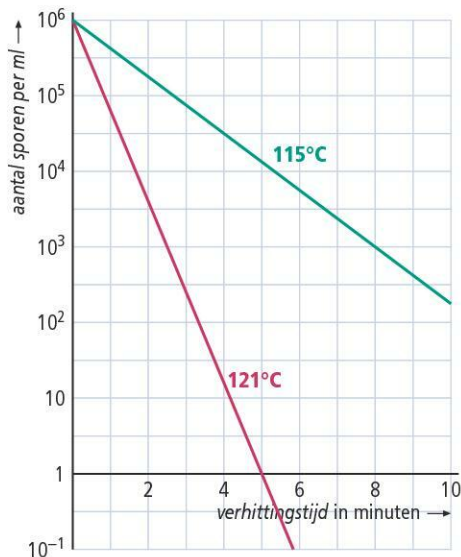
- 13** In de grafiek zie je hoe het aantal herten in een natuurgebied in de periode 2015-2020 is toegenomen.

- Bij de grafiek past een formule van de vorm $N = b \cdot g^t$, waarbij t de tijd in jaren is met $t = 0$ op 1 januari 2015. Leg uit dat $b = 40$.
- Bereken de waarde van g in drie decimalen nauwkeurig.
- Bereken het aantal herten in het natuurgebied op 1 januari 2025 als het aantal herten na 1 januari 2020 op dezelfde manier blijft toenemen.
- Het aantal hazen in het natuurgebied kan berekend worden met de formule $N = 800 \cdot 0,91^t$ met t de tijd in jaren en $t = 0$ op 1 januari 2015.
Teken in het assenstelsel de grafiek die bij het aantal hazen hoort.



- 14** Verhitting is schadelijk voor micro-organismen. In het assenstelsel zie je twee grafieken getekend die het afsterven van het micro-organisme *Clostridium sporogenes* weergeven bij verhitting met 121°C en met 115°C .

- Op tijdstip $t = 0$ zijn er nu 10^6 sporen per 100 mL. Hoelang duurt het voordat er nog 1 spore over is bij verhitting met 121°C ?
- En hoelang bij 115°C ?
- Onder de decimale reductietijd wordt verstaan de tijd die nodig is om 90% van de bacteriesporen te laten afsterven.
Hoe groot is deze reductietijd bij 121°C en bij 115°C ?
- Stel een formule op bij het verband tussen de tijd t en het aantal sporen A bij verhitting met 121°C .

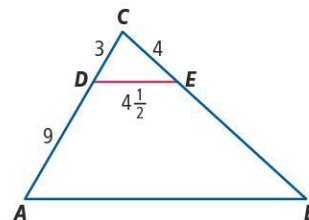


Vorm en ruimte

Theorie

Als twee figuren gelijkvormig zijn met een vergrotingsfactor k , dan geldt voor de oppervlakten van de twee figuren een vergrotingsfactor k^2 en voor de inhoud van de twee figuren een vergrotingsfactor k^3 .

- 15 De driehoeken ABC en DEB zijn gelijkvormig.
- Bereken de lengte van AB en van BE .
 - De oppervlakte van driehoek DEC is 5,88. Bereken de oppervlakte van driehoek ABC .



- 16 Twee flessen zijn gelijkvormig. Fles A is 20 cm hoog en heeft een inhoud van 780 cm^3 . Fles B is 25 cm hoog. Bereken de inhoud van fles B.

Theorie

De inhoud van een balk, prisma en cilinder kun je berekenen met de formule $I = G \cdot h$.

De inhoud van een piramide en kegel kun je berekenen met de formule $I = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

In deze formules is I de inhoud, is G de oppervlakte van het grondvlak en is h de hoogte.

- 17 Van drie cilindervormige schijven wordt de inhoud vergeleken. De schijven zijn elk 4 cm hoog. De grootste schijf heeft een diameter van 20 cm. De diameter van elke volgende schijf is steeds 80% van de diameter van de vorige schijf.
- Bereken de inhoud van elke schijf in cm^3 , op één decimaal.
 - Onderzoek of ook de inhoud steeds met een vast percentage afneemt.
- 18 De glazen piramide die toegang geeft tot het Louvre in Parijs heeft een hoogte van 22 m. De top ligt recht boven het midden van het grondvlak. Het grondvlak is een vierkant met zijden van 36 m.
- Bereken de inhoud in m^3 van deze piramide.
 - In de museumwinkel kun je een model van deze glazen piramide kopen met een hoogte van 11 cm. Bereken de inhoud in cm^3 van dit model.
 - Een ander model heeft een inhoud van 352 cm^3 . Bereken de hoogte van dit model in cm.



Systematisch tellen

- 19** Vijf vriendinnen, Petra, Ineke, Hanneke, Gerlinde en Ans willen een feest geven. Uit hun midden kiezen ze een drietal dat samen het feest gaat organiseren. Ans vraagt zich af hoeveel verschillende drietallen er geselecteerd kunnen worden. Ze probeert het antwoord te vinden met een systematische aanpak.

Op een stukje papier schrijft ze de namen en daaronder het rijtje w w w n n. Dat betekent in dit geval dat ze als eerste drietal Petra, Ineke en Hanneke heeft geselecteerd. De w staat voor 'wel kiezen' en de n voor 'niet kiezen'.

- Welk drietal heeft ze in de volgende rij geselecteerd?
- Onderzoek hoeveel verschillende drietallen in totaal geselecteerd kunnen worden.

P	I	H	G	A
w	w	w	n	n
w	w	n	w	n
...	...	...	...	...

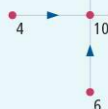
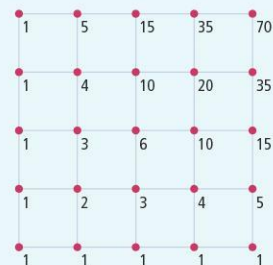
Theorie

Een combinatie van 3 uit 7 is een keuze van een drietal uit een zevental: drie wel kiezen en vier niet kiezen.

Een rooster is een geschikt telmodel om het aantal mogelijke drietallen te berekenen want drie kiezen uit zeven komt overeen met het aantal manieren om in een rooster drie stappen naar rechts en vier stappen omhoog te doen. Een route in een rooster vanuit (0, 0) naar (3, 4) bestaat uit zeven stappen waarvan drie naar rechts en vier omhoog.

Het totaal aantal mogelijke routes noteer je als $\binom{7}{3}$.

Dit getal kun je met je rekenmachine berekenen.



- 20**
- In een vaas zitten 12 witte en 3 rode ballen. Je pakt de ballen er één voor één uit en legt ze naast elkaar neer. Een mogelijk rijtje dat zo ontstaat is
w w w w w r r w w w w w w r.
Hoeveel verschillende rijtjes kunnen zo ontstaan?
 - Je gooit 10 keer met een muntstuk. Hoeveel verschillende uitkomsten zijn er met vijf keer kop en vijf keer munt?
 - Aan twee tafels zijn respectievelijk drie en vier vrije plaatsen. Op hoeveel manieren kun je zeven gasten verdelen in groepen van drie en vier?
- 21** In een kamer zijn acht lampen die onafhankelijk van elkaar aan gedaan kunnen worden. Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er
- om precies vijf lampen aan te doen?
 - om minstens vijf lampen aan te doen?



Afsluiting formules en verbanden 19

SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In de afgelopen jaren heb je kennis gemaakt met verschillende soorten verbanden en formules.

In dit hoofdstuk herhaal je deze verbanden en formules en breid je je kennis hierover uit. Je leert wat een periodiek verband is, wat een trendlijn is en hoe je een waarde kunt schatten met behulp van lineair interpoleren of extrapoleren. In hoofdstuk 12 heb je geleerd hoe je een exponentiële formule kunt herleiden tot een logaritmische formule. In dit hoofdstuk leer je hoe je een logaritmische formule naar een exponentiële formule kunt herleiden. Ten slotte leer je hoe je met formules kunt beredeneren hoe de bijbehorende grafiek verloopt en of er een grenswaarde is.

Je zult in dit hoofdstuk geen leerroutes vinden, dus ook geen ondersteunende of uitdagende opdrachten. In plaats daarvan bevat elke paragraaf een bladzijde met opdrachten op examenniveau.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk:

- | | |
|--|-------------|
| • <i>Modelleren en algebraïseren</i> | opdracht 7 |
| • <i>Formules manipuleren</i> | opdracht 26 |
| • <i>Logisch redeneren en bewijzen</i> | opdracht 41 |

x	1	2	3	5	8
y	2	5	8	14	23

A

x	0	1	2	3	4
y	40	60	90	135	202,5

B

x	2	3	4	5	7
y	1600	400	100	25	$6\frac{1}{4}$

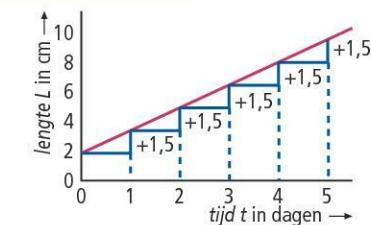
C

- V1**
- Ga bij elke tabel na of er tussen de variabelen x en y sprake is van een lineair verband, een exponentieel verband, of geen van beide. Leg je antwoord uit.
 - Stel bij de tabellen die bij een lineair en exponentieel verband horen een formule op.

Theorie

Bij **lineaire groei** is de toename of afname per tijdseenheid constant. De toename per tijdseenheid is de richtingscoëfficiënt van de bijbehorende rechte lijn. Bij een toename is de richtingscoëfficiënt positief, bij een afname is deze negatief. Bij **exponentiële groei** is de groeifactor per tijdseenheid constant. Bij een toename is de groeifactor groter dan 1. Bij een afname ligt de groeifactor tussen 0 en 1.

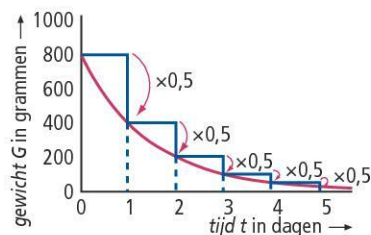
Voorbeeld



<i>tijd t in dagen</i>	0	1	2	3	4	5
<i>lengte L in cm</i>	2,0	3,5	5,0	6,5	8,0	9,5

$+1,5 \quad +1,5 \quad +1,5 \quad +1,5 \quad +1,5$

Het verband tussen L en t is lineair, want per dag neemt de lengte steeds toe met 1,5 cm. De formule is $L = 1,5t + 2$.



<i>tijd t in dagen</i>	0	1	2	3	4	5
<i>gewicht G in grammen</i>	800	400	200	100	50	25

$\times 0,5 \quad \times 0,5 \quad \times 0,5 \quad \times 0,5 \quad \times 0,5$

Het verband tussen G en t is exponentieel, want per dag wordt het gewicht steeds met 0,5 vermenigvuldigd. De formule is $G = 800 \cdot 0,5^t$.

- V2**
- Bij veel 0900-nummers betaal je een starttarief en een vast bedrag per minuut. Suzanne belt 12 minuten naar een 0900-nummer en moet daarvoor € 2,67 betalen. De volgende dag belt ze hetzelfde nummer en bij haar afrekening ziet ze dat ze 8 minuten heeft gebeld en dat haar dat € 2,21 heeft gekost.
- Bereken hoeveel ze moet betalen voor 18 minuten bellen.
 - Hoe hoog is het starttarief?
 - Het starttarief wordt elk jaar 2% hoger. Bereken na hoeveel jaar het starttarief hoger dan € 1,50 is.

- V3** Na 2010 groeit het aantal huishoudens in een land jaarlijks met 1,02%. Op 1 januari 2020 waren er 4,6 miljoen huishoudens.
- Waarom is er sprake van een exponentieel verband tussen het aantal huishoudens in dat land en de tijd in jaren?
 - Welke groeifactor per jaar hoort bij dit verband?
 - Stel een formule op voor het verband tussen het aantal huishoudens N en de tijd in jaren t met $t = 0$ op 1 januari 2020.
 - Bereken hoeveel huishoudens er op 1 januari 2015 waren en hoeveel er op 1 januari 2035 zullen zijn.
 - Laat met een berekening zien dat de groeifactor per vijf jaar ongeveer gelijk is aan 1,0521.

Theorie

Als bij een exponentieel verband de groeifactor per tijdseenheid gelijk is aan g , dan is de groeifactor per n tijdseenheden gelijk aan g^n .

De groeifactor voor een n -de deel van de tijdseenheid is $g^{\frac{1}{n}}$, ofwel $\sqrt[n]{g}$.

Voorbeeld

Bij een exponentieel groeiproces neemt een hoeveelheid elke week met 0,8% toe. Bereken de groeifactor per dag en per jaar.

Oplossing

De groeifactor per week is 1,008.

De groeifactor per dag is $1,008^{\frac{1}{7}} \approx 1,001$.
De groeifactor per jaar is $1,008^{52} \approx 1,513$.

- V4** Bereken steeds de groeifactor per maand.
- Op 1 januari 2021 was het aantal spaarders bij een bank 135 000 en dit aantal neemt maandelijks met 0,92% af.
 - Het aantal banen in een sector groeit tussen 1 januari 2018 en 1 januari 2022 exponentieel van 15 000 naar 60 000.
 - Op 1 januari 2019 leefden in een natuurgebied 12 000 sprinkhanen en dit aantal nam exponentieel af tot 11 700 op 1 januari 2021.
- V5** Op 1 juli 2020 heeft een land 6,47 miljoen inwoners. Het aantal inwoners neemt jaarlijks toe 4,2%.
- Stel een formule op voor het verband tussen het aantal inwoners N en de tijd in jaren t met $t = 0$ op 1 juli 2020.
 - Hoeveel inwoners zullen er op 1 januari 2025 zijn?
 - Bereken in welk jaar er voor het eerst meer dan 10 miljoen inwoners zullen zijn.

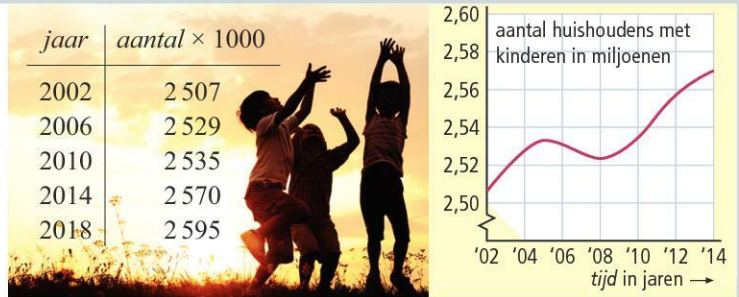


19.1 Lineair interpoleren en extrapoleren

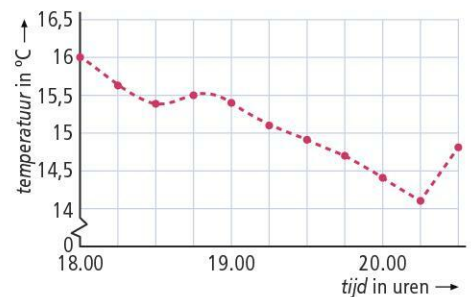
- Je herhaalt**
- hoe je lineair interpoleert en extrapoleert
 - wat een trendlijn is

Je ziet een tabel en een grafiek die informatie geven over het aantal huishoudens met kinderen in Nederland. Bernd wil weten hoeveel huishoudens met kinderen er in 2008 waren.

- Hoe kan hij dit aantal schatten met behulp van de tabel?
- Waarom zal zijn antwoord afwijken van het aantal dat je ziet in de grafiek?



- 1 Elk kwartier is de temperatuur in een schuur gemeten. Het resultaat is verwerkt in de grafiek.
- Geef de temperatuur om 19.45 uur en om 20.00 uur.
 - Neem aan dat de temperatuur tussen 19.45 en 20.00 uur lineair afnam.
Bereken de afname van de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ per minuut.
 - Schat met behulp van je antwoord op opdracht b de temperatuur in de schuur om 19.55 uur.
 - Waarom kun je de temperatuur om 18.00 en 18.45 uur niet gebruiken om de temperatuur om 18.35 te schatten?



Theorie

Het vinden van een tussenliggende waarde in een grafiek of in een tabel heet **interpoleren**. Het vinden van een verder gelegen waarde in een tabel of in een grafiek heet **extrapoleren**. Je bepaalt de tussenliggende of verder gelegen waarde door het verloop van de grafiek of de tabel zo goed mogelijk te volgen. Als een grafiek bij een tabel op een bepaald gedeelte vrijwel een rechte lijn is, dan kun je een tussenliggende waarde schatten met **lineair interpoleren** en een verder gelegen waarde met **lineair extrapoleren**.

Voorbeeld

In de tabel zie je het aantal inwoners van de gemeente Almere. Schat met lineair interpoleren en lineair extrapoleren het aantal inwoners in 2013 en in 2027.

tijd in jaren	aantal inwoners
2010	188 160
2020	211 893

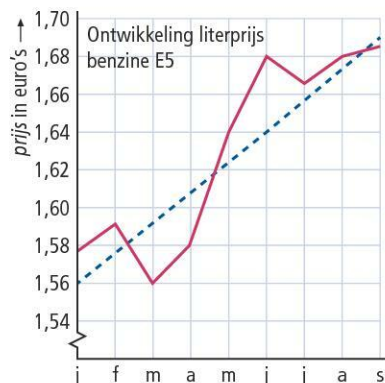
Oplossing

De toename van het aantal inwoners tussen 2010 en 2020 is $211\,893 - 188\,160 = 23\,733$. De lengte van die periode is 10 jaar. De gemiddelde toename is $23\,733 : 10 = 2\,373,3$ inwoners per jaar. In 2013 had de gemeente Almere naar schatting $188\,160 + 3 \times 2\,373,3 \approx 195\,280$ inwoners. In 2027 zal de gemeente Almere naar schatting $211\,893 + 7 \times 2\,373,3 \approx 228\,506$ inwoners hebben.

- 2 In de tabel staan cijfers over het aantal inwoners van Den Haag.

<i>tijd in jaren</i>	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2020
<i>aantal inwoners</i> ($\times 1000$)	504	559	606	551	456	441	441	489	545

- Schat met lineair interpoleren het aantal inwoners van Den Haag in 1967 en 1983.
 - Schat met lineair extrapoleren het aantal inwoners van Den Haag in 2032.
- 3 Het aantal eenoudergezinnen in Nederland is van 2009 tot 2019 toegenomen van 474 909 tot 582 106.
- Schat met lineair interpoleren het aantal eenoudergezinnen in 2016.
 - Gebruik de gegevens van 2009 en 2019 om met lineair extrapoleren het aantal eenoudergezinnen in 2025 te schatten.
- 4 De literprijs voor E5 benzine is in de loop van de tijd nogal veranderd. In de grafiek is de literprijs van E5 benzine in 2018 uitgezet tegen de tijd.
- Volgens Johan is de literprijs in 2018 alleen maar gestegen.
Ben jij het met hem eens? Leg uit waarom.
 - Door de grafiek is een lijn getekend waar de grafiek om heen schommelt. Deze lijn geeft een lineair verband tussen de literprijs P en de tijd t in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2018.
Stel bij deze lijn een formule op van de vorm $P = a \cdot t + b$.
 - Gebruik de formule van de lijn om de literprijs op 1 december 2018 te schatten.
 - Gebruik de formule ook om een schatting te geven voor de literprijs op 1 januari 2020. Waarom is deze schatting niet betrouwbaar?



Theorie

Een grafiek kan een stijgende of een dalende **trend** vertonen. Bij een trend kijk je niet naar kleine schommelingen, maar naar het verloop van de grafiek over langere tijd. Bij een duidelijke trend kun je een voorspelling doen over het verdere verloop van de grafiek. De lijn die je daarbij gebruikt, heet de **trendlijn**. Bij het tekenen van een trendlijn zorg je ervoor dat ongeveer de helft van de grafiek boven en de helft van de grafiek onder de trendlijn ligt.



- 5 Kijk nog eens naar de grafiek naast de theorie.
- Gebruik de trendlijn om het aantal jeugdleden op 1 januari 2021 te schatten.
 - Hoeveel procent wijkt het aantal jeugdlijnen op 1 januari 2019 volgens de trendlijn af van het werkelijke aantal?

- 6 Ieder jaar wordt er een groot aantal nieuwe woningen gebouwd in Nederland. In de tabel zie je voor een aantal jaren het aantal nieuwe woningen.
- Teken een grafiek bij de tabel.
 - Teken een trendlijn.
 - Stel een formule op bij de trendlijn. Neem $t = 0$ in 1990.
 - In welk jaar is volgens de formule het aantal nieuwe woningen voor het eerst minder dan 30 000?

<i>jaar</i>	<i>aantal nieuwe woningen</i>
1990	100 888
1995	97 726
2000	74 774
2005	71 541
2010	60 556
2015	48 381

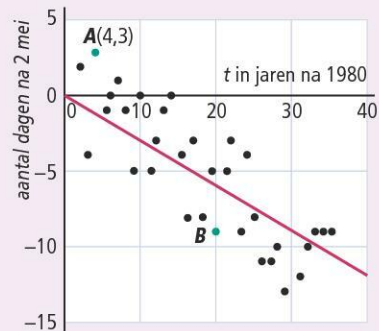
- 7 In de grafiek zie je het verloop van de bezoekersaantallen van de Efteling tussen 1953 en 2015.



- In welk jaar waren er voor het eerst vier miljoen bezoekers?
- De grafiek van het aantal bezoekers verloopt grillig. Er zijn jaren waarin het bezoekersaantal sterk toeneemt. Noem drie van deze jaren en geef een mogelijke verklaring.
- Het bezoekersaantal vertoont vanaf 1980 tot en met 2000 een trend. Teken de bijbehorende trendlijn.
- Stel een formule op bij de trendlijn. Neem N voor het aantal bezoekers en t voor het aantal jaren met $t = 0$ het jaar 1980.
- Waarom kun je deze trendlijn niet gebruiken om te voorspellen in welk jaar voor het eerst het bezoekersaantal van 5 miljoen wordt gehaald?

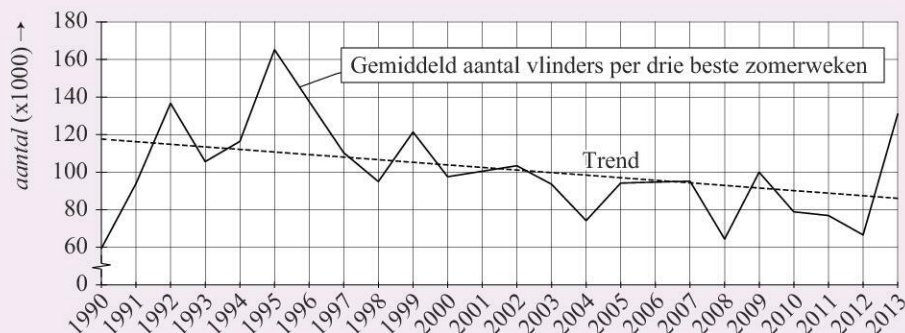
X1 Vogeltrek

Een gierzwaluw overwintert op een andere plaats en keert na de winter terug naar zijn broedgebied. Onderzoekers hebben sinds 1980 elk jaar bijgehouden wat de terugkeerdatum van de gierzwaluw was. In 1980 kwam de eerste gierzwaluw op 2 mei terug. In de grafiek zijn deze gegevens uitgezet. Het punt $(0,0)$ stelt 2 mei 1980 voor. De coördinaten van het punt $A(4,3)$ betekenen dat de gierzwaluw in 1984 drie dagen later terugkeerde dan in 1980, dus op 5 mei.



- Geef de coördinaten van punt B en geef de betekenis van deze coördinaten.
- Bij de gegevens is een trendlijn getekend. Stel een vergelijking bij deze lijn.
- Als de terugkomdata zich op dezelfde manier blijven voortzetten, kun je met behulp van de trendlijn voorspellen op welke datum de gierzwaluw in 2030 zal terugkeren. Bereken die terugkeerdatum.

(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2012, tijdvak 1)

**X2 Vlinders**

Het aantal vlinders in Nederland gaat langzaam achteruit. In de grafiek is te zien dat het gemiddeld aantal vlinders in de drie beste zomerweken (dit zijn de drie weken met de meeste vlinders) een dalende trend vertoont. Deze trend wordt weergegeven door de gestippelde lijn. In de grafiek is te zien dat zowel 1995 als 2013 goede vlinderjaren waren.

- Onderzoek of in 1995 het gemiddeld aantal vlinders in de drie beste zomerweken in procenten meer verschilde van het door de trendlijn voorspelde aantal dan in 2013.
- Stel een formule op voor de trendlijn met t in jaren en $t = 0$ in 1995. Bereken daarmee in welk jaar het gemiddeld aantal vlinders in de drie beste zomerweken volgens de trendlijn voor het eerst minder dan 60 000 zal zijn.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde C 2016, tijdvak 2)

19.2 Evenredig en omgekeerd evenredig

Je herhaalt • wat evenredige en omgekeerd evenredige verbanden zijn

De oppervlakte van de kippenschuur van boer Boris is 250 m^2 . De kippen krijgen 120 gram voer per kip per dag. Er is een verband tussen het aantal kippen en de oppervlakte per kip. Er is ook een verband tussen het aantal kippen en de totale hoeveelheid voer per dag.

- Omschrijf het verschil tussen deze twee verbanden.



- 8** Sander heeft een foto met een breedte van 9 cm en een hoogte van 13 cm . Hij maakt een vergroting met een breedte van 45 cm .

- a** Hoeveel cm is de hoogte van de vergroting?
- b** Als je de breedte acht keer zo groot maakt, hoeveel keer zo groot wordt dan de hoogte?
- c** Tussen de breedte b en de hoogte h bestaat een verband dat je kunt beschrijven door een formule van de vorm $h = \dots \cdot b$.
Welk getal moet op de stippen staan?
- d** Teken de grafiek bij deze formule.

- 9** De tabel hoort bij rechthoeken met een oppervlakte van 24 cm^2 .

<i>lengte</i> in cm	0,1	0,5	1	...	96
<i>breedte</i> in cm	...	...	24	4	...

- a** Vul de tabel verder in.
- b** Hoeveel keer zo klein wordt de lengte als de breedte zes keer zo groot wordt?
- c** Tussen de breedte b en de lengte l bestaat een verband met een formule van de vorm $b \cdot l = \dots$ ofwel $b = \frac{\dots}{l}$

Welk getal moet op de stippen staan?

Theorie

Twee variabelen heten **recht evenredig** als geldt:
als de ene variabele k keer zo groot wordt, dan wordt de andere variabele ook k keer zo groot.

Zijn de variabelen x en y , dan heet y recht evenredig, of

kortweg **evenredig** met x . Er geldt $\frac{y}{x} = c$, maar ook $y = c \cdot x$.

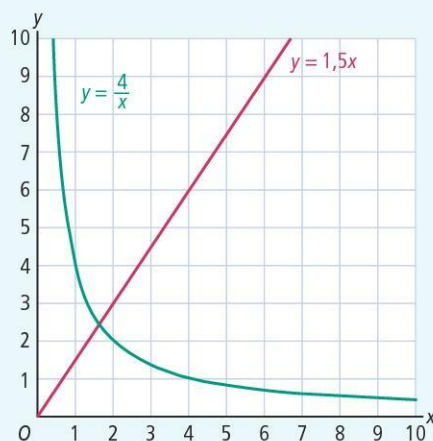
Je herkent een evenredig verband in een tabel, als van de twee getallen in elke kolom de verhouding dezelfde is. De grafiek bij een evenredig verband is een rechte lijn door de oorsprong.

Twee variabelen heten **omgekeerd evenredig** als geldt:

als de ene variabele k keer zo groot wordt, dan wordt de andere variabele k keer zo klein. Zijn de variabelen x en y , dan geldt

$$x \cdot y = c \text{ ofwel } y = \frac{c}{x} \text{ ofwel } x = \frac{c}{y}$$

Je herkent een omgekeerd evenredig verband in een tabel als het product van de variabelen in elke kolom steeds hetzelfde is.



Voorbeeld 1

k	1,4	2,2	4,8	6,4
M	2,1	3,3	7,2	9,6

Toon aan dat M en k recht evenredig zijn.

Oplossing

$2,1 : 1,4 = 1,5$; $3,3 : 2,2 = 1,5$; $7,2 : 4,8 = 1,5$ en $9,6 : 6,4 = 1,5$

M en k zijn recht evenredig want er geldt steeds

$$\frac{M}{k} = 1,5 \text{ ofwel } M = 1,5 \cdot k.$$

Voorbeeld 2

W	$\frac{1}{2}$	2	4	10
t	8	2	1	0,4

Toon aan dat W en t omgekeerd evenredig zijn.

Oplossing

$$\frac{1}{2} \times 8 = 4; 2 \times 2 = 4; 4 \times 1 = 4 \text{ en } 10 \times 0,4 = 4$$

W en t zijn omgekeerd evenredig want er geldt

$$\text{steeds } W \cdot t = 4 \text{ ofwel } t = \frac{4}{W}$$

- 10 a Geef bij elke tabel aan of er sprake is van een evenredig verband, een omgekeerd evenredig verband of geen van beide.

p	2	7	12	18
q	11	38,5	66	99

A

u	3	7	8	13
w	1	-11	-14	-29

B

x	5	8	12	24
y	13,2	8,25	5,5	2,75

C

- b Stel bij elke tabel een formule op.

- 11** Door zout toe te voegen aan water bevriest het water bij een lagere temperatuur dan bij 0°C . Door zout te strooien, smelten sneeuw en ijs bij een temperatuur lager dan 0°C . De vriespundaling V is het aantal graden dat het vriespunt van water lager wordt dan 0°C . Deze waarde van V kan worden

berekend met de formule $V = 3,72 \cdot \frac{D}{58,5 \cdot H}$. Hierin is D de dosering van het zout in gram/m^2 en H is de hoeveelheid neerslag (water, sneeuw, hagel) in kg/m^2 die gevallen is.

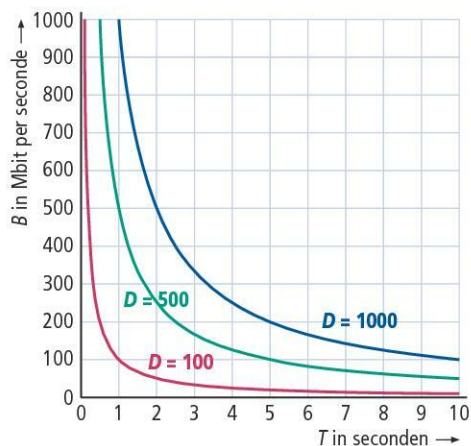
- Bij $0,2 \text{ kg}$ sneeuw per m^2 wordt zout gestrooid in een dosering van 15 gram/m^2 .
Laat met behulp van de formule zien dat het vriespunt dan daalt tot beneden -2°C .
- Neem $H = 0,2$.
Is het verband tussen V en D recht evenredig of omgekeerd evenredig? Verklaar je antwoord.
- Geef bij $H = 0,2$ een formule voor het verband tussen V en D van de vorm $V = a \cdot D$.
- Tijdens een sneeuwbuï wordt er 20 gram zout per m^2 gestrooid.
Welk verband is er tussen de vriespundaling V en de hoeveelheid neerslag H ?
- Men wil een vriespundaling van 4 graden Celsius bereiken.
Bereken hoeveel procent de dosering moet zijn van de hoeveelheid neerslag.

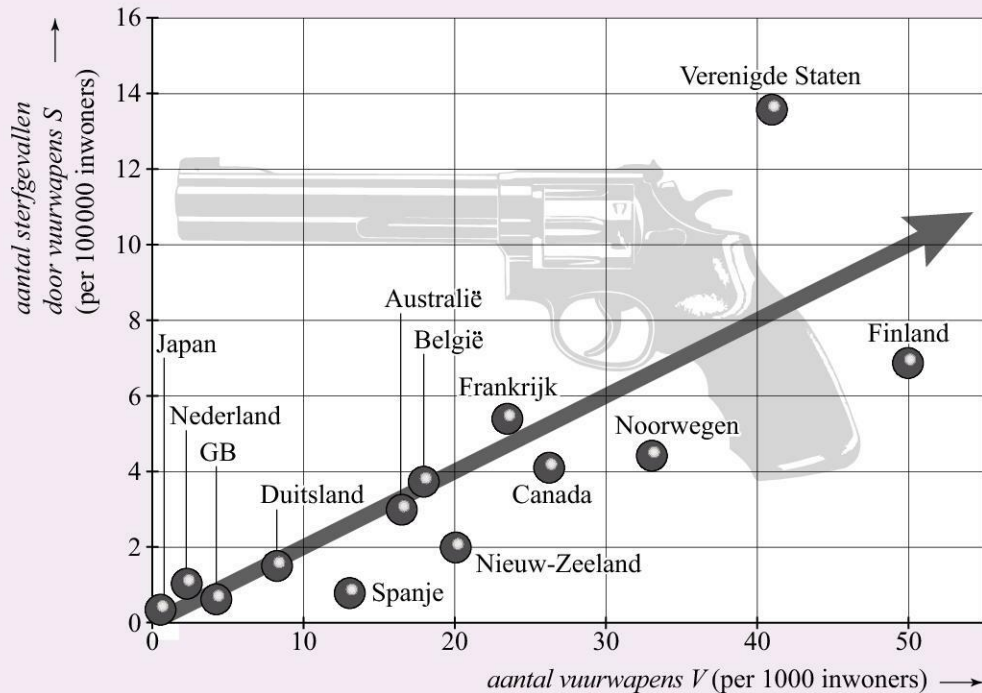


- 12** Bij een internetverbinding beperkt de bandbreedte de downloadsnelheid. De bandbreedte van een verbinding is de maximale hoeveelheid data die verwerkt kan worden per tijdseenheid. In de grafiek is voor drie datahoeveelheden D (in Mbit) het verband weergegeven tussen de verwerkingstijd T (in seconden) en de bijbehorende bandbreedte B (in Mbit/s) bij het downloaden.

- Bij een bandbreedte van 100 Mbit/s duurt het langer om 500 Mbit te downloaden dan 100 Mbit .
Hoeveel seconden langer?
- In de grafiek zie je voor $D = 1000$ het omgekeerd evenredig verband tussen B en T getekend.
Stel bij deze waarde van D een formule op waarbij je B uitdrukt in T . Licht je antwoord toe.

(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2019, tijdvak 2)





X3 Hebben is schieten?

Het vuurwapenbezit en het aantal dodelijke slachtoffers door vuurwapens is in een aantal landen onderzocht. De onderzoeksresultaten zie je in de figuur. De figuur geeft het verband weer tussen het jaarlijks aantal sterfgevallen door vuurwapens S per 100 000 inwoners en het aantal vuurwapens V per 1000 inwoners. Behalve de gegevens van een aantal landen is ook een trendlijn getekend. Voor landen op de trendlijn is er sprake van een evenredig verband tussen S en V .

In 2009 had Nederland ongeveer 16 miljoen inwoners, de Verenigde Staten ongeveer 295 miljoen.

- Bereken met behulp van de figuur hoeveel keer zo groot het jaarlijks aantal sterfgevallen door vuurwapens in de Verenigde Staten is vergeleken met Nederland.
- In 2005 heeft de bevolking van Brazilië zich in een referendum uitgesproken tegen het beperken van de verkoop van vuurwapens. En dat terwijl er in dit land met 180 miljoen inwoners jaarlijks zo'n 40 000 mensen sterven door vuurwapengebruik. Ga ervan uit dat Brazilië op de trendlijn ligt, zodat je gebruik kunt maken van het evenredige verband tussen S en V . Bereken met behulp van dit evenredige verband het totaal aantal vuurwapens in Brazilië.

(Ontleend aan het CE havo wiskunde A 2009, tijdvak 1)

19.3 Periodieke verbanden

Je herhaalt • wat een periodiek verband is

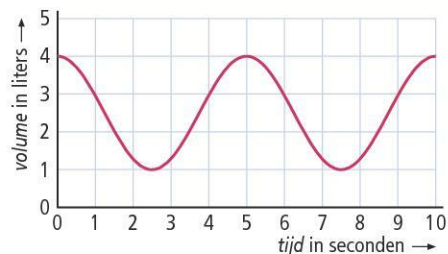
De London Eye is een reuzenrad naast de rivier de Theems in Londen, gebouwd in 1999. Lange tijd was dit het grootste reuzenrad ter wereld. Het is 135 meter hoog en één rondgang duurt 30 minuten. Neem aan dat je instapt op nul meter hoogte.

- Twaalf minuten na het instappen ben je voor de eerst keer op een hoogte van 122 meter. Na hoeveel minuten ben je voor de tweede keer op een hoogte van 122 meter?



- 13** Een persoon ligt in bed en heeft een rustige en regelmatige ademhaling. Bij het inademen neemt de hoeveelheid lucht in de longen toe. Bij het uitademen neemt deze hoeveelheid lucht weer af. In de grafiek zie je hoe de hoeveelheid lucht in de longen in de loop van de tijd varieert.

- Hoeveel seconden duurt één ademhaling?
- Hoeveel lucht zit er minimaal en hoeveel lucht zit er maximaal in de longen?
- Hoeveel lucht zit er gemiddeld in de longen?
- En hoe groot is de maximale afwijking van dit gemiddelde?



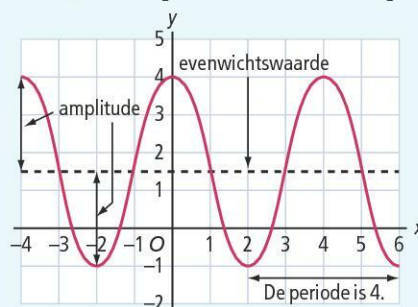
Theorie

Versijnselen die zichzelf steeds herhalen heten **periodieke verschijnselen**. De bijbehorende grafieken heten **periodieke grafieken**.

De **evenwichtswaarde** is de gemiddelde hoogte van de grafiek. De **amplitude** is de grootste afwijking van de grafiek ten opzichte van de evenwichtswaarde.

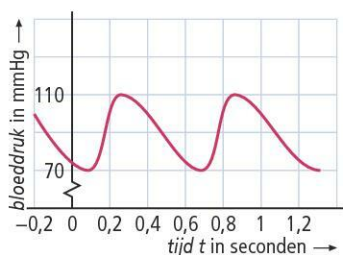
De **periode** is de kleinste afstand waarover je een periodieke grafiek horizontaal kunt verschuiven zodat hij weer samenvalt met zichzelf.

De amplitude is $2\frac{1}{2}$. De evenwichtswaarde is $1\frac{1}{2}$.



Voorbeeld

De bloeddruk van een persoon wordt gemeten in millimeters kwikdruk (mmHg) en varieert gedurende een hartslag. In de grafiek is de bloeddruk van iemand uitgezet tegen de tijd.



Geef de evenwichtswaarde, de amplitude en de periode.

Oplossing

De laagste bloeddrukwaarde is 70 mmHg.
De hoogste bloeddrukwaarde is 110 mmHg.
De evenwichtswaarde is gelijk aan

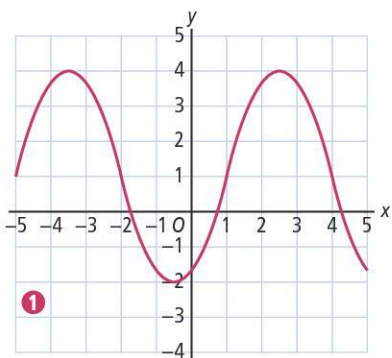
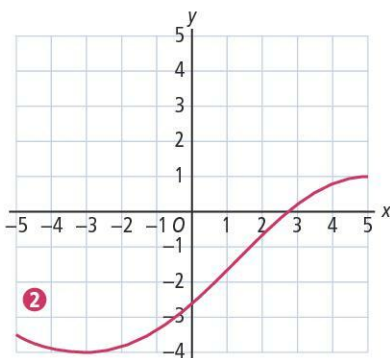
$$\frac{110 + 70}{2} = 90 \text{ mmHg.}$$

De amplitude is $110 - 90 = 20$ mmHg.

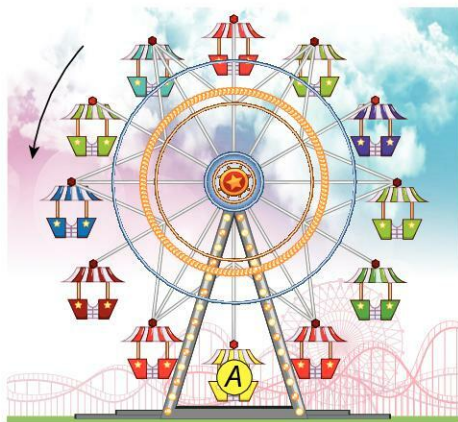
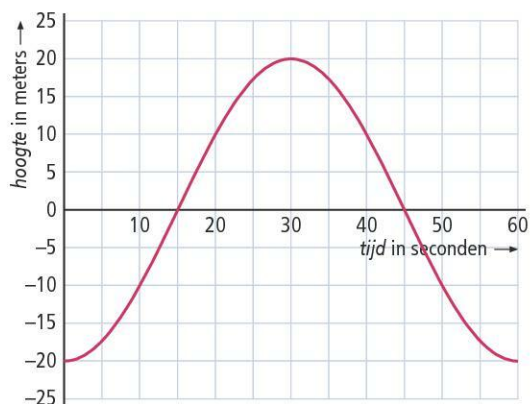
De laagste waarde wordt 0,1 seconde na de start van de meting bereikt.

Na 0,7 seconden bereikt de bloeddruk opnieuw de laagste waarde, dat betekent dat de periode gelijk is aan $0,7 - 0,1 = 0,6$ seconden.

- 14 De periode van de bloeddruk is gelijk aan die van de tijd tussen twee hartslagen. Het aantal hartslagen per minuut van een mens in rust ligt meestal tussen 60 en 80. Hoort de grafiek in het voorbeeld bij een mens in rust?
- 15 Geef de evenwichtswaarde, de amplitude en de periode van de grafiek bij opdracht 13.



- 16 De grafieken 1 en 2 zijn deel van een periodieke grafiek.
- Bereken van grafiek 1 de evenwichtswaarde, de amplitude en de periode.
 - Geef ook van grafiek 2 de evenwichtswaarde, de amplitude en de periode.



- 17** Op volle snelheid draait dit reuzenrad in één minuut steeds precies één keer rond.
In het plaatje is punt *A* het ophangpunt van de onderste cabine.
- Na hoeveel seconden is punt *A* voor het eerst op de hoogte van de as? En hoeveel seconden later weer?
 - Ook zie je één periode van de grafiek die hoort bij de hoogte van punt *A* ten opzichte van de as van het rad. Hoe groot is de straal van het rad?
 - Hoe hoog is de as van het rad na 80 seconden?
 - Noem vijf tijdstippen waarop punt *A* zich 10 meter onder de as bevindt.
 - Bereken welke afstand punt *A* in één minuut aflegt.

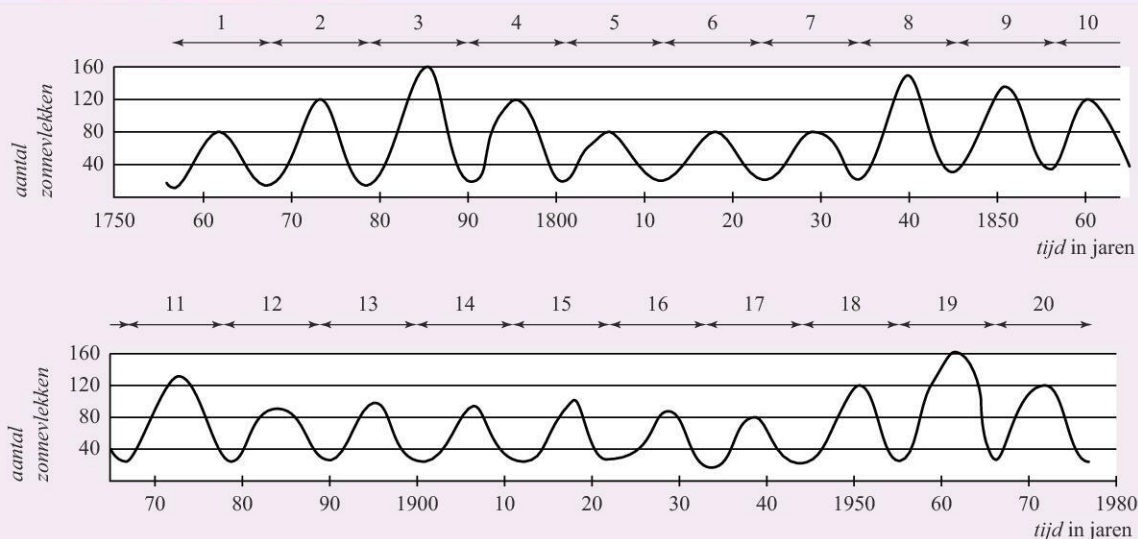
De omtrek van een cirkel met straal r is gelijk aan $2 \cdot \pi \cdot r$.

- 18** Door eb en vloed varieert de hoogte van het water periodiek. De figuur geeft de waterstand op 12 november 2020 voor Schiermonnikoog.



- Hoe kun je aan de grafiek zien dat het niet elke dag op dezelfde tijd eb en vloed is?
- Je ziet dat de hoogste waterstand op 12 november 2020 om 10.00 uur werd bereikt. Schat met behulp van de grafiek het tijdstip van de eerste hoogwaterstand op 15 november 2020.

Opdrachten op examenniveau



X4 Zonnevlekken

Op de zon komen plaatsen met een lagere temperatuur voor: de zogenaamde zonnevlekken. Het aantal zonnevlekken varieert met de tijd. Sinds ongeveer 1700 wordt het aantal zonnevlekken met grote regelmaat geteld. Gegeven is de globale grafiek van het aantal zonnevlekken sinds 1755. De wetenschappers zijn het erover eens dat in het voorkomen van zonnevlekken een periodiek verschijnsel is waar te nemen. De getekende grafiek vertoont 20 perioden.

- Ga na dat uit deze grafiek afgeleid kan worden dat de gemiddelde periode 11 jaar is.
- Sommige onderzoekers wijzen ook op het feit dat de cycli 1, 2, 3 en 4 grote overeenkomst vertonen met 17, 18, 19, en 20. Men vindt hierin een aanwijzing voor een tweede periode. Geef het aantal jaren van deze tweede periode aan.
- Op grond van de twee perioden die bij het verschijnsel zonnevlekken zijn waargenomen, heeft men voorspellingen gemaakt voor het aantal zonnevlekken in de rest van de eeuw. Bereken het eerste jaar na 1986 waarin het aantal zonnevlekken een maximum bereikt. Hoe groot is dat maximum ongeveer?

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 1986, tijdvak 2)

19.4 Exponentiële en logaritmische verbanden

- Je herhaalt**
- hoe je een exponentiële formule herleidt tot een logaritmische formule
 - hoe je een logaritmische formule herleidt tot een exponentiële formule

In een stad is sprake van een griep epidemie. Het aantal dagen voordat N inwoners besmet zijn, kun je berekenen met de formule

$$t = {}^{1,13}\log(0,017N).$$

Hierbij is t de tijd in dagen met $t = 0$ op het moment dat de epidemie uitbrak.

- Voor welke vragen is deze formule goed te gebruiken?



- 19**
- Leg uit dat $t = 3$ de oplossing is van de vergelijking $2^t = 8$.
 - Waarom ligt de oplossing van de vergelijking $2^t = 11$ tussen 3 en 4?
 - De oplossing van de vergelijking $2^t = 11$ is $t = {}^2\log(11)$. Bereken met je rekenmachine ${}^2\log(11)$ in twee decimalen.
 - Los de volgende vergelijkingen op. Schrijf de oplossing met een logaritme en rond daarna af op twee decimalen.

A $4^t = 12$	C $0,65^{2t} = 3$
B $3 \cdot 1,2^t = 21$	D $3,8 \cdot 2,5^t - 1 = 18$

De oplossing van de vergelijking $g^t = a$ is $t = {}^g\log(a)$.

- 20** Op het blaadje wordt de formule $y = 2^x + 6$ herschreven zodat x wordt uitgedrukt in y .
- Wat is er in stap 1 en stap 2 gebeurd?
 - Maak de berekening op het blaadje af.

●	$y = 2^x + 6$				
●	$2^x + 6 = y$				1
●	$2^x = y - 6$				2
●	$x = \dots \log(\dots)$				3

Theorie

Een exponentiële formule kun je herleiden tot een logaritmische formule.

Je gebruikt de regel: uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$.

Voorbeeld

Herleid de formule $N = 3 + 2 \cdot 0,8^t$ waarbij je t uitdrukt in N .

Oplossing

$$3 + 2 \cdot 0,8^t = N \quad \text{links en rechts verwisseld}$$

$$2 \cdot 0,8^t = N - 3 \quad \text{links en rechts } - 3$$

$$0,8^t = \frac{1}{2}N - 1\frac{1}{2} \quad \text{links en rechts : 2}$$

$$t = {}^{0,8}\log\left(\frac{1}{2}N - 1\frac{1}{2}\right) \quad g^t = a \text{ dus } t = {}^g\log(a)$$

21 Druk t uit in N .

- a $N = 5^t$ d $N = 9 \cdot 3^{t+2} - 9$
 b $N = 2 \cdot 3^t$ e $6N - 1 = \frac{1}{3} \cdot 7^t$
 c $N = 0,1 \cdot 8^{t-6}$ f $N = 10^{1,25t+4}$

22 a Vul in:
 De oplossing van de vergelijking $^3\log(x) = 2$ is $x = 9$
 want $x = 3^{\dots} = \dots$.

b Vul in:

Uit $^4\log(x) = 3$ volgt $x = \dots = \dots$.

c Los op:

- A $^5\log(x) = 3$ C $\log(2x + 39) = 2$
 B $^3\log(x + 10) = 3$ D $2 + ^2\log(x - 1) = 7$

De oplossing van de vergelijking
 $^g\log(a) = t$ is $a = g^t$.

23 Op het blaadje wordt de formule $y = ^5\log(x) - 1$
 herschreven zodat x wordt uitgedrukt in y .

- a Wat is er in stap 1 en 2 gebeurd?
 b Welke regel moet je in stap 3 gebruiken?
 c Maak de berekening op het blaadje af.

☐	$y = ^5\log(x) - 1$			
☐	$^5\log(x) - 1 = y$			1
☐	$^5\log(x) = y + 1$			2
☐	$x = \dots$			3

Theorie

Een logaritmische formule kun je herleiden tot een
 exponentiële formule.

Je gebruikt de regel: uit $^g\log(a) = t$ volgt $a = g^t$.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $y = ^{0,6}\log(x + 1)$.
 Druk x uit in y .

Oplossing

$^{0,6}\log(x + 1) = y$ links en rechts verwisseld
 $x + 1 = 0,6^y$ $^g\log(a) = t$ geeft $a = g^t$
 $x = 0,6^y - 1$ links en rechts $- 1$

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $p = 4 + ^3\log(0,5q)$.
 Druk q uit in p .

Oplossing

$4 + ^3\log(0,5q) = p$ links en rechts verwisseld
 $^3\log(0,5q) = p - 4$ links en rechts $- 4$
 $0,5q = 3^{p-4}$ $^g\log(a) = t$ geeft $a = g^t$
 $q = 2 \cdot 3^{p-4}$ links en rechts $\times 2$

24 Druk x uit in y .

- a $y = ^4\log(x)$ c $y = 6 + \log(x)$
 b $y = ^3\log(x + 5)$ d $y = 10 - ^{0,3}\log(6 - x)$

- 25** Druk q uit in p .
- a** $p = {}^9\log(-q)$ **d** $p = 4 - 2 \cdot {}^5\log(\frac{1}{2}q)$
b $p = {}^{0,8}\log(q) - 9$ **e** $p = \log(3q + 2)$
c $p = 5 \cdot {}^3\log(2q)$ **f** ${}^2\log(pq) = 1$
- 26** Een fietsband wordt opgepompt totdat er 6 liter lucht in de band zit. De band is poreus en loopt na oppompen langzaam leeg. De formule $t = {}^{0,79}\log(\frac{1}{6}L)$ geeft het verband tussen de tijd t in weken en de hoeveelheid lucht L in liters.
- a** Bereken hoeveel liter lucht er na 2 dagen nog in de fietsband aanwezig is.
b Druk L uit in t .
c Controleer met de formule van opdracht b je antwoord van opdracht a.
- 27** Van een insectensoort neemt het aantal elk jaar met 8% af.
- a** Leg uit dat je met de vergelijking $0,92^t = \frac{1}{2}$ de halveringstijd van het aantal insecten kunt berekenen.
b Los de vergelijking $0,92^t = \frac{1}{2}$ op met een logaritme en bereken de halveringstijd in maanden nauwkeurig.

De verdubbelingstijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = 2$, ofwel $t = {}^g\log(2)$.

De halveringstijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = \frac{1}{2}$, ofwel $t = {}^g\log(\frac{1}{2})$.

- 28**
- a** Het aantal elektrische fietsen stijgt exponentieel. Neem aan dat de groeifactor 1,2 per jaar is. Bereken na hoeveel maanden het aantal is verdubbeld. Rond af op één decimaal.
b Een hoeveelheid neemt af met 0,5% per maand. Bereken na hoeveel maanden de hoeveelheid is gehalveerd. Rond af op één decimaal.
c Het aantal herten neemt in vier maanden exponentieel toe van 150 naar 190. Bereken de verdubbelingstijd van het aantal herten in maanden. Rond af op één decimaal.
- 29** Bij een luchtballon neemt de hoeveelheid draaggas af volgens de formule $A = 1000 \cdot 0,995^{2t}$, met t in dagen en A in m^3 .
- a** Leg uit dat de groeifactor per dag gelijk is aan $0,995^2$.
b Bereken de halveringstijd van de hoeveelheid draaggas.



X5**Succesvogels en pechvogels**

In 2010 heeft Chris van Turnhout onderzoek gedaan naar de ontwikkeling van de aantallen broedvogels in Nederland gedurende de periode 1990-2005. Hij onderzocht onder andere de kuifleeuwerik, een vogel die zijn naam dankt aan zijn opvallende kuif. In de periode 1990-2005 nam het aantal kuifleeuweriken in Nederland dramatisch af. In 2005 was er nog slechts 5% over van het aantal in 1990. Ga ervan uit dat het aantal exponentieel afnam in deze periode.

- a** Bereken de groeifactor per jaar voor de kuifleeuwerik. Ga uit van de gegevens van 1990 en 2005.
- b** In hoeveel jaar tijd halveert het aantal kuifleeuweriken?
- c** Uit onderzoek is gebleken dat de plaats van het nest belangrijk is voor de mate van succes van een vogelsoort. Een soort A die zijn nest in struiken maakt, groeit exponentieel met groeifactor 1,042 per jaar. En een soort B die in bomen nestelt, groeit exponentieel met groeifactor 1,016 per jaar. Neem aan dat de aantallen van deze twee broedvogelsoorten op een bepaald moment gelijk zijn. Bereken na hoeveel gehele jaren het aantal vogels van soort A voor het eerst meer dan twee keer zo groot is als dat van soort B.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde C 2015, tijdvak 1)

**X6****Versterker**

De volumeknop van een versterker heeft 19 standen: stand 0 tot en met stand 18. In stand 0 geeft de versterker geen geluid. In stand 18 is het geluidsniveau maximaal. Er geldt de volgende formule: $P = a \cdot \log(x + 1)$. Hierin is x de stand van de volumeknop, P het percentage van het maximale geluidsniveau en a een constante.

- a** Uit de gegevens kun je afleiden dat $a \approx 78$. Bereken a in drie decimalen nauwkeurig.
- b** Je kunt $P = 78 \cdot \log(x + 1)$ herleiden tot $x = 10^{n \cdot P} - m$. Bereken n en m . Rond zo nodig af op drie decimalen.

19.5 Formules herleiden

Je herhaalt • hoe je formules herleidt

De prijs voor vers geperst sinaasappelsap in een supermarkt kun je berekenen met de formule $P = 2,49 \cdot 1,05^t$. Hierin is P de prijs in euro's per liter sinaasappelsap en t de tijd in jaren met $t = 0$ het jaar 2021. Lars heeft deze formule herleid tot $t = 0,419 \cdot P^{0,952}$

- Hoe kun je aan de formule zien dat deze herleiding niet goed kan zijn?



30 Op het blaadje is een begin gemaakt met herleiden van de formule $3(x - 7) - 4(x - y) = 0$ tot de vorm $y = ax + b$.

- Leg uit wat er in de stappen 1 en 2 is gebeurd.
- Maak de berekening op het blaadje af.
- Gegeven is de formule $-2(x + 10) - y = 12x$. Druk y uit in x .

●	$3(x - 7) - 4(x - y) = 0$		
●	$3x - 21 - 4x + 4y = 0$		1
●	$-x - 21 + 4y = 0$		2
●	$4y = x + \dots$		3
●	$y = \dots x + \dots$		4

Een formule herleiden of herschrijven betekent dat je de formule in een andere vorm schrijft. Dat doe je ook wanneer je de ene variabele moet uitdrukken in de andere.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule

$$H = \frac{20t + 24}{8} - 12$$

Herleid de formule tot de vorm

$$H = at + b.$$

Oplossing

$$H = \frac{20t}{8} + \frac{24}{8} - 12$$

$$H = 2\frac{1}{2}t + 3 - 12$$

$$H = 2\frac{1}{2}t - 9$$

Voorbeeld 2

De formule $N = \frac{1}{2} \cdot 3^{\log(t+4)} - 5$

kan worden herschreven tot de vorm $t = 3^{aN+b} + c$.

Bereken a , b en c .

Oplossing

$$\frac{1}{2} \cdot 3^{\log(t+4)} - 5 = N$$

$$\frac{1}{2} \cdot 3^{\log(t+4)} = N + 5$$

$$3^{\log(t+4)} = 2N + 10$$

$$t + 4 = 3^{2N+10}$$

$$t = 3^{2N+10} - 4$$

$$a = 2, b = 10 \text{ en } c = -4$$

Voorbeeld 3

Gegeven is de formule

$$N = 10 \cdot 1,9^{4t} + 8.$$

Druk t uit in N .

Oplossing

$$10 \cdot 1,9^{4t} + 8 = N$$

$$10 \cdot 1,9^{4t} = N - 8$$

$$1,9^{4t} = \frac{N - 8}{10}$$

$$4t = {}^{1,9}\log\left(\frac{N - 8}{10}\right)$$

$$t = \frac{1}{4} \cdot {}^{1,9}\log\left(\frac{N - 8}{10}\right)$$

$$\text{ofwel } t = \frac{1}{4} \cdot {}^{1,9}\log\left(\frac{1}{10}N - \frac{4}{5}\right)$$

31 Herleid tot de vorm $y = ax + b$.

a $6x + 5y = 14$

c $6(x - y) - 2(x + 18) = 0$

b $y = \frac{12 - 5x}{-3}$

d $\frac{1}{4} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y$

32 Druk s uit in R .

a $R = 2 + {}^3\log(4s)$

d $R = 2,5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^s + 18$

b $R = 10 - 8 \cdot 2^s$

e $R = \frac{1}{2} \cdot {}^{1,6}\log(s - 3)$

c $R = 6 \cdot \log(4s) - 4,9$

f $R = 5 + 6^{2s+8}$

33 Daglicht wordt door water geabsorbeerd waardoor de lichtsterke onder water snel afneemt. In een meer met vrij helder water kun je het percentage daglicht berekenen met de formule $P = 100 \cdot 0,75^d$. Hierin is P het percentage daglicht en d de diepte in meters.

- Bereken op welke diepte de hoeveelheid daglicht is gehalveerd.
- Herleid de formule zodat d wordt uitgedrukt in P .
- Een bioloog heeft onderzocht hoeveel algen er in het meer voorkomen. Een formule die past bij het aantal algen A per cm^3 is $A = 60 + 2 \cdot {}^{0,9}\log(d)$. Bereken hoeveel algen per cm^3 er zijn als er nog maar 1% van de hoeveelheid daglicht aanwezig is.



34 Gegeven is de formule $A = 8 \cdot t^{2,5}$.

- Hoe kun je zien dat het hier niet om een exponentiële maar om een machtsformule gaat?
- Op het blaadje wordt de formule herleid zodat t wordt uitgedrukt in N . Leg uit wat er in de stappen 1 en 2 is gebeurd.
- In stap 3 is er gebruik gemaakt van de regel 'uit $x^a = c$ volgt $x = c^{\frac{1}{a}}$ '. Van welke rekenregel is er gebruik gemaakt in stap 4?
- Ga met je rekenmachine na dat de formule in stap 5 volgt uit de formule in stap 4.

☐	$A = 8 \cdot t^{2,5}$			
☐	$8 \cdot t^{2,5} = A$			1
☐	$t^{2,5} = \frac{1}{8}A$			2
☐	$t = \left(\frac{1}{8} \cdot A\right)^{\frac{1}{2,5}}$			3
☐	$t = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2,5}} \cdot A^{\frac{1}{2,5}}$			4
☐	$t \approx 0,44 \cdot A^{0,4}$			5

Bij het herleiden van formules van de vorm $y = c \cdot x^a$ gebruik je de rekenregels voor machten. Met behulp van de regel 'uit $x^a = c$ volgt $x = c^{\frac{1}{a}}$ ' kun je formules met machten herleiden.

$$\begin{array}{ll} g^p \cdot g^q = g^{p+q} & g^{-n} = \frac{1}{g^n} \\ \frac{g^p}{g^q} = g^{p-q} & g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g} \\ (g^p)^q = g^{p \cdot q} & (a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p \end{array}$$

Voorbeeld

Herleid $A = 6 \cdot s^{0,2}$ waarbij je s uitdrukt in A .

Oplossing

$$6 \cdot s^{0,2} = A$$

links en rechts verwisseld

$$s^{0,2} = \frac{1}{6} A$$

links en rechts : 6

$$s = \left(\frac{1}{6} A\right)^{\frac{1}{0,2}}$$

uit $x^a = c$ volgt $x = c^{\frac{1}{a}}$

$$s = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{0,2}} \cdot A^{\frac{1}{0,2}}$$

$$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$$

$$s \approx 0,01024 \cdot A^5$$

uitrekenen

35 Druk t uit in R .

a $R = t^3$

c $R = \frac{4}{9} t^{0,3}$

b $R = 4t^{\frac{1}{8}}$

d $R = 2t \cdot 4t^3$

36 Biologen hebben gemeten hoeveel zuurstof een zoogdier nodig heeft om één kilometer af te leggen. Ze vonden de formule $Z = 0,4 \cdot G^{0,67}$. Hierbij is G het lichaamsgewicht in kilogrammen en is Z het aantal milliliter zuurstof dat verbruikt wordt per kilometer.

- a** Hoeveel milliliter zuurstof heeft een hond van 40 kg nodig om een afstand van 7 kilometer af te leggen?
- b** Laat zien dat je de formule kunt herleiden tot $G = 3,926 \cdot Z^{1,49}$.
- c** Een tijger heeft voor een afstand van 15 kilometer 180 milliliter zuurstof nodig. Bereken het gewicht van deze tijger.



X7

Groei van een foetus

Gemiddeld duurt een zwangerschap bij de mens 38 weken. Een ongeborn kind van 8 weken of ouder wordt een foetus genoemd. In de tabel staat het (gemiddelde) lichaamsgewicht G in gram van een foetus na t weken.

In deze opdracht wordt onderzocht welk verband er tussen G en t zou kunnen bestaan. Het eerste model dat we bekijken is dat van exponentiële groei: $G = b \cdot g^t$.

Veronderstel dat de groei tussen week 8 en week 10 inderdaad exponentieel verloopt.

- Laat zien dat voor deze periode geldt: $b \approx 0,0118$ en $g \approx 2,114$ waarbij $8 \leq t \leq 10$.
- Herleid de formule tot de vorm $t = {}^d\log(c \cdot G)$. Rond d en c af op twee decimalen.
- Laat met een berekening zien dat exponentiële groei geen goed model is voor de groei van de foetus in de gehele periode van 8 tot 38 weken.

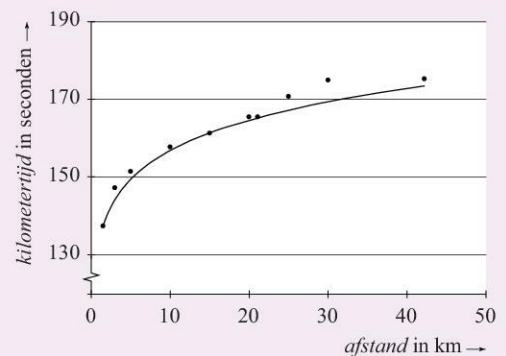
<i>tijd t in weken</i>	<i>lichaamsgewicht G in gram</i>
8	4,7
10	21
15	160
20	480
25	990
30	1700
35	2700
38	3500

X8

Kilometertijden

Een maat voor de snelheid van een hardloper is de kilometertijd K . Dit is het aantal seconden dat een looper gemiddeld per kilometer nodig heeft. In het assenstelsel zijn de kilometertijden weergegeven van de wereldrecords hardlopen zoals ze waren in november 2013. De getekende grafiek die zo goed mogelijk door de punten heen gaat, heeft een formule van de vorm $K = a \cdot d^{0,07}$. In deze formule is K de kilometertijd in seconden en d de afstand in kilometer. Het wereldrecord op de 1500 meter was in november 2013 precies 3 minuten en 26 seconden.

- Ga na dat de kilometertijd bij dit wereldrecord gelijk is aan $137\frac{1}{3}$ seconden.
- De waarde van a is ongeveer 133. Bereken de waarde van a in twee decimalen nauwkeurig.
- De marathon is een hardloepwedstrijd over een afstand van 42 195 meter. In november 2013 stond het wereldrecord op de marathon op naam van de Keniaan Wilson Kipsang. Zijn tijd was 2:03.23. Bereken hoeveel seconden het wereldrecord volgens de formule afwijkt van het wereldrecord dat in 2013 door Kipsang is gelopen.
- Druk d uit in K .
- Bereken bij welke afstanden de kilometertijd hoger dan 160 seconden is.



19.6 Redeneren met formules

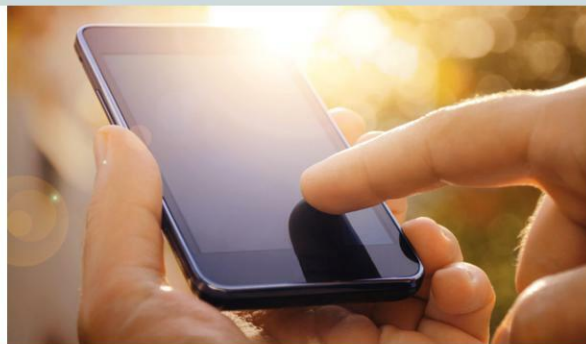
Je herhaalt • hoe je redeneert met formules

Bij een telecombedrijf wordt de gemiddelde prijs per belminuut lager naarmate het aantal gebelde minuten groter is. Dit wordt beschreven door de

$$\text{formule } G = 0,015 + \frac{5}{a}$$

Hierin is G de gemiddelde prijs in euro's per belminuut en a het aantal belminuten per maand.

- Hoe kun je zien dat de formule een grenswaarde heeft en wat is de praktische betekenis van de grenswaarde?



- 37** Een pak melk wordt uit de koelkast gehaald. Daardoor stijgt de temperatuur van de melk. Met de formule $T = 20 - 16 \cdot 0,75^t$ kun je de temperatuur T in graden Celsius van de melk berekenen. Hierin is t de tijd in uren vanaf het moment dat de melk uit de koelkast is gehaald.

- a** Welke temperatuur heeft de melk op het moment dat zij uit de koelkast wordt gehaald?
- b** Vul de tabel in.
- c** Leg uit dat $16 \cdot 0,75^t$ op den duur nadert naar nul.
- d** Naar welke waarde nadert de temperatuur van de melk op den duur?

t	$0,75^t$	$16 \cdot 0,75^t$	$20 - 16 \cdot 0,75^t$
0	...	...	...
5	...	...	...
10	...	...	...

Theorie

Door na te gaan hoe een formule is opgebouwd, kun je beredeneren hoe de uitkomst van een formule verandert.

Je gebruikt bijvoorbeeld de volgende eigenschappen.

- g^t en $^g\log(t)$ nemen toe als $g > 1$ en t groter wordt.
- g^t en $^g\log(t)$ nemen af als $g < 1$ en t groter wordt.
- Bij een vaste positieve waarde van c en $n > 0$ neemt $\frac{c}{n}$ af als n groter wordt.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $K = 35 + \frac{100}{t^2 + 1}$

Bereken of de waarde van K toeneemt of afneemt als t steeds groter wordt en bereken naar welke grenswaarde K nadert.

Oplossing

Als t steeds groter wordt, dan neemt t^2 toe.

Daardoor neemt $t^2 + 1$ ook toe.

100 wordt gedeeld door een steeds groter getal en

daardoor neemt $\frac{100}{t^2 + 1}$ af en nadert 0.

De waarde van K zal dan naderen naar $35 + 0 = 35$.

De waarde van K neemt af en de grenswaarde is 35.

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $y = 20 - 5 \cdot {}^3\log(x)$.

Bereken of de waarde van y toeneemt of afneemt als x steeds groter wordt en of de formule een grenswaarde heeft.

Oplossing

Als x steeds groter wordt, dan neemt ${}^3\log(x)$ toe, want $3 > 1$.

$5 \cdot {}^3\log(x)$ neemt dan ook toe.

Daardoor neemt de waarde van y af, want er wordt een steeds groter getal van 20 afgetrokken.

De formule heeft geen grenswaarde.

- 38** Bereken of de waarde van P toeneemt of afneemt als t steeds groter wordt en naar welke grenswaarde P nadert.

a $P = \frac{2}{7 + 2t^2} - 11$

d $P = 3 + \frac{2}{1,2^t}$

b $P = 2 + 0,6^t$

e $P = 64(1 - 0,6^{0,02t})$

c $P = \frac{14}{2 + 3 \cdot {}^{0,5}\log(t)}$

f $P = \frac{-8}{t^3 + 7}$

- 39** Bereken of de waarde van y toeneemt of afneemt als x steeds groter wordt en naar welke grenswaarde y nadert.

a $y = 12 \cdot x^{-1,3}$

b $y = 4 - 6 \cdot 0,85^{-x}$

c $y = 6 + 4x^{-2}$

- 40** Bij een chemisch proces kun je de concentratie C van de stof die bij dit chemische proces ontstaat, berekenen met de formule $C = 500 - 500 \cdot 0,96^t$. Hierin is C in mol per dm^3 en t de tijd in minuten met $t = 0$ het moment waarop het chemische proces begint. Een mol is een maat voor het aantal deeltjes.

- a** Hoe groot is de concentratie op het tijdstip $t = 0$?
b Bereken of de concentratie van de stof toeneemt of afneemt.
c Bereken hoeveel mol per dm^3 er op den duur van deze stof aanwezig zal zijn.

Met de rekenregel $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ kun je de formules met een negatieve exponent schrijven als een formule met een breuk.

- 41** Bij een gemeente komen elk weekend tientallen telefoontjes binnen van mensen die geluidsoverlast ervaren van bezoekers van een uitgaansgelegenheid. Samen met de eigenaar van deze gelegenheid en de politie wordt een project gestart om door middel van een voorlichtingscampagne en het uitdelen van boetes de bezoekers te bewegen buiten het gebouw minder lawaai te maken. Op grond van de resultaten van de eerste weken na de start van het project stelt een onderzoeker de formule $A = 5 \cdot (2,2 + 5,8 \cdot 0,72^t)$ op. Hierin is A het aantal telefonische klachten in het weekend en t de tijd in weken na de start van het project.
- Bereken de waarde van A bij de start van het project.
 - Beredeneer aan de hand van de formule of de waarde van A toeneemt of afneemt als t steeds groter wordt.
 - Bij de start van het project is de doelstelling geformuleerd dat er op den duur hoogstens tien telefonische klachten per weekend binnen komen. Wordt deze doelstelling gehaald?

- 42** Gedurende twintig weken is elke week de lengte van een zonnebloem gemeten. Deze metingen passen bij de formule $L = \frac{400}{1 + 399 \cdot 0,55^t}$. In deze formule is L de lengte van de zonnebloem in centimeters en t de tijd in weken vanaf de eerste meting.
- Bereken hoeveel centimeter de zonnebloem is gegroeid in de tiende week.
 - Beredeneer met behulp van de formule dat L toeneemt als t steeds groter wordt.
 - De grafiek van L nadert een grenswaarde. Beredeneer met behulp van de formule hoe groot deze grenswaarde is.
 - Geef de praktische betekenis van de grenswaarde die je bij opdracht c hebt gevonden.



X9 Wielrennen

Om na te gaan of een wielrenner een bepaalde snelheid kan halen, kijkt men naar het vermogen van de wielrenner. Het vermogen is de energie die de wielrenner per seconde levert. Men gebruikt vaak de formule $P = (k \cdot v^2 + 4) \cdot v$. Hierin is v de snelheid in meters per seconde, is P het vermogen in watt en is k een getal dat persoonsgebonden is maar onder andere ook te maken heeft met de luchtweerstand.

- Daan is wielrenner en hij weet dat hij een vermogen kan leveren van 190 watt en daarmee op zijn huidige fiets een snelheid van 9,2 m/s kan halen.
Ga na dat $k \approx 0,2$.
- Leg met behulp van de formule uit wat het effect van een kleinere k -waarde is op het te leveren vermogen om een bepaalde snelheid te halen.
- Voor Gijs geldt $k = 0,23$ en hij kan een vermogen van 250 watt leveren.
Bereken welke snelheid in km per uur hij kan halen.
- Met behulp van een nieuwe fiets en nieuwe fietskleding kan Gijs zijn k -waarde met 25% verlagen. Nog steeds levert hij een vermogen van 250 watt.
Onderzoek met hoeveel procent zijn maximaal haalbare snelheid toeneemt.

X10 Gebruikers van Facebook

Het aantal actieve gebruikers van Facebook steeg de eerste jaren van zijn bestaan spectaculair. Op 1 december 2005 waren er 5,5 miljoen actieve gebruikers. 43 maanden later waren dat er al 244 miljoen. Neem aan dat er in deze periode bij benadering sprake was van exponentiële groei.

- Bereken voor deze periode het groeipercentage per maand.
- In de maanden na 1 juli 2009 groeide het aantal gebruikers niet exponentieel maar bij benadering lineair, van 244 miljoen op 1 juli 2009 tot 493 miljoen op 1 augustus 2010.
Bereken het aantal actieve gebruikers op 1 december 2013 als de groei zich op deze manier zou voortzetten.
- Al in 2011 werd er voorspeld dat de groei zo niet door zou gaan.

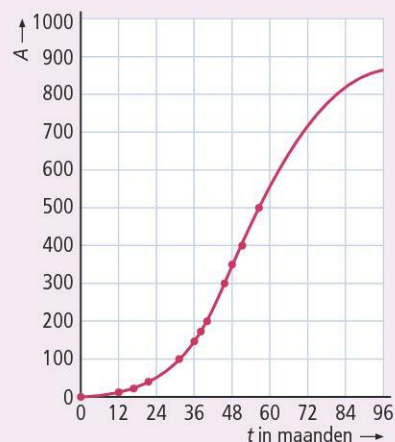
In de figuur zie je een grafiek die bij de voorspelling past.

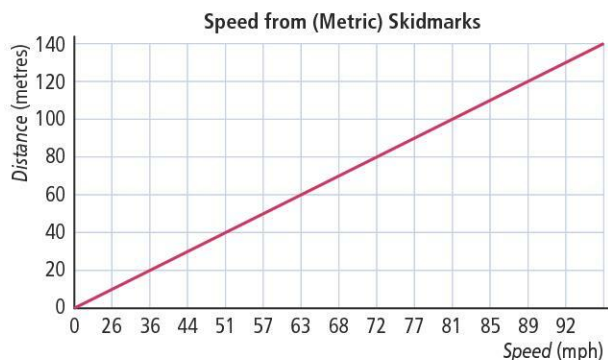
Bij de grafiek hoort de formule $A = \frac{4500}{5 + 310 \cdot 0,926^t}$

Hierin is A het aantal actieve gebruikers in miljoenen en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 december 2005.

Beredeneer aan de hand van de formule dat het aantal actieve gebruikers toeneemt en naar welke grenswaarde dit aantal nadert.

(Ontleend aan CE havo wiskunde A pilot 2015, tijdvak 1)



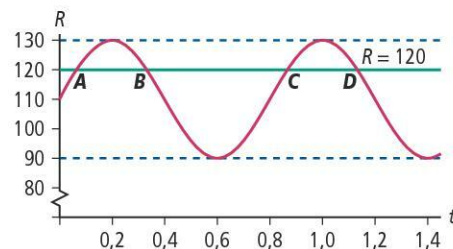


- 43** In een oud instructieboekje van de verkeerspolitie van Londen staat een grafiek over het verband tussen de snelheid v in mijl per uur (mph) en de lengte r van een remweg in meters. Op de grafiek liggen onder andere de punten $(44, 30)$ en $(89, 123)$.

- Hoewel de grafiek een rechte lijn is, is er toch geen recht evenredig verband is tussen v en r . Toon dat aan.
- De formule die wel bij de grafiek hoort is van de vorm $r = c \cdot v^{2,003}$. Bereken de waarde van c in twee decimalen nauwkeurig.
- Druk v uit in r .

- 44** Je ziet de grafiek bij een periodiek verschijnsel.

- Bereken de evenwichtswaarde, de amplitude en de periode van de periodieke grafiek.
- De periodieke grafiek snijdt de lijn $R = 120$ in het punt $A(0,07; 120)$. Bereken de coördinaten van de punten B , C en D .



- 45** De bevolkingsdichtheid is het gemiddelde aantal inwoners per km^2 . In de tabel staat voor een aantal jaren de bevolkingsdichtheid van een gemeente. Tussen 1985 en 2005 nam de bevolkingsdichtheid exponentieel toe.

- Bereken met welke groeifactor per jaar de bevolkingsdichtheid tussen 1985 en 2005 groeide.
- Na 2015 neemt de bevolkingsdichtheid nagenoeg lineair toe. Schat met behulp van lineair extrapoleren de bevolkingsdichtheid in 2028.

jaar	bevolkingsdichtheid
1985	415
1990	436
1995	458
2000	481
2005	505
2010	533
2015	561
2020	594

- 46** Het aantal vakantieboekingen via internet is in de eerste 10 jaar van deze eeuw heel snel toegenomen. Zo bleek dat in 2004 in Nederland bijna de helft van alle reizen via internet was geboekt. In 2003 was dit nog maar 34%. Mede op grond van deze uitkomsten heeft men de volgende formule opgesteld, die het percentage internetboekingen goed benadert:

$$P = \frac{165}{2 + 28 \cdot 0,47^t}$$

In deze formule is t in jaren, waarbij $t = 0$ correspondeert met het jaar 2000. P is het percentage van alle vakanties dat in dat jaar is geboekt via internet.

- Beredeneer hoeveel procent van de vakanties volgens de formule voor P op den duur via internet zal worden geboekt.
- De grafiek van P stijgt steeds minder snel voor waarden van t die groter zijn dan 5.
Wanneer het percentage P in een kalenderjaar minder dan 1 is toegenomen vergeleken met het voorafgaande jaar, dan zeg je dat het aantal internetboekingen in dat kalenderjaar niet noemenswaardig meer stijgt.
Onderzoek in welk jaar volgens de formule het aantal internetboekingen voor het eerst niet meer noemenswaardig stijgt.

- 47** Een vliegend voorwerp heeft een bepaalde snelheid v in meter per seconde nodig om in de lucht te blijven. De factoren die hierbij een rol spelen zijn het gewicht G in kg en het vleugeloppervlak S in m^2 . Tussen G en S bestaat het

$$\text{verband } v = \sqrt{\frac{G}{0,03675 \cdot S}}$$

Een voorwerp vliegt met een snelheid van 20 meter per seconde. Onderzoek welk verband er bestaat tussen G en S voor dit voorwerp.



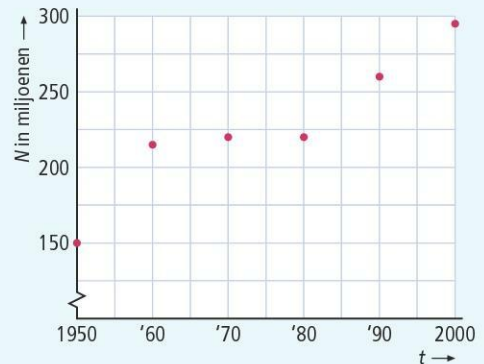
Theorie

Trend, trendlijn

Een grafiek kan een stijgende of een dalende trend vertonen. Bij een trend kijk je niet naar kleine schommelingen, maar naar het verloop van de grafiek over langere tijd. Bij een duidelijke trend kun je een voorspelling doen over het verdere verloop van de grafiek. De lijn die je daarbij gebruikt, heet de trendlijn. Bij het tekenen van een trendlijn zorg je ervoor dat ongeveer de helft van de grafiek boven en de helft van de grafiek onder de trendlijn ligt.



- S1** In het assenstelsel is voor een aantal jaren weergegeven hoe groot de bevolking van een land is.
- Teken een trendlijn die hierbij past.
 - Stel een formule op bij de trendlijn die je in opdracht a hebt getekend.
 - Hoeveel procent wijkt het aantal inwoners in 1960 af van de trendlijn?



Theorie

Evenredig verband, omgekeerd evenredig verband

Twee variabelen heten recht evenredig als geldt:

als de ene variabele k keer zo groot wordt, dan wordt de andere variabele ook k keer zo groot.

Zijn de variabelen x en y , dan heet y recht evenredig, of

kortweg evenredig met x . Er geldt $\frac{y}{x} = c$, maar ook $y = c \cdot x$.

Twee variabelen heten omgekeerd evenredig als geldt: als de ene variabele k keer zo groot wordt, dan wordt de andere variabele k keer zo klein. Zijn de variabelen x en y , dan geldt $x \cdot y = c$

ofwel $y = \frac{c}{x}$ ofwel $x = \frac{c}{y}$

- S2**
- Ga van iedere tabel na of deze bij een evenredig verband, een omgekeerd evenredig verband of geen van beide horen.
 - Stel bij beide tabellen een formule op.

x	2	5	10	15	50
y	4	10	20	30	100

A

p	3	6	15	30	60
q	80	40	16	8	4

B

Theorie

Periodieke verschijnselen, periodieke grafieken, periode, evenwichtswaarde, amplitude

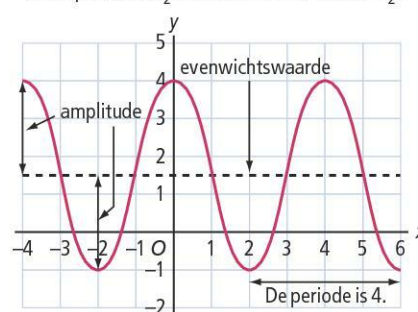
Verschijnselen die zichzelf steeds herhalen heten periodieke verschijnselen. De bijbehorende grafieken heten periodieke grafieken.

De evenwichtswaarde is de gemiddelde hoogte van de grafiek.

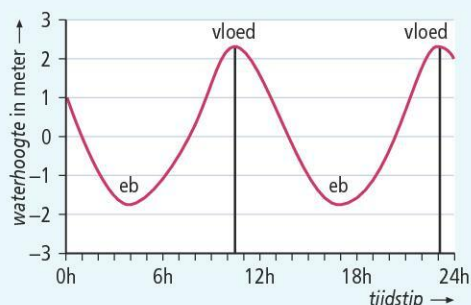
De amplitude is de grootste afwijking van de grafiek ten opzichte van de evenwichtswaarde.

De periode is de kleinste afstand waarover je een periodieke grafiek horizontaal kunt verschuiven zodat hij weer samenvalt met zichzelf.

De amplitude is $2\frac{1}{2}$. De evenwichtswaarde is $1\frac{1}{2}$.



- S3 De grafiek geeft de waterhoogte in Vlissingen. Bereken de evenwichtswaarde, de amplitude en de periode.



Vaardigheid

Je kunt lineair interpoleren en extrapoleren.

Het vinden van een tussenliggende waarde in een grafiek of in een tabel heet interpoleren. Het vinden van een verder gelegen waarde in een tabel of in een grafiek heet extrapoleren.

Als een grafiek bij een tabel op een bepaald gedeelte vrijwel een rechte lijn is, dan kun je een tussenliggende waarde schatten met lineair interpoleren en een verder gelegen waarde met lineair extrapoleren.

Voorbeeld

Op 1 januari 2005 waren er 850 478 eenmanszaken in een stad. Op 1 januari 2020 was dit aantal toegenomen tot 1 107 214. Schat met lineair interpoleren het aantal eenmanszaken op 1 januari 2014.

Oplossing

In 15 jaar is het aantal eenmanszaken met $1\,107\,214 - 850\,478 = 256\,736$ toegenomen. Dat komt overeen met $256\,736 : 15 \approx 17\,116$ per jaar. Op 1 januari 2014 waren er naar schatting $850\,478 + 9 \times 17\,116 \approx 1\,004\,520$ eenmanszaken.

- S4 Op 1 januari 2010 woonden er 4895 getrouwde stellen in een stad. Op 1 januari 2021 was dit aantal afgenomen tot 4723. Schat met lineair interpoleren en extrapoleren het aantal getrouwde stellen op 1 januari 2018 en op 1 januari 2026.

Vaardigheid

Je kunt een exponentiële formule herleiden tot een logaritmische formule en een logaritmische formule herleiden tot een exponentiële formule.

Om een exponentiële formule te herleiden tot een logaritmische formule gebruik je de regel: uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$.

Om een logaritmische formule te herleiden tot een exponentiële formule gebruik je de regel: uit ${}^g\log(a) = t$ volgt $a = g^t$.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $y = 60 - 3 \cdot 5^x$.
Druk x uit in y .

Oplossing

$$60 - 3 \cdot 5^x = y \quad \text{links en rechts verwisseld}$$

$$-3 \cdot 5^x = y - 60 \quad \text{links en rechts } -60$$

$$5^x = \frac{y - 60}{-3} \quad \text{links en rechts : } -3$$

$$x = {}^5\log\left(\frac{y - 60}{-3}\right) \quad a = g^t \text{ dus } {}^g\log(a) = t$$

$$\text{ofwel } x = {}^5\log\left(-\frac{1}{3}y + 20\right)$$

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $N = {}^{12}\log(8 + 2t)$.
Druk t uit in N .

Oplossing

$${}^{12}\log(8 + 2t) = N \quad \text{links en rechts verwisseld}$$

$$8 + 2t = 12^N \quad {}^g\log(a) = t \text{ dus } a = g^t$$

$$2t = 12^N - 8 \quad \text{links en rechts } -8$$

$$t = \frac{12^N - 8}{2} \quad \text{links en rechts : } 2$$

$$\text{ofwel } t = \frac{1}{2} \cdot 12^N - 4$$

S5 Druk p uit in q .

a $q = {}^6\log(p) - 8,5$

d $q = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-p} - 14$

b $q = -4 \cdot 9^p + 6$

e $q = {}^{0,3}\log(6p + 2)$

c $q = 15 + 4 \cdot {}^9\log(p + 2)$

f $q = 1,9\frac{1}{4}^{p-9} + 4$

Vaardigheid

Je kunt lineaire formules en machtsformules herleiden.

Een formule herleiden of herschrijven betekent dat je de formule in een andere vorm schrijft. Dat doe je ook wanneer je de ene variabele moet uitdrukken in de andere.

Bij het herleiden van formules van de vorm $y = c \cdot x^a$ gebruik je de rekenregels voor machten. Met behulp

van de regel 'uit $x^a = c$ volgt $x = c^{\frac{1}{a}}$ ' kun je formules met machten herleiden.

$$g^p \cdot g^q = g^{p+q}$$

$$g^{-n} = \frac{1}{g^n}$$

$$\frac{g^p}{g^q} = g^{p-q}$$

$$g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$$

$$(g^p)^q = g^{p \cdot q}$$

$$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$$

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $N = 2(t + 6) - 4(8 - 2t)$
Herleid de formule tot de vorm $t = aN + b$.

Oplossing

$$\begin{array}{ll} N = 2t + 12 - 32 + 8t & \text{haakjes weggewerkt} \\ N = 10t - 20 & \text{rechterlid herleid} \\ 10t - 20 = N & \text{links en rechts verwisseld} \\ 10t = N + 20 & \text{links en rechts} + 20 \\ t = \frac{N + 20}{10} & \text{links en rechts : 10} \\ \text{ofwel } t = \frac{1}{10}N + 2 & \end{array}$$

Voorbeeld 2

Herleid $a = 8 \cdot s^{\frac{1}{6}}$ waarbij je s uitdrukt in A .

Oplossing

$$\begin{array}{ll} 8 \cdot s^{\frac{1}{6}} = A & \text{links en rechts verwisseld} \\ s^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{8}A & \text{links en rechts} \times \frac{1}{8} \\ s = \left(\frac{1}{8}A\right)^{\frac{1}{6}} & \text{uit } x^a = c \text{ volgt } x = c^{\frac{1}{a}} \\ s = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{6}} \cdot (A)^{\frac{1}{6}} & (a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p \\ s \approx 0,1682 \cdot A^{\frac{6}{7}} & \end{array}$$

S6 Druk x uit in y .

a $y - 3 = 6(x + 2) + 9$

c $y = \frac{1}{6} \cdot x^7$

b $y = 1,1 \cdot x^{0,9}$

d $y = \frac{4x - 12}{3} + 10$

Vaardigheid**Je kunt redeneren met formules.**

Door na te gaan hoe een formule is opgebouwd, kun je beredeneren hoe de uitkomst van een formule verandert.

Je gebruikt bijvoorbeeld de volgende eigenschappen.

- g^t en ${}^g\log(t)$ nemen toe als $g > 1$ en t groter wordt.
- g^t en ${}^g\log(t)$ nemen af als $g < 1$ en t groter wordt.
- Bij een vaste positieve waarde van c en $n > 0$ neemt $\frac{c}{n}$ af als n groter wordt.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $K = 18 + 3 \cdot 0,1^A$
Beredeneer of de waarde van K toeneemt of afneemt als A steeds groter wordt en naar welke grenswaarde K nadert.

Oplossing

Als A toeneemt, dan neemt $0,1^A$ af naar 0, want $0,1 < 1$.
Daardoor neemt $3 \cdot 0,1^A$ ook af en nadert naar 0 en
 $18 + 3 \cdot 0,1^A$ nadert naar 18.
De waarde van K neemt af en de grenswaarde is 18.

S7 Beredeneer of de waarde van N toeneemt of afneemt als t steeds groter wordt en naar welke grenswaarde N nadert.

a $N = 5 + 6 \cdot 0,8^t$

c $N = 9 - {}^3\log(t + 9)$

b $N = -10 + \frac{8}{t^2}$

d $N = 33 + \frac{6}{3^t + 8}$

T1 Druk t uit in N .

- a** $N = -15 + {}^{1,2}\log(t)$ **d** $N = 8 + 6^{t+4}$
b $N = \frac{2}{3} \cdot t^4$ **e** $N = \log(t - 9) - 3$
c $N = 18 - 3(t + 8) + 4t$ **f** $N = -4 \cdot 3^{8t-9} + 7$

T2 In de tabel staat het gemiddelde gewicht van kinderen in de leeftijd tot vijf jaar.

leeftijd in jaren	1	2	3	4	5
gemiddeld gewicht in kg	10,0	13,3	14,9	17,2	19,5

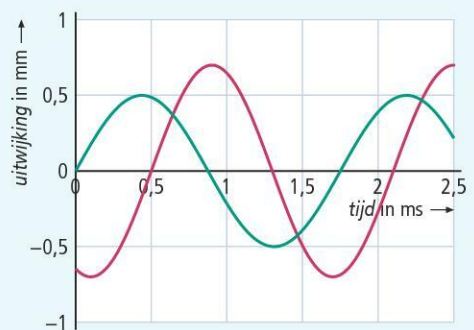
- a** Bereken met lineair interpoleren het gemiddelde gewicht van een kind van 3 jaar en 9 maanden.
b Bereken met lineair extrapoleren het gemiddelde gewicht van een kind van 16 jaar. Gebruik de gegevens bij de leeftijden 4 jaar en 5 jaar.
c Waarom is je antwoord van opdracht b niet realistisch?

T3 Een inwoner van de gemeente Westerkwartier betaalde in 2021 € 0,25 per kg gft-afval en € 0,45 per kg restafval.

- a** Leg uit dat het verband tussen het gewicht van het gft-afval en het daarvoor te betalen bedrag recht evenredig is.
b Naast de bedragen per kg gft- en restafval, betaalde men in 2021 een vast bedrag van € 164,00.
 Stel een formule op bij het verband tussen het totale bedrag voor afval B in euro's per jaar, de hoeveelheid gft-afval g en de hoeveelheid restafval r , beide in kg per jaar.
c Eva woont in de gemeente Westerkwartier en in 2021 had ze 435 kg restafval.
 Druk voor Eva g uit in B .

T4 Als een stemvork in trilling wordt gebracht, voeren de uiteinden een trillende beweging uit die periodiek is. Je ziet de grafieken die horen bij de bewegingen van twee stemvorken. In de grafiek is de *uitwijking* in millimeter uitgezet en de *tijd* in milliseconden.

- a** Bereken de evenwichtswaarde, de amplitude en de periode van de rode grafiek.
b De frequentie van een stemvork is het aantal trillingen per seconde. De toon is hoger bij een hogere frequentie. Als de amplitude groter wordt, wordt het geluid harder. Klinkt de stemvork die bij de groene grafiek hoort harder of zachter dan de stemvork die bij de rode grafiek hoort?
c Bij welke grafiek hoort de stemvork met de hoogste toon?



- T5** Een groeimodel dat de gewichtstoename van courgettes bij benadering weergeeft is $G = \frac{1900}{1,3 + 62 \cdot 0,68^t}$

Hierin is G het gemiddelde gewicht van courgettes in grammen en is t de tijd in weken gerekend vanaf het moment dat de courgettes een gewicht van 30 gram hebben.

- Laat met een berekening zien dat de formule inderdaad een startgewicht van ongeveer 30 gram geeft.
- Bereken hoe uit de formule volgt dat het gewicht toeneemt in de tijd.
- Bereken met behulp van de formule hoe groot de grenswaarde van het gewicht van courgettes ongeveer is.



- T6** Bij een groeiproces hoort de formule $A = 600 \cdot 0,8^t$ met t de tijd in jaren.

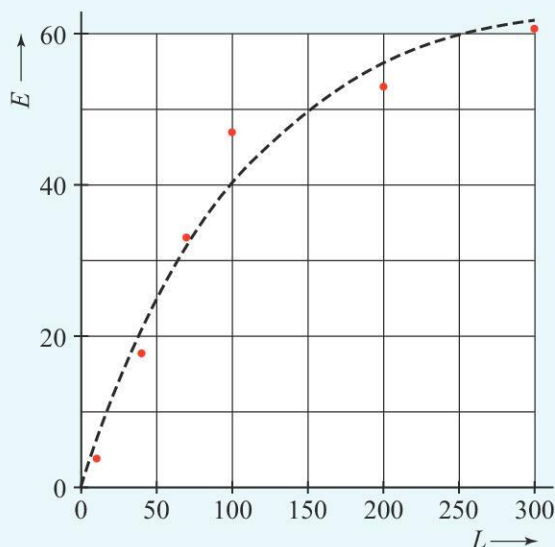
- Na hoeveel jaar is de beginhoeveelheid gehalveerd?
- Druk t uit in A .
- Controleer met de formule van opdracht b je antwoord van opdracht a.

- T7** Larven die grote schade toebrengen aan gewassen kunnen milieuvriendelijk bestreden worden met sluipwespen. Een sluipwesp legt een eitje in de larve waardoor de larve uiteindelijk dood gaat. Een onderzoeker wilde weten hoeveel larven één sluipwesp maximaal per dag kan bestrijden. Om dit te onderzoeken werd één sluipwesp in een grote afgesloten ruimte met larven gezet. Na één dag werd geteld hoeveel larven L er in totaal in de ruimte waren. Ook werd geteld hoeveel larven E een eitje bevatten. De resultaten van zes experimenten zie je in de figuur.

Bij 100 larven blijken er 46 te zijn met een eitje.

- Hoe kun je in de figuur zien dat het verband tussen E en L voor de waarden van L van 0 tot 100 recht evenredig is?
- Geef een formule voor het verband tussen E en L voor de waarden van L van 0 tot 100.
- Het verband tussen E en L kan voor grotere waarden van L beter benaderd worden door de formule $E = 64 \cdot (1 - 0,6^{0,02L})$. In de figuur is de grafiek bij dit verband gestippeld.
Hoeveel procent wijkt het aantal volgens deze formule bij $L = 100$ af van het werkelijke aantal?
- Volgens de formule kan het aantal larven met eitjes E niet boven een bepaalde grenswaarde uitkomen.
Bereken hoe groot deze grenswaarde is.

(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2009, tijdvak 2)



Hoe oud zijn historische vondsten?

In 1940 werd in een grot bij de plaats Lascaux in het Franse departement Dordogne een groot aantal rotswandschilderingen ontdekt, één ervan zie je hiernaast. Vlak na de vondst maakten archeologen een ruwe schatting dat de tekeningen 10 000 tot 20 000 jaar oud waren. Er ontstond behoefte aan een methode waarmee de ouderdom van opgegraven voorwerpen en beenderen nauwkeuriger kon worden bepaald. Dat werd de C14-dateringsmethode. C14 is een radioactieve variant van koolstof dat ieder levend organisme bevat. Nadat het organisme is doodgegaan, daalt de hoeveelheid C14 langzaam door radioactief verval. Na ongeveer 5730 jaar is er nog 50% van de oorspronkelijke hoeveelheid C14 over.

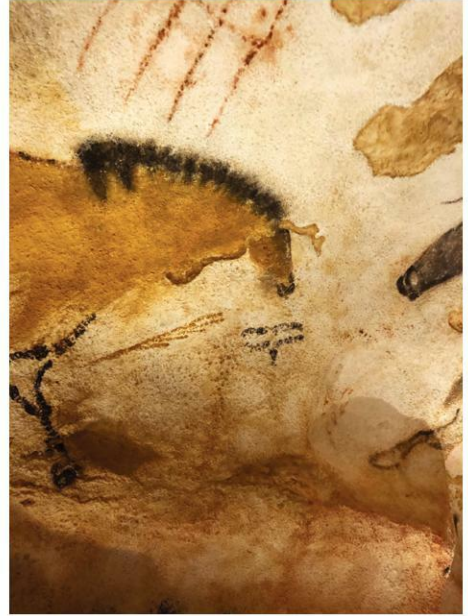
Opdracht

Je mag aannemen dat radioactief verval exponentieel verloopt. Als de halveringstijd gelijk is aan 5730 jaar, dan geldt $g^{5730} = \frac{1}{2}$ met g de groeifactor per jaar.

Ga na dat $g \approx 0,99988$.

In 1950 is gemeten dat in een van de houtskoollijnen van de tekeningen nog 14,5% van de hoeveelheid C14 aanwezig was.

Bereken hoe oud de tekening toen was.



Onbekende Da Vinci gevonden

In 2010 is in een Zwitserse bankkluis een schilderij (rechter afbeelding) opgedoken dat mogelijk door Leonardo da Vinci (1452 - 1519) is gemaakt.

Het is een portret van markiezin Isabella d'Este, die als begunstiger van de vrije kunsten een hoofdrolspeelster is in de Renaissance. In het Louvre hangt een tekening uit 1499 van deze dame (linker afbeelding) en er zijn brieven bekend waarin D'Este vraagt om een geschilderd portret.

De vraag is: Heeft Da Vinci het portret geschilderd? De argumenten hiervoor zijn: het gebruikte pigment is hetzelfde als dat in ander werk van Leonardo, precies volgens recept dat Leonardo in zijn Traktaat van de schilderkunst voorschrijft. Toch is er twijfel. Het belangrijkste argument tegen: het is op doek, terwijl alle nog bekende werken van Leonardo geschilderd zijn op hout.



Opdracht

Er is gemeten dat de aanwezige hoeveelheid C14 ligt tussen 93,56% en 95,73%.

- Bereken hoe oud het schilderij is.
- Kan het schilderij toegeschreven worden aan Leonardo da Vinci?

Vaardigheden 10

SE

CE

K

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Veranderingen
- Formules herleiden
- Rijen
- Systematisch tellen



Veranderingen

Theorie

De gemiddelde verandering van een functie f over het interval $[a, b]$ is: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

De gemiddelde verandering van $f(x)$ over het interval $[a, b]$ is ook de richtingscoëfficiënt, ofwel helling, van de lijn door het beginpunt en het eindpunt op dat interval.

In tijd-afstand situaties is de gemiddelde verandering gelijk aan de gemiddelde snelheid.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $y = x^3 - 5$
Bereken de gemiddelde verandering van y over het interval $[-1, 2]$.

Oplossing

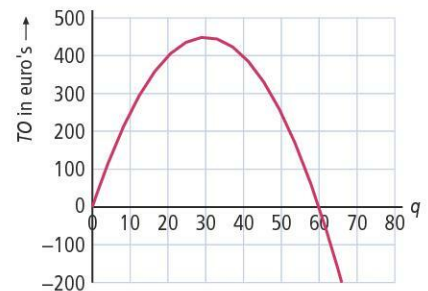
Als $x = -1$ is $y = -6$.

Als $x = 2$ is $y = 3$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - (-6)}{2 - (-1)} = \frac{9}{3} = 3.$$

De gemiddelde verandering is 3.

- 1 Gegeven is de formule $y = (3 - \frac{1}{2}x)^2$.
 - a Bereken y als $x = 1$ en als $x = 4$.
 - b Laat zien dat Δy over het interval $[1, 4]$ gelijk is aan $-5,25$.
 - c Bereken de gemiddelde verandering over het interval $[1, 4]$.
- 2 Bij de verkoop van een bepaald product geldt voor de totale opbrengst TO in euro's de formule $TO = 30q - \frac{1}{2}q^2$, waarbij q het aantal verkochte eenheden is. In het assenstelsel zie je de grafiek.
 - a Bij welke aantallen eenheden is de grafiek afnemend stijgend?
 - b Bereken de gemiddelde opbrengst over het interval $[30, 40]$.
 - c Geef met behulp van opdracht b de gemiddelde opbrengst over het interval $[20, 30]$.
- 3 De weekopbrengst R van een fabriek hangt af van het aantal ingezette machines Q . Het verband tussen Q en R wordt beschreven door de formule $R = -Q^3 + 25Q^2 + 49Q$. Hierbij is R uitgedrukt in duizenden euro's. Er staan 16 machines in de fabriek waarvan er 13 in bedrijf zijn.
 - a Met hoeveel euro neemt de weekomzet toe als twee machines extra in bedrijf genomen worden? En als alle machines draaien?
 - b Bereken voor de in opdracht a genoemde situaties de gemiddelde omzetstijging $\frac{\Delta R}{\Delta Q}$ in duizenden euro's per machine.
 - c Geef de betekenis van de uitkomsten bij opdracht b.



Theorie

De helling van een grafiek in een punt kun je grafisch bepalen door het tekenen van de raaklijn aan de grafiek in dit punt. De helling van de raaklijn is in dat punt is gelijk aan de helling van de grafiek.

Voorbeeld

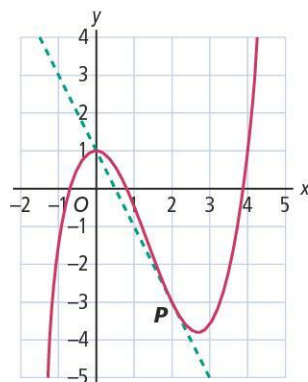
Benader grafisch de helling van de grafiek hiernaast in het punt $P(2, -3)$.

Oplossing

- 1 Teken in punt P een raaklijn.
- 2 De raaklijn gaat door de punten $A(0, 1)$ en $B(3, -5)$.
- 3 De helling van de lijn door A en B is gelijk aan

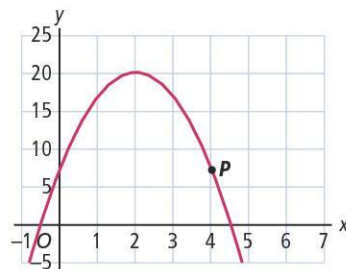
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-5 - 1}{3 - 0} = -2.$$

De helling van de grafiek in punt P is ongeveer -2 .



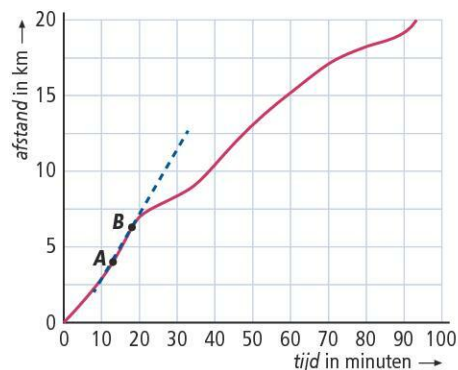
- 4 Benader grafisch de helling van de grafiek in het voorbeeld in het punt $Q(-1, -1\frac{1}{2})$.

- 5
- a Benader grafisch de helling van de grafiek hiernaast in het punt P .
 - b Geef met behulp van je antwoord uit opdracht a de helling van de grafiek in het punt met $x = 0$.
 - c Teken de lijn m door de punten $(0, 0)$ en $(4, 20)$.
 - d Bepaal grafisch de coördinaten van het punt van de gegeven grafiek waarin de helling gelijk is aan de helling van lijn m .



Bij een tijd-afstand grafiek betekent de helling in een punt van de grafiek de snelheid op dat moment.

- 6 De getekende tijd-afstand grafiek hoort bij Ineke die 20 km hard heeft gelopen. De snelheid van Ineke op het moment dat ze 15 minuten gelopen heeft, is gelijk aan de helling van de lijn door de punten A en B .
- a Ga na dat de snelheid van Ineke op dat moment ongeveer 0,33 km per minuut ofwel bijna 20 km per uur is.
 - b Benader grafisch de snelheid van Ineke op het moment $t = 30$.
Geef je antwoord in km per uur en in meter per seconde.



Formules herleiden

Theorie

Veel formules kun je herleiden met de balansmethode: links en rechts van het $=$ -teken voer je dezelfde bewerking uit. Deze methode gebruik je ook bij het oplossen van lineaire vergelijkingen. Voor het oplossen van niet-lineaire vergelijkingen mag je altijd gebruikmaken van je rekenmachine.

Voorbeeld

Herleid de formule $4q + 5(2p + 6) = 60$ zodat q wordt uitgedrukt in p .

Oplossing

$$\begin{array}{ll} 4q + 10p + 30 = 60 & \text{haakjes weggewerkt} \\ 4q + 10p = 30 & \text{links en rechts } - 30 \\ 4q = -10p + 30 & \text{links en rechts } - 10p \\ q = -2,5p + 7,5 & \text{links en rechts } : 4 \end{array}$$

- 7 Herleid de volgende formules waarbij y wordt uitgedrukt in x .

a $5x + 2y + 8 = 0$ c $-2(3 - x^2 + y) = y + x^2$

b $2(y + 5) = x$ d $2(x + 2y) - (2 - x) = y$

- 8 Voor actieve volwassen mannen bestaat een formule om de energiebehoefte te bepalen om 'op gewicht' te blijven $E_b = 33,6 \cdot G$, met E_b de dagelijkse energiebehoefte in kilocalorieën en G het gewicht in kg.

De gewichtstoename T van een actieve volwassen man op een bepaalde dag hangt af van zijn energiebehoefte E_b op die dag. Er geldt: $T = 0,000128 \cdot (5000 - E_b)$, hierin is T de gewichtstoename in kg per dag.

Wanneer deze formule gecombineerd wordt met de formule $E_b = 33,6 \cdot G$, ontstaat een formule van T uitgedrukt in G . Herleid deze nieuwe formule tot de vorm $T = a \cdot G + b$.

(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2012, tijdvak 1)

Theorie

Bij het herleiden van gebroken formules gebruik je de regels:

1 Uit $\frac{A}{B} = C$ volgt $\frac{A}{C} = B$ en $A = B \cdot C$

2 Uit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ volgt $A \cdot D = B \cdot C$

Voorbeeld

Herleid de formule $a + 5 = \frac{20}{b - 8}$ tot een formule waarmee je b uitdrukt in a .

Oplossing

$$\begin{array}{ll} (a + 5)(b - 8) = 20 & \text{links en} \\ & \text{rechts } \times (b - 8) \\ b - 8 = \frac{20}{a + 5} & \text{links en} \\ & \text{rechts } : (a + 5) \\ b = \frac{20}{a + 5} + 8 & \text{links en rechts } + 8 \end{array}$$

- 9 Herleid de volgende formules waarbij je b uitdrukt in a .

a $a + 1 = \frac{7}{2b}$ c $\frac{5}{b} = \frac{-2}{4 - a}$

b $\frac{5}{b + 3} = \frac{a - 2}{10}$ d $\frac{3}{2b} - 5 = 4 - 6a$

Theorie

Bij het herleiden van wortelformules gebruik je de regels:

1 Uit $\sqrt{A} = B$ volgt $A = B^2$

2 $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$

3 $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$

Voorbeeld

Herleid $2 + \sqrt{a-4} = 2b$ waarbij je a uitdrukt in b .

Oplossing

$$\begin{array}{ll} \sqrt{a-4} = 2b-2 & \text{links en rechts } -2 \\ a-4 = (2b-2)^2 & \sqrt{A} = B \text{ dus } A = B^2 \\ a = (2b-2)^2 + 4 & \text{links en rechts } +4 \end{array}$$

10 Herleid de volgende formules waarbij je p uitdrukt in q .

a $q = -\sqrt{2p+5}$

c $6 = 3\sqrt{p \cdot q} - 3$

b $2q - 1 = \sqrt{2p-6}$

d $5\sqrt{p+2} = \sqrt{q}$

11 Hoe hoger je staat, hoe verder je kunt kijken. Voor de kijkafstand K geldt bij onbelemmerd zicht en vlak terrein bij benadering de formule $K = \sqrt{12,7 \cdot h}$.

Hierbij is K de kijkafstand in km en h de kijkhoogte in meter.

a Bereken de kijkafstand als je 63 m hoog staat.

b Bereken de kijkhoogte als je 34 km ver kunt kijken.

c Om de hoogte van een uitkijktoren te berekenen bij een gewenste kijkafstand is het handiger om h uit de drukken in K . Herleid de formule zo, dat h wordt uitgedrukt in K .

Rijen

Theorie

Een rij waarvan je een term vindt door bij de voorafgaande term een constante a op te tellen, heet een rij bij een lineair verband.

Een recursieve formule van een dergelijke rij is van de vorm $u(n+1) = u(n) + a$ met $u(0) = b$ als eerste term.

Een bijbehorende directe formule is $u(n) = b + a \cdot n$.

Voorbeeld

De rij 23, 25, 27, 29, ... heeft beginterm $u(0)$.

Stel een recursieve formule en een directe formule op bij deze rij.

Oplossing

u is een rij bij een lineair verband met $u(0) = 23$. Er moet steeds 2 bij de vorige term opgeteld worden om de volgende term te krijgen.

Recursieve formule:

$$u(n+1) = u(n) + 2 \text{ met } u(0) = 23$$

$$\text{Directe formule: } u(n) = 23 + 2n$$

12 Hieronder staan twee rijen die horen bij een lineair verband. De eerste term heeft steeds rangnummer 0.

u : 12, 17, 22, 27, 32, ...

v : 20, 17, 14, 11, ...

a Geef bij elke rij een recursieve formule en een directe formule.

b Bereken van elke rij de tiende term.

Theorie

Een rij waarvan je een term vindt door de voorafgaande term met een constant getal g te vermenigvuldigen, heet een rij bij een exponentieel verband.

Een recursieve formule van een dergelijke rij is van de vorm $u(n+1) = u(n) \cdot g$ met beginterm $u(0) = b$ en groeifactor g .

Een bijbehorende directe formule is $u(n) = b \cdot g^n$.

Voorbeeld

Gegeven is de rij v bij een exponentieel verband door 81, 27, 9, 3, ... met $v(1) = 81$.

Geef een recursieve formule en een directe formule bij deze rij.

Oplossing

De rij v is een rij bij een exponentieel verband met groeifactor $g = \frac{1}{3}$.

$$v(0) = v(1) \cdot 3 = 81 \cdot 3 = 243.$$

Een recursieve formule is

$$v(n+1) = \frac{1}{3} \cdot v(n) \text{ met } v(0) = 243.$$

Een directe formule is $v(n) = 243 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

- 13 a** Gegeven is de rij v : 100, 10, 1, ...
Geef een recursieve formule en een directe formule bij v .
Neem $v(1) = 100$.

- b** Geef een directe formule bij de rij $u_{n+1} = -\frac{u_n}{5}$ met $u_1 = 150$.

- 14** In januari 2017 krijgt Petra € 50,- kleedgeld per maand en elke volgende maand krijgt ze er € 1,50 bij. Het bedrag aan kleedgeld dat ze ontvangt kun je met een rij $u(n)$ beschrijven, waarbij $u(0) = 50$ het kleedgeld is dat ze in januari krijgt en n het aantal maanden na januari 2017.

- a** Waarom is rij $u(n)$ een rij bij een lineair verband?
b Geef een recursieve formule en een directe formule voor de rij $u(n)$.
c Bereken het totale bedrag aan kleedgeld dat zij in het eerste halfjaar van 2017 ontvangt.
d Gerdine krijgt in januari 2017 ook € 50,- kleedgeld en zij krijgt er elke volgende maand 2% bij. Het bedrag aan kleedgeld dat zij krijgt, kun je beschrijven met een rij bij een exponentieel verband met recursieve formule $v(n+1) = v(n) \cdot 1,02$ waarbij $v(0) = 50$.
Geef een directe formule voor deze rij.

Systematisch tellen

- 15** In Nederland zijn ongeveer 24,7 miljoen bankpassen in omloop. Elke bankpas is beveiligd met een pincode bestaande uit vier cijfers, elk te kiezen uit 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9. Daarbij mag een cijfer vaker voorkomen.

- a** Hoeveel verschillende pincodes bestaan er?
b Ga ervan uit dat alle pincodes even vaak voorkomen. Hoeveel bankpassen hebben naar verwachting dezelfde pincode als jouw bankpas?
c Hoeveel pincodes kun je maken met de cijfers 2 en 5 als die er allebei in moeten voorkomen?



Theorie

Je kunt op verschillende manieren een telprobleem oplossen.

- door alle mogelijkheden systematisch uit te schrijven of
- door gebruik te maken van een (deel van) een boomdiagram, een rooster, een wegendiagram, schema of tabel.

Soms moet je deelresultaten combineren.

- 16** Een gezelschap van vier mannen en vier vrouwen heeft zojuist met elkaar gedineerd. Nu moeten drie personen aangewezen worden die de afwas zullen doen. Bereken het aantal mogelijke drietallen met twee mannen en één vrouw.
- 17** Je gooit met een viervlaksdobbelsteen (1 tot en met 4) en een zesvlaksdobbelsteen (1 tot en met 6). Je noteert de som van de aantallen ogen.
- Op hoeveel manieren kun je het resultaat 8 krijgen?
 - Om de uitkomsten te noteren kun je gebruikmaken van een schema. Het schema is al voor een deel ingevuld. Hoeveel uitkomsten hebben als resultaat 5 of groter?
 - Stel je berekent het verschil tussen de aantallen ogen die je gegooit hebt. Daarbij trek je het kleinste aantal van het grootste aantal af. Bij een gelijk aantal ogen is het verschil 0. Welk verschil komt het meest voor? En welk verschil het minst?

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	...	...	...
4	...	...	...	...
5	...	...	...	...
6	...	...	...	...

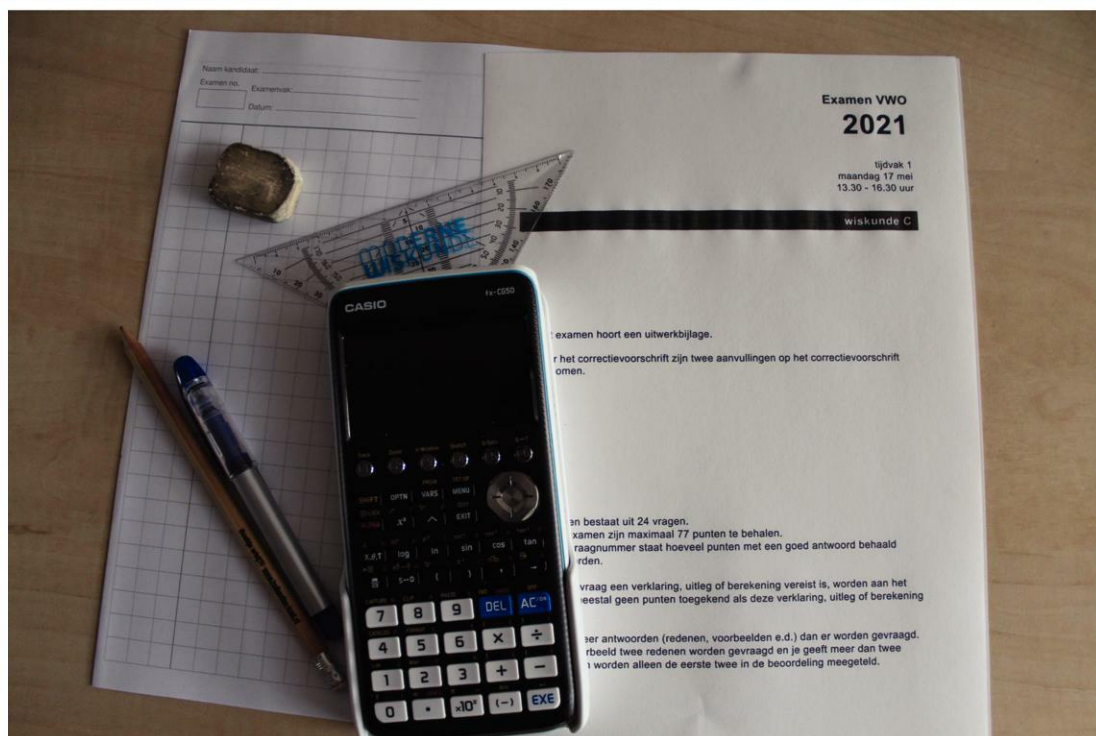
- 18** Je gooit met een rode, een gele en een zwarte (gewone) dobbelsteen en telt de aantallen ogen bij elkaar op. Beredeneer op hoeveel verschillende manieren je het resultaat 15 kunt krijgen.
- 19** Bij praktische opdrachten voor het vak biologie over kruisingen wordt vaak gebruik gemaakt van fruitvliegjes (*Drosophila melanogaster*). Deze fruitvliegjes zijn namelijk makkelijk te kweken en de ontwikkeling van ei tot fruitvliegje duurt maar negen dagen. Men kan dus in zeer korte tijd veel generaties kweken. Bovendien is een aantal eigenschappen van fruitvliegjes goed zichtbaar: oogkleur (rood/zwart), vleugelvorm (kort/lang) en huidskleur (donker/geel). Een fruitvliegje met zwarte oogkleur, korte vleugels en een gele huidskleur wordt getypeerd als: z-k-g.

Voor een kruisingsexperiment moeten vier fruitvliegjes, twee mannelijke en twee vrouwelijke, in een kweekruimte worden geplaatst. Hierbij gelden twee eisen:

- De twee mannelijke fruitvliegjes mogen niet van hetzelfde type zijn.
 - De twee vrouwelijke fruitvliegjes mogen niet van hetzelfde type zijn.
- Bereken hoeveel verschillende samenstellingen in de kweekruimte mogelijk zijn.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A-pilot 2012, tijdvak 2)





Examenvoorbereiding

SE

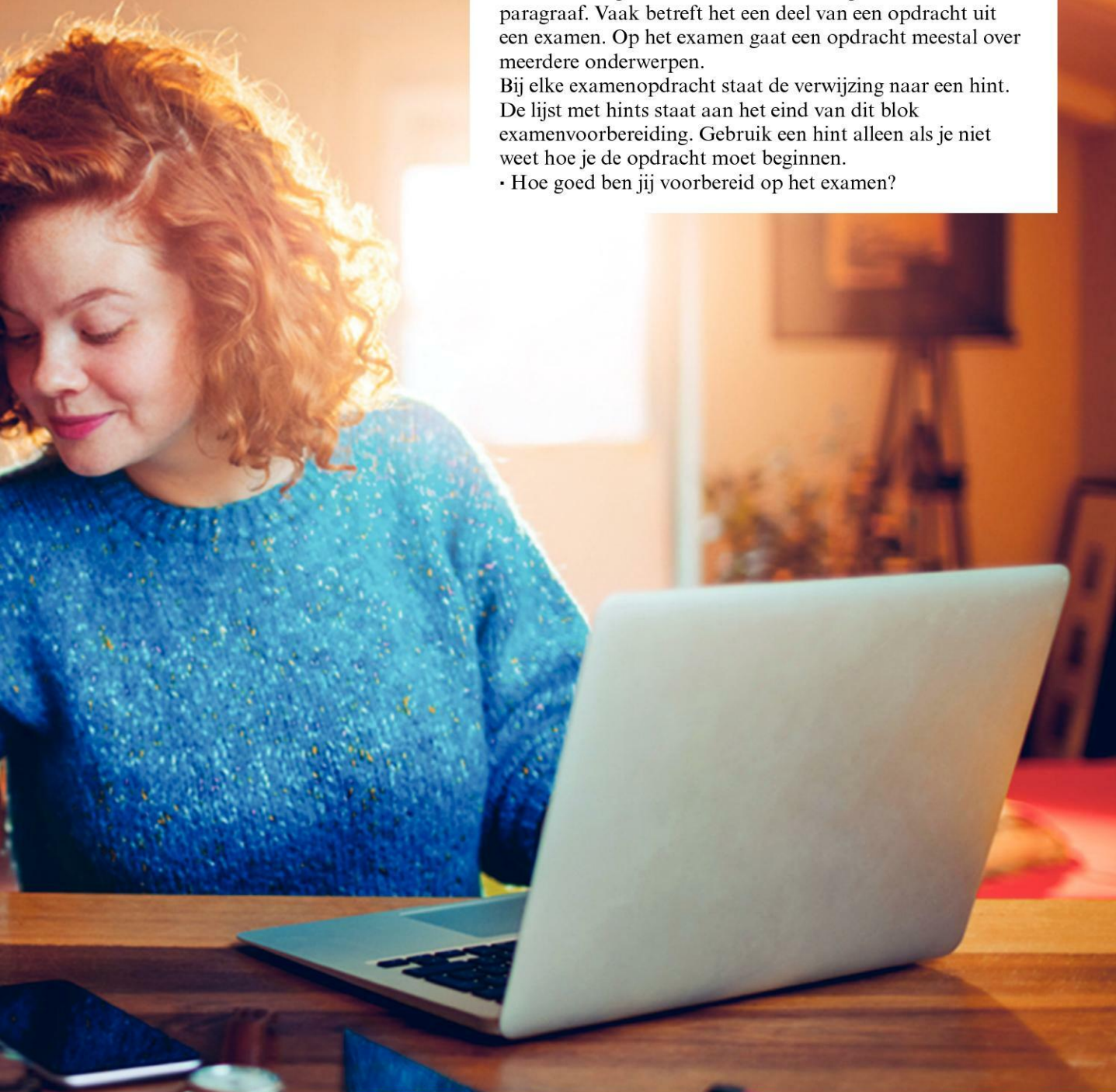
CE

K

In dit hoofdstuk vind je een overzicht van de stof voor het examen wiskunde C. In elke paragraaf komt een aantal onderwerpen aan bod, telkens gevolgd door een of meerdere korte oefeningen. Elke paragraaf sluit af met examenopdrachten die aansluiten op de stof in de paragraaf. Vaak betreft het een deel van een opdracht uit een examen. Op het examen gaat een opdracht meestal over meerdere onderwerpen.

Bij elke examenopdracht staat de verwijzing naar een hint. De lijst met hints staat aan het eind van dit blok examenvoorbereiding. Gebruik een hint alleen als je niet weet hoe je de opdracht moet beginnen.

- Hoe goed ben jij voorbereid op het examen?



Breuken

Je kunt breuken optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en vereenvoudigen. Ook kun je een deel van een hoeveelheid uitrekenen en een hoeveelheid in een verhouding verdelen.

- 1 Bereken en vereenvoudig.

a $\frac{7}{9b} \times \frac{3a}{5}$

c $\frac{13}{28} + \frac{6}{7}$

b $\frac{2a}{9} - \frac{8a}{27}$

d $\frac{18 - 12a}{6}$

- 2 Bereken.

a $\frac{6}{25}$ deel van 650

c $\frac{13}{125}$ deel van 50 000

b $\frac{4}{9}$ deel van 81 000

d $\frac{2}{17}$ deel van 8585

Procenten en verhoudingen

Bij het rekenen met verhoudingen kun je een verhoudingstabel gebruiken. Verhoudingen kom je onder andere tegen bij relatieve aantallen, procenten en schaal.

Voorbeeld 1

Op een school zijn 42 docenten ouder dan 55 jaar, dat is 35% van alle docenten op die school. Hoeveel docenten werken er op die school?

Oplossing

aantal docenten	42	?
percentage	35	100

$$42 \times 100 = 35 \times ?$$

$$? = 42 \times 100 : 35 = 120$$

Er werken 120 docenten op die school.

Voorbeeld 2

Het aantal leden van een sportclub is met 28 afgenomen tot 724. Hoeveel procent is het ledenaantal afgenomen?

Oplossing

Voor de afname had de club $724 + 28 = 752$ leden.

aantal leden	752	28
percentage	100	?

$$28 \times 100 = 752 \times ?$$

$$? = 28 \times 100 : 752 \approx 3,7$$

Het ledenaantal is met 3,7 % afgenomen.

- 3
- a Van een bevolking is 24% jonger dan 25 jaar, dat zijn 1,35 miljoen mensen.
Bereken hoe groot de totale bevolking is.
 - b De waarde van een aandeel is in één dag gestegen met 5% tot € 10,07.
Bereken de waarde van het aandeel een dag eerder.
 - c Verdeel € 350,- in een verhouding 3 : 4.
 - d De verhouding jongens: meisjes in een klas met 27 leerlingen is 5 : 4.
Bereken het aantal meisjes.

Bij een verhouding 3 : 4 neem je

$\frac{3}{7}$ deel en $\frac{4}{7}$ deel

Tijden

Voor het weergeven van tijden gebruik je een aparte notatie. Zo betekent 3.14,6 minuten 3 minuten en 14,6 seconden. Je noteert dit ook wel als 3:14,6 minuten. 3.14.25 uur betekent 3 uur, 14 minuten en 25 seconden. Voor het berekenen van een gemiddelde snelheid reken je de totale tijd eerst om naar uren, minuten of seconden. Vervolgens gebruik je een verhoudingstabel.

- 4 a Karl loopt een marathon in 2.45.21 uur. Een marathon is 42 km en 195 m.
Bereken zijn gemiddelde snelheid in meters per seconde.
b Geef de snelheid van Karl ook in km per uur.
c José rijdt elke dag 43,6 km naar haar werk. Zonder files rijdt ze die afstand met een gemiddelde snelheid van 82,5 km per uur.
Hoeveel minuten is ze onderweg?

Eenheden

Bij het maken van opdrachten moet je goed op de eenheden letten. Bij een formule moet worden aangegeven voor welke eenheden die formule geldt. Soms moet je bij opdrachten de gegevens eerst omrekenen naar andere eenheden.

- 5 Om het water in een vijver mooi helder te krijgen kun je een middel tegen algen gebruiken. Op de verpakking hiervan staat: 'Eén week lang dagelijks 5 mL per m³ aan het water toevoegen'. Het gewicht van 1 mL is 1 gram.
Een vijver is 5 meter lang, 3 meter breed en 50 cm diep.
a Hoeveel liter is de inhoud van de vijver?
b Hoeveel kg van het middel tegen de algen heb je nodig?
c Het middel tegen algen wordt verkocht in flessen met een inhoud van een halve liter.
Hoeveel flessen heb je nodig?

Examenopdrachten

6 Gangnam Style

(Ontleend aan CE vwo wiskunde C 2019 tijdvak 1)

Het nummer Gangnam Style van de Zuid-Koreaanse zanger Psy is de eerste YouTube-video die vaker dan 1 miljard keer bekeken is.

Op 12 januari 2015, rond vier uur 's middags was de video ruim 2,2 miljard maal bekeken. Er wordt veel tijd besteed aan het kijken naar de 4 minuten en 12 seconden durende video. Ga er bij de volgende vraag van uit dat iedereen de video van begin tot einde bekeek.

Bereken hoeveel tijd in jaren er in totaal tot 12 januari 2015, vier uur 's middags, al was besteed aan het kijken naar de video. Geef je antwoord in gehele honderdtallen.

Voorbeeld

Merlijn fietst 45 km in 2:15:24 uur.
Bereken zijn gemiddelde snelheid in meters per seconde.

Oplossing

2:15:24 uur is

$$2 \times 3600 + 15 \times 60 + 24 = 8124 \text{ seconden.}$$

afstand in meters	45 000	?
tijd in seconden	8124	1

$$45\,000 \times 1 : 8124 = 5,53\dots$$

Zijn gemiddelde snelheid is ongeveer 5,5 meter per seconde.

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm} = 100 \text{ cm} = 1000 \text{ mm}$$

$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ liter} = 100 \text{ cL} = 1000 \text{ mL}$$

$$1 \text{ kg} = 1000 \text{ gram} = 1\,000\,000 \text{ mg}$$

7 Zonnepanelen

(Ontleend aan CE vwo wiskunde C pilot 2017, tijdvak 1)

Veel mensen denken erover om zonnepanelen aan te schaffen. Bedrijven spelen daarop in en geven daar allerlei informatie over op hun websites.

In deze opdracht gaan we uit van een vaste elektriciteitsprijs van € 0,225 per kWh.

In de tabel zie je een overzicht van de prijs en opbrengst van verschillende zonnepaneelsystemen van een bedrijf.

<i>aantal panelen</i>	8	12	18
<i>aanschafprijs van het systeem</i>	€ 4.699,-	€ 6.299,-	€ 8.599,-
<i>verwachte elektriciteitsopbrengst (kWh per jaar)</i>	1667	2500	3750

In 2013 kon men bij de aanschaf van zonnepanelen een overheidssubsidie krijgen. Deze overheidssubsidie bedroeg 15% van de aanschafprijs en bedroeg maximaal € 650,-. Deze subsidie is nog niet verwerkt in de prijzen van de tabel. De terugverdientijd is de periode die het duurt tot het aankoopbedrag van het systeem is terugverdiend via besparing op de elektriciteitskosten. In het begin van 2013 schafte iemand het systeem van 12 zonnepanelen aan met overheidssubsidie.

Bereken, uitgaande van de verwachte elektriciteitsopbrengst, in welk jaar het aankoopbedrag volledig is terugverdiend.

Hint 2

8 Huurprijzen in New York

(Ontleend aan CE vwo wiskunde C 2021, tijdvak 1)

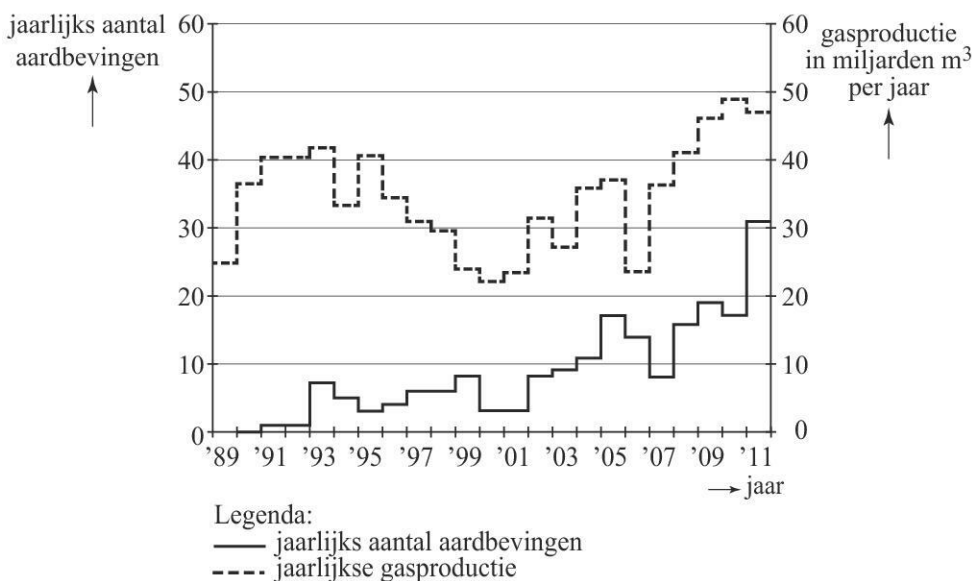
Een belangrijke maatstaf om de betaalbaarheid van huurwoningen te onderzoeken is het percentage van het inkomen dat besteed wordt aan het betalen van de huur: de huurlast. In 1960 bedroeg de huurprijs in New York \$ 561 en was de huurlast 15%. In de periode tussen 1960 en 2013 stegen de huurprijzen met 63,5%, terwijl het maandinkomen in dezelfde periode met slechts 17% steeg. Uit deze gegevens volgt dat de huurlast in 2013 ongeveer gelijk was aan 21%. Laat een berekening zien waaruit dit blijkt.

Hint 3

9 Groningse aardbevingen

(Ontleend aan CE vwo wiskunde C 2019, tijdvak 1)

In de provincie Groningen vinden, als gevolg van gasproductie, regelmatig aardbevingen plaats. In 2013 is daar grootschalig onderzoek naar gedaan. Zo werd er gekeken naar het verband tussen de gasproductie en aardbevingen. Enkele resultaten daarvan staan in de figuur. Hier zie je bijvoorbeeld dat er in 1993 zeven aardbevingen zijn geweest en er in datzelfde jaar 42 miljard kubieke meter gas is geproduceerd.



We bekijken de volgende drie beweringen:

- 1 De gasproductie en het aantal aardbevingen zijn over de gehele periode 2000-2011 procentueel evenveel gestegen.
- 2 Als na 2000 de gasproductie daalt, dan heeft dat altijd een jaar later ook een daling van het aantal aardbevingen tot gevolg.
- 3 In de periode 2005-2011 is de gemiddelde stijging per jaar van het aantal aardbevingen groter dan in de periode 1998-2004.

Geef van elke bewering aan of deze waar is of niet.

Hint 4

10 Marathonloopsters

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2010, tijdvak 1)

De Olympische hardloophwedstrijd met de grootste lengte is de marathon: ruim 42 kilometer, om precies te zijn 42 195 meter. De prestatie van een loopster geeft men meestal weer door de tijd waarin de marathon is afgelegd, maar een even duidelijke maat is de gemiddelde snelheid over het gehele parcours. Deze snelheid drukken we uit in m/s (meters per seconde).

Een marathonloopster legt de marathon af in 2 uur, 43 minuten en 32 seconden.

Bereken haar gemiddelde snelheid in meter per seconde.

Hint 5

Grafieken aflezen, interpoleren en extrapoleren

Bij het aflezen uit grafieken houd je rekening met de eenheden die bij de getallen op de assen horen.

Het vinden van een tussenliggende waarde in een tabel of een grafiek heet interpoleren.

Het vinden van een verder gelegen waarde in een tabel of een grafiek heet extrapoleren.

Als een grafiek bij een tabel op een bepaald gedeelte vrijwel een rechte lijn is, dan kun je een tussenliggende waarde schatten met lineair interpoleren en een verder gelegen waarde met lineair extrapoleren.

- 11** De ontwikkeling van een vrucht wordt onderzocht. Daarvoor is de vrucht een aantal keer gewogen. In de tabel staan de resultaten.

<i>tijd t</i> in weken	8	13	17	21
<i>gewicht g</i> in grammen	38	68	88	104

- Neem aan dat het gewicht lineair toeneemt en schat met behulp van lineair interpoleren het gewicht na 11 weken.
- Hoe groot is het gewicht na 26 weken?

De rekenmachine

Bij berekeningen kun je in veel gevallen je rekenmachine gebruiken. Je krijgt dan in het algemeen geen exacte antwoorden maar benaderingen.

Je kunt met je rekenmachine:

- Grafieken plotten en tabellen maken.
- De toppen van een grafiek vinden.
- De snijpunten van grafieken vinden.
- Vergelijkingen oplossen.

Je geeft aan hoe je de rekenmachine hebt gebruikt. Daarbij neem je de volgende onderdelen op: Invoer, Vensterinstelling en de gebruikte Opties.

Voorbeeld

Los op: $12 + 0,1x > 35 + 0,06x$.

Oplossing

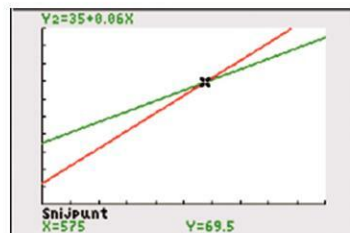
Invoer: $y_1 = 12 + 0,1x$ en $y_2 = 35 + 0,06x$

Venster: $0 \leq x \leq 1000$, $0 \leq y \leq 100$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (575; 69,5).

De oplossing van de ongelijkheid is $x > 575$.



Voorbeeld

<i>tijd in jaren</i>	2004	2007	2011
<i>aantal mannen</i>	1523	1796	2160

Schat met lineair interpoleren het aantal mannen in 2010.

Oplossing

Tussen 2007 en 2011 nam het aantal mannen gemiddeld met

$(2160 - 1796) : 4 = 91$ per jaar toe.

In 2010 waren er naar schatting $1796 + 3 \times 91 = 2069$ mannen.

- 12** Gegeven is de formule $y = 4x^{0,7} + 25x$.
- Maak op je rekenmachine een tabel bij de formule. Neem x van 0 tot en met 40 met stapgrootte 1.
Bij welke waarde van x is de uitkomst gelijk aan 637?
 - Verklein de stapgrootte naar 0,1.
Bij welke x -waarde is de uitkomst afgerond gelijk aan 102,5?
- 13**
- Los met behulp van je rekenmachine de vergelijking $120 - 84 \cdot 0,95^x = 100 - 0,5x$ op.
Rond je antwoord af op twee decimalen.
 - Bereken het maximum van de formule $y = -x^2 + 6x - 10$.

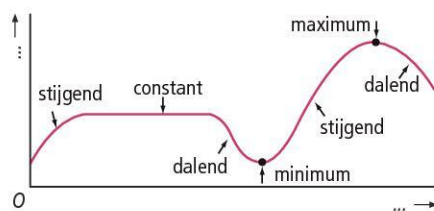
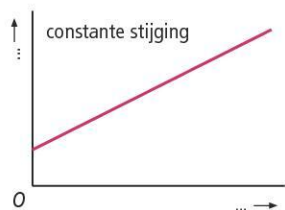
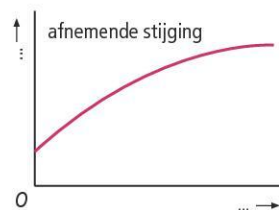
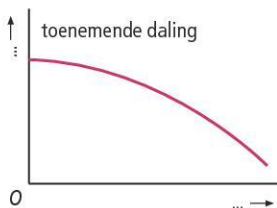
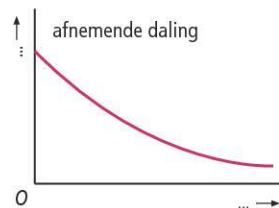
Stijgen en dalen, maximum en minimum

Een grafiek kan een stijgend, een dalend of een constant verloop hebben.

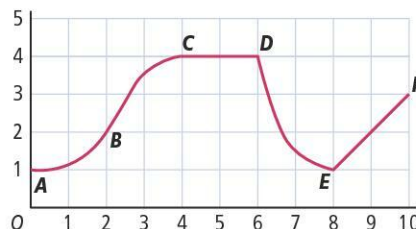
Als een grafiek overgaat van stijgen naar dalen, dan heeft de formule daar een maximum.

Als een grafiek overgaat van dalen naar stijgen, dan heeft de formule daar een minimum.

Een grafiek kan op verschillende manieren stijgen of dalen.



- 14** Je ziet een grafiek bestaande uit een aantal delen.
Geef bij elk van de delen van de grafiek aan van welk soort stijgen of dalen er sprake is.



- 15** Gegeven is de formule $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 10$.
- Ga met je rekenmachine na bij welke waarden van x de formule een maximum of een minimum heeft. Geef ook de grootte van het maximum of het minimum.
 - Bij welke waarden van x is de grafiek bij de formule toenemend stijgend?

Grenswaarde

Voor het bepalen van een grenswaarde van een formule kijk je hoe de uitkomsten van de formule veranderen als je steeds grotere waarden bij de formule. Bij een grenswaarde verandert de uitkomst van de formule dan nauwelijks meer.

- 16** De formules horen bij enkele groeiprocessen. Onderzoek bij elk groeiproces of er sprake is van een grenswaarde en, zo ja, hoe groot de grenswaarde is.

$$\begin{array}{ll} \text{a} & P = 145(5 - 10 \cdot 0,25^t) \\ \text{b} & k = 585 - \frac{300}{a^2} \\ \text{c} & A = 50x^2 \\ \text{d} & u = \frac{-3t + 12}{2t - 10} \end{array}$$

- 17** In een koele kamer wordt om 7.00 uur de verwarming aangezet. De temperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ in de kamer voldoet vanaf dat moment aan de formule $T = 21 - 6 \cdot 0,9^t$ met t de tijd in minuten en $t = 0$ om 7.00 uur.

- Geef de temperatuur om 7.00 uur.
- Bereken hoe groot de grenswaarde is.
- Geef de praktische betekenis van deze grenswaarde.
- Bereken na hoeveel minuten de temperatuur 20°C is.
- Vanaf welk tijdstip ligt de temperatuur boven de 18°C ?

Redeneren met formules

Door na te gaan hoe een formule is opgebouwd, kun je eigenschappen van formules beredeneren. Zo kun je beredeneren of de waarden van een formule toenemen of afnemen en hoe groot een eventuele grenswaarde is.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $N = \frac{20}{10 + 0,8^k}$.
Beredeneer of de waarde van N toeneemt of afneemt als k steeds groter wordt.
Beredeneer ook of er sprake is van een grenswaarde en zo ja, hoe groot die grenswaarde is.

Oplossing

Bij $k = 0$ is $N = \frac{20}{10 + 0,8^0} \approx 1,82$.

Als k groter wordt, dan neemt $0,8^k$ af, want $0,8 < 1$.
 $10 + 0,8^k$ neemt dan af en nadert naar 10.

De waarde van N neemt toe, want 20 wordt door een steeds kleiner getal gedeeld. De grenswaarde is $\frac{20}{10} = 2$.

Voorbeeld

Onderzoek of de formule
 $y = 120 - 14 \cdot 0,95^x$
een grenswaarde heeft.

Oplossing

x	10	100	1000	10000
y	111,62	119,92	120,00	120,00

De grenswaarde is 120.

- 18** Beredeneer of de waarde van Q voor $a > 0$ toeneemt of afneemt als a steeds groter wordt. Beredeneer ook of er sprake is van een grenswaarde en zo ja, hoe groot die grenswaarde is.

a $Q = \frac{20}{8 \cdot 1,6^a - 10}$

c $Q = 7 + \frac{2}{2 - 0,8^a}$

b $Q = 5 \cdot 1,38^a - 4$

d $Q = 5(4 - 0,75^a)$

Formules met meerdere variabelen

Veel formules hebben meer dan twee variabelen. Bij een formule met meer dan twee variabelen kun je de waarde van één variabele pas uitrekenen als je de waarde van alle andere variabelen kent.

Voorbeeld

De prijs van een rit met een taxi P in euro's hangt af van het aantal gereden kilometers d en het aantal minuten t dat de rit heeft geduurd. Een taxibedrijf gebruikt hiervoor de formule $P = 1,75d + 0,5t$.

Voor een rit van 12 kilometer betaalt Koos € 32,-.
Hoeveel minuten duurde deze rit?

Oplossing

Er geldt $P = 32$ en $d = 12$.

$$32 = 1,75 \times 12 + 0,5t$$

$$32 = 21 + 0,5t$$

$$11 = 0,5t \text{ dus } t = 22$$

De rit duurde 22 minuten.

- 19** Gegeven is de formule $T = 0,15P + 6,2U - 10$.

a Bereken P als $T = 18,1$ en $U = 4$.

b Bereken U als $T = 24,71$ en $P = 8,2$.

- 20** Gegeven is de formule $X = \frac{4Y - 3Z + 4}{2P}$

a Bereken X als $Y = 3$, $Z = 2$ en $P = 5$.

b Bereken Y als $X = 16$, $Z = -2$ en $P = 0,5$.

c Bereken Z als $X = 4$, $Y = 10$ en $P = 2,5$.

d Bereken P als $X = 12$, $Y = 3,5$ en $Z = 4$.

Uitdrukken in

Bij de formule $q = -3p + 22$ is q uitgedrukt in p . Een dergelijke formule is handig om bij waarden van p de bijbehorende waarden van q te berekenen. Door p uit te drukken in q krijg je een formule waarmee je bij waarden van q de bijbehorende waarden van p kunt berekenen.

- 21** Druk p uit in q .
- a** $q = 4p - 10$ **c** $2q + 5p = 10$
- b** $q = \frac{1}{2}p + 8$ **d** $10q - 4p = 40$
- 22** Gegeven is de formule $N = -2,5Q + 1,5R + 6P$.
- a** Neem $N = 10$ en $Q = 2$ en druk P uit in R .
- b** Neem $N = 0$ en $R = 10$ en druk Q uit in P .
- c** Neem $P = Q$ en $R = 6$ en druk N uit in Q .
- 23** Herleid de formules tot de vorm $Q = a \cdot p + b$.
- a** $Q = \frac{(0,8x + 4)(-2x + 6p)}{x - 4}$ met $x = 5$
- b** $Q = \frac{3(4A - 2) + 6p(2C - A)}{A + C}$ met $A = 2$ en $C = 4$

Substituieren

In formules met meerdere variabelen moet je soms getallen of andere formules substitueren. De ontstane formule is dan vaak te vereenvoudigen.

- 24** Gegeven is de formule $p = 4r + \frac{3r \cdot q + 2t}{q}$
Verder is gegeven $q = 5$ en $t = 7$.
Schrijf de formule in de vorm $p = a \cdot r + b$.
- 25** Gegeven is de formule $N = 4,5P + 8P \cdot Q - 12,5P \cdot R$.
Verder is gegeven $P = 8$ en $Q = 6 - 0,5R$.
Schrijf de formule in de vorm $N = a \cdot R + b$.
- 26** Een olievlek breidt zich cirkelvormig uit.
De oppervlakte A in km^2 van de olievlek bereken je met de formule $A = 3,14r^2$ waarbij r de straal in km is. De straal r neemt toe volgens de formule $r = 0,35t + 0,7$.
Druk A uit in t en schrijf het resultaat zonder haakjes.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $q = -3p + 22$.
Druk p uit in q .

Oplossing

$$-3p + 22 = q$$

$$-3p = q - 22$$

$$p = -\frac{1}{3}q + 7\frac{1}{3}$$

Voorbeeld

Gegeven is de formule
 $T = 2,5A - 14B + 6B \cdot C$
 Verder is gegeven $B = 0,5$ en
 $C = 2A + 1$.
 Schrijf de formule in de vorm
 $T = p \cdot A + q$.

Oplossing

$$T = 2,5A - 14 \cdot 0,5 + 6 \cdot 0,5 \cdot (2A + 1)$$

$$T = 2,5A - 7 + 3(2A + 1)$$

$$T = 2.5A - 7 + 6A + 3$$

$$T = 8.5A - 4$$

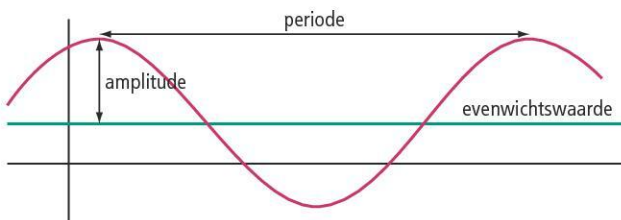
Formules optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen

Je kunt een nieuwe formules opstellen door twee formules op te tellen, van elkaar af te trekken, te vermenigvuldigen, te delen of samen te stellen door een substitutie.

- 27** a Een fabrikant maakt handtassen. Voor de kosten per stuk geldt de formule $K = -q^2 + 5q + 7$. Voor de opbrengst per stuk geldt $O = 35q$. Hierin is q het aantal geproduceerde handtassen. De winst per stuk bereken je met de formule $W = O - K$.
Druk W uit in q en schrijf het resultaat zonder haakjes.
- b Een andere fabrikant maakt rugzakken. Voor de totale winst bij het produceren van q rugzakken geldt de formule $TW = (3q + 2)(q^2 - 1)$. De winst W per stuk bereken je met de formule $W = \frac{TW}{q}$.
Druk W uit in q en vereenvoudig het resultaat.

Periodieke verbanden

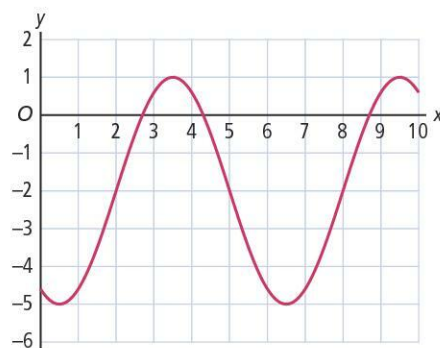
Verschijselen die zichzelf steeds herhalen heten periodieke verschijnselen. De bijbehorende grafieken heten periodieke grafieken.



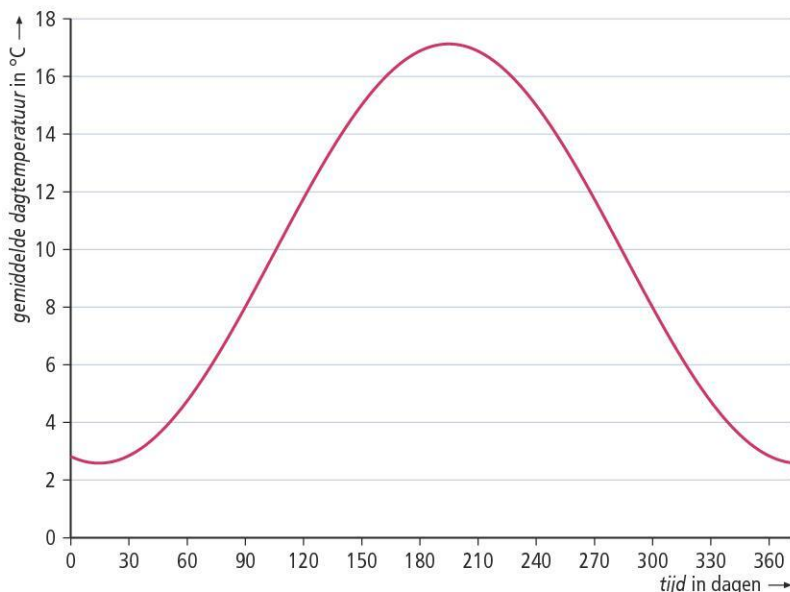
De evenwichtswaarde is de gemiddelde hoogte van de grafiek. De amplitude is de grootste afwijking van de grafiek ten opzichte van de evenwichtswaarde.

De periode is de kleinste afstand waarover je een periodieke grafiek horizontaal kunt verschuiven zodat hij weer samenvalt met zichzelf.

- 28** Geef van de grafiek de periode, de evenwichtsstand en de amplitude.



- 29** Een Belgische onderzoeker houdt zich bezig met modellen voor het temperatuurverloop. Hij bekeek daarvoor de historische gegevens van het weerstation in Ukkel (België), zie de figuur.



De vloeiende lijn geeft de gemiddelde dagtemperatuur per dag aan en is ontstaan uit gemiddelden van de dagtemperatuur, gemeten over verschillende jaren. De gemiddelde dagtemperatuur is maximaal $17,1^{\circ}\text{C}$ en minimaal $2,6^{\circ}\text{C}$.

- Bereken de evenwichtswaarde en de amplitude.
- Leg uit dat de periode gelijk is aan 365 dagen.
- De maximale gemiddelde dagtemperatuur wordt bereikt op de 197e dag.
Beredeneer met behulp van de periode op welke dag de gemiddelde dagtemperatuur minimaal is.
- Een dag met een gemiddelde dagtemperatuur van ten minste 16°C is een aangename zomerse dag. Dat komt volgens de figuur jaarlijks 65 keer voor. Als door de opwarming van de aarde de gemiddelde dagtemperatuur in Ukkel elke dag twee graden hoger is, neemt het aantal aangename zomerse dagen toe.
Met hoeveel neemt dat aantal zomerse dagen (ongeveer) toe?

Examenopdrachten

30 Lepelaars

(Ontleend aan CE vwo wiskunde C pilot 2015, tijdvak 2)

Een benadering voor het aantal lepelaars op de

Waddeneilanden geeft de formule:
$$N = \frac{2780}{1 + 12,9 \cdot 0,834^t}$$

Hierin is N het aantal lepelaars en t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 maart 1980. Volgens dit model zal het aantal lepelaars op de Waddeneilanden toenemen tot een grenswaarde. Beredeneer aan de hand van de formule hoe groot deze grenswaarde is.

Hint 6



31 BMR

(Ontleend aan CE havo wiskunde A 2018, tijdvak 1)

Mensen krijgen energie binnen via voedsel. De hoeveelheid energie in voedsel wordt uitgedrukt in kilocalorieën (kcal). De minimale hoeveelheid energie die iemand per dag nodig heeft om op gewicht te blijven, wordt aangeduid met de Engelse afkorting BMR (Basal Metabolic Rate). Diëtisten maken gebruik van formules om deze hoeveelheid te berekenen. Een formule van de BMR voor mannen luidt: $BMR = 10 \cdot G - 5 \cdot J + 6,25 \cdot L + 5$ Hierin is G het gewicht in kg, J de leeftijd in jaren, L de lengte in cm en BMR in kcal. Voor 30-jarige mannen met een BMR van 2000 kcal kun je het gewicht G uitdrukken in de lengte L .

Er geldt dan $G = a \cdot L + b$.

- a Bereken de waarden van a en b in één decimaal nauwkeurig.

Hint 7

In de Verenigde Staten hanteert men soortgelijke formules maar met andere variabelen. Men gebruikt voor het gewicht de variabele W (weight) in pounds, voor de lengte de variabele H (height) in feet en voor de leeftijd in jaren de variabele Y (years). Hierbij is 1 kg gelijk aan 2,2 pounds en 1 foot gelijk aan 30,48 cm.

- b Stel een formule op waarin de BMR uitgedrukt wordt in de variabelen W , H en Y .

Hint 8

32 Schildpadden

(Ontleend aan CE vwo wiskunde C 2018, tijdvak 2)

Sommige mensen hebben een schildpad als huisdier. Bepaalde soorten houden onder natuurlijke omstandigheden een winterslaap. De eigenaar kan ervoor kiezen om zijn schildpad ook in winterslaap te laten gaan, omdat hij anders de hele winter extra licht en warmte moet geven aan zijn huisdier. Een schildpad moet een gezond gewicht hebben bij het begin van zijn winterslaap, anders is er een kans dat hij het niet overleeft. Om vast te stellen of de schildpad een gezond gewicht heeft, wordt vaak de Jackson Ratio gebruikt.

De Jackson Ratio R wordt berekend met de formule $R = \frac{G}{L^3}$

Hierin is G het gewicht van de schildpad in gram en L de lengte van het schild van de schildpad in cm.

Voor de Griekse landschildpad geldt de volgende vuistregel: een schildpad kan veilig aan een winterslaap beginnen als zijn Jackson Ratio tussen 0,18 en 0,22 ligt.

Jesse heeft een Griekse landschildpad met een schildlengte van 15 cm en wil hem een winterslaap laten houden.

- a** Bereken in hele grammen nauwkeurig tussen welke waarden zijn gewicht dan mag liggen volgens de vuistregel.

Hint 9

De lengte van het schild moet recht gemeten worden, bijvoorbeeld door de schildpad met ingetrokken kop tussen een schuifmaat te zetten (zie foto 1). Veronderstel dat iemand toch de lengte over het schild heen meet (zie foto 2).

- b** Beredeneer of een schildpad door op die manier te meten een grotere of een kleinere Jackson Ratio krijgt dan hij in werkelijkheid heeft.

Hint 10

Op een Engelse website staat het volgende: als je het gewicht meet in Engelse ponden (lbs) en de schildlengte in inches, kun je de Jackson Ratio berekenen met de formule

$R = c \cdot \frac{W}{l^3}$ Hierin is W het gewicht in Engelse ponden en

l de schildlengte in inches. 1 Engels pond (lb) $\approx$ 454 gram en 1 inch = 2,54 cm. De Jackson Ratio moet dan ook weer dezelfde waarde opleveren.

- c** Bereken de waarde van c in deze formule. Rond je antwoord af op één decimaal.

Hint 11

foto 1

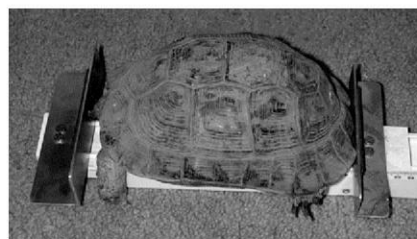


foto 2

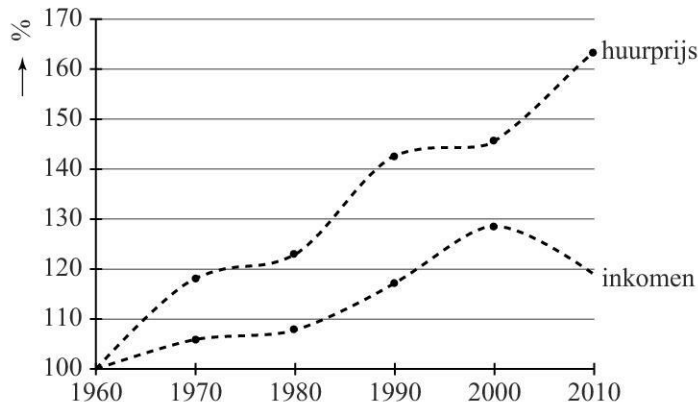


33 Huurprijzen in New York

(Ontleend aan CE vwo wiskunde C 2021, tijdvak 1)

De huurlast is het percentage van het inkomen dat besteed wordt aan het betalen van de huur. In 1960 bedroeg de huurprijs in New York \$ 561 en was de huurlast 15%.

In de figuur is het verloop van de huurprijs in New York en van het inkomen van zijn inwoners als percentage van de bedragen in 1960 uitgezet tegen de tijd.



Hieronder staan twee uitspraken die gaan over de gegevens in de figuur.

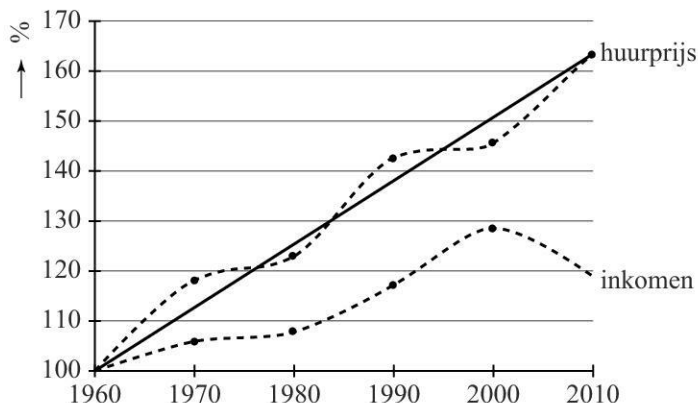
- 1 In de periode 1960–1980 steeg de huurprijs sneller dan in de periode 1980–2000.
 - 2 In de periode 1990–2000 daalde de huurlast.
- a Leg voor elk van deze uitspraken uit of deze waar is of niet.

Hint 12

In de figuur is te zien dat de huurprijs schommelt om een trendlijn. De huurprijs kan dus worden benaderd met behulp van deze trendlijn. Het gemiddelde maandinkomen van de inwoners van New York was op zijn hoogst in het jaar 2000 en was toen \$ 4832. In een rapport van de Bank of America uit 2013 stond dat het gemiddelde maandinkomen pas in 2023 weer op het niveau van het jaar 2000 zou zijn.

Je kunt nu, uitgaande van de getekende trendlijn voor de huurprijs en de veronderstelling uit het rapport van de Bank of America, berekenen wat in 2023 de huurlast in New York zal zijn.

- b Bereken met behulp van deze trendlijn en de genoemde veronderstelling de huurlast in New York in 2023. Geef je antwoord in één decimaal.



Hint 13

Lineair verband

Bij een lineair verband tussen twee variabelen is er sprake van een constante toename of constante afname. Je herkent een lineair verband aan:

- De grafiek is een rechte lijn.
- In een tabel en in een grafiek is er bij gelijke stappen altijd dezelfde toename.
- Uit de tekst kun je opmaken dat de toename bij gelijke stappen altijd hetzelfde is.

Bij een lineair verband hoort een lineaire formule van de vorm $y = ax + b$. Hierin is a het hellingsgetal of de richtingscoëfficiënt van de bijbehorende grafiek en is b het startgetal. Een formule van de vorm $y = ax + b$ heet een eerstegraads formule.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $k = 0,23t + 5,65$ met k de kosten in euro's en t de tijd in minuten. Met hoeveel euro nemen de kosten per minuut toe? En hoeveel bedragen de vaste kosten?

Oplossing

De kosten nemen toe met € 0,23 per minuut.
De vaste kosten bedragen € 5,65.

Voorbeeld 2

t	4	5	6	10	13
K	17	19,5	22	32	39,5

Ga na of de tabel bij een lineair verband kan horen.

Oplossing

De toename per stap is steeds 2,5, want $(32 - 22) : 4 = 2,5$ en $(39,5 - 32) : 3 = 2,5$.
De tabel kan bij een lineair verband horen.

- 34 a Gegeven is de formule $N = 1350 - 125t$ met N het aantal vissen in miljoenen en t de tijd in jaren na 1950. Hoeveel vissen waren er in 1950 en met hoeveel vissen nam dat aantal per jaar af?
- b Ga na of er een lineair verband tussen p en A bestaat.

p	10	50	75	90	100
A	10	90	140	170	190

- c Bij een lineair verband tussen de variabelen P en Q geldt, bij $P = 18$ hoort $Q = 670$ en bij $P = 23$ hoort $Q = 520$. Bereken de waarde van Q bij $P = 44$.

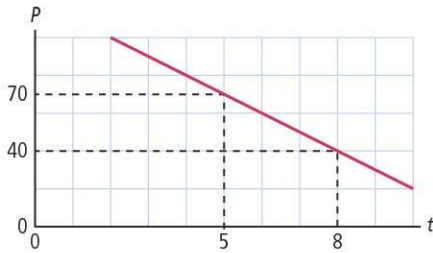
Lineaire formules opstellen

Je kunt in de volgende gevallen een lineaire formule opstellen:

- Bij de beschrijving van een lineair verband.
- Bij een gegeven tabel.
- Bij een gegeven lineaire grafiek.
- Bij twee gegeven punten van de grafiek.

Voorbeeld

Stel een formule op bij de grafiek.

**Oplossing**

De richtingscoëfficiënt is $\frac{40 - 70}{8 - 5} = -10$.

$$P = -10t + b$$

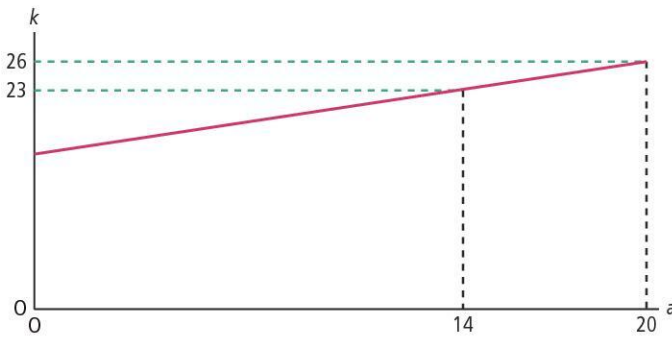
Invullen $P = 70$ en $t = 5$.

$$70 = -10 \cdot 5 + b$$

$$b = 120$$

Een formule bij de grafiek is $P = -10t + 120$.

- 35** Stel een formule op bij de grafiek hieronder.



- 36** De grafiek die het verband tussen x en y weergeeft is een rechte lijn door de punten $(150, 18)$ en $(200, 13)$. Geef een lineaire formule voor het verband tussen x en y .
- 37** Stel een lineaire formule op voor het verband tussen x en y bij de lijn door de twee gegeven punten.
- a** $(0, 6)$ en $(8, 0)$
 - b** $(5, 12)$ en $(11, 33)$
 - c** $(0, 7; 1, 3)$ en $(3, 5; -5, 7)$
- 38** Een crèche berekent een maandelijkse ouderbijdrage. Deze hangt af van het maandinkomen van de ouders. Het verband tussen de bijdrage en het inkomen is lineair. Bij een maandinkomen van € 1.800,- bedraagt de bijdrage € 430,- en bij een maandinkomen van € 4.000,- is dat € 650,-.
- a** Bereken de maandelijkse bijdrage bij een maandinkomen van € 2.700,-.
 - b** Stel een formule op voor het verband tussen de bijdrage B in euro's en het inkomen I in euro's.

Lineaire vergelijkingen oplossen

Lineaire vergelijkingen kun je oplossen door links en rechts van het gelijkteken dezelfde bewerking te doen. Daarmee vereenvoudig je de vergelijking zo ver dat de onbekende nog maar aan één kant van het gelijkteken staat.

Let op!

Lineaire vergelijkingen moet je bij het Centraal Examen zonder rekenmachine op kunnen lossen. Bij andere vergelijkingen mag je de rekenmachine gebruiken.

39 Los de vergelijkingen op.

a $-3x + 12 = 5x + 28$

c $225t = -25t + 10(13t + 18)$

b $\frac{3}{5}x + \frac{1}{2} = 2 - \frac{9}{10}x$

d $0,7p - 6p + 1,3 = 1,2(4 - 5p)$

40 Herleid de vergelijkingen waarbij je p uitdrukt in q .

a $q = -0,2p + 1,3$

b $3p + 12q = 16 - p$

c $13p - 4(q + 2) = q$

d $0,3q + 1,2p - 4,8 = 0$

Recht evenredig

Twee variabelen heten recht evenredig als geldt: als de ene variabele k keer zo groot wordt, dan wordt de andere variabele ook k keer zo groot.

Zijn de variabelen x en y , dan heet y recht evenredig,

of kortweg evenredig, met x . Er geldt $\frac{y}{x} = c$, dus ook $y = c \cdot x$.

Je herkent een recht evenredig verband in een tabel, als van de twee getallen in elke kolom de verhouding dezelfde is. De grafiek bij een recht evenredig verband is een rechte lijn door de oorsprong.

41 Ga voor de tabellen na of er een recht evenredig verband bestaat tussen de variabelen. Stel bij elk recht evenredig verband een bijbehorende formule op.

A

x	4,5	12,5	16	50
y	3,6	10	12,8	40

C

W	80	40	10	5
R	12	24	96	190

B

p	4,5	5	12	16
q	16	14,4	6	4,5

D

x	16	20	36	40
y	40	50	90	100

Voorbeeld

t	0,3	2,4	3,8	5,4
s	1,8	14,4	22,8	32,4

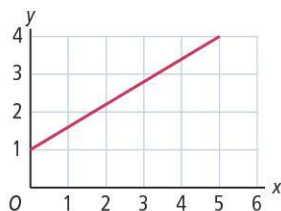
Laat zien dat s recht evenredig is met t en stel een bijbehorende formule op.

Oplossing

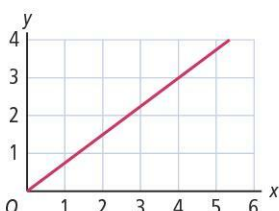
$$\frac{s}{t} = \frac{1,8}{0,3} = \frac{14,4}{2,4} = \frac{22,8}{3,8} = \frac{32,4}{5,4} = 6$$

Een formule is $s = 6 \cdot t$.

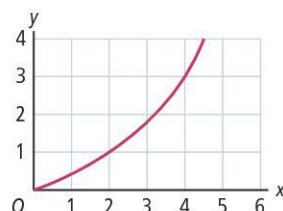
- 42 Bij welke grafiek(en) is y recht evenredig met x ?



A



B



C

Omgekeerd evenredig

Twee variabelen heten omgekeerd evenredig als geldt: als de ene variabele k keer zo groot wordt, wordt de andere variabele k keer zo klein. Zijn de variabelen

x en y , dan geldt $x \cdot y = c$. Je kunt ook schrijven $y = \frac{c}{x}$ of $x = \frac{c}{y}$

Bij een omgekeerd evenredig verband is het product van de variabelen in elke kolom van de bijbehorende tabel steeds hetzelfde.

- 43 De variabelen x en y in deze twee tabellen zijn omgekeerd evenredig.
Vul de tabellen verder in. Stel bij beide tabellen een formule op.

x	0,8	...	2	6	80
y	60	32	24	...	...

A

x	1	...	5	15	60
y	...	45	...	6	...

B

- 44 Ga na of de variabelen in de formules recht of omgekeerd evenredig zijn. Schrijf de omgekeerd evenredige verbanden op twee andere manieren.

a $p \cdot q = 7$

d $l = \frac{200}{b}$

b $\frac{s}{t} = 50$

e $y = 5x$

c $A = 10B - 5$

f $\frac{x}{y} = 36$

Voorbeeld

v	6	9	18
t	1,5	1	0,5

Laat zien dat v en t omgekeerd evenredig zijn en stel de bijbehorende formules op.

Oplossing

$$v \cdot t = 6 \times 1,5 = 9 \times 1 = 18 \times 0,5 = 9.$$

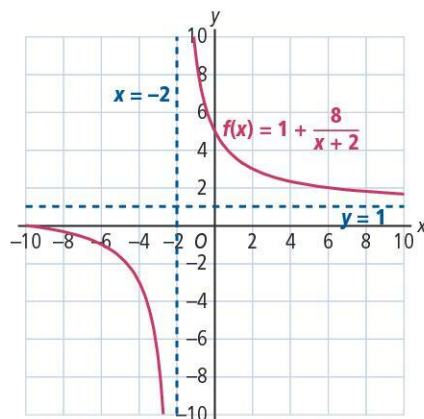
De formules zijn $v \cdot t = 9$ of $t = \frac{9}{v}$ of $v = \frac{9}{t}$

Gebroken formules

Een formule heet een gebroken formule als er een variabele in een noemer voorkomt. De grafiek van de gebroken

formule $y = 1 + \frac{8}{x+2}$ bestaat uit twee takken. Bij $x = -2$

heeft de formule geen waarde als uitkomst, hier heeft de grafiek een verticale asymptoot. De grafiek heeft $y = 1$ als horizontale asymptoot, de grenswaarde is dus gelijk aan 1.



- 45** Onderzoek of de formules een grenswaarde hebben en zo ja, hoe groot die grenswaarde is.

a $P = \frac{5x-8}{2x+6}$

c $k = \frac{3t-9}{t^2+8}$

b $T = 4 + \frac{a}{a-3}$

d $w = 5 + \frac{4}{p^2-9}$

Formules met breuken herleiden

Formules en vergelijkingen met breuken kun je herleiden en soms vereenvoudigen. Daarbij kun je gebruikmaken van:

$$\frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C} \text{ en } A \cdot \frac{B}{C} = \frac{A \cdot B}{C}$$

Uit $\frac{A}{B} = C$ volgt $A = B \cdot C$ en dus ook $B = \frac{A}{C}$

Uit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ volgt $A \cdot D = B \cdot C$

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $N = \frac{2}{b} + \frac{3}{b+1}$

Herleid de formule tot één breuk.

Oplossing

$$N = \frac{2(b+1)}{b(b+1)} + \frac{3b}{b(b+1)} \quad \text{gelijke noemers gemaakt}$$

$$N = \frac{2(b+1) + 3b}{b(b+1)} \quad \frac{A}{C} + \frac{A}{C} = \frac{A+B}{C}$$

$$N = \frac{5b+2}{b(b+1)} \quad \text{teller herleid}$$

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $p = \frac{2}{1+q} + 5$.

Herleid de formule waarbij je q uitdrukt in p .

Oplossing

$$p - 5 = \frac{2}{1+q} \quad \text{links en rechts } - 5$$

$$(p-5)(1+q) = 2 \quad \text{links en rechts } \times (1+q)$$

$$1+q = \frac{2}{p-5} \quad \text{links en rechts } : (p-5)$$

$$q = \frac{2}{p-5} - 1 \quad \text{links en rechts } - 1$$

46 Herleid de formules waarbij je b uitdrukt in a .

a $3a = \frac{6}{2b+4}$

c $\frac{5}{a+4} = \frac{2}{b-4}$

b $\frac{b+5}{a-5} = a-1$

d $\frac{7a-3b}{b+8} = \frac{4}{3}$

47 Herleid de formules tot één breuk.

a $K = \frac{3}{p} + \frac{p+1}{p}$

c $d = \frac{3}{N+1} - \frac{1}{N}$

b $Q = \frac{t+1}{2t} + \frac{1}{4t}$

d $k = \frac{q+2}{q} - \frac{1}{q-5}$

Examenopdrachten

48 Windenergie

(Ontleend aan CE vwo C 2018, tijdvak 1)

In een krant stond eind 2013 bij een artikel over de toekomst van windenergie deze figuur.

In de figuur wordt de kostprijs voor het produceren van windenergie vergeleken met de kosten voor het produceren van energie in een traditionele kolencentrale (de marktprijs). De formule voor de marktprijs k_m luidt:

$$k_m = 0,28 \cdot t + 4,3.$$

De formule voor de kostprijs van windenergie k_l van windmolens op land luidt:

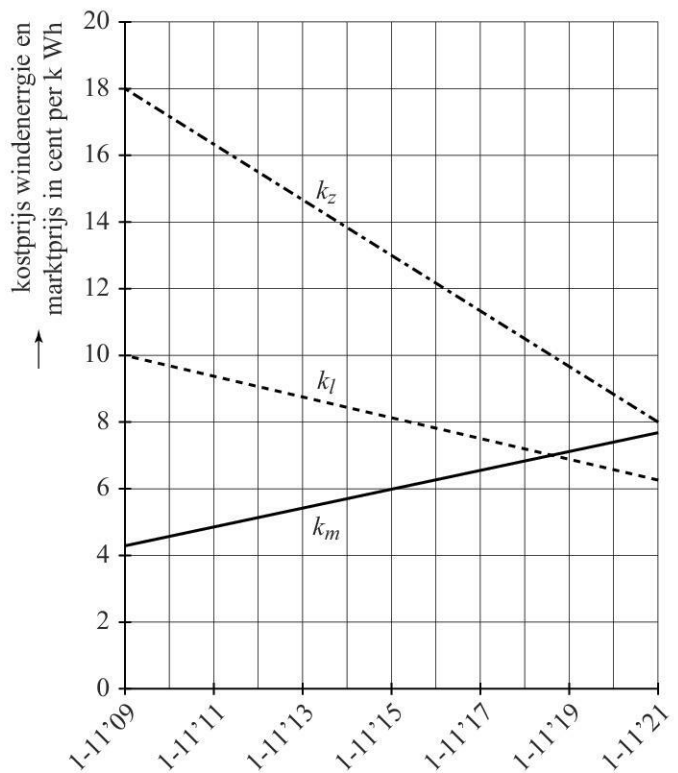
$$k_l = -0,31t + 10,0.$$

Voor beide formules geldt: k is de prijs in cent per kWh (kilowattuur) en t is de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2009.

We nemen in deze opgave aan dat de prijzen zich ook na 2020 volgens deze lineaire verbanden blijven ontwikkelen.

Door de duurdere windmolens op zee is de kostprijs van windenergie van die windmolens op dit moment nog steeds hoger dan die van windmolens op land. Maar door de voortdurende innovaties gaat dat veranderen.

- a** Stel met behulp van de figuur een formule op voor de kostprijs k_z van windenergie van windmolens op zee en bereken daarmee in welk jaar de windenergie van land en die van zee evenveel kosten.



Legenda:

- wind op zee
- - - - wind op land
- · - · - marktprijs

Hint 14

Rond 2011 was de kostprijs van windenergie van windmolens op land nog tweemaal zo hoog als de marktprijs.

- b** Bereken in welk jaar de marktprijs tweemaal zo hoog zal zijn als de kostprijs van windenergie van windmolens op land.

Hint 15

49 Wind mee, wind tegen

(Ontleend aan CE vwo wiskunde C pilot 2014, tijdvak 2)

Sylvia woont 10 km van school. Zij fietst elke schooldag. We gaan ervan uit dat als er geen wind is, haar snelheid constant 20 km/u is. Haar totale reistijd is op zo'n schooldag dus 1 uur.

Meestal waait het echter. We veronderstellen dat Sylvia altijd wind mee heeft op de heenweg en wind tegen op de terugweg en dat de wind de hele dag constant is. Sylvia's totale reistijd T in uren wordt dan gegeven door de formule:

$$T = \frac{400}{400 - w^2}$$

Hierbij is w de windsnelheid in km per uur en er geldt $0 \leq w < 20$. Op een dag is Sylvia's totale reistijd 1 uur en 20 minuten.

a Bereken de waarde van w op die dag.

Hint 16

Met de formule voor Sylvia's totale reistijd kun je zonder te rekenen beredeneren dat haar totale reistijd op een dag met wind groter is dan op een dag zonder wind.

b Geef zo'n redenering.

Hint 17

Als Sylvia onderweg pech heeft en de reparatie 1 uur kost, wordt haar totale reistijd 1 uur langer.

Haar totale reistijd wordt dan $T = \frac{400}{400 - w^2} + 1$.

c Herleid deze formule tot één breuk.

Hint 18

50 Reistijden

(Ontleend aan CE vwo wiskunde C pilot 2015, tijdvak 1)

In 2010 stond in NRC Handelsblad een artikel waarin de prestaties van vliegtuig, hogesnelheidstrein (hst) en gewone trein met elkaar vergeleken werden. Bij het artikel stond een figuur waarin de reisafstand in kilometers vergeleken werd met de totale reistijd van-deur-tot-deur in uren. De reistijd van-deur-tot-deur is de totale tijd die nodig is voor de trein- of vliegreis zelf en voor de verplaatsingen van en naar het station of vliegveld.

Naar aanleiding van de figuur heeft men de volgende formules opgesteld. Hierbij is a de afstand in km en r de reistijd in uren:

Vliegtuig: $r = 0,00137a + 3,43$

Gewone trein: $r = 0,00793a + 1,10$

Onderzoek met behulp van deze formules vanaf welke afstand de reistijd met het vliegtuig kleiner is dan de reistijd met de gewone trein.

Hint 19

51 Fietsen en energie

(Ontleend aan CE vwo wiskunde C pilot 2016, tijdvak 1)

De formules voor het basisenergieverbruik, de energie die iemand per dag nodig heeft voor alle activiteiten van een lichaam in rust, zoals hartwerking, ademhaling, enzovoort, staan hiernaast. In deze formules is B het basisenergieverbruik in kcal (kilocalorieën) per dag en G het lichaamsgewicht van de persoon in kg.

Er gelden verschillende formules voor jongvolwassen en voor oudere personen. We vragen ons af welke van deze twee groepen het laagste basisenergieverbruik heeft. Dit hangt volgens de formules af van het lichaamsgewicht van een persoon.

- a** Onderzoek bij welke lichaamsgewichten tussen 40 en 120 kg de jongvolwassenen een lager basisenergieverbruik hebben dan de ouderen.

18 - 30 jaar (jongvolwassen):

$$B = 15,3G + 679$$

31 - 60 jaar (ouder):

$$B = 11,6G + 879$$

Hint 20

Als iemand sport, is de totale energie die hij of zij nodig heeft groter dan het basisenergieverbruik. De formule voor de totale energie T per dag is $T = 1,3B + S$. Hierbij is B het basisenergieverbruik per dag en S het energieverbruik voor het sporten per dag zoals fietsen, zwemmen en hardlopen.

In de tabel staat het energieverbruik in kcal per kg lichaamsgewicht per uur bij fietsen bij een aantal snelheden. Neem aan dat het energieverbruik tussen de aangegeven snelheden in lineair verloopt.

snelheid (km/uur)	14	17	20	24	28	35	42
energieverbruik (kcal/kg/uur)	4	6	8	10	12	16	20

Frits is 58 jaar en weegt 70 kg. Hij doet mee aan de fietselfstedenocht in Friesland, een tocht waarbij op één dag 240 km gefietst wordt. We nemen aan dat hij de hele tocht rijdt met een snelheid van 25 km/uur.

- b** Bereken het totale energieverbruik van Frits op deze dag.

Hint 21

Bij een hogere snelheid wordt per uur een grotere afstand afgelegd. Je kunt voor elke snelheid die in de tabel vermeld wordt, het energieverbruik per kg lichaamsgewicht bij het fietsen per afgelegde kilometer berekenen.

Alex beweert dat dit voor elke snelheid gelijk is. Bert zegt dat dit hoger is bij hogere snelheden en Carolien beweert dat dit lager is bij hogere snelheden. Een van deze drie personen heeft gelijk.

- c** Onderzoek met behulp van de tabel wie van de drie gelijk heeft.

Hint 22

Machtsformules

Formules van de vorm $y = x^n$ heten machtsformules.

Machtsformules van de vorm $y = x^{-n}$ kun je schrijven

$$\text{als } y = \frac{1}{x^n}$$

$y = x^{\frac{1}{2}}$ is een wortelformule, want $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

Machtsformules van de vorm $y = x^{\frac{1}{n}}$ zijn te schrijven

$$\text{als } y = \sqrt[n]{x}.$$

Formules van de vorm $y = x^{3,5}$ en $y = x^{0,8}$ onderzoek je met je rekenmachine.

- 52** Gegeven zijn de formules $y = x^8$, $y = x^{-3}$, $y = x^7$ en $y = x^{\frac{1}{4}}$.
- a** Van welke formules gaat de grafiek door het punt $(1, 1)$?
En van welke door $(-1, -1)$?
 - b** Van welke formule is de grafiek afnemend dalend?
 - c** Hoeveel snijpunten heeft elk van de grafieken met de lijn $y = 4$? En hoeveel snijpunten heeft elk van de grafieken met de lijn $y = -2$?
 - d** Onderzoek met je rekenmachine hoeveel snijpunten de grafiek van $y = x^{1,75}$ heeft met de lijn $y = 18$.

Kwadratische formules

Formules van de vorm $y = ax^2 + bx + c$ heten kwadratische formules of tweedegraads formules.

De bijbehorende grafiek is een parabool. Voor $a > 0$ is de grafiek een dalparabool, voor $a < 0$ een bergparabool.

- 53** Hieronder staan drie formules. Onderzoek door te herleiden of de bijbehorende grafiek een parabool is en zo ja, of het een dalparabool of een bergparabool betreft.
- a** $y = 3x(1 - x) + 2x^2$
 - b** $y = (4x + 3)(2x - 1) + (7 - 3x)(x + 1)$
 - c** $y = 8x^2 + 4x(x - 1)^2$

- 54** Gegeven is de formule $y = 0,5x^2 + 3,2x - 7$
- Bereken de coördinaten van de top van de bijbehorende parabool.
 - Bereken de coördinaten van de snijpunten van de parabool met de x -as en de y -as.

Wortelformules

Een formule waar een variabele onder het wortelteken voorkomt, heet een wortelformule. Een wortelvergelijking herleid je door links en rechts van het gelijktteken dezelfde bewerking uit te voeren.

Je gebruikt de regel:

Uit $\sqrt{A} = B$ volgt $A = B^2$ (voor $B \geq 0$).

Voor het rekenen met wortels kun je de volgende rekenregels gebruiken:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad \text{met } a \geq 0 \text{ en } b \geq 0.$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \text{met } a \geq 0 \text{ en } b \geq 0.$$

Voorbeeld 1

Vereenvoudig de functie $y = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{\frac{x^2 + 1}{4}}$

Oplossing

$$y = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{4}} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$y = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$$

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $2 \cdot \sqrt{a} + 1 = b$.
Druk a uit in b .

Oplossing

$$2 \cdot \sqrt{a} = b - 1$$

links en rechts $- 1$

$$\sqrt{a} = \frac{b - 1}{2}$$

links en rechts $: 2$

$$a = \frac{(b - 1)^2}{2^2}$$

uit $\sqrt{A} = B$ volgt $A = B^2$

$$\text{ofwel } a = \frac{1}{4}(b - 1)^2$$

- 55** Gegeven zijn twee rijtjes formules. Elke formule uit het linker rijtje is te herleiden tot een van de formules uit het rechter rijtje.

Toon dat aan en geef aan welke formules bij elkaar passen.

$$A \quad y = \sqrt{16x + 48} \qquad 1 \quad y = 8 + \sqrt{1\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x}$$

$$B \quad y = 8 + 6\sqrt{\frac{1}{4}x^2 + x - 9} \qquad 2 \quad y = 4\sqrt{x + 3}$$

$$C \quad y = \frac{24 + \sqrt{12 - 6x}}{3} \qquad 3 \quad y = 8 + 3\sqrt{x^2 + 4x - 36}$$

56 Herleid de formules zodat je b uitdrukt in a .

a $a = 0,5\sqrt[3]{b}$ **d** $3\sqrt{a} = 4\sqrt{a} - 2b$

b $2 \cdot \sqrt[5]{b+2} = 4a$ **e** $\sqrt{2b+3} = 4a$

c $a + 4 = 0,4\sqrt{b}$ **f** $a = \sqrt{b-4} + 9$

Herleiden met machten

Bij het herleiden van formules van de vorm $y = c \cdot x^a$ gebruik je de rekenregels voor machten.

In de formule $N = 3 \cdot t^{8,9}$ is N uitgedrukt in t .

Met behulp van de regel $x^a = c$ geeft $x = c^{\frac{1}{a}}$ kun je de formule herleiden naar een formule waarmee je t uitdrukt in N .

$$\begin{aligned} g^p \cdot g^q &= g^{p+q} & g^{-n} &= \frac{1}{g^n} \\ \frac{g^p}{g^q} &= g^{p-q} & g^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{g} \\ (g^p)^q &= g^{p \cdot q} & (a \cdot b)^n &= a^n \cdot b^n \end{aligned}$$

Voorbeeld 1

Schrijf $R = \frac{(a^3 \cdot a^{0,5})^4}{a^2}$ in de vorm $R = c \cdot a^n$.

Oplossing

$$R = \frac{(a^{3,5})^4}{a^2} \quad g^p \cdot g^q = g^{p+q}$$

$$R = \frac{a^{14}}{a^2} \quad (g^p)^q = g^{p \cdot q}$$

$$R = a^{12} \quad \frac{g^p}{g^q} = g^{p-q}$$

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $p = 5 \cdot k^{0,25} + 8$.
Druk k uit in p .

Oplossing

$$5 \cdot k^{0,25} + 8 = p \quad \text{links en rechts verwisseld}$$

$$5 \cdot k^{0,25} = p - 8 \quad \text{links en rechts } - 8$$

$$k^{0,25} = \frac{p-8}{5} \quad \text{links en rechts : 5}$$

$$k = \left(\frac{p-8}{5}\right)^{\frac{1}{0,25}} \quad x^a = c \text{ geeft } x = c^{\frac{1}{a}}$$

$$\text{ofwel } k = \left(\frac{1}{5}p - 1\frac{3}{5}\right)^4$$

57 Vereenvoudig zo ver mogelijk.

a $Q = \sqrt{25p^2}$ **d** $t = 3\sqrt{2k} \cdot \sqrt{18k}$

b $R = (2 \cdot q)^3$ **e** $b = (\frac{1}{2} \cdot a)^4 \cdot \sqrt{16a^2}$

c $y = \frac{(0,5x)^2}{x}$ **f** $g = \frac{d^2}{\sqrt{9}} \cdot (d \cdot 3)^2$

58 Herleid de vergelijkingen zodat je p uitdrukt in K .

a $0,2 \cdot p^5 + 8 = K$ **d** $15 + p^{-\frac{1}{2}} = K$

b $K - 6 \cdot p^4 = 27$ **e** $2 \cdot \sqrt[3]{p} - 4K = 10$

c $13p^{0,7} - 65K = 0$ **f** $K = \sqrt[4]{2p+1}$

Examenopdrachten

59 Lichaamsoppervlak

(Ontleend aan CE vwo wiskunde C pilot 2013, tijdvak 1)

De buitenkant van je lichaam is je lichaamsoppervlak.

leeftijd	Lichaamsoppervlakte in % van de totale oppervlakte			
	hoofd	romp	armen en handen	benen en voeten
1,5 jaar	16,2	34,0	18,15	31,65
17,5 jaar	8,1	32,1	21,0	38,8

Bij jonge kinderen is het hoofd ten opzichte van de rest van het lichaam relatief groot. Als kinderen ouder worden, groeien de armen en handen en de benen en voeten sneller dan de rest van het lichaam. Het aandeel van armen en handen in de lichaamsoppervlakte is voor kinderen in de periode van 1,5 jaar tot 17,5 jaar gestegen van 18,15 % naar 21,0 %. Ook het aandeel van de benen en voeten is in die 16 jaar groter geworden.

- a** Onderzoek of de relatieve toename van het aandeel van armen en handen groter is dan de relatieve toename van het aandeel van benen en voeten.

Hint 23

Er zijn formules waarmee we de lichaamsoppervlakte kunnen berekenen. Voor het berekenen van de lichaamsoppervlakte bij kinderen worden vooral de volgende twee formules gebruikt:

$$S_{\text{Mosteller}} = \sqrt{\frac{1}{3600} \cdot L \cdot M} \quad (\text{formule van Mosteller})$$

$$S_{\text{Haycock}} = 0,024\,265 \cdot L^{0,3964} \cdot M^{0,5378} \quad (\text{formule van Haycock})$$

In deze formule is S de lichaamsoppervlakte in m^2 , L de lichaamslengte in cm en M het lichaamsgewicht in kg.

Voor een kind met een lengte van 1 meter ($L = 100$) blijken de grafieken van de formules van Mosteller en Haycock bijna samen te vallen. Behalve bij $M = 0$ kg is er bij $L = 100$ nóg een lichaamsgewicht waarbij de formule van Mosteller en de formule van Haycock precies dezelfde lichaamsoppervlakte geven.

- b** Bereken dat lichaamsgewicht in één decimaal nauwkeurig.

Hint 24

Om de formules nog beter met elkaar te kunnen vergelijken, is het handig om de formule van Mosteller in dezelfde vorm te schrijven als de formule van Haycock.

De formule van Mosteller kan geschreven worden in de vorm

$$S_{\text{Mosteller}} = c \cdot L^{0,5} \cdot M^{0,5}$$

- c** Laat dat zien en bereken de waarde van c .

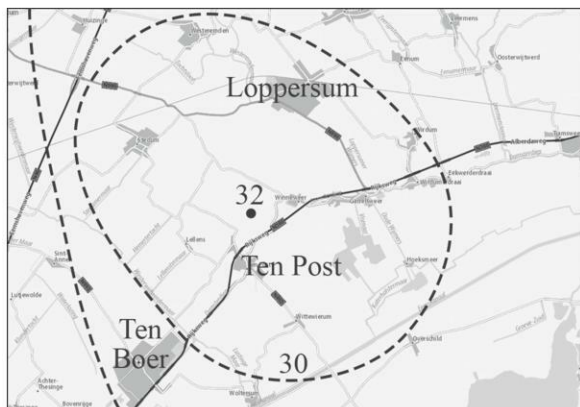
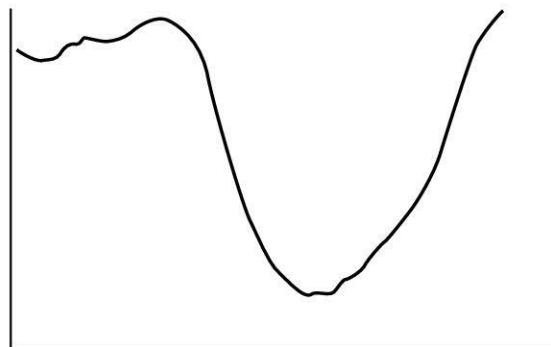
Hint 25

60 Bodemdaling

(Ontleend aan CE vwo wiskunde C 2019, tijdvak 2)

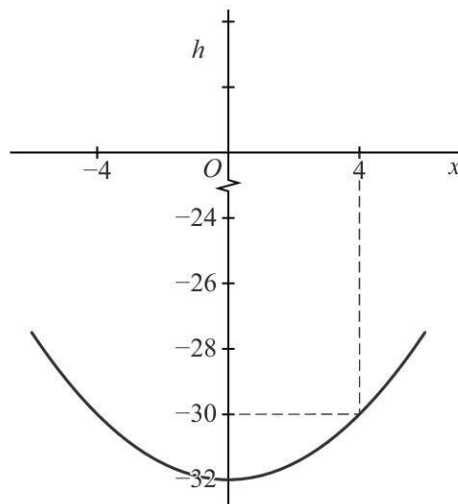
Bodemdaling kan ontstaan door natuurlijke processen, maar ook door menselijk handelen. Bij de gaswinning uit het Groningen-gasveld is er sprake van bodemdaling veroorzaakt door menselijk handelen.

Het gebied waar sprake is van bodemdaling wordt het dalingsgebied genoemd. In het midden van het dalingsgebied, nabij Ten Post, is de bodemdaling het grootst. Tot 2013 was de bodem daar al 32 centimeter gedaald. De bodemdaling is niet overal even groot. Het gebied waar de bodem ten minste 30 centimeter is gedaald, is bij benadering cirkelvormig. Zie de linker figuur. In de rechter figuur is bovendien de dwarsdoorsnede van de bodem door het laagste punt geschetst. Rondom het laagste punt heeft deze dwarsdoorsnede bij benadering de vorm van de grafiek van een kwadratisch verband, met andere woorden de vorm van een parabool.



We nemen nu aan dat het gebied waar de bodem ten minste 30 centimeter is gedaald cirkelvormig is. Verder nemen we aan dat de dwarsdoorsnede van de bodem rondom het midden van het dalingsgebied de vorm van een parabool heeft. De top van deze parabool komt overeen met het laagste punt van het dalingsgebied.

In 2013 was de straal van het cirkelvormige gebied gelijk aan 4 km en in het laagste punt was de bodem dus 32 centimeter gedaald. In de figuur hiernaast is de parabool geschetst bij het model van de dwarsdoorsnede dat bij deze gegevens hoort. De parabool bij het model voor 2013 kan beschreven worden met een formule van de vorm $h = ax^2 + b$. Hierin is x de afstand tot het midden van het dalingsgebied in kilometers en h is de daling van de bodem in centimeters. Bepaal de niet-afgeronde waarden van a en b .

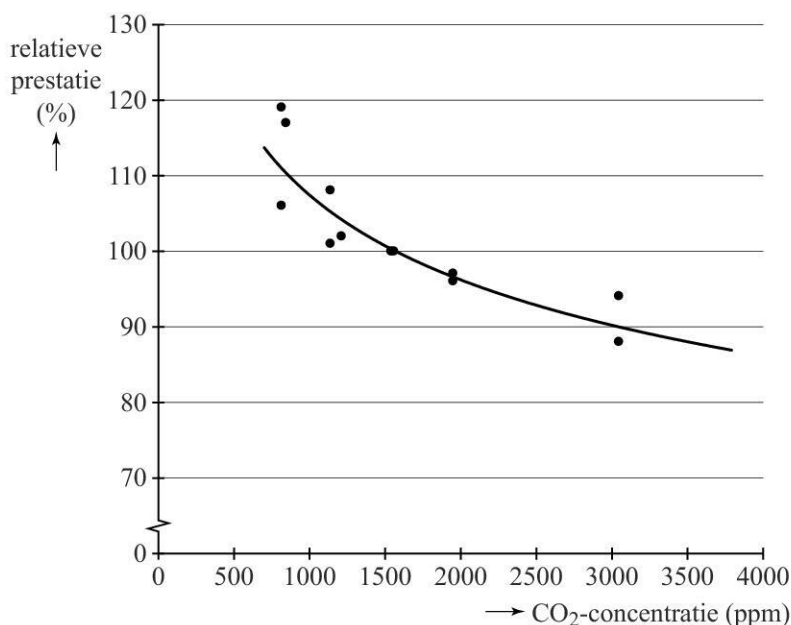


Hint 26

61 Luchtverversing in klaslokalen

(Ontleend aan CE vwo wiskunde C pilot 2013, tijdvak 2)

Uit CO₂-metingen blijkt dat in 80% van de klaslokalen van basisscholen de CO₂-concentratie te hoog is. Als de CO₂-concentratie te hoog is, kunnen gezondheidsklachten als hoofdpijn, vermoeidheid en concentratieproblemen ontstaan. Uit verschillende onderzoeken is duidelijk geworden dat een verhoogde CO₂-concentratie de leerprestatie van leerlingen negatief beïnvloedt. In de figuur zijn de gegevens uit een aantal onderzoeken weergegeven. De gemiddelde CO₂-concentratie in deze onderzoeken is 1500 ppm. Hoewel dit boven de norm is, stellen de onderzoekers bij deze waarde de prestatie-index op 100%. Dit betekent dat in klaslokalen waarbij wel aan de norm is voldaan, de relatieve prestatie groter is dan 100%. In de figuur is te zien dat bij een hogere CO₂-concentratie de relatieve prestatie afneemt.



In de figuur is de grafiek van $y = c \cdot x^{-0,159}$ getekend, waarbij c een constante is. Deze grafiek past redelijk bij de meetgegevens van de verschillende onderzoeken.

Door de waarde van c te bepalen is het mogelijk om met behulp van de formule te onderzoeken vanaf welke CO₂-concentratie de relatieve prestatie onder de 80% uitkomt.

a Toon aan dat c ongeveer gelijk is aan 320 en bereken met de formule vanaf welke CO₂-concentratie de relatieve prestatie onder de 80% uitkomt.

Hint 27

b Schrijf de formule $y = c \cdot x^{-0,159}$ als een breuk en beredeneer daarmee dat de grafiek dalend is.

Hint 28

Exponentieel verband, exponentiële formule

Bij een exponentieel verband tussen twee variabelen wordt er per tijdseenheid met hetzelfde getal vermenigvuldigd.

Een exponentieel verband herken je aan:

- In een tabel wordt er bij gelijke stappen met hetzelfde getal vermenigvuldigd.
- Uit de tekst kun je opmaken dat er bij gelijke stappen een vast percentage bij komt of van af gaat.
- Uit de tekst kun je opmaken dat er bij gelijke stappen met hetzelfde getal vermenigvuldigd wordt.

Bij een exponentieel verband tussen de variabelen x en y hoort de exponentiële formule $y = b \cdot g^x$. Hierbij is b de beginwaarde, dat is de waarde van y voor $x = 0$ en is g de groeifactor, de factor waarmee je de waarde van y moet vermenigvuldigen als x met 1 toeneemt.

Voorbeeld 1

Bij een groeiproces hoort de formule $N = 350 \cdot 0,89^t$ met N het aantal in miljoenen en t de tijd in jaren. Met hoeveel procent neemt het aantal jaarlijks toe of af?

Oplossing

De groeifactor is 0,89.

De groeifactor is kleiner dan 1, dus er is sprake van een afname.

Bij een groeifactor van 0,89 per jaar hoort een afname van 11% per jaar.

Voorbeeld 2

t	0	1	4	6
N	100	150	506	1139

Ga na of de tabel bij een exponentieel verband kan horen.

Oplossing

$\frac{150}{100} = 1,5$, als de tabel bij een exponentieel verband hoort, dan is de groeifactor gelijk aan 1,5. De bijbehorende formule is dan $N = 100 \cdot 1,5^t$. Hiermee controleer je de andere waarden in de tabel.

$N = 100 \cdot 1,5^4 \approx 506$ en $N = 100 \cdot 1,5^6 \approx 1139$

De waarden komen overeen met de tabel. De tabel kan bij een exponentieel verband horen.

- 62** Het aantal werklozen in een land voldoet aan de formule $P = 275 \cdot 1,075^t$. Hierin is P het aantal werklozen in duizenden en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2010.
- Hoeveel werklozen waren er op 1 januari 2010?
 - Neemt het aantal werklozen toe of af?
 - Met hoeveel procent neemt het aantal werklozen toe of af per maand?
 - Hoeveel werklozen waren er op 1 mei 2010?
 - En op 1 december 2009?

- 63** Ga na of bij de tabel sprake kan zijn van een exponentieel verband tussen p en q .

p	0	1	5	6	10
q	288	216	68,3	51,3	16,2

Rekenen met groeifactoren

Als g de groeifactor per tijdseenheid is, dan is g^n de groeifactor per n tijdseenheden. Evenzo is $g^{\frac{1}{n}}$ de groeifactor voor een n -de deel van die tijdseenheid.

Voorbeeld 1

De groeifactor per week is 1,35.
Bereken de groeifactor per dag en per 18 weken.

Oplossing

Een dag is $\frac{1}{7}$ week.

De groeifactor per dag is $1,35^{\frac{1}{7}} \approx 1,044$.

De groeifactor per 18 weken is $1,35^{18} \approx 221,824$.

Voorbeeld 2

Een populatie neemt jaarlijks met 15% in aantal af.
Bereken met hoeveel procent de populatie per 20 jaar afneemt.

Oplossing

De groeifactor per jaar is 0,85.

De groeifactor per 20 jaar is $0,85^{20} \approx 0,039$.

Na 20 jaar is er nog steeds $0,039 \times 100\% = 3,9\%$ over.

Per 20 jaar neemt de populatie met 96,1% af.

- 64 Bij een groeiproses is de groeifactor per uur gelijk aan 1,28.
Geef je antwoord steeds in vier decimalen nauwkeurig.
- a Hoe groot is de groeifactor per dag?
 - b Hoe groot is de groeifactor per kwartier?
 - c Hoe groot is de groeifactor per vijf minuten?
 - d Hoe groot is de groeifactor per 13 minuten?
- 65 Een populatie neemt al geruime tijd met 2,5% per 10 jaar toe.
Rond je antwoord steeds af op twee decimalen.
- a Bereken de procentuele toename per 5 jaar.
 - b Bereken de procentuele toename per jaar.
 - c Bereken de procentuele toename per 25 jaar.
 - d Bereken de procentuele toename per eeuw.

Exponentiële formules opstellen

Voor het opstellen van een exponentiële formule $y = b \cdot g^x$ heb je de beginwaarde b nodig, dat is de waarde bij $x = 0$, en de groeifactor g . De waarde van de groeifactor is afhankelijk van de gekozen tijdseenheid.

Voorbeeld

Het aantal auto's in een land neemt per drie jaar met 18% toe. Op 1 januari 2019 waren er 6,8 miljoen auto's in dat land.
Stel een formule op voor het aantal auto's N in miljoenen.
Neem voor de tijd in jaren t met $t = 0$ op 1 januari 2019.

Oplossing

De groeifactor per 3 jaar is 1,18.

De groeifactor per jaar is $1,18^{\frac{1}{3}} \approx 1,057$.

Een formule is $N = 6,8 \cdot 1,057^t$.

- 66** Stel in de volgende gevallen een formule op voor het verband tussen het aantal N en de tijd t in jaren met $t = 0$ het jaar 2020.
- In 2020 woonden er in een stad 180 000 mensen en dat aantal neemt jaarlijks met 2,6% af.
 - In 2020 produceerde een land 12 miljoen vaten olie. De productie neemt elk half jaar met 10% toe.
 - Het aantal gebruikers van een tablet verdubbelt elke vier jaar. In 2020 waren er vijf miljoen gebruikers.

Verdubbelingstijd en halveringstijd

Bij een exponentieel groeiproces is de verdubbelingstijd de tijdsduur waarin de hoeveelheid wordt verdubbeld. De tijd die nodig is voor een halvering heet de halveringstijd. Deze tijden hangen af van de groeifactor en niet van de beginhoeveelheid.

Voorbeeld

Het aantal konijnen in een gebied neemt jaarlijks met 4% af. In 2000 waren er ongeveer 15 000 konijnen. Na hoeveel jaar is het aantal konijnen gehalveerd?

Oplossing

De groeifactor per jaar is 0,96.

Bij halveren moet gelden $0,96^t = 0,5$.

Invoer: $y_1 = 0,96^x$ en $y_2 = 0,5$

Venster: $0 \leq x \leq 20, 0 \leq y \leq 1$

Optie: snijpunt

Na ongeveer 17 jaar is het aantal konijnen gehalveerd.

- 67** Het aantal abonnees A van een tijdschrift voldoet aan de formule $A = 135\,600 \cdot 0,94^t$. Hierin is t het aantal jaren na 1 januari 2020.
- Hoeveel abonnees zijn er op 1 januari 2023?
 - Met hoeveel procent neemt het aantal abonnees per jaar af?
 - En met hoeveel procent neemt dat aantal per vier jaar af?
 - Neem aan dat het aantal abonnees nog een aantal jaren met dezelfde snelheid afneemt. Bereken na hoeveel jaar het aantal abonnees gehalveerd is.
- 68** Het gewicht van een courgette neemt tijdens de groei dagelijks met 15% toe. Bereken na hoeveel dagen het gewicht van de courgette verdubbeld is.

Logaritmen

De exacte oplossing van de vergelijking $g^t = a$ heet de logaritme van a met grondtal g . Je noteert deze oplossing als $t = {}^g\log(a)$. Je spreekt ${}^g\log(a)$ uit als 'g log a'.

Uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$ en omgekeerd

uit $t = {}^g\log(a)$ volgt $g^t = a$.

Hierbij is $a > 0$, $g > 0$ en $g \neq 1$.

Je kunt met behulp van de regel ${}^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$ met je rekenmachine elke logaritme berekenen.

Voorbeeld 1

$$5 \cdot 3^x = 20$$

$$3^x = 4$$

$$x = {}^3\log(4)$$

$$x = \frac{\log(4)}{\log(3)} \approx 1,26$$

Voorbeeld 2

$${}^2\log(p-1) = 5$$

$$p-1 = 2^5$$

$$p-1 = 32$$

$$p = 33$$

- 69** Los de vergelijkingen op. Schrijf het antwoord met een logaritme en geef een benadering in twee decimalen.

a $2^x = 5$

d $2 + 5 \cdot 7^{4x} = 17$

b $12 \cdot 6^x = 48$

e ${}^2\log(x+1) = 5$

c $3^{2x+1} = 7$

f $3 \cdot {}^4\log(x-4) = 6$

Formules herleiden met logaritmen

Bij het herleiden van formules met logaritmen gebruik je behalve de balansmethode ook de regel:

Uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$ en omgekeerd

uit $t = {}^g\log(a)$ volgt $g^t = a$.

Voorbeeld 1

Gegeven

$${}^3\log(p-2) + 2 = q + 5$$

Druk p uit in q .

Oplossing

$${}^3\log(p-2) = q + 3$$

$$p-2 = 3^{q+3}$$

$$p = 3^{q+3} + 2$$

Voorbeeld 2

Gegeven $2^a \cdot 2^b = 5$

Druk b uit in a .

Oplossing

$$2^{a+b} = 5$$

$$a+b = {}^2\log(5)$$

$$b = -a + {}^2\log(5)$$

- 70** Druk b uit in a .

a ${}^4\log(b+5) = a$

d $2 \cdot 5^b = 100a + 30$

b $a + \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(b) = 5$

e $3^{a+4b} = 243$

c $6 \cdot {}^2\log(b) + 12a = 3$

f $3^a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^b = 9$

- 71** Joop heeft 1000 euro op zijn spaarrekening. Hij krijgt 0,8% rente.
- Na hoeveel jaar is het bedrag op zijn spaarrekening toegenomen tot 1100 euro?
 - In 1990 heeft Ilse een spaarrekening geopend met een vaste rente van je 7,7%.
Na hoeveel jaar is het bedrag op haar rekening verdubbeld?

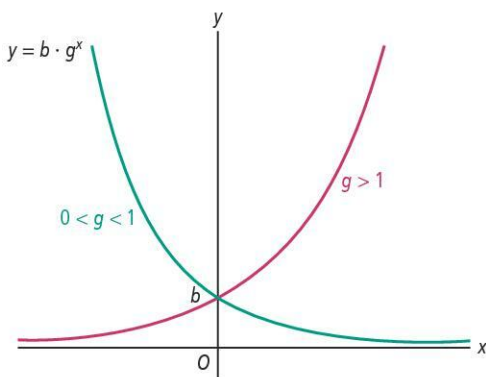
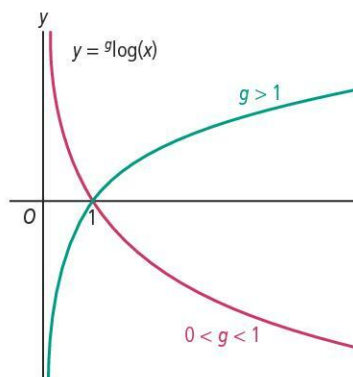
Grafieken van exponentiële en logaritmische formules

De grafiek van de exponentiële formule $y = b \cdot g^x$ ($b > 0$) is stijgend als $g > 1$ en dalend als $0 < g < 1$.

Omdat $g^0 = 1$ voor elke waarde van g , gaat de grafiek bij de formule $y = b \cdot g^x$ door het punt met coördinaten $(0, b)$ op de verticale as.

De grafiek van de logaritmische formule $y = {}^g\log(x)$ is stijgend als $g > 1$ en dalend als $0 < g < 1$.

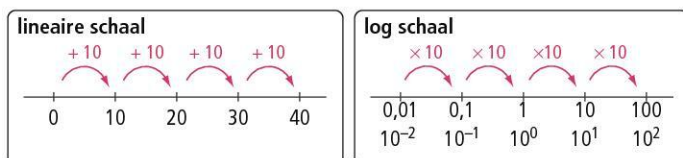
De grafiek van $y = {}^g\log(x)$ snijdt de x -as in $(1, 0)$, want ${}^g\log(1) = 0$ voor elke waarde van g .



- 72**
- Bereken of de grafiek van $y = -20 + 150 \cdot 0,63^x$ stijgend of dalend is voor $x > 0$.
 - De grafiek van $y = {}^2\log(x)$ is stijgend voor $x > 0$.
Leg uit dat de grafiek van $y = {}^2\log(x) + 10$ ook stijgend is.
 - Bereken of de grafiek van $y = 120 - {}^2\log(x)$ stijgend of dalend is voor $x > 0$.

Werken met logaritmische schalen

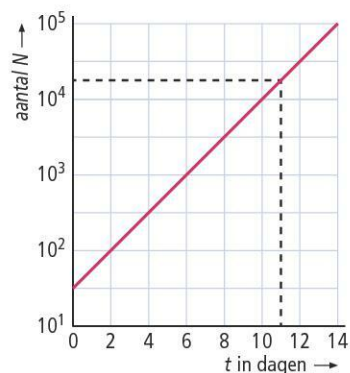
Bij lineaire schaalverdelingen wordt bij gelijke afstanden een vast getal opgeteld. Een schaalverdeling waar bij gelijke afstanden met een vast getal wordt vermenigvuldigd, heet een logaritmische schaal of logschaal. Dat vaste getal is meestal 10.



Je gebruikt een logschaal als je zowel erg grote als erg kleine waarden in één grafiek moet verwerken. Als een grafiek bij een logaritmische schaalverdeling op de verticale as een rechte lijn is, is het verband exponentieel.

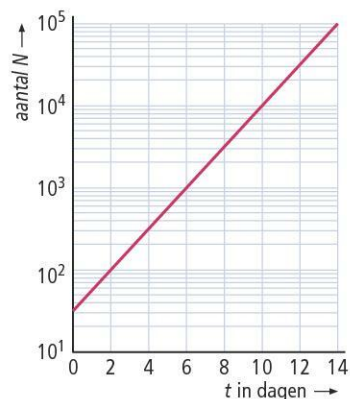
73 De grafiek gaat over het verband tussen een aantal N en de tijd t in dagen.

- In de grafiek zie je dat als $t = 11$ dat $N = 10^{4,25}$.
Hoe groot is N ? Rond je antwoord af op tientallen.
- Hoe groot is N als $t = 2$?
- Hoe groot is N als $t = 8$?
- Hoe groot is N als $t = 18$?
- Bij de grafiek hoort de formule $N = b \cdot g^t$, waarbij N het aantal is en t de tijd in dagen.
Bereken b en g .
- Bereken N als $t = 5$.
- Bereken t als $N = 2000$.



74 Hiernaast staat de grafiek van opdracht 73 nogmaals. Op de verticale as kun je nu direct de waarde van N aflezen.

- Hoe groot is N als $t = 0$?
- Hoe groot is N als $t = 6$?
- Lees af bij welke waarde van t er geldt dat $N = 3000$.
- En bij welke waarde van t is N gelijk aan 30 000?



Examenopdrachten

75 Het nieuwe vliegen

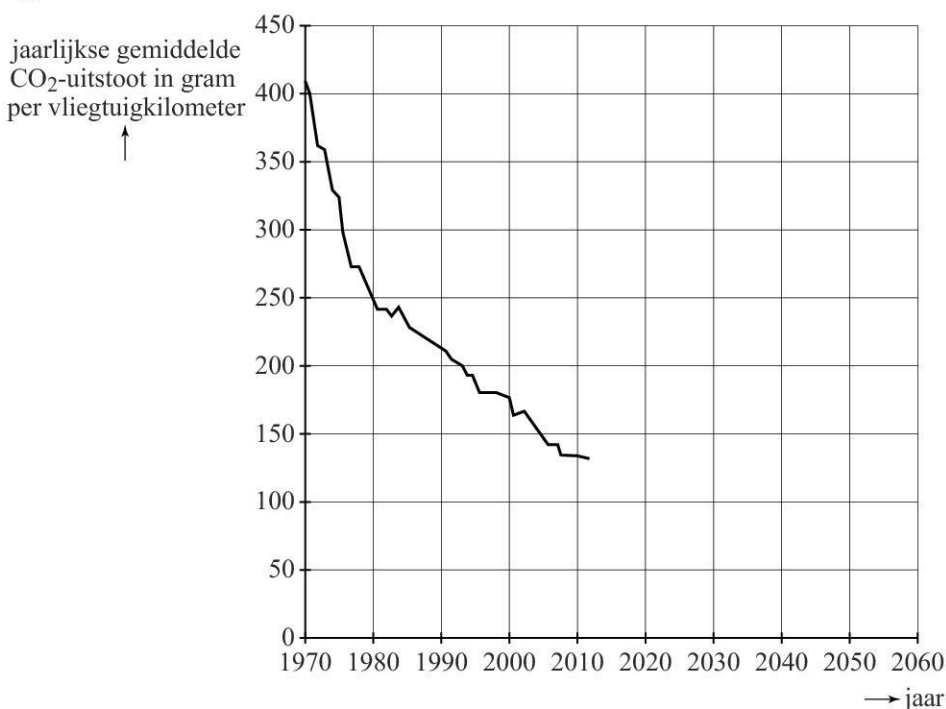
(Ontleend aan CE wwo wiskunde C 2018, tijdvak 2)

Vliegtuigen stoten veel vervuilend CO_2 uit. Daarom moet de luchtvaart een belangrijke bijdrage leveren aan de vermindering van de CO_2 -uitstoot. De CO_2 -uitstoot van vliegtuigen wordt gemeten in gram CO_2 per zogeheten vliegtuigkilometer. Een vliegtuigkilometer is een afgelegde kilometer door een vliegtuigpassagier.

In figuur 1 zie je vanaf het jaar 1970 de jaarlijkse gemiddelde CO_2 -uitstoot per vliegtuigkilometer.

In de periode van 1980 tot 2010 is de jaarlijkse gemiddelde CO_2 -uitstoot per vliegtuigkilometer vrijwel lineair gedaald van 250 tot 135 gram.

figuur 1



Het is niet waarschijnlijk dat de uitstoot lineair zal blijven dalen. Een realistischer model gaat uit van een daling die telkens minder sterk wordt tot een zekere grenswaarde is bereikt. Hiervoor geldt de formule:

$$C = 40 + a \cdot b^t.$$

Hierbij is C de jaarlijkse gemiddelde CO_2 -uitstoot per vliegtuigkilometer in grammen en t in jaren met $t = 0$ in 1980.

- a Bereken de waarden van a en b om dit model in overeenstemming te krijgen met de eerder gegeven waarden in 1980 en 2010. Geef in je antwoord a als een geheel getal en b afgerond op drie decimalen.

Hint 29

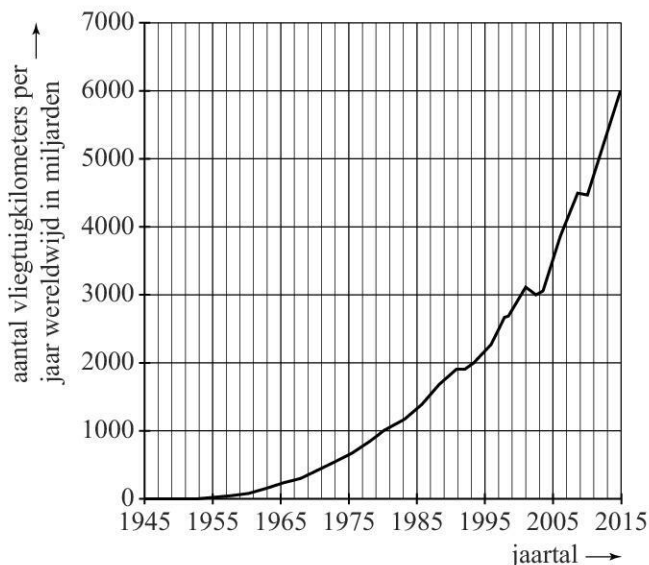
In figuur 1 is goed te zien dat de aanvankelijk sterke daling van de jaren 70 steeds minder werd. Daarom wordt ook wel gerekend met een model waarin de jaarlijkse gemiddelde CO_2 -uitstoot per vliegtuigkilometer in de periode van 1970 tot 2010 exponentieel is gedaald met 2,7% per jaar.

Deze daling zal niet het gewenste effect hebben. Het aantal vliegtuigkilometers per jaar stijgt exponentieel. Zie figuur 2. En als het aantal vliegtuigkilometers per jaar blijft stijgen zoals het de afgelopen decennia heeft gedaan, zal de totale jaarlijkse CO_2 -uitstoot niet dalen maar blijven toenemen.

Neem aan dat het aantal vliegtuigkilometers per jaar exponentieel blijft toenemen zoals in de periode van 1980 tot 2015 in figuur 2 en dat de jaarlijkse gemiddelde CO_2 -uitstoot per vliegtuigkilometer blijft dalen met 2,7% per jaar.

- b** Bereken met hoeveel procent per jaar de totale jaarlijkse CO_2 -uitstoot dan stijgt in de komende jaren. Rond je antwoord af op één decimaal.

figuur 2



Hint 30

76 Cupcakes

(Ontleend aan CE vwo wiskunde C 2018, tijdvak 2)

Carmen gaat cupcakes bakken. Volgens het recept moeten de cupcakes 20 minuten gebakken worden op een temperatuur van 175°C . Carmen weet dat cupcakes gaar zijn als de kerntemperatuur van de cupcakes 95°C is. Carmen veronderstelt daarom dat de kerntemperatuur van cupcakes in 20 minuten van kamertemperatuur (20°C) stijgt naar 95°C . Als deze toename exponentieel verloopt, dan hoort daar de volgende formule bij: $K = 20 \cdot 1,081^t$, met K de kerntemperatuur en t de tijd in minuten. Hierbij is $t = 0$ het tijdstip waarop de cupcakes de oven ingaan. De groeifactor 1,081 in de formule is afgerond op drie decimalen.

- a** Bereken de waarde van deze groeifactor in vijf decimalen nauwkeurig.



Hint 31

Carmen vraagt zich af of ze ook had kunnen aannemen dat de kerntemperatuur lineair stijgt. Ze wil onderzoeken welk model het beste past: het lineaire of het eerder gebruikte exponentiële model. Daartoe meet Carmen na 12 minuten de kerntemperatuur van haar cupcakes. Deze blijkt 52°C te zijn.

- b** Onderzoek of het lineaire of het exponentiële model het beste past bij deze waarneming.

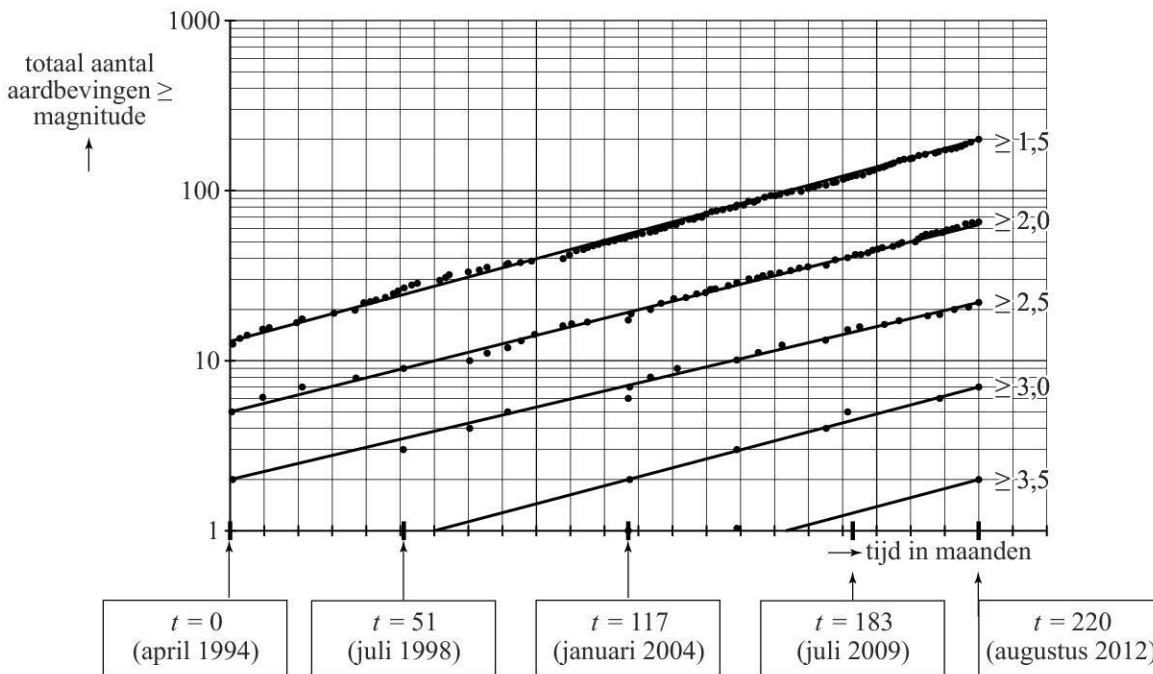
Hint 32

77 Groningse aardbevingen

(Ontleend aan CE vwo wiskunde C 2019, tijdvak 1)

In de provincie Groningen vinden, als gevolg van gasproductie, regelmatig aardbevingen plaats. In 2013 is daar grootschalig onderzoek naar gedaan. Zo werd er gekeken naar het verband tussen de gasproductie en aardbevingen.

De magnitude, de kracht van een aardbeving, wordt uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter. In de figuur zijn de Groningse aardbevingen vanaf 1994 verzameld en ingedeeld naar sterkte. Dat geeft bij een logaritmische schaalverdeling langs de verticale as een opvallend patroon: alle grafieken zijn bij benadering evenwijdige rechte lijnen. Elke stip in deze figuur stelt een aardbeving van een zekere magnitude voor: zo kun je zien dat er vlak voor juli 2009 een aardbeving van magnitude $\geq 3,0$ heeft plaatsgevonden: die aardbeving zie je dus ook terug bij de aardbevingen van de klassen $\geq 2,5$; $\geq 2,0$ en $\geq 1,5$.

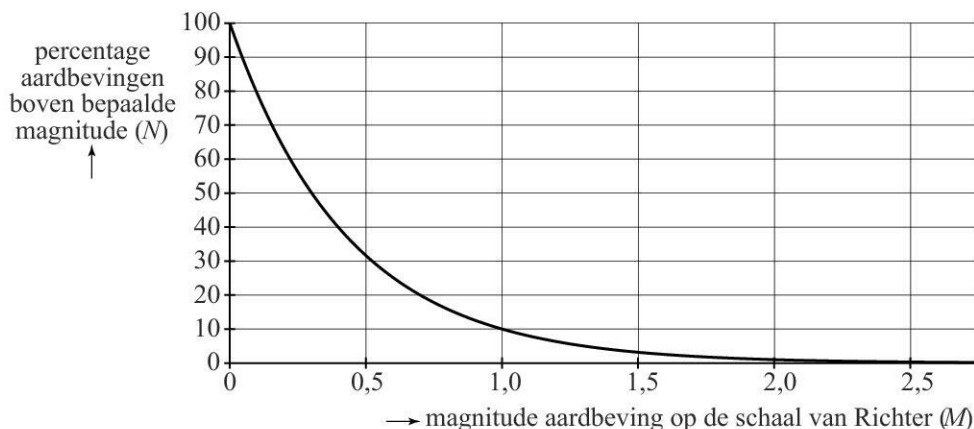


In het onderzoek werden alleen aardbevingen bekeken die schade zouden kunnen veroorzaken. Omdat aardbevingen met een magnitude van minder dan 1,5 geen schade aanrichten, zijn deze niet in de figuur opgenomen.

- a** Bereken voor augustus 2012 hoeveel procent van het aantal aardbevingen van magnitude $\geq 2,0$ een magnitude van 2,5 of hoger heeft. Geef je antwoord in gehele procenten.

Hint 33

In een rapport van het Staatstoezicht op de Mijnen wordt geconstateerd dat er een duidelijk verband is tussen de magnitude en het percentage aardbevingen boven die magnitude. In de figuur hieronder is dat verband weergegeven.



Zo is bijvoorbeeld af te lezen dat 10% van de aardbevingen een magnitude boven de 1,0 heeft. Bij deze grafiek hoort de formule: $N = 10^{a-M}$

Hierbij is M de magnitude en N het percentage van de aardbevingen boven magnitude M .

b Laat met een berekening zien dat geldt: $a = 2$.

Hint 34

78 Wikipedia

(Ontleend aan *CE vwo wiskunde C pilot 2014, tijdvak 2*)

Wikipedia is een internationale internet-encyclopedie. In maart 2012 bevatte de Nederlandstalige editie ruim één miljoen artikelen. In de tabel staan gegevens van 2012.

datum	22 maart	29 maart	5 april	12 april	19 april
aantal	1 033 414	1 034 660	1 035 882	1 037 184	1 038 340

Zoals in bovenstaande tabel te zien is, groeit het aantal artikelen flink. Sommigen beweren dat hier sprake is van lineaire groei, anderen houden het op exponentiële groei.

a Onderzoek elk van deze beweringen.

Hint 35

Over een langere periode bleek de groei sterker te worden: in de 23 weken van 19 april tot 27 september 2012 groeide de Nederlandstalige Wikipedia uit tot 1 120 987 artikelen. Neem aan dat het aantal artikelen vanaf 19 april exponentieel groeide en in de toekomst met dezelfde factor blijft groeien.

b Bereken het aantal artikelen op 19 april 2014.

Hint 36

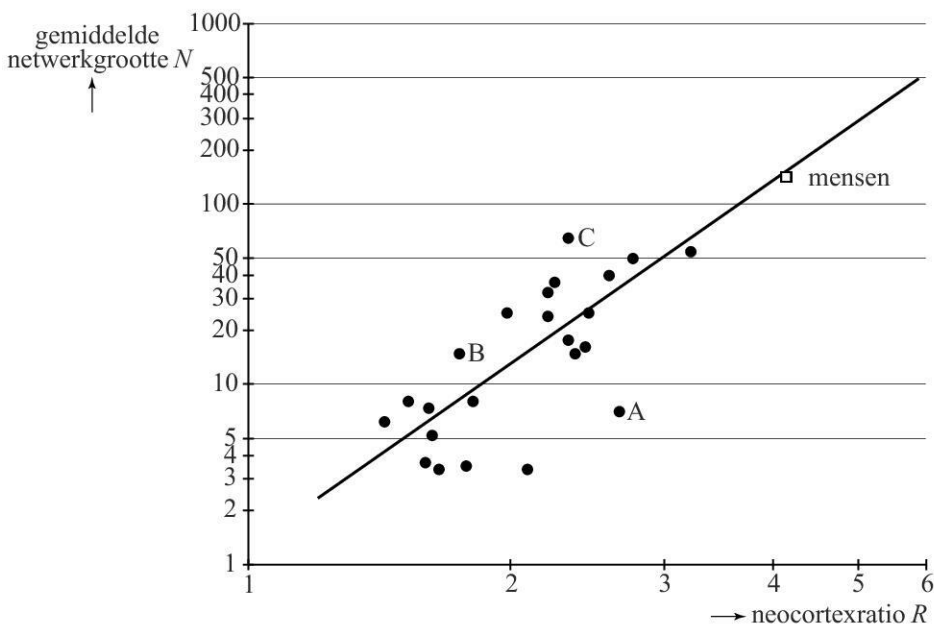
79 Het getal van Dunbar

(Ontleend aan *CE vwo wiskunde C pilot 2014, tijdvak 2*)

Een groep mensen of dieren die op de een of andere manier sociaal contact met elkaar onderhouden, noemt men een sociaal netwerk.

Tegenwoordig vind je sociale netwerken bijvoorbeeld op Facebook en ook in vriendengroepen, families en verenigingen.

De onderzoeker Robin Dunbar bestudeerde de relatie tussen de gemiddelde netwerk grootte (N) van diverse soorten primaten (apen en mensen) en hun zogeheten neocortexratio (R), een maat voor de omvang van de hersenschors.



In de figuur kun je aflezen dat de gemiddelde netwerk grootte van mensen ongeveer 150 is. Daarom wordt 150 wel ‘het getal van Dunbar’ genoemd.

De zwarte stippen horen bij verschillende soorten apen. In de figuur is ook de best passende lijn getekend bij deze gegevens. Beide assen hebben een logaritmische schaalverdeling. Voor de mens geeft deze lijn de gemiddelde netwerk grootte vrij goed aan, maar er zijn apensoorten waarbij er een fors verschil is tussen de werkelijke waarde en de waarde volgens de lijn.

In de figuur zijn 3 apensoorten met de letters A, B en C aangegeven.

- a** Onderzoek bij welke van deze soorten het verschil tussen de werkelijke waarde en de waarde volgens de lijn het grootst is.

Hint 37

In de figuur is bijvoorbeeld voor $R = 4$ de waarde van N niet precies af te lezen. Een formule voor de getekende lijn is $\log(N) = 0,1 + 3,4 \cdot \log(R)$.

- b** Bereken met behulp van de formule de waarde van N als $R = 4$.

Hint 38

De formule voor de getekende lijn $\log(N) = 0,1 + 3,4 \cdot \log(R)$ kun je

herschrijven tot de vorm $N = c \cdot R^{3,4}$.

- c** Bepaal c in één decimaal nauwkeurig.

Hint 39

Gemiddelde verandering

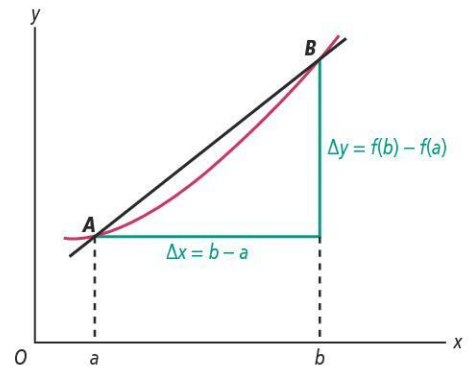
Om veranderingen aan te geven wordt vaak het symbool Δ (delta) gebruikt. Een verandering van x geef je aan met Δx . Bij formule f hoort bij elke toename Δx , een toename Δy of Δf van de uitkomsten van de formule.

De gemiddelde verandering van de uitkomst van een

formule f over het interval $[a, b]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

De gemiddelde verandering van de uitkomst van een formule f over het interval $[a, b]$ is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de lijn door het beginpunt en het eindpunt op dat interval.

In tijd-afstand situaties is de gemiddelde verandering gelijk aan de gemiddelde snelheid.



- 80 De afstand die een bepaald voertuig aflegt, voldoet aan de formule $s = 40 \cdot 1,3^t$ met t in minuten en s in meters. Bereken de gemiddelde snelheid in meters per seconde van dit voertuig tussen $t = 3$ en $t = 6$.

Helling van een grafiek in een punt

De helling van een grafiek in een punt P kun je grafisch benaderen door in het punt P een raaklijn aan de grafiek te tekenen. Je berekent de helling van deze raaklijn met behulp van de coördinaten van twee punten op de raaklijn. De helling van deze raaklijn is een benadering van de helling in punt P van de grafiek.

Voorbeeld

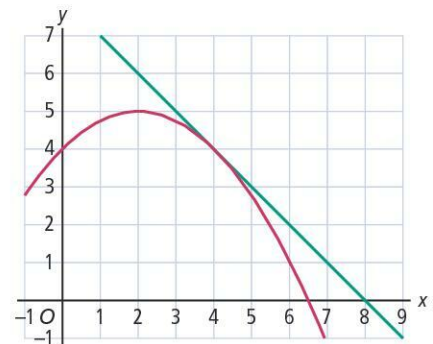
Benader grafisch de helling van de grafiek in het punt met $x = 4$.

Oplossing

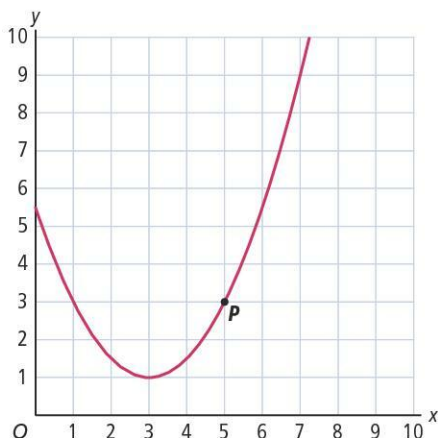
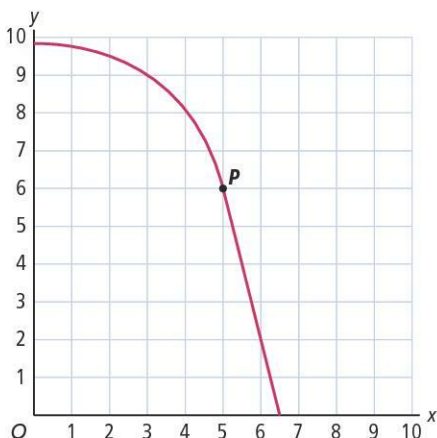
De raaklijn gaat door de punten $(2, 6)$ en $(8, 0)$.

De helling van de raaklijn is $\frac{0 - 6}{8 - 2} = \frac{-6}{6} = -1$.

De helling van de grafiek in het punt met $x = 4$ is ongeveer -1 .



- 81 Benader grafisch de helling van de grafieken in het punt P .



Recursieve formule

Een opeenvolging van getallen heet een rij en de getallen in de rij heten de termen. Bij veel getallenrijen kun je de volgende term berekenen uit de voorafgaande term(en) met een formule. Dit heet recursie en de bijbehorende formule heet een recursieve formule.

De termen van een rij noteer je met de indexnotatie zoals u_0 , u_1 en u_n , of met de functienotatie $u(0)$, $u(1)$ en $u(n)$. De getallen 0, 1, 2, 3, ..., $n-1$, n , $n+1$ zijn de rangnummers van de rij.

De eerste term van een rij heet de beginterm, dit kan $u(0)$ of $u(1)$ zijn. Om een rij vast te leggen, heb je één term nodig. Meestal kies je daarvoor de beginterm.

- 82 a Gegeven is de rij 34, 29, 24, 19.
Bereken de volgende vier termen van deze rij en stel een recursieve formule op.
- b Geef de termen u_1 tot en met u_5 bij de rij $u_{n+1} = 3 \cdot u_n - 4$ met $u_0 = 3$.
- c Gegeven is de rij 400, -200, 100, -50.
Bereken de volgende vier termen van deze rij en stel een recursieve formule op.

Voorbeeld

Gegeven is de rij 90, 86, 82, 78, 74, ...

De beginterm is $u(0) = 90$.

Bereken de volgende twee termen van deze rij en stel een recursieve formule op voor deze rij u .

Oplossing

Je ziet dat je de volgende term kunt berekenen door van de voorafgaande term 4 af te trekken.

n	0	1	2	3	4	5	6
$u(n)$	90	86	82	78	74	...	...

$$u(5) = 74 - 4 = 70 \text{ en } u(6) = 70 - 4 = 66$$

Een recursieve formule is

$$u(n) = u(n-1) - 4 \text{ met } u(0) = 90.$$

- 83** Gegeven is de recursieve formule $u(n+1) = 12 + 0,6 \cdot u(n)$ met $u(0) = 50$.
- Maak een tabel en een grafiek bij deze formule.
 - Naar welke grenswaarde naderen de termen van de rij?

Directe formule

Bij sommige rijen kun je de waarde van een term $u(n)$ direct berekenen met het rangnummer n , zonder gebruik te maken van voorafgaande termen.

Je gebruikt dan een directe formule. Bij rijen gegeven door een recursieve formule bereken je termen daarentegen op een indirecte manier.

- 84** Gegeven zijn de recursieve formule $u(n+1) = u(n) + 5$ met $u(0) = 17$ en de directe formule $u(n) = 17 + 5n$.
- Bereken met beide formules de termen $u(1)$ tot en met $u(6)$.
 - Horen de gegeven recursieve formule en directe formule bij dezelfde rij?

Rijen bij een lineair verband en bij een exponentieel verband

Een rij waarvan je een term vindt door bij de voorafgaande term een constante a op te tellen, heet een rij bij een lineair verband.

Een recursieve formule van een dergelijke rij is van de vorm $u(n+1) = u(n) + a$ met beginterm $u(0) = b$.

De directe formule is $u(n) = b + a \cdot n$.

Een rij waarvan je een term vindt door de voorafgaande term met een constant getal g te vermenigvuldigen, heet een rij bij een exponentieel verband.

Een recursieve formule is van de vorm $u(n+1) = g \cdot u(n)$ met beginterm $u(0) = b$ en groeifactor g .

De bijbehorende directe formule is $u(n) = b \cdot g^n$.

Je kunt een recursieve formule invullen op je rekenmachine door de instelling van je rekenmachine op rij of recursie te zetten.

Voorbeeld 1

De rij 150, 155, 160, 165, ... heeft beginterm $u_0 = 150$.
Stel een recursieve en een directe formule op bij deze rij.

Oplossing

n	0	1	2	3
u_n	150	155	160	165

Je kunt de volgende term berekenen door bij de voorafgaande term 5 op te tellen.

De toename is dus 5.

De recursieve formule is

$$u_n = u_{n-1} + 5 \text{ met } u_0 = 150.$$

De directe formule is $u_n = 5n + 150$.

Voorbeeld 2

Stel een recursieve formule en een directe formule op bij de rij $v(1) = 1000$, $v(2) = 500$, $v(3) = 250$, $v(4) = 125$, ...

Oplossing

n	1	2	3	4
$v(n)$	1000	500	250	125

Je kunt de volgende term berekenen door de voorafgaande term met $\frac{1}{2}$ te vermenigvuldigen, dus $g = \frac{1}{2}$.

De recursieve formule is $v(n+1) = \frac{1}{2} \cdot v(n)$ met $v(1) = 1000$.

$$v(0) = 1000 : \frac{1}{2} = 2000$$

De directe formule is $v(n) = 2000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

- 85** Van een rij u is gegeven $u(1) = 100$, $u(2) = 97$, $u(3) = 94$, $u(4) = 91$, ...
- Is de rij u een rij bij een lineair verband of een rij bij een exponentieel verband?
 - Geef een recursieve formule bij de rij u .
 - Geef een directe formule bij de rij u .
- 86** Rij v hoort bij een exponentieel verband met groeifactor 2,5. Verder is gegeven dat $v(0) = 20$.
- Bereken $v(3)$.
 - Stel een directe formule op bij rij v .
- 87** Gegeven zijn de rijen:
- A: 14, 9, 4, -1, ... C: 3, 7, 15, 31, ...,
- B: $\frac{1}{2}$, 2, 8, 32, ... D: 10; 12; 14,4; 17,28; ...
- Welke rijen horen bij een lineair verband? En welke bij een exponentieel verband?
 - Stel de recursieve formules op bij de gegeven rijen.
 - Stel bij de rijen die bij een lineair of exponentieel verband horen de directe formules op.

Examenopdrachten

88 Muziek op cd's

(Ontleend aan CE vwo wiskunde C pilot 2014, tijdvak 2)

De verkoop van cd's is de laatste jaren sterk aan het dalen. Een belangrijke reden van deze terugloop is de mogelijkheid om muziek te downloaden van het internet. We zoeken een model waarmee we de toekomstige downloadverkoop kunnen beschrijven. Een model dat redelijk past bij de gegevens tot nu toe wordt gegeven door de onderstaande formules:

$$\begin{cases} C_{n+1} = 0,91 \cdot C_n \text{ en } \begin{cases} D_{n+1} = 0,0526 \cdot D_n \cdot (38,012 - D_n) \\ D_0 = 0,7 \end{cases} \end{cases}$$

Hierbij is C_n het aantal verkochte cd's in miljoenen in jaar n en D_n het aantal downloadverkoppen in miljoenen in jaar n , met $n = 0$ is het jaar 2008.

Volgens het model zal de downloadverkoop in 2013 voor het eerst groter zijn dan de cd-verkoop.

- a** Bereken hoeveel procent meer downloadverkoppen dan cd-verkoppen er in 2013 volgens het model zijn.

Hint 40

Volgens het model voor D_n zal het aantal downloadverkoppen stijgen naar een bepaalde grenswaarde.

- b** Onderzoek hoe groot deze grenswaarde is.

Hint 41

89 WK 2010

(Ontleend aan CE vwo wiskunde C pilot 2013, tijdvak 2)

Aan het wereldkampioenschap voetbal 2010 in Zuid-Afrika deden 32 landen mee. Ze speelden eerst een groepsfase. Hierin speelden de landen in 8 poules van 4 teams. In zo'n poule speelt ieder team één wedstrijd tegen elk ander team. De twee hoogst eindigende teams per poule gingen door naar de knock-outfase. Deze overgebleven teams speelden allemaal één wedstrijd tegen een ander team en de verliezer moest naar huis. De winnaars gingen door en speelden weer één wedstrijd tot er uiteindelijk nog twee teams over waren. Die speelden de finale. Er was ook nog een wedstrijd om de derde plaats. In 1974 deden er maar 16 teams mee aan het WK. Die speelden volgens hetzelfde schema: eerst in poules van 4 en de twee hoogst eindigende teams naar de knock-outfase.

- a** Ga met een berekening na of de verdubbeling van het aantal deelnemende teams ook geleid heeft tot een verdubbeling van het totaal aantal wedstrijden.

Hint 42

Alle WK's kenden een groepsfase met poules van 4 teams. Dat hoeft natuurlijk niet. Er zouden ook meer teams in een poule kunnen zitten. Dat leidt dan wel tot een groter aantal poulewedstrijden.

$W(n)$ is het aantal wedstrijden in een poule met n teams. Er geldt nu de volgende formule: $W(n+1) = W(n) + n$. In deze formule is $W(n+1)$ het aantal wedstrijden in een poule met $n+1$ teams en $W(1) = 0$.

- b** Toon aan dat deze formule klopt voor $n = 10$.

Hint 43

90 Wisselslag

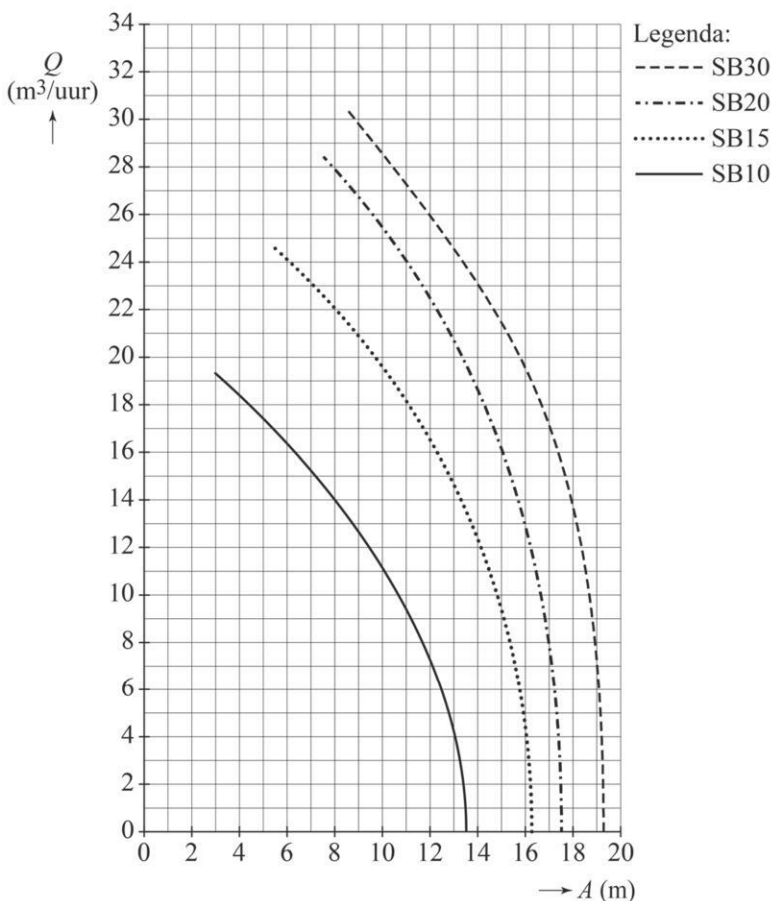
(Ontleend aan CE vwo wiskunde C 2021, tijdvak 1)

Zwembad De Wisselslag in Blerick (Limburg) heeft drie binnenbaden, waaronder een wedstrijdbad met een inhoud van 647 m^3 , en een buitenbad. Om een zwembad te vullen kunnen er verschillende types pompen gebruikt worden. Hoe verder een pomp van het zwembad af staat, hoe meer tijd het kost om het zwembad te vullen.

In onderstaande figuur is voor vier verschillende pompen de hoeveelheid water die een pomp per uur kan vullen (Q) in m^3 per uur uitgezet tegen de afstand van de pomp tot het zwembad (A) in meters. Het wedstrijdbad van De Wisselslag wordt gevuld met behulp van een pomp van type SB15 op 8 meter afstand. Als de medewerkers op diezelfde afstand een pomp van type SB20 zouden gebruiken, zou er minder tijd nodig zijn om het zwembad te vullen.

- a** Bereken met behulp van de figuur hoeveel tijd er dan minder nodig zou zijn om het zwembad te vullen. Geef je antwoord in een geheel aantal minuten.

Hint 44



De grafiek die hoort bij een pomp van type SB10 staat ook in de figuur.

- b** Schat met behulp van de figuur de waarde van de helling van de grafiek bij $A = 10$ en leg uit wat de betekenis is van deze waarde. Geef de waarde van de helling in één decimaal.

Hint 45

91 Cupcakes

(Ontleend aan CE vwo wiskunde C 2018, tijdvak 2)

Het Amerikaanse bedrijf Tasty Layers heeft zich gespecialiseerd in het maken van heel hoge en grote torens van cupcakes. Voor grote feesten en bruiloften maakt Tasty Layers bouwwerken met daarop honderden cupcakes. Op de foto zie je een voorbeeld van zo'n bouwwerk. De toren op de foto heeft 9 lagen. Om uit te rekenen hoeveel cupcakes er (ongeveer) op deze toren staan gebruiken we het volgende model:

$$\begin{cases} A_n = 1,4 \cdot A_{n-1} \\ A_1 = 6 \end{cases}$$

In deze formule is A_n een benadering van het aantal cupcakes op de n^e laag, met $n = 1$ voor de bovenste laag. Omdat er natuurlijk op iedere laag een geheel aantal cupcakes staat, moeten we de waarden van A_n op de gebruikelijke manier op helen afronden. Omdat $A_2 = 8,4$ komen er 8 cupcakes op de tweede laag, en omdat $A_3 = 1,4 \cdot 8,4 = 11,76$ komen er dus 12 cupcakes op de derde laag.

Enzovoort.

Zo krijg je voor de bovenste vijf lagen 6, 8, 12, 16 en 23 cupcakes, dus in totaal 65 cupcakes.

In werkelijkheid staan er 300 cupcakes op de toren.

- a** Bereken hoeveel cupcakes het model afwijkt van de werkelijkheid.



Hint 46

Voor een groot bedrijfsfeest krijgt Tasty Layers de opdracht een cupcaketoren te maken met daarop 1000 cupcakes. Het bedrijf gebruikt voor deze opdracht een toren met op de bovenste laag 6 cupcakes en op elke volgende laag 18 cupcakes meer. We nemen weer $n = 1$ voor de bovenste laag.

- b** Stel een formule op voor het aantal cupcakes op de n^e laag en bereken daarmee vanaf welke laag er meer dan 160 cupcakes op een laag staan.

Hint 47

Bewering, redenering, uitgangspunt en conclusie

Een uitspraak die waar of onwaar kan zijn, heet een bewering of propositie. Als een bewering onwaar is, kun je dit vaak met een voorbeeld aantonen. Dit heet een tegenvoorbeeld. Met behulp van beweringen kun je een redenering opbouwen.

Een correcte redenering is volledig, dat wil zeggen dat de beweringen waaruit de redenering bestaat voldoende zijn om de conclusie te kunnen trekken.

Een redenering bestaat uit één of meerdere uitgangspunten en een conclusie. Het trekken van een conclusie is een redeneerstap.

uitgangspunt, uitgangspunt dus conclusie

Een redenering met één of meer uitgangspunten en een conclusie heet een samengestelde bewering. Een als-dan-bewering is een voorbeeld van een samengestelde bewering.

Voorbeeld 1

Een kind van zes jaar redeneert: als een auto duurder is dan een fiets en een fiets is duurder dan een step, dan is een auto duurder dan een step.
Geef de uitgangspunten en de conclusie van deze redenering.

Oplossing

Uitgangspunten: Een auto is duurder dan een fiets.
Een fiets is duurder dan een step.
Conclusie: Een auto is duurder dan een step.

Voorbeeld 2

Je gooit één keer met een dobbelsteen.
Geef aan of de volgende redeneringen correct zijn.

- 1 Als het aantal ogen even is, dan is er een zes gegooid.
- 2 Als het aantal ogen oneven en lager dan 3 is, dan is er een één gegooid.

Oplossing

Redenering 1 is niet correct, want als het aantal ogen even is, dan kan er ook een twee of een vier gegooid zijn.
Redenering 2 is correct, want als het aantal ogen oneven en lager dan 3 is, dan moet er een één zijn gegooid.

- 92 Geef van de volgende beweringen aan of ze waar of niet waar zijn. Leg steeds je antwoord uit.
- a Als het regent, word je nat.
 - b Mannen zijn langer dan vrouwen.
 - c De gemiddelde lengte van mannen is hoger dan die van vrouwen.
 - d Als a een getal groter dan 4 is, dan is a^2 groter dan 16.
 - e Als a^2 groter is dan 9, dan is a een getal groter dan 3.
 - f Als je met twee dobbelstenen in totaal negen ogen hebt gegooid en met de ene dobbelsteen een even aantal ogen, dan heb je met de andere dobbelsteen drie ogen gegooid.
 - g Drop kun je alleen in Nederland kopen, dus als je in een winkel komt die geen drop verkoopt, bevind je je in het buitenland.

Implicatie, ontkenning, $\wedge$ en $\vee$

Een bewering van de vorm 'als A dan B ' ofwel 'uit A volgt B ' heet een implicatie. Een implicatie kun je met behulp van het symbool $\Rightarrow$ noteren als $A \Rightarrow B$. Als $A \Rightarrow B$ waar is, dan hoeft $B \Rightarrow A$ niet waar te zijn.

De ontkenning van A kun je met het symbool $\neg$ noteren als $\neg A$.

Als $A \Rightarrow B$ waar is, dan is $\neg B \Rightarrow \neg A$ ook waar. Het implicatiesymbool en het ontkenningssymbool zijn voorbeelden van logische symbolen.

A is een nodige voorwaarde voor B als geldt dat B alleen maar waar kan zijn als A waar is. A is een voldoende voorwaarde voor B als geldt dat B altijd waar is als A waar is.

In beweringen wordt vaak gebruik gemaakt van de logische verbindingswoorden *en* en *of*. Voor *en* gebruik je het symbool $\wedge$ en voor *of* gebruik je het symbool $\vee$. Met het symbool $\vee$ wordt de 'inclusieve of' bedoeld.

Voorbeeld 1

In de winter verliest een eik zijn bladeren.

Je kunt deze bewering modelleren als:

A : De boom is een eik.

B : De boom verliest in de winter zijn bladeren.

De bewering $A \Rightarrow B$ is een ware bewering.

De bewering $\neg B \Rightarrow \neg A$ is ook waar, want als een boom 's winters niet zijn bladeren verliest, dan is het geen eik.

De bewering $\neg A \Rightarrow \neg B$ is niet waar, want een beuk is geen eik, maar verliest toch 's winters zijn bladeren.

Voorbeeld 2

De docent heeft een cijfer tussen 0 en 10 in gedachten en doet de volgende beweringen:

A : Het cijfer is even.

B : Het cijfer is hoger dan 7.

C : Het cijfer is oneven.

D : Het cijfer is een 8.

De bewering $A \wedge B \Rightarrow D$ is waar, want als het cijfer even en hoger dan 7 is, dan moet het een 8 zijn.

De bewering $D \Rightarrow B \wedge C$ is niet waar, want als het cijfer gelijk is aan 8, dan is het wel hoger dan 7, maar niet oneven.

- 93** Bij het gokspel roulette wordt een balletje in een ronde bak met genummerde vakjes rondgedraaid tot het balletje in een van de vakjes valt. De nummers in de vakjes zijn zwart of rood.

Hiernaast zie je de tafel met de nummers waarop je kunt inzetten. Je kunt op een nummer inzetten, of op even/oneven of op een groep van nummers.

Bekijk de volgende beweringen.

E : Het nummer is even.

R : Het nummer is rood.

L : Het nummer staat in de linker kolom.

M : Het nummer staat in het middelste blok van 12 nummers.

P : Je hebt gewonnen met je inzet.

- Voor welke nummers is de bewering $E \wedge R \wedge L \Rightarrow P$ een ware bewering?
- En welke voor de bewering $\neg L \vee (M \wedge E \wedge \neg R) \Rightarrow P$?
- En voor de bewering $E \vee R \vee M \vee L \Rightarrow \neg P$?

0					
PASSE	1	2	3		
	4	5	6		
	7	8	9		
	10	11	12		
PAIR	13	14	15		
	16	17	18		
	19	20	21		
	22	23	24		
 	25	26	27		
	28	29	30		
	31	32	33		
	34	35	36		
			 		
P ¹²	M ¹²	D ¹²	D ¹²	M ¹²	P ¹²

Contradictie en paradox

Een samengestelde bewering heet een contradictie of tegenspraak als twee beweringen in de samenstelling elkaar uitsluiten. Een contradictie kun je noteren als $A \wedge \neg A$. Soms lijkt een bewering een tegenspraak te bevatten, maar blijkt dat bij nader inzien niet het geval te zijn. Een dergelijke bewering heet een schijncontradictie of paradox. Een paradox gaat vaak in tegen je gevoel voor logica, je verwachting of je intuïtie.

Voorbeeld 1

Contradicties zijn:

- een vierkante cirkel. Dit is een contradictie, want een figuur kan niet tegelijkertijd een vierkant en een cirkel zijn.
- Maarten sneed de pizza in twee helften en nam zelf het grootste stuk. Ook dit is een contradictie, want de twee helften van een pizza zijn precies even groot, dus kan Maarten niet het grootste stuk pakken.

Voorbeeld 2

Paradoxen zijn:

- oorverdovend stil. Dit is een paradox, want bij oorverdovend denk je in eerste instantie aan veel geluid.
- niets is volledig waar. Dit is een paradox, want als deze bewering waar is, dan is hij tegelijkertijd niet helemaal waar en dus onwaar.

94 Je trekt een kaart uit een volledig kaartspel. Bij de getrokken kaart formuleer je de volgende beweringen.

R : De kaart is rood.

D : De kaart is een dame.

S : De kaart is een schoppen.

A : De kaart is een aas.

H : De kaart is een harten.

Geef van de volgende beweringen aan voor welke kaart(en) de bewering waar is of dat er sprake is van een contradictie.

a $R \wedge S$

d $H \wedge D \wedge A$

b $\neg R \wedge H$

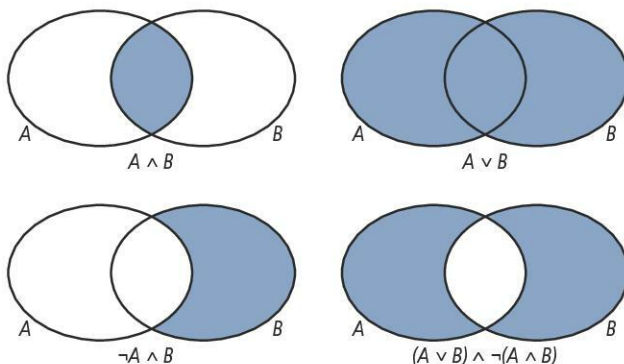
e $(H \wedge D) \vee A$

c $H \wedge (D \vee A)$

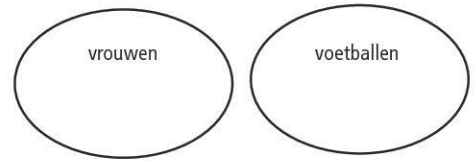
f $(R \vee S) \wedge A$

Venndiagrammen

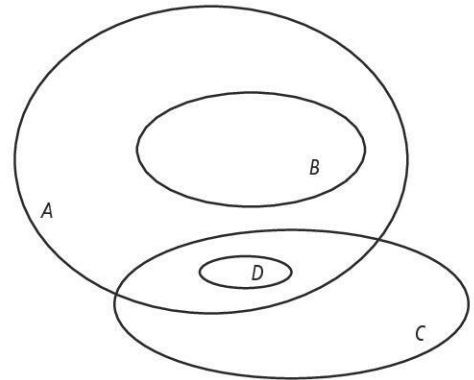
Een Venndiagram is een grafische voorstelling van de logische relaties tussen meerdere groepen.



- 95** Het Venndiagram hoort bij de bewering:
 ‘Vrouwen kunnen niet voetballen’.
 Teken een Venndiagram bij elk van de volgende beweringen.
- Sommige vrouwen kunnen voetballen.
 - Sommige vrouwen kunnen niet voetballen.
 - Alle vrouwen kunnen voetballen.
 - Alleen vrouwen kunnen voetballen.



- 96** Bij de beweringen A , B , C en D hoort het Venndiagram.
 Geef van de volgende beweringen aan of ze wel of niet juist zijn.
- $A \Rightarrow B$
 - $A \wedge B \Rightarrow B$
 - $A \vee B \Rightarrow A$
 - $A \wedge C \Rightarrow D$
 - $D \Rightarrow A \wedge \neg B$
 - $B \vee D \Rightarrow A$



Examenopdrachten

97 **Het Cyrillische alfabet**

(Ontleend aan CE vwo wiskunde C 2018, tijdvak 1)

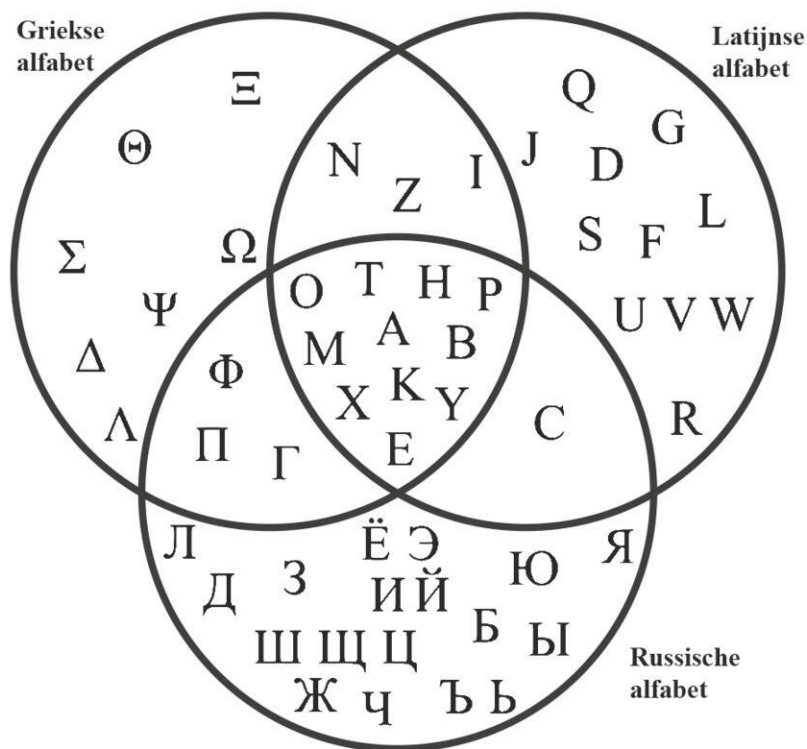
Het Cyrillische alfabet is het alfabet van diverse Oost-Europese landen. Het wordt onder andere gebruikt in Servië, Bulgarije en Rusland.

Hoewel er officieel maar één Cyrillisch alfabet is, hebben deze drie landen elk hun eigen variant. Er geldt:

- In deze drie landen samen worden 39 verschillende letters gebruikt.
 - Van deze 39 letters komen er 24 voor in alle drie de landen.
 - Er zijn 3 letters die alleen in Rusland voorkomen.
 - Het Bulgaarse alfabet heeft 30 letters.
 - Alle letters in het Bulgaarse alfabet komen ook voor in het Russische alfabet.
 - Het Servische alfabet heeft 6 unieke letters, die dus niet in het Russische of Bulgaarse alfabet voorkomen.
- a** Onderzoek hoeveel letters het Servische alfabet heeft

Hint 48

Net als ons eigen alfabet (het Latijnse alfabet) is ook het Russische alfabet afgeleid van het Griekse alfabet. Het is dan ook niet verwonderlijk dat er veel letters zijn die in meerdere alfabetten voorkomen. In onderstaande figuur zijn alle letters uit het Latijnse, Griekse en Russische alfabet weergegeven in een Venn-diagram.



Met behulp van logische symbolen kunnen we beschrijven in welke alfabetten de letters voorkomen. We gebruiken daarvoor de volgende afkortingen:

- G : de letter komt voor in het Griekse alfabet.
- R : de letter komt voor in het Russische alfabet.
- L : de letter komt voor in het Latijnse alfabet.
- A : de letter komt voor in alle drie de alfabetten.

De letter Π behoort tot de letters waarvoor geldt: $R \wedge G$.

Voor een aantal letters geldt: $G \wedge L \wedge \neg A$

b Geef aan voor welke letters dit geldt. Licht je antwoord toe.

Hint 49

Iemand schrijft de volgende bewering op: $(R \wedge G \wedge \neg A) \Rightarrow L$

c Vertaal deze logische symbolen naar een Nederlandse zin en onderzoek of de bewering waar is.

Hint 50

98 Daling nieuwe eerstejaars pabo's

(Ontleend aan CE vwo wiskunde C 2018, tijdvak 2)

De onderstaande tekst is gebaseerd op een artikel van februari 2016 uit het Onderwijsblad van de Algemene Onderwijsbond.

De pabo's krijgen gemiddeld een derde minder nieuwe eerstejaars binnen. Schrijnend is de situatie bij de Haagse Hogeschool waar, volgens de cijfers van Vereniging Hogescholen, de instroom keldert met 58%. Het Onderwijsblad voorspelde al een flinke duikeling bij de pabo's door de vele toelatingstoetsen. Uiteindelijk noteren de pabo's 1820 nieuwe eerstejaars minder, een daling van 32 procent. Minister Jet Bussemaker is niet verrast. Zij wijt de daling aan de afschaffing van de studiebeurs en de strengere eisen op de pabo's.

Het artikel spreekt van een daling van 32% nieuwe eerstejaars in 2015 ten opzichte van het jaar ervoor.

- a** Bereken het aantal nieuwe eerstejaars in 2014. Rond je antwoord af op tientallen.

Hint 51

We kijken nu naar de laatste zin van het artikel. Hiervoor introduceren we de volgende afkortingen:

D: daling van het aantal nieuwe eerstejaars

A: afschaffing van de studiebeurs

S: strengere eisen op de pabo's

Stel nu dat minister Bussemaker met het woordje 'en' bedoelt dat de afschaffing van de studiebeurs in combinatie met de strengere eisen op de pabo's zorgt voor een daling van het aantal nieuwe eerstejaars.

- b** Schrijf de uitspraak van minister Bussemaker met behulp van logische symbolen en bovenstaande afkortingen

Hint 52

Naar aanleiding van de uitspraak van minister Bussemaker vermoedde men op sommige pabo's dat het volgende zou gaan gelden: $(A \Rightarrow D) \Rightarrow V$

Hierin betekent de afkorting *V*: het collegegeld wordt verlaagd.

c Vertaal de bewering $(A \Rightarrow D) \Rightarrow V$ in een gewone zin.

Hint 53

Bij sommige pabo's krijgen studenten aan het begin van hun eerste jaar een rekentoets. Bij een onvoldoende worden ze in de loop van het eerste jaar bijgespijkerd en krijgen ze voor de zomer een nieuwe rekentoets. Als ze hier niet voor slagen, mogen ze niet door naar het tweede jaar. We introduceren weer afkortingen:

R: slagen voor rekentoets

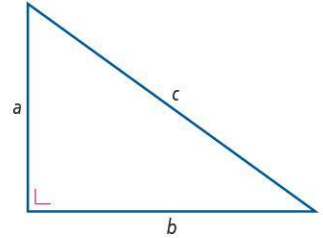
O: overgaan naar tweede jaar

- d** Onderzoek of $R \Rightarrow O$ volgt uit de tekst hierboven.

Hint 54

Formules

In elke rechthoekige driehoek geldt de stelling van Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$. Hierin zijn a en b de lengtes van de twee rechthoekszijden en c is de lengte van de langste zijde.



Bij het berekenen van oppervlaktes kun je gebruikmaken van de volgende oppervlakteformules:

oppervlakte rechthoek = lengte $\times$ breedte

oppervlakte driehoek = $\frac{1}{2} \times$ basis $\times$ hoogte

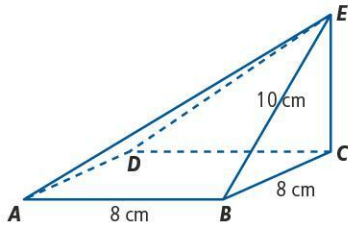
oppervlakte cirkel = $\pi \times$ straal²

De inhoud van een balk, prisma en cilinder kun je berekenen met de formule *inhoud* = *oppervlakte grondvlak* $\times$ *hoogte*.

De inhoud van een piramide en kegel kun je berekenen met de formule *inhoud* = $\frac{1}{3} \times$ *oppervlakte grondvlak* $\times$ *hoogte*.

Voorbeeld

Van de piramide $ABCD.E$ is het grondvlak $ABCD$ een vierkant met zijde 8 cm. De ribbe CE staat loodrecht op het grondvlak. Ribbe BE is 10 cm. Bereken de inhoud van de piramide.



Oplossing

De hoogte van de piramide is de lengte van de zijde CE in de rechthoekige driehoek BCE .

zijde	kwadraat
$BC = 8$	64
$CE = \dots$	$\frac{36}{+}$
$BE = 10$	100
$CE = \sqrt{36} = 6$	

De oppervlakte van het grondvlak is $8 \times 8 = 64 \text{ cm}^2$.

De inhoud van de piramide is $\frac{1}{3} \times 64 \times 6 = 128 \text{ cm}^3$.

Als twee figuren gelijkvormig zijn met een vergrotingsfactor k , dan geldt voor de oppervlakte van de twee figuren de vergrotingsfactor k^2 en voor de inhoud de vergrotingsfactor k^3 . Anders gezegd: worden de afmetingen van een ruimtelijk object k keer zo groot, dan is de oppervlakte van het hierdoor ontstane object k^2 keer zo groot en de inhoud k^3 keer zo groot.

Voorbeeld

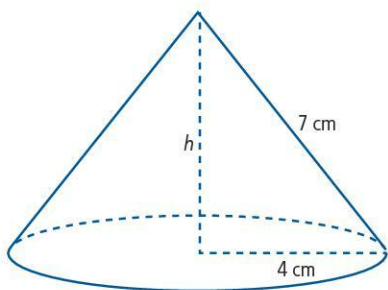
De totale oppervlakte van de piramide in het voorbeeld op de vorige bladzijde is 192 cm^2 . De afmetingen van de piramide worden met 50% vergroot. Bereken de totale oppervlakte van de vergrote piramide.

Oplossing

Voor de vergrotingsfactor k geldt: $k = 1,5$.

De oppervlakte wordt dan $k^2 = 1,5^2 = 2,25$ keer zo groot.

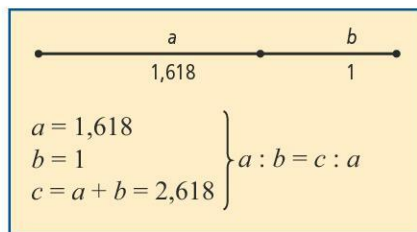
De totale oppervlakte van de vergrote piramide is $2,25 \times 192 = 432 \text{ cm}^2$.



- 99 Gegeven is de kegel.
- Bereken de hoogte van de kegel.
Rond af op één decimaal.
 - Bereken de inhoud van de kegel.
 - De kegel wordt vergroot waarbij de inhoud 3,375 keer zo groot wordt.
Bereken de straal en de hoogte in cm van de vergrote kegel. Rond af op één decimaal.
 - De oppervlakte van de gegeven kegel is 138 cm^2 .
Bereken de oppervlakte van de vergroting.

Gulden snede

De gulden verhouding of gulden snede is de verhouding $1,618 \dots : 1$. Als je een lijnstuk verdeelt in twee delen die zich tot elkaar verhouden zoals het hele lijnstuk zich verhoudt tot het grootste deel, dan ontstaat de gulden snede. Kies je de lengte van het kleinste lijnstuk gelijk aan 1, dan is de lengte van het grootste lijnstuk bij benadering gelijk aan 1,618. In de wiskunde wordt het getal $1,618 \dots$ vaak aangegeven met het symbool ϕ (spreek uit als 'fi'). Een gulden rechthoek is een rechthoek waarbij de verhouding van de lengte en breedte gelijk is aan $\phi : 1$.



- 100 Rechthoek $ABCD$ is een gulden rechthoek. Zijde BC is de korte zijde van deze rechthoek en $BC = 6 \text{ cm}$.
- Bereken de lengte van AB en teken rechthoek $ABCD$ nauwkeurig op ware grootte met AB aan de onderkant.
 - Tegen rechthoek $ABCD$ wordt een vierkant $ABEF$ geplaatst.
Teken vierkant $ABEF$ er bij in je tekening van opdracht a.
 - Ga na dat rechthoek $FECD$ een gulden rechthoek is.

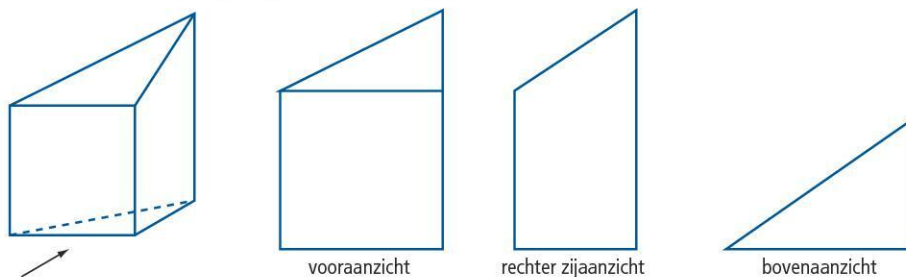
Aanzichten

Om te verduidelijken hoe een ruimtelijk object eruitziet, kun je vanuit verschillende posities foto's of tekeningen maken. In de wiskunde heten dit aanzichten. In de praktijk zie je meestal drie aanzichten: een vooraanzicht, een bovenaanzicht en een zijaanzicht. Als de afmetingen van een object bekend zijn, kun je de aanzichten nauwkeurig, eventueel op schaal, tekenen.

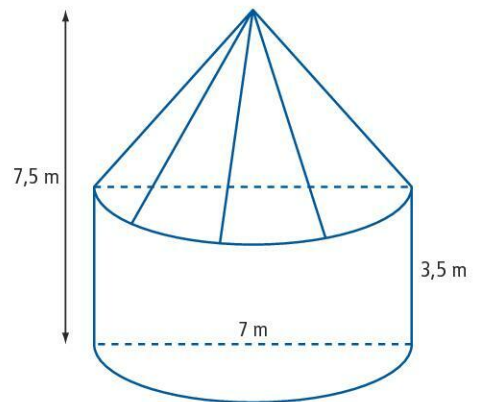
Vanuit gegeven aanzichten kun je ook vaak een goede voorstelling maken van hoe een ruimtelijk object eruitziet.

Voorbeeld

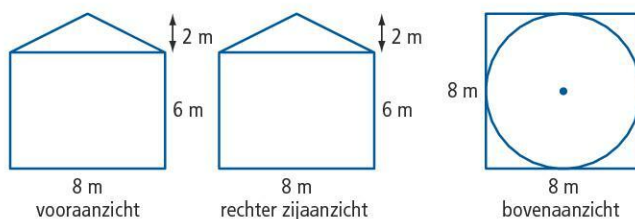
Bij het ruimtelijk object zijn het vooraanzicht, het rechter zijaanzicht en het bovenaanzicht getekend. De pijl bij het ruimtelijk object geeft de richting van het vooraanzicht aan.



- 101** Het object hiernaast is opgebouwd uit een halve cilinder en een halve kegel. De diameter is 7 m en de hoogte van de cilinder is 3,5 m. De totale hoogte is 7,5 m. Teken op schaal 1 : 10 een vooraanzicht, een rechterzijaanzicht en een bovenaanzicht van dit object.

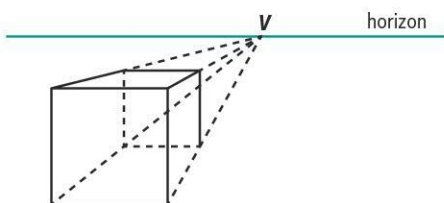


- 102** Hieronder zie je van een object het vooraanzicht, het rechterzijaanzicht en het bovenaanzicht.
- Beschrijf dit object.
 - Bereken de inhoud van dit object in m^3 .

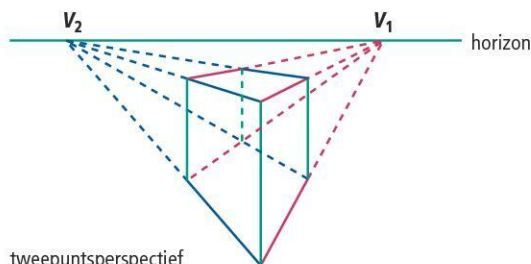


Perspectieftekeningen

De breedte, hoogte en diepte van een object heten de hoofdrichtingen van het object. Bij eenpuntperspectief zijn twee hoofdrichtingen evenwijdig aan het tafereel, de andere hoofdrichting staat loodrecht op het tafereel. Alle lijnen loodrecht op het tafereel hebben hetzelfde verdwijnpunt. De horizontale lijn door het verdwijnpunt heet de horizon. Bij een tekening in tweepuntperspectief is slechts één hoofdrichting evenwijdig aan het tafereel. De andere richtingen hebben elk een verdwijnpunt. De horizon is de (horizontale) lijn door deze twee verdwijnpunten. De lens van een camera in een foto of de oog van een tekenaar in een perspectieftekening ligt altijd ter hoogte van de horizon.



eenpuntperspectief

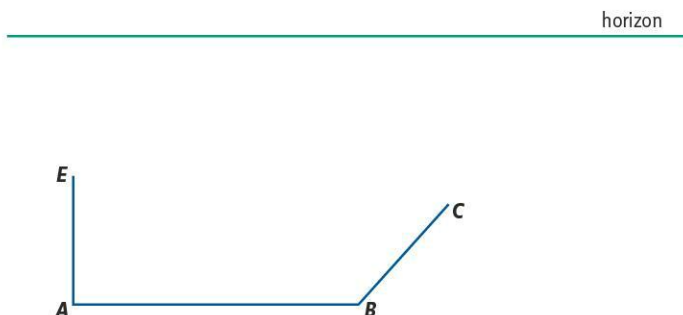


tweepuntperspectief

Middens van lijnstukken die evenwijdig lopen met het tafereel, zijn in een perspectieftekening ook weer echte middens. De middens van lijnstukken die loodrecht op het tafereel staan, bepaal je met behulp van diagonalen en een lijn evenwijdig aan de horizon die door het snijpunt van de diagonalen gaat.

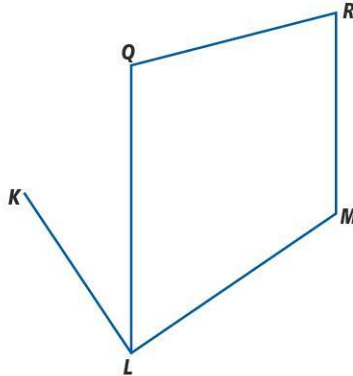
103 Van de balk $ABCD.EFGH$ is hieronder het begin van een eenpuntperspectieftekening gegeven.

- Maak de perspectieftekening af.
- Teken in je perspectieftekening de middens van de ribben BC en GF .



104 Van de kubus $KLMN.PQRS$ is hieronder het begin van een tweepuntsperspectieftekening gegeven.

- Maak de perspectieftekening af.
- Teken in je perspectieftekening op de ribbe LM een punt T met $LT:TM = 1:3$.



Ooghoogte

De ooghoogte in een perspectieftekening of op een foto bepaal je als volgt:

- Teken de horizon.
- Meet de hoogte van het object waarvan de hoogte bekend is.
- Meet de hoogte van de horizon (= ooghoogte) ten opzichte van de onderkant van het gemeten object.
- Zet de gemeten hoogtes en de gegeven werkelijke hoogte van het object in een verhoudingstabel en bereken de ooghoogte.

Voorbeeld

Van een huis is een perspectieftekening gemaakt. De deur in het huis is in werkelijkheid 2,20 m hoog. Bepaal de ooghoogte in cm nauwkeurig.

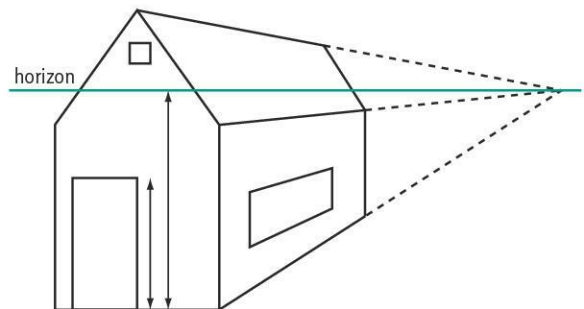
Oplossing

Teken het verdwijnpunt en de horizon.
De hoogte van de deur in de tekening is 17 mm.
De hoogte van de horizon ten opzichte van de onderkant van de deur is 29 mm.

17	2,20 m
29	ooghoogte

$$17 \times \text{ooghoogte} = 29 \times 2,20$$

De ooghoogte is $\frac{29 \times 2,20}{17} \approx 3,75$ m ofwel 375 cm.



- 105** Op de foto zie je de poortjes bij de Fushimi tempel in Kioto. De mannen op de foto zijn 190 cm lang. Bepaal op welke hoogte de lens van de camera zich bevond bij het maken van de foto.



106 Examenopdrachten Aanschuifwoningen

(Ontleend aan CE vwo wiskunde C pilot 2015, tijdvak 2)
De Amsterdamse architect Janjaap Ruijsseenaars kwam in 2013 met een nieuw ontwerp voor in elkaar geschoven woningen. Zo'n eenheid van drie woningen ziet er in een maquette bijvoorbeeld uit zoals in de bovenste figuur.

Elke woning heeft zijn eigen kleur.

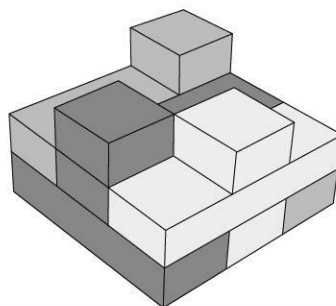
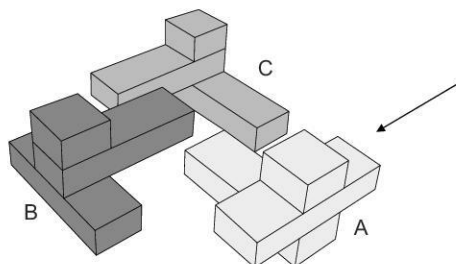
Een eenheid bevat dus drie woningen. Hoe ze in elkaar geschoven zijn, kun je goed zien als ze uit elkaar geschoven worden. Zie de onderste figuur.

Elke woning bestaat uit drie delen:

- een balk op de begane grond;
- loodrecht daarop een balk op de eerste verdieping;
- op de balk van de eerste verdieping een vierkant blok op de tweede verdieping.

In de onderste figuur is door middel van een pijl een kijkrichting aangegeven.

- a** Teken het aanzicht van de in de figuur getekende eenheid van drie woningen als je in de richting van de pijl kijkt. Gebruik de letters A, B en C om de verschillende woningen aan te geven.



Hint 55

De balken op de begane grond en op de eerste verdieping zijn 14 600 mm lang en 4600 mm breed. De vierkante blokken op de tweede verdieping hebben zijden van 4600 mm. De hoogte van elke verdieping is 2800 mm. Alle genoemde afmetingen zijn binnenmaten.

- b** Bereken het volume van één woning in m^3 .

Hint 56

107 Francis Bacon

(Ontleend aan CE vwo wiskunde C 2018, tijdvak 1)

Op de foto zie je een schilderij van Francis Bacon.



Een man bevindt zich voor een ruimte met donkere wanden. Het plafond en de vloer zijn in iets lichtere kleuren afgebeeld. Als je aanneemt dat deze ruimte balkvormig is, kun je zien dat de kunstenaar deze ruimte niet precies volgens de regels van het perspectief heeft getekend.

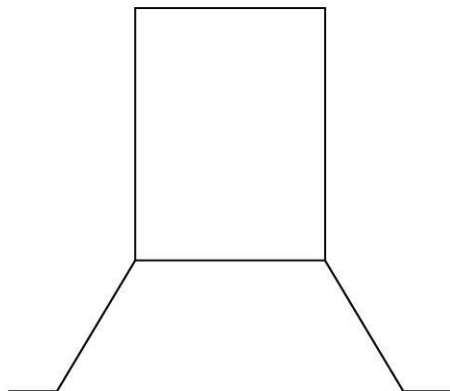
a Leg met behulp van de foto uit hoe je dit kunt zien.

Hint 57

Hieronder zie je het begin van een juiste perspectieftekening van een model van de balkvormige ruimte op het schilderij. Alleen de achterwand en de vloer zijn aangegeven.

b Maak deze perspectieftekening correct af.

Hint 58

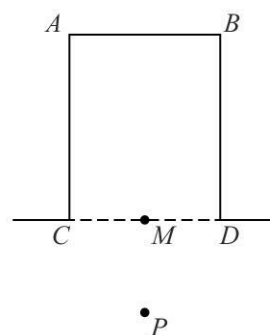
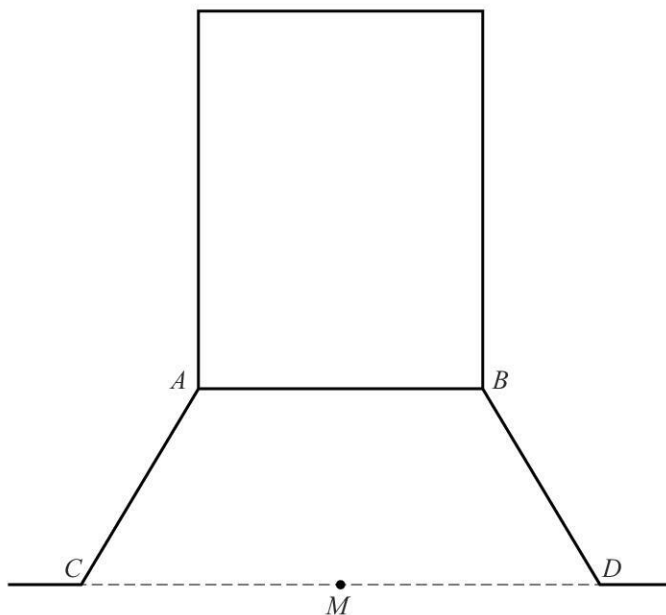


De man op het schilderij staat voor de balkvormige figuur ruimte. Stel dat het Bacons bedoeling was om de man midden voor de balkvormige ruimte te plaatsen op een bovenaanzicht afstand die de helft is van de diepte van de ruimte. In de figuur zie je een bovenaanzicht van de balkvormige ruimte waarin een punt P is getekend. De afstand van P tot de voorkant van de ruimte is de helft van de diepte van deze ruimte, dus $MP = 0,5 \cdot AC$.

c Teken dit punt P in de perspectieftekening.

Hint 59

bovenaanzicht



108 Triangular Lodge (Ontleend aan CE vwo wiskunde C 2019, tijdvak 1)



Nabij Rushton in Engeland staat een bijzonder gebouw: Triangular Lodge. Het grondvlak van het gebouw is een gelijkzijdige driehoek waarvan de zijden 33 feet lang zijn. Eén foot is gelijk aan 30,48 cm. De oppervlakte van dat grondvlak is 471,55 square feet. Dat is ongeveer 44 m².

- a** Bereken, uitgaande van een oppervlakte van 471,55 square feet, de oppervlakte in m². Geef je antwoord in één decimaal.

Hint 60

De hoogte aan de buitenkant tot aan de dakrand is 8,22 meter.

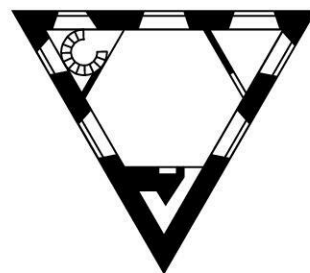
- b** Bereken met behulp van de foto op welke hoogte de fotograaf de foto heeft genomen. Geef je antwoord in gehele cm.

Hint 61

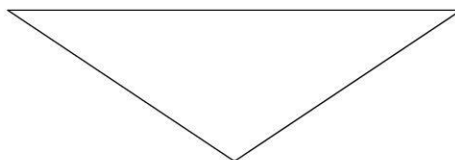
De buitenmuren zijn erg dik. Daardoor is de binnenruimte een gelijkzijdige driehoek met zijden van 8,22 m. Deze ruimte wordt door drie dunnere muren verdeeld in een regelmatige zeshoek en drie gelijkzijdige driehoeken. Hieronder is het grondvlak van het gebouw, de gelijkzijdige driehoek dus, in perspectief getekend. Een van de zijden is, zoals je ziet, evenwijdig met de horizon getekend. Wat nog niet getekend is, is de regelmatige zeshoek (de zeshoekige kamer zoals hiernaast).

- c** Teken de regelmatige zeshoek in de driehoek. Je mag daarbij de dikte van de muren verwaarlozen. Licht je werkwijze toe.

Hint 62



horizon



Boomdiagrammen

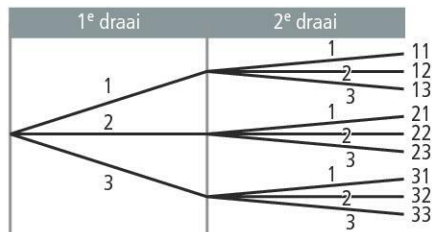
Bij het oplossen van een telprobleem is een boomdiagram vaak een handig hulpmiddel. In een boomdiagram geef je overzichtelijk weer welke mogelijkheden er zijn.

Voorbeeld

Een kanstol is verdeeld in drie gelijke gebieden met de cijfers 1, 2 en 3.

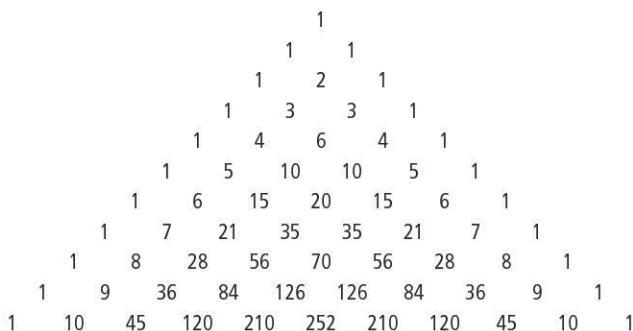
Maak een boomdiagram met alle mogelijkheden bij twee keer draaien.

Oplossing



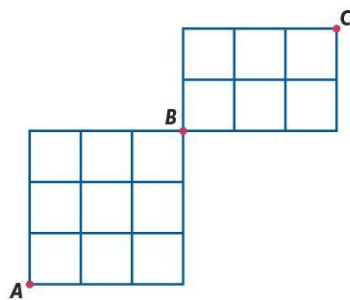
- 109** De schaker Kasparov speelt een wedstrijd tegen een computer. Bij deze wedstrijd worden drie schaakpartijen gespeeld. In geval van winst krijgt de winnaar één punt. Bij een remise krijgen beiden een halve punt.
- Onderzoek met behulp van een boomdiagram op hoeveel manieren de wedstrijd kan verlopen.
 - Stel dat de wedstrijd eindigt in de stand 2-1 voor Kasparov. Op hoeveel manieren kan deze uitslag tot stand zijn komen?
- 110** Je hebt de letters S, P, E, L en D.
- Hoeveel (onzin)woorden van vijf letters kun je maken als je elke letter maar één keer mag gebruiken?
 - En hoeveel (onzin)woorden van vijf letters kun je maken als je elke letter meerdere keren mag gebruiken?
- 111** In een vaas zitten twee rode, twee groene en twee witte knikkers.
- Mieke pakt zonder terugleggen knikkers uit de vaas. Ze stopt met pakken zodra ze twee knikkers van dezelfde kleur heeft. Hoeveel verschillende trekkingen zijn er om twee knikkers met dezelfde kleur te pakken?

Het aantal verschillende routes naar een punt kun je vinden met behulp van het aantal routes naar de voorafgaande punten. Het aantal verschillende kortste routes van punt O naar punt P in het rooster hiernaast is 35. Elk van deze routes bestaat uit zeven stappen, vier naar rechts en drie naar boven.



Als je bedenkt hoe de driehoek is ontstaan uit de getallen in het rooster, dan zie je dat het derde getal op rij 7 gelijk is aan $\binom{7}{2}$.

- 112** Gegeven twee roosters met de punten A , B en C .
- a** Hoeveel kortste routes zijn er van punt A naar punt B ?
 - b** En hoeveel kortste routes zijn er van punt A , via punt B , naar punt C ?
- 113**
- a** Hoeveel verschillende scoreverlopen zijn mogelijk bij een voetbalwedstrijd die eindigt in 5-3?
 - b** Bij een gezinssamenstelling kun je letten op de volgorde waarop jongens en meisjes geboren worden. Hoeveel verschillende gezinssamenstellingen zijn er mogelijk bij gezinnen met drie meisjes en drie jongens?



Permutaties en combinaties

Een ander woord voor een volgorde of rangschikking is permutatie. Een permutatie van 3 uit 10 is een rangschikking van een rijtje van drie dat je kiest uit tien verschillende dingen: een eerste, een tweede en een derde.

Het aantal permutaties van 3 uit 10 is $10 \times 9 \times 8 = 720$.

Een combinatie van 3 uit 10 is een selectie van drie uit tien: drie wel en zeven niet. Het aantal combinaties van 3 uit 10 is

$$\binom{10}{3}; \text{ dit spreek je uit als '10 boven 3'. } \binom{10}{3} = 120.$$

Je kunt $\binom{10}{3}$ met een rooster berekenen, je gaat dan drie stappen naar rechts en zeven omhoog. Je kunt $\binom{10}{3}$ ook met je rekenmachine uitrekenen.

Voorbeeld

Je hebt acht films in huis en met een groep van vrienden wil je twee films bekijken. Met elkaar kies je er twee uit. Hoeveel tweetallen zijn er mogelijk?

Oplossing

Het gaat om de keuze van twee van de acht films. De volgorde van kiezen is niet van belang, want het gaat erom welk tweetal bekeken gaat worden.

Daarom zijn er $\binom{8}{2} = 28$ tweetallen mogelijk.

- 114** Joyce heeft op haar verjaardag tien puzzels gekregen.
- a** Bereken het aantal mogelijke volgordes waarop zij deze puzzels kan maken.
 - b** Hoeveel mogelijkheden zijn er om een top drie samen te stellen uit deze tien puzzels?
 - c** Joyce heeft in een lade nog plaats voor vier puzzels. Hoeveel mogelijkheden zijn er om vier puzzels te selecteren?
- 115**
- a** Boer Gerrit heeft 26 schapen. Hij wil tien schapen in de stal brengen.
Op hoeveel manieren kan hij een groep van tien schapen samenstellen?
 - b** Boer Gerrit heeft 14 witte en 12 zwarte schapen. Hij besluit vijf witte schapen en vijf zwarte schapen in de stal te brengen.
Op hoeveel verschillende manieren kan hij een groep met vijf witte en vijf zwarte schapen samenstellen voor de stal?

- 116** a Bij een sportdag zijn er voor 12 jongens, vier rode, vier blauwe en vier groene shirtjes. Bereken het aantal mogelijkheden waarop je de shirtjes kunt verdelen.
- b Voor de zwemestafette is uit de groep van 12 jongens één jongen nodig voor de vrije slag, één voor de vlinderslag, één voor de rugslag en één voor de schoolslag. Hoeveel mogelijkheden zijn er om het estafetteteam samen te stellen?

Examenopdrachten

117 Tricoda

(Ontleend aan CE vwo wiskunde C pilot 2013, tijdvak 2)

Het familiespel Tricoda is uitgeroepen tot Speelgoed van het jaar 2010. Het spel Tricoda bestaat uit 28 stenen. Het cijfer 1 komt één keer voor, het cijfer 2 twee keer, het cijfer 3 drie keer en zo verder tot en met het cijfer 7, dat zeven keer voorkomt.

Elke speler krijgt 3 stenen, die op een standaard worden geplaatst, waarbij de volgorde niet van belang is. De 3 stenen vormen zo een cijfertrio. De stenen staan zo op de standaards, dat elke speler wel de cijfertrio's van de andere spelers ziet, maar zijn eigen cijfertrio niet, zie de foto.

Om het spel te winnen moet je, met behulp van vragenkaartjes, beredeneren welke drie getallen op je eigen standaard staan.

Bereken het aantal mogelijke verschillende cijfertrio's dat een speler bij de start van het spel kan krijgen.



Hint 63

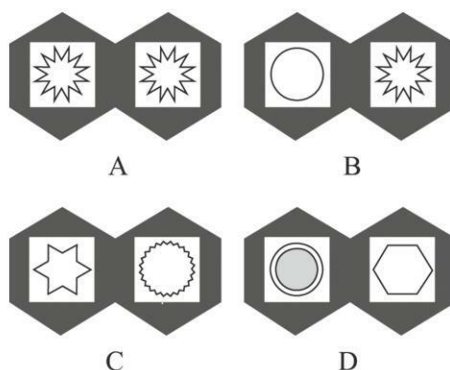
118 Genius van achthoeken

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A12 2008, tijdvak 2)

Genius is een bordspel voor 1 tot en met 4 spelers. Tijdens het spel moeten de spelers tegels op het speelveld plaatsen. Een tegel heeft de vorm van twee zeshoeken die met een zijde aan elkaar vast zitten. Deze tegels zitten in een zak. Op elke tegel staan twee symbolen. Dat kunnen twee dezelfde symbolen of twee verschillende symbolen zijn. Er zijn zes verschillende symbolen: 12-puntige ster, cirkel, 6-puntige ster, zon, gevulde cirkel en zeshoek. Er zijn vier tegels afgebeeld.

Elke mogelijke tegel met twee dezelfde symbolen komt 5 keer voor. Tegel A in de figuur komt dus 5 keer voor. Elke mogelijke tegel met twee verschillende symbolen komt 6 keer voor. Dus bijvoorbeeld de tegel met een cirkel en een 12-puntige ster (tegel B) komt 6 keer voor.

Bereken het totale aantal tegels dat bij Genius wordt gebruikt.



Hint 64

119 Kentekens

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2019, tijdvak 1)

Tussen mei 2008 en februari 2013 werd voor personenauto's de kentekenserie gebruikt die door de Rijksdienst voor het Wegverkeer sidecode 7 genoemd wordt. Op de foto staat een van de eerste kentekens uit deze serie. De kentekens bestaan uit twee cijfers, gevolgd door drie letters en ten slotte nog één cijfer. Als we ervan uitgaan dat er geen beperkingen zijn aan de te gebruiken cijfers en letters, dan zijn er bijna 18 miljoen verschillende kentekens te maken met sidecode 7.

- a** Bereken het aantal verschillende kentekens met sidecode 7. Geef je antwoord in gehele honderdduizendtallen.

Hint 65

In deze opgave gaan we echter van de volgende beperkingen uit:

- Een kenteken mag niet met 00 beginnen
- De eerste letter is G, H, J, K, L, N, P, R, S, T, X of Z
- Klinkers (A, E, I, O, U, Y) worden niet gebruikt
- De letters C en Q worden niet gebruikt
- Bepaalde drielettercombinaties (zoals NSB) kunnen als aanstootgevend worden gezien en als gevolg daarvan zijn 82 drielettercombinaties uitgesloten.

Een verslaggever van een autotijdschrift schrijft in een artikel dat door al deze beperkingen minder dan 20% van alle mogelijke kentekens uiteindelijk op een personenauto terecht zal komen

- b** Ga met een berekening na of de verslaggever gelijk heeft.

Hint 66

120 Pythagorean

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A pilot 2017, tijdvak 2)

Een reisorganisatie biedt vakanties aan naar Samos. Voor een bepaalde periode hebben ze nog 28 vliegtuigstoelen over. Door deze als last minute aan te bieden vindt de reisorganisatie daarvoor 14 keer twee gegadigden. De reisorganisatie kan ook nog 14 tweepersoons hotelkamers boeken: twee bij Nikos Place, vijf bij Hydele Beach en zeven bij Kouros Bay.

- a** Bereken op hoeveel verschillen manieren de reisorganisatie de 14 stellen kan verdelen over de drie hotels.

Hint 67

Een van de stellen is gekomen om te fietsen en te wandelen. Ze hebben een boekje met vijf fietstochten voor een hele dag en vijf wandeltochten voor een hele dag. Ze maken het volgende programma: eerst vijf dagen fietsen en daarna drie dagen wandelen. Ze maken elke dag een andere tocht uit het boekje.

- b** Bereken hoeveel verschillende programma's dit stel voor deze acht dagen kan maken.

Hint 68



- 1 Hoeveel seconden is er in totaal naar de video gekeken? En hoeveel seconden bevat een jaar?
- 2 Bereken welk bedrag deze persoon per jaar kwijt zou zijn aan elektriciteit als hij geen zonnepanelen zou hebben.
- 3 Hoeveel procent van het maandinkomen in 1960 werd uitgegeven aan de huur? En met welk bedrag kwam dat overeen? Bereken met deze gegevens het maandinkomen in 1960.
- 4 Kijk voor bewering 2 of je een jaar kunt vinden waarbij het aantal aardbevingen steeg terwijl het jaar ervoor de gasproductie afnam.
- 5 Reken 2 uur, 43 minuten en 32 seconden eerst om naar seconden.
- 6 Waarom neemt $0,834^t$ af als t steeds groter wordt?
- 7 Substitueer $BMR = 2000$ in de formule en herleid de ontstane vergelijking.
- 8 Druk G uit in W , druk J uit in Y en druk L uit in H .
- 9 Stel een vergelijking op waarmee je kunt berekenen voor welk gewicht de Jackson ratio gelijk is aan 0,18.
- 10 Bedenk of L groter of kleiner is als iemand over het schild meet.
- 11 Druk G uit in W en druk L uit in I .
- 12 In welke periode was de toename van de huurprijs het grootst? En hoe bereken je de huurlast?
- 13 Met hoeveel procent zal de huurprijs in 2023 volgens de trendlijn gestegen zijn?
- 14 Met hoeveel cent per kWh neemt de kostprijs k_z per jaar af?
- 15 Welk verband bestaat er tussen k_m en k_l als de marktprijs tweemaal zo hoog is als de kostprijs van windenergie van windmolens op land?
- 16 Welke waarde van T hoort bij een reistijd van 1 uur en 20 minuten?
- 17 Begin je redenering als volgt: Als w steeds groter wordt dan 0, dan neemt w^2 toe.
- 18 Schrijf eerst het getal 1 als een breuk met noemer $400 - w^2$.
- 19 Bereken eerst bij welke afstand a de reistijd r gelijk is.
- 20 Stel een vergelijking op waarmee je kunt berekenen bij welk lichaamsgewicht het basisenergieverbruik bij jongvolwassenen en ouderen gelijk is.

- 21** Bereken eerst wat het energieverbruik is bij 25 km/uur.
- 22** Maak een berekening bij twee verschillende snelheden.
- 23** Bereken de relatieve toename als het aandeel armen en handen stijgt van 18,15 % naar 21,0 %.
- 24** Substitueer $L = 100$ in beide formules en bedenk hoe je kunt berekenen voor welke waarde van M de uitkomst van beide formules gelijk is.
- 25** Gebruik $S_{Mosteller} = \sqrt{\frac{1}{3600} \cdot L \cdot M} = \sqrt{\frac{1}{3600}} \cdot \sqrt{L} \cdot \sqrt{M}$.
- 26** De grafiek gaat door het punt $(0, -32)$. Vul de coördinaten van dit punt in de formule in.
- 27** Lees de coördinaten af van een punt waar de grafiek doorheen gaat en vul deze in de formule in.
- 28** Gebruik de rekenregel $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$
- 29** Gebruik dat de grafiek van $C = 40 + a \cdot b^t$ door de punten $(0, 250)$ en $(30, 135)$ gaat.
- 30** Bereken eerst de groeifactor van het aantal vliegtuigkilometers per jaar.
- 31** De groeifactor per 20 minuten is $\frac{95}{20}$.
- 32** Stel ook een lineaire formule op voor de kerntemperatuur K van de cupcakes.
- 33** Lees af hoeveel aardbevingen een magnitude van $\geq 2,0$ en hoeveel een magnitude van 2,5 of hoger hadden.
- 34** Lees de coördinaten af van één punt dat op de grafiek ligt en substitueer de coördinaten in de formule.
- 35** Bij lineaire groei zou het aantal artikelen iedere week met dezelfde waarde moeten toenemen of afnemen en bij exponentiële groei zou dat aantal iedere week met hetzelfde getal vermenigvuldigd moeten worden.
- 36** De groeifactor per 23 weken is $\frac{1120987}{1038340}$.
- 37** Lees bij de drie punten af hoe groot de waarde van N ongeveer is en vergelijk die met de waarde die N zou hebben volgens de getekende lijn.
- 38** Vul voor r de waarde 4 in en bereken $\log(N)$. Gebruik vervolgens de regel:
Uit $t = {}^s\log(a)$ volgt $g^t = a$ en bedenk dat $\log(N) = {}^{10}\log(N)$.
- 39** Lees de coördinaten van een punt op de lijn af en vul deze voor N en R in de formule in. Om c te berekenen los je de ontstane vergelijking op, indien nodig met je rekenmachine.
- 40** Voor het jaar 2013 geldt $n = 5$. Bereken C_5 en D_5 .
- 41** Maak met je rekenmachine een tabel bij de formule van D_n .

- 42** Ga na hoeveel wedstrijden de vier teams spelen die in één poule zitten. Hoeveel wedstrijden zijn dat in totaal bij 8 poules? Hoeveel wedstrijden komen er daarna nog? Reken dat uit voor zowel 32 teams als voor 16 teams.
- 43** Aan te tonen is: $W(11) = W(10) + 10$. Bedenk hoeveel wedstrijden er extra gespeeld gaan worden als een poule van 10 teams wordt uitgebreid met 1 team.
- 44** Lees uit de grafiek af met welke snelheid het zwembad gevuld wordt met type SB 15 en met type SB 20.
- 45** Teken de raaklijn aan de grafiek van het type SB10 bij $A = 10$.
- 46** Bereken met de formule voor elke laag hoeveel cupcakes er op staan door ook A_6 tot en met A_9 .
- 47** De directe formule hoort bij een lineair verband en is van de vorm $A_n = 6 + an$. Welke waarde heeft a in deze formule?
- 48** Van de 39 letters komen er 24 in alle drie de landen voor. Dan zijn er nog $39 - 24 = 15$ letters die niet in alledrie de landen voorkomen. 3 letters komen alleen in Rusland voor, dus dan zijn er nog $15 - 3 = 12$ letters over. Hoeveel van die 12 letters zitten zeker niet in het Servische alfabet?
- 49** $G \wedge L \wedge \neg A$ betekent dat de letters wel in het Grieks en Latijne alfabet voorkomen, maar niet in alle drie de alfabetten.
- 50** Schrijf de bewering als een als dan bewering.
- 51** De daling van 1820 nieuwe eerstejaars staat gelijk aan een afname van 32 procent. Bereken hoeveel eerstejaars dan gelijk is aan 100%.
- 52** Welk symbool hoort bij de woorden ‘in combinatie met’? En welke symbool bij ‘zorgt voor’?
- 53** $A \Rightarrow D$ kun je vertalen als: ‘Afschaffing van de studiebeurs zorgt voor een daling van het aantal nieuwe eerstejaars’.
- 54** $R \Rightarrow O$ betekent dat iedereen die slaagt voor rekentoets ook overgaat naar het tweede jaar.
- 55** Bedenk per laag wat je ziet vanuit de richting van de pijl.
- 56** De inhoud van een balk bereken je met lengte $\times$ breedte $\times$ hoogte. Zet eerst de afmetingen om in meters.
- 57** Verleng de ribben van de kubus die loodrecht op het tafereel staan.
- 58** Teken eerst het verdwijnpunt.
- 59** Teken de diagonalen van $ABCD$ en construeer daarmee een rechthoek vóór $ABCD$ met daarop punt P waarvoor geldt $MP = 0,5 \cdot AC$.
- 60** 1 foot is gelijk aan 30,48 cm. 1 feet is gelijk aan $30,48 \times 30,48 \text{ cm}^2$.
- 61** De ooghoogte ligt er hoogte van de horizon. Teken eerst de horizon.

- 62** Verdeel de achterste zijde van de drie gelijke delen en teken twee verdwijnpunten.
- 63** Maak onderscheid tussen cijfertrio's met drie verschillende cijfers, met twee dezelfde cijfers en één ander cijfer en ten slotte met drie verschillende cijfers.
- 64** Hoeveel tegels met twee dezelfde symbolen zijn er? En hoeveel met twee verschillende symbolen?
- 65** Voor het eerste cijfer zijn 10 mogelijkheden. Bedenk ook hoeveel mogelijkheden er zijn voor de andere cijfers en voor de letters.
- 66** Ga voor elk cijfer en elke letter na hoeveel mogelijkheden er zijn.
- 67** Bereken bijvoorbeeld eerst op hoeveel manieren je twee stellen van de 14 stellen kunt selecteren voor Nikos Place.
- 68** Hoeveel keuzemogelijkheden zijn er voor de eerste dag? En hoeveel voor de tweede dag?

Als in een examen een van de woorden uit onderstaande lijst wordt gebruikt, dan geldt de betekenis die hieraan in deze lijst is gegeven.

aantonen dat, laten zien dat	Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.
afleiden van bijvoorbeeld een formule of een eenheid	Het geven van een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van de formule of eenheid volgt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. Tenzij anders aangegeven, geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.
bepalen	Het gevraagde vaststellen en/of uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
beredeneren, uitleggen	Het geven van een uitwerking waarin de denkstappen staan, waaruit het gestelde/gevraagde blijkt.
berekenen	Het gevraagde uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
herleiden (van een formule)	Een formule stap voor stap herschrijven tot deze in de gevraagde vorm staat, zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine.
noemen, (aan)geven wat, welke, wanneer, hoeveel	Een eindantwoord geven. Een toelichting is niet vereist tenzij anders is aangegeven.
onderzoeken of	Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de (on)juistheid van het gestelde blijkt. Het antwoord moet worden afgesloten met een conclusie. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt.
oplossen	Het bepalen van de waarden van een of meer onbekenden die voldoen aan de gegeven vergelijking of ongelijkheid. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
schetsen	Het geven van een grafische voorstelling die de voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen bevat.
tekenen	Het geven van een grafische voorstelling die de voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen bevat en voldoende nauwkeurig is. In het geval van een grafiek moet een assenstelsel met schaalverdeling zijn weergegeven.



Meer oefenen 206

In de hoofdstukken 17 en 18 wordt bij enkele opdrachten extra oefening aangeboden. In de extra oefeningen wordt in het algemeen hetzelfde type opdracht gegeven maar met andere getallen.

Oefenproefwerken 210

Bij ieder hoofdstuk vind je hier een oefenproefwerk. Dit oefenproefwerk kun je gebruiken om je voor te bereiden op het echte proefwerk. De oefenproefwerken zijn in het algemeen wat langer dan een proefwerk dat je in een les van 45 of 50 minuten moet maken.

In een proefwerk komen verschillende soorten opdrachten voor:

- opdrachten voor waarmee getoetst wordt of je de vaardigheden van het hoofdstuk beheerst;
- opdrachten waarmee getoetst wordt of je de vaardigheden kunt toepassen binnen een grotere wiskundige opdracht of binnen een context of binnen een situatie die meer denkstappen vraagt en dus meer inzicht.



- 3** Siham beweert: 'Als je een getal deelt door een ander getal, dan is de uitkomst altijd kleiner dan het getal waar je mee begon'.

Als voorbeeld noemt ze: $10 : 2 = 5$ en 5 is kleiner dan 10.

- a** Geef nog een voorbeeld dat Sihams bewering ondersteunt.
- b** Geef een tegenvoorbeeld bij de bewering.
- c** Wat betekent dit tegenvoorbeeld voor de bewering?

- 5** Lees de tekst over wagenziekte.

Geef van de volgende beweringen aan of ze wel of niet uit de tekst volgen. Licht elk van je antwoorden toe.

- a** In de trein raken de hersenen niet gedesoriënteerd door snelle verplaatsingen.
- b** Marieke heeft nooit last van wagenziekte, ze zal wel nooit als passagier met de auto reizen.
- c** Door een conflict tussen de ogen en de evenwichtsorganen ontstaat er een desoriëntatie van de hersenen.

Veel mensen hebben last van wagenziekte. Waar fietsers of treinreizigers zelden of nooit ergens last van hebben, zo breken ritjes in de auto of bus kinderen en volwassenen vaak op. De bestuurder merkt niets, die anticipeert op bochten en verkeerslichten. Bij wagenziekte zijn de hersenen gedesoriënteerd door de snelle verplaatsingen. Deze desoriëntatie ontstaat door een conflict tussen de ogen en de evenwichtsorganen.

- 9** Het heeft lang niet geregend, dus besproeit boer Albert zijn land met water.

- a** Uit welke twee beweringen bestaat deze zin?
- b** Schrijf de zin als een als-dan-bewering.
- c** Welke bewering is het uitgangspunt en welke is de conclusie?

- 17**
- a** Schrijf de volgende beweringen met behulp van de logische symbolen $\Rightarrow$ en $\neg$ en de afkortingen hiernaast.
 - Als Ahmed gebleesd is, dan kan hij niet voetballen.
 - Als Ahmed kan voetballen, dan is hij niet gebleesd.
 - b** Schrijf de beweringen $K \Rightarrow W$ en $\neg W \Rightarrow \neg K$ als Nederlandse zinnen.

B: Ahmed is gebleesd.
V: Hij kan voetballen.
K: Diana kan goed knikkeren.
W: Ze wint veel knikkers.

- 18** Een katalysator in een auto zorgt voor schonere uitlaatgassen. Voor auto's die na 1994 zijn gebouwd, is zo'n katalysator verplicht. Gegeven zijn de volgende beweringen:

A: De auto is na 1994 gebouwd.

K: De auto heeft een katalysator.

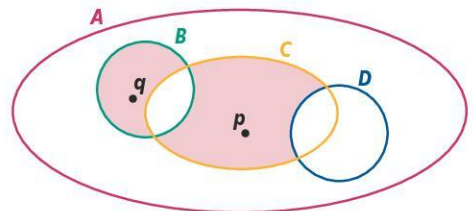
Geef van elk van de volgende implicaties aan of deze waar of niet waar is.

- a** $A \Rightarrow K$
- b** $K \Rightarrow A$
- c** $\neg A \Rightarrow \neg K$
- d** $\neg K \Rightarrow \neg A$

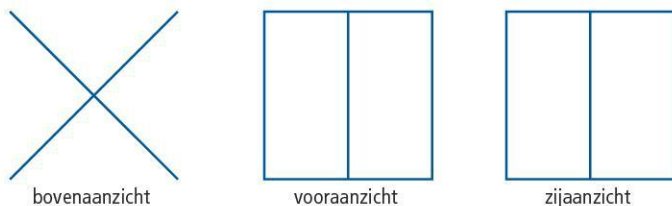
- 26** Gegeven zijn de volgende beweringen:
 D_2 : Het getal is deelbaar door 2.
 D_3 : Het getal is deelbaar door 3.
 D_6 : Het getal is deelbaar door 6.
- Schrijf bij iedere bewering vijf getallen op die aan de bewering voldoen.
 - Een docent wiskunde beweert: 'Als een getal deelbaar is door 6, dan is het getal ook deelbaar door 2 en door 3'. Schrijf de bewering van de docent met behulp van bovenstaande afkortingen en logische symbolen.
 - Welke van de volgende implicaties is waar?
 - $D_2 \vee D_3 \Rightarrow D_6$
 - $D_2 \wedge D_3 \Rightarrow D_6$
- 28** Gegeven zijn de volgende beweringen over fietsers.
 E : De fietser gebruikt een elektrische fiets.
 J : De fietser is een jongere.
 B : De fietser is een 65-plusser.
 A : De afstand is korter dan 10 km.
- Modelleer de bewering 'Als de fietser een jongere op een elektrische fiets is, dan is de afstand niet korter dan 10 km'.
 - Formuleer Nederlandse zinnen bij de volgende beweringen:
 - $B \vee (J \wedge A) \Rightarrow E$
 - $J \wedge \neg A \Rightarrow \neg E$
- 32** Gegeven zijn de volgende beweringen.
 P : Het getal is een priemgetal.
 O : Het getal is oneven.
 T : Het getal is groter dan 2.
 Geef van elk van de volgende beweringen aan of het wel of geen contradictie is.
- | | |
|----------------------------|-------------------------------------|
| a $O \wedge \neg O$ | c $\neg O \wedge P$ |
| b $O \wedge T$ | d $\neg O \wedge P \wedge T$ |
- 33** Van Pinokkio is bekend dat zijn neus gaat groeien als hij liegt. Stel dat Pinokkio zegt: 'Mijn neus gaat nu groeien.'
- Wat is er dan in de volgende situaties aan de hand?
 - Zijn neus gaat na zijn uitspraak daadwerkelijk groeien.
 - Zijn neus gaat na zijn uitspraak niet groeien.
 - Leg uit dat hier sprake is van een paradox.
- 40** Bekijk het Venndiagram.
- Welke van de volgende beweringen zijn juist?

1 $A \Rightarrow B$	3 $D \Rightarrow A$
2 $\neg B \Rightarrow \neg A$	4 $\neg A \Rightarrow \neg D$
 - Hoe kun je met afkortingen en logische symbolen het gebied met punt p beschrijven? En het gebied met punt q ?

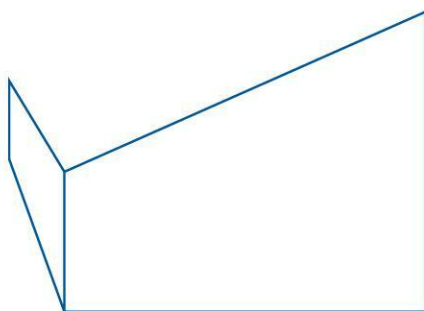
Priemgetallen zijn getallen die je alleen door 1 en zichzelf kunt delen (bijvoorbeeld: 2, 3, 5, 7, 11, ...).



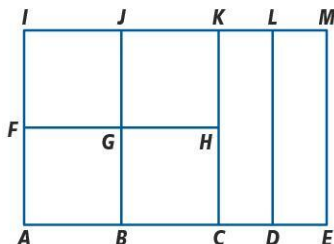
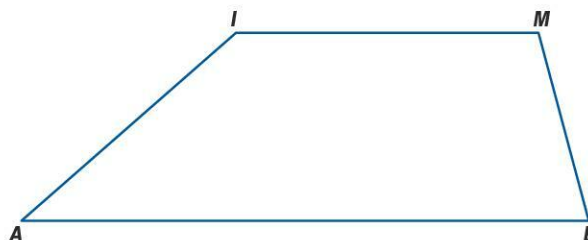
- 5 Gegeven zijn drie aanzichten van een ruimtelijk object. Beschrijf dit object.

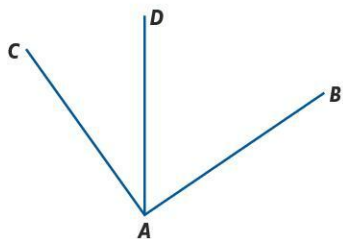


- 9 Er is een begin van een eenpuntperspectieftekening van een prisma gemaakt. Het voorvlak bij deze tekening is het grondvlak van het prisma. Maak deze tekening af.



- 11 Je ziet een figuur die bestaat uit vier even grote vierkanten met daarnaast nog twee even grote rechthoeken. Van de figuur is gegeven dat $AB = BC = CE$. Rechts is een begin gemaakt met een eenpuntperspectieftekening van de figuur. Maak deze tekening af.



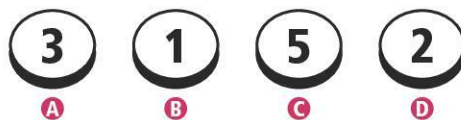


- 16** In de figuur is een begin gemaakt van een tweepuntsperspectieftekening van prisma $ABC.DEF$. Driehoek ABC is het grondvlak van de prisma. Maak deze tekening af.
- 20** Linksonder zie je een gang. Het boekenrek op de foto rechts is in werkelijkheid 3 meter hoog. Op welke hoogte bevond de lens van de camera zich?



- 26** Rechtsboven zie je een schilderij van een deel van het interieur van de Sint Bavokerk in Haarlem van de schilder P.Saenredam uit 1631. De voorste figuren staan op de lijn tussen de voorste pilaren.
- a** Ga na of het oog van de schilder zich boven of onder dat van de voorste personen bevond.
 - b** Neem aan dat de voorste personen 1,75 m lang zijn. Bereken de hoogte van het hoogste punt van het booggewelf tussen twee pilaren.

- 1** Hierboven zie je vier schijven. Deze schijven hebben een witte en een zwarte kant. Op de schijven staat aan beide zijden een van de cijfers 1, 2, 3, 4 of 5.
De volgende beweringen zijn waar.
- 1 Als op de zwarte kant een 5 staat, dan staat ook op de witte kant een 5.
 - 2 Als op de witte kant een 3 staat, dan staat op de zwarte kant een 2.
 - 3 Als op de zwarte kant een 4 staat, dan staat er geen 2 op de witte kant.
- a Wat is bij bewering 1 het uitgangspunt en wat is de conclusie?
 - b Welk cijfer kan op de zwarte kant van schijf A staan?
 - c Geef ook van de andere schijven aan wat op de zwarte kant kan staan.
- 2** Volgens Jannes zijn de uitkomsten van de formule $A = 2^n - 1$ priemgetallen als n een geheel getal is en groter is dan 0.
- a Ga na dat de bewering voor $n = 1, n = 2, n = 3$ en $n = 5$ waar is.
 - b Toon aan dat de bewering van Jannes niet waar is.
- 3** Teken bij elk van de volgende beweringen een Venndiagram.
- a Alle leerlingen op het vwo volgen het vak Engels.
 - b Wiskunde C wordt alleen gevolgd door leerlingen met het profiel C&M.
 - c Leerlingen met het profiel E&M kunnen biologie en/of scheikunde kiezen in het vrije deel.
 - d Leerlingen met het profiel N&T hebben geen wiskunde A in hun pakket.
- 4** Lees de tekst hiernaast.
- a Geef van de volgende redenering aan of deze volledig is. Verklaar je antwoord.
Steven heeft een besmetting met het zika virus opgelopen, hij is dus in Zuid Amerika geweest.
 - b Geef van de volgende redeneringen aan of ze waar of niet waar zijn. Leg je antwoorden uit.
 - 1 Marjolein is gestoken door een tijgermug, ze is dus besmet met het zika virus.
 - 2 Een tijgermug wordt besmet met het zika virus door een drager van het virus te steken.
 - c Schrijf de laatste zin van de tekst in de als-dan-vorm.

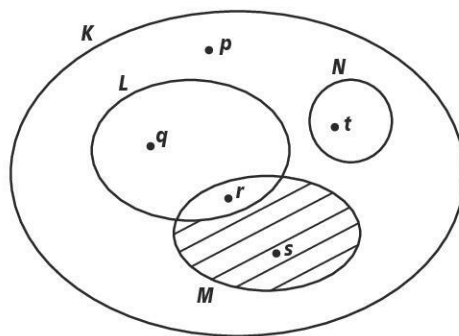


Tijgermugsteek gevaarlijk?

De tijgermug kan vele nare ziektes overbrengen. Denk aan gele koorts, dengue of zika. Wanneer de mug iemand gestoken heeft met deze ziekte, neemt ze dit virus mee naar het volgende slachtoffer.

Het zika virus komt vooral veel voor in Zuid-Amerika. Iemand die gestoken wordt door een tijgermug die besmet is met het zika virus heeft ongeveer 20% kans om ziek te worden.

- 5 Het Venndiagram hoort bij de beweringen K , L , M en N .
- a Welke van de volgende beweringen is een contradictie?
- $L \wedge \neg N$ $(L \vee M) \wedge N$
- $K \wedge \neg N$ $(\neg L \wedge \neg M) \wedge N$
- b Welk punt ligt in het gebied dat voldoet aan de bewering $K \wedge \neg(L \vee M \vee N)$?
- c Geef een beschrijving van de punten die in het gearceerde gebied liggen. Gebruik hierbij logische symbolen.

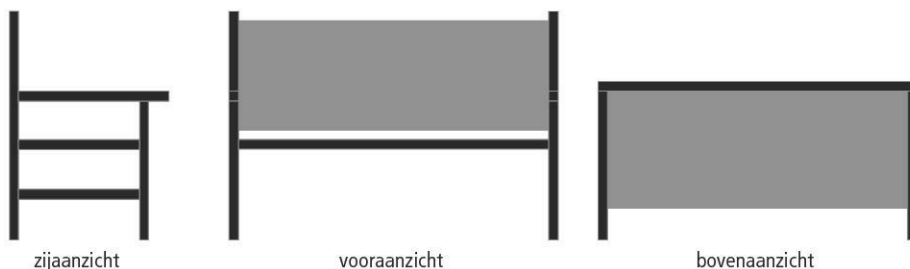


- 6 Ga ervan uit dat de volgende drie uitspraken waar zijn.
- A Alle leerlingen uit de klas van Annet gaan studeren.
 B Alle meisjes gaan in Leiden studeren.
 C Alle jongens gaan Engels studeren.
- a Geef van elk van de volgende beweringen aan of deze wel of niet uit de bovenstaande uitspraken volgt. Verklaar je antwoorden.
- 1 Een leerling uit de klas van Annet die in Leiden gaat studeren is een meisje.
 - 2 Een leerling uit de klas van Annet die geen Engels gaat studeren is een meisje.
 - 3 Een leerling die niet gaat studeren zit niet in de klas van Annet.
- b Schrijf bewering 3 in de als-dan-vorm.
- c Voor de leerlingen uit de klas van Annet gebruik je de afkortingen hiernaast.
 Schrijf bewering 1 en 2 met behulp van de logische symbolen.
- d Gegeven is de bewering $\neg E \Rightarrow L$.
 Deze bewering volgt niet uit de uitspraken A, B en C.
 Als een van de twee volgende uitspraken wordt toegevoegd dan volgt de bewering $\neg E \Rightarrow L$ wel uit het lijstje uitspraken.
 D De jongens uit de klas van Annet gaan niet naar Leiden.
 E De meisjes uit de klas van Annet gaan geen Engels studeren.
 Beredeneer welke van deze twee uitspraken moet worden toegevoegd aan het lijstje.

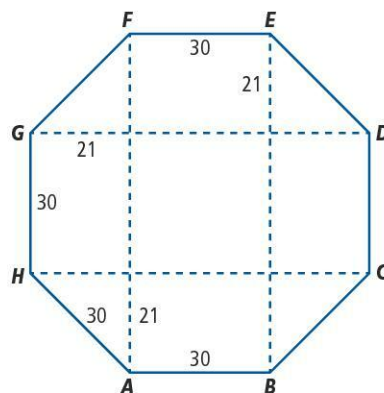
L : Leerling gaat in Leiden studeren.
 E : Leerling gaat Engels studeren.
 M : Leerling is een meisje.
 J : Leerling is een jongen.

Wereldwijd werkt een miljard mensen in de landbouw. Velen van hen kunnen nauwelijks zichzelf of hun familie onderhouden. Verouderde landbouwtechnieken en verkeerd of overmatig gebruik van pesticiden drijven hen alsmat verder af van voldoende voedsel en inkomen. Paradoxaal genoeg hebben juist veel landarbeiders geen toegang tot betaalbare groenten en fruit.

- 7 In de tekst hierboven wordt het woord paradoxaal gebruikt. Beschrijf welke paradox in deze tekst zit.



- 1 Gegeven zijn het zij-, voor-, en bovenaanzicht van een object. Omschrijf wat voor object dit is.



- 2 Een oude molen is verbouwd tot woonruimte. De vloer heeft de vorm van een regelmatige achthoek en zie je naast de foto van de molen. De zijden van vloer zijn elk 30 dm lang. In de figuur komt, behalve een aantal keren 30, ook nog de afmeting 21 dm voor.

W

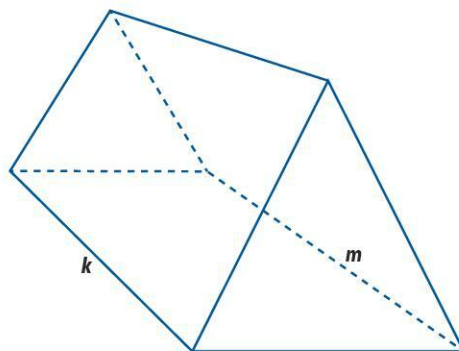
- De waarde 21 is een op een geheel aantal dm afgeronde waarde.
Bereken deze afmeting in cm nauwkeurig.
- Bereken de oppervlakte van de vloer in hele vierkante meters.
- Op het werkblad is een begin gemaakt van een perspectieftekening van de achthoekige vloer van de molen waarbij lijnstuk AB evenwijdig is met het tafereel. Welke lijnstukken in de tekening van de vloer zijn ook evenwijdig aan het tafereel?
- Leg uit waarom de lijnen AF en BE elkaar in een punt op de horizon snijden?
Noem dat punt V_1 en teken de horizon.
- Welke zijden van de achthoek snijden na verlenging de horizon ook in V_1 ?
- Zijde AH snijdt na verlenging de horizon in een punt V_2 . Welke zijde van de achthoek gaat na verlenging ook door punt V_2 ?
- Maak de perspectieftekening op het werkblad af.

- 3** Hiernaast zie je een tekening van een object in eenpuntperspectief.

W

De voor- en achterkant hebben de vorm van een gelijkbenige driehoek en zijn evenwijdig met het tafereel. Het grondvlak is een rechthoek van 6 bij 8 meter. De lijnstukken k en m hebben lengte 10.

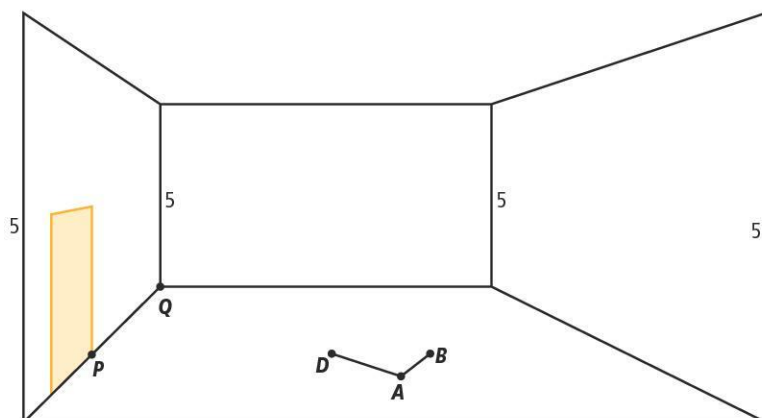
- Teken met schaal 1: 200 een bovenaanzicht van het object.
- Teken met behulp van de lijnstukken k en m een verdwijnpunt en de horizon.
- De voor- en achterkant zijn in de tekening niet even hoog. Ook in werkelijkheid is er verschil in hoogte tussen de voorkant en de achterkant van het object. Toon dit aan met behulp van de perspectieftekening.
- Aan de voorkant is het object 8 meter hoog. Bereken de hoogte van de achterkant in decimeters nauwkeurig.



- 4** Je kijkt vanaf een tribune op het podium van een schouwburg.

W

Het decor wordt gevormd door een toneelvloer en drie opstaande wanden. Deze wanden zijn vijf meter hoog.



- Bepaal in decimeters nauwkeurig hoe hoog je oog zich bevindt ten opzichte van de toneelvloer.
- Een van de spelers moet op een gegeven moment tegen de linkerwand precies in het midden tussen de deur en de achterwand gaan staan, dat wil zeggen precies in het midden van lijnstuk PQ . Geef op lijnstuk PQ precies de plaats aan waar deze speler moet gaan staan. Licht je antwoord toe.
- Op het podium wordt een zuil geplaatst. Deze zuil heeft de vorm van een balk $ABCD.EFGH$. De zuil is 5 meter hoog. In de tekening is met de letters A, B en D aangegeven waar de zuil geplaatst wordt. DB is evenwijdig met het tafereel. Maak in de figuur op het werkblad de perspectieftekening van de zuil af.

- 1 a** In 1987 bereikte de wereldbevolking een omvang van 5 miljard mensen. In 1999 was die opgelopen tot 5,9 miljard.
Schat met behulp van lineair interpoleren de grootte van de wereldbevolking in het jaar 1995.
- b** Op 21 maart 2016 bereikte Nederland het aantal van 17 miljoen inwoners. Het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) voorziet dat in 2034 de grens van 18 miljoen inwoners zal passeren.
Lees het deel van een krantenartikel en onderzoek of het CBS gebruik kan hebben gemaakt van lineair extrapoleren om met de gegevens in de tweede alinea uit te komen bij de conclusie in de eerste alinea.

Het statistiekbureau voorziet dat Nederland ergens in 2034 de grens van achttien miljoen inwoners passeert. Daarmee groeit de bevolking iets minder hard dan de afgelopen vijftien jaar.

Gemiddeld worden er per dag ongeveer 465 kinderen geboren. Daar staat tegenover dat er op jaarbasis elke dag 405 mensen overlijden. Verder vestigen zich gemiddeld 540 immigranten per dag in Nederland, terwijl er 405 emigranten vertrekken.

- 2** Beredeneer of de waarde van P toeneemt of afneemt als k steeds groter wordt. Beredeneer ook of P naar een grenswaarde nadert, en zo ja naar welke grenswaarde.

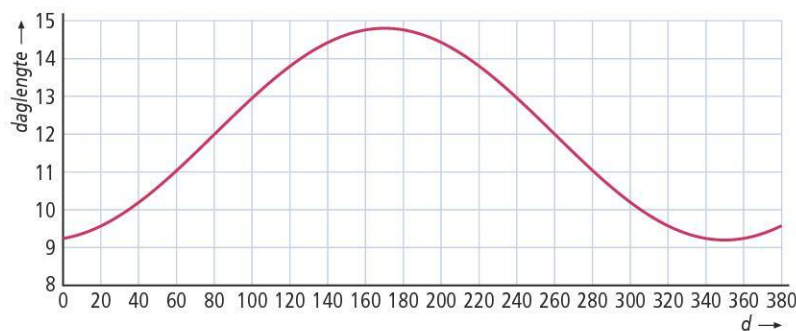
a $P = 11 - 0,87^k$ **c** $P = 4 + 1\frac{1}{2} \cdot 0,3 \log(k)$

b $P = \frac{17}{82 + 7 \log(k)}$ **d** $P = \frac{210}{7 - 4 \cdot 0,88^k}$

- 3** Herleid de volgende lineaire formules tot de vorm $P = a \cdot t + b$.

a $5t - 3P = 10$ **c** $-2(3,3 - 5t) + 0,4(20P + 3) = 2,6$

b $1,6P = \frac{15 - 2,4t}{3}$ **d** $P = (t + 5)^2 - t^2$



- 4** De daglengte is de tijdsduur tussen zonsopkomst en zonsondergang en is afhankelijk van de plaats op aarde en de datum. Hiernaast zie je de daglengte grafiek die hoort bij Madrid.

Op de horizontale as is het aantal dagen d na 1 januari aangegeven, dag 0 hoort dus bij 1 januari. Verticaal is de daglengte in uren aangegeven.

In deze opdracht mag je uitgaan van 366 dagen per jaar.

- a** Bepaal de periode, amplitude en evenwichtswaarde van de daglengte.

- b** Lees af hoe groot de daglengte is op 15 februari.

- c** Op 1 mei is de daglengte ongeveer gelijk aan 13,75.

Op welke andere datum is de daglengte ook 13,75? Leg je antwoord uit.

- 5** Bij een experiment kun je het verband tussen het aantal bacteriën S per cm^3 en de tijd t in minuten benaderen met de formule $8 \cdot \log(S) = 3 \cdot t + 20$.
- Bereken het aantal bacteriën per cm^3 bij het begin van het experiment.
 - Zijn er na 10 minuten meer of minder dan een miljoen bacteriën per cm^3 ? Licht je antwoord toe met een berekening.
 - Bereken na hoeveel tijd er 100 000 bacteriën per cm^3 zijn. Rond je antwoord af op hele seconden.
 - De formule kan worden herleid tot de vorm $S = a \cdot b^t$. Bereken a en b . Rond de waarde van a af op een geheel getal en die van b op twee decimalen.

- 6**
- Op de grafiek die bij een recht evenredig verband hoort ligt een punt bij $p = 2$ en $q = 5$. Stel een formule op die bij dit verband hoort.
 - Het punt $(2, 5)$ ligt op de grafiek die hoort bij een omgekeerd evenredig verband tussen K en L . Geef de formule die bij dit verband hoort.

- 7** Druk M uit in H .
- $H = 2 + {}^3\log(4 + M)$
 - $H = 0,6 \cdot 3^{2M}$
 - $H = 6 \cdot M^{0,1}$
 - $8 = \frac{5M + 2}{H - 1}$

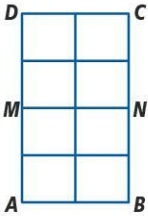
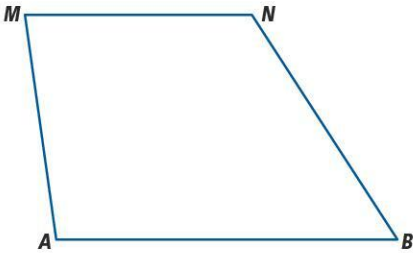
- 8** Het percentage van de bevolking dat thuis de beschikking heeft over een PC met internetaansluiting is een aantal jaren zeer laag geweest. Op basis van de gegevens van het CBS kan men de

$$\text{volgende formule opstellen: } P = \frac{69,4}{1 + 3,445 \cdot 0,42^t}$$

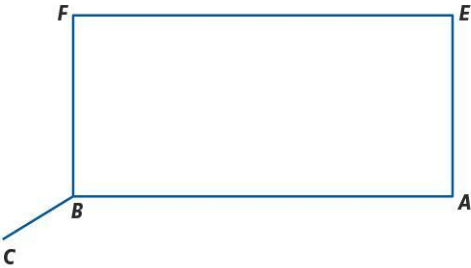
Hierbij is P het percentage van de bevolking dat thuis een PC met internetaansluiting heeft en t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 juli 1998. De formule blijkt geldig te zijn vanaf 1990.

- In de periode vanaf 1990 was steeds sprake van een toename. Leg dit uit met behulp van de gegeven formule.
- Bereken in welk jaar volgens bovenstaande formule slechts 1% van de bevolking thuis de beschikking had over een PC met internetaansluiting.
- Beredeneer met behulp van de formule wat de grenswaarde is van het percentage van de bevolking dat thuis een PC met internetaansluiting heeft.
- Het antwoord van opdracht c is niet realistisch gebleken; dit percentage is inmiddels 96%. Bereken welk getal op de plek van het getal 1 in de formule moet staan zodat de grenswaarde 97 wordt. Rond je antwoord af op drie decimalen.

11

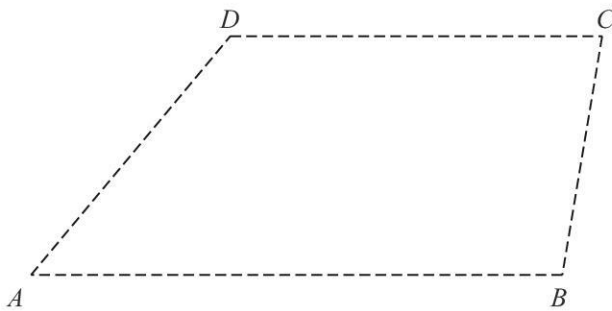


12



horizon

22



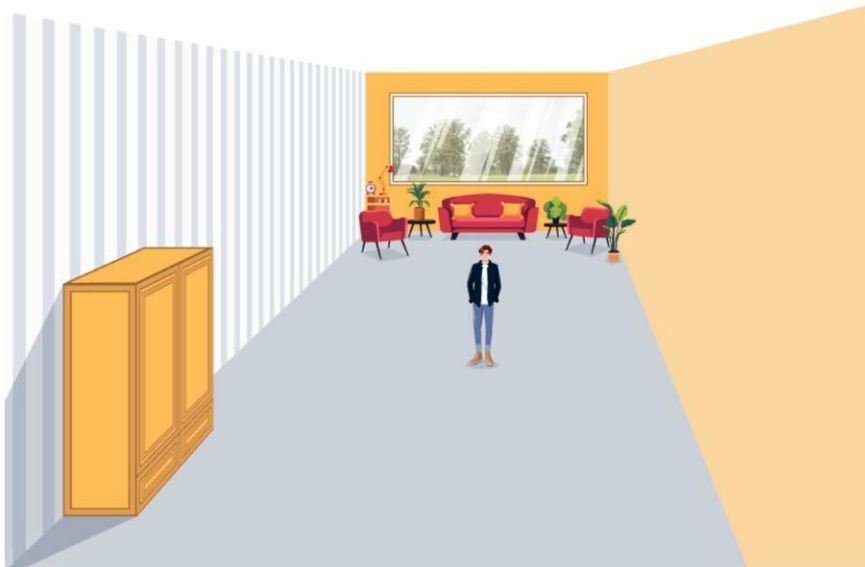
26



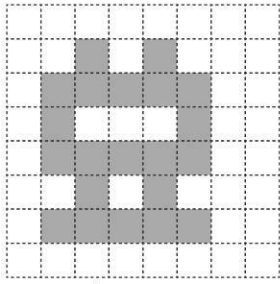
27



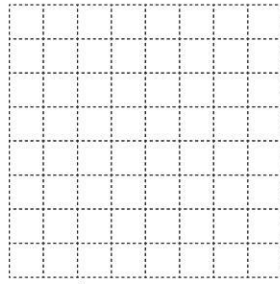
026



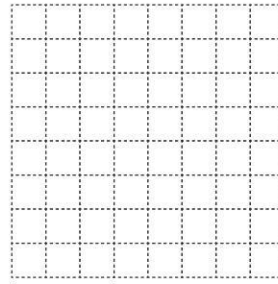
31a



vooraanzicht

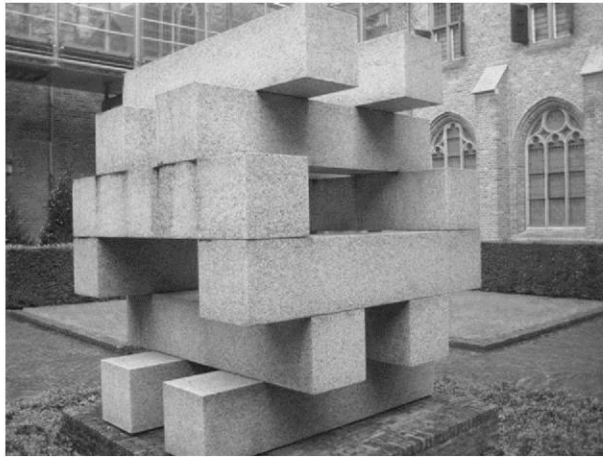


zijaanzicht



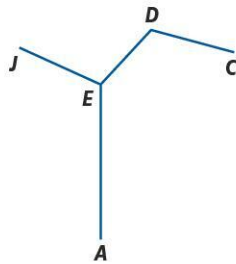
bovenaanzicht

31c



S5

horizon



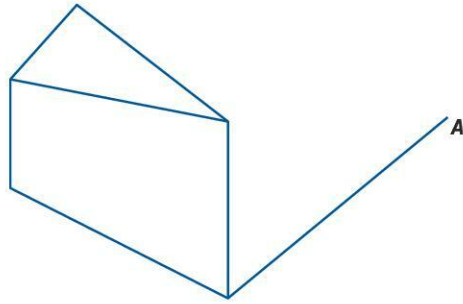
T4



T5



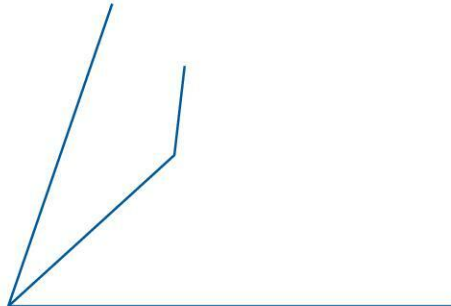
E4



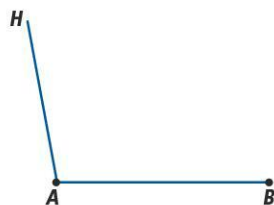
E5, E6



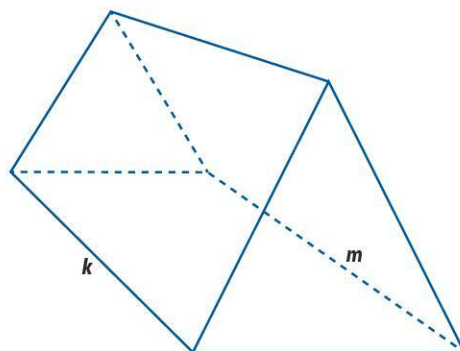
E7



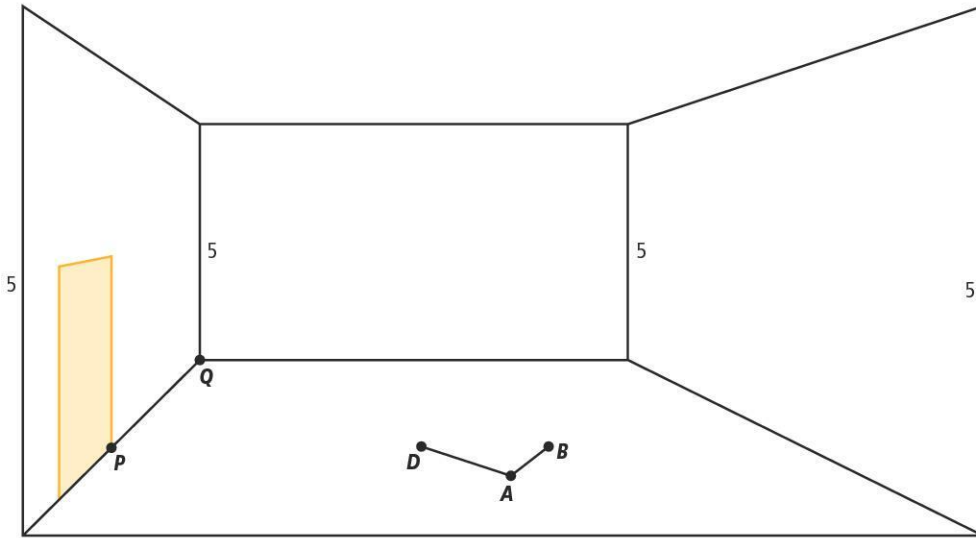
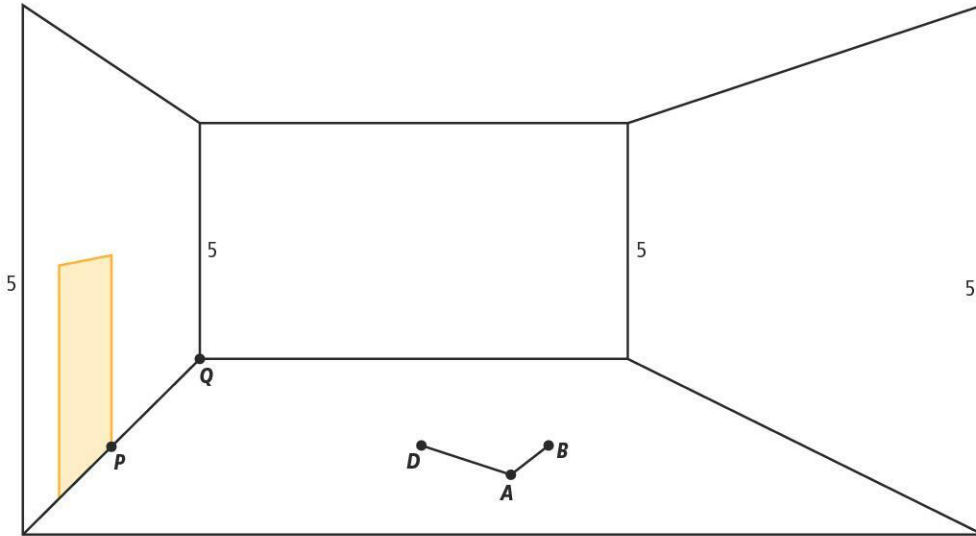
2c



3



4ab



- A** aanzichten 49, 186
als-dan-bewering 14, 178
amplitude 98
- B** bewering 10, 178
boomdiagram 193
breuken 132
- C** combinatie 195
contradictie 26, 180
correcte redenering 11, 178
- D** dalen 137
directe formule 173
- E** eenheden 133
eenpuntperspectief 52, 187
evenredig 95
evenwichtswaarde 98
exclusieve of 22
exponentieel verband 160
exponentiële formule herleiden 102
exponentiële groei 88
extrapoleren 90, 136
- F** formules aftrekken 141
formules delen 141
formules herleiden 106, 156
formules optellen 141
formules vermenigvuldigen 141
- G** gebroken formules 150
gemiddelde verandering 171
grenswaarde 138
groefactoren 161
gulden snede 185
- H** halveringstijd 104, 162
helling 171
hoofdrichtingen 52, 187
horizon 52
- I** implicatie 18, 179
implicatie symbool 18, 179
inclusieve of 22, 179
inhoud 47, 184
interpoleren 90, 136
- K** kwadratische formules 154
- L** lineair extrapoleren 90
lineair interpoleren 90
lineaire groei 88
lineair verband 146
lineaire vergelijkingen 148
logaritmen 163
logaritmische formule herleiden 103, 163
logaritmische schalen 165
- M** machtsformules 154
maximum 137
minimum 137
modelleren 18, 179
- N** nodige voorwaarde 19, 179
- O** omgekeerd evenredig 95, 149
ontkenningssymbool 18, 179
ooghoogte 60, 188
oppervlakte 47, 184
- P** paradox 26, 180
periode 98
periodieke grafieken 98
periodieke verbanden 141
periodieke verschijnselen 98
permutatie 195
perspectieftekeningen 187
procenten 132
propositie 10, 178
- R** recht evenredig 95, 148
recursieve formule 172
redeneerstap 14, 178
redeneren met formules 110, 138
rekenmachine 136
rij bij exponentieel verband 173
rij bij lineair verband 173
rooster 194
- S** samengestelde bewering 14, 178
schijncontradictie 26, 180
stelling van Pythagoras 46, 184
stijgen 137
substitueren 140

- T** tegenspraak 26, 180
tegenvoorbeeld 10, 178
tijden 133
trend 91
trendlijn 91
tweepuntsperspectief 56, 187
- U** uitdrukken in 140
uitgangspunt 14, 178
- V** variabelen 139
venndiagram 30, 180
verbindingssymbool 23, 179
verdubbelingstijd 104, 162
verdwijnpunt 52
vergrotingsfactor 184
verhoudingen 132
verhoudingen bij perspectief 64
voldoende voorwaarde 19, 179
- W** wortelformules 155

Ontwerp omslag G2K, Groningen/Amsterdam
Fotografie omslag Moment/ Getty Images, Amsterdam
Ontwerp binnenwerk Ebel Kuipers, Sappemeer
Illustraties Peter Fitzverploegh, Utrecht
Technisch tekenwerk Integra Software Services, India
Beeldresearch Daliz, Den Haag

Fotoverantwoording

Shutterstock, New York: p. 6-7, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 33, 34, 35, 40, 41, 42, 52, 56, 64, 70, 73o, 77b, 78b, 84, 89, 90, 94, 96, 98, 102, 104, 105, 106, 107, 108, 110, 112, 115, 121, 122b, 129, 209l, 220
Peter van Straaten/ Kbizz, Amsterdam: p. 8
Jeroen van de Boom, Utrecht: p. 12, 23
Pieter van Geenen/ Trouw 2016, Amsterdam: p.15
Dave de Bruin/ Daliz, Den Haag: p. 35b, 48
Peter de Wit/ Comic House, Amsterdam: p. 43
Wilf Doyle/ Alamy Stock Photo/ Image Select, Wassenaar: p. 44-45
Leonie Reedijk, Mijnsheerenland: p. 46, 61o, 63b
Hielke Peereboom, Nieuwehorne: p. 47, 60o, 61b, 62b, 63o, 73b, 75b, 77o, 220b, 221o
www.puik-art.com: p. 49
www.dutchdesignbrand.com: p. 50
Rob van Esch/ Architectuurfotograaf/ CONO Kaasmakers, West Beemster: p. 57
Danny Meulmeester, Ridderkerk: p. 60b, 65b, 217,
Cito Nederland, Arnhem: p. 62o, 65o, 68, 69, 74, 75o, 143, 144, 167, 177, 189, 190, 192, 196, 197, 218, 219, 220o
iStockphoto/ Getty Images, Amsterdam: p. 78-79, 86-87, 122-123, 204-205
Alamy/ Image Select, Wassenaar: p. 122o, 209r
Lex van Lieshout/ ANP, Den Haag: p. 128
E+/ Getty Images, Amsterdam: p. 130- 131
H. van Houwelingen/ Nationale Beeldbank, Den Haag: p. 212

Met FLEX heb je:

Boeken die je mag houden

- elk schooljaar krijg je een nieuw boek
- dit boek mag je houden om in te markeren en te werken
- zo wordt je boek een effectief leermiddel

Een persoonlijke digitale leeromgeving

- waarin je wordt uitgedaagd om het beste uit jezelf te halen
- met oefentoetsen, interactieve opdrachten en feedback
- en met inzicht in je resultaten



Altijd actueel lesmateriaal

- actuele inhoud met opdrachten en toetsen
- zowel in je boek als digitaal
- aangevuld met nieuw lesmateriaal op basis van het nieuws en actualiteiten



Noordhoff



www.modernewiskunde.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-89202-9



9 789001 892029