

MODERNE WISKUNDE

C



Noordhoff

$$w = \frac{L}{1 + (L + 1) \cdot g^t}$$

12e editie

Moderne Wiskunde

Uitwerkingen bij vwo C deel 4

Ontwerp omslag G2K Designers, Groningen/Amsterdam
Ontwerp binnenwerk Ebel Kuipers, Sappemeer
Technisch tekenwerk Integra Software services Pvt. Ltd., India
Picture Research Daliz, Den Haag

Fotoverantwoording

Rob van Esch/ Architectuurfotograaf/ CONO Kaasmakers, West Beemster: p. 31
Danny Meulmeester, Ridderkerk: p. 33, 39
Hielke Peereboom, Nieuwehorne: p. 34b, 35b, 37b, 48b, 51o
Leonie Reedijk, Mijnsheerenland: p. 34o, 36
Cito Nederland, Arnhem: p. 35o, 43, 44, 48o, 113, 114
Shutterstock, New York: p. 37o, 45, 46, 50, 51, 120b
Alamy/ Image Select, Wassenaar: p. 120o, 121

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB
Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontlelen.

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

12e editie

Moderne Wiskunde

Uitwerkingen bij vwo C deel 4

Ferdi Doddema

Arjan Eikelboom

Colin Roll

Geertrui Schaberg

Greetje Smeenk - van Broekhoven

H17 Logisch redeneren 6

H18 Vorm en ruimte 23

Vaardigheden 9 53

H19 Afsluiting formules en verbanden 59

Vaardigheden 10 81

Examenvoorbereiding 87

Meer oefenen 118

Oefenproefwerken 122

V1 a Voorbeelden van antwoorden zijn:

- Beste voetballer zijn kan één van de eigenschappen zijn die iemand geschikt maken om aanvoerder van het team te zijn.
- Het gevolg van dat er meer online gekocht wordt, is dat er minder in de winkels wordt gekocht.
- Omdat de fiets van Joke nog nooit gestolen is, denkt Joke dat haar dat ook niet overkomt als ze haar fiets niet op slot zet.

b Voorbeelden van antwoorden zijn:

- Nee, goed kunnen voetballen betekent nog niet dat je geschikt bent als aanvoerder. Het is dus niet echt logisch.
- Ja, deze bewering lijkt logisch. Door kleinere omzet hebben winkels het moeilijk.
- Nee, door de fiets niet op slot te zetten, wordt de kans op diefstal groter. Het is dus juist niet logisch om je fiets niet op slot te zetten.

V2 a Niet juist. Marieke kan ook door andere oorzaken te laat zijn.

b Redenering bij de schoolgang van Cecile is op zich juist. Verondersteld wordt wel dat het droog is gedurende de periode dat zij naar school komt.

V3 a In het vakje van de A kan als je in de rij kijkt alleen een 1 of een 3 staan. Als je in de kolom kijkt kan er alleen een 1 of een 2 staan.

De enige mogelijkheid voor het vakje met de A is dus een 1.

b

3	2	4	1
1	4	2	3
4	3	1	2
2	1	3	4

V4 Zo vader zo zoon: vader ziet zijn eigen gedrag bij zijn zoon.

Conclusie: Vader en zoon hebben beiden een misselijke levenshouding.

V5 a Deze bewering is waar.

b Deze bewering is niet waar. Een tegenvoorbeeld is een ruit. De zijden van een ruit zijn even lang maar de hoeken hoeven niet recht te zijn.

c Deze bewering is niet waar. Een tegenvoorbeeld is een parallellogram met hoeken die niet recht zijn.

V6 a De omgekeerde bewering van A: 'Een vierhoek waarvan de overstaande zijden even lang zijn is een rechthoek'. Deze bewering is niet waar. Een tegenvoorbeeld is parallellogram met niet-rechte hoeken.

b De omgekeerde bewering van B: 'Een vierhoek waarvan de overstaande zijden evenwijdig lopen is een parallellogram.'. Deze bewering is waar.

- V7 a** De uitspraken van Ben en Daantje kunnen niet gelijktijdig waar zijn, want dan heeft Ben het zowel wel als niet gedaan.
- b** Als Ali het zou hebben gedaan, dan ware de uitspraken van Ali, Celine en Daantje gelogen. Ali valt dus af.
Als Ben het zou hebben gedaan, dan zijn de antwoorden van Ben en Celine gelogen. Ben valt dus ook af.
Als Celine het zou hebben gedaan, dan zijn de antwoorden van Celine en Daantje gelogen. Celine valt dus ook af.
Als Daantje het zou hebben gedaan dan is zij de enige die heeft gelogen. Daantje heeft dus het cadeau verstopt.

17.1 Beweringen

intro Bij de bewering van Ron hoef je alleen maar aan te tonen dat er een leerling is zonder mobieltje. Bij de bewering van Paul moet je aantonen dat alle leerlingen een mobieltje hebben.
Het is dus makkelijker om aan te tonen dat Ron gelijk heeft.

- 1 a** Beweringen zijn:
Een trein is een vervoersmiddel.
De trein van Utrecht naar Amsterdam rijdt altijd op tijd.
- b** Van de zinnen waar iets beweert wordt kun je zeggen of het waar of onwaar is. Dus de zinnen bij opdracht a zijn waar of onwaar.
- c** Door één voorbeeld te geven van een trein die niet op tijd rijdt kun je aantonen dat de bewering niet waar is.
- 2 a** Het is koud vandaag. Dit is een bewering.
- b** Ben je vrolijk? Dit is een vraag, geen bewering.
- c** Trek je jas aan. Dit is een opdracht, geen bewering.
- d** Koen trekt zijn jas aan. Dit is een bewering. Kan waar of onwaar zijn.
- 3 a** Bijvoorbeeld:
2 en 4, het product 8 is groter dan 2 en 4.
- b** 0,5 en 4, het product 2 is kleiner dan 4.
- c** Dat betekent dat de bewering niet juist is.
- 4 a** Het is niet gezegd dat hij tijdens de hele wandeling boven de boomgrens blijft.
- b** Het feit dat boven de boomgrens geen bomen groeien wil nog niet zeggen dat overal onder de boomgrens wel bomen groeien.
- 5 a** Deze bewering hoeft niet waar te zijn. Er kunnen ook andere oorzaken zijn voor het slechte slapen van Max.
- b** Deze bewering hoeft ook niet waar te zijn. Het niet kijken naar een beeldscherm is geen garantie voor goed slapen.
- c** In de tekst staat dat veel mensen (dus niet alle mensen) die naar een beeldscherm kijken slaapproblemen hebben. Het kan dus zijn dat Isabel geen slaapproblemen heeft na het kijken naar een beeldscherm.

- 6 a** De som van de ogen is 7. Waar.
Lieke heeft een 3 gegoooid. Waar.
Lieke heeft een 5 gegoooid. Onwaar.
Het product van de ogen is 12. Waar.
- b** Op de bovenkant van de dobbelstenen staat 3 resp. 4, op de onderkant staat dan resp. $7 - 3 = 4$ en $7 - 4 = 3$.
- c** Isaiah kan bijvoorbeeld een 6 en een 3 hebben gegoooid.
In dat geval is het aantal ogen aan de onderkant van de stenen 1 en 4.
- d** Bij de worp van Tim is de som van de ogen elf. Dat kan alleen met een 6 en een 5. In dat geval staat op de onderkanten een 1 en een 2.
- 7 a** Voorbeelden zijn: $4 = 1 + 3$, $6 = 1 + 5$, $8 = 3 + 5$, $10 = 3 + 7$, $12 = 5 + 7$,
 $14 = 7 + 7$, ... $26 = 13 + 13$, $28 = 11 + 17$, $30 = 11 + 19$
- b** Dan zou dit vermoeden van Goldbach onjuist zijn.
- 05 a** Nee, er zijn veel oorzaken voor gezondheidsklachten.
- b** Nee, dat kun je niet concluderen. Je weet niet wat de oorzaak is voor het ziek zijn.
- c** Nee, want het geldt voor een kwart van de Nederlanders en niet voor alle Nederlanders.
- d** Peter hoeft nog niet te horen bij de kwart van de Nederlanders die kampt met gezondheidsklachten door onvoldoende ventilatie. Hij kan ziekelijk zijn terwijl het huis waarin hij woont voldoende wordt geventileerd.
- e** Quirine is nooit ziek, maar kan best in een slecht geventileerd huis wonen. Zij hoort dan niet bij de kwart van de Nederlanders die kampt met gezondheidsklachten door onvoldoende ventilatie.
- f** Sarah hoeft helemaal niet ziek te zijn door de slechte kwaliteit van de ventilatie in haar huis en hoort dan niet bij die 25%. Betere ventilatie hoeft dus ook geen invloed te hebben op hoe vaak zij ziek is.
- U1 a** $a = 3$ en $b = 5$
 $(3 + 5)^2 = 8^2 = 64$ en $3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$
- b** Voor getallen kleiner dan 1 is de bewering niet waar.
Bijvoorbeeld: $0,5^2 = 0,25$.
- c** Voor getallen kleiner dan -5 geldt dat het kwadraat groter is dan 25.
Bijvoorbeeld: $(-6)^2 = 36$.
Dus a hoeft niet groter dan 5 te zijn.

17.2 Uitgangspunt en conclusie

intro De conclusie van de huisarts klopt niet. Hij heeft niets beweert over het gevolg van het niet slikken van zijn medicijn.

- 8 a** Iets wordt veel waard als er minder van is.
- b** Als de hoeveelheid natuur vermindert dan stijgt de waarde ervan.
- c** Vogels kijken is een laagdrempelige hobby. Die conclusie trekt hij omdat je geen biologie hoeft te hebben gestudeerd of de lagere school te hebben afgemaakt om deze hobby te kunnen hebben.

- 9 a** 'Janine heeft geen jas aan' en 'ze heeft het koud'.
- b** Uitgangspunt: Janine heeft geen jas aan.
Conclusie: Ze heeft het koud.
- c** Als Janine geen jas aan heeft, dan heeft ze het koud.
- 10 a** Uitgangspunten: 'het is koud' en 'ik moet naar buiten'.
Conclusie: 'ik doe mijn jas aan'.
- b** Als ik naar buiten moet en het is koud, dan doe ik mijn jas aan.
- 11 a** Uitgangspunten:
Laagopgeleiden zijn vaker dik.
Laagopgeleiden zijn tegen het Oekraïne-akkoord.
Conclusie:
Ik ben dik, dus ik ben laagopgeleid.
- b** Deze redenering is niet correct. In het eerste plaatje staat dat laagopgeleiden vaker dik zijn, er staat niet dat (alle) dikke mensen laag opgeleid zijn.
- c** Als ik voor stem dan wordt ik slank en hoogopgeleid.
- 12 a** - Uitgangspunten van de eerste redenering zijn:
Dafne heeft talent.
Ze traint hard.
Conclusie van de eerste redenering is: ze gaat sneller hardlopen.
- Uitgangspunt van de tweede redenering is:
Dafne gaat sneller hardlopen.
Conclusie van de tweede redenering is: ze wordt kampioen.
- b** Als Dafne talent heeft en hard traint, dan gaat ze sneller lopen.
Als Dafne sneller gaat lopen wordt ze kampioen.
- c** Als Dafne talent heeft en hard traint dan gaat ze sneller lopen en dan wordt ze kampioen.
- 13** T en H , dus S en dus K .
- 14 a** 1: B dus S
2: B en O dus S
- b** 1: Jens is op tijd naar bed gegaan, heeft voldoende geoefend en heeft de theorie doorgenomen, dus hij slaagt voor zijn rijexamen.
2: Jens is niet geslaagd voor zijn rijexamen dus hij heeft niet voldoende geoefend of hij is niet op tijd naar bed gegaan.
- 15 a** Als arbeid mentaal veeleisend is dan schaadt thuiswerken de kwaliteit van het werk.
- b** als M en T dan K
- c** De uitgangspunten zijn:
Online maken schakers grotere fouten dan bij een traditionele wedstrijd.
Schaken is te vergelijken met werk in de kennismaatschappij.
- 014 a** L dus V
- b** Freek heeft geen voldoende voor het proefwerk gehaald, dus hij heeft niet hard geleerd.

- c 1: Freek heeft hard geleerd en is uitgerust, dus hij haalt een voldoende voor het proefwerk.
2: Freek haalt niet een voldoende voor het proefwerk, dus hij is niet uitgerust of hij heeft niet hard geleerd.
- d 1: U en S dus V
2: niet U en niet S dus niet V

U2 Je moet de kaart met 'A' omdraaien. Op de andere kant moet dan een even getal staan.
(Over andere combinaties van klinkers, medeklinkers, even getallen en oneven getallen wordt niets beweerd)

17.3 Implicatie en ontkenning

intro De bewering van de ouders klopt. Er wordt in de bewering niets gezegd over wat ze gaan doen als het regent.

- 16 a Er kunnen ook files op de A1 staan op een ander tijdstip dan 8.00 uur.
b Om 8.00 uur staan er altijd files.
Als er op de A1 geen files staan, kan het dus geen 8.00 uur zijn.
- 17 a 1: $A \Rightarrow B$
2: $\neg B \Rightarrow \neg A$
b Als Aisa naar het feestje komt dan komt Chermaine niet naar het feestje.
- 18 a $R \Rightarrow L$ is waar.
b $\neg L \Rightarrow \neg R$ is waar.
c $L \Rightarrow R$ is niet waar, een bedrijfspand kan ook laadpalen hebben als het niet gerenoveerd is.
d $\neg R \Rightarrow \neg L$ is niet waar, niet gerenoveerd betekent niet dat er geen laadpalen kunnen staan.
- 19 a 1 $G \Rightarrow A$ is waar, want het enige stuk fruit dat groen is in de fruitschaal is een appel.
2 $\neg A \Rightarrow \neg G$ is waar, als het stuk fruit niet een appel is, is het ook niet groen.
3 $S \Rightarrow O$ is waar, een sinaasappel is oranje.
4 $M \Rightarrow O$ is ook waar, een mandarijn is ook oranje.
5 $\neg O \Rightarrow A$ is waar, als het stuk fruit niet oranje is, dan kan het alleen een appel zijn.
Deze implicaties zijn dus allemaal waar.
b De omkeringen zijn:
1 $A \Rightarrow G$ is waar.
2 $\neg G \Rightarrow \neg A$ is waar.
3 $O \Rightarrow S$ is niet waar.
4 $O \Rightarrow M$ is niet waar.
5 $A \Rightarrow \neg O$ is waar.
c Nee, als O waar is zijn er twee mogelijkheden, de vrucht is een mandarijn of een sinaasappel.
d Alle appels zijn groen dus als A waar is, dan is G ook waar ($A \Rightarrow G$).

20 a $S \Rightarrow L$

b Nee, je kunt ook Spaanse les krijgen als je niet in Spanje op school zit.

c S is voldoende voorwaarde voor L ($S \Rightarrow L$).

21 a - Als het regent, dan wordt de stoep nat.

Regenen is een voldoende voorwaarde voor het nat worden van de stoep.

- Alleen met vijf jaar werkervaring kom je in aanmerking voor de baan.

Vijf jaar werkervaring is een nodige voorwaarde. Er staat niet dat je met vijf jaar werkervaring de baan ook krijgt.

b Je mag alleen stemmen als je een volwassen Nederlander bent. Het is dus een nodige voorwaarde.

Er zijn geen andere voorwaarden om te mogen stemmen. Het is dus ook een voldoende voorwaarde.

22 a Jones spreekt de waarheid (A), dus was hij niet in de stad, toen Robert daar neergestoken werd. Visser beweert dat hij o.a. Jones samen met Robert in de stad gezien. De conclusie is dan dat Visser liegt ($\neg B$)

b De beweringen van Jones en Visser zijn strijdig, dus er geldt ook $B \Rightarrow \neg A$, Jones en Visser kunnen dus niet beiden de waarheid spreken. Omdat de twee onschuldigen beiden de waarheid spreken, kan Stolberg niet de dader zijn. Stolberg beweert dat Robert een vriend van Jones was en Jones beweert dat hij Robert helemaal niet kent. Dat klopt niet met elkaar. Dus ook Jones en Stolberg kunnen niet de onschuldigen zijn en is Visser niet de dader. Stolberg en Visser kunnen dus niet de dader zijn, dus heeft Jones Robert doodgestoken.

017 a Het zijn 'als-dan' beweringen.

b Bij een implicatie gebruik je het symbool $\Rightarrow$.

c $S \Rightarrow T$

d Bij een ontkenning gebruik je het symbool $\neg$.

e $\neg S \Rightarrow \neg T$

f Als het regent dan wordt de stoep nat.

Als de stoep niet nat wordt dan regent het niet.

U3 a $B \Rightarrow \neg L$

$K \Rightarrow \neg H$

$\neg L \Rightarrow H$

b Uit $B \Rightarrow \neg L$ en $\neg L \Rightarrow H$ volgt dat $B \Rightarrow H$.

Uit $K \Rightarrow \neg H$ en $B \Rightarrow H$ volgt dat B niet hetzelfde kan zijn als K .

Baby's kunnen dus geen krokodillen verslaan.

17.4 Of en En

intro 'De man heeft een leesbril' is waarschijnlijker. Dit zijn alle mannen met een leesbril, ook de mannen jonger dan 55 jaar.

In de groep 'mannen met een leesbril en ouder dan 55 jaar' zitten niet de mannen jonger dan 55 jaar met een leesbril, dus deze groep is kleiner.

- 28 a** Er staan haakjes om ‘het vriest of het gaat vriezen’ omdat dit eigenlijk één voorwaarde is. De andere voorwaarde is I .
- b** Nee, dat kan niet. Bij de redenering $(I \wedge V) \vee G \Rightarrow E$ zou hij erwtensoep maken als het gaat vriezen, zelfs al heeft hij de ingrediënten niet in huis.
- c** $\neg I \vee (\neg V \wedge \neg G) \Rightarrow \neg E$: Als hij de ingrediënten niet in huis heeft of als het niet vriest of niet gaat vriezen dan maakt Justin geen erwtensoep.

29 $O \vee (\neg O \wedge Z) \Rightarrow K$

30 a $G \Rightarrow D; S \wedge \neg I \Rightarrow W; W \Rightarrow D; I \Rightarrow S$

b Uit de zin 'Als Anneke intelligent is, dan studeert ze hard' volgt $I \Rightarrow S$ dus $I \Rightarrow I \wedge S$.

Uit de zin 'Als Anneke intelligent is en hard studeert, dan haalt ze goede cijfers' volgt $I \wedge S \Rightarrow G$.

Uit de zin 'Als ze goede cijfers haalt, zal ze het diploma halen' volgt $G \Rightarrow D$.

Je kunt dit kort noteren als:

$$I \Rightarrow S; I \Rightarrow I \wedge S; I \wedge S \Rightarrow G; G \Rightarrow D, \text{ dus } I \Rightarrow D.$$

Je mag dus concluderen dat Anneke het diploma haalt.

c Als Anneke intelligent is dan zal ze het diploma halen. Zie onderdeel b. Dus als ze het diploma niet haalt is ze in ieder geval niet intelligent. Als ze niet intelligent is en het diploma niet haalt kan dat alleen maar doordat ze niet hard studeerde, want anders zou ze via waardering wel haar diploma halen. Dus $\neg D \Rightarrow \neg I \wedge \neg S$.

027 a Burak en/of Chloe hebben een voldoende gehaald.

b Chloe heeft een voldoende en Burak heeft een onvoldoende. Chloe en Burak hebben beide een voldoende.

c Anne heeft een voldoende gehaald en Burak of Chloe of beiden hebben een voldoende gehaald.

d

A	B	C
v	v	o
v	o	v
v	v	v

e Anne en Burak hebben beide een voldoende en/of Chloe heeft een voldoende.

f

A	B	C
v	v	o
v	v	v
v	o	v
o	v	v
o	o	v

U4 $(N \wedge \neg D) \vee (\neg N \wedge D)$

17.5 Contradictie en paradox

intro De kapper scheert zichzelf niet, maar dan wordt hij door de kapper geschoren, dus scheert hij wel zichzelf. Dat is een tegenspraak. De kapper scheert zichzelf wel maar de kapper scheert alleen mannen die zichzelf niet scheren. Dit is ook een tegenspraak.

31 a Een cirkel kan niet vierkant zijn.
Bij het schrijven maak je tekst en schrap je niet.
Je kunt niet gelijk eerste en laatste zijn.

- b - Schrijven is de kunst van het schrappen hoeft geen tegenspraak te zijn. Je kunt een geschreven tekst verbeteren door delen te schrappen.
 - Vele eersten zullen de laatsten zijn is een uitdrukking om aan te geven dat je door in het begin te gehaast te zijn, later problemen kunnen ontstaan waardoor je achteraan komt.
- 32**
- a $G \wedge \neg G$ is een contradictie, een getal kan niet gelijk groter dan nul en niet groter dan nul zijn.
 - b $G \wedge O$ is geen contradictie (bijvoorbeeld: 1, 3, 5,)
 - c $(G \wedge O) \vee \neg G$ is geen contradictie (bijvoorbeeld -2, -1, 1, 3, 5, ...)
 - d $(G \wedge O) \wedge (\neg G \vee \neg O)$ is een contradictie. $G \wedge O$ zijn de getallen 1, 3, 5, ...; $\neg G \vee \neg O$ zijn de getallen -2, -1, 2, 4, 6,
 $G \wedge O$ en $\neg G \vee \neg O$ kan niet beide tegelijk waar zijn.
- 33**
- a Plastic en blik sluiten elkaar uit.
 - b Het heeft de vorm van wat wij een blikje noemen, maar is van plastic.
Dus een schijnbare tegenstrijdigheid.
- 34**
- a De begrippen 'dood gaan' en 'voortleven' spreken elkaar tegen.
 - b Je kunt de uitspraak ook als volgt opvatten: als iemand is vermoord, is hij/ zij weliswaar dood, maar leeft des te meer voort in de herinnering van de nabestaanden.
 - c Jules Deelder: langer en korter spreken elkaar tegen.
Je kunt het een paradox noemen omdat als je achteraf kijkt het leven wat je nog voor de boeg hebt steeds korter duurt.
Johan Cruijff: simpel en moeilijk spreken elkaar tegen.
Je kunt het een paradox noemen omdat het moeilijk is om simpel te voetballen.
- 35**
- a Het vogelbekdier voldoet aan twee beweringen over een vogel, namelijk ze leggen eieren en ze hebben een snavel.
 - b Een vogelbekdier heeft een vacht, dus geen veren.
 - c Een dier kan niet tegelijkertijd wel en niet vogel zijn.
 - d De bewering: 'zoogdieren zijn levendbarend' moet worden aangepast.
- 36**
- a $(\neg M \wedge \neg I \wedge \neg W \wedge \neg O) \wedge K \Rightarrow V$
 - b De toets kan niet op donderdag zijn want als de toets niet op maandag, dinsdag of woensdag is geweest weet je dat de toets op donderdag is.
 - c Volgens deze manier van redeneren kun je na het uitsluiten van donderdag, woensdag uitsluiten en vervolgens dinsdag en maandag uitsluiten.
 - d Volgens deze redenering zou de toets op geen enkele dag een verrassing zijn. Hier is dus sprake van een paradox.
- 37**
- a Als de bewering waar is, is de zin niet waar en spreekt hij zichzelf tegen.
 - b Als de bewering niet waar is, is de zin wel waar en spreekt hij zichzelf ook tegen.
- 032**
- a Bijvoorbeeld G : 1, 2, 3 en $\neg G$: -1, -2, -3.
 - b Er zijn geen getallen die aan de bewering G en de bewering $\neg G$ voldoen.
 - c Dit is een contradictie.
 - d Bijvoorbeeld -4, -2 en 2

- e Ja, bijvoorbeeld 2, 4 en 6.
- f $G \wedge E$ is dus geen contradictie.
- g $G \wedge \neg E$ is geen contradictie, bijvoorbeeld: 1, 3, 5, ...
- h $E \wedge \neg E$ is een contradictie (een getal kan niet tegelijk even en niet even zijn)
- i $(G \wedge \neg G) \wedge E$ is een contradictie ($G \wedge \neg G$ is een contradictie)
- j $(G \wedge E) \wedge (\neg G \vee \neg E)$ is een contradictie ($(G \wedge E)$ zijn de getallen 2, 4, 6, ...; $\neg G \vee \neg E$ zijn de getallen -2, -1, 1, 3, 5, Dit kan niet beide tegelijk waar zijn).

- U5 a** Als de moeder had geantwoord met: 'Je zult hem niet opeten.' dan had de krokodil vrij spel en zich altijd aan zijn opgelegde spelregels gehouden: Als hij de baby zou teruggeven, dan had de moeder gelijk en dus had hij zich aan zijn woord gehouden. Als hij de baby zou opeten, dan had de moeder het niet goed geraden, zodat het kind volgens de spelregels inderdaad opgegeten moest worden.
- b** De spelregels van de krokodil en het antwoord van de moeder maken dat de krokodil zich niet aan zijn eigen spelregels kan houden, zoals ook duidelijk in het verhaaltje naar voren komt.

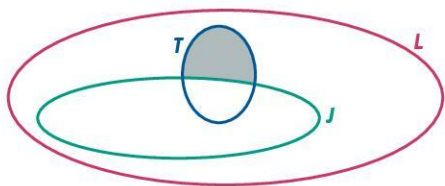
17.6 Venndiagrammen

intro Je mag een stip zetten voor je eigen situatie.

- 38 a** Het gebied met aanduiding 'trein' valt volledig binnen het gebied 'fiets'.
- b** Er is overlap van de gebieden 'lopend' en 'bus'.
- c** Er is geen overlap tussen die twee gebieden, het antwoord is dus nee.
- d** 1: $T \Rightarrow F$ is waar.
 2: $F \Rightarrow T$ is niet waar.
 3: $\neg L \wedge \neg F \Rightarrow B$ is waar.
 4: $\neg F \Rightarrow \neg T$ is waar.

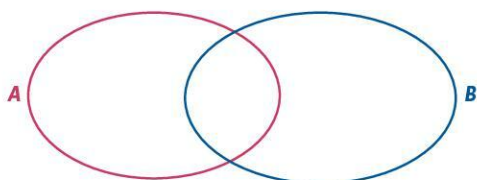
- 39 a** Er is overlap van de gebieden J en T .

b

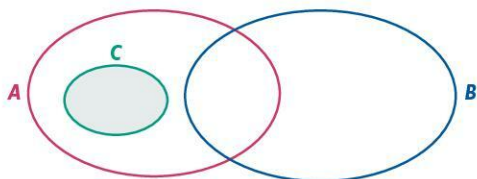


- 40 a** 1: $P \Rightarrow Q$, is niet waar.
 2: $Q \Rightarrow P$, is waar.
 3: $\neg Q \Rightarrow \neg P$, is niet waar.
 4: $\neg P \Rightarrow \neg Q$, is waar.
- b** Punt v ligt in het gebied waarvoor bewering 2 geldt: $R \wedge P$.
- c** Punt w ligt in gebied R maar buiten P , dus $R \wedge \neg P$.
- d** Punt t ligt in het gebied binnen P , maar buiten Q en ook buiten R .
 Dus bijv. $P \wedge \neg(Q \vee R)$ of $P \wedge (\neg Q \wedge \neg R)$.
 Punt s ligt buiten P en ook buiten Q , dus in $\neg(P \vee R)$ of (wat hetzelfde is) $\neg P \wedge \neg R$.

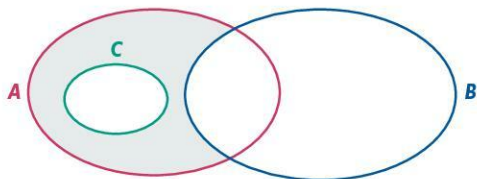
41 a



b

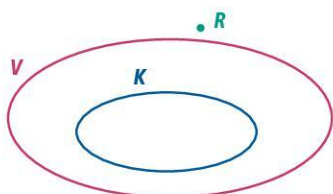


c



42 a In het Venndiagram zie je dat een deel van gebied N buiten gebied G valt. Hieruit blijkt dat niet alle Nederlandse kinderen een goede conditie hebben. Dit klopt dus niet met de conclusie.

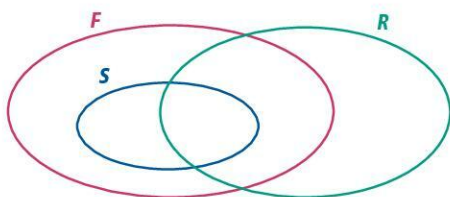
b 1: Alle katten (K) houden van vis (V). Het gebied K valt dus binnen het gebied V . Rakker (R) houdt niet van vis en valt dus buiten gebied V .



De conclusie is juist, Rakker is geen kat.

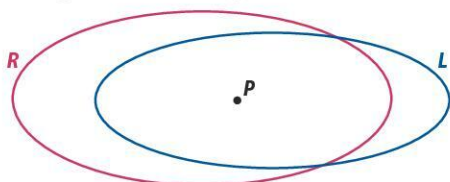
2: Alle sporters (S) zijn fit (F), dus gebied S valt binnen gebied F .

Sommige sporters zijn rijk (R). Gebied R overlapt het gebied S gedeeltelijk.



De conclusie is onjuist, er zijn rijke mensen die niet fit zijn.

43 Er is niet gegeven hoe groot de groepen rokers en longkankerpatiënten zijn. Stel dat er meer rokers (R) zijn dan longkankerpatiënten (L). Het gebied R is dus groter dan het gebied L . 90% van gebied L valt binnen gebied R .



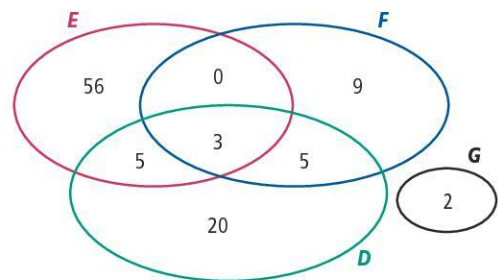
Het gebied met punt P (een patiënt met longkanker die gerookt heeft) is 90% van gebied L . Gebied R is groter, dus het gebied met punt P binnen R is minder dan 90% van gebied R .

De conclusie is dus dat minder dan 90% van de rokers longkanker krijgt.
(Op dezelfde manier kun je aantonen dat deze groep groter is dan 90% als de groep met rokers kleiner is dan de groep met longkankerpatiënten.)

- 44** a Als ze geen bochtjes kan rijden, dan is ze een moeder.
b Venndiagram B.
Alleen bij Venndiagram B zie je dat het niet kunnen rijden van bochtjes automatisch als gevolg heeft dat ze een moeder is.
c Citaat 4 zegt dat er ook meisjes (geen moeders) zijn die geen bochtjes kunnen rijden. Je mag dus niet concluderen dat het niet kunnen rijden van bochtjes betekent dat iemand een moeder is.
d Als je moeder bent dan kun je geen bochtjes rijden.
Bij deze uitspraak is het mogelijk dat ook de meisjes geen bochtjes kunnen rijden.
Citaat 2 beweert: Als je geen bochtjes kunt rijden, dan ben je een moeder.
De uitspraak van citaat 3 bevestigt de uitspraak van citaat 2 niet.

- 040** a Als je in Amsterdam woont, dan woon je in Nederland dus $A \Rightarrow N$.
Je kunt in Nederland wonen, maar dat hoeft niet in Amsterdam te zijn dus $N \Rightarrow A$ klopt niet.
b Gebied A is een deel van gebied N .
c $\neg N$ betekent dat het een punt buiten het gebied N is, dus ook buiten gebied A .
d Bij het gebied met punt d past de bewering $B \wedge \neg C$.
e Punt e valt in het gebied waar B en C elkaar overlappen, dus $B \wedge C$.
f Punt f valt in het gebied C maar niet in gebied B , dus $C \wedge \neg B$.
g De punten vallen alle drie in de gebieden B of C of beide.

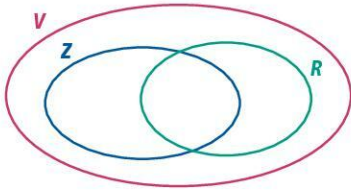
- U6** a - 20 studenten spreken alleen Duits en 2 geen van de drie talen.
Deze aantallen kun je direct invullen.
- 25 studenten spreken Duits maar geen Frans.
Het gebied $D \wedge E \wedge \neg F$ heeft $25 - 20 = 5$ studenten.
- 8 studenten spreken Engels en Duits.
Het gebied $D \wedge E \wedge F$ heeft $8 - 5 = 3$ studenten.
- 33 studenten spreken Duits.
Het gebied $D \wedge F \wedge \neg E$ heeft $33 - 20 - 5 - 3 = 5$ studenten.
- 3 studenten spreken Engels en Frans
Het gebied $E \wedge F \wedge \neg D$ heeft $3 - 3 = 0$ studenten.
- 64 studenten spreken Engels.
Het gebied $E \wedge \neg F \wedge \neg D$ heeft $64 - 5 - 3 = 56$ studenten.
- Er zijn totaal 100 studenten.
Voor het gebied $F \wedge \neg E \wedge \neg D$ blijft over $100 - 56 - 5 - 3 - 5 - 20 - 2 = 9$ studenten.
Er zijn $0 + 9 + 3 + 5 = 17$ studenten die Frans spreken.
b Er zijn 3 studenten die alle drie de talen spreken.



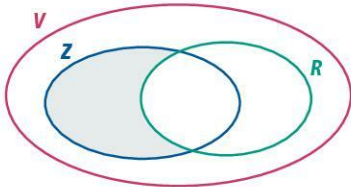
17.6 Gemengde opdrachten

45 $T \Rightarrow S \wedge G \wedge V \Rightarrow R \wedge L$

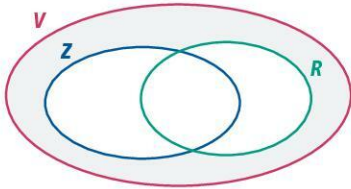
46 a



b



c



47 a P is de eigenschap dat ze schoenen koopt, Q is de eigenschap dat ze bruin haar heeft.

De bewering $\neg Q \Rightarrow P$ betekent: Als een meisje geen bruin haar heeft dan koopt ze schoenen. De uitspraak volgt uit de bewering en is dus waar.

b Julia kocht niets dat Roos of de zwartharige Lotte kocht (6).

Drie van hen hebben schoenen gekocht (1).

Roos en/of Lotte kochten schoenen, dus Julia niet.

Er is precies één meisje met bruin haar en zij kocht geen schoenen (2).

Dit moet dus Julia zijn.

Onderzoeksopdrachten

48 a Speler A ziet op 2 standaards een som van 12 of meer. Spelers B en C zien dat Speler A ook een standaard heeft met een som van 12 of meer. Er moeten dus drie standaards zijn met een som van 12 of meer. Ze zien dat de som bij speler D minder dan 12 is. Dus speler B en C hebben een som van 12 of meer.

Speler D ziet drie standaards met een som 12 of meer dus weet hij dat hij zelf cijfers op zijn standaard heeft staan met een som minder dan 12.

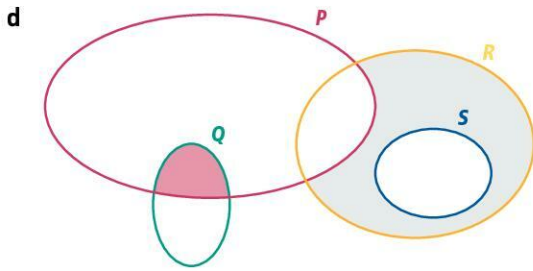
b Omdat Speler B één standaard ziet met even of even getallen en speler D geen standaard met dat soort getallen ziet, weet D in ieder geval dat zijn getallen allemaal even zijn of allemaal oneven zijn. Uit de vorige ronde weet hij dat de som van getallen kleiner dan 12 is, dus 11 of minder.

Verder ziet D dat de 2 tweeën er al uit zijn (spelers A en B). Als zijn drietal getallen even zou zijn, dan zouden ze allemaal even en 4 of groter moeten zijn. In dat geval is de som 12 of meer. Omdat hij weet dat de som van zijn getallen 11 of minder is, kunnen zijn getallen niet allemaal even zijn, dus zijn ze allemaal oneven.

- 49** Bob heeft te horen gekregen op welke dag van de maand. Amir weet dat Bob onvoldoende informatie heeft. Bob kan de informatie 23 of 24 niet gekregen hebben. Hierdoor zijn de maanden september en oktober uitgesloten. Na de opmerking van Amir, weet Bob welke maand het is. De 19e kan november of december zijn, dus de 19e valt af. Blijft dus over 21 november, 20 december en 22 december.
Bob weet niet welke maand. De verjaardag kan dus niet in december zijn. De enige datum die dus overblijft is 21 november

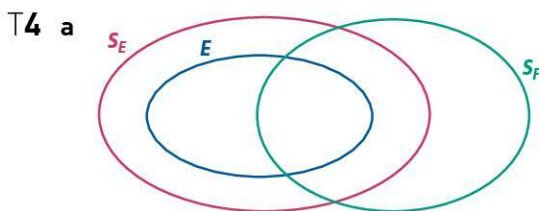
Samenvatting

- S1** a Bijvoorbeeld -2 en 5 . De som is 3 , dus kleiner dan 5 .
b De bewering is niet waar.
- S2** a De beweringen zijn:
Vera loopt naar school.
Haar fietsband is lek.
Ze heeft de bus gemist.
b Als haar fietsband lek is en als ze de bus gemist heeft dan loopt Vera naar school.
- S3** a $F \Rightarrow G$
b Ja, F is voldoende voorwaarde voor G want de school is altijd gesloten als het een feestdag is.
c F is geen nodige voorwaarde voor G want de school kan ook gesloten zijn omdat het bijvoorbeeld vakantie of weekend is.
d 1: $G \Rightarrow F$, niet waar
2: $\neg G \Rightarrow \neg F$, waar
3: $\neg F \Rightarrow \neg G$, niet waar
4: $G \Rightarrow \neg F$, niet waar
- S4** a $H \Rightarrow M$
 $(T \wedge \neg M) \Rightarrow S$
b Als Fenna niet aan het studeren is, dan is ze niet thuis of is ze moe.
- S5** a $Z \wedge O$ is een contradictie want zes is niet een oneven aantal.
b $(Z \vee \neg E) \wedge E$ is geen contradictie want 6 voldoet aan de bewering.
- S6** a Deze bewering is correct. Het volgt direct uit de gegeven bewering.
b Deze bewering is niet correct. Er kan ook een andere oorzaak zijn voor een te hoge bloeddruk.
c Deze bewering is correct. Volgens de gegeven bewering krijg je een te hoge bloeddruk als je te veel zout eet. Noah heeft geen te hoge bloeddruk dus hij heeft niet te veel zout gegeten.
- S7** a Gebied S ligt binnen het gebied R .
b Bijvoorbeeld: $P \Rightarrow \neg S$ of $S \Rightarrow \neg P$ of $\neg R \Rightarrow \neg S$.
c Bij het gekleurde gebied hoort de bewering $P \wedge Q$.

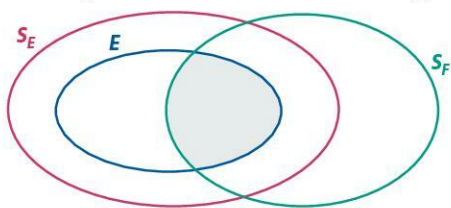


Test jezelf

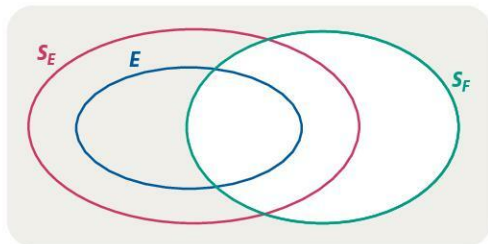
- T1**
- a Aan de andere kant van schijf A kan alleen maar een 3 staan.
 - b Als op de ene kant een cirkel staat, dan staat op de andere kant een 3. Tom keert deze implicatie om, maar dat mag niet zomaar. Aan de andere kant van schijf B kan een cirkel, rechthoek, driehoek of vierkant staan.
 - c Op de schijven A en D staan een cirkel en een driehoek. Aan de onzichtbare kant staan cijfers, dus op A en D komt geen vierkant voor. Blijven over de schijven B en C. Op C met de 2 aan de zichtbare kant staat een vierkant aan de onzichtbare kant. Op C staat dus een vierkant. In opdracht b hebben we gevonden dat op B aan de onzichtbare kant ook een vierkant kan staan.
- T2**
- a Een getal kan niet tegelijk even en oneven zijn.
 - b $(A \wedge \neg B) \Rightarrow C$
 - c De omkering is $C \Rightarrow (A \wedge \neg B)$.
Deze bewering is: Als de som even is, dan is het getal van Xander even en het getal van Yvette is even.
Een tegenvoorbeeld hiervan is: Het getal van Xander is 3 en het getal van Yvette is 5.
- T3**
- a $\neg V \wedge (H \vee D) \Rightarrow I$
 - b Bij de bewering wordt ‘geen hittegolf’ gekoppeld aan het ‘niet druk’ zijn. Dus $\neg H$ en $\neg D$ horen bij elkaar en moeten dus tussen haakjes staan. De zin kun je dus het beste schrijven als $\neg I \Rightarrow V \vee (\neg H \wedge \neg D)$.
De regel $\neg I \Rightarrow (V \vee \neg H) \wedge \neg D$ kun je ook schrijven als $\neg I \Rightarrow (V \wedge \neg D) \vee (\neg H \wedge \neg D)$, dit komt niet overeen met de gegeven zin.



- b** Het gekleurde gebied zijn alle inwoners van Engeland die Frans spreken. Deze spreken dus ook allemaal Engels. De bewering is waar.



Mensen die geen Frans spreken vallen buiten het gebied S_F . Hier zijn dus ook mensen bij die niet in Engeland wonen. De bewering is niet waar.



T5 a $\neg S \Rightarrow \neg L$

In de eerste zin wordt alleen iets beweert over mensen die stoer zijn.

Er staat niets over het naar bed gaan als je niet stoer bent.

- b** Venndiagram A hoort bij de redenering.

Watjes gaan niet laat naar bed, er is dus geen overlap tussen deze twee gebieden.

'Jij' uit de tweede bewering kan wel of geen watje zijn.

- c** Als je een watje bent volgt uit bewering 2 dat je niet laat naar bed gaat.

Als je niet laat naar bed gaat volgt uit bewering 1 dat je niet stoer bent.

Als je een watje bent, dan ben je niet stoer. Deze conclusie kun je dus wel trekken uit de twee beweringen.

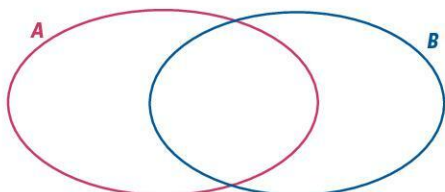
Extra oefening

- E1 a** Correct, want aardbeien zijn rood.

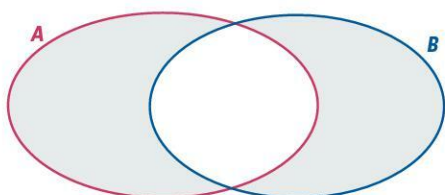
- b** Niet waar, want er zijn ook blauwe bessen.

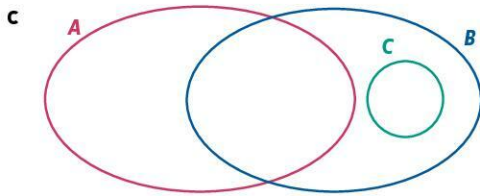
- c** Waar, aardbeien zijn rood, een vrucht die niet rood is kan dus geen aardbei zijn.

E2 a

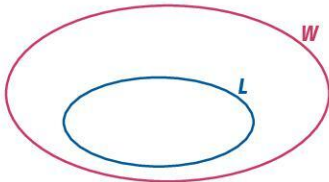


b

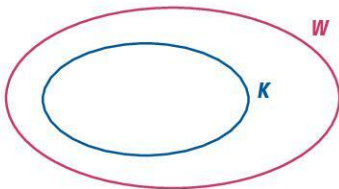




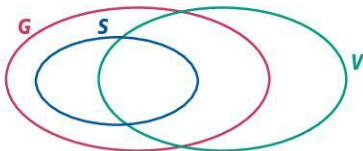
- E3 a** Het gebied 'laptops die na 2018 gemaakt zijn' (L) valt binnen het gebied van 'de laptops met webcam' (W). Er zijn dus laptops met webcam die voor 2018 gemaakt zijn.
De redenering is onjuist.



- b** Het gebied 'konijnen' (K) valt helemaal binnen het gebied 'houden van wortels' (W).
Alle dieren die binnen het gebied W vallen hebben goede ogen.
Dus konijnen hebben goede ogen, de redenering is juist.



- c** Het gebied 'Spanjaarden' (S) valt geheel binnen het gebied 'spelen op gravelbanen' (G) want alle Spanjaarden spelen op gravelbanen.
Het gebied 'verdedigend spelen' (V) overlapt het gebied G gedeeltelijk want er wordt niet altijd verdedigend gespeeld op gravelbanen.
Het gebied S valt niet geheel binnen gebied V , de redenering is dus onjuist.



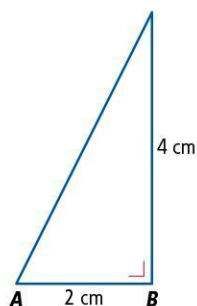
- E4 a** $H \vee (G \wedge \neg V) \Rightarrow O$

- b** De cake mag niet uit de oven als deze er nog geen half uur in heeft gestaan en als de bovenkant niet goudgeel is of de binnenkant vochtig is.

- E5 a** Nee, het is niet in tegenspraak. $H \Rightarrow O$ impliceert nog niet $\neg H \Rightarrow \neg O$. Als $H \Rightarrow O$ dan kan het nog best zo zijn dat sommigen waarvoor geldt $\neg H$ ook oud worden en gezond blijven.
b $\neg H \Rightarrow \neg O$ is in tegenspraak met wat er met de oude man aan de hand is: hij is niet hoog opgeleid maar toch oud geworden en gezond gebleven.
c $O \Rightarrow H$ is niet in overeenstemming met $H \Rightarrow O$, maar wel in overeenstemming met $\neg H \Rightarrow \neg O$.
Als geldt dat niet-hoogopgeleiden niet 'oud worden en lang gezond blijven', dan moet iemand die wel oud wordt en lang gezond blijft dus tot de hoogopgeleiden behoren.

Voorkennis

V1 a



b

zijde	kwadraat
$AB = 2$	4
$BC = 4$	16 +
$AC = \dots$	20

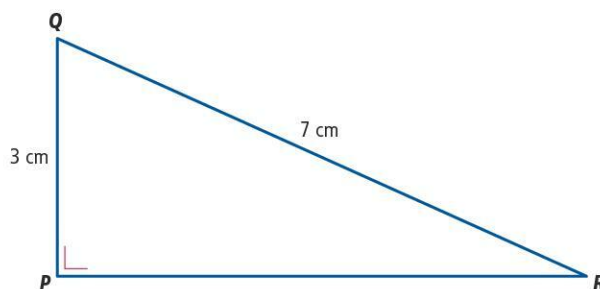
$$AC = \sqrt{20} \approx 4,47 \text{ cm}$$

c

zijde	kwadraat
$PQ = 3$	9
$PR = \dots$	40 +
$QR = 7$	49

$$PR = \sqrt{40} = 6,324\dots \text{ cm}$$

De lengte van PR is ongeveer 63 mm.



V2 a

gewicht in grammen	150	?
prijs in centen	108	1026

b $108 \times ? = 150 \times 1026$

$$? = 150 \times 1026 : 108$$

$$? = 1425$$

Mason heeft 1425 gram truffels gekocht.

V3 a Op de foto is de horizontale lengte van de tong tot het uitende aan de staart gelijk aan 4,2 cm.

lengte in werkelijkheid in cm	25	?
lengte op de foto in cm	4,2	1

b $4,2 \times ? = 25 \times 1$

$$? = 25 \times 1 : 4,2$$

$$? = 5,952\dots$$

De chihuahua is afgebeeld op schaal 1 : 6 .

c Op de foto heeft de bal een diameter van 0,8 cm.

In werkelijkheid is de diameter $0,8 \times 6 = 4,8$ cm.

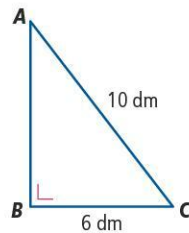
d Het kauwbot zou op de foto $12 : 6 = 2$ cm lang zijn.

V4 a Het model is $177,8 : 16 \approx 11,1$ cm breed.

b Een wedstrijdformaat snookertafel is $16 \times 22,3 = 356,8$ cm lang.

- V5 a** De oppervlakte van figuur 1 is $\pi \times 14^2 = 196\pi \approx 615,8 \text{ cm}^2$.
- b** De rechthoek in figuur 2 heeft een oppervlakte van $8 \times 6 = 48 \text{ dm}^2$.
De hoogte van de driehoek in figuur 2 kun je berekenen met de stelling van Pythagoras:

zijde	kwadraat
$AB = \dots$	64
$BC = 6$	36 +
$AC = 10$	100



$$AB = \sqrt{64} = 8$$

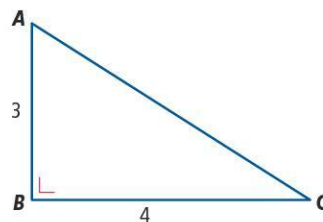
De driehoek in figuur 2 heeft een oppervlakte van $\frac{1}{2} \times (2 + 6) \times 8 = 32 \text{ dm}^2$.

De oppervlakte van figuur 2 is $48 + 32 = 80 \text{ dm}^2$.

- c** Figuur 3 is een kegel waarvan het grondvlak $G = \pi \times 8^2 = 64\pi \text{ cm}^2$ is.
De inhoud van figuur 3 is $\frac{1}{3} \times 64\pi \times 20 = 426\frac{2}{3}\pi \approx 1340 \text{ cm}^3$.
- V6 a** De vergrotingsfactor is $12 : 3 = 4$.
- b** De oppervlakte van het grondvlak van de eerste cilinder is $\pi \times 3^2 = 9\pi \text{ cm}^2$.
De oppervlakte van het grondvlak van de tweede cilinder is $\pi \times 12^2 = 144\pi \text{ cm}^2$.
- c** De oppervlakte van de tweede cirkel is $\frac{144\pi}{9\pi} = 16$ keer zo groot als die van de eerste cirkel.
- d** De hoogte van de tweede cilinder is $4 \times 10 = 40 \text{ cm}$.
- e** De inhoud van de tweede cilinder is $4^3 = 64$ keer zo groot als de inhoud van de eerste cilinder.

- V7 a** De wiskundige naam van dit object is prisma.
- b** De oppervlakte van de vloer is $8 \times 10 = 80 \text{ m}^2$.
De oppervlakte van de voorgevel is $8 \times 3,5 + \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 40 \text{ m}^2$.
- c** De breedte van een dakdeel kun je met de stelling van Pythagoras berekenen:

zijde	kwadraat
$AB = 3$	9
$BC = 4$	16 +
$AC = \dots$	25



$$AC = \sqrt{25} = 5$$

De oppervlakte van één dakdeel is $5 \times 10 = 50 \text{ m}^2$.

De oppervlakte van twee dakdelen samen is $2 \times 50 = 100 \text{ m}^2$.

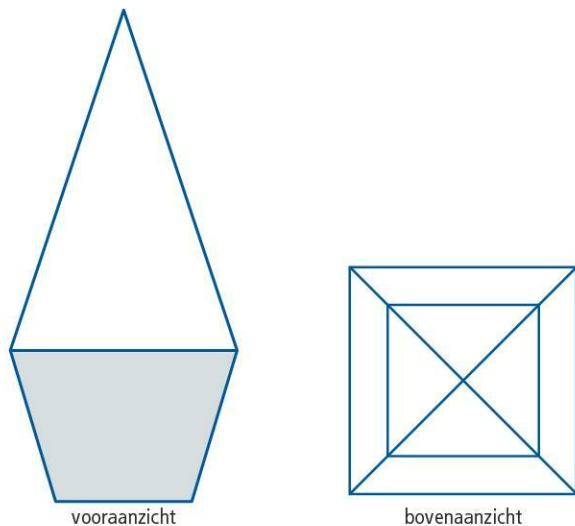
- d** Het grondvlak van het prisma is 40 m^2 en de hoogte is 10 m .
De inhoud van het huis is $40 \times 10 = 400 \text{ m}^3$.
- e** De maquette is $\sqrt{10000} = 100$ keer zo klein als het huis.
De hoogte van het huis is $3,5 + 3 = 6,5 \text{ m}$. De hoogte van de maquette is $\frac{1}{100} \times 6,5 = 0,065 \text{ meter}$, oftewel $6,5 \text{ cm}$.
De inhoud van de maquette is $400 \times \left(\frac{1}{100}\right)^3 = 0,0004 \text{ m}^3$, oftewel 400 cm^3 .

- V8** De inhoud van de vergroting is 170000 keer zo groot als die van een 'gewoon kopje'. De vergrotingsfactor is $\sqrt[3]{170000} = 55,396\dots$.
De hoogte van de Douwe Egberts koffiekop is $55,396\dots \times 6 \approx 332 \text{ cm}$ en de diameter is $55,396\dots \times 8 \approx 443 \text{ cm}$.

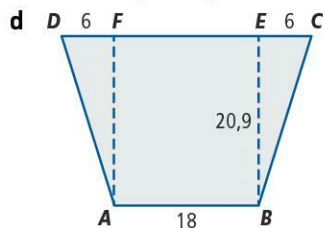
18.1 Aanzichten

intro De aanzichten kunnen passen bij een prisma en een piramide.
Dit kun je niet met zekerheid weten, wat je weet niet of er onregelmatigheden in het object zitten, bijvoorbeeld een holte aan de onderkant.

1 a



- b** De inhoud van het bovenste deel is $\frac{1}{3} \times 30^2 \times 45 = 13\,500 \text{ cm}^3$.
c De hoogte is geen 20 cm omdat dit deel niet loodrecht op de grond staat.



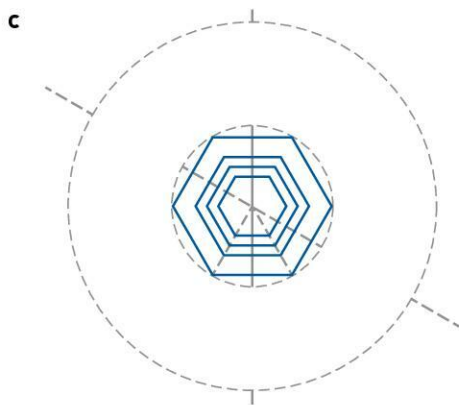
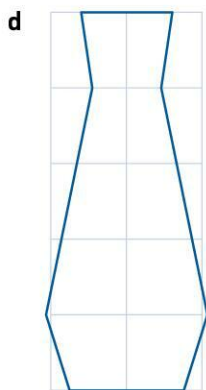
De oppervlakte van één opstaand zijvlak is

$$18 \times 20,9 + 2 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 20,9 = 501,6 \text{ cm}^2.$$

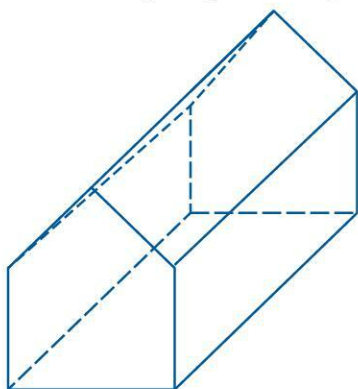
De totale hoeveelheid glas is $18 \times 18 + 30 \times 30 + 4 \times 501,6 = 3230,4 \text{ cm}^2$.

- e** De vergrotingsfactor is 3.
In dit object is $3230,4 \times 3^2 = 29\,073,6 \text{ cm}^2$ glas verwerkt.

- 2 a** 5 delen is gelijk aan 15 cm, dan is 1 deel gelijk aan $15 : 5 = 3 \text{ cm}$.
De tweede zeshoek van onderen heeft zijden van $7 \times 3 = 21 \text{ cm}$.
De derde zeshoek van onderen heeft zijden van $3 \times 3 = 9 \text{ cm}$.
De bovenste zeshoek heeft zijden van $4 \times 3 = 12 \text{ cm}$.
b De zijden van de grootste zeshoek zijn in de tekening 2,1 cm.
 $21 : 2,1 = 10$
De zijden van de kleinste zeshoek zijn in de tekening 0,9 cm.
 $9 : 0,9 = 10$
De tekening is op schaal 1 : 10 gemaakt.



- 3 a** Als een van de zijaanzichten een rechthoek is, dan is het object een cilinder.
Als een van de zijaanzichten een gelijkbenige driehoek is, dan is het object een kegel.
- b** Als het object een bol is, dan zien de zijaanzichten eruit als cirkels.
- 4 a** Dit ruimtelijk object noem je een prisma.
- b**



- 5** Dit object is een smal rechthoekig tafeltje op poten die schuin staan en kruislings langs elkaar gaan. Het lijkt een beetje op een strijkplank.
- 6 a** De linker tekening is een bovenaanzicht en de rechter tekening een vooraanzicht.

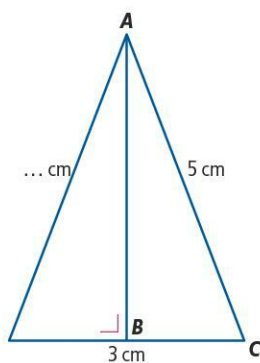
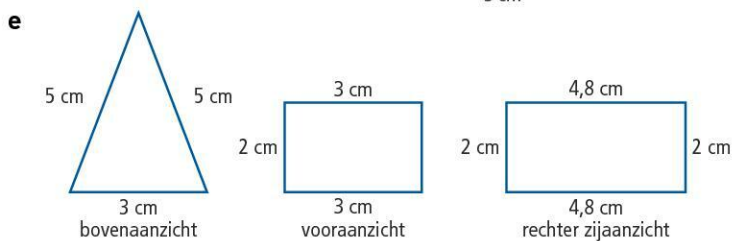


- 04 a Bij een kubus zijn alle aanzichten een vierkant, en hier geen enkele.
 b Bij een prisma zijn het grondvlak en het bovenvlak evenwijdig aan elkaar.
 c Deze lengte is geen 5 cm omdat de zijde van 5 cm van het bovenaanzicht niet loodrecht op de kijkrichting staat.

d

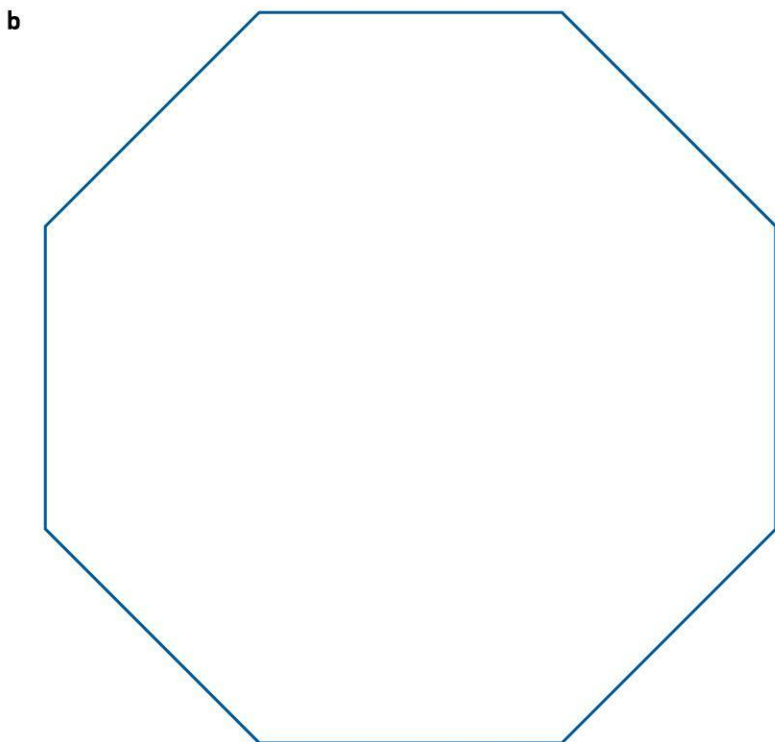
zijde	kwadraat
$AB = \dots$	22,75
$BC = 1,5$	2,25 +
$AC = 5$	25

$$AC = \sqrt{22,75} \approx 4,8 \text{ cm}$$



- f Ruimtelijk object B hoort bij de aanzichten.

- U1 a Dit ruimtelijk object heet prisma.



- c De achthoek past precies in een vierkant. De vier driehoeken die ontstaan zijn gelijkbenige rechthoekige driehoeken. Noem een rechthoekzijde van een driehoek x , dan geldt volgens de stelling van Pythagoras $x^2 + x^2 = 20^2$

$$2x^2 = 400$$

$$x^2 = 200$$

$$x = \sqrt{200}$$

De oppervlakte van één driehoek is

$$0,5 \times \sqrt{200} \times \sqrt{200} = 100 \text{ cm}^2.$$

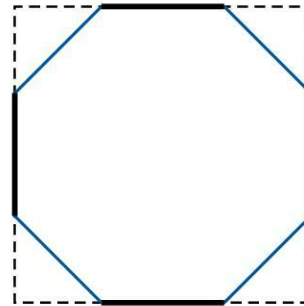
De oppervlakte van de achthoek is

$$(20 + \sqrt{200} + \sqrt{200})^2 - 4 \times 100 = 1931,370... \text{ cm}^2.$$

De hoogte van het object is in de tekening 8,0 cm.

De hoogte is in werkelijkheid $8,0 \times 10 = 80 \text{ cm}$.

De inhoud van het object is $80 \times 1931,370... \approx 154510 \text{ cm}^3$.

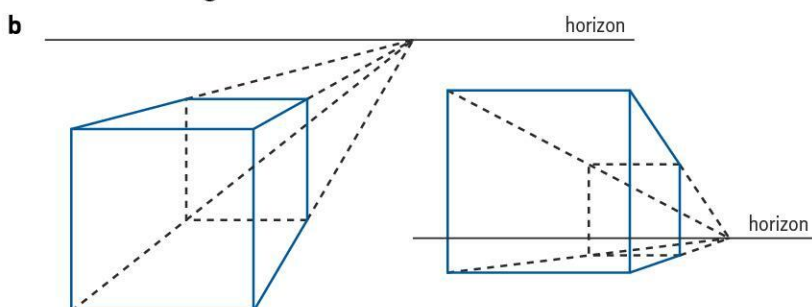


18.2 Eenpuntperspectief

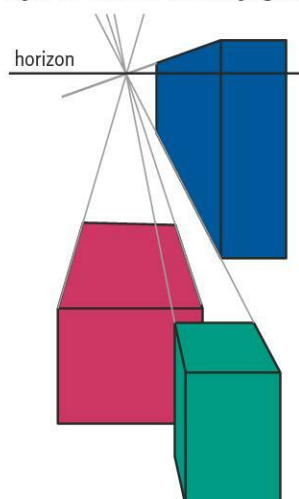
intro Ja, in werkelijkheid zijn de rijen tulpen evenwijdig aan elkaar, want op foto gaan ze naar één punt, het verdwijnpunt.

- 7 a** In de linker tekening bevindt het oog zich rechts voor de kubus en iets boven de hoogte van het bovenzvlak.

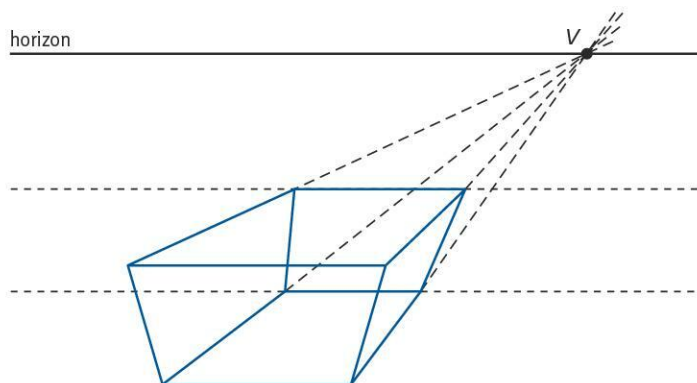
In de rechter tekening bevindt het oog zich rechts voor de kubus en iets boven de hoogte van het ondervlak.



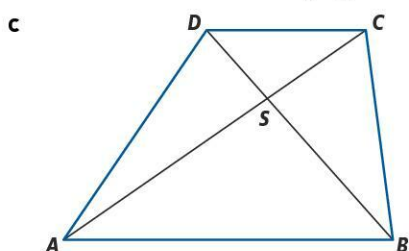
- 8** Twee hoofdrichtingen, horizontaal en verticaal, zijn evenwijdig aan het tafereel en wanneer je in werkelijkheid evenwijdige ribben gaat verlengen, dan zie je dat deze lijnen door één punt gaan, het verdwijnpunt. De tekening is daarom in eenpuntperspectief. De horizon is de horizontale lijn door het verdwijnpunt.



9

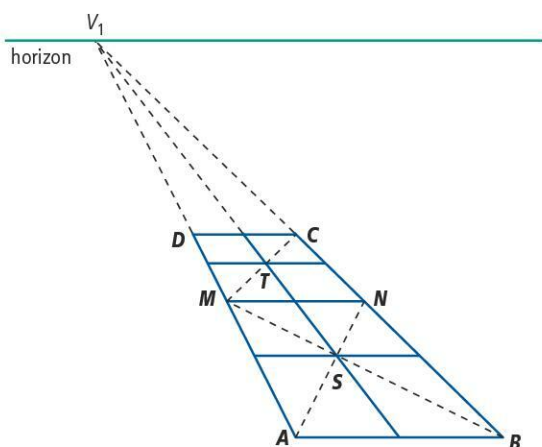


- 10 a Je kunt door meten het midden van lijnstuk AB bepalen omdat lijnstuk AB evenwijdig aan het tafereel is.
 b Je kunt het midden van rechthoek $ABCD$ niet door meten bepalen omdat AD en BD niet evenwijdig aan het tafereel zijn.

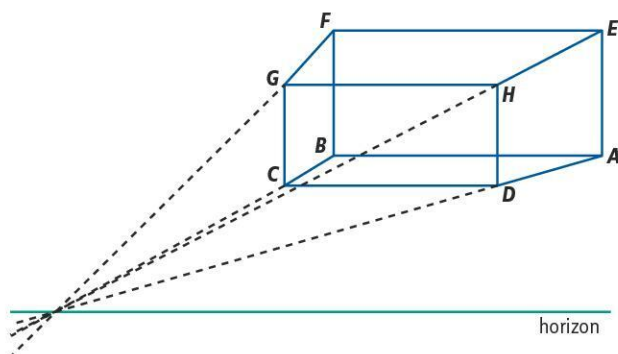


- d Punt S is het midden van rechthoek $ABCD$ omdat het snijpunt van de diagonalen het midden van een rechthoek is.

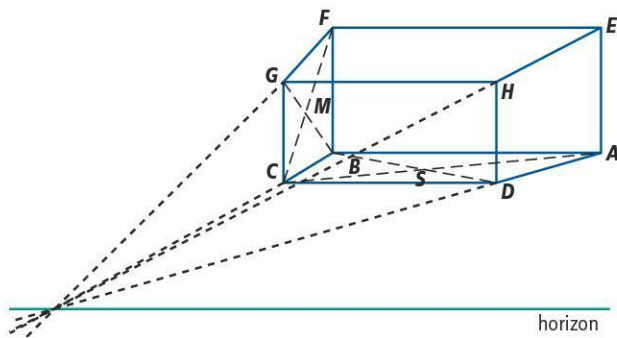
11



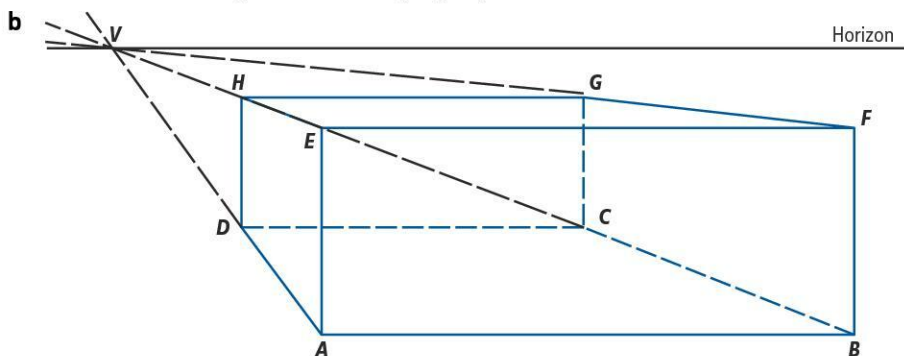
12 a



- b** In de tekening zijn de middelen M en S getekend van de vlakken $BCGF$ en $ABCD$.

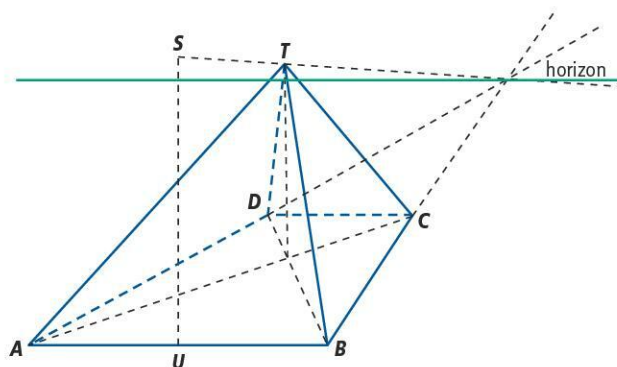


- 09 a** Het snijpunt van de lijnen AD en BC is het verdwijnpunt omdat de lijnen AD en BC in werkelijkheid evenwijdig lopen.

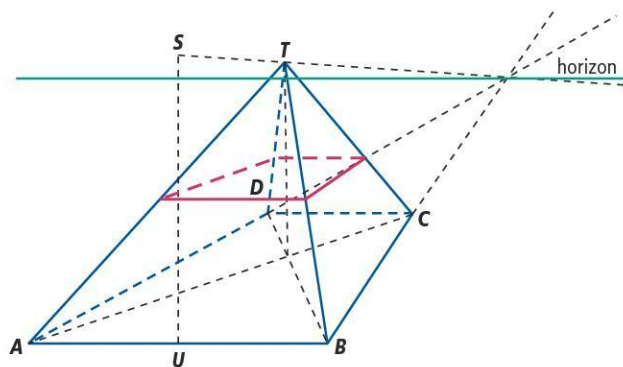


- c** Zie de tekening bij opdracht b.
d CD is evenwijdig aan lijn AB .
e Zie de tekening bij opdracht b.
f Zie de tekening bij opdracht b.
g De lijnstukken BF , CG en DH zijn evenwijdig aan AE .
h Zie de tekening bij opdracht b.
i Zie de tekening bij opdracht b.

- U2 a** Lijnstuk SU is even lang als AB en U snijdt AB in het midden.



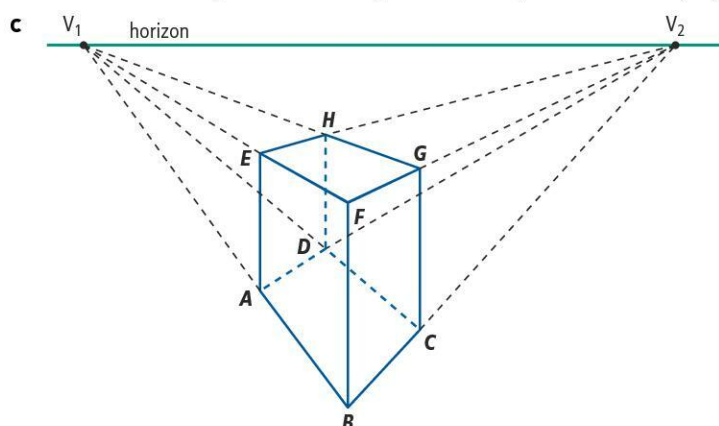
- b Het deel van lint in vlak ABT is ter hoogte van het midden van SU getekend.



18.3 Tweepuntsperspectief

intro In eenpuntperspectief is er minder diepte te zien in de tekening waardoor je een minder goed beeld krijgt van hoe het huis er in werkelijkheid uit zal gaan zien.

- 13 a** De opstaande ribben BF , CG , DH en AE zijn zowel in werkelijkheid als in de tekening evenwijdig.
b De ribben CD , GH en EF zijn in werkelijkheid evenwijdig aan AB .

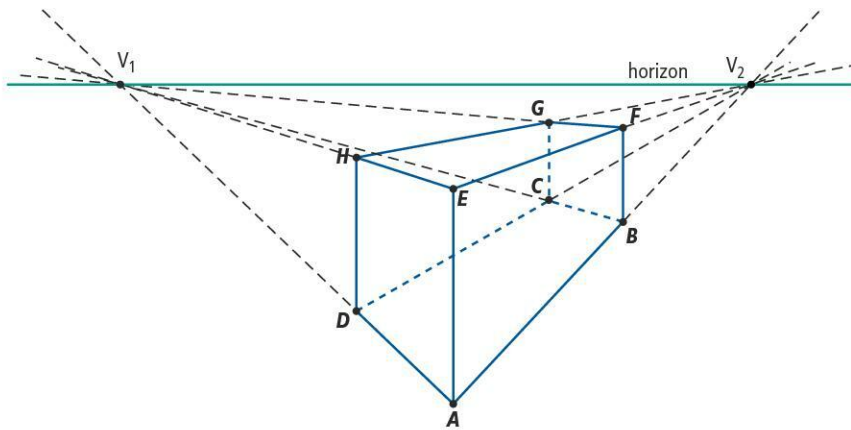


- d** De ribben AD , EH en FG zijn in werkelijkheid evenwijdig aan BC .
e Zie de tekening bij opdracht c. Ja, de ribben uit opdracht d gaan na verlenging ook door één punt, het punt V_2 .
f De tekening is geen eenpuntperspectieftekening, want er is slechts één richting (verticaal) evenwijdig aan het tafereel.

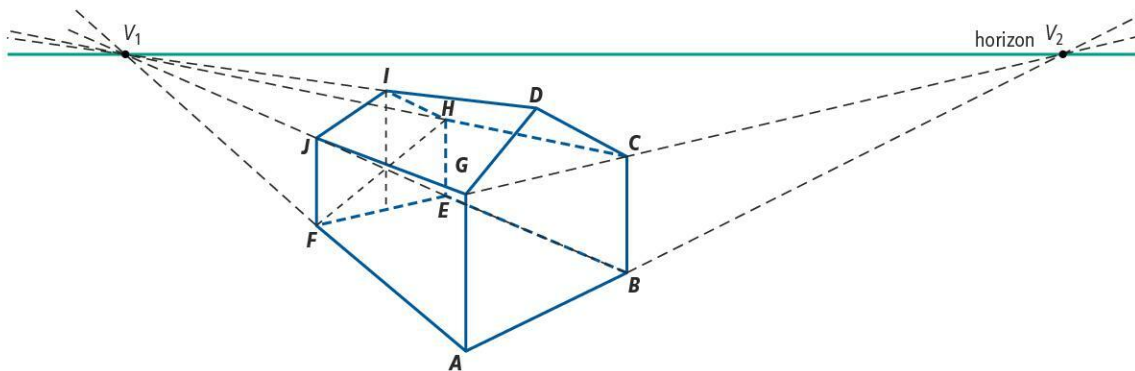
14



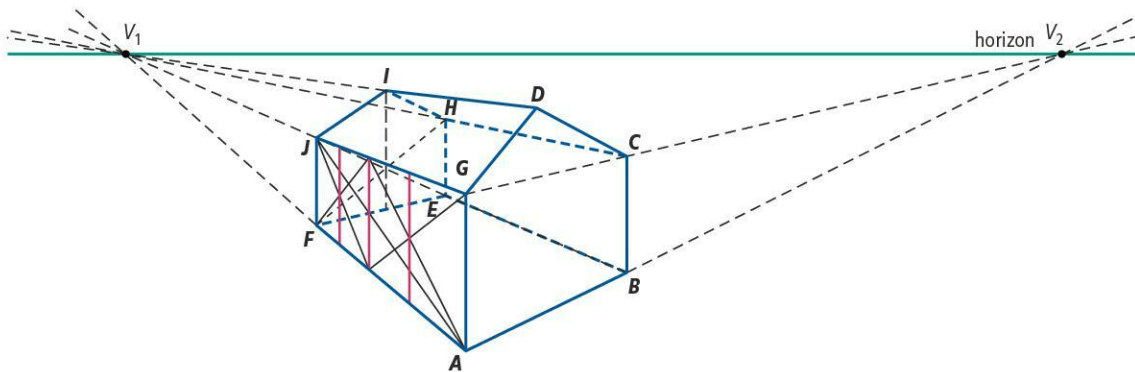
15



16 a

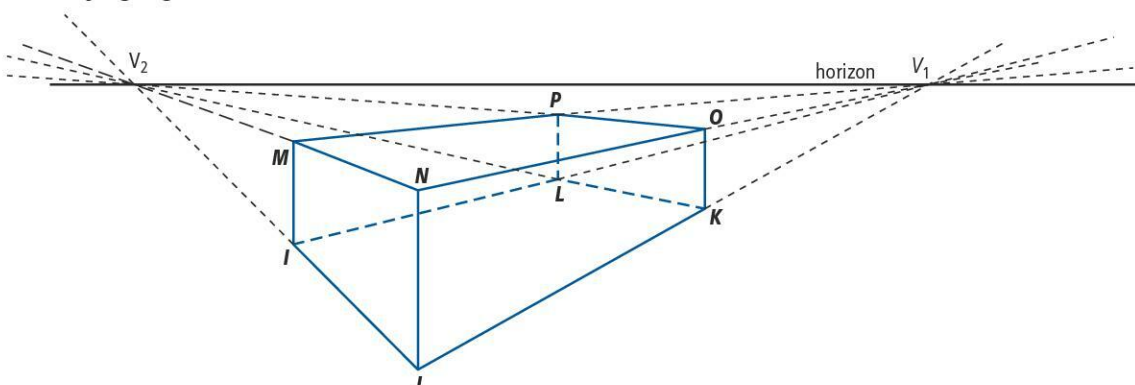


- b Teken in het zijvlak $AEJF$ de diagonalen AJ en FE .
Teken door het snijpunt van deze diagonalen de eerste verticale sierstreep evenwijdig aan AE .
Teken daarna in de linkerhelft en rechterhelft van zijvlak $AEJF$ de diagonalen en teken door de snijpunten hiervan de tweede en derde verticale sierstreep evenwijdig aan AE .



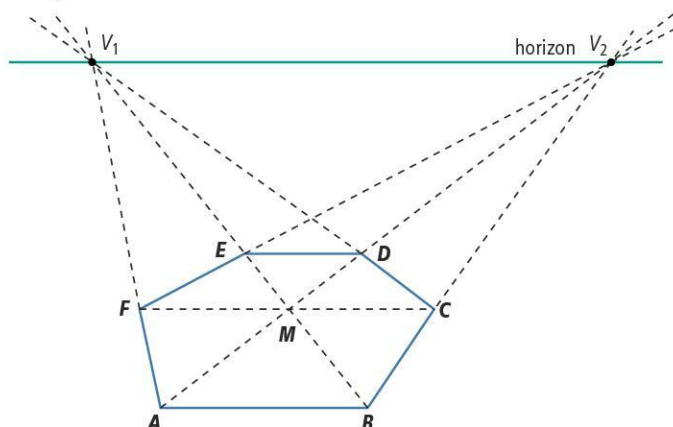
- 015 a JK en NO snijden elkaar op de horizon omdat JK en NO in werkelijkheid evenwijdig lopen.

b



- c Zie de tekening bij opdracht b.
- d Zie de tekening bij opdracht b.
- e J moet met V_2 verbonden worden omdat IJ en MN in werkelijkheid evenwijdig lopen en daarom hetzelfde verdwijnpunt hebben.
- f Dit snijpunt is het punt I .
- g Het snijpunt van IV_1 en KV_2 is het punt L .
- h Zie de tekening bij opdracht b.

U3 Punt M is het midden van zeshoek $ABCDEF$ en in het midden van lijnstuk CF getekend.



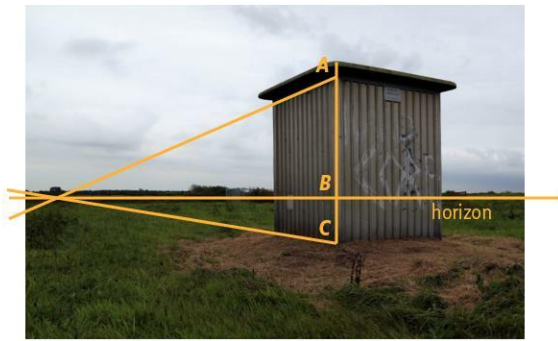
18.4 Ooghoogte

intro In de foto is de horizon getekend. De horizon is op de hoogte van de lens van de camera. Als deze hoogte 2 meter of hoger zou zijn, dan zou het bord erg hoog hebben gehangen. Hieruit volgt dat de camera op minder dan twee meter hoogte boven de grond is opgehangen.



- 17** De camera stond het hoogst bij de rechter foto, want daar kun je het beste op het dak kijken. De camera stond het laagst bij de linker foto, want daar kun je helemaal niet op het dak kijken.

18 a



b $AC = 2,2$ cm en $BC = 0,6$ cm

hoogte in werkelijkheid in cm	255	lenshoogte
hoogte op de foto in cm	$AC = 2,2$	$BC = 0,6$

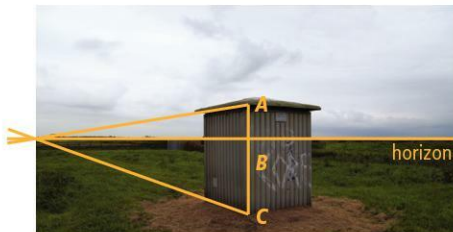
d $2,2 \times \text{lenshoogte} = 255 \times 0,6$

$$\text{lenshoogte} = 255 \times 0,6 : 2,2$$

$$\text{lenshoogte} = 69,545... \text{ cm}$$

De hoogte van de lens is ongeveer 70 cm.

19



In de tekening is $AC = 1,3$ cm en $BC = 0,8$ cm.

hoogte in werkelijkheid in cm	255	lenshoogte
hoogte op de foto in cm	$AC = 1,3$	$BC = 0,8$

$$1,3 \times \text{lenshoogte} = 255 \times 0,8$$

$$\text{lenshoogte} = 255 \times 0,8 : 1,3$$

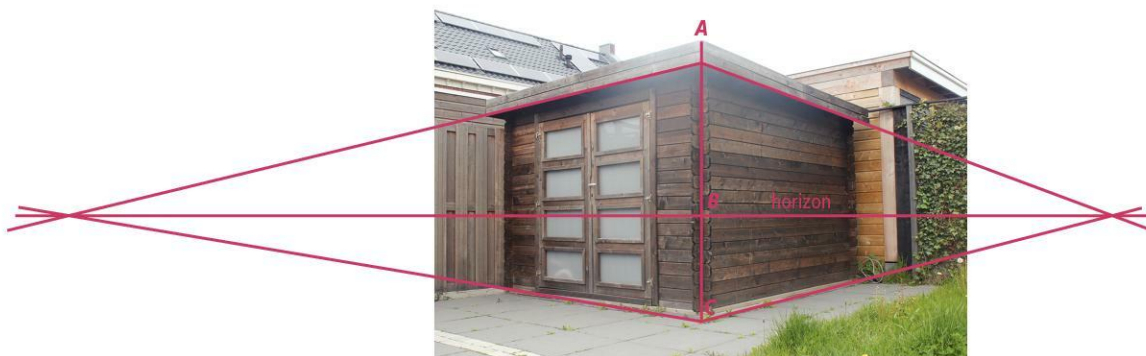
$$\text{lenshoogte} = 156,923... \text{ cm}$$

De hoogte van de lens is ongeveer 157 cm.

Bij het maken van de middelste foto bevond de lens zich

$156,923... - 69,545... \approx 87$ cm hoger dan bij het maken van de linker foto.

20



In de tekening is $AC = 3,5$ cm en $BC = 1,3$ cm.

hoogte in werkelijkheid in cm	250	lenshoogte
hoogte op de foto in cm	$AC = 3,5$	$BC = 1,3$

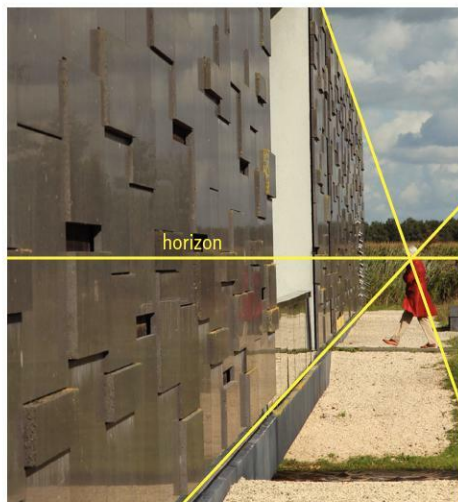
$$3,5 \times \text{lenshoogte} = 250 \times 1,3$$

$$\text{lenshoogte} = 250 \times 1,3 : 3,5$$

$$\text{lenshoogte} = 92,857... \text{ cm}$$

De foto is op een hoogte van ongeveer 93 cm genomen.

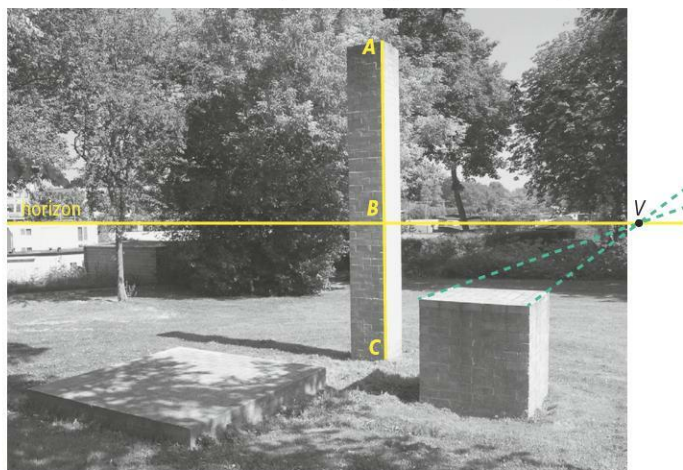
21



De horizon op de foto ligt ter hoogte van het hoofd van de persoon op de foto.

De fotograaf is ongeveer even groot als deze persoon.

- 22 a In de tekening is de horizon getekend. De foto is genomen op de hoogte van deze horizon. Punt B op de zuil geeft deze hoogte aan.



- b In de tekening is $AC = 4,2 \text{ cm}$ en $BC = 1,8 \text{ cm}$.

hoogte in werkelijkheid in cm	400	lenshoogte
hoogte op de foto in cm	$AC = 4,2$	$BC = 1,8$

$$4,2 \times \text{lenshoogte} = 400 \times 1,8$$

$$\text{lenshoogte} = 400 \times 1,8 : 4,2$$

$$\text{lenshoogte} = 171,428... \text{ cm}$$

De foto is op een hoogte van ongeveer 17 dm genomen.

- c De inhoud van de kubus is $1 \times 1 \times 1 = 1 \text{ m}^3$.

De lengte en de breedte van de kubus zijn gelijk. Stel de lengte en breedte gelijk aan x , dan geldt $x \cdot x \cdot 4 = 1$.

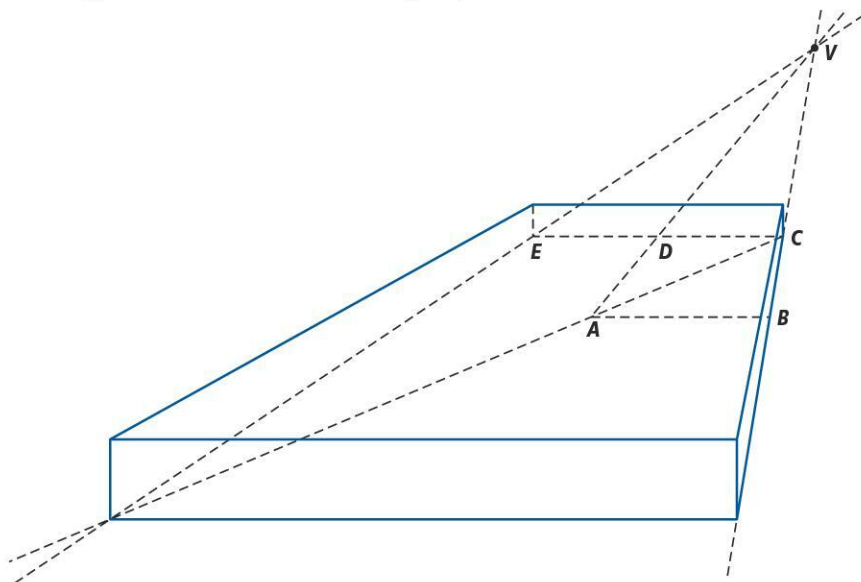
$$4x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

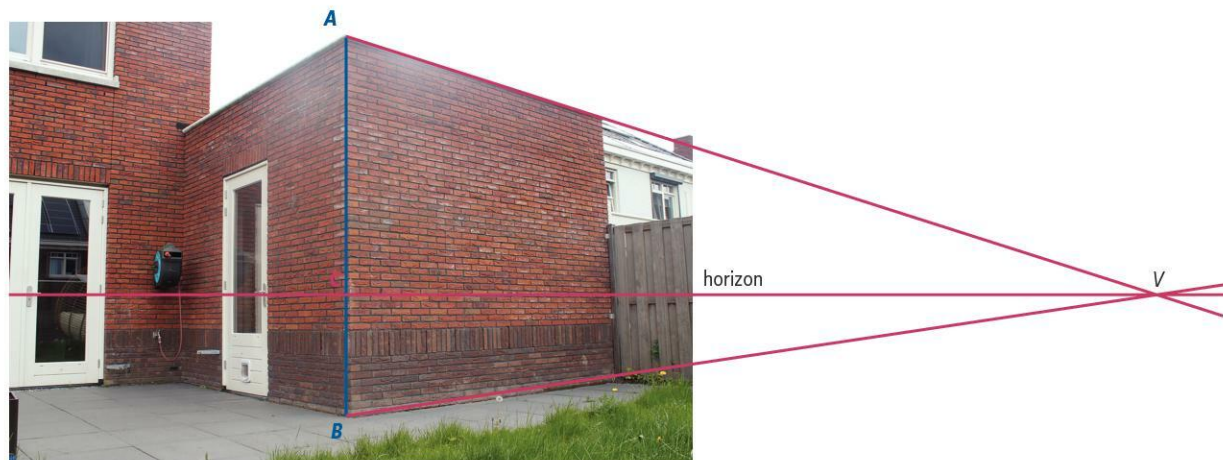
$$x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

De lengte en breedte van de zuil zijn 0,5 m.

d



020 a



- b Zie de tekening bij opdracht a.

- c De hoogte van de lens van de camera is gelijk aan de hoogte van de horizon.

- d $AB = 5,0 \text{ cm}$

- e $BC = 1,6 \text{ cm}$

- f
- | hoogte in werkelijkheid in cm | 260 | lenshoogte |
|-------------------------------|------------|------------|
| hoogte op de foto in cm | $AB = 5,0$ | $BC = 1,6$ |

- g $5,0 \times \text{lenshoogte} = 260 \times 1,6$

$$\text{lenshoogte} = 260 \times 1,6 : 5,0$$

$$\text{lenshoogte} = 83,2 \text{ cm}$$

De foto is op een hoogte van 83 cm genomen.



Op de foto is $AC = 0,9$ cm en $BC = 0,3$ cm.

hoogte in werkelijkheid in cm	hoogte gebouw	265
hoogte op de foto in cm	$AB = 0,9$	$BC = 0,3$

$$0,3 \times \text{hoogte gebouw} = 265 \times 0,9$$

$$\text{hoogte gebouw} = 265 \times 0,9 : 0,3$$

$$\text{hoogte gebouw} = 795 \text{ cm}$$

Het museum heeft een hoogte van ongeveer 80 dm.

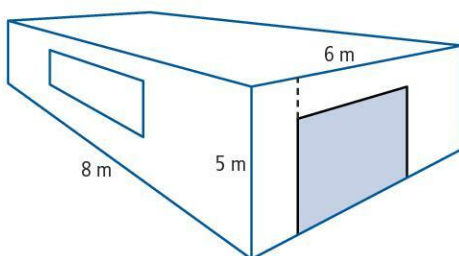
18.5 Verhoudingen bij perspectief

intro De man met de donkerblauwe jas en de vrouw met de gestreepte jas staan op dezelfde lijn die evenwijdig is aan het tafereel. Op de foto is de man langer, dus in werkelijkheid ook.

Om na te gaan welke man langer is, teken je eerst het verdwijnpunt door middel van het tekenen van twee in werkelijkheid evenwijdige lijnen (bijvoorbeeld de lijnen 1 en 2). Vervolgens teken je een lijn vanaf het hoofd van de man met de blauwe jas naar het verdwijnpunt (lijn 3) en een horizontale lijn over het hoofd van de man met het witte overhemd (lijn 4). Je ziet dat lijn 3 boven lijn 4 ligt in de rij stoelen waar de man met het witte overhemd staat. Hieruit volgt dat de man met de blauwe jas langer is.



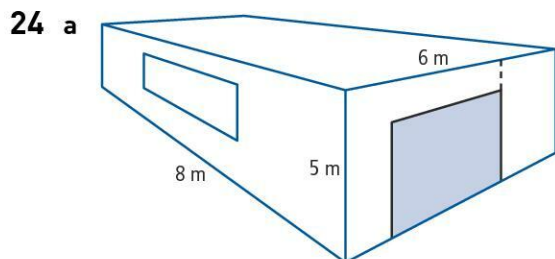
23 a



In de tekening is de hoogte van de muur 20 mm en de hoogte van de deur 15 mm.

	<i>muur</i>	<i>deur</i>
<i>hoogte in werkelijkheid in m</i>	5	<i>hoogte deur</i>
<i>hoogte op de tekening in mm</i>	20	15

- c** $20 \times \text{hoogte deur} = 5 \times 15$
 $\text{hoogte deur} = 5 \times 15 : 20$
 $\text{hoogte deur} = 3,75$
 De deur is 3,75 meter hoog.

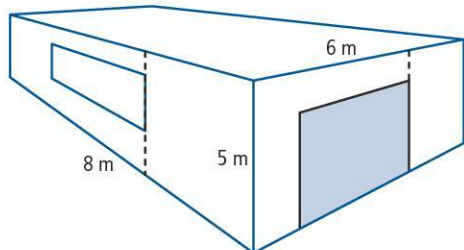


In de tekening is de hoogte van de muur 16 mm en de hoogte van de deur 12 mm.

	<i>muur</i>	<i>deur</i>
<i>hoogte in werkelijkheid in m</i>	5	<i>hoogte deur</i>
<i>hoogte op de tekening in mm</i>	16	12

- $16 \times \text{hoogte deur} = 5 \times 12$
 $\text{hoogte deur} = 5 \times 12 : 16$
 $\text{hoogte deur} = 3,75$
 De deur is wederom 3,75 meter hoog.

- b** Teken een lijn door de rechterkant (of linkerkant) van het raam.



In de tekening is de hoogte van de muur 16 mm en de hoogte van het raam 5 mm.

	<i>muur</i>	<i>deur</i>
<i>hoogte in werkelijkheid in m</i>	5	<i>hoogte raam</i>
<i>hoogte op de tekening in mm</i>	16	5

- $16 \times \text{hoogte raam} = 5 \times 5$
 $\text{hoogte raam} = 5 \times 5 : 16$
 $\text{hoogte raam} = 1,5625...$
 Het raam is ongeveer 1,56 meter hoog.

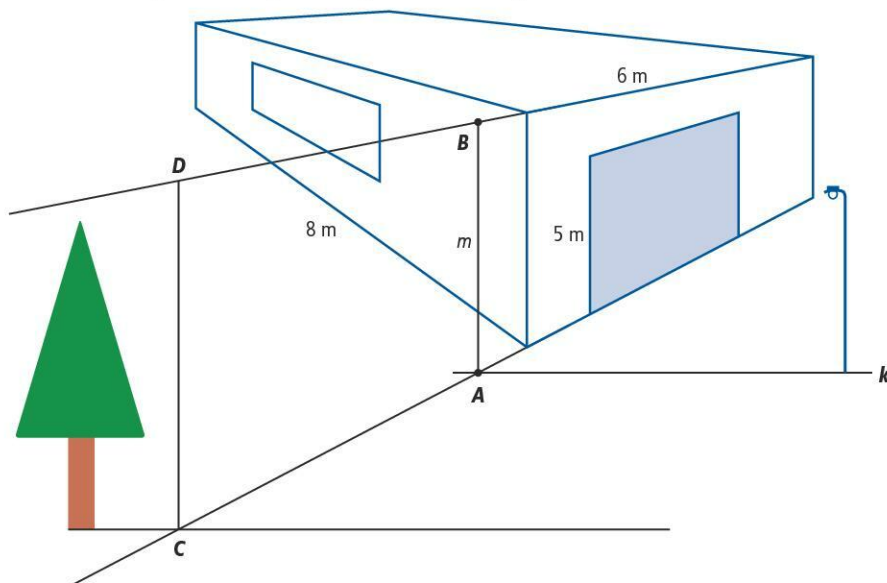
- 25 a** Lijn k is evenwijdig aan het tafereel. De lantaarnpaal rust op lijn k . Hierdoor liggen alle punten op lijn k in hetzelfde vlak als de lantaarnpaal.
b Lijnstuk AB stelt de hoogte van de muur voor en deze hoogte is gelijk aan 5 meter.

- c In de tekening is AB langer dan de lantaarnpaal. Dus in werkelijkheid is de lantaarnpaal lager dan de garage.
- d AB is 33 mm en de lantaarnpaal is 28 mm.

	<i>muur</i>	<i>lantaarnpaal</i>
<i>hoogte in werkelijkheid in m</i>	5	<i>hoogte lantaarnpaal</i>
<i>hoogte op de tekening in mm</i>	33	28

- e $33 \times \text{hoogte lantaarnpaal} = 5 \times 28$
 $\text{hoogte lantaarnpaal} = 5 \times 28 : 33$
 $\text{hoogte lantaarnpaal} = 4,242\dots$
 De lantaarnpaal is ongeveer 4,2 meter hoog.

f



In de tekening is $CD = 46$ mm en de boom is 41 mm hoog.

	<i>muur</i>	<i>lantaarnpaal</i>
<i>hoogte in werkelijkheid in m</i>	5	<i>hoogte boom</i>
<i>hoogte op de tekening in mm</i>	46	41

$46 \times \text{hoogte boom} = 5 \times 41$
 $\text{hoogte boom} = 5 \times 41 : 46$
 $\text{hoogte boom} = 4,456\dots$
 De boom is ongeveer 4,5 meter hoog.

26



Op de foto is $AB = 22$ mm en is de lengte van Siëna 47 mm.

	<i>tafel</i>	<i>Siëna</i>
hoogte in werkelijkheid in cm	70	<i>lengte Siëna</i>
hoogte op de tekening in mm	22	47

$$22 \times \text{lengte Siëna} = 70 \times 47$$

$$\text{lengte Siëna} = 70 \times 47 : 22$$

$$\text{lengte Siëna} = 149,545\dots$$

Siëna is ongeveer 150 cm lang.

Op de foto is $CD = 13$ mm en is de lengte van Zoë 28 mm.

	<i>tafel</i>	<i>Zoë</i>
hoogte in werkelijkheid in cm	70	<i>lengte Zoë</i>
hoogte op de tekening in mm	13	28

$$13 \times \text{lengte Zoë} = 70 \times 28$$

$$\text{lengte Zoë} = 70 \times 28 : 13$$

$$\text{lengte Zoë} = 150,769\dots$$

Zoë is ongeveer 151 cm lang.

- 27 a** De breedte van het raam is op de foto 13 mm.

De lengte van de pijl is op de foto 9 mm.

	<i>raam</i>	<i>pijl</i>
werkelijke breedte in m	2	<i>lengte pijl</i>
gemeten breedte in mm	13	9

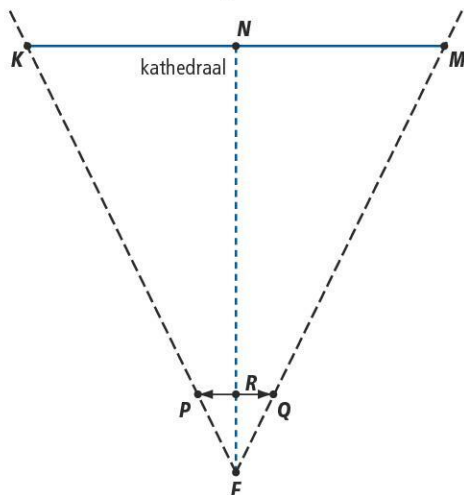
$$13 \times \text{lengte pijl} = 2 \times 9$$

$$\text{lengte pijl} = 2 \times 9 : 13$$

$$\text{lengte pijl} = 1,384\dots$$

De lengte van de dubbele pijl, gemeten op het raam, is 1,38 meter.

- b** Maak een tekening van een bovenaanzicht, dat hoeft niet op schaal.



Gegeven is dat de kathedraal 136 meter lang is en dat de fotograaf op 10 meter van het raam staat.

$KM = 136$ m, $FR = 10$ m en $PQ = 1,38$ m.

FN is de afstand tussen de kathedraal en de fotograaf.

	kathedraal	afstand
werkelijke breedte in m	136	FN
gemeten breedte in m	1,38	10

$$1,33 \times FD = 136 \times 10$$

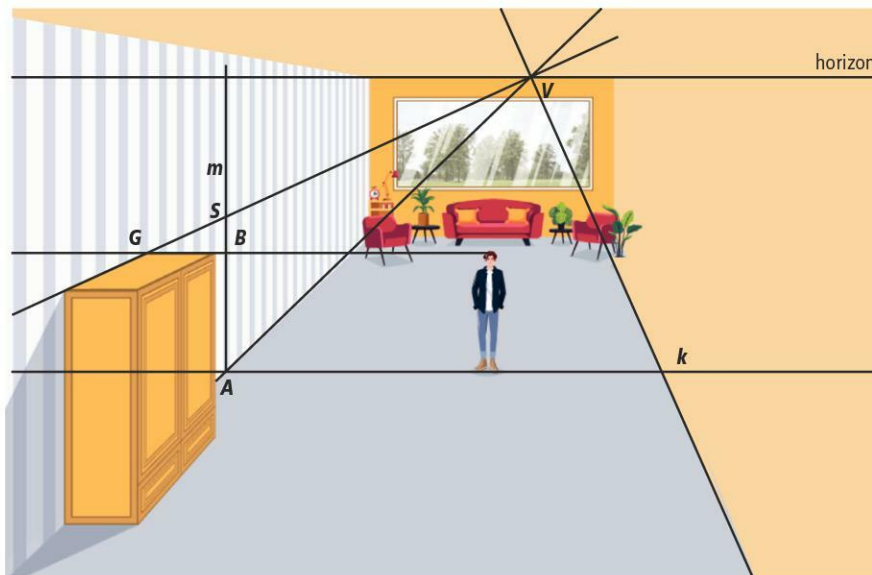
$$FD = 136 \times 10 : 1,38$$

$$FD \approx 986$$

Dus de afstand tussen de kathedraal en de fotograaf is ongeveer 1 km.

- 026 a** De horizon ligt op de hoogte van de ogen van de tekenaar. Je kunt zien dat de horizon hoger ligt dan de ogen van Jona.

b

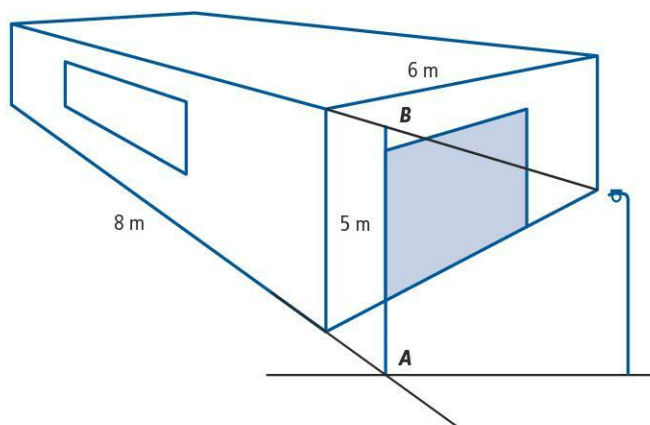


- c** Zie de tekening bij opdracht b.
d Zie de tekening bij opdracht b.
e Zie de tekening bij opdracht b.
f Zie de tekening bij opdracht b.
g Lijnstuk AB is korter dan lijnstuk AS , dus Jona is kleiner dan de kast.
h In de tekening is $AB = 16$ mm en $AS = 21$ mm.

	Jona	kast
hoogte in werkelijkheid in cm	190	hoogte kast
hoogte op de tekening in mm	16	21

- i** $16 \times \text{hoogte kast} = 190 \times 21$
 $\text{hoogte kast} = 190 \times 21 : 16$
 $\text{hoogte kast} = 249,375$
 De kast is ongeveer 249 cm hoog.

U5



AB is 29 mm en de lantaarnpaal is 25 mm.

	<i>muur</i>	<i>lantaarnpaal</i>
<i>lengte in werkelijkheid in m</i>	5	<i>hoogte lantaarnpaal</i>
<i>hoogte op de tekening in mm</i>	29	25

$$29 \times \text{hoogte lantaarnpaal} = 5 \times 25$$

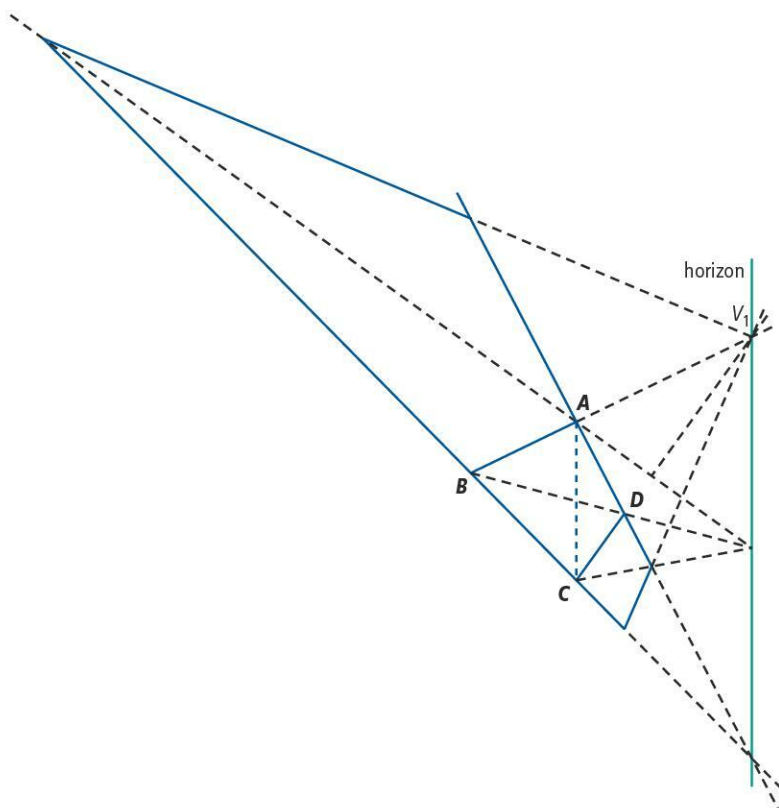
$$\text{hoogte lantaarnpaal} = 5 \times 25 : 29$$

hoogte lantaarnpaal = 4,310...

De lantaarnpaal is net als in opgave 25 ongeveer 4,3 meter hoog.

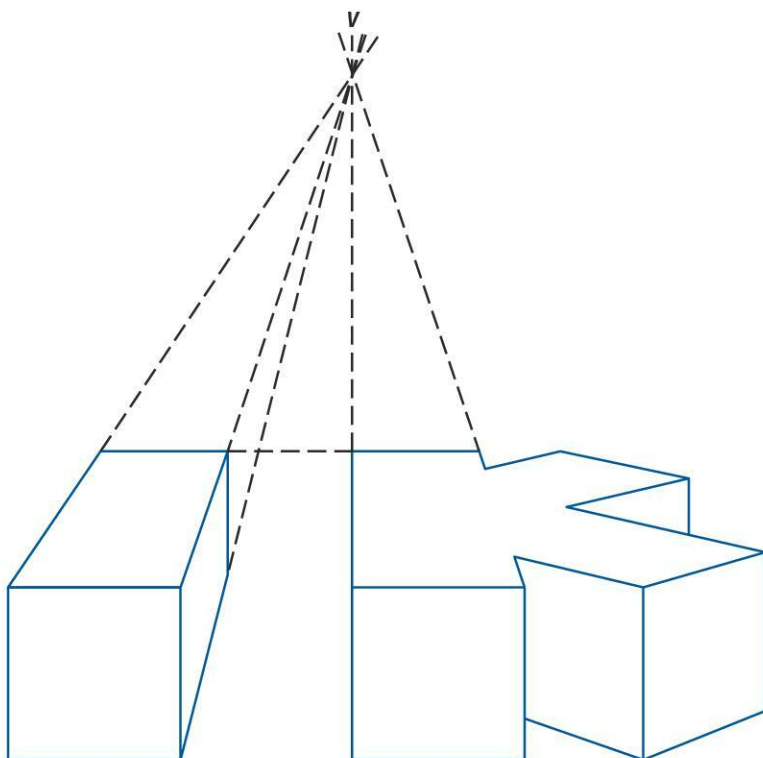
18.6 Gemengde opdrachten

28 a

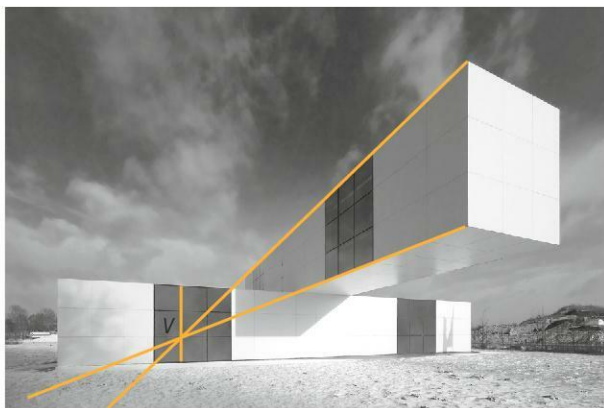


b Zie de tekening bij opdracht a.

- 29 Voor de voorkant van de I teken je een vierkant op de juiste afstand van de letter K.



- 30 Teken een verdwijnpunt V met de (bijvoorbeeld) evenwijdige lijnen van de bovenste balk.



De hoogte van het verdwijnpunt V vanaf de grond is 3 mm en de hoogte van de onderste balk bij het verdwijnpunt is 10 mm.

De onderste balk is in werkelijkheid $3 \times 5 \times 26 = 390$ cm hoog.

	<i>balk</i>	<i>ooghoogte</i>
<i>hoogte in werkelijkheid in cm</i>	390	<i>ooghoogte</i>
<i>hoogte op de tekening in mm</i>	10	3

$$10 \times \text{ooghoogte} = 390 \times 3$$

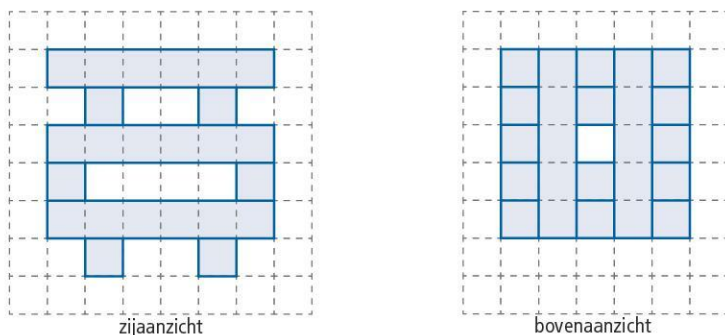
$$\text{ooghoogte} = 390 \times 3 : 10$$

$$\text{ooghoogte} = 117$$

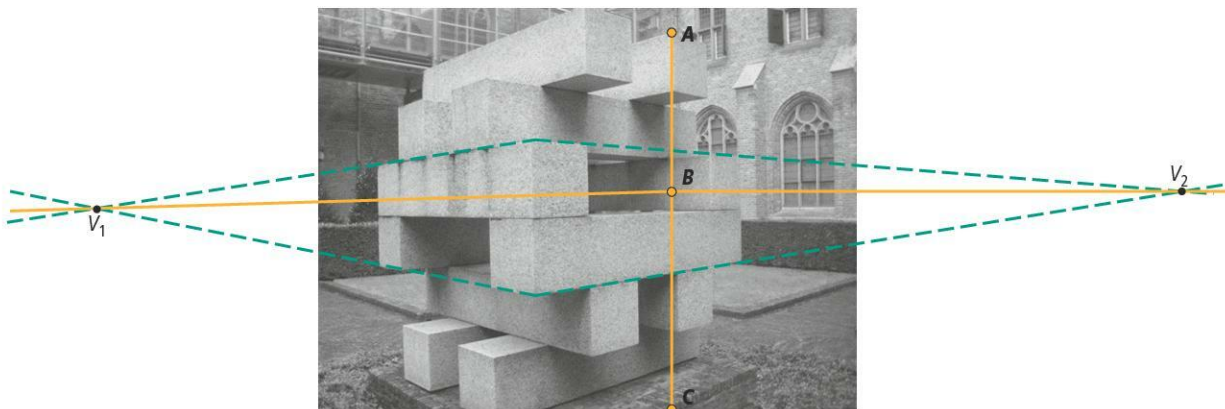
De foto is op 12 dm hoogte gemaakt.

Onderzoekopdrachten

31 a



- b De inhoud van één balk is $42 \times 42 \times 210 = 370\,440 \text{ cm}^3$.
 De inhoud van het totale kunstwerk is $12 \times 370\,440 = 4\,445\,280 \text{ cm}^3$.
 De inhoud van de doos is $210 \times 210 \times 252 = 11\,113\,200 \text{ cm}^3$.
 Het percentage van de inhoud van de doos dat wordt ingenomen door de 12 balken is $\frac{4\,445\,280}{11\,113\,200} \times 100\% = 40\%$.
- c Teken de verdwijnpunten en de horizon en kies een goede verticale lijn.



Op de foto is $AC = 55 \text{ mm}$ en $BC = 30 \text{ mm}$.

In werkelijkheid is $AC = 6 \times 42 + 20 = 272 \text{ cm}$.

	kunstwerk	lenshoogte
hoogte in werkelijkheid in cm	272	lenshoogte
hoogte op de foto in mm	55	30

$$55 \times \text{lenshoogte} = 272 \times 30$$

$$\text{lenshoogte} = 272 \times 30 : 55$$

$$\text{lenshoogte} = 148,363\dots$$

De lens bevond zich op een hoogte van ongeveer 148 cm.

Samenvatting

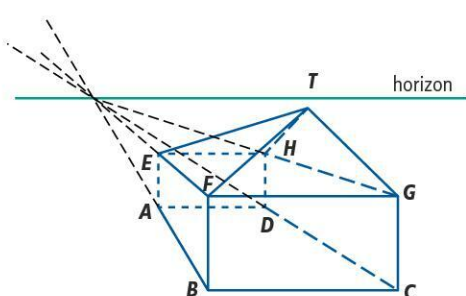
- S1 a In de foto is één richting evenwijdig aan het tafereel, namelijk de verticale richting.

b

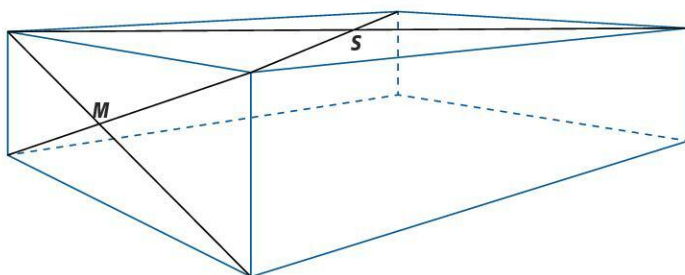


- S2 a Dit object heeft een driehoekig grondvlak en drie opstaande ribben die in één punt samen komen.
 b De wiskundige naam van dit object is een regelmatige vierzijdige piramide.

S3

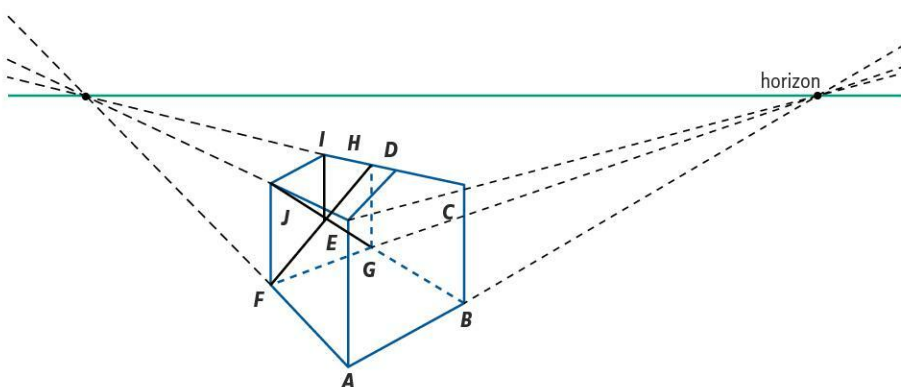


S4



Het punt M is het midden van het linkzijdvlak en het punt S is het midden van het bovenzvlak.

S5



- S6 Teken de horizon, gebruik het punt waar de evenwijdige lijnen samen komen.



Op de foto is $AC = 30$ mm en $BC = 10$ mm.

	brug	lenshoogte
hoogte in werkelijkheid in cm	460	lenshoogte
hoogte op de foto in mm	30	10

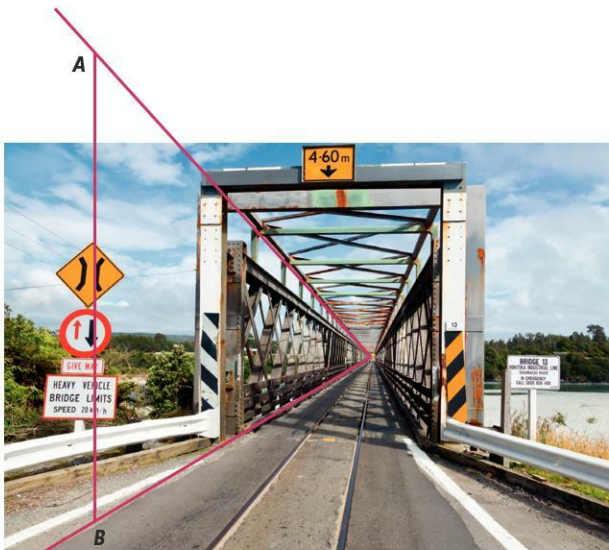
$$30 \times \text{lenshoogte} = 460 \times 10$$

$$\text{lenshoogte} = 460 \times 10 : 30$$

$$\text{lenshoogte} = 153,333...$$

De foto is genomen op een hoogte van ongeveer 153 cm.

- S7



Op de foto is $AB = 60$ mm en is de hoogte van het gele bordje 7 mm.

	brug	gele bordje
hoogte in werkelijkheid in cm	460	hoogte bordje
hoogte op de foto in mm	60	7

$$60 \times \text{hoogte bordje} = 460 \times 7$$

$$\text{hoogte bordje} = 460 \times 7 : 60$$

$$\text{hoogte bordje} = 53,666...$$

Het gele bordje is ongeveer 54 cm hoog.

Test jezelf

T1 a Dit object bestaat uit een balk met daarbovenop een halve cilinder, dus het zou een tunnel of iets dergelijks kunnen zijn.

b De straal van de cirkel is $6 : 2 = 3$ m.

De inhoud van de halve cilinder is $0,5 \times \pi \times 3^2 \times 10 = 45\pi \text{ m}^3$.

Het voorvlak van de balk is 6 m lang en $7 - 3 = 4$ m hoog.

De inhoud van de balk is $6 \times 4 \times 10 = 240 \text{ m}^3$.

De inhoud van dit object is $45\pi + 240 \approx 381 \text{ m}^3$.

T2 a $PW = 0,60 + 2 \times 0,424 = 1,448$ m.

De oppervlakte van driehoek PBA is $0,5 \times 0,424 \times 0,424 = 0,089... \text{ m}^2$.

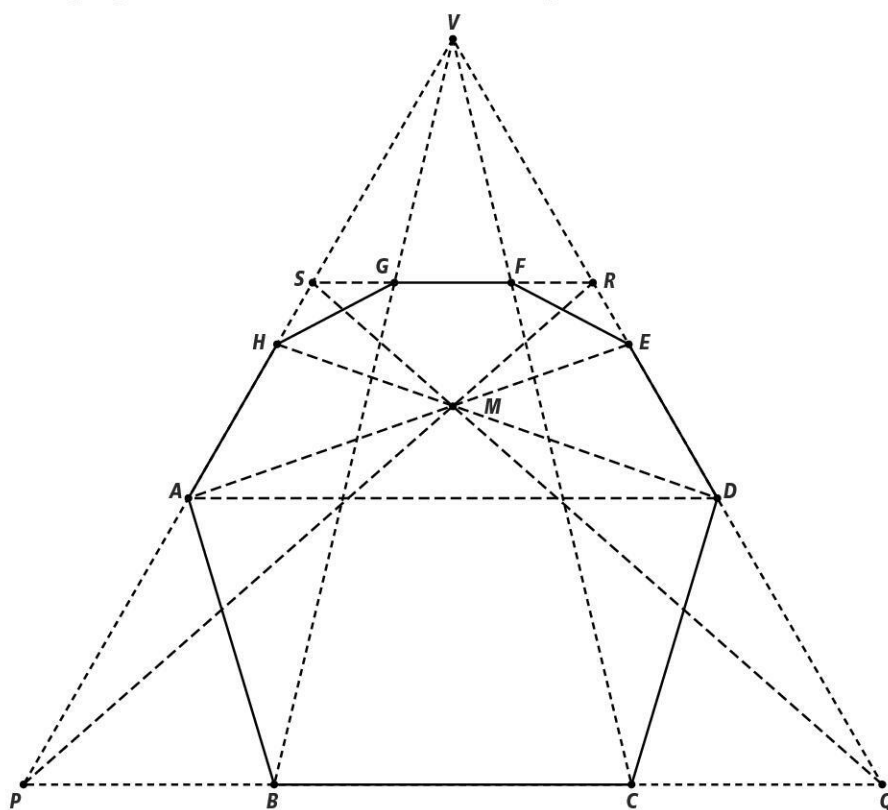
De oppervlakte van de achthoek is $1,448 \times 1,448 - 4 \times 0,089... = 1,737... \text{ m}^2$.

De totale inhoud van de plantenbakken is

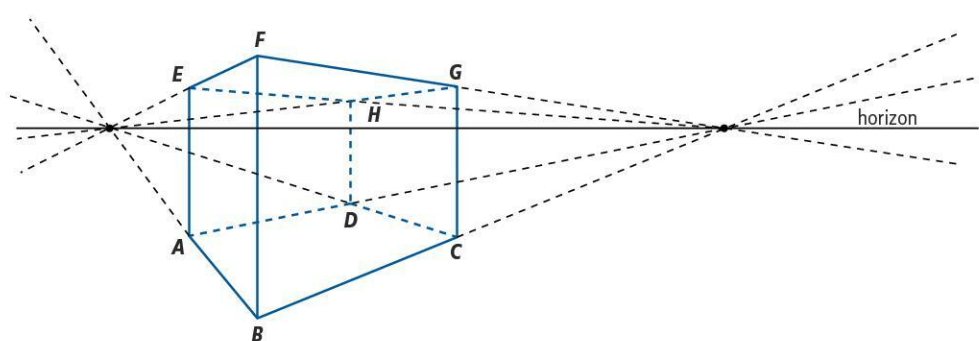
$0,4 \times 1,737... + 0,6 \times 1,737... + 0,8 \times 1,737... \approx 3,13 \text{ m}^3$.

3 m^3 potgrond is niet voldoende voor de drie plantenbakken.

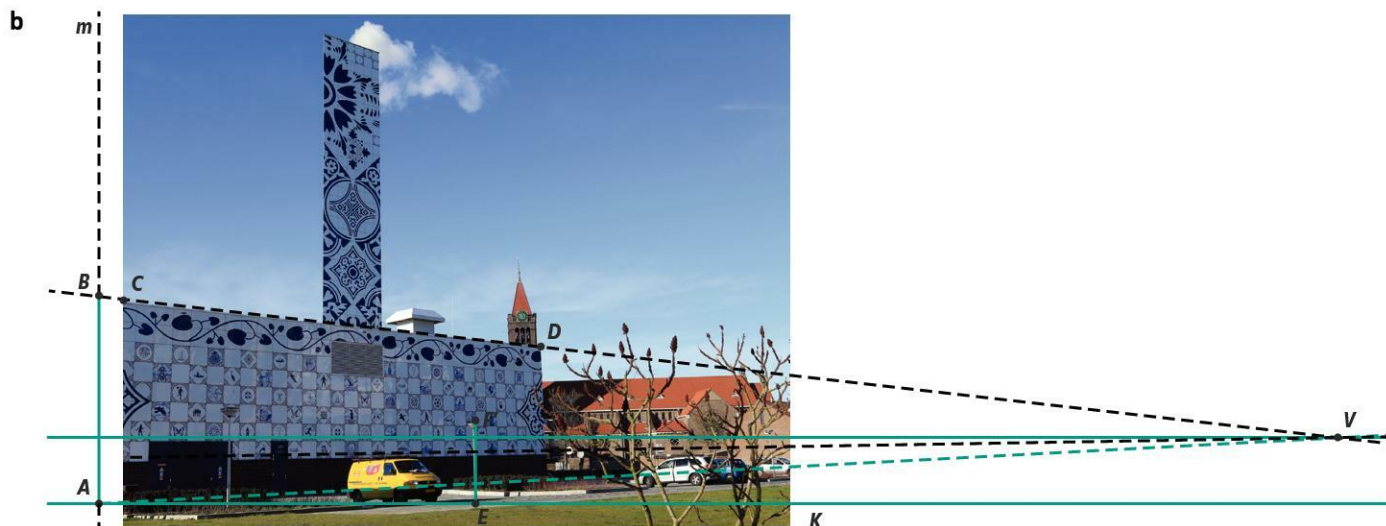
b



T3



- T4 a** Op de foto is de bovenkant van de zwarte onderrand nog net zichtbaar achter het hoogste punt van de bus.
Omdat de bus zich tussen de camera en het gebouw bevindt, is het gebouw verder weg dan de bus en door het perspectief lijkt de zwarte onderrand kleiner dan deze in werkelijkheid is.
De bovenkant van bus is dus lager dan de zwarte onderrand van het gebouw.



De hoogte van de muur is in de tekening $AB = 27$ mm.

De hoogte van de lantaarnpaal is in de tekening $EF = 11$ mm.

	gebouw	lantaarnpaal
hoogte in werkelijkheid in m	10	hoogte lantaarnpaal
hoogte op de foto in mm	27	11

$$27 \times \text{hoogte lantaarnpaal} = 10 \times 11$$

$$\text{hoogte lantaarnpaal} = 10 \times 11 : 27$$

$$\text{hoogte lantaarnpaal} = 4,074...$$

De lantaarnpaal is ongeveer 4,1 m hoog.

- T5 a** Op de linker foto is de bovenkant van de deur nog net zichtbaar achter het hoogste punt van de kubus.
De positie van de camera is lager dan het hoogste punt van de deur.
Omdat het kunstwerk zich tussen de camera en de deur bevindt, is het kunstwerk lager dan de deur.



De foto is genomen op de hoogte van punt B op de foto.
Op de foto is $BC = 17$ mm en $AC = 33$ mm

	<i>deur</i>	<i>lenshoogte</i>
<i>hoogte in werkelijkheid in cm</i>	230	<i>lenshoogte</i>
<i>hoogte op de foto in mm</i>	33	17

$$33 \times \text{lenshoogte} = 230 \times 17$$

$$\text{lenshoogte} = 230 \times 17 : 33$$

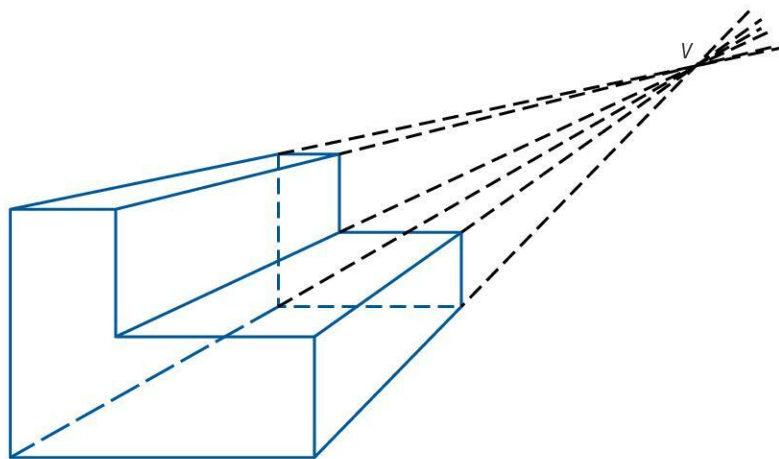
$$\text{lenshoogte} = 118,484\dots$$

De foto is genomen op een hoogte van ongeveer 12 dm.

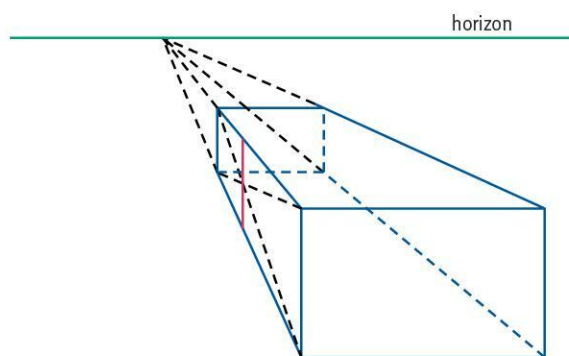
Extra oefening

E1 Het ruimtelijk object bestaat uit een balk met daaraan vast twee prisma's.

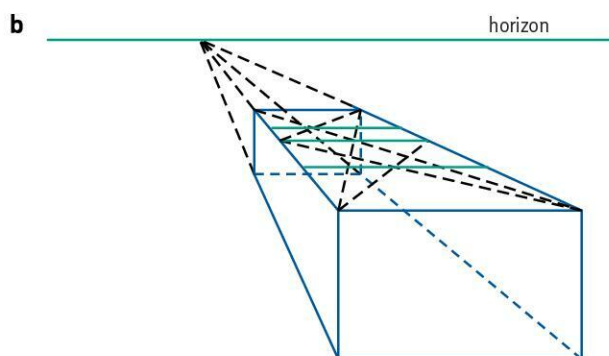
E2



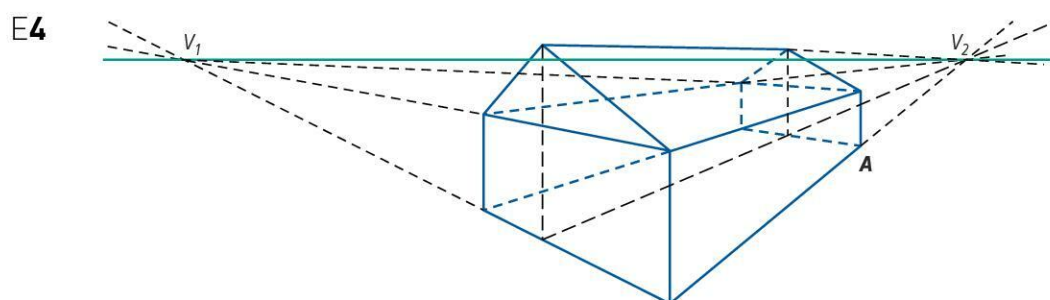
E3 a



De rode lijn verdeelt het linkerzijvlak in twee gelijke verticale stroken.



De groene lijnen verdelen het bovenvlak in vier gelijke stroken evenwijdig aan de horizon.



Op de foto is $AC = 35$ mm en $BC = 15$ mm.

	tafel	lenshoogte
hoogte in werkelijkheid in cm	85	lenshoogte
hoogte op de foto in mm	15	35

$$15 \times \text{lenshoogte} = 85 \times 35$$

$$\text{lenshoogte} = 85 \times 35 : 15$$

$$\text{lenshoogte} = 198,333\dots$$

De lens van de camera stond op een hoogte van ongeveer 198 cm.

E6



Op de foto is de hoogte van de kast $DF = 25$ mm en de hoogte van de horizon $EF = 18$ mm.

	<i>kast</i>	<i>lenshoogte</i>
<i>hoogte in werkelijkheid in cm</i>	<i>hoogte kast</i>	198
<i>hoogte op de foto in mm</i>	25	18

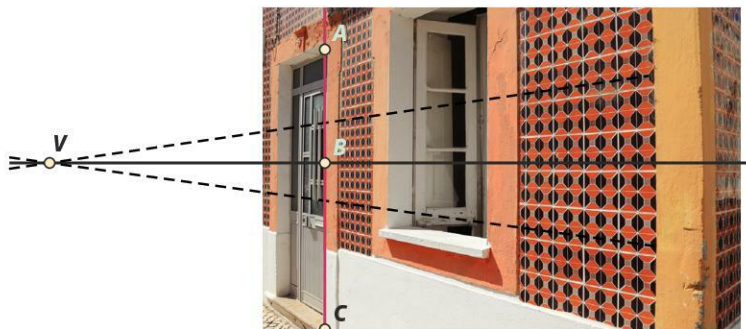
$$18 \times \text{hoogte kast} = 25 \times 198$$

$$\text{hoogte kast} = 25 \times 198 : 18$$

$$\text{hoogte kast} = 275$$

De kast achterin tegen de muur is 275 cm hoog.

E7 a



Op de foto is $AC = 37$ mm en $BC = 22$ mm.

	<i>deur</i>	<i>lenshoogte</i>
<i>hoogte in werkelijkheid in cm</i>	<i>hoogte deur</i>	160
<i>hoogte op de foto in mm</i>	37	22

$$22 \times \text{hoogte deur} = 37 \times 160$$

$$\text{hoogte deur} = 37 \times 160 : 22$$

$$\text{hoogte deur} = 269,090\dots$$

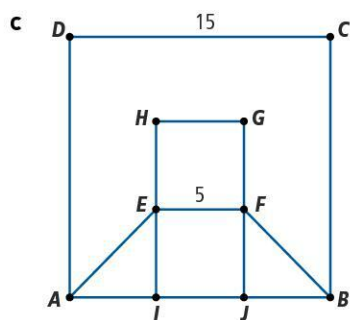
De deur is ongeveer 269 cm hoog.

b De oppervlakte van de hele tegel is $15 \times 15 = 225 \text{ cm}^2$.

De oppervlakte van het vierkantje is $5 \times 5 = 25 \text{ cm}^2$.

De oppervlakte van de vier vierhoeken samen is $225 - 25 = 200 \text{ cm}^2$.

Elke vierhoek heeft een oppervlakte van $200 : 4 = 50 \text{ cm}^2$.



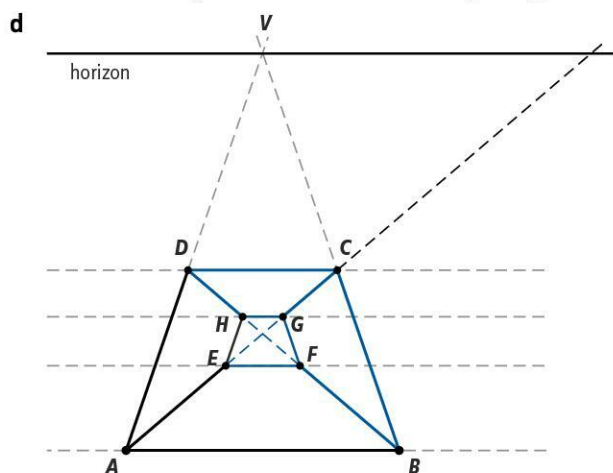
In de tekening geldt $EI = AI = IJ = JB = 5$.

Met de stelling van Pythagoras bereken je AE .

<i>zijde</i>	<i>kwadraat</i>
$AI = 5$	25
$EI = 5$	<u>25 +</u>
$AE = \dots$	50

$$AE = \sqrt{50} = 7,071 \dots \text{ cm.}$$

De andere zijden van de vierhoek zijn ongeveer 71 mm.



- 1 a** Je krijgt de volgende term door bij de voorafgaande term 3 op te tellen.

De volgende twee termen zijn $15 + 3 = 18$ en $18 + 3 = 21$.

- b** Een recursieve formule is $u_{n+1} = u_n + 3$ met $u_0 = 3$.

2 a $u(1) = 3 \cdot u(0) - 2$

$$u(1) = 3 \cdot 2 - 2$$

$$u(1) = 4$$

$$u(3) = 3 \cdot u(2) - 2$$

$$u(3) = 3 \cdot 10 - 2$$

$$u(3) = 28$$

b $u(1) = \frac{1}{u(0)} + 3$

$$u(1) = \frac{1}{-\frac{1}{2}} + 3$$

$$u(1) = -2 + 3 = 1$$

$$u(3) = \frac{1}{u(2)} + 3$$

$$u(3) = \frac{1}{4} + 3$$

$$u(3) = 3\frac{1}{4}$$

$$u(2) = 3 \cdot u(1) - 2$$

$$u(2) = 3 \cdot 4 - 2$$

$$u(2) = 10$$

$$u(4) = 3 \cdot u(3) - 2$$

$$u(4) = 3 \cdot 28 - 2$$

$$u(4) = 82$$

$$u(2) = \frac{1}{u(1)} + 3$$

$$u(2) = \frac{1}{1} + 3$$

$$u(2) = 1 + 3 = 4$$

$$u(4) = \frac{1}{u(3)} + 3$$

$$u(4) = \frac{1}{3\frac{1}{4}} + 3$$

$$u(4) = 3\frac{4}{13}$$

- 3 a** Je vindt elke volgende term door bij de voorgaande term 4 op te tellen.

De directe formule is $u(n) = 7 + 4n$.

- b** Je vindt elke volgende term door bij de voorgaande term 5 af te trekken.

Als $u_1 = 200$ dan is $u_0 = 200 + 5 = 205$.

De directe formule is $u_n = 205 - 5n$.

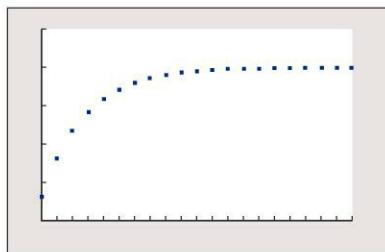
- c** Je vindt elke volgende term door de voorgaande term met 4 te vermenigvuldigen.

De directe formule is $u_n = \frac{1}{2} \cdot 4^n$.

- 4 a** 10 dagen zijn 20 perioden van 12 uur, dus kies voor het venster op je rekenmachine voor $0 \leq x \leq 20$.

Invoer: $u_n = 120 + 0,7 \times u_{n-1}$ met $u_0 = 60$

Venster: $0 \leq x \leq 20, 0 \leq y \leq 500$



De hoeveelheid neemt gedurende de eerste 10 dagen steeds langzamer toe, oftewel de hoeveelheid is afnemend stijgend.

- b** Maak met je rekenmachine een tabel bij de rij.

$M(5) = 342,8562$ en $M(6) = 359,99934$

Na 6 maal 12 uur is het medicijn pas goed werkzaam, oftewel na 3 dagen.

Formules opstellen

- 5 a** Lijn m : $y = 3x + b$ gaat door $(1, 0)$ dus $0 = 3 \cdot 1 + b$.
 $b = -3$ en de formule is m : $y = 3x - 3$.
- b** A. De richtingscoëfficiënt is $\frac{9-0}{0-3} = -3$.
 De formule heeft de vorm $y = ax + b$.
 $a = -3$ dus $y = -3x + b$.
 De lijn gaat door $(0, 9)$ dus $b = 9$ en de formule is $y = -3x + 9$.
- B. De richtingscoëfficiënt is $\frac{5-6}{0-1} = 1$.
 De formule heeft de vorm $y = ax + b$.
 $a = 1$ dus $y = x + b$.
 De lijn gaat door $(0, 5)$ dus $b = 5$ en de formule is $y = x + 5$.
- C. De richtingscoëfficiënt is $\frac{9-5}{4-2} = 2$.
 De formule heeft de vorm $y = ax + b$.
 $a = 2$ dus $y = 2x + b$.
 De lijn gaat door $(2, 5)$ dus $5 = 2 \cdot 2 + b$.
 $b = 1$ en de formule is $y = 2x + 1$.
- D. De richtingscoëfficiënt is $\frac{9-3}{3-1\frac{1}{2}} = 4$.
 De formule heeft de vorm $y = ax + b$.
 $a = 4$ dus $y = 4x + b$.
 De lijn gaat door $(3, 9)$ dus $9 = 4 \cdot 3 + b$.
 $b = -3$ en de formule is $y = 4x - 3$.
- 6 a** Bij een jaarlijks verbruik van ten hoogste 300 m^3 betaalt de afnemer per m^3 €0,70 + €0,39 (waterbelasting) = €1,09. Voor $V \text{ m}^3$ water moet hij dus $1,09 \cdot V$ euro betalen. Daar bovenop komt het vastrecht van €45,78. Dit maakt samen $1,09 \cdot V + 45,78$ euro. Over al deze bedragen moet de afnemer ook nog 9% btw betalen, dus het totale bedrag in euro's wordt
 $K = 1,09 \cdot (1,09V + 45,78)$
 $K = 1,1881 \cdot V + 49,9002$.
- b** Bij een jaarlijks verbruik meer dan 300 m^3 betaalt de afnemer voor de eerste 300 m^3 een bedrag van $300 \times (\text{€}0,70 + \text{€}0,39) = \text{€}327,00$. Voor de overige $V - 300 \text{ m}^3$ water moet hij $0,70 \cdot (V - 300)$ euro betalen. Voor het water betaalt hij $327,00 + 0,70 \cdot (V - 300) = 327 + 0,70V - 210$ oftewel $0,70V + 117$ euro. Daar bovenop komt het vastrecht van €45,78. Dit maakt samen $0,70V + 117 + 45,78 = 0,70V + 162,78$ euro. Over al deze bedragen moet de afnemer ook 9% btw betalen, dus het totale bedrag in euro's wordt
 $K = 1,09 \cdot (0,70V + 162,78)$
 $K = 0,763 \cdot V + 177,4302$.
- 7 a** De groeifactor per 37,6 tijdseenheden is $\frac{5979}{2,49} = 2401,204\dots$
 De groeifactor per tijdseenheid is $g = 2401,204\dots^{\frac{1}{37,6}} \approx 1,23$.
- b** De formule is $C = 2,49 \cdot 1,23^t$.
- c** C* in de tabel hieronder is de uitkomst van de formule $C = 2,49 \cdot 1,23^t$ als de bijbehorende waarden van t worden ingevuld.

t	0	0,03	0,17	1,2	7,3	19,7	37,6
C	2,49	2,51	2,58	3,19	11,29	147,00	5979
C^*	2,49	2,506	2,579	3,192	11,285	147,00	5979

Afgerond geeft deze formule dezelfde waarden als de gegeven waarden in de tabel. Er is dus sprake van een exponentieel verband.

8 a De groeifactor per 3 jaar is $\frac{60000}{15000} = 4$.

De groeifactor per jaar is $g = 4^{\frac{1}{3}} \approx 1,587$.

Een formule is $N = 15000 \cdot 1,587^t$.

b De groeifactor per maand is $g = 1 - 0,0013 = 0,9987$.

De groeifactor per jaar is $g = 0,9987^{12} \approx 0,985$.

Een formule is $N = 4\,250\,000 \cdot 0,985^t$.

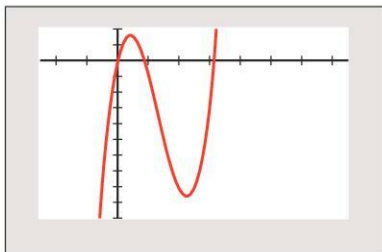
Veranderingen

9 a De grafiek stijgt het eerste half uur constant en dan afnemend tot de top, daarna een toenemende daling die overgaat in een afnemende daling.

b De grafiek is afnemend dalend na ongeveer tweeënhalf uur.

10 a Invoer: $y_1 = 2x^3 - 16x^2 + 22x$

Venster: $-5 \leq x \leq 15$, $-50 \leq y \leq 10$



b Optie: maximum

Dit geeft $x = 0,810...$ en $y = 8,385...$

De grafiek is afnemend stijgend op het interval $\langle -; 0,81 \rangle$.

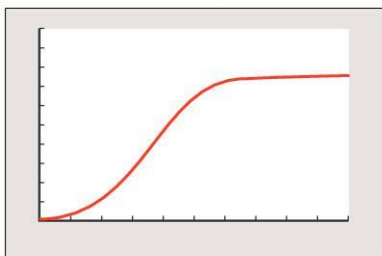
c Optie: minimum

Dit geeft $x = 4,522...$ en $y = -42,756...$

De grafiek is afnemend dalend op het interval $\langle 3; 4,52 \rangle$.

11 a Invoer: $y_1 = \frac{1900}{1 + 57,4 \times 0,68^x}$

Venster: $0 \leq x \leq 30$, $0 \leq y \leq 2500$

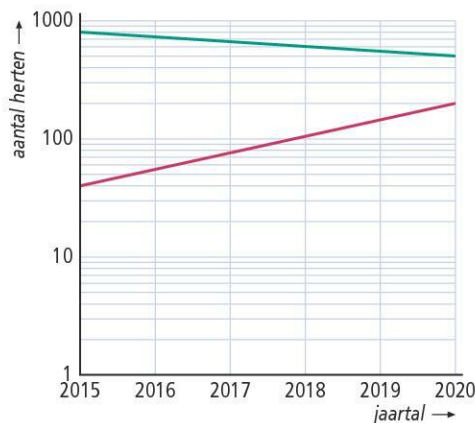


Na ongeveer 10 weken gaat het gewicht van de courgette over van toenemend stijgend in afnemend stijgend.

- b** Als t steeds groter wordt, neemt $0,68^t$ af en nadert de waarde 0, want $0,68 < 1$. Dan neemt de noemer $1 + 57,4 \cdot 0,68^t$ ook af en nadert de waarde $1 + 57,4 \cdot 0 = 1$. De waarde van G zal dan naderen naar de grenswaarde $\frac{1900}{1} = 1900$.
Uiteindelijk zal de courgette 1900 gram worden.

Logaritmische schalen

- 12 a** Je kunt zien dat er een logaritmische schaalverdeling is gebruikt omdat de getallen langs de as steeds met 10 vermenigvuldigd worden.
- b** $a = 10^{-1,5} \approx 0,032$
- c** $b = 10^{0,4} \approx 2,5$
- d** $c = 10^{1,8} \approx 63,1$
- 13 a** Het snijpunt met de verticale as ligt bij het derde streepje boven de 10, dat is bij 40, dus $b = 40$.
- b** De grafiek gaat door de punten (0,40) en (5,200).
De groeifactor per 5 jaar is $\frac{200}{40} = 5$.
De groeifactor per jaar is $g = 5^{\frac{1}{5}} \approx 1,380$.
- c** Een formule bij het aantal herten is $N = 40 \cdot 1,380^t$.
Bij 1 januari 2025 hoort $t = 10$.
Op 1 januari 2025 zijn er $40 \cdot 1,380^{10} \approx 1002$ herten.
- d** Op 1 januari 2015, bij $t = 0$, zijn er 800 hazen.
Op 1 januari 2020, bij $t = 5$, zijn er $800 \cdot 0,91^5 \approx 499$ hazen.



- 14 a** Bij verhitting met 121°C duurt het 5 minuten voordat er nog 1 spore over is.
- b** De grafiek bij verhitting met 115°C gaat door de punten (0, 10^6) en (8, 10^3).
Wanneer je de lijn door zou trekken, zul je zien dat de grafiek ook door het punt (16, 1) gaat.
Bij verhitting met 115°C duurt het 16 minuten voordat er nog 1 spore over is.
- c** Als 90% van de sporen is afgestorven, dan zijn er nog $0,1 \times 10^6 = 10^5$ over.
Bij verhitting met 115°C is de reductietijd iets langer dan 2,5 minuut.
Bij verhitting met 121°C is de reductietijd iets korter dan 1 minuut.
- d** De grafiek bij 121°C gaat door de punten (0, 10^6) en (5, 1).
De groeifactor per 5 minuten is $\frac{1}{10^6} = 0,000\,001$.
De groeifactor per minuut is $g = 0,000001^{\frac{1}{5}} \approx 0,063$.
Een formule is $A = 10^6 \cdot 0,063^t$.

Vorm en ruimte

- 15 a** De vergrotingsfactor k is $AC : DC = 12 : 3 = 4$.
 $AB = 4 \cdot 4\frac{1}{2} = 18$
 $BC = 4 \cdot 4 = 16$
 $BE = 16 - 4 = 12$
- b** De vergrotingsfactor is 4, dus de oppervlakte van driehoek ABC is $4^2 = 16$ keer zo groot als de oppervlakte van driehoek DEC .
De oppervlakte van driehoek ABC is $16 \cdot 5,88 = 94,08$.
- 16** De vergrotingsfactor is $25 : 20 = 1,25$.
De inhoud wordt $1,25^3 = 1,953\ 125$ keer zo groot.
De inhoud van fles B is $1,953\ 125 \times 780 \approx 1523\text{ cm}^3$.
- 17 a** De middelste schijf heeft een diameter van $0,8 \cdot 20 = 16\text{ cm}$ en de kleinste schijf heeft een diameter van $0,8 \cdot 16 = 12,8\text{ cm}$.
De stralen van de drie schijven zijn respectievelijk 10 en 8 en 6,4 cm.
De inhoud van de grootste schijf is $\pi \times 10^2 \times 4 \approx 1256,6\text{ cm}^3$.
De inhoud van de middelste schijf is $\pi \times 8^2 \times 4 \approx 804,2\text{ cm}^3$.
De inhoud van de kleinste schijf is $\pi \times 6,4^2 \times 4 \approx 514,7\text{ cm}^3$.
- b** De middelste schijf heeft $\frac{1256,6 - 804,2}{1256,6} \times 100\% \approx 36\%$ minder inhoud dan de eerste schijf.
De kleinste schijf heeft $\frac{804,2 - 514,7}{804,2} \times 100\% \approx 36\%$ minder inhoud dan de middelste schijf.
De inhoud neemt inderdaad met een vast percentage af.
- 18 a** De inhoud van deze piramide is $\frac{1}{3} \times 36^2 \times 22 = 9504\text{ m}^3$.
- b** 22 meter is gelijk aan 2200 cm.
De vergrotingsfactor is $\frac{11}{2200} = \frac{1}{200} = 0,005$.
De inhoud van dit model is $9504 \times 0,005^3 = 0,001188\text{ m}^3$, oftewel 1188 cm^3 .
- c** 9504 m^3 is gelijk aan $9\ 504\ 000\ 000\text{ cm}^3$.
De inhoud van dit model is $\frac{352}{9\ 504\ 000\ 000}$ keer zo klein als de inhoud van de glazen piramide bij het Louvre.
De vergrotingsfactor is $\sqrt[3]{\frac{352}{9\ 504\ 000\ 000}} = \frac{1}{300}$.
De hoogte van dit model is $2200 \times \frac{1}{300} \approx 7,3\text{ cm}$.

Systematisch tellen

- 19 a** Onder P, I en G staat een w, dus het drietal Petra, Ineke en Gerlinde.
- b** wwwnn, wwnwn, wnwnw, nwwwn
wwnnw, wnwnw, nwwnw
wnnww, nwnww
nnwww
Dat zijn 10 verschillende drietallen

- 20 a** Er kunnen zo $\binom{15}{3} = 455$ rijtjes ontstaan.
- b** Er zijn $\binom{10}{5} = 252$ rijtjes met vijf keer kop en vijf keer munt.
- c** Je kunt een groep van 7 gasten op $\binom{7}{3} = \binom{7}{4} = 35$ manieren verdelen in groepen van drie en vier.
- 21 a** Er zijn $\binom{8}{5} = 56$ verschillende mogelijkheden om vijf lampen aan te doen.
- b** Er zijn $\binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} = 56 + 28 + 8 + 1 = 93$ verschillende mogelijkheden om minstens vijf lampen aan te doen.

- V1 a** Bij tabel A is de toename van de y -waarde steeds 3 als de x -waarde met 1 toeneemt. Er is sprake van een lineair verband tussen x en y .
 Bij tabel B wordt de y -waarde steeds met $1\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd als de x -waarde met 1 toeneemt. Hier is sprake van een exponentieel verband tussen x en y .
 Bij tabel C neemt de y -waarde niet steeds met hetzelfde af als de x -waarde met 1 toeneemt, dus is er geen sprake van een lineair verband tussen x en y .
 Verder wordt de y -waarde steeds met $\frac{1}{4}$ vermenigvuldigd, maar de waarde van x neemt daarbij niet altijd met 1 toe. Er is dan ook geen sprake van een exponentieel verband tussen x en y .
- b** Bij tabel A neemt y steeds met 3 toe. Als $x = 0$, dan is $y = 2 - 3 = -1$.
 Een formule bij de tabel is $y = 3x - 1$.
 Bij tabel B wordt y steeds met $1\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd. Als $x = 0$, dan is $y = 40$.
 Een formule bij de tabel is $y = 40 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^x$.
- V2 a** Zij betaalt $\text{€}2,67 - \text{€}2,21 = \text{€}0,46$ voor $12 - 8 = 4$ minuten extra.
 Dit is $\text{€}0,46 : 4 = \text{€}0,115$ per minuut.
 Voor 18 minuten moet zij $\text{€}2,67 + 6 \times \text{€}0,115 = \text{€}3,36$ betalen.
- b** Het starttarief is $\text{€}2,21 - 8 \times \text{€}0,115 = \text{€}1,29$.
- c** Elk jaar 2% hoger betekent dat er sprake is van een exponentieel verband met groefactor 1,02. Het starttarief is 1,29. Je moet oplossen
 $1,29 \cdot 1,02^t > 1,50$
 $1,29 \cdot 1,02^t = 1,50$
 $1,02^t = \frac{1,50}{1,29}$
 $t = {}^{1,02}\log\left(\frac{1,50}{1,29}\right) \approx 7,61630\dots$
 Na acht jaar is het starttarief hoger dan $\text{€}1,50$.
- V3 a** Er is een procentuele toename, dus wordt er jaarlijks met dezelfde factor vermenigvuldigd.
- b** De groefactor per jaar is 1,0102.
- c** Een formule is $N = 4\,600\,000 \cdot 1,0102^t$.
- d** Op 1 januari 2015 is $t = -5$.
 $N = 4\,600\,000 \cdot 1,0102^{-5} \approx 4\,372\,411$
 Op 1 januari 2015 waren er 4 372 411 huishoudens.
 Op 1 januari 2035 is $t = 15$.
 $N = 4\,600\,000 \cdot 1,0102^{15} \approx 5\,356\,342$
 Op 1 januari 2035 waren er 5 356 342 huishoudens.
- e** De groefactor per vijf jaar is $1,0102^5 \approx 1,0521$.
- V4 a** $100\% - 0,92\% = 99,08\%$
 De groefactor per maand is 0,9908.
- b** De groefactor per vier jaar, dus per 48 maanden is $60\,000 : 15\,000 = 4$.
 De groefactor per maand is $4^{\frac{1}{48}} \approx 1,029$.
- c** De groefactor per twee jaar, dus per 24 maanden is $11\,700 : 12\,000 = 0,975$.
 De groefactor per maand is $0,975^{\frac{1}{24}} \approx 0,999$.

- V5 a** Een formule is $N = 6470\,000 \cdot 1,042^t$.
- b** Op 1 januari 2025 is $t = 4,5$.
Er zullen dan $6470\,000 \cdot 1,042^{4,5} \approx 7\,785\,903$ inwoners zijn.
- c** Je moet oplossen $6470\,000 \cdot 1,042^t > 10\,000\,000$.
 $6470\,000 \cdot 1,042^t = 10\,000\,000$
 $1,042^t = 1,545\,59\dots$
 $t = {}^{1,042}\log(1,545\,59\dots) = 10,583\,09\dots$
 Na iets meer dan 10,5 jaar zullen er voor het eerst meer dan 10 miljoen inwoners zijn. Dit is in het begin van het jaar 2031.

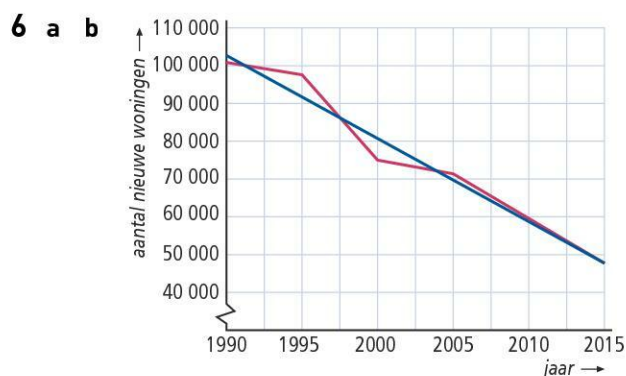
19.1 Lineair interpoleren en extrapoleren

intro 2008 ligt midden tussen 2006 en 2010. Hij kan dan het aantal schatten door hiervan het gemiddelde van de aantallen huishoudens te berekenen.
In de grafiek zie je dat het aantal huishoudens in 2008 juist minder was dan het gemiddelde van 2006 en 2010. Dit kon je niet uit de tabel opmaken.

- 1 a** De temperatuur om 19.45 uur is $14,7^\circ\text{C}$ en om 20.00 uur is die $14,4^\circ\text{C}$.
b De temperatuur nam $14,7 - 14,4 = 0,3^\circ\text{C}$ af in 15 minuten.
Dit is gelijk aan $0,3 : 15 = 0,02^\circ\text{C}$ per minuut.
c De temperatuur zal dan ongeveer $14,7 - 10 \times 0,02 = 14,5^\circ\text{C}$ zijn.
d Je kunt die temperaturen niet gebruiken omdat de temperatuur niet lineair daalde tussen de bijbehorende tijdstippen.
- 2 a** De afname van het aantal inwoners tussen 1960 en 1970 is $606\,000 - 551\,000 = 55\,000$. De lengte van die periode is 10 jaar.
De gemiddelde afname is $55\,000 : 10 = 5500$ inwoners per jaar.
In 1967 had Den Haag naar schatting $606\,000 - 7 \times 5500 = 567\,500$ inwoners.
De afname van het aantal inwoners tussen 1980 en 1990 is $456\,000 - 441\,000 = 15\,000$. De lengte van die periode is 10 jaar.
De gemiddelde afname is $15\,000 : 10 = 1500$ inwoners per jaar.
In 1983 had Den Haag naar schatting $456\,000 - 3 \times 1500 = 451\,500$ inwoners.
b De toename van het aantal inwoners tussen 2010 en 2020 is $545\,000 - 489\,000 = 56\,000$. De lengte van die periode is 10 jaar.
De gemiddelde toename is $56\,000 : 10 = 5600$ inwoners per jaar.
In 2032 zal Den Haag naar schatting $545\,000 + 12 \times 5600 = 612\,200$ inwoners hebben.
- 3 a** De toename van het aantal eenoudergezinnen van 2009 tot 2019 is $582\,106 - 474\,909 = 107\,197$. De lengte van die periode is 10 jaar.
De gemiddelde toename is $107\,197 : 10 = 10\,719,7$ eenoudergezinnen per jaar. In 2016 zal het aantal eenoudergezinnen $474\,909 + 7 \times 10\,719,7 \approx 549\,947$ zijn.
b In 2025 zal het aantal eenoudergezinnen $582\,106 + 6 \times 10\,719,7 \approx 646\,424$ zijn.

- 4 a** Nee, de literprijs nam tussen februari en maart en tussen juni en juli af.
- b** De literprijs is $\text{€ } 1,64 - \text{€ } 1,56 = \text{€ } 0,08$ gestegen in 5 maanden tijd.
Dit is een stijging van $\text{€ } 0,08 : 5 = \text{€ } 0,016$ per maand.
Een formule is $P = 0,016 \cdot t + 1,56$.
- c** Op 1 december 2018 is $t = 11$.
De literprijs zal dan $0,016 \times 11 + 1,56 \approx \text{€ } 1,74$ zijn.
- d** Op 1 januari 2020 is $t = 24$.
De literprijs zal dan $0,016 \times 24 + 1,56 \approx \text{€ } 1,94$ zijn.
Deze schatting is niet betrouwbaar omdat 1 januari 2020 ver na de bekende gegevens is en de bekende literprijzen schommelen ook behoorlijk.

- 5 a** De afname van het aantal jeugdleden tussen 1 januari 2015 en 1 januari 2020 is $150 - 140 = 10$. De lengte van die periode is 5 jaar.
De gemiddelde afname is $10 : 5 = 2$ jeugdleden per jaar.
Op 1 januari 2021 waren er naar schatting $140 - 2 = 138$ jeugdleden.
- b** Volgens de trendlijn waren er $140 + 2 = 142$ jeugdleden op 1 januari 2019.
Volgens de grafiek waren er 148 jeugdleden.
Het aantal jeugdleden volgens de trendlijn wijkt $\frac{149 - 142}{149} \times 100\% \approx 4,7\%$ af van het werkelijke aantal op 1 januari 2019.



- c** Neem N voor het aantal nieuwe woningen. De trendlijn gaat door de punten $(1990, 103\,000)$ en $(2015, 49\,000)$. De richtingscoëfficiënt

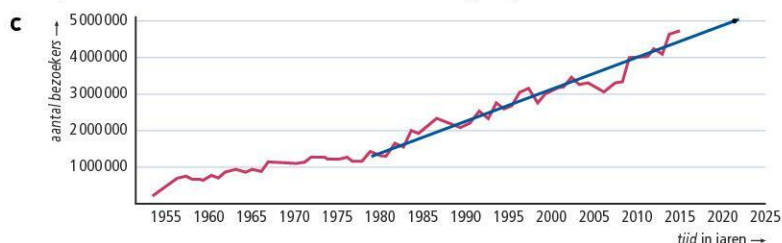
$$a = \frac{49\,000 - 103\,000}{2015 - 1990} = -2160.$$
Een formule bij de trendlijn is $N = 103\,000 - 2160t$.
- d** De ongelijkheid $103\,000 - 2160t < 30\,000$ moet worden opgelost.

$$103\,000 - 2160t = 30\,000$$

$$-2160t = -73\,000$$

$$t = 33,796\dots$$
In 2023 is het aantal nieuwe woningen voor het eerst minder dan 30 000.

- 7 a** In 2010 waren er voor het eerst vier miljoen bezoekers.
- b** Het bezoekersaantal nam sterk toe in bijvoorbeeld 1966, 1996, 2009 en 2014.
Een mogelijke verklaring zou kunnen zijn dat er in die jaren een spectaculaire nieuwe attractie werd geopend.



19 Afsluiting formules en verbanden

- d De trendlijn gaat door de punten (1980, 1 300 000) en (2022, 5 000 000).

De richtingscoëfficiënt is $\frac{5\,000\,000 - 1\,300\,000}{2022 - 1980} \approx 88\,095$.

Een formule is $N = 88\,095t + 1\,300\,000$.

- e De trendlijn hoort bij 1980 tot en met 2000. Na 2000 loopt de grafiek duidelijk anders dan de trendlijn. Deze is dus niet te gebruiken om deze voorspelling te doen.

- X1 a De coördinaten van punt B zijn (20, -9).

De coördinaten betekenen dat in het jaar 2000, de gierzwaluw negen dagen eerder terugkeerde, dus op 23 april.

- b De trendlijn gaat door de punten (0, 0) en (20, -6).

De richtingscoëfficiënt is $\frac{-6 - 0}{20 - 0} = -0,3$.

Een vergelijking bij deze lijn is $n = -0,3t$.

- c 2030 komt overeen met $t = 30$.

Dan is $n = -0,3 \times 30 = -9$ en de terugkeerdatum in 2030 is 23 april.

- X2 a Het gemiddeld aantal vlinders in 1995 is 165 000. Volgens de trendlijn waren er toen 111 000 vlinders. Het verschil is $\frac{165\,000 - 111\,000}{111\,000} \times 100\% \approx 48,6\%$.

Het gemiddeld aantal vlinders in 2013 is 130 000. Volgens de trendlijn waren er toen 86 000 vlinders. Het verschil is $\frac{130\,000 - 86\,000}{86\,000} \times 100\% \approx 51,2\%$.

Dus in 1995 verschilde het minder dan in 2013.

- b De trendlijn gaat door (0, 111 000) en (18, 86 000).

De richtingscoëfficiënt is $\frac{86\,000 - 111\,000}{18 - 0} = -1388,888\dots$

Een formule bij de trendlijn is $N = -1389t + 111\,000$.

De ongelijkheid $-1389t + 111\,000 < 60\,000$ moet worden opgelost.

$$-1389t + 111\,000 = 60\,000$$

$$-1389t = -51\,000$$

$$t = -51\,000 : -1389 = 36,72$$

In het jaar 2031 zal het gemiddeld aantal vlinders voor het eerst minder dan 60 000 zijn.

19.2 Evenredig en omgekeerd evenredig

intro Hoe meer kippen er zijn, hoe minder oppervlakte per kip er zal zijn.
Hoe meer kippen er zijn, hoe meer de totale hoeveelheid voer per dag zal zijn.

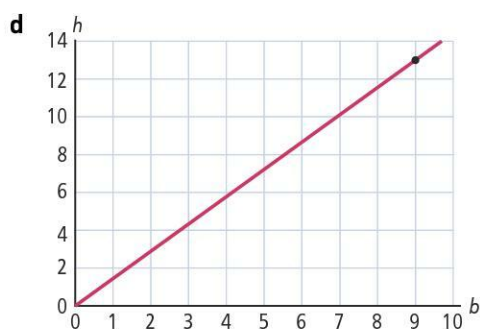
- 8 a De vergrotingsfactor is $45 : 9 = 5$.

De hoogte van de vergroting is $13 \times 5 = 65$ cm.

- b De hoogte wordt dan ook acht keer zo groot.

- c De verhouding tussen breedte en hoogte moet op de stippen staan.

Dit is het getal $\frac{13}{9}$.



9 a

lengte in cm	0,1	0,5	1	6	96
breedte in cm	240	48	24	4	0,25

- b** Als de breedte zes keer zo groot wordt, wordt de lengte zes keer zo klein.
c Als je bijvoorbeeld $l = 0,1$ en $b = 240$ invult, dan is $l \cdot b = 0,1 \times 240 = 24$.
 Het getal 24 moet op de stippen staan.

10 a Tabel A:

$$11 : 2 = 5,5; 38,5 : 7 = 5,5; 66 : 12 = 5,5 \text{ en } 99 : 18 = 5,5$$

p en q zijn recht evenredig want er geldt steeds $\frac{q}{p} = 5,5$ ofwel $q = 5,5 \cdot p$.

Tabel B hoort bij geen van beide.

Tabel C:

$$5 \times 13,2 = 66; 8 \times 8,25 = 66; 12 \times 5,5 = 66 \text{ en } 24 \times 2,75 = 66$$

x en y zijn omgekeerd evenredig want er geldt steeds $x \cdot y = 66$ ofwel $y = \frac{66}{x}$

- b** Bij tabel A hoort de formule $q = 5,5 \cdot p$.

Tabel B:

De gemiddelde toename per stap van u is steeds gelijk.

De richtingscoëfficiënt is $\frac{-11 - 1}{7 - 3} = -3$, dus $w = -3 \cdot u + b$.

Vul de coördinaten van het punt (3, 1) in.

Dit geeft $1 = -3 \times 3 + b$ ofwel $b = 10$.

De formule $w = -3u + 10$ hoort bij tabel B.

Bij tabel C hoort de formule $y = \frac{66}{x}$

11 a Dan is $H = 0,2$ en $D = 15$.

$$\text{Dit invullen geeft } V = 3,72 \times \frac{15}{58,5 \times 0,2} = 4,769\dots$$

Het vriespunt daalt $4,8^\circ\text{C}$ en dat is beneden -2°C .

- b** $H = 0,2$ invullen geeft $V = 3,72 \cdot \frac{D}{58,5 \cdot 0,2}$

$$V = 3,72 \cdot \frac{D}{11,7}$$

$$V = 3,72 \cdot \frac{1}{11,7} \cdot D$$

$$V = \frac{62}{195} \cdot D$$

Deze formule hoort bij een recht evenredig verband tussen V en D .

- c** zie opdracht b, de formule is $V = \frac{62}{195} \cdot D$.

- d** $D = 20$ invullen geeft $V = 3,72 \cdot \frac{20}{58,5 \cdot H}$

$$\text{Dit kun je schrijven als } V = \frac{74,4}{58,5 \cdot H} \text{ ofwel } V \approx \frac{1,27}{H}$$

Deze formule hoort bij een omgekeerd evenredig verband tussen V en H .

e $V = 4$ invullen geeft $4 = 3,72 \cdot \frac{D}{58,5 \cdot H}$

$$3,72 \cdot D = 4 \cdot 58,5 \cdot H$$

$$D = \frac{234}{3,72} \cdot H$$

$$D \approx 62,9 \cdot H$$

Als $H = 1$, dan is $D = 62,9$.

H is in kg/m^2 , dus $H = 1$ betekent dat er 1000 gram neerslag is gevallen.

De dosering moet $\frac{62,9}{1000} \times 100\% = 6,29\%$ zijn van de hoeveelheid neerslag.

12 a Aflezen bij $B = 100$ geeft $T = 1$ op de grafiek van $D = 100$ en $T = 5$ op de grafiek van $D = 500$. Het duurt dus $5 - 1 = 4$ seconden langer.

b Het punt $(5, 200)$ ligt op de grafiek van $D = 1000$.

Het verband is omgekeerd evenredig dus de bijbehorende formule is

$T \cdot B = a$. De coördinaten van $(5, 200)$ invullen geeft $5 \cdot 200 = a$, ofwel $a = 1000$. Dit geeft de formule $T \cdot B = 1000$.

Als je B in T uitdrukt krijg je de formule $B = \frac{1000}{T}$

X3 a Nederland had 1 sterfgeval per 100 000 inwoners. Nederland had 16 miljoen inwoners. Er waren $1 \times \frac{16\,000\,000}{100\,000} = 160$ sterfgevallen door vuurwapens in Nederland.

De Verenigde Staten had 13,6 sterfgevallen per 100 000 inwoners.

De Verenigde Staten had 295 miljoen inwoners. Er waren daar

$$13,6 \times \frac{295\,000\,000}{100\,000} = 40\,120 \text{ sterfgevallen door vuurwapens.}$$

Het jaarlijks aantal sterfgevallen was er $40120 : 160 \approx 251$ keer zo groot als in Nederland.

b Er is een recht evenredig verband dus $S = a \cdot V$. Het punt $(50, 10)$ ligt op de lijn. De coördinaten van dit punt invullen geeft $10 = a \cdot 50$ ofwel $a = 0,2$.

De formule $S = 0,2 \cdot V$ hoort bij de trendlijn.

Het aantal sterfgevallen door vuurwapens per 100 000 inwoners in Brazilië

$$\text{was } \frac{40\,000}{180\,000\,000} \times 100\,000 = 22,222\ldots$$

$$S = 22,222\ldots \text{ invullen geeft } 22,222\ldots = 0,2 \cdot V.$$

$$\text{ofwel } V = 111,111\ldots$$

Het totaal aantal vuurwapens in Brazilië is

$$111,111\ldots \times \frac{180\,000\,000}{1000} = 20\,000\,000.$$

19.3 Periodieke verbanden

intro Je bent na $30 : 2 = 15$ minuten na het instappen op het hoogste punt.

Drie minuten hiervoor ben je op een hoogte van 122 meter, dus ben je drie minuten erna ook op een hoogte van 122 meter. Dit is na $15 + 3 = 18$ minuten.

- 13 a** Dit is de tijdsduur tussen bijvoorbeeld twee hoogste punten. Eén ademhaling duurt vijf seconden.
- b** Er zit minimaal 1 liter lucht, en maximaal 4 liter lucht in de longen.
- c** Gemiddeld zit er $\frac{4+1}{2} = 2\frac{1}{2}$ liter lucht in de longen.
- d** De maximale afwijking van dit gemiddelde is $4 - 2\frac{1}{2}$ of $2\frac{1}{2} - 1$, dus $1\frac{1}{2}$ liter.
- 14** De periode is 0,6 seconden. Er zijn dan $60 : 0,6 = 100$ hartslagen per minuut. De grafiek in het voorbeeld hoort niet bij een mens in rust.
- 15** De evenwichtswaarde is gelijk aan $\frac{4+1}{2} = 2\frac{1}{2}$ liter.
De amplitude is gelijk aan $4 - 2\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$ liter.
De periode is 5 seconden.
- 16 a** De evenwichtswaarde is gelijk aan $\frac{4+(-2)}{2} = 1$.
De amplitude is gelijk aan $4 - 1 = 3$.
De hoogste waarde wordt bij $x = -3\frac{1}{2}$ en bij $x = 2\frac{1}{2}$ bereikt. Dit betekent dat de periode gelijk is aan $2\frac{1}{2} - (-3\frac{1}{2}) = 6$.
- b** De evenwichtswaarde is gelijk aan $\frac{1+(-4)}{2} = -1\frac{1}{2}$.
De amplitude is gelijk aan $1 - (-1\frac{1}{2}) = 2\frac{1}{2}$.
De laagste waarde wordt bij $x = -3$ bereikt. De hoogste waarde wordt bij $x = 5$ bereikt. Dit betekent dat de halve periode gelijk is aan $5 - (-3) = 8$, en dat de hele periode gelijk is aan $2 \times 8 = 16$.
- 17 a** Punt *A* is na een kwart van de periode, ofwel na $60 : 4 = 15$ seconden voor het eerst op de hoogte van de as. Punt *A* is na driekwart van de periode weer op deze hoogte. Dit is een halve periode, dus $60 : 2 = 30$ seconden later weer.
- b** De hoogste waarde is 20 meter hoog, de laagste waarde is -20 meter hoog.
De evenwichtswaarde is $\frac{20+(-20)}{2} = 0$ meter hoog.
De amplitude is $20 - 0 = 20$ meter. De straal van het rad is 20 meter.
- c** Na 80 seconden is punt *A* net zo hoog als na $80 - 60 = 20$ seconden.
Punt *A* is dan 10 meter boven de as van het rad.
- d** Punt *A* bevindt zich 10 meter onder de as na 10 seconden en na 50 seconden. Dit is ook het geval elke 60 seconden later.
Vijf mogelijke tijdstippen zijn 10 seconden, 50 seconden, 70 seconden, 110 seconden en 130 seconden.
- e** In 1 minuut legt punt *A* een omtrek van de cirkel af.
 $r = 20$ invullen geeft een afstand van $2 \cdot \pi \cdot 20 \approx 125,7$ meter.
- 18 a** De laagste waterstand (eb) wordt net vóór 4 uur en net ná 16 uur bereikt. Dit betekent dat de periode langer dan twaalf uur is. De dag erna wordt de laagste waterstand dan pas ná 4 uur bereikt, dus op een ander tijdstip.
- b** De periode is ongeveer 12,5 uur. De eerste hoogste waterstand wordt op 10.00 uur bereikt op 12 november. De volgende hoogste waterstanden zijn:
op 12 november: om 22.30 uur
op 13 november: om 11.00 uur en 23.30 uur
op 14 november: om 12.00 uur
op 15 november: om 00.30 uur.
Dit is ook het tijdstip van de eerste hoogwaterstand op die dag.

- X4 a** In $1975 - 1755 = 220$ jaar tijd zijn er 20 perioden. De gemiddelde periode is $220 : 20 = 11$ jaar.
- b** De nieuwe periode begint gelijk met de eerste periode en eindigt na zestien perioden. De nieuwe periode is dan $16 \times 11 = 176$ jaar.
- c** Het aantal zonnevlekken heeft in 1972 een maximum bereikt. Het aantal zonnevlekken bereikt dan een maximum in $1972 + 11 = 1983$ en in $1983 + 11 = 1994$.
1972 komt overeen met de 4e periode vanaf 1755. Dit betekent dat 1994 overeenkomt met de 6e periode vanaf 1755. Het maximum is dan ongeveer 80.

19.4 Exponentiële en logaritmische verbanden

intro Bijvoorbeeld: als je weet hoeveel inwoners besmet zijn, kun je gelijk berekenen hoeveel dagen de griep epidemie al duurt. Of als je wil weten hoelang het duurt totdat een bepaald aantal inwoners besmet is.

- 19 a** $t = 3$ is de oplossing omdat $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$.
- b** Je weet dat $2^3 = 8$ en dat $2^4 = 16$. De oplossing van $2^t = 11$ moet dus ergens tussen 3 en 4 liggen omdat de uitkomst 11 tussen 8 en 16 ligt.
- c** ${}^2\log(11) = \frac{\log(11)}{\log(2)} \approx 3,46$
- d** A $4^t = 12$
 $t = {}^4\log(12) \approx 1,79$
B $3 \cdot 1,2^t = 21$
 $1,2^t = 7$
 $t = {}^{1,2}\log(7) \approx 10,67$
C $0,65^{2t} = 3$
 $2t = {}^{0,65}\log(3)$
 $t = \frac{1}{2} \cdot {}^{0,65}\log(3) \approx -1,28$
D $3,8 \cdot 2,5^t - 1 = 18$
 $3,8 \cdot 2,5^t = 19$
 $2,5^t = 5$
 $t = {}^{2,5}\log(5) \approx 1,76$
- 20 a** In stap 1 zijn links en rechts verwisseld.
In stap 2 zijn er links en rechts 6 afgehaald.
- b** $x = {}^2\log(y - 6)$
- 21 a** $5^t = N$
 $t = {}^5\log(N)$
- b** $2 \cdot 3^t = N$
 $3^t = \frac{1}{2}N$
 $t = {}^3\log\left(\frac{1}{2}N\right)$
- c** $0,1 \cdot 8^{t-6} = N$
 $8^{t-6} = 10N$
 $3^{t+2} = \frac{1}{9}N + 1$
 $t - 6 = {}^8\log(10N)$
 $t = 6 + {}^8\log(10N)$
- d** $9 \cdot 3^{t+2} - 9 = N$
 $9 \cdot 3^{t+2} = N + 9$
 $3^{t+2} = \frac{1}{9}N + 1$
 $t + 2 = {}^3\log\left(\frac{1}{9}N + 1\right)$
 $t = -2 + {}^3\log\left(\frac{1}{9}N + 1\right)$

$$\begin{aligned} \text{e } \frac{1}{3} \cdot 7^t &= 6N - 1 \\ 7^t &= 18N - 3 \\ t &= {}^7\log(18N - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } 10^{1,25t+4} &= N \\ 1,25t + 4 &= \log(N) \\ 1,25t &= -4 + \log(N) \\ t &= -3,2 + 0,8 \cdot \log(N) \end{aligned}$$

22 a De oplossing van de vergelijking ${}^3\log(x) = 2$ is $x = 9$ want $x = 3^2 = 9$.

b Uit ${}^4\log(x) = 3$ volgt $x = 4^3 = 64$.

$$\begin{aligned} \text{c A } {}^5\log(x) &= 3 \\ x &= 5^3 = 125 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{C } \log(2x + 39) &= 2 \\ 2x + 39 &= 10^2 \\ 2x + 39 &= 100 \\ 2x &= 61 \\ x &= 30\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{B } {}^3\log(x + 10) &= 3 \\ x + 10 &= 3^3 \\ x + 10 &= 27 \\ x &= 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D } 2 + {}^2\log(x - 1) &= 7 \\ {}^2\log(x - 1) &= 5 \\ x - 1 &= 2^5 \\ x - 1 &= 32 \\ x &= 33 \end{aligned}$$

23 a In stap 1 zijn links en rechts verwisseld.

In stap 2 zijn er links en rechts 1 opgeteld.

b In stap 3 moet je de regel 'uit ${}^g\log(a) = t$ volgt $a = g^t$ ' gebruiken.

$$\text{c } x = 5^{y+1}$$

$$\begin{aligned} \text{24 a } y &= {}^4\log(x) \\ {}^4\log(x) &= y \\ x &= 4^y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } y &= 6 + \log(x) \\ 6 + \log(x) &= y \\ \log(x) &= y - 6 \\ x &= 10^{y-6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } {}^3\log(x + 5) &= y \\ x + 5 &= 3^y \\ x &= 3^y - 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } y &= 10 - {}^{0,3}\log(6 - x) \\ 10 - {}^{0,3}\log(6 - x) &= y \\ -{}^{0,3}\log(6 - x) &= y - 10 \\ {}^{0,3}\log(6 - x) &= -y + 10 \\ 6 - x &= 0,3^{-y+10} \\ -x &= -6 + 0,3^{-y+10} \\ x &= 6 - 0,3^{-y+10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{25 a } p &= {}^9\log(-q) \\ {}^9\log(-q) &= p \\ -q &= 9^p \\ q &= -9^p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } p &= 4 - 2 \cdot {}^5\log\left(\frac{1}{2}q\right) \\ 4 - 2 \cdot {}^5\log\left(\frac{1}{2}q\right) &= p \\ -2 \cdot {}^5\log\left(\frac{1}{2}q\right) &= -4 + p \\ {}^5\log\left(\frac{1}{2}q\right) &= 2 - \frac{1}{2}p \\ \frac{1}{2}q &= 5^{2-\frac{1}{2}p} \\ q &= 2 \cdot 5^{2-\frac{1}{2}p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } p &= {}^{0,8}\log(q) - 9 \\ {}^{0,8}\log(q) - 9 &= p \\ {}^{0,8}\log(q) &= p + 9 \\ q &= 0,8^{p+9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } p &= \log(3q + 2) \\ \log(3q + 2) &= p \\ 3q + 2 &= 10^p \\ 3q &= 10^p - 2 \\ q &= \frac{1}{3} \cdot 10^p - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } p &= 5 \cdot {}^3\log(2q) \\ 5 \cdot {}^3\log(2q) &= p \\ {}^3\log(2q) &= \frac{1}{5}p \\ 2q &= 3^{\frac{1}{5}p} \\ q &= \frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{1}{5}p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } {}^2\log(pq) &= 1 \\ pq &= 2^1 \\ q &= \frac{2}{p} \end{aligned}$$

- 26 a** 2 dagen, dus $t = \frac{2}{7}$ invullen in de formule.
 $0,79^{\frac{2}{7}} \log\left(\frac{1}{6}L\right) = \frac{2}{7}$
 $\frac{1}{6}L = 0,79^{\frac{2}{7}}$
 $L = 6 \cdot 0,79^{\frac{2}{7}}$
 $L = 5,609\dots$
 Er is nog ongeveer 5,6 liter lucht in de fietsband na 2 dagen.
- b** $0,79^{\log\left(\frac{1}{6}L\right)} = t$
 $\frac{1}{6}L = 0,79^t$
 $L = 6 \cdot 0,79^t$
- c** $L = 6 \times 0,79^{\frac{2}{7}} = 5,609\dots$, de formule klopt.
- 27 a** Een afname van 8% per jaar betekent een groeifactor van 0,92.
 Als er aan het begin N insecten waren, dan zijn er na de halveringstijd $\frac{1}{2}N$ insecten nog aanwezig.
 Je kunt de halveringstijd met de vergelijking $N \cdot 0,92^t = \frac{1}{2}N$ berekenen. Links en rechts door N delen geeft de vergelijking $0,92^t = \frac{1}{2}$.
- b** $t = {}^{0,92}\log\left(\frac{1}{2}\right) = 8,31295\dots$
 De halveringstijd is $12 \times 8,31295\dots \approx 100$ maanden.
- 28 a** $1,2^t = 2$
 $t = {}^{1,2}\log(2) = 3,80178\dots$
 $t = 12 \times 3,80178\dots \times 12 \approx 45,6$ maanden
- b** $0,995^t = \frac{1}{2}$
 $t = {}^{0,995}\log\left(\frac{1}{2}\right) \approx 138,3$ maanden
- c** De groeifactor per vier maanden is $\frac{190}{150}$.
 $\left(\frac{190}{150}\right)^t = 2$
 $t = {}^{\frac{190}{150}}\log(2) = 2,93223\dots$
 $t = 4 \times 2,93223\dots \approx 11,7$ maanden
- 29 a** Je kunt de formule schrijven als $A = 1000 \cdot (0,995^2)^t$.
 Dit is een exponentiële formule met een groeifactor per dag van $0,995^2$.
- b** $(0,995^2)^t = \frac{1}{2}$
 $0,990025^t = \frac{1}{2}$
 $t = {}^{0,990025}\log\left(\frac{1}{2}\right) = 69,141\dots$
 De halveringstijd van de hoeveelheid draaggas is ongeveer 69 dagen.
- X5 a** De groeifactor per 15 jaar is 0,05.
 De groeifactor per jaar is $0,05^{\frac{1}{15}} = 0,818963\dots \approx 0,819$.
- b** $0,818963\dots^t = \frac{1}{2}$
 $t = {}^{0,818963\dots}\log\left(\frac{1}{2}\right) = 3,470\dots$
 Het aantal kuifleeuweriken halveert in ongeveer 3,5 jaar.
- c** Neem aan dat beide broedvogelsoorten N broedvogels hebben aan het begin.
 Als het aantal vogels van soort A meer dan twee keer zo groot is als dat van soort B, dan moet je de ongelijkheid $N \cdot 1,042^t > 2N \cdot 1,016^t$ oplossen.
 $N \cdot 1,042^t = 2N \cdot 1,016^t$
 $1,042^t = 2 \cdot 1,016^t$

Deze vergelijking los je op met de grafische rekenmachine.

Invoer: $y_1 = 1,042^x$ en $y_2 = 2 \times 1,016^x$

Venster: $0 \leq x \leq 40$, $0 \leq y \leq 5$

Optie: snijpunten

De coördinaten van het snijpunt zijn (27,43; 3,09).

Na 28 jaar is het aantal vogels van soort A voor het eerst meer dan twee keer zo groot als dat van soort B.

X6 a Bij het maximale geluidsniveau is $x = 18$ en $P = 100$.

$$a \cdot \log(18 + 1) = 100$$

$$a \cdot \log(19) = 100$$

$$a = \frac{100}{\log(19)} \approx 78,201$$

b $78 \cdot \log(x + 1) = P$

$$\log(x + 1) = \frac{1}{78} \cdot P$$

$$x + 1 = 10^{\frac{1}{78} \cdot P}$$

$$x = 10^{\frac{1}{78} \cdot P} - 1$$

$$n = \frac{1}{78} \approx 0,013 \text{ en } m = -1$$

19.5 Formules herleiden

intro P uitgedrukt in t is een exponentiële formule. In de vorige paragraaf heb je gezien dat als je t dan uitdrukt in P , de bijbehorende formule een logaritmische formule is. Lars heeft een machtsformule gevonden waardoor zijn herleiding niet goed kan zijn.

30 a In stap 1 zijn de haakjes weggewerkt.
In stap 2 zijn gelijksoortige termen bij elkaar genomen.

b $4y = x + 21$

$$y = \frac{1}{4}x + 5\frac{1}{4}$$

c $-2(x + 10) - y = 12x$

$$-2x - 20 - y = 12x$$

$$-y = 14x + 20$$

$$y = -14x - 20$$

31 a $6x + 5y = 14$

$$5y = -6x + 14$$

$$y = -1,2x + 2,8$$

c $6(x - y) - 2(x - 18) = 0$

$$6x - 6y - 2x - 36 = 0$$

$$4x - 6y - 36 = 0$$

$$-6y = -4x + 36$$

$$y = \frac{2}{3}x - 6$$

b $y = \frac{12 - 5x}{-3}$

$$y = -4 + \frac{5}{3}x$$

$$y = 1\frac{2}{3}x - 4$$

d $\frac{1}{4} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{3}y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

$$y = -1\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

32 a $2 + {}^3\log(4s) = R$

$${}^3\log(4s) = R - 2$$

$$4s = 3^{R-2}$$

$$s = \frac{1}{4} \cdot 3^{R-2}$$

b $10 - 8 \cdot 2^s = R$

$$-8 \cdot 2^s = R - 10$$

$$2^s = -\frac{1}{8}R + 1\frac{1}{4}$$

$$s = {}^2\log\left(-\frac{1}{8}R + 1\frac{1}{4}\right)$$

c $6 \cdot \log(4s) - 4,9 = R$

$$6 \cdot \log(4s) = R + 4,9$$

$$\log(4s) = \frac{1}{6}R + \frac{4,9}{6}$$

$$4s = 10^{\frac{1}{6}R + \frac{4,9}{6}}$$

$$s = \frac{1}{4} \cdot 10^{\frac{1}{6}R + \frac{4,9}{6}}$$

d $2,5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^s + 18 = R$

$$2,5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^s = R - 18$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^s = \frac{2}{5}R - 7\frac{1}{5}$$

$$s = {}^{\frac{4}{5}}\log\left(\frac{2}{5}R - 7\frac{1}{5}\right)$$

e $\frac{1}{2} \cdot {}^{1,6}\log(s-3) = R$

$${}^{1,6}\log(s-3) = 2R$$

$$s-3 = 1,6^{2R}$$

$$s = 1,6^{2R} + 3$$

f $5 + 6^{2s+8} = R$

$$6^{2s+8} = R - 5$$

$$2s + 8 = {}^6\log(R - 5)$$

$$2s = -8 + {}^6\log(R - 5)$$

$$s = -4 + \frac{1}{2} \cdot {}^6\log(R - 5)$$

33 a $d = 0$ invullen geeft $P = 100 \cdot 0,75^0 = 100$.

Als de diepte is gehalveerd, is $P = 50$.

$$100 \cdot 0,75^d = 50$$

$$0,75^d = 0,5$$

$$d = {}^{0,75}\log(0,5) = 2,40942\dots$$

Op 2,4 meter diepte is de hoeveelheid daglicht gehalveerd.

b $100 \cdot 0,75^d = P$

$$0,75^d = 0,01P$$

$$d = {}^{0,75}\log(0,01P)$$

c $P = 1$ invullen in de formule van opdracht b geeft

$$d = {}^{0,75}\log(0,01 \cdot 1) = 16,007\dots$$

$$A = 60 + 2 \cdot {}^{0,9}\log(16,007\dots) = 7,360\dots$$

Er zijn dan 7,4 algen per cm^3 .

34 a De variabele t is het grondtal van de macht, niet de exponent.

b In stap 1 zijn links en rechts verwisseld.

In stap 2 is links en rechts gedeeld door 8 (of vermenigvuldigd met $\frac{1}{8}$).

c Er is van de rekenregel $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$ gebruik gemaakt.

d $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2,5}} = 0,43527\dots \approx 0,44$ en $\frac{1}{2,5} = \frac{4}{10} = 0,4$, klopt.

35 a $t^3 = R$

$$t = R^{\frac{1}{3}}$$

$$t = \sqrt[3]{R}$$

c $\frac{4}{9}t^{0,3} = R$

$$t^{0,3} = \frac{9}{4}R$$

$$t = \left(\frac{9}{4}R\right)^{\frac{1}{0,3}}$$

$$t = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{0,3}} \cdot R^{\frac{1}{0,3}}$$

$$t \approx 14,93 \cdot R^{3,33}$$

b $4t^{\frac{1}{8}} = R$

$$t^{\frac{1}{8}} = \frac{1}{4}R$$

$$t = \left(\frac{1}{4}R\right)^8$$

$$t = \left(\frac{1}{4}\right)^8 \cdot R^8$$

$$t = \frac{1}{65536} \cdot R^8$$

d $2t \cdot 4t^3 = R$

$$8t^4 = R$$

$$t^4 = \frac{1}{8}R$$

$$t = \left(\frac{1}{8}R\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$t = \sqrt[4]{\frac{1}{8}R}$$

- 36 a** $G = 40$ invullen geeft $Z = 0,4 \times 40^{0,67} = 4,736... \text{ mL zuurstof per km.}$
De hond heeft $7 \times 4,736... \approx 33,2$ milliliter zuurstof nodig om 7 kilometer af te leggen.
- b** $0,4 \cdot G^{0,67} = Z$
 $G^{0,67} = 2,5Z$
 $G = (2,5Z)^{\frac{1}{0,67}}$
 $G = 2,5^{\frac{1}{0,67}} \cdot Z^{\frac{1}{0,67}}$
 $G \approx 3,926 \cdot Z^{1,49}$
- c** Deze tijger heeft $180 : 15 = 12 \text{ mL zuurstof per km nodig.}$
 $Z = 12$ invullen geeft $G = 3,926 \cdot 12^{1,49} = 159,195...$
 Deze tijger weegt ongeveer 159 kg.

- X7 a** De groeifactor per twee weken is $\frac{21}{4,7}$.
 De groeifactor per week is $\left(\frac{21}{4,7}\right)^{\frac{1}{2}} = 2,11378... \text{ dus } g \approx 2,114.$
 De coördinaten van bijvoorbeeld het punt (8; 4,7) invullen geeft:
 $4,7 = b \cdot 2,114^8$
 $b = \frac{4,7}{2,114^8} \approx 0,0118$
- b** $G = 0,0118 \cdot 2,114^t$
 $0,0118 \cdot 2,114^t = G$
 $2,114^t = \frac{1}{0,0118} G$
 $t = {}^{2,114}\log\left(\frac{1}{0,0118} \cdot G\right)$
 $d \approx 2,11$ en $c = \frac{1}{0,0118} \approx 84,75$
- c** $t = 38$ invullen geeft $G = 0,0118 \cdot 2,114^{38} = 2,66606... \times 10^{10}$
 De foetus zou dan $2,67 \times 10^{10}$ gram wegen en dat is ongeveer 26,7 miljoen kilogram, wat natuurlijk onmogelijk is. Exponentiële groei is dus geen goed model voor de groei van de foetus in de gehele periode.

- X8 a** 1500 meter = 1,5 km
 3 minuten en 26 seconden = $3 \times 60 + 26 = 206$ seconden
 De kilometertijd is dan $\frac{206}{1,5} = 137\frac{1}{3}$ seconden.
- b** $K = 137\frac{1}{3}$ en $d = 1,5$ invullen geeft $137\frac{1}{3} = a \cdot 1,5^{0,07}$.
 $a = \frac{137\frac{1}{3}}{1,5^{0,07}} \approx 133,49$
- c** $d = 42,195$ invullen geeft $K = 133 \cdot 42,195^{0,07} = 172,83031...$
 De eindtijd is dan $42,195 \times 172,83031... \approx 7293$ seconden.
 Het wereldrecord is $2 \times 60 \times 60 + 3 \times 60 + 23 = 7403$ seconden.
 Het wereldrecord volgens de formule wijkt $7403 - 7293 = 110$ seconden af van het wereldrecord.
- d** $133 \cdot d^{0,07} = K$
 $d^{0,07} = \frac{1}{133} K$
 $d = \left(\frac{1}{133} K\right)^{\frac{1}{0,07}}$
 $d = \left(\frac{1}{133}\right)^{\frac{1}{0,07}} \cdot K^{\frac{1}{0,07}}$
 $d \approx 4,56 \times 10^{-31} \cdot K^{14,29}$
- e** $K = 160$ invullen geeft $d = 4,56 \times 10^{-31} \times 160^{14,29} = 14,316...$
 Bij afstanden langer dan 14,32 kilometer is de kilometertijd hoger dan 160 seconden.

19.6 Redeneren met formules

intro Als a heel groot wordt, dan nadert de uitkomst van $\frac{5}{a}$ naar nul. De waarde van G zal dan de grenswaarde $0,015 + 0 = 0,015$ naderen.
In de praktijk betekent dit dat je minstens 0,015 euro per belminuut betaalt.

37 a $t = 0$ invullen geeft $T = 20 - 16 \cdot 0,75^0 = 20 - 16 = 4$.
Op het moment dat de melk uit de koelkast wordt gehaald, heeft het een temperatuur van 4°C .

b

t	$0,75^t$	$16 \cdot 0,75^t$	$20 - 16 \cdot 0,75^t$
0	1	16	4
5	0,2373	3,7969	16,203
10	0,0563	0,9010	19,0990

- c** Als t steeds groter wordt, dan nadert $0,75t$ naar nul, want $0,75 < 1$.
Dan nadert $16 \cdot 0,75^t$ naar $16 \cdot 0 = 0$.
d De temperatuur van de melk nadert op den duur $20 - 0 = 20^\circ\text{C}$.

38 a Als t steeds groter wordt, dan neemt t^2 toe. Daardoor neemt $2t^2$ en ook $7 + 2t^2$ toe. 2 wordt gedeeld door een steeds groter getal en daardoor neemt $\frac{2}{7 + 2t^2}$ af en nadert naar 0. De waarde van P zal dan naderen naar $0 - 11 = -11$.

De waarde van P neemt af en de grenswaarde is -11 .

- b** Als t steeds groter wordt, dan neemt $0,6t$ af en nadert naar 0. De waarde van P zal dan naderen naar $2 + 0 = 2$. De waarde van P neemt af en de grenswaarde is 2.
c Als t steeds groter wordt (als $t > 1$), dan neemt $^{0,5}\log(t)$ af en wordt steeds negatiever. Daardoor worden $3 \cdot ^{0,5}\log(t)$ en ook $2 + 3 \cdot ^{0,5}\log(t)$ steeds negatiever. De waarde van $\frac{14}{2 + 3 \cdot ^{0,5}\log(t)}$ is altijd negatief. 14 wordt door een getal gedeeld dat steeds verder van 0 ligt. De waarde van P zal naderen naar 0. De waarde van P neemt toe en de grenswaarde is 0.
d Als t steeds groter wordt, dan neemt $1,2t$ toe. 2 wordt gedeeld door een steeds groter getal en daardoor neemt $\frac{2}{1,2^t}$ af en nadert 0. De waarde van P zal dan naderen naar $3 + 0 = 3$. De waarde van P neemt af en de grenswaarde is 3.
e Als t steeds groter wordt, dan wordt $0,02t$ ook steeds groter. $0,6^{0,02t}$ nadert dan naar 0 omdat $0,6 < 1$. Daardoor neemt $1 - 0,6^{0,02t}$ toe en nadert $1 - 0 = 1$. De waarde van P zal dan naderen naar $64 \times 1 = 64$. De waarde van P neemt toe en de grenswaarde is 64.
f Als t steeds groter wordt, dan neemt t^3 toe. Daardoor neemt $t^3 + 7$ ook toe. -8 wordt gedeeld door een steeds groter getal en daardoor nadert $\frac{-8}{t^3 + 7}$ naar 0. De waarde van P neemt toe (steeds minder negatief) en de grenswaarde is 0.

39 a Je kunt de formule schrijven als $y = 12 \cdot \frac{1}{x^{1,3}}$ ofwel $y = \frac{12}{x^{1,3}}$

Als x steeds groter wordt, dan neemt $x^{1,3}$ toe. 12 wordt gedeeld door een steeds groter getal en daardoor neemt $\frac{12}{x^{1,3}}$ af en nadert naar 0.

De waarde van y neemt af en de grenswaarde is 0.

b Je kunt de formule schrijven als $y = 4 - 6 \cdot \frac{1}{0,85^x}$ ofwel $y = 4 - \frac{6}{0,85^x}$

Als x steeds groter wordt, dan neemt $0,85^x$ af. 6 wordt gedeeld door een steeds kleiner getal en daardoor neemt $\frac{6}{0,85^x}$ toe. Er wordt een steeds groter getal van 4 afgetrokken. De waarde van y neemt af en er is geen grenswaarde.

c Je kunt de formule schrijven als $y = 6 + 4 \cdot \frac{1}{x^2}$ ofwel $y = 6 + \frac{4}{x^2}$

Als x steeds groter wordt, dan neemt x^2 toe. 4 wordt gedeeld door een steeds groter getal en daardoor neemt $\frac{4}{x^2}$ af en nadert naar 0. De waarde van y zal dan naderen naar $6 + 0 = 6$.

De waarde van y neemt af en de grenswaarde is 6.

40 a De concentratie is dan $500 - 500 \cdot 0,96^0 = 0$ mol per dm^3 .

b Als t steeds groter wordt, dan neemt $0,96^t$ af want $0,96 < 1$ en nadert 0. Daardoor neemt $500 \cdot 0,96^t$ af en nadert ook naar 0. Er wordt steeds minder van 500 afgetrokken waardoor de waarde van C zal toenemen. De concentratie van de stof neemt dus toe.

c De waarde van C zal dan naderen naar $500 - 0 = 500$. Er zal op den duur 500 mol per dm^3 aanwezig zijn.

41 a $t = 0$ invullen geeft $A = 5 \times (2,2 + 5,8 \times 0,72^0) = 40$

b Als t steeds groter wordt, dan neemt $0,72^t$ af want $0,72 < 1$. Daardoor neemt $5,8 \cdot 0,72^t$ ook af. Zowel $2,2 + 5,8 \cdot 0,72^t$ als $5 \cdot (2,2 + 5,8 \cdot 0,72^t)$ zullen dan ook afnemen. De waarde van A neemt dus af als t steeds groter wordt.

c Als t steeds groter wordt, dan nadert $0,72^t$ naar 0. Daardoor nadert $5,8 \cdot 0,72^t$ ook naar 0. Dan zal $2,2 + 5,8 \cdot 0,72^t$ naderen naar $2,2 + 0 = 2,2$ en de waarde van A zal dan naderen naar $5 \times 2,2 = 11$. De doelstelling wordt dus niet gehaald.

42 a De tiende week is van $t = 9$ tot $t = 10$.

$t = 9$ invullen geeft $L = \frac{400}{1 + 399 \cdot 0,55^9} = 140,967\dots$

$t = 10$ invullen geeft $L = \frac{400}{1 + 399 \cdot 0,55^{10}} = 198,940\dots$

De zonnebloem is $198,940\dots - 140,967\dots \approx 58$ cm gegroeid in de tiende week.

b Als t steeds groter wordt, dan neemt $0,55^t$ af want $0,55 < 1$. Daardoor neemt $399 \cdot 0,55^t$ en ook $1 + 399 \cdot 0,55^t$ af. 400 wordt gedeeld door een steeds kleiner getal en daardoor neemt de waarde van L toe.

c De noemer nadert naar $1 + 0 = 1$. De waarde van L zal dan naderen naar $\frac{400}{1} = 400$. De grenswaarde van L is 400.

d De zonnebloem zal altijd kleiner dan 400 cm blijven.

- X9 a** $P = 190$ en $v = 9,2$ invullen geeft $190 = (k \cdot 9,2^2 + 4) \cdot 9,2$
 $(84,64k + 4) \cdot 9,2 = 190$
 $84,64k + 4 = 20,652\dots$
 $84,64k = 16,652\dots$
 $k = 0,196\dots$ dus $k \approx 0,2$
- b** Als k kleiner wordt, dan neemt $k \cdot v^2$ af. Daardoor neemt $k \cdot v^2 + 4$ af en $(k \cdot v^2 + 4) \cdot v$ ook. De waarde van P neemt dan ook af.
 Er is dan minder vermogen nodig om een bepaalde snelheid te halen.
- c** $k = 0,23$ en $P = 250$ invullen geeft $250 = (0,23v^2 + 4) \cdot v$
 Invoer: $y_1 = (0,23x^2 + 4)x$ en $y_2 = 250$
 Venster: $0 \leq x \leq 20$, $0 \leq y \leq 500$
 Optie: snijpunt
 De coördinaten van het snijpunt zijn $(9,72; 250)$.
 Hij kan 9,72 m/s halen. Dit is gelijk aan $9,72 \times 3,6 \approx 35$ km per uur.
- d** $k = 0,75 \times 0,23 = 0,1725$
 $250 = (0,1725v^2 + 4) \cdot v$
 Invoer: $y_1 = (0,1725x^2 + 4)x$ en $y_2 = 250$
 Venster: $0 \leq x \leq 20$, $0 \leq y \leq 500$
 Optie: snijpunt
 De coördinaten van het snijpunt zijn $(10,63; 250)$.
 Zijn maximaal haalbare snelheid is 10,63 m/s. Zijn maximaal haalbare snelheid neemt met $\frac{10,63 - 9,72}{9,72} \times 100\% \approx 9,4\%$ toe.
- X10 a** De groeifactor per 43 maanden is $\frac{244}{5,5}$
 De groeifactor per maand is $\left(\frac{244}{5,5}\right)^{\frac{1}{43}} = 1,09220\dots$
 Het groeipcentage per maand is 9,2%.
- b** De toename van het aantal gebruikers tussen 1 juli 2009 en 1 augustus 2010 is 493 miljoen – 244 miljoen = 249 miljoen. De lengte van die periode is 13 maanden. De gemiddelde toename is daarom 249 miljoen: 13 = 19,153... miljoen per maand.
 1 december 2013 is 40 maanden na 1 augustus 2010.
 Het aantal actieve gebruikers op 1 december 2013 zou naar schatting $493 \text{ miljoen} + 40 \times 19,153\dots \text{ miljoen} \approx 1259$ miljoen zijn.
- c** Als t steeds groter wordt, dan neemt $0,926^t$ af want $0,926 < 1$ en nadert 0. Daardoor neemt $310 \cdot 0,926^t$ af en nadert naar $310 \cdot 0 = 0$.
 $5 + 310 \cdot 0,926^t$ neemt dan ook af en nadert naar $5 + 0 = 5$.
 4500 wordt gedeeld door een steeds kleiner getal en daardoor neemt $\frac{4500}{5 + 310 \cdot 0,926^t}$ toe. De waarde van A zal dan naderen naar $\frac{4500}{5 + 0} = 900$.
 De waarde van A neemt toe en de grenswaarde is 900.
 Het aantal actieve gebruikers neemt dus toe en dit aantal nadert 900 miljoen.

19.7 Gemengde opdrachten

- 43 a** De grafiek gaat onder andere door de punten $(44, 30)$ en $(89, 123)$.
 $89 : 44 \approx 2$ en $123 : 30 \approx 4$.
 Er komt niet steeds hetzelfde getal uit, dus is er geen recht evenredig verband tussen v en r .

- b** Vul bijvoorbeeld de coördinaten van het punt (89, 123) in.

$$c \cdot 89^{2,003} = 123$$

$$c \cdot 8028,384... = 123$$

$$c \approx 0,02$$

- c** $r = 0,02 \cdot v^{2,003}$

$$0,02 \cdot v^{2,003} = r$$

$$v^{2,003} = 50r$$

$$v = (50r)^{\frac{1}{2,003}}$$

$$v = 50^{\frac{1}{2,003}} \cdot r^{\frac{1}{2,003}}$$

$$v \approx 7,05r^{0,50}$$

- 44 a** De evenwichtswaarde is gelijk aan $\frac{130 + 90}{2} = 110$.

De amplitude is gelijk aan $130 - 110 = 20$.

De hoogste waarde wordt bij $t = 0,2$ en bij $t = 1,0$ bereikt. Dit betekent dat de periode gelijk is aan $1,0 - 0,2 = 0,8$.

- b** De hoogste waarde wordt bij $t = 0,2$ bereikt. De t -coördinaat van punt A is $0,2 - 0,07 = 0,13$ kleiner. Dat betekent dat t -coördinaat van punt B gelijk is aan $0,2 + 0,13 = 0,33$. De t -coördinaat van punt C is één periode later dan die van punt A , dus $0,07 + 0,8 = 0,87$. De t -coördinaat van punt D is één periode later dan die van punt B , dus $0,33 + 0,8 = 1,13$.

De coördinaten van punt B zijn (0,33; 120), van punt C (0,87; 120) en van punt D (1,13; 120).

- 45 a** De groeifactor per 20 jaar is $\frac{505}{415}$.

De groeifactor per jaar is $\left(\frac{505}{415}\right)^{\frac{1}{20}} \approx 1,01$.

- b** De toename van de bevolkingsdichtheid van 2015 tot 2020 is $594 - 561 = 33$.

De lengte van die periode is 5 jaar. De gemiddelde toename van de bevolkingsdichtheid is $33 : 5 = 6,6$ per jaar.

In 2028 zal de bevolkingsdichtheid $594 + 8 \times 6,6 \approx 647$ zijn.

Onderzoekopdrachten

- 46 a** Als t steeds groter wordt, dan neemt $0,47^t$ af want $0,47 < 1$ en nadert 0.

Daardoor neemt $28 \cdot 0,47^t$ en ook $2 + 28 \cdot 0,47^t$ af en nadert naar $2 + 0 = 2$.

Op den duur zal $\frac{165}{2} = 82,5\%$ van de vakanties via internet worden geboekt.

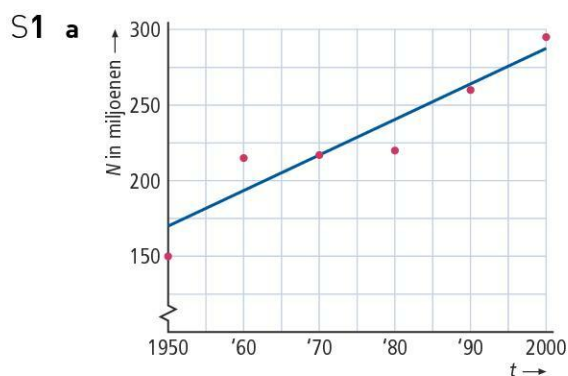
- b** Maak een tabel met waarden van P en bepaal wanneer P voor het eerst minder dan 1 is toegenomen.

t	8	9	10
P	79,84	81,23	81,90
toename	—	1,39	0,67

Bij $t = 10$ stijgt het aantal internetboekingen niet noemenswaardig (toename minder dan 1). Dit is in het jaar 2010.

- 47** $v = 20$ invullen geeft $20 = \sqrt{\frac{G}{0,03675 \cdot S}}$
- $$400 = \frac{G}{0,03675 \cdot S}$$
- $$14,7 \cdot S = G \text{ dus } G = 14,7 \cdot S \text{ (of } S \approx 0,068 \cdot G)$$
- Er is een recht evenredig verband tussen G en S .

Samenvatting



- b** De trendlijn gaat door de punten (1950, 170) en (1995, 275).

$$a = \frac{275 - 170}{1995 - 1950} = 2\frac{1}{3} \text{ dus } N = 2\frac{1}{3} \cdot t + b$$

De coördinaten van het punt (1950, 170) invullen geeft

$$170 = 2\frac{1}{3} \cdot 1950 + b.$$

$$170 = 4550 + b \text{ dus } b = -4380$$

Een formule bij de trendlijn is $N = 2\frac{1}{3}t - 4380$.

- c** Volgens de grafiek waren er 215 miljoen inwoners in 1960.

Volgens de trendlijn waren er $2\frac{1}{3} \cdot 1960 - 4380 = 193\frac{1}{3}$ miljoen inwoners in 1960.

Het aantal inwoners wijkt $\frac{215 - 193\frac{1}{3}}{193\frac{1}{3}} \times 100\% \approx 11,2\%$ af van de trendlijn.

- S2 a** Tabel A:

$$4 : 2 = 2; 10 : 5 = 2; 20 : 10 = 2; 30 : 15 = 2 \text{ en } 100 : 50 = 2$$

x en y zijn evenredig want er geldt steeds $\frac{y}{x} = 2$ ofwel $y = 2x$.

Tabel B:

$$3 \times 80 = 240; 6 \times 40 = 240; 15 \times 16 = 240; 30 \times 8 = 240 \text{ en } 60 \times 4 = 240$$

p en q zijn omgekeerd evenredig want er geldt steeds $p \cdot q = 240$ ofwel

$$q = \frac{240}{p}$$

- b** Bij tabel A hoort de formule $y = 2x$.

Bij tabel B hoort de formule $q = \frac{240}{p}$

S3 De evenwichtswaarde is gelijk aan $\frac{2,25 + -1,75}{2} = 0,25$ meter.
 De amplitude is gelijk aan $2,25 - 0,25 = 2$ meter.
 De hoogste waarde wordt bij 10,5 uur en 23 uur bereikt. Dit betekent dat de periode gelijk is aan $23 - 10,5 = 12,5$ uur.

S4 De afname van het aantal getrouwde stellen tussen 1 januari 2010 en 1 januari 2021 is $4895 - 4723 = 172$. De lengte van die periode is 11 jaar. De gemiddelde afname is $172 : 11 = 15,636\dots$ getrouwde stellen per jaar. Op 1 januari 2018 waren er naar schatting $4895 - 8 \times 15,636\dots \approx 4770$ getrouwde stellen. Op 1 januari 2026 waren er naar schatting $4895 - 16 \times 15,636\dots \approx 4645$ getrouwde stellen.

S5 a ${}^6\log(p) - 8,5 = q$
 ${}^6\log(p) = q + 8,5$
 $p = 6^{q+8,5}$

b $-4 \cdot 9^p + 6 = q$
 $-4 \cdot 9^p = q - 6$
 $9^p = -\frac{1}{4}q + 1\frac{1}{2}$
 $p = {}^9\log\left(-\frac{1}{4}q + 1\frac{1}{2}\right)$

c $15 + 4 \cdot {}^9\log(p+2) = q$
 $4 \cdot {}^9\log(p+2) = q - 15$
 ${}^9\log(p+2) = \frac{1}{4}q - 3\frac{3}{4}$
 $p+2 = 9^{\frac{1}{4}q - 3\frac{3}{4}}$
 $p = 9^{\frac{1}{4}q - 3\frac{3}{4}} - 2$

d $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-p} - 14 = q$
 $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-p} = q + 14$
 $1 - p = {}^{\frac{1}{3}}\log(q + 14)$
 $-p = -1 + {}^{\frac{1}{3}}\log(q + 14)$
 $p = 1 - {}^{\frac{1}{3}}\log(q + 14)$

e ${}^{0,3}\log(6p+2) = q$
 $6p+2 = 0,3^q$
 $6p = 0,3^q - 2$
 $p = \frac{1}{6} \cdot 0,3^q - \frac{1}{3}$

f $1,9^{\frac{1}{4}p-9} + 4 = q$
 $1,9^{\frac{1}{4}p-9} = q - 4$
 $\frac{1}{4}p - 9 = {}^{1,9}\log(q - 4)$
 $\frac{1}{4}p = 9 + {}^{1,9}\log(q - 4)$
 $p = 36 + 4 \cdot {}^{1,9}\log(q - 4)$

S6 a $6(x+2) + 9 = y - 3$
 $6x + 12 + 9 = y - 3$
 $6x = y - 24$
 $x = \frac{1}{6}y - 4$

b $1,1 \cdot x^{0,9} = y$
 $x^{0,9} = \frac{1}{1,1}y$
 $x = \left(\frac{10}{11}y\right)^{\frac{1}{0,9}}$
 $x = \left(\frac{10}{11}\right)^{\frac{1}{0,9}} \cdot y^{\frac{1}{0,9}}$
 $x \approx 0,90 \cdot y^{1,11}$

c $\frac{1}{6} \cdot x^7 = y$
 $x^7 = 6y$
 $x = (6y)^{\frac{1}{7}}$
 $x = \sqrt[7]{6y}$

d $\frac{4x-12}{3} + 10 = y$
 $\frac{4}{3}x - 4 + 10 = y$
 $\frac{4}{3}x = y - 6$
 $x = \frac{3}{4}y - 4\frac{1}{2}$

S7 a Als t steeds groter wordt, dan neemt $0,8^t$ af want $0,8 < 1$ en nadert naar 0. Daardoor neemt $6 \cdot 0,8^t$ af en nadert ook naar 0. En $5 + 6 \cdot 0,8^t$ nadert naar $5 + 0 = 5$. De waarde van N neemt af en de grenswaarde is 5.

- b** Als t steeds groter wordt, dan neemt t^2 toe. 8 wordt gedeeld door een steeds groter getal en daardoor neemt $\frac{8}{t^2}$ af en nadert naar 0. De waarde van N zal dan naderen naar $-10 + 0 = -10$.
De waarde van N neemt af en de grenswaarde is -10 .
- c** Als t steeds groter wordt, dan neemt $t + 9$ toe. Daardoor neemt ${}^3\log(t + 9)$ ook toe. Er zal dan een steeds groter getal van 9 afgetrokken worden.
De waarde van N neemt af en er is geen grenswaarde.
- d** Als t steeds groter wordt, dan neemt 3^t toe. Daardoor neemt $3^t + 8$ ook toe.
6 wordt door een steeds groter getal gedeeld en daardoor neemt $\frac{6}{3^t + 8}$ af en nadert naar 0. De waarde van N zal dan naderen naar $33 + 0 = 33$.
De waarde van N neemt af en de grenswaarde is 33.

Test jezelf

- T1 a** $-15 + {}^{1,2}\log(t) = N$
 ${}^{1,2}\log(t) = N + 15$
 $t = 1,2^{N+15}$
- b** $\frac{2}{3} \cdot t^4 = N$
 $t^4 = \frac{3}{2}N$
 $t = \left(\frac{3}{2}N\right)^{\frac{1}{4}}$
 $t = \sqrt[4]{\frac{3}{2}N}$
- c** $18 - 3(t + 8) + 4t = N$
 $18 - 3t - 24 + 4t = N$
 $t = N + 6$
- d** $8 + 6^{t+4} = N$
 $6^{t+4} = N - 8$
 $t + 4 = {}^6\log(N - 8)$
 $t = -4 + {}^6\log(N - 8)$
- e** $\log(t - 9) - 3 = N$
 $\log(t - 9) = N + 3$
 $t - 9 = 10^{N+3}$
 $t = 9 + 10^{N+3}$
- f** $-4 \cdot 3^{8t-9} + 7 = N$
 $-4 \cdot 3^{8t-9} = N - 7$
 $3^{8t-9} = -\frac{1}{4}N + 1\frac{3}{4}$
 $8t - 9 = {}^3\log\left(-\frac{1}{4}N + 1\frac{3}{4}\right)$
 $8t = 9 + {}^3\log\left(-\frac{1}{4}N + 1\frac{3}{4}\right)$
 $t = 1\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot {}^3\log\left(-\frac{1}{4}N + 1\frac{3}{4}\right)$
- T2 a** De toename van het gemiddeld gewicht van 3 tot 4 jaar is $17,2 - 14,9 = 2,3$ kg.
 De lengte van die periode is 1 jaar = 12 maanden.
 De gemiddelde toename is $2,3 : 12 = 0,191\dots$ kg per maand.
 Het gemiddelde gewicht van een kind van 3 jaar en 9 maanden is
 $14,9 + 9 \times 0,191\dots = 16,625$ kg $\approx 16,6$ kg.
- b** De toename van het gemiddeld gewicht van 4 tot 5 jaar is $19,5 - 17,2 = 2,3$ kg.
 De lengte van die periode is 1 jaar.
 16 jaar is 11 jaar na vijf jaar. Het gemiddelde gewicht van een kind van 16 jaar is $19,5 + 11 \times 2,3 = 44,8$ kg.
- c** Een kind van 16 jaar weegt meer dan 44,8 kg. Het gewicht van een kind neemt niet heel lang lineair toe.
- T3 a** Als je het te betalen bedrag deelt door het gewicht van het gft-afval dan komt daar altijd hetzelfde bedrag uit, namelijk €0,25. Dit is namelijk de prijs per kg gft-afval.

- b** Een formule is $B = 0,25g + 0,45r + 164$.
- c** $r = 435$ invullen geeft $B = 0,25g + 0,45 \times 435 + 164$.
 $0,25g + 0,45 \times 435 + 164 = B$
 $0,25g + 359,75 = B$
 $0,25g = B - 359,75$
 $g = 4B - 1439$

T4 a De evenwichtswaarde is gelijk aan $\frac{0,7 + -0,7}{2} = 0$ mm.

De amplitude is gelijk aan $0,7 - 0 = 0,7$ mm.

De laagste waarde wordt bij $0,1$ ms en $1,7$ ms bereikt. Dit betekent dat de periode gelijk is aan $1,7 - 0,1 = 1,6$ ms.

- b** De amplitude van de groene grafiek is $0,5$ mm. Dit is kleiner dan de amplitude van de rode grafiek. De stemvork die bij de groene grafiek hoort klinkt zachter dan de stemvork die bij de rode grafiek hoort.
- c** De rode grafiek heeft een periode van $1,6$ ms. De bijbehorende frequentie is $1000 : 1,6 = 625$ trillingen per seconde.
 De hoogste waarde van de groene grafiek wordt bij $0,45$ ms en $2,2$ ms bereikt. Dit betekent dat de periode van deze grafiek gelijk is aan $2,2 - 0,45 = 1,75$ ms. De bijbehorende frequentie is $1000 : 1,75 \approx 571$ trillingen per seconde. Dit is minder dan de stemvork die bij de rode grafiek hoort.
 De stemvork met de hoogste toon hoort bij de rode grafiek.

T5 a $t = 0$ invullen geeft $G = \frac{1900}{1,3 + 62 \cdot 0,68^0} = 30,015\dots$

Het startgewicht is ongeveer 30 gram.

- b** Als t steeds groter wordt, dan neemt $0,68^t$ af want $0,68 < 1$ en nadert 0 .
 Daardoor neemt $62 \cdot 0,68^t$ en ook $1,3 + 62 \cdot 0,68^t$ af. 1900 wordt gedeeld door een steeds kleiner getal en daardoor neemt $\frac{1900}{1,3 + 62 \cdot 0,68^t}$ toe. De waarde van G neemt toe; dat betekent dat het gewicht toeneemt in de tijd.
- c** $0,68^t$ nadert naar 0 , en $62 \cdot 0,68^t$ daardoor ook. De waarde van de noemer zal dan naderen naar $1,3 + 0 = 1,3$ en G nadert naar $\frac{1900}{1,3} = 1461,538\dots$.
 De grenswaarde van het gewicht van courgettes is ongeveer $1461,5$ gram.

T6 a Dan is $0,8^t = \frac{1}{2}$.

$$t = {}^{0,8}\log\left(\frac{1}{2}\right) = 3,106\dots$$

De beginhoeveelheid is na ongeveer $3,1$ jaar gehalveerd.

b $600 \cdot 0,8^t = A$
 $0,8^t = \frac{1}{600} A$

$$t = {}^{0,8}\log\left(\frac{1}{600} A\right)$$

- c** Als de beginhoeveelheid gehalveerd is, is $A = \frac{1}{2} \times 600 = 300$.

$$t = {}^{0,8}\log\left(\frac{1}{600} \times 300\right) = 3,106\dots$$

Het antwoord van opdracht a klopt.

- T7 a** De vier getekende punten voor waarden van L van 0 tot 100 liggen op een rechte lijn door de oorsprong.
- b** Als $L = 100$, is $E = 46$. Dan is $\frac{E}{L} = \frac{46}{100}$. Een formule voor het verband tussen E en L is $\frac{E}{L} = 0,46$ ofwel $E = 0,46L$.
- c** $L = 100$ invullen geeft $E = 64 \times (1 - 0,6^{0,02 \times 100}) = 40,96$.
Het aantal volgens de formule wijkt $\frac{46 - 40,96}{46} \times 100\% \approx 11,0\%$ af van het werkelijke aantal.
- d** Als L steeds groter wordt, dan neemt $0,02L$ toe. Daardoor neemt $0,6^{0,02L}$ af want $0,6 < 1$ en nadert naar 0. De waarde van E nadert dan $64 \times (1 - 0) = 64$. De grenswaarde van het aantal larven met eitjes is 64.

1 a Als $x = 1$ dan is $y = \left(3 - \frac{1}{2} \cdot 1\right)^2 = \left(2\frac{1}{2}\right)^2 = 6\frac{1}{4}$.

Als $x = 4$ dan is $y = \left(3 - \frac{1}{2} \cdot 4\right)^2 = 1^2 = 1$.

b $\Delta y = 1 - 6\frac{1}{4} = -5,25$

De gemiddelde verandering over het interval $[1, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-5,25}{4 - 1} = -1,75$.

2 a De grafiek is afnemend stijgend tussen 0 en 30 eenheden.

b $q = 30$ invullen in de formule van TO geeft $TO = 30 \cdot 30 - \frac{1}{2} \cdot 30^2 = 450$.

$q = 40$ invullen in de formule van TO geeft $TO = 30 \cdot 40 - \frac{1}{2} \cdot 40^2 = 400$.

De gemiddelde opbrengst over het interval $[30, 40]$ is

$$\frac{TO(40) - TO(30)}{40 - 30} = \frac{400 - 450}{10} = -5 \text{ euro per verkochte eenheid.}$$

c Vanwege symmetrie is de gemiddelde opbrengst over het interval $[20, 30]$ gelijk aan 5 euro per verkochte eenheid.

3 a Bij 13 ingezette machines geldt $R = -13^3 + 25 \cdot 13^2 + 49 \cdot 13 = 2665$.

Bij 15 ingezette machines geldt $R = -15^3 + 25 \cdot 15^2 + 49 \cdot 15 = 2985$.

Bij 16 ingezette machines geldt $R = -16^3 + 25 \cdot 16^2 + 49 \cdot 16 = 3088$.

Als twee machines extra in bedrijf worden genomen, neemt de weekopbrengst toe met $2\,985\,000 - 2\,665\,000 = \text{€}320.000, -$.

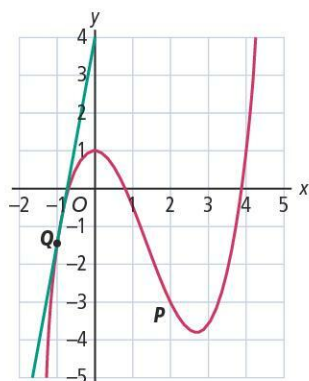
Als alle machines draaien, neemt de weekomzet toe met $3\,088\,000 - 2\,665\,000 = \text{€}423.000, -$.

b $\frac{\Delta R}{\Delta Q}$ over interval $[13, 15]$ is $\frac{320}{15 - 13} = 160$ duizend euro per machine.

Over interval $[13, 16]$ is dat $\frac{423}{16 - 13} = 141$ duizend euro per machine.

c De praktische betekenis van $\frac{\Delta R}{\Delta Q}$ is de gemiddelde toename van de weekomzet per extra machine. De 160 betekent dus dat de weekomzet gemiddeld met € 160.000,- per extra machine toeneemt als het aantal ingezette machines stijgt van 13 naar 15. Op dezelfde manier betekent de 141 dat de weekomzet gemiddeld met € 141.000,- per extra machine toeneemt als het aantal ingezette machines stijgt van 13 naar 16.

4 Teken een raaklijn in het punt Q .

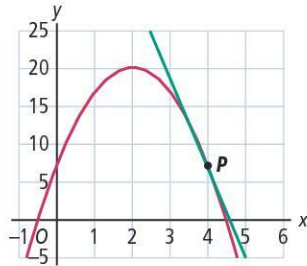


De raaklijn gaat door de punten $(0, 4)$ en $(-1\frac{1}{2}, -5)$.

De helling van de raaklijn is $\frac{4 - (-5)}{0 - (-1\frac{1}{2})} = \frac{9}{1\frac{1}{2}} = 6$.

De helling van de grafiek in punt Q is ongeveer 6.

- 5 a** Teken een raaklijn in het punt P .

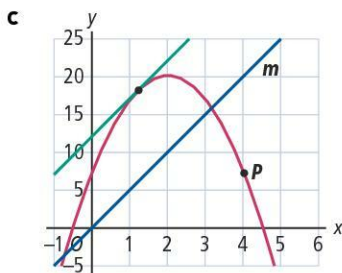


De raaklijn gaat door de punten $(2\frac{1}{2}, 25)$ en $(5, -5)$.

De helling van de raaklijn is $\frac{-5 - 25}{5 - 2\frac{1}{2}} = \frac{-30}{2\frac{1}{2}} = -12$.

De helling van de grafiek in punt Q is ongeveer -12 .

- b** Vanwege symmetrie is de helling van de grafiek in het punt met $x = 0$ ongeveer 12.



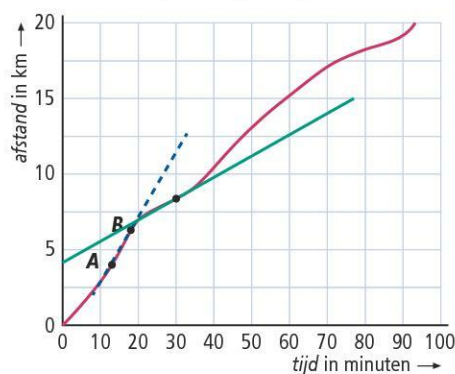
- d** Zie het assenstelsel bij opdracht c.

De paarse lijn heeft dezelfde helling als lijn m en raakt de grafiek. De coördinaten van het punt van de gegeven grafiek waarin de helling gelijk is aan de helling van lijn m zijn ongeveer $(1\frac{1}{5}, 18)$.

- 6 a** De lijn gaat ongeveer door $(8, 2\frac{1}{2})$ en $(40, 13)$. De benadering van de

snelheid van Ineke op dat moment is $\frac{13 - 2\frac{1}{2}}{40 - 8} \approx 0,33$ km per minuut, ofwel $0,33 \times 60 = 20$ km per uur.

- b** Teken in het punt op de grafiek met $t = 30$ een raaklijn.



De lijn gaat ongeveer door (0, 4) en (75, 15). De benadering van de snelheid van Ineke op het moment $t = 30$ is $\frac{15 - 4}{75 - 0} = 0,146\dots$ km per minuut, ofwel $0,146\dots \times 60 = 8,8$ km per uur. $0,146\dots$ km per minuut is gelijk aan $146,666\dots$ meter per minuut en dat is ongeveer 2,4 meter per seconde.

Formules herleiden

7 a $5x + 2y + 8 = 0$

$$2y = -5x - 8$$

$$y = -2\frac{1}{2}x - 4$$

c $-2(3 - x^2 + y) = y + x^2$

$$-6 + 2x^2 - 2y = y + x^2$$

$$-3y = -x^2 + 6$$

$$y = \frac{1}{3}x^2 - 2$$

b $2(y + 5) = x$

$$y + 5 = \frac{1}{2}x$$

$$y = \frac{1}{2}x - 5$$

d $2(x + 2y) - (2 - x) = y$

$$2x + 4y - 2 + x = y$$

$$3y = -3x + 2$$

$$y = -x + \frac{2}{3}$$

8 De formule $E_b = 33,6 \cdot G$ substitueren in $T = 0,000128 \cdot (5000 - E_b)$:

$$T = 0,000128 \cdot (5000 - 33,6 \cdot G)$$

$$T = 0,64 + 0,0043008 \cdot G \text{ ofwel}$$

$$T = 0,0043008 \cdot G + 0,64$$

9 a $a + 1 = \frac{7}{2b}$

$$2b(a + 1) = 7$$

$$2b = \frac{7}{a + 1}$$

$$b = \frac{7}{2a + 2}$$

b $\frac{5}{b + 3} = \frac{a - 2}{10}$

$$(a - 2)(b + 3) = 5 \cdot 10$$

$$b + 3 = \frac{50}{a - 2}$$

$$b = \frac{50}{a - 2} - 3$$

c $\frac{5}{b} = \frac{-2}{4 - a}$

$$-2b = 5(4 - a)$$

$$-2b = 20 - 5a$$

$$b = -10 + 2\frac{1}{2}a$$

d $\frac{3}{2b} - 5 = 4 - 6a$

$$\frac{3}{2b} = 9 - 6a$$

$$2b(9 - 6a) = 3$$

$$2b = \frac{3}{9 - 6a}$$

$$b = \frac{3}{18 - 12a}$$

$$b = \frac{1}{6 - 4a}$$

- 10 a** $q = -\sqrt{2p+5}$
 $q^2 = 2p+5$
 $-2p = -q^2+5$
 $p = \frac{1}{2}q^2 - 2\frac{1}{2}$
- b** $2q-1 = \sqrt{2p-6}$
 $(2q-1)^2 = 2p-6$
 $2p-6 = (2q-1)^2$
 $2p = (2q-1)^2 + 6$
 $p = \frac{1}{2}(2q-1)^2 + 3$
- c** $6 = 3\sqrt{p \cdot q} - 3$
 $3\sqrt{p \cdot q} = 9$
 $9pq = 81$
 $pq = 9$
 $p = \frac{9}{q}$
- d** $5\sqrt{p+2} = \sqrt{q}$
 $25(p+2) = q$
 $p+2 = \frac{1}{25}q$
 $p = \frac{1}{25}q - 2$

- 11 a** $h = 63$ invullen in de formule geeft
 $K = \sqrt{12,7 \cdot 63} \approx 28,3$
 Als je 63 m hoog staat, is de kijkafstand ongeveer 28,3 km.
- b** De op te lossen vergelijking is $\sqrt{12,7 \cdot h} = 34$.
 $12,7h = 1156$
 $h = \frac{1156}{12,7} = 91,023\dots$
 Op een hoogte van 91 m kun je 34 km ver kijken.
- c** $K = \sqrt{12,7 \cdot h}$
 $K^2 = 12,7 \cdot h$
 $h = \frac{K^2}{12,7}$ ofwel $h = \frac{1}{12,7} K^2$ ofwel $h = \frac{10}{127} K^2$.

Rijen

- 12 a** Een recursieve formule bij rij u is $u(n+1) = u(n) + 5$ met $u_0 = 12$.
 Een directe formule bij rij u is $u(n) = 12 + 5n$.
 Een recursieve formule bij rij v is $v(n+1) = v(n) - 3$ met $v_0 = 20$.
 Een directe formule bij rij v is $v(n) = 20 - 3n$.
- b** De tiende term van rij u is $u(9) = 12 + 5 \cdot 9 = 57$.
 De tiende term van rij v is $v(9) = 20 - 3 \cdot 9 = -7$.
- 13 a** Een recursieve formule is $v(n+1) = \frac{1}{10} \cdot v(n)$ met $v(1) = 100$.
 $v(0) = v(1) \cdot 10 = 1000$
 Een directe formule is $v(n) = 1000 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n$.
- b** $u_0 = -5 \cdot u_1 = -5 \cdot 150 = -750$
 Een directe formule is $u_n = -750 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^n$.

- 14 a** Rij $u(n)$ is een rij bij een lineair verband omdat er elke maand evenveel kleedgeld bij komt, namelijk € 1,50.
- b** Een recursieve formule is $u(n+1) = u(n) + 1\frac{1}{2}$ met $u_0 = 50$.
Een directe formule is $u(n) = 50 + 1\frac{1}{2}n$.
- c** Het eerste halfjaar is gelijk aan de eerste zes maanden, oftewel $u(0)$ tot en met $u(5)$.
 $u(0) = 50$, $u(1) = 51,5$, $u(2) = 53$, $u(3) = 54,5$, $u(4) = 56$ en $u(5) = 57,5$.
Het totale bedrag aan kleedgeld dat zij het eerste halfjaar van 2017 ontvangt is $50 + 51,5 + 53 + 54,5 + 56 + 57,5 = €322,50$.
Een directe formule is $v(n) = 50 \cdot 1,02^n$.

Systematisch tellen

- 15 a** Voor elke positie zijn 10 cijfers beschikbaar.
Er bestaan $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10\,000$ verschillende pincodes.
- b** Van elke 10 000 pincodes is er dan één gelijk aan jouw bankpas, dus zijn er $\frac{24\,700\,000}{10\,000} = 2470$ bankpassen met dezelfde pincode.
- c** Als X een ander cijfer dan een 2 of een 5 voorstelt:

aantal keren 2	aantal keren 5	aantal keren X	aantal mogelijkheden
1	1	2	$4 \times 3 \times 8 \times 8 = 768$
2	1	1	$\binom{4}{2} \times 2 \times 8 = 6 \times 2 \times 8 = 96$
3	1	0	$\binom{4}{3} = 4$
1	2	1	$4 \times \binom{4}{1} \times 8 = 4 \times 3 \times 8 = 96$
1	3	0	$\binom{4}{3} = 4$
2	2	0	$\binom{4}{2} \times 1 = 6 \times 1 = 6$

Je kunt dus $768 + 96 + 4 + 96 + 4 + 6 = 974$ pincodes maken.

- 16** Het aantal mogelijke drietallen met twee mannen en één vrouw is $\binom{4}{2} \times \binom{4}{1} = 6 \times 4 = 24$.

- 17 a** 2-6, 3-5, 4-4, dus het resultaat 8 kun je op 3 manieren krijgen.

b

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8
5	6	7	8	9
6	7	8	9	10

Aflezen geeft 18 uitkomsten met 5 of hoger.

c

	1	2	3	4
1	0	1	2	3
2	1	0	1	2
3	2	1	0	1
4	3	2	1	0
5	4	3	2	1
6	5	4	3	2

Het verschil 1 komt met 7 keer het meest voor.

Het verschil 5 komt met 1 keer het minst voor.

- 18** 15 maak je met een worp die bestaat uit de ogen 6-6-3, 6-5-4 of 5-5-5.
 6-6-3 kun je op 3 manieren gooien, want de 3 kun je over elke kleur verdelen,
 6-5-4 op $3 \times 2 \times 1 = 6$ manieren, want de 6 kun je over elke kleur verdelen,
 de 5 dan nog over twee en de 4 ten slotte alleen over de laatste kleur, en 5-5-5
 op kun je maar op 1 manier gooien.
 In totaal zijn er dus $3 + 6 + 1 = 10$ manieren.

- 19** Er zijn 2 soorten ogen, 2 soorten vleugelvormen en 2 soorten huidskleuren.
 Er zijn $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ typen uiterlijke verschijningsvormen voor zowel
 mannetjes als vrouwtjes.

Er zijn $\binom{8}{2} = 28$ mogelijkheden om twee verschillende mannetjes te kiezen.

Op dezelfde manier kunnen de twee vrouwtjes gekozen worden.

Er zijn $28 \times 28 = 784$ samenstellingen mogelijk.

$$1 \quad \text{a} \quad \frac{7}{9b} \times \frac{3a}{5} = \frac{21a}{45b} = \frac{7a}{15b}$$

$$\text{b} \quad \frac{2a}{9} - \frac{8a}{27} = \frac{6a}{27} - \frac{8a}{27} = \frac{-2a}{27}$$

$$\text{c} \quad \frac{13}{28} + \frac{6}{7} = \frac{13}{28} + \frac{24}{28} = \frac{37}{28} = 1\frac{9}{28}$$

$$\text{d} \quad \frac{18-12a}{6} = \frac{18}{6} - \frac{12a}{6} = 3 - 2a$$

$$2 \quad \text{a} \quad \frac{1}{25} \text{ deel van } 650 \text{ is } 650 : 25 = 26.$$

$$\frac{6}{25} \text{ deel van } 650 \text{ is } 6 \times 26 = 156.$$

of

$$\frac{6}{25} = 0,24$$

$$\frac{6}{25} \text{ deel van } 650 \text{ is } 0,24 \times 650 = 156.$$

$$\text{b} \quad \frac{1}{9} \text{ deel van } 81\,000 \text{ is } 81\,000 : 9 = 9\,000.$$

$$\frac{4}{9} \text{ deel van } 81\,000 \text{ is } 4 \times 9\,000 = 36\,000.$$

$$\text{c} \quad \frac{1}{125} \text{ deel van } 50\,000 \text{ is } 50\,000 : 125 = 400.$$

$$\frac{13}{125} \text{ deel van } 50\,000 \text{ is } 13 \times 400 = 5\,200.$$

$$\text{d} \quad \frac{1}{17} \text{ deel van } 8\,585 \text{ is } 8\,585 : 17 = 505.$$

$$\frac{2}{17} \text{ deel van } 8\,585 \text{ is } 2 \times 505 = 1\,010.$$

$$3 \quad \text{a} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{aantal mensen} & 1,35 & ? \\ \hline \text{percentage} & 24 & 100 \\ \hline \end{array}$$

$$? = 1,35 \times 100 : 24 = 5,625$$

De totale bevolking is 5,625 miljoen.

$$\text{b} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{waarde aandelen in euro's} & 10,07 & ? \\ \hline \text{percentage} & 105 & 100 \\ \hline \end{array}$$

$$100 \times 10,07 : 105 \approx 9,59$$

De waarde van het aandeel een dag eerder was dus €9,59.

c Het totaal aantal delen is 7.

Eén deel is €350,-: $7 = €50,-$

3 delen is $3 \times €50,- = €150,-$

4 delen is $4 \times €50,- = €200,-$

d Het aantal meisjes is $\frac{4}{9}$ van het totaal.

Er zijn dus $\frac{4}{9} \times 27 = 12$ meisjes.

$$4 \quad \text{a} \quad 42 \text{ km en } 195 \text{ m} = 42\,195 \text{ m}$$

$$2.45.21 \text{ is } 2 \times 3600 + 45 \times 60 + 21 = 9921 \text{ seconden.}$$

$$\text{Zijn gemiddelde snelheid is } \frac{42\,195}{9921} = 4,253... \approx 4,25 \text{ meter per seconde.}$$

b 1 uur = 3600 seconden

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{afstand in km} & 42,195 & ? \\ \hline \text{tijd in seconden} & 9921 & 3600 \\ \hline \end{array}$$

$$? = 3600 \times 42,195 : 9921 \approx 15,31$$

Zijn gemiddelde snelheid is 15,31 km per uur.

- c Een gemiddelde snelheid van 82,5 km per uur betekent 82,5 km in 60 minuten.

<i>afstand</i> in km	82,5	43,6
<i>tijd</i> in minuten	60	?

$$? = 60 \times 43,6 : 82,5 \approx 31,7$$

José is dus bijna 32 minuten onderweg.

- 5 a 1 L = 1 dm³, dus alle maten in dm nemen.

De inhoud is $50 \times 30 \times 5 = 7500 \text{ dm}^3 = 7500 \text{ L}$.

- b De inhoud van de vijver is $7500 \text{ dm}^3 = 7,5 \text{ m}^3$.

Per week moet er $7 \times 7,5 \times 5 = 262,5 \text{ mL}$ van het middel toegevoegd worden.

Het gewicht hiervan is 262,5 gram, wat gelijk is aan 0,2625 kg.

- c Een halve liter is 500 mL, dus aan 1 fles heb je voldoende.

- 6 4 minuten en 12 seconden is $4 \times 60 + 12 = 252$ seconden.

De totale tijd dat er naar de video is gekeken is

$$2,2 \times 252 = 554,4 \text{ miljard seconden of wel } 5,544 \times 10^{11} \text{ seconden.}$$

In een jaar zitten $60 \times 60 \times 24 \times 365 = 31\,536\,000$ seconden.

$$\text{Er is dus } \frac{5,544 \times 10^{11}}{3,1536 \times 10^7} \approx 17\,600 \text{ jaar naar de video gekeken.}$$

- 7 De opbrengst per jaar is $2500 \times €0,225 = €562,50$.

De aanschafprijs zonder subsidie was €6.999,-.

15% van €6.999,- is €944,85.

De subsidie was dus maximaal €650,-.

De aanschafprijs was €6999,- – €650,- = €5.649,-.

De terugverdientijd is 5649 : 562,5 $\approx$ 10,04 jaar.

In 2023 is het aankoopbedrag volledig terugverdiend.

- 8 In 1960 was de huurlast 15% ofwel 561 dollar.

<i>bedrag</i>	561	?
<i>percentage</i>	15	100

Het maandinkomen in 1960 was dus $561 \times 100 : 15 = 3740$ dollar.

Het maandinkomen in 2013 was $1,17 \times 3740 = 4375,80$ dollar.

De huur in 2013 was $1,635 \times 561 \approx 917,24$ dollar.

$$\text{De huurlast in 2013 was } \frac{917,24}{4375,80} \times 100\% \approx 21\%.$$

- 9 - De gaswinning stijgt met (ongeveer) $(47 - 22) : 22 \times 100\% \approx 114\%$.

Het aantal aardbevingen stijgt met (ongeveer) $(31 - 3) : 3 \times 100\% \approx 933\%$,
dus bewering 1 is niet waar.

- In 2003 is de gasproductie gedaald, maar het aantal aardbevingen in 2004 is gestegen ten opzichte van 2003 dus bewering 2 is niet waar.

- Het aantal aardbevingen in de periode 2005-2011 is gemiddeld per jaar met

$$\frac{31 - 18}{6} \approx 2 \text{ gestegen. Het aantal aardbevingen in de periode 1998-2004 is}$$

$$\text{gemiddeld per jaar met } \frac{11 - 6}{6} \approx 1 \text{ gestegen, dus bewering 3 is waar.}$$

- 10** 2 uur, 43 minuten en 32 seconden is gelijk aan
 $2 \times 3600 + 43 \times 60 + 32 \text{ seconden} = 9812 \text{ seconden}$.
 De afstand is 42 195 meter.
 De snelheid van haar is $\frac{42\,195}{9812} \approx 4,30 \text{ m/s}$.

Formules en grafieken

- 11 a** De toename tussen $t = 8$ en $t = 13$ is $68 - 38 = 30$.
 De gemiddelde toename per week is $30 : 5 = 6 \text{ gram}$.
 Het gewicht na 11 weken is $38 + 3 \times 6 = 56 \text{ gram}$.
- b** De toename tussen $t = 17$ en $t = 21$ is $104 - 88 = 16$.
 De gemiddelde toename per week is $16 : 4 = 4 \text{ gram}$.
 Het gewicht na 26 weken is dus $104 + 5 \times 4 = 124 \text{ gram}$.
- 12 a** Invoer: $y_1 = 4x^{0,7} + 25x$
 Begin de tabel bij $x = 0$ en gebruik stapgrootte 1.
 In de tabel zie je dat bij $x = 24$ de uitkomst gelijk is aan 637.
- b** Verander de stapgrootte in 0,1 en kijk opnieuw in de tabel.
 Bij $x = 3,7$ is de uitkomst gelijk aan 102,5.
- 13 a** Invoer: $y_1 = 120 - 84 \cdot 0,95^x$ en $y_2 = 100 - 0,5x$
 Venster: $0 \leq x \leq 50, 0 \leq y \leq 100$
 Optie: snijpunt
 De oplossing is $x \approx 20,06$
- b** Invoer: $y_1 = -x^2 + 6x - 10$
 Venster: $-10 \leq x \leq 10$ en $-10 \leq y \leq 10$
 Optie: maximum geeft $x = 3$ en $y = -1$
 Het maximum is -1 .
- 14** van A naar B: toenemend stijgend
 van B naar C: eerst constant stijgend, dan afnemend stijgend
 van C naar D: constant
 van D naar E: eerst constant dalend, dan afnemend dalend
 van E naar F: constant stijgend
- 15 a** Invoer: $y_1 = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 10$
 Venster: $-2 \leq x \leq 7, -10 \leq y \leq 25$
 Optie: maximum, dit geeft $x = 1$ en $y = 21$
 minimum, dit geeft $x = 4$ en $y = -6$
 De formule heeft een maximum van 21 bij $x = 1$ en heeft een minimum van -6 bij $x = 4$
- b** De grafiek is toenemend stijgend bij $x > 4$.
- 16 a** Maak een tabel bij $P = 145(5 - 10 \cdot 0,25^t)$.
- | | | | | |
|-----|------|-------|-----|-----|
| t | 0 | 1 | 10 | 100 |
| P | -725 | 362,5 | 725 | 725 |
- De grenswaarde is $P = 725$

- b** Maak een tabel bij $k = 585 - \frac{300}{a^2}$

a	1	10	100	1000	10 000
k	285	582	584,97	585	585

De grenswaarde is $k = 585$.

- c** Maak een tabel bij $A = 50x^2$.

x	0	1	10	100	1000
A	0	50	5000	50 000	50 000 000

Deze formule heeft geen grenswaarde.

- d** Maak een tabel bij $u = \frac{-3t + 12}{2t - 10}$

t	0	1	10	100	1000	10 000
u	-1,2	-1,125	-1,8	-1,516	-1,502	-1,5

De grenswaarde is $u = -1,5$.

- 17 a** Op het tijdstip $t = 0$ is de temperatuur $21 - 6 \cdot 0,9^0 = 15$ °C.

- b** Als de waarde van t toeneemt, nadert $0,9^t$ naar 0.

De waarde van $6 \cdot 0,9^t$ nadert dan ook naar 0.

$21 - 6 \cdot 0,9^t$ nadert dan naar 21.

De grenswaarde is 21.

- c** De temperatuur van de kamer wordt op den duur 21 °C en verandert dan niet meer.

- d** Los de vergelijking $21 - 6 \cdot 0,9^x = 20$ met de rekenmachine op.

Invoer: $y_1 = 21 - 6 \cdot 0,9^x$ en $y_2 = 20$

Venster: $0 \leq x \leq 50$, $0 \leq y \leq 25$

Optie: snijpunt

De oplossing is $x \approx 17$.

Na 17 minuten is de temperatuur 20 °C.

- e** Los de vergelijking $21 - 6 \cdot 0,9^x = 18$ met de rekenmachine op.

Invoer: $y_1 = 21 - 6 \cdot 0,9^x$ en $y_2 = 18$

Venster: $0 \leq x \leq 50$, $0 \leq y \leq 25$

Optie: snijpunt

De oplossing is $x \approx 6,6$.

Vanaf 7.07 uur is de temperatuur meer dan 18 °C.

- 18 a** Als je voor a steeds grotere waarden invult, wordt $1,6^a$ steeds groter.

$8 \cdot 1,6^a - 10$ wordt steeds groter.

De noemer van de breuk $\frac{20}{8 \cdot 1,6^a - 10}$ wordt steeds groter.

De waarde van de breuk nadert dan naar 0.

De grenswaarde is $Q = 0$.

- b** Als je voor a steeds grotere waarden invult, wordt $1,38^a$ steeds groter.

$5 \cdot 1,38^a - 4$ wordt steeds groter.

De formule heeft geen grenswaarde.

- c** Als je voor a steeds grotere waarden invult, nadert $0,8^a$ naar 0.

$2 - 0,8^a$ nadert dan naar 2.

De breuk $\frac{2}{2 - 0,8^a}$ nadert naar $\frac{2}{2} = 1$.

De grenswaarde is $Q = 7 + 1 = 8$.

- d Als je voor a steeds grotere waarden invult, nadert $0,75^a$ naar 0.
 $4 - 0,75^a$ nadert dan naar $4 - 0 = 4$.
 De grenswaarde is $Q = 5 \times 4 = 20$.

19 a $18,1 = 0,15P + 6,2 \times 4 - 10$
 $18,1 = 0,15P + 14,8$
 $3,3 = 0,15P$
 $P = 22$

b $24,71 = 0,15 \times 8,2 + 6,2U - 10$
 $24,71 = 1,23 + 6,2U - 10$
 $6,2U = 33,48$
 $U = 5,4$

20 a $X = \frac{4 \times 3 - 3 \times 2 + 4}{2 \times 5}$
 $X = \frac{10}{10}$
 $X = 1$

c $4 = \frac{4 \times 10 - 3Z + 4}{2 \times 2,5}$
 $4 = \frac{44 - 3Z}{5}$
 $20 = 44 - 3Z$
 $-24 = -3Z$
 $Z = 8$

b $16 = \frac{4Y - 3 \times -2 + 4}{2 \times 0,5}$
 $16 = \frac{4Y + 10}{1}$
 $16 = 4Y + 10$
 $4Y = 6$
 $Y = 1\frac{1}{2}$

d $12 = \frac{4 \times 3,5 - 3 \times 4 + 4}{2P}$
 $12 = \frac{6}{2P}$
 $24P = 6$
 $P = \frac{1}{4}$

21 a $q = 4p - 10$
 $4p = q + 10$
 $p = \frac{1}{4}q + 2\frac{1}{2}$

c $2q + 5p = 10$
 $5p = 10 - 2q$
 $p = 2 - \frac{2}{5}q$

b $q = \frac{1}{2}p + 8$
 $\frac{1}{2}p = q - 8$
 $p = 2q - 16$

d $10q - 4p = 40$
 $-4p = -10q + 40$
 $p = 2\frac{1}{2}q - 10$

22 a $10 = -2,5 \cdot 2 + 1,5R + 6P$
 $10 = -5 + 1,5R + 6P$
 $15 = 1,5R + 6P$
 $6P = 15 - 1,5R$
 $P = \frac{15}{6} - \frac{1,5R}{6}$
 $P = 2,5 - 0,25R$

b $0 = -2,5Q + 1,5 \cdot 10 + 6P$
 $2,5Q = 15 + 6P$
 $Q = \frac{15}{2,5} + \frac{6P}{2,5}$
 $Q = 6 + 2,4P$

c $N = -2,5Q + 1,5 \cdot 6 + 6Q$
 $N = 3,5Q + 9$

23 a $Q = \frac{(0,8 \cdot 5 + 4)(-2 \cdot 5 + 6p)}{5 - 4}$
 $Q = \frac{8(-10 + 6p)}{1}$
 $Q = -80 + 48p$

$$\begin{aligned} \text{b } Q &= \frac{3(4 \cdot 2 - 2) + 6p(2 \cdot 4 - 2)}{2 + 4} \\ Q &= \frac{3 \cdot 6 + 6p \cdot 6}{6} \\ Q &= \frac{18}{6} + \frac{36p}{6} \\ Q &= 6p + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{24 } p &= 4r + \frac{3 \cdot r \cdot 5 + 2 \cdot 7}{5} \\ p &= 4r + \frac{15r + 14}{5} \\ p &= 4r + \frac{15r}{5} + \frac{14}{5} \\ p &= 4r + 3r + 2,8 \\ p &= 7r + 2,8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{25 } N &= 4,5 \cdot 8 + 8 \cdot 8 \cdot (6 - 0,5R) - 12,5 \cdot 8 \cdot R \\ N &= 36 + 64(6 - 0,5R) - 100 \cdot R \\ N &= 36 + 384 - 32 \cdot R - 100 \cdot R \\ N &= -132R + 420 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{26 } r &= 0,35t + 0,7 \text{ invullen in } A = 3,14r^2 \text{ geeft} \\ A &= 3,14(0,35t + 0,7)^2 \\ A &= 3,14(0,1225t^2 + 0,49t + 0,49) \\ A &= 0,38465t^2 + 1,5386t + 1,5386 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{27 a } W &= O - K = 35q - (-q^2 + 5q + 7) \\ W &= 35q + q^2 - 5q - 7 \\ W &= q^2 + 30q - 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } W &= \frac{TW}{q} = \frac{(3q + 2)(q^2 - 1)}{q} \\ W &= \frac{3q^3 + 2q^2 - 3q - 2}{q} \\ W &= 3q^2 + 2q - 3 - \frac{2}{q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{28 } \text{De periode is } 9,5 - 3,5 &= 6. \\ \text{De evenwichtsstand is } \frac{1 + -5}{2} &= -2. \\ \text{De amplitude is } 1 - -2 &= 3. \end{aligned}$$

- 29 a** De evenwichtswaarde is het gemiddelde van de minimale en de maximale waarde.
De evenwichtswaarde is dan $\frac{1}{2}(2,6 + 17,1) = 9,85 \text{ } ^\circ\text{C}$.
De amplitude is grootste afwijking van de grafiek ten opzichte van de evenwichtswaarde.
De amplitude is $17,1 - 9,85 = 7,25 \text{ } ^\circ\text{C}$.
- b** De vloeiende lijn geeft de gemiddelde dagtemperatuur per dag aan van alle dagen van het jaar.
De grafiek betreft dus een periode van een jaar, dus 365 dagen.

- c De dag waarop de temperatuur minimaal is ligt een halve periode eerder.
 $197 - \frac{1}{2} \times 365 = 14,5$
 De minimale temperatuur wordt bereikt op dag 15.
- d Dat kun je in de grafiek zien bij de gemiddelde dagtemperatuur van ten minste 14°C .
 Dat is in de periode van de dag 138 tot en met dag 250, dus 112 dagen.
 De toename is $112 - 65 = 47$ dagen.

- 30 Als je voor t steeds grotere waarden invult, nadert $0,834^t$ naar 0.
 Dan nadert $12,9 \cdot 0,834^t$ naar $12,9 \cdot 0 = 0$, en dus nadert $1 + 12,9 \cdot 0,834^t$ naar $1 + 0 = 1$.

De uitkomsten naderen de grenswaarde $\frac{2780}{1} = 2780$.

- 31 a $BMR = 2000$ en $J = 30$
 De formule wordt $2000 = 10 \cdot G - 5 \cdot 30 + 6,25 \cdot L + 5$.
 $10G = 2000 + 150 - 6,25 \cdot L - 5$
 $10G = 2145 - 6,25L$
 $G = -0,625L + 214,5$
 $a = -0,6$ en $b = 214,5$

- b $W = 2,2G$ dus $G = \frac{1}{2,2}W$ en $L = 30,48H$
 Dit invullen in de formule geeft
 $BMR = 10 \cdot \frac{1}{2,2}W - 5 \cdot Y + 6,25 \cdot 30,48H + 5$
 $BMR \approx 4,55 \cdot W - 5 \cdot Y + 190,5 \cdot H + 5$

- 32 a $\frac{G}{15^3} > 0,18$ en $\frac{G}{15^3} < 0,22$
 $G > 15^3 \times 0,18$ en $G < 15^3 \times 0,22$
 $G > 607,5$ en $G < 742,5$
 Zijn gewicht mag tussen 608 en 742 gram liggen.
- b De lengte wordt groter dan bij een correcte meting.
 Het gewicht verandert niet, dus de teller in de formule voor R blijft gelijk en de noemer wordt groter.
 De schildpad krijgt een kleinere Jackson Ratio dan hij in werkelijkheid heeft.
- c $G = 454W$ en $L = 2,54I$ invullen in de formule van R geeft

$$R = \frac{454W}{(2,54I)^3}$$

$$R = \frac{454}{2,54^3} \cdot \frac{W}{I^3}$$

$$c = \frac{454}{2,54^3} \approx 27,7$$

- 33 a uitspraak 1:
 De punten van de grafiek horend bij 1960, 1980 en 2000 liggen op één lijn, dus de huren stegen in beide periodes even snel. Dus uitspraak 1 is niet waar
- uitspraak 2:
 Tussen 1990 en 2000 stijgen de huren nauwelijks, terwijl het inkomen flink toeneemt. De huurlast neemt dan af, dus uitspraak 2 is waar

- b** Op de trendlijn liggen de punten (1960, 100) en (2010, 163).

De helling van de trendlijn is $\frac{163 - 100}{2010 - 1960} = 1,26$.

In 2023 is de huurprijs ten opzichte van 1960 met $63 \times 1,26\% = 79,38\%$ gestegen.

De huurprijs in 2023 is dan $1,79,38 \times 561 = 1006,32$ dollar.

De huurlast zal in 2023 $\frac{1006,32}{4832} \times 100\% \approx 20,8\%$ zijn.

Lineaire en gebroken formules

- 34 a** In 1950 waren er 1350 miljoen vissen en het aantal nam met 125 miljoen per jaar af.

- b** Tussen $p = 10$ en $p = 50$ is de toename van A gelijk aan 80.

Dit is een toename van $80 : 40 = 2$ per stap.

Tussen $p = 50$ en $p = 75$ is de toename van A gelijk aan 50.

Dit is een toename van $50 : 25 = 2$ per stap.

Tussen $p = 75$ en $p = 90$ is de toename van A gelijk aan 30.

Dit is een toename van $30 : 15 = 2$ per stap.

Tussen $p = 90$ en $p = 100$ is de toename van A gelijk aan 20.

Dit is een toename van $20 : 10 = 2$ per stap.

De toename per stap is steeds 2, dus de tabel hoort bij een lineair verband.

- c** De toename van Q is $520 - 670 = -150$

De toename van P is $23 - 18 = 5$

De toename van Q is dus $-150 : 5 = -30$ per stap.

Bij $P = 44$ is P toegenomen met $44 - 23 = 21$ stappen.

De waarde van Q bij $P = 44$ is dan $520 + 21 \times -30 = -110$.

- 35** De toename van K is $26 - 23 = 3$.

De toename van a is $20 - 14 = 6$.

De richtingscoëfficiënt is dus $3 : 6 = 0,5$ en de formule is van de vorm

$K = 0,5a + b$.

Invullen van (20, 26) geeft $26 = 0,5 \cdot 20 + b$ ofwel

$26 = 10 + b$ dus $b = 16$.

De formule is $K = 0,5a + 16$.

- 36** De toename van y is $13 - 18 = -5$.

De toename van x is $200 - 150 = 50$.

De richtingscoëfficiënt is dus $-5 : 50 = -0,1$.

De formule is van de vorm $y = -0,1x + b$.

Invullen van (200, 13) geeft $13 = -0,1 \cdot 200 + b$ ofwel

$13 = -20 + b$ dus $b = 33$.

De formule is $y = -0,1x + 33$.

- 37 a** De toename van y is $0 - 6 = -6$.

De toename van x is $8 - 0 = 8$.

De richtingscoëfficiënt is dus $-6 : 8 = -0,75$.

De formule is van de vorm $y = -0,75x + b$.

De lijn gaat door (0, 6) dus het startgetal $b = 6$.

De formule is $y = -0,75x + 6$.

- b** De toename van y is $33 - 12 = 21$.
 De toename van x is $11 - 5 = 6$.
 De richtingscoëfficiënt is dus $21 : 6 = 3,5$.
 De formule is van de vorm $y = 3,5x + b$.
 Invullen van $(11, 33)$ geeft $33 = 3,5 \cdot 11 + b$ ofwel $33 = 38,5 + b$ dus $b = -5,5$.
 De formule is $y = 3,5x - 5,5$.
- c** De toename van y is $-5,7 - 1,3 = -7$.
 De toename van x is $3,5 - 0,7 = 2,8$.
 De richtingscoëfficiënt is dus $-7 : 2,8 = -2,5$.
 De formule is van de vorm $y = -2,5x + b$.
 Invullen van $(0,7; 1,3)$ geeft $1,3 = -2,5 \cdot 0,7 + b$ ofwel
 $1,3 = -1,75 + b$ dus $b = 3,05$.
 De formule is $y = -2,5x + 3,05$.

38 a Als het inkomen met $4000 - 1800 = 2200$ euro stijgt, stijgt de ouderbijdrage met $650 - 430 = 220$ euro.
 Dus als het inkomen met 100 euro stijgt, stijgt de ouderbijdrage met 10 euro.
 Bij een inkomen van 2700 euro betaal je een ouderbijdrage van
 $430 + 9 \times 10 = 520$ euro.

- b** De toename van I is $4000 - 1800 = 2200$.
 De toename van B is $650 - 430 = 220$.
 De richtingscoëfficiënt is dus $220 : 2200 = 0,1$.
 De formule is van de vorm $B = 0,1I + b$.
 Invullen van $(4000, 650)$ geeft $650 = 0,1 \cdot 4000 + b$.
 $650 = 400 + b$ dus $b = 250$
 De formule is $B = 0,1I + 250$.

39 a $-3x + 12 = 5x + 28$
 $-8x + 12 = 28$
 $-8x = 16$
 $x = -2$

b $\frac{3}{5}x + \frac{1}{2} = 2 - \frac{9}{10}x$
 $\frac{6}{10}x + \frac{1}{2} = 2 - \frac{9}{10}x$
 $\frac{15}{10}x + \frac{1}{2} = 2$
 $1\frac{1}{2}x = 1\frac{1}{2}$
 $x = 1$

c $225t = -25t + 10(13t + 18)$
 $225t = -25t + 130t + 180$
 $225t = 105t + 180$
 $120t = 180$
 $t = 1\frac{1}{2}$

d $0,7p - 6p + 1,3 = 1,2(4 - 5p)$
 $0,7p - 6p + 1,3 = 4,8 - 6p$
 $0,7p + 1,3 = 4,8$
 $0,7p = 3,5$
 $p = 5$

40 a $q = -0,2p + 1,3$
 $-0,2p + 1,3 = q$
 $p - 6,5 = -5q$
 $p = -5q + 6,5$

b $3p + 12q = 16 - p$
 $4p = 16 - 12q$
 $p = 4 - 3q$

c $13p - 4(q + 2) = q$
 $13p - 4q - 8 = q$
 $13p = 5q + 8$
 $p = \frac{5}{13}q + \frac{8}{13}$

d $0,3q + 1,2p - 4,8 = 0$
 $1,2p = 4,8 - 0,3q$
 $p = 4 - 0,25q$

41 A: $3,6 : 4,5 = 0,8$; $10 : 12,5 = 0,8$; $12,8 : 16 = 0,8$ en $40 : 50 = 0,8$
 Het verband tussen x en y is recht evenredig, de formule is $y = 0,8x$.
 B: $16 : 4,5 = 3,555\dots$ en $14,4 : 5 = 2,88$
 Het verband tussen p en q is dus niet recht evenredig.

C: $12 : 80 = 0,15$ en $24 : 40 = 0,6$

Het verband tussen W en R is dus niet recht evenredig.

D: $40 : 16 = 2,5$; $50 : 20 = 2,5$; $90 : 36 = 2,5$ en $100 : 40 = 2,5$

Het verband tussen x en y is recht evenredig, de formule is $y = 2,5x$.

- 42** Bij een recht evenredig verband is de grafiek een rechte lijn door de oorsprong.

Grafiek B hoort bij een recht evenredig verband.

- 43** A: voor de hele tabel moet gelden dat $x \times y = 0,8 \times 60 = 48$.

B: voor de hele tabel moet gelden dat $x \times y = 15 \times 6 = 90$.

x	0,8	1,5	2	6	80
y	60	32	24	8	0,6

A

x	1	2	5	15	60
y	90	45	18	6	1,5

B

- 44 a** $p \times q$ is constant, het verband tussen p en q is omgekeerd evenredig.

$$p = \frac{7}{q} \text{ of } q = \frac{7}{p}$$

- b** $s : t$ is constant, het verband tussen s en t is recht evenredig.

- c** Het verband tussen A en B is lineair maar het punt $(0, 0)$ ligt niet op de grafiek bij deze formule.

Het verband tussen A en B is niet recht of omgekeerd evenredig.

- d** $l = \frac{200}{b}$, het verband tussen l en b is omgekeerd evenredig.

$$b \cdot l = 200 \text{ of } b = \frac{200}{l}$$

- e** $y = 5x$, het verband tussen x en y is recht evenredig.

- f** $\frac{x}{y} = 36$ kun je herleiden tot $y = \frac{1}{36}x$.

Het verband tussen x en y is recht evenredig.

45 a $P = \frac{5x - 8}{2x + 6}$

Bij invullen van grote waarden voor x , nadert de waarde van P naar 2,5.

De grenswaarde is 2,5.

b $T = 4 + \frac{a}{a - 3}$

Bij invullen van grote waarden voor a , nadert de waarde van T naar 5.

De grenswaarde is 5.

c $k = \frac{3t - 9}{t^2 + 8}$

Bij invullen van grote waarden voor t , nadert de waarde van k naar 0.

De grenswaarde is 0.

d $w = 5 + \frac{4}{p^2 - 9}$

Bij invullen van grote waarden voor p , nadert de waarde van w naar 5.

De grenswaarde is 5.

$$46 \text{ a } 3a = \frac{6}{2b+4}$$

$$2b+4 = \frac{6}{3a}$$

$$2b = \frac{2}{a} - 4$$

$$b = \frac{1}{a} - 2$$

$$\text{b } \frac{b+5}{a-5} = a-1$$

$$b+5 = (a-1)(a-5)$$

$$b+5 = a^2 - 6a + 5$$

$$b = a^2 - 6a$$

$$\text{c } \frac{5}{a+4} = \frac{2}{b-4}$$

$$5(b-4) = 2(a+4)$$

$$5b - 20 = 2a + 8$$

$$5b = 2a + 28$$

$$b = 0,4a + 5,6$$

$$\text{d } \frac{7a-3b}{b+8} = \frac{4}{3}$$

$$4(b+8) = 3(7a-3b)$$

$$4b + 32 = 21a - 9b$$

$$13b = 21a - 32$$

$$b = 1\frac{8}{13}a - 2\frac{6}{13}$$

$$47 \text{ a } K = \frac{3}{p} + \frac{p+1}{p}$$

$$K = \frac{p+4}{p}$$

$$\text{b } Q = \frac{t+1}{2t} + \frac{1}{4t}$$

$$Q = \frac{2t+2}{4t} + \frac{1}{4t}$$

$$Q = \frac{2t+3}{4t}$$

$$\text{c } d = \frac{3}{N+1} - \frac{1}{N}$$

$$d = \frac{3N}{N(N+1)} - \frac{1(N+1)}{N(N+1)}$$

$$d = \frac{2N-1}{N(N+1)}$$

$$\text{d } k = \frac{q+2}{q} - \frac{1}{q-5}$$

$$k = \frac{(q+2)(q-5)}{q(q-5)} - \frac{1q}{q(q-5)}$$

$$k = \frac{q^2 - 3q - 10}{q^2 - 5q} - \frac{1q}{q^2 - 5q}$$

$$k = \frac{q^2 - 4q - 10}{q^2 - 5q}$$

48 a De grafiek van k_z gaat door de punten (0, 18) en (12, 8).

De richtingscoëfficiënt is $\frac{8-18}{12-0} = \frac{-10}{12} = -\frac{5}{6}$ en het startgetal 18.

Een formule is $k_z = -\frac{5}{6} \cdot t + 18$.

De vergelijking $k_z = k_l$ moet worden opgelost.

$$-\frac{5}{6}t + 18 = -0,31t + 10,0$$

$$-0,52... \cdot t = -8$$

$$t = 15,28...$$

In 2024 zal de kostprijs van de windenergie van zee even hoog zijn als de kosten van de windenergie van het land.

b Er moet gelden $k_m = 2 \cdot k_l$, ofwel $0,28t + 4,3 = 2 \cdot (-0,31t + 10,0)$

$$0,28t + 4,3 = -0,62t + 20$$

$$0,9t = 15,7$$

$$t \approx 17,44$$

In 2026 zal de marktprijs twee keer zo hoog zijn als de kostprijs van de windenergie van windmolens op het land.

- 49 a** De totale reistijd $T = 1\frac{1}{3}$ uur, dus $\frac{400}{400 - w^2} = \frac{4}{3}$ oplossen.

$$3 \times 400 = 4(400 - w^2)$$

$$1200 = 1600 - 4w^2$$

$$4w^2 = 400$$

$$w = 10 \text{ (de windsnelheid is 10 km per uur)}$$

- b** Als $w = 0$ dan is $T = 1$.

Als w groter is dan 0 wordt de noemer van de breuk kleiner dan 400.

De teller blijft 400, zodat de breuk groter wordt dan 1.

De totale reistijd wordt groter ofwel $T > 1$.

- c** $T = \frac{400}{400 - w^2} + 1$ ofwel $T = \frac{400}{400 - w^2} + \frac{400 - w^2}{400 - w^2}$ dus $T = \frac{800 - w^2}{400 - w^2}$

- 50** $0,00137a + 3,43 < 0,00793a + 1,10$ moet worden opgelost.

$$-0,00656a < -2,33$$

$$a > 355,183$$

Bij een afstand van meer dan 355 km is de reistijd met het vliegtuig kleiner dan de reistijd met de trein.

- 51 a** De formules aan elkaar gelijkstellen geeft

$$15,3G + 679 = 11,6G + 879$$

$$3,7G = 200$$

$$G = 200 : 3,7 \approx 54,1$$

Het basisenergieverbruik is bij jongvolwassenen en ouderen gelijk bij 54,1 kg. Tot en met 54 kg hebben de jongvolwassenen een lager basisenergieverbruik dan de ouderen.

- b** Het basisenergieverbruik van Frits is $11,6 \times 70 + 879 = 1691$ kcal.

$$\text{Hij fietst } 240 : 2 = 9,6 \text{ uur.}$$

De toename van het energieverbruik bij een toename van de snelheid van 1 km/uur is $2 : 4 = 0,5$.

Het energie verbruik per kg lichaamsgewicht, per uur bij een snelheid van 25 km/uur is $10 + 0,5 = 10,5$ kcal.

Het totale energieverbruik is $1,3 \times 1691 + 9,6 \times 10,5 \times 70 \approx 9250$ kcal.

- c** Bij 14 km fietsen in 1 uur wordt 4 kcal per kg lichaamsgewicht gebruikt.

Dit betekent voor het fietsen van 1 km een energieverbruik van

$$\frac{4}{14} \approx 0,29 \text{ kcal per kg lichaamsgewicht.}$$

Bij 42 km fietsen in 1 uur wordt 20 kcal per kg lichaamsgewicht gebruikt.

Dit betekent voor het fietsen van 1 km een energieverbruik van

$$\frac{20}{42} \approx 0,48 \text{ kcal per kg lichaamsgewicht.}$$

Dus Bert heeft gelijk.

Machtsformules en kwadratische formules en wortelformules

- 52 a** Alle grafieken bij de gegeven formules gaan door het punt (1, 1).
De grafieken bij de formules $y = x^{-3}$ en $y = x^7$ gaan door het punt (-1, -1).
- b** De grafiek bij de formule $y = x^{-3}$ is voor $x > 0$ afnemend dalend.
De grafiek bij de formule $y = x^8$ is voor $x < 0$ afnemend dalend.

- c De grafiek bij de formule $y = x^8$ heeft twee snijpunten met de lijn $y = 4$.
De grafieken bij de andere formules hebben één snijpunt met de lijn $y = 4$.
De grafieken bij de formules $y = x^8$ en $y = x^{\frac{1}{4}}$ hebben geen snijpunt met de lijn $y = -2$.
De grafieken bij de andere formules hebben één snijpunt met de lijn $y = -2$.
- d De grafieken bij de formule $y = x^{1,75}$ heeft één snijpunt met de lijn $y = 18$.

- 53 a** $y = 3x(1 - x) + 2x^2$
 $y = 3x - 3x^2 + 2x^2$
 $y = -x^2 + 3x$
 $a < 0$, de grafiek is een bergparabool.
- b** $y = (4x + 3)(2x - 1) + (7 - 3x)(x + 1)$
 $y = 8x^2 + 2x - 3 - 3x^2 + 4x + 7$
 $y = 5x^2 + 6x + 4$
 $a > 0$, de grafiek is een dalparabool.
- c** $y = 8x^2 + 4x(x - 1)^2$
 $y = 8x^2 + 4x(x^2 - 2x + 1)$
 $y = 8x^2 + 4x^3 - 8x^2 + 4x$
 $y = 4x^3 + 4x$
Deze functie is niet kwadratisch, dus geen parabool.

- 54 a** Invoer: $y_1 = 0,5x^2 + 3,2x - 7$
Venster: $-10 \leq x \leq 10$ en $-10 \leq y \leq 10$
Optie: minimum
Dit geeft $x = -3,20$ en $y = -12,12$
De coördinaten van de top zijn $(-3,20; -12,12)$.
- b** Optie: nulpunten
Dit geeft $x \approx -8,1234$ en $x \approx 1,7204$
De snijpunten met de x -as zijn $(-8,12; 0)$ en $(1,72; 0)$.
Bij $x = 0$ heeft de grafiek een snijpunt met de y -as.
 $y = 0,5 \cdot 0^2 + 3,2 \cdot 0 - 7 = -7$
Het snijpunt is dus $(0, -7)$.

- 55** A: $\sqrt{16x + 48} =$
 $\sqrt{16(x + 3)} =$
 $\sqrt{16} \cdot \sqrt{x + 3} =$
 $4 \cdot \sqrt{x + 3}$
Formule A is te herleiden tot formule 2.
- B: $8 + 6\sqrt{\frac{1}{4}x^2 + x - 9} =$
 $8 + 6\sqrt{\frac{1}{4}(x^2 + 4x - 36)} =$
 $8 + 6 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 4x - 36} =$
 $8 + 3\sqrt{x^2 + 4x - 36}$
Formule B is te herleiden tot formule 3.
- C: $\frac{24 + \sqrt{12 - 6x}}{3} =$
 $8 + \frac{1}{3}\sqrt{12 - 6x} =$
 $8 + \sqrt{\frac{1}{9}(12 - 6x)} =$
 $8 + \sqrt{1\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x}$
Formule C is te herleiden tot formule 1.

56 a $a = 0,5 \sqrt[3]{b}$
 $0,5 \sqrt[3]{b} = a$
 $\sqrt[3]{b} = 2a$
 $b = (2a)^3$
 $b = 8a^3$

b $2 \cdot \sqrt[5]{b+2} = 4a$
 $\sqrt[5]{b+2} = 2a$
 $b+2 = (2a)^5$
 $b = 32a^5 - 2$

c $a+4 = 0,4\sqrt{b}$
 $0,4\sqrt{b} = a+4$
 $\sqrt{b} = 2\frac{1}{2}a + 10$
 $b = \left(2\frac{1}{2}a + 10\right)^2$
 $b = 6\frac{1}{4}a^2 + 50a + 100$

d $3\sqrt{a} = 4\sqrt{a} - 2b$
 $2b = 4\sqrt{a} - 3\sqrt{a}$
 $2b = \sqrt{a}$
 $b = \frac{1}{2}\sqrt{a}$

e $\sqrt{2b+3} = 4a$
 $2b+3 = 16a^2$
 $2b = 16a^2 - 3$
 $b = 8a^2 - 1\frac{1}{2}$

f $a = \sqrt{b-4} + 9$
 $\sqrt{b-4} + 9 = a$
 $\sqrt{b-4} = a - 9$
 $b - 4 = (a - 9)^2$
 $b = a^2 - 18a + 85$

57 a $Q = \sqrt{25p^2} = 5p$

b $R = (2 \cdot q)^3 = 8q^3$

c $y = \frac{(0,5x)^2}{x} = \frac{0,25x^2}{x} = 0,25x$

d $t = 3\sqrt{2k} \cdot \sqrt{18k} = 3\sqrt{36k^2} = 3 \cdot 6k = 18k$

e $b = \left(\frac{1}{2} \cdot a\right)^4 \cdot \sqrt{16a^2} = \frac{1}{16} \cdot a^4 \cdot 4a = \frac{1}{4}a^5$

f $g = \sqrt{\frac{d^2}{9}} \cdot (d \cdot 3)^2 = \sqrt{\frac{1}{9} \cdot d^2} \cdot (d \cdot 3)^2 = \frac{1}{3} \cdot d \cdot d^2 \cdot 9 = 3d^3$

58 a $0,2 \cdot p^5 + 8 = K$
 $0,2 \cdot p^5 = K - 8$
 $p^5 = 5K - 40$
 $p = \sqrt[5]{5K - 40}$

b $K - 6 \cdot p^4 = 27$
 $-6 \cdot p^4 = -K + 27$
 $p^4 = \frac{1}{6}K - 4\frac{1}{2}$
 $p = \sqrt[4]{\frac{1}{6}K - 4\frac{1}{2}}$

c $13p^{0,7} - 65K = 0$
 $13p^{0,7} = 65K$
 $p^{0,7} = 5K$
 $p = (5K)^{\frac{1}{0,7}}$
 $p = (5K)^{\frac{10}{7}}$

d $15 + p^{-\frac{1}{2}} = K$
 $p^{-\frac{1}{2}} = K - 15$
 $p = (K - 15)^{-2}$
 $p = \frac{1}{(K - 15)^2}$

e $2 \cdot \sqrt[3]{p} - 4K = 10$
 $2 \cdot \sqrt[3]{p} = 10 + 4K$
 $\sqrt[3]{p} = 5 + 2K$
 $p = (5 + 2K)^3$

f $K = \sqrt[4]{2p+1}$
 $(2p+1)^{\frac{1}{4}} = K$
 $2p+1 = K^4$
 $2p = K^4 - 1$
 $p = \frac{1}{2}K^4 - \frac{1}{2}$

59 a De relatieve toename van het aandeel van armen en handen is
 $\frac{21,0 - 18,15}{18,15} \cdot 100\% \approx 15,7\%$.

De relatieve toename van het aandeel van benen en voeten is
 $\frac{38,8 - 31,65}{31,65} \cdot 100\% \approx 22,6\%$, dus deze is het meest toegenomen.

b $L = 100$ invullen in $S_{\text{Mosteller}} = \sqrt{\frac{1}{3600} \cdot L \cdot M}$ geeft $S_{\text{Mosteller}} = \sqrt{\frac{1}{3600} \cdot 100 \cdot M}$

ofwel $S_{\text{Mosteller}} = \sqrt{\frac{1}{36} \cdot M}$.

$L = 100$ invullen in $S_{\text{Haycock}} = 0,024265 \cdot L^{0,3964} \cdot M^{0,5378}$ geeft

$S_{\text{Haycock}} = 0,024265 \cdot 100^{0,3964} \cdot M^{0,5378}$ ofwel $S_{\text{Haycock}} = 0,150585 \cdot M^{0,5378}$.

Je moet dus $0,150585 \cdot M^{0,5378} = \sqrt{\frac{1}{36} \cdot M}$ oplossen.

Invoer: $y_1 = 0,150585 \cdot x^{0,5378}$ en $y_2 = \sqrt{\frac{1}{36} \cdot x}$

Venster: $0 \leq x \leq 100$, $-10 \leq y \leq 10$

Optie: snijpunt

Dit geeft $x \approx 14,648$ en $y = 0,64$

Bij een gewicht van ongeveer 14,6 kg geven de formules dezelfde uitkomst.

c $S_{\text{Mosteller}} = \sqrt{\frac{1}{3600} \cdot L \cdot M}$

$S_{\text{Mosteller}} = \sqrt{\frac{1}{3600}} \cdot \sqrt{L \cdot M}$

$S_{\text{Mosteller}} = \frac{1}{60} \cdot \sqrt{L} \cdot \sqrt{M}$

$S_{\text{Mosteller}} = \frac{1}{60} \cdot L^{0,5} \cdot M^{0,5}$ dus de waarde van c is $\frac{1}{60}$.

60 De top van de parabool is het punt $(0, -32)$, dus $b = -32$.

Een ander punt op de parabool is $(4, -30)$.

Voor a geldt dus de vergelijking $-30 = a \cdot 4^2 - 32$.

$16a = 2$ en hieruit volgt $a = \frac{1}{8}$.

61 a In de tekst of de grafiek kun je vinden dat bij $x = 1500$ de waarde $y = 100$ hoort.

Invullen van $x = 1500$ en $y = 100$ in $y = c \cdot x^{-0,159}$ geeft $100 = c \cdot 1500^{-0,159}$.

Hieruit volgt $c = \frac{100}{1500^{-0,159}} \approx 319,8884136 \approx 320$.

Voor de tweede vraag moet je oplossen $320 \cdot x^{-0,159} = 80$.

$x^{-0,159} = \frac{1}{4}$

$x = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{-0,159}} \approx 6117,033036$

Vanaf een CO_2 concentratie van 6118 ppm is de relatieve prestatie minder dan 80%.

b Uit $y = c \cdot x^{-0,159}$ volgt $y = \frac{c}{x^{0,159}}$

Als x toeneemt, neemt de noemer van deze breuk toe terwijl de teller constant blijft. Dit betekent dat als x toeneemt, de uitkomst van de breuk kleiner wordt en daarom is de grafiek dalend.

Exponentiële en logaritmische formules

62 a $t = 0$ invullen geeft $P = 275 \cdot 1,075^0 = 275$.

Op 1 januari 2010 waren er ongeveer 275 000 werklozen.

b Het aantal neemt toe, omdat de groeifactor 1,075 groter is dan 1.

c De groeifactor is 1,075, dus de toename per maand is 7,5%.

d $t = 4$ geeft $P = 275 \cdot 1,075^4 \approx 367,25$.

Op 1 mei 2010 waren er ongeveer 367 250 werklozen.

e $t = -1$ geeft $P = 275 \cdot 1,075^{-1} \approx 255,81$.

Op 1 december 2009 waren er ongeveer 255 800 werklozen.

- 63** De groeifactor tussen $p = 0$ en $p = 1$ is volgens de tabel $216 : 288 = 0,75$.
 $t = 5: 288 \cdot 0,75^5 \approx 68,3$, dit klopt met de tabel.
 $t = 6: 288 \cdot 0,75^6 \approx 51,3$, dit klopt met de tabel.
 $t = 10: 288 \cdot 0,75^{10} \approx 16,2$, dit klopt met de tabel.
 De tabel kan dus bij een exponentieel verband tussen p en q horen.
- 64 a** De groeifactor per dag is $1,28^{24} \approx 374$.
b De groeifactor per kwartier is $1,28^{\frac{1}{4}} \approx 1,0637$.
c De groeifactor per vijf minuten is $1,28^{\frac{1}{12}} \approx 1,0208$.
d De groeifactor per 13 minuten $1,28^{\frac{13}{60}} \approx 1,0549$.
- 65 a** De groeifactor per 10 jaar is 1,025.
 De groeifactor per 5 jaar is $1,025^{0,5} \approx 1,0124$, dus een toename van 1,24%.
b De groeifactor per jaar is $1,025^{0,1} \approx 1,0025$, dus een toename van 0,25%.
c De groeifactor per 25 jaar is $1,025^{2,5} \approx 1,0637$, dus een toename van 6,37%.
d De groeifactor per 100 jaar is $1,025^{10} \approx 1,2801$, een toename van 28,01%.
- 66 a** De groeifactor is $\frac{100 - 2,6}{100} = 0,974$.
 De formule is dus $N = 180\,000 \cdot 0,974^t$.
b De groeifactor per half jaar is 1,10.
 De groeifactor per jaar is $1,1^2 = 1,21$.
 De formule is dus $N = 12 \cdot 10^6 \cdot 1,21^t$.
c De groeifactor per 4 jaar is 2.
 De groeifactor per jaar is $2^{\frac{1}{4}} \approx 1,1892$.
 De formule is dus $N = 5 \cdot 10^6 \cdot 1,1892^t$.
- 67 a** $t = 3$ geeft $A = 135\,600 \cdot 0,94^3 \approx 112\,627$.
 Op 1 januari 2012 waren er dus ongeveer 112 600 abonnees.
b $0,94 \times 100\% = 94\%$, dus de afname is 6%.
c De groeifactor per 4 jaar is $0,94^4 \approx 0,7807$.
 $0,7807 \times 100\% \approx 78\%$, dus de afname is ongeveer $100\% - 78\% = 22\%$.
d Bij een halvering hoort de vergelijking $0,94^t = 0,5$.
 Invoer: $y_1 = 0,94^x$ en $y_2 = 0,5$
 Venster: $0 \leq x \leq 20, 0 \leq y \leq 1$
 Optie: snijpunt
 De oplossing is $x \approx 11,20$.
 (of $0,94^t = 0,5$ dus $t = {}^{0,94}\log(0,5) \approx 11,2$)
 Na iets meer dan 11 jaar, dus in het jaar 2020, is het aantal abonnees gehalveerd.
- 68** Bij een verdubbeling hoort de vergelijking $1,15t = 2$.
 Invoer: $y_1 = 1,15^x$ en $y_2 = 2$
 Venster: $0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 4$
 Optie: snijpunt
 De oplossing is $x \approx 4,96$.
 (of $1,15^t = 2$ dus $t = {}^{1,15}\log(2) \approx 4,96$)
 Na 5 dagen is het gewicht verdubbeld.

69 a $2^x = 5$
 $x = {}^2\log(5)$
 $x \approx 2,32$

b $12 \cdot 6^x = 48$
 $6^x = 4$
 $x = {}^6\log(4)$
 $x \approx 0,77$

c $3^{2x+1} = 7$
 $2x + 1 = {}^3\log(7)$
 $2x = -1 + {}^3\log(7)$
 $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(7)$
 $x \approx 0,39$

d $2 + 5 \cdot 7^{4x} = 17$
 $5 \cdot 7^{4x} = 15$
 $7^{4x} = 3$
 $4x = {}^7\log(3)$
 $x = \frac{1}{4} \cdot {}^7\log(3)$
 $x \approx 0,14$

e ${}^2\log(x+1) = 5$
 $x+1 = 2^5$
 $x+1 = 32$
 $x = 31$

f $3 \cdot {}^4\log(x-4) = 6$
 ${}^4\log(x-4) = 2$
 $x-4 = 16$
 $x = 20$

70 a ${}^4\log(b+5) = a$
 $b+5 = 4^a$
 $b = 4^a - 5$

b $a + \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(b) = 5$
 $\frac{1}{2} \cdot {}^3\log(b) = 5 - a$
 ${}^3\log(b) = 10 - 2a$
 $b = 3^{10-2a}$

c $6 \cdot {}^2\log(b) + 12a = 3$
 $6 \cdot {}^2\log(b) = 3 - 12a$
 ${}^2\log(b) = \frac{1}{2} - 2a$
 $b = 2^{\frac{1}{2}-2a}$

d $2 \cdot 5^b = 100a + 30$
 $5^b = 50a + 15$
 $b = {}^5\log(50a + 15)$

e $3^{a+4b} = 243$
 $3^{a+4b} = 3^5$
 $a + 4b = 5$
 $4b = 5 - a$
 $b = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}a$

f $3^a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^b = 9$
 $3^a \cdot 3^{-b} = 3^2$
 $3^{a-b} = 3^2$
 $a - b = 2$
 $b = a - 2$

71 a Een rente van 0,8% betekent een groeifactor van 1,008.
Dit geeft de vergelijking $1000 \cdot 1,008^t = 1100$.
 $1,008^t = 1,1$
 $t = {}^{1,008}\log(1,1) \approx 11,96$
Na 12 jaar is het bedrag toegenomen tot 1100 euro.

b Een rente van 7,7% betekent een groeifactor van 1,077.
Dit geeft de vergelijking $1,077^t = 2$.
 $1,077^t = 2$
 $t = {}^{1,077}\log(2) \approx 9,34$
Na ruim 9 jaar is het bedrag verdubbeld, dat is dus in 1999.

72 a Bij toename van x , neemt $0,63x$ af en nadert naar 0 want $0,63 < 1$.
 $150 \cdot 0,63^x$ nadert dan ook naar 0.
 $-20 + 150 \cdot 0,63^x$ nadert naar -20 .
De grafiek is dalend met als grenswaarde -20 .

b De grafiek van $y = {}^2\log(x) + 10$ is een verschuiving van de grafiek van $y = {}^2\log(x)$ met 10 naar boven.
De grafiek van $y = {}^2\log(x) + 10$ is dus ook een stijgende grafiek voor $x > 0$.

c De grafiek van $g(x) = {}^2\log(x)$ is stijgend.
Bij toenemende x neemt ${}^2\log(x)$ toe, dus $120 - {}^2\log(x)$ neemt af.
De grafiek van $y = 120 - {}^2\log(x)$ is daarom dalend.

- 73 a** $N = 10^{4,25} \approx 17\,780$
- b** Bij $t = 2$ lees je af $N = 10^2 = 100$.
- c** Bij $t = 8$ lees je af $N = 10^{3,5} \approx 3162$.
- d** Bij $t = 18$ is $N = 10^6 = 1\,000\,000$.
- e** Bij $t = 0$ lees je af $N = 10^{1,5} \approx 31,62$.
De groeifactor per 4 dagen is 10.
De groeifactor per dag is $10^{0,25} \approx 1,7783$
Een formule bij de grafiek is dus $N = 31,62 \cdot 1,7783^t$.
- f** Bij $t = 5$ lees je af $N = 10^{2,75} \approx 562$.
of met de formule $N = 31,62 \cdot 1,7783^5 \approx 562$.
- g** $31,62 \cdot 1,7783^t = 2000$ dus
 $t = {}^{1,7783}\log\left(\frac{2000}{31,62}\right) \approx 7,2$
- 74 a** Bij $t = 0$ kun je aflezen dat $N \approx 35$.
- b** Bij $t = 6$ kun je aflezen dat $N = 1000$.
- c** Bij $N = 3000$ kun je aflezen dat $t \approx 7,7$.
- d** Bij $N = 30\,000$ kun je aflezen dat $t \approx 11,7$.
- 75 a** In 1980 was de uitstoot 250 gram per vliegtuigkilometer.
Dit geeft de vergelijking $250 = 40 + a \cdot b^0$.
 $40 + a = 250$ dus $a = 210$.
In 2010 was de uitstoot 135 gram per vliegtuigkilometer.
Dit geeft de vergelijking $135 = 40 + 210 \cdot b^{30}$.
Invoer: $y_1 = 40 + 210 \cdot x^{30}$ en $y_2 = 135$
Venster: $0 \leq x \leq 2$, $100 \leq y \leq 150$
Optie: snijpunt
De oplossing is $x \approx 0,9739$.
(of $210 \cdot b^{30} = 95$ dus $b = \left(\frac{95}{210}\right)^{\frac{1}{30}} \approx 0,9739$)
Dus $b \approx 0,974$.
- b** In 1980 is het aantal vliegtuigkilometers 1000 miljard.
In 2015 is het aantal vliegtuigkilometers 6000 miljard.
In 35 jaar is het aantal vliegtuigkilometers 6 keer zo groot geworden.
De groeifactor per jaar is $6^{\frac{1}{35}} \approx 1,0525$.
Een afname van 2,7% betekent een groeifactor van 0,973.
De totale uitstoot neemt toe met de groeifactor $1,0525 \times 0,973 \approx 1,02408$
De totale uitstoot neemt met 2,4% per jaar toe.
- 76 a** De groeifactor per 20 minuten $\frac{95}{20}$.
De groeifactor per minuut is $\left(\frac{95}{20}\right)^{\frac{1}{20}} \approx 1,081022$
Afgerond op vijf decimalen is de groeifactor 1,08102
- b** De temperatuur stijgt gemiddeld met $(95 - 20) : 20 = 3,75$ graden per minuut.
Na 12 minuten zal de kerntemperatuur bij lineair verband
 $20 + 12 \times 3,75 = 65$ graden zijn.
Volgens het exponentiële verband is de kerntemperatuur na 12 minuten
 $20 \cdot 1,081^{12} \approx 50,9$ graden.
Het exponentiële verband past dus beter bij de waarneming.

77 a In augustus 2012 waren er ongeveer 66 aardbevingen met een magnitude ≥ 2 en waren er ongeveer 22 aardbevingen met een magnitude $\geq 2,5$.
22 van 66 aardbevingen hadden een magnitude van meer dan 2,5.
Dit is $22 : 66 \times 100\% \approx 33\%$.

b $M = 1$ en $N = 10$ invullen geeft
 $10 = 10^{a-1}$
 $a - 1 = 1$ dus $a = 2$.

78 a De toename is respectievelijk 1246, 1222, 1302 en 1156

Voor lineaire groei moet de toename constant zijn.

Conclusie: geen lineaire groei.

De groeifactor is $\frac{1034660}{1033414} \approx 1,00120 \approx 1,001$, $\frac{1035882}{1034660} \approx 1,00118 \approx 1,001$,

$\frac{1037184}{1035882} \approx 1,00126 \approx 1,001$ en $\frac{1038340}{1037184} \approx 1,00111 \approx 1,001$.

De groeifactor is ongeveer 1,001.

Conclusie: er is sprake van exponentiële groei.

b De groeifactor in deze periode is $g = \left(\frac{1120987}{1038340}\right)^{\frac{1}{23}} = 1,003335$ per week.

De groeifactor per twee jaar is $g^{104} \approx 1,413831087$ zodat het te verwachten aantal artikelen $1038340 \times 1,413831087 = 1468037$ is.

Op 19 april 2014 zijn er dan 1468000 artikelen (1470000 wordt ook goed gerekend).

79 a De afstand van punt A tot de lijn is ongeveer $30 - 7 = 23$.

De afstand van B tot de lijn is ongeveer $16 - 8 = 8$.

De afstand van C tot de lijn is ongeveer $60 - 20 = 40$.

Bij soort C is het verschil het grootst.

b $\log(N) = 0,1 + 3,4\log(4)$ ofwel $\log(N) \approx 2,147003971$

Hieruit volgt $N = 10^{2,147003971} \approx 140$.

c Volgens de formule is bij $R = 3$ en $\log(N) = 0,1 + 3,4 \cdot \log(3) = 1,722\dots$

Dus $N = 10^{1,722\dots} = 52,748\dots$

Invullen geeft: $52,748\dots = c \cdot 3^{3,4}$

$$c = \frac{52,748\dots}{3^{3,4}} = 1,258\dots$$

De waarde van $c \approx 1,3$.

Veranderingen en rijen

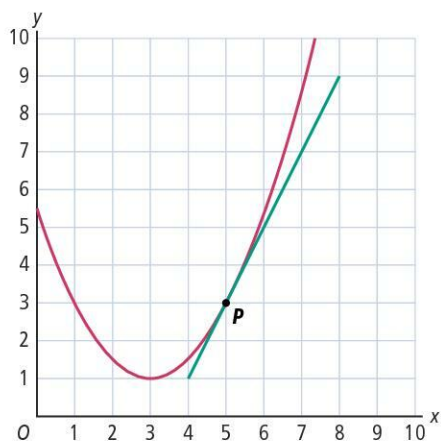
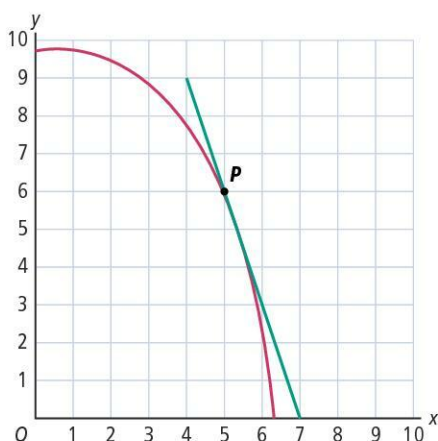
80 Invullen van $t = 3$ in $s = 40 \cdot 1,3^t$ geeft $s = 40 \cdot 1,3^3 = 87,88$ meter.

Invullen van $t = 6$ in $s = 40 \cdot 1,3^t$ geeft $s = 40 \cdot 1,3^6 = 193,07236$ meter.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{193,07236 - 87,88}{3} \approx 35,06412 \text{ meter per minuut.}$$

De snelheid is dus $35,06412 : 60 \approx 0,58$ meter per seconde.

81



Bij de linker grafiek gaat de raaklijn door de punten (8, 9) en (4, 1).

De helling in het punt P is $\frac{9-1}{8-4} = \frac{8}{4} = 2$.

Bij de rechter grafiek gaat de raaklijn door de punten (4, 9) en (7, 0).

De helling in het punt P is $\frac{9-0}{4-7} = \frac{9}{-3} = -3$.

82 a Je krijgt de volgende term door van de voorgaande term 5 af te trekken.

De volgende termen zijn:

$$19 - 5 = 14; 14 - 5 = 9; 9 - 5 = 4; 4 - 1 = -1$$

Een recursieve formule is $u(n) = u(n-1) - 5$ met $u(0) = 34$.

b $u_1 = 3 \cdot u_0 - 4 = 3 \cdot 3 - 4 = 5$

$$u_2 = 3 \cdot u_1 - 4 = 3 \cdot 5 - 4 = 11$$

$$u_3 = 3 \cdot u_2 - 4 = 3 \cdot 11 - 4 = 29$$

$$u_4 = 3 \cdot u_3 - 4 = 3 \cdot 29 - 4 = 83$$

$$u_5 = 3 \cdot u_4 - 4 = 3 \cdot 83 - 4 = 245$$

c Je krijgt de volgende term door de voorgaande term met $-\frac{1}{2}$ te vermenigvuldigen.

De volgende termen zijn:

$$-50 \times -\frac{1}{2} = 25; 25 \times -\frac{1}{2} = -12\frac{1}{2}; -12\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2} = 6\frac{1}{4}; 6\frac{1}{4} \times -\frac{1}{2} = -3\frac{1}{8}$$

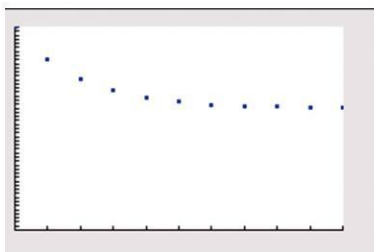
Een recursieve formule is $u(n) = u(n-1) \times -\frac{1}{2}$ met $u(0) = 400$.

83 a Mode: Rij

Invoer: $u(n+1) = 12 + 0,6 \cdot u(n)$ met $u(0) = 50$

Venster: $0 \leq n \leq 10, 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 50$

n	u			
0	50			
1	42			
2	37,2			
3	34,32			
4	32,592			
5	31,555			
6	30,933			
7	30,56			
8	30,336			
9	30,202			
10	30,121			
n=0				



b De termen naderen de grenswaarde 30.

- 84 a**
- | | |
|---|---|
| $u(0) = 17$
$u(1) = 17 + 5 = 22$
$u(2) = 22 + 5 = 27$
$u(3) = 27 + 5 = 32$
$u(4) = 32 + 5 = 37$
$u(5) = 37 + 5 = 42$
$u(6) = 42 + 5 = 47$ | $u(0) = 17 + 5 \times 0 = 17$
$u(1) = 17 + 5 \times 1 = 22$
$u(2) = 17 + 5 \times 2 = 27$
$u(3) = 17 + 5 \times 3 = 32$
$u(4) = 17 + 5 \times 4 = 37$
$u(5) = 17 + 5 \times 5 = 42$
$u(6) = 17 + 5 \times 6 = 47$ |
|---|---|
- b** Ja, de recursieve formule en de directe formule horen bij dezelfde rij.
- 85 a** Je krijgt de volgende term door van de voorgaande term 3 af te trekken.
Dus is er sprake van een lineair verband.
- b** $u(n+1) = u(n) - 3$ met $u(1) = 100$
- c** $u(0) = 100 + 3 = 103$
 $u(n) = -3n + 103$
- 86 a** $v(0) = 20$; $v(1) = 20 \cdot 2,5 = 50$; $v(2) = 50 \cdot 2,5 = 125$ en
 $v(3) = 125 \cdot 2,5 = 312,5$
- b** $v(n) = 20 \cdot 2,5^n$
- 87 a** Rij A hoort bij een lineair verband omdat er elke keer 5 vanaf gaat.
Rij B hoort bij een exponentieel verband omdat er elke keer met 4 vermenigvuldigd wordt.
Rij C is geen van beide, omdat je de volgende term krijgt door de voorgaande eerst met 2 te vermenigvuldigen en er vervolgens 1 bij op te tellen.
Rij D hoort bij een exponentieel verband omdat er elke keer met 1,2 vermenigvuldigd wordt.
- b** Rij A: $u(n+1) = u(n) - 5$ met $u(0) = 14$
Rij B: $u(n+1) = 4 \cdot u(n)$ met $u(0) = \frac{1}{2}$
Rij C: $u(n+1) = 2 \cdot u(n) + 1$ met $u(0) = 3$
Rij D: $u(n+1) = 1,2 \cdot u(n)$ met $u(0) = 10$
- c** Rij A: $u(n) = 14 - 5n$
Rij B: $u(n) = \frac{1}{2} \cdot 4^n$
Rij D: $u(n) = 10 \cdot 1,2^n$
- 88 a** Voor het jaar 2013 geldt $n = 5$.

n	$C_{n+1} = 0,91 \cdot C_n$	$D_{n+1} = 0,0526 \cdot D_n \cdot (38,012 - D_n)$
0	18	0,7
1	16,38	1,373828
2	14,9058	2,647597
3	13,5643	4,924974
4	12,3435	8,571314
5	11,2326	13,27337

De cd-verkoop in 2013 is 11,23257 miljoen.

De downloadverkoop in 2013 is 13,27337 miljoen.

$$\frac{13,27337 - 11,23257}{11,23257} \times 100\% = 18,168...\%$$

Het percentage meer downloadverkopen dan cd-verkopen in 2013 is 18,2%.

- b Invoer $u(n) = 0.0526 \cdot u(n-1) \cdot (38.012 - u(n-1))$ met $u(0) = 0,7$.

n	$u(n)$			
0	.7			
1	1.3738			
2	2.6476			
3	4.925			
4	8.5713			
5	13.273			
6	17.272			
7	18.842			
8	18.999			
9	19.001			
10	19.001			

De grenswaarde is 19 miljoen downloadverkopen.

- 89 a** In een poule van vier teams zijn $3 + 2 + 1 = 6$ wedstrijden.
 In 2012 waren acht poules, dus $8 \cdot 6 = 48$ poulewedstrijden.
 De acht poulewinnaars plus acht bijna-poulewinnaars spelen dan wedstrijden met een afvalstelsysteem, dus nog eens $8 + 4 + 2 + 1 + 1 = 16$ wedstrijden.
 In totaal zijn dat $48 + 16 = 64$ wedstrijden.
 In 1974 waren er $4 \cdot 6 + 4 + 2 + 1 + 1 = 32$ wedstrijden.
 Ja, het zijn er dus inderdaad tweemaal zoveel.

- b** Je moet aantonen dat $W(11) = W(10) + 10$.

Methode 1

$W(10)$ is het aantal wedstrijden in een poule van tien teams.

Als er één team bij komt, moeten alle tien andere team tegen dit nieuwe team spelen, dus er komen tien wedstrijden bij.

Conclusie: $W(11) = W(10) + 10$.

Methode 2

In een poule wordt een zogenoemde halve competitie gespeeld.

Het aantal wedstrijden met tien teams is

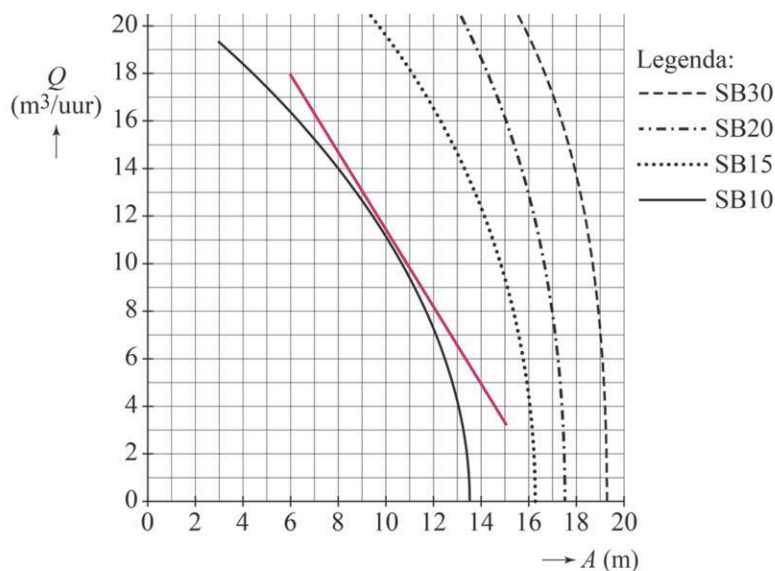
$$W(10) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

Het aantal wedstrijden met elf teams is

$$W(11) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55.$$

Conclusie: $W(11) = W(10) + 10$.

- 90 a** De vulsnelheid met de SB15 op 8 m afstand is $22 \text{ m}^3/\text{uur}$.
 De vulsnelheid met de SB20 op 8 m afstand is $28 \text{ m}^3/\text{uur}$.
 Met de SB15 duurt het $647 : 22 = 29,409\dots$ uur ofwel 29 uur en 25 minuten.
 Met de SB20 duurt het $647 : 28 = 23,107\dots$ uur ofwel 23 uur en 6 minuten.
 Het verschil is 6 uur en 19 minuten.
 of
 $647 : 22 - 647 : 28 \approx 6,3$ uur
 $6,3 \times 60 = 378$ minuten ofwel 6 uur en 18 minuten verschil.



- b** Teken een raaklijn aan de grafiek in het punt (10, 11).

De raaklijn gaat door de punten (6, 18) en (14, 5).

De helling is $\frac{5 - 18}{14 - 6} \approx -1,6$ (antwoord moet liggen tussen $-1,3$ en $-1,7$).

Dit betekent dat het aantal m^3 per uur dat de pomp kan vullen vermindert met $1,6 \text{ m}^3$ per uur voor elke meter dat de pomp verder dan 10 meter van het zwembad afstaat.

- 91 a** Invoer in de rekenmachine

$$u(n) = 1,4 \times u(n-1) \text{ met } u(1) = 6$$

Dit geeft $u(6) = 32$, $u(7) = 45$, $u(8) = 63$, $u(9) = 89$.

Dit is een totaal van $65 + 32 + 45 + 63 + 89 = 294$.

Het model wijkt dus $300 - 294 = 6$ cupcakes af van de werkelijkheid.

- b** Een recursieve formule is: $A_n = A_{n-1} + 18$ met $A_1 = 6$.

Een directe formule is $A_n = -12 + 18n$

$$-12 + 18n = 160$$

$$18n = 172 \text{ dus } n \approx 9,6$$

Dus vanaf de 10^e laag staan er meer dan 160 cupcakes op een laag.

Logisch redeneren

- 92 a** Als het regent, word je nat.

Dat hoeft niet waar te zijn, misschien ben je ergens binnen. Of sta je onder een afdak.

- b** Mannen zijn langer dan vrouwen.

Dat is niet altijd waar, want er zijn lange vrouwen en korte mannen.

- c** Mannen zijn gemiddeld langer dan vrouwen.

Deze generalisatie is waar.

- d** Als a een getal is groter dan 4, dan is a^2 groter dan 16.

Dit is waar.

- e** Als a^2 groter is dan 9, dan is a een getal groter dan 3.

Dit is niet waar, want a kan ook kleiner zijn dan -3 .

- f** Als je met twee dobbelstenen in totaal negen ogen hebt gegooid en met de ene dobbelsteen een even aantal, dan heb je met de andere dobbelsteen drie ogen gegooid.

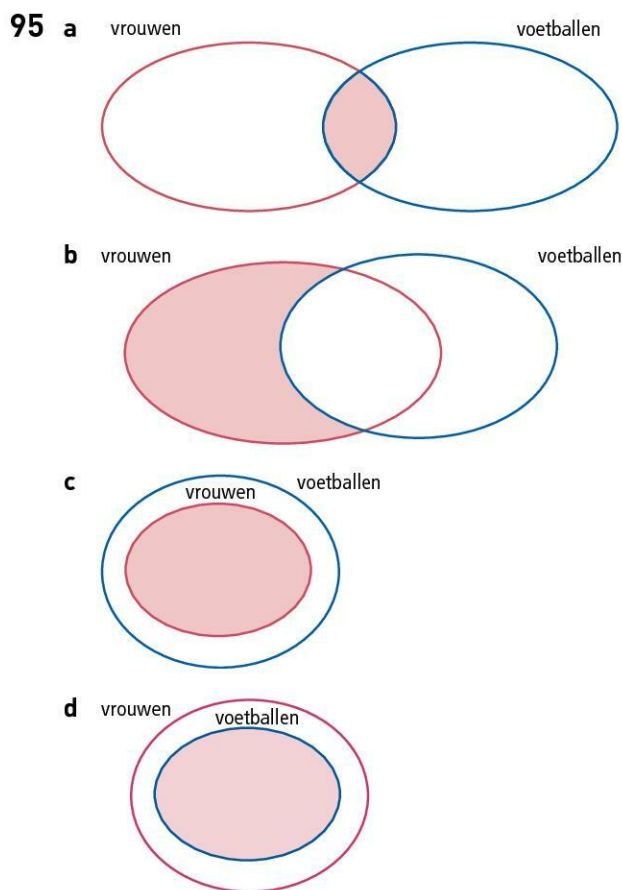
Niet waar, want je kunt ook 4 en 5 hebben gegooid.

- g** Drop kun je alleen in Nederland kopen, dus als je in een winkel komt die geen drop verkoopt, bevind je je in het buitenland.

Niet waar. Je kunt in een winkel in Nederland zijn waar ze geen drop verkopen, zoals een schoenenwinkel, een sieradenshop, enz.

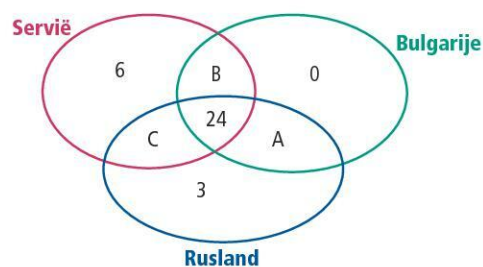
- 93** **a** 16 en 34
b 2, 6, 8, 20, 22, 24 en 26
c 11, 29, 33 en 35

- 94** **a** Dit is een contradictie, want schoppenkaarten zijn zwart.
b Dit is een contradictie, want hartenkaarten zijn rood.
c Waar, dit kan hartendame of hartenaas zijn.
d Dit is een contradictie, want een kaart kan niet dame en aas zijn.
e Waar, dit kan de hartendame zijn of een willekeurige aas.
f Waar, dit kan hartenaas of ruitenaas of schoppenaas zijn.



- 96** **a** niet juist
b juist
c juist
d niet juist
e juist
f juist

- 97 a** Er zijn 3 letters die alleen in Rusland voorkomen en 6 die alleen in Servië voorkomen.
Omdat alle letters van het Bulgaarse alfabet ook in het Russische alfabet voorkomen heeft Bulgarije geen unieke letters 24 letters komen voor die in de drie alfabetten.
Bulgarije heeft 30 letters die ook in het Russische alfabet
Voor gebied A geldt $30 - 24 = 6$.
Voor gebied B en C blijven $39 - 6 - 24 - 3 - 6 = 0$ letters over.
Het Servische alfabet heeft dus $24 + 6 + 0 + 0 = 30$ letters.
- b** Dit zijn de letters N, Z en I.
- c** Als een letter in het Russische en het Griekse alfabet voorkomt, en niet in alle drie alfabetten voorkomt, dan komt die letter voor in het Latijnse alfabet
Deze bewering is niet waar. De letters die voldoen zijn Φ , Π , Γ en deze komen niet voor in het Latijnse alfabet.



- 98 a** 1820 nieuwe eerstejaars komt overeen met 32%.

aantal eerstejaars	1820	?
percentage	32	100

Het aantal nieuwe eerstejaars in 2014 was dus $1820 \times 100 : 32 = 5687,5$.

Afgerond op tientallen is dit 5690 nieuwe eerstejaars.

- b** $(A \wedge S) \Rightarrow D$

- c** $A \Rightarrow D$ betekent:

Door afschaffing van de studiebeurs daalt het aantal nieuwe eerstejaars.

$(A \Rightarrow D) \Rightarrow V$ betekent:

Als afschaffing van de studiebeurs zorgt voor een daling (van het aantal nieuwe eerstejaars) dan wordt het collegegeld verlaagd.

- d** Slagen voor de rekentoets betekent niet dat je ook overgaat naar het tweede jaar. Deze implicatie volgt niet uit de tekst, daar staat alleen wat er gebeurt wanneer ze niet slagen voor de rekentoets.

Vorm en ruimte

- 99 a** Gebruik de stelling van Pythagoras: $4^2 + h^2 = 7^2$.

$$h^2 = 49 - 16 = 33$$

De hoogte van de kegel $h = \sqrt{33} \approx 5,7$ cm.

- b** De inhoud van een kegel kun je berekenen met de formule $I = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

$$I = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot \sqrt{33} \approx 96,3 \text{ cm}^3$$

- c** De inhoud wordt 3,375 keer zo groot.

De straal en de hoogte worden dus $3,375^{\frac{1}{3}} = 1,5$ keer zo groot.

De straal van de vergrote kegel is $1,5 \times 4 = 6$ cm en de hoogte is $1,5 \times \sqrt{33} \approx 8,6$ cm.

- d** De oppervlakte van de vergroting is $1,5^2 \times 138 = 310,5 \text{ cm}^2$.

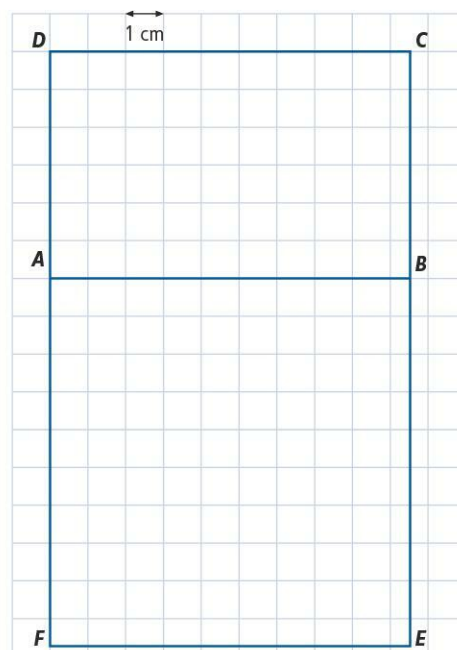
100 a $AB = \varphi \cdot BC \approx 1,618 \times 6 = 9,708 \text{ cm.}$

b Zie de tekening bij opdracht a.

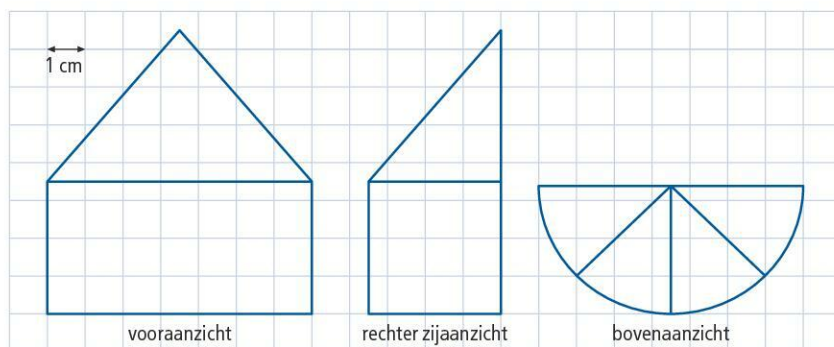
c $FD = 6 + 9,708 = 15,708$

$$\frac{FD}{FE} = \frac{15,708}{9,708} \approx 1,618$$

Hieruit volgt dat rechthoek $FECD$ een gulden rechthoek is.



101



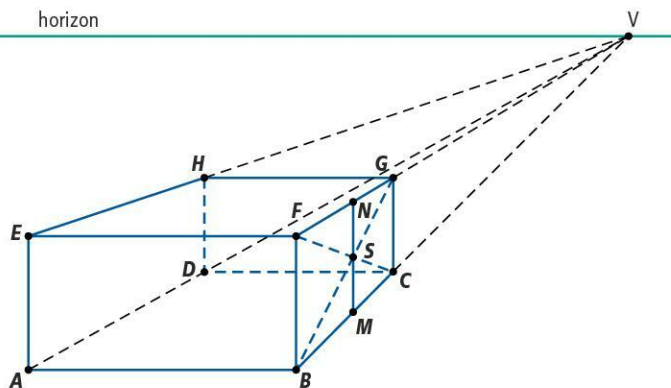
102 a Het object bestaat uit een balk met een vierkante bodem, boven op de balk staat een kegel. De grondcirkel van de kegel raakt de zijden van het vierkante bovenvlak.

b De inhoud van de balk is $8 \times 8 \times 6 = 384 \text{ m}^3$.

De inhoud van de kegel is $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 2 = 10\frac{2}{3} \pi \text{ m}^3$.

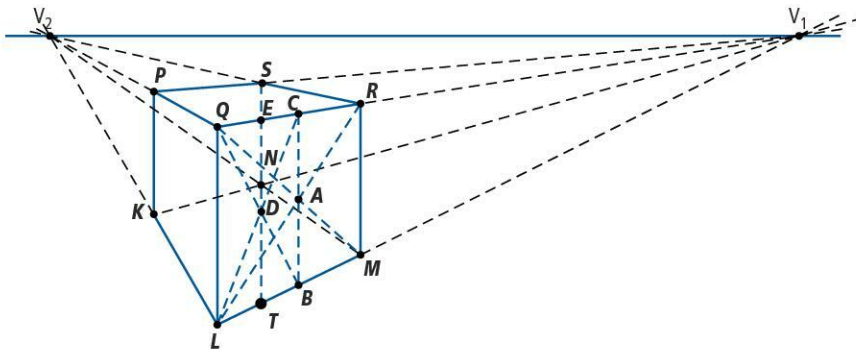
De totale inhoud is $384 + 10\frac{2}{3} \pi \approx 418 \text{ m}^3$.

103 a horizon



b De punten M en N zijn de middens van de ribben BC en GF .

104 a b



105

De lengte van de man op de foto is 29 mm.

De hoogte van de horizon is 23 mm.

$$\begin{array}{r|l} 29 & 1,9 \text{ m} \\ \hline 23 & \text{ooghoogte} \end{array}$$

$$\frac{1,9 \times 23}{29} = 1,506\dots$$

De hoogte van de lens van de camera bevond zich op ongeveer 1,51 m hoogte.



106 a

A	B	C
A	B	C
C		

b Voor de begane grond $V = 14,6 \times 4,6 \times 2,8 = 188,048 \text{ m}^3$.

Voor de eerste verdieping $V = 14,6 \times 4,6 \times 2,8 = 188,048 \text{ m}^3$.

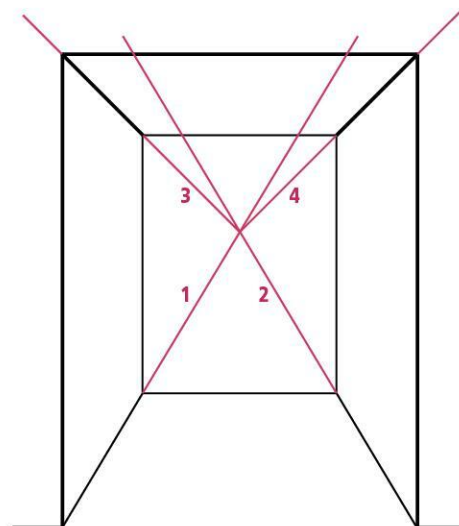
Het volume van de tweede verdieping is $V = 4,6 \times 4,6 \times 2,8 = 59,248 \text{ m}^3$.

Het totale volume is $2 \times 188,048 + 59,248 = 435,344 \text{ m}^3$.

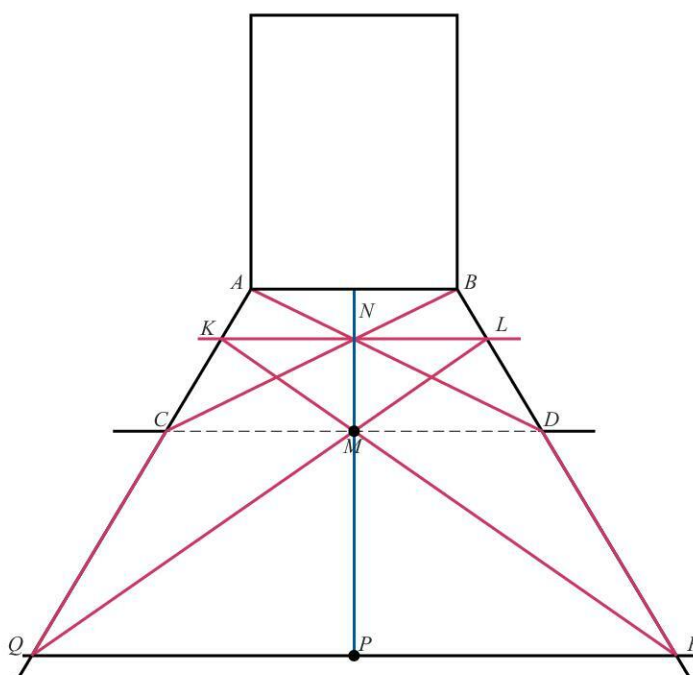
De inhoud van één woning is ongeveer 435 m^3 .

107 a Bij het tekenen van het verdwijnpunt van de linker- en rechterkant van het plafond en het verdwijnpunt van de linker- en rechterkant van de vloer zie je dat er twee verschillende verdwijnpunten zijn. Volgens de regels van het perspectief moeten evenwijdige vlakken één verdwijnpunt hebben.

- b** Teken het verdwijnpunt door het verlengen van de twee vloerlijnen (1 en 2).
Gebruik het verdwijnpunt om de twee lijnen van het plafond te tekenen (3 en 4).
De andere lijnen lopen evenwijdig aan de lijnen van het achtervlak.



- c** Punt N is het midden van rechthoek $ABDC$, dus $MN = 0,5 \cdot AC$.
Punt M is het midden van rechthoek $KLRQ$.
 $MN = MP$, dus $MP = 0,5 \cdot AC$



- 108 a** Eén square foot is $30,48 \times 30,48 = 929,0304 \text{ cm}^2$.
471,55 square feet is $471,55 \times 929,0304 = 438\,084,2851 \text{ cm}^2$.
De oppervlakte van het grondvlak is $43,8 \text{ m}^2$.
- b** De hoogte van de toren op de foto is 35 mm.
De hoogte van de horizon is 8 mm.

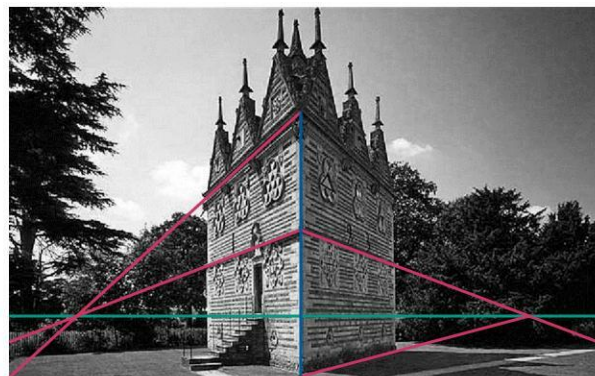
$$\begin{array}{r|l} 35 & 8 \\ \hline 8,22 \text{ m} & \text{ooghoogte} \end{array}$$

$$\frac{8,22 \times 8}{35} = 1,878... \text{ m}$$

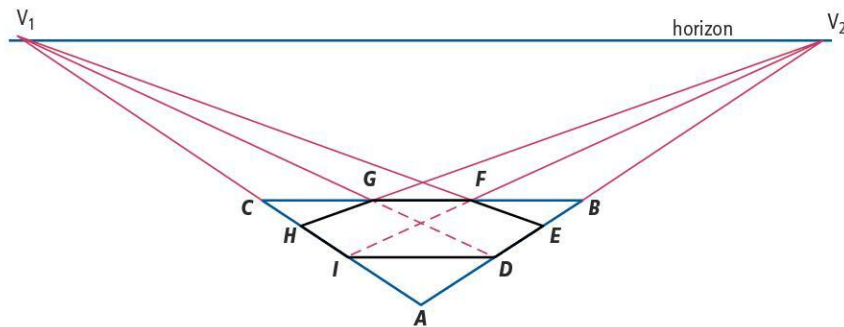
De foto is op een hoogte van 188 cm genomen.

- c** De achterste zijde loopt evenwijdig aan de horizon dus die kun je in drie gelijke delen verdelen (punten F en G).

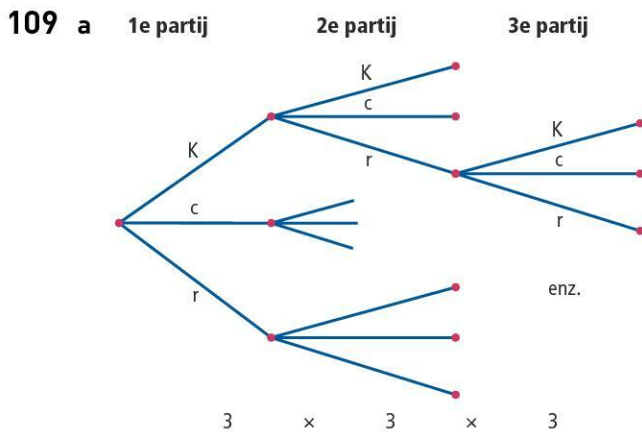
Het tekenen van de twee verdwijnpunten door het verlengen van de zijden AB en AC van de driehoek 1
 FE is evenwijdig aan AC en gaat dus door verdwijnpunt V_1 .



HG is evenwijdig aan AB en gaat dus door verdwijnpunt V_2 .
 DG is evenwijdig aan AC en gaat dus door verdwijnpunt V_1 .
 ID is evenwijdig aan tekenvlak en BC .
 $IDEFGH$ is de gevraagde zeshoek.



Combinatoriek



De wedstrijd kan op $3 \times 3 \times 3 = 27$ manieren verlopen.

- b** De uitslag 2-1 kan op zes manieren tot stand komen: KKc, KcK, cKK, Krr, rKr en rrK.

- 110 a** Je kunt $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ 'woorden' maken.
b Je kunt $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5 = 3125$ 'woorden' maken.

- 111** Mieke kan er 2, 3, of 4 keer over doen om twee knikkers van dezelfde kleur te pakken.

Eerst het aantal trekkingen voor twee rode knikkers:

in 2 keer: RR

in 3 keer: RGR, RWR, GRR, WRR

in 4 keer: RWGR, RGWR, WRGR, GRWR, WGRR, GWRR

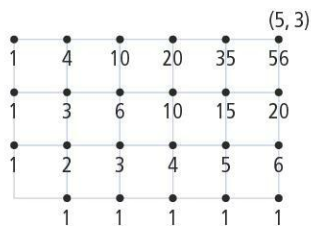
Totaal zijn er $1 + 4 + 6 = 11$ verschillende trekkingen om twee rode knikkers te pakken.

Voor twee witte knikkers zijn er ook 11 verschillende trekkingen evenals voor twee groene knikkers.

In totaal dus $3 \times 11 = 33$ verschillende trekkingen.

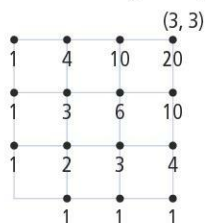
- 112 a** Door af te lezen in het rooster boven aan de bladzijde of in de driehoek van Pascal, kun je zien dat er 20 verschillende routes van A naar B zijn.
b Je kunt aflezen dat er 10 verschillende routes zijn van B naar C .
Van A naar C , via B , zijn er dan $20 \times 10 = 200$ verschillende routes.

113 a



Er zijn 56 verschillende routes naar het punt (5, 3), dus zijn er 56 mogelijke scoreverlopen bij een voetbalwedstrijd die eindigt in 5-3.

b



Er zijn 20 verschillende routes naar het punt (3, 3), dus zijn er 20 verschillende gezinssamenstellingen mogelijk bij gezinnen met drie meisjes en drie jongens.

114 a Ze kan dat op $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10! = 3\,628\,800$ manieren doen.

b Ze kan op $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ manieren een top-3 samenstellen.

c Ze kan op $\binom{10}{4} = 210$ manieren vier cd's selecteren.

115 a De volgorde waarin de tien schapen gekozen worden, doet er niet toe. Er is dus sprake van een combinatie van 10 uit 26.

Dat kan op $\binom{26}{10} = 5\,311\,735$ manieren.

b De vijf witte schapen kan hij op $\binom{14}{5} = 2002$ manieren kiezen.

De vijf zwarte schapen kan hij op $\binom{12}{5} = 792$ manieren kiezen.

De groep van vijf witte en vijf zwarte schapen kan hij dus op $2002 \times 792 = 1\,585\,584$ manieren samenstellen.

116 a Voor de vier rode shirtjes zijn er $\binom{12}{4} = 495$ mogelijkheden, daarna zijn er

voor de vier blauwe shirtjes nog $\binom{8}{4} = 70$ mogelijkheden. Tenslotte zijn er

voor de vier groene shirtjes nog maar vier jongens over, dat kan dus maar op één manier.

In totaal kun je op $495 \times 70 \times 1 = 34\,650$ manieren de shirtjes verdelen.

b Je kunt het estafetteteam op $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11\,880$ manieren samenstellen.

- 117** Er zijn 5 trio's van drie dezelfde cijfers (niet met 1 of 2 omdat er daar te weinig voor zijn).
 Er zijn $\binom{7}{3} = 35$ trio's van drie verschillende cijfers.
 Voor de trio's twee gelijke cijfers zijn er met de cijfers 2 tot en met 7 $6 \times 5 = 30$ mogelijkheden.
 Met een één en twee andere cijfers zijn er 6 mogelijkheden.
 In totaal zijn er $5 + 35 + 30 + 6 = 76$ verschillende trio's mogelijk.
- 118** Er zijn zes verschillende symbolen.
 Elke mogelijke tegel met twee dezelfde symbolen komt vijf keer voor.
 Dat zijn dus $5 \cdot 6 = 30$ tegels.
 Er zijn $\binom{6}{2} = 15$ mogelijke tegels met twee verschillende symbolen.
 Elke mogelijke tegel met twee verschillende symbolen komt zes keer voor.
 Dat zijn dus $6 \cdot 15 = 90$ tegels.
 In totaal worden er bij Genius $30 + 90 = 120$ tegels gebruikt.
- 119 a** Er zijn $10^2 \times 26^3 \times 10 = 17\,576\,000$ mogelijkheden.
 Er zijn dus 17 600 000 mogelijkheden, afgerond op honderdduizendtallen.
- b** Voor de eerste twee cijfers zijn er $10 \times 10 - 1 = 99$ mogelijkheden.
 Voor de eerste letter zijn er 12 mogelijkheden.
 Voor de tweede en derde letter zijn er $26 - 8 = 18$ mogelijkheden.
 Het aantal mogelijkheden voor de drie letters is $12 \times 18^2 - 82$.
 Er zijn totaal $99 \times (12 \times 18^2 - 82) \times 10 = 3\,767\,940$ mogelijkheden.
 Dit is $3767940 : 18000000 \times 100\% \approx 21\%$.
 De verslaggever heeft geen gelijk, het aantal is iets meer dan 20%.
- 120 a** Er zijn $\binom{14}{2}$ mogelijkheden voor Nikos Place.
 Vervolgens $\binom{12}{5}$ mogelijkheden voor Hydrele Beach.
 Er blijven er dan nog 7 over voor Kouros Bay.
 Het totaal aantal mogelijkheden is $\binom{14}{2} \times \binom{12}{5} = 72\,072$.
- b** Het aantal verschillende programma's is $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 5 \times 4 \times 3 = 7200$.

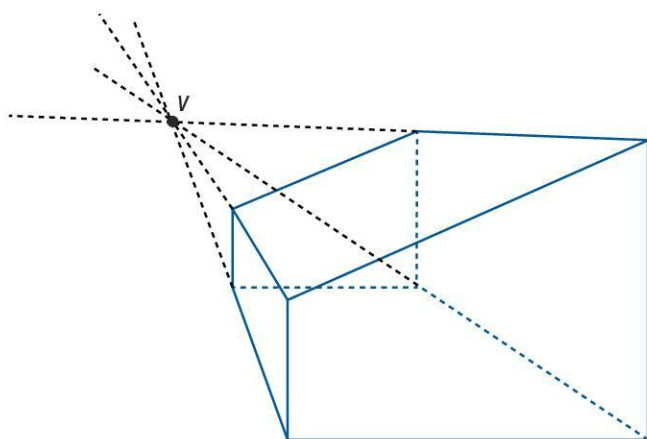
- 3** a Bijvoorbeeld $20 : 5 = 4$.
b Bijvoorbeeld: $6 : 0,5 = 12$.
c De bewering is niet waar.
- 5** a Deze bewering volgt niet uit de tekst. Treinreizigers hebben zelden last van wagenziekte. Er staat niet dat de hersenen niet gedesoriënteerd raken.
b Deze bewering volgt niet uit de tekst. Niet alle mensen hebben last van wagenziekte.
c Deze bewering klopt, zie laatste regel van de tekst.
- 9** a Beweringen:
Het heeft lang niet geregend.
Boer Albert besproeit zijn land met water.
b Als het lang niet heeft geregend dan besproeit boer Albert zijn land met water.
c Uitgangspunt: Het heeft lang niet geregend.
Conclusie: Boer Albert besproeit zijn land met water.
- 17** a $B \Rightarrow \neg V$
 $V \Rightarrow \neg B$
b Als Diana goed kan knikkeren, dan wint ze veel knikkers.
Als Diana niet veel knikkers wint, dan kan ze niet goed knikkeren.
- 18** a $A \Rightarrow K$, is waar.
b $K \Rightarrow A$, is niet waar, ook auto's die voor 1994 zijn gebouwd kunnen een katalysator hebben.
c $\neg A \Rightarrow \neg K$, is niet waar, zie opdracht b.
d $\neg K \Rightarrow \neg A$, is waar.
- 26** a D_2 : 2, 4, 6, 8, 10
 D_4 : 3, 6, 9, 12, 15
 D_6 : 6, 12, 18, 24, 30
b $D_6 \Rightarrow D_2 \wedge D_3$
c $D_2 \vee D_3 \Rightarrow D_6$, is niet waar, bijvoorbeeld: 8, 15 en 21.
 $D_2 \wedge D_3 \Rightarrow D_6$, is waar.
- 28** a $J \wedge E \Rightarrow \neg A$
b 1: Als de fietser een 65-plusser is of de fietser is een jongere en de afstand is korter dan 10 km, dan gebruikt de fietser een elektrische fiets.
2: Als de fietser een jongere is en de afstand is niet korter dan 10 km, dan gebruikt de fietser geen elektrische fiets.
- 32** a $O \wedge \neg O$, is wel een contradictie.
b $O \wedge T$, is geen contradictie, bijvoorbeeld: 3, 5, 7, ...
c $\neg O \wedge P$, is geen contradictie, het getal 2 is een even priemgetal.
d $\neg O \wedge P \wedge T$, is wel een contradictie.

- 33 a** - Dan liegt hij dus niet, maar dat is in tegenspraak met de bewering dat zijn neus gaat groeien als hij liegt.
 - Dan liegt hij maar, dat is ook in tegenspraak met de bewering dat zijn neus gaat groeien als hij liegt.
- b** De zin 'Mijn neus gaat nu groeien' betekent dat hij liegt, maar als hij dit zegt spreekt hij ook de waarheid.
- 40 a** 1: $A \Rightarrow B$, is onjuist.
 2: $\neg B \Rightarrow \neg A$, is juist.
 3: $D \Rightarrow A$, is juist.
 4: $\neg A \Rightarrow \neg D$, is juist.
- b** p ligt in het gebied $C \wedge \neg B \wedge \neg D$.
 q ligt in het gebied $B \wedge \neg C$.

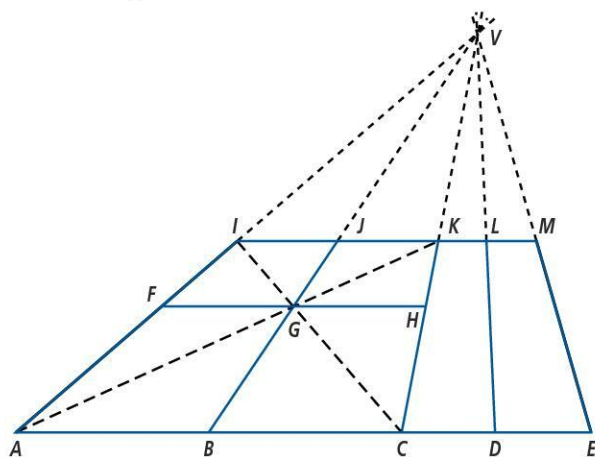
Hoofdstuk 18 Vorm en ruimte

- 5** Het object bestaat uit twee vierkanten die in elkaar zijn geschoven waardoor er van bovenaf een kruis te zien is.

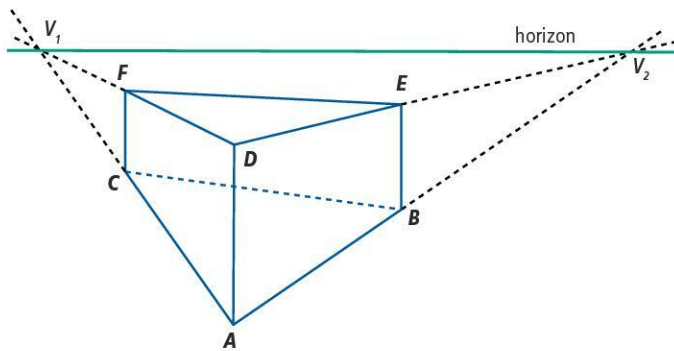
9



- 11** Teken de punten B en D zodat $AB = BC = CE$.
 Teken het punt D zodat $CD = DE$.



16



20



Op de foto is $AC = 46$ mm en $BC = 28$ mm.

	kast	lenshoogte
hoogte in werkelijkheid in cm	300	lenshoogte
hoogte op de foto in mm	46	28

$$46 \times \text{lenshoogte} = 300 \times 28$$

$$\text{lenshoogte} = 300 \times 28 : 46$$

$$\text{lenshoogte} = 182,608\dots$$

De lens van de camera bevond zich op een hoogte van ongeveer 183 cm.

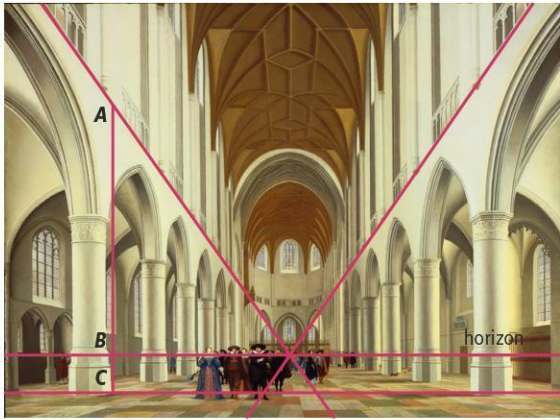
26 a



Het hoofd van de voorste personen bevindt zich op de horizon.

Hieruit volgt dat het oog van de schilder zich even hoog als dat van de voorste personen bevond.

b



Op de tekening is $AC = 38$ mm en $BC = 5$ mm.

	<i>hoogste punt tussen pilaren</i>	<i>personen</i>
<i>hoogte in werkelijkheid in m</i>	<i>hoogte hoogste punt</i>	1,75
<i>hoogte op de foto in mm</i>	38	5

$$5 \times \text{hoogte hoogste punt} = 38 \times 1,75$$

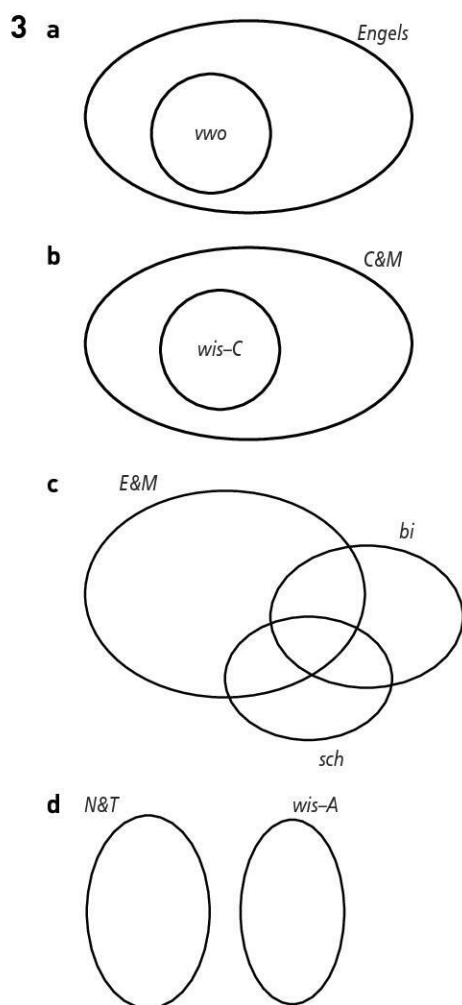
$$\text{hoogte hoogste punt} = 38 \times 1,75 : 5$$

$$\text{hoogte hoogste punt} = 13,3$$

Het hoogste punt van het booggewelf tussen twee pilaren is 13,3 meter hoog.

17 Logisch redeneren | Oefenproefwerk

- 1 a** Uitgangspunt: Op de zwarte kant staat een 5.
Conclusie: Op de witte kant staat een 5.
- b** Op de zwarte kant van schijf A staat een 2.
- c** Op de zwarte kant van schijf B kan een 1, 2, 3 of 4 staan.
Op de zwarte kant van schijf C kan een 1, 2, 3, 4 of 5 staan.
Op de zwarte kant van schijf D, kan een 1, 2 of 3 staan.
- 2 a** $n = 1$ geeft $A = 2^1 - 1 = 1$, dit is een priemgetal.
 $n = 2$ geeft $A = 2^2 - 1 = 3$, dit is een priemgetal.
 $n = 3$ geeft $A = 2^3 - 1 = 7$, dit is een priemgetal.
 $n = 5$ geeft $A = 2^5 - 1 = 31$, dit is een priemgetal.
- b** $n = 4$ geeft $A = 2^4 - 1 = 15$, dit is geen priemgetal want het is ook deelbaar door 3 en 5. De bewering is dus niet waar.

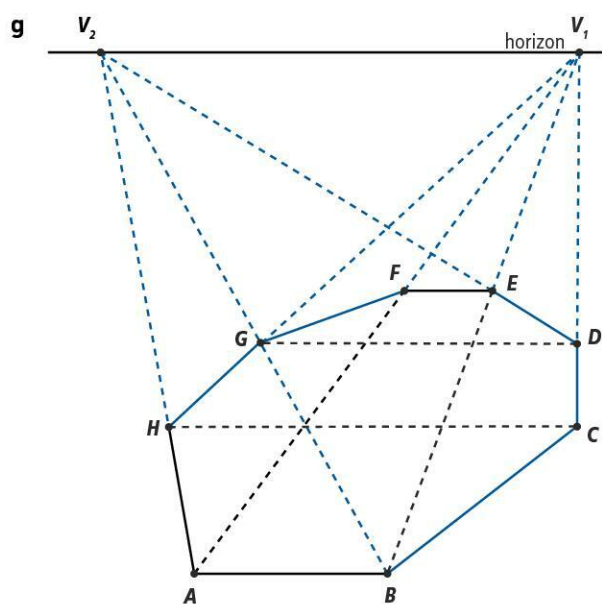
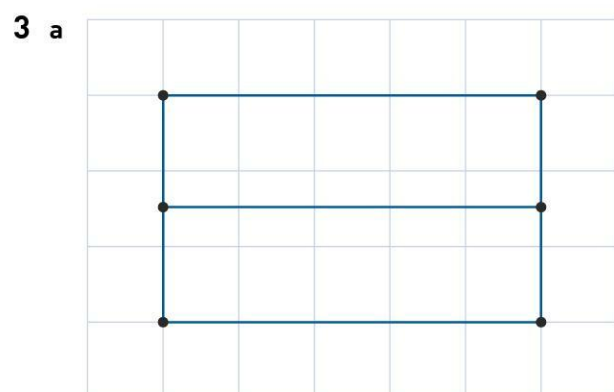
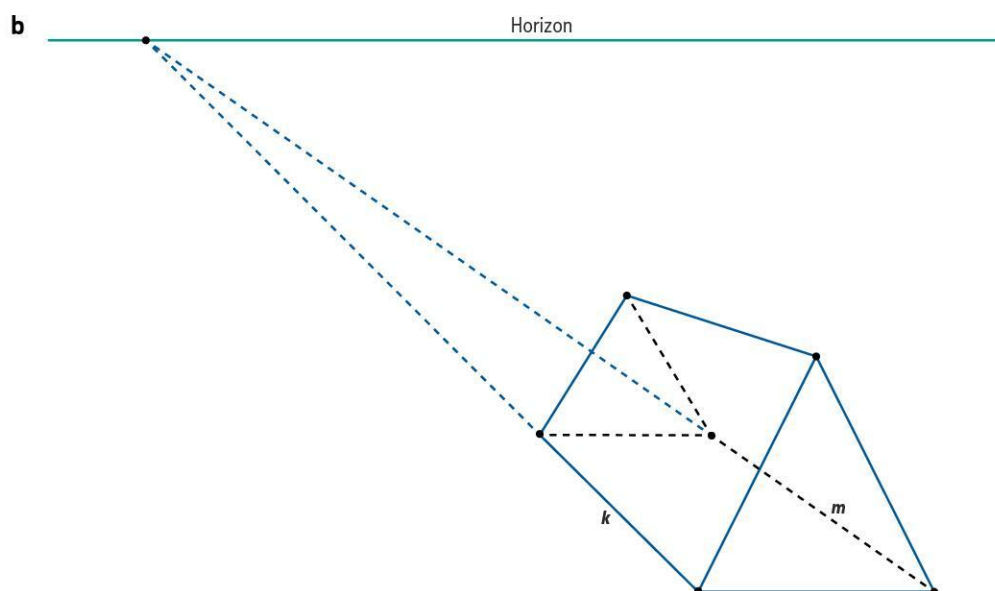


- 4 a** De redenering is niet volledig, in de tekst staat niet dat het zika virus alleen in Zuid-Amerika voorkomt.
- b** Bewering 1 is niet waar, want uit de tekst blijkt dat niet alle tijgermuggen drager zijn van het virus.
Bewering 2 is wel waar, zie de 3e zin van de gegeven tekst.
- c** Als iemand gestoken is door een besmette tijgermug, dan heeft deze persoon 20% kans om ziek te worden.

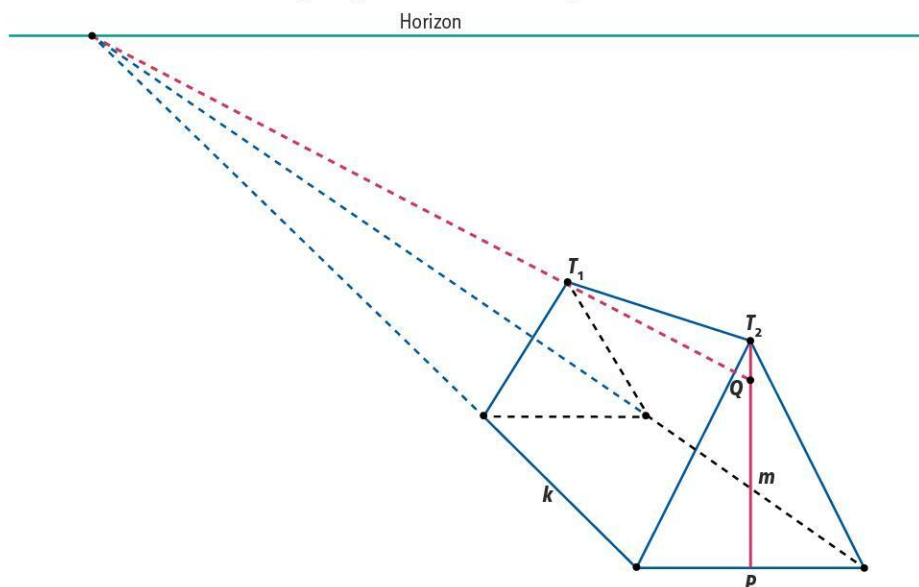
- 5 a** $(L \vee M) \wedge N$ is een contradictie. Er is geen overlapping tussen N en L of tussen N en M .
- b** Dit is het gebied zonder L , N en M , dus punt P .
- c** Het gebied M uitgezonderd de punten die ook in L liggen, dus $M \wedge \neg L$.
- 6 a** Bewering 1 is niet waar, want er wordt niet uitgesloten dat een jongen in Leiden gaat studeren.
Bewering 2 is niet waar, want over de studiekeuze van de meisjes wordt geen uitspraak gedaan.
Bewering 3 is wel waar, want alle leerlingen uit de klas van Annet gaan studeren.
- b** Als een leerling niet gaat studeren, dan zit deze leerling niet in de klas van Annet.
- c** 1 $L \Rightarrow M$
2 $\neg E \Rightarrow M$
- d** De bewering $\neg E \Rightarrow L$ betekent dat de leerlingen die geen Engels gaan studeren, naar Leiden gaan, dit houdt in dat de meisjes geen Engels gaan studeren.
Uitspraak E is dus de aanvullende uitspraak die nodig is.
- 7** Je mag of zou verwachten dat de mensen die zelf op het land werken ook voedsel voor zichzelf zullen hebben. Dit blijkt niet zo te zijn.

18 Vorm en ruimte | Oefenproefwerk

- 1** Dit object is een bankje.
- 2 a** Met de stelling van Pythagoras:
21,1 geeft als lengte van de schuine zijde $\sqrt{21,1^2 + 21,1^2} \approx 29,84$,
21,2 geeft als lengte van de schuine zijde $\sqrt{21,2^2 + 21,2^2} \approx 29,98$,
21,3 geeft als lengte van de schuine zijde $\sqrt{21,3^2 + 21,3^2} \approx 30,12$.
De lengte 21,2 decimeter geeft dus de beste benadering.
Het antwoord is 21,2 dm ofwel 212 cm.
- b** De regelmatige achthoek kun je verdelen in een vierkant van 3 bij 3 meter, vier rechthoekige gelijkbenige driehoeken van 2,1 bij 2,1 meter, en vier rechthoeken van 2,1 bij 3 meter.
De oppervlakte hiervan is $3 \times 3 + 4 \times \frac{1}{2} \times 2,1 \times 2,1 + 4 \times 2,1 \times 3 \approx 43 \text{ m}^2$.
- c** De lijnstukken HC , GD en FE zijn ook evenwijdig aan het tafereel.
- d** De lijnen AF en BE snijden elkaar in een punt op de horizon omdat ze in werkelijkheid evenwijdig zijn, maar niet evenwijdig aan het tafereel zijn.
De horizon is de lijn door V_1 die evenwijdig is met AB ; zie hierna bij opdracht g.
- e** De zijden HG en CD snijden na verlenging de horizon ook in V_1 .
- f** Zijde DE gaat na verlenging ook door punt V_2 .



- c Als voor- en achterkant even hoog waren, dan zou de lijn door de toppen T_1 en T_2 evenwijdig zijn met k en m en dus door hetzelfde verdwijnpunt gaan. In onderstaande tekening zie je dat dit niet het geval is.



- d In de tekening is $PQ = 30$ mm en $PT_2 = 35$ mm.

	PQ	PT_2
hoogte in werkelijkheid in m	hoogte achterkant	8
hoogte op de tekening in mm	30	35

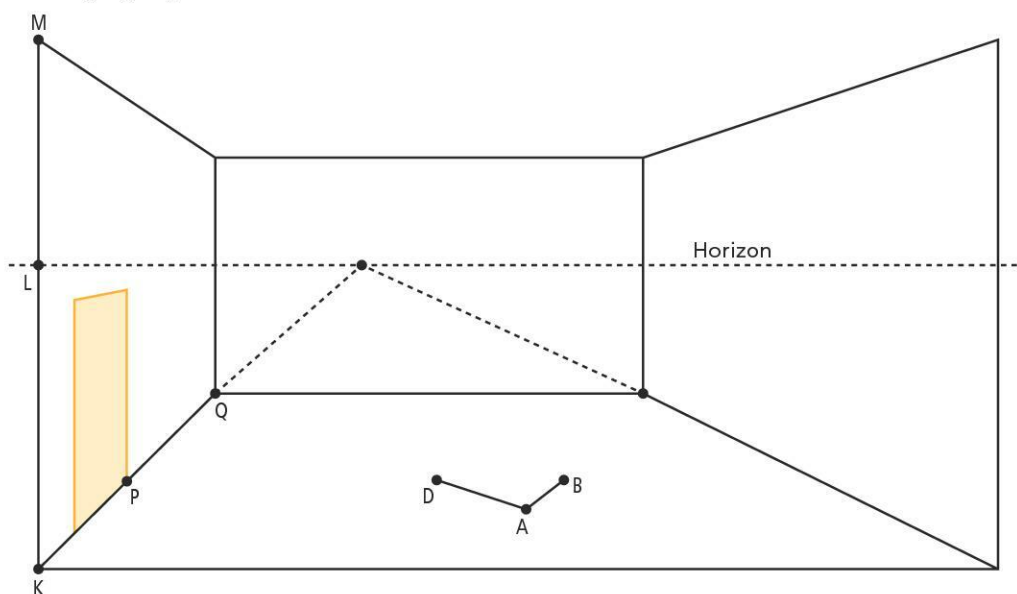
$$35 \times \text{hoogte achterkant} = 30 \times 8$$

$$\text{hoogte achterkant} = 30 \times 8 : 35$$

$$\text{hoogte achterkant} = 6,857...$$

De hoogte van de achterkant is ongeveer 69 dm.

- 4 a Teken de horizon door middel van verlenging van in werkelijkheid evenwijdige lijnen.



In de tekening is de hoogte van de horizon 18 mm en de hoogte van de achterkant van het podium 31 mm.

De hoogte van de horizon is de ooghoogte.

	<i>ooghoogte</i>	<i>achterwand podium</i>
<i>hoogte in werkelijkheid in m</i>	<i>ooghoogte</i>	5
<i>hoogte op de tekening in mm</i>	18	31

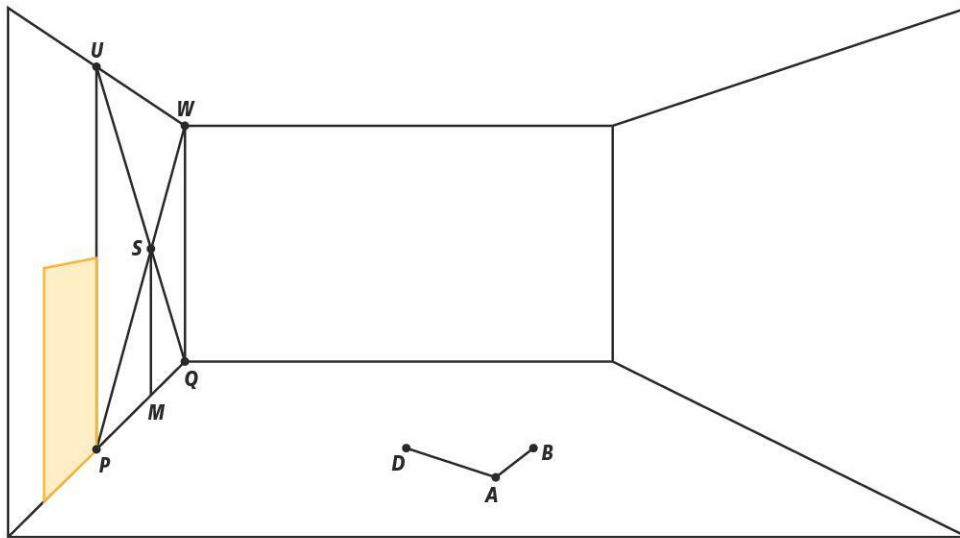
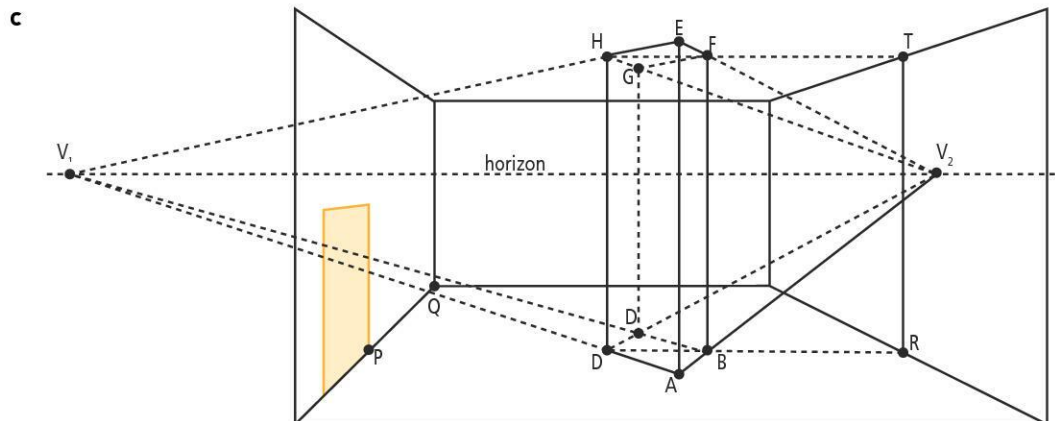
$$31 \times \text{ooghoogte} = 5 \times 18$$

$$\text{ooghoogte} = 5 \times 18 : 31$$

$$\text{ooghoogte} = 2,903... \text{ meter}$$

Het oog bevond zich ten opzichte van de toneelvloer op een hoogte van ongeveer 29 dm.

- b** Verleng de rand van de deur. Deze snijdt de bovenzijde in punt U .
 $PQWU$ is een rechthoek waarvan S het snijpunt is van de diagonalen.
 Punt M , het midden van PQ , is het snijpunt van de verticale lijn door S en PQ . De speler moet bij punt M gaan staan.



19 Afsluiting formules en verbanden | Oefenproefwerk

- 1 a Gemiddeld neemt in deze periode van 12 jaar de bevolking per jaar toe met $\frac{0,9}{12} = 0,075$ miljard.

In 1995 is de omvang van de wereldbevolking gelijk aan

$$5 + 8 \cdot 0,075 = 5,6 \text{ miljard.}$$

- b Het geboorteoverschot per dag is $465 - 405 = 60$. Het immigratieoverschot per dag is $540 - 405 = 135$.

Gemiddelde totale toename per dag is dus $60 + 135 = 195$ inwoners.

Over een heel jaar is dit $365 \times 195 = 71\,175$.

Om op 18 miljoen inwoners te komen is dus $\frac{1\,000\,000}{71\,175} \approx 14,05$ jaar nodig.

Hieruit volgt dat met lineair extrapoleren al in 2030 de grens van 18 miljoen inwoners wordt overschreden.

Er is dus geen gebruik gemaakt van lineair extrapoleren.

- 2 a Als k steeds groter wordt, neemt $0,87^k$ af en nadert naar 0, want $0,87 < 1$. Hieruit volgt dat $P = 11 - 0,87^k$ toeneemt, want er wordt een steeds kleiner getal van 11 afgetrokken. P nadert naar $11 - 0 = 11$. De grenswaarde is 11.

- b Als k steeds groter wordt, neemt ${}^7\log(k)$ toe, want $7 > 1$. Dan neemt

$82 + {}^7\log(k)$ ook toe en $\frac{17}{82 + {}^7\log(k)}$ neemt dan af, want de constante 17

wordt door een steeds groter getal gedeeld en $\frac{17}{82 + {}^7\log(k)}$ nadert naar 0.

De grenswaarde is 0.

- c Als k steeds groter wordt, neemt ${}^{0,3}\log(k)$ af, want $0,3 < 1$. Dan neemt $4 + \frac{1}{2} \cdot {}^{0,3}\log(k)$ ook af. Er is geen grenswaarde.

- d Als k steeds groter wordt, neemt $0,88^k$ af en nadert naar 0, want $0,88 < 1$. $7 - 4 \cdot 0,88^k$ neemt dan toe, want er wordt een steeds kleiner getal van 7 afgetrokken. $7 - 4 \cdot 0,88^k$ nadert naar $7 - 4 \times 0 = 7$.

$\frac{210}{7 - 4 \cdot 0,88^k}$ neemt af want de constante 210 wordt door een steeds groter getal gedeeld en nadert naar $\frac{210}{7} = 30$. De grenswaarde is 30.

3 a $5t - 3P = 10$
 $-3P = -5t + 10$
 $P = \frac{-5t + 10}{-3}$
 $P = \frac{5}{3} \cdot t - 3\frac{1}{3}$

b $1,6P = \frac{15 - 2,4t}{3}$
 $P = \frac{1}{1,6} \cdot \frac{15 - 2,4t}{3}$
 $P = \frac{15 - 2,4t}{4,8}$
 $P = -0,5 \cdot t + 3,125$

c $-2(3,3 - 5t) + 0,4(20P + 3) = 2,6$
 $-6,6 + 10t + 8P + 1,2 = 2,6$
 $8P = -10t + 6,6 - 1,2 + 2,6$
 $8P = -10t + 8$
 $P = -1,25 \cdot t + 1$

d $P = (t + 5)^2 - t^2$
 $P = t^2 + 10t + 25 - t^2$
 $P = 10 \cdot t + 25$

- 4 a** De periode is één jaar, ofwel 366 dagen.
De hoogste waarde van D is ongeveer 14,7 en de laagste is ongeveer 9,3.
De evenwichtswaarde is $\frac{14,7 + 9,3}{2} = 12$.
De amplitude is $14,7 - 12 = 2,7$.
- b** 15 februari is de 46^e dag, dus bij deze datum hoort $d = 45$. Aflezen geeft ongeveer 10,5 uur.
- c** Teken in de figuur de horizontale lijn die hoort bij daglengte 13,75.
Deze snijdt de grafiek twee keer.
Het linker snijpunt hoort bij dag 122 (1 mei).
Het rechter snijpunt hoort ongeveer bij $d = 220$. Dit komt in een schrikkeljaar (366 dagen) overeen met 7 augustus.
- 5 a** Bij het begin van het experiment geldt $t = 0$. $t = 0$ invullen geeft:
 $8 \cdot \log(S) = 20$
 $\log(S) = 2,5$
 $S = 10^{2,5} \approx 316$
Bij het begin van het experiment waren er ongeveer 316 bacteriën per cm^3 .
- b** De waarde $t = 10$ invullen geeft $8 \cdot \log(S) = 3 \cdot 10 + 20$.
 $8 \cdot \log(S) = 50$
 $\log(S) = 6,25$
 $S = 10^{6,25} \approx 1\,778\,279$.
Dit is bijna twee miljoen bacteriën per cm^3 , dus veel meer dan één miljoen.
- c** De op te lossen vergelijking is $8 \cdot \log(100\,000) = 3 \cdot t + 20$.
 $8 \cdot 5 = 3 \cdot t + 20$
 $3t = 20$
 $t = 6\frac{2}{3}$
Na 6 minuten en 40 seconden waren er 100 000 bacteriën per cm^3 .
- d** $8 \cdot \log(S) = 3t + 20$
 $\log(S) = \frac{3t + 20}{8}$
 $S = 10^{\frac{3t + 20}{8}}$
 $S = 10^{\frac{3}{8}t + 2\frac{1}{2}}$
 $S = 10^{\frac{3}{8}t} \cdot 10^{2\frac{1}{2}}$
 $S = 10^{2\frac{1}{2}} \cdot (10^{\frac{3}{8}})^t$
 $S \approx 316 \cdot 2,37^t$
- 6 a** De formule is van de vorm $q = c \cdot p$.
 $p = 2$ en $q = 5$ invullen geeft $5 = c \cdot 2,5$ dus $c = 2,5$.
De formule is $q = 2,5 \cdot p$.
- b** De formule is van de vorm $K \cdot L = c$.
 $K = 2$ en $L = 5$ invullen geeft $2 \cdot 5 = c$ dus $c = 10$.
Een formule is $K \cdot L = 10$, ofwel $K = \frac{10}{L}$, ofwel $L = \frac{10}{K}$.

$$\begin{aligned}
7 \text{ a } H &= 2 + {}^3\log(4 + M) \\
{}^3\log(4 + M) &= H - 2 \\
4 + M &= 3^{H-2} \\
M &= 3^{H-2} - 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c \quad H &= 6 \cdot M^{0,1} \\
6 \cdot M^{0,1} &= H \\
M^{0,1} &= \frac{1}{6} \cdot H \\
M &= \left(\frac{1}{6} \cdot H\right)^{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b \quad H &= 0,6 \cdot 3^{2M} \\
0,6 \cdot 3^{2M} &= H \\
3^{2M} &= \frac{H}{0,6} \\
2M &= {}^3\log\left(\frac{H}{0,6}\right) \\
M &= \frac{1}{2} \cdot {}^3\log\left(\frac{H}{0,6}\right) \\
M &= \frac{1}{2} \cdot {}^3\log\left(1\frac{2}{3}H\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d \quad 8 &= \frac{5M + 2}{H - 1} \\
8 \cdot (H - 1) &= 5M + 2 \\
8H - 8 &= 5M + 2 \\
-5M &= -8H + 10 \\
M &= 1,6H - 2
\end{aligned}$$

- 8 a Als t steeds groter wordt, neemt $0,42^t$ af, want $0,42 < 1$. Dan neemt $1 + 3,445 \cdot 0,42^t$ ook af en neemt $\frac{69,4}{1 + 3,445 \cdot 0,42^t}$ toe want de constante 69,4 wordt door een steeds kleiner getal gedeeld.

- b De op te lossen vergelijking is $P = 1$.

$$\begin{aligned}
\frac{69,4}{1 + 3,445 \cdot 0,42^t} &= 1 \\
1 + 3,445 \cdot 0,42^t &= 69,4 \\
3,445 \cdot 0,42^t &= 68,4 \\
0,42^t &= \frac{68,4}{3,445} \\
t &= {}^{0,42}\log\left(\frac{68,4}{3,445}\right) \approx -3,44
\end{aligned}$$

In 1994 had 1% van de bevolking thuis de beschikking over een PC met internetaansluiting.

- c Als t steeds groter wordt, nadert $1 + 3,445 \cdot 0,42^t$ naar $1 + 3,445 \times 0 = 1$. De formule nadert dan naar $\frac{69,4}{1} = 69,4$. De grenswaarde van het percentage van de bevolking dat thuis een PC met internetaansluiting heeft, is 69,4.

- d $3,445 \cdot 0,42^t$ nadert altijd naar 0.

In de formule $P = \frac{69,4}{c + 3,445 \cdot 0,42^t}$ moet gelden dat $\frac{69,4}{c} = 97$.

Dan is $c = \frac{69,4}{97} \approx 0,715$.

Op de plek van de 1 moet het getal 0,715 komen te staan.



Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.
Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.
Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.